Вестник РУДН. Серия: Инженерные исследования
RUDN Journal of Engineering Research

2025;26(4):428–446

ISSN 2312-8143 (Print); ISSN 2312-8151 (Online)
journals.rudn.ru/engineering-researches

DOI: 10.22363/2312-8143-2025-26-4-428-446
EDN: BLDKNH

Научная статья / Research article

Синтез дискретного оптимального многомерного регулятора по неполным данным: многомерный спектральный подход

И.Г. Сидоров

Московский технический университет связи и информатики, Москва, Российская Федерация
✉ igor8i2016@yandex.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 30 мая 2025 г.
Доработана: 3 августа 2024 г.
Принята к публикации: 7 сентября 2025 г.

Заявление о конфликте интересов

Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Аннотация. Рассмотрена минимаксная постановка задачи линейного стационарного управления по неполным данным многомерными стационарными в широком смысле случайными процессами (векторного полезного сигнала), наблюдаемого в аддитивной смеси с помехой типа «белый шум», когда спектральные плотности возмущений в канале измерений и в помехе измерений полностью неизвестны и принадлежат к некоторому множеству Ξ неотрицательно определенных функций. На наблюдаемый векторный процесс налагается лишь условие линейной регулярности. Рассмотрена гарантирующая оценка, под которой понимается наилучшая оценка параметров полезного сигнала в смысле минимума среднеквадратической ошибки при наихудшем поведении ошибок измерений и возмущений со спектральными плотностями, принадлежащими множеству Ξ, по отношению к которой определяется оптимальное управление по неполным данным. Относительно спектральной плотности полезного сигнала известно лишь, что она удовлетворяет заданной системе моментных условий и сосредоточена на заданном измеримом подмножестве оси частот. Показано, что факторизация матричной спектральной плотности позволяет получить решение задачи оптимальной минимаксной линейной фильтрации и необходима для решения задачи линейного оптимального управления по неполным данным. Отыскание оптимального управления по неполным данным у возникающей многомерной антагонистической игры сводится к решению некоторой системы соотношений. При решении использованы методы матричных краевых задач, матричные преобразования Гильберта и свойства матричных частотных характеристик. Приведен иллюстрирующий пример.

Ключевые слова: факторизация, многомерный, стационарный, векторный случайный процесс, минимаксный линейный фильтр, неопределенность, матричная спектральная плотность, гарантирующая матричная частотная характеристика, управление, седловая точка

Для цитирования

Сидоров И.Г. Синтез дискретного оптимального многомерного регулятора по неполным данным: многомерный спектральный подход // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2025. Т. 26. № 4. С. 428–446. http://doi.org/10.22363/2312-8143-2025-26-4-428-446

Synthesis of a Discrete Optimal Multidimensional Controller Based on Incomplete Data: Multidimensional Spectral Approach

Igor G. Sidorov

Moscow Technical University of Communications and Informatics, Moscow, Russian Federation

✉ igor8i2016@yandex.ru

Article history

Received: May 30, 2025
Revised: August 3, 2025
Accepted: September 7, 2025

Conflicts of interest

The author declares that there is no conflict of interest.

Abstract. The minimax formulation of the problem of linear stationary control based on incomplete data of multidimensional stationary in a broad sense random processes (vector useful signal) observed in an additive mixture with interference of the “white noise” type, when the spectral densities of disturbances in the measurement channel and in the measurement interference are completely unknown and belong to a certain set of non-negatively defined functions, is considered. Only the condition of linear regularity is imposed on the observed vector process. A guaranteeing estimate is considered, which means the best estimate of the parameters of a useful signal in the sense of a minimum standard error with the worst behavior of measurement errors and disturbances with spectral densities belonging to the set, with respect to which the optimal control is determined based on incomplete data. Regarding the spectral density of the useful signal, it is only known that it satisfies a given system of moment conditions and is concentrated on a given measurable subset of the frequency axis. It is shown that the factorization of the matrix spectral density makes it possible to obtain a solution to the problem of optimal minimax linear filtration and is necessary to solve the problem of linear optimal control based on incomplete data. The search for optimal control based on incomplete data from the emerging multidimensional antagonistic game is reduced to solving a specific system of relations. Matrix boundary value problem methods, Hilbert matrix transformations, and properties of matrix frequency characteristics are used in the solution. An illustrative example is presented.

Keywords: factorization, multidimensional, stationary, vector random process, minimax linear filter, uncertainty, matrix spectral density, guaranteeing matrix frequency response, control, saddle point

For citation

Sidorov IG. Synthesis of a discrete optimal multidimensional controller based on incomplete data: Multidimensional spectral approach. *RUDN Journal of Engineering Research.* 2025;26(4):428–446. (In Russ.) http://doi.org/10.22363/2312-8143-2025-26-4-428-446

Введение

Задача управления и оценивания марковских процессов по наблюдениям за другим, связанным с ним процессом находилась в центре внимания исследователей многие годы [1–13]. Обсуждена общая формулировка этой задачи для случая линейных систем с постоянными параметрами, а также в частотном синтезе адаптивного оптимального управления для частично наблюдаемых стохастических систем на случай произвольного конечного числа ограничений на спектральную плотность векторного возмущения и ошибок измерения, присутствующих в канале наблюдения векторного полезного сигнала. Проблематика рассматриваемой задачи тесно связана с факторизацией матричной спектральной плотности (МСП), которая возникает в задачах оптимальной стационарной линейной фильтрации и оптимального линейного управления [1–2; 9; 13]. В исследовании (раздел 2) показано, что факторизация МСП необходима и для решения задачи оптимального линейного управления многомерными стационарными случайными процессами в условиях неопределенности их спектральных плотностей, она также возникает в теории минимаксной линейной фильтрации стационарных процессов [14]. В рамках теории линейной фильтрации и в ее терминах проблема факторизации равноценна отысканию формирующего и отбеливающего фильтра и в конечном счете переходу от исходного наблюдаемого процесса к эквивалентному ему белому шуму, называемому фундаментальным процессом. Близкой к задаче факторизации МСП является проблема факторизации матричной передаточной функции (МПФ), возникающая в H^{∞} теории управления [2–12; 15]. Заметим, что задача факторизации применительно к рациональным МСП решена полностью в [16], в частности, в последние десятилетия особое внимание уделяется методам построения таких систем, математические модели которых представляются элементами с минимальными нормами в пространствах Харди, в [18] рассмотрен частотный метод синтеза оптимальных регуляторов для линейных систем со скалярным возмущением на множестве рациональных функций. Однако важным является получение решения задачи оптимального линейного управления с факторизацией именно для процессов с нерациональными спектрами, т. е. в конечном счете в общем случае. Заметим, что задача линейной фильтрации процессов при рациональных спектрах существенно перекрывается теорией Калмана — Бьюси [28], и потому для общего решения задачи линейной фильтрации многомерных стационарных случайных процессов требуется факторизация в общем случае необязательно рациональных МСП. В [19–20] было получено решение задачи факторизации спектральной плотности с использованием преобразования Гильберта для фильтров с непрерывным [19] и дискретным [20] временем. Задача факторизации МСП для многомерных процессов с непрерывным временем была рассмотрена в [21]. В [15] для решения задачи факторизации МСП было предложено использовать математический аппарат теории граничных значений аналитических функций [22–24] и теории краевых задач [25; 26].

В отличие от универсального подхода, основанного на решении уравнений Риккати [1; 22], предлагаемый ниже метод использует спектральные особенности синтезируемых систем, позволяя существенно упростить анализ и поиск линейного оптимального управления по неполным данным. В [9] указана возможность синтеза минимаксного управления процессом в линейной неопределенно-стохастической системе с неполными данными, где постоянные интенсивности шумов в уравнениях состояния и наблюдения заданы лишь с точностью до принадлежности некоторым известным множествам. Использование спектрального подхода для задач с одним управлением позволяет существенно упростить анализ и синтез оптимальных решений по сравнению с методами «2-Риккати» и LMI [17]. Такое упрощение имеет особый смысл при реализации алгоритмов адаптивной настройки законов управления для различных объектов в режиме реального времени. Это связано с тем, что, с одной стороны, несмотря на бурное развитие цифровых устройств, по-прежнему остаются актуальными ограничения, связанные с недостаточными вычислительными ресурсами для подвижных объектов и разных встраиваемых систем, как следствие, порождающих особые требования к простоте применяемых алгоритмов. С другой стороны, достаточно остро ставится вопрос качества управления. Предлагаемый подход может послужить основой для проектирования систем управления с использованием нейронных сетей, нечеткой логики, прогнозирующих моделей и других эффективных средств, базирующихся на современных компьютерных технологиях. В связи с отмеченными обстоятельствами в настоящей статье разобран ряд вопросов, связанных с обобщением использования спектрального подхода к синтезу оптимального многомерного управления по интегральному среднеквадратическому критерию качества для многомерных стационарных случайных процессов в условиях неопределенности их спектральных плотностей.

1. Постановки задачи линейного стационарного оптимального управления многомерными стационарными случайными процессами

Будем считать, что движение динамического объекта описывается векторным рекуррентным уравнением

$$\boldsymbol{X}(n+1)=\boldsymbol{LX}(n)+\boldsymbol{BU}(n)+\varsigma_1(n+1)+$$
$$+\varsigma_2(n+1),\ \boldsymbol{X}(0)=\boldsymbol{X}_0, \qquad (1)$$
$$\varsigma_2(n)=\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{P}_k\left[u_k(n)\right].$$

Наблюдаемый векторный случайный процесс и выходной $W(n)$, подлежащий оцениванию, процесс описывается стохастическим уравнением

$$\boldsymbol{Y}(n+1)=\boldsymbol{CX}(n)+\boldsymbol{DU}(n)+\boldsymbol{\eta}_1(n+1)+$$
$$+\boldsymbol{\eta}_2(n+1),\ \boldsymbol{Y}(0)=\boldsymbol{Y}_0, \qquad (2)$$
$$\boldsymbol{\eta}_2(n)=\sum_{k=1}^{M}\boldsymbol{Q}_k\left[v_k(n)\right]$$

и выражением $\boldsymbol{W}(n)=\boldsymbol{EX}(n)$.

Здесь $\boldsymbol{X}(n)$ — вектор фазовых координат объекта; $\boldsymbol{X}(0)$ — случайный вектор начальных условий; $\boldsymbol{Y}(0)$ — случайный вектор; $\varsigma_1(n)$ — дискретный векторный белый шум, называемый далее шумом объекта; $\varsigma_2(n)$ — дискретный случайный векторный процесс с неизвестной матричной спектральной положительно определенной диагональной плотностью $H_{x_c}(\lambda)$, порожденный возмущениями $u_k(n)$, называемый шумом канала наблюдения; $\boldsymbol{\eta}_1(n)$ — дискретный векторный белый шум, называемый далее шумом канала измерений; $\boldsymbol{\eta}_2(n)$ — дискретный случайный векторный процесс с неизвестной матричной спектральной плотностью $H_{y_c}(\lambda_1)$, порожденный возмущениями $v_k(n)$; $\boldsymbol{P}_k, \boldsymbol{Q}_k, \boldsymbol{L}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}, \boldsymbol{D}, \boldsymbol{E}$ — матрицы или матричные функции времени соответствующих размеров.

