УДК 681.51

# АЛГОРИТМЫ ИЕРАРХИЧЕСКОЙ ОПТИМИЗАЦИИ В ДВУХУРОВНЕВОЙ МНОГОКАНАЛЬНОЙ ЗАДАЧЕ «УПРАВЛЕНИЕ—РЕГУЛИРОВАНИЕ»

**Е.М. Воронов, А.А. Карпунин**

Кафедра систем автоматического управления
МГТУ им. Н.Э. Баумана
*ул. 2-я Бауманская, 5, Москва, Россия, 105005*

В работе сформулирована концепция и дано определение обобщенного управления многоуровневой автоматизированной системой управления (АСУ), разработана методика его оптимизации на основе обобщения и алгоритмизации иерархического равновесия в многоуровневых системах. Предложены алгоритмы иерархической оптимизации управления в двухуровневых АСУ: в форме решения задачи синтеза обобщенного управления в линейно-квадратической постановке и итерационного алгоритма получения программно-корректируемого иерархического управления в постановке общего вида. Разработана двухуровневая математическая модель и постановка задачи многоканального наведения-стабилизации беспилотного летательного аппарата (ЛА) на ЛА-цель с учетом перекрестных связей каналов стабилизации и кинематики пространственного поступательного движения ЛА. Обсуждается постановка двухуровневой многоканальной задачи терминального управления-регулирования.

**Ключевые слова:** многоуровневая система, алгоритм оптимизации, многоканальная задача.

В настоящее время повышение уровня сложности решаемых задач управления требует дальнейшего развития методов системного анализа и проектирования структурно и функционально сложных автоматизированных систем управления (АСУ) с последующей централизованной или децентрализованной интеллектуализацией [1].

**Структура и модель двухуровневой системы.** В работе предлагается методика оптимизации структурно и функционально сложных АСУ в типичной форме многоуровневой иерархической структуры с поуровневыми многоподсистемными (многоканальными, многосвязными) многокритериальными системами (ММС) [2] регулирования (ММС-Р), управления (ММС-У) и принятия решений (ММС-ПР), представленной на рис. 1.

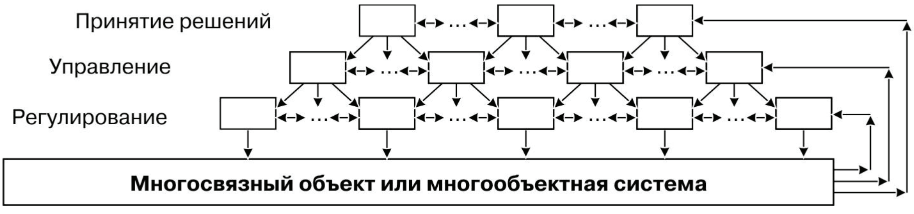


**Рис. 1.** Вариант функциональной структуры многоуровневой системы управления

Примером представления части такой многоуровневой АСУ и практически полезной моделью для исследования является двухуровневая математическая модель управления-регулирования двухканальной СУ беспилотного летательного аппарата (СУЛА), представленная на рис. 2.

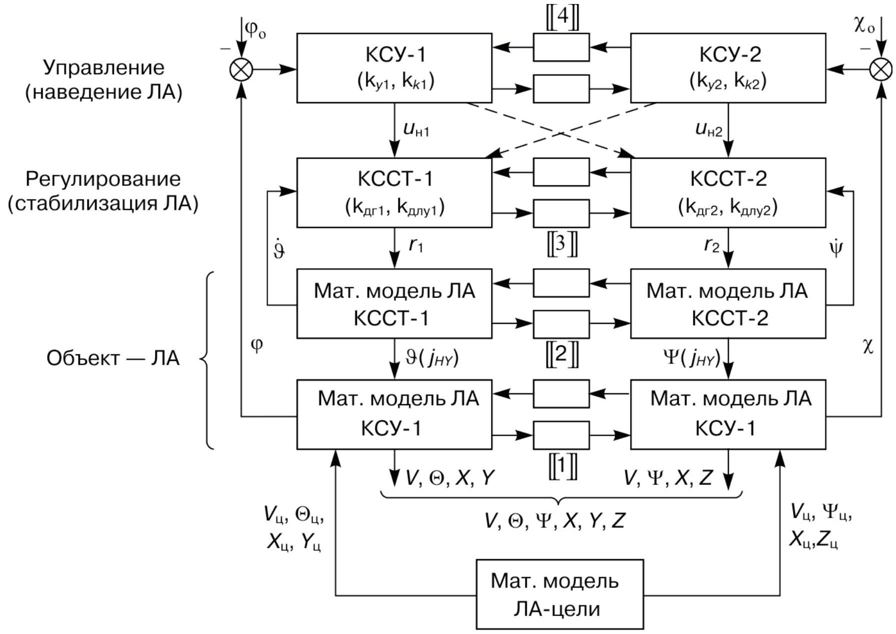


**Рис. 2.** Двухуровневая модель управления-регулирования двухканальной СУЛА:
КСУ, КССТ — каналы системы управления и системы стабилизации ЛА; $u_н$ — сигналы наведения ЛА; $k_y, k_к$ — управляющие параметры, коэффициенты передачи устройства выработки команд КСУ (метода наведения) и чувствительного элемента координатора цели соответственно; $k_{дг}, k_{длу}$ — управляющие параметры, коэффициенты передачи дифференцирующего гироскопа и датчика линейных ускорений соответственно; $r$ — регулирующее воздействие на рули высоты и направления ЛА; $\vartheta$, $\Psi$ — углы тангажа и рысканья; $j_н$ — нормальные ускорения ЛА; $X, Y, Z$ $\left(X_ц, Y_ц, Z_ц\right)$ — координаты центра масс $O_0$ беспилотного ЛА (центра масс $O_ц$ ЛА-цели); $V, \Theta, \Psi$ $\left(V_ц, \Theta_ц, \Psi_ц\right)$ — координаты вектора скорости ЛА (ЛА-цели); $\varphi$ — угол места (рис. 3); $\chi$ — угол азимута (рис. 3); $R$ — длина вектора $\overline{O_0O_ц}$; $\varphi_о, \chi_о$ — элементы опорной траектории.
*Примечание:* терминология в соответствии с [3]

Следует иметь в виду, что в линеаризованном варианте представленной модели вектор состояния центра масс ($V$, $\Theta$, $\Psi$) заменяется на вектор ($\Delta V$, $\Delta\Theta$, $\Delta\Psi$), где данные динамические величины есть отклонения ЛА от опорного движения ($V_о, \Theta_о, \Psi_о$). Блоки с обозначением $[\![ i ]\!]$, $i = \overline{1, 4}$ являются перекрестными связями в динамике поступательного движения центра масс ЛА, углового (вращательного) движения вокруг центра масс ЛА, между регуляторами ССТ и в методе пространственного наведения ЛА соответственно. В типичной ситуации существенна связь между каналами вращательного и поступательного движения ЛА, что определяет связь каналов стабилизации и наведения соответственно [3].

