ДИНАМИЧЕСКОЕ СТРАХОВАНИЕ ИНВЕСТИЦИОННОГО ПОРТФЕЛЯ СРОЧНЫМИ КОНТРАКТАМИ

А.К. Керимов, О.И. Павлов

Российский университет дружбы народов
ул. Миклухо-Маклая, 6, Москва, Россия, 117198

Приводятся простые в реализации методы прогноза волатильности и корреляции относительных изменений ценовых данных на основе экспоненциального сглаживания. Рассмотрена задача динамического страхования позиции с учетом ограничений на ожидаемый доход и число фьючерсных контрактов на базовые активы. Определены эффективные стратегии адаптивного управления риском заданной позиции и проведен их сравнительный анализ на конкретных примерах. Показывается, что такого рода схемы управления обобщаются на случай динамического страхования инвестиционного портфеля.

Ключевые слова: экспоненциальное сглаживание, управление риском, фьючерсные контракты.

Страхование на основе фьючерсных контрактов основано на сильной положительной корреляции между изменениями цены спот и фьючерсной цены на заданный актив. Основным вопросом страхования актива является оценка необходимого числа фьючерсных контрактов для страхования позиции. Традиционный способ оценки оптимального числа фьючерсных контрактов для страхования основан на учете только дисперсии смешанного портфеля [1; 3]. При этом такие важнейшие параметры портфеля, как ожидаемый доход или возможные ограничения на число фьючерсных контрактов не принимаются во внимание. Тем самым не учитывается возможность получения дополнительных прибылей за счет использования производных финансовых инструментов. Далее, для финансовых временных рядов характерна кластеризация волатильности, т.е. доходности (относительные изменения цен), тенденция сохранять высокую или низкую амплитуду колебаний в течение некоторых промежутков времени, в результате чего образуются кластеры — периоды высокой или низкой волатильности. При рассмотрении динамики котировок можно выделить периоды, когда колебания курса незначительны, и периоды, когда, среагировав на определенные события котировки в течение определенного времени, он совершал значительные колебания. При этом выбросы, как правило, представляют собой затухающую серию колебаний, спровоцированную одним или несколькими значительными движениями рынка [4; 5]. Кроме того, существенным является оценка корреляционных связей между относительными изменениями цен активов с учетом временного фактора. Дело в том, что степень корреляционной связи между активами меняется во времени. При этом ввиду нестационарности финансовых временных рядов традиционная оценка корреляции, основанная на простом усреднении, часто оказывается некорректной. Последние два фактора усложняют корректную оценку необходимого числа контрактов, страхующих позицию по заданному активу.

В работе приводится упрощенная версия хорошо известной ARCH-модели [4; 5], основанная на использовании экспоненциального сглаживания [6; 7]. В качестве приложения рассматривается задача динамического страхования позиций фьючерсными контрактами на основе эффективных неоднородных портфелей, которые определяются как портфели минимальной дисперсии с ожидаемым доходом не ниже заданного [8; 9]. При этом задаваемый ожидаемый доход определяется из условия, что вероятность потерь на каждом шаге не выше задаваемой.

ARCH-модель на основе экспоненциального сглаживания

Экспоненциальное среднее $E(t)$ временного ряда x можно определить равенством [6; 7]

$$E(t) = x(t) + x(t-1) + \beta^2 x(t-2) + \beta^3 x(t-3) + \cdots,$$

где $E(t)$ — значение экспоненциальной средней в момент времени t, α — параметр сглаживания, $0 < \alpha < 1$. В этой формуле предполагается, что исходный временной ряд определен для всех моментов времени, предшествующих текущему моменту t. При этом веса $\omega_i = a\beta^i$ экспоненциально спадают до нуля, и их сумма равна единице.

Экспоненциальное среднее можно определить рекуррентно согласно формуле

$$E(t) = \alpha x(t) + \beta S(t-1), \quad \beta = 1 - \alpha.$$

Чем ниже значение α, тем меньший вес придается текущей цене и тем сильнее эффект сглаживания. В техническом анализе вместо вещественного параметра α используется временное окно — целочисленный параметр $w \geq 1$, связанный с α соотношением

$$\alpha = 2 / (w+1).$$

В дальнейшем экспоненциальное среднее временного ряда x в момент времени t с окном w обозначается через $EMA(t; w; x)$. Экспоненциальное сглаживание предполагает задание начальной оценки $S(0)$, т.е. оценки экспоненциальной средней на нулевой момент времени. Обычно в качестве такой оценки используют среднее арифметическое первых w значений временного ряда (w — размер временного окна).

Далее всюду используются следующие обозначения:
$p(t)$ — цена актива на момент времени t;
$r(t)=\left(p(t)-p(t-1)\right)/p(t-1)$ доходность актива на момент t;
$m(t)=M\left\{r(t)\right\}$ — ожидаемая доходность;
$x(t)=r(t)-m(t)$ — отклонения от средней доходности.

