УДК 539.52

ПРЕДЕЛЬНАЯ НАГРУЗКА ДЛЯ ЗАЩЕМЛЕННОЙ БАЛКИ, НАГРУЖЕННОЙ ПРОДОЛЬНОЙ СИЛОЙ, НЕСИММЕТРИЧНО РАСПРЕДЕЛЕННОЙ НАГРУЗКОЙ И ОПОРНЫМИ МОМЕНТАМИ

И.А. Монахов[1], Ю.К. Басов[2]

[1]Кафедра строительного производства
Строительный факультет
Московский государственный
машиностроительный университет
ул. Павла Корчагина, 22, Москва, Россия,129626

[2]Кафедра строительных конструкций и сооружений
Инженерный факультет
Российский университет дружбы народов
ул. Орджоникидзе, 3, Москва, Россия, 115419

В статье разработана методика решения задач о малых прогибах балок из идеального жесткопластического материала при действии несимметрично распределенных нагрузок с учетом предварительного растяжения-сжатия. Разработанная методика применена для исследования напряженно-деформированного состояния однопролетных балок, а также для вычисления предельной нагрузки балок.

Ключевые слова: балка, нелинейность, аналитическое.

В современном строительстве, судостроении, машиностроении, химической промышленности и в других отраслях техники наиболее распространенными видами конструкций являются стержневые, в частности балки. Естественно, что для определения реального поведения стержневых систем (в частности, балок) и ресурсов их прочности необходим учет пластических деформаций.

Расчет конструктивных систем при учете пластических деформаций с помощью модели идеального жесткопластического тела является наиболее простым, с одной стороны, и достаточно приемлемым с точки зрения требований практики проектирования — с другой. Если иметь в виду область малых перемещений конструктивных систем, то это объясняется тем, что несущая способность («предельная нагрузка») идеальных жесткопластических и упругопластических систем оказывается одной и той же.

Дополнительные резервы и более строгая оценка несущей способности конструкций выявляются в результате учета геометрической нелинейности при деформировании их. В настоящее время учет геометрической нелинейности в расчетах конструктивных систем является первоочередной задачей не только с точки зрения развития теории расчета, но и с точки зрения практики проектирования сооружений. Приемлемость решений задач о расчете конструкций в условиях малости перемещений достаточно неопределенна, с другой стороны, практические данные и свойства деформируемых систем позволяют считать, что большие перемещения являются реально достижимыми. Достаточно указать на конструкции строительных, химических, судо- и машиностроительных объектов. Кроме того, модель жесткопластического тела означает пренебрежение упругими деформациями, т.е. пластические деформации намного превосходят упругие. Поскольку деформациям соответствуют перемещения, то учет больших перемещений жесткопластических систем является уместным.

Однако геометрически нелинейное деформирование конструкций в большинстве случаев неизбежно приводит и к возникновению пластических деформаций. Поэтому особое значение приобретает одновременный учет пластических деформаций и геометрической нелинейности в расчетах конструктивных систем и, конечно, стержневых.

В данной статье рассматриваются малые прогибы. Подобные задачи решались в работах [1—4].

Рассматривается балка с защемленными опорами, под действием ступенчатой нагрузки, краевых моментов и предварительно приложенной продольной силы (рис. 1).

