

## ИНКРЕМЕНТАЛЬНЫЙ УПРУГОПЛАСТИЧЕСКИЙ РАСЧЕТ СТАЛЬНОЙ НЕРАЗРЕЗНОЙ БАЛКИ С УЧЕТОМ ПРИСПОСОБЛЯЕМОСТИ

А. Хейдари

Российский университет дружбы народов  
ул. Орджоникидзе, 3, Москва, Россия, 115419

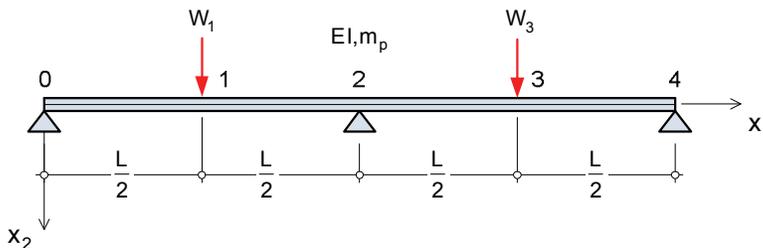
В работе приведен алгоритм инкрементального упругопластического расчета стальной двухпролетной неразрезной балки. Выполнены расчеты балки по упругому предельному состоянию, исследовано возникновение пластических шарниров и механизма разрушения. Рассмотрены условия приспособляемости, и определена максимальная нагрузка приспособляемости.

**Ключевые слова:** стальные конструкции, упругопластическая работа, пластическая адаптация, приспособляемость, пластический шарнир, предельная пластическая нагрузка, инкрементальный метод.

В настоящей статье на примере неразрезной двухпролетной балки описывается инкрементальный метод упругопластического расчета стальных конструкций при действии малых перемещений. Целью работы является описание алгоритма инкрементального анализа, который в дальнейшем будет использован при разработке инкрементального метода упругопластического расчета пространственных стержневых конструкций с учетом больших перемещений.

Принципы инкрементального упругопластического анализа вводятся для неразрезных балок, формирование пластических шарниров, в которых особенно хорошо подходят для визуализации упругопластического поведения. В работе использована безразмерная форма представления результатов расчета.

**Постановка задачи.** На рис. 1 показана неразрезная балка призматического сечения, имеющая два равных пролета длиной  $L$ . Момент инерции сечения равен  $I$ , а модуль упругости материала —  $E$ .



**Рис. 1.** Неразрезная балка под действием поперечных нагрузок

Пластический шарнир формируется в поперечном сечении балки если изгибающий момент достигает значения  $m_p$ :

$$P_{SO} = 6784 \frac{W}{R^3} + 93 \left( \frac{W}{R^3} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1)$$

Балка подвержена поперечным нагрузкам  $W_1$  и  $W_2$  в середине пролетов. Нагрузки являются квазистатическими, но изменяются с псевдвременем  $t$ . На рис. 2 показан цикл нагружения с периодом  $T$ .

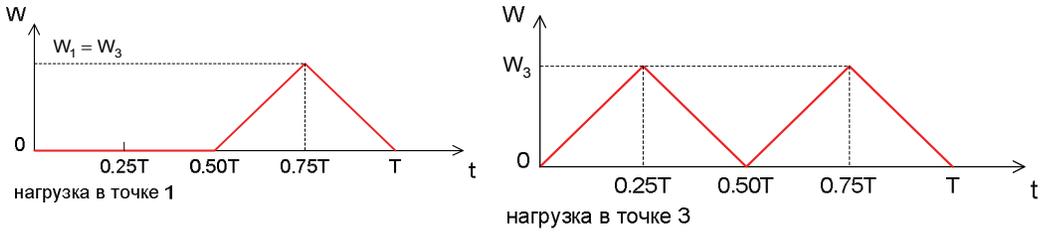


Рис. 2. Цикл нагрузок приложенных к балке

Необходимо определить прогибы балки в точках 1 и 3, а также изгибающие моменты в балке как функции псевдвремени.

**Упругое предельное состояние.** На рис. 3 показаны линейно упругие эпюры изгибающих моментов балки для псевдвремени  $t = 0.25T$  и  $t = 0.75T$  в цикле нагружения.