В рамках модели $ARCH(p)$ эволюция последовательности $x(t)$ определяется уравнениями [4; 5]:

$$x(t)=\sigma(t)\varepsilon(t), \quad \sigma(t)^2=a_0+a_1x(t-1)^2+...+a_px(t-p)^2,$$
$$a_0>0,\ a_1\geq 0,\ ...\ a_p\geq 0, \quad t=0,1,2,...,$$

где $\varepsilon(t)$ — последовательность независимых нормально распределенных случайных величин с нулевым средним и единичной дисперсией.

Согласно этому уравнению условная дисперсия в текущий момент времени t определяется предшествующими значениями временного ряда. Поэтому большие или малые квадраты предшествующих значений $x(t-i)^2$ приведет к большим или малым значениям условной дисперсии, что объясняет кластерность временных рядов, представляемых ARCH-моделями. Сложность оценки параметров в ARCH-модели приводит к поиску более простых процедур оценивания за счет ее упрощения без существенной потери ее достоинств.

Упрощенная модель такого типа имеет вид

$$x(t)=r(t)-EMA\left(t;w_1,r\right), \quad x(t)=\sigma(t)\varepsilon(t), \quad \sigma(t)^2=EMA\left(t-1;\ w_2,\ x^2\right),$$

где w_1, w_2 — параметры модели.

При этом предполагается, что процесс $x(t)$ имеет нулевое среднее для всех t, остатки $\varepsilon(t)$ образуют белый шум с единичной дисперсией. Прогнозы доходности и стандартного отклонения прогнозов на один шаг вперед, сделанные в момент времени t, определяются как условные математические ожидания и стандартные отклонения случайной величины $r(t+1)$ при условии, что вся предыдущая история цен известна. Можно показать, что прогнозы относительных изменений и стандартного отклонения определяются формулами

$$r_f(t+1)=EMA\left(t;\ w_1,\ x^2\right), \quad \sigma_f(t+1)=\sqrt{EMA\left(t;\ w_2,\ x^2\right)}.$$

Ниже приводится описание метода оценки параметров модели по эмпирическим ценовым данным $p(t)$, $1\leq t\leq T$. Для заданных w_1, w_2 проводится определенная последовательность вычислений:

1) вычислить отклонения $x(t)=r(t)-EMA\left(t,\ w_1,\ r\right), \quad r(t)=\nabla p(t)$;

2) вычислить квадраты отклонений $x^2(t)$ и построить ряд

$$\sigma(t)^2=EMA\left(t-1;\ w_2,\ x^2\right), \quad 3\leq t\leq T+1;$$

3) определить остатки $\varepsilon(t; w_1, w_2) = x(t)/\sigma(t), \quad 3 \le t \le T$ и найти их выборочную дисперсию.

Параметры w_1, w_2 выбираются из условия минимума квадрата отклонения выборочной дисперсии $\varepsilon(t;\ w_1, w_2)$ от единицы. Другой способ выбора размера окон заключается в следующем. Размер окон w_1, w_2 — выбирается из условия максимизации доли значений доходностей $r(t + 1)$, лежащих в коридоре

$$\left[r_f(t+1) - 2\sigma_f(t+1),\ \ r_f(t+1) - 2\sigma_f(t+1)\right], \quad t = 2, 3, \cdots T-1.$$

Если остатки с выбранным уровнем доверия близки к нормальному распределению, то эта доля должна быть не ниже 95%. В случае отсутствия нормальности нижний уровень можно взять порядка 90%. Отметим, что при этом достаточно ограничиться только целыми значениями окон w_1, w_2, удовлетворяющим ограничениям $w_1, w_2 \ge 7$. Для проверки адекватности модели временному ряду с выбранным уровнем доверия проверяются гипотезы, лежащие в основе модели. В нашем случае это проверка гипотез о независимости остатков, равенстве нулю и единице их среднего значения и дисперсии соответственно.

