УДК 621.165.533

ЭКВИДИСТАНТА ДРОБНОЙ РАЦИОНАЛЬНОЙ ПАРАБОЛЫ

И.В. Епифанов, Л.В. Виноградов

Кафедра теплотехники и тепловых двигателей
Инженерный факультет
Российский университет дружбы народов
ул. Орджоникидзе, 3, Москва, Россия, 115419

В работе представлена программа расчета и построения дробной рациональной параболы, ее эволюты и эквидистанты, которые могут быть применены при профилировании лопаток турбомашин.

Ключевые слова: турбина, лопатка, профиль, парабола, эволюта, эквидистанта.

Парабола на основе дробной рациональной функции применяется при профилировании элементов турбомашин. На рис. 1 показана расчетная схема дробной рациональной параболы (ДРП) [1].

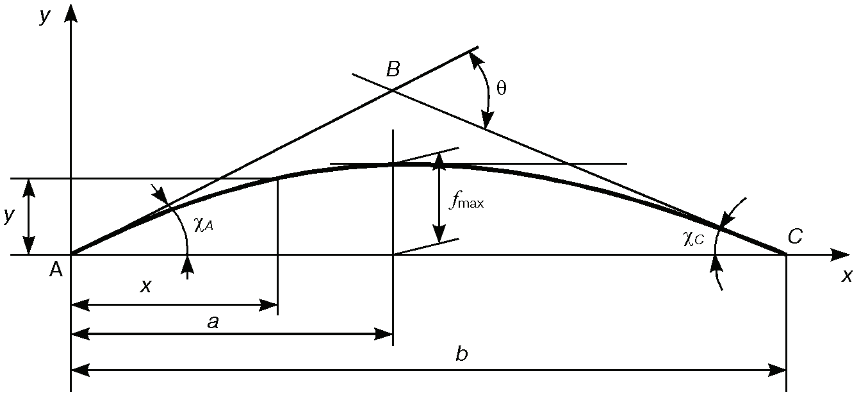


Рис. 1. Расчетная схема параболы:

χ_A, χ_C — углы наклона касательных в начале и конце параболы; *b* — хорда; f_{max} — максимальная ордината; *a* — абсцисса положения максимума; *x, y* — текущие координаты; *ABC* — контрольный треугольник параболы

В практике профилирования лопаток турбин перед тем как построить кривую, например параболу, строится так называемый контрольный треугольник, образованный касательными крайних точек кривой. На следующем этапе в этот треугольник вписывается того или иного вида кривая. Для ДРП исходными данными являются: координаты начальной точки A: абсцисса $x = 0$, $y = 0$, угол наклона касательной χ_A, хорда профиля лопатки $b = 100$, координаты точки C $x = b$, $y = 0$, угол наклона касательной χ_C.

Уравнение параболы имеет вид

$$y(x) = \frac{B \cdot x - x^2}{2 \cdot A \cdot x + C}. \qquad (1)$$

Нетрудно показать, что коэффициенты, входящие в уравнение (1), можно рассчитать по формулам

$$B = b, \tag{2}$$

$$C = b \cdot \cot(\chi_A), \tag{3}$$

$$A = \frac{\cot(\chi_A) \cdot \tan(\chi_C) - 1}{2 \cdot \tan(\chi_C)}. \tag{4}$$

После подстановки значений коэффициентов в формулу (1) получим основную зависимость для дробной рациональной параболы:

$$y_{DRP}(x, b, \chi_A, \chi_C) = \frac{\left(b \cdot x - x^2\right)}{\left[2 \cdot \left(-\frac{\cot(\chi_A) \cdot \tan(\chi_C) - 1}{2 \cdot \tan(\chi_C)}\right) \cdot x + b \cdot \cot(\chi_A)\right]}. \tag{5}$$

При профилировании лопаток важным параметром является положение и величина максимума ординаты, например спинки профиля. Для вычисления абсциссы максимальной ординаты ДРП можно воспользоваться формулой, полученной из естественного условия равенства нулю первой производной от функции (5). После несложных преобразований можно получить выражение для расчета абсциссы максимальной ординаты параболы:

$$x_{\max DRP}(b, \chi_A, \chi_C) = \frac{b \cdot \sqrt{\frac{\tan(\chi_C)}{\tan(\chi_A)}} - b \cdot \cot(\chi_A) \cdot \tan(\chi_C)}{\cot(\chi_A) \cdot \tan(\chi_C) - 1}. \tag{6}$$

При вычислении параметров эволюты ДРП необходимо знать формулы для ее первой и второй производных.

