

УДК 539.3

DOI 10.22363/2312-8143-2017-18-1-79-90

## КОЛЕБАНИЕ МНОГОСЛОЙНОГО ЕСТЕСТВЕННО-ЗАКРУЧЕННОГО СТЕРЖНЯ ИЗ АНИЗОТРОПНЫХ МАТЕРИАЛОВ В ПОЛЕ ЦЕНТРОБЕЖНЫХ СИЛ

А.У. Нурымбетов, А.А. Дудченко

Московский авиационный институт  
Волоколамское шоссе, 4, Москва, Россия, 125993

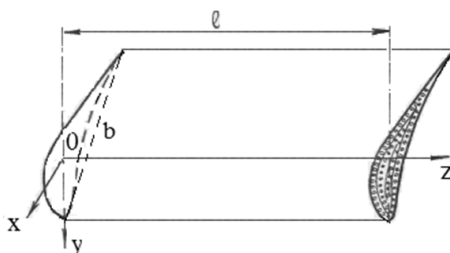
Исследуются колебания многослойного композиционного стержня. В целях определения влияния особенностей многослойных стержней, выяснения роли и форм ортотропных слоев на колебания рассматривались стержень произвольного сечения и компрессорная лопатка. Результаты численных расчетов по полученным соотношениям сравниваются с результатами, вычисленными по программе ANSYS.

**Ключевые слова:** многослойный, композит, стержень, компрессорная лопатка, колебания

Задача расчета собственных частот и форм колебаний стержней, балок, закрученных рабочих лопаток с точки зрения однородной теории рассматривалась в литературе неоднократно. Основы расчета и методы достаточно подробно описаны в работах [1–4] и др.

Колебания и волны в слоистых и композитных телах рассмотрены в [5–7] и др., причем здесь использовались соотношения изотропной или анизотропной однородной теорий упругости.

Ниже исследуются колебания армированных закрученных слоистых стержней (рис. 1). В целях определения особенностей слоистых стержней, выяснения роли некоторых ее параметров рассматривались наиболее простые формы колебания. Рассматриваются поперечные колебания компрессорной лопатки из композиционного материала, находящейся в поле центробежных сил.



**Рис. 1.** Армированный слоистый стержень с профилем произвольной формы  
[The reinforced laminate rod with a profile of arbitrary shape]

### Колебания невращающегося закрученного анизотропного стержня

При колебаниях закрученного стержня каждая точка совершает перемещения  $w(z) = w$ , компоненты угловых перемещений сечения —  $\gamma_x(z) = \gamma_y(z) = 0$ . Тогда кинетическая энергия стержня при колебаниях имеет вид [3]

$$T = \frac{1}{2} \int_0^\ell \rho \left\{ \dot{w}^2 + \dot{u}^2 + \dot{v}^2 + 2\dot{\theta}(\dot{v}x_s - \dot{u}y_s) \right\} F + I_p \theta^2 dz, \quad (1)$$

где  $x_s, y_s$  — координаты центра масс в системе  $xu$ ;  $I_p$  — полярный момент инерции;  $F$  — площадь сечения.

Компоненты нагрузки в уравнениях равновесия [8]

$$\begin{pmatrix} N \\ M_\xi \\ M_\eta \\ M_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k_{11}k_{12}k_{13}k_{14} \\ k_{12}k_{22}k_{23}k_{24} \\ k_{13}k_{23}k_{33}k_{34} \\ k_{14}k_{24}k_{34}k_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w' \\ u'' \\ v'' \\ \theta' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -q_z \\ L_y = q_x + m_y \\ L_x = q_y - m_x \\ L_\theta = -m_z = 0 \end{pmatrix}$$

при колебаниях будут [3]:

$$\begin{aligned} q_z &= -\rho F \ddot{w}; & q_y &= -\rho F (\ddot{v} + \ddot{\theta} x_s); & q_x &= -\rho F (\ddot{u} - \ddot{\theta} y_s); \\ m_z &= -\rho \ddot{\theta} I_p - \rho F (\ddot{v} x_s - \ddot{u} x_s) = 0; & m_x &= m_y = m_\eta = m_\xi = 0. \end{aligned} \quad (2)$$

Откуда уравнение равновесия имеет вид [3]

$$P'_z + q_z = 0, \quad M''_y + m'_y + q_x = 0, \quad M''_x + m'_x - q_y = 0, \quad M'_z + m_z = 0, \quad (3)$$

После интегрирования уравнения (3) с учетом граничных условий и после подстановки в нее инерционных нагрузок из выражений (2) уравнение колебаний (3) имеет вид [8]

$$\begin{pmatrix} k_{11}k_{12}k_{13}k_{14} \\ k_{12}k_{22}k_{23}k_{24} \\ k_{13}k_{23}k_{33}k_{34} \\ k_{14}k_{24}k_{34}k_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w'_z \\ -u''_z \\ v''_z \\ \theta'_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\rho F \ddot{w} \\ -\rho F (\ddot{u} - \ddot{\theta} y_s) \\ -\rho F (\ddot{v} + \ddot{\theta} x_s) \\ -\rho \ddot{\theta} I_p - \rho F (\ddot{v} x_s - \ddot{u} x_s)_z \end{pmatrix}, \quad (4)$$

где  $F$  — площадь;  $x_s, y_s$  — координаты центра масс сечения закрученного слоистого анизотропного стержня в системе  $xu$ ;  $\rho$  — плотность материала слоя.

