



DOI 10.22363/2312-8143-2022-23-3-198-206
УДК 681.514

Научная статья / Research article

Минимаксный адаптивный алгоритм фильтрации нелинейных систем рядами Вольтерра второго порядка

И.Г. Сидоров

Московский политехнический университет (Московский Политех), Москва, Российская Федерация
✉ igor8i2016@yandex.ru

История статьи

Поступила в редакцию: 27 мая 2022 г.
Доработана: 22 августа 2022 г.
Принята к публикации: 3 сентября 2022 г.

Ключевые слова:

минимаксный, фильтрация, линейный, автокорреляционный, адаптивный, нелинейный, ряд Вольтерра, помеха, градиентный, интенсивность, белый шум

Аннотация. В исследовании решена проблема фильтрации нелинейных систем на основе минимаксного адаптивного алгоритма нелинейных систем рядами Вольтерра второго порядка при условии, что автокорреляционные функции полезного сигнала и помехи известны с некоторыми погрешностями по критерию максимальной среднеквадратической ошибки фильтрации. Анализируется стационарная производительность минимаксного адаптивного фильтра Вольтерра второго порядка с наименьшим средним квадратом (LMS) с постоянным размером шага μ при изменяющейся во времени настройке. Установлена количественная оценка установившейся избыточной среднеквадратичной ошибки (RMSE), в которой хорошо охарактеризован вклад неправильной регулировки градиента и ошибки слежения. Затем задается оптимальный размер шага для изменяющегося во времени минимаксного фильтра Вольтерры второго порядка. Таким образом, можно изучить корреляцию между избыточным MSE и оптимальным размером шага, с одной стороны, и параметрами изменяющейся во времени нелинейной системы, с другой стороны. Получено простое решение с минимальной среднеквадратичной ошибкой для минимаксного фильтра Вольтерра, основанное на предположении, что входной сигнал фильтра является гауссовым. Кроме того, предлагается метод итеративной факторизации для разработки подкласса минимаксных фильтров Вольтерры, который может значительно упростить операции фильтрации. Изучается адаптивный алгоритм для фильтра Вольтерры, а также его средняя сходимость и асимптотическая избыточная среднеквадратичная ошибка. Полезность фильтра Вольтерра демонстрируется его использованием в исследованиях нелинейных дрейфовых колебаний пришвартованных судов, подверженных случайным морским волнам.

Для цитирования

Сидоров И.Г. Минимаксный адаптивный алгоритм фильтрации нелинейных систем рядами Вольтерра второго порядка // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2022. Т. 23. № 3. С. 198–206. <http://doi.org/10.22363/2312-8143-2022-23-3-198-206>



Minimax adaptive filtering algorithm nonlinear systems with Volterra series of the second order

Igor G. Sidorov 

Moscow Polytechnic University, Moscow, Russian Federation

✉ igor8i2016@yandex.ru

Article history

Received: May 27, 2022

Revised: August 22, 2022

Accepted: September 3, 2022

Keywords:

minimax, filtering, linear, autocorrelation, adaptive, nonlinear, Volterra series, interference, gradient, intensity, white noise

Abstract. The study solves the problem of filtering nonlinear systems based on the minimax adaptive algorithm of nonlinear systems by Volterra series of the second order, provided that the autocorrelation functions of the useful signal and interference are known with some errors according to the criterion of the maximum standard error of filtering. The author analyses the stationary performance of a minimax adaptive Volterra filter of the second order with the least mean square (LMS) with a constant step size of μ with a time-varying setting. A quantitative assessment of the steady-state excess root-mean-square error (RMSE) has been established, in which the contribution of incorrect gradient adjustment and tracking error is well characterized. Then the optimal step size is set for a time-varying second-order minimax Volterra filter. Thus, we can study the correlation between the excess MSE and the optimal step size, on the one hand, and the parameters of a time-varying nonlinear system, on the other hand. A simple solution with minimal root-mean-square error for the minimax Volterra filter is obtained, based on the assumption that the input signal of the filter is Gaussian. In addition, we propose an iterative factorization method for developing a subclass of minimax Volterra filters, which can greatly simplify filtering operations. In addition, an adaptive algorithm for the Volterra filter is investigated, as well as its average convergence and asymptotic excess root-mean-square error. Finally, the usefulness of the Volterra filter is demonstrated by its use in studies of nonlinear drift oscillations of moored vessels exposed to random sea waves.

