



DOI: 10.22363/2312-8143-2023-24-4-340-348

УДК 51-7

EDN: QUEGLB

Научная статья / Research article

Гнездовидные плоские центральные конфигурации трапециевидной формы в классическом и обобщенном вариантах общей задачи $(4n+1)$ -тел

Ю.В. Перепелкина^a  , А.Н. Задиранов^b 

^a Всероссийский институт научной и технической информации РАН,
Москва, Российская Федерация

^b Академия государственной противопожарной службы МЧС России, Москва, Российская Федерация
 amadecity@yandex.com

История статьи

Поступила в редакцию: 25 марта 2023 г.

Доработана: 17 июня 2023 г.

Принята к публикации: 22 июня 2023 г.

Заявление о конфликте интересов

Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Вклад авторов

Нераздельное соавторство.

Аннотация. Изучение центральных конфигураций, понятия и определения которых были сформулированы уже классиками небесной механики — Эйлером, Лагранжем, Лапласом и Лиувиллем в XVIII–XIX вв., представляет интерес не только для небесной механики, но и для многих разделов математического анализа, дифференциальных уравнений, аналитической механики, звездной динамики и динамики космического полета. В последние десятилетия наметились возможности использования понятия центральных конфигураций также в теоретической физике, химии, кристаллографии и др. Рассматриваются плоские центральные конфигурации, названные гнездовидными, состоящие из последовательно вложенных один в другой многоугольников, в вершинах которых находятся тела (материальные точки). Доказано существование гнездовидных плоских центральных конфигураций трапециевидной формы с шарообразным телом в центре. Ранее было установлено, что изолированные плоские трапециевидные центральные конфигурации существуют во вращающихся гелиоцентрических системах координат. Предполагается, что на систему действует только закон притяжения Ньютона. В качестве средства решения задачи применена система компьютерной математики Maple.

Ключевые слова: небесная механика, программный пакет Maple, гнездовидные конфигурации, трапециевидные конфигурации, сферические центральные тела

Благодарности

Работа выполнена при частичной поддержке РФФИ (проект 13-01-0059)

Для цитирования

Перепелкина Ю.В., Задиранов А.Н. Гнездовидные плоские центральные конфигурации трапециевидной формы в классическом и обобщенном вариантах общей задачи $(4n+1)$ -тел // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2023. Т. 24. № 4. С. 340–348. <http://doi.org/10.22363/2312-8143-2023-24-4-340-348>

© Перепелкина Ю.В., Задиранов А.Н., 2023



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

The nested planar central configurations of a trapezoid form in classical and generalized versions of the general $(4n+1)$ -body problem

Yulianna V. Perepelkina^a , Alexander N. Zadiranov^b 

^aRussian Institute for Scientific and Technical Information of Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russian Federation

^bState Fire Academy of EMERCOM of Russia, Moscow, Russian Federation
✉ amadeycity@yandex.com

Article history

Received: March 25, 2023

Revised: June 17, 2023

Accepted: June 22, 2023

Conflicts of interest

The authors declare that there is no conflict of interest.

Authors' contribution

Undivided co-authorship.

Abstract. The study of central configurations, whose concepts and definitions were already formulated by the classics of celestial mechanics — Euler, Lagrange, Laplace and Liouville in the XVIII–XIX centuries, is of interest not only for celestial mechanics, but also for many sections of mathematical analysis, differential equations, analytical mechanics, stellar dynamics and space flight dynamics. In recent decades, there have been opportunities to use the concept of central configurations also in theoretical physics, chemistry, crystallography, etc. We consider planar central configurations, called nested, consisting of polygons sequentially nested one into another, at the vertices of which there are bodies (material points). The existence of nested planar central configurations of trapezoidal type with a sphere in the centre is proved. Early, it was found that abovementioned isolated central configurations exist in the heliocentric rotated coordinate systems. It was supposed only the Newton's law of attraction is acting between bodies. The Maple software is used to derive the solution of this problem.

Keywords: celestial mechanics, Maple software, nested configurations, trapezoidal configurations, spherical central body

Acknowledgements

The work is in part supported by the Russian Foundation of Basic Research (Grant 13-01-0059)

For citation

Perepelkina YuV, Zadiranov AN. The nested planar central configurations of a trapezoid form in classical and generalized versions of the general $(4n+1)$ -body problem. *RUDN Journal of Engineering Research*. 2023;24(4):340–348. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/2312-8143-2023-24-4-340-348>

Введение

Продолжая развивать теорию центральных конфигураций (ЦК) небесных тел [1], основанную классиками небесной механики — Эйлером, Лагранжем, Лапласом и Лиувиллем в XVIII–XIX вв., на рубеже XIX–XX вв. было доказано существование плоских ЦК в задачах 4 и 5 тел [2–11]. Анализ предшествующих работ позволил А. Wintner (1941) сформулировать их строгие определения и теоремы существования [12]. Многочисленные ЦК в рамках задачи $(n+1)$ -тел, относящиеся к трем последним десятилетиям, рассмотрены в работах [13–16], на основе которых были проведены дальнейшие исследования [17–21]. С появлением вычислительных программных пакетов были проведены расчеты для ЦК многих типов [22–24].

