Вестник РУДН. Серия: Инженерные исследования
RUDN Journal of Engineering Researches

2021;22(3):293–304

ISSN 2312-8143 (Print); ISSN 2312-8151 (Online)
journals.rudn.ru/engineering-researches

DOI 10.22363/2312-8143-2021-22-3-293-304
УДК 539.3:534.1

Научная статья / Research article

Температурная деформация длинной упругой полосы

Е.М. Зверяев

Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша РАН, Москва, Россия
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
Московский авиационный институт, Москва, Россия
zveriaev@mail.ru

История статьи
Поступила в редакцию: 21 мая 2021 г.
Доработана: 14 сентября 2021 г.
Принята к публикации: 27 сентября 2021 г.

Ключевые слова:
принцип сжатых отображений, теорема о неподвижной точке, упругость, полоса, полное решение, метод Сен-Венана – Пикара – Банаха, граничные условия, краевой эффект

Аннотация. Предложен общий метод постановки и решения температурных задач теории упругости для тонкостенных тел при заданном распределении температуры с сохранением порядка дифференциальных уравнений и выполнением всех граничных условий. Соотношения упругости с учетом температурных деформаций преобразованы к виду, позволяющему в соответствии с методом Сен-Венана – Пикара – Банаха произвести итерационное вычисление всех искомых неизвестных задачи. Процедура построения решения сводится к замене четырех дифференциальных уравнений первого порядка исходной системы теории упругости на четыре соответствующих интегральных уравнения Пикара с малым множителем относительной тонкостенности. Вычисленные путем прямого интегрирования семь неизвестных исходной задачи выражены через четыре основных неизвестных. Выполнение граничных условий на длинных сторонах полосы приводит к решению четырех обыкновенных дифференциальных уравнений для медленно меняющихся и быстро меняющихся компонентов основных неизвестных. Медленно меняющиеся компоненты описывают классическое напряженно-деформированное состояние. Быстро меняющиеся определяют краевые эффекты в точках разрыва непрерывности медленно меняющегося классического решения и выполнение неудовлетворенных ими граничных условий из-за понижения порядка дифференциальных уравнений, основанных на гипотезе Кирхгофа. В общем случае решение представляется в виде асимптотических рядов по малому параметру тонкостенности с коэффициентами в виде степенных рядов по поперечной координате. Изложение проиллюстрировано примерами коробления свободной полосы и возникновения напряжений и перемещений только краевого эффекта в жестко защемленной по концам полосе при линейном распределении температуры по высоте.

Для цитирования
Зверяев Е.М. Температурная деформация длинной упругой полосы // Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования. 2021. Т. 22. № 3. С. 293–304. http://dx.doi.org/10.22363/2312-8143-2021-22-3-293-304

Thermal deformation of a long elastic strip

Evgeny M. Zveryaev

Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia
zveriaev@mail.ru

Article history
Received: May 21, 2021
Revised: September 14, 2021
Accepted: September 27, 2021

Keywords:
contraction mapping principle, elasticity, strip, complete solution, Saint-Venant – Picard – Banach method, boundary conditions, boundary effect

Abstract. A general method is proposed for the formulation and solution of temperature problems of the theory of elasticity for thin-walled bodies for a given temperature distribution with the preservation of the order of differential equations and the fulfilment of all boundary conditions. The elasticity relations, taking into account temperature deformations, are transformed to a form that allows, in accordance with the Saint-Venant – Picard – Banach method, to perform iterative calculation of all the looking for unknowns of the problem. The procedure for constructing a solution is reduced to replacing four differential equations of the first order of the original system of elasticity theory with four corresponding integral Picard equations with a small factor of relative thinness. Seven unknowns of the original problem calculated by direct integration are expressed in terms of four basic unknowns. The fulfilment of the boundary conditions on the long sides of the strip leads to the solution of four ordinary differential equations for slowly varying and rapidly changing components of the main unknowns. Slowly changing components describe the classical stress-strain state. The rapidly changing ones determine the edge effects at the points of discontinuity of the slowly changing classical solution and the fulfilment of the unsatisfied boundary conditions due to the lowering of the order of the differential equations based on the Kirchhoff hypothesis. In the general case, the solution is represented in the form of asymptotic series in the small parameter of thinness with coefficients in the form of power series in the transverse coordinate. The presentation is illustrated by examples of warping of a free strip and of the occurrence of stresses and displacements of only the edge effect in a strip rigidly clamped at the ends with a linear temperature distribution along the height.

For citation
Zveryaev EM. Thermal deformation of a long elastic strip. *RUDN Journal of Engineering Researches*. 2021;22(3):293–304. (In Russ.) http://dx.doi.org/10.22363/2312-8143-2021-22-3-293-304

Введение

«Находящееся в условиях температурного воздействия тонкостенное тело ведет себя так, как если бы оно было нагружено внешними и внутренними напряжениями. Тонкие стержни и листы в результате температурного воздействия коробятся, принимая новую форму. Такого рода явления объясняются наличием внутренних температурных напряжений. Напряжения являются эквивалентом, с помощью которого можно сравнивать степень силового и температурного воздействия. Считается, что температурные напряжения возникают как следствие температурных деформаций тела и условий закрепления его краев. В общем случае они зависят от законов распределения температуры, от температурных свойств материала и условий закрепления тела. В простейшем упругом материале температурные напряжения пропорциональны модулю упругости, коэффициенту линейного расширения и изменению температуры. Эти воздействия подчиняются принципу суперпозиции. При нагреве конструкции и одновременном нагружении ее внешними силами температурные напряжения определяются как часть суммарных напряжений, приходящаяся на долю теплового воздействия. Температурные напряжения возникают вследствие температурных деформаций. Если деформация тела ограничена, то полная деформация может быть равной нулю, и тогда силовая деформация равна температурной»[1].

В силу малой наглядности теплового воздействия на тело в литературе имеется мало решенных задач. В частности, отсутствуют работы по определению коробления тонкостенных тел. Это можно объяснить тем, что решение задач для тонкостенных тел с незакрепленными границами имеет большие трудности из-за наличия полиномиальных решений, вид которых обычно приходится угадывать при использовании теорий в усилиях и моментах.

Еще Ляв отмечал, «что развитие взглядов на постановку задач приводит к тому, что существующие методы постановки задач приводятся во все более тесную связь с новыми. Несмотря на то что иногда приходится встречаться с ошибками в математической теории упругости, состоящими в принятии неясных гипотез, имеет место непрерывный прогресс во всех отношениях» [1]. Несомненным преимуществом и удобством обладает процесс построение решения задачи на основе принципа сжатых отображений, в целом не зависящий от начальных гипотез, так как итерационный процесс при выполнении условий сжатия для операторов исходных уравнений является сходящимся независимо от выбора величин начального приближения и может быть распространен на новые задачи для анизотропных и композиционных материалов при воздействии полей различной природы.