Математическая модель движения ЛА дана моделью углового (вращательного) движения вокруг центра масс по углам тангажа $\vartheta$ и рысканья $\Psi$ с соответствующими воздействиями аэродинамического управления по нормальному ускорению ( $j_{\text{н}}$ ) в каналах управления направлением скорости центра масс в вертикальной плоскости по углу наклона траектории (Θ) и в горизонтальной плоскости по углу поворота траектории (Ψ) (рис. 3).

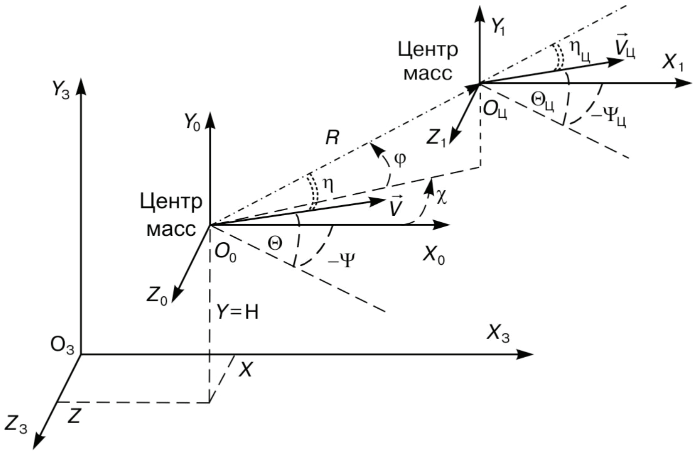


**Рис. 3.** Вектор состояния СУЛА ( $V$, Θ, Ψ ) относительно местной географической СК, ($X$, $Y$, $Z$) — относительно неподвижной СК, ($R$, φ, χ) — относительно центра масс $O_{\text{Ц}}$:

η — угол упреждения; $\eta_{\text{Ц}}$ — курсовой угол цели

Как известно [3], в общем случае система динамических и кинематических связей двухканальной математической модели ЛА на уровне КСУ имеет при $V = \text{const}$ вид системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dot{V} = 0; \\ \dot{\Theta} = \dfrac{1}{V}\left(j^{\text{П}}_{\text{Н}Y} - g\cos\Theta\right); \\ \dot{\Psi} = -\dfrac{j^{\text{П}}_{\text{НZ}}}{V\cos\Theta}; \\ \dot{X} = V\cos\Theta\cos\Psi; \\ \dot{Y} = V\sin\Theta; \\ \dot{Z} = -V\cos\Theta\sin\Psi, \end{cases} \tag{1}$$

которая при малых углах Ψ (или Θ) декомпозируется на модели каналов СУЛА — горизонтальный (или вертикальный) с управлениями $j_{\text{НZ}}$ ($j_{\text{Н}Y}$). Поэтому общую модель ЛА КСУ можно считать двухканальной с перекрестными кинематическими связями $[\![1]\!]$, где $j^{\text{П}}_{\text{Н}Y} = j_{\text{Н}Y\text{о}} + j_{\text{Н}Y}$, $j^{\text{П}}_{\text{НZ}} = j_{\text{НZо}} + j_{\text{НZ}}$, причем решение системы при $j_{\text{Н}Yo}, j_{\text{НZ}o}$ дает $\Theta_{\text{о}}(t), \Psi_{\text{о}}(t)$ (или, наоборот, заданные $\Theta_{\text{о}}, \Psi_{\text{о}}$ формируют $j_{\text{Н}Y\text{о}}, j_{\text{НZо}}$).

Очевидно, что математическая модель поступательного движения ЛА-цели имеет вид подобный (1) с добавлением уравнения

$$\dot{V}_{\text{Ц}} = j_{TX\text{Ц}} - g\sin\Theta_{\text{Ц}} \tag{2}$$

и задает траекторное движение ЛА-цели управлениями $(j_{TX\text{Ц}}, j_{HY\text{Ц}}, j_{HZ\text{Ц}})$, причем текущее расстояние $\|\text{O}_0\text{O}_\text{Ц}\|$

$$R = \sqrt{\left(X - X_\text{Ц}\right)^2 + \left(Y - Y_\text{Ц}\right)^2 + \left(Z - Z_\text{Ц}\right)^2}. \tag{3}$$

При применении сферической системы координат, особенно полезной при исследовании конфликтной ситуации в системе ЛА с центрами масс в точках $\text{O}_0$ и $\text{O}_\text{Ц}$ (рис. 3) в системе координат с началом отсчета в точке $\text{O}_0$, полные уравнения пространственной кинематики на основе [3. С. 372] принимают вид системы

$$\begin{cases} \dot{R} = -V\cos\eta + V_\text{Ц}\cos\eta_\text{Ц}; \\ R\dot{\varphi} = V\left[\sin\Theta\cos\varphi - \sin\varphi\cos\Theta\cos(\Psi - \chi)\right] - \\ \qquad -V_\text{Ц}\left[\sin\Theta_\text{Ц}\cos\varphi - \sin\varphi\cos\Theta_\text{Ц}\cos\left(\Psi_\text{Ц} - \chi\right)\right]; \\ R\dot{\chi}\cos\varphi = V\cos\Theta\sin(\Psi - \chi) - V_\text{Ц}\cos\Theta_\text{Ц}\sin\left(\Psi_\text{Ц} - \chi\right); \\ \cos\eta = \cos\varphi\cos\Theta\cos(\Psi - \chi) + \sin\varphi\sin\Theta; \\ \cos\eta_\text{Ц} = \cos\varphi\cos\Theta_\text{Ц}\cos\left(\Psi_\text{Ц} - \chi\right) + \sin\varphi\sin\Theta_\text{Ц}. \end{cases} \tag{4}$$

Система (4) порождает дополнительные перекрестные связи типа $[\![1]\!]$ и позволяет вычислить координаты вектора $\overrightarrow{\text{O}_0\text{O}_\text{Ц}}$ $(R, \varphi, \chi)$ по динамико-кинематическим системам (1) для беспилотного ЛА и ЛА-цели для их использования в КСУ-l ($l = 1, 2$), которые имеют подобную структурную схему, представленную на рис. 4.