В уравнения (1) и (2) входит также векторный управляющий процесс $\boldsymbol{U}(n)$, имеющий $M\boldsymbol{U}(n)=0$ и ограниченные дисперсии компонент $MU_i^2(n)=a_i^2$. Корреляционные функции компонент процесса $\boldsymbol{U}(n)$ неизвестны. Будем при этом считать, что условия некоррелированности возмущающих процессов, шумов объекта и канала измерений наложены. Относительно матриц $\boldsymbol{L}, \boldsymbol{B}, \boldsymbol{C}$ сделаем следующие допущения:

1) система объект — измеритель (1), (2) является полностью наблюдаемой системой, т.е.

$$\operatorname{rang}(\boldsymbol{C}, \boldsymbol{L}^T\boldsymbol{C}, \ldots, (\boldsymbol{L}^{n-1})^T\boldsymbol{C})=q,$$

где q размерность вектора состояния $\boldsymbol{X}(n)$ системы объекта (1);

2) система объект (1) является полностью управляемой системой, т.е.

$$\operatorname{rang}(\boldsymbol{B}, \boldsymbol{LB}, \ldots, \boldsymbol{L}^{n-1}\boldsymbol{B})=q.$$

Спектральные матричные диагональные неотрицательные плотности $\boldsymbol{H}_{x_c}(\lambda)$ и $\boldsymbol{H}_{y_c}(\lambda_1)$ процессов u и v удовлетворяют моментным векторным неравенствам

$$\int_{\Lambda_1}\boldsymbol{H}_{x_c}(\lambda)\Phi_j d\lambda\le \boldsymbol{b}_j,\ j=1,\ldots,m_1; \qquad (3)$$
$$\int_{\Lambda_1}\boldsymbol{H}_{y_c}(\lambda)\Psi_j d\lambda\le \boldsymbol{c}_j,\ j=1,\ldots,m_2;$$
$$\boldsymbol{H}_{x_c}(\lambda)\ge 0,\ \boldsymbol{H}_{y_c}(\lambda)\ge 0,$$

где $\Phi_j(\lambda)\in \overline{R}_+^{m_1}, \Psi_j(\lambda)\in \overline{R}_+^{m_2}$ — неотрицательные, четные по λ заданные векторные функции частоты; $R_+^n=\left\{x\in R^n \mid x_i>0, i=1,\ldots,n\right\}$ — положительный ортант пространства R^n; $\boldsymbol{b}_j, \boldsymbol{c}_j$ — заданные неотрицательные постоянные векторы; $\overline{R}_+^n=\left\{x\in R^n \mid x_i\ge 0, i=1,\ldots,n\right\}$ — неотрицательный ортант R^n (замыкание R_+^n).

Физический смысл ограничений (3) состоит в том, что на определенные возмущения в системе объект — измеритель (1), (2), корреляционные функции которых точно неизвестны, однако известны верхние оценки их дисперсий и (или) дисперсий производных и т.п., наложены ограничения на их моменты и на области их сосредоточения спектра (ожидаемые полосы частот).

На наблюдаемый процесс $\boldsymbol{Y}(n)$ налагается лишь условие линейной регулярности максимального ранга, т. е. в терминах матричной спектральной плотности условие Пэли — Винера имеет аналогичный вид [27] для случая рациональной матричной спектральной плотности $\boldsymbol{S}(\mu)$ относительно μ

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\ln \det \boldsymbol{S}(\mu)}{1+\mu^2} d\mu > -\infty, \quad (4)$$

обеспечивающего представление — факторизацию

$$\boldsymbol{S}(\lambda) = \boldsymbol{F}\left(e^{-i\lambda}\right)\boldsymbol{F}^*\left(e^{-i\lambda}\right), \quad (4a)$$

где матричные функции $\boldsymbol{F}(i\lambda)$ и $\boldsymbol{F}^{-1}(i\lambda)$ — аналитические в нижней полуплоскости переменной λ, т. е. являются частотными характеристиками физически осуществимых (формирующего и отбеливающего) фильтров; (*) — знак сопряжения матриц.

В настоящей статье решение задачи факторизации будет основываться на разработанном ранее методе преобразования Гильберта в [19] для скалярного стационарного случайного процесса. Там показано, что граничное значение функции $\boldsymbol{\Gamma}\left(e^{i\lambda}\right)$ аналитической в нижней полуплоскости удовлетворяет граничному значению МСП $\boldsymbol{S}(\lambda) = \left|\boldsymbol{\Gamma}\left(e^{i\lambda}\right)\right|^2$. По наблюдению процесса $\boldsymbol{Y}(n)$ на полубесконечном отрезке времени $v = -\infty, \ldots, n$ требуется найти оптимальную линейную оценку $\hat{\boldsymbol{X}}(n)$ случайного вектора $\boldsymbol{X}(n)$, т. е. вектор $\hat{\boldsymbol{X}}(n) = \left(\hat{X}(n), \ldots, \hat{X}_q(n)\right)$ ортогональных проекций $\hat{X}_j(n) = \hat{M}\left(X_j(n) \mid H^Y(n)\right)$ случайных величин $X_j(n), j = 1, \ldots, q$ на линейное подпространство $H^Y(n)$, порожденное случайными величинами $Y_k(v)$, $k = 1, \ldots, m$, $v = -\infty, \ldots, n$

$$\hat{\boldsymbol{X}}(n) = \int_{-\pi}^{\pi} e^{i\lambda n} \hat{\boldsymbol{G}}_v\left(e^{-i\lambda}\right) \tilde{\boldsymbol{\mu}}^X(d\lambda), \quad (5)$$

где $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{x_c}(d\lambda)$ — известная векторная ортогональная случайная мера процесса $\boldsymbol{X}(n)$, $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{x_d}(d\lambda)$ — неизвестная векторная ортогональная случайная мера процесса $\boldsymbol{X}(n)$, взаимно некоррелированная с известной мерой $\tilde{\boldsymbol{\mu}}_{x_c}(d\lambda)$. В выражении (5) $\hat{\boldsymbol{G}}_v\left(e^{-i\lambda}\right)$ — матричная частотная характеристика (МЧХ) оптимального минимаксного линейного фильтра с учетом ограничений (3), наложенных на неизвестные матричные спектральные плотности процессов $\boldsymbol{X}(n)$ и $\boldsymbol{Y}(n)$. Все векторные ортогональные случайные меры будем считать абсолютно непрерывными и стационарно связанными, а значит, у них существуют матричные спектральные плотности.

Процессы $\boldsymbol{X}(n)$ и $\boldsymbol{Y}(n)$ имеют матричные спектральные плотности

$$\boldsymbol{S}(\lambda) = \boldsymbol{S}^{YY}(\lambda);$$

$$\boldsymbol{S}^{XX}(\lambda) = M\boldsymbol{\mu}^X(d\lambda)\left(\boldsymbol{\mu}^X(d\lambda)\right)^* / d\lambda; \quad (5a)$$

$$\boldsymbol{S}^{XY}(\lambda) = M\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{X}}(d\lambda)\left(\boldsymbol{\mu}^{\mathrm{Y}}(d\lambda)\right)^* d\lambda;$$

$$\boldsymbol{S}^{YY}(\lambda) = M\left|\boldsymbol{\mu}^Y(d\lambda)\right|^2 / d\lambda.$$

Спектральные плотности $\boldsymbol{S}^{XX}(\lambda)$ и $\boldsymbol{S}^{YY}(\lambda)$ возможно представить в виде

$$\boldsymbol{S}^{XX}(\lambda) = \boldsymbol{S}_c^{XX}(\lambda) + \boldsymbol{H}_{x_c}(\lambda); \quad (6)$$

$$\boldsymbol{S}^{YY}(\lambda) = \boldsymbol{S}_c^{YY}(\lambda) + \boldsymbol{H}_{y_c}(\lambda).$$

Здесь $\boldsymbol{S}_c^{XX}, \boldsymbol{S}_c^{YY}$ — известные положительные матричные спектральные плотности процессов $\boldsymbol{X}(n)$ и $\boldsymbol{Y}(n)$, которые в общем случае не являются рациональными, а меры $\boldsymbol{\mu}_{x_c}(d\lambda)$, $\boldsymbol{\mu}_{y_c}(d\lambda)$ обладают свойством

$$M\left[d\boldsymbol{\mu}_{x_c}(\lambda_1)\, d\boldsymbol{\mu}_{x_c}^*(\lambda_2)\right] = \boldsymbol{H}_{x_c}(\lambda_1)\,\delta(\lambda_1 - \lambda_2)\, d\lambda_1;$$

$$M\left[d\boldsymbol{\mu}_{y_c}(\lambda_1)d\boldsymbol{\mu}^*_{y_c}(\lambda_2)\right]=,$$
$$=\boldsymbol{H}_{y_c}(\lambda_1)\delta(\lambda_1-\lambda_2)d\lambda_1$$

где $\boldsymbol{H}_{x_c}(\lambda)$, $\boldsymbol{H}_{y_c}(\lambda)$ — неизвестные положительно полуопределенные диагональные матричные функции, подчиняющиеся ограничениям вида (3). Вопрос факторизации МСП $\boldsymbol{S}^{YY}(\lambda)$ в ее представлении (6) в предположении о линейной регулярности максимального ранга ее известной составляющей $\boldsymbol{S}_c^{YY}(\lambda)$ решается на основе теоремы 1 (доказательство теоремы 1 приводится в Приложении). Оптимальная оценка для минимаксного фильтра дается выражением [21]

$$\boldsymbol{G}\left(e^{-i\lambda}\right)=\left[\boldsymbol{S}^{XY}(\lambda)\left(\boldsymbol{F}^{-1}\left(e^{i\lambda}\right)\right)^*\right]_{PR}\boldsymbol{F}^{-1}\left(e^{-i\lambda}\right)$$

в результате применения интегральных преобразований над матричной частотной характеристикой сглаживающего оптимального фильтра $\boldsymbol{H}_S(\lambda)$

$$\boldsymbol{H}_S(\lambda)=\boldsymbol{S}^{X\zeta}(\lambda)\left(\boldsymbol{S}^{\zeta\zeta}(\lambda)\right)^{-1}=$$
$$=\boldsymbol{S}^{XY}(\lambda)\left(\mathbf{F}^{-1}\left(e^{-i\lambda}\right)\right)^*$$

процесса $X(n)$ по фундаментальному процессу $\varsigma(n)$

$$\varsigma(n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda n}\mathbf{v}(d\lambda)=$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda n}\boldsymbol{F}^{-1}\left(e^{-i\lambda}\right)\boldsymbol{\mu}^Y(d\lambda)$$

в виде

$$\boldsymbol{E}(n)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{+\pi}e^{i\lambda n}\boldsymbol{H}_s(\lambda)d\lambda,$$

$$\boldsymbol{H}_s(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}e^{-i\lambda n}\boldsymbol{E}(n),$$

называемых сепарацией и обозначаемых $\boldsymbol{H}\left(e^{-i\lambda}\right)=\left[\boldsymbol{H}_S(\lambda)\right]_{PR}$.