В связи с появлением новых материалов большой интерес представляет изучение уточненных температурных задач, учитывающих разрывы, быстрые переходы, неоднородности или другие неправильности, возникающие из приближенного описания. «Сопутствующее приближенным теориям понижение порядка дифференциального уравнения при решении задач в усилиях и моментах в сочетании с потерей граничного условия является характерной чертой асимптотических явлений в тонкостенных конструкциях, возникающих из приближенного описания» [2]. Цель асимптотического анализа задачи температурной деформации тонкостенного тела заключается в описании медленно меняющегося решения граничной задачи не только вдали от краев, но и в описании быстро меняющегося внутри приграничного слоя.

Потребность в уточненных теориях связана с тем, что уточнение классической теории требуется для более полного понимания самой классической теории. Уточненные теории тонкостенных систем позволяют лучшим образом охарактеризовать погрешность классических теорий [3–5]. «Построение уточненных теорий является более сложной задачей, чем построение классических моделей. Классическая теория учитывает „грубые“ эффекты или медленно меняющиеся напряженные состояния, и, для того чтобы разобраться в них, зачастую достаточно интуиции. В уточненных теориях включаются в рассмотрение малые эффекты, и построение теорий, последовательных в смысле учета всех малых одного порядка, крайне трудно сделать, руководствуясь только интуицией и не располагая регулярными методами» [6].

Считается, что возникающие при построении теории пластин и оболочек противоречия отсутствуют в задаче построения теории изгиба стержня. В основе такого мнения лежит различие в методах построения определяющих уравнений. Если построение теорий пластин и оболочек осуществлялось в некоторой степени на основе математической теории упругости, то построение теории балок выполнено на основе физических и геометрических соображений без использования уравнений теории упругости. При этом граничные условия заимствуются из теории балок. Однако, если все эти теории тонкостенных тел, балок, пластин и оболочек строить на одной математической основе с помощью метода простых итераций, являющегося методом построения решения, удовлетворяющим принципу сжатых отображений, различие между ними исчезает [7]. В связи с этим в настоящей работе методом интегрирования уравнений теории упругости тонкостенных систем Сен-Венана – Пикара – Банаха решена задача определения всех неизвестных задачи температурной деформации длинной полосы. Процесс построения решения и выполнения всех граничных условий на всех сторонах, описанный для полосы, без каких-либо принципиальных изменений с сохранением техники вычислений переносится на более громоздкие задачи для пластин и оболочек [7–12].

[1] Лекция-беседа В.И. Феодосьева «О температурных напряжениях». URL: https://prosopromat.ru/lekcii-besedy-izbrannye-voprosy-i-zadachi-v-i-feodoseva/lekciya-beseda-v-i-feodoseva-o-temperaturnyx-napryazheniyax.html (дата обращения: 14.02.2021).

1. Интегрирование уравнений произвольно нагруженной по длинным сторонам нагретой полосы

Прямоугольную полосу длины l и высоты $2h$ отнесем к прямоугольной системе координат x^*, z^*, так что $0 \le x^* \le l$, $-h \le z^* \le h$. Длинные стороны полосы несут некоторую произвольную нагрузку, короткие стороны полосы могут быть так или иначе закреплены или нагружены. Такую полосу можно рассматривать как уточненную модель балки прямоугольного поперечного сечения.

Уравнения плоской задачи теории упругости, описывающие напряженно-деформированное состояние такой полосы, возьмем в следующем виде:

– уравнения равновесия:

$$\frac{\partial \sigma_z^*}{\partial z^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial x^*} = 0, \quad \frac{\partial \sigma_x^*}{\partial x^*} + \frac{\partial \tau^*}{\partial z^*} = 0;$$

– соотношения упругости:

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x{}^* - \nu\sigma_z{}^*\right), \ \varepsilon_z = \frac{1}{E}\left(\sigma_z{}^* - \nu\sigma_x{}^*\right),$$

$$\gamma = \frac{2(1+\nu)}{E}\tau^*;$$

– формулы, связывающие компоненты деформации и перемещения:

$$\varepsilon_x = \frac{\partial u^*}{\partial x^*}, \quad \varepsilon_z = \frac{\partial w^*}{\partial z^*}, \quad \gamma = \frac{\partial u^*}{\partial z^*} + \frac{\partial w^*}{\partial x^*}.$$

Введем безразмерные координаты $x = x^*/l$, $z = z^*/h$, безразмерные перемещения $u = u^*/h$, $w = w^*/h$ вдоль осей x^*, z^* соответственно и безразмерные напряжения $\sigma_x = \sigma_x^*/E$, $\sigma_z = \sigma_z^*/E$, $\tau = \tau^*/E$ (размерные перемещения, напряжения и нагрузки отмечаются звездочкой). Безразмерные уравнения в этих переменных принимают вид

$$\frac{\partial \sigma_z}{\partial z} + \varepsilon\frac{\partial \tau}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial z} + \varepsilon\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} = 0,$$

$$\varepsilon_x = \sigma_x - \nu\sigma_z, \quad \varepsilon_z = \sigma_z - \nu\sigma_x,$$

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \varepsilon_x = \varepsilon\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \gamma = \frac{\partial u}{\partial z} + \varepsilon\frac{\partial w}{\partial x},$$

где величина $\varepsilon = h/l$ – малый параметр.

Преобразуем их так, чтобы, выбрав в качестве величин начального приближения некоторые $w_{(0)} = w_0(x, z)$ и $\tau_{(0)} = \tau_0(x, z)$, можно было последовательно вычислить все остальные искомые неизвестные

$$\frac{\partial u_{(0)}}{\partial z} = -\varepsilon w_0{}' + 2(1+\nu)\tau_0, \ \varepsilon_{x(0)} = \varepsilon u_{(0)}{}' + \alpha T,$$

$$\frac{\partial \sigma_{z(0)}}{\partial z} = -\varepsilon\tau_0{}', \ \sigma_{x(0)} = \varepsilon_{x(0)} + \nu\sigma_{z(0)},$$

$$\varepsilon_{z(0)} = \left(1-\nu^2\right)\sigma_{z(0)} - \nu\varepsilon_{x(0)} + \alpha T, \ \frac{\partial w_{(1)}}{\partial z} = \varepsilon_{z(0)},$$

$$\frac{\partial \tau_{(1)}}{\partial z} = -\varepsilon\sigma_{x(0)}{}', \ \frac{\partial u_{(1)}}{\partial z} = -\varepsilon\frac{\partial w_{(1)}}{\partial x} + 2(1+\nu)\tau_{(1)} \cdots$$

методом последовательных приближений, заменив дифференциальные уравнения интегральными [7]. Здесь и далее нижним индексом в скобках обозначен номер приближения. Штрих означает дифференцирование по координате x. Во второй и пятой формулах для деформаций добавлены учитывающие температурную деформацию члены αT: α – коэффициент линейного теплового расширения материала полосы, T – температура, взятая относительно некоторой нулевой температуры, при которой температурные деформации считаются отсутствующими. В общем случае они являются функциями обеих координат.