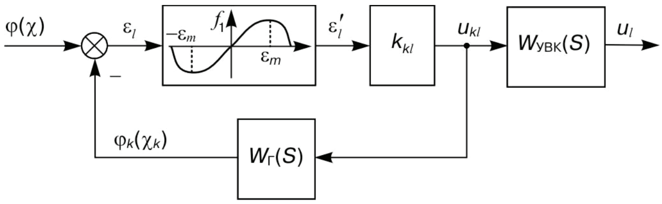


**Рис. 4.** Структурная схема КСУ-l ($l$ = 1, 2),
где φ — для $l$ = 1, χ — для $l$ = 2

На рис. 4 замкнутая система является координатором цели (КЦ) головки самонаведения (ГС) беспилотного ЛА на основе двухосного силового гироскопического стабилизатора [3. С. 453]. Коэффициент $k_{kl}$ ($l$ = 1, 2) является коэффициентом передачи чувствительного элемента КЦ. Датчик момента и гиростабилизатор имеет передаточную функцию

$$W_\text{Г}(s) = \frac{k_\text{Г} \cdot k_\text{Д}}{s},$$

где $k_\text{Д}$ — коэффициент передачи датчика момента; $k_\text{Г}$ — коэффициент передачи гиростабилизатора; $k_\text{Г} = 1/H$, где $H$ — кинетический момент гироскопа стабилизатора.

Нелинейный элемент $f_1$ учитывает эффект стробирования ГС. В более общем описании двухканальный КЦ создает дополнительные перекрестные связи типа $[\![4]\!]$, которые в данной работе не учитываются.

Передаточная функция устройства выработки команд (УВК) в простейшем виде [3] имеет вид

$$W_{\text{УВК}}(s) = \frac{k_{yl}}{T_{\text{ф}} s + 1} \quad (l = 1, 2),$$

где $k_{yl}$ — коэффициент передачи УВК КСУ-l, определяющий качество метода пропорционального наведения [3], $T_{\text{ф}}$ — постоянная времени корректирующего фильтра нижних частот.

Для иллюстрации динамического описания задачи на уровне регулирования (стабилизации) ЛА на рис. 5 дана структурная схема двухканального описания линеаризованной системы стабилизации в блоке КССТ — математическая модель углового движения ЛА — перекрестные связи $[\![2]\!]$.

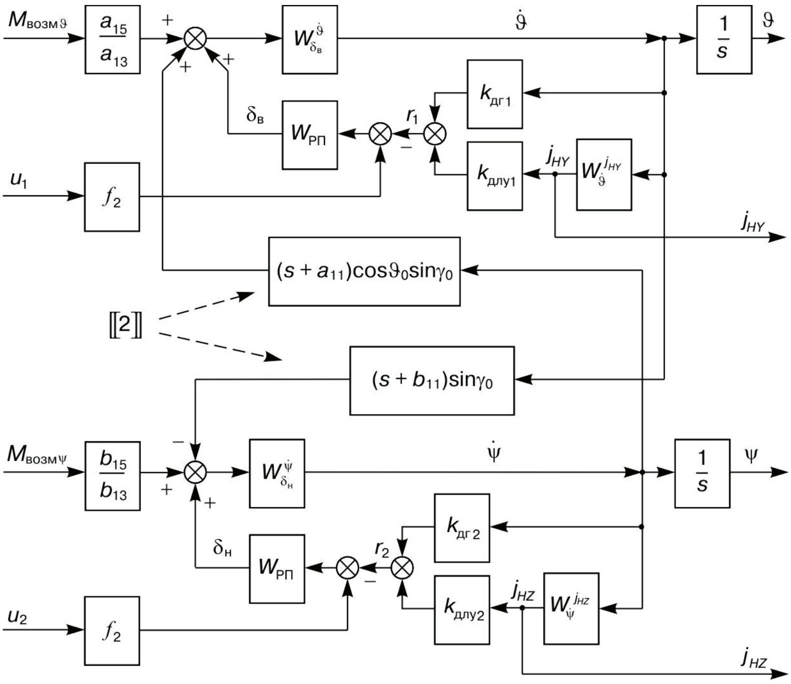


**Рис. 5.** Структурная схема двухканальной ССт
$a_{ij}, b_{ij}$ — аэродинамические коэффициенты; $\vartheta_0, \gamma_0$ — элементы опорной траектории; $M_{\text{возм}\,\vartheta}, M_{\text{возм}\,\psi}$ — возмущающие моменты (для расчета влияния возмущений)

Передаточная функция (ПФ) летательного аппарата:

$$W_{\delta_\text{в}}^{\dot\vartheta} = \frac{k(T_1 s + 1)}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1}; \quad W_{\dot\vartheta}^{j_{HY}} = \frac{V}{T_1 s + 1};$$

$$W_{\delta_н}^{\dot\psi} = \frac{k\left(T_2 s+1\right)}{T^2 s^2 + 2T\xi s + 1}; \; W_{\dot\psi}^{j_{HZ}} = \frac{V}{T_2 s + 1}.$$

ПФ рулевого привода: $W_{РП} = \dfrac{k_{РП}}{T_{РП} s + 1}$.

ПФ датчика угловой скорости (дифференцирующего гироскопа): $W_{дг1,2} = k_{дг1,2}$.

ПФ датчиков линейного ускорения: $W_{длу1,2} = k_{длу1,2}$.

Нелинейный элемент $f_2$, задающий ограничение сигнала $u_l, \left(l = 1, 2\right)$, представлен на рис. 6.

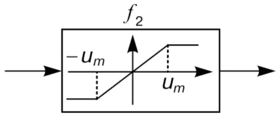


**Рис. 6.** Ограничение сигнала $u_l, (l = 1, 2)$

В целом структурная схема двухуровневой двухканальной системы «наведение—стабилизация» беспилотного ЛА с перекрестными связями дана на рис. 7.