For citation

Sidorov IG. Minimax adaptive filtering algorithm nonlinear systems with Volterra series of the second order. *RUDN Journal of Engineering Research*. 2022;23(3):198–206. (In Russ.) <http://doi.org/10.22363/2312-8143-2022-23-3-198-206>

Введение

В настоящей работе исследована проблема фильтрации нелинейных систем на основе минимаксного адаптивного алгоритма нелинейных систем рядами Вольтерра 2-го порядка при условии, что автокорреляционные функции полезного сигнала и помехи известны с некоторыми погрешностями. Для решения задачи идентификации нелинейных объектов разработано довольно много подходов и методов [1–10]. На современном этапе возросли требования к точностным характеристикам применяемых алгоритмов идентификации. В связи с этим модифицируются классические подходы к решению задачи идентификации нелинейных систем с целью повышения их точности и уменьшения ограничений применения [11], а также универсальные поисковые методы, кото-

рые требуют минимальной априорной информации об идентифицируемой системе, но сложны в реализации. Считаем также, что взаимокорреляционная функция полезного сигнала и помехи равна нулю, причем случайные функции полезного сигнала и помехи стационарны в узком смысле [12], стационарно связаны и имеют нулевые математические ожидания. Критерием качества считается максимальная среднеквадратическая ошибка фильтрации. Необходимо решить задачу минимаксной фильтрующей структуры в виде последовательности Вольтерра, когда случайный сигнал на входе системы задан с гауссовым белым шумом. Спектральные интенсивности погрешностей «шумовых добавок» сигнала и помехи пропорциональны величинам погрешностей, с которыми определены автокорреляционные функции сигнала и помехи. Показывается,

что минимаксный фильтр Вольтерра 2-го порядка (ФВ2) эквивалентен параллельной реализации минимаксного линейного фильтра и квадратичного фильтра. Аналогичная реализация фильтра ФВ2 была показана в работах [1; 2] для критерия качества по среднеквадратической ошибке фильтрации (СКОФ). В минимаксной постановке проблемы фильтрации рядами Вольтерра 2-го порядка решаются впервые, когда наблюдается эффективность за счет устойчивой фильтрации с увеличением интенсивности «добавок» белого шума, поскольку верхние оценки в ограничениях для асимптотического остатка СКОФ (АОСКОФ) для линейного и квадратичного фильтров обратно пропорциональны максимальному собственному числу для автокорреляционной матрицы входного сигнала с белым шумом при наличии помехи и его квадрату соответственно. Целью данной работы является изучение сходимости фильтра Вольтерра второго порядка по адаптивному методу наименьших квадратов (LMS). Анализируется фильтр Вольтерра с постоянным размером шага μ при изменяющейся во времени настройке и количественная оценка установившегося избыточного среднего квадрата ошибки (RMSE), где вклад неправильной регулировки градиента и ошибки отслеживания хорошо охарактеризованы в зависимости от максимального собственного числа наиболее неблагоприятной автокорреляционной матрицы входного сигнала. На первом этапе мы представляем количественную оценку избыточного среднего квадрата ошибки фильтрации и на втором этапе выводится оптимальное значение размера шага обучения сходимости фильтра. Подобные задачи часто встречаются в радиотехнических приложениях при оценке амплитуды детерминированного сигнала при колебаниях его формы и неточных коррекциях шума, то есть когда корреляционную функцию, которая лежит внутри заданного выпукло-ограниченного семейства, определить едва ли возможно. Другой пример – это оценивание регрессионных параметров детерминированного сигнала при неточно известной корреляционной функции, как основного сигнала, так и шума.

1. Постановка задачи

Возьмем фильтр Вольтерра 2-го порядка, который состоит из параллельной комбинации линейного и квадратичного фильтров [1; 2]:

$$y(n) = h_0 + \sum_{j=0}^{N-1} a(j)x(n-j) + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} b(j,k)x(n-j)x(n-k), \quad (1)$$

где $\{a(j)\}$ и $\{b(j, k)\}$ называются линейным и квадратичным весом соответственно, а N указывает длину фильтра (предполагается симметричность квадратичных весов фильтра, то есть $b(j, k) = b(k, j)$). Будем предполагать, что случайный сигнал $x(n)$ представляет аддитивную смесь полезного сигнала $s(n)$ и помехи $\xi(n)$.

$$x(n) = s(n) + \xi(n), \quad (2)$$

причем $s(n)$ и $\xi(n)$ – это случайные стационарные в узком смысле [12] и стационарно связанные процессы с нулевым математическим ожиданием с дискретным параметром n , а их корреляционные функции известны с некоторыми погрешностями δR_s и δR_ξ соответственно

$$\tilde{R}_s(n, n') = R_s(n, n') + \delta R_s(n, n');$$

$$\tilde{R}_\xi(n, n') = R_\xi(n, n') + \delta R_\xi(n, n');$$

где $R_s(n, n')$ и $R_\xi(n, n')$ – предполагаемые значения (например, некоторые оценки корреляционных функций).