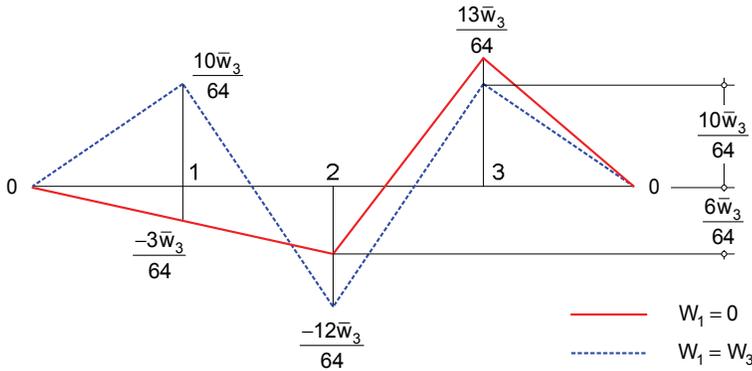


Рис. 3. Эпюры безразмерного изгибающего момента для псевдвремени  $t = 0.25T$  и  $t = 0.75T$

Упругая предельная нагрузка  $W_e$  является наименьшей нагрузкой, при которой максимальное абсолютное значение изгибающего момента в балке равно упругой несущей способности  $m_p$ . Из рис. 3 видно, что максимальный изгибающий момент в балке достигается во время  $t = 0.25T$  в точке 3. Балка при этом достигает упругого предельного состояния, если этот изгибающий момент равен безразмерной несущей способности в пластическом состоянии  $\bar{m}_p = 1$ :

$$\frac{13}{64} \bar{w}_e = 1, \text{ где } \bar{w}_e = \frac{W_e L}{m_p} \Rightarrow W_e = \frac{64 m_p}{13 L} = 4.9231 \frac{m_p}{L}. \quad (2)$$

Пластический шарнир образуется в точке 3. Изгибающий момент в точке 2 от упругой предельной нагрузки составляет

$$\bar{m}_{2e} = -\frac{6 \bar{w}_e}{64}, \text{ где } \bar{m}_{2e} = \frac{m_{2e}}{m_p} \Rightarrow m_{2e} = -\frac{6 W_e L}{64} = -\frac{6}{13} m_p. \quad (3)$$

Эпюра изгибающего момента для упругого предельного состояния показана на рис. 4.

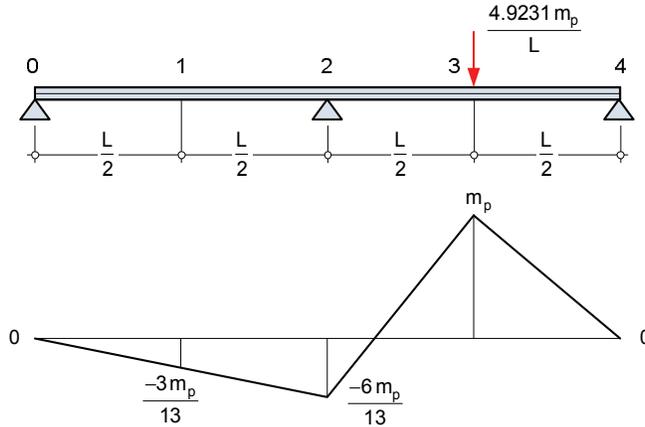


Рис. 4. Эпюра изгибающего момента для нагрузки  $W_3 = \frac{64 m_p}{13L}$

**Образование пластического шарнира.** Пусть максимальная нагрузка в цикле нагружения  $W_3 = 5m_p/L$  во время  $t = 0.25T$ . После образования пластического шарнира под действием упругой предельной нагрузки  $W_3 = 4.9231m_p/L$  изгибающий момент в точке 3 остается постоянным. Нагрузка возрастает на величину  $\Delta W_3 = 0.0769 m_p/L$  и достигает значения амплитуды нагрузки  $5.0m_p/L$ . Шарнир деформируется пластически вследствие возрастания нагрузки, которая воспринимается статически определимой упругой балкой, показанной на рис. 5. Инкремент изгибающего момента в точке 2 составляет:

$$\Delta m_2 = \frac{0.0769 m_p}{L} \cdot \frac{L}{2} = 0.0385 m_p. \quad (4)$$

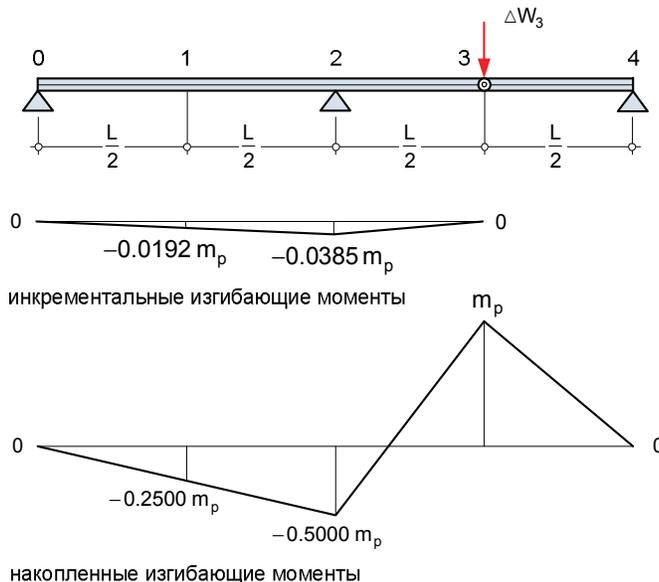


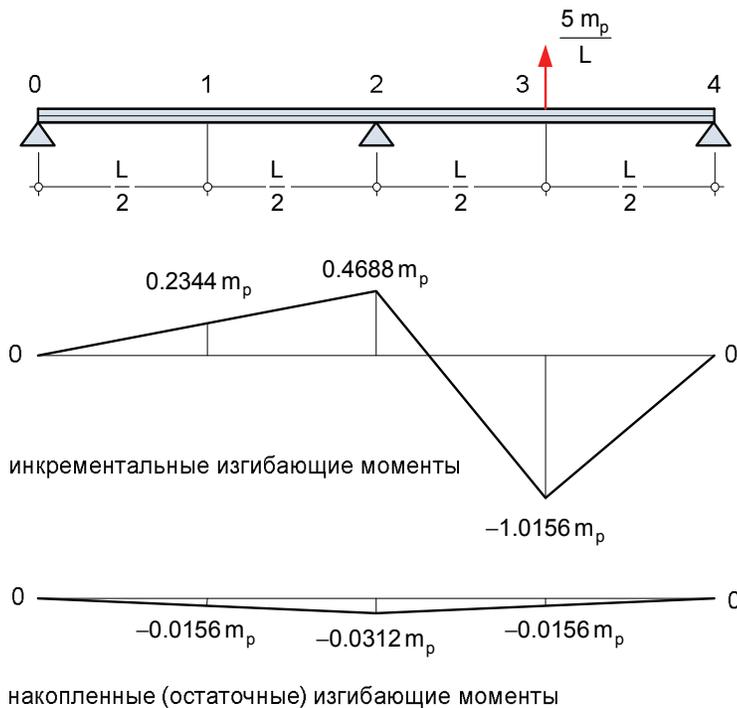
Рис. 5. Эпюра изгибающего момента для нагрузки  $W_3 = 5.0m_p/L$  at  $t = 0.25T$

Накопленный изгибающий момент во время  $t = 0.25T$  равен сумме изгибающих моментов, показанных на рис. 3, и инкрементов изгибающих моментов на рис. 5.

**Упругая разгрузка.** В интервале времени  $0.25T \leq t \leq 0.50T$  нагрузка в точке 3 уменьшается от значения  $5.0m_p/L$  до нуля. Конструкция ведет себя упруго, так как пластическая несущая способность сечения еще не достигнута ни в какой точке балки. Инкременты изгибающего момента от инкрементов нагрузки  $\Delta W_3 = -5.0m_p/L$  определяются при помощи выражений, приведенных на рис. 3:

$$\begin{aligned} \Delta m_1 &= -\frac{3L}{64} \cdot \left(-\frac{5m_p}{L}\right) = \frac{15}{64}m_p = 0.2344m_p, \\ \Delta m_2 &= -\frac{6L}{64} \cdot \left(-\frac{5m_p}{L}\right) = \frac{30}{64}m_p = 0.4688m_p, \\ \Delta m_3 &= \frac{13L}{64} \cdot \left(-\frac{5m_p}{L}\right) = -\frac{65}{64}m_p = -1.0156m_p. \end{aligned} \quad (5)$$

Эпюры инкрементального и накопленного изгибающего момента приведены на рис. 6. Несмотря на то, что во время  $t = 0.50T$  нагрузки на балку не действуют, накопленные изгибающие моменты в это время не равны нулю. Остаточные моменты существуют благодаря пластическому повороту в шарнире и находятся в равновесии с остаточными реакциями.