Для первой производной выражение имеет вид

$$y_{xDRP}(x, b, \chi_A, \chi_C) = \frac{\tan(\chi_C) \cdot \begin{pmatrix} x^2 - b^2 \cdot \cot(\chi_A) \cdot \tan(\chi_C)... \\ +\, 0 - x^2 \cdot \cot(\chi_A) \cdot \tan(\chi_C)... \\ +\, 0 + 2 \cdot b \cdot x \cdot \cot(\chi_A) \cdot \tan(\chi_C)... \end{pmatrix}}{\left(x + b \cdot \cot(\chi_A) \cdot \tan(\chi_C) - \cdot x \cdot \cot(\chi_A) \cdot \tan(\chi_C)\right)^2}. \tag{7}$$

Для второй производной выражение более простое:

$$y_{xxDRP}(x, b, \chi_A, \chi_C) = \frac{2 \cdot b^2 \cdot \cot(\chi_A) \cdot \tan(\chi_C)^2}{\left(x + b \cdot \cot(\chi_A) \cdot \tan(\chi_C) - \cdot x \cdot \cot(\chi_A) \cdot \tan(\chi_C)\right)^3}. \tag{8}$$

Известно, что радиус кривизны дробной рациональной параболы по длине параболы меняется. В некоторых случаях расчета параметров течения в каналах, очерченных подобными параболами, необходимо знать величины радиусов кривизны или кривизны обводов, так как с этим связан поперечный градиент скоростей и термодинамических параметров потока в канале. В работе [2] приводятся формулы, позволяющие рассчитать и величину радиусов кривизны контура и изменение этих радиусов по длине параболы:

$$R_{DRP}(x,b,\chi_A,\chi_C)=\frac{\left(1+y_{xDRP}(x,b,\chi_A,\chi_C)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left|y_{xxDRP}(x,b,\chi_A,\chi_C)\right|}. \tag{9}$$

Для построения эволюты необходимо знать координаты центра кривизны. В параметрическом виде формулы для абсцисс и ординат в соответствии с [2] имеют вид

$$x_{0DRP}(x,b,\chi_A,\chi_C)=x-\frac{y_{xDRP}(x,b,\chi_A,\chi_C)\cdot\left(1+y_{xDRP}(x,b,\chi_A,\chi_C)^2\right)}{y_{xxDRP}(x,b,\chi_A,\chi_C)}, \tag{10}$$

$$y_{0DRP}(x,b,\chi_A,\chi_C)=y_{DRP}(x,b,\chi_A,\chi_C)+\frac{\left(1+y_{xDRP}(x,b,\chi_A,\chi_C)^2\right)}{y_{xxDRP}(x,b,\chi_A,\chi_C)}. \tag{11}$$

При параболе и ее элементах приходится строить касательные и нормали. Для построения касательной к эволюте и нормали к ДРП можно воспользоваться формулой (12)

$$\begin{gathered}N_{ev}(x_2,\eta)=\tan\left(a\tan\left(y_{xDRP}(\eta,b,\chi_A,\chi_C)\right)+\frac{\pi}{2}+\left(y_{0DRP}(x,b,\chi_A,\chi_C)\right)\right)\cdot\\ \cdot\left(x_2-\left(x_{0DRP}(x,b,\chi_A,\chi_C)\right)\right).\end{gathered} \tag{12}$$

Для построения эквидистанты дробной рациональной параболы получено параметрическое уравнение вида

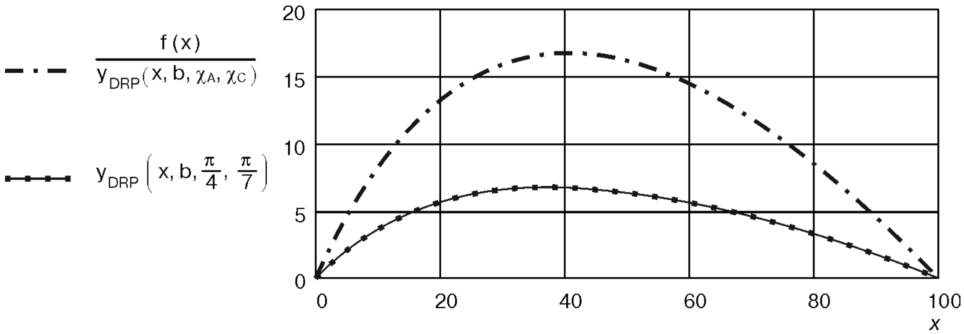
$$\begin{gathered}x_{EKV}(x,b,\chi_A,\chi_C,\Delta_R)=x_{0DRP}(x,b,\chi_A,\chi_C)+\left(R_{DRP}(x,b,\chi_A,\chi_C)+\Delta_R\right)\cdot\\ \cdot\cos\left(a\tan\left(y_{xDRP}(x,b,\chi_A,\chi_C)\right)+\frac{\pi}{2}\right),\end{gathered} \tag{13}$$

