

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ



СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ
НАПРАВЛЕНИЯ

Том 72, № 1, 2026

Дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения

DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-1

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Научный журнал
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.

Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

Главный редактор

А. Л. Скубачевский,

д.ф.-м.н., профессор,
Российский университет
дружбы народов, Москва,
Россия

E-mail: skubachevskii-al@rudn.ru

Зам. главного редактора

А. Ю. Савин,

д.ф.-м.н., профессор,
Российский университет
дружбы народов, Москва,
Россия

E-mail: savin-ayu@rudn.ru

Ответственный секретарь

Е. М. Варфоломеев,

к.ф.-м.н.,
Российский университет
дружбы народов, Москва,
Россия

E-mail: varfolomeev-em@rudn.ru

Члены редакционной коллегии

А. А. Аграчев, д.ф.-м.н., профессор, Международная школа передовых исследований (SISSA), Триест, Италия; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

П. С. Красильников, д.ф.-м.н., профессор, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

А. Б. Муравник, д.ф.-м.н., Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

А. В. Овчинников, к.ф.-м.н., доцент, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва, Россия

В. Л. Попов, д.ф.-м.н., профессор, член-корр. РАН, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

А. В. Сарычев, д.ф.-м.н., профессор, Флорентийский университет, Флоренция, Италия

Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

4 выпуска в год

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Включен в Единый государственный перечень научных изданий («Белый список»)

Индексируется в *РИНЦ*, *DOAJ*, *MathSciNet*, *Zentralblatt Math*.

Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences (New York)*.

Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты.

Правила оформления статей, архив публикаций в открытом доступе и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала: <http://journals.rudn.ru/cmfd>, <http://www.mathnet.ru/cmfd>.

Редактор: Е. М. Варфоломеев

Компьютерная верстка: Е. М. Варфоломеев

Адрес редакции:

115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Подписано в печать 30.03.2026. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.

Усл. печ. л. 23,25. Тираж 110 экз. Заказ 26.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» (РУДН)

117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН

115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-08-61; e-mail: publishing@rudn.ru

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba



CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 72, No. 1, 2026

Differential and Functional Differential Equations

DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-1

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Founded in 2003

Founder: Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

EDITOR-IN-CHIEF

Alexander Skubachevskii,

RUDN University

Moscow, Russia

E-mail: skubachevskii-al@rudn.ru

DEPUTY EDITOR

Anton Savin,

RUDN University

Moscow, Russia

E-mail: savin-ayu@rudn.ru

EXECUTIVE SECRETARY

Evgeniy Varfolomeev,

RUDN University

Moscow, Russia

E-mail: varfolomeev-em@rudn.ru

EDITORIAL BOARD

Andrei Agrachev, International School for Advanced Studies (SISSA), Trieste, Italy; Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Pavel Krasil'nikov, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

Andrey Muravnik, RUDN University, Moscow, Russia

Alexey Ovchinnikov, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; Russian Institute for Scientific and Technical Information of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Vladimir Popov, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Andrei Sarychev, University of Florence, Florence, Italy

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Published by the Peoples' Friendship University of Russia
named after Patrice Lumumba, Moscow, Russian Federation

ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

4 issues per year

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Indexed by *Russian Index of Science Citation*, *DOAJ*, *MathSciNet*, *Zentralblatt Math*.

Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences* (New York).

Aims and Scope

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results.

Guidelines for authors, free accessible archive of issues, and other information can be found at the journal's website: <http://journals.rudn.ru/cmfd>, <http://www.mathnet.ru/eng/cmfd>.

Editor: *E. M. Varfolomeev*
Computer design: *E. M. Varfolomeev*

Address of the Editorial Office:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Print run 110 copies.

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba (RUDN University), Moscow, Russia
6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia

Printed at RUDN Publishing House:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 955-08-61; e-mail: publishing@rudn.ru

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Апаков Ю. П., Хамитов А. А.</i> Построение решения краевой задачи для неоднородного уравнения третьего порядка с помощью функции Грина	1
<i>Беларби Л.</i> Солитоны Риччи разрешимых групп Ли	13
<i>Бьянкини С.</i> Существование спиральных стратегий для блокирования распространения огня	24
<i>Джабраилов А. Л., Шишкина Э. Л.</i> О приложениях обобщённого потенциала Бесселя к решению сингулярного уравнения Шрёдингера дробного порядка и теории ёмкости	35
<i>Дымарский Я. М., Николаенко С. С.</i> О гипотезе Арнольда для семейства стационарных операторов Шрёдингера с самосопряженными неразделёнными краевыми условиями	51
<i>Керимбеков А. К.</i> Об одном методе решения уравнений Риккати	63
<i>Куксин С. Б.</i> Два подхода к усреднению стохастических возмущений интегрируемых систем	75
<i>Кумар С.</i> Приближенная управляемость полулинейного уравнения теплопроводности с запаздыванием с помощью регуляризации Тихонова	85
<i>Лексин В. П.</i> Представления монодромии систем Жордана—Похгаммера	94
<i>Малыгина В. В.</i> Точные оценки устойчивых решений дифференциально-разностных уравнений	102
<i>Нестеров А. В.</i> Асимптотика решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы гиперболических уравнений в критическом случае	114
<i>Усенов И. А., Усенова Р. К.</i> Регуляризирующий оператор для решения нелинейного интегрального уравнения первого рода в пространстве квадратично-суммируемых функций . .	126
<i>Чудинов К. М.</i> Об условиях устойчивости линейного разностного уравнения с переменным запаздыванием	138
<i>Шагалова Л. Г.</i> О решениях уравнений Гамильтона—Якоби с экспоненциальной зависимостью от импульса	151
<i>Шамоян Р. Ф., Мазина Н. М.</i> Точные ограничения аналитических функциональных пространств нескольких переменных	165

