



DOI 10.22363/2312-8143-2018-19-3-299-316

УДК 624.04

## Вывод и анализ методик расчета центрально-сжатых стальных стержней, заложенных в различные нормативные документы

И.Д. Аникеев, А.В. Голиков

Волгоградский государственный технический университет  
Российская Федерация, 400074, Волгоград, ул. Академическая, 1

В статье описаны принципы работы центрально-сжатых стержней и аналитические модели, положенные в основу методик их расчета в действующих нормативных документах стран СНГ и Европы. Приведено приближенное решение задачи о сжатии упругого стержня силой, приложенной с эксцентриситетом, и получены аналитические зависимости для определения коэффициента устойчивости по результатам решения аналитической задачи и по результатам применения нормативных методик. По результатам решения задачи механики приведено решение для коэффициента устойчивости при центральном сжатии, который представляет собой отношение напряжения от осевого сжатия к пределу текучести стали, при котором возникает фибровая текучесть крайних волокон поперечного сечения. При получении решения для коэффициента устойчивости при центральном сжатии обосновано, что ясность получения решения достигается введением вместо числовых значений числа  $\pi$ . Указано, что причиной смещения значения относительного эксцентриситета от идеального решения на 0,2 является невозможность потери устойчивости при малых гибкостях стержня. Обосновано, что нормативные методы расчета, заложенные в Еврокод и Строительные правила России, несмотря на различие в определении условной гибкости, имеют единую физическую природу и их отличие состоит лишь в разных подходах к определению случайного эксцентриситета. Изложены и разобраны нормативные подходы к вычислению относительного эксцентриситета, входящего в коэффициент устойчивости, и описан его физический смысл. Раскрыта природа относительного эксцентриситета, вошедшего в европейские и отечественные нормы, и указана связь относительного эксцентриситета с несовершенствами формы и типа сечения элементов. Раскрыта природа фактора несовершенства по EN 1993-1-1:2005, зависящего от начальных несовершенств, формы сечения и технологии изготовления стержня, обосновано применение аппроксимирующей линейной функции, которая отражает технологический фактор точности изготовления элементов и неизбежно возникающих несовершенств. Раскрыта природа коэффициентов несовершенства  $\alpha$  и  $\beta$ , вошедших в отечественные нормы проектирования стальных конструкций.

**Ключевые слова:** устойчивость, стальной стержень, центральное сжатие, нормативные методы, относительный эксцентриситет

### Введение

В последние два десятилетия стремительно растет уровень взаимодействия в технической сфере между странами Востока и Запада. Борьба за рынки сбыта

технической продукции приводит к необходимости гармонизации различных нормативных документов. Научно-технические школы по проектированию строительных конструкций различных стран формировались в различных условиях, что привело к отдельным расхождениям в методах расчета конструкций. При выборе технической продукции покупатель руководствуется в первую очередь минимальными затратами стоимости конструкций в деле. На итоговую стоимость конструкций оказывает влияние комплекс факторов, одним из основных факторов являются размеры сечений, заложенных в проекте на строительство объекта. Треть общего объема строительных металлических конструкций работает при действии центрально-приложенной нагрузки. Расчет центрально-нагруженных сжатых стержней выполняется в недопущении потери устойчивости продольной оси стержня. В современной отечественной нормативной и научно-технической литературе приводятся таблицы и формулы по определению коэффициента устойчивости при центральном сжатии стального стержня, однако их происхождение не раскрывается. В данной работе определена природа основных зависимостей, положенных в различные методики расчета центрально-сжатых стержней.

### **Анализ литературы**

Анализ научно-технической и нормативной литературы в области расчета стальных конструкций показал отсутствие подробной структурированной информации по выводу методики расчета центрально-сжатых и внецентренно-сжатых стержней.

Задача об устойчивости упругого стержня под действием осевой сжимающей силы впервые была решена Л. Эйлером в работе [1. С. 491—492]. Это решение приведено в многочисленной литературе по устойчивости стержней [2. С. 12—13; 3. С. 25—29; 4. С. 77—79; 5. С. 5—9; 6. С. 17—20]. Однако натурные испытания показали, что это решение не применимо для реальных стальных стержней, что связано с неизбежными искривлениями оси элемента в процессе изготовления и транспортировки и неточностями центровки в процессе монтажа. В связи с этим были получены различные решения для стержня под действием осевой сжимающей силы, приложенной с эксцентриситетом [2. С. 109—111; 3. С. 66—68; 4. С. 190; 5. С. 108—110; 6. С. 67—69].

Следует особо выделить работу Н.С. Стрелецкого [5], в которой подробно освещены как теоретические, так и эмпирические стороны вопроса устойчивости стальных стержней.

В нормативном документе по расчету стальных конструкций СП 16.13330.2017 [7] приведены исключительно расчетные формулы [7. С. 11] и таблицы [7. С. 114] для случая центрального сжатия. В предыдущих редакциях СП 16.13330.2011 [8] и СНиП II-23-81\* [9] также отсутствуют примечания об исследованиях, предшествующих разработке данных методик. В пособии к СНиП II-23-81\* [10. С. 17] приводятся сведения о том, что табулированные значения коэффициента устойчивости при центральном сжатии были получены из решения задачи механики об упругом стержне под действием внецентренно-приложенной продольной силы.

В зарубежной нормативной литературе, например в нормах EN 1993-1-1 [6] также приведены расчетные формулы [11. С. 57], составляющие методику расчета центрально-нагруженных стальных стержней, а в многочисленных пособиях, например [12. С. 54–55] частично раскрывается вывод этой формулы.

Цель исследования: раскрыть физический смысл работы центрально-сжатых стержней и принятых аналитических моделей, положенных в основу методик их расчета в действующих нормативных документах стран СНГ и Европы.

Задачи исследования:

- 1) получить аналитическое решение задачи механики в виде формулы для расчета коэффициента устойчивости при центральном сжатии;
- 2) из аналитического решения получить формулы расчета по нормативным методикам EN 1993-1-1:2005 и СП 16.13330.2017 и выполнить их сравнение;
- 3) выяснить физический смысл относительного эксцентриситета по нормативным методикам EN 1993-1-1:2005 и СП 16.13330.2017 и провести их сравнение.

### Решение задачи механики

Рассматривается шарнирно-закрепленный на концах стержень, к которому приложена продольная сила с эксцентриситетом. Расчетная схема задачи представлена на рис. 1. Решение данной задачи изложено, к примеру, в [4. С. 46; 13. С. 426].

Изгибающий момент в поперечном сечении стержня при действии продольной силы с эксцентриситетом выражается следующим образом:

$$M = N(e + f), \quad (1)$$

где  $N$  — продольная сила в элементе;  $e$  — эксцентриситет приложения продольной силы;  $f$  — прогиб стержня от продольной силы приложенной с эксцентриситетом.