Среди множества исследованных видов ЦК встречаются так называемые «каскадные» или «гнездовидные» («nested», англ.) [25], состоящие

из последовательно вложенных один в другой многоугольников, в вершинах которых находятся тела. В упомянутых работах предполагалось, что входящие в ЦК тела имели сферическую структуру, т.е. являлись шарами и рассматривались как материальные точки с однородной структурой [26] (классические ЦК).

Целью данной работы является получение доказательства существования плоских гнездовидных ЦК трапециевидной формы в упомянутой задаче $(4n+1)$ -тел при $n = 2, 3, \dots, p$ как без центрального тела, так и с шаровым центральным телом (классические варианты) [27; 28]. Все численные результаты получены с помощью программного пакета Maple.

1. Общий вид уравнений движения тел. Стационарные решения

Уравнения пространственного движения тел P_k с массами m_{lk} , $l = 1, \dots, p$; $k = 1, \dots,$

n (l — число вложенных один в другой подобных многоугольников; k — число вершин многоугольников) в относительной гелиоцентрической системе координат P_{0xyz} , вращающейся с постоянной угловой скоростью ω вокруг тела P_0 с массой M , имеют вид [29]:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{x}_{lk} - 2\omega\dot{y}_{lk} - \omega^2 x_{lk} &= \\ &= -f(M + m_{lk}) \frac{x_{lk}}{r_{lk}^3} + \\ &+ f \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n m_{lj} \left(\frac{x_{lj} - x_{lk}}{\Delta_{ljk}^3} - \frac{x_{lj}}{r_{lj}^3} \right) + \\ &+ f \sum_{\substack{1 \leq \sigma \leq p \\ \sigma \neq l}} \sum_{s=1}^n m_{\sigma s} \left(\frac{x_{\sigma s} - x_{lk}}{\Delta_{\sigma slk}^3} - \frac{x_{\sigma s}}{r_{\sigma s}^3} \right) \\ \dots\dots\dots \\ \ddot{y}_{lk} + 2\omega\dot{x}_{lk} - \omega^2 y_{lk} &= \\ &= -f(M + m_{lk}) \frac{y_{lk}}{r_{lk}^3} + \\ &\pm f \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n m_{lj} \left(\frac{y_{lj} - y_{lk}}{\Delta_{ljk}^3} - \frac{y_{lj}}{r_{lj}^3} \right) + \\ &+ f \sum_{\substack{1 \leq \sigma \leq p \\ \sigma \neq l}} \sum_{s=1}^n m_{\sigma s} \left(\frac{y_{\sigma s} - y_{lk}}{\Delta_{\sigma slk}^3} - \frac{y_{\sigma s}}{r_{\sigma s}^3} \right) \\ \dots\dots\dots \\ \ddot{z}_{lk} &= -f(M + m_{lk}) \frac{z_{lk}}{r_{lk}^3} + \\ &+ f \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n m_{lj} \left(\frac{z_{lj} - z_{lk}}{\Delta_{ljk}^3} - \frac{z_{lj}}{r_{lj}^3} \right) + \\ &+ f \sum_{\substack{1 \leq \sigma \leq p \\ \sigma \neq l}} \sum_{s=1}^n m_{\sigma s} \left(\frac{z_{\sigma s} - z_{lk}}{\Delta_{\sigma slk}^3} - \frac{z_{\sigma s}}{r_{\sigma s}^3} \right) \end{aligned} \right\}$$

где $r_{lk} = \sqrt{x_{lk}^2 + y_{lk}^2 + z_{lk}^2}$,
 $\Delta_{ljk} = \sqrt{(x_{lj} - x_{lk})^2 + (y_{lj} - y_{lk})^2 + (z_{lj} - z_{lk})^2}$.

При записи системы уравнений (1) предполагалось, что все тела P_0, P_k притягиваются по

закону Ньютона и взаимодействующие один с другим тела P_k не оказывают влияние на движение центрального тела P_0 в виду $m_{lk} \ll M$, т.е. рассматривается планетный случай. Отметим также, что первая сумма в правой части системы уравнений (1) отражает гравитационное взаимодействие тела P_{lk} с телами внутри «первого» многоугольника ($l = 1$), а вторая сумма учитывает гравитационное взаимодействие этого же тела P_k с телами, расположенными в вершинах «второго» ($l = 2$) и последующих ($l = 3, \dots, p$) многоугольников.