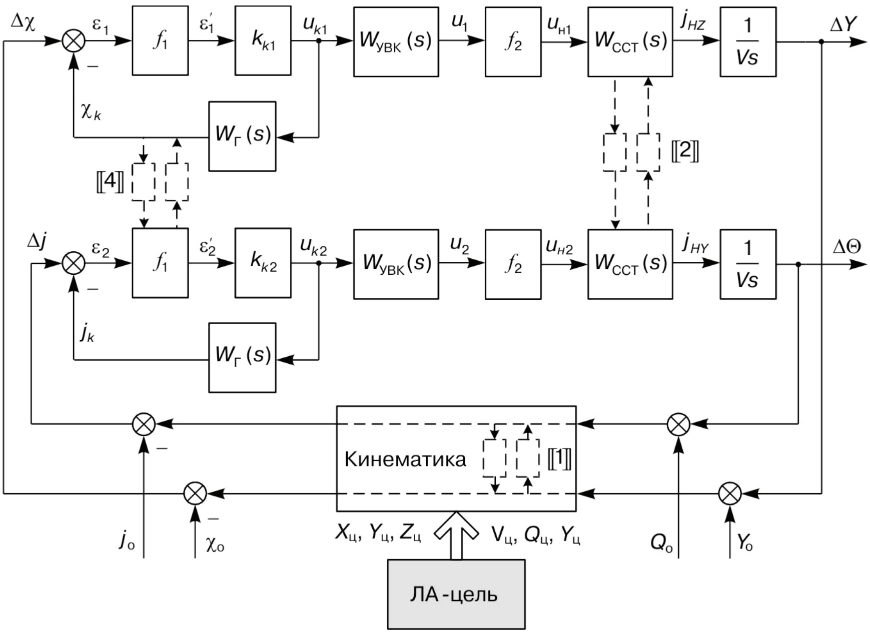


**Рис. 7.** Структурная схема двухканальной системы «наведение—стабилизация» беспилотного ЛА

Кинематика беспилотного ЛА на рис. 7 описывается системой уравнений (4), кинематика при получении $\Theta_о, \Psi_о$ определяется системой (1).

Таким образом, в результате имеет место двухуровневая система «управление—регулирование» с двухканальными ММС-У и ММС-Р с соответствующими перекрестными связями $[\![1]\!]$ и $[\![2]\!]$.

В работе [7] сформирован и применяется вариант векторных целевых показателей каналов ММС-Р, обеспечивающих Парето-оптимальную устойчивость, качество, точность и быстродействие в каждом канале с учетом балансировки каналов. В качестве варианта векторных показателей каналов двухканального пространственного наведения ЛА с перекрестными кинематическими связями на уровне ММС-У могут быть предложены точность наведения и контроль кривизны траектории ЛА при подлете к цели с балансировкой каналов и пространственной Парето-оптимальностью.

*Замечание 1.* В более общем случае на уровне управления возникает декомпозированная терминальная задача оптимального пространственного управления ЛА по векторному показателю с обеспечением терминальной точности по положению центра масс ЛА и его вектору скорости, а также по быстродействию [7].

**Концепция и определение обобщенного управления многоуровневой системой.** Методика оптимизации формируется на основе комбинации методов проектирования иерархических распределенных систем (ИРС) для выбора оптимальной функциональной структуры ИРС-АСУ (облика АСУ) [5]; методов оптимизации ММС на основе стабильно-эффективных игровых компромиссов для оптимизации и уравновешивания (балансировки) подсистем в составе ММС-уровня регулирования, управления, принятия решения по эффективности или потерям [2]; методов оптимизации межуровневой координации с приоритетом — «правом первого хода» каждого верхнего уровня в ИРС-АСУ [4], [5]. Данная концепция позволяет сформулировать определение обобщенного оптимального управления в ИРС-АСУ.

***Определение 1.*** Обобщенное оптимальное управление многоуровневой АСУ формируется на основе комбинации следующих процессов:

— многокритериального выбора оптимальной функциональной структуры АСУ (облика АСУ);

— оптимизации в подсистемах ММС-уровней;

— уравновешивания (балансировки) подсистем ММС-уровней;

— оптимизации межуровневой координации.

Очевидно, что данное обобщенное управление АСУ с учетом поуровневых и межуровневых связей требует разработки единой технологии его оптимизации.

В качестве комментария определения в практическом примере двухуровневой двухканальной СУ наведения-стабилизации ЛА (рис. 2) функциональный облик уже выбран. На соответствующих уровнях выбираются параметры $k_{yl}, k_{kl}$, $l = 1, 2$, $k_{\text{длу}\,i}, k_{\text{дг}\,i}, i = 1, 2$, которые обеспечивают балансировку и Парето-оптимальность на основе равновесно-арбитражной схемы стабильно-эффективного компромисса. Сигналы $u_{нl}, l = 1, 2$ обеспечивают межуровневую координацию между уровнем управления и стабилизации, а $r_i, i = 1, 2$ обеспечивают исполнительное управление.

В работе представлен алгоритм оптимизации обобщенного управления многоуровневой АСУ на основе разработанного метода иерархического уравновешивания по Штакельбергу, в котором обобщается понятие стратегии по Штакельбергу в классе иерархических дифференциальных игр (ИДИ) [4].

**Определение и структурные свойства иерархического равновесия в многоуровневых системах управления с обобщением стратегии Штакельберга [4].** В данной работе развиваются и применяются подходы класса иерархических дифференциальных игр (ИДИ) [6]. Без ограничения общности рассуждений рассмотрим двухуровневую ИДИ с «правом первого хода» верхнего уровня. В отличие от известных результатов [6] и в соответствии со структурным требованием многоуровневой СУ каждый верхний уровень представляет собой структурированную ММС с исходной структурной несогласованностью, представленную на рис. 8. На рис. 8 также без ограничения общности рассуждений рассматриваются трехподсистемные ММС.

