УДК 539.52

БОЛЬШИЕ ПРОГИБЫ ЖЕСТКОПЛАСТИЧЕСКОЙ ЗАЩЕМЛЕННОЙ БАЛКИ, НАГРУЖЕННОЙ ПРОДОЛЬНОЙ СИЛОЙ, НЕСИММЕТРИЧНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКОЙ И ОПОРНЫМИ МОМЕНТАМИ

И.А.Монахов[1], Л.В. Савченкова[2]

[1]Кафедра строительного производства
Строительный факультет
[2]Кафедра транспортно-технологических машин и систем
Факультет автомобилей и тракторов
Московский государственный машиностроительный университет
ул. Павла Корчагина, 22, Москва, Россия,129626

В статье разработана методика решения задач о больших прогибах балок из идеального жесткопластического материала при действии несимметрично распределенных нагрузок с учетом предварительного растяжения-сжатия. Разработанная методика применена для исследования напряженно-деформированного состояния однопролетных балок.

Ключевые слова: балка, нелинейность, аналитическое.

Ранее нами были рассмотрены малые прогибы балки. При расчете конструкций с помощью модели жесткопластического тела необходимо учитывать геометрическую нелинейность (большие прогибы) работы конструкции.

Расчет балок и круглых пластинок с учетом геометрической и физической нелинейности рассмотрен в работах [1; 2; 4], а работа [3] посвящена решению аналогичных задач для конструкций из стеклопластика.

Рассмотрим второй этап деформирования — большие прогибы. Решение задач на втором этапе также разбивается на два случая: $x_2 \le l_1$ и $x_2 \ge l_1$. Рассмотрим случай, когда $x_2 \le l_1$. В зоне $x_1 \le x \le x_3$ соблюдается условие пластичности: $n = \text{const}$, $m = 1 - (n \pm n_1)^2$. Если $x_3 \le l_1$, то при $x_1 \le x \le x_3$ из уравнения равновесия вытекают выражения для прогибов и скоростей прогибов:

$$w = w_0 - \frac{p}{2(n \pm n_1)}(x_2 - x)^2,$$
$$\dot{w} = \dot{w}_0 - \left\{\frac{p}{2(n \pm n_1)}\right\}^{\bullet}(x_2 - x)^2 + \frac{p}{(n \pm n_1)}(x_2 - x)\dot{x}_2. \tag{1}$$

Зоны $0 \le x \le x_1$ и $x_3 \le x \le 2$ — жесткие, откуда распределение скоростей прогибов в этих зонах равно

$$\dot{w} = \left\{\frac{w_1}{x_1}\right\}^{\bullet} x, \quad \dot{w} = \left\{\frac{w_3}{2 - x_3}\right\}^{\bullet}(2 - x),$$

где w_1 и w_3 — прогибы при $x = x_1$ и $x = x_3$.

Условия для слабых разрывов при $x = x_1$ меют вид

$$\left[\dot{w}_x\right] + \dot{x}_1\left[w_{xx}\right] = 0, \quad \left[\ddot{w}\right] + \dot{x}_1\left[\dot{w}_x\right] = 0,$$

а также при $x = x_3$, если поменять индекс «1» на «3».

Разрывы при $x = x_3$ равны

$$\left[\frac{d\dot{w}}{dx}\right] = -\left\{\frac{w_3}{2 - x_3}\right\}^{\bullet} + \left\{\frac{p}{n \pm n_1}\right\}^{\bullet}\left(x_3 - x_2\right) - \frac{p}{n \pm n_1}\dot{x}_2, \quad \left[w_{xx}\right] = \frac{p}{n \pm n_1}$$

или $\left\{\dfrac{w_3}{2 - x_3}\right\}^{\bullet} = \left\{\dfrac{p}{n \pm n_1}\left(x_3 - x_2\right)\right\}^{\bullet}$ откуда $w_3 = \dfrac{p}{n \pm n_1}\left(x_3 - x_2\right)\left(2 - x_3\right)$.