Будем интересоваться уравнениями нулевого и первого приближений при выборе величин начального приближения $w_{(0)} = w_0(x)$ и $\tau_{(0)} = \tau_0(x)$, принятыми не зависящими от координаты z. В силу этого процесс вычислений может быть записан в квадратурах по координате z таким образом, чтобы сжатие по Банаху было обеспечено за счет малого параметра ε как множителя в правой части интегральных операторов Пикара. Вследствие этого вычисленная в первом приближении величина приобретает множитель ε^2 относительно величины нулевого приближения

$$w_{(0)} = w_0, \quad \tau_{(0)} = \tau_0,$$

$$u_{(0)} = -\varepsilon\int\frac{\partial w_0}{\partial x}dz + 2(1+\nu)\int\tau_0 dz + u_0(x),$$

$$\sigma_{z(0)} = -\varepsilon\int \frac{\partial \tau_0}{\partial x} dz + \sigma_{z0}(x), \quad \varepsilon_{x(0)} = \varepsilon \frac{\partial u_{(0)}}{\partial x},$$

$$\sigma_{x(0)} = \varepsilon_{x(0)} + \nu\sigma_{z(0)},$$

$$\varepsilon_{z(0)} = \left(1-\nu^2\right)\sigma_{z(0)} - \nu\varepsilon_{x(0)},$$

$$\tau_{(1)} = \tau_0 - \varepsilon\int \frac{\partial \sigma_{x(0)}}{\partial x} dz, \; w_{(1)} = w_0 + \int \varepsilon_{z(0)} dz...$$

Нижним индексом 0 обозначены произволы интегрирования. Заданные величины начального приближения w_0 и τ_0 записаны также в первом приближении. Итерационный процесс вычисления неизвестных может быть продолжен, в результате будем иметь формулы для неизвестных в любом приближении. Видно, что все искомые неизвестные выражаются через четыре основных неизвестных $u_0(x), \sigma_{z_0}(x), w_0(x), \tau_0(x)$, которые при вычислении интегралов будут умножаться на поперечную координату z с соответствующим степенным показателем.

Найденные в нулевом неизвестные $u, \varepsilon_x, \sigma_z$, σ_x, ε_z и w, τ, σ_z в первом будем считать вычисленными с достаточной степенью точности. Они имеют следующий вид:

$$u = \left[-\varepsilon w_0' + 2(1+\nu)\tau_0\right]z + u_0,$$

$$\varepsilon_x = \left[-\varepsilon^2 w_0'' + 2(1+\nu)\varepsilon\tau_0'\right]z + \varepsilon u_0' + \alpha T,$$

$$\sigma_x = \left[-\varepsilon^2 w_0'' + (2+\nu)\varepsilon\tau_0'\right]z + \varepsilon u_0' + \nu\sigma_{z0} + \alpha T,$$

$$\varepsilon_z = \left[\varepsilon^2 \nu w_0'' - (1+\nu)^2 \varepsilon\tau_0'\right]z - \\ -\nu\varepsilon u_0' + \left(1-\nu^2\right)\sigma_{z0} + (1-\nu)\alpha T,$$

$$w = \left[\varepsilon^2 \nu w_0'' - (1+\nu)^2 \varepsilon\tau_0'\right]\frac{z^2}{2} - \\ -\left[\nu\varepsilon u_0' - \left(1-\nu^2\right)\sigma_{z0}\right]z + (1-\nu)\int_0^z (\alpha T)\, dz + w_0,$$

$$\tau = \left[\varepsilon^3 w_0''' - (2+\nu)\varepsilon^2\tau_0''\right]\frac{z^2}{2} - \\ -\left[\varepsilon^2 u_0'' + \nu\varepsilon\sigma_{z0}'\right]z + \tau_0 - \varepsilon\int_0^z (\alpha T)'\, dz,$$

$$\sigma_z = \left[-\varepsilon^4 w_0'''' + (2+\nu)\varepsilon^3\tau_0'''\right]\frac{z^3}{6} + \\ +\left[\varepsilon^3 u_0''' + \nu\varepsilon^2\sigma_{z0}''\right]\frac{z^2}{2} - \varepsilon\tau_0' z + \\ +\sigma_{z0} + \varepsilon^2 \int_0^z\int_0^z (\alpha T)''\, dz dz. \qquad (1)$$

Из формул видно, что, задав в качестве единиц измерения искомых функций $w_0(x)$ и $\tau_0(x)$ как величины $O(\varepsilon^0)$, величины, вычисленные в нулевом и первом приближении, приобретают дополнительные члены с множителем ε^2, показывающие в практических задачах порядок поправки относительно главной величины.

Получив аналитические выражения для всех искомых неизвестных задачи, можно приступить к выполнению граничных условий на длинных и коротких сторонах заданной прямоугольной области.

2. Выполнение граничных условий на длинных сторонах

На лицевых поверхностях полосы $z^* = \pm h$ надо выполнить граничные условия, соответствующие условиям нагружения. Примем их такими:

$$\sigma_z^* = Z_+^*, \; \tau^* = X_+^* \;\text{ при }\; z^* = h,$$

$$\sigma_z^* = Z_-^*, \; \tau^* = X_-^* \;\text{ при }\; z^* = -h.$$

В безразмерном виде эти условия записываются так:

$$\sigma_z = Z_+, \; \tau = X_+ \;\text{ при }\; z = 1,$$

$$\sigma_z = Z_-, \; \tau = X_- \;\text{ при }\; z = -1.$$

Безразмерные нагрузки получены путем деления размерных на жесткость E. Предполагается, что они заданы медленно меняющимися функциями координаты x.