**Рис. 6.** Эпюра изгибающих моментов для нагрузки  $W_1 = W_3 = 0$  во время  $t = 0.50T$

**Равные нагружающие силы, приложенные в точках 1 и 3.** В интервал времени  $0.50T \leq t \leq 0.75T$  равные нагрузки  $W_1 = W_3 = 5m_p/L$  приложены в точках 1 и 3. Балка ведет себя упруго, так как пластическая несущая способность сечения еще не достигнута. Инкременты упругого момента вычисляются при помощи выражений, приведенных на рис. 3:

$$\begin{aligned} \Delta m_1 = \Delta m_3 &= \frac{10L}{64} \cdot \frac{5m_p}{L} = \frac{50}{64} m_p = 0.7813 m_p, \\ \Delta m_2 &= -\frac{12L}{64} \cdot \frac{5m_p}{L} = -\frac{60}{64} m_p = -0.9375 m_p. \end{aligned} \quad (6)$$

Инкременты изгибающих моментов добавляются к остаточным изгибающим моментам, давая в результате накопленные изгибающие моменты:

$$\begin{aligned} m_1 = m_3 &= -0.0156 m_p + 0.7813 m_p = 0.7657 m_p, \\ m_2 &= -0.0312 m_p - 0.9375 m_p = -0.9687 m_p. \end{aligned} \quad (7)$$

**Равные разгружающие силы, приложенные в точках 1 и 3.** Во временном интервале  $0.75T \leq t \leq 1.00T$  в точках 1 и 3 приложены равные разгружающие силы  $W_1 = W_3 = -5m_p/L$ . Балка ведет себя упруго, так как максимальное значение накопленного изгибающего момента не достигает пластической несущей способности сечения. Инкременты упругого момента равны по значению и противоположного по знакам инкрементам:

$$\begin{aligned} \Delta m_1 = \Delta m_3 &= -\frac{10L}{64} \cdot \frac{5m_p}{L} = -\frac{50}{64} m_p = -0.7813 m_p, \\ \Delta m_2 &= \frac{12L}{64} \cdot \frac{5m_p}{L} = \frac{60}{64} m_p = 0.9375 m_p. \end{aligned} \quad (8)$$

Очевидно, что остаточные изгибающие моменты во время  $t = T$  равны остаточным изгибающим моментам во время  $t = 0.5T$ . Нагружение и разгрузка во второй половине цикла нагружения не вызвали дополнительных поворотов в пластических шарнирах.

**История прогибов балки.** Формулы для вычисления перемещений в балке известны. Безразмерный прогиб от упругой предельной нагрузки  $64m_p/13L$ , приложенной в точке 3, определяется следующим образом:

$$\bar{u}_3 = \frac{23}{3 \cdot 512} \bar{w}_3, \quad \frac{EI u_3}{m_p L^2} = \frac{23}{3 \cdot 512} \cdot \frac{64}{13} = 0.073718. \quad (9)$$

Инкременты перемещения от инкремента нагрузки  $0.0769m_p/L$  равны

$$\Delta \bar{u}_3 = \frac{1}{8} \Delta \bar{w}_3, \quad \frac{EI \Delta u_3}{m_p L^2} = \frac{1}{8} \cdot 0.0769 = 0.009613. \quad (10)$$

Накопленные безразмерные прогибы в точке 3 во время  $0.25T$ , таким образом, составляют

$$\frac{EI u_3}{m_p L^2} = 0.073718 + 0.009613 = 0.083331. \quad (11)$$

Инкременты перемещения от инкремента нагрузки  $-5m_p/L$  на рис. 7 задаются выражением

$$\Delta \bar{u}_3 = \frac{23}{3 \cdot 512} \Delta \bar{w}_3, \quad \frac{EI \Delta u_3}{m_p L^2} = \frac{23}{3 \cdot 512} \cdot (-5.0) = -0.074870. \quad (12)$$

Накопленный безразмерный прогиб в точке 3 во время  $0.50T$  составляет

$$\frac{EI u_3}{m_p L^2} = 0.083331 - 0.074870 = 0.008461. \quad (13)$$

Накопленный прогиб в точке 3 представляет собой остаточный прогиб, так как балка в это время  $0.5T$  не загружена. Этот остаточный прогиб происходит из-за пластической деформации шарнира.