Требуется найти линейное стационарное векторное управление

$$\boldsymbol{U}(n), U_j(n)\in \mathrm{H}^Y(n),\ j=1,\ldots,r,$$
$$U_j(n)\in H^Y(n),\ j=1,\ldots,r,$$

минимизирующее критерий качества управления

$$R=M\boldsymbol{X}^T(n)\boldsymbol{Q}\boldsymbol{X}(n)\to\min_{\boldsymbol{U}(n)},\tag{7}$$

где $\boldsymbol{Q}$ — неотрицательно определенная матрица при ограничениях по дисперсии, наложенных на компоненты $U_j(n)$ управляющего процесса $U(n)$:

$$MU_j^2(n)\le a_j^2,\ j=1,\ldots,r,\tag{8}$$

и условиях неупреждаемости, наложенных на компоненты $U_j(n)$ по отношению к наблюдаемому процессу $\boldsymbol{Y}(n)$: $U_j(n)\in H^Y(n)$, $j=1,\ldots,r.$

Пусть векторные стационарные случайные процессы $\boldsymbol{X}_0(n)$, $\boldsymbol{Y}_0(n)$ заданы точно, управляемый процесс $\boldsymbol{X}(n)$ и наблюдаемый $\boldsymbol{Y}(n)$ выражаются в виде

$$\boldsymbol{X}(n)=\boldsymbol{X}_0(n)+\boldsymbol{X}^U(n),$$
$$\boldsymbol{Y}(n)=\boldsymbol{Y}_0(n)+\boldsymbol{Y}^U(n),\tag{8a}$$

где $\boldsymbol{X}^U(n)$ и $\boldsymbol{Y}^U(n)$ — составляющие процессов $\boldsymbol{X}(n)$ и $\boldsymbol{Y}(n)$, обусловленные векторным стационарным управляющим процессом $\boldsymbol{U}(n)$ и выражающиеся в виде

$$\boldsymbol{X}^U(n)=\sum_{v=-\infty}^{n}\boldsymbol{B}(n-v)\boldsymbol{U}(v),$$
$$\boldsymbol{Y}^U(n)=\sum_{v=-\infty}^{n}\boldsymbol{D}(n-v)\boldsymbol{U}(v),\tag{9}$$

где $\boldsymbol{B}(n-v)$, $\boldsymbol{D}(n-v)$ — матричные импульсные переходные функции (МИПФ) системы (1), (2).

Подставляя ортогональное разложение $X(n)=\hat{X}(n)+\tilde{X}(n)$ в выражение для критерия (7), в результате получим, что $R=\hat{R}+\tilde{R}$, где $\hat{R}(U)=M\hat{X}(n)Q\hat{X}(n)$ — средний риск управления, $\tilde{R}=M\tilde{X}^T(n)Q\tilde{X}(n)$ — средний риск фильтрации. Поскольку $\tilde{R}$ не зависит от управляющего процесса $U(n)$, задача оптимального управления сводится к минимизации $\hat{R}(U)$. Корректность применимости «принципа разделения» в решении поставленной задачи оптимального управления дается в теореме 2 (доказательство теоремы 2 приводится в Приложении 1).

Пусть $\mathbf{v}(d\lambda)$ — векторная ортогональная фундаментальная случайная мера процесса $Y(n)$.

Тогда процесс $\hat{X}_0(n)$ будет иметь спектральное представление

$$\hat{X}_0(n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda n}\hat{G}_v\left(e^{-i\lambda}\right)\mathbf{v}(d\lambda),$$

где $\hat{G}_v\left(e^{-i\lambda}\right)$ — МЧХ линейного минимаксного фильтра, оптимального по отношению к фундаментальному процессу $\varsigma(n)$, а процесс $U(n)$ будет иметь спектральное представление

$$U(n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda n}H\left(e^{-i\lambda}\right)\hat{G}_v\left(e^{-i\lambda}\right)\mathbf{v}(d\lambda). \quad (10)$$

Оптимальный линейный регулятор для стохастической системы (1), (2) будем искать в представлении (10), где $H\left(e^{-i\lambda}\right)$ — вектор МЧХ управляющего линейного звена (управляющего устройства) по отношению к процессу $\hat{X}_0(n)$:

$$\hat{X}(n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda n}\Delta\left(e^{-i\lambda}\right)\hat{G}_v\left(e^{-i\lambda}\right)\mathbf{v}(d\lambda).$$

Тогда процесс $\hat{X}(n)$ будет иметь спектральное представление.

По сути, задача свелась к нахождению дискретного регулятора во временной области в виде

$$\hat{U}(n)=\hat{K}(n)\hat{X}_0(n), \quad (11)$$

где $\hat{K}(n)$ — матрица коэффициентов усиления регулятора, имеющая в спектральном представлении вид

$$\hat{K}(n)=\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda n}\hat{H}_{opt}\left(e^{-i\lambda}\right)\mathbf{v}(d\lambda). \quad (12)$$

Для сравнения отметим, что в данной ситуации в основе конструкции стохастического наблюдателя, который должен «вырабатывать» наилучшую с позиции функционала $\hat{R}(U)=M\hat{X}(n)Q\hat{X}(n)$ оценку измеряемого процесса $Y(n)$ для стохастической системы (1), (2) лежал минимаксный фильтр $\hat{G}_v\left(e^{-i\lambda}\right)$ через инструмент факторизации матричной спектральной плотности $S(\lambda)$ наблюдаемого процесса $Y(n)$, но возможен также и вариант синтеза дискретного регулятора с использованием фильтра Калмана в качестве наблюдателя, представленного в частотно-непрерывной области ранее в [14], если добавить вспомогательный функционал оптимизации $\tilde{R}=Me^T(n)Qe(n)$ для минимизации ошибки восстановления (наблюдения, фильтрации) $e(n)=X(n)-\hat{X}(n)$ к основному критерию оптимизации по МЧХ управляющего линейного звена (управляющего устройства) по отношению к процессу $\hat{X}_0(n)$ для поиска оптимального матричного коэффициента усиления $\hat{K}(n)$ в оптимальном наблюдателе (оптимальном фильтре Калмана — Бьюси). Ниже будут представлены уравнения, описывающие оптимальный наблюдатель фильтра Калмана и структуру оптимального регулятора, формирующего оптимальное управление.

2. Решение задачи оптимального управления

Для поиска оптимального решения далее рассматривается задача минимизации функционала Лагранжа риска управления по строке управления $H^{(j)}\left(e^{-i\lambda}\right)$:

$$\int_{-\pi}^{\pi} Sp\left\{\boldsymbol{\Delta}\left(e^{-i\lambda}\right)\boldsymbol{N}(\lambda)\boldsymbol{\Delta}^*\left(e^{-i\lambda}\right)\right\}d\lambda+,$$

$$+\lambda_j\left(\int_{-\pi}^{\pi}\boldsymbol{H}^{(j)}\left(e^{-i\lambda}\right)\boldsymbol{N}(\lambda)\left(\boldsymbol{H}^{(j)}\left(e^{-i\lambda}\right)\right)^* d\lambda-a_j^2\right)\to\min_{\boldsymbol{H}^{(j)}} \quad (13)$$

$$j=1,\ldots,r,$$

где введены обозначения

$$\boldsymbol{\Delta}\left(e^{-i\lambda}\right)=\boldsymbol{I}-\boldsymbol{B}\left(e^{-i\lambda}\right)\boldsymbol{H}\left(e^{-i\lambda}\right),$$
$$\boldsymbol{N}(\lambda)=\hat{\boldsymbol{G}}_\nu\left(e^{-i\lambda}\right)\boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{G}}_\nu^*\left(e^{-i\lambda}\right),$$

$\lambda_j>0$ — j-й множитель Лагранжа, соответствующий j-му ограничению (8).

Введем обозначение для подынтегральной функции функционала Лагранжа

$$\ell\left(\boldsymbol{H}^{(j)},\lambda_j\right)=Sp\left\{\boldsymbol{\Delta}\left(e^{-i\lambda}\right)\boldsymbol{N}(\lambda)\boldsymbol{\Delta}^*\left(e^{-i\lambda}\right)\right\}+$$

$$+\lambda_j\left(\int_{-\pi}^{\pi}\boldsymbol{H}^{(j)}\left(e^{-i\lambda}\right)\boldsymbol{N}(\lambda)\left(\boldsymbol{H}^{(j)}\right)^*\left(e^{-i\lambda}\right)d\lambda-a_j^2\right). \quad (14)$$

Уравнения Эйлера, соответствующие (14), можно записать в виде

$$\frac{\partial\ell\left(\boldsymbol{H}^{(j)},\lambda_j\right)}{\partial\boldsymbol{H}^{(j)}}=0,\ \frac{\partial\ell\left(\boldsymbol{H}^{(j)},\lambda_j\right)}{\partial\lambda_j}=0,\ j=1,\ldots,r. \quad (15)$$

Из соотношений (15) можно воспользоваться приемом нахождения минимума следа функционала Лагранжа риска управления с использованием операций матричного дифференцирования скалярной функции от матричного аргумента $\boldsymbol{H}^{(j)}$ (см. Приложение 2). В результате применения этих операций получаем оптимальный вектор управлений

$$\boldsymbol{H}_{\text{opt}}^{(j)}=\frac{\boldsymbol{B}^{(j)}\left(e^{-i\lambda}\right)}{\boldsymbol{B}^{(j)}\left(e^{-i\lambda}\right)\boldsymbol{B}^{(j)*}\left(e^{-i\lambda}\right)+\lambda_j^{\text{opt}}};$$

$$j=1,\ldots,r, \quad (16)$$

где $\boldsymbol{B}^{(j)}\left(e^{-i\lambda}\right)$ — это j-я строка матрицы $\boldsymbol{B}\left(e^{-i\lambda}\right)$. Заметим, что представление (16) корректно в смысле применения операции деления на выражение $\boldsymbol{B}^{(j)}\left(e^{-i\lambda}\right)\boldsymbol{B}^{(j)^*}\left(e^{-i\lambda}\right)+\lambda_j^{\text{opt}}$, так как последнее представляет собой скалярное выражение, всегда отличное от нуля.

Искомый вектор множителей Лагранжа $\boldsymbol{\lambda}^{\text{opt}}=\left(\lambda_1^{\text{opt}},\ldots,\lambda_r^{\text{opt}}\right)$ можно найти с помощью соотношений (8) после подстановки в них выражений (16) для оптимального вектора управлений $\boldsymbol{H}_{\text{opt}}^{(j)}$. В итоге оптимальные множители Лагранжа λ_j^{opt} можно найти из соотношений

$$\left(\frac{\boldsymbol{B}^{(j)}\left(e^{-i\lambda}\right)}{\boldsymbol{B}^{(j)}\left(e^{-i\lambda}\right)\boldsymbol{B}^{(j)*}\left(e^{-i\lambda}\right)+\lambda_j}\right)\left(\hat{\boldsymbol{G}}_\nu\left(e^{-i\lambda}\right)\boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{G}}_\nu^*\left(e^{-i\lambda}\right)\right)\times$$

$$\times\left(\frac{\boldsymbol{B}^{(j)}\left(e^{-i\lambda}\right)}{\boldsymbol{B}^{(j)}\left(e^{-i\lambda}\right)\boldsymbol{B}^{(j)*}\left(e^{-i\lambda}\right)+\lambda_j}\right)^*=a_j^2.$$

В результате решения рассмотренной нами задачи по поиску оптимального управления по неполным данным были получены необходимые и достаточные условия существования седловой точки в явной частотной форме в соответствующей игровой задаче, аналогичные тем, которые были получены в работе Г.А. Голубева для задач А и Б [15] в эквивалентной задаче в непрерывном времени для объекта, описываемого системой стохастических линейных дифференциальных уравнений с постоянными параметрами с квадратичным функционалом качества $\hat{\mathrm{R}}$ по искомому управлению $\hat{\boldsymbol{U}}(n)$ с помощью МЧХ управляющего линейного звена $\boldsymbol{H}\left(e^{-i\lambda}\right)$ (управляющего устройства) по отношению к управляемому марковскому процессу второго порядка $\hat{\boldsymbol{X}}_0(n)$. Аналитическая оценка для оптимального управления в стационарном режиме согласуется с аналогичным результатом, полученным Ю. Ту [28] и Н.Н. Красовским [29] для оценки оптимального многомерного управления в дискретной форме во временной области для стационарного случая как сходящийся многошаговый процесс, полученный ими с применением принципа оптимальности Беллмана — методом динамического программирования. В итоге получена следующая теорема.