Рассмотрим стационарные решения системы уравнений (1) $x_i = \bar{x}_i = \text{const}$, $y_i = \bar{y}_i = \text{const}$, $z_i = \bar{z}_i = \text{const}$, определяющие центральную конфигурацию. Поскольку в этом случае имеет место $\ddot{x}_i = \dot{x}_i = 0$, $\ddot{y}_i = \dot{y}_i = 0$, $\ddot{z}_i = \dot{z}_i = 0$, необходимыми и достаточными условиями существования пространственных центральных конфигураций будут:

$$\left. \begin{aligned} \omega^2 x_{lk} &= f(M + m_{lk}) \frac{x_{lk}}{r_{lk}^3} - \\ &- f \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n m_{lj} \left(\frac{x_{lj} - x_{lk}}{\Delta_{ljk}^3} - \frac{x_{lj}}{r_{lj}^3} \right) - \\ &- f \sum_{\substack{1 \leq \sigma \leq p \\ \sigma \neq l}} \sum_{s=1}^n m_{\sigma s} \left(\frac{x_{\sigma s} - x_{lk}}{\Delta_{\sigma slk}^3} - \frac{x_{\sigma s}}{r_{\sigma s}^3} \right) \\ \dots\dots\dots \\ \omega^2 y_{lk} &= f(M + m_{lk}) \frac{y_{lk}}{r_{lk}^3} - \\ &- f \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n m_{lj} \left(\frac{y_{lj} - y_{lk}}{\Delta_{ljk}^3} - \frac{y_{lj}}{r_{lj}^3} \right) - \\ &- f \sum_{\substack{1 \leq \sigma \leq p \\ \sigma \neq l}} \sum_{s=1}^n m_{\sigma s} \left(\frac{y_{\sigma s} - y_{lk}}{\Delta_{\sigma slk}^3} - \frac{y_{\sigma s}}{r_{\sigma s}^3} \right) \\ \dots\dots\dots \\ 0 &= f(M + m_{lk}) \frac{z_{lk}}{r_{lk}^3} - \\ &- f \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n m_{lj} \left(\frac{z_{lj} - z_{lk}}{\Delta_{ljk}^3} - \frac{z_{lj}}{r_{lj}^3} \right) - \\ &- f \sum_{\substack{1 \leq \sigma \leq p \\ \sigma \neq l}} \sum_{s=1}^n m_{\sigma s} \left(\frac{z_{\sigma s} - z_{lk}}{\Delta_{\sigma slk}^3} - \frac{z_{\sigma s}}{r_{\sigma s}^3} \right) \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

Далее будут рассматриваться лишь плоские ЦК, поэтому последнее уравнение системы (2) исключается и имеет место $r_{lk} = \sqrt{x_{lk}^2 + y_{lk}^2}$,
 $\Delta_{ljk} = \sqrt{(x_{lj} - x_{lk})^2 + (y_{lj} - y_{lk})^2}$.

2. Необходимые и достаточные условия существования в общем виде плоских гнездовидных трапецеобразных ЦК

Рассмотрим плоские ЦК в форме равнобедренных необязательно подобных трапеций (рис. 1) с взаимно перпендикулярными диагоналями и с центральным телом P_0 .

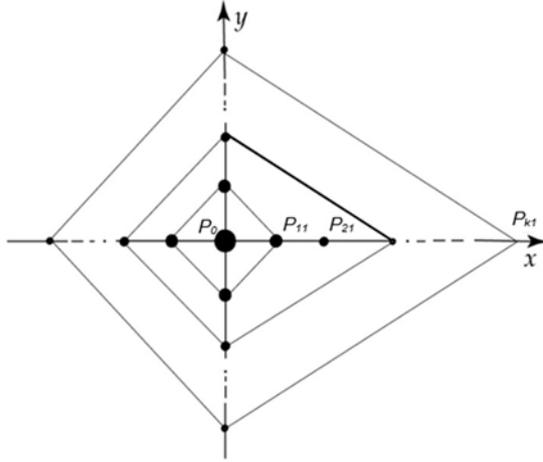


Рис. 1. Гнездовидная плоская трапецеобразная центральная конфигурация с центральным телом P_0
Источники: составлено авторами

Figure 1. Nest-shaped flat trapezoidal central configuration with a central body P_0
Source: made by the authors