Инкремент прогиба от инкремента нагрузки  $5m_p/L$  в точках 1 и 3 равен

$$\Delta \bar{u}_3 = \left( \frac{23}{3 \cdot 512} - \frac{3}{512} \right) \Delta \bar{w}_3, \quad \frac{EI \Delta u_3}{m_p L^2} = \frac{14}{3 \cdot 512} \cdot 5.0 = 0.045573. \quad (14)$$

Накопленный прогиб в точке 3 во время  $0.75T$ , таким образом, равен

$$\frac{EI u_3}{m_p L^2} = 0.008461 + 0.045573 = 0.054034. \quad (15)$$

Инкремент прогиба от инкрементов нагрузки  $-5m_p/L$  в точках 1 и 3:

$$\Delta \bar{u}_3 = \left( \frac{23}{3 \cdot 512} - \frac{3}{512} \right) \Delta \bar{w}_3, \quad \frac{EI \Delta u_3}{m_p L^2} = \frac{14}{3 \cdot 512} \cdot (-5.0) = -0.045573. \quad (16)$$

Накопленный прогиб в точке 3 во время  $T$  равен

$$\frac{EI u_3}{m_p L^2} = 0.054034 - 0.045573 = 0.008461. \quad (17)$$

История перемещения точки 3 во время цикла нагружения показана на рис. 7.

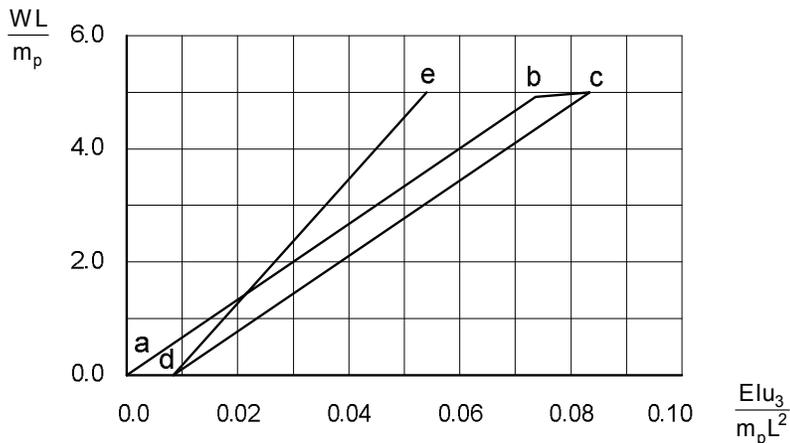


Рис. 7. История прогибов в точке 3 для амплитуды нагрузки  $5.0m_p/L$

История прогибов начинается в точке  $a$ . Балка достигает упругого предела в точке  $b$ , где в балке образуется пластический шарнир. Шарнир деформируется пластически до того момента, как достигается точка  $c$  во время  $0.25T$ . Затем балка разгружается упруго от точки  $c$  до точки  $d$ . Во время  $0.5T$  существует остаточный прогиб без внешней нагрузки. Когда балка разгружается, она остается упругой до того момента, как достигается точка  $e$  во время  $0.75T$ . Балка остается упругой во время разрушения до точки  $d$  во время  $T$ . Остаточный прогиб во время  $T$  остается таким же, как во время  $0.5T$ .

**Приспособляемость.** Пусть балка подвергается второму циклу нагружения. Продемонстрируем, что во время всего цикла нагружения балка остается упругой.

1. Инкремент нагрузки  $\Delta W_3 = 5.0 m_p / L$  прикладывается во временном интервале  $T \leq t \leq 1.25T$ . Пластический предел не достигается ни в какой точке балки, которая остается упругой. Инкремент безразмерного прогиба в точке 3 равен

$$\frac{E I \Delta u_3}{m_p L^2} = \frac{23}{3 \cdot 512} \cdot 5.0 = 0.074870. \quad (18)$$

Накопленный прогиб во время  $1.25T$  остается таким же, как во время  $0.25T$ :

$$\frac{E I u_3}{m_p L^2} = 0.008461 + 0.074870 = 0.083331. \quad (19)$$

2. Балка разгружается путем приложения инкремента нагрузки  $\Delta W_3 = -5.0 m_p / L$  во временном интервале  $1.25T \leq t \leq 1.50T$ . Пластический предел не достигается ни в какой точке балки, которая остается упругой. Инкремент прогиба в точке 3 равен

$$\frac{E I \Delta u_3}{m_p L^2} = \frac{23}{3 \cdot 512} \cdot (-5.0) = -0.074870. \quad (20)$$

Накопленное перемещение во время  $1.50T$  остается таким же, как во время  $0.50T$ :

$$\frac{E I u_3}{m_p L^2} = 0.083331 - 0.074870 = 0.008461. \quad (21)$$

3. Инкременты нагрузки  $\Delta W = 5.0 m_p / L$  прикладываются во временном интервале  $1.50T \leq t \leq 1.75T$  в точках 1 и 3. Пластический предел не достигается ни в какой точке балки. Инкремент безразмерного прогиба в точке 3 равен

$$\frac{E I \Delta u_3}{m_p L^2} = \frac{14}{3 \cdot 512} \cdot 5.0 = 0.045573. \quad (22)$$