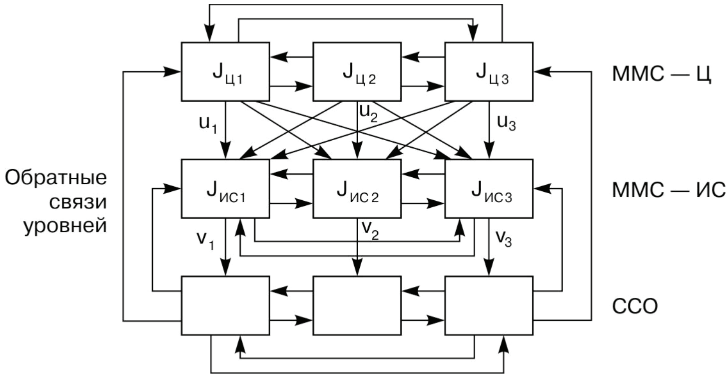


**Рис. 8.** Структурная схема двухуровневой трехподсистемной ИДИ: верхний уровень: ММС — центр; нижний уровень: ММС — исполнительная система (ММС — ИС); структурно-сложный объект (ССО)

На рис. 8 сохранены традиционные обозначения двухступенчатой дифференциальной игры Центра и исполнительной системы (ИС) [6]. Но в соответствии, например, с двухуровневой структурой управления-регулирования на рис. 2 верхний уровень может иметь смысл ММС. Таким образом, в данной работе имеет место обобщение двухступенчатой ИДИ [4].

Структурно сложный объект (ССО) имеет математическую модель

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, \mathbf{u}), \ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0, \ \mathbf{x} \in \mathbf{E}^n, \tag{5}$$

где $\mathbf{v}$ — исполнительное управление с распределенным исполнением (рис. 8)

$$\begin{gathered} \mathbf{v} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3), \ \dim \mathbf{v}_i = m_i, \ i = 1, 2, 3, \ \mathbf{v}_i \in \mathbf{V}_i \subset \mathbf{E}^{m_i}, \\ \dim \mathbf{v} = m = \sum_{i=1}^{3} m_i, \ \mathbf{v} \in \mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2 \cdot \mathbf{V}_3 \subset \mathbf{E}^m. \end{gathered} \tag{6}$$

Управление-координация ММС-Ц

$$\begin{gathered} \mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \mathbf{u}_3), \ \dim \mathbf{u}_l = k_l \geq 3, \ \mathbf{u}_l \in \mathbf{U}_l \subset \mathbf{E}^{k_l}, \\ \dim \mathbf{u} = k = \sum_{l} k_l, \ \mathbf{u} \in \mathbf{U} = \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{U}_2 \cdot \mathbf{U}_3 \subset \mathbf{E}^k. \end{gathered} \tag{7}$$

При распределенной координации $\mathbf{u}$, связанной с одной из подсистем ММС-ИС (рис. 2), последнее неравенство может не выполняться.

Структурно и функционально связанные задачи ММС-Ц и ММС-ИС характеризуются соответственно функциями «выигрыша»

$$J_{\text{Ц}l} = J_{\text{Ц}l}(\mathbf{v}, \mathbf{u}),\ l = 1, 2, 3; \tag{8}$$

$$J_{\text{ИС}i} = J_{\text{ИС}i}(\mathbf{v}, \mathbf{u}),\ i = 1, 2, 3. \tag{9}$$

Общая структура показателей (8), (9) имеет вид

$$J_{ji} = \Phi_{ji}(\mathbf{x}, t_k) + \int_{t_0}^{t_k} f_{ji}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{н})dt,\ i = 1, 2, 3;\ j = (\text{Ц}, \text{ИС}). \tag{10}$$

***Определение 2* (*ИРИДИ*).** Иерархическим равновесием ИДИ (ИРИДИ) с правом первого хода верхнего уровня в попарном взаимодействии уровней называется набор взаимосвязанных равновесных ситуаций множества уровней ИДИ при фиксированных степенях конфликтности в ММС уровней.

***Определение 3* (*ИРИДИШ*).** Структурные свойства иерархического равновесного решения двухуровневой ИДИ с обобщением стратегии Штакельберга составляют следующую трехэтапную процедуру получения обобщенного управления [4]. На первом этапе ММС-Ц на «правах первого хода» сообщает ММС-ИС свою координацию в форме закона-стратегии $\mathbf{u}(t, \mathbf{x}) \in \mathbf{U}$ для каждой позиции из множества $\{t, \mathbf{x}\}$ или программно-корректируемого закона-стратегии управления (ПКЗУ) для конечного множества $\{t_i,\ \mathbf{x}(t_i),\ t_0 < t_1 < ... < t_i < ... < t_K = T\}$ или программного управления $\mathbf{u}(t)$ для всех $t \in [t_0, t_K]$ или векторного параметрического множества $\mathbf{q} \in \mathbf{Q}$.

На втором этапе на уровне ММС-ИС формируется отображение $\mathbf{R} : \mathbf{U} \to \mathbf{V}$ такое, что при каждом фиксированном $\mathbf{u} \in \mathbf{U}$

$$\max_{\mathbf{v} \in \mathbf{V}} \varphi_{\text{ИС}} \left( J_{\text{ИС}1}(\mathbf{u}, \mathbf{v}), ..., J_{\text{ИС}3}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) \right) = \varphi_{\text{ИС}} \left( J_{\text{ИС}1}(\mathbf{u}, \mathbf{Ru}), ..., J_{\text{ИС}3}(\mathbf{u}, \mathbf{Ru}) \right). \tag{11}$$

Конкретный вид функции $\varphi_{\text{ИС}}$ [6] определяется на множестве степеней конфликтности подсистем ММС-ИС (антагонизм, бескоалиционный или коалиционный конфликт, кооперация).

На третьем этапе, который развивает стратегию Штакельберга и обобщает РИДИШ [6], ММС-Ц выбирает решение

$$\max_{\mathbf{u} \in \mathbf{U}} \varphi_{\text{Ц}} \left( J_{\text{Ц}1}(\mathbf{u}, \mathbf{Ru}), ..., J_{\text{Ц}3}(\mathbf{u}, \mathbf{Ru}) \right) = \varphi_{\text{Ц}} \left( J_{\text{Ц}1}(\mathbf{u}^{\circ}, \mathbf{Ru}), ..., J_{\text{Ц}3}(\mathbf{u}^{\circ}, \mathbf{Ru}) \right). \tag{12}$$

Конкретный вид функции $\varphi_{\text{Ц}}$ определяется на множестве степеней конфликтности подсистем ММС-Ц [4].

Набор $\{\mathbf{u}^{r}, \mathbf{Ru}\}$ определяется как иерархическое равновесие по Штакельбергу (ИРИДИШ).