Анализируя уравнение (1), можно сделать вывод, что это рекурсивное уравнение, так как, чтобы найти изгибающий момент  $M$ , необходимо знать прогиб  $f$ , который определяется изгибающим моментом  $M$ .

Известно, что принцип суперпозиции не применим к нелинейным системам, к которым, в частности, относится представленная задача. Вследствие этого поиск решения ведем в приближенном виде.

Прогиб стержня в уравнении (1) можно представить как

$$f = f_0 + \Delta f, \quad (2)$$

где  $f_0$  — прогиб стержня от изгибающего момента вызванного эксцентриситетом;  $\Delta f$  — прогиб стержня от действия продольной силы.

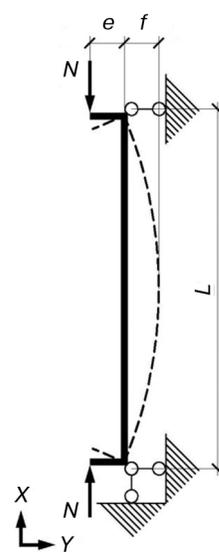


Рис. 1. Расчетная схема  
[Fig. 1. Analytical scheme]

Приближенное дифференциальное уравнение изогнутой оси стержня в предположении малой кривизны изогнутой оси выражается следующим образом:

$$\frac{M}{EI} = f'' = \frac{d^2 y}{dx^2}, \quad (3)$$

где  $M$  — изгибающий момент в поперечном сечении;  $E$  — модуль упругости элемента;  $I$  — момент инерции поперечного сечения.

Рассматривая совместно уравнения (1–3), получаем:

$$\left. \begin{aligned} EI \cdot f'' &= -N \cdot (e + f) \\ EI \cdot f_0'' &= -N \cdot e \\ f &= f_0 + \Delta f \end{aligned} \right\} \rightarrow EI \cdot \Delta f'' = -N \cdot f. \quad (4)$$

Приближенно описывая изогнутую ось стержня синусоидой, получаем:

$$\Delta f(x) = \Delta f \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right), \quad \Delta f''(x) = -\frac{\pi^2}{l^2} \cdot \Delta f \cdot \sin\left(\frac{\pi}{l} x\right).$$

Приближенный момент в середине пролета стержня:

$$\Delta f''(x) = -\frac{\pi^2}{l^2} \cdot \Delta f. \quad (5)$$

Рассматривая совместно уравнения (4), (5), получаем:

$$-EI \cdot \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \Delta f = -N \cdot f, \quad \frac{\pi^2}{l^2} \cdot \Delta f = \frac{N}{EI} \cdot f, \quad \frac{\pi^2}{l^2} \cdot (f - f_0) = \frac{N}{EI} \cdot f;$$

$$f - f_0 = \frac{N}{EI} \cdot \frac{l^2}{\pi^2} \cdot f, \quad f \left(1 - \frac{N}{EI} \cdot \frac{l^2}{\pi^2}\right) = f_0, \quad f = \frac{f_0}{\left(1 - \frac{N}{EI} \cdot \frac{l^2}{\pi^2}\right)}.$$

Прогиб стержня при действии продольной силы с эксцентриситетом, преобразуя вышеизложенное решение, выражается следующим образом:

$$f = f_0 \frac{1}{1 - \frac{N}{N_3}}, \quad (6)$$

где  $f_0$  — прогиб стержня от изгибающего момента, вызванного эксцентриситетом;  $N$  — продольная сила;  $N_3$  — критическая продольная сила по Эйлеру.

Уравнение напряжений при совместном действии продольной силы с изгибающим моментом с учетом прогиба стержня от продольной силы (6) примет следующий вид:

$$\sigma = \frac{N}{A} + \frac{M}{W} = \frac{N}{A} + \frac{N}{W} \left( \frac{e}{1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_3}} \right) = \frac{N}{A} \left( 1 + \frac{A}{W} \frac{e}{1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_3}} \right) = \sigma_0 \left( 1 + m \frac{1}{1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_3}} \right),$$

$$\sigma = \sigma_0 \left( 1 + m \frac{1}{1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_3}} \right). \quad (7)$$

Напряжение от осевого сжатия, при котором возникает фибровая текучесть, после преобразования уравнения (7) примет следующий вид:

$$\sigma_0 = \sigma_3 \left( 1 - m \frac{\sigma_0}{R_y - \sigma_0} \right), \quad (8)$$

где  $\sigma_0$  — напряжение от осевого сжатия  $N/A$ ;  $\sigma_3$  — критическое напряжение по Эйлеру;  $m$  — относительный эксцентриситет осевой силы;  $R_y$  — предел текучести стали

Преобразуя полученное уравнение (8), получаем:

$$\sigma_0 = \sigma_3 - m \frac{\sigma_3 \cdot \sigma_0}{R_y - \sigma_0} = 0,$$

$$(\sigma_0 - \sigma_3)(R_y - \sigma_0) = -m \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_0,$$

$$(\sigma_0 \cdot R_y) - (\sigma_0 \cdot \sigma_0) - (\sigma_3 \cdot R_y) + (\sigma_3 \cdot \sigma_0) + m(\sigma_3 \cdot \sigma_0) = 0,$$

$$\sigma_0^2 - \sigma_0(\sigma_3(1 + m) + R_y) + \sigma_3 R_y = 0,$$

$$\left( \frac{\sigma_0}{R_y} \right)^2 - \frac{\sigma_0}{R_y} \left( \frac{\sigma_3}{R_y} (1 + m) + 1 \right) + \frac{\sigma_3}{R_y} = 0. \quad (9)$$

Соотношение предела текучести  $R_y$  и критического напряжения по Эйлеру  $\sigma_3$  представляет собой квадрат условной гибкости  $\lambda$ :

$$\frac{\sigma_3}{R_y} = \frac{\pi^2 E}{\lambda^2 R_y} \rightarrow \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{R_y}{E}}; \quad \bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{R_y}{E}}. \quad (10)$$

Рассматривая совместно уравнения (9), (10), получаем квадратное уравнение с корнями в виде коэффициента устойчивости  $\varphi$ , являющегося соотношением напряжения от простого сжатия  $\sigma_0$ , при котором достигается фибровая текучесть, и предела текучести  $R_y$ .

$$\varphi^2 \lambda^2 - \varphi(1 + m + \lambda^2) + 1 = 0. \quad (11)$$

Коэффициент устойчивости при центральном сжатии  $\varphi$ , являясь решением квадратного уравнения (11), будет определяться в виде

$$a = \lambda^2, b = -(1 + m + \lambda^2), c = 1,$$

$$\varphi = \frac{-b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{(1 + m + \lambda^2) - \sqrt{(1 + m + \lambda^2)^2 - 4\lambda^2}}{2\lambda^2},$$

$$\varphi = \frac{(1 + m + \lambda^2) - \sqrt{(1 + m + \lambda^2)^2 - 4\lambda^2}}{2\lambda^2}. \quad (12)$$

Решая и преобразовывая уравнение (12), приводим его к простому виду:

$$\varphi = \frac{1}{F + \sqrt{F^2 - \bar{\lambda}^2}}, \quad (13)$$

$$F = \frac{1}{2}(1 + m + \bar{\lambda}^2). \quad (14)$$

Таким образом, решение механической задачи в виде коэффициента устойчивости  $\varphi$  является отношением напряжения от осевого сжатия  $\sigma_0$  к пределу текучести  $R_y$ , при котором возникает фибровая текучесть крайних волокон поперечного сечения.

