УДК 517.97

ЭЛЕМЕНТЫ НЕЧЕТКОГО ВАРИАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

Ю.Е. Асмолова, И.А. Мочалов

Кафедра систем автоматического управления
МГТУ им. Н.Э. Баумана
ул. 2-я Бауманская, 5, Москва, Россия, 107005

Рассматриваются нечеткие числа, функции, функционалы. Для нечетких функционалов формулируется нечеткая вариационная задача с неподвижными границами. Приводится пример.

Ключевые слова: нечеткие вычисления, вариационное исчисление.

Существующие методы дифференциального исчисления, частотные методы, теории вероятностей, математической статистики и др. широко используются для создания математических моделей при описании различного рода неопределенностей. В настоящее время для этих целей также применяются методы, созданные в теории нечетких множеств. Делаются попытки создания комбинированных моделей на основе совместного применения традиционных и нечетких подходов. Например, в стадии становления находится теория нечетких случайных процессов. Комбинированные модели, с одной стороны, представляются наиболее адекватными в описании неопределенностей, а с другой — характеризуются простотой применения в различного рода расчетах.

Можно утверждать, что усилиями научного сообщества созданы: элементы теории нечеткой арифметики и математического анализа [1]; основы теории нечетких дифференциальных и интегральных уравнений [2—7]; имеются научные заделы в теории нечетких вероятностей и нечетких тестов математической статистики [8; 9]; нечетких случайных марковских процессов [10; 11] и т.д.

Ниже на основании результатов [1; 12; 13] представлены элементы нечеткого вариационного исчисления.

Даются определения: нечеткого числа; нечеткой функции; нечеткого функционала. Демонстрируется пример решения уравнения Эйлера при нечетких граничных условиях.

1. **Нечеткое число** $x_{\text{н}} \in R^1$ определяется как отображение $r: R^1 \to [0,1] \in R^1$, где $r(x)$ — функция принадлежностей. Из-за отсутствия взаимной однозначности выделяются «левая» $\underline{r}(x)$ и «правая» $\overline{r}(x)$ ветви относительно $r(x)=1$, каждая из которых определяет уже взаимно однозначное отображение. В теории нечетких множеств используется эквивалентная уровневая форма представления нечеткого числа, задаваемая в виде обратного отображения $r^{-1}: R^1 \ni [0,1] \to R^1$. Для отображения $x(r)$, $r \in [0,1]$ выделяются «нижняя» $\underline{x}(r)$ и «верхняя» $\overline{x}(r)$ ветви.

Таким образом, для нечеткого числа $x_н \in R^1$ используется цепочка эквивалентных представлений:

$$x_н \in R^1 \Leftrightarrow r(x),\ x \in R^1,\ r \in [0,1] \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\underline{r}(x);\ \overline{r}(x) / x \in R^1,\ \underline{r},\ \overline{r} \in [0,1]) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow (\underline{x}(r);\ \overline{x}(r) / 0 \le r \le 1).$$

Относительно $r(x)$ должны выполняться следующие свойства:

i функция $r(x)$ полунепрерывна сверху;

ii функция $\underline{r}(x)$ монотонно возрастает;

iii функция $\overline{r}(x)$ монотонно убывает.

Кроме этого для $x(r)$ должно выполняться условие $\underline{x}(r) \le \overline{x}(r)$. Если $x(r)$ имеет треугольную форму, то перечисленные свойства выполняются для остроугольного треугольника, так как не каждый тупоугольный треугольник может изображать нечеткое число.

Обычно применяется обозначение: $x_н \Leftrightarrow (\underline{x}(r);\ \overline{x}(r) / 0 \le r \le 1)$.

