

# РАСЧЕТ СТАБИЛИЗАТОРА ДАВЛЕНИЯ, ЭФФЕКТИВНО РАБОТАЮЩЕГО ПРИ СРЕДНИХ И ВЫСОКИХ ДАВЛЕНИЯХ

Ф.В. Рекач<sup>2</sup>, Е.К. Синиченко<sup>1</sup>, Н.Ш. Хассан<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Кафедра гидравлики и гидротехнических сооружений  
Инженерный факультет

<sup>2</sup>Кафедра высшей математики  
Факультет физико-математических и естественных наук  
Российский университет дружбы народов  
ул. Орджоникидзе, 3, Москва, Россия, 115419

В статье описаны конструкция и расчет стабилизатора давления, принцип работы которого основан на потере устойчивости стержней.

**Ключевые слова:** стабилизатор давления, устойчивость.

Упругая камера (УК) является одним из основных элементов стабилизатора давления. Она представляет собой замкнутое объемное тело (рис. 1), которое при повышении давления уменьшает свой объем, а при понижении — увеличивает. Назначение и расчет стабилизатора давления подробно описаны в работе [1]. Технические характеристики УК (рабочее давление; податливость; объем жидкости, вмещаемой камерой; химические и физические условия работы камеры и т.д.) определяют качество работы стабилизатора давления.

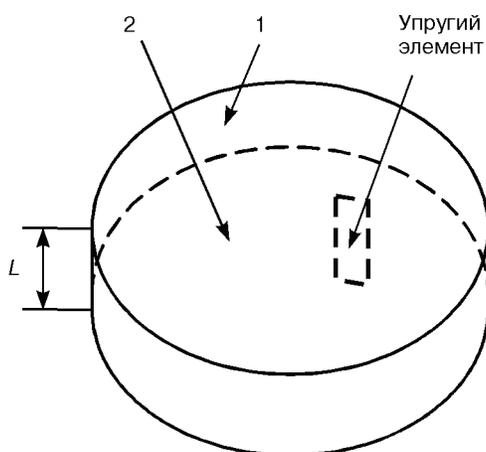


Рис. 1. Схема упругой камеры

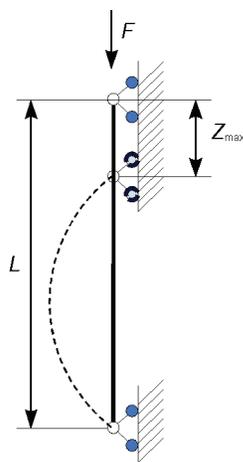


Рис. 2. Изгиб стержня

В настоящее время детально разработаны УК, работающие в области низких давлений (до 16 атм.). Их эффективность при эксплуатации на более высоких давлениях сильно снижается.

Задача авторов состояла в том, чтобы разработать конструкцию, работающую в диапазоне средних и высоких давлений (до 40 атм.), имеющую соответствующие технические характеристики.

Рассмотрим конструкцию УК в виде «таблетки» диаметром  $d$  и высотой  $L$  (см. рис. 1). Дно и верхняя часть выполнена из металла. Конструкция упругой камеры позволяет изменяться  $L$  в зависимости от увеличения (или уменьшения давления). При этом крышка и дно не смещаются друг относительно друга. Снаружи «таблетка» помещена в замкнутый водонепроницаемый материал. В качестве упругих элементов рассматриваются металлические стержни длиной  $L$ , шириной  $b$  и толщиной  $h$ , теряющие устойчивость по Эйлеру и работающие в пределах упругости (рис. 2).

Критическая сила  $F_{кр}$ , при которой стержень теряет устойчивость, равна

$$F_{кр} = \frac{\pi^2 EI}{L^2}, \quad (1)$$

где —  $E$  модуль упругости материала стержня,  $E = 2 \cdot 10^5$  МПа;  $I$  — момент инерции стержня,  $I = bh^3/12$ ;  $L$  — длина стержня.