CONTENTS

<i>Apakov Yu. P., Khamitov A. A.</i> Construction of a solution to a boundary-value problem for a third-order nonhomogeneous equation using Green's function	1
<i>Belarbi L.</i> Ricci solitons for solvable Lie groups	13
<i>Bianchini S.</i> Existence of the spiral strategies for blocking fire spreading	24
<i>Dzhabrailov A. L., Shishkina E. L.</i> On applications of the generalized Bessel potential to solving the singular fractional Schrödinger equation and capacity theory	35
<i>Dymarskii Ya. M., Nikolaenko S. S.</i> On the Arnold conjecture for a family of stationary Schrödinger operators with self-adjoint nonseparated boundary conditions	51
<i>Kerimbekov A. K.</i> On one method for solving Riccati equations	63
<i>Kuksin S. B.</i> Two approaches to averaging stochastic perturbations of integrable systems	75
<i>Kumar S.</i> Approximate controllability of a semilinear delayed heat equation by Tikhonov regularization	85
<i>Leksin V. P.</i> Monodromy representations of Jordan–Pochhammer systems	94
<i>Malygina V. V.</i> Exact estimates of stable solutions of differential-difference equations	102
<i>Nesterov A. V.</i> Asymptotics of the solution of the Cauchy problem for a singularly perturbed system of hyperbolic equations in the critical case	114
<i>Usenov I. A., Usenova R. K.</i> Regularizing operator for solving a nonlinear integral equation of the first kind in the space of square-summable functions	126
<i>Chudinov K. M.</i> On the stability conditions for a linear difference equation with variable delay	138
<i>Shagalova L. G.</i> On solutions of Hamilton–Jacobi equations with exponential dependence on momentum	151
<i>Shamoyan R. F., Makhina N. M.</i> Exact restrictions of analytic function spaces of several variables	165

ПОСТРОЕНИЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ НЕОДНОРОДНОГО УРАВНЕНИЯ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ПОМОЩЬЮ ФУНКЦИИ ГРИНА

Ю. П. АПАКОВ^{1,2}, А. А. ХАМИТОВ²

¹Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан

²Наманганский государственный технический университет, Наманган, Узбекистан

Аннотация. В данной работе рассматривается третья краевая задача для неоднородного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками в трехмерном пространстве. Единственность решения задачи доказана методом интегралов энергии, а существование — методом разделения переменных. Решение представлено явно с помощью построенной функции Грина. Найдены условия на заданные функции, обеспечивающие регулярность решения задачи. При обосновании равномерной сходимости установлено отличие от нуля «малого знаменателя».

Ключевые слова: третья краевая задача, неоднородное уравнение третьего порядка, интеграл энергии, метод разделения переменных, функция Грина.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Вклад авторов. Все авторы участвовали в разработке концепции исследования, сборе, обработке и анализе данных, написании текста рукописи, формулировке выводов.

Для цитирования: Апаков Ю. П., Хамитов А. А. Построение решения краевой задачи для неоднородного уравнения третьего порядка с помощью функции Грина // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 1–12. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-1-12](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-1-12) EDN: TDHXIW

1. ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные уравнения в частных производных третьего порядка рассматриваются при решении задач теории нелинейной акустики и в гидродинамической теории космической плазмы, а также фильтрации жидкости в пористых средах [11].

В работе [7], учитывая свойства вязкости и теплопроводности газа, из системы Навье—Стокса было получено уравнение третьего порядка с кратными характеристиками, содержащее вторую производную по времени:

$$u_{xxx} + u_{yy} - \frac{\nu}{y}u_y = u_x u_{xx}, \quad \nu = \text{const}.$$

Это уравнение при $\nu = 1$ описывает осесимметричный поток, а при $\nu = 0$ описывает плоскопараллельный поток [5].

Первые результаты по уравнению третьего порядка с кратными характеристиками были получены в работах Н. Block [12], Е. Del Vecchio [14]. В работе [13] L. Catabriga для уравнения

$D_x^{2n+1}u - D_y^2u = 0$ было построено фундаментальное решение в виде двойного несобственного интеграла и изучены свойства потенциала, решены краевые задачи.

В работах [3, 4] построены фундаментальные решения уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащие вторые производные по времени, выраженные через конфлюэнтные гипергеометрические функции, изучены их свойства, найдены оценки при $|t| \rightarrow \infty$.