### Получение решения по EN 1993-1-1:2005

Преобразовывая выражение (11), получаем выражение в виде

$$\bar{\lambda}_{EN} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{R_y}{E}}, \varphi^2 - \varphi \left( \frac{1 + m + \bar{\lambda}_{EN}^2}{\bar{\lambda}_{EN}^2} \right) + \frac{1}{\bar{\lambda}_{EN}^2} = 0,$$

$$a = 1, b = \frac{1}{2} \frac{(1+m+\bar{\lambda}_{\text{EN}}^2)}{\bar{\lambda}_{\text{EN}}^2}, c = \frac{1}{\bar{\lambda}_{\text{EN}}}, d = \sqrt{b^2 - c^2};$$

$$\frac{1}{\Phi_{\text{EN}}} = \frac{1}{b-d} = \frac{1}{b-d} \frac{b+d}{b+d} = \frac{b+d}{b^2-d^2} = \frac{b+\sqrt{b^2-c^2}}{b^2-\sqrt{b^2-c^2}^2} = \frac{b+\sqrt{b^2-c^2}}{c^2};$$

$$\frac{1}{\Phi_{\text{EN}}} = \bar{\lambda}_{\text{EN}}^2 \left( \frac{1}{2} \frac{1+m+\bar{\lambda}_{\text{EN}}^2}{\bar{\lambda}_{\text{EN}}^2} \right) + \sqrt{\bar{\lambda}_{\text{EN}}^4 \left( \frac{1}{2} \frac{1+m+\bar{\lambda}_{\text{EN}}^2}{\bar{\lambda}_{\text{EN}}^2} \right)^2 - \frac{\bar{\lambda}_{\text{EN}}^4}{\bar{\lambda}_{\text{EN}}^2}};$$

$$\Phi = \frac{1}{2}(1+m+\bar{\lambda}_{\text{EN}}^2);$$

$$\Phi_{\text{EN}} = \frac{1}{\Phi_{\text{EN}} + \sqrt{\Phi_{\text{EN}}^2 - \bar{\lambda}_{\text{EN}}^2}}, \quad (15)$$

$$\Phi_{\text{EN}} = \frac{1}{2}(1 + \alpha(\bar{\lambda}_{\text{EN}} - 0, 2) + \bar{\lambda}_{\text{EN}}^2). \quad (16)$$

### Получение решения по СП 16.13330.2017

Учитывая, что для упрощения вычисления условной гибкости  $\lambda$  в отечественных нормативных документах из выражения (10) было удалено число  $\pi$ , преобразуем выражения (10) и (12) к виду

$$\bar{\lambda}_{\text{СП}} = \lambda \sqrt{\frac{R_y}{E}}, \Phi_{\text{СП}} = \frac{\pi^2 \left( 1+m+\frac{\bar{\lambda}_{\text{СП}}^2}{\pi^2} \right) - \sqrt{\pi^4 \left( 1+m+\frac{\bar{\lambda}_{\text{СП}}^2}{\pi^2} \right)^2 - \pi^4 4 \frac{\bar{\lambda}_{\text{СП}}^2}{\pi^2}}}{2\bar{\lambda}_{\text{СП}}^2};$$

$$\delta = \pi^2 \left( 1+m+\frac{\bar{\lambda}_{\text{СП}}^2}{\pi^2} \right) = \pi^2(1+m) + \bar{\lambda}_{\text{СП}}^2, \Phi_{\text{СП}} = \frac{1}{2} \frac{\delta - \sqrt{\delta^2 - 4\pi^2 \bar{\lambda}_{\text{СП}}^2}}{\bar{\lambda}_{\text{СП}}^2},$$

$$\Phi_{\text{СП}} = \frac{1}{2} \frac{\delta_{\text{СП}} - \sqrt{\delta_{\text{СП}}^2 - 39,48\bar{\lambda}_{\text{СП}}^2}}{\bar{\lambda}_{\text{СП}}^2}, \quad (17)$$

$$\Delta_{\text{СП}} = 9,87(1 - \alpha + \beta\lambda_{\text{СП}}) + \lambda_{\text{СП}}^2. \quad (18)$$

### Сравнение задачи механики и нормативных методик

Сравнение расчетных зависимостей по различным решениям представлено в табл. 1. Графики коэффициента устойчивости при центральном сжатии по различным методикам и их сравнение представлены на рис. 2–4.

По решению механической задачи один из членов решения квадратного уравнения (14) содержит в себе относительный эксцентриситет  $m$ , в различном виде вошедший в нормы.

Таблица 1

Сравнение расчетных формул [Table 1. Comparison design formulas]

По решению задачи механики [By solving the problem of mechanics]	По EN 1993-1-1:2005 Пункт 6.3.1.2 [11. С. 57] [By EN 1993-1-1:2005 Point 6.3.1.2 [11. С. 57]]	По СП 16.13330.2017 Пункт 7.1.3 [7. С. 11] [By SP 16.13330.2017 Point 7.1.3 [7. С. 11]]
$\varphi = \frac{1}{F + \sqrt{F^2 - \bar{\lambda}^2}}$	$\varphi_{EN} = \frac{1}{\Phi + \sqrt{\Phi^2 - \bar{\lambda}_{EN}^2}}$	$\varphi_{СП} = \frac{1}{2} \frac{\delta - \sqrt{\delta^2 - 39,48\bar{\lambda}_{СП}^2}}{\bar{\lambda}_{СП}^2}$
$F = \frac{1}{2}(1 + m + \bar{\lambda}^2)$	$\Phi = \frac{1}{2}(1 + \alpha(\bar{\lambda}_{EN} - 0,2) + \bar{\lambda}_{EN}^2)$	$\Delta = 9,87(1 - \alpha_{СП} + \beta_{СП}\bar{\lambda}_{СП}) + \bar{\lambda}_{СП}^2$
$\bar{\lambda} = \frac{\lambda}{\pi} \sqrt{\frac{R_y}{E}}$	$\Phi = \frac{1}{2}(1 + \alpha(\bar{\lambda}_{EN} - 0,2) + \bar{\lambda}_{EN}^2)$	$\bar{\lambda}_{СП} = \lambda \sqrt{\frac{R_y}{E}}$