Везде далее считается, что взаимно корреляционная функция сигнала $x(n)$ и помехи $\xi(n)$ тождественно равна нулю, полагаем также, что $R_s(n, n')$, $\delta R_s(n, n')$, $R_\xi(n, n')$, $\delta R_\xi(n, n')$ есть симметрические функции (в классе обобщенных функций) от перестановки аргументов. Эти функции можно рассматривать как ядра симметричных операторов R_s , \tilde{R}_s , δR_s , R_ξ , \tilde{R}_ξ , δR_ξ в гильбертовом пространстве. Предполагается, что $\xi(n)$ белый гауссовский шум. Считается, что относительно погрешностей δR_s и δR_ξ известно лишь, что они ограничены по операторной норме

$$\|\delta R_s\| \leq \Delta_s, \|\delta R_\xi\| \leq \Delta_\xi,$$

где операторная норма $\|\cdot\|$ понимается как максимальное собственное число симметричного оператора.

Нужно найти веса фильтра A и B , которые минимизируют максимальную среднюю квадратичную ошибку фильтрации (СКОФ) между $s(n)$ и выходом фильтра $y(n)$, то есть

$$e(A, B, R_s + \delta R_s, R_\xi + \delta R_\xi) = E[|s(n) - y(n)|^2]; \quad (3)$$

$$e_{\max}(A, B) = \max_{\|\delta R_s\| \leq \Delta_s, \|\delta R_\xi\| \leq \Delta_\xi} e(A, B, R_s + \delta R_s, R_\xi + \delta R_\xi), \quad (4)$$

2. Алгоритм реализации Вольтера 2-го порядка

В определении минимума СКОФ фильтра Вольтера 2-го порядка является требование бездрейфового фильтра. С учетом бездрейфового выхода фильтра, другими словами, должно быть $E[y(n)] = 0$, так как основной сигнал имеет нулевое математическое ожидание. Тогда получается следующее соотношение для ФВ2 [2]:

$$y(n) = \sum_{j=0}^{N-1} a(j)x(n-j) + \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} b(j,k)[x(n-j)x(n-k) - r_x(j-k)], \quad (5)$$

где

$$r_x(j) = E[x(n)x(n-j)]$$

обозначает автокорреляционную функцию $x(n)$, E – символ математического ожидания.

Выражение (5) для ФВ2 можно представить в эквивалентном матричном виде

$$y(n) = A^T X(n) + \text{tr}\{B[X(n)X^T(n) - R_x]\}, \quad (6)$$

где $\text{tr}A$ обозначает след квадратной матрицы $A = \{a_{kj}\}_{k=1, \dots, N}^{j=1, \dots, N}$, то есть сумму ее диагональных элементов:

$$\text{tr}A = \sum_{k=1}^N a_{kk},$$

а R_x обозначает размером $N \times N$ автокорреляционную матрицу функции $x(n)$, чей (j, k) -й элемент равен $r_x(j-k)$.

$$X(n) = [x(n), x(n-1), \dots, x(n-N+1)]^T,$$

$$A = [a(0), \dots, a(n-N+1)]^T,$$

$$B = \begin{pmatrix} b(0,0) & \dots & b(0,N-1) \\ & \dots & \\ b(N-1,0) & \dots & b(N-1,N-1) \end{pmatrix}$$

С учетом разложения всей СКОФ $e(A, B, R_s + \delta R_s, R_\xi + \delta R_\xi)$ на линейную СКОФ1 и квадратичную СКОФ2, получаем представление линейного и квадратичного операторов ФВ2 с минимальной СКОФ в виде [13]

$$A_0 = R_x^{-1} R_{sx},$$

$$B_0 = \frac{1}{2} R_x^{-1} T_{sx} R_x^{-1}, \quad (7)$$

где кросскорреляционные и бикросскорреляционные элементы матричных функций R_{sx} и T_{sx} соответственно определены следующим образом

$$r_{sx}(j) = E[s(n)x(n-j)],$$

$$t_{sx}(j, k) = E[s(n)x(n-j)x(n-k)]. \quad (8)$$

Из (5) и (6) видно, что линейный оператор оптимального ФВ2 – это то же самое, что и оптимальный минимаксный линейный фильтр. Следовательно, можно сконструировать ФВ2 просто посредством добавления квадратичного фильтра созданному оптимальному минимаксному линейному фильтру без его изменения, то есть в качестве линейного фильтра в смысле критерия (4) можно использовать минимаксный фильтр A^* , который минимизирует максимальную СКОФ из (4) (в заданном классе линейных фильтров) по всем наименее благоприятным значениям корреляционных операторов R_s^* и R_ξ^*

