ИСПОЛЬЗОВАНИЕ ДАННЫХ ПО СМЕРТНОСТИ ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЯ КАЧЕСТВА ЖИЗНИ НАСЕЛЕНИЯ В ОТДЕЛЬНОМ РЕГИОНЕ

Е.А. Машинцов, А.А. Найденов

Тульский государственный университет
Пр-т Ленина, д. 92, Тула, Россия, 300000

Рассматривается возможность использования универсальной модели смертности для оценки качества жизни в отдельном регионе. Также приведен практический метод для вычисления этого показателя, исходя из данных по смертности. В качестве примера приведены результаты расчета показателя для г. Тула

Ключевые слова: факторы окружающей среды, качество жизни, смертность закон Гомперца-Мейкхама, корреляция Стрелера-Милдвана, население, модель.

К числу основных проблем, с которыми сталкиваются муниципальные органы управления, является рациональное использование средств и ресурсов, улучшение обстановки в городе как целого. Как правило, для оценки качества жизни используется некоторый набор показателей, а качество работы администрации оценивается по их изменению. Однако гораздо удобнее иметь всего одну величину, которая, с одной стороны, отражала бы большинство аспектов жизни человека, а с другой стороны, позволяла бы легко измерить и предсказать ее изменение при принятии управленческих решений.

Достаточно хорошим интегральным показателем качества жизни (КЖ) для страны или крупных регионов считается средняя продолжительность жизни. Однако его использование для оценки и сравнения КЖ в рамках, например, города затруднительно. В основном это связано с зависимостью этой величины от среднего возраста населения, который может сильно меняться от района к району. В данной работе предлагается метод оценки КЖ, который основан на среднем возрасте в момент смерти и который позволяет учесть различия в распределении населения по возрастам.

Универсальная модель смертности

Одним из основных соотношений, которое описывает смертность населения, является закон Гомпертца-Мейкхама [1]. Определим смертность следующим образом:

$$q(t-t_b)=\frac{-\partial \ln N(t_b,t)}{\partial t},$$

где $N(t_b,t)$ — число людей, родившихся в момент t_b и доживших до времени t.

Далее будем обозначать число родившихся в момент t как $N_b(t) = N(t, t)$ и положим $N(t_b,t)\big|_{t<t_b}=0$.

Согласно закону Гомпертца-Мейкхама в диапазоне от 30 до 80 лет логарифм смертности зависит линейным образом от возраста:

$$\ln q(x) = a + bx,$$

где a, b — некоторые величины, которые зависят от времени, но не от возраста x.

Известно, что между параметрами закона Гомпертца существует корреляционная зависимость, называемая корреляцией Стрелера-Милдвана [3], она может быть записана в виде

$$a = \alpha - \beta b.$$

Данная корреляция наблюдается не только для людей, но и других видов [4]. Таким образом, в законе Гомпертца есть всего один независимый параметр. Следует отметить, что эта корреляция есть следствие биологических закономерностей, присущих популяциям. С учетом соотношения между параметрами закон Гомпертца может быть переписан в виде

$$q(x) = Ab\mathrm{e}^{b(x-X)},$$

где A, X зависят от a и b следующим образом:

$$X = \beta, \quad A = \frac{\mathrm{e}^{\alpha}}{b}.$$

Исследовав данные по смертности для населения Японии и Швеции, Азбель [2] пришел в выводу, что значения A и X зафиксированы для вида и не зависят от условий проживания. Для человека они равны: $\ln A = 2{,}5 \pm 0{,}1$ и $X = 103 \pm 1$ год. Данное соотношение устанавливает универсальную связь между значениями смертности в различных возрастных группах. В отличие от оригинального закона Гомпертца-Мейкхама оно содержит один независимый коэффициент, который зависит от условий окружающей среды. Это означает, что все негативные и позитивные факторы влияют одинаковым образом на различные возрастные группы. Иными словами, данный закон утверждает, что на практике в обществе нет факторов, которые приводили бы в среднем к большему вымиранию в одной возрастной группе, чем в другой. Для получения более детального представления о модели и выводах, которые можно из нее сделать, рассмотрим упрощенный случай: население, живет при неизменных условиях окружающей среды.

