УДК 681.511.4;681.513.5

РОБАСТНОЕ УПРАВЛЕНИЕ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМОЙ, СОДЕРЖАЩЕЙ НЕОПРЕДЕЛЕННЫЕ ПАРАМЕТРЫ

В.Н. Афанасьев, Е.Р. Бовшук

Московский государственный институт
электроники и математики
Б. Трехсвятительский пер., 3, Москва, Россия, 109028

В статье рассматривается задача робастного управления нелинейным объектом в условиях неполной информации о его параметрах. Поставлены задачи робастной стабилизации и d-робастного терминального управления. Найдены необходимые условия существования стабилизирующего управления. Получены необходимые и достаточные условия существования терминального робастного управления.

Ключевые слова: робастное управление, нелинейный объект.

В реальных задачах неизбежно присутствует неопределенность, а используемое управление должно быть работоспособно при наличии неопределенности. Задачи управления для нелинейных систем значительно труднее, чем в линейном случае [8]. На современном этапе основными объектами управления являются системы, работающие в условиях неопределенности, т.е. в условиях неполной априорной информации, что в значительной степени усложняет задачу оптимизации. В данной работе предложен новый метод исследования поведения нелинейного объекта с параметрической неопределенностью находящегося под воздействием управления, синтезированного с использованием робастной линейной модели первого приближения. Рассматриваются задачи стабилизации и терминального управления с заданным показателем точности.

1. **Постановка задачи.** Пусть нелинейный нестационарный управляемый объект описывается уравнением

$$\begin{cases} \dfrac{d}{dt}x(t) = [A+\alpha(t)]x(t) + [B+\beta(t)]u(t) + \varphi(x,t), \\ x(t_0) = x_0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь $x \in R^n, u \in R^r, u(t) \in U, r \le n;$ матрицы $\alpha(t), \beta(t) \in \Omega$ содержат параметры, подверженные неконтролируемым возмущениям; Ω — замкнутое ограниченное множество в евклидовом пространстве R^P; $\varphi(x, t)$ — нелинейная вектор-функция. Начальное состояние принадлежит ограниченному множеству, т.е. $x(t_0) \in X_0$. Задана цель терминального управления: $\left|\eta\left[x(T)\right]\right| \le d,\ \ \eta \in R^k$ — оператор проектирования из R^n в R^k, d — фиксированная неотрицательная величина.

Задача управления объектом заключается в построении такой стратегии $u(t) \in U$, при которой достигается цель управления и минимизируется функционал

$$J(x,u) = \frac{1}{2} x^T(T) F x(T) + \frac{1}{2} \int_{t_0}^{T} \left\{ x^T(t) Q x(t) + u^T(t) R u(t) \right\} dt, \qquad (1.2)$$

где задан интервал управления $[t_0, T]$; матрица R — положительно определена, а матрицы Q и F — положительно полуопределены.

Предположим, что существует некоторая положительно определенная матрица P такая, что

$$\varphi^T\left(x(t)\right)\left\{\varphi\left(x(t)\right) - Px(t)\right\} < 0 \text{ при } x(t) \neq 0. \qquad (1.3)$$

Это предположение обеспечивает почти линейным системам вида (1.1) с действительными отрицательными корнями характеристического уравнения выполнения условия устойчивости по Ляпунову [7].

Сформируем нелинейную робастную модель объекта (1.1):

$$\frac{d}{dt} z(t) = \left[A + \alpha^*\right] z(t) + \left[B + \beta^*\right] u(t) + \varphi(z, \alpha^*, \beta^*), \; z(t_0) = x_0. \qquad (1.4)$$

Здесь матрицы $\alpha^*, \beta^* \in \Omega$ таковы, что

$$\begin{gathered} \left\| \left[A + \alpha^*\right] z(t) + \left[B + \beta^*\right] u(t) + \varphi(z, \alpha^*, \beta^*) \right\| \geq \\ \geq \left\| \left[A + \alpha(t)\right] x(t) + \left[B + \beta(t)\right] u(t) + \varphi\left(x, \alpha(t), \beta(t)\right) \right\|. \end{gathered} \qquad (1.5)$$

Таким образом, решение уравнения (1.4) является мажорирующим (в смысле (1.5)) для различных решений уравнения (1.1). Модель (1.4) будет использоваться для нахождения управлений $u(t)$.