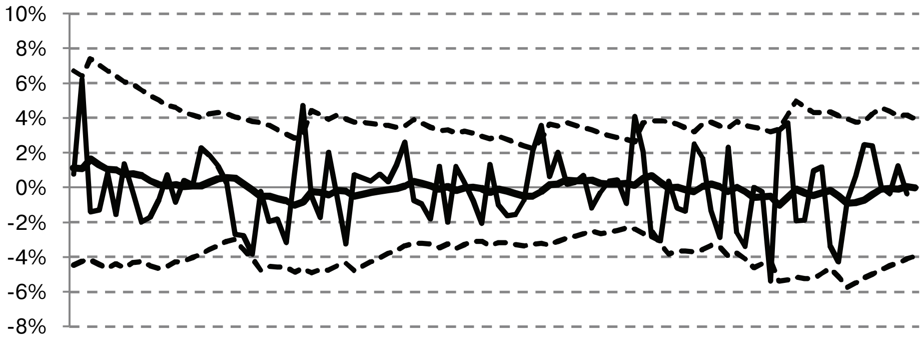

Рис. 1. Динамика цен закрытия и динамика прогнозов волатильности: штриховые линии определяют прогнозную верхнюю и нижнюю границу коридора; верхняя граница определяется равенством $r_f(t+1) + 2\sigma_f(t+1)$, нижняя — $r_f(t+1) - 2\sigma_f(t+1)$; сплошная тонкая линия представляет относительные изменения цены, сплошная жирная линия — прогнозы относительных изменений цен на один шаг вперед. Из рисунка видно, что практически все изменения цен (96%) лежат в пределах установленных границ

Пример 1. Динамика цен закрытия вместе динамикой прогнозов волатильности на основе упрощенной модели *ARCH* приведена на рис. 1. Исходными данными являются ежедневные цены закрытия акций в период 29.12.11—01.06.12 (всего 101 отсчет). Выбранная модель характеризуется окнами $w_1 = 18$, $w_2 = 22$. При таком выборе окон сглаживания выборочные среднее $M(\varepsilon)$ и дисперсия $D(\varepsilon)$ ряда остатков дают наилучшее согласие с требованием: среднее и дисперсии остатков $\varepsilon(t)$ должны быть равны 0 и 1 соответственно; при этом $M(\varepsilon) = -0{,}0399$, $D(\varepsilon) = 1{,}0028$. Согласно предположению теоретические среднее и дисперсии остатков $\varepsilon(t)$ должны быть равны 0 и 1 соответственно. Стандартная проверка этих гипотез на 5% уровне значимости [10] показывает согласованность полученных оценок с теоретическими значениями.

Оценка корреляции на основе экспоненциального сглаживания

В общем случае ковариация или корреляция между относительными изменениями доходностей двух различных активов заметно меняется во времени. Ковариацию можно оценить, вычисляя среднее произведение показателей за определенный период. При этом можно использовать как простое, так и экспоненциальное усреднение. Ниже приводится описание схемы оценки корреляции на основе экспоненциального сглаживания. Описанная ниже техника оценки корреляции является определенным обобщением метода, изложенного в [6].

Пусть $r_x(t)$, $r_y(t)$ — наблюдаемые значения доходностей для $t = 2, \dots T$. Задача заключается в получении прогноза ковариации и корреляции на момент времени $t + 1$, по ценовым данным известным до текущего момента t. Вначале, методом изложенном в предыдущем разделе, оцениваются средние уровни и стандартные отклонения этих временных рядов, тем самым окна (w_{x1}, w_{x2}) и (w_{y1}, w_{y2}), по которым определяются эти величины, можно считать известными. В случае относительных изменений цен спот и фьючерсных цен эти пары окон как правило совпадают, в силу их сильной корреляции. Далее определяется временной ряд s^2

$$s^2(t) = \left(r_x(t) - m_x(t)\right)\left(r_y(t) - m_y(t)\right),$$

$$m_x(t) = EMA\left(t; w_{x1}, r_x\right), \quad m_y(t) = EMA\left(t; w_{y1}, r_y\right).$$

В качестве оценки ковариации на текущий момент времени принимается скользящее среднее ряда s^2:

$$\gamma(t) = Cov\left\{r_x(t),\, r_y(t)\right\} = EMA\left(t; w, s^2\right), \tag{1}$$

где через $Cov\left\{r_x(t),\, r_y(t)\right\}$ — обозначена ковариация между случайными величинами $r_x(t)$, $r_y(t)$.

Уровень корреляции на текущий момент времени оценивается по формуле

$$\rho(t) = Corr\left\{r_x(t),\, r_y(t)\right\} = Cov\left\{r_x(t),\, r_y(t)\right\} / \left(\sigma_x(t),\, \sigma_y(t)\right), \tag{2}$$

где $\rho(t)$ — корреляция между значениями $r_x(t)$ *и* $r_y(t)$; $\sigma_x(t), \sigma_y(t)$ — оценки стандартных отклонений рядов $r_x(t)$ и $r_y(t)$ соответственно на момент времени t, полученные методом, описанным выше.

Параметр сглаживания w в формуле (2) полагается равным максимуму из окон w_{x2}, w_{y2}, по которым оцениваются стандартные отклонения $\sigma_x(t)$ и $\sigma_y(t)$ соответственно, т.е. $w = \max\{w_{x2}, w_{y2}\}$, где окна (w_{x1}, w_{x2}) и (w_{y1}, w_{y2}) определяют стандартные отклонения рядов $r_x(t)$ и $r_y(t)$.