Универсальная модель смертности при фиксированном коэффициенте *b*

Проинтегрируем обе части определения смертности для группы людей, родившихся в момент t_b:

$$\int_{t_b}^{t} \frac{\partial \ln N(t_b, \tau)}{\partial \tau} d\tau = -\int_{t_b}^{t} q(\tau - t_b) d\tau.$$

Вычислив интеграл в левой части и используя универсальный закон смертности в правой, получим следующее выражение для определения вероятности дожить до возраста $x = t - t_b$:

$$P_s(x, b) = \frac{N(t_b, t_b + x)}{N_b(t_b)} = \eta(x),$$

где $\eta(x) = \exp\left[-A\mathrm{e}^{-bX}(\mathrm{e}^{bx} - 1)\right]$.

Аналогичным образом может быть получено выражение для среднего возраста в момент смерти. В общем случае

$$Age_d(t,b)=\frac{\int_{t_b\le t}(t-t_b)\frac{\partial N(t_b,t)}{\partial t}dt_b}{\int_{t_b\le t}\frac{\partial N(t_b,t)}{\partial t}dt_b}.$$

Для популяции с постоянной рождаемостью данные интегралы легко вычисляются, в этом случае средний возраст в момент смерти не зависит от времени:

$$Age_d(b)=\int_0^\infty \eta(x)dx=-\frac{1}{b}\exp\left[Ae^{-bX}\right]Ei\left(-Ae^{-bX}\right),$$

где $Ei(x)$ — интегральная показательная функция.

Характерное значение $Ae^{-bX}\sim e^{2,5}e^{-0,12\cdot 103}\approx 5\cdot 10^{-5}$; таким образом, функция $Ei(x)$ может быть представлена в районе нуля рядом, а предыдущее выражение — в виде

$$Age_d(b)\approx X-\frac{1}{b}(\gamma+\ln A)+O\left(Ae^{-bx}\right).$$

Данные выражения можно интерпретировать как распределение населения по возрастам и средний возраст в момент смерти для некоторой популяции, которая проживает в постоянных условиях окружающей среды и имеет неизменный уровень рождаемости. Проанализировав последнее выражение можно сделать несколько заключений о данной модели. Во-первых, максимально возможный средний возраст в момент смерти равен $X\approx 103$ года, таким образом, данная модель не даст достоверных результатов для популяций с продолжительностью жизни близкой к данному значению.

Во-вторых, значение параметра b можно поставить в однозначное соответствие с эффективной продолжительностью жизни, причем увеличение b ведет к увеличению среднего возраста в момент смерти.

Универсальная модель позволяет получить интересные результаты в случае изменения рождаемости при постоянных условиях окружающей среды. Рассмотрим сначала случай, наиболее наглядно демонстрирующий, насколько средний возраст в момент смерти связан с числом рожденных.

Предположим, что в момент времени $t = 0$ рождаемость резко меняется:

$$N_b(t)=\begin{cases} N_b, & t\le 0\\ \alpha N_b, & t>0\end{cases}.$$

Интегрируя общее выражение для среднего возраста в момент смерти по частям и используя постоянство числа новорожденных при $t > 0$ и $t < 0$, получим:

$$Age_d(t,b)=\frac{(1-\alpha)t\eta(t)+\alpha\int_0^t\eta(x)dx+\int_t^\infty\eta(x)dx}{\alpha+(1-\alpha)\eta(t)}.$$

График данной зависимости для некоторых значений b и средний возраст населения приведены на рис. 1 и рис. 2 соответственно.