Разрывы при $x = x_1$ равны:

$$\left[\dot{w}_x\right] = \left\{\frac{w_1}{x_1}\right\}^{\bullet} - \left\{\frac{p}{n \pm n_1}\right\}^{\bullet}\left(x_2 - x_1\right) - \frac{p}{n \pm n_1}\dot{x}_2, \quad \left[w_{xx}\right] = \frac{p}{n \pm n_1}$$

или $\left\{\dfrac{w_1}{x_1}\right\}^{\bullet} = \left\{\dfrac{p}{n \pm n_1}\left(x_2 - x_1\right)\right\}^{\bullet}$, откуда $w_1 = \dfrac{p x_1}{n \pm n_1}\left(x_2 - x_1\right)$

или, используя выражение (1), получим: $w_1 = w_0 - \dfrac{p}{2\left(n \pm n_1\right)}\left(x_2 - x_1\right)^2$, откуда

$w_0 = \dfrac{p}{2\left(n \pm n_1\right)}\left(x_2^2 - x_1^2\right)$.

Также, используя (1), получим $w_3 = w_0 - \dfrac{p}{2\left(n \pm n_1\right)}\left(x_3 - x_2\right)^2$, откуда

$$w_0 = \frac{p}{2\left(n \pm n_1\right)}\left(x_2^2 - x_3^2 + 4x_3 - 4x_2\right). \tag{2}$$

Из уравнения равновесия при $0 \le x \le x_1$ получаем:

$$m = 1 - \left(n \pm n_1\right)^2 - \frac{p}{2}\left(x_1 - x\right)^2, \quad m\,|_{x=0} = -\left[1 - \left(n \pm n_1\right)^2\right] \pm \alpha,$$

откуда

$$p = \frac{2\left[2\left\{1 - \left(n \pm n_1\right)^2\right\} \mp \alpha\right]}{x_1^2}. \tag{3}$$

При $x_3 \le x \le l_1$

$$m = -\frac{p x^2}{2} + p x_3 x - \frac{p x_3^2}{2} + 1 - \left(n \pm n_1\right)^2 = 1 - \left(n \pm n_1\right)^2 - \frac{p}{2}\left(x - x_3\right)^2.$$

При $l_1 \le x \le 2$

$$m = 1 - \left(n \pm n_1\right)^2 - \frac{p}{2}\left\{k_1 x^2 - 2x\left(x_3 + l_1\left(k_1 - 1\right)\right) + l_1^2\left(k_1 - 1\right) + x_3^2\right\},$$

$$m\Big|_{x=2} = \left[1 - \left(n \pm n_1\right)^2\right] \pm \alpha = 1 - \left(n \pm n_1\right)^2 - \frac{p}{2}\left\{4k_1 - 4\left(x_3 + k_1 l_1 - l_1\right) + l_1^2\left(k_1 - 1\right) + x_3^2\right\},$$

откуда

$$p=\frac{2\left[2\left\{1-\left(n\pm n_1\right)^2\right\}\mp\alpha\right]}{4k_1-4\left(x_3+k_1l_1-l_1\right)+l_1^2\left(k_1-1\right)+x_3^2}. \qquad (4)$$

Безусловная функция согласно (2) и (4) имеет вид

$$\varnothing=\frac{2\left[2\left\{1-\left(n\pm n_1\right)^2\right\}\mp\alpha\right]}{4k_1-4\left(x_3+k_1l_1-l_1\right)+l_1^2\left(k_1-1\right)+x_3^2}+$$
$$+\lambda\frac{\left(2\left\{1-\left(n\pm n_1\right)^2\right\}\mp\alpha\right)\left(x_2^2-x_3^2+4x_3-4x_2\right)}{\left(n\pm n_1\right)\left\{4k_1-4\left(x_3+k_1l_1-l_1\right)+l_1^2\left(k_1-1\right)+x_3^2\right\}}-\lambda w_0.$$