Формулы (1), (2) дают оценку ковариации и корреляции на моменты времени t, $t = w + 1, w + 2, \dots, T$. Прогнозы ковариации и корреляции на следующий момент времени определяется равенствами

$$c_f(t+1) = EMA\left(t; w, s^2\right), \quad \rho_f(t+1) = \sqrt{EMA\left(t; w, s^2\right)}.$$

Пример 2. Динамика корреляционной связи между относительными изменениями цен акций Газпрома и фьючерсных контрактов на них в интервале 22.01.12— 30.04.12 показана на рис. 2. Окна сглаживания, по которым оценивалась корреляция, равны $w_1 = 18$, $w_2 = 22$.

Как видно из рис. 2, уровень корреляции в целом довольно высокий и тоже заметно растет по мере приближения к дате исполнения фьючерсного контракта.

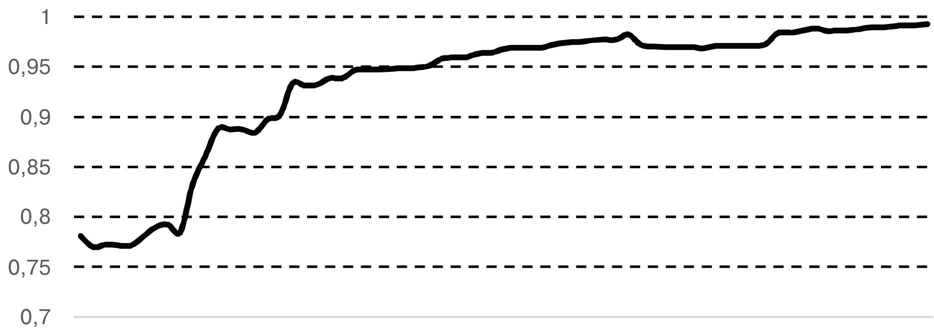

Рис. 2. Динамика корреляций между относительными изменениями цен акций Газпрома и фьючерсных контрактов серии SPFB.GAZR-12.12 на них в интервале 22.01.12—30.04.12

Страхование длинной позиции с учетом ожидаемого дохода

Традиционный метод оценки оптимального числа фьючерсных контрактов для страхования предполагает оценку *регрессии изменения цены спот на изменения фьючерсной цены* ([1—3]). Коэффициент при изменении фьючерсной цены в этой регрессии определяет необходимое число фьючерсных контрактов, минимизирующих дисперсию смешанного портфеля. Этот подход обладает следующими недостатками. Во-первых, временные ряды изменений цены спот и фьючерс, как правило, не обладают необходимой однородностью по среднему уровню и дисперсии (см. рис. 1). Неустойчивость среднего уровня ведет к неадекватному прогнозу ожидаемого дохода, неустойчивость по дисперсии ведет к искажениям коэффициента хеджирования. Существенным недостатком этого подхода является тот факт, что такие важнейшие параметры портфеля как ожидаемый доход (или доходность) или возможные ограничения на число фьючерсных контрактов не принимаются во внимание. Тем самым не учитывается возможность получения дополнительных прибылей за счет использования фьючерсных контрактов.

Рассмотрим портфель, содержащий Q_s единиц определенного актива (длинная позиция) и k фьючерсных контрактов на этот актив, при этом каждый контракт содержит q_f единиц базового актива. Обозначим через $S(t)$ и $F(t)$ — цену спот и фьючерсную цену (в денежном выражении) на момент времени t. Изменение стоимости портфеля за единицу времени представляется в виде

$$\nabla W(t+1) = \nabla S(t+1)Q_s + k\nabla F(t+1)q_f, \qquad (3)$$

где через $W(t)$, $S(t)$, $F(t)$ — обозначают абсолютные изменения соответствующих величин за единицу времени, т.е.

$$\nabla W(t+1) = P(t+1) - P(t), \quad \nabla S(t+1) = S(t+1) - S(t),$$
$$\nabla F(t+1) = F(t+1) - F(t).$$

Относительные изменения связаны с абсолютными следующими соотношениями

$$\nabla W(t+1) = r_w(t+1)W(t), \quad \nabla S(t+1) = r_S(t+1)S(t),$$
$$\nabla F(t+1) = r_f(t+1)F(t).$$