Решение задачи оптимального управления

Теорема 2. *Решение задачи нахождения детерминированного оптимального управления*

$$\hat{\mathrm{R}}\left(\boldsymbol{G}_{\nu},\boldsymbol{U}\right)=\mathrm{M}\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\left(\mathrm{n}\right)\boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{X}}\left(\mathrm{n}\right)$$

по неполным данным для отфильтрованного управляемого процесса из наблюдаемого $\boldsymbol{Y}\left(\mathrm{n}\right)$ *дается условиями минимума критерия*

$$\hat{\mathrm{R}}\left(\boldsymbol{G}_{\nu},\boldsymbol{U}\right)=\mathrm{M}\hat{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}\left(\mathrm{n}\right)\boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{X}}\left(\mathrm{n}\right)$$

в форме существования минимаксного линейного фильтра $\hat{\boldsymbol{G}}_{\mathrm{v}}$ *с функцией выигрыша*

$$\mathrm{R}\left(\boldsymbol{G}_{\mathrm{v}},\boldsymbol{U}\right)=\mathrm{M}\tilde{\boldsymbol{X}}^{\mathrm{T}}(n)\boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{X}}\left(\mathrm{n}\right)$$

при ограниченных моментах второго порядка управляющих воздействий $\boldsymbol{U}\left(n\right)$ *по неполным данным в условиях неполной информации о нерациональных спектральных характеристиках возмущающих процессов, действующих на линейный динамический объект и присутствующих в канале измерений.*

Доказательство теоремы 2 представлено в Приложении 1.

Для найденного минимаксного фильтра $\boldsymbol{G}(H_{\mathrm{xc}},H_{\mathrm{yc}})$ решаем задачу оптимального управления.

При решении указанной выше задачи оптимального управления необходимо учесть ограничения по дисперсии (8) и условия, наложенные на процессы $\boldsymbol{U}\left(n\right)$. Для этого применяется метод ортогонального разложения процесса [10]. Аналогичная теорема существования седловой точки сформулирована в [20; 21; 15] для стохастических линейных дифференциальных уравнений в задаче синтеза минимаксного стационарного линейного фильтра координат линейного динамического объекта в непрерывном и дискретном случаях при ограниченных дисперсиях действующих на него возмущений. Необходимые формулы для вычисления производных следа по матричному аргументу приводятся ниже в предположении, которое представлено в Приложении 2.

3. Синтез оптимального наблюдателя и субоптимального регулятора с помощью фильтра Калмана

Пусть не все переменные состояния объекта (1) доступны непосредственному измерению, и пусть, кроме того, измерения осуществляются с помехами типа «белого шума» в условиях линейной регулярности максимального ранга:

$$\begin{gathered}\boldsymbol{X}\left(n+1\right)=\boldsymbol{L}\boldsymbol{X}\left(n\right)+\boldsymbol{B}\boldsymbol{U}\left(n\right)+\\+\varsigma_1\left(n+1\right)+\varsigma_2\left(n+1\right),\ \boldsymbol{X}\left(0\right)=\boldsymbol{X}_0,\\ \varsigma_2\left(n\right)=\sum_{k=1}^{N}\boldsymbol{P}_k\left[u_k\left(n\right)\right],\end{gathered}\tag{17}$$

где $\varsigma_1\left(n\right)$, $\varsigma_2\left(n\right)$ — стационарные некоррелированные между собой процессы с

$$M\varsigma_1\left(n\right)=0, M\varsigma_2\left(n\right)=0, M\varsigma_1\left(n\right)\varsigma_2\left(n\right)=0$$

с нерациональными в общем случае спектральными плотностями $\boldsymbol{S}_1\left(\lambda\right)$ и $\boldsymbol{S}_2\left(\lambda\right)$, а наблюдаемый процесс $\boldsymbol{Y}\left(n\right)$ выражается в виде

$$\begin{aligned}&\boldsymbol{Y}\left(n\right)=\boldsymbol{C}^{T}\boldsymbol{X}\left(n\right)+\varsigma_1\left(n\right)+\varsigma_2\left(n+1\right),\\&\boldsymbol{Y}\left(0\right)=\boldsymbol{Y}_0,\\&\boldsymbol{S}_1\left(\lambda\right)=M\varsigma_1^2\left(n\right)=\boldsymbol{I}\tau^2\le\boldsymbol{I}a_1^2,\\&\boldsymbol{S}_2\left(\lambda\right)=M\varsigma_2^2\left(n\right)\le\boldsymbol{I}a_2^2.\end{aligned}\tag{18}$$

Предполагается, что система объект — измеритель (17), (18) в отсутствие ошибок измерения и возмущений наблюдаема и управляема. Оптимальный стохастический регулятор с обратной связью по состоянию, формирующий искомое управление, состоит из двух частей: устройства, реализующего оптимальный закон управления в виде

$$\hat{\boldsymbol{U}}\left(n\right)=\hat{\boldsymbol{K}}(n)\hat{\boldsymbol{X}}_0(n),\tag{19}$$

где оценка $\hat{X}_0(n)$ вырабатывается во втором устройстве восстановления (наблюдения, фильтрации) — оптимальном наблюдателе (фильтре Калмана — Бьюси). Как и в детерминированном случае, наблюдатель по форме фильтра Калмана описывается в установившемся режиме уравнением [14] в виде

$$\hat{\boldsymbol{X}}(n+1)=\boldsymbol{L}\hat{\boldsymbol{X}}(n)+\boldsymbol{K}_{xx}\boldsymbol{C}\left[\boldsymbol{Y}(n)-\boldsymbol{C}^T\hat{\boldsymbol{X}}(n)\right]+$$

$$+\boldsymbol{B}\sum_{k=-\infty}^{n}\boldsymbol{Z}(n-k)\boldsymbol{C}\left[\boldsymbol{Y}(k)-\boldsymbol{C}^T\hat{\boldsymbol{X}}(k)\right], \qquad (20)$$

где $\hat{\boldsymbol{K}}(n)=\boldsymbol{K}_{xx}(n)\boldsymbol{C}$ — искомая оптимальная матрица усиления регулятора, а корреляционная матрица $\boldsymbol{K}_{xx}(n)$ процесса $\boldsymbol{X}(n)$, отнесенная к τ^2, удовлетворяет уравнению в установившемся режиме

$$\boldsymbol{L}\boldsymbol{K}_{xx}+\boldsymbol{K}_{xx}\boldsymbol{L}^T+\boldsymbol{K}\boldsymbol{B}^T+$$

$$+\boldsymbol{B}\boldsymbol{K}^*-\boldsymbol{K}_{xx}\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T\boldsymbol{K}_{xx}=\boldsymbol{0}, \qquad (21)$$

где $\boldsymbol{Z}(k)=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}e^{i\lambda k}\boldsymbol{Z}_+(\lambda)\,d\lambda$ — оригинал изображения $\boldsymbol{Z}_+(\lambda)=\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\boldsymbol{z}_k e^{-i\lambda k}$, представляющий собой физически реализуемый фильтр $\boldsymbol{Z}(\lambda)=\boldsymbol{K}_{\lambda x}\boldsymbol{C},\quad \boldsymbol{K}=\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty}\bar{\boldsymbol{K}}_{\lambda x}d\lambda$. Конструктивный способ, позволяющий определить интеграл $\boldsymbol{K}$, описан подробно в монографии [14, с. 171] с помощью функций $\boldsymbol{\Phi}(i\lambda)$ и $\boldsymbol{X}_u(\lambda)$:

$$\boldsymbol{\Phi}(i\lambda)=$$

$$=\left[\tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{B}\left(1+\boldsymbol{C}^T\tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{K}_{xx}\boldsymbol{C}\right)-\tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{K}_{xx}\boldsymbol{C}\boldsymbol{C}^T\tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{B}\right]\times$$

$$\times\frac{\boldsymbol{U}^-(i\lambda)}{\boldsymbol{V}^*(i\lambda)}\times\frac{1}{\left|\boldsymbol{C}^T\tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{B}\right|^2};$$

$$\boldsymbol{X}_u(\lambda)=\boldsymbol{I}+\left|\boldsymbol{C}^T\tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{B}\right|^2\frac{\boldsymbol{H}(\lambda)}{\tau^2},$$

где $\boldsymbol{U}^-(i\lambda)$ и $\boldsymbol{V}^*(i\lambda)$ — матричные полиномы от $i\lambda$, имеющие нули соответственно в верхней ($\operatorname{Im}\lambda>0$) и нижней ($\operatorname{Im}\lambda<0$) полуплоскостях, полученные через факторизованное представление определителя матрицы

$$\tilde{\boldsymbol{A}}=\omega\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L},\ \omega=e^{-i\lambda},$$

$$\det\tilde{\boldsymbol{A}}=\det(\omega\boldsymbol{I}-\boldsymbol{L})=\boldsymbol{U}(i\lambda)\boldsymbol{V}^*(i\lambda).$$

Отметим также, что в силу наблюдаемости системы (17) можно определить вектор весовых коэффициентов $\boldsymbol{K}_{xx}\boldsymbol{C}$, а значит, и вектор коэффициентов усиления оптимального регулятора $\hat{\boldsymbol{K}}(n)$, не обращаясь к системе уравнений (21). Для этого необходимо составить уравнения для нулей $i\lambda=\gamma^-$ и $i\lambda=\gamma^+$ $\boldsymbol{C}^T\tilde{\boldsymbol{A}}^{-1}\boldsymbol{B}$ (если они есть) в верхней полуплоскости

$$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}^T\left(\gamma^-\boldsymbol{I}+\boldsymbol{L}\right)\boldsymbol{K}_{xx}\boldsymbol{C}=$$

$$=\boldsymbol{X}_u^+\left(\gamma^-\right)\boldsymbol{U}^-\left(-\gamma^-\right)/\boldsymbol{U}^-\left(\gamma^-\right) \qquad (22)$$

и для нулей $i\lambda=\gamma^+$ в нижней полуплоскости

$$\boldsymbol{I}+\boldsymbol{C}^T\left(\gamma^+\boldsymbol{I}+\boldsymbol{L}\right)\boldsymbol{K}_{xx}\boldsymbol{C}=\frac{1}{\boldsymbol{X}_u^+\left(\gamma^+\right)}\times\frac{\boldsymbol{U}^-\left(-\gamma^+\right)}{\boldsymbol{U}^-\left(\gamma^+\right)}. \qquad (23)$$

Таким образом, для нахождения вектора усиления регулятора и фильтра решения системы (21) не требуется. В случае определения диагональных моментов корреляционной матрицы $\boldsymbol{K}_{xx}$, определяющих качество фильтрации, решение системы (21) упрощается и сводится к решению линейной системы вида

$$\boldsymbol{A}\boldsymbol{K}_{xx}+\boldsymbol{K}_{xx}\boldsymbol{A}=\Upsilon.$$

В конкретных приложениях часто регулятор в форме фильтра Калмана (20), в котором полагается $\boldsymbol{Z}=\boldsymbol{0}$, мало проигрывает оптимальному. В этом случае задача сводится к определению только «весов» $\boldsymbol{K}_{xx}\boldsymbol{C}$. В силу предположения наблюдаемости и управляемости системы (17), (18) можно показать, что система

система (17), (18) асимптотически устойчива за счет выбора матрицы усиления $\hat{\boldsymbol{K}}(n)$ по формуле $\hat{\boldsymbol{K}}(n)=\boldsymbol{K}_{xx}(n)\boldsymbol{C}$ и в управляемости системы (17) всегда найдется единственная положительно определенная матрица $\hat{\boldsymbol{K}}_{xx}^{0}(n)$ обеспечивающая асимптотическую устойчивость системы (17), (18). Для этого можно воспользоваться прямым методом Ляпунова, если в качестве функции Ляпунова принять $V(n)=\boldsymbol{X}^{T}(n)\boldsymbol{K}_{xx}^{0}\boldsymbol{X}(n)>0$. Доказательство этого утверждения очевидно и для непрерывного случая[1]. Если объект управления асимптотически устойчив, то ошибка восстановления с течением времени будет уменьшаться $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{e}(n)=0$.