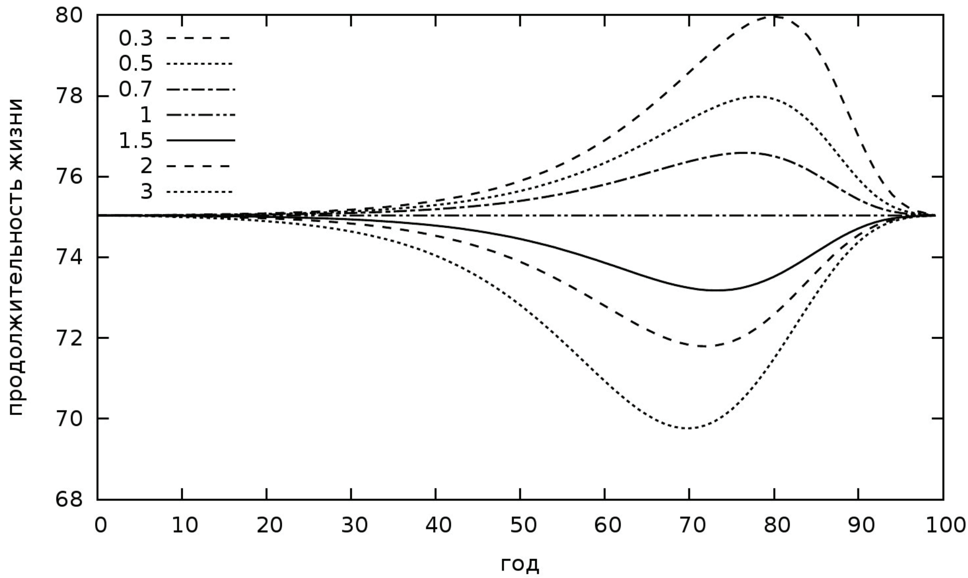

Рис. 1. Зависимость изменения средней продолжительности жизни от скачка рождаемости

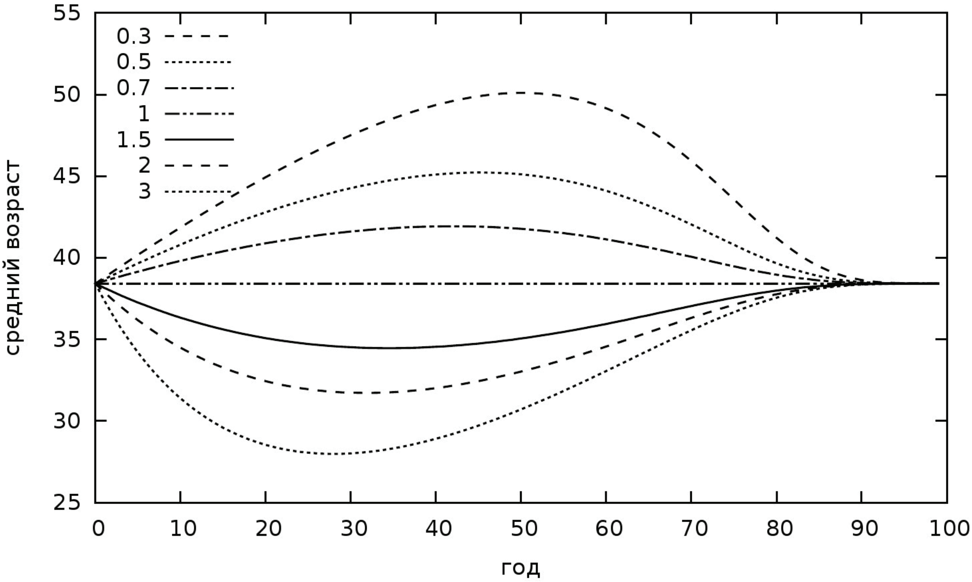

Рис. 2. Изменение среднего возраста населения при некоторых значениях скачка рождаемости

Стоит особо отметить тот факт, что наибольшее изменение продолжительности жизни достигается через некоторое время после наибольшего изменения среднего возраста населения. Более того, в момент достижения экстремума возраста в момент смерти средний возраст очень близок к стационарному значению. Данный пример показывает, что корреляция между этими двумя величинами может отсутствовать. Иными словами, не корректно пытаться обосновать средний возраст в момент смерти в данный момент времени средним возрастом населения. В приведенном примере корреляция присутствует, но между значениями этих величин в разные моменты времени.