Арифметические операции * («+», «–», «×», «÷» для нечетких чисел $x_н$ и $y_н$ определяется соотношением:

$$x_н * y_н = z_н \Leftrightarrow \max_{x_н * y_н = z_н} \min\left(r(x), r(y)\right).$$

Операции сравнения «≥», «≤» следуют из определения [1]: имеем нечеткие числа $x_н$ и $y_н$ такие, что $x_н = (\underline{x}(r);\ \overline{x}(r) / 0 \le r \le 1)$, $y_н = (\underline{y}(r);\ \overline{y}(r) / 0 \le r \le 1)$,

тогда $x_н \substack{\ge \\ \le} y_н$, если:

$$T\left(x_н\right) = \int_0^1 r[\underline{x}(r) + \overline{x}(r)]dr \substack{\ge \\ \le} \int_0^1 r[\underline{y}(r) + \overline{y}(r)]dr = T\left(y_н\right). \quad (1)$$

Совокупность нечетких чисел образует банахово пространство [1].

2. **Нечеткая функция** $\varphi_н(x)$ определяется как отображение $\varphi_н : R^1 \to F = \{r(x)\}$, где F — совокупность функций принадлежностей $r(x)$. Это отображение параметризуется относительно $r \in [0,1]$ и может быть представлено в виде [1]:

$$\varphi_н(x) = \left(\underline{\varphi}(x,r);\ \overline{\varphi}(x,r) / 0 \le r \le 1\right).$$

По аналогии с (1) для нечеткой функции $\varphi_н(x)$ вводится критерий:

$$T(\varphi_н(x)) = \int_0^1 r[\underline{\varphi}(x,r) + \overline{\varphi}(x,r)]dr.$$

Имеют место следующие утверждения:

— нечеткая функция $\varphi_{н}(x)$ монотонно возрастает (убывает), если для любых x_1 и x_2 выполняется $x_1 \le x_2 \Rightarrow T\left(\varphi_{н}(x_1)\right) \le T\left(\varphi_{н}(x_2)\right)\left(x_2 \le x_1 \Rightarrow T\left(\varphi_{н}(x_2)\right) \le \le T\left(\varphi_{н}(x_1)\right)\right)$;

— нечеткая функция $\varphi_{н}(x)$ непрерывна для $x \in [c, d] \subset R^1$, если $T(\varphi_{н}(x))$ непрерывна;

— нечеткая функция $\varphi_{н}(x)$ дифференцируема, если $T(\varphi_{н}(x))$ дифференцируема; производная от нечеткой функции $\varphi_{н}(x)$ равна $\dot{\varphi}_{н}(x) = \left(\frac{\partial}{\partial x}\underline{\varphi}(x, r); \frac{\partial}{\partial x}\overline{\varphi}(x, r) / 0 \le r \le 1\right)$;

— нечеткая функция $\varphi_{н}(x)$ интегрируема по Риману, если $T(\varphi_{н}(x))$ интегрируема; интеграл от нечеткой функции $\varphi_{н}(x)$ равен

$$\int_c^d \varphi_{н}(x)dx = \left(\int_c^d \underline{\varphi}(x, r)dx;\ \int_c^d \overline{\varphi}(x, r)dx / 0 \le r \le 1\right).$$

Приведенные утверждения показывают, что нетрудно сконструировать нечеткие аналоги основных структур классического математического анализа: максимум (минимум) нечеткой функции, нечеткие точки перегиба, нечеткие дифференциалы, касательные и т.д.

3. **Нечеткий функционал** $I_{н}$ определяется как отображение $I_{н} : \varphi_{н} \to r = [0,1] \in R^1$, где $\varphi_{н}$ — нечеткая функция (см. п. 2), т.е. нечеткой функции $\varphi_{н}(x)$ соответствует нечеткое число (см. п. 1). Совокупность $\{\varphi_{н}(x)\}$, на которой определен нечеткий функционал $I_{н}$, составляет *нечеткую область определения*.

Нечеткость $I_{н}$ обусловлена наличием нечетких граничных условий, которые характеризуют неточность в их задании. Это означает, что нечеткое уравнение Эйлера получается традиционным способом, а константы интегрирования соответствующего дифференциального уравнения находятся из нечеткой линейной системы [12].