В работах [8–10] исследованы краевые задачи для дифференциальных уравнений с частными производными, а также в [2, 6] рассмотрены особенности малых знаменателей, которые появляются при решении дифференциальных уравнений.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В области $D = \{(x, y, z) : 0 < x < p, 0 < y < q, 0 < z < r\}$ рассмотрим уравнение третьего порядка вида

$$L[u] \equiv u_{xxx} - u_{yy} - u_{zz} = f(x, y, z), \quad (2.1)$$

где $p, q, r \in \mathbb{R}$, и для него исследуем следующую задачу.

Задача А. Найти решение уравнения (2.1) в области D из класса $u(x, y, z) \in C_{x,y,z}^{3,2,2}(D) \cap C_{x,y,z}^{2,1,1}(\overline{D})$, удовлетворяющее краевым условиям:

$$\begin{cases} \alpha u(x, y, 0) + \beta u_z(x, y, 0) = 0, \\ \gamma u(x, y, r) + \delta u_z(x, y, r) = 0, \\ u(x, 0, z) = u(x, q, z) = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

$$\begin{cases} au(0, y, z) + bu_{xx}(0, y, z) = \psi_1(y, z), \\ cu(p, y, z) + du_{xx}(p, y, z) = \psi_2(y, z), \\ u_x(p, y, z) = \psi_3(y, z), \end{cases} \quad (2.3)$$

где $a, b, c, d, \alpha, \beta, \gamma, \delta$ — заданные постоянные, причем $a^2 + b^2 \neq 0$, $c^2 + d^2 \neq 0$, $\alpha^2 + \beta^2 \neq 0$, $\gamma^2 + \delta^2 \neq 0$, а $f(x, y, z), \psi_i(y, z)$, $i = \overline{1, 3}$ — заданные достаточно гладкие функции, для которых выполняется условия

$$\begin{cases} \psi_i(0, z) = \psi_i(q, z) = 0, & \frac{\partial^2 \psi_i(0, z)}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 \psi_i(q, z)}{\partial y^2} = 0, \\ \alpha \frac{\partial^3 \psi_i(y, 0)}{\partial y^3} + \beta \frac{\partial^4 \psi_i(y, 0)}{\partial y^3 \partial z} = 0, & \alpha \frac{\partial^5 \psi_i(y, r)}{\partial y^3 \partial z^2} + \beta \frac{\partial^6 \psi_i(y, r)}{\partial y^3 \partial z^3} = 0, \\ \gamma \frac{\partial^3 \psi_i(y, 0)}{\partial y^3} + \delta \frac{\partial^4 \psi_i(y, 0)}{\partial y^3 \partial z} = 0, & \gamma \frac{\partial^5 \psi_i(y, r)}{\partial y^3 \partial z^2} + \delta \frac{\partial^6 \psi_i(y, r)}{\partial y^3 \partial z^3} = 0, \\ f(x, 0, z) = f(x, q, z) = 0, & \alpha \frac{\partial^2 f(x, y, 0)}{\partial y^2} + \beta \frac{\partial^3 f(x, y, 0)}{\partial y^2 \partial z} = 0, \\ \gamma \frac{\partial^2 f(x, y, r)}{\partial y^2} + \delta \frac{\partial^3 f(x, y, r)}{\partial y^2 \partial z} = 0, & \end{cases} \quad i = 1, 2, 3. \quad (2.4)$$

3. ЕДИНСТВЕННОСТЬ РЕШЕНИЯ

Теорема 3.1. Если задача А имеет решение, то при выполнении условий $ab > 0$, $cd \leq 0$, $\alpha\beta \leq 0$ и $\gamma\delta \geq 0$ оно единственно.

Доказательство. Предположим обратное: пусть задача А имеет два различных решения $u_1(x, y, z)$ и $u_2(x, y, z)$. Тогда функция $u(x, y, z) = u_1(x, y, z) - u_2(x, y, z)$ удовлетворяет однородному уравнению (2.1) с однородными краевыми условиями. Докажем, что $u(x, y, z) \equiv 0$ в $\overline{D}$.

В области D справедливо тождество

$$uL[u] \equiv uu_{xxx} - uu_{yy} - uu_{zz} = 0,$$

или

$$uL[u] \equiv \frac{\partial}{\partial x} \left(uu_{xx} - \frac{1}{2} u_x^2 \right) - \frac{\partial}{\partial y} (uu_y) + u_y^2 - \frac{\partial}{\partial z} (uu_z) + u_z^2 = 0. \quad (3.1)$$

Интегрируя тождество (3.1) по области D и учитывая однородные краевые условия, получим

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \int_0^q \int_0^r u_x^2(0, y, z) dydz - \frac{d}{c} \int_0^q \int_0^r u_{xx}^2(p, y, z) dydz + \frac{b}{a} \int_0^q \int_0^r u_{xx}^2(0, y, z) dydz - \\ & - \frac{\beta}{\alpha} \int_0^p \int_0^q u_z^2(x, y, 0) dx dy + \frac{\delta}{\gamma} \int_0^p \int_0^q u_z^2(x, y, r) dx dz + \iiint_D u_y^2(x, y, z) dx dy dz + \\ & + \iiint_D u_z^2(x, y, z) dx dy dz = 0. \end{aligned}$$