Приведенные выше вычисления показывают, что средняя продолжительность жизни связана со средним возрастом населения, и это необходимо учитывать при оценке качества жизни на той или иной территории. Однако наибольший эффект данная зависимость проявляет при попытках изучения влияния локальных внешних факторов на продолжительность жизни населения. Нет никакой гарантии, что изучаемая группа будет иметь возрастной состав, совпадающий со средним по стране. Статистическая компенсация связи между средним возрастом и продолжительностью жизни довольно трудна. Поэтому предлагается использовать универсальную модель старения, а именно коэффициент b для оценки качества жизни населения. Действительно, эта величина не зависит от возрастного состава и для ее уточнения можно использовать всю информация по смертности. С другой стороны, коэффициент b непосредственно связан с качеством окружающей среды.

Вывод уравнения для вычисления показателя *b*

Коэффициент b может быть вычислен исходя из данных по смертности и распределению населения по возрастам методом максимального правдоподобия. Иными словами, будем искать такое значение параметра b, которое максимизирует вероятность наблюдения экспериментальных данных.

Обозначим нормированное на единицу распределение населения по возрастам $n(x)$ и число проживающих в некотором регионе N_0. Рассмотрим достаточно малый интервал Δt, такой, что $n(x)$ и N_0 меняются незначительно. Тогда, используя определение для смертности, среднее число смертей в небольшом диапазоне возрастов $(x, x + \Delta x)$ можно записать как

$$\left\langle N_D(x, x+\Delta x, \Delta t)\right\rangle \approx N_0 n(x) q(x) \Delta x \Delta t.$$

Зафиксированное число смертей за время Δt является случайной величиной, распределенной по Пуассону со средним, определенным выше. Таким образом, вероятность зафиксировать k смертей задается выражением

$$P\left(N_D = k\right) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}, \ \lambda = N_0 n(x) q(x) \Delta x \Delta t.$$

Разобьем весь интервал возрастов на диапазоны длины Δx и обозначим возраст в каждом из них x_i. Будем считать, что за время наблюдения Δt было зарегистрировано $N_D(x_i)$ смертей в каждом из диапазонов. Вероятность подобного набора измерений в этом случае может быть записана в виде

$$P\left(\left\{N_D(x_i)\right\}\right) = \prod_i P\left(N_D(x_i)\right).$$

Искомое значение параметра b максимизирует данное выражение. С практической точки зрения легче работать с логарифмом данной величины

$$l\left(b, \left\{N_D(x_i)\right\}\right) = \sum_i \ln P\left(N_D(x_i)\right).$$

Подставив выражение для вероятностей и упростив, получим:

$$l\left(b,\{N_D(x_i)\}\right)=\sum_i\left[N_D(x_i)\ln\lambda-\lambda\right]-\sum_i\ln\left[N_D(x_i)!\right].$$

В последнем выражении только λ зависит от b, поэтому производная равна

$$\frac{dl}{db}=\sum_i\left[\frac{N_D(x_i)}{\lambda}-1\right]\frac{d\lambda}{db}.$$

Будем считать, что за время Δt умерло M людей в возрасте d_1, d_2, ..., d_M. Выберем Δx настолько малым, что на каждый из интервалов $(x, x+\Delta x)$ приходится максимум одна смерть. Таким образом $N_D(x_i)$ могут принимать только значения 0 и 1. Используя данный факт, а также выражение для λ, формулу для производной можно упростить:

$$\frac{dl}{db}=\sum_{j=1}^{M}\frac{1}{q(d_j)}\frac{dq(d_j)}{db}-N_0\Delta t\sum_i n(x_i)\frac{dq(x_i)}{db}\Delta x.$$