Пример

Пусть $I_{н} = \int_{0_{н}}^{1_{н}} \left(\dot{\varphi}_{н}(x)\right)^{-1} dx$, где граничные условия $\varphi_{н}(x=0) = 0_{н}$, $\varphi_{н}(x=1) = 1_{н}$ являются нечеткими числами $0_{н}$, $1_{н}$ с треугольными функциями принадлежностей $r(0_{н})$, $r(1_{н})$:

$$r(0_{н}) = \max\left(1 - \frac{1}{\alpha}|x|; 0\right)$$

$$\Leftrightarrow 0_{\text{н}} = \left(\underline{0}(r) = \alpha r - \alpha;\ \overline{0}(r) = -\alpha r + \alpha / 0 \le r \le 1\right),$$

$$r\left(1_{\text{н}}\right) = \max\left(1 - \frac{1}{\beta}|x-1|;0\right)$$

$$\Leftrightarrow 1_{\text{н}} = \left(\underline{1}(r) = \beta r + (1-\beta);\ \overline{1}(r) = -\beta r + (1+\beta) / 0 \le r \le 1\right).$$

Необходимо найти $\varphi_{\text{н}}(x) : \underset{\varphi_{\text{н}}(x)}{extr}\, I_{\text{н}}$. С учетом того, что заданный функционал не зависит от $\varphi_{\text{н}}$, имеем цепочку соотношений:

$$F = \left(\dot{\varphi}_{\text{н}}\right)^{-1},$$

$$\left[F_{\varphi_{\text{н}}} - \frac{d}{dx}\left(F_{\dot{\varphi}_{\text{н}}}\right)\right]\Big|_{F_{\varphi_{\text{н}}}=0} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(F_{\dot{\varphi}_{\text{н}}}\right) = 0 \Rightarrow F_{\dot{\varphi}_{\text{н}}} = C_{\text{н}} \Rightarrow$$

$$F_{\dot{\varphi}_{\text{н}}} = \frac{d}{d\dot{\varphi}_{\text{н}}}\left(\dot{\varphi}_{\text{н}}(x)\right)^{-1} = -\frac{1}{\left(\dot{\varphi}_{\text{н}}(x)\right)^{2}} = C_{\text{н}} \Rightarrow \dot{\varphi}_{\text{н}}(x) = C_{\text{н}_1} \Rightarrow \varphi_{\text{н}}(x) = C_{\text{н}_1}x + C_{\text{н}_2}.$$

Найдем $C_{\text{н}_1}$ и $C_{\text{н}_2}$ из нечетких граничных условий:

$$\begin{cases} \varphi_{\text{н}}(x=0) = 0 \cdot C_{\text{н}_1} + 1 \cdot C_{\text{н}_2} = 0_{\text{н}} \\ \varphi_{\text{н}}(x=1) = 1 \cdot C_{\text{н}_1} + 1 \cdot C_{\text{н}_2} = 1_{\text{н}} \end{cases} \Rightarrow A \cdot X = Y,$$

где $X = (C_{\text{н}_1}, C_{\text{н}_2})^T$; $Y = (0_{\text{н}}, 1_{\text{н}})^T$; $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $\det A = -1 \ne 0.$

Нечеткая линейная система $A \cdot X = Y$ решается в соответствии с методикой, которая изложена в [12].

Расширенная система будет иметь вид: $S \cdot X = Y$, где $X = (\underline{C}_{\text{н}_1}, \underline{C}_{\text{н}_2}, -\overline{C}_{\text{н}_1}, -\overline{C}_{\text{н}_2})^T$; $Y = (\underline{0}(r), \underline{1}(r), -\overline{0}(r), -\overline{1}(r))^T$; $S = \begin{pmatrix} B & | & C \\ - & + & - \\ C & | & B \end{pmatrix}$ — блочная матрица, $B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; $C = B - A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Очевидно, что $\det(B+C) = -1 \ne 0$, поэтому одновременно имеем: $\det A = -1 \ne 0$, $\det(B+C) = -1 \ne 0 \Leftrightarrow \det S \ne 0$.