*Замечание 2.* В общем случае управление-координация $\mathbf{u}$ ММС-Ц является обобщенным вектором с набором показателей — требований к управлению и к координации.

Методика формирования обобщенного управления двухуровневой системой на основе ИРИДИШ в бескоалиционном варианте балансировки ММС уровней, достаточные условия обобщенного управления при выбранной функциональной структуре системы на основе ИРИДИШ (обобщение достаточных условий Сталфорда—Вайсборда—Жуковского оптимального управления при ограничениях на управление и состояние) рассмотрены в [4].

**Постановка и решение задачи синтеза оптимального закона обобщенного управления двухуровневой системы ММС-Ц, ММС-ИС в линейно-квадратической постановке.** Пусть линейная модель ССО задана в виде

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{A}(t)\mathbf{x} + \mathbf{B}_{\text{Ц}1}(t)\mathbf{u}_1 + \mathbf{B}_{\text{Ц}2}(t)\mathbf{u}_2 + \mathbf{B}_{\text{ИС}1}(t)\mathbf{v}_1 + \mathbf{B}_{\text{ИС}2}(t)\mathbf{v}_2, \tag{13}$$

где $\mathbf{u}$ — управление-координация ММС-Ц

$$\mathbf{u} \in \mathbf{U} = \mathbf{U}_1 \cdot \mathbf{U}_2,\ \mathbf{u}_l \in \mathbf{U}_l \subset \mathbf{E}^{m_l},\ l = \overline{1,2};$$

$\mathbf{v}$ — исполнительное управление ММС-ИС

$$\mathbf{v} \in \mathbf{V} = \mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2,\ \mathbf{v}_i \in \mathbf{V}_i \subset \mathbf{E}^{m_i},\ i = \overline{1,2};$$

$\mathbf{x}$ — вектор состояния ССО, $\mathbf{x} \in \mathbf{E}^n$.

Функции эффективности подсистем ММС-Ц, связанных через ССО (13) имеют вид

$$J_{\text{Ц}l}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{x}^T(t_k)\mathbf{C}_l\mathbf{x}(t_k) + \int_{t_0}^{t_k}\left[\mathbf{x}^T\mathbf{Q}_l(t)\mathbf{x} + \mathbf{u}_l^T\mathbf{D}_l(t)\mathbf{u}_l\right]dt,\ l = 1, 2. \tag{14}$$

Функции эффективности подсистем ММС-ИС, связанных через ССО (13) с координациями ММС-Ц $\mathbf{u} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$

$$\begin{gathered} J_{\text{ИС}i}(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \mathbf{x}^T(t_k)\mathbf{C}_i\mathbf{x}(t_k) + \\ + \int_{t_0}^{t_k}\left[\mathbf{x}^T\mathbf{Q}_i(t)\mathbf{x} + 2\mathbf{u}^T\mathbf{P}_i(t)\mathbf{v}_i + \mathbf{v}_i^T\mathbf{D}_i(t)\mathbf{v}_i\right]dt,\ i = 1, 2, \end{gathered} \tag{15}$$

где $\mathbf{u}^T\mathbf{P}_i(t) = \left[\mathbf{u}_1^T\mathbf{P}_{i1}(t) + \mathbf{u}_2^T\mathbf{P}_{i2}(t)\right]$ — влияние координации в показателях.

Здесь $t_0, t_k = \text{const} > 0$, элементы всех матриц непрерывны при $t \in [t_0, t_k]$, матрицы $\mathbf{C}_l,\ \mathbf{C}_i,\ l = 1, 2,\ i = 1, 2$ постоянны, матрицы $\mathbf{C}_l, \mathbf{C}_i, \mathbf{Q}_l, \mathbf{Q}_i, \mathbf{D}_l, \mathbf{D}_i$, $l = 1, 2,\ i = 1, 2$ симметричны, а матрицы $\mathbf{D}_l, \mathbf{D}_i, l = 1, 2,\ i = 1, 2$ определенно отрицательны.

Допустимые структуры управлений $\mathbf{u}_l, \mathbf{v}_i$ подсистем ММС-Ц и ММС-ИС ограничены функциями вида

$$\mathbf{u}_l(t,\mathbf{x}) = \mathbf{K}_{\mathbf{u}_l}(t)\cdot\mathbf{x},\ \mathbf{v}_i(t,\mathbf{x}) = \mathbf{K}_{\mathbf{v}_i}(t)\cdot\mathbf{x},\ l = 1, 2,\ i = 1, 2, \tag{16}$$

где матрицы $\mathbf{K}_l, \mathbf{K}_i$ непрерывны.

***Утверждение 1.*** Пусть матрицы $\mathbf{D}_l, \mathbf{D}_i, l = 1, 2,\ i = 1, 2$ определенно отрицательны; при любых непрерывных на $[t_0, t_k]$ матрицах $\mathbf{K}_{\mathbf{u}_l}(t), l = 1, 2$ система

$$\begin{gathered}
\dot{\Theta}_{i\mathbf{u}} + 2\Theta_{i\mathbf{u}}\left(\mathbf{A} - \mathbf{M}_1\mathbf{K}_{\mathbf{u}_1} - \mathbf{M}_2\mathbf{K}_{\mathbf{u}_2} - \overline{\mathbf{B}}_j\Theta_{j\mathbf{u}}\right) + \mathbf{Q}_i - \\
-\left(\mathbf{K}_{\mathbf{u}_1}^T\overline{\mathbf{P}}_{i1}\mathbf{K}_{\mathbf{u}_1} + \mathbf{K}_{\mathbf{u}_2}^T\overline{\mathbf{P}}_{i2}\mathbf{K}_{\mathbf{u}_2} + \mathbf{K}_{\mathbf{u}_1}^T\overline{\mathbf{P}}_{i12}\mathbf{K}_{\mathbf{u}_2} + \mathbf{K}_{\mathbf{u}_2}^T\overline{\mathbf{P}}_{i12}^T\mathbf{K}_{\mathbf{u}_1}\right) - \\
-\left(\mathbf{K}_{\mathbf{u}_1}^T\mathbf{L}_{i1}\Theta_{i\mathbf{u}} + \mathbf{K}_{\mathbf{u}_2}^T\mathbf{L}_{i2}\Theta_{i\mathbf{u}} + \Theta_{i\mathbf{u}}\mathbf{L}_{i1}^T\mathbf{K}_{\mathbf{u}_1} + \Theta_{i\mathbf{u}}\mathbf{L}_{i2}^T\mathbf{K}_{\mathbf{u}_2}\right) - \\
-\Theta_{i\mathbf{u}}\overline{\mathbf{B}}_i\mathbf{Q}_{i\mathbf{u}} = 0,\ \Theta_{i\mathbf{u}}(t_k) = \mathbf{C}_i\ \ \left(i, j = 1, 2;\ i \neq j\right),
\end{gathered} \tag{17}$$