Пусть дана система (например стержень), совершающая малые колебания около положения равновесия. В предположении гармонического характера колебаний получаем, что все отклонения от положения равновесия (т.е. функции  $u, w, v, \theta$ , входящие в (4)), имеют вид, например,

$$w(z, t) = w_0(z)e^{i\omega t}, \quad u(z, t) = u_0(z)e^{i\omega t}, \quad v(z, t) = v_0(z)e^{i\omega t}, \quad \theta(z, t) = \theta_0(z)e^{i\omega t}, \quad (5)$$

тогда

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial t} &= iu_0\omega e^{i\omega t}; \quad \frac{\partial v}{\partial t} = iv_0\omega e^{i\omega t}; \quad \frac{\partial w}{\partial t} = iw_0\omega e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial t} = i\theta_0\omega e^{i\omega t}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= -u_0\omega^2 e^{i\omega t}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} = -v_0\omega^2 e^{i\omega t}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} = -w_0\omega^2 e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2} = -\theta_0\omega^2 e^{i\omega t}, \\ \frac{\partial u}{\partial z} &= \frac{\partial u_0}{\partial z} e^{i\omega t}; \quad \frac{\partial v}{\partial z} = \frac{\partial v_0}{\partial z} e^{i\omega t}; \quad \frac{\partial w}{\partial z} = \frac{\partial w_0}{\partial z} e^{i\omega t}, \quad \frac{\partial \theta}{\partial z} = \frac{\partial \theta_0}{\partial z} e^{i\omega t}, \\ \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} &= \frac{\partial^2 u_0}{\partial z^2} e^{i\omega t}; \quad \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 v_0}{\partial z^2} e^{i\omega t}; \quad \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 w_0}{\partial z^2} e^{i\omega t}; \quad \frac{\partial^2 \theta}{\partial z^2} = \frac{\partial^2 \theta_0}{\partial z^2} e^{i\omega t}, \dots, \end{aligned} \quad (6)$$

т.е. все элементы системы колеблются с одинаковой круговой частотой  $\omega$  и одинаковой фазой, все они одновременно проходят положение равновесия и одновременно достигают своего наибольшего отклонения.

Следовательно, подставляя (6) в (4), получаем систему линейных дифференциальных уравнений [3]

$$\begin{pmatrix} k_{11}k_{12}k_{13}k_{14} \\ k_{12}k_{22}k_{23}k_{24} \\ k_{13}k_{23}k_{33}k_{34} \\ k_{14}k_{24}k_{34}k_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} w'_0 \\ -u''_0 \\ v''_0 \\ \theta'_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} q_z \\ q_x \\ q_y \\ m_z \end{pmatrix}, \quad (7)$$

где  $q_z = \lambda w_0 = \rho\omega^2 Fw_0$ ;  $q_y = \lambda(v_0 + \theta_0 x_s) = \rho\omega^2 Fv_0$ ;  $q_x = \lambda(u_0 - \theta_0 y_s) = \rho\omega^2 Fu_0$ ;  $m_z = \rho\omega^2 \theta_0 I_p + \rho\omega^2 F(v_0 x_s + u_0 y_s)$ ;  $\lambda = \rho\omega^2 F$ .

Система линейных дифференциальных уравнений (7) для консольного стержня длиной  $l$ , заземленного при  $z = \zeta = 0$ , удовлетворяет следующим граничным условиям:

$$\begin{aligned} \text{при } \zeta = 0, \quad w &= 0, \quad v = 0, \quad u = 0, \quad \theta = 0, \\ \text{при } \zeta = l, \quad w' &= 0, \quad \theta' = 0, \quad v'' = 0, \quad u'' = 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Под действием центробежных сил растяжения точки сечений испытывают поступательные смещения, которым соответствуют удлинения центральных элементов стержня  $\varepsilon_z^i$  в слое  $i$  [8].

Для общности также предположим, что сечения испытывают повороты вокруг главных его осей  $x$  и  $y$ , т.е. стержень изгибается. В этом случае продольные деформации в армированном многослойном стержне определяются выражением

$$\varepsilon_z^i = \varepsilon - \xi\chi_2 + \eta\chi_1 + \tau_0\tau r^2.$$

Здесь  $\chi_y, \chi_x$  — составляющие кривизны,  $r = \sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$ .