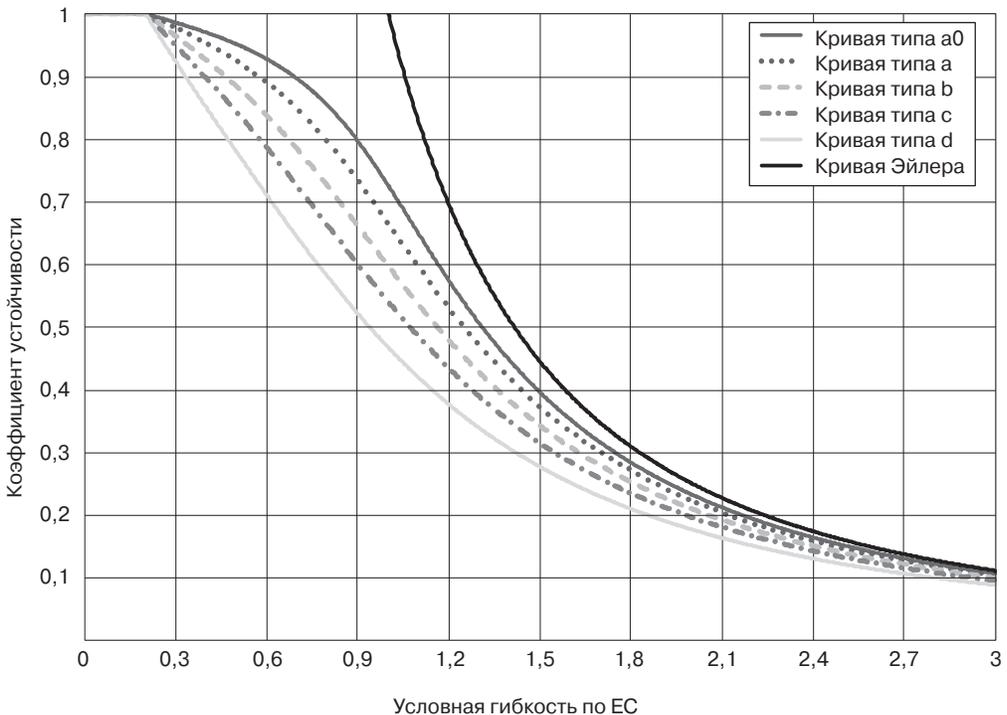
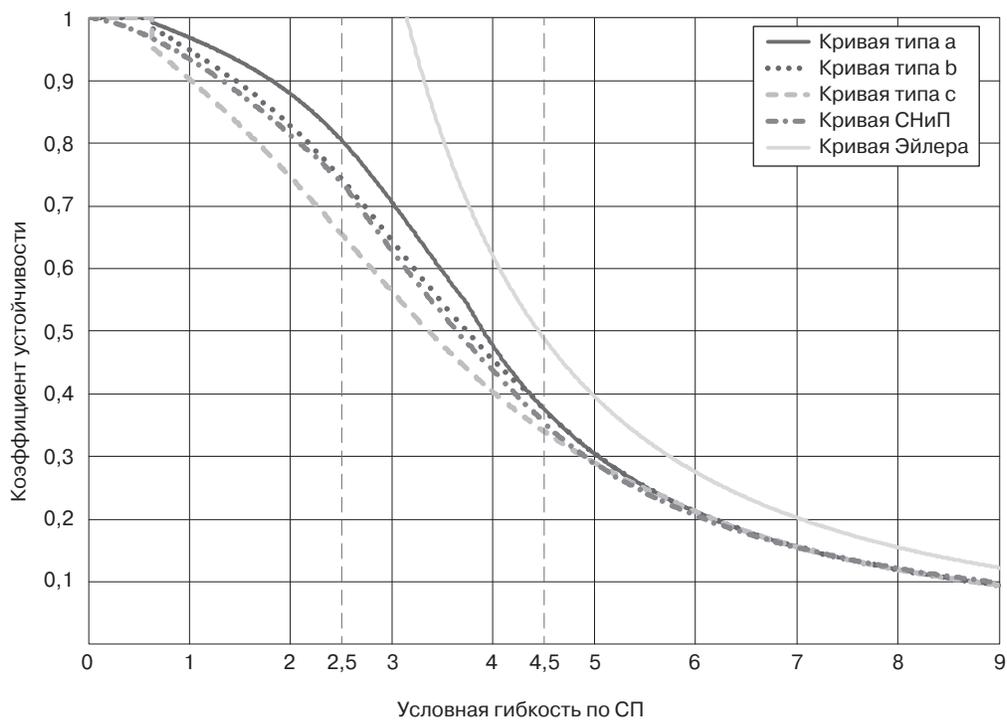
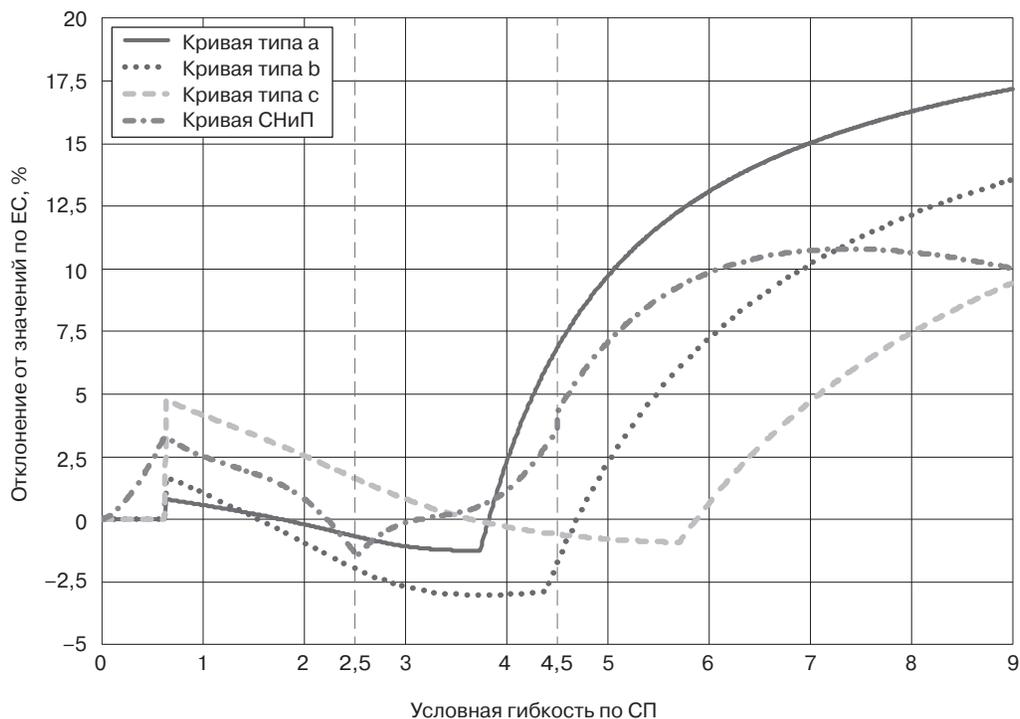