Дифференцируя безусловную функцию по x_3 и n и приравнивая результаты к нулю, получим выражения для нагрузки:

$$\frac{d\varnothing}{dn}=-8\left(n\pm n_1\right)-л\frac{2\left\{1-\left(n\pm n_1\right)^2\right\}\mp\alpha}{\left(n\pm n_1\right)^2}\left(x_2^2-x_3^2+4x_3-4x_2\right)=0,$$

$$\frac{d\varnothing}{dx_3}=2\left(n\pm n_1\right)+\lambda x_2^2=0,$$

откуда $\lambda=-\dfrac{2\left(n\pm n_1\right)}{\left\{k_1+l_1\left(1-k_1\right)-\dfrac{l_1^2}{4}\left(1-k_1\right)\right\}^2}=-\dfrac{2\left(n\pm n_1\right)}{x_2^2}$ и

$$\left(n\pm n_1\right)^2=\frac{\left(2\pm\alpha\right)\left(x_2^2-x_3^2+4x_3-4x_2\right)}{\left\{x_2^2+x_3^2-4x_3+4x_2\right\}}.$$

Тогда из (4) получаем выражение для нагрузки:

$$p=\frac{4\left(2\mp\alpha\right)}{x_2^3+x_3^2-4x_3+4x_2}. \qquad (5)$$

Приравнивая равносильные выражения для w и p (2), (3), (4), получим

$$x_2=k_1+l_1\left(1-k_1\right)-\frac{l_1^2}{4}\left(1-k_1\right). \qquad (6)$$

Если $x_3\geq l_1$, то при $x_1\leq x\leq l_1$ должно соблюдаться условие пластичности: $m=1-(n\pm n_1)^2$, $n=\text{const}$.

Из уравнения равновесия получаем выражение для прогибов и скоростей прогибов:

$$w=w_0-\frac{p}{2\left(n\pm n_1\right)}\left(x_2-x\right)^2, \qquad (7)$$

$$\dot{w}=-\left\{\frac{p}{2\left(n\pm n_1\right)}\right\}^{\bullet}\left(x_2-x\right)^2-\frac{p}{n\pm n_1}\left(x_2-x\right)^2\dot{x}_2+\dot{w}_0.$$

При $l_1\leq x\leq x_3$ уравнение равновесия имеет вид $\dfrac{d^2w}{dx^2}=-\dfrac{k_1p}{\left(n\pm n_1\right)}$, откуда получаем выражение для прогибов и скоростей прогибов:

$$w=w_0-\frac{p}{2\left(n\pm n_1\right)}\left\{k_1x^2+2x\left(l_1-x_2-k_1l_1\right)+x_2^2+l_1^2\left(k_1-1\right)\right\}, \tag{8}$$

$$\dot{w}=-\left\{\frac{p}{2\left(n\pm n_1\right)}\right\}^{\bullet}\left\{k_1x^2+2x\left(l_1-x_2-k_1l_1\right)+x_2^2+l_1^2\left(k_1-1\right)\right\}+\frac{p}{n\pm n_1}\left(x-x_2\right)+\dot{w}_0.$$

При $0\leq x\leq x_1$ и $x_3\leq x\leq 2$ (жесткие зоны) выполняются равенства

$$\dot{w}=-\left\{\frac{w_1}{x_1}\right\}^{\bullet}x,\quad \dot{w}=-\left\{\frac{w_3}{2-x_3}\right\}^{\bullet}\left(2-x\right).$$

Подставляя w_1 и w_3 в выражения для (7) и (8), получаем:

при $x=x_1\rightarrow w_0=\dfrac{p}{2\left(n\pm n_1\right)}\left(x_2^2-x_1^2\right)$, а при $x=x_3$: $x=x_3$

$$w_0=\frac{p}{2\left(n\pm n_1\right)}\left\{4k_1x_3+4l_1\left(1-k_1\right)-4x_2+x_2^2+l_1^2\left(k_1-1\right)-k_1x_3^2\right\}. \tag{9}$$

Рассматривая зону $0\leq x\leq x_1$ из уравнения равновесия, получаем изгибающие моменты: $m=1-\left(n\pm n_1\right)^2-\dfrac{p}{2}\left(x_1-x\right)^2$, а из граничного условия получаем выражения для нагрузки:

$$p=\frac{2\left[2\left\{1-\left(n\pm n_1\right)^2\right\}\mp\alpha\right]}{x_1^2}. \tag{10}$$

Рассматривая зону $x_3\leq x\leq 2$, получаем выражение для изгибающего момента: $m=1-\left(n\pm n_1\right)^2-\dfrac{k_1p}{2}\left(x-x_3\right)^2$, откуда с учетом граничного условия получаем нагрузку

$$p=\frac{2\left[2\left\{1-\left(n\pm n_1\right)^2\right\}\mp\alpha\right]}{k_1\left(2-x_3\right)^2}. \tag{11}$$