$$e_{\max}(A^*) = \min_A \max_{\|\delta R_s\| \leq \Delta_s, \|\delta R_\xi\| \leq \Delta_\xi} e(A, R_s + \delta R_s, R_\xi + \delta R_\xi) =$$

$$= \min_A \max_{R_s^*, R_\xi^*} e(A, \tilde{R}_s, \tilde{R}_\xi) =$$

$$= \max_{R_s^*, R_\xi^*} \min_A e(A, R_s^*, R_\xi^*) = \min_A e(A, R_s^*, R_\xi^*). \quad (9)$$

Причем наименее благоприятные значения корреляционных операторов будут равны

$$R_s^* = R_s + \Delta_s I, R_\xi^* = R_\xi + \Delta_\xi I, \quad (10)$$

где I – единичный оператор; Δ_s и Δ_ξ интенсивности «добавок» белого шума.

Поясним смысл термина интенсивность «добавок» белого шума. Поскольку ошибка в знании корреляционной функции флуктуаций или случайного сигнала компенсируется прибавлением добавки в виде белого шума со спектральной интенсивностью соответственно Δ_ξ или Δ_s , возрастающей при росте погрешности δR_ξ или δR_s , то сумма $R_\xi + \Delta_\xi I$ или $R_s + \Delta_s I$ равносильна добавлению к флуктуациям или случайному сигналу дополнительного белого шума. Операторная форма представления (10) аналогична матричному корреляционному представлению, в котором единичная матрица I соответствует в операторном виде единичному оператору в виде дельта функции Дирака, а матрицы $\Delta_\xi I$ и $\Delta_s I$ являются корреляционными матрицами добавок белого шума соответственно спектральной интенсивности Δ_ξ и Δ_s , а ядра симметричных операторов R_ξ и R_s и представляют соответствующие корреляционные матрицы. Как известно [14], минимаксный фильтр в этом случае примет вид

$$A^* = R_s^* (R_s^* + R_\xi^*)^{-1}, \quad (11)$$

а его максимальная СКОФ записывается в виде

$$e_{\max}^*(A^*) = \text{tr} R_s^* (R_s^* + R_\xi^*)^{-1} R_\xi^*.$$

Таким образом, можно сконструировать ФВ2 просто посредством добавления квадратичного фильтра параллельно созданному минимаксному фильтру без его изменения и потери существенной точности.

Следовательно, за счет введения «шумовых добавок» к основному сигналу и помехе мы можем достичь значительного выигрыша для асимптотического остатка среднеквадратической ошибки АОСКОФ, вследствие увеличения максимального собственного числа автокорреляционной матрицы, что эквивалентно уменьшению коэффици-

ента адаптации бучения в обратно пропорциональной зависимости этому максимальному собственному числу, в силу выбора наименее неблагоприятных зашумленных корреляционных матриц сигнала и помехи соответственно для минимаксного линейного фильтра. Пусть величина дисперсии по критерию наихудшей среднеквадратической ошибки для реализации ФВ2 ограничена величиной ξ_{opt} [13, формула (12)]:

$$\xi_{\text{opt}} = r_s(0) - R_{sx}^T (R_x^*)^{-1} R_{sx} - \left(\frac{1}{2}\right) \text{tr} [R_x^{-1} T_{sx} (R_x^*)^{-1} T_{sx}^*], \quad (12)$$

где

$$R_x^* = R_x + \Delta_x I; \quad r_s(0) = E[s^2(n)];$$

$$R_{sx} = R_x^* A; \quad T_{sx} = 2R_x^* B R_x^*,$$

где Δ_x соответствует интенсивности суммарных «добавок» белого шума во входном сигнале $x(n)$.

Метод наименьших квадратов для линейных и квадратичных весов адаптивного фильтра ФВ2 соответственно $A(n)$ и $B(n)$ может быть представлен как стохастический вариант метода наискорейшего спуска (LMS) в следующем виде [13]

$$A(n+1) = A(n) - 2\mu A e(n) X(n);$$

$$B(n+1) = B(n) - 2\mu B e(n) X(n) X^T(n). \quad (13)$$

Константы обучения μA и μB определяют устойчивость и сходимость адаптивного фильтра, $e(n) = y(n) - s(n)$. Заметим, что линейные и квадратичные оптимальные весовые коэффициенты ФВ2 изменяются в этом случае по следующей зависимости

$$A_0(n+1) = A_0(n) + \delta A_0(n);$$

$$B_0(n+1) = B_0(n) + \delta B_0(n), \quad (14)$$

где $\delta A_0(n) = A_0(n) - A_0$ и $\delta B_0(n) = B_0(n) - B_0$ – суть отклонения $A_0(n)$ и $B_0(n)$ от их оптимальных значений.