Из условий теоремы 3.1, т. е. $ab > 0$, $cd \leq 0$, $\alpha\beta \leq 0$, $\gamma\delta \geq 0$, и из интегрального равенства следует

$$u_x(0, y, z) \equiv u_{xx}(0, y, z) \equiv 0, \quad u_y(x, y, z) \equiv u_z(x, y, z) \equiv 0,$$

т. е. $u(x, y, z) = h(x)$, $h'(0) = h''(0) = 0$. Из уравнения вытекает $h'''(x) = 0 \Leftrightarrow h(x) = C_1 x^2 + C_2 x + C_3$, далее следует $C_1 = C_2 = 0$, значит, $h(x) = C_3 = \text{const}$. Из первого условия (2.3)

$$au(0, y, z) + bu_{xx}(0, y, z) = 0$$

вытекает, что $C_3 = 0$, т. к. $ab > 0$. Отсюда получим $h(x) = 0$. Следовательно, $u(x, y, z) \equiv 0$, $(x, y, z) \in \bar{D}$. В силу последнего получим $u_1(x, y, z) = u_2(x, y, z)$.

Теорема 3.1 доказана. $\square$

Замечание 3.1. Отметим, что при нарушении условий теоремы 3.1, т. е. когда $a = -b\theta_{n,m}^2$,

$b > 0$, $c, d \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, $\theta_{n,m} = \sqrt[3]{\left(\frac{\pi n}{q}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{r}\right)^2}$, однородная задача A для однородного уравнения (2.1) может иметь нетривиальное решение. Например, однородная уравнение (2.1) с однородными условиями (2.2) и (2.3) имеет нетривиальное решение

$$\begin{aligned} u(x, y, z) = & \left(\frac{1}{2} (d\theta_{n,m}^2 - c) e^{\theta_{n,m}(\frac{3}{2}p-x)} + e^{\frac{1}{2}\theta_{n,m}x} \left(c \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \theta_{n,m} (p-x) + \frac{\pi}{6} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + d\theta_{n,m}^2 \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \theta_{n,m} (p-x) \right) \right) Z_m(z) \sin \frac{n\pi y}{q}, \quad n, m \in \mathbb{N}, \end{aligned}$$

где $Z_m(z)$ — решения задачи

$$\begin{cases} Z'' + \mu Z = 0, \\ \alpha Z(0) + \beta Z'(0) = 0, \\ \gamma Z(r) + \delta Z'(r) = 0, \end{cases} \quad (3.2)$$

а $\theta_{n,m}$ являются решениями уравнения

$$\bar{\Delta} = 3 \left(c + d\theta_{n,m}^2 \right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} \theta_{n,m} p - \sqrt{3} (d\theta_{n,m}^2 - c) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} \theta_{n,m} p = 0.$$

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ

Теорема 4.1. Если выполняются следующие условия:

- 1) $\frac{\partial^7 \psi_i(y, z)}{\partial y^3 \partial z^4} \in C$ ($0 \leq y \leq q$, $0 \leq z \leq r$), $i = \overline{1, 3}$;
- 2) $\frac{\partial^5 f(x, y, z)}{\partial x \partial y^2 \partial z^2} \in C$ ($0 \leq x \leq p$, $0 \leq y \leq q$, $0 \leq z \leq r$),

и (2.4), то решение задачи A существует.

Доказательство. Решение задачи A ищем в виде

$$u(x, y, z) = X(x) V(y, z).$$

Поставляя в уравнение (2.1) и разделяя переменные, для $V(y, z)$ имеем следующую задачу:

$$\begin{cases} V_{yy} + V_{zz} + \lambda V = 0, \\ \alpha V(y, 0) + \beta V_z(y, 0) = 0, \\ \gamma V(y, r) + \delta V_z(y, r) = 0, \\ V(0, z) = V(q, z) = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

где λ — параметр разделения.

Найдем собственные значения и собственные функции задачи (4.1). Решение задачи (4.1) будем искать в виде

$$V(y, z) = Y(y) Z(z). \quad (4.2)$$

Подставляя (4.2) в уравнение (4.1), разделяя переменные, имеем задачи (3.2) и

$$\begin{cases} Y'' + \nu Y = 0, \\ Y(0) = Y(q) = 0, \end{cases} \quad (4.3)$$

где ν и μ — положительные постоянные, связанные соотношением $\lambda = \nu + \mu$.

Поступая так же, как в работе [1], для нахождения собственных значений μ в задаче (3.2), получим трансцендентное уравнение

$$\operatorname{ctg} \sqrt{\mu} q = \frac{\alpha \gamma + \delta \beta \mu}{\sqrt{\mu} (\gamma \beta - \alpha \delta)}. \quad (4.4)$$

Из (4.4) следует, что $\sqrt{\mu_m} = \frac{\pi m}{r} + \varepsilon_m$, где $\lim_{m \rightarrow \infty} \varepsilon_m = 0$, или $\mu_m = O(m^2)$, $m \rightarrow \infty$.