Накопленное перемещение во время  $1.75T$  остается таким же, как во время  $0.75T$ :

$$\frac{E I u_3}{m_p L^2} = 0.008461 + 0.045573 = 0.054034. \quad (23)$$

4. Балка разгружается путем приложения инкрементов нагрузки  $\Delta W = -5.0 m_p / L$  во временном интервале  $1.25T \leq t \leq 1.50T$  в точках 1 и 3. Пластический предел не достигается ни в какой точке балки. Инкремент перемещения в точке 3 равен:

$$\frac{E I \Delta u_3}{m_p L^2} = \frac{14}{3 \cdot 512} \cdot (-5.0) = -0.045573. \quad (24)$$

Накопленный прогиб во время  $2T$  остается таким же, как и во время  $T$ :

$$\frac{E I u_3}{m_p L^2} = 0.054034 - 0.045573 = 0.008461. \quad (25)$$

Анализ цикла нагружения показывает, что балка, которая деформируется пластически в первом цикле нагружения, деформируется упруго во втором и последующих циклах нагружения. Конструкция с остаточными напряжениями, развитыми во время первого цикла нагружения, ведет себя упруго во всех последующих циклах нагружения.

**Определение:** упругопластическое поведение конструкции, которая развивает пластические деформации в первых нескольких циклах нагружения, а затем ведет себя упруго во всех последующих циклах, называется приспособляемостью конструкции.

**Механизм разрушения.** Максимальная нагрузка, которую балка может воспринимать как механизм с пластическими шарнирами, называется нагрузкой механизма разрушения. Эта нагрузка определяется инкрементальным методом для балки, загруженной в точке 3, как показано на рис. 4. Балка нагружается до предела упругости нагрузкой  $W_3 = (64m_p) / (13L)$ . Возникающие в результате изгибающие моменты показаны на рис. 4.

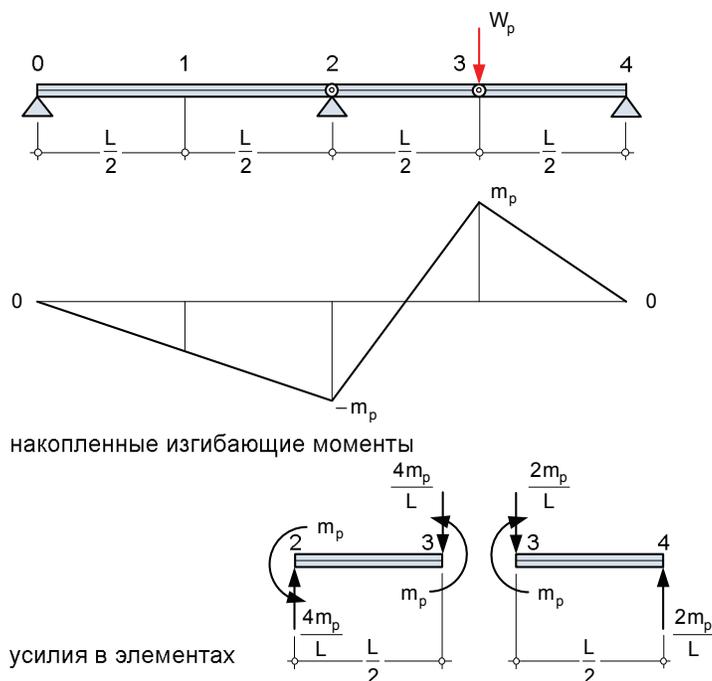
После формирования пластического шарнира в точке 3 нагрузка в точке 3 получает инкремент  $\Delta W_3$ , и накопленный изгибающий момент в точке 2 достигает пластической несущей способности  $-m_p$ :

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2} L \Delta W_3 &= -\left( m_p - \frac{6}{13} m_p \right), \\ \Delta W_3 &= \frac{14 m_p}{13 L} = 1.0769 \frac{m_p}{L}. \end{aligned} \quad (26)$$

Балка становится пластическим механизмом для заданной нагрузки после того, как в точках 2 и 3 образуются шарниры. Накопленная нагрузка, вызывающая пластический механизм, называется разрушающей пластической нагрузкой и обозначается  $W_p$ . Разрушающая пластическая нагрузка равна сумме упругой предельной нагрузки и инкремента нагружения (26):

$$W_p = \frac{64 m_p}{13 L} + \frac{14 m_p}{13 L} = 6.0 \frac{m_p}{L}. \quad (27)$$

Эпюры изгибающего момента и поперечной нагрузки, действующих на балку в состоянии разрушения, показаны на рис. 8:



**Рис. 8.** Механизм пластического разрушения балки

**Нагрузка приспособляемости.** Приспособляемость происходит в конструктивных системах, если выполняются следующие условия: а) пластическое течение во время нескольких первых циклов нагружения создает поле остаточных напряжений; б) во всех последующих циклах нагружения поведение конструкции при наложении остаточного поля упругих напряжения от приложенных нагрузок полностью упруго.