В связи с этим кинематические соотношения (1) учитывают различия осевых удлинений и изменений кривизн слоя, в то время как для угла раскручивания  $\tau$  такое разделение не производилось.

Если исключить поперечные силы, то нормальные и касательные напряжения слоя  $i$  через перемещения выражаются следующим образом [8]:

$$\begin{aligned} \sigma_{33}^i &= c_1 \dot{\epsilon}_z, \quad \sigma_{23} \stackrel{i}{=} \tau_0 c'_{44} \epsilon_z \sin^i \alpha, \quad \sigma_{13} \stackrel{i}{=} \tau_0 c_1 \epsilon_z, \quad \epsilon_z = w' - \xi u'' + \eta v'' + \tau_0 \theta' r^2, \\ c_1^i &= c'_{33} + c'_{35} \cos \alpha, \quad \alpha = \tau_0 \zeta. \end{aligned} \quad (9)$$

Из соотношений (9) видно, что нормальные напряжения изменяются в сечении по параболическому закону. Для решения задачи используется принцип минимума потенциальной энергии в виде  $\delta\Pi = 0$ , где  $\Pi = W_\ell - L$ . В этой формуле  $W_\ell$  — энергия упругого деформирования,  $L$  — работа внешних сил.

Для определенности рассматриваются сечения лопатки на расстоянии  $r(R_0 \leq r \leq R)$  от оси вращения. По методу сечения действие на тело отсеченной части заменяется поверхностными силами, приложенными к плоскости этого сечения. Поэтому слагаемые в выражении потенциальной энергии вычисляются по следующей формуле:

$$W_{\ell i} = \int_V \sigma_{kj}^i \epsilon_{kj}^i dV.$$

Полагая

$$w_0 = \tilde{w} X_n(z); \quad \tilde{u}_0 = -\tilde{u} X_n(z); \quad \tilde{v}_0 = \tilde{v} X_n(z); \quad \theta_0 = \tilde{\theta} X_n(z), \quad (10)$$

где  $X_n(z)$  — допустимые функции;  $\tilde{w}$ ,  $\tilde{\theta}$ ,  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$  — неопределенные параметры,

в качестве допустимых функций можно выбрать функции стержня в виде [9]

$$X_n(\bar{\zeta}) = \frac{1}{\sqrt{\ell}} (A \sin k_n \bar{\zeta} + B \cos k_n \bar{\zeta} + C \operatorname{sh} k_n \bar{\zeta} + D \operatorname{ch} k_n \bar{\zeta}), \quad (11)$$

где  $\bar{\zeta} = \zeta/\ell$ , а постоянные  $A$ ,  $B$ ,  $C$ ,  $D$  определяются из граничных условий;  $\ell$  — длина стержня.

Граничные условия в этом случае имеют вид [9]

$$\bar{\zeta} = 0, \quad X_n(\bar{\zeta}) = 0, \quad X_n'(\bar{\zeta}) = 0,$$

$$\bar{\zeta} = 1, \quad X_n'(\bar{\zeta}) = 0, \quad X_n''(\bar{\zeta}) = 0, \quad X_n'''(\bar{\zeta}) = 0, \quad (12)$$

т.е. на жестко закрепленном конце перемещения и угол поворота сечения равны нулю, на свободном конце равны нулю изгибающий момент, поперечные силы.

Подставляя в выражение (2) значения собственных функций (11), получаем систему алгебраических уравнения относительно постоянных интегрирования

A, B, C, D. Решение этой системы уравнения позволяет определить собственную функцию (12) в виде [9]

$$X_n(\bar{\zeta}) = \frac{1}{\sqrt{\ell}} [shk_n \bar{\zeta} + \sin k_n \bar{\zeta} + \frac{\sin k_n - shk_n}{\cos k_n + chk_n} (chk_n \bar{\zeta} - \cos k_n \bar{\zeta})]. \quad (13)$$

В (13) волновое число  $k_n$  удовлетворяет характеристическому уравнению  $1 + chk_n \cos k_n = 0$  и принимает значения, данные в табл. 1,  $\ell$  — длина стержня. Балочные функции являясь ортонормированными, удовлетворяют равенствам

$$\int_0^{\ell} X_n X_p dz = \begin{cases} 1, & n = p; \\ 0, & n \neq p. \end{cases} \quad \int_0^{\ell} X'_n X'_p dz = \begin{cases} \frac{k_n^2}{\ell^2}, & n = p; \\ 0, & n \neq p. \end{cases} \quad \int_0^{\ell} X''_n X''_p dz = \begin{cases} \frac{k_n^4}{\ell^4}, & n = p; \\ 0, & n \neq p, \end{cases}$$