Соответствующие собственные функции имеют вид

$$Z_m(z) = (\alpha \sin \sqrt{\mu_m} z - \beta \sqrt{\mu_m} \cos \sqrt{\mu_m} z) A_m,$$

где A_m — произвольные постоянные, а для задачи (4.3) получим

$$Y_n(y) = A_n \sin \sqrt{\nu_n} y,$$

где A_n — произвольные постоянные, а $\nu_n = \left(\frac{n\pi}{q}\right)^2$.

Тогда в качестве решения спектральной задачи (3.2) и (4.3) возьмем функции

$$V_{n,m}(y, z) = \frac{1}{\|V_{n,m}\|^2} Z_m(z) \sin \frac{n\pi}{q} y, \quad (4.5)$$

здесь

$$\|V_{n,m}\|^2 = \left[\frac{1}{2} (\alpha^2 r + \beta^2 r \mu_m - \alpha \beta) + \left(\frac{\beta^2 \sqrt{\mu_m}}{4} - \frac{\alpha^2}{4\sqrt{\mu_m}} \right) \sin 2\sqrt{\mu_m} r + \frac{\alpha \beta}{2} \cos 2\sqrt{\mu_m} r \right] \frac{q}{2}.$$

Докажем, что

$$\|V_{n,m}\|^2 > 0$$

при всех действительных α , β и положительных μ_m , r , q .

Так как $q > 0$, достаточно доказать положительность выражения в квадратных скобках:

$$E = \frac{1}{2} (\alpha^2 r + \beta^2 r \mu_m - \alpha \beta) + \left(\frac{\beta^2 \sqrt{\mu_m}}{4} - \frac{\alpha^2}{4\sqrt{\mu_m}} \right) \sin 2\sqrt{\mu_m} r + \frac{\alpha \beta}{2} \cos 2\sqrt{\mu_m} r,$$

здесь $E = \|V_{n,m}\|^2$.

Заметим, что E является квадратичной формой по α и β :

$$E = A(r) \alpha^2 + B(r) \beta^2 + C(r) \alpha \beta,$$

где

$$\begin{aligned} A(r) &= \frac{r}{2} - \frac{1}{4\sqrt{\mu_m}} \sin(2\sqrt{\mu_m} r), \\ B(r) &= \frac{r\mu_m}{2} + \frac{\sqrt{\mu_m}}{4} \sin(2\sqrt{\mu_m} r), \end{aligned}$$

$$C(r) = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2\sqrt{\mu_m}r).$$

Используем неравенство $|\sin x| \leq x$ при $x \geq 0$:

$$A(r) > \frac{r}{2} - \frac{1}{4\sqrt{\mu_m}} 2\sqrt{\mu_m}r = 0,$$

$$B(r) > \frac{r\mu_m}{2} + \frac{\sqrt{\mu_m}}{4} 2\sqrt{\mu_m}r = 0.$$

Следовательно, $A(r) > 0$, $B(r) > 0$.

Для положительности квадратичной формы достаточно показать:

$$\Delta = (C(r))^2 - 4A(r)B(r) < 0.$$

Используем тождества:

$$1 - \cos 2x = 2\sin^2 x, \quad \sin 2x = 2\sin x \cos x.$$

После подстановки и упрощения получаем:

$$4A(r)B(r) - (C(r))^2 = (\sqrt{\mu_m}r - \sin \sqrt{\mu_m}r \cos \sqrt{\mu_m}r)^2 + \sin^4 \sqrt{\mu_m}r > 0.$$

Следовательно,

$$\Delta < 0.$$

Квадратичная форма $E(\alpha, \beta)$ положительна при всех $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Учитывая $q > 0$, получаем:

$$\|V_{n,m}\|^2 > 0.$$

Теперь разложим $f(x, y, z)$ в ряд Фурье по $\{V_{n,m}(y, z)\}$:

$$f(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{+\infty} f_{n,m}(x) V_{n,m}(y, z),$$

где $f_{n,m}(x) = \int_0^q \int_0^r f(x, y, z) V_{n,m}(y, z) dy dz.$

Интегрируя функцию $f_{n,m}(x)$ по частям и учитывая условия (2.4), имеем оценку

$$|f_{n,m}(x)| \leq M \frac{|F_{n,m}(x)|}{n^2 m^2}, \quad (4.6)$$

здесь

$$F_{n,m}(x) = \int_0^q \int_0^r \frac{\partial^4 f(x, y, z)}{\partial y^2 \partial z^2} V_{n,m}(y, z) dy dz.$$

В дальнейшем максимальное значение всех найденных положительных известных чисел в оценках будем обозначать через M .