4. Пример синтеза оптимального управления

Приведем пример применения предлагаемого метода к решению задачи оптимального управления координат динамического объекта — положения и скорости, когда движение объекта описывается рекуррентными уравнениями

$$X_1(n+1)=X_1(n)+hX_2(n)+\frac{h^2}{2}U_1(n)+U_2(n);$$
$$X_2(n+1)=X_2(n)+hU_1(n)+U_2(n), \qquad (24)$$

где h — длительность любого n-го такта, $U_1(n), U_2(n)$ — стационарные процессы $\left(MU_1(n)=0, MU_2(n)=0\right)$ с нерациональными в общем случае спектральными плотностями $S_1(\lambda)$ и $S_2(\lambda)$, а наблюдаемый процесс $Y(n)$ выражается в виде

$$Y(n)=X_1(n)+\eta(n+1)+U_2(n),\ Y(0)=Y_0;$$
$$S_1(\lambda)=MU_1^2(n)\le a_1^2;$$
$$S_2(\lambda)=MU_2^2(n)\le a_2^2, \qquad (25)$$

где $\eta(n)$ — дискретный белый шум с дисперсией $\tau^2=M\eta^2$.

С учетом ограничения (25) на неизвестную компоненту $U_1(n)$ — управляющее возмущение в помехе канала измерений, найдем оптимальный минимаксный фильтр $\hat{G}_v$ методом факторизации и наихудшую спектральную плотность компоненты $U_2(n)$ для процесса $\hat{X}_0(n)$. Воспользовавшись результатом решения аналога этого примера, приводимого в монографии О.М. Куркина и др. [14, пример 3.10] для нахождения спектральной наихудшей плотности компоненты $U_2(n)$, будем иметь ее аналитическое представление в виде

$$h_2(\lambda)=\begin{cases} a_2^2/[2(\pi-\lambda_0] & \text{при} \left|\lambda\right|\ge\lambda_0; \\ 0 & \text{при} \left|\lambda\right|<\lambda_0. \end{cases}$$

Частотные характеристики от входа $U_1(n)$ до выходов $X_1(n), X_2(n)$, и $X(n)$ имеют вид

$$C_1\left(e^{i\lambda}\right)=\frac{h^2}{2}\frac{e^{i\lambda}+1}{e^{i\lambda}-1};$$

$$C_2\left(e^{i\lambda}\right)=\frac{h}{e^{i\lambda}-1};$$

$$\boldsymbol{C}\left(e^{i\lambda}\right)=\begin{bmatrix} C_1\left(e^{i\lambda}\right) \\ C_2\left(e^{i\lambda}\right)\end{bmatrix}.$$

Спектральные плотности фильтруемого и наблюдаемого процессов

$$\boldsymbol{S}^{XX}(\lambda)=\boldsymbol{C}\left(e^{i\lambda}\right)S_1(\lambda)\boldsymbol{C}^*\left(e^{i\lambda}\right);$$

$$S(\lambda)=\left|C_1\left(e^{i\lambda}\right)\right|^2 S_1(\lambda)+h_2(\lambda)+\tau^2.$$

А их взаимная спектральная плотность

$$\boldsymbol{S}^{XY}(\lambda)=\boldsymbol{C}\left(e^{i\lambda}\lambda\right)S_1(\lambda)C_1\left(e^{i\lambda}\right).$$

На втором этапе решим задачу факторизации МСП $S(\lambda)$, воспользовавшись теоремой 2

---

[1] *Александров А.Г.* Оптимальные и адаптивные системы : учебное пособие. Москва : Высшая школа, 1989. 263 с. ISBN 5-06-000037-0

(о факторизации МСП) из работы Г.А. Голубева [20]. Решение задачи факторизации МСП $\boldsymbol{S}(\lambda)$ состоит в расчете матричных функций $\boldsymbol{A}_l(\lambda)=\boldsymbol{S}^{1/2}(\lambda), \ln\boldsymbol{A}_l(\lambda)$ и затем в расчете $\Phi(\lambda)$ как матричного преобразования Гильберта $\ln A_l(\lambda)$ и формирования МЧХ фильтра $\boldsymbol{F}\left(e^{-i\lambda}\right)$ и $\boldsymbol{F}^{-1}\left(e^{-i\lambda}\right)$ по формулам:

$$\boldsymbol{F}\left(e^{-i\lambda}\right)=\boldsymbol{A}_l(\lambda)\exp\left(i\Phi(\lambda)\right),$$
$$\boldsymbol{F}^{-1}\left(e^{-i\lambda}\right)=\exp\left(-i\Phi(\lambda)\right)\boldsymbol{A}_l^{-1}(\lambda),$$

а на третьем этапе воспользуемся формулой (8а) и найдем выражение для физически реализуемого минимаксного фильтра $\hat{\boldsymbol{G}}_v$. Наконец на четвертом этапе определим оптимальное управление (регулятор) фильтруемого процесса $\boldsymbol{X}(n)$ в виде (16)

$$\boldsymbol{H}_{opt}\left(e^{-i\lambda}\right)=\left[\boldsymbol{B}\left(e^{-i\lambda}\right)\boldsymbol{B}^*\left(e^{-i\lambda}\right)+\lambda_{\text{opt}}\right]^{-1}\boldsymbol{B}\left(e^{-i\lambda}\right);$$

$$\boldsymbol{B}\left(e^{i\lambda}\right)=\begin{bmatrix}C_1\left(e^{i\lambda}\right)\\ C_2\left(e^{i\lambda}\right)\end{bmatrix},$$

$$\lambda_{\text{opt}}=\frac{\sqrt{ba}}{a_2}-b=\left[h\cdot\operatorname{ctg}\frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{h^2}{4}+\frac{1}{2\cos^2\frac{\lambda}{2}}}\right]\times$$

$$\times\left[\frac{1}{a_2}\cdot\frac{\sqrt{\frac{h^4}{4}\operatorname{ctg}^2\frac{\lambda}{2}\cdot a_1^2+\frac{a_2^2}{2(\pi-\lambda_0)}+\tau^2}}{h\cdot\operatorname{ctg}\frac{\lambda}{2}\sqrt{\frac{h^2}{4}+\frac{1}{2\cos^2\frac{\lambda}{2}}}}-1\right];$$

$$\hat{a}=\hat{\boldsymbol{G}}_v\left(e^{-i\lambda}\right)\boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{G}}_v^*\left(e^{-i\lambda}\right).$$

$$b=\boldsymbol{B}\left(e^{-i\lambda}\right)\boldsymbol{B}^*\left(e^{i\lambda}\right)=\left|\boldsymbol{B}\left(e^{-i\lambda}\right)\right|^2=$$

$$=h^2\operatorname{ctg}^2\frac{\lambda}{2}\left[\frac{h^2}{4}+\frac{1}{2\cos^2\frac{\lambda}{2}}\right].$$

Матрица ковариаций ошибки восстановления (фильтрации) $\boldsymbol{e}(n)=\boldsymbol{X}(n)-\hat{\boldsymbol{X}}(n)$ будет иметь вид

$$\boldsymbol{K}_{ee}=M\mathbf{e}(n)\mathbf{e}^T(n)=$$
$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(S^{XX}-G_v^*\left(e^{i\lambda}\right)S(\lambda)G_v\left(e^{i\lambda}\right)\right)d\lambda. \qquad (26)$$

Для приближенной оценки параметра $\hat{a}$ в установившемся режиме воспользуемся свойством асимптотически устойчивости объекта управления, то есть поскольку ошибка восстановления с течением времени будет уменьшаться $\lim\limits_{n\to\infty}\boldsymbol{e}(n)=0$, то из последнего соотношения для ковариаций матрицы при выборе весовой матрицы

$$\boldsymbol{Q}\simeq S(\lambda)=\left|C_1\left(e^{i\lambda}\right)\right|^2S_1(\lambda)+h_2(\lambda)+\tau^2,$$

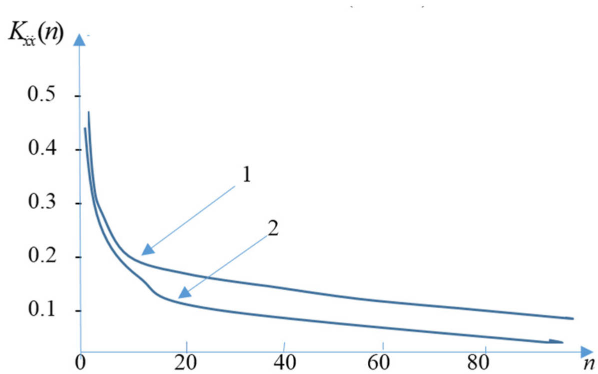
следует, что субоптимальная оценка параметра $\hat{a}$ может быть представлена в виде следа спектральной плотности ошибки восстановления $Sp\boldsymbol{S}^{XX}$:

$$\hat{a}\approx Sp\left(\hat{\boldsymbol{G}}_v\left(e^{i\lambda}\right)S(\lambda)\hat{\boldsymbol{G}}_v^*\left(e^{i\lambda}\right)\right)=$$
$$=\left|\hat{\boldsymbol{G}}_v\left(e^{i\lambda}\right)\right|^2S(\lambda)=Sp\boldsymbol{S}^{XX}=$$
$$=S_1\cdot h^2\operatorname{ctg}^2\frac{\lambda}{2}\left[\frac{h^2}{4}+\frac{1}{2\cos^2\frac{\lambda}{2}}\right].$$

Необходимые параметры оптимального регулятора найдены. Графики изменения коэффициента усиления $K_{\dot{x}\dot{x}}(n)$ по времени для квазиоптимального регулятора, построенного: *1* — методом факторизации матричной спектральной плотности, в общем случае нерациональной для наблюдаемого процесса, и измеряемого в форме наблюдателя — фильтра Калмана — Бьюси представлены на рисунке по методу факторизации спектральной плотности; *2* — по методу фильтра Калмана при $h=1$, $\tau^2=25$, $a_1^2=25$, $a_2^2=25$. Начальные значения матрицы $\boldsymbol{K}_X(0)$ были выбраны исходя из корреляционных оценок по положению $X_1(n)$ и скорости $X_2(n)$, полученным в примере близким по содержанию к модели, рассматриваемой в нашем примере, который представлен в работе О.М. Куркина и др. [14, с.175] и имеют вид

$$K_{xx}(0)=\gamma\lambda_0,$$
$$K_{\dot{x}\dot{x}}(0)=\lambda_0^3\left[\gamma^3/6+\left(1+6\gamma^2\right)/(9\pi)\right],$$
$$K_{x\dot{x}}(0)=\gamma^2\lambda_0^2/2,$$

где параметр γ, находится из соотношения $\frac{1}{\gamma}\operatorname{tg}\frac{1}{\gamma}=1$, $\lambda_0^2=\frac{15}{4}\cdot\frac{\left(\gamma^2+1\right)}{\left(1+6\gamma^2\right)}\frac{a_2}{\tau^2}$.