Подставив выражение для $q(x)$ и заменив вторую сумму интегралом, получим:

$$\frac{dl}{db}=\sum_{j=1}^{M}\left[\frac{1}{b}+d_j-X\right]-AN_0\Delta t\int_0^\infty n(x)e^{b(x-X)}\left[b(x-X)+1\right]dx.$$

Так как b задает максимум l, данная производная должна быть равна нулю. Таким образом, b может быть найдено из следующего уравнения:

$$b^{-1}=X-\overline{d}-\frac{AN_0\Delta t}{M}\int_0^\infty n(x)e^{b(x-X)}\left[b(X-x)-1\right]dx.$$

Как и следовало ожидать, коэффициент, отражающий качество жизни, зависит не только от среднего возраста в момент смерти, но и от отношения количества смертей в единицу времени к числу людей в рассматриваемой группе.

Для сравнительного анализа КЖ населения в городе необходимо разбить его территорию на районы. Имея базу данных населения в каждом из дискретов территории, необходимо вычислить распределение населения по возрастам. Используя данные об умерших за определенный интервал Δt, необходимо вычислить общее количество смертей M и среднюю продолжительность жизни $\overline{d}$. Подставив эти величины в уравнение, можно найти параметр b численными методами. Решение можно найти, используя простейшие методы, например делением пополам, так как правая часть является монотонно растущей функцией от b.

Распределение значений коэффициента универсальной модели смертности для г. Тула приведено на рис. 3.

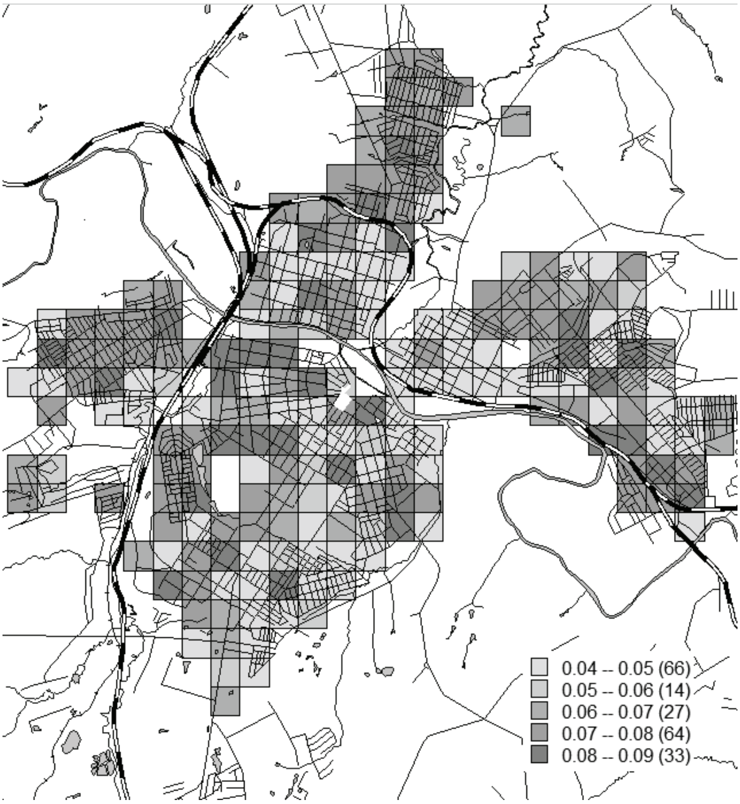

Рис. 3. Распределение значений коэффициента универсальной модели смертности на территории г. Тула (меньшие значения соответствуют наиболее неблагоприятной обстановке)