Рассмотрим большие перемещения стержня. Составим уравнение равенства моментов в точке  $A$  (рис. 3).

$$\frac{1}{\rho} EI = -F \cdot y \quad \text{или} \quad \frac{1}{\rho} + k^2 y = 0, \quad (2)$$

где  $\rho$  — радиус кривизны упругой линии стержня;  $k = \sqrt{F/EI}$ .

В качестве независимой переменной выберем длину дуги  $s$  ( $OA$  на рис. 3), отсчитываемую от левой опоры. Тогда кривизна

$$\frac{1}{\rho} = \frac{d\zeta}{ds}, \quad (3)$$

где  $\zeta$  — угол наклона касательной к упругой линии.

Дифференцируя (2) по  $s$ , получим

$$\frac{d^2\zeta}{ds^2} = -k^2 \frac{dy}{ds} = -k^2 \sin \zeta$$

или

$$d\left(\frac{d\zeta}{ds}\right) = -2k^2 \sin \frac{\zeta}{2} \cos \frac{\zeta}{2} ds. \quad (4)$$

Умножим обе части последнего уравнения на  $d\zeta/ds$ . После интегрирования находим:

$$\left(\frac{d\zeta}{ds}\right)^2 = 4k^2 \left(m^2 - \sin^2 \frac{\zeta}{2}\right), \quad (5)$$

где  $m^2$  — произвольная константа.

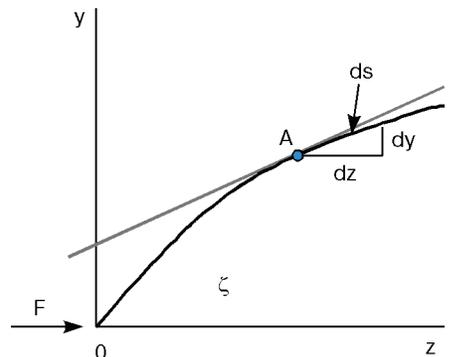


Рис. 3. Схема к расчету условий равновесия стержня

Произведем подстановку

$$\sin \frac{\zeta}{2} = -m \sin \psi. \quad (6)$$

Тогда (5) примет вид

$$\frac{d\zeta}{ds} = 2k m \cos \psi. \quad (7)$$

Используя выражения (5)—(7) согласно [2], можно получить выражения для максимального прогиба  $y_{\max}$  в середине стержня ( $s = L/2$ ) и максимального смещения конца стержня по оси  $z - z_{\max}$  (см. рис. 2):

$$y_{\max} = \frac{2m}{k}, \quad z_{\max} = \frac{4}{k} \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - m^2 \sin^2 \psi} d\psi - L, \quad (8)$$

где  $k$  определяется из выражения

$$\frac{kL}{2} = \int_0^{\pi/2} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - m^2 \sin^2 \psi}}. \quad (9)$$

Алгоритм вычисления следующий: задаемся значением  $m$  (рад), по (9) определяем  $k$  (зная  $k$ , находим  $F > F_{\text{кр}}$ ), затем по (8) находим  $z_{\max}$  и  $y_{\max}$ .

Максимальное напряжение — в сечении стержня  $s = L/2$  (где максимальный момент), равно

$$\sigma_{\max} = \frac{M h}{I 2} = \frac{F \cdot y_{\max} h}{I 2}, \quad (10)$$

где  $M$  — момент, [Н · см];  $h$  — толщина балки, [см].

Примем допустимое напряжение  $\sigma_d$  равным 2000 [МПа], ширину стержня  $b = 1$  см.

Введем два параметра: коэффициент эффективности по перемещению  $k_z = \frac{L - z_{\max}}{L}$  и коэффициент эффективности по силе  $k_F = \frac{F_{\max}}{F_{\text{кр}}}$  (здесь  $F_{\max}$  и  $z_{\max}$

берутся из условия  $\sigma_{\max} < \sigma_d$ ). Параметры  $k_z$ ,  $k_F$  и величина критической силы  $F_{\text{кр}}$  будут определять эффективность работы упругой камеры.