что удовлетворяет условиям (12). Из (7) получим

$$\begin{pmatrix} k_{11} k_{12} k_{13} k_{14} \\ k_{12} k_{22} k_{23} k_{24} \\ k_{13} k_{23} k_{33} k_{34} \\ k_{14} k_{24} k_{34} k_{44} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \rho \tilde{w} \omega^2 F \\ \rho F \omega^2 (\tilde{u} + \tilde{\theta} x_s) \\ \rho F \omega^2 (\tilde{v} - \tilde{\theta} y_s) \\ \rho \omega^2 \tilde{\theta} I_p + \rho \omega^2 F (\tilde{u} x_s + \tilde{v} x_s) \end{pmatrix}. \quad (14)$$

Если сократить правую часть первых трех уравнений (16) на  $\rho F$  и последнее уравнение на  $\rho I_p$ , то получим

$$\begin{pmatrix} (k'_{11} - \omega^2) & k'_{12} & k'_{13} & k'_{14} \\ k'_{12} & (k'_{22} - \omega^2) & k'_{23} & (k'_{24} - x_s) \\ k'_{31} & k'_{32} & (k'_{33} - \omega^2) & (k'_{34} + y_s) \\ k'_{41} & k'_{42} & k'_{43} & (k'_{44} - \omega^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Если центр локальной системы координат расположен в центре тяжести  $(x_s, y_s)$  ( $x_s = 0, y_s = 0$ ) сечения, то

$$\begin{pmatrix} (k'_{11} - \omega^2) & k'_{12} & k'_{13} & k'_{14} \\ k'_{12} & (k'_{22} - \omega^2) & k'_{23} & k'_{24} \\ k'_{31} & k'_{32} & (k'_{33} - \omega^2) & k'_{34} \\ k'_{41} & k'_{42} & k'_{43} & (k'_{44} - \omega^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (15)$$

$$k'_{11} = \frac{k_n^2}{F \ell^2} \frac{k_{11}}{\rho}, \quad k'_{12} = \frac{k_n^4}{F \ell^4} \frac{k_{12}}{\rho}, \quad k'_{13} = \frac{k_n^4}{F \ell^4} \frac{k_{13}}{\rho}, \quad k'_{14} = \frac{k_n^2}{F \ell^2} \frac{k_{14}}{\rho},$$

$$\begin{aligned}
 k'_{21} &= \frac{k_n^2}{F\ell^2} \frac{k_{12}}{\rho}, & k'_{22} &= \frac{k_n^4}{F\ell^4} \frac{k_{22}}{\rho}, & k'_{23} &= \frac{k_n^4}{F\ell^4} \frac{k_{23}}{F}, & k'_{24} &= \frac{k_n^2}{F\ell^2} \frac{k_{24}}{\rho}, \\
 k'_{31} &= \frac{k_n^2}{F\ell^2} \frac{k_{13}}{\rho}, & k'_{32} &= \frac{k_n^4}{F\ell^4} \frac{k_{23}}{\rho}, & k'_{33} &= \frac{k_n^4}{F\ell^4} \frac{k_{33}}{\rho}, & k'_{34} &= \frac{k_n^2}{F\ell^2} \frac{k_{34}}{\rho}, \\
 k'_{41} &= \frac{k_n^2}{I_p\ell^2} \frac{k_{14}}{\rho}, & k'_{42} &= \frac{k_n^4}{I_p\ell^4} \frac{k_{24}}{\rho}, & k'_{43} &= \frac{k_n^4}{I_p\ell^4} \frac{k_{34}}{\rho}, & k'_{44} &= \frac{k_n^2}{I_p\ell^2} \frac{k_{44}}{\rho}.
 \end{aligned} \tag{16}$$

где  $k_n$  принимает значения, данные в табл. 1.

Таблица 1

**Значение волновых чисел [The value of the wave numbers]**

№	1	2	3	4	5	6	7	$n \rightarrow \infty$
$k_n$	1,875	4,694	7,854	10,996	14,137	17,279	20,42	$\frac{2n-1}{2}\pi$

Система уравнений (7) позволяет определить свободное колебание многослойных закрученных стержней и лопаток.

**Влияние вращения на колебания закрученного анизотропного стержня**

Уравнения равновесия (3) после подстановки в нее нагрузки от центробежных сил [3]

$$\begin{aligned}
 q_x^\Omega &= 0, & q_y^\Omega &= -\rho\Omega^2 vF, & q_z^\Omega &= \rho\Omega^2 wF, & m_x^\Omega &= -v'\Omega^2 \int_z^\ell \rho(R+z)Fdz, \\
 m_y^\Omega &= -\rho\Omega^2 u' \int_z^\ell (R+z)Fdz, & m_z^\Omega &= \rho\Omega^2 \theta(I_y - I_x) + \theta''P_0, & P_0 &= \Omega^2 \int_z^\ell \rho(R+z)I_p dz
 \end{aligned} \tag{17}$$