Условия будем выполнять величинами первого приближения из формул (1), считая, что они с достаточной точностью аппроксимируют искомые величины

$$\varepsilon^3 w_0''' \frac{1}{2} - (2+\nu)\varepsilon^2 \tau_0'' \frac{1}{2} - \varepsilon^2 u_0'' - \nu\varepsilon\sigma_{z0}' + \tau_0 = X_+ + \varepsilon\int_0^1 (\alpha T)' \, dz,$$

$$\varepsilon^3 w_0''' \frac{1}{2} - (2+\nu)\varepsilon^2 \tau_0'' \frac{1}{2} + \varepsilon^2 u_0'' + \nu\varepsilon\sigma_{z0}' + \tau_0 = X_- + \varepsilon\int_0^{-1} (\alpha T)' \, dz,$$

$$-\varepsilon^4 w_0'''' \frac{1}{6} + (2+\nu)\varepsilon^3 \tau_0''' \frac{1}{6} + \varepsilon^3 u_0''' \frac{1}{2} + \nu\varepsilon^2\sigma_{z0}'' \frac{1}{2} - \varepsilon\tau_0' + \sigma_{z0} = Z_+ - \varepsilon^2 \int_0^1\int_0^z (\alpha T)'' \, dzdz,$$

$$\varepsilon^4 w_0'''' \frac{1}{6} - (2+\nu)\varepsilon^3 \tau_0''' \frac{1}{6} + \varepsilon^3 u_0''' \frac{1}{2} + \nu\varepsilon^2\sigma_{z0}'' \frac{1}{2} + \varepsilon\tau_0' + \sigma_{z0} = Z_- - \varepsilon^2 \int_0^{-1}\int_0^z (\alpha T)'' \, dzdz. \qquad (2)$$

Складывая и вычитая попарно первые два уравнения и последние два, получим систему из четырех уравнений:

$$\varepsilon^3 w_0''' - (2+\nu)\varepsilon^2 \tau_0'' + 2\tau_0 = X_+ + X_- + \varepsilon\int_0^1 (\alpha T)' dz + \varepsilon\int_0^{-1} (\alpha T)' dz,$$

$$-\varepsilon^4 w_0'''' \frac{1}{3} + (2+\nu)\varepsilon^3 \tau_0''' \frac{1}{3} - 2\varepsilon\tau_0' = Z_+ - Z_- - \varepsilon^2 \int_0^1\int_0^z (\alpha T)'' \, dzdz + \varepsilon^2 \int_0^{-1}\int_0^z (\alpha T)'' \, dzdz,$$

$$-2\varepsilon^2 u_0'' - 2\nu\varepsilon\sigma_{z0}' = X_+ - X_- + \varepsilon\int_0^1 (\alpha T)' \, dz - \varepsilon\int_0^{-1} (\alpha T)' \, dz,$$

$$\varepsilon^3 u_0''' + \nu\varepsilon^2\sigma_{z0}'' + 2\sigma_{z0} = Z_+ + Z_- - \varepsilon^2 \int_0^1\int_0^z (\alpha T)'' \, dzdz - \varepsilon^2 \int_0^{-1}\int_0^z (\alpha T)'' \, dzdz, \qquad (3)$$

распадающуюся на две независимые: первая пара уравнений служит для определения неизвестных w_0 и τ_0, вторая – для u_0 и σ_{z0}.

Заметим, что формулы для $\tau_{(1)}$ и $\sigma_{z(1)}$ из списка (1) после выполнения граничных условий на длинных сторонах на основе выражений (3) приводятся к простому виду:

$$\tau = \tau_0\left(1 - z^2\right) + \left(X_+ + X_-\right)\frac{z^2}{2} - \left(X_+ - X_-\right)z - \varepsilon\int_0^z (\alpha T)' \, dz + \varepsilon\left[\int_0^1 (\alpha T)' dz + \int_0^{-1} (\alpha T)' dz\right]\frac{z^2}{2} - \varepsilon\left[\int_0^1 (\alpha T)' \, dz - \int_0^{-1} (\alpha T)' \, dz\right] z,$$

$$\sigma_z = \varepsilon\tau_0'\left(z^3 - z\right) + \sigma_{z0}\left(1 - z^2\right) + \frac{1}{2}\left(Z_+ - Z_-\right)z^3 + \frac{1}{2}\left(Z_+ + Z_-\right)z^2 + \varepsilon^2 \int_0^z\int_0^z (\alpha T)'' \, dzdz - \varepsilon^2\left[\int_0^1\int_0^z (\alpha T)'' \, dzdz + \int_0^{-1}\int_0^z (\alpha T)'' \, dzdz\right]\frac{z^3}{2} - \varepsilon^2\left[\int_0^1\int_0^z (\alpha T)'' \, dzdz - \int_0^{-1}\int_0^z (\alpha T)'' \, dzdz\right]\frac{z^2}{2}. \qquad (4)$$

Отбрасывая в первом уравнении в (3) величину $\varepsilon^2\tau_0''$ по сравнению τ_0 как величину $O\left(\varepsilon^2\right)$

и $\varepsilon^3\tau_0'''$ во втором уравнении по сравнению с $\varepsilon\tau_0'$ также как величину $O(\varepsilon^2)$, получим уравнения для медленно меняющихся величин w_0^s и τ_0^s, определенные на координате x:

$$\varepsilon^3 w_0^{s'''} + 2\tau_0^s =$$
$$= X_+ + X_- + \varepsilon\int_0^1 (\alpha T)' dz + \varepsilon\int_0^{-1} (\alpha T)' dz,$$
$$-\varepsilon^4 w_0^{s''''}\frac{1}{3} - 2\varepsilon\tau_0^{s'} = Z_+ - Z_- -$$
$$-\varepsilon^2\int_0^1\int_0^z (\alpha T)'' dzdz + \varepsilon^2\int_0^{-1}\int_0^z (\alpha T)'' dzdz, \quad (5)$$

и известное уравнение краевого эффекта [6], определенное на координате x/ε, которая является независимой в силу произвола параметра на координате ε:

$$-(2+\nu)\varepsilon^2\tau_0^{q''} + 2\tau_0^q = 0, \quad (6)$$

которое используется для выполнения не удовлетворенных решением уравнений (4) граничных условий на коротких сторонах полосы и устранения разрывов.