Запишем детальный общий вид относительно угловых скоростей вращения ω_{lk} тел P_k необходимых и достаточных условий существования плоских ЦК последовательно для случаев одного многоугольника ($l = 1$), затем двух вложенных один в другой многоугольников ($l = 1, 2$), и, наконец, p ($l = 1, 2, \dots, p$) вложенных один в другой многоугольников. Таким образом, будем иметь при $l = 1; k = 1, \dots, 4$:

$$\begin{aligned} \omega_{11}^2 x_{11} &= (M + m_{11}) \frac{x_{11}}{r_{11}^3} - \\ &\quad - m_{12} \left(\frac{x_{12} - x_{11}}{\Delta_{1211}^3} - \frac{x_{12}}{r_{12}^3} \right) - \\ &\quad - m_{13} \left(\frac{x_{13} - x_{11}}{\Delta_{1311}^3} - \frac{x_{13}}{r_{13}^3} \right) - \\ &\quad - m_{14} \left(\frac{x_{14} - x_{11}}{\Delta_{1411}^3} - \frac{x_{14}}{r_{14}^3} \right) - \\ &\quad \dots \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \omega_{14}^2 x_{14} &= (M + m_{14}) \frac{x_{14}}{r_{14}^3} - \\ &\quad - m_{11} \left(\frac{x_{11} - x_{14}}{\Delta_{1114}^3} - \frac{x_{11}}{r_{11}^3} \right) - \\ &\quad - m_{12} \left(\frac{x_{12} - x_{14}}{\Delta_{1214}^3} - \frac{x_{12}}{r_{12}^3} \right) - \\ &\quad - m_{13} \left(\frac{x_{13} - x_{14}}{\Delta_{1314}^3} - \frac{x_{13}}{r_{13}^3} \right) \end{aligned} \quad (3)$$

($x \leftrightarrow y$).

При $l = 1, 2; k = 1, \dots, 4$ к системе уравнений (3) добавятся:

$$\begin{aligned} \omega_{21}^2 x_{21} &= (M + m_{21}) \frac{x_{21}}{r_{21}^3} - \\ &\quad - m_{11} \left(\frac{x_{11} - x_{21}}{\Delta_{1121}^3} - \frac{x_{11}}{r_{11}^3} \right) - \\ &\quad - m_{12} \left(\frac{x_{12} - x_{21}}{\Delta_{1221}^3} - \frac{x_{12}}{r_{12}^3} \right) - \\ &\quad - m_{13} \left(\frac{x_{13} - x_{21}}{\Delta_{1321}^3} - \frac{x_{13}}{r_{13}^3} \right) - \\ &\quad - m_{14} \left(\frac{x_{14} - x_{21}}{\Delta_{1421}^3} - \frac{x_{14}}{r_{14}^3} \right) - \\ &\quad - m_{22} \left(\frac{x_{22} - x_{21}}{\Delta_{2221}^3} - \frac{x_{22}}{r_{22}^3} \right) - \\ &\quad - m_{23} \left(\frac{x_{23} - x_{21}}{\Delta_{2321}^3} - \frac{x_{23}}{r_{23}^3} \right) - \\ &\quad - m_{24} \left(\frac{x_{24} - x_{21}}{\Delta_{2421}^3} - \frac{x_{24}}{r_{24}^3} \right) \end{aligned} \quad (4)$$

Аналогичные системы уравнений имеют место и для случая $l = 1, 2, \dots, (p - 1), p; k = 1, \dots, 4$, и затем для переменных y ($x \leftrightarrow y$). Для более удобной записи данные в соответствии с рис. 1 представлены в табл. 1.

Подставляя значения $(x_{lk}, y_{lk}) \rightarrow (\alpha_{lk}, \beta_{lk})$, приведенные в табл. 1, в системы уравнений (3)–(4), получаем «редуцированные» системы.

Таблица 1 / Table 1

Фактические значения координат (x_{lk}, y_{lk}) тел P_{kl}
Actual values of (x_{lk}, y_{lk}) coordinates of P_{kl} bodies

$l = 1$					$l = p - 1$				
k	1	2	3	4	$x_{(p-1)k}$	$\alpha_{(p-1)1}$	0	$-\alpha_{(p-1)3}$	0
x_{1k}	α_{11}	0	$-\alpha_{13}$	0	$y_{(p-1)k}$	0	$\alpha_{(p-1)1}$	0	$\alpha_{(p-1)3}$
y_{1k}	0	α_{11}	0	$-\alpha_{13}$	$r_{(p-1)k}$	$\alpha_{(p-1)1}$	$\alpha_{(p-1)1}$	$\alpha_{(p-1)3}$	$\alpha_{(p-1)3}$
r_{1k}	α_{11}	α_{11}	α_{13}	α_{13}	$l = p$				
$l = 2$									
x_{2k}	α_{21}	0	$-\alpha_{23}$	0	x_{pk}	α_{p1}	0	$-\alpha_{p3}$	0
y_{2k}	0	α_{21}	0	$-\alpha_{23}$	y_{pk}	0	α_{p1}	0	$-\alpha_{p3}$
r_{lk}	α_{21}	α_{21}	α_{23}	α_{23}	r_{lk}	α_{p1}	α_{p1}	α_{p3}	α_{p3}