где

$$\begin{gathered}
\mathbf{M}_l = \mathbf{B}_{\text{ИС}1}\mathbf{D}_{\text{ИС}1}^{-1}\mathbf{P}_{1l}^T + \mathbf{B}_{\text{ИС}2}\mathbf{D}_{\text{ИС}2}^{-1}\mathbf{P}_{2l}^T - \mathbf{B}_{\text{Ц}l},\ \left(l = 1, 2\right), \\
\overline{\mathbf{B}}_i = \mathbf{B}_{\text{ИС}i}\mathbf{D}_{\text{ИС}i}^{-1}\mathbf{B}_{\text{ИС}i}^T,\ \overline{\mathbf{B}}_i^T = \overline{\mathbf{B}}_i,\ \left(i = 1, 2\right), \\
\overline{\mathbf{P}}_{ij} = \mathbf{P}_{ij}\mathbf{D}_{\text{ИС}i}^{-1}\mathbf{P}_{ij}^T,\ \left(i, j = 1, 2\right), \\
\overline{\mathbf{P}}_{i12} = \mathbf{P}_{i1}\mathbf{D}_{\text{ИС}i}^{-1}\mathbf{P}_{i2}^T,\ \overline{\mathbf{P}}_{i21} = \overline{\mathbf{P}}_{i12}^T,\ \left(i = 1, 2\right), \\
\mathbf{L}_{ij} = \mathbf{P}_{ij}\mathbf{D}_{\text{ИС}i}^{-1}\mathbf{B}_i^T,\ \mathbf{L}_{ji} = \mathbf{L}_{ij}^T,\ \left(i, j = 1, 2\right);
\end{gathered}$$

имеет продолжимое на $[t_0, t_k]$ решение;
система из шести матричных уравнений

$$\begin{gathered}
\dot{\mathbf{K}}_{i\mathbf{u}_l} + \mathbf{K}_{i\mathbf{u}_l}^T\left[\mathbf{A} - \mathbf{M}_l\mathbf{K}_{\mathbf{u}_l} - \mathbf{M}_p\mathbf{K}_{\mathbf{u}_p} - \overline{\mathbf{B}}_1\Theta_{1\mathbf{u}} - \overline{\mathbf{B}}_2\Theta_{2\mathbf{u}}\right] - \\
-\mathbf{K}_{j\mathbf{u}_l}^T\overline{\mathbf{B}}_j\Theta_{i\mathbf{u}} - 2\mathbf{M}_l^T\Theta_{i\mathbf{u}} - 2\overline{\mathbf{P}}_{il}\mathbf{K}_{\mathbf{u}_l} - 2\overline{\mathbf{P}}_{ilp}\mathbf{K}_{\mathbf{u}_p} = 0, \\
\mathbf{K}_{i\mathbf{u}_l}(t_k) = 0, \left(i, j = 1, 2,\ i \neq j,\ l, p = 1, 2,\ l \neq p\right);
\end{gathered}$$

$$\begin{gathered}
\dot{\Theta}_l + 2\Theta_l\left(\mathbf{A} - \mathbf{M}_1\hat{\mathbf{K}}_1\Theta_1 - \mathbf{M}_2\hat{\mathbf{K}}_2\Theta_2 - \overline{\mathbf{B}}_1\Theta_{1\mathbf{u}^r} - \overline{\mathbf{B}}_2\Theta_{2\mathbf{u}^r}\right) - \\
-\Theta_l\hat{\mathbf{K}}_l^T\mathbf{D}_l\hat{\mathbf{K}}_l\Theta_l = 0,\ \ \Theta_l(t_k) = \mathbf{C}_l,\ \left(l = 1, 2\right);
\end{gathered} \tag{18}$$

$$\begin{gathered}
\dot{\Theta}_i + 2\Theta_i\left(\mathbf{A} - \mathbf{M}_1\mathbf{K}_{\mathbf{u}_1} - \mathbf{M}_2\mathbf{K}_{\mathbf{u}_2} - \overline{\mathbf{B}}_j\Theta_j\right) + \mathbf{Q}_i - \\
-\left(\mathbf{K}_{\mathbf{u}_1}^T\overline{\mathbf{P}}_{i1}\mathbf{K}_{\mathbf{u}_1} + \mathbf{K}_{\mathbf{u}_2}^T\overline{\mathbf{P}}_{i2}\mathbf{K}_{\mathbf{u}_2} + \mathbf{K}_{\mathbf{u}_1}^T\overline{\mathbf{P}}_{i12}\mathbf{K}_{\mathbf{u}_2} + \mathbf{K}_{\mathbf{u}_2}^T\overline{\mathbf{P}}_{i12}^T\mathbf{K}_{\mathbf{u}_1}\right) - \\
-\left(\mathbf{K}_{\mathbf{u}_1}^T\mathbf{L}_{i1}\Theta_i + \mathbf{K}_{\mathbf{u}_2}^T\mathbf{L}_{i2}\Theta_i + \Theta_i\mathbf{L}_{i1}^T\mathbf{K}_{\mathbf{u}_1} + \Theta_i\mathbf{L}_{i2}^T\mathbf{K}_{\mathbf{u}_2}\right) - \\
-\Theta_i\overline{\mathbf{B}}_i\mathbf{Q}_i = 0,\ \ \Theta_i(t_k) = \mathbf{C}_i,\ \ \left(i, j = 1, 2;\ i \neq j\right),
\end{gathered}$$