Рис. 2. График коэффициента устойчивости по EN 1993-1-1:2005  
[Fig. 2. Buckling coefficient curve according to EN 1993-1-1:2005]



**Рис. 3.** График коэффициента устойчивости по СП 16.13330.2017  
[Fig. 3. Buckling coefficient curve according to SP 16.13330.2017]



**Рис. 4.** Сравнение графиков по EN 1993-1-1:2005 и СП 16.13330.2017  
[Fig. 4. Comparison of EN 1993-1-1:2005 and SP 16.13330.2017 graphs]

Так, в EN [11] для случая центрального сжатия он является относительным случайным эксцентриситетом и зависит от типа и формы сечения и гибкости. Дополнительное вычитание от относительной гибкости значения 0,2 дает смещение графика, учитывающее невозможность потери устойчивости при малых гибкостях. Так, для относительной гибкости меньше 0,2 допускается не учитывать потерю устойчивости.

Аналогичным образом в СП [7] представлен случайный эксцентриситет. Так, для относительной гибкости меньше 0,6 допускается не учитывать явление потери устойчивости, что аналогично взятому из EN [11] значению  $0,2\pi = 0,628 \approx 0,6$ . Однако есть отличительное требование принимать коэффициент устойчивости не более чем  $7,6/\lambda^2$ , что является повторением методики, изложенной в пособии к СНиП [10], где для больших гибкостей, для ограничения прогибов сжатых стержней вступало ограничение по кривой Эйлера с запасом в 1,3, и получаем  $\pi^2/1,3 = 7,592 \approx 7,6$ .

Для построения графика на рис. 4 условная гибкость в уравнениях (15), (16) была разделена на число пи, таким образом приводя эти уравнения к виду аналогичному уравнениям (17), (18).

На рисунках 3 и 4 для кривой СНиП характерны перегибы в ключевых точках с условной гибкостью 2,5 и 4,5, это связано с тем, что для описания кривой коэффициента устойчивости использовались три аппроксимирующие функции [10. С. 17].

Различие значений коэффициентов устойчивости при условной гибкости меньше 4 находится в пределах 5% (рис. 4). При большей условной гибкости различие возрастает за счет того, что для СП вступает ограничение по кривой устойчивости Эйлера для больших гибкостей.

Следует отметить, что нормативные методы расчета по EN и СП, несмотря на различие в определении условной гибкости, имеют единую физическую природу и их отличие состоит лишь в разных подходах в определении случайного эксцентриситета.

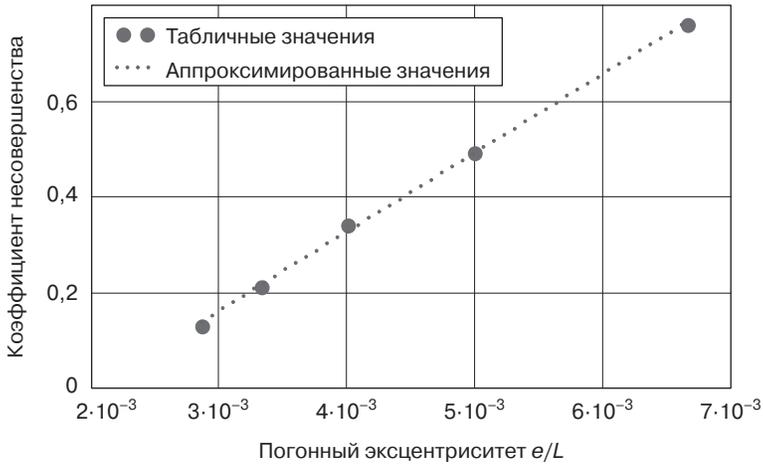
### **Относительный эксцентриситет по EN 1993-1-1:2005**

Относительный эксцентриситет  $m$ , вошедший в уравнение коэффициента устойчивости (14), по уравнению (16) является линейной функцией от фактора несовершенства  $\alpha$  и условной гибкости  $\lambda$ .

Как было отмечено выше, вычитание от условной гибкости значения 0,2 смещает график коэффициента устойчивости, таким образом закрепляя факт невозможности потери устойчивости стержней с малой условной гибкостью.

Фактор несовершенства  $\alpha$  в соответствии с п. 6.3.1.2 и табл. 6.1 зависит от начальных несовершенств  $e_0 / L$  в соответствии с п. 5.3.2 и табл. 5.1, а также формы сечения и технологии его изготовления по табл. 6.2.

Сопоставляя значения в табл. 5.1 и 6.1, представленные в табл. 2, можно построить график зависимости фактора несовершенства  $\alpha$  от начальных несовершенств  $e_0 / L$  (рис. 5).



**Рис. 5.** Зависимость фактора несовершенства от начальных несовершенств  
[**Fig. 5.** Relationship of imperfection factor to initial imperfections]

Фактор несовершенства  $\alpha$  линейно зависит от начального несовершенства  $e_0 / L$  (см. рис. 5) позволяет аппроксимировать его в виде линейной функции:

$$\alpha \left( \frac{e_0}{L} \right) = 165 \frac{e_0}{L} - \frac{1}{3}. \quad (19)$$

Уравнение (19) отражает технологический фактор точности изготовления элементов и неизбежно возникающих несовершенств.

Аппроксимированные значения фактора несовершенства и их сравнение, а также сравнение аппроксимированных графиков коэффициента устойчивости представлены в табл. 2.

Таблица 2

**Фактор несовершенства по EN 1993-1-1:2005**  
[**Table 2. Imperfection factor according to EN 1993-1-1: 2005**]

Тип кривой по табл. 5.1 и 6.1 EN [Buckling curve according to table 5.1 и 6.1 EN]	$a_0$	$a$	$b$	$c$	$d$
Начальное несовершенство $e_0 / L$ по таблице 5.1 EN [Initial imperfect $e_0 / L$ according to table 5.1 EN]	1/350	1/300	1/250	1/200	1/150
Фактор несовершенства $\alpha$ по таблице 6.1 EN [Imperfection factor $\alpha$ according to table 6.1 EN]	0,13	0,21	0,34	0,49	0,76
Фактор несовершенства $\alpha_{int}$ аппроксимированный [Imperfection factor $\alpha_{int}$ approximated]	0,138	0,217	0,327	0,492	0,767
Сравнение $\frac{a - \alpha_{int}}{\alpha}$ , % [Comparison $\frac{a - \alpha_{int}}{\alpha}$ , %]	+6,2	+3,2	-3,9	+0,3	+0,9
Сравнение $\frac{\varphi - \varphi_{int}}{\varphi}$ , % [Comparison $\frac{\varphi - \varphi_{int}}{\varphi}$ , %]	+1,0	+0,6	0,0	+0,1	+0,3

Если сравнить аппроксимированные и табличные значения фактора несовершенства, то максимальное отличие по диапазону условной гибкости от 0 до 9 составит меньше 6%.