Из формул (1), (8), (10) можно сделать вывод, что  $k_z$ ,  $k_F$  являются функциями от  $h/L$ ;  $F_{\text{кр}}$  является функцией от  $h^3/L^2$ . На рис. 4 и рис. 5 показаны графики зависимостей  $k_z$ ,  $k_F$  от  $h/L$  и  $F_{\text{кр}}$  от  $h/L$ ,  $L$ .

Параметром, определяющим «емкость» УК, является  $k_z$ , при этом давление, выдерживаемое «таблеткой» без изменения объема, определяется параметром

$$F_{\text{кр}} \cdot n,$$

где  $n$  — число стержней.

Чем меньше  $h/L$ , тем меньше  $F_{\text{кр}}$ .

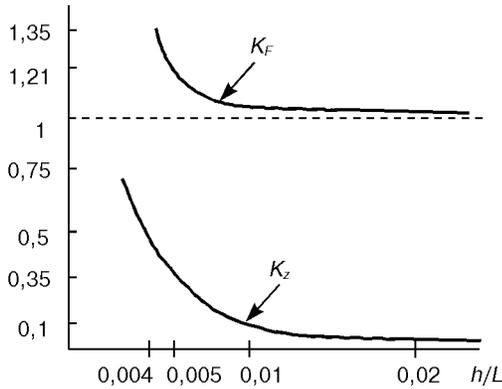


Рис. 4. Графики зависимости  $K_F = f(h/L)$  и  $K_Z = f(h/L)$

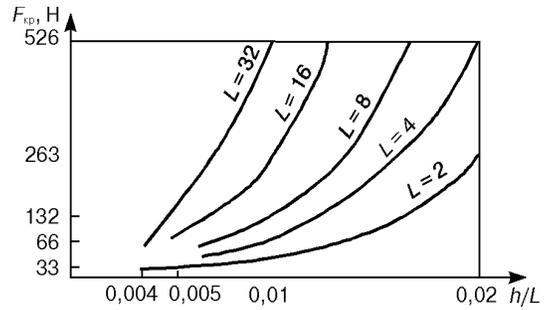


Рис. 5. Графики зависимости  $F_{кр} = f(h/L)$

Возникает вопрос: можно ли значительно повысить  $F_{кр}$ , изменив форму балки. На рис. 6 изображен график изменения напряжения  $\sigma$  по длине (сплошная линия). От  $L/2$  до  $L$  график симметричен. При  $s \in [0, L/4]$  напряжения значительно меньше допустимого  $\sigma_d$ . В связи с этим возникла идея рассчитать балку с переменным моментом инерции  $I = I(s)$  и найти оптимальную форму балки, при которой напряжения  $\sigma$  ближе к  $\sigma_d$  на большем участке балки (пунктирная линия на рис. 6).

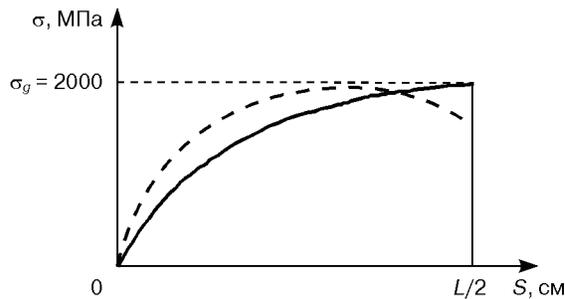


Рис. 6. Графики изменения напряжения по длине

Запишем уравнение (2), используя (3) в виде

$$I(s)\zeta'_s + \frac{F}{E}y = 0.$$

Продифференцируем последнее уравнение по  $s$  ( $dy/ds = \sin \zeta$ ):

$$\zeta''_{ss} I(s) + \zeta'_s I'_s + \frac{F}{E} \sin \zeta = 0. \quad (11)$$

Будем рассматривать левую половину балки (правая симметрична) с граничными условиями  $\zeta(L/2) = 0$ ,  $\zeta'(0) = 0$ . Первое условие показывает равенство нулю касательной к оси балки в сечении  $s = L/2$ , второе условие отражает шарнирное закрепление на левом конце балки (момент равен нулю;  $1/\rho = \zeta'_s = 0$ ).