Как показано в [13; 15], в адаптивной реализации ФВ2 флуктуации операторов линейного и

квадратичного фильтров добавляют некоторую дополнительную СКОФ в выходное значение фильтра даже при устойчивом положении адаптационного процесса, то есть асимптотическая СКОФ адаптивного ФВ2 в общем случае больше, чем СКОФ оптимального ФВ2. Для оценки остатка СКОФ запишем СКОФ адаптивного ФВ2 в виде

$$\xi(n) = \xi_{\text{opt}} + \xi_A(n) + \xi_B(n),$$

где избыточные среднеквадратические остатки $\xi_A(n)$ и $\xi_B(n)$ в адаптивной реализации ФВ2 имеют вид

$$\xi_B(n) = E[\text{tr}\{\delta B^T(n)R_x\delta B(n)\}];$$

$$\xi_A(n) = E[\text{tr}\{\delta A^T(n)R_x\delta A(n)\}].$$

Асимптотические оценки СКОФ для линейного минимаксного и квадратичного фильтров реализации ФВ2 могут быть оценены сверху через оценку величины $r_s(0)$ следующим образом [13; 15]

$$\begin{aligned} \xi_A &\leq 4\mu A \xi_{\text{opt}} N r_s(0); \\ \xi_B &\leq 3\mu B \xi_{\text{opt}} N^2 r_s(0). \end{aligned} \quad (15)$$

Шаги обучения μA и μB для линейного минимаксного A и квадратичного фильтров B соответственно выбираются из условий

$$0 \leq \mu A \leq \lambda_{\text{max}}^{-1}; \quad 0 \leq \mu B \leq \lambda_{\text{max}}^{-2},$$

где λ_{max} – максимальное собственное число матрицы R_x^* , которое больше максимального собственного числа λ_{max} матрицы R_x на величину Δ_x согласно теореме Вейля [16, теорема (4.3.1)].

Из оценок представления для АОСКОФ в (12) видно, что за счет увеличения максимального собственного числа матрицы R_x^* можно повысить устойчивость и сходимость алгоритма и получить выигрыш η по среднеквадратическим ошибкам, который показывает наличие до-

полнительной информации о возмущениях в корреляционной матрице R_x основного сигнала и корреляционной матрице R_ξ , в частности для случая совместно гауссовских случайных процессов $x(n)$ и $s(n)$ [17] имеем

$$T_{sx} = 0$$

и выражение для выигрыша η по минимаксной среднеквадратической ошибке по отношению к среднеквадратической ошибке для фильтра, построенного по предлагаемым значениям R_s и R_x , принимает вид в матричной форме аналогичный виду в операторной форме [14, формула (5)]

$$\eta = 1 + \frac{\text{tr}(\Delta_s R_s - \Delta_\xi R_\xi)^2 (R_s + R_\xi)^{-2} (R_s + R_\xi + \Delta_x I + \Delta_\xi I)^{-1}}{\text{tr}(R_s + \Delta_s I) (R_s + R_\xi + \Delta_s I + \Delta_\xi I)^{-1} (R_\xi + \Delta_\xi I)}. \quad (16)$$

Чем больше Δ_s или Δ_ξ , тем больше эффективность минимаксного фильтра, а значит и фильтра Вольтерра 2-го порядка (ФВ2). В частности при $\Delta_\xi I \gg R_\xi$, $\Delta_s = 0$ оценка выигрыша η будет линейно зависимой от величины шумовой добавки Δ_ξ и будет равна

$$\eta \cong 1 + \Delta_\xi \frac{\text{tr} R_\xi^2 (R_s + R_\xi)^{-2}}{\text{tr} R_\xi}. \quad (17)$$

Аналогично этому случаю можно рассмотреть другой крайний случай при $\Delta_s I \gg R_s$, $\Delta_\xi = 0$ и получить оценку для выигрыша η в виде

$$\eta \cong 1 + \Delta_s \frac{\text{tr} R_s^2 (R_s + R_\xi)^{-2}}{\text{tr} R_s}. \quad (18)$$