Таким образом, матрица S невырожденная, решение расширенной системы существует и единственно:

$$X = S^{-1} \cdot Y,$$

где $S^{-1}=\begin{pmatrix} D & | & E \\ - & + & - \\ E & | & D \end{pmatrix}$; $D=0,5\left[\left(B+C\right)^{-1}+A^{-1}\right]=\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $E=0,5\left[\left(B+C\right)^{-1}-A^{-1}\right]=$ $=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

В результате получим:

$$C_{\text{н}_1}=\left(\underline{C}_{\text{н}_1}(r),\overline{C}_{\text{н}_1}(r)\big/0\le r\le 1\right)=\left(\underline{1}(r)-\underline{0}(r);\overline{1}(r)-\overline{0}(r)\big/0\le r\le 1\right);$$

$$C_{\text{н}_2}=\left(\underline{C}_{\text{н}_2}(r),\overline{C}_{\text{н}_2}(r)\big/0\le r\le 1\right)=\left(\underline{0}(r);\overline{0}(r)\big/0\le r\le 1\right).$$

Таким образом, нечеткая экстремаль $\varphi_{\text{н}}\left(x\right)=\left(1_{\text{н}}-0_{\text{н}}\right)x+0_{\text{н}}$ в уровневой форме будет иметь вид:

$$\varphi_{\text{н}}\left(x,r\right)=\left(\left(\underline{1}(r)-\underline{0}(r)\right)x+\underline{0}(r);\left(\overline{1}(r)-\overline{0}(r)\right)x+\overline{0}(r)\big/0\le r\le 1\right)=$$
$$=\left(\left((\beta-\alpha)r+(1-\beta+\alpha)\right)x+(\alpha r-\alpha);\left(-(\beta-\alpha)r+(1+\beta-\alpha)\right)x+\right.$$
$$\left.+(-\alpha r+\alpha)\big/0\le r\le 1\right).$$

В частности при $\alpha=\beta$ получим (рис. 1):

$$\varphi_{\text{н}}\left(x,r\right)=\left(x+\left(\alpha r-\alpha\right);x+\left(-\alpha r+\alpha\right)\big/0\le r\le 1\right).$$

При $r=1$ имеем уравнение четкой экстремали:

$$\varphi\left(x\right)=\varphi_{\text{н}}\left(x,r=1\right)=\left(x;x\big/0\le r\le 1\right)=x.$$

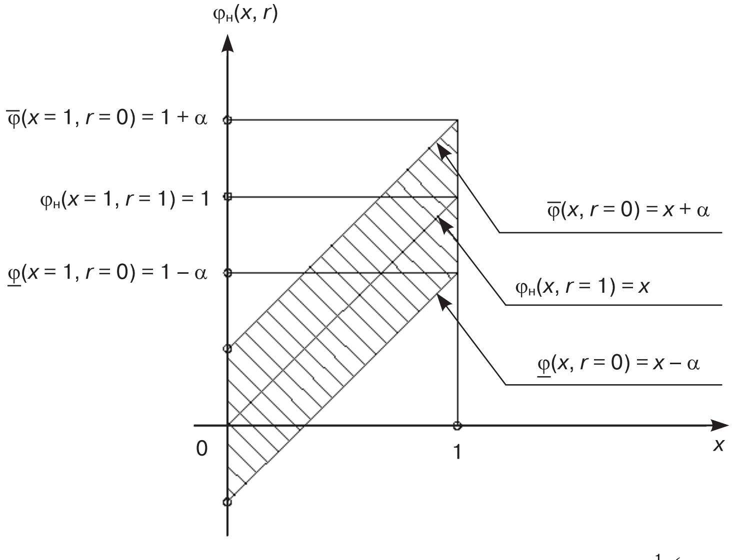

Рис. 1. Нечеткая экстремаль $\varphi_{\text{н}}\left(x,r\right)$ нечеткого функционала $I_{\text{н}}=\int\limits_{0_{\text{н}}}^{1_{\text{н}}}\left(\dot{\varphi}_{\text{н}}\left(x\right)\right)^{-1}dx$ при граничных условиях $\varphi_{\text{н}}\left(x=0\right)=0_{\text{н}}$, $\varphi_{\text{н}}\left(x=1\right)=1_{\text{н}}$