$$\begin{gathered}y_{EKV}(x,b,\chi_A,\chi_C,\Delta_R)=y_{0DRP}(x,b,\chi_A,\chi_C)+\left(R_{DRP}(x,b,\chi_A,\chi_C)+\Delta_R\right)\cdot\\ \cdot\sin\left(a\tan\left(y_{xDRP}(x,b,\chi_A,\chi_C)\right)+\frac{\pi}{2}\right).\end{gathered} \tag{14}$$

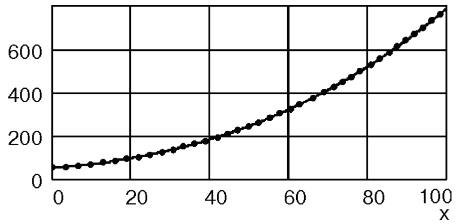
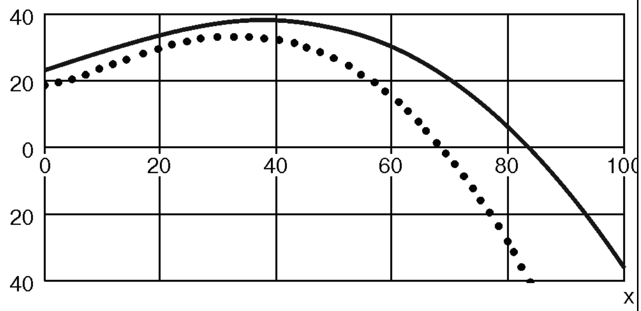
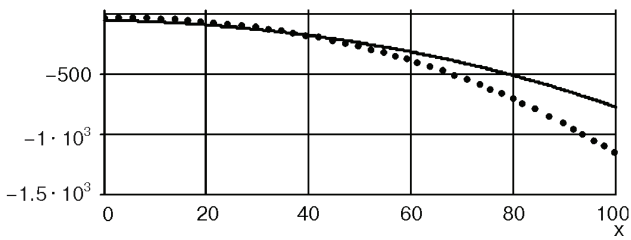
В таблице представлена программа Fraction R_Function.xmcd построения дробной рациональной параболы с различными исходными параметрами, абсцисс и ординат центра кривизны параболы, эволюты, эквидистант с уменьшенными и увеличенными ординатами и т.д.

Таблица

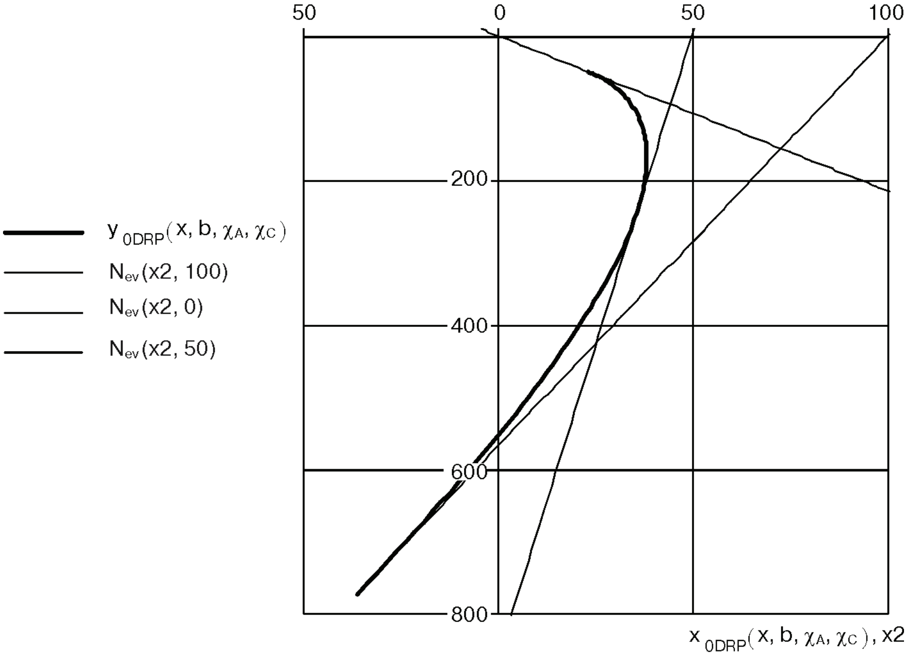
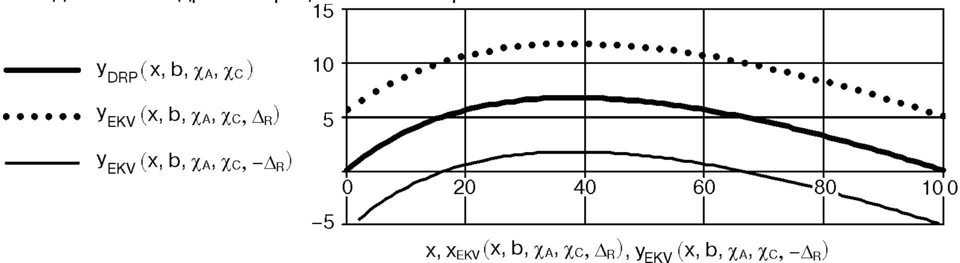
Программа Fraction R_Function.xmcd