Можно показать также, что при медленном изменении параметров модели адаптации обучения ФВ2 оптимальное значение шага обучения будет равно

$$\begin{aligned} \mu_{\text{opt}} &= \mu A = \mu B = \\ &= \sqrt{\frac{N(\sigma_{NSA}^2 + \sigma_{NSB}^2)}{J_{\text{min}}[4N\sigma_x^2 + 2\text{tr}(R_x^2) + N^2(\sigma_x^2)^2]}}, \end{aligned} \quad (19)$$

где

$$\sigma_x^2 = E[x^2(n)];$$

$$J_{\min} = \text{cov}(e(n)); \quad e(n) = y(n) - s(n);$$

$$\sigma_{NSA}^2 = \text{cov}(\Delta A_0(n)) = \frac{1}{N} E[\text{tr}(\Delta A_0 \Delta A_0^T)];$$

$$\sigma_{NSB}^2 = \text{cov}(\Delta B_0(n)) = \frac{1}{N} E[\text{tr}(\Delta B_0 \Delta B_0^T)],$$

то есть как это следует из (18) эффективность полученного оптимального фильтра Вольтерра 2-го порядка (ФВ2) по шагу адаптации обучения также находится в обратной пропорциональной зависимости при значительном увеличении уровня шумовых добавок в возмущениях в корреляционной матрице R_x основного сигнала.

3. Пример эффективности фильтра Вольтерра 2-го порядка с одновременной реализацией линейного минимаксного фильтра

Чтобы проиллюстрировать эффективность алгоритма, было проведено компьютерное моделирование. Линейный минимаксный фильтр как эквивалентная замена линейному фильтру использовался для оценки системы Вольтерра второго порядка с гауссовым входом $x(n)$, то есть во входном сигнале $x(n)$ присутствует аддитивный гауссовский белый шум и выходом $y(n)$ в нестационарной и шумной среде на модельном примере:

$$y(k) = x(k) - 0,5x(k-1) + x^2(k) + \\ + 0,1x^2(k-1) - 0,4x(k)x(k-1) + n(k).$$

В выходном сигнале $y(n)$ через $n(k)$ обозначен белый шум известной интенсивности. На рисунке показан график зависимости оптимального размера шага обучения μ_{opt} от величины J_{\min} от различных значений интенсивностей «шумовой добавки» Δ_x в помехе входного сигнала $x(n)$ при постоянных ковариациях σ_{NSA}^2 и σ_{NSB}^2 девиаций параметров весовых коэффициентов $A(n)$ и $B(n)$ и постоянном отношении сигнала к шуму SNR в наблюдении выходного сигнала $y(n)$ равном 25 дБ.

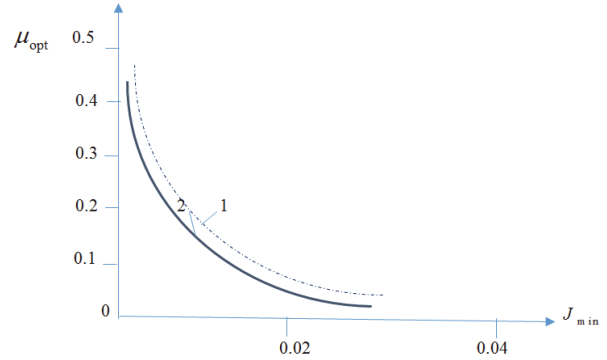


График зависимости оптимального размера шага обучения μ_{opt} от величины J_{\min} от различных значений интенсивностей «шумовой добавки»: пунктирный график – $\Delta_x = 10$; сплошной график – $\Delta_x = 5$ SNR = 25 дБ;

$$\sigma_{NSA}^2 = \sigma_{NSB}^2 = 2,5 \cdot 10^{-6}; \quad \sigma_x = 0,0017$$

A graph of the dependence of the optimal size of the learning step μ_{opt} on the magnitude J_{\min} of the various values of the intensities of the “noise additive:” dotted graph – $\Delta_x = 10$; solid graph – $\Delta_x = 5$ SNR = 25 дБ;

$$\sigma_{NSA}^2 = \sigma_{NSB}^2 = 2,5 \cdot 10^{-6}; \quad \sigma_x = 0,0017$$

Из построения графика зависимости оптимального размера шага обучения μ_{opt} от величины J_{\min} от различных значений интенсивностей «шумовой добавки» Δ_x в помехе входного сигнала $x(n)$ видно, что с увеличением уровня интенсивностей Δ_x величина оптимального шага обучения монотонно убывает и достигает оптимального постоянного уровня на второй кривой обучения, что согласуется с теоретическими выводами, сделанными выше в контексте статьи по оптимальному поведению шага адаптации в зависимости от уровня изменения интенсивностей шумовых добавок в дополнительном увеличении уровня помехи входного сигнала.