Изменение ковариации ошибки скорости по времени для квазиоптимального регулятора:
1 — по методу факторизации спектральной плотности;
2 — по методу фильтра Калмана
Источник: выполнено И.Г. Сидоровым

Time variation of the velocity error covariance for a quasi-optimal controller:
1 — by the spectral density factorization method;
2 — by the Kalman filter method
Source: by I.G. Sidorov

Из построенных графиков видно, что проигрыш по точности определения ковариации ошибки скорости спектрального регулятора по сравнению с регулятором — фильтром Калмана — Бьюси составляет примерно 10 %, что обычно допустимо на практике. Из полученных выше соотношений видно, что построение оптимального многомерного регулятора в условиях неопределенности спектральных плотностей как наблюдаемого, так и измеряемого многомерных дискретных марковских стационарных процессов управляемого многомерного динамического объекта методом факторизации спектральной плотности может быть реализовано на ЭВМ с применением вычислительной математики.

5. Результаты

1. Утверждения теорем 1, 2 дают решение задачи оптимальной минимаксной линейной фильтрации и оптимального линейного управления многомерными стационарными случайными процессами в условиях неопределенности их спектральных плотностей в классе многомерных линейных фильтров Винера — Колмогорова $\mathfrak{R}$ с нерациональными спектральными плотностями возмущений, присутствующими в полезном сигнале и помехе измерений, для которых известны лишь моментные неравенства (3), которым удовлетворяют их спектральные меры в форме существования седловой точки игрового процесса.

2. Выявлены необходимые и достаточные условия существования седловой точки у функционала дисперсии ошибки оценивания оптимального линейного управления многомерными стационарными случайными процессами в условиях неопределенности их спектральных плотностей.

3. Условия оптимальности линейного управления по неполным данным при критерии дисперсии ошибки оценивания могут служить основой для разработки рекуррентных вычислительных процедур, реализующих минимаксный фильтр и оптимальное управление.

4. Получен в простой конструктивной форме многомерный регулятор во временной области с помощью наблюдателя фильтра Калмана — Бьюси для стационарных многомерных случай-

ных процессов для случая, когда управляемый сигнал и наблюдаемый содержат по одному возмущению.

5. В конструктивной форме в частотном представлении разработан оптимальный неупреждающий регулятор H^2, формируемый на различные виды внешних возмущений, в том числе и окрашенных, присутствующих как в полезном сигнале, так и в помехе измерений, для которых известны лишь моментные неравенства и области их сосредоточения.

Заключение

Предложенный спектральный подход позволил сформировать новый метод решения синтеза оптимального среднеквадратичного минимаксного асимптотически устойчивого линейного регулятора по неполным данным, который основан на алгоритме, содержащем конечное число простых алгебраических операций. Предложенный метод не использует универсальную технику — оптимального синтеза, связанную с решением уравнений Риккати или линейных матричных неравенств. Это снимает трудности, вызванные вырожденностью задачи, и позволяет существенно уменьшить вычислительные затраты, что имеет особую значимость для адаптивной перенастройки систем обработки сигналов и управления, работающих в режиме реального времени. В перспективе также возможен и синтез частотного робастного неупреждающего регулятора в условиях нечеткости линейной динамической системы, присутствующей, в частности, в матрице состояния системы.

Приложение

Доказательство теоремы 1. Условие факторизуемости матричной спектральной плотности $\boldsymbol{S}^{YY}(\lambda) > 0$ следует из того, что она образуется сложением линейно-регулярной максимального ранга матричной строго положительной спектральной плотности $\boldsymbol{S}_c^{YY}(\lambda) > 0$ и положительной полуопределенной матричной спектральной плотности $\sum_{j=1}^{M} \boldsymbol{H}_{y_c j}(\lambda) \geq 0$. Свойство линейной регулярности максимального ранга для спектральной плотности $\boldsymbol{S}^{YY}(\lambda)$ вытекает в силу предположения, сделанного выше относительно положительной полуопределенности матричных спектральных плотностей $\boldsymbol{H}_{y_c j}(\lambda)$ и линейной регулярности максимального ранга матрицы $\boldsymbol{S}_c^{YY}(\lambda)$. При этом свойство положительной определенности для матричной спектральной плотности сохраняется и, следовательно, по следствию из теоремы Вейля, все собственные значения будут строго положительными, а значит, она положительна определена по теореме 7.2.1 [30, теорема 7.2.1]. По теореме 6.1 [2] для выполнимости свойства линейной регулярности стационарного процесса необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} \ln \det \boldsymbol{S}(\mu) d\mu > -\infty \quad . \tag{П.1}$$

Положительно определенную матрицу $\boldsymbol{S}(\lambda)$ с помощью унитарной матрицы можно привести к диагональному виду. Так как собственные значения $m_k(\mu)$, стоящие на диагонали преобразованной матрицы, строго положительны, то будет выполняться и неравенство (П.1), в силу очевидного разложения для детерминанта матрицы $\boldsymbol{S}(\lambda)$:

$$\ln \det \boldsymbol{S}(\mu) = \sum_{k=1}^{m} \ln m_k(\mu) < \infty,$$

где m — максимальный ранг положительно определенной матрицы $\boldsymbol{S}_c^{YY}(\lambda)$ для почти всех λ, и к матрице $\boldsymbol{S}^{YY}(\lambda)$ применим также механизм факторизации матричной спектральной плотности по методике, изложенной в [15] с помощью граничного значения аналитической в единичном круге матричной функции $\Gamma(z) = \left\{\Gamma_{kj}(z)\right\}_{k=1,m}^{j=1,m}$ класса H_2

$$\Gamma(z) = \exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \ln \boldsymbol{S}(\mu) \frac{e^{-i\lambda} + z}{e^{-i\lambda} - z} d\mu\right\}.$$

При этом показывается, что матричная функция $\Gamma(z)$ обладает граничным свойством

$$\boldsymbol{S}(\lambda)=\lim_{\rho\to 1}\left|\Gamma\left(\rho e^{i\lambda}\right)\right|^2,$$

для, вообще говоря, нерациональной положительно определенной матрицы $\boldsymbol{S}(\lambda)$.

Доказательство теоремы 2. Рассматривая гильбертово пространство m-мерных векторных комплексных функций $L_2(z)$ $\left(z(\lambda)\in\mathfrak{R}^m\right)$, которые задаются в виде строк частотных характеристик размера m со скалярным произведением

$$<\boldsymbol{z}_1(\lambda),\boldsymbol{z}_2(\lambda)>=\int_{-\infty}^{+\infty}\boldsymbol{z}_1(\lambda)\cdot\boldsymbol{z}_2^*(\lambda)\,d\lambda,$$

Знак (*) — сопряжения вектора $\boldsymbol{z}^*=\overline{\boldsymbol{z}}^T$. Нужно решить следующую вариационную задачу:

$$D(\boldsymbol{G})=\int_{-\infty}^{+\infty}\left|\boldsymbol{G}(\lambda)\right|^2\left(\boldsymbol{T}_1(\lambda)+\sum\nolimits_{i=1}^{M}\boldsymbol{H}_{y_c j}(\lambda)\right)+$$

$$+\left|\boldsymbol{G}(\lambda)-\boldsymbol{Q}(\lambda)\right|^2\left(\boldsymbol{T}_2(\lambda)+\sum\nolimits_{i=1}^{N}\boldsymbol{H}_{x_c i}(\lambda)\right)d\lambda\to\min_{\boldsymbol{G}\in\mathfrak{R}^m},$$

$$\left|\boldsymbol{G}(\lambda)\right|^2=<\boldsymbol{G}(\lambda),\boldsymbol{G}^*(\lambda)>,$$

где $\mathfrak{R}^m$ — множество ЧХ физически реализуемых линейных фильтров (аналитических в нижней плоскости), $\boldsymbol{Q}(\lambda)$ — некоторое заданное линейное преобразование полезного сигнала; $\boldsymbol{H}_{x_c i}(\lambda)$ — неизвестные матричные спектральные плотности фильтруемого процесса размерностью $m\times m$; $\boldsymbol{X}(n)$ — неизвестные матричные спектральные плотности в полезной составляющей векторного наблюдения $Y(n)$ размерностью $m\times m$; $\boldsymbol{T}_1(\lambda)$ — матричная спектральная плотность известных составляющих полезного сигнала строго положительная размера $m\times m$; $\boldsymbol{T}_2(\lambda)$ — матричная спектральная плотность известных составляющих фильтруемого сигнала строго положительная размера $m\times m$.

$$\boldsymbol{T}_1(\lambda)>0,\boldsymbol{T}_2(\lambda)>0.$$

Функционал $D(\boldsymbol{G})$ — выпуклый на $L_2(\boldsymbol{z})$ и дифференцируемый в смысле Фреше [6; 32], причем

$$D^{'}(\boldsymbol{G})=2\left(\boldsymbol{T}_1(\lambda)+\sum\nolimits_{i=1}^{M}\boldsymbol{H}_{y_c j}(\lambda)\right)\boldsymbol{G}(\lambda)+$$

$$+2\left(\boldsymbol{G}(\lambda)-\boldsymbol{Q}(\lambda)\right)\left(\boldsymbol{T}_2(\lambda)+\sum\nolimits_{i=1}^{N}\boldsymbol{H}_{x_c i}(\lambda)\right).$$

В условиях дополнительных n ограничений, наложенных на выражения $\boldsymbol{G}_v(\lambda)-\boldsymbol{Q}_+(\lambda)\boldsymbol{P}_k(\lambda)$ в нижней полуплоскости

$$\left[\boldsymbol{G}_v(\lambda)-\boldsymbol{Q}_+(\lambda)\boldsymbol{P}_k(\lambda)\right]_-=\boldsymbol{0},\ k=0,1,...,n,$$

в соответствии с теоремой 1.2 из [31, с. 21] условие оптимальности векторной функции фильтра $\boldsymbol{G}_v(\lambda)$ заключается в выполнении векторно-матричного соотношения

$$\boldsymbol{X}_u(\lambda)\boldsymbol{G}_v(\lambda)-\boldsymbol{Q}(\lambda)\boldsymbol{T}_2(\lambda)=\xi_0(\lambda),\quad (\text{П}.2)$$

где

$$\boldsymbol{X}_u(\lambda)=\boldsymbol{T}_1(\lambda)+\boldsymbol{T}_2(\lambda)+\sum\nolimits_{i=1}^{N}\boldsymbol{H}_{x_c i}(\lambda)+\sum\nolimits_{i=1}^{M}\boldsymbol{H}_{y_c j}(\lambda),$$

$\xi_0(\lambda)$ — некоторая векторная аналитическая в верхней полуплоскости функция. Проведем в соответствии с теоремой 1 факторизацию матричной функции

$$\boldsymbol{X}_u(\lambda)=\boldsymbol{X}_u^+(\lambda)\boldsymbol{X}_u^-(\lambda).$$