Если сравнить коэффициент устойчивости с использованием аппроксимированных и табличных значений фактора несовершенства, то максимальное отличие по диапазону условной гибкости от 0 до 9 составит меньше 1%.

Таким образом, аппроксимирующая функция фактора несовершенства подобрана с высокой точностью.

Рассматривая совместно уравнения (16) и (19), получаем уравнение относительного эксцентриситета:

$$m_{EC} = \left( 165 \frac{e_0}{L} - \frac{1}{3} \right) (\bar{\lambda}_{EC} - 0,2). \quad (20)$$

Относительный эксцентриситет зависит от возможных отклонений прямолинейности, неизбежно возникающих в процессе изготовления, транспортировки и монтажа и прямо пропорционален условной гибкости, т.е. связан с формой сечения и длиной элемента.

### Относительный эксцентриситет по СП 16.13330.2017

Относительный эксцентриситет  $m$ , вошедший в уравнение коэффициента устойчивости (14), по уравнению (18) является линейной функцией от коэффициентов несовершенства  $\alpha$ ,  $\beta$  и условной гибкости  $\lambda$ . Коэффициенты  $\alpha$  и  $\beta$  зависят только от формы сечения (табл. 3).

Таблица 3

**Коэффициенты несовершенства по СП 16.13330.2017**  
[Table 3. Imperfection factors according to SP 16.13330.2017]

Тип кривой по таблице 7 СП [Buckling curve according to table 7 СП]	$a$	$b$	$c$
Коэффициент $\alpha$ по таблице 7 СП [Factor $\alpha$ according to table 7 СП]	0,03	0,04	0,04
Коэффициент $\beta$ по таблице 7 СП [Factor $\beta$ according to table 7 СП]	0,06	0,09	0,14

Вид относительного эксцентриситета в уравнении (18) близок по своей сути к случайному эксцентриситету в [10. С. 17], который имеет вид

$$e_0 = \frac{L}{750} + \frac{i}{20}. \quad (21)$$

Это уравнение можно преобразовать к виду

$$m_{СП} = \frac{e_0}{\rho} = \left( \frac{1}{750} \frac{L}{\rho} \right) + \left( \frac{1}{20} \frac{i}{\rho} \right) = \left( \frac{1}{750} \frac{L}{i} k \right) + \left( \frac{1}{20} k \right) = \left( \frac{1}{b} \lambda k \right) + \left( \frac{1}{a} k \right),$$

$$\left( \frac{1}{b} \cdot \bar{\lambda} \cdot \sqrt{\frac{E}{R_y}} \cdot k \right) + \left( \frac{1}{a} \cdot k \right) = \beta_{СП} \cdot \bar{\lambda}_{СП} + \alpha_{СП}. \quad (22)$$

Анализируя выражение (22), можно прийти к выводу, что коэффициент  $\alpha$  учитывает распределение материала по плоскости сечения, а коэффициент  $\beta$  учитывает допуски прямолинейности изготовления элементов. При этом для сталей с более высоким пределом текучести коэффициент несовершенства будет выше. Следуя этому предположению, можно вывести такие соотношения  $L/\rho$  и  $i/\rho$ , которые будут удовлетворять табличным значениям, приведенным в нормативных документах.

Коэффициент несовершенства  $\beta$  будет принимать тем большие значения, чем меньше предел текучести стали. Так, в наиболее неблагоприятном случае имеем сталь С235 с пределом текучести  $R_y = 230$  МПа и модулем упругости  $E = 206$  ГПа. Для данной стали получаем соотношение  $\sqrt{(E/R_y)} \approx 30$ . Далее, зная коэффициенты несовершенства  $\alpha$  и  $\beta$  различных кривых, для различных значений коэффициента  $k$  получаем коэффициенты  $a$  и  $b$  из соотношения (22) (табл. 4).

Значения радиусов инерции  $i$ , радиуса ядра  $\rho$  и допустимые несовершенства по длине  $e/L$ , полученные из анализа нормативных документов на стальной прокат, приведен в табл. 5.

Сопоставляя информацию табл. 4 и 5, можно отметить, что при коэффициенте  $k = i/\rho = 1,2$  коэффициенты  $a$  и  $b$  принимают целочисленные значения, аналогичные выражению (21). Аппроксимированные значения коэффициентов  $a$  и  $b$ , заложенные в основе коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$ , близки к нормативным значениям, представленным в табл. 6.

Таблица 4

**Коэффициенты  $a$  и  $b$  для различных значений коэффициента  $k$**   
**[Table 4. Coefficients  $a$  and  $b$  for different values of coefficient  $k$ ]**

Коэффициент $k$ [Factor $k$ ]		1,1	1,2	1,3	1,4	1,5	1,6
Кривая типа $a$ [Buckling curve $a$ ]	Коэффициент $b$ [Factor $b$ ]	550,0	600,0	650,0	700,0	750,0	800,0
	Коэффициент $a$ [Factor $a$ ]	36,7	40,0	43,3	46,7	50,0	53,3
Кривая типа $b$ [Buckling curve $b$ ]	Коэффициент $b$ [Factor $b$ ]	366,7	400,0	433,3	466,7	500,0	533,3
	Коэффициент $a$ [Factor $a$ ]	27,5	30	32,5	35	37,5	40
Кривая типа $c$ [Buckling curve $c$ ]	Коэффициент $b$ [Factor $b$ ]	235,7	257,1	278,6	300,	321,4	342,9
	Коэффициент $a$ [Factor $a$ ]	27,5	30	32,5	35	37,5	40

Таблица 5

**Соотношение  $i/\rho$  основных типов стального проката**  
**[Table 5. Ratio  $i/\rho$  for the main types of steel profiles]**

Поперечное сечение [Cross section]	Минимальное значение $i/\rho$ [Minimum value $i/\rho$ ]	Среднее значение $i/\rho$ [Medium value $i/\rho$ ]	Максимальное значение $i/\rho$ [Maximum value $i/\rho$ ]	Значение $e/L$ [Value $e/L$ ]
Труба круглая ГОСТ 10704-91 [Round pipe GOST 10704-91]	1,21	1,44	1,49	1/500—1/1000
Двутавр нормальный ГОСТ 26020-83 [Rolling I-beam GOST 26020-83]	1,20	1,23	1,28	1/500—1/1000
Двутавр широкополочный ГОСТ 26020-83 [Rolling I-beam S-Section GOST 26020-83]	1,16	1,18	1,21	1/500—1/1000
Двутавр колонный ГОСТ 26020-83 [Rolling I-beam W-Section GOST 26020-83]	1,14	1,14	1,15	1/500—1/1000
Уголок главные оси ГОСТ 8509-93 [Angle main axes GOST 8509-93]	1,18	1,30	1,37	1/250—1/500
Уголок нормальные оси ГОСТ 8509-93 [Angle normal axes GOST 8509-93]	1,49	1,64	1,71	1/250—1/500
Швеллер ГОСТ 8240-97 [Channel GOST 8240-97]	1,23	1,25	1,30	1/500—1/750