Используя полученные равносильные выражения для w_0 и p, получим:

$$x_2=k_1+l_1\left(1-k_1\right)-\frac{l_1^2}{4}\left(1-k_1\right). \tag{12}$$

Безусловная функция в этом случае из (11) и (9) имеет вид:

$$\varnothing = \frac{2\left[2\left\{1-\left(n\pm n_1\right)^2\right\}\mp\alpha\right]}{k_1\left(2-x_3\right)^2}+$$

$$+\lambda\frac{\left[2\left\{1-\left(n\pm n_1\right)^2\right\}\mp\alpha\right]\left\{4k_1x_3+x_2^2-k_1x_3{}^2-4k1\right\}}{k_1\left(2-x_3\right)^2\left(n\pm n_1\right)}-\lambda w_0.$$

Дифференцируя безусловную функцию по x_3 и n и приравнивая производные к нулю, получим выражения для нагрузки:

$$p=\frac{2\left\{2\left[1-\left(n\pm n_1\right)^2\right]\mp\alpha\right\}}{k_1\left(2-x_3\right)^2}=\frac{4\left(2\mp\alpha\right)}{x_2^2+k_1\left(2-x_3\right)^2}. \tag{13}$$

Далее рассматривается второй случай деформирования балки, когда $x_2\ge l_1$. В зоне $x_1\le x\le x_3$ при $x_1\ge l_1$ из уравнения равновесия и условия пластичности следуют выражения для прогибов и скоростей прогибов:

$$w=w_0-\frac{k_1p}{2\left(n\pm n_1\right)}\left(x-x_2\right)^2,$$

$$\dot{w}=\dot{w}_0-\left\{\frac{k_1p}{2\left(n\pm n_1\right)}\right\}^{\bullet}\left(x-x_2\right)^2+\frac{k_1p}{\left(n\pm n_1\right)}\left(x-x_2\right)\dot{x}_2. \tag{14}$$

Условия для слабых разрывов (при $x=x_1$ и $x=x_3$) дают:

$$w_1=\frac{k_1px_1}{\left(n\pm n_1\right)}\left(x_2-x_1\right),\quad w_3=\frac{k_1p}{\left(n\pm n_1\right)}\left(x_3-x_2\right)\left(2-x_3\right).$$

Подставляя выражения w_1 и w_3 в (14) при $x=x_1$ и $x=x_3$, получим:

$$w_0=\frac{k_1p}{2\left(n\pm n_1\right)}\left(x_2^2-x_1^2\right)=\frac{k_1p}{2\left(n\pm n_1\right)}\left(4x_3-4x_2+x_2^2-x_3^2\right). \tag{15}$$

Из уравнений равновесия и условия пластичности получаем выражение для изгибающего момента при $l_1\le x\le x_1$ и $0\le x\le l_1$:

$$m=1-\left(n\pm n_1\right)^2-\frac{k_1p}{2}\left(x-x_1\right)^2,$$

$$m=1-\left(n\pm n_1\right)^2-\frac{px^2}{2}+p\left(k_1x_1+l_1-k_1l_1\right)x-\frac{pl_1^2}{2}-\frac{k_1p}{2}\left(x_1^2-l_1^2\right).$$

Откуда при соблюдении граничного условия $m\big|_{x=0}=-\left[1-\left(n\pm n_1\right)^2\right]\pm\alpha$ получим:

$$p=\frac{2\left\{2\left[1-\left(n\pm n_1\right)^2\right]\mp\alpha\right\}}{k_1x_1^2+l_1^2\left(1-k_1\right)^2}. \tag{16}$$

Далее — аналогичные математические выкладки при $x_3 \le x \le 2$. Получим: $m = -\left(n \pm n_1\right)^2 - \frac{k_1 p}{2}\left(x - x_3\right)^2$ и тогда при $m\big|_{x=0} = -\left[1 - \left(n \pm n_1\right)^2\right] \pm \alpha$ получим

$$p = \frac{2\left[2\left\{1 - \left(n \pm n_1\right)^2\right\} \mp \alpha\right]}{k_1\left(2 - x_3\right)^2}. \quad (17)$$