Тогда соотношение (П.2) может быть записано так:

$$\boldsymbol{X}_u^+(\lambda)\boldsymbol{G}_v(\lambda)=\boldsymbol{T}_2(\lambda)\boldsymbol{Q}(\lambda)\left[\boldsymbol{X}_u^-(\lambda)\right]^{-1}+\boldsymbol{U}(\lambda),$$

где $\boldsymbol{U}(\lambda)=\xi_0(\lambda)/\boldsymbol{X}_u^-(\lambda)$ — векторная функция аналитическая в верхней полуплоскости. Выделив из левой и правой частей последнего уравнения аналитические в нижней составляющие, получим

$$\boldsymbol{X}_u^+(\lambda)\hat{\boldsymbol{G}}_v(\lambda)=\boldsymbol{T}_2(\lambda)\boldsymbol{Q}(\lambda)\left[\boldsymbol{X}_u^-(\lambda)\right]^{-1},$$

Откуда

$$\hat{\boldsymbol{G}}_v(\lambda)=\left[\frac{\left(\boldsymbol{T}_2(\lambda)+\sum\nolimits_{x_c i}^{N}\boldsymbol{H}_{x_c i}(\lambda)\right)\boldsymbol{Q}(\lambda)}{\boldsymbol{X}_u^-(\lambda)}\right]_+\frac{\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{X}_u^+(\lambda)}.$$

Последнее соотношение может быть записано следующим образом с учетом свойства строгой положительности матрицы

$$\boldsymbol{T}_1(\lambda)+\sum_{i=1}^{M}\boldsymbol{H}_{y_c j}(\lambda):$$

$$\hat{\boldsymbol{G}}_v(\lambda)=\left\{\boldsymbol{Q}(\lambda)\left[\boldsymbol{X}_u^{+}(\lambda)-\frac{\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{X}_u^{-}(\lambda)}\right]\right\}_{+}\frac{\boldsymbol{I}}{\boldsymbol{X}_u^{+}(\lambda)}, \quad (\text{П.2})$$

где $\boldsymbol{X}_u(\lambda)=\boldsymbol{I}+\dfrac{\boldsymbol{T}_2(\lambda)+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{H}_{x_c i}(\lambda)}{\boldsymbol{T}_1(\lambda)+\sum_{i=1}^{M}\boldsymbol{H}_{y_c j}(\lambda)}$,

что и требовалось доказать.

Доказательство теоремы 2

Решая задачу отыскания минимаксного фильтра с функцией выигрыша

$$R(\boldsymbol{G}_v,\boldsymbol{U})=M\tilde{\boldsymbol{X}}^{T}(n)\boldsymbol{Q}\tilde{\boldsymbol{X}}(n),$$

приходим к искомой структуре многомерного оптимального фильтра Винера — Колмогорова. Метод его нахождения аналогичен методу, описанному в монографии О.М. Куркина и др. [14]. Структура искомого многомерного минимаксного фильтра при неопределенностях в матричных спектральных плотностях возмущающих процессов, присутствующих как в полезной составляющей векторного наблюдения, так и в канале измерителя, выводится покомпонентно для каждой координаты векторного наблюдения $\boldsymbol{Y}(n)$ аналогично методу поиска оптимального фильтра для скалярного случая наблюдения и имеет вид (П. 2), при этом имеет место быть факторизованное представление для функции $\tilde{\boldsymbol{X}}_u(\lambda)$ в ее «масштабированном» по матрице

$$\boldsymbol{T}_1(\lambda)+\sum_{i=1}^{M}\boldsymbol{H}_{y_c j}(\lambda)>0$$

виде

$$\tilde{\boldsymbol{X}}_u(\lambda)=\boldsymbol{I}+\frac{\boldsymbol{T}_2(\lambda)+\sum_{i=1}^{N}\boldsymbol{H}_{x_c i}(\lambda)}{\boldsymbol{T}_1(\lambda)+\sum_{i=1}^{M}\boldsymbol{H}_{y_c j}(\lambda)}=$$

$$=\left|\boldsymbol{X}_u^{+}(\lambda)\right|^2, \quad (\text{П.3})$$

где $\boldsymbol{I}$ — единичная матрица с размерностью m.

Представление (П.3а) корректно в смысле применения операции деления на выражение $\boldsymbol{T}_1(\lambda)+\sum_{i=1}^{M}\boldsymbol{H}_{y_c j}(\lambda)$, так как последнее представляет собой положительно определенную матрицу, следовательно, у нее по теореме об обратной матрице существует обратная матрица.

Для найденного минимаксного фильтра $\hat{\boldsymbol{G}}_v$ решаем задачу оптимального управления по максимуму критерия $\hat{R}(\hat{\boldsymbol{G}}_v,\boldsymbol{U})=M\hat{\boldsymbol{X}}^{T}(n)\boldsymbol{Q}\hat{\boldsymbol{X}}(n)$. С учетом ограничений, наложенных на управление $\boldsymbol{U}(n)$, оптимизируем функционал Лагранжа (2.1) на минимум, который существует в силу выпуклости функционала по управлению. Оптимальный вид управляющего звена по отношению к процессу $\hat{\boldsymbol{X}}_0(n)$ дается в виде (16).

Теорема 2 доказана.

Замечание 1. (обоснование корректности в применения «принципа разделения» в построении наблюдателя в форме Калмана)

Корректность применения «принципа разделения» в построении наблюдателя в форме фильтра Калмана (20) при предположениях, наложенных на матричные спектральные плотности известных и неизвестных составляющих полезного сигнала и возмущений, присутствующих в модели объект — измеритель (1)–(2) и обусловлена эквивалентностью модели формирования этих возмущений в виде суммы двух векторных процессов — векторного белого шума и стандартного векторного белого шума, которые суммарно в силу факторизуемости их суммарной спектральной плотности, удовлетворяющей условиям теоремы 1, также представляет векторный эквивалентный белый шум, при этом фильтр Калмана настраивается на верхнюю гарантированную оценку спектральной плотности возмущений в модели [9], следовательно, при сделанных выше предположениях, наложенных на матричные спектральные плотности известных и неизвестных составляющих полезного сигнала и помехи, применим «принцип разделения» в задаче минимизации критерия оптимальности по управлению [1].

Приложение 2

Вспомогательные свойства матричных операций. Формулы для вычисления производных следа по матричному аргументу приводятся ниже (в предположении, что след существует).

1. Дифференцирование скалярной функции по матричному аргументу.

Пусть $\hat{\boldsymbol{G}}_v$, где ρ — скаляр; $\boldsymbol{K}$ — прямоугольная матрица размера $[n \times m]$, $\frac{\partial \rho}{\partial \boldsymbol{K}}$ — есть матрица с элементами

$$\frac{\partial \rho}{\partial K_{ij}}, i = 1, \ldots, n, \; j = 1, \ldots, m.$$

2. Дифференцирование следа Sp квадратной матрицы по матричному аргументу $\boldsymbol{K}$:

$$\frac{\partial Sp(\boldsymbol{KD})}{\partial \boldsymbol{K}} = \boldsymbol{D}^*, \frac{\partial Sp(\boldsymbol{BK}^*)}{\partial \boldsymbol{K}} = \boldsymbol{B},$$

$$\frac{\partial Sp(\boldsymbol{A}(\boldsymbol{K}) \cdot \boldsymbol{B}(\boldsymbol{K}))}{\partial \boldsymbol{K}} = = \frac{\partial \boldsymbol{A}(\boldsymbol{K}) \cdot \boldsymbol{B}}{\partial \boldsymbol{K}} + \frac{\partial \boldsymbol{B}(\boldsymbol{K}) \cdot \boldsymbol{A}}{\partial \boldsymbol{K}}. \quad (\text{П.4})$$

Знак $(*)$ означает знак сопряжения матриц. В матричных идентификаторах $\boldsymbol{A}(\boldsymbol{K})$ и $\boldsymbol{B}(\boldsymbol{K})$ $\boldsymbol{K}$ — переменная, а в идентификаторах $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ — постоянная.

В частном случае

$$\frac{\partial Sp(\boldsymbol{KAK}^*)}{\partial \boldsymbol{K}} = \boldsymbol{KA}^* + \boldsymbol{KA}. \quad (\text{П.5})$$

Если $\boldsymbol{A}$ самосопряженная (эрмитова) $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^*$, то $\frac{\partial Sp(\boldsymbol{KAK}^*)}{\partial \boldsymbol{K}} = 2\boldsymbol{KA}$.

$$\frac{\partial Sp\boldsymbol{AKBK}^*\boldsymbol{C}}{\partial \boldsymbol{K}} = \boldsymbol{A}^*\boldsymbol{C}^*\boldsymbol{KB}^* + \boldsymbol{CAKB}. \quad (\text{П.6})$$

В приведенных выше формулах (П.4)–(П.6) предполагается, что размерности всех матриц согласованы.

Список литературы

1. *Липцер Р.Ш., Ширяев А.Н.* Статистика случайных процессов: Нелинейная фильтрация и смежные вопросы. Москва : Наука,1974. 679 с. URL: https://djvu.online/file/368oebqImcvng (дата обращения: 20.03.2025).

2. *Арато М.* Линейные стохастические системы с постоянными коэффициентами. Статистический подход // под ред. Ю.А. Розанова. Москва : Наука, 1989. 306 с. ISBN 5-02-013934-3

3. *Емельянова Ю.П.* Управление с итеративным обучением дискретной системой с изменяемой эталонной траекторией в условиях неопределенности // Автоматика и телемеханика. 2022. № 9. С. 150–169. https://doi.org/10.31857/S0005231022090082 EDN: AJGQJE

4. *Паламарчук Е.С.* О задаче оптимального управления линейной стохастической системой с неограниченной на бесконечности неустойчивой матрицей состояния // Автоматика и телемеханика. 2019. № 2. С. 64–80. https://doi.org/10.1134/S0005231019020041 EDN: VWVVCW

5. *Коробочкин Ю.Б.* Минимаксное линейное оценивание стационарной случайной последовательности при наличии возмущения с ограниченной дисперсией // Радиотехника и электроника. 1983. № 11. С. 2186–2190.

6. *Пшеничный Б.Н.* Необходимые условия экстремума. Москва : Наука, 1976. URL: https://djvu.online/file/d90athkYPigIE (дата обращения: 20.03.2025).

7. *Шайкин М.Е.* Синтез робастного к внешнему возмущению оптимального регулятора по состоянию для одного класса нестационарных стохастических систем // Автоматика и телемеханика. 2015. № 7. С. 127–139. EDN: UMQKUB

8. *Позняк А.С., Себряков Г.Г., Семенов А.В., Федосов Е.А.* Теория управления: феномен, достижения, перспективы, открытые проблемы. Москва : ГосНИИАС, ИПУ, 1990. 75 с. EDN: UWJKIP

9. *Миллер Г.Б., Панков А.Р.* Минимаксное управление процессом в линейной неопределенно-стохастической системе с неполными данными // Автоматика и телемеханика. 2007. № 11. С. 164–177. EDN: MWIYBR

10. *Панков А.Р., Миллер Г.Б.* Минимаксная линейная рекуррентная фильтрация неопределенно стохастических последовательностей по интегральному критерию // Информационные процессы. 2001. Т. 1. № 2. С. 150–166. EDN: HRNMTB

11. *Панков А.Р., Семенихин К.В.* Минимаксная идентификация неопределенно-стохастической линейной модели // Автоматика и телемеханика. 1998. № 11. С. 158–171.