При $l = 1; k = 1, \dots, 4$, (конфигурация «трапеция + шар») имеет место

$$\omega_{11}^2 = \left[M + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) m_{11} \right] \frac{1}{\alpha_{11}^3} + m_{13} \left[\frac{1}{(\alpha_{11}^2 + \alpha_{13}^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\alpha_{11}} \left(\frac{1}{(\alpha_{11} + \alpha_{13})^2} - \frac{1}{\alpha_{13}^2} \right) \right],$$

$$\omega_{12}^2 = \omega_{11}^2$$

$$\omega_{13}^2 = \left[M + \left(1 + \frac{\sqrt{2}}{4} \right) m_{13} \right] \frac{1}{\alpha_{13}^3} + m_{11} \left[\frac{1}{(\alpha_{11}^2 + \alpha_{13}^2)^{\frac{3}{2}}} + \frac{1}{\alpha_{13}} \left(\frac{1}{(\alpha_{11} + \alpha_{13})^2} - \frac{1}{\alpha_{11}^2} \right) \right],$$

$$\omega_{14}^2 = \omega_{13}^2$$

$$0 = -m_{11} \alpha_{11} \left(\frac{1}{\sqrt{2} \alpha_{11}^2} - \frac{1}{\alpha_{11}^3} \right) + m_{13} \alpha_{13} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_{13}^2 + \alpha_{11}^2}^3} - \frac{1}{\alpha_{13}^3} \right),$$

$$0 = -m_{11} \alpha_{11} \left(\frac{1}{\sqrt{\alpha_{11}^2 + \alpha_{13}^2}^3} - \frac{1}{\alpha_{11}^3} \right) + m_{13} \alpha_{13} \left(\frac{1}{\sqrt{2} \alpha_{13}^2} - \frac{1}{\alpha_{13}^3} \right), \quad (5)$$

Аналогичные системы уравнений имеют место и для случая при $l = 1, 2; k = 1, \dots, 4$ (две трапеции + шар) и при $l = 1, 2, \dots, (p - 1), p; k = 1, \dots, 4$ (p трапеций + шар).

Перейдем к доказательству существования решений приведенных иррациональных уравнений (1)–(5), подтверждающих существование гнездовидных ЦК (массы M, m_{lk} тел P_0, P_{lk} должны быть положительными). Поскольку рассматриваются конкретные формы ЦК, расстояния α_{lk} , являются известными в некоторых диапазонах, и система (1)–(5) сводится к системе линейных алгебраических уравнений.

В табл. 2 приведены совокупности параметров ЦК в абсолютной (инерциальной) системе координат. Для нахождения этих координат последнее условие в системе уравнений (5), не участвующее в нахождении геометрических и физических параметров ЦК, записывается в виде уравнений:

$$0 = -m_{11}(\alpha_{11} + x_G) \times \left(\frac{1}{\sqrt{2(\alpha_{11} + x_G)^2}^3} - \frac{1}{(\alpha_{11} + x_G)^3} \right) + m_{13}(\alpha_{13} + x_G) \times \left(\frac{1}{\sqrt{(\alpha_{13} + x_G)^2 + (\alpha_{11} - x_G)^2}^3} - \frac{1}{(\alpha_{13} + x_G)^3} \right). \quad (6)$$

Возьмем рассчитанную ранее таблицу геометрических и динамических параметров изоли-

рованной центральной конфигурации трапециевидного типа с шарообразным телом в центре [29], введя другие обозначения параметров в соответствии с обозначениями на рис. 1 (см. табл. 1), и получим расчеты для конфигурации из одной трапеции с шарообразным телом в центре и без него [30].

3. Численный анализ необходимых и достаточных условий существования плоских обобщенных гнездовидных трапециевидных ЦК: шарообразное тело в центре

Составим на основании табл. 2 расширенную таблицу параметров для состоящей уже из двух «кругов» плоской центральной конфигурации трапециевидного типа (табл. 3).

Таблица 2 / Table 2

Конфигурация «одна трапеция + шар» / «One trapezoid + sphere» configuration

M	α_{11}	α_{13}	m_{11}	m_{13}	ω_1^2
0	2,0	1,2	2,30795	0,5	0,28058
0	3,0	1,2	14,6761	1	0,55280
0	5,0	3,0	4,61450	1	0,03592
1	2	1,2	4,39484	0,5	0,75879

M	α_{11}	α_{13}	m_{11}	m_{13}	ω_1^2
5	2	1,2	15,0525	1	2,95208
10	2	0,5	388,770	1	65,2218
10	2	1,2	23,1832	0,5	5,06266
10	5	3	25,4909	1	0,34197