Таблица 6

**Вероятные значения коэффициентов  $a$  и  $b$**   
**[Table 6. Probable values of coefficients  $a$  and  $b$ ]**

Коэффициент [Factor]	$a$	$b$	$\alpha^*$	$\beta^*$	$\alpha$	$\beta$	$\Delta \alpha^*, \%$	$\Delta \beta^*, \%$
Кривая типа а [Buckling curve a]	40	600	0,030	0,060	0,030	0,060	0	0
Кривая типа b [Buckling curve b]	30	400	0,040	0,090	0,040	0,090	0	0
Кривая типа c [Buckling curve c]	30	250	0,040	0,144	0,040	0,140	0	3

\* Значения коэффициентов  $\alpha$  и  $\beta$  получены по (22) при  $\sqrt{(E/R_y)} = 30$  и  $k = i/\rho = 1,2$ .

[\* The values of the factors  $\alpha$  и  $\beta$  are obtained from the (22) if  $\sqrt{(E/R_y)} = 30$  and  $k = i/\rho = 1,2$ .]

### Сравнение относительного эксцентриситета по EN и СП

Относительный эксцентриситет  $m$  по EN является линейной функцией от условной гибкости и фактора несовершенства  $a$ . Фактор несовершенства зависит от формы (двутавр, швеллер, уголок и т.д.) и типа сечения (горячекатаное, холоднодеформированное, сварное). Таким образом, относительный эксцентриситет связан со случайными искривлениями продольной оси элемента и зависит от формы сечения и технологии изготовления элемента.

Относительный эксцентриситет  $m$  по СП является линейной функцией от условной гибкости и коэффициентов несовершенств  $\alpha$  и  $\beta$ . Коэффициент несовершенства  $\alpha$  зависит от формы сечения, а коэффициент несовершенства  $\beta$  зависит от допусков прямолинейности изготовления.

Наличие единого фактора несовершенства по EN отражает технологические аспекты изготовления стальных конструкций и высокий уровень монтажных работ, не требующий введения коэффициента, учитывающего возможные неточности монтажа.

Наличие двух коэффициентов несовершенства по СП связано с возможной кривизной продольной оси элементов, возникающей при изготовлении, транспортировке и складировании, а также с отклонением от проектного положения при монтаже конструкции.

Следует отметить, что начальное несовершенство по EN больше чем по СП, что косвенно компенсирует возможный эксцентриситет приложения силы и подтверждается совпадающими графиками коэффициента устойчивости.

### Заключение

Приведено приближенное аналитическое решение механической задачи о сжатии шарнирно закрепленного стержня продольной силой, приложенной с эксцентриситетом.

Из аналитического решения выведены зависимости для нормативных методик по EN и СП, имеющие единый физический смысл, но разные подходы к определению относительного эксцентриситета. Их сравнение дает расхождение коэффициента устойчивости в пределах 5% при условной гибкости  $\lambda < 4$ ; при больших значениях в СП для ограничения прогибов сжатых стержней коэффициент устойчивости ограничивается кривой Эйлера с запасом в 30%.

Относительный эксцентриситет по EN связан с одним фактором несовершенства, который зависит от формы поперечного сечения и начальных отклонений от прямолинейности оси элемента, связанных с технологией изготовления, что отражает высокий уровень выполнения монтажных работ не требующий учета возможного эксцентриситета. Аппроксимированный фактор несовершенства  $\alpha$  отличается от табличного до 6%, а коэффициент устойчивости  $\varphi$  по аппроксимированным значениям  $\alpha$  отличается от табличного до 1%.

Относительный эксцентриситет по СП связан с двумя коэффициентами несовершенства, которые зависят от формы сечения и отражают возможную начальную кривизну элемента и возможный эксцентриситет приложения силы. Выяснено, что в основу коэффициентов положено соотношение  $i/\rho = 1,2$  и приведено пошаговое получение коэффициентов с точностью до 3%.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] *Эйлер Л.* Метод нахождения кривых, обладающих свойствами максимума или минимума, или решение изопериметрической задачи, принимаемой в самом широком смысле. М.: ГТТИ, 1934. 600 с.
- [2] *Ясинский Ф.С.* Избранные работы по устойчивости сжатых стержней. М.: ГИТТЛ, 1952. 430 с.
- [3] *Лейтес С.Д.* Устойчивость стальных сжатых стержней. М.: ГИЛСА, 1954. 567 с.
- [4] *Тимошенко С.П.* Устойчивость упругих систем. М.: ГИТТЛ, 1955. 567 с.
- [5] *Стрелецкий Н.С.* Материалы к курсу стальных конструкций. Вып. II. Ч. 1: Работа сжатых стоек. М.: Госстройиздат, 1959. 284 с.
- [6] *Вольмир А.С.* Устойчивость деформируемых систем. М.: Наука, 1967. 984 с.

- [7] СП 16.13330.2017 «СНиП II-23-81\* Стальные конструкции». М.: Росстандарт, 2017. 146 с.
- [8] СП 16.13330.2011 «СНиП II-23-81\* Стальные конструкции». М.: Росстандарт, 2011. 178 с.
- [9] СНиП II-23-81\* Стальные конструкции. М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1990. 96 с.
- [10] Пособие по проектированию стальных конструкций (к СНиП II-23-81\*). М.: ЦИТП Госстроя СССР, 1989. 150 с.
- [11] EN 1993-1-1 Eurocode 3 — Design of steel construction — Part 1-1: General rules and rules for buildings. Brussels: European committee for standardization, 2008. 91 p.
- [12] *Trahair N.S., Bradford M.A., Nethercot D.A., Gardner L.* The Behaviour and Design of Steel Structures to EC3, Fourth edition. Abingdon: Taylor & Francis, 2008. 491 p.
- [13] *Александров А.В., Потанов В.Д., Державин Б.П.* Сопrotивление материалов: учебник для вузов. 3-е изд. испр. М.: Высшая школа, 2003. 560 с.