Уравнение четкой экстремали также может быть получено из четкого уравнения Эйлера:

$$\left[F_\varphi - \frac{d}{dx}\left(F_{\dot\varphi}\right)\right]\Big|_{F_\varphi=0} = 0 \Rightarrow \frac{d}{dx}\left(F_{\dot\varphi}\right) = 0 \Rightarrow F_{\dot\varphi} = C \Rightarrow$$

$$F_{\dot\varphi} = \frac{d}{d\dot\varphi}\left(\dot\varphi(x)\right)^{-1} = -\frac{1}{\left(\dot\varphi(x)\right)^2} = C \Rightarrow \dot\varphi(x) = C_1 \Rightarrow \varphi(x) = C_1 x + C_2.$$

Константы интегрирования C_1 и C_2 найдем из граничных условий:

$$\begin{cases}\varphi(x=0) = C_1\cdot 0 + C_2 = 0\\ \varphi(x=1) = C_1\cdot 1 + C_2 = 1\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}C_2 = 0\\ C_1 = 1.\end{cases}$$

В результате получим четкую экстремаль $\varphi(x) = x$, что совпадает с нечетким случаем при значении параметра $r = 1$.

Определим диапазоны параметров α, β, при которых вектор $X = (\underline{C}_{н_1}, \underline{C}_{н_2}, -\overline{C}_{н_1}, -\overline{C}_{н_2})^T$ является сильным или слабым решением [12].