№ п/п	Наименование параметра	Формула, результат расчета
1	Значения начальных параметров: углов на входе и выходе, хорда	$b := 100$ $\quad B := b$ $\quad B := 100$ $\chi_A := 25 \cdot \frac{\pi}{180}$ $\quad \chi_C := (10) \cdot \frac{\pi}{180}$
2	Уравнения и значения коэффициентов	$C := b \cdot \cot(\chi_A)$ $\quad C = 214.451$ $A := \frac{\cot(\chi_A) \cdot \tan(\chi_A) - 1}{2 \cdot \tan(\chi_C)}$ $\quad A = 1.763$
3	Уравнения парабол	$f(x) = \frac{b \cdot x - x^2}{2 \cdot A \cdot x + C}$ $y_{DRP}(x, b, \chi_A, \chi_C) := \frac{\left(b \cdot x - x^2\right)}{\left[2 \cdot \left(-\frac{\cot(\chi_A) \cdot \tan(\chi_C) - 1}{2 \cdot \tan(\chi_C)}\right) \cdot x + b \cdot \cot(\chi_A)\right]}$
4	Графический вид парабол 	
5	Абсцисса положения экстремума параболы $x_{maxDRP}(b, \chi_A, \chi_C) := \frac{b \cdot \sqrt{\frac{\tan(\chi_C)}{\tan(\chi_A)}} - b \cdot \cot(\chi_A) \cdot \tan(\chi_C)}{\cot(\chi_A) \cdot \tan(\chi_C) - 1}$ $x_{maxDRP}(b, \chi_A, \chi_C) := 38.078$	
6	Первая и вторая производные $y_{xDRP}(x, b, \chi_A, \chi_C) := \frac{\tan(\chi_C) \cdot \begin{pmatrix} x^2 - b^2 \cdot \cot(\chi_A) \cdot \tan(\chi_C)... \\ + 0 - x^2 \cdot \cot(\chi_A) \cdot \tan(\chi_C)... \\ + 0 + 2 \cdot b \cdot x \cdot \cot(\chi_A) \cdot \tan(\chi_C)... \end{pmatrix}}{\left(x + b \cdot \cot(\chi_A) \cdot \tan(\chi_C) - x \cdot \cot(\chi_A) \cdot \tan(\chi_C)\right)^2}$ $y_{xxDRP}(x, b, \chi_A, \chi_C) := \frac{2 \cdot b^2 \cdot \cot(\chi_A) \cdot \tan(\chi_C)^2}{\left(x + b \cdot \cot(\chi_A) \cdot \tan(\chi_C) - x \cdot \cot(\chi_A) \cdot \tan(\chi_C)\right)^3}$	
7	Радиус кривизны параболы	$R_{DRP}(x, b, \chi_A, \chi_C) = \frac{\left(1 + y_{xDRP}(x, b, \chi_A, \chi_C)^2\right)^{\frac{3}{2}}}{\left\lvert y_{xxDRP}(x, b, \chi_A, \chi_C)\right\rvert}$