Прогнозы вероятностных характеристик рассматриваемых случайных величин $\nabla W(t+1), \nabla S(t+1), \nabla F(t+1),$ сделанные в момент времени t, определяются при условии, что история цен спот и фьючерсных цен известна вплоть до этого момента времени, соответствующие прогнозы снабжаются индексом t. Например, через $M_t(\nabla S)$ обозначается условное математическое ожидание случайной величины $\nabla S(t+1),$ которое интерпретируется как прогноз изменения цены, сделанный в момент t. Из равенства (3) следует, что

$$M_t(\nabla W) = M_t(\nabla S)Q_s + kq_f M(\nabla F) \tag{4}$$

$$\begin{aligned} D_t(\nabla P) &= Q_s^2 D_t(\nabla S) + k^2 q_f^2 D_t(\nabla F) + 2Cov_t\left(Q_s \nabla S, kq_f \nabla F\right) = \\ &= Q_s^2 D_t(\nabla S) + k^2 q_f^2 D_t(\nabla F) + 2kQ_s q_f Cov_t(\nabla S, \nabla F). \end{aligned} \tag{5}$$

Стандартная задача страхования заключается в определении доли фьючерсных контрактов k в портфеле таким образом, чтобы изменчивость стоимости портфеля была минимальной, то есть k следует выбирать из условия минимума дисперсии случайной величины ∇W. Выражение для дисперсии (5) представляет квадратный трехчлен относительно k, минимум которого достигается при

$$k_0 = -(\beta Q_s)/q_f, \quad \beta = Cov(\nabla S, \nabla F)/D(\nabla F). \tag{6}$$

Поскольку число контрактов — целое число, полученное значение k_0 округляется до целого числа. Минимальное значение дисперсии получается подстановкой в равенство найденного значения k_0. Знак минус (–) перед k_0 показывает, что страхователь должен занять противоположные позиции по хеджируемому активу и фьючерсным контрактам. Представление для коэффициента хеджирования (6) полностью совпадает с традиционным, однако, при выводе не требуется никаких предположений об однородности временных рядов изменений цен спот и фьючерс.

Выше в качестве основной характеристики портфеля рассматривался только один параметр — дисперсия. На остальные характеристики портфеля ограничения не накладывалось. Использование ограничения на ожидаемый доход позволяет помимо эффекта страхования позиции, получить дополнительный доход. Пусть для определенности портфель содержит Q_s единиц базового актива, так что для хеджирования этой позиции необходимо открывать короткие позиции ($k < 0$). Тогда имеет смысл следующая постановка.

Задача. Найти портфель (Q_s, k) минимальной дисперсии при ограничениях: количество единиц базового актива Q_s задано, ожидаемая доходность не ниже заданной. Точная постановка задачи следующая:

$$D(W) \to \min \text{ при условии } m_w = M_t(W) \geq m_g,$$

где m_g — заданный уровень дохода. Минимум ищется по числу фьючерсных позиций k.

Портфель, определяемый как решение этой задачи, будем называть эффективным.

Пусть m_s, m_f — прогнозы изменений спотовой и фьючерсной цены базового актива. Рассмотрим два случая: а) ожидаемые доход m_f положителен, т.е. ожидается повышение фьючерсной цены; б) ожидаемый доход m_f отрицателен, т.е. ожидается понижение фьючерсной цены. Отметим, что ввиду сильной корреляции между изменениями спотовых и фьючерсных цен, ожидаемые доходы m_s и m_f, как правило, одного знака.

Случай а. В этом случае ограничение на ожидаемый доход эквивалентно условию $km_f q_f \geq m_g - m_s Q_s$. Откуда следует, что при $m_f \neq 0$ решение задачи представляется в виде

$$k_{g0} = \max\left\{k_0,\, k_g\right\}, \quad k_g = \left(m_g - m_s\, Q_s\right) / \left(m_f\, Q_f\right), \tag{7}$$

где k_{g0} решение задачи 2, k_0 — определяется формулами (6).

Случай б. В этом случае ограничение на ожидаемый доход при $m_f \neq 0$ эквивалентно условию $k \leq (m_g - m_s\, Q_s) / \left(m_f\, q_f\right)$. Решение задачи имеет вид

$$k_{g0} = \min\left\{k_0,\, k_g\right\}, \quad k_g = \left(m_g - m_s Q_s\right) / \left(m_f Q_f\right). \tag{8}$$

Таким образом, решение задачи представляется формулами (6)—(8).

Динамическое управление риском портфеля

Пусть t — текущий момент времени. Состояние портфеля на текущий момент определяется парой (Q_s, k), где $Q_s > 0$ — количество базового актива (предполагается постоянным), $k = k(t-1)$ определено в предыдущем периоде $t - 1$. Задача заключается в определении числа фьючерсных контрактов $k = k(t)$ на текущий момент времени. При этом предполагается, что на этот момент времени известна вся информация о спотовых и фьючерсных ценах на рассматриваемый актив. Управление риском позиции отождествляется с выбором количества фьючерсных контрактов $k = k(t)$ на основе доступной текущей информации о ценах с целью уменьшения риска и получения (по возможности) дополнительного дохода.