2. **Синтез управления по линейной модели.** Будем искать управление $u(t) \in \mathrm{U}$ как функцию состояния объекта (1.1): $u(t) = Kx(t)$, где матрица K содержит постоянные параметры. Поиск матрицы K будем осуществлять с использованием линейной модели объекта, которая имеет вид

$$\frac{d}{dt} z_M(t) = [A + \alpha^*] z_M(t) + \left[B + \beta^*\right] u^*(t), \; z_M(t_0) = x_0. \qquad (2.1)$$

Для того, чтобы регулятор в терминальной задаче содержал постоянные параметры, назначим матрицу штрафа первого слагаемого функционала (1.2) в виде $F = S$, где положительно определенная матрица S является решением уравнения Риккати—Лурье [1]:

$$S\left[A + \alpha^*\right] + \left[A + \alpha^*\right]^T S - S\left[B + \beta^*\right] R^{-1} \left[B + \beta^*\right]^T S + Q = 0. \qquad (2.2)$$

Очевидно, что в случае такого назначения матрицы F будет выполняться соотношение $\frac{d}{dt} S(t) = 0$, т.е. $S = \text{const}$ на всем интервале управления [2].

Запишем матричное неравенство Риккати, выполнение которого при некоторой положительно определенной симметричной матрице S гарантирует стабилизируемость объекта с неопределенными параметрами:

$$SA(t)+A^T(t)S<SB(t)R^{-1}B^T(t)S.$$

Из последнего нетрудно видеть, что в случае интервальной неопределенности параметров, т.е. $\underline{A}\le A(t)\le\overline{A}$, $\underline{B}\le B(t)\le\overline{B}$, «наихудшими параметрами», при которых выполняется неравенство Риккати, будут: $\overline{A}$, $\underline{B}$. Отсюда можно определить параметры α*, β*.

Тогда оптимальное управление для модели (2.1) с функционалом качества (1.2), в котором вместо $z(t)$ подставим $z_M(t)$, будет иметь вид [2]

$$u^*(t)=-R^{-1}\left[B+\beta^*\right]^T Sz_M(t). \tag{2.3}$$

Нетрудно убедиться, что синтезированное управление (2.3) обеспечивает отрицательность вещественных частей корней характеристического уравнения системы первого приближения:

$$\frac{d}{dt}z_M(t)=\left\{A+\alpha^*-\left[B+\beta^*\right]R^{-1}\left[B+\beta^*\right]^{\mathrm{T}}S\right\}z_M(t), \tag{2.4}$$

что является необходимым и достаточным условиями ее асимптотической устойчивости [6].

Используем структуру управления (2.3) для построения управлением объектом (1.1) и его нелинейной робастной модели (1.4). Уравнения объекта и его нелинейной робастной модели с соответствующими управлениями будут иметь вид

$$\frac{d}{dt}x(t)=\left\{A+\alpha(t)-\left[B+\beta(t)\right]R^{-1}\left[B+\beta^*\right]^T S\right\}x(t)+\varphi(x(t)),\ x(t_0)=x_0, \tag{2.5}$$

$$\frac{d}{dt}z(t)=\left\{A+\alpha^*-\left[B+\beta^*\right]R^{-1}\left[B+\beta^*\right]^T S\right\}z(t)+\varphi(z,\alpha^*,\beta^*),\ z(t_0)=x_0. \tag{2.6}$$

Следует отметить, что использование управления по первому приближению вида (2.3) для управления робастной моделью (1.4) не изменяет качественной картины расположения траекторий в начале координат [5; 7]. Это свойство в силу условия (1.5) имеют и траектории объекта (1.1).