имеет вид

$$\begin{aligned}
 \left\| \begin{matrix} k_{11}k_{12}k_{13}k_{14} \\ k_{12}k_{22}k_{23}k_{24} \\ k_{13}k_{23}k_{33}k_{34} \\ k_{14}k_{24}k_{34}k_{44} \end{matrix} \right\| \cdot \left\| \begin{matrix} w' \\ -u'' \\ v'' \\ \theta' \end{matrix} \right\| &= \left\| \begin{matrix} -\rho F\ddot{w} - \rho\Omega^2 wF \\ -\rho F(\ddot{u} - \ddot{\theta}y_s) \\ -\rho F(\ddot{v} + \ddot{\theta}x_s) + \rho\Omega^2 Fv - P_z v' \\ -\rho\ddot{\theta}I_p - \rho F(\ddot{v}x_s - \ddot{u}x_s) - \rho\Omega^2 \theta(I_y - I_x) - \theta' P_0 \end{matrix} \right\|,
 \end{aligned} \tag{18}$$

где  $P_z = \Omega^2 \int_z^\ell \rho(R+z)Fdz$  — центробежная растягивающая сила в сечении  $z$ ;  $\Omega$  — угловая

скорость вращения,  $P_0 = \Omega^2 \int_z^\ell \rho(R+z)(I_y + I_x)dz$ .

Из (18) с учетом (5)—(8) получим систему уравнений

$$\begin{pmatrix} (k'_{11} - \omega^2) & k'_{12} & k'_{13} & k'_{14} \\ k'_{21} & (k'_{22} - \omega^2) & k'_{23} & k'_{24} \\ k'_{31} & k'_{32} & (k'_{33} - \omega^2) & k'_{34} \\ k'_{41} & k'_{42} & k'_{43} & (k'_{44} - \omega^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}. \quad (19)$$

Выбором начала координат в центре тяжести сечения и главных направлений осей координат  $\xi\eta$  система уравнений (19) приводится к виду

$$\begin{pmatrix} (k'_{11} - \omega^2) & 0 & 0 & k'_{14} \\ 0 & (k'_{22} - \omega^2) & 0 & k'_{24} \\ 0 & 0 & (k'_{33} - \omega^2) & k'_{34} \\ k'_{41} & k'_{42} & k'_{43} & (k'_{44} - \omega^2) \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \tilde{w} \\ \tilde{u} \\ \tilde{v} \\ \tilde{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (20)$$

$$k'_{11} = \frac{m^2 k_{11} + \mu F}{\rho F}, \quad k'_{12} = \frac{m^4 k_{12}}{\rho F}, \quad k'_{13} = \frac{m^4 k_{13}}{\rho F}, \quad k'_{14} = \frac{m^2 k_{14}}{\rho F},$$

$$k'_{21} = \frac{m^2 k_{12}}{\rho F}, \quad k'_{22} = \frac{m^4 k_{22} - m^2 P_z}{\rho F}, \quad k'_{23} = \frac{m^4 k_{23}}{\rho F}, \quad k'_{24} = \frac{m^2 k_{24}}{\rho F},$$

$$k'_{31} = \frac{m^2 k_{13}}{\rho F}, \quad k'_{32} = \frac{m^4 k_{23}}{\rho F}, \quad k'_{33} = \frac{m^4 k_{33} - \mu F + m^2 P_z}{\rho F}, \quad k'_{34} = \frac{m^2 k_{34}}{\rho F},$$

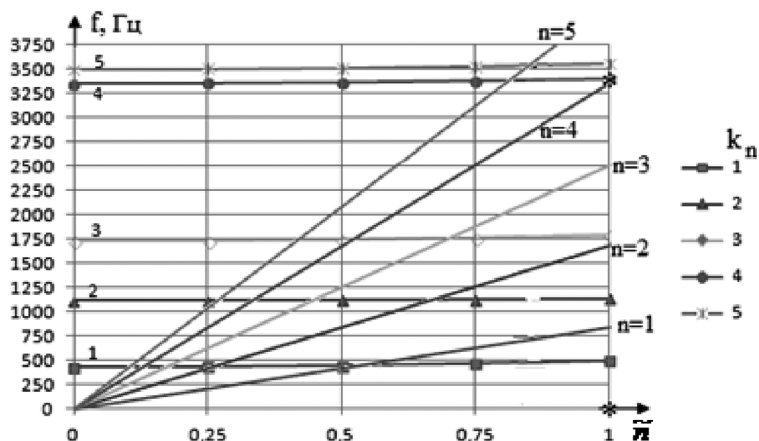
$$k'_{41} = \frac{m^2 k_{14}}{\rho I_p}, \quad k'_{42} = \frac{m^4 k_{24}}{\rho I_p}, \quad k'_{43} = \frac{m^4 k_{34}}{\rho I_p}, \quad k'_{44} = \frac{m^2 k_{44} + \mu(I_y - I_x) + m^2 P_0}{\rho I_p},$$

где  $\mu = \rho\Omega^2$ ;  $m = k_n/l$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ,  $\omega$  — собственные круговые частоты колебаний.