Система однородных уравнений (5) сводится к разрешающему уравнению $w_0^{s''''} = 0$, решением которого является полином третьей степени. Дифференцирование такого полинома не меняет его порядка по ε. Таким образом, функция w_0^s есть всегда медленно меняющаяся, и, следовательно, $w_0^s \equiv w_0$. Функция τ_0 в общем случае является суммой медленно меняющейся величины и быстро меняющейся, то есть $\tau_0 = \tau_0^s + \tau_0^q$. При этом применение оператора $\varepsilon(\;)'$ к величине τ_0^q не меняет ее асимптотического порядка, то есть $\tau_0^q \sim \varepsilon\tau_0^{q'} \sim \varepsilon^2\tau_0^{q''}$, так как $\tau_0^q = \tau_0^q(x/\varepsilon)$. Здесь и в дальнейшем верхними индексами s и q отмечаются медленно меняющиеся и быстро меняющиеся величины соответственно.

Система (5) может быть сведена к одному разрешающему уравнению

$$\frac{2}{3}\varepsilon^4 w_0^{s''''} = Z_+ - Z_- - \varepsilon\left(X_+' + X_-'\right) -$$
$$-\varepsilon^2\int_0^1\int_0^z (\alpha T)'' dzdz + \varepsilon^2\int_0^{-1}\int_0^z (\alpha T)'' dzdz +$$
$$+\varepsilon^2\int_0^1 (\alpha T)'' dz + \varepsilon^2\int_0^{-1} (\alpha T)'' dz. \quad (7)$$

Последние два уравнения из системы (3) также могут быть преобразованы. Продифференцируем первое уравнение по x, умножим на ε и сложим со вторым. В результате получим

$$\sigma_{z0} = \frac{1}{2}(Z_+ + Z_-) + \frac{1}{4}\varepsilon\left(X_+' - X_-'\right) -$$
$$-\frac{1}{2}\varepsilon^2\int_0^1\int_0^z (\alpha T)'' dzdz - \frac{1}{2}\varepsilon^2\int_0^{-1}\int_0^z (\alpha T)'' dzdz +$$
$$+\frac{1}{4}\varepsilon^2\int_0^1 (\alpha T)'' dz - \frac{1}{4}\varepsilon^2\int_0^{-1} (\alpha T)'' dz, \quad (8)$$

теперь можно исключить из третьего уравнения величину $\varepsilon\sigma_{z0}'$ для получения уравнения для неизвестной u_0:

$$2\varepsilon^2 u_0'' = -\frac{1}{2}(X_+ - X_-) - \frac{1}{2}\varepsilon\int_0^1 (\alpha T)' dz + \frac{1}{2}\varepsilon\int_0^{-1} (\alpha T)' dz -$$
$$-\nu\left[\varepsilon\left(Z_+' + Z_-'\right) + \frac{1}{2}\varepsilon^2\left(X_+'' - X_-''\right) - \varepsilon^2\int_0^1\int_0^z (\alpha T)''' dzdz -\right.$$
$$\left.-\varepsilon^2\int_0^{-1}\int_0^z (\alpha T)''' dzdz + \frac{1}{2}\varepsilon^2\int_0^1 (\alpha T)''' dz - \frac{1}{2}\varepsilon^2\int_0^{-1} (\alpha T)''' dz\right].$$

Из величин в квадратных скобках здесь можно оставить только $\varepsilon\left(Z_+' + Z_-'\right)$ как независимую, а остальные отбросить как малые $O(\varepsilon^2)$ по сравнению с одноименными. Таким образом, для неизвестной u_0 получим уравнение

$$2\varepsilon^2 u_0'' = -\frac{1}{2}(X_+ - X_-) - \varepsilon\left(Z_+' + Z_-'\right) -$$
$$-\frac{1}{2}\varepsilon\int_0^1 (\alpha T)' dz + \frac{1}{2}\varepsilon\int_0^{-1} (\alpha T)' dz. \quad (9)$$

Итак, функция σ_{z0} определена алгебраически через нагрузки и температуру, решение однородного уравнения u_0 является медленно меняющимся.

Заметим, что в последнем уравнении системы (3) содержится оператор $\nu\varepsilon^2\sigma_{z0}^{q}{}'' + 2\sigma_{z0}^{q}$, который также определен на координате x/ε. Его можно использовать для нахождения частного решения в случае приложения быстро осциллирующей нагрузки, но это должно быть целью отдельного исследования.

3. Выполнение граничных условий на коротких сторонах

В сопротивлении материалов рассматриваются задачи изгиба и растяжения стержней при различных условиях закрепления концов. Поскольку напряженно-деформированное состояние полосы существенно зависит от граничных условий на коротких сторонах, рассмотрим сначала пример полосы со свободными концами.

3.1. Равномерно нагретая полоса

Пусть полоса нагрета равномерно по толщине и в ней возникают температурные деформации. При этом она удлиняется и расширяется. Но напряжения в ней не возникают. Если нижние слои полосы охладить, а верхние нагреть, то лежа, например, на плоскости незакрепленная полоса свободно изогнется, покоробится. В литературе решение такой, казалось бы, простой задачи отсутствует.

Пусть $\alpha T = t(x)z$, а нагрузка на длинных сторонах отсутствует: $X_+ = X_- = Z_+ = Z_- = 0$. Уравнения (5) и (7)–(9) принимают вид

$$\tau_0^s = -\frac{1}{2}\varepsilon^3 w_0^{s}{}''' + \frac{1}{2}\varepsilon t'\left(\int_0^1 z dz + \int_0^{-1} z dz\right),$$

$$\frac{2}{3}\varepsilon^2 w_0^{s}{}'''' = t''\left(-\int_0^1\int_0^z z dz dz + \int_0^{-1}\int_0^z z dz dz + \int_0^1 z dz + \int_0^{-1} z dz\right),$$

$$\sigma_{z0} = \frac{1}{2}\varepsilon^2 t''\left(-\int_0^1\int_0^z z dz dz - \int_0^{-1}\int_0^z z dz dz + \frac{1}{2}\int_0^1 z dz - \frac{1}{2}\int_0^{-1} z dz\right),$$

$$\varepsilon^2 u_0'' = \frac{1}{4}\varepsilon t'\left(-\int_0^1 z dz + \int_0^{-1} z dz\right). \qquad (10)$$

Положим для простоты изложения t = const. Дифференциальные уравнения могут быть проинтегрированы. Выполнив также интегрирование по z в скобках, получим

$$\frac{2}{3}\varepsilon^2 w_0^s = \frac{2}{3}t\frac{x^2}{2} + C_3\frac{x^3}{6} + C_2\frac{x^2}{2} + C_1 x + C_0,$$

$$\varepsilon^2 u_0^s = L_1 x + L_0, \quad \tau_0^s = -\frac{3}{4}C_3, \quad \sigma_{z0} = 0,$$

$$\tau_0^q = \begin{cases} B_0 \exp\left(-\dfrac{kx}{\varepsilon}\right) & \text{при } x \ge 0, \\ B_1 \exp\left(-\dfrac{k(1-x)}{\varepsilon}\right) & \text{при } x \le 1, \end{cases} \qquad (11)$$

где C_3, C_2, C_1, C_0, L_1, L_0 – произволы интегрирования медленно меняющихся решений; B_0, B_1 – произволы интегрирования быстро меняющегося решения типа краевого эффекта. Они определяются из краевых условий на коротких сторонах, $k^2 = \dfrac{2}{2-\nu}$.