3. **Необходимые условия существования стабилизирующего управления.** Найдем необходимые условия существования стабилизирующего управления вида (2.3) для робастной модели (1.4), т.е. условия, при которых $z(t)\to 0$ при $t\to\infty$. Отметим, что рассматриваемый объект с управлением вида (2.3) имеет устойчивое состояние покоя при $z=0$ [7]. В соответствии с теоремой Парсеваля [3] для системы

$$\frac{d}{dt}z(t)=\mathcal{T}z(t)+\varphi(z,t), \tag{3.1}$$

где $\mathcal{T} = A + \alpha^* - \left[B + \beta^*\right] R^{-1} \left[B + \beta^*\right]^{\mathrm{T}} S$ — действительная постоянная матрица, все характеристические корни которой имеют отрицательные действительные части.

Вектор $\varphi(z, t)$ действителен, непрерывен для малых $|z(t)|$ и $t \geq 0$ и $\varphi(z, t) = o(|z|)\ (|z| \to 0)$ равномерно по t, $t \geq 0$. Решение, равное тождественно нулю, асимптотически устойчиво.

Подытожим вышеприведенные рассуждения.

Теорема 1

Решение $x = 0$ является устойчивым решением уравнения

$$\frac{d}{dt} x(t) = \left[A + \alpha(t)\right] x(t) + \left[B + \beta(t)\right] K x(t) + \varphi(x, \alpha(t), \beta(t)),$$

$$x(t_0) \in X,\ \ \alpha(t), \beta(t) \in \Omega,$$

если решение $z = 0$ является устойчивым решением уравнения

$$\frac{d}{dt} z(t) = \left[A + \alpha^*\right] z(t) + \left[B + \beta^*\right] K z(t) + \varphi(z, \alpha^*, \beta^*),$$

$$z(t_0) = x(t_0)$$

и

а) α^*, β^* таковы, что

$$\left\| \left[A + \alpha^*\right] z(t) + \left[B + \beta^*\right] K z(t) + \varphi(z, \alpha^*, \beta^*) \right\| \geq$$
$$\geq \left\| \left[A + \alpha(t)\right] x(t) + \left[B + \beta(t)\right] K x(t) + \varphi(x, \alpha(t), \beta(t)) \right\|,$$

б) $K = -R^{-1}\left[B + \beta^*\right] S,$ где положительно определенная матрица S является решением уравнения Риккати—Лурье:

$$S\left[\mathrm{A} + \alpha^*\right] + \left[\mathrm{A} + \alpha^*\right]^T S - S\left[B + \beta^*\right] R^{-1} \left[B + \beta^*\right]^T S + Q = 0, Q, R > 0;$$

в) $\varphi(z, a^*, \beta^*) = 0$ при $z(0) = 0$;

г) существует положительно определенная матрица P такая, что

$$\varphi^T\left(z, \alpha^*, \beta^*\right)\left\{\varphi(z, a^*, \beta^*) - P z(t)\right\} < 0 \ \text{при}\ z(t) \neq 0.$$

Теперь, когда показано, что при выбранном управлении (2.3) система имеет «точку покоя», найдем условия асимптотической устойчивости при произвольных $|z(t_0)| = |z(0)| \neq 0$. Другими словами, найдем условия асимптотического перехода системы (3.1) из заданного начального состояния в состояние покоя.

Решение уравнения (1.4) имеет вид

$$z(T) = \left[\exp(\mathcal{T} T)\right]\left\{ z(0) + \int_0^T \left[\exp(-\mathcal{T}\tau)\right] \varphi(z, \tau) d\tau \right\}. \qquad (3.2)$$

Если управление (2.3) стабилизирует объект (1.4), то при $T \to \infty$ должно выполняться условие

$$\|z(0)\| - \left\| \int_0^T \left\{\exp(-\mathcal{T}\tau)\right\} \varphi(z, \tau) d\tau \right\| \to 0 \ \text{при}\ T \to \infty. \qquad (3.3)$$

Так как первое слагаемое имеет конечное значение, то и второе слагаемое при управлении стабилизирующим объектом, должно иметь конечное значение при $T \to \infty$. Учитывая, что

$$\left\| \int_0^T \{\exp(-\mathcal{T}\tau)\}\varphi(z,\tau)d\tau \right\| \le \int_0^T \left\| \{\exp(-\mathcal{T}\tau)\}\varphi(z,\tau)d\tau \right\|, \qquad (3.4)$$

последнее выполняется в том случае, если подынтегральное выражение в правой части неравенства (3.4) будет убывать. Потребуем, чтобы положительно определенное подынтегральное выражение убывало монотонно.