После определения из системы (20) собственных чисел несимметричной вещественной матрицы находят продольные, крутильные и изгибные собственные частоты слоистого стержня. После вычисления собственных векторов, соответствующих отдельному собственному числу матрицы (20), определяют формы колебания слоистого стержня по формуле (10).

Расчетные соотношения (21) устанавливают непосредственную зависимость собственных частот от упругих и динамических параметров отдельных компонентов композиции и позволяют путем их выбора управлять вибрационными характеристиками тела.

В качестве примера приводятся резонансные диаграммы для компрессорной лопатки из боралюминия. На рисунке 2 изображена резонансная диаграмма для первых пяти гармоник возбуждения на рабочем режиме  $\tilde{n} = 1$ .



**Рис. 2.** Резонансная диаграмма компрессорной лопатки из боралюминия для отстройки от первых пяти гармоник (1—5) возбуждения на рабочем режиме  $\tilde{n} = 1$   
 \* возможный режим возникновения автоколебания  
 [Resonance diagram of the compressor blades of boraluminum for the detuning of the first five harmonics (1—5) excitation operating mode  $\tilde{n} = 1$   
 \* the possible occurrence of self-oscillation mode]

Для данной компрессорной лопатки из боралюминия, как видно из рис. 2, отстройки потребуется от четвертой гармоники возбуждения на рабочем режиме  $\tilde{n} = 1$ .

В таблице 2 приведены первые пять гармоник неподвижной и вращающийся компрессорной лопатки равномерно по длине закрученные на угол  $\tau_0 = 0,006$  рад/мм из боралюминия длины 140 мм и получены пять собственных частот колебания (изгибные в плоскости меньшей жесткости  $f_v^{(i)}$  ( $i = 1, 2, 3$ ), крутильная  $f_\theta$ , изгибная в плоскости большой жесткости  $f_u$ ).

Таблица 2

**Собственные частоты [The natural frequencies]**

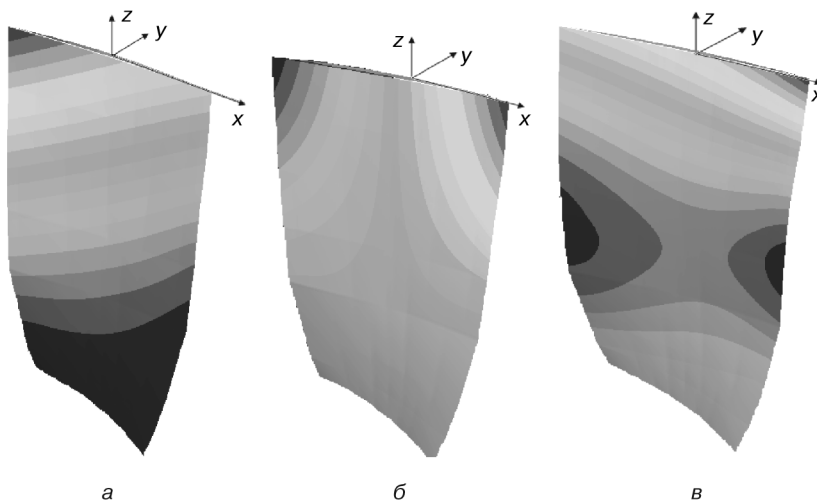
	$\tilde{n}$	0	0,25	0,5	0,75	1
$k_n$						
1	$f_v^{(1)}$	426,07	430,38	443,03	463,42	490,33
2	$f_\theta$	1119,6	1120,9	1124,7	1131	1139,7
3	$f_v^{(2)}$	1733,2	1736,9	1748,1	1766,6	1791,9
4	$f_v^{(3)}$	3356,7	3359,8	3368,9	3384	3404,9
5	$f_v^{(4)}$	3504,2	3507,4	3517,2	3533,5	3556,1

На рисунке 3 представлены узловые линии первой изгибной (а), второй (б — первой крутильной) и третьей (в — второй изгибной) формы собственных частот колебаний при  $\tilde{n} = 1$  на поверхности компрессорной лопатки со стороны корытца. На рисунке 4 представлены узловые линии четвертой (а) и пятой (б) формы собственных частот колебаний при  $\tilde{n} = 1$  на поверхности компрессорной лопатки со стороны корытца.

