К ВОПРОСУ ПОСТРОЕНИЯ НЕСМЕЩЕННОЙ И СОСТОЯТЕЛЬНОЙ ОЦЕНКИ ДЛЯ ПАРАМЕТРА, ФОРМИРУЮЩЕГО ДИСПЕРСИЮ ПОКАЗАНИЙ ИЗМЕРИТЕЛЬНЫХ ПРИБОРОВ, СОСТАВЛЯЮЩИХ ГРУППОВОЙ ЭТАЛОН

А.Б. Исаев, Н.И. Колосницын, А.А. Барышников

Кафедра кибернетики и мехатроники
Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, Россия, 117198

В данной работе рассматривается задача построения оптимальной оценки для параметра, образующего дисперсию показаний измерительного прибора, входящего в эталонный комплекс. Показано, что полученная оценка оптимальна с точки зрения своей несмещенности и состоятельности и вполне удовлетворительно прогнозирует изменение точности измерений приборов, составляющих эталон.

Ключевые слова: измерительный прибор, дисперсия показаний, групповой эталон.

Аппаратура контроля, или измерительная аппаратура, не является абсолютно надежной и может выходить из строя как во время работы, так и в то время, когда она не используется по назначению. Поэтому при аттестации измерительной аппаратуры отдельного прибора или группы приборов наряду с оценкой точности измерений возникает необходимость прогнозирования этой точности, т.е. оценки возможного ее изменения во времени. Эту задачу можно решить относительно просто в случае, когда показания приборов образуют стохастический процесс с определенными статистическими свойствами. Уточним постановку задачи. Для определенности положим, что речь идет о воспроизведении эталонного значения некоторой физической величины. Предположим, что эталон групповой, включающий в себя n идентичных приборов. Пусть в моменты времени $t_1, t_2, ..., t_m$ с каждого прибора снимают показания, так что совокупность всех измерений с их общим числом mn можно представить в виде матрицы

$$\begin{bmatrix} x_1(t_1) & x_1(t_2) & \dots\dots\dots & x_1(t_m) \\ x_2(t_1) & x_2(t_2) & \dots\dots\dots & x_2(t_m) \\ \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ x_n(t_1) & x_n(t_2) & \dots\dots\dots & x_n(t_m) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1^1 & x_1^2 & \dots & x_1^m \\ x_2^1 & x_2^2 & \dots & x_2^m \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ x_n^1 & x_n^2 & \dots & x_n^m \end{bmatrix}. \tag{1}$$

В (1) $x_i^j = x_i(t_j)$ означает показание i-того прибора в момент времени t_j, $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$. Предположим далее, что стохастический процесс, который описывает совокупность $\{x_i^j\}$ $i = \overline{1, n}$; $j = \overline{1, m}$, является винеровским. Это означает, что как сами величины $x_i(t_j)$, так и приращения этих величин $x_i(t_j) - x_i(t_{j-1})$ распределены по нормальному закону, при этом их моменты являются функциями времени, вообще говоря, произвольными (1):

$$Mx_i(t) = a_i(t);\ Dx_i(t) = b_i(t);\ i = \overline{1, n};\ j = \overline{t_1, t_m}. \quad (2)$$

Рассмотрим класс винеровских процессов, так называемый процесс броуновского движения (2), который характеризуется линейной зависимостью от времени второго момента при равном нулю первом моменте:

$$Mx_i(t_j) = 0;\ Dx_i(t_j) = \beta t_i. \quad (3)$$

Закон изменения дисперсии (3) в процессе броуновского движения не решает задачу прогнозирования точности, поскольку необходимо получить оценку параметра β и найти его распределение. Искать будем, пользуясь методом максимального правдоподобия. Рассмотрим следующие независимые статистики:

$$\phi_1 = \sum_{i=1}^{n} x_i(t_1);\ \phi_2 = \sum_{i=1}^{n} x_i(t_2); \ldots;\ \phi_m = \sum_{i=1}^{n} x_i(t_m), \quad (4)$$

представляющие собой суммы значений ординат случайных процессов $x_i(t)$, $i = \overline{1, n};$ в сечениях t_1, t_2, …, t_m, т.е. суммы отсчетов, взятых по группе n приборов.

Каждое $x_i(t_j)$ распределено нормально $x_i(t_j) \sim N(0, \beta t_j)$, то $(\phi_l) \sim N(0, \beta n t_l)$, следовательно, плотность распределения величин ϕ_l суммарного нормального распределения величин $x_i(t_l)$ имеет вид

$$p(x_l) = \frac{1}{\sqrt{2\pi n \beta t_l}} \exp\left\{ -\frac{1}{2n\beta t_l} \left[\sum_{i=1}^{n} x_i t_l \right]^2 \right\}. \quad (5)$$

Выпишем функцию максимального правдоподобия для независимых случайных величин ϕ_1, ϕ_2, …, ϕ_m. Имеем

$$L\phi = p(\phi_1) p(\phi_2) \ldots p(\phi_m) = \frac{1}{(2\pi)^{m/2} n^{m/2} \sqrt{t_1, t_2, \ldots, t_m}} \times$$

$$\times \exp\left\{ -\frac{1}{2n\beta} \left[\frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i(t_1) \right)^2}{t_1} + \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i(t_2) \right)^2}{t_2} + \ldots + \frac{\left(\sum_{i=1}^{n} x_i(t_m) \right)^2}{t_m} \right] \right\} \quad (6)$$