Решение задачи A ищем в виде

$$u(x, y, z) = \sum_{n,m=1}^{+\infty} X_{n,m}(x) V_{n,m}(y, z). \quad (4.7)$$

Поставляя (4.7) в уравнение (2.1), учитывая граничные условия (2.3), получим следующую задачу:

$$\begin{cases} X'''_{n,m}(x) + \lambda_{n,m} X_{n,m}(x) = f_{n,m}(x), \\ aX_{n,m}(0) + bX''_{n,m}(0) = \psi_{1n,m}, \\ cX_{n,m}(p) + dX''_{n,m}(p) = \psi_{2n,m}, \\ X'_{n,m}(p) = \psi_{3n,m}, \end{cases} \quad (4.8)$$

где $\psi_{in,m} = \int_0^q \int_0^r \psi_i(y, z) V_{n,m}(y, z) dy dz, \quad i = \overline{1, 3}.$

Применяя интегрирование по частям к $\psi_{in,m}$ с учетом условия (2.4), получаем оценку

$$|\psi_{in,m}| \leq M \frac{|\Psi_{in,m}|}{n^3 m^4}, \quad (4.9)$$

здесь

$$\Psi_{in,m} = \frac{1}{\|V_{n,m}\|^2} \int_0^q \int_0^r \frac{\partial^7 \psi_i(y, z)}{\partial y^3 \partial z^4} Z_m(z) \cos \frac{n\pi y}{q} dy dz.$$

Решение задачи (4.8) находим методом построения функции Грина, для этого с помощью замены

$$U_{n,m}(x) = X_{n,m}(x) - \rho_{n,m}(x) \quad (4.10)$$

изменим граничные условия на однородные.

Функция $\rho_{n,m}(x)$ имеет вид

$$\rho_{n,m}(x) = \frac{1}{ap^2 + 2b} \left[(x-p)^2 \psi_{1n,m} + \frac{2apx - ax^2 + 2b}{c} \psi_{2n,m} + (x-p)(apx + 2b) \psi_{3n,m} \right]. \quad (4.11)$$

Подставляя (4.10), (4.11) в (4.8), получим задачу

$$\begin{cases} U'''_{n,m}(x) + \lambda_{n,m} U_{n,m}(x) = \lambda_{n,m} g_{n,m}(x), \\ aU_{n,m}(0) + bU''_{n,m}(0) = 0, \\ cU_{n,m}(p) + dU''_{n,m}(p) = 0, \\ U'_{n,m}(p) = 0, \end{cases} \quad (4.12)$$

здесь

$$g_{n,m}(x) = -\frac{1}{ap^2 + 2b} \left[(x-p)^2 \psi_{1n,m} + \frac{2apx - ax^2 + 2b}{c} \psi_{2n,m} + (x-p)(apx + 2b) \psi_{3n,m} \right] + \frac{f_{n,m}(x)}{\lambda_{n,m}}.$$

Учитывая (4.6), (4.9) и $\lambda_{n,m} = \left(\frac{\pi n}{q}\right)^2 + \left(\frac{\pi m}{r}\right)^2 \geq \frac{2\pi^2}{qr} nm$, $n, m \in \mathbb{N}$, имеем оценки

$$\begin{aligned} |g_{n,m}(x)| &\leq M \left(\sum_{i=1}^3 \frac{|\Psi_{in,m}|}{n^3 m^4} + \frac{|F_{n,m}(x)|}{n^3 m^3} \right), \\ |g'_{n,m}(x)| &\leq M \left(\sum_{i=1}^3 \frac{|\Psi_{in,m}|}{n^3 m^4} + \frac{|F'_{n,m}(x)|}{n^3 m^3} \right). \end{aligned} \quad (4.13)$$

Решение задачи (4.12) ищем в виде:

$$U_{n,m}(x) = \lambda_{n,m} \int_0^p G_{n,m}(x, \xi) g_{n,m}(\xi) d\xi, \quad (4.14)$$

здесь $G_{n,m}(x, \xi)$ — функция Грина задачи (4.12), которая имеет следующий вид:

$$G_{n,m}(x, \xi) = \begin{cases} G_{1n,m}(x, \xi), & 0 \leq x < \xi, \\ G_{2n,m}(x, \xi), & \xi < x \leq p, \end{cases} \quad (4.15)$$