Приравнивая равносильные выражения для w_0 и p из (15), (16), (17) получим:

$$x_2 = 1 - \frac{l_1^2}{4k_1}\left(1 - k_1\right). \quad (18)$$

Составляя и дифференцируя безусловную функцию, получаем:

$$p = \frac{4\left(2 \mp \alpha\right)}{k_1\left[\left(2 - x_2\right)^2 + \left(2 - x_3\right)^2\right]}. \quad (19)$$

Если $x_1 \le l_1$ и $l_1 \le x_3$, то в зонах $0 \le x \le x_1$ и $x_3 \le x \le 2$ справедливы выражения:

$$\dot{w} = \left\{\frac{w_1}{x_1}\right\}^{\bullet} x, \quad \dot{w} = \left\{\frac{w_3}{2 - x_3}\right\}^{\bullet}\left(2 - x\right).$$

В зоне $x_1 \le x \le x_3$ верно, что $n = \text{const}$, $m = 1 - (n \pm n_1)^2$, $Q = 0$.

В зоне $l_1 \le x \le x_3$ из уравнения равновесия получаем:

$$w = w_0 - \frac{k_1 p}{2\left(n \pm n_1\right)}\left(x - x_2\right)^2, \quad \dot{w} = \dot{w}_0 - \left\{\frac{k_1 p}{2\left(n \pm n_1\right)}\right\}^{\bullet}\left(x - x_2\right)^2 + \frac{k_1 p}{n \pm n_1}\left(x - x_2\right)\dot{x}_2,$$

а на участке $x_1 \le x \le l_1$:

$$w = w_0 - \frac{p}{2\left(n \pm n_1\right)}x^2 + \frac{p}{n \pm n_1}\left\{k_1 x_2 - k_1 l_1 + l_1\right\}x - \frac{p}{2\left(n \pm n_1\right)}\left\{k_1 x_2^2 - k_1 l_1^2 + l_1^2\right\}. \quad (20)$$

Из условия слабых разрывов для w (20) получим:

$$w_0 = \frac{p}{2\left(n \pm n_1\right)}\left\{k_1 x_2^2 - x_1^2 + l_1^2\left(1 - k_1\right)\right\} = \frac{k_1 p}{2\left(n \pm n_1\right)}\left(4x_3 - x_3^2 - x_2^2 - 4x_2\right). \quad (21)$$

Из уравнения равновесия, условия пластичности и граничных условий $m = [1 - (n \pm n_1)^2] \pm \alpha$ при $x = 0$ и $x = 2$ получаем выражение для изгибающего момента и нагрузки:

при $0 \le x \le x_1$ $m = 1 - \left(n \pm n_1\right)^2 - \frac{p}{2}\left(x_1 - x\right)^2$,

при $x_3 \le x \le 2$ $m = 1 - \left(n \pm n_1\right)^2 - \frac{k_1 p}{2}\left(x - x_3\right)^2$,

$$p = \frac{2\left\{2\left[1 - \left(n \pm n_1\right)^2\right] \mp \alpha\right\}}{x_1^2}, \quad p = \frac{2\left\{2\left[1 - \left(n \pm n_1\right)^2\right] \mp \alpha\right\}}{k_1\left(2 - x_3\right)^2}. \quad (22)$$

Составляя безусловную функцию и дифференцируя ее, получим выражение:

$$p = \frac{4(2 \mp \alpha)}{l_1^2 - k_1 l_1^2 + k_1 x_2^2 + x_1^2}. \qquad (23)$$

В результате получено аналитическое решение поставленной задачи.

По полученным аналитическим зависимостям были построены графические зависимости прогиба w_0 от нагрузки p для разных значений l_1, α, k_1 (рис. 1—6).