Заключение

Таким образом, задача по определению линейного и квадратичного операторов фильтра Вольтерра 2-го порядка с минимаксной средней квадратичной ошибкой для идентификации нелинейных стационарных систем решена и реализована в алгоритмическом виде. Показана эффективность адаптивного устойчивого фильтра Вольтерра 2-го порядка для совместно гауссовских случайных процессов полезного и наблюдаемого сигналов в условиях неточно известного сигнала в шуме и с неточно известными корреляционными свойствами. Дальнейшей задачей будет являться усовершенствование этого метода

и применение фильтра Вольтерра для идентификации многомерных динамических нелинейных систем управления с интервальными параметрами, в задачах оценивания регрессионных интервальных параметров полезного сигнала.

Список литературы

1. Пупков К.А., Капалин В.И., Ющенко А.С. Функциональные ряды в теории нелинейных систем. М.: Наука, 1976. 448 с.
2. Пупков К.А., Цибизова Т.Ю. Реализация фильтра Вольтерра второго порядка для идентификации нелинейных систем управления // Наука и образование: научное издание МГТУ имени Н.Э. Баумана. 2006. № 6. С. 3.
3. Бобрешов А.М., Мымрикова Н.Н. Проблемы анализа сильно нелинейных режимов электронных устройств на основе рядов Вольтерры // Вестник ВГУ. Серия: Физика. Математика. 2013. № 2. С. 1–25.
4. Вольтерра В. Теория функционалов, интегральных и интегро-дифференциальных уравнений. М.: Наука, 1982. 304 с.
5. Heiskanen A., Rahkonen T. 5th Order multi-tone Volterra simulator with component level output // IEEE International Symposium on Circuits and Systems. 2002. Vol. 3. Pp. 591–594. <https://doi.org/10.1109/ISCAS.2002.1010293>
6. Kolding T.E., Larsen T. High order Volterra series analysis using parallel computing // International Journal of Circuit Theory and Applications. 1997. Vol. 25. No. 2. Pp. 107–114.
7. Helie T., Laroche B. Computation of convergence bounds for Volterra series of linear analytic single-input systems // IEEE Transactions on Automatic Control. 2011. Vol. 56. No. 9. Pp. 2062–2072.
8. Peng Z.K., Lang Z.Q. On the convergence of the Volterra series representation of the Duffing's oscillators subjected to harmonic excitations // Journal of Sound and Vibration. 2007. Vol. 305. No. 1–2. Pp. 322–332. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.03.062>
9. Wang T., Brazil T.J. Volterra-mapping-based behavioral modeling of nonlinear circuits and systems for high frequencies // IEEE Transactions on Microwave Theory and Techniques. 2007. Vol. 51. No. 5. Pp. 1433–1440. <https://doi.org/10.1109/TMTT.2003.810151>
10. Zhu Q., Dooley J., Brazil T.J. Simplified Volterra series based behavioral modeling of RF power amplifiers using deviation – reduction // International Microwave Symposium Digest. 2006. Pp. 1113–1116. <https://doi.org/10.1109/MWSYM.2006.249958>
11. Лукьянова Н.В., Кузнецов И.А. Идентификация нелинейных динамических систем на основе разложения функционалов методом Винера // Управление в морских и аэрокосмических системах (УМАС-2014): материалы конференции. СПб., 2014. С. 633–636.

12. Пугачев В.С. Теория случайных функций. Ленинград: Физматгиз, 1962. 883 с.
13. Koh T., Powers E.J. Second-order Volterra filtering and its application to non-linear system identification // IEEE Transaction on Acoustics, Speech, and Signal Processing. 1985. Vol. ASSP-33. No. 6. Pp. 1445–1455. <https://doi.org/10.1109/TASSP.1985.1164730>
14. Кузнецов В.П. Об устойчивой линейной фильтрации случайных сигналов // Радиотехника и электроника. 1975. № 1. С. 2405–2408.
15. Sayadi M., Fnaiech F., Guillon S., Najim M. Steady-state performance analysis of the LMS adaptive time-varying second order Volterra filter // 1996 8th European Signal Processing Conference (EUSIPCO 1996). Trieste; 1996. Pp. 1–5.
16. Хорн Р., Джонсон Ч. Матричный анализ. М.: Мир, 1989.
17. Reed I.S. On a moment theorem for complex Gaussian processes // IRE Transaction on Information. 1962. Vol. 8. No. 3. Pp. 194–195. <https://doi.org/10.1109/TIT.1962.1057719>