Примем, что концы полосы свободны, то есть $\sigma_x = \tau = 0$ при $x = 0;1$. Обратившись к (1) и (4), запишем эти условия в развернутом виде

$$\sigma_x = -\varepsilon^2 w_0'' z + (2+\nu)\varepsilon\tau_0' z + \varepsilon u_0' + \nu\sigma_{z0} + tz = 0$$

$$\text{при } x = 0;1,$$

$$\tau = \tau_0 = 0 \text{ при } x = 0;1.$$

Потребовав обращения коэффициентов в ноль при каждой степени z, получим следующую последовательность концевых условий для неизвестных w_0 и τ_0:

$$\tau_0 = 0,$$

$$-\varepsilon^2 w_0'' + (2+\nu)\varepsilon\tau_0' + t = 0 \text{ при } x = 0;1 \qquad (12)$$

и для u_0:

$$\varepsilon u_0' + \nu\sigma_{z0} = 0 \text{ при } x = 0;1. \qquad (13)$$

В условиях (12) в величине τ_0 надо учесть, что $\tau_0 = \tau_0^s + \tau_0^q$:

$$\tau_0^s + \tau_0^q = 0,$$

$$-\varepsilon^2 w_0^{s\prime\prime} + (2+\nu)\varepsilon\left(\tau_0^{s\prime} + \tau_0^{q\prime}\right) + t = 0 \text{ при } x = 0;1.$$

Из решений (11) имеем $\tau_0^{s\prime} \equiv \tau_0^{s\prime\prime} \equiv 0.$ Это приводит к записи

$$\tau_0^s + \tau_0^q = 0,$$

$$-\varepsilon^2 w_0^{s\prime\prime} + (2+\nu)\varepsilon\tau_0^{q\prime} + t = 0 \text{ при } x = 0;1.$$

С помощью решений (11) на краю $x = 0$ условия преобразуются к виду

$$-\frac{3}{4}\varepsilon C_3 + B_0 = 0,$$

$$-C_2 - (2+\nu)kB_0 = 0 \text{ при } x = 0$$

и на краю $x = 1$

$$-\frac{3}{4}\varepsilon C_3 + B_1 = 0,$$

$$-C_3 - C_2 + (2+\nu)kB_1 = 0 \text{ при } x = 1.$$

Величина t при этом во вторых условиях сокращается.

Складывая и вычитая попарно

$$-\frac{3}{2}\varepsilon C_3 + B_0 + B_1 = 0, \;\; B_0 - B_1 = 0,$$

$$-C_3 - 2C_2 - 2(2+\nu)k(B_0 - B_1) = 0,$$

$$C_3 + (2+\nu)k(B_0 + B_1) = 0,$$

из четырех уравнений получаем

$$C_3 = 0, \;\; C_2 = 0, \;\; B_0 = B_1 = 0.$$

Условия (13) выполняются при $\sigma_{z0} = 0$ и основные искомые неизвестные можно записать в виде

$$w_0^s = \varepsilon^{-2} t\frac{x^2}{2} + \frac{3}{2}\varepsilon^{-2}(C_1 x + C_0), \quad u_0^s = \varepsilon^{-2}L_0,$$

$$\tau_0^s = 0, \quad \sigma_{z0} = 0, \quad \tau_0^q = 0, \quad \alpha T = tz. \qquad (14)$$

Перемещения w_0^s и u_0 определены с точностью до перемещений полосы как абсолютно жесткой. Множитель ε^{-2} перед произвольными постоянными $C_1,\ C_0,\ L_0$ можно отбросить.

Подставив найденные величины (14) в формулы (1), получим решение исходной задачи теории упругости:

$$u = -\varepsilon^{-1}tz + L_0, \quad \varepsilon_x = 0, \quad \sigma_x = 0, \quad \varepsilon_z = tz,$$

$$w = (2-\nu)t\frac{z^2}{2} + \varepsilon^{-2}t\frac{x^2}{2}, \quad \tau = 0, \quad \sigma_z = 0.$$

Формулы показывают, что в свободной от закреплений полосе напряжения отсутствуют продольные перемещения $O(\varepsilon^{-1})$, поперечные $O(\varepsilon^{-2})$ по отношению к заданной величине температурного расширения $\alpha T = tz.$ Поправка следующего приближения для поперечного перемещения учитывает изменение поперечных размеров полосы за счет нагрева и пренебрежимо мала $O(\varepsilon^0)$ по сравнению с главным членом $O(\varepsilon^{-2})$.

При короблении полосы имеют место перемещения и деформация расширения, напряжения отсутствуют.

3.2. Линейное распределение температуры по высоте

Рассмотрим второй случай граничных условий на концах $x = 0;1,$ когда $w = u = 0.$ Температура распределена по высоте полосы по закону, при котором $\alpha T = tz.$ Воспользовавшись формулами для перемещений из (1), запишем

$$w = \left[\varepsilon^2\nu w_0'' - (1+\nu)^2\varepsilon\tau_0'\right]\frac{z^2}{2} -$$

$$-\left[\nu\varepsilon u_0' - (1-\nu^2)\sigma_{z0}\right]z + (1-\nu)t\frac{z^2}{2} + w_0 = 0$$

$$\text{при } x = 0;1,$$

где произведена подстановка $\int\limits_0^z (\alpha T)\,dz = t\frac{z^2}{2},$

и $u_{(0)} = \left[-\varepsilon w_0' + 2(1+\nu)\tau_0\right]z + u_0 = 0$ при $x = 0;1.$

Потребовав обращения коэффициентов при каждой степени z в ноль, получим следующую последовательность концевых условий для основных неизвестных $w_0^s,\ \tau_0^s,\ \tau_0^q$:

$$w_0^s = 0, \quad -\varepsilon w_0^{s\prime} + 2(1+\nu)\left(\tau_0^s + \tau_0^q\right) = 0,$$

$$\varepsilon^2 \nu w_0^{s\prime\prime} - (1+\nu)^2 \varepsilon \tau_0^{q\prime} + (1-\nu) t = 0$$

$$\text{при } x = 0;1 \qquad (15)$$

и u_0^s, σ_{z0}:

$$\nu \varepsilon u_0^{s\prime} - (1-\nu^2)\sigma_{z0}^s = 0,$$

$$u_0^s = 0 \text{ при } x = 0;1, \qquad (16)$$

где учтено, что $\tau_0^{s\prime} = 0$.