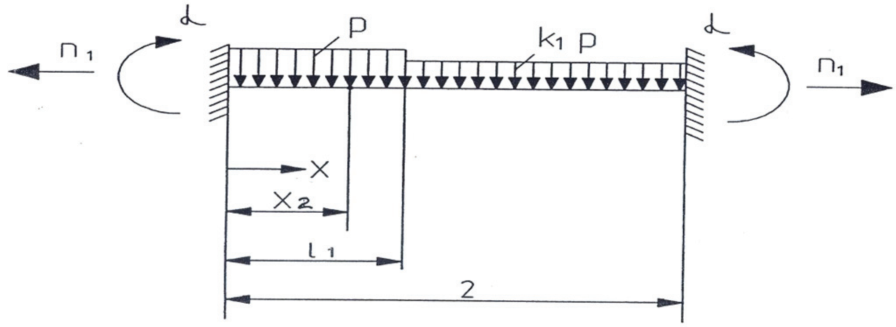

Рис. 1. Балка под распределенной нагрузкой

Уравнения равновесия балки при больших прогибах в безразмерной форме имеет вид

$$\frac{d^2m}{dx^2}+\left(n\pm n_1\right)\frac{d^2w}{dx^2}+p=0,\quad \frac{dn}{dx}=0,\tag{1}$$

где $x=\frac{\overline{x}}{\overline{l}}$, $w=\frac{2\overline{w}}{h}$, $p=\frac{\overline{p}l^2}{\delta_s bh^2}$, $m=\frac{M}{\delta_s bh^2}$, $n=\frac{N}{2\delta_s bh}$, N и M — внутренние нормальная сила и изгибающий момент, $\overline{p}$ — поперечная равномерно распределенная нагрузка, $\overline{w}$ — прогиб, $\overline{x}$ — продольная координата (начало координат на левой опоре), $2h$ — высота поперечного сечения, b — ширина поперечного сечения, $2\overline{l}$ — пролет балки, δ_s — предел текучести материала. Если N_1 задано, то усилие N является следствием действия $\overline{p}$ при имеющихся прогибах, $l_1=\frac{\overline{l_1}}{\overline{l}}$, черта над буквами означает размерность величин.

Рассмотрим первый этап деформирования — «малые» прогибы. Пластическое сечение возникает при $x = x_2$, в нем $m = 1 - n_1^2$.

Выражения для скоростей прогибов имеют вид (w_0 — прогиб при $x = x_2$):

$$\dot{w} = \left\{\frac{w_0}{2-x_2}\right\}^{\cdot}(2-x), \quad (x \ge x_2),$$
$$\dot{w} = \left\{\frac{w_0}{x_2}\right\}^{\cdot} x, \qquad (x \le x_2). \tag{2}$$

Решение задачи разбивается на два случая: $x_2 \le l_1$ и $x_2 \ge l_1$.

Рассмотрим случай $x_2 \le l_1$.

Для зоны $0 \le x_2 \le l_1$ из (1) получаем:

$$m = -\frac{px^2}{2} + \left(k_1 p + pl_1 - k_1 pl_1 - \frac{pl_1^2}{4} + \frac{k_1 pl_1^2}{4}\right)x - \left(1 - n_1^2\right) \pm \alpha,$$

откуда:

$$\left.\frac{dm}{dx}\right|_{x=x_2} = -px_2 + \left(k_1 p + pl_1 - k_1 pl_1 - \frac{pl_1^2}{4} + \frac{k_1 pl_1^2}{4}\right) = 0 \Rightarrow$$
$$x_2 = k_1 + l_1 - k_1 l_1 - \frac{l_1^2}{4} + \frac{k_1 l_1^2}{4}. \tag{3}$$

Учитывая возникновение пластического шарнира при $x = x_2$, получаем:

$$m_{x=x_2} = 1 - n_1^2 = -\frac{p}{2}\left(k_1 + l_1 - k_1 l_1 - \frac{l_1^2}{4} + \frac{k_1 l_1^2}{4}\right)^2 +$$
$$+ p\left(k_1 + l_1 - k_1 l_1 - \frac{l_1^2}{4} + \frac{k_1 l_1^2}{4}\right)^2 - \left(1 - n_1^2\right) \pm \alpha,$$

откуда

$$p = \frac{2\left[2\left(1 - n_1^2\right) \mp \alpha\right]}{\left(k_1 + l_1 - k_1 l_1 - \frac{l_1^2}{4} + \frac{k_1 l_1^2}{4}\right)^2}. \tag{4}$$

Рассматривая случай $x_2 \ge l_1$, получаем:

для зоны $0 \le x \le l_1$ выражение для изгибающих моментов имеет вид

$$m = -\frac{px^2}{2} + \left(k_1 p - \frac{pl_1^2}{4} + \frac{k_1 pl_1^2}{4} + pl_1 - k_1 pl_1\right)x - \left(1 - n_1^2\right) \pm \alpha,$$

а для зоны $l_1 \le x \le 2$ —

$$m = -\frac{k_1 p x^2}{2} + \left(k_1 p - \frac{p l_1^2}{4} + \frac{k_1 p l_1^2}{4}\right) x - \left(1 - n_1^2\right) \pm \alpha + \frac{p l_1^2}{2} - \frac{k_1 p l_1^2}{2},$$

откуда $\left.\dfrac{dm}{dx}\right|_{x=x_2} = -k_1 p x_2 + \left(k_1 p - \dfrac{p l_1^2}{4} + \dfrac{k_1 p l_1^2}{4}\right) = 0,$ и тогда

$$x_2 = 1 - \frac{l_1^2}{4k_1} + \frac{l_1^2}{4}. \tag{5}$$

Из условия пластичности вытекает равенство

$$\left. m \right|_{x=x_2} = 1 - n_1^2 = -\frac{p\left(k_1 - \dfrac{l_1^2}{4} + \dfrac{k_1 p l_1^2}{4}\right)^2}{2k_1} + \frac{p l_1^2}{2} - \frac{k_1 p l_1^2}{2} - \left(1 - n_1^2\right) \pm \alpha,$$

откуда получаем выражение для нагрузки:

$$p = \frac{2k_1\left[2\left(1 - n_1^2\right) \mp \alpha\right]}{\left(k_1 - \dfrac{l_1^2}{4} + \dfrac{k_1 l_1^2}{4}\right)^2 + k_1 l_1^2 - k_1^2 l_1^2}. \tag{6}$$

Таблица 1

$k_1 = 0$ $l_1 = 0,66$

n_1	α				
	–1	–0,5	0	0,5	1
0	6,48	9,72	12,96	16,2	19,44
0,5	3,24	6,48	9,72	12,96	16,2

Таблица 2

$k_1 = 0$ $l_1 = 1,33$

n_1	α				
	–1	–0,5	0	0,5	1
0	2,53	3,80	5,06	6,33	7,59
0,5	1,27	2,53	3,80	5,06	6,33

Таблица 3

$k_1 = 0,5$ $l_1 = 1,61$

n_1	α				
	–1	–0,5	0	0,5	1
0	2,98	4,47	5,96	7,45	8,94
0,5	1,49	2,98	4,47	5,96	7,45

Таблица 3

$k_1 = 0,5$ $l_1 = 2,0$

n_1	α				
	–1	–0,5	0	0,5	1
0	3,56	5,33	7,11	8,89	10,7
0,5	1,78	3,56	5,33	7,11	8,89

Таблица 5

$k_1 = 0,8$ $l_1 = 0,94$

n_1	α				
	–1	–0,5	0	0,5	1
0	2,24	3,56	4,49	5,61	6,73
0,5	1,12	2,24	3,36	4,49	5,61

Таблица 6

$k_1 = 1$ $l_1 = 1,33$

n_1	α				
	–1	–0,5	0	0,5	1
0	2,0	3,0	4,0	5,0	6,0
0,5	1,0	2,0	3,0	4,0	5,0

Таблица 7

$k_1 = 0{,}8 \quad l_1 = 1{,}65$

n_1	α				
	–1	–0,5	0	0,5	1
0	2,55	3,83	5,15	6,38	7,66
0,5	1,28	2,55	3,83	5,15	6,38

Таблица 8

$k_1 = 0{,}2 \quad l_1 = 0{,}42$

n_1	α				
	–1	–0,5	0	0,5	1
0	7,31	10,9	14,6	18,3	21,9
0,5	3,65	7,31	10,9	14,6	18,3