Отметим, что запас устойчивости, определяемый выполнением этого требования, сужает область возможных значений начальных условий, при которых сохраняется устойчивость системы [8].

Определение

Назовем систему

$$\frac{d}{dt}z(t) = \mathcal{T}\, z(t) + \varphi(z,t),\ z \in R^n,$$

у которой корни $\lambda_i, i = 1, 2, ..., n$ характеристического уравнения имеют отрицательные действительные части, сверустойчивой, если

$$\left\| \{\exp \mathcal{T}t\}\varphi(z,t) \right\| \le Le^{-\rho t} \left\| \varphi(z,t) \right\|, t \ge 0$$

где $L > 0$ и $(-\rho) = \max\left(\mathrm{Re}\lambda_i\right) < 0.$

Условие (3.4) будет выполняться, если производная по времени от положительно определенной формы

$$\left\| \{\exp\left(-\mathcal{T}t\right)\}\varphi(z,t) \right\| > 0 \quad z \ne 0 \qquad (3.5)$$

будет отрицательной, т.е. условие монотонного убывания подынтегрального выражения (3.4) имеет вид [3]:

$$\left\| \mathcal{T}\{\exp[-\mathcal{T}t]\}\varphi(z,t) \right\| > \left\| \{\exp[-\mathcal{T}t]\}\left\{\frac{d\varphi(z,t)}{dt}\right\} \right\|,\ z \ne 0. \qquad (3.6)$$

В начальный момент при $t_0 = 0$ неравенство (3.6) принимает вид

$$\left\| \mathcal{T}\varphi(z,t) \right\| > \left\| \frac{d\varphi(z,t)}{dt} \right\|,\ z(t) \ne 0 \text{ при } t = 0 \qquad (3.7)$$

или

$$\frac{\left\| \dfrac{d\varphi(z,t)}{dt} \right\|}{\left\| \varphi(z,t) \right\|} < \left\| \mathcal{T} \right\|,\ z(t) \ne 0 \text{ при } t = 0. \qquad (3.8)$$

Так как при выполнении условия (3.7) обеспечивается монотонное убывание нормы подынтегрального выражения (3.3), система (2.6) в этом случае асимптотически устойчива.

Утверждение

Неравенство

$$\left\| \mathcal{T} \left\{ \exp[-\mathcal{T} t] \right\} \varphi(z,t) \right\| \geq \left\| \left\{ \exp\,[-\mathcal{T} t] \right\} \left\{ \frac{d\,\varphi(z,t)}{d\,t} \right\} \right\|$$

выполняется в любой момент переходного процесса системы

$$\frac{d}{dt} z(t) = \mathcal{T} z(t) + \varphi(z, t),$$

если оно выполнялось для начальных условий $z(t_0) \in X_0$.

Полученный результат сформулируем в виде теоремы.

Теорема 2

Пусть задан нелинейный неопределенный объект вида

$$\frac{d}{dt} x(t) = \left[A + \alpha(t) \right] x(t) + \left[B + \beta(t) \right] u(t) + \varphi(x, t),$$

где $\alpha(t), \beta(t) \in \Omega,$ Ω — замкнутое ограниченное множество возможных траекторий изменений параметров объекта, и пусть $\alpha^*, \beta^* \in \partial\Omega$ такие, что

$$\left\| \left[A + \alpha^* \right] x(t) + \left[B + \beta^* \right] u(t) + \varphi(x, \alpha^*, \beta^*) \right\| \geq$$

$$\geq \left\| \left[A + \alpha(t) \right] x(t) + \left[B + \beta(t) \right] u(t) + \varphi(x, \alpha(t), \beta(t)) \right\|.$$

Тогда необходимым условием существования управления вида

$$u(t) = -R^{-1} \left[B + \beta^* \right] S x(t),$$

где

$$S\left[A + \alpha^* \right] + \left[A + \alpha^* \right]^T S - S\left[B + \beta^* \right] R^{-1} \left[B + \beta^* \right]^T S + Q = 0,$$