12. *Панков К.В., Платонов Е.Н., Семенихин К.В.* Робастная фильтрация процесса в стационарной разностной стохастической системе // Автоматика и телемеханика. 2011. № 2. С. 167–182. EDN: NEJTFT

13. *Барабанов А.Е.* Синтез адаптивных H^∞-оптимальных регуляторов // Автоматика и телемеханика. 1999. № 3. С. 55–70. EDN: OJYREL

14. *Куркин О.М., Коробочкин Ю.Б., Шаталов С.А.* Минимаксная обработка информации. Москва : Энергоатомиздат, 1990. 212 с. ISBN 5-283-01504-1

15. *Голубев Г.А.* Параметрическое разложение (факторизация) матричной спектральной плотности и матричной передаточной функции в задачах оптимизации линейных систем с дискретным временем // АиТ. № 4. С. 29–42.

16. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. Москва : Наука, 1987. 736 с. URL: https://djvu.online/file/MJmIl8DxPlJDL (дата обращения: 20.03.2025).

17. *Doyle J., Francis B., Tannenbaum A.* Feedback control theory. New York : Macmillan Publ.; 1992. 227 p. ISBN 9780387854588

18. *Веремей Е.И.* Особенности решения задач среднеквадратичного синтеза в среде MATLAB // Труды II Всероссийской научной конференции «Проектирование научных и инженерных приложений в среде MATLAB». Москва : Ипу РАН, 2004. С. 864–883. ISBN 5-201-14971-5

19. *Голубев Г.А., Муравлев В.Ф., Писарев О.В.* Линейная фильтрация стационарных случайных процессов с непрерывным временем // Известия Российской академии наук. Техническая кибернетика. 1992. № 1. С. 141–147.

20. *Голубев Г.А., Писарев О.В.* Линейная фильтрация стационарных процессов с дискретным временем // Автоматика и телемеханика. 1992. № 7. С. 55–61. URL: https://www.mathnet.ru/links/91b23279507370fef418909f58b4235a/at3339.pdf (дата обращения: 20.03.2025).

21. *Голубев Г.А.* Факторизация матричной спектральной плотности и решение задачи линейной фильтрации многомерных случайных процессов // Известия Российской академии наук. Техническая кибернетика. 1989. № 2. С. 67–71.

22. *Барабанов А.Е.* Синтез минимаксных регуляторов. С-Петербург : Санкт-Петербургский университет. СПб, 1996. 224 с. ISBN 5-288-01531-7

23. *Барабанов А.Е., Иванова А.В.* Минимаксное управление дискретным объектом при смешанных возмущениях // Автоматика и телемеханика. 1991. № 4. С. 97–108. EDN: KSHGOJ

24. *Фомин В.Н., Фрадков А.Л., Якубович В.А.* Адаптивное управление динамическими объектами. Москва : Наука, 1981. 448 с. 25.

25. *Фрадков А.Л.* Адаптивное управление в сложных системах. Беспоисковые методы. Москва : Наука, 1990. ISBN 5-02-014105-4

26. *Барабанов А.Е.* Синтез минимаксных регуляторов // Понтрягинские чтения X. Тезисы докладов. 1999. С. 307.

27. *Розанов Ю.А.* Стационарные случайные процессы. Изд. второе. Москва : Наука, 1990. 273 с. ISBN 5-02-014467-3

28. *Ту Ю.* Современная теория управления / под ред. В. Солодовникова. Москва : Машиностроение, 1971. 472 с.

29. *Красовский Н.Н.* Управление динамической системой. Москва : Наука, 1985. 520 с.

30. *Голубев Г.А* Минимаксная линейная фильтрация динамических процессов с дискретным временем // Автоматика и телемеханика. 1984. № 2. С. 72–81.

31. *Колмогоров А.Н., Фомин С.В.* Элементы теории функций и функционального анализа. Москва : Наука, 1976. 544 с. URL: https://djvu.online/file/acB4ODGXeJeSf (дата обращения: 20.03.2025).

32. *Куржанский А.В.* Управление и наблюдение в условиях неопределенности. Москва : Наука, 1977. 392 с.

References

1. Lipzer RS, Shiryaev AN. *Statistics of random processes: Nonlinear filtering and related issues.* Moscow : Nauka Publ.; 1974. (In Russ.) Available from: https://djvu.online/file/368oebqImcvng (accessed: 20.03.2025).

2. Arató M. *Linear Stochastic Systems with Constant Coefficients.* Heidelberg: Springer Berlin Publ.; 1982. https://doi.org/10.1007/BFb0043631

3. Yemelyanova YuP. Management with iterative learning of a discrete system with a variable reference trajectory in conditions of uncertainty. *Automation and telemechanics.* 2022;(9):150–169. (In Russ.) https://doi.org/10.31857/S0005231022090082 EDN: AJGQJE

4. Palamarchuk ES. On the optimal control problem for a linear stochastic system with an unstable state matrix unbounded at infinity. *Automation and Remote Control.* 2019;80(2):250–261. https://doi.org/10.1134/S0005117919020048 EDN: OQBSCG

5. Korobochkin YuB. Minimax linear estimation of stationary random sequence in the presence of perturbation with limited dispersion. *Radio Engineering and Electronics.* 1983;(11):2186–2190. (In Russ.)

6. Pshenichny BN. *Necessary extreme conditions.* Moscow: Nauka Publ.; 1976. (In Russ.) Available from: https://djvu.online/file/d90athkYPigIE (accessed: 20.03.2025).

7. Shaikin ME. Design of optimal state controller robust to external disturbance for one class of nonstationary stochastic systems. *Automation and Remote Control.* 2015;76(7):1242–1251. https://doi.org/10.1134/S0005117915070097

8. Poznyak AS, Sebryakov GG, Semenov AV, Fedosov EA. *Theory of management: phenomenon, achievements, prospects, open problems.* Moscow: GosNIIAS, IPU Publ.;1990. (In Russ.) EDN: UWJKIP

9. Miller GB, Pankov AR. Minimax control of a process in a linear uncertain-stochastic system with incomplete

data. *Automation and Remote Control*. 2007;68(11):2042–2055. https://doi.org/10.1134/S0005117907110124 EDN: LKMFDN

10. Pankov AR, Miller GB. Minimax linear recurrent filtering of indeterminately stochastic sequences by an integral criterion. *Information Processes.* 2001;1(2):150–166. (In Russ.) EDN: HRNMTB

11. Pankov AR, Semenikhin KV. Minimax identification of a generalized uncertain-stochastic linear model. *Automation and telemechanics.* 1998;(11):158–171. (In Russ.)

12. Pankov AR, Platonov EN, Semenikhin KV. Robust filtering of process in the stationary difference stochastic system. *Automation and Remote Control.* 2011;72(2):377–392. https://doi.org/10.1134/S0005117911020147 EDN: OHRETX

13. Barabanov AE. Synthesis of adaptive H^{∞}-optimal controllers. *Automation and telemechanics.* 1999(3):55–70. (In Russ.) EDN: OJYREL

14. Kurkin OM, Korobochkin YuB, Shatalov SA. *Minimax information processing*. Moscow: Energoatomizdat Publ.; 1990. (In Russ.) ISBN 5-283-01504-1

15. Golubev GA. Parametric expansion (factorization) of matrix spectral density and matrix transfer function in the optimization problems of linear discrete time systems. *Automation and Remote Control.* 1996;(9);29–41. EDN: MOWWGX

16. Lavrentiev MA, Shabat BV. *Methods of the theory of functions of a complex variable.* Moscow: Nauka Publ.; 1987. (In Russ.) Available from: https://djvu.online/file/MJmIl8DxPlJDL (accessed: 20.03.2025).

17. Doyle J, Francis B, Tannenbaum A. *Feedback control theory*. New York: Macmillan Publ.; 1992. ISBN 9780387854588

18. Veremey EI. Features of solving problems of root-mean-square synthesis in the MATLAB environment. *Proceedings of the II All-Russian Scientific Conference "Designing scientific and engineering applications in the MATLAB environment."* Moscow: Ipu RAS Publ.; 2004. p. 864–883. (In Russ.) ISBN 5-201-14971-5

19. Golubev GA, Muravlev VF, Pisarev OV. Linear filtration of stationary random processes with continuous time. *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Technical cybernetics*. 1992;(1):141–147. (In Russ.)

20. Golubev GA, Pisarev OV. Linear filtration of stationary processes with discrete time. *Automation and telemechanics.* 1992(7):55–61. (In Russ.) Available from: https://www.mathnet.ru/links/91b23279507370fef41890 9f58b4235a/at3339.pdf (accessed: 20.03.2025).

21. Golubev GA. Factorization of the matrix spectral density and the solution of the problem of linear filtration of multidimensional random processes. *Proceedings of the Russian Academy of Sciences. Technical cybernetics*. 1989;(2):67–71. (In Russ.)

22. Barabanov AE. *Synthesis of minimax regulators*. St. Petersburg: St. Petersburg University of St. Petersburg; 1996. (In Russ.) ISBN 5-288-01531-7

23. Barabanov AE, Ivanova AV. Minimax control of a discrete object with mixed perturbations. *Automation and Remote Control.* 1991;(4):97–108. EDN: KSHGOJ

24. Fomin VN, Fradkov AL, Yakubovich VA. *Adaptive control of dynamic objects.* Moscow: Nauka Publ.; 1981. (In Russ.)

25. Fradkov AL. *Adaptive management in complex systems. Searchless methods*. Moscow: Nauka Publ.; 1990. (In Russ.) ISBN 5-02-014105-4

26. Barabanov AE. Synthesis of minimax regulators. *Pontryaginsky readings of H. Abstracts of reports.* 1997. (In Russ.)

27. Rozanov YuA. *Stationary random processes.* Second edition. Moscow: Nauka Publ.; 1990. (In Russ.) ISBN 5-02-014467-3

28. Tu YuT. *Modern control theory.* New York: McGraw-Hill Publ.; 1964. Available from: https://archive.org/details/moderncontrolthe0000touj (accessed: 20.03.2025).

29. Krasovsky N.N. *Dynamic system control.* Moscow: Nauka Publ.; 1985. (In Russ.)

30. Golubev GA. Minimax linear filtering of dynamic discrete time processes. *Automation and Remote Control.* 1984;45(2):203–211.

31. Kolmogorov AN, Fomin SV. *Elements of the theory of functions and functional analysis*. Moscow: Nauka Publ.; 1976. (In Russ.) Available from: https://djvu.online/file/acB4ODGXeJeSf (accessed: 20.03.2025).

32. Kurzhansky AV. *Control and surveillance in conditions of uncertainty*. Moscow: Nauka Publ.; 1977. (In Russ.)

Сведения об авторе

Сидоров Игорь Геннадиевич, кандидат технических наук, доцент департамента математической кибернетики и информационных технлогий, Московский технический университет связи и информатики, Российская Федерация, 111024, г. Москва, ул. Авиамоторная, д. 8А; eLIBRARY SPIN-код: 1676-7269, ORCID: 0000-0003-4691-4855; e-mail: igor8i2016@yandex.ru

About the author

Igor G. Sidorov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Mathematical Cybernetics and Information Technologies, Moscow Technical University of Communications and Informatics, 8A Aviamotornaya St, Moscow, 111024, Russian Federation; eLIBRARY SPIN-code: 1676-7269, ORCID: 0000-0003-4691-4855; e-mail: igor8i2016@yandex.ru