здесь

$$\begin{aligned} G_{1n,m}(x, \xi) &= \\ &= \frac{2}{3k_{n,m}^2 \Delta} \left[e^{-k_{n,m}(\frac{1}{2}\xi + x)} \left(\left(\frac{ad}{k_{n,m}^2} - \frac{ac}{k_{n,m}^4} \right) \sin \left(\beta_{n,m}\xi + \frac{\pi}{6} \right) + \left(\frac{bc}{k_{n,m}^2} - bd \right) \cos \beta_{n,m}\xi \right) - \right. \\ &- e^{k_{n,m}(\xi - \frac{3}{2}p - x)} \left(\left(\frac{bc}{k_{n,m}^2} - \frac{ad}{k_{n,m}^2} \right) \cos \beta_{n,m}p - \frac{ac}{k_{n,m}^4} \sin \left(\beta_{n,m}p + \frac{\pi}{6} \right) + bd \cos \left(\beta_{n,m}p + \frac{\pi}{3} \right) \right) + \\ &+ e^{\frac{1}{2}k_{n,m}(x - \xi)} \left(\frac{a}{k_{n,m}^2} + b \right) \left(\frac{c}{k_{n,m}^2} - d \right) \sin \left(\beta_{n,m}(\xi - x) + \frac{\pi}{6} \right) - \\ &- e^{k_{n,m}(\xi - \frac{3}{2}p + \frac{1}{2}x)} \left(\frac{a}{k_{n,m}^2} + b \right) \left(\frac{c}{k_{n,m}^2} \sin \left(\beta_{n,m}(p - x) + \frac{\pi}{6} \right) + d \cos \beta_{n,m}(p - x) \right) + \\ &+ e^{-\frac{1}{2}k_{n,m}(\xi + 3p - x)} \left(\left(\frac{a}{k_{n,m}^2} \sin \left(\beta_{n,m}\xi + \frac{\pi}{6} \right) - b \cos \beta_{n,m}\xi \right) \times \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \times \left(\frac{2c}{k_{n,m}^2} \sin \left(\beta_{n,m} (p-x) + \frac{\pi}{6} \right) + 2d \cos \beta_{n,m} (p-x) \right) + \\ & + \left(\left(\frac{2bc}{k_{n,m}^2} - \frac{2ad}{k_{n,m}^2} \right) \cos \beta_{n,m} p + 2bd \cos \left(\beta_{n,m} p + \frac{\pi}{3} \right) - \right. \\ & \left. - \frac{2ac}{k_{n,m}^4} \sin \left(\beta_{n,m} p + \frac{\pi}{6} \right) \right) \sin \left(\beta_{n,m} (\xi - x) + \frac{\pi}{6} \right) \Bigg], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} G_{2n,m}(x, \xi) &= \frac{1}{3k_{n,m}^2 \bar{\Delta}} \left(\frac{a}{k_{n,m}^2} + b - 2e^{-\frac{3}{2}k_{n,m}\xi} \left(\frac{a}{k_{n,m}^2} \sin \left(\beta_{n,m}\xi + \frac{\pi}{6} \right) - b \cos \beta_{n,m}\xi \right) \right) \times \\ & \times \left[e^{k_{n,m}(\xi-x)} \left(\frac{c}{k_{n,m}^2} - d \right) - 2e^{k_{n,m}(\xi-\frac{3}{2}p+\frac{1}{2}x)} \left(\frac{c}{k_{n,m}^2} \sin \left(\beta_{n,m}(p-x) + \frac{\pi}{6} \right) + d \cos \beta_{n,m}(p-x) \right) \right], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \bar{\Delta}(n, m) &= \left(\frac{a}{k_{n,m}^2} + b \right) \left(\frac{c}{k_{n,m}^2} - d \right) + e^{-\frac{3}{2}k_{n,m}p} \left\{ \left(\frac{2bc}{k_{n,m}^2} - \frac{2ad}{k_{n,m}^2} - \frac{ac}{k_{n,m}^4} + bd \right) \cos \beta_{n,m}p - \right. \\ & \left. - \sqrt{3} \left(\frac{ac}{k_{n,m}^4} + bd \right) \sin \beta_{n,m}p \right\}. \end{aligned}$$

Покажем, что $\bar{\Delta}(n, m) \neq 0$. Для этого докажем следующую лемму:

Лемма 4.1. *Краевая задача*

$$\begin{cases} X'''_{n,m} + \lambda_{n,m} X_{n,m} = 0, \\ aX_{n,m}(0) + bX''_{n,m}(0) = 0, \\ cX_{n,m}(p) + dX''_{n,m}(p) = 0, \\ X'_{n,m}(p) = 0 \end{cases} \quad (4.16)$$

имеет только тривиальное решение.

Доказательство. Предположим обратное, пусть $X_{n,m}(x) \neq 0$. Рассмотрим тождество

$$X_{n,m} (X'''_{n,m} + \lambda_{n,m} X_{n,m}) = 0,$$

или

$$\left(X_{n,m} X''_{n,m} - \frac{1}{2} (X'_{n,m})^2 \right)' + \lambda_{n,m} X_{n,m}^2 = 0.$$

Интегрируя по $0 \leq x \leq p$ и учитывая краевые условия, получим

$$-\frac{d}{c} (X''_{n,m}(p))^2 + \frac{b}{a} (X''_{n,m}(0))^2 + \frac{1}{2} X'_n(0)^2 + \lambda_{n,m} \int_0^p X_{n,m}^2 dx = 0.$$

Так как $ab > 0$, $cd < 0$, $\lambda_{n,m} > 0$, то $X_{n,m} \equiv 0$. Лемма доказана. $\square$

Пусть существует такой номер n^*, m^* , что $\overline{\Delta}(n^*, m^*) = 0$, тогда существуют постоянные C_1^*, C_2^*, C_3^* , одновременно не все равные нулю, удовлетворяющие системе