Пусть α — допустимый уровень потерь от текущей стоимости портфеля $W(t)$; обычно допустимы уровень потерь выбирается из интервала 1—5%. Для каждого задаваемого уровня дохода m_g, обозначим через $\nabla W_g(t+1)$ случайную величину, равную доходу эффективного портфеля $(Q_s,\, k_{g0})$. Риск этого портфеля определяется как вероятность потери $\alpha W(t)$ денежных единиц на следующем шаге, т.е. риск на текущем шаге определяется равенством

$$R\left(t,\, m_g\right) = P_t\left\{\nabla W_g(t+1) < -\alpha W(t)\right\}.$$

Индекс t означает, что рассматривается условная вероятность, при этом случайная величина $\nabla W_g(t+1)$ имеет ожидаемый доход не ниже m_g. Отметим, что чем выше значение m_g, тем выше риск соответствующего эффективного портфеля, т.е. функция $R(t,\, m_g)$ монотонно возрастает по m_g. Ниже рассматривается эффективная схема адаптивного управления с учетом вероятности потерь на каждом шаге.

1. На текущий момент времени оценить прогнозы доходов по активу и фьючерсному контракту $m_s = M_t(S)$ и $m_f = M_t(F)$ и уровень ковариации $Cov_t(S,\, F)$ на следующий момент времени $t + 1$.

2. Определить ожидаемый доход m_g из условия, что вероятность потери α% от стоимости портфеля в текущий момент не выше заданной вероятности γ

$$R\left(t,\, m_g\right) = P_t\left\{\nabla W_g(t+1) < -\alpha W(t)\right\} \le \gamma,$$

где γ достаточно малое число, выбираемое инвестором. Оптимальное число фьючерсных контрактов на шаге t полагается равным k_{g0}, где k_{g0} решение задачи 1 для выбранного m_g.

3. Если заданы ограничения на число фьючерсных позиций вида $k_*(t) < k < k^*(t)$, то скорректировать k_{g0} по правилу

$$k_{g0} = \begin{cases} k_*(t), & \text{если } k_{g0} < k_*(t), \\ k^*(t), & \text{если } k_{g0} > k^*(t). \end{cases}$$

Пример 3. Для сравнения различных схем страхования использовались ежедневные данные по спотовым и фьючерсным ценам по акциям ОАО «Газпром» на интервале 11.01.12—19.02.12 [11]. Исходная позиция содержит 1000 акций (Q_s = 1000). На рис. 3 сплошной линией (ряд 1) результат изменения стоимости портфеля (Q_s = 1000, k) относительно начальной даты, при условии, что число фьючерсных контрактов на каждом шаге t определялось по формуле (6). Штриховой линия (ряд 2) представляет незастрахованную позицию, то есть изменение стоимости 1000 акций. Из графика видно, что незастрахованная позиция к моменту t = 19.02.12 приведет к потере около 13 000 руб. Динамическое страхование на основе формулы (6) приводит к потерям за весть период страхования не превосходящим 2000 руб.; при этом к концу рассматриваемого интервала доход составит около 800 руб. Из сравнения этих графиков видно, что динамическое страхование эффективно снижает риск больших потерь, но не дает существенного дохода.

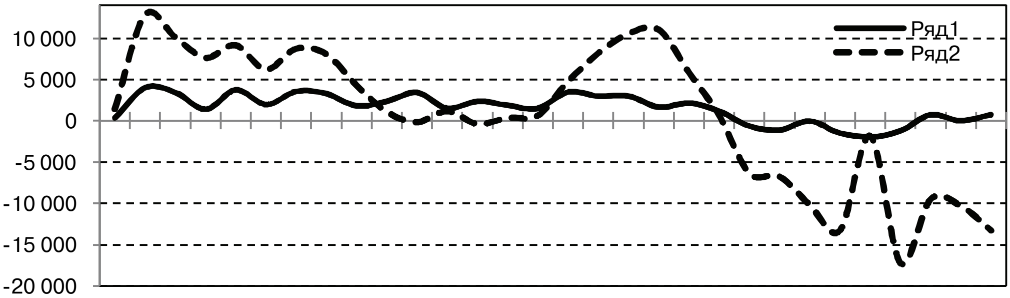

Рис. 3. Динамика изменений стоимости при динамическом страховании без ограничений на ожидаемый доход (ряд 1) и незастрахованной позиции (ряд 2).