Задавая коэффициент нагрузки k_1 от 0 до 1, изгибающий момент α от –1 до 1, значение продольной силы n_1 от 0 до 1, расстояние l_1 от 0 до 2, получим положение пластического шарнира по формулам (3) и (5), а затем получим значение предельной нагрузки по формулам (4) или (6). Численные результаты расчетов сведены в таблицы 1—8.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Басов Ю.К., Монахов И.А.* Аналитическое решение задачи о больших прогибах жестко-пластической защемленной балки под действием локальной распределенной нагрузки, опорных моментов и продольной силы // Вестник РУДН. Серия «Инженерные исследования». — 2012. — № 3. — С. 120—125. [*Basov Yu.K., Monakhov I.A.* Analiticheskoe reshenie zadachi o bolshih prigibah zhestkoplasticheskoj zashcemlennoj balki pod dejstviem lokalnij raspredelennoj nagruzki, opornyh momentov i prodolnoj sily // Vestnik RYDN. Seriya «Inzhenernye issledovaniya». — 2012. — № 3. — S. 120—125.]

[2] *Савченко Л.В., Монахов И.А.* Большие прогибы физически нелинейных круглых пластинок // Вестник ИНЖЕКОНА. Серия «Технические науки». — Вып. 8(35). — СПб., 2009. — С. 132—134. [*Savchenko L.V., Monakhov I.A.* Bolshie progiby fizicheski nelinejnyh kruglyh plastinok // Vestnik INZHEKONA. Seria «Tehnicheskie nauki». — Vyp. 8(35). — SPb., 2009. — S. 132—134.]

[3] *Галилеев С.М., Салихова Е.А.* Исследование частот собственных колебаний элементов конструкции из стеклопластика, углепластика и графена // Вестник ИНЖЕКОНА. Серия «Технические науки». — Вып. 8. — СПб., 2011. — С.102. [*Galileev S.M., Salihova E.A.* Issledovanie chastot sobstvennyh kolebaniy elementov konstruktsiy iz stekloplastika, uglеplastika I grafena // Vestnik INZHEKONA. Seria «Tehnicheskie nauki». — Vyp. 8. — SPb., 2011. — S. 102.]

[4] *Ерхов М.И., Монахов А.И.* Большие прогибы предварительно напряженной жесткопластической балки с шарнирными опорами при равномерно распределенной нагрузке и краевых моментах // Вестник отделения строительных наук Российской академии архитектуры и строительных наук. — 1999. — Вып. 2. — С. 151—154. [*Erhov M.I., Monakhov A.I.* Bolshie progiby predvaritelno napryazhennoj zhestkoplasticheskoj balki s sharnirnymi oporami pri ravnomerno raspredelennoj nagruzke i kraevyh momentah // Vestnik otdeleniya stroitelnyh nauk Rossijskoj akademii arhitektury i stroitelnyh nauk. — 1999. — Vyp. 2. — S. 151—154.].

THE LITTLE DEFLECTIONS OF THE PREVIOUSLY INTENSE IDEAL PLASTIC BEAMS WITH THE REGIONAL MOMENTS

I.A. Monakhov[1], U.K. Basov[2]

[1]Department of Building production manufacture
Building Faculty
Moscow State Machine-building University
Pavla Korchagina str., 22, Moskow, Russia,129626

[2]Department of Bulding Structures and Facilities
Enqineering Faculty
Peoples' Friendship University of Russia
Ordzonikidze str., 3, Moskow, Russia, 115419

In the work up the technique of the decision of problems about the little deflections of beams from ideal hard-plastic material, with various kinds of fastening, for want of action of the asymmetrically distributed loads with allowance for of preliminary stretching-compression is developed. The developed technique is applied for research of the strained-deformed condition of beams, and also for calculation of a deflection of beams with allowance for of geometrical nonlinearity.

Key words: beam, analytic, nonlinearity.