Дифференциальное уравнение (11) не имеет точного решения [3]. Попытки решить его численно не привели к хорошим результатам. Сделаем некоторые допущения:

1) заменим  $\sin \zeta$  на  $\zeta$ . При углах  $\zeta$ , не превышающих  $\pi/4$ , ошибка в определении  $F$  не превысит 10% в сторону увеличения  $F$ ;

2) будем рассматривать  $I(s)$  в виде полинома первой степени от  $s$ :

$$I(s) = I_0 + I_1 \cdot s.$$

С учетом принятых допущений уравнение (11) примет вид

$$\zeta_{ss}'' (I_0 + I_1 \cdot s) + \zeta_s' I_1 + \frac{F}{E} \zeta = 0. \quad (12)$$

Данное уравнение имеет точное решение с граничными условиями  $\zeta(a) = \zeta_0$ ,  $a > 0$ . Вид решения следующий:

$$\zeta(s) = A \zeta_0 \cdot \text{Bessel} J(0, B\sqrt{C + D \cdot s}) + G \zeta_0 \cdot \text{Bessel} Y(0, B\sqrt{C + D \cdot s}), \quad (13)$$

где константы  $A, B, C, D, G$  зависят от  $a, I_0, I_1, F, E$ ;  $\text{Bessel} J$  — бesselовы функции 1-го рода;  $\text{Bessel} Y$  — бesselовы функции 2-го рода [4].

Схема точно-численного решения задачи следующая: задаемся  $\zeta_0$ , находим решение уравнения (12) при  $\zeta'(a) = 0, F = F_0$  ( $F_0$  — начальное значение силы); изменяя  $F$ , добиваемся того, чтобы  $\zeta(a + L/2)$  было бы равно нулю. Алгоритм реализован на ЭВМ (*YstSteed V*).

Рассмотрим стержень с постоянной толщиной  $h$  и переменной шириной  $\beta \cdot b$  (рис. 7), где  $\beta = 1 - 6$ .

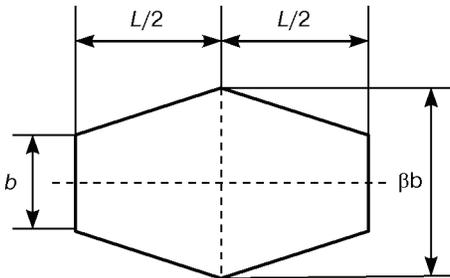


Рис. 7. Схема стержня с переменным поперечным сечением

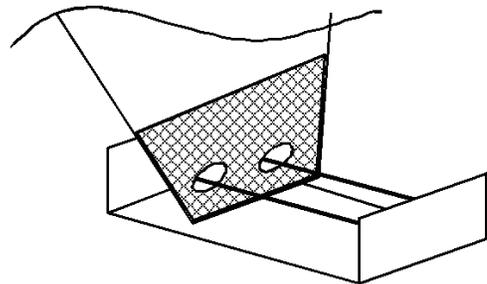


Рис. 8. Фрагмент стержня с прокладкой

В таблице приведен расчет параметров  $k_z, k_F$  и  $F_{кр}$  для  $h/L$  равного 0,01 и  $L = 8$  см в зависимости от  $k_z, k_F$ .

Таблица

Расчет параметров

| $\beta$ | $k_z$ | $k_F$ | $F_{кр}, \text{H}$ |
|---------|-------|-------|--------------------|
| 1       | 0,098 | 1,05  | 131                |
| 2       | 0,114 | 1,07  | 220                |
| 3       | 0,126 | 1,10  | 305                |
| 4       | 0,153 | 1,14  | 386                |
| 5       | 0,149 | 1,02  | 467                |
| 6       | 0,148 | 1,027 | 544                |

**Примечание.** Из расчетов следует, что при  $\beta = 6$   $F_{кр}$  повышается в 3—5 раз по сравнению с балкой постоянного сечения.