Таблица 3 / Table 3

Конфигурация (две трапеции + шар) / «Two trapezoids + sphere» configuration

M	α_{11}	α_{13}	m_{11}	m_{13}	ω_1^2
0	2,0	1,2	2,30795	0,5	0,28058
	α_{21}	α_{23}	m_{21}	m_{23}	ω_2^2
	4,0	2,4	18,1186	1,9343	0,28058
	4,8	3,0	30,285	6,2283	0,28058
	α_{11}	α_{13}	m_{11}	m_{13}	ω_1^2
1	2	1,2	4,3948	0,5	0,75879
	α_{21}	α_{23}	m_{21}	m_{23}	ω_2^2
	3,2	1,92	36,176	2,7895	0,75879
	4,0	2,4	48,032	8,9805	0,75879
	α_{11}	α_{13}	m_{11}	m_{13}	ω_1^2
5	2	1,2	15,0525	1	2,9521
	α_{21}	α_{23}	m_{21}	m_{23}	ω_2^2
	4,8	3,0	305,95	83,704	2,9521
	α_{11}	α_{13}	m_{11}	m_{13}	ω_1^2

10	2	1,2	23,183	0,5	5,0626
	α_{21}	α_{23}	m_{21}	m_{23}	ω_2^2
	3,0	1,8	239,70	29,691	5,0626
	4,0	3,0	328,79	152,03	5,0626
	4,8	3,0	522,43	148,69	5,0626
	α_{11}	α_{13}	m_{11}	m_{13}	ω_1^2
10	2	1,2	25,490	1	5,3432
	α_{21}	α_{23}	m_{21}	m_{23}	ω_2^2
	4,0	2,4	335,37	74,332	5,3432
	α_{11}	α_{13}	m_{11}	m_{13}	ω_1^2
	2,5	1,25	47,834	1	4,6020
	α_{21}	α_{23}	m_{21}	m_{23}	ω_2^2
	4,75	2,5	509,42	74,788	4,6020
	α_{11}	α_{13}	m_{11}	m_{13}	ω_1^2
	3,2	2	21,910	1	1,1622
	α_{21}	α_{23}	m_{21}	m_{23}	ω_2^2
4,0	2,75	461,71	74,788	1,1622	

В приведенных системах уравнений (1) и условиях существования (3)–(5) ЦК тело P_0 с массой M является шаровым, т.е. эти условия соответствуют классическим вариантам ЦК. Считая значения геометрических и физических параметров (расстояния и массы) трапециевидной ЦК с одним изолированным многоугольником заданными, будем искать трапециевидной ЦК с двумя включенными один в другой многоугольниками, формирующими «гнездовидную» ЦК. Для этой цели используем систему уравнений (6) и записываем 6 равенств $\omega_{11}^2 - \omega_{13}^2 = 0$, $\omega_{11}^2 - \omega_{21}^2 = 0, \dots, \omega_{22}^2 - \omega_{23}^2 = 0$ плюс рассматриваемое отдельно уравнение для квадрата общей угловой скорости вращения ЦК:

$$\begin{aligned} \omega^2 = \omega_{21}^2 = & (M + m_{21}) \frac{1}{\alpha_{21}^3} + \\ & + 2m_{22} \frac{1}{\sqrt{\alpha_{21}^2 + \beta_{22}^2}^3} + \\ & + \frac{m_{23}}{\alpha_{21}} \left(\frac{1}{(\alpha_{23} + \alpha_{21})^2} - \frac{1}{\alpha_{23}^2} \right) - \\ & + 2m_{12} \frac{1}{\sqrt{\alpha_{21}^2 + \beta_{12}^2}^3} \\ & + m_{11} \frac{1}{\alpha_{21}} \left(\frac{1}{(\alpha_{11} - \alpha_{21})^2} - \frac{1}{\alpha_{11}^2} \right) + \\ & + m_{13} \frac{1}{\alpha_{21}} \left(\frac{1}{(\alpha_{13} + \alpha_{21})^2} - \frac{1}{\alpha_{13}^2} \right). \end{aligned} \quad (7)$$

Таким образом, имеем систему однородных линейных алгебраических уравнений относительно масс m_{ik} и M (размеры трапеций предполагаются заданными) вида

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^6 (a_{i1}m_{11} + a_{i2}m_{13} + \\ + a_{i3}m_{21} + a_{i4}m_{23} + a_{i5}M) = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Матрица коэффициентов системы имеет размер 6×5 , ранг матрицы равен 5. Общее число неизвестных системы равно 10:4 расстояния α_{ik} (расстояния в многоугольнике равны попарно), 4 массы m_{ik} (массы равны попарно) и, наконец, центральная масса M и величина квадрата угловой скорости вращения ω^2 . Однако, поскольку массы m_{11} , m_{12} и M , а также расстояния $\alpha_{11} = \beta_{12} = \alpha$, $\alpha_{13} = \beta_{14} = \beta$ первого многоугольника оказываются уже найденными (см. табл. 2), остается найти только α_{21} , α_{23} , m_{21} , m_{23} , ω^2 . Следующая фигура обладает размерами, превышающими размеры предыдущей, поэтому выбираем $\alpha_{21} > \alpha_{11}$, $\alpha_{23} > \alpha_{13}$ и неизвестными остаются лишь m_{21} , m_{23} , ω^2 .