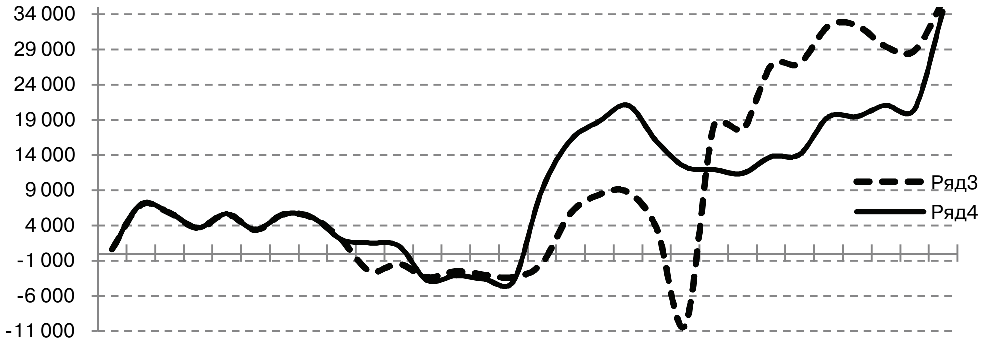

Рис. 4. Динамика изменений стоимости позиции при динамическом страховании, согласно алгоритму 1 (ряд 3) и алгоритму 2 (ряд 4).

На рис. 4 представлена динамика изменений стоимости позиции при динамическом страховании двумя различными способами. При первом способе (схема 1) страхования число контрактов на каждом шаге определялось из условия, что ожидаемый доход застрахованной позиции не ниже 1000 руб., т.е. на каждом шаге оптимальное число фьючерсных контрактов определяется как решение задачи 1 при m_g = 1000 руб. Результат такого способа управления риском представлен прерывистой линией ряд 3. К концу рассматриваемого периода страхование по такой схеме приведет к дополнительному доходу в размере 35 860 руб. Однако в отдельные моменты потери достигают 11 000 руб. Второй способ (схема 2) предполагает задание ожидаемого дохода исходя из условия: ожидаемый доход приводит к вероятности потери 5% текущей стоимости позиции не выше 0,1. Динамика изменений стоимости позиции при такой схеме страхования представлена сплошной линией (ряд 4). Вторая схема страхования практически дает такой же выигрыш, как и первая, но при этом не наблюдается таких провалов в доходе. Иначе говоря, управление риском по второй схеме дает более устойчивые результаты.

Динамическое страхование инвестиционного портфеля

Все полученные результаты обобщаются на случай инвестиционного портфеля. Смешанный портфель содержит n различных активов A_1, A_2, ... A_n и фьючерсные контракты на них. При этом используются следующие обозначения: Q_{si} —

число единиц базового актива номера i, k_i — число фьючерсных контрактов на i-й актив с учетом знака ($i = 1, 2, ..., n$). Портфель, содержащий помимо базовых активов, фьючерсные контракты на них, определяется набором целых чисел [5]

$$\left(Q_{s1}, Q_{s2}, ..., Q_{sn}, k_1, k_2, ..., k_n\right) = \left(Q_s, k\right).$$

Для определенности в дальнейшем считается, что по базовым активам портфель содержит только длинные позиции, т.е. все $Q_{si} > 0$. Пусть далее $S_i(t)$ и $F_i(t)$ ($i = 1, 2, ... n$) — цены спот и фьючерсная цена (в денежном выражении) на момент времени t, q_{fi} — число единиц базового актива в одном фьючерсном контракте номера i. Тогда изменение стоимости портфеля за единицу времени представляется в виде [5]

$$\nabla W(t) = \left(\nabla S(t), Q_s\right) + \left(\nabla F(t), Q_f\right),$$

где $\nabla S(t) = \{\nabla S_i(t)\}, \nabla F(t) = \{\nabla F_i(t)\}, Q_s = \{Q_{si}\}, Q_f = \{k_i q_{fi}\}$ — вектора, $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение.

Прогнозы изменения стоимости портфеля и дисперсия изменения, полученные в момент времени t определяются равенствами [5]

$$M_t\left(\nabla W\right) = \left(M_s, Q_s\right) + \left(M_f, Q_f\right),$$

$$D_t\left(\nabla P\right) = \left(C_{ss}Q_s, Q_s\right) + 2\left(C_{sf}Q_f, Q_s\right) + \left(C_{ff}\, Q_f, Q_f\right),$$

где $M_s = (M_{s1}, M_{s2}, ... M_{sn})$, $M_f = (M_{f1}, M_{f2}, ... M_{fn})$ — вектора ожидаемых изменений на следующий момент времени; $C_{ss} = \{Cov(\nabla S_i, \nabla S_j)\}$, $C_{sf} = \{Cov(\nabla S_i, \nabla F_j)\}$, $C_{ff} = \{Cov(\nabla F_i, \nabla F_j)\}$ $C_{ss} = \{Cov(\nabla S_i, \nabla S_j)\}, C_{sf} = \{Cov(\nabla S_i, \nabla F_j)\}$, $C_{ff} = \{Cov(\nabla F_i, \nabla F_j)\}$ — ковариационные матриц размера $n \times n$ на текущий момент времени. Индекс t показывает, что рассматриваются условные вероятностные характеристики. Эффективный портфель в этом случае определяется как решение задачи.