при котором $x(t) \to 0$ при $t \to \infty,$ является условие

$$\left\| \mathcal{T} \varphi(x, t) \right\| > \left\| \frac{d\varphi(x, t)}{dt} \right\|, x(t) \neq 0 \text{ при } t = 0,$$

где $\mathcal{T} = A + \alpha^* - \left[B + \beta^* \right] R^{-1} \left[B + \beta^* \right]^{\mathrm{T}} S.$

4. **Условия существования терминального робастного управления.** Рассмотрим вопрос о существовании управления вида (2.3) при движении нелинейной нестационарной системы в заданном интервале времени из любого начального состояния, принадлежащего заданному множеству, в заданную область.

Условие *d*-робастности для модели объекта

$$\frac{d}{dt}z(t)=\left[A+\alpha^*-\left[B+\beta^*\right]R^{-1}\left[B+\beta^*\right]^T S\right]z(t)+\varphi(z,\alpha^*,\beta^*),\ z(t_0)=x_0\in X_0$$

имеет вид

$$\|z(T)\|=\left\|\left[\exp(\mathcal{J}T)\right]z(0)+\int_0^T\left[\exp(-\mathcal{J}\tau)\right]\varphi(z,\tau)d\tau\right\|\le d,$$

откуда:

$$\left\|\left[\exp(\mathcal{J}T)\right]z(0)\right\|-d\le\int_0^T\left\|\left[\exp(-\mathcal{J}\tau)\right]\varphi(z,\tau)d\tau\right\|. \qquad (4.1)$$

Если условие (4.1) не выполняется, то это означает, что для робастной модели объекта

$$\frac{d}{dt}z(t)=\left[A+\alpha^*\right]+\left[B+\beta^*\right]u(t)+\varphi\left(z,\alpha^*,\beta^*\right)$$

с начальным условием $z(0)=x_0\in X_0$ и заданным периодом управления $[0,T]$ в общем случае не существует управления вида $u(t)=Kz(t)=-R^{-1}\left[B+\beta^*\right]Sz(t)$ с постоянной положительно определенной матрицей *S*, определяемой решением Риккати—Лурье $S\left[\mathrm{A}+\alpha^*\right]+\left[\mathrm{A}+\alpha^*\right]^T S-S\left[B+\beta^*\right]R^{-1}\left[B+\beta^*\right]^T S+Q=0,$ при котором будет выполняться условие $\|z(T)\|\le d$.

Выполнение условия (3.11) обеспечивает переходному процессу асимптотическое свойство, предъявляя соответствующие требования к поведению нелинейной вектор-функции, входящей в систему. Таким образом, выполнение этого условия является необходимым условием существования *d*-робастного управления.

Условие (4.1) является дополнительным условием, обеспечивая достаточные условия существования *d*-робастного управления.

Выполнение обоих условий гарантирует выполнение задачи *d*-робастного управления нестационарным объектом.

Пример

Нелинейная система «объект—регулятор» имеет вид

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&1\\-1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\x_2^2\end{pmatrix}.$$

В этом примере $\varphi^T(x,t)=\left(0\ x_2^2(t)\right)$. Задан квадратичный функционал качества, в котором заданы матрицы $R=1, Q=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$ и положительно определенная матрица *S* является решением уравнения Риккати—Лурье:

$$SA+A^TS-SBR^{-1}B^TS+Q=0.$$

Требуется построить управление по первому приближению и найти область начальных условий, траектории, начинающиеся из этой области, отвечали условию $x(t) \to 0$ при $t \to \infty$.