Заключение

Приведенные аналитические выкладки и численные результаты расчетов со всей очевидностью показывают, что для каждой изолированной ЦК трапециевидной формы с центральными телами в виде шара (табл. 2), найдется совокупность конечного числа охватывающих ее трапецеобразных ЦК (табл. 3).

При этом процедуры вычисления геометрических и физических параметров сначала изолированных (состоящих из одного многоугольника), а затем формирующих уже гнездовидные центральные конфигурации (состоящих из двух охватывающих один другого многоугольников) могут рассматриваться как Шаг 1 ($n = 1$) и Шаг 2 ($n = 2$) метода математической индукции доказательства существования таких ЦК. В рассматриваемом случае имеют место весьма объемные условия существования в виде (5)–(7), которые представляют определенную трудность для их проверки даже в частном случае. Однако анализ всех уже рассмотренных классических вариантов ЦК для различных форм конфигураций указывает на факт существования ненулевого дефекта у матриц анализируемых систем, и это гарантирует множество решений.

Список литературы / References

1. Moeckel R. Central configurations. *Scholarpedia*. 2014;9(4):10667. <https://doi.org/10.4249/scholarpedia.10667>

2. Hoppe R. Erweiterung der bekanten Speciallosung des Dreikörper-problems. *Grünert Archiv der Mathematik und Physik*. 1879;64:218–223.
3. Lehmann-Filhés R. Über zwei Fälle des Vielkörper-problems. *Astronomische Nachrichten*. 1891;127(3033): 137–144.
4. Dziobek O. Über einen merkwürdigen Fall des Vielkörperproblems. *Astronomische Nachrichten*. 1900; 152(3627):33–46.
5. Andoyer H. Sur l'équilibre relatif de n corps. *Bulletin astronomique, Observatoire de Paris*. 1906;23: 50–59.
6. Andoyer H. Sur les solution periodique voisines des positions d'équilibre relatif, dans le problème des n corps. *Bulletin astronomique, Observatoire de Paris*. 1906;23:129–146. Available from: https://www.persee.fr/doc/bastr_0572-7405_1906_num_23_1_12318 (accessed: 12.09.2022)
7. Longley WR. Some particular solutions in the problem of n bodies. *Bull. of the American Mathematical Society*. 1907;13(7):324–335.
8. MacMillan WD, Bartky W. Permanent configurations in the problem of four bodies. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1932;34(4):838–874.
9. Meyer G. Solutions voisines des solutions de Lagrange dans le problème des n corps. *Annales de l'Observatoire de Bordeaux*. 1933;17:77–252. Available from: **Ошибка! Недопустимый объект гиперссылки.** (accessed: 12.09.2022).
10. Williams WL. Permanent configurations in the problem of five bodies. *Transactions of the American Mathematical Society*. 1938;44(3):562–579. Available from: <https://www.jstor.org/stable/i308230> (accessed: 12.09. 2022).
11. Brumberg VA. Permanent configurations in the problem of four bodies and it's stability. *Astronomicheskij zhurnal [Astronomical zhurnal]*. 1957;4(1):55–74. (In Russ.)
Брумберг В.А. Постоянные конфигурации в проблеме четырех тел и их устойчивость // *Астрономический журнал*. 1957. Т. 34. № 1. С. 55–74.
12. Wintner A. *The analytical foundations of celestial mechanics*. Princeton: Princeton University Press; 1941.
13. Elmabsout B. Sur l'existence de certaines configurations d'équilibre relatif dans le probleme des N corps. *Celestial Mechanics*. 1987;41:131–151. <https://doi.org/10.1007/BF01238758>
14. Elmabsout B. Nouvelles configurations d'équilibre relatif dans le problème des n corps. I. *Comptes Rendus de l'Academie des Sciences de Paris*. 1991;312 (2):467–472.
15. Grebenikov EA. The existence of the exact symmetric solutions in the plane Newton problem of many bodies. *Matematicheskoe modelirovanie [Mathematical modeling]*. 1988;10(8):74–80. (In Russ.)
Гребеников Е.А. Существование точных симметричных решений в плоской ньютоновой проблеме многих тел // *Математическое моделирование*. 1988. Т. 10. № 8. С. 74–80.
16. Grebenikov EA. *Mathematical problems of homographic dynamic*. Moscow: MAX Press; 2010. (In Russ.)
Гребеников Е.А. Математические проблемы гомографической динамики. М.: МАКС Пресс, 2010. 256 с.
17. Beltritti G, Mazzone F, Oviedo M. The Sitnikov problem for several primary bodies configurations. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2018; 130:45. <https://doi.org/10.1007/s10569-018-9838-4>
18. Marchesin M, Vidal C. Spatial restricted rhomboidal five-body problem and horizontal stability of its periodic solutions. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2013;115(3):261–279. <https://doi.org/10.1007/s10569-012-9462-7>
19. Rivera A. Periodic solutions in the generalized Sitnikov ($n+1$)-body problem. *SIAM Journal on Applied Dynamical Systems*. 2013;12(3):1515–1540. <https://doi.org/10.1137/12088387>
20. Kashif A, Shoaib M, Sivasankaran A. Central Configurations of an Isosceles Trapezoidal Five-Body Problem. In: Corbera M, Cors J, Llibre J, Korobeinikov A. (eds.) *Extended Abstracts Spring 2014. Trends in Mathematics* (vol. 4, p. 71–76). Birkhäuser, Cham; 2015. https://doi.org/10.1007/978-3-319-22129-8_13
21. Shoaib M, Kashif AR, Szücs-Csillik I. On the planar central configurations of rhomboidal and triangular four- and five-body problems // *Astrophysics and Space Science*. 2017;362:182. <https://doi.org/10.1007/s10509-017-3161-5>
22. Butikov E. *Motions of Celestial Bodies: Computer simulations*. Bristol, UK, IOP Publ.; 2014.
23. Llibre J, Moeckel R, Simó C. *Central Configurations, Periodic Orbits, and Hamiltonian Systems*. Advanced Courses in Mathematics — CRM Barcelona. Birkhäuser, Basel; 2015. <https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0933-7>
24. Doicu A, Zhao L, Doicu A. A stochastic optimization algorithm for analyzing planar central and balanced configurations in the n -body problem. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2022;134:29. <https://doi.org/10.1007/s10569-022-10075-7>
25. Corbera M, Delgrano J, Lliobre J. On the Existence of Central Configurations of p Nested n -gons. *Qualitative Theory of Dynamical Systems*. 2009;8:255–265. <https://doi.org/10.1007/s12346-010-0004-y>
26. Hampton M. Planar N -body central configurations with a homogeneous potential. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2019;131:20. <https://doi.org/10.1007/s10569-019-9898-0>
27. Montaldi J. Existence of symmetric central configurations. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2015;122:405–418. <https://doi.org/10.1007/s10569-015-9625-4>