Задача 2. (портфель минимальной дисперсии при заданных ограничениях на доход и количество контрактов) Найти минимум дисперсии

$$D_t\left(\nabla W\right) = \left(C_{ss}Q_s, Q_s\right) + 2\left(C_{sf}Q_f, Q_s\right) + \left(C_{ff}Q_f, Q_f\right) \to \min \text{ по } k$$

по вектору $k = (k_1, k_2, ..., k_n)$ при ограничениях: $Q_f = \{k_i q_{fi}\}$; $\min_{gi} \le k_i \le \max_{gi}$, k_i — целое, $i = 1, ... n$; $M_t\left(\nabla W\right) \ge m_g$; Q_s — задан.

Здесь $\min_{gi}$, $\max_{gi}$ ограничения на количество фьючерсных контрактов, m_g — ограничение на ожидаемый доход смешанного портфеля. В отличие от задачи 1 решение этой задачи не представляется в аналитическом виде и решается численными методами, например с помощью надстройки поиск решения программы EXCEL. Все понятия, введенные ранее, остаются в силе и для этого случая. Управление риском портфеля проводится по описанной выше схеме с заменой решений задачи 1 на решения задачи 2.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Буренин А.М.* Хеджирование фьючерсным контрактами фондовой биржи РТС. — М.: НТО им. С.И. Вавилова, 2008.
[2] *Халл Дж.К.* Опционы, фьючерсы и другие финансовые инструменты. — М.: Вильямс, 2010.
[3] *Керимов А.К.* Финансовые фьючерсные контракты. — М.: Финансовый Университет, 2013.
[4] *Engle R.F.* Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation // Econometrica. — 1982. — Vol. 5. — No. 4.
[5] *Мельников А.В., Попова Н.В., Скорнякова В.С.* Математические методы финансового анализа. — М.: Анкил, 2006.
[6] *Лукашин Ю.П.* Адаптивные методы краткосрочного прогнозирования. — М.: Статистика, 1981.
[7] *Керимов А.К.* Методы анализа и прогнозирования ценовых данных. — М.: РУДН, 2003.
[8] *Cecchetti S.G., Gumby R.E., Figlewsci S.* Estimation of optimal futures hedge // Review of Economics and Statistics, 1988, Vol. 7.
[9] *Керимов А.К.* Страхование инвестиционного портфеля срочными контрактами // Вестник РУДН. Серия «Экономика». — 2014. — № 3.
[10] *Бородич С.А.* Эконометрика. — Мн.: Новое знание, 2006.
[11] URL: http://www.finam.ru/analysis/export/default/asp.

LITERATURA

[1] *Burenin A.M.* Khedjirovanie furersnymi kontraktami fondovy birzhi RTS. — M.: NTO im. S.I. Vavilova, 2008.
[2] *Hull Dzh.K.* Optsiony, fuchersy i drugiefinansovye instrumenty. — M.: Vilyams, 2010.
[3] *Kerimov A.K.* Finansovye fyuchersnye kontrakty. — M.: Finansovy Universitet, 2013.
[4] *Engle R.F.* Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of United Kingdom Inflation. // Econometrica. — 1982. — Vol. 5. — No. 4.
[5] *Melnikov A.V., Popova N.V., Skornjakova V.S.* Matematicheskie metodi finansovogo analiza. — M.: Ankil, 2006.
[6] *Lukashin Yu.P.* Adaptivnye metody kratkosrochnogo prognozirovania. — M.: Statistika, 1981.
[7] *Kerimov A.K.* Metody analiza i prognozirovania tsenovykh dannykh. — M.: RUDN, 2003.
[8] *Cecchetti S.G., Gumby R.E., Figlewsci S.* Estimation of optimal futures hedge // Review of Economics and Statistics. — 1988. — Vol. 7.
[9] *Kerimov A.K.* Strahovanie investitsionnogo porfelya srochnymi kontraktami // Vestnik RUDN. Ser. Economika. — 2014. — № 3.
[10] *Borodich S.A.* Ekonometrika. — Mn.: Novoe Znanie, 2006.
[11] URL: http://www.finam.ru/analysis/export/default/asp.

DYNAMICAL FUTURE HEDGING FOR SECURITY PORTFOLIO

A.K. Kerimov, O.I. Pavlov
Peoples' Friendship University of Russia
Miklukho-Maklaia str., 6, Moscow, Russia, 117198

The paper presents simple methods of forecasting volatility and correlation of relative changes of price based on exponential smoothing. As an example, the problem of dynamical mean-variance futures hedging of a position is considered. Effective adaptive strategies of portfolio risk management together with comparative analysis are illustrated by a concrete example. It is shown that this scheme of control may be generalized to the case of investment portfolio.

Key words: exponential moving average, risk management, futures.