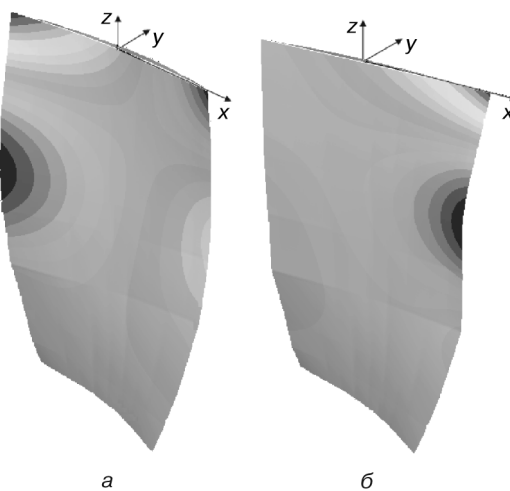
Применение стержневой теории к сложной модели, каковой является компрессорная лопатка, показывает, что формы колебаний будут смешанными и



имеют изгибные, крутильные, продольные перемещения одновременно. Поэтому особый интерес представляет поведение второй изгибной и первой крутильной форм из-за возможности возникновения на определенных рабочих режимах изгибно-крутильного флаттера. Отметим, что вопросы прогнозирования возможности возникновения флаттера выходят за рамки данной работы. Однако имеется определенный эффект, возникновения которого необходимо избегать на этапе эскизного проектирования лопатки из композиционных материалов.



**Рис. 3.** Узловые линии на поверхности корытца:  
*a* — первая изгибная; *б* — первая крутильная; *в* — вторая изгибная  
 [The nodal lines on the surface of the trough:  
*a* — bending first; *б* — the first torsional; *в* — the second bending]



**Рис. 4.** Узловые линии на поверхности корытца:  
*a* — изгибная в плоскости большой жесткости; *б* — изгибно-крутильная  
 [The nodal lines on the surface of the trough:  
*a* — bending stiffness in the plane of the big; *б* — flexural-torsional]

## Выводы

Показано, что путем выбора материала с учетом армирования отдельных слоев можно в широких пределах управлять уровнями напряжений и деформаций и собственными частотами колебаний при одних и тех же физических оборотах ротора. Сравнение значений частот первых трех форм колебаний, полученных в [9], показало удовлетворительное совпадение с экспериментальными данными. Разработан алгоритм и пакет программ для определения НДС в композиционных анизотропных стержнях и лопатках с учетом слоистости материала. Расчет лопаток и стержней по этой методике позволяет учесть влияние на НДС каждого ортотропного слоя со своими свойствами формы и его геометрического расположения в теле лопатки. Составленная программа расчета на ЭВМ осуществляет выбор оптимальной структуры армирования конкретного многослойного стержня из ранее выбранного класса КМ [8]. Эффективность и достоверность разработанной программы подтверждена сравнением расчетных величин с результатами расчета по программе ANSYS.

© Нуриббетов А.У., Дудченко А.А., 2017

## БИБЛИОГРАФИЧЕСКИЙ СПИСОК

- [1] *Биценко К.Б., Граммель Р.* Техническая динамика. ГТТЛ. 1952. Т. 2. 220 с.
- [2] *Хронин Д.В.* Теория и расчет колебаний в двигателях летательных аппаратов. М.: Машиностроение, 1970.
- [3] *Воробьев Ю.С., Шорр Б.Ф.* Теория закрученных стержней. Киев: Наукова Думка, 1983. 188 с.
- [4] *Биргер И.А.* и др. Расчет на прочность деталей машин: справочник. М.: Машиностроение, 1993. 640 с.
- [5] *Sun S.T., Achenbach J.D.* Tim-harmonic trasverse and longitudinal motions of a laminated plate. Northwestern Univ.Struct. Mech Lab. T.R. № 63-1. Evenston. Illinois. 1969.
- [6] *Бреховских Л.М.* Волны в слоистых средах. М.: Изд. АН СССР, 1957. 520 с.
- [7] *Ахенбах Дж.Д.* Колебания и волны направленно-армированных композитах // Композиционные материалы. Т. 2. Механика композиционных материалов. М.: Мир, 1978.
- [8] *Дудченко А.А., Нуриббетов А.У.* Деформация естественно-закрученных многослойных анизотропных лопаток авиационных двигателей // Оборонный комплекс научно-техническому прогрессу России. 2015. № 2. С. 46—54.
- [9] *Каримбаев Т.Д., Нуриббетов А.У.* Собственные частоты колебаний слоистого композиционного стержня // Строительная механика инженерных конструкций и сооружений. 2016. № 5. С. 57—64.
- [10] *Меерович И.И.* Колебания прямоугольной плоской пластины. Динамика авиационных двигателей. М.: Оборонгиз, 1952. Вып. 8. С. 149—208.

### История статьи:

Дата поступления в редакцию: 11 декабря 2016

Дата принятия к печати: 22 января 2017

### Для цитирования:

**Нуриббетов А.У., Дудченко А.А.** Колебание многослойного естественно-закрученного стержня из анизотропных материалов в поле центробежных сил // *Вестник Российского университета дружбы народов. Серия: Инженерные исследования.* 2017. Т. 18. № 1. С. 79—90.

**Сведения об авторах:**

*Нуримбетов Алибек Усипбаевич*, кандидат физ.-мат. наук, докторант кафедры прочности авиационных и ракетно-космических конструкций, Московский авиационный институт (МАИ). *Сфера научных интересов*: конструкции из композиционных материалов, многослойная композиционная лопатка, прочность и проектирование, статика, колебания. *Контактная информация*: e-mail: alibek\_55@mail.ru.