© Аникеев И.Д., Голиков А.В., 2018

### **История статьи:**

Дата поступления в редакцию: 15 мая 2018

Дата принятия к печати: 17 июля 2018

### **Для цитирования:**

*Аникеев И.Д., Голиков А.В.* Вывод и анализ методик расчета центрально сжатых стальных стержней, заложенных в различные нормативные документы // *Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования.* 2018. Т. 19. № 3. С. 299–316. DOI 10.22363/2312-8143-2018-19-3-299-316

### **Сведения об авторах:**

*Аникеев Илья Дмитриевич* — магистрант кафедры строительных конструкций, оснований и надежности сооружений Института архитектуры и строительства, Волгоградский государственный технический университет. *Область научных интересов:* пространственные стержневые конструкции, перекрестно-стержневые системы. *Контактная информация:* e-mail: anikeevid@yandex.ru

*Голиков Александр Владимирович* — кандидат технических наук, доцент кафедры строительных конструкций, оснований и надежности сооружений Института архитектуры и строительства, Волгоградский государственный технический университет. *Область научных интересов:* расчет и проектирование высотных сооружений, оценка состояния эксплуатируемых конструкций. *Контактная информация:* e-mail: alexandr\_golikov@mail.ru

## **Derivation and analysis of methods for calculation of axially loaded steel compression members based on different building codes**

**I.D. Anikeev, A.V. Golikov**

Volgograd State Technical University  
1, Akademicheskaya str., Volgograd, 400074, Russian Federation

**Abstract.** The article presents the physical significance of the study of axially loaded steel compression members and the origin of accepted analytical models, which are the basis for the methods of their calculation in current building codes of CIS and European countries. An approximate solution of the

problem of eccentrically loaded elastic compression member is given and analytical relationships for determining the buckling coefficient as a result of solving an analytical problem and as a result of applying building codes are obtained. Based on the results from solving the structural analysis problem, a solution for axially loaded compression member buckling coefficient, which is the ratio of such stress value from axial compression to the yield stress of steel at which the outermost fibers of the cross section yield, is given. When obtaining the solution of the buckling coefficient for axial compression, it is justified that the clarity of obtaining a solution is achieved by introducing the number  $\Pi$  in place of the numerical values. It is indicated that the reason for shifting relative eccentricity from the ideal value of 0.2 is the impossibility of buckling at small slenderness ratios. It is justified that the calculation methods described in Eurocode and the building code of Russia (SNiP), despite the difference in the definition of nominal slenderness ratio, have common physical significance and their difference is only in approaches to the definition of random eccentricity. The building code approaches to calculating relative eccentricity included in buckling coefficient are stated and analyzed and their physical significance is described. The significance of relative eccentricity which is included in European and Russian codes is unfolded and the relationship between relative eccentricity and imperfections in the shape and type of cross-section is indicated. The significance of the imperfection factor in accordance with EN 1993-1-1: 2005 which depends on initial imperfections, the shape of the cross-section and the technology of member manufacture is explained and the application of approximating linear function, which reflects the technological factor of precision of manufacturing and inevitably arising imperfections, is justified. The significance of the coefficients of imperfection  $\alpha$  and  $\beta$ , which are included in the Russian building code for steel structures, is unfolded.

**Key words:** buckling, steel member, axial compression, building code methods, relative eccentricity

## REFERENCES

- [1] Euler L. Metod nakhozhdeniya krivyykh, obladayushchikh svoystvami maksimuma ili minimuma, ili reshenie izoperimetricheskoi zadachi, prinimaemoi v samom shirokom smysle [Method for finding curves with maximum or minimum properties or solving an isoparametric problem in its general sense]. Moscow: GTTI Publ., 1934. 600 p. (In Russ.)
- [2] Yasinskij F.S. Izbrannye raboty po ustoichivosti szhatykh sterzhnei [Selected studies on column buckling]. Moscow: GITTL Publ., 1952. 430 p. (In Russ.)
- [3] Lejtes S.D. Ustoichivost' stal'nykh szhatykh sterzhnei [Buckling of steel columns]. Moscow: GILSA Publ., 1954. 567 p. (In Russ.)
- [4] Timoshenko S.P. Ustoichivost' uprugikh sistem [Buckling of elastic systems]. Moscow: GITTL Publ., 1955. 567 p. (In Russ.)
- [5] Streleckij N.S. Materialy k kursu stal'nykh konstruksii. Vyp. II. Ch. 1: Rabota szhatykh stoek [Materials for steel structures course. Issue II. Part 1: Strength of elastic columns]. Moscow: Gosstroizdat Publ., 1959. 284 p. (In Russ.)
- [6] Volmir A.S. Ustoichivost' deformiruemykh sistem [Buckling of deforming systems]. Moscow: Nauka Publ., 1967. 984 p. (In Russ.)
- [7] SP 16.13330.2017 «SNiP II-23-81\* Stalnye konstrukcii» [Steel structures]. Moscow: Rosstandart Publ., 2017. 146 p. (In Russ.)
- [8] SP 16.13330.2011 «SNiP II-23-81\* Stalnye konstrukcii» [Steel structures]. Moscow: Rosstandart Publ., 2011. 178 p. (In Russ.)
- [9] SNiP II-23-81\* Stalnye konstrukcii [Steel structures]. Moscow: CITP Gosstroya USSR, 1990, 96 p. (In Russ.)
- [10] Posobie po proektirovaniyu stalnykh konstrukcij k SNiP II-23-81\* [Steel structures design manual for SNiP II-23-81\*]. Moscow: CITP Gosstroya USSR, 1989. 150 p. (In Russ.)
- [11] EN 1993-1-1 Eurocode 3 — Design of steel construction — Part 1-1: General rules and rules for buildings. Brussels: European committee for standardization, 2008. 91 p.
- [12] Trahair N.S., Bradford M.A., Nethercot D.A., Gardner L. The Behaviour and Design of Steel Structures to EC3, Fourth edition. Abingdon: Taylor & Francis, 2008. 491 p.

- [13] Aleksandrov A.V., Potapov V.D., Derzhavin B.P. Soproivlenie materialov: uchebnik dlya vuzov. 3-e izd. ispr. [Strength of materials: University textbook. 3<sup>rd</sup> edition. Corrected]. Moscow: Vysshaya shkola Publ., 2003. 560 p. (In Russ.)

**Article history:**

Received: May 15, 2018

Accepted: July 17, 2018

**For citation:**

Anikeev I.D., Golikov A.V. (2018). Derivation and analysis of methods for calculation of axially loaded steel compression members based on different building codes. *RUDN Journal of Engineering Researches*, 19(3), 299—316. DOI 10.22363/2312-8143-2018-19-3-299-316

**Bio Note:**

*Ilya D. Anikeev* — Master student at the Department of Structures, Foundations and Safety of Buildings, Institute of Architecture and Construction, Volgograd State Technical University. *Research interests:* spaceframe structures, in particular, grid systems. *Contact information:* e-mail: anikeevd@yandex.ru

*Alexander V. Golikov* — Candidate of Technical Sciences, Associate professor of the Department of Structures, Foundations and Safety of Buildings, Institute of Architecture and Construction, Volgograd State Technical University. *Research interests:* analysis and design of high-rise structures, structural assessment. *Contact information:* e-mail: alexandr\_golikov@mail.ru