**Пример.** Дана «таблетка» диаметром  $d = 30$  см, высотой  $L = 8$  см. Давление  $p$ , выше которого должен уменьшаться объем, — 3 МПа. Требуется рассчитать число и форму стержней, а также «емкость» «таблетки».

**Решение:** Сила, действующая на крышку, равна

$$F = p \frac{\pi d^2}{4} = 3 \cdot 10^6 \frac{\pi(0,3)^2}{4} = 2,120 \cdot 10^5 \text{ Н.}$$

**Вариант 1.** Принимая  $h/L$  равным 0,01 и  $\beta = 6$ , число стержней  $n = F/544 = 390$ . Помещая стержни по 10 шт. в «обойму», равномерно по сечению можно разместить 39 «обойм». На рис. 8 показан фрагмент одного стержня «обоймы» с прокладкой. «Емкость» «таблетки» при максимальном давлении составит

$$V = k_z \frac{\pi d^2}{4} L = 0,15 \frac{\pi(0,3)^2}{4} 0,08 = 0,000848 \text{ м}^3 \approx 0,85 \text{ (л)}.$$

**Вариант 2.** Принимаем  $h/L$  равным 0,015 и  $\beta = 6$ . Рассчитываем по выше-указанной методике параметры стержня:  $F_{кр} = 1840$  Н,  $k_F = 1,13$ ,  $k_z = 0,056$ . Число стержней  $n = F/1840 \approx 115$ . Формируя «обойму» из пяти стержней по сечению, легко разместить 23 «обоймы». При этом «емкость» одной «таблетки» составит

$$V = k_z \frac{\pi d^2}{4} L = 0,056 \frac{\pi(0,3)^2}{4} 0,08 = 0,000316 \text{ м}^3 \approx 0,32 \text{ (л)}.$$

**Вывод.** Сравнивая варианты 1 и 2 приходим к заключению: чем толще стержень, тем больше он держит нагрузку, однако его деформации в упругой области меньше.

**Замечания.** 1) для того чтобы стержень изгибался в заданном направлении, можно задать небольшой начальный прогиб; 2) задачу можно решить и для общего случая  $I(s)$ , разбивая балки на участки, задавая средний  $(\sin \zeta)_{cp}$  и «сшивая» участки.

## ЛИТЕРАТУРА

- [1] Ганиев Р.Ф., Низамов Х.Н., Дербуков Е.И. Волновая стабилизация и предупреждение аварий в трубопроводах. — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 1996.
- [2] Феодосьев В.И. Сопротивление материалов. — М.: Физматгиз, 1962.
- [3] Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям / Пер. с нем. — М.: Наука, 1965.
- [4] Лебедев Н.Н. Специальные функции и их приложения. — М.: Л.: Физматгиз, 1963.
- [5] Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. — М.: Наука, 1967.
- [6] Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. — М.: Машиностроение, 1991.
- [7] Светлицкий В.А. Механика стержней. Ч. 1: Статика. — М.: Высшая школа, 1987.

**ANALYSIS OF PRESSURE STABILIZER,  
EFFECTIVELY WORKING UNDER AVERAGE  
AND HIGH PRESSURES**

**F.V. Rekach, E.K. Sinichenko, N.Sch. Hassan**

<sup>1</sup>Engineering faculty  
Department of Hydraulics and Hydraulic Structures

<sup>2</sup>Faculty of science  
Department of Mathematics  
Peoples' Friendship University of Russia  
*Ordzhonikidze str., 3, Moscow, Russia, 115419*

The article describes construction and analysis of pressure stabilizer, which principle of work is based on stability loss of columns.

**Key words:** pressure stabilizer, stability loss.