Пусть конструктивная система подвержена шаблонной нагрузке, которая является функцией псевдвремени. Эта шаблонная нагрузка умножается на коэффициент нагружения и дает приложенные циклы нагрузки. Для заданного значения коэффициент нагружения конструкция может развить или не развить приспособляемость. Если конструкция развивает приспособляемость, то произведение коэффициента нагружения на шаблонную нагрузку называется нагрузкой приспособляемости балки. Произведение шаблонной нагрузки и максимального коэффициента нагружения для которого конструкция проявляет приспособляемость называется максимальной нагрузкой приспособляемости.

Рассмотрим накопленные изгибающие моменты  $m_{ak}$  в потенциальных шарнирах  $k = 0, 1, \dots$  балки: эти моменты возникают от наложения остаточных изгибающих моментов и упругих изгибающих моментов  $m_{ek}$ . Накопленные изгибающие моменты возникающие от максимальной нагрузки приспособляемости, должны лежать в пределах  $-m_{pk} \leq m_{ak} \leq m_{pk}$  во всех потенциальных шарнирах  $k$ . В шарни-

рах, которые создают механизмы разрушения, накопленные изгибающие моменты должны быть равны  $m_{pk}$  или  $-m_{pk}$ :

$$m_{rk} + m_{ek}^{\max} \leq m_{pk}, \quad k = 0, 1, \dots; \quad (28)$$

$$m_{rk} + m_{ek}^{\min} \geq -m_{pk}. \quad (29)$$

Остаточные изгибающие моменты в балке происходят от пластических поворотов в шарнирах в точках 2 и 3. Нагрузки по концам элемента и моменты находятся в равновесии. Условия равновесия проиллюстрированы на рис. 9:

элемент *a*:  $r_0 L = m_2, \quad (30)$

элемент *b*:  $\frac{1}{2}r_4 L = m_2 - m_3, \quad (31)$

элемент *c*:  $\frac{1}{2}r_4 L = m_3. \quad (32)$

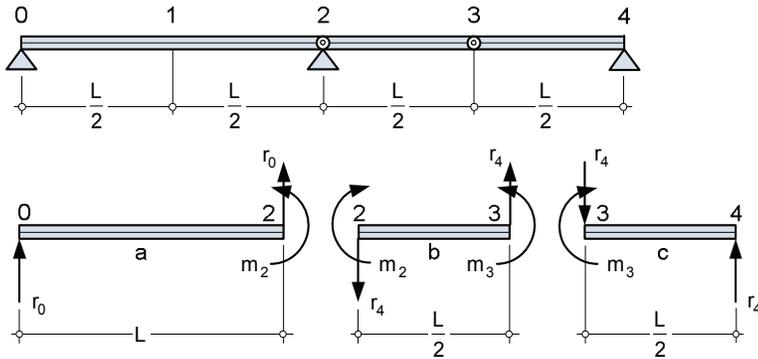


Рис. 9. Равновесие остаточных моментов

Уравнение равновесия остаточных моментов получается из уравнений (31) и (32):

$$2m_3 - m_2 = 0. \quad (33)$$

На рис. 10 показаны эпюры изгибающих моментов в балке при выполняющихся условиях приспособляемости. Значения упругих изгибающих моментов от нагрузки  $W_3$ , действующие в точке 3, и от нагрузок  $W_1 = W_3$ , действующие в точках 1 и 3, взяты из рис. 3. Максимальная нагрузка приспособляемости  $W_s$  должна удовлетворять следующим уравнениям:

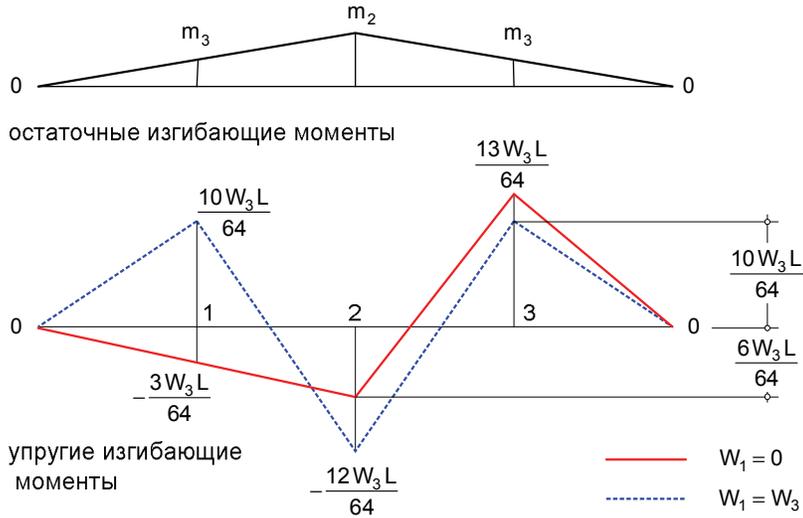
точка 2:  $m_2 - \frac{12W_s L}{64} = -m_p, \quad (34)$

точка 3:  $m_3 + \frac{13W_s L}{64} = m_p, \quad (35)$

остаточные моменты:  $2m_3 - m_2 = 0. \quad (36)$

Из решения уравнений (34)—(36) определяется максимальная нагрузка приспособляемости:

$$W_s = \frac{96m_p}{19L} = 5.0526 \frac{m_p}{L}. \quad (37)$$



**Рис. 10.** Изгибающие моменты для условий приспособляемости

**Заключение.** Инкрементальный упругопластический анализ неразрезной балки, выполненный в данной работе, показал следующие результаты:

— нагрузка, при которой в балке образуется первый пластический шарнир, равна:

$$W_e = \frac{64 m_p}{13 L} = 4.9231 \frac{m_p}{L}; \quad (38)$$

— максимальная нагрузка приспособляемости балки составляет

$$W_s = \frac{96 m_p}{19 L} = 5.0526 \frac{m_p}{L}; \quad (39)$$

— нагрузка, при которой формируется механизм пластического разрушения, равна

$$W_p = 6.0 \frac{m_p}{L}. \quad (40)$$

Если амплитуда цикла нагружения не превосходит  $W_e$ , то балка деформируется упруго во все время нагружения. Если амплитуда цикла нагружения превосходит  $W_e$ , но не превышает  $W_s$ , балка претерпевает пластическую деформацию в нескольких первых циклах нагружения и остается упругой во всех последующих циклах нагружения. Максимальное перемещение в балке ограничено. Если амплитуда цикла нагружения превосходит  $W_s$ , но не превосходит  $W_p$ , балка подвергается пластической деформации в каждом цикле нагружения. Эта балка становится непригодной к эксплуатации, потому что перемещение не ограничено. Если амплитуда цикла нагружения превосходит  $W_p$ , балка разрушается, так как образуется механизм пластического разрушения.

Главными задачами упругопластического расчета с учетом приспособляемости является определение нагрузок и положений, при которых образуются и исчезают пластические шарниры, а также определение приспособляемости конструктивной системы при каждом инкременте нагрузки. Изменения в конструктивной системе при инкрементальном изменении нагрузки могут быть эффективно смоделированы в программном приложении, использующем приведенный алгоритм.

#### **ЛИТЕРАТУРА**

- [1] *Casciaro R., Garcea G.* An iterative method of shakedown analysis. *Comp. Meth. Mech. Engrg.* 191 (2002) 5761—5792
- [2] *König J.A.* Shakedown of elastic-plastic structures. Elsevier Publishers, Amsterdam (1987).
- [3] *Stumpf H.*: Theoretical and computational aspects in the shakedown analysis of finite elastoplasticity. *Int. Journal of Plasticity*, Vol. 9, pp. 583—602, 1993.
- [4] *Borkowski A., Kleiber M.* On a numerical approach to shakedown analysis of structures. *Comp. Meth. Appl. Mech. Eng.*, 22, 101, 1980.

## **INCREMENTAL ELASTIC-PLASTIC ANALYSIS OF A CONTINUOUS STEEL BEAM WITH SHAKEDOWN**

**A. Heidari**

Peoples' Friendship University of Russia  
*Ordshonikidze str, 3, Moscow, Russia, 115419*

An algorithm of the incremental elastic-plastic analysis of a continuous steel beam is presented in this paper. An elastic limit state has been determined, and formation of plastic hinges and collapse mechanism has been investigated. The effect of the shakedown is introduced and the maximum shakedown load is determined.

**Key words:** steel structures, elastic-plastic work, shakedown, plastic hinge, plastic limit analysis, incremental method.