28. Moczurad M, Zgliczyński P. Central configurations in planar n -body problem with equal masses for $n = 5, 6, 7$. *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. 2019;131:46. <https://doi.org/10.1007/s10569-019-9920-6>

29. Perepelkina YuV. An unified approach to the linear stability investigation of some classic and generalized planar central configurations of celestial mechanics. Part 2. Numeric investigations. *International Journal on Pure and Applied Mathematics, Classical and Celestial Mechanics, Cosmodynamics*. 2013;2(3):5–34. (In Russ.)

Перепелкина Ю.В. Унифицированный подход к исследованию линейной устойчивости некоторых классических и обобщенных плоских центральных конфигураций // *Международный журнал по теоретической и прикладной математике, классической и небесной механике и космодинамике*. 2013. Вып. 2(3). С. 5–34.

30. Fernandes AC, Mello LF. On Stacked Planar Central Configurations with Five Bodies when One Body is Removed. *Theory of Dynamical Systems*. 2013; 12:293–303. <https://doi.org/10.1007/s12346-012-0084-y>

Сведения об авторах

Перепелкина Юлианна Вячеславовна, кандидат физико-математических наук, заместитель заведующего отделом механики, Всероссийский институт научной и технической информации Российской академии наук, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0001-8115-8253; E-mail: amadeycity@yandex.ru

Задиранов Александр Никитич, доктор технических наук, профессор кафедры процессов горения и экологической безопасности, Учебно-научный комплекс процессов горения и экологической безопасности, Академия государственной противопожарной службы, Москва, Российская Федерация; ORCID: 0000-0001-7787-8290; E-mail: zadiranov@mail.ru

About the authors

Yulianna V. Perepelkina, Candidate of Phys.-Math. Sci., Deputy Head of the Mechanics Department, Russian Institute for Scientific and Technical Information of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-8115-8253; E-mail: amadeycity@yandex.ru

Alexander N. Zadiranov, Doctor of Technical Sciences, Professor of Combustion Behavior and Environmental Safety Department, Educational and Scientific Complex of Combustion Processes and Environmental Safety, State Fire Academy of EMERCOM of Russia, Moscow, Russian Federation; ORCID: 0000-0001-7787-8290; E-mail: zadiranov@mail.ru