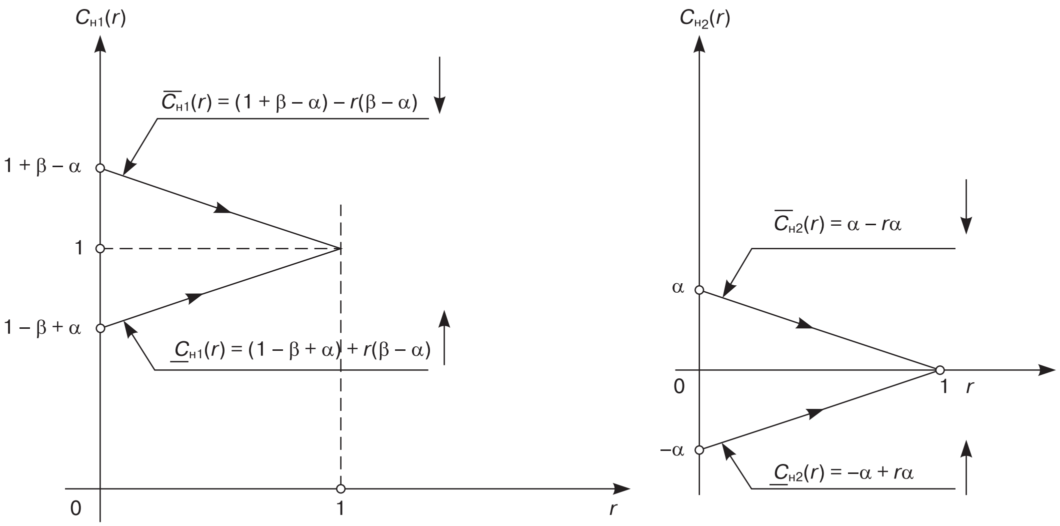

Рис. 2. Нечеткие компоненты $C_{н_1}(r)$ и $C_{н_2}(r)$ вектора X

Компоненты $C_{н_1}$ и $C_{н_2}$ вектора X являются нечеткими числами при выполнении следующих условий (рис. 2): $\begin{cases}1+\beta-\alpha\ge 1\\ 1-\beta+\alpha\le 1\end{cases} \Rightarrow \beta \ge \alpha$ для $C_{н_1}$, и $\begin{cases}\alpha\ge 0\\ -\alpha\le 0\end{cases} \Rightarrow \alpha \ge 0$ для $C_{н_2}$. Таким образом, вектор X — сильное решение при $0 \le \alpha \le \beta$ и слабое при $\alpha \notin [0, \beta]$.

4. **Выводы.** Даны определения нечетких: числа, функции и функционала.

Получено уравнение Эйлера с нечеткими неподвижными границами. Приведен пример.

5. **Заключение.** Выше была рассмотрена и решена нечеткая вариационная задача поиска безусловного экстремума функционала с неподвижными границами, который зависит от одной функции. Особый интерес в теории управления представляют вариационные задачи на условный экстремум с дифференциальными связями, решение которых позволяет синтезировать линейное оптимальное управление динамическим объектом. Представляет теоретический и практический интерес модификация этой задачи для нечеткого случая, в частности, решение задачи нечеткого линейного оптимального управления, в которой нечеткость интерпретируется как одна из математических моделей задания неопределенности.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Roy Goetschel Jr. and William Voxman.* Elementary fuzzy calculs. Fuzzy sets and systems, 18 (1986), 31—43.

[2] *Osmo Kaleva.* The cauchy problem for fuzzy differential equations. Fuzzy sets and systems, 35 (1990), 389—396.

[3] *Osmo Kaleva.* Fuzzy differential equations. Fuzzy sets and systems, 24 (1987), 301—317.

[4] *Ming Ma, Menahem Friedman, Abraham Kandel.* Numerical solutions of fuzzy differential equations. Fuzzy sets and systems, 105 (1999), 133—138.

[5] *Ouyang He and Wu Yi.* On fuzzy differential equations. Fuzzy sets and systems, 32 (1989), 321—325.

[6] *Phil Diamond.* Brief note on the variation of constants formula for fuzzy differential equations. Fuzzy sets and systems, 129 (2002), 65—71.

[7] *Jong Yconl Park, Jae Ug Jcong.* On the existence and uniqueness of solutions of fuzzy Volterra — Fredholm integral equations. Fuzzy sets and systems, 115 (2000), 425—431.

[8] *Abraham Kandel, William Y. Byatt.* Fuzzy processes. Fuzzy sets and systems, 4 (1980), 117—152.

[9] *Bernhard F. Arnold.* Testing fuzzy hypotheses with crips data. Fuzzy sets and systems, 94 (1998), 323—333.

[10] *Malay Bhattachryya.* Fuzzy Markovian decision process. Fuzzy sets and systems, 99 (1998), 273—282.

[11] *Konstantin E. Avrachenkov.* Fuzzy Markov chains and decision-making. Fuzzy optimization and decision making, 1, 143—159, 202.

[12] *Menahem Friedman, Ming Ma, Abraham Kandel.* Fuzzy linear systems. Fuzzy sets and systems, 96 (1998), 201—209.

[13] *Мочалов И.А.* О профилактике технических средств при нечетких отказах и восстановлениях // Вестник РУДН. Серия «Инженерные исследования». — 2007. — № 4. — С. 20—27.

ELEMENTS OF FUZZY VARIATIONS CALCULUS

J.E. Asmolova, I.A. Mochalov

Automatic control system department
Moscow State Technical University after N.E. Bauman
2nd Baumanskaya str., 5, Moscow, Russia,107005

The fuzzy numbers, functions, functionals are considered. The fuzzy variational problem for fuzzy functionals with fixed boundaries is defined. An example of solution of Euler equation is given.

Key words: fuzzy computation, calculus of variations.