где $\Theta_i = \Theta_{i\mathbf{u}^r},\ \ \left(i = 1, 2\right),$

$\mathbf{K}_{\mathbf{u}_l} = \hat{\mathbf{K}}_l\Theta_l,\ \ (l = 1, 2),$

$\hat{\mathbf{K}}_l = \mathbf{D}_l^{-1}\left(\mathbf{M}_l^T + \dfrac{1}{2}\mathbf{K}_{1\mathbf{u}_l}^T\overline{\mathbf{B}}_1 + \dfrac{1}{2}\mathbf{K}_{2\mathbf{u}_l}^T\overline{\mathbf{B}}_2\right);$

допускает продолжимое на интервале $[t_0, t_k]$ решение

$$\left(\mathbf{K}_{i\mathbf{u}_l}, i = 1, 2, l = 1, 2;\ \Theta_l, l = 1, 2;\ \Theta_i, i = 1, 2\right).$$

В результате совместного решения системы из шести матричных дифференциальных уравнений пункта 3 утверждения получаем равновесные решения на уровне ММС-Ц (в данной задаче эти решения являются также координацией ММС-ИС)

$$\mathbf{u}_l^r(t,\mathbf{x}) = \mathbf{D}_l^{-1}\left(\mathbf{M}_l^T + \frac{1}{2}\mathbf{K}_{1\mathbf{u}_l}^T\overline{\mathbf{B}}_1 + \frac{1}{2}\mathbf{K}_{2\mathbf{u}_l}^T\overline{\mathbf{B}}_2\right)\Theta_l\mathbf{x},\ \left(l=1,2\right). \tag{19}$$

Эти решения совместно с равновесными решениями ММС-ИС

$$\mathbf{v}^r(t,\mathbf{x}) = \mathbf{R}(\mathbf{u}) = \left(\mathbf{R}_1(\mathbf{u}), \mathbf{R}_2(\mathbf{u})\right) = \left(\mathbf{v}_1^r, \mathbf{v}_2^r\right), \tag{20}$$

где
$$\mathbf{v}_i^r(t,\mathbf{x}) = \mathbf{R}_i(\mathbf{u}) = -\mathbf{D}_{\text{ИС}i}^{-1}\left[\mathbf{P}_i^T\mathbf{u}(t,\mathbf{x}) + \mathbf{B}_{\text{ИС}i}^T\Theta_{i\mathbf{u}}\mathbf{x}\right],\ \left(i=1,2\right), \tag{21}$$

где
$$\Theta_{i\mathbf{u}} = \Theta_{i\mathbf{u}^r} = \Theta_i,\ \mathbf{u}(t,\mathbf{x}) = \mathbf{u}^r(t,\mathbf{x}) \tag{22}$$

определяют ИРИДИШ в двухуровневой системе из ММС-Ц и ММС-ИС в рамках линейно-квадратической постановки.

Оптимальные равновесные показатели ММС-Ц и ММС-ИС можно определить из следующих соотношений

$$\begin{aligned} J_{\text{Ц}l} &= \mathbf{x}_0^T\Theta_l(t_0)\mathbf{x}_0, \quad \left(l=1,2\right), \\ J_{\text{ИС}i} &= \mathbf{x}_0^T\Theta_i(t_0)\mathbf{x}_0, \quad \left(i=1,2\right),\ \mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0). \end{aligned} \tag{23}$$

Определенное приближение в методах получения ИРИДИШ, которое позволяет решить задачу в общем случае описания (5)—(10), основывается на стратегиях в виде приближенного ПКЗУ и его параметризации на программном такте ПКЗУ. Общие структурные свойства итерационного алгоритма получения ИРИДИШ на основе ПКЗУ были представлены в работе [4].

## ЛИТЕРАТУРА


[1] *Пупков К.А.*, *Воронов Е.М.*, *Коньков В.Г.*, *Карпунин А.А.* Структурная сложность интеллектуальных систем управления // Интеллектуальные системы: Труды VIII международного симпозиума / Под ред. К.А. Пупкова. — М.: РУСАКИ, 2008. — С. 29—34.

[2] *Воронов Е.М.* Методы оптимизации управления многообъектными многокритериальными системами на основе стабильно-эффективных игровых решений / Под ред. Н.Д. Егупова — М.: Изд-во МГТУ им. Н.Э. Баумана, 2001.

[3] *Лебедев А.А.*, *Карабанов В.А.* Динамика систем управления беспилотными летательными аппаратами. — М.: Машиностроение, 1965.

[4] *Воронов Е.М.*, *Карпунин А.А.*, *Серов В.А.* Иерархическое равновесие в многоуровневых системах управления // Вестник РУДН. Серия «Инженерные исследования». — 2008. — № 4. — С. 18—29.

[5] *Плотников В.Н.*, *Зверев В.Ю.* Принятие решений в системах управления. Ч. 2. Теория и проектирование алгоритмов принятия проектных решений в многообъектных распределенных системах управления. — М.: Изд-во МГТУ, 1994.

[6] *Вайсборд Э.М.*, *Жуковский В.И.* Введение в дифференциальные игры нескольких лиц и их приложения. — М.: Советское радио, 1980.

[7] *Воронов Е.М., Мелехина Ю.В., Веселовская О.А., Мусин Е.Р.* Равновесно-арбитражная многокритериальная балансировка каналов в многосвязном регулировании и управлении // Вестник МГТУ им. Н.Э. Баумана. Серия «Приборостроение». — 2007. — № 4. — С. 99—119.

# ALGORITHMS OF HIERARCHICAL OPTIMIZATION IN TWO-LEVEL MULTICHANNEL PROBLEM OF CONTROL-REGULATION

**E.M. Voronov, A.A. Karpunin**

Automatic Control Systems Department
Bauman Moscow State Technical University
*2-nd Baumanskaya str., 5, Moscow, Russia, 105005*

In the article the concept of generalized control of multilevel automated control system (ACS) is formulated. The procedure of optimization of the generalized control on the basis of generalization and algorithmization of hierarchical equilibrium in multilevel systems is developed. Two algorithms of control hierarchical optimization in two-level ACS in the form of solution of the generalized control synthesis problem in linear-quadratic statement and approximate iteration procedure of obtaining the hierarchical control on the basis of the program-corrected control law in common statement are proposed. Two-level mathematical model and statement of the problem of multichannel guidance-stabilization of the pilotless vehicle targeting to aircraft-target with a glance of cross-connections of stabilization channels and kinematics of spatial translational motion of the aircraft are developed. The statement of two-level multichannel problem of termination control-regulation is discussed.

**Key words:** multilevel system, algorithm of optimization, multichannel problem.