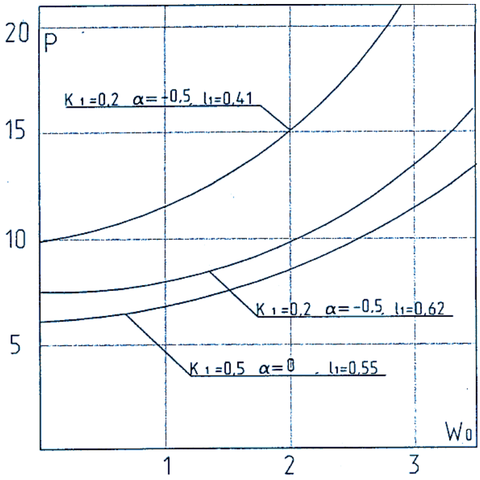

Рис. 1

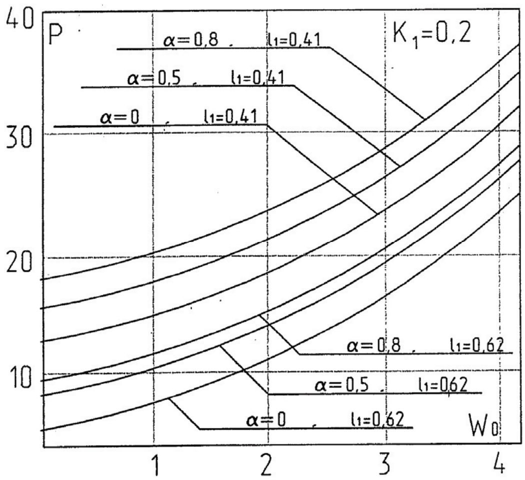

Рис. 2

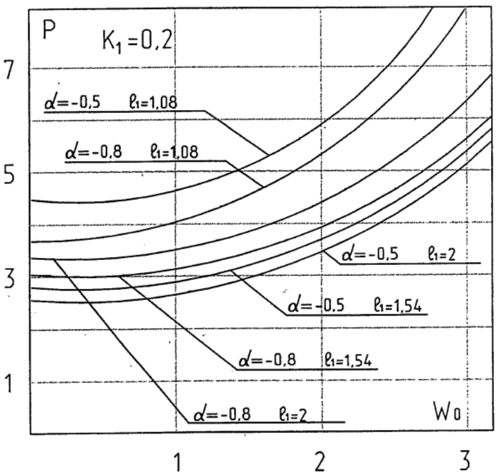

Рис. 3

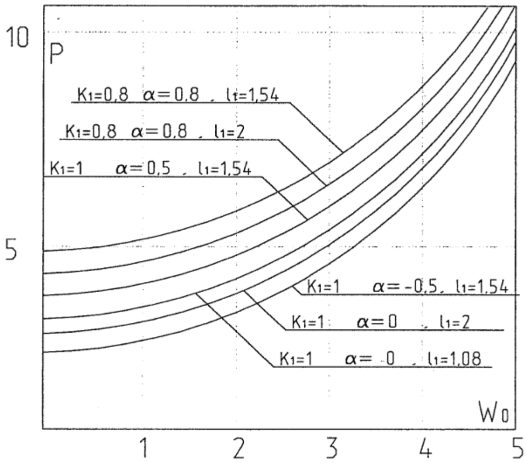

Рис. 4

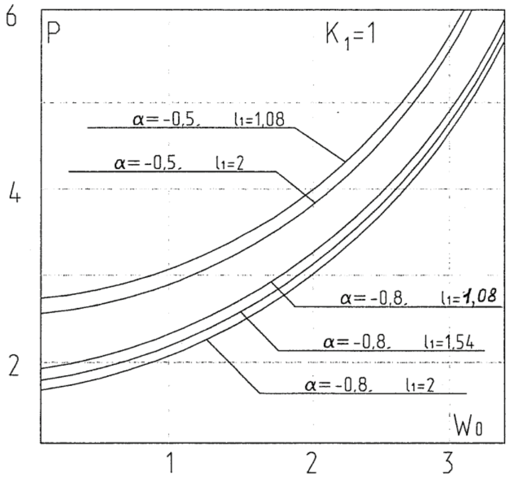

Рис. 5

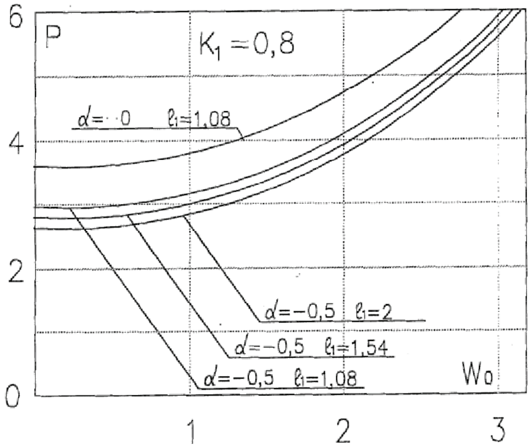

Рис. 6

Разработанная методика решения может быть распространена на другие виды балок и нагрузок. Полученные решения благодаря аналитической форме могут найти непосредственное применение в практике проектирования стержневых конструкций.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Басов Ю.К., Монахов И.А.* Аналитическое решение задачи о больших прогибах жесткопластической защемленной балки под действием локальной распределенной нагрузки, опорных моментов и продольной силы // Вестник РУДН. Серия «Инженерные исследования». — 2012. — № 3. — С. 120—125. [*Basov Yu.K., Monakhov I.A.* Analiticheskoe reshenie zadachi o bolshih prigibah zhestkoplasticheskoj zashcemlennoj balki pod dejstviem lokalnij raspredelennoj nagruzki, opornyh momentov I prodolnoj sily // Vestnik RYDN. Seriya «Inzhenernye issledovaniya». — 2012. — № 3. — S. 120—125].

[2] *Савченко Л.В., Монахов И.А.* Большие прогибы физически нелинейных круглых пластинок // Вестник ИНЖЕКОНА. Серия «Технические науки». — Вып. 8(35). — СПб., 2009. — С. 132—134. [*Savchenko L.V., Monakhov I.A.* Bolshie progiby fizicheski nelinejnyh kruglyh plastinok // Vestnik INZHEKONA. Seria «Tehnicheskie nauki». — Vyp. 8(35). — SPb., 2009. — S. 132—134.]

[3] *Галилеев С.М., Салихова Е.А.* Исследование частот собственных колебаний элементов конструкции из стеклопластика, углепластика и графена // Вестник ИНЖЕКОНА. Серия «Технические науки». — Вып. 8. — СПб., 2011. — С. 102. [*Galileev S.M., Salihova E.A.* Issledovanie chastot sobstvennyh kolebaniy elementov konstruktsiy iz stekloplastika, ugleplastika I grafena // Vestnik INZHEKONA. Seria «Tehnicheskie nauki». — Vyp. 8. — SPb., 2011. — S. 102.]