Оптимальное управление для линейной модели первого приближения и сама модель имеют вид

$$u = -R^{-1} B^T S x,$$

$$\frac{d}{dt}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_M .$$

Нелинейная система в координатной форме имеет вид

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2, \\ \dot{x}_2 = -x_1 - x_2 + x_2^2. \end{cases}$$

Запишем для рассматриваемого примера матричное нелинейное неравенство (3.14), взяв производные по t:

$$\begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2(t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2x_2(0) & \left[-x_1(0) - x_2(0) + x_2^2(0)\right] \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2^2(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & x_2^2(0) \end{pmatrix} \le 0,$$

$x_1(0) \ne 0,\ x_2(0) \ne 0$

или

$$\begin{pmatrix} 0 & -x_2^4(0) \\ 0 & 2x_2^3(0)\left[-x_1(t) - x_2(0) + x_2^2(0)\right] + x_2^4(0) \end{pmatrix} \le 0, \quad x_1(0) \ne 0, x_2(0) \ne 0,$$

откуда:

$$x_2^4(0) \ge 0\,,$$

$$2x_2^3(0)\left[-x_1(t) - x_2(0) + x_2^2(0)\right] + x_2^4(0) \le 0.$$

Полученные матричные неравенства позволяют определить область начальных условий, траектории, начинающиеся из которой, асимптотически убывают. На рис. 1 показана эта область начальных условий X_0 (заштрихованная).

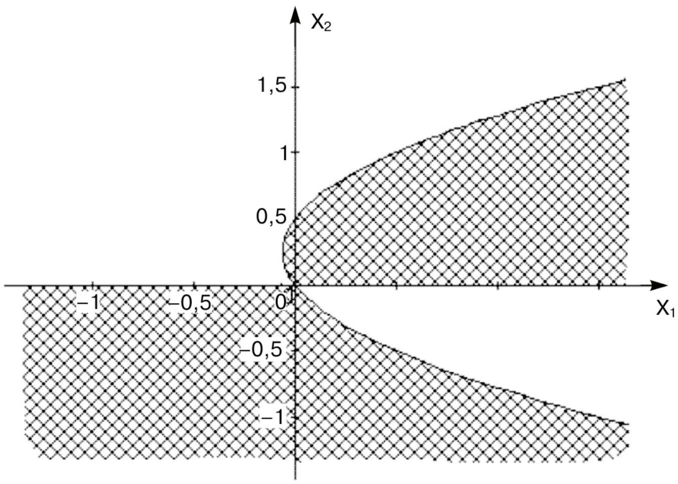

Рис. 1. Область начальных условий

Заключение. Представлен новый метод исследования поведения нелинейных объектов с параметрической неопределенностью находящихся под воздействием управления, синтезированного с использованием робастных линейных моделей первого приближения. Рассмотрены задачи робастной стабилизации и d-робастного терминального управления. Найдена область начальных условий, для которых полученные управления стабилизируют неопределенный нелинейный объект.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Атанс М., Фалб П.* Оптимальное управление. — М.: Машиностроение, 1968.
[2] *Афанасьев В.Н.* Динамические системы управления с неполной информацией: Алгоритмическое конструирование. — М.: КомКнига, 2007.
[3] *Беллман Р.* Теория Устойчивости решений дифференциальных уравнений. Изд. 2-е, стереотипное. — М.: Едиториал УРСС, 2003.
[4] *Емельянов С.В., Коровин С.К.* Стабилизация неопределенных динамических объектов с непрерывным временем // Новые методы управления сложными системами. — М.: Наука, 2004.
[5] *Колдингтон Э.А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. Изд. 2-е, исправленное. — М.: Едиториал УРСС, 2007.
[6] *Малкин И.Г.* Теория устойчивого движения. Изд. 2-е, стереотипное. — М.: Едиториал УРСС, 2004.
[7] *Немыцкий В.В., Степанов В.В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. Изд. 3-е, испр. — М.: Едиториал УРСС, 2004.
[8] *Поляк Б.Т., Щербаков П.С.* Робастная устойчивость и управление. — М.: Наука, 2002.

ROBUST CONTROL BY NON-LINEAR SYSTEM INCLUDE UNCERTAIN PARAMETERS

V.N. Afanasiev, E.R. Bovshuk

Moscow state institute of electronics and mathematics
B. Trehsvjetitelsky, 3, Moscow, Russia, 109028

In this paper we focus on research of the task of robust non-linear object's control in situation when information about variation of parameters is not fully complete. Necessary and sufficient conditions of stabilization and d-robust control are received.

Key words: robust control, Non-linear object.