Продолжение

№ п/п	Наименование параметра	Формула, результат расчета
8	Изменение величины радиуса кривизны ДРП по длине хорды	—— $R_{DRP}(x, b, \chi_A, \chi_C)$ • • • • • • $R_{DRP}\left(x, b, 25\cdot\frac{\pi}{180}, \chi_C\right)$ 
9	Абсцисса центра кривизны ДРП по формуле [2]. $x_{0DRP}(x,b,\chi_A,\chi_C) := x - \frac{y_{xDRP}(x,b,\chi_A,\chi_C)\cdot\left(1+y_{xDRP}(x,b,\chi_A,\chi_C)^2\right)}{y_{xxDRP}(x,b,\chi_A,\chi_C)}$ —— $x_{0DRP}(x, b, \chi_A, \chi_C)$ • • • • • • $x_{0DRP}\left(x, b, 35\cdot\frac{\pi}{180}, \chi_C\right)$ 		
10	Ордината центра кривизны $y_{0DRP}(x,b,\chi_A,\chi_C) := y_{DRP}(x,b,\chi_A,\chi_C) + \frac{\left(1+y_{xDRP}(x,b,\chi_A,\chi_C)^2\right)}{y_{xxDRP}(x,b,\chi_A,\chi_C)}$ —— $y_{0DRP}(x, b, \chi_A, \chi_C)$ • • • • • • $y_{0DRP}\left(x, b, 35\cdot\frac{\pi}{180}, \chi_C\right)$ 		
11	Уравнение касательной к эволюте и нормали к дробной рациональной параболе $N_{ev}(x2,\eta) := \tan\left(\begin{array}{l} a\tan(y_{xDRP}(\eta,b,\chi_A,\chi_C))\dots \\ +0+\frac{\pi}{2}\end{array}\right)\cdot\left[\begin{array}{l}x2\dots\\ +0-x_{0DRP}(\eta,b,\chi_A,\chi_C)\end{array}\right]\dots$ $+0+\left(y_{0DRP}(\eta,b,\chi_A,\chi_C)\right)$		

Окончание

№ п/п	Наименование параметра	Формула, результат расчета
12	$x2 := x_{0DRP}(100, b, \chi_A, \chi_C),\ \left(x_{0DRP}(100, b, \chi_A, \chi_C) + 1\right) \ldots 110$ Эволюта с касательными к ней 	
13	Параметрические уравнения эквидистанты (ΔR — смещение эквидистанты)	
	Абсцисса $x_{EKV}(x, b, \chi_A, \chi_C, \Delta_R) := x_{0DRP}(x, b, \chi_A, \chi_C) \ldots + 0 + \begin{pmatrix} R_{DRP}(x, b, \chi_A, \chi_C) \ldots \\ + 0 + \Delta_R \end{pmatrix} \cdot \cos\begin{pmatrix} \mathrm{a}\tan\left(y_{xDRP}(x, b, \chi_A, \chi_C)\right) \ldots \\ + 0 + \dfrac{\pi}{2} \end{pmatrix}$ Ордината $y_{EKV}(x, b, \chi_A, \chi_C, \Delta_R) := y_{0DRP}(x, b, \chi_A, \chi_C) \ldots + 0 + \begin{pmatrix} R_{DRP}(x, b, \chi_A, \chi_C) \ldots \\ + 0 + \Delta_R \end{pmatrix} \cdot \sin\begin{pmatrix} \mathrm{a}\tan\left(y_{xDRP}(x, b, \chi_A, \chi_C)\right) \ldots \\ + 0 + \dfrac{\pi}{2} \end{pmatrix}$	
14	Эквидистантные дробные рациональные параболы 	
	Конец программы	

В результате проведенной работы:

—получены аналитические зависимости для дробной рациональной функции, которая применяется при построении парабол при аналитическом профилировании лопаточного аппарата турбин и компрессоров;

—разработана программа, реализующая построение эволюты дробной рациональной параболы, которая позволяет строить эквидистантные параболы с увеличенной и уменьшенной ординатами. Эквидистантные кривые позволяют осуществлять анализ формы межлопаточного канала проточной части турбомашин на предмет его конфузорности или диффузорности.

Приведенные численные данные и графические построения могут быть использованы при тестировании программы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Холщевников К.В.* Теория и расчет авиационных лопаточных машин. — М.: Машиностроение, 1970.

[2] *Выгодский М.Я.* Справочник по высшей математике. — М.: Физматгиз, 1963.

THE EQUIDISTANT OF FRACTION RATIONAL PARABOLA

I.V. Epifanov, L.V. Vinogradov

Department of heating engineers and heat engines
Engineering faculty
Peoples' Friendship University of Russia
Ordzhonikidze str., 3, Moscow, Russia, 115419

An article presents an analytic method and program for designing fraction rational parabola, its evolutes and equidistant. These elements may be used for designing of the turbine blade profiles.

Key words: turbine, blade, profile, parabola, evolutes, equidistant.