Логарифмируя (6), получим

$$\ln L_\phi = \mathrm{const} + m \ln \frac{1}{\sqrt{\beta}} - \frac{1}{2n\beta} \left(\frac{\phi_1^2}{t_1} + \ldots + \frac{\phi_m^2}{t_m} \right). \quad (7)$$

Из уравнения правдоподобия $\partial L_\phi / \partial \beta = 0$ получаем оценку параметра β:

$$\hat{\beta} = \frac{1}{mn} \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{x_j^2}{t_j} \right). \quad (8)$$

Представляя (8) в виде $\hat{\beta}=\frac{\beta}{m}\sum_{j=1}^{m}\left(\frac{\phi_j}{\sqrt{n\beta t_j}}\right)^2$ и учитывая, что $\phi\big/\sqrt{n\beta t_j}$ распределены по нормальному закону $N(0,\,1)$, получаем, что величина $m\hat{\beta}\big/\beta$ имеет распределение χ^2 с m степенями свободы:

$$\frac{m\hat{\beta}}{\beta}\sim\chi_m^2. \tag{9}$$

Рассмотрим статистические свойства полученной оценки $\hat{\beta}$. Нетрудно видеть, что $M\hat{\beta}\ =\beta$. Следовательно, оценка $\hat{\beta}$, даваемая (8), является несмещенной. Из (9) вытекает, что дисперсия оценки (8) равна

$$D\hat{\beta}=\frac{2}{m}\beta^2. \tag{10}$$

Исследуем оценку $\hat{\beta}$ на состоятельность. Находя дисперсию отношения $\frac{\hat{\beta}}{\beta}$: $D\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right)=\frac{2}{m}$ и применяя неравенство Чебышева к $\frac{\hat{\beta}}{\beta}$, получаем

$$\Pr\left\{\left|\frac{\hat{\beta}}{\beta}-1\right|>\varepsilon\right\}<D\left(\frac{\hat{\beta}}{\beta}\right)\frac{1}{\varepsilon^2}=\frac{2}{m\varepsilon^2}=C.$$

При $m\to\infty$ C стремится к нулю: $\lim\limits_{m\to\infty}C=0$, отсюда следует состоятельность оценки $\hat{\beta}$, а такая форма записи неравенства Чебышева эквивалентна обычной

$$\Pr\left\{\left|\frac{\hat{\beta}}{\beta}-1\right|>\varepsilon\right\}<\frac{D\hat{\beta}}{\varepsilon^2}.$$

Выражение для дисперсии оценки в виде (10) справедливо из-за присутствия в нем точного значения параметра β. Для оценки максимального правдоподобия дисперсии $\hat{D}\hat{\beta}$ применяется формула[3]

$$\hat{D}\hat{\beta}=\left[-\frac{1}{\partial^2 L\big/\partial\beta^2}\right]_{\beta=\hat{\beta}}.$$

После ряда вычислений получаем

$$D\beta=\frac{2n\hat{\beta}^3}{2\sum\limits_{j=1}^{m}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}x_i\left(t_j\right)\Big/\sqrt{t_j}\right)^2-mn\hat{\beta}}=\frac{2}{m}\hat{\beta}^2. \tag{11}$$

При фиксируемой значимости α доверительные границы для β находим обычным образом. Имеем $m\hat{\beta}\big/\chi^2_{\alpha/2} \le \beta \le m\hat{\beta}\big/\chi^2_{(1-\alpha/2)}$. Напоминаем, что оценку β нашли по (8), (4).

При большом числе степеней свобода m (большом числе отсчетов на одном приборе) для оценки значения β можно применять приближенную формулу $\beta = \hat{\beta} \pm k\sqrt{\hat{D}\hat{\beta}}$, где $\hat{D}\hat{\beta}$ найдена по (11).

Пример. Положим, $m = 30$. При этом $к = 2$ соответствует значимости $\alpha = 0{,}01$ при совпадении верхних границ $1 + 2\sqrt{2/m}$ и $m\big/\chi^2_{(1-\alpha/2)}$ значимости $\alpha = 0{,}02$ при совпадении нижних границ $1 - 2\sqrt{2/m}$ и $m\big/\chi^2_{(\alpha/2)}$.

Результаты применимы к широкому классу метрологических задач, связанных с прогнозированием точности измерительной аппаратуры и эталонных комплексов, когда предполагают винеровский (броуновский) характер динамической погрешности измерительных приборов, например, генераторы частоты, в которых флуктуации фазы характеризуются дисперсией, пропорциональной времени [4] или счетчики элементарных частиц [5].

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Скороход А.В.* Случайные процессы с независимыми приращениями. — М., 2004.

[2] *Клепиков Н.П., Соколов С.Н.* Анализ и планирование экспериментов методом максимального правдоподобия. — М.: Наука, 1964.

[3] *Баруга-Рид А.Т.* Элементы теории марковских процессов и их приложения. — М.: Наука, 1999.

TO THE QUESTION OF CONSTRUCTION OF NOT DISPLACED AND WELL-FOUNDED ESTIMATION FOR THE PARAMETER FORMING THE DISPERSION OF INDICATIONS OF MEASURING DEVICES, MAKING THE GROUP STANDARD

A.B. Isaev, N.I. Kolosnizyn, A.A. Baryshnikov

Cybernetics and Mechatronics Department
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaya str., 6, Moscow, Russia, 117198

In the given work the problem of construction of an optimum estimation for the parameter forming a dispersion of indications of the measuring device, entering into a reference complex is considered. It is shown that the received estimation is optimum in sense of the undisplacement and a solvency, and quite well predicts change of accuracy of measurements of the devices making the standard.

Key words: measuring devices, dispersion of indications, group standard.