Условия (15) можно упростить. Для того чтобы два уравнения для определения постоянных интегрирования, соответствующие двум последним условиям, были совместимы, надо принять $\tau_0^q \sim \varepsilon^2 w_0^s$. Кроме того, нужно учесть, что из первого уравнения (5) следует оценка $\tau_0^s \sim \varepsilon^3 w_0^s$. Тогда получаем условия

$$w_0^s = 0, \quad w_0^{s\prime} = 0,$$

$$\varepsilon^2 \nu w_0^{s\prime\prime} - (1+\nu)^2 \varepsilon \tau_0^{q\prime} + (1-\nu) t = 0$$

$$\text{при } x = 0;1,$$

в которых первые два совпадают с классическими для случая жесткого защемления балки по концам. Удовлетворив их интегралами (11), получим

$$C_0 = C_1 = C_3 = 0, \quad C_2 = -\frac{2}{3}t,$$

$$B_0 = \frac{1-\nu}{k(1+\nu)^2} t \text{ при } x = 0$$

$$\text{и } B_1 = -\frac{1-\nu}{k(1+\nu)^2} t \text{ при } x = 1.$$

Условия (16) приводят к произволам интегрирования $L_1 = L_0 = 0$. В результате имеем $w_0^s = u_0^s = 0$. Теперь можно переписать выражения для искомых неизвестных из (1) и (4) так:

$$u = 2(1+\nu)\tau_0^q z, \quad \varepsilon_x = 2(1+\nu)\varepsilon \tau_0^{q\prime} z + tz,$$

$$\sigma_x = (2+\nu)\varepsilon \tau_0^{q\prime} z + tz,$$

$$\varepsilon_z = -(1+\nu)^2 \varepsilon \tau_0^{q\prime} z + (1-\nu) tz,$$

$$w = -(1+\nu)^2 \varepsilon \tau_0^{q\prime} \frac{z^2}{2} + (1-\nu) t \frac{z^2}{2},$$

$$\tau = \tau_0^{q\prime\prime\prime}(1 - z^2), \quad \sigma_z = \varepsilon \tau_0^{q\prime}(z^3 - z),$$

где

$$\tau_0^q = \begin{cases} \dfrac{1-\nu}{k(1+\nu)^2} t \exp\left(-\dfrac{kx}{\varepsilon}\right) & \text{при } x \ge 0, \\ -\dfrac{1-\nu}{k(1+\nu)^2} t \exp\left(-\dfrac{k(1-x)}{\varepsilon}\right) & \text{при } x \le 1; \end{cases}$$

$$\varepsilon \tau_0^{q\prime} = \begin{cases} -\dfrac{1-\nu}{(1+\nu)^2} t \exp\left(-\dfrac{kx}{\varepsilon}\right) & \text{при } x \ge 0, \\ -\dfrac{1-\nu}{(1+\nu)^2} t \exp\left(-\dfrac{k(1-x)}{\varepsilon}\right) & \text{при } x \le 1. \end{cases}$$

Последние формулы показывают, что при изменении температуры по высоте по линейному закону в полосе возникают только перемещения и напряжения краевого эффекта в области защемления коротких краев.

Заключение

Теорема Банаха о неподвижной точке объединяет все итерационные методы в рамках принципа сжатых отображений. Предложенный Сен-Венаном метод решения уравнений теории упругости легко продолжается до итерационного метода простых итераций. Для этого надо преобразовать оператор исходных уравнений так, чтобы он позволял вычислять неизвестные последовательно: вычисленные в одном уравнении величины входят в последующее уравнение как известные, при этом умноженные на малый параметр. Такая последовательность обеспечивается интегральными операторами Пикара, преобразованием соотношений упругости и выбором величин начального приближения не зависящими от поперечной координаты. В теории тонкостенных систем (при дополнительном предположении τ = 0) они называются гипотезами Кирхгоффа или гипотезами недеформируемой нормали. В течение одной итерации четыре раза вычисляются путем прямого интегрирования все неизвестные задачи, содержащие четыре произвольные функции интегрирования, зависящие от продольной координаты, являющиеся коэффициентами полинома по степеням поперечной координаты. При этом члены, соответствующие температурной деформации, входят в исходные уравнения классическим образом [13] и никак не меняют процесс нахождения интегралов уравнений теории упругости. В случае изотропного материала уравнения, описывающие изгиб и растяжение – сжатие, разделяются. Для случая произвольного слоистого материала разделение не происходит [11; 14].

В процессе последовательного вычисления неизвестных в течение нулевой итерации имеет место четырехкратное интегрирование по поперечной координате и четырехкратное дифференцирование по продольной. Однако дифференцирование имеет символический характер, так как при выполнении граничных условий на длинных сторонах высшие производные приравниваются к заданной нагрузке и соответствующие уравнения интегрируются, обеспечивая вместе с однородными сингулярно возмущенными уравнениями непрерывность решения в любом случае. Процесс вычисления можно трактовать как расщепление сложного оператора на четыре оператора Пикара относительно поперечной координаты и три – относительно продольной. Близость полученного решения оценивается порядком первого отброшенного члена по ε для медленно меняющихся величин и оценкой, данной в [10], для быстро меняющихся. Можно показать, что последняя оценка может быть улучшена.

На примере коробления нагретого стержня показано, что указанное В.В. Васильевым [3] отсутствие решения, позволяющее деформировать балку по параболе и найденное в уточненных теориях [4; 5], не теряется при решении задачи теории упругости вышеизложенным методом без замены напряжений усилиями и моментами.

Описанная постановка температурной задачи в дальнейшем предполагает продолжение в задачах для тонкостенных систем из анизотропных и композиционных материалов.

Список литературы

1. *Ляв А.* Математическая теория упругости. М. – Л.: ОНТИ, 1935. 674 с.

2. *Friedrichs K.O.* Asymptotic phenomena in mathematical physics // Bull. Amer. Math. Soc. 1955. Vol. 61. No. 6. Pp. 485–504.

3. *Васильев В.В.* О теории тонких пластин // Изв. РАН. МТТ. 1992. № 3. С. 26–47.

4. *Васильев В.В.* О преобразованиях Кирхгофа и Томсона – Тэта в классической теории пластин // Изв. РАН. МТТ. 2012. № 5. С. 98–107.