*Дудченко Александр Александрович*, доктор технических наук, профессор кафедры прочности авиационных и ракетно-космических конструкций, Московский авиационный институт (МАИ). *Сфера научных интересов*: авиационные конструкции, конструкции из композиционных материалов, механика разрушения, прочность и проектирование, статика, колебания. *Контактная информация*: e-mail: a\_dudchenko@mail.ru.

## **OSCILLATIONS MULTILAYERED COMPOSITE RODS FROM MATERIALS IN THE FIELD OF CENTRIFUGAL FORCES**

**A.U. Nurimbetov, A.A. Dudchenko**

Moscow Aviation Institute (National Research University)  
*Volokolamskoe shosse, 4, Moscow, Russia, 125993*

We study the vibrations of multilayer composite rod. In order to influence the definition-tion features multilayered rods, clarify the roles and forms orthotropy-layers fluctuations regarded rod of arbitrary cross section and a compressor blade Nye. The numerical results obtained for ratios compared with the results calculated by ANSYS program.

**Key words:** multi-layer, composite core, compressor blades, vibrations

### **REFERENCES**

- [1] Bisenko K.B., Grammel R. *Tehcnisheskay dinamika [Technical dynamics]*. GTTL, 1952. Vol. 2. 220 p.
- [2] Hronin D.V. *Teoriya i raschet kolebanij v dvigatel'nyh letatel'nyh apparatov*. M.: Mashinostroenie, 1970.
- [3] Vorobyov Yu.S., Shorr B.F. *Teoriya zakruchennykh sterzhnej [The theory of twisted bars]*. Kiev: Nauk; Dumka [Kiev sciences Dumka], 1983. 188 p.
- [4] Birger I.A. i dr. *Raschet na prochnost' detalej mashin: spravochnik [The calculation of the strength of machine parts. Directory]*. M.: Mashinostroenie [Engineering], 1993. 640 p.
- [5] Sun S.T., Achenbach J.D. *Tim-harmonic trasverse and longitudinal motions of a laminated plate*. Northwestern Univ. Struct. Mech. Lab. T.R. № 63-1. Evenston. Illinois. 1969. P. 546—559.
- [6] Brehovskik L.M. *Volny v sloistyy sredah [Waves in layered media]*. M.: Izd. AN SSSR [Publishing USSR academy of sciences], 1957. 520 p.
- [7] Achenbach J.D. *Kolebaniy i volny napravlenno-armirovannuh kompozitah. Kompozisinnue materialu [Oscillations and waves directionally reinforced composites. The book composites]*. M.: Mir, 1978. Pp. 354—400. (Mehanika kompozisinnuyh materialov: vol. 2) [Mechanics of Composite Materials: Volume 2].
- [8] Dudshenko A.A., Nurimbetov A.U. *Defomasiy estestvenno-zakrushennykh mnogoslownykh anizotropnykh lopatok aviasnykh dvigatelei [Deformation natural twisted anisotropic laminated blades of aircraft engines]*. Oboronnu kompleks — naushno-tehnisheskomu progressu Rossii.

М.: VIMI [Defensetion complex scientific and technical progress of russia. Federal state unitary enterprise VIMI], 2015. № 2. P. 46–54.

- [9] *Karimbayev T.D., Nurimbetov A.U.* The natural frequency of the composite laminated rod. *Structural Mechanics of Engineering Constructions and Buildings*. 2015. № 5. P. 57–64.
- [10] *Meerovich I.I.* Kolebaniya pryamougol'noj ploskoj plastiny. *Dinamika aviacionnyx dvigatelej*. М.: Oborongiz, 1952. Вып.8. С. 149–208.

**Article history:**

Received: 11 December 2016

Accepted: 22 January 2017

**For citation:**

**Nurimbetov A.U., Dudchenko A.A. (2017) Oscillations multilayered composite rods from materials in the field of centrifugal forces. *RUDN Journal of Engineering Researches*, 18(1), 79–90.**

**Bio Note:**

*Alibek U. Nurimbetov*, Candidate of Phys-math. Sciences, doctoral candidate of the chair “Strength of aviation and rocket-and-space structures”, Moscow Aviation Institute (National Research University), “MAI”. *Research Interests*: structures of composite materials, laminated composite blade, durability and design, statics, vibrations. *Contact information*: e-mail: alibek\_55@mail.ru.

*Alexander A. Dudchenko*, Doctor of technical Sciences, Professor of “Strength of aviation and rocket-and-space structures”, Moscow Aviation Institute (National Research University), “MAI”. *Research Interests*: Aircraft structures, composite materials, fracture mechanics, strength and design, statics, vibrations. *Contact information*: e-mail: a\_dudchenko@mail.ru.