[4] *Ерхов М.И., Монахов А.И.* Большие прогибы предварительно напряженной жесткопластической балки с шарнирными опорами при равномерно распределенной нагрузке и краевых моментах // Вестник отделения строительных наук Российской академии архитектуры и строительных наук. — 1999. — Вып. 2. — С.151—154. [*Erhov M.I., Monakhov A.I.* Bolshie progiby predvaritelno napryazhennoj zhestkoplasticheskoj balki s sharnirnymi oporami pri ravnomerno raspredelennoj nagruzke I kraevyh momentah // Vestnik otdeleniya stroitelnyh nauk Rossijskoj akademii arhitektury I stroitelnyh nauk. — 1999. — Vyp. 2. — S. 151—154].

THE LARGE DEFLECTIONS OF THE PREVIOUSLY INTENSE IDEAL PLASTIC BEAMS WITH THE REGIONAL MOMENTS

I.A. Monakhov[1], L.V. Savchenkova[2]

[1]Department of Building production manufacture
Faculty Building
Moscow State Machine- building University
Pavla Korchagina str., 22, Moskow, Russia, 129626

[2]Department of Transport-technological machines and systems
Faculty Automobiles and tractors
Moscow State Machine-building University
Pavla Korchagina str., 22, Moskow, Russia, 129626

In the work up the technique of the decision of problems about the large deflections of beams from ideal hard-plastic material, with various kinds of fastening, for want of action of the asymmetrically distributed loads with allowance for of preliminary stretching-compression is developed. The developed technique is applied for research of the strained-deformed condition of beams, and also for calculation of a deflection of beams with allowance for of geometrical nonlinearity.

Key words: beam, analytic, nonlinearity.