References

1. Pupkov KA, Kapalin VI, Yushchenko AS. *Functional series in the theory of nonlinear systems*. Moscow: Nauka Publ.; 1976. (In Russ.)
2. Pupkov KA, Tsibizova TYu. Implementation of the second-order Volterra filter for identification of nonlinear control systems. *Science and Education: Electronic Scientific and Technical Publication*. 2006;(6):3. (In Russ.)
3. Bobreshov AM, Mymrikova NN. The problems of strongly nonlinear analysis for electron circuits based on Volterra series. *Proceedings of Voronezh State University. Series: Physics. Mathematics*. 2013;(2):15–25. (In Russ.)
4. Volterra V. *Theory of functionals, integral and integro-differential equations*. Moscow: Nauka Publ.; 1982. (In Russ.)
5. Heiskanen A, Rahkonen T. 5th Order multi-tone Volterra simulator with component level output. *2002 IEEE International Symposium on Circuits and Systems*. 2002; 3:591–594. <https://doi.org/10.1109/ISCAS.2002.1010293>
6. Kolding TE, Larsen T. High order Volterra series analysis using parallel computing. *International Journal of Circuit Theory and Applications*. 1997;25(2):107–114.
7. Helie T, Laroche B. Computation of convergence bounds for Volterra series of linear analytic single-input systems. *IEEE Transactions on Automatic Control*. 2011;56(9):2062–2072.
8. Peng ZK, Lang ZQ. On the convergence of the Volterra series representation of the Duffing's oscillators subjected to harmonic excitations. *Journal of Sound and Vibration*. 2007;305(1–2):322–332. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2007.03.062>
9. Wang T, Brazil TJ. Volterra-mapping-based behavioral modeling of nonlinear circuits and systems for high frequencies. *IEEE Transactions on Micro-*

wave Theory and Techniques. 2007;51(5):1433–1440. <https://doi.org/10.1109/TMTT.2003.810151>

10. Zhu Q, Dooley J, Brazil TJ. Simplified Volterra series based behavioral modeling of RF power amplifiers using deviation – reduction. *International Microwave Symposium Digest*. 2006. p. 1113–1116. <https://doi.org/10.1109/MWSYM.2006.249958>

11. Lukyanova NV, Kuznetsov IA. Identification of nonlinear dynamic systems based on the decomposition of functionals by the Wiener method. *Management in Marine and Aerospace Systems (UMAS-2014): Materials of the Conference*. St. Petersburg; 2014. p. 633–636. (In Russ.)

12. Pugachev VS. *Theory of random functions*. Leningrad: Fizmatgiz Publ.; 1962. (In Russ.)

13. Koh T, Powers EJ. Second-order Volterra filtering and its application to non-linear system

identification. *IEEE Transaction on Acoustics, Speech, and Signal Processing*. 1985;ASSP-33(6):1445–1455. <https://doi.org/10.1109/TASSP.1985.1164730>

14. Kuznetsov VP. On stable linear filtering of random signals. *Radio Engineering and Electronic Physics*. 1975;(1):2405–2408. (In Russ.)

15. Sayadi M, Fnaiech F, Guillon S, Najim M. Steady-state performance analysis of the LMS adaptive time varying second order Volterra filter. *1996 8th European Signal Processing Conference (EUSIPCO 1996)*. Trieste; 1996. p. 1–5. <https://doi.org/10.5281/ZENODO.36117>

16. Horn R, Johnson Ch. *Matrix analysis*. Moscow: Mir Publ.; 1989. (In Russ.)

17. Reed IS. On a moment theorem for complex Gaussian processes. *Ire Transaction on Information*. 1962;8(3):194–195. <https://doi.org/10.1109/TIT.1962.1057719>

Сведения об авторе

Сидоров Игорь Геннадиевич, кандидат технических наук, доцент департамента прикладной информатики, Московский политехнический университет (Московский Политех), Российская Федерация, 107023, Москва, ул. Большая Семеновская, д. 38; ORCID: 0000-0003-4691-4855, eLIBRARI SPIN-код: 1676-7269; igor8i2016@yandex.ru

About the author

Igor G. Sidorov, Candidate of Technical Sciences, Associate Professor of the Department of Applied Informatics, Moscow Polytechnic University, 38 Bolshaya Semyonovskaya St, Moscow, 125993, Russian Federation; ORCID: 0000-0003-4691-4855, eLIBRARI SPIN-code: 1676-7269; igor8i2016@yandex.ru