5. *Васильев В.В.* Кручение квадратной изотропной пластины угловыми силами и распределенными моментами // Изв. РАН. МТТ. 2017. № 2. С. 20–31.

6. *Григолюк Э.И., Селезов И.Т.* Неклассические теории колебаний стержней, пластин и оболочек // Итоги науки и техники. Механика твердых деформируемых тел: в 22 т. Т. 5. М.: ВИНИТИ,1973. 272 с.

7. *Зверяев Е.М.* Метод Сен-Венана – Пикара – Банаха интегрирования уравнений теории упругости тонкостенных систем // ПММ. 2019. Т. 83. № 5–6. С. 823–833.

8. *Zveryaev E.M.* Interpretation of semi-invers Saint-Venant method as iteration asymptotic method // Shell Structures: Theory and Application / ed. by W. Pietraszkiewicz, C. Szymczak. London: Taylor & Francis Group, 2006. Pp. 191–198.

9. *Zveryayev E.M.* A consistent theory of thin elastic shells // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2016. Vol. 80. Issue 5. Pp. 409–420. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2017.02.008

10. *Zveryayev E.M., Makarov G.I.* A general method for constructing Timoshenko-type theories // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2008. Vol. 72. Issue 2. Pp. 197–207. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2008.04.004

11. *Зверяев Е.М., Олехова Л.В.* Сведение трехмерных уравнений НДС пластины из композиционного материала к двумерным на базе принципа сжатых отображений // Препринты ИПМ имени М.В. Келдыша. М., 2014. № 95. 29 с. URL: http://keldysh.ru/papers/2014/prep2014_95.pdf (дата обращения: 14.02.2021).

12. *Zveryayev E.M.* Analysis of the hypotheses used when constructing the theory of beam and plates // Journal of Applied Mathematics and Mechanics. 2003. Vol. 67. Issue. 3. Pp. 425–434.

13. *Лебедев Н.Н.* Температурные напряжения в теории упругости. М. – Л.: ОНТИ. Главная редакция технико-теоретической литературы, 1937. 110 с.

14. *Зверяев Е.М., Олехова Л.В.* Итерационная трактовка полуобратного метода Сен-Венана при построении уравнений тонкостенных элементов конструкций из композиционного материала // Труды МАИ. 2015. № 79. С. 1–27.

References

1. Love AEH. *A treatise on the mathematical theory of elasticity*. Cambridge: Cambridge University Press; 1927.

2. Friedrichs KO. Asymptotic phenomena in mathematical physics. *Bull. Amer. Math. Soc.* 1955;61(6):485–504.

3. Vasiliev VV. On the theory of thin plates. *Izvestiya RAN. Mekhanika Tverdogo Tela.* 1992;(3):26–47. (In Russ.)

4. Vasilev VV. Kirchhoff and Thomson – Tait transformations in the classical theory of plates. *Mechanics of Solids*. 2012;47:571–579. https://doi.org/10.3103/S0025654412050111

5. Vasilev VV. Torsion of a square isotropic plate by forces applied at the corners and by distributed torques. *Mechanics of Solids.* 2017;52:134–143. https://doi.org/10.3103/S0025654417020030

6. Grigolyuk EI, Selezov IT. Non-classical theory of oscillations of rods, plates and shells. *Results of Science and Technology. Mechanics of Solid Deformable Bodies* (vol. 5). Moscow: VINITI Publ.; 1973. (In Russ.)

7. Zveryaev EM. Saint-Venant – Picard – Banach method of integration of equations of the theory of elasticity of thin-walled systems. *Prikladnaya Matematika i Mekhanika.* 2019;83(5–6):823–833. (In Russ.)

8. Zveryaev EM. Interpretation of semi-invers Saint-Venant method as iteration asymptotic method. In: Pietraszkiewicz W, Szymczak C. (eds.) *Shell Structures: Theory and Application*. London: Taylor & Francis Group; 2006. p. 191–198.

9. Zveryayev EM. A consistent theory of thin elastic shells. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2016;80(5):409–420. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2017.02.008

10. Zveryayev EM, Makarov GI. A general method for constructing Timoshenko-type theories. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics.* 2008;72(2):197–207. https://doi.org/10.1016/j.jappmathmech.2008.04.004

11. Zveryaev EM, Olekhova LV. Reduction 3D equations of composite plate to 2D equations on base of mapping contraction principle. *Keldysh Institute Preprints* (issue 95). Moscow; 2014. (In Russ.) Available from: http://keldysh.ru/papers/2014/prep2014_95.pdf (accessed: 02.14.2021).

12. Zveryayev EM. Analysis of the hypotheses used when constructing the theory of beam and plates. *Journal of Applied Mathematics and Mechanics*. 2003;67(3):425–434.

13. Lebedev NN. *Temperature stresses in the theory of elasticity*. Moscow, Leningrad: ONTI. Glavnaya redaktsiya tekhniko-teoreticheskoi literatury Publ.; 1937. (In Russ.)

14. Zveryaev EM, Olekhova LV. Iterative interpretation of the semi-inverse Saint-Venant method when constructing equations for thin-walled structural elements made of composite material. *Trudy MAI.* 2015;(79):1–27. (In Russ.)

Сведения об авторе

Зверяев Евгений Михайлович, доктор технических наук, профессор, ведущий научный сотрудник, Институт прикладной математики имени М.В. Келдыша, Российская академия наук, Российская Федерация, 125047, Москва, Миусская пл., д. 4; профессор департамента строительства, Инженерная академия, Российский университет дружбы народов, Российская Федерация, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6; профессор кафедры проектирования сложных механических систем, Московский авиационный институт, Российская Федерация, 125993, Москва, Волоколамское шоссе, д. 4. ORCID: 0000-0001-8097-6684, Scopus Author ID: 57195225599, eLIBRARY SPIN-код: 4893-2337. E-mail: zveriaev@mail.ru

About the author

Evgeny M. Zveryaev, Doctor of Technical Sciences, Professor, leading researcher at the Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Sciences, 4 Miusskaya Ploshchad', Moscow, 125047, Russian Federation; Professor of the Department of Construction, Academy of Engineering, Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), 6 Miklukho-Maklaya St, Moscow, 117198, Russian Federation; Professor of the Department of Design of Complex Mechanical Systems, Moscow Aviation Institute (National Research University), 4 Volokolamskoe Shosse, Moscow, 125993, Russian Federation. ORCID: 0000-0001-8097-6684, Scopus Author ID: 57195225599, eLIBRARY SPIN-code: 4893-2337. E-mail: zveriaev@mail.ru