Из предварительной оценки распределения коэффициента *b* для г. Тулы, приведенного на рис. 3, можно сделать вывод, что КЖ в среднем хуже на южных окраинах и немного лучше в северо-западной части города. Это может быть связано с тем, что металлургический и химический заводы расположены к югу от города. Отдельные кластеры, скорее всего, объясняются различиями в экономических, жилищных и социальных факторах [5]. Анализируя зависимость отдельных параметров окружающей среды от коэффициента *b*, можно выделить факторы, наиболее сильно влияющие на КЖ в конкретном регионе. Параметры, которые принимают различные значения на территории города, как правило, находятся в непосредственной ответственности муниципальных органов управления. Таким образом, данный подход позволяет выделить наиболее оптимальные направления для принятия управленческих решений. Дальнейшее развитие данной методики предполагает разработку аппарата для анализа зависимости коэффициента *b* от параметров окружающей среды, основанного на нейронных сетях и факторном анализе.

***

В данной статье рассмотрена возможность использования смертности населения в качестве показателя КЖ населения при принятии управленческих решений. Показано, что непосредственное применение среднего возраста в момент смерти затруднительно, так как данная величина зависит от распределения населения по возрастам. Для преодоления этой трудности предложено использовать в качестве интегрального показателя КЖ коэффициент *b* универсальной модели смертности. Приведенный метод вычисления *b* позволяет использовать данные о населении без сложной предварительной статистической обработки. Рассчитано распределение показателя КЖ для г. Тулы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] *Gavrilov L.A., Gavrilova N.S.* The Biology of Life Span: A Quantitative Approach. — New York: Harwood Academic Publisher, 1991.

[2] *Azbel M.Ya.* Unitary Mortality Law and Species-Specific Age // Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences. — 1996. — Vol. 263. — No. 1376. — C. 1449—1454.

[3] *Strehler B.L., Mildvan A.S.* General theory of mortality aging // Science. — 1960. — V. 132. — C. 14—21.

[4] *Кременцова А.В.* Сходство и различие в закономерности смертности людей и животных // Успехи геронтологии. — 2004. — Т. 15. — С. 7—13.

[5] *Машинцов Е.А., Кузнецов А.А., Лебедев А.М., Новосельцев В.Н.* Математические модели и методы оценки экологического состояния территорий. — М.: Издательство физико-математической литературы, 2010.

LITERATURA

[1] *Gavrilov L.A., Gavrilova N.S.* The Biology of Life Span: A Quantitative Approach. — New York: Harwood Academic Publisher, 1991.

[2] *Azbel M.Ya.* Unitary Mortality Law and Species-Specific Age // Proceedings of the Royal Society B: Biological Sciences. — 1996. — Vol. 263. — No. 1376. — S. 1449—1454.

[3] *Strehler B.L., Mildvan A.S.* General theory of mortality aging // Science. — 1960. — V. 132. — S. 14—21

[4] *Kremencova A.V.* Shodstvo i razlichie v zakonomernosti smertnosti ljudej i zhivotnyh // Uspehi gerontologii. — 2004. — T. 15. — S. 7—13.

[5] *Mashincov E.A., Kuznecov A.A., Lebedev A.M., Novosel'cev V.N.* Matematicheskie modeli i metody ocenki jekologicheskogo sostojanija territorij. — M.: Izdatel'stvo fiziko-matematicheskoj literatury, 2010.

APPLICATION OF UNIVERSAL MORTALITY LAW FOR QUALITY OF LIFE ESTIMATION IN A METROPOLITAN AREA

E.A. Mashintsov, A.A. Naydenov
Tula State University
Lenina, 92, Tula, Russia, 300000

The paper describes a method for evaluation of quality of life in metropolitan area using demographic and mortality information. The equation for quality of life index was derived. The results foe city of Tula are provided as an example.

Key words: environmental factors, quality of life, death rate, Gompertz-Makeham law, Srehler-Mildvan correlation, population, model.