$$\left\{ \begin{array}{l} C_{1n^*, m^*}^* (a + bk_{n^*, m^*}^2) + C_{2n^*, m^*}^* \left(a - \frac{1}{2}bk_{n^*, m^*}^2 \right) + C_{3n^*, m^*}^* \frac{\sqrt{3}bk_{n^*, m^*}^2}{2} = 0, \\ C_{1n^*, m^*}^* e^{-k_{n^*, m^*}^* p} (c + dk_{n^*, m^*}^2) + C_{2n^*, m^*}^* e^{\frac{1}{2}k_{n^*, m^*}^* p} \left(c \cos \frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*, m^*}^* p + \right. \\ \quad \left. + dk_{n^*, m^*}^2 \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*, m^*}^* p + \frac{2\pi}{3} \right) \right) + C_{3n^*, m^*}^* e^{\frac{1}{2}k_{n^*, m^*}^* p} \left(c \sin \frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*, m^*}^* p + \right. \\ \quad \left. + dk_{n^*, m^*}^2 \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*, m^*}^* p + \frac{2\pi}{3} \right) \right) = 0, \\ -C_{1n^*, m^*}^* e^{-k_{n^*, m^*}^* p} + C_{2n^*, m^*}^* e^{\frac{1}{2}k_{n^*, m^*}^* p} \cos \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*, m^*}^* p + \frac{\pi}{3} \right) + \\ \quad + C_{3n^*, m^*}^* e^{\frac{1}{2}k_{n^*, m^*}^* p} \sin \left(\frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*, m^*}^* p + \frac{\pi}{3} \right) = 0. \end{array} \right.$$

Отсюда имеем, что функция

$$X_{n^*, m^*}(x) = C_{1n^*, m^*}^* e^{-k_{n^*, m^*}^* x} + e^{\frac{1}{2}k_{n^*, m^*}^* x} \left(C_{2n^*, m^*}^* \cos \frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*, m^*}^* x + C_{3n^*, m^*}^* \sin \frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*, m^*}^* x \right)$$

является решением краевой задачи (4.16). Однако по доказанной лемме должно быть

$$C_{1n^*, m^*}^* e^{-k_{n^*, m^*}^* x} + e^{\frac{1}{2}k_{n^*, m^*}^* x} \left(C_{2n^*, m^*}^* \cos \frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*, m^*}^* x + C_{3n^*, m^*}^* \sin \frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*, m^*}^* x \right) \equiv 0,$$

но это невозможно в силу линейной независимости функций

$$e^{-k_{n^*, m^*}^* x}, \quad e^{\frac{1}{2}k_{n^*, m^*}^* x} \cos \frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*, m^*}^* x, \quad e^{\frac{1}{2}k_{n^*, m^*}^* x} \sin \frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*, m^*}^* x.$$

Отсюда функция вида

$$u^*(x, y, z) = \sum_{n^*, m^*=1}^{\infty} \left[C_{1n^*, m^*}^* e^{k_{n^*, m^*}^* x} + e^{-\frac{1}{2}k_{n^*, m^*}^* x} \left(C_{2n^*, m^*}^* \cos \frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*, m^*}^* x + \right. \right. \\ \left. \left. + C_{3n^*, m^*}^* \sin \frac{\sqrt{3}}{2}k_{n^*, m^*}^* x \right) \right] V_{n^*, m^*}(y, z)$$

является нетривиальным решением задачи A , а это противоречит теореме единственности.

Легко можно убедиться, что функция, определенная формулой (4.15), обладают всеми свойствами функции Грина.

В силу (4.7) и (4.10) решение задачи A имеет вид

$$u(x, y, z) = \sum_{n, m=1}^{+\infty} (U_{n, m}(x) + \rho_{n, m}(x)) V_{n, m}(y, z). \quad (4.17)$$

Если функция $u(x, y, z)$, определяемая рядом (4.17), и ее производные u_{xxx} , u_{yy} и u_{zz} сходятся абсолютно и равномерно в области $\overline{D}$, то она дает решение задачи A .

Докажем абсолютную и равномерную сходимость ряда (4.17). Из (4.17) имеем оценку

$$|u(x, y, z)| \leq M \sum_{n, m=1}^{+\infty} (|U_{n, m}(x)| + |\rho_{n, m}(x)|).$$

Теперь подставляя $G_{n,m}(x, \xi) = -\frac{1}{\lambda_{n,m}} G_{n,m\xi\xi\xi}(x, \xi)$ в (4.14) и интегрируя, имеем

$$U_{n,m}(x) = -g_{n,m}(x) + g_{n,m}(0) G_{2n,m\xi\xi}(x, 0) - g_{n,m}(p) G_{1n,m\xi\xi}(x, p) + \int_0^p G_{n,m\xi\xi}(x, \xi) g_{n,m}'(\xi) d\xi.$$

Учитывая (4.11), (4.13) и

$$|G_{2n,m\xi\xi}(x, 0)| \leq M, \quad |G_{1n,m\xi\xi}(x, p)| \leq M, \quad |G_{n,m\xi\xi}(x, \xi)| \leq M,$$

из функции Грина (4.15) получим оценки

$$|\rho_{n,m}(x)| \leq \frac{M}{n^3 m^4} (|\Psi_{1n,m}| + |\Psi_{2n,m}| + |\Psi_{3n,m}|),$$

$$|U_{n,m}(x)| \leq M \left[\sum_{i=1}^3 \frac{|\Psi_{in,m}|}{n^3 m^4} + \frac{1}{n^3 m^3} (|F_{n,m}(0)| + |F_{n,m}(p)| + |F_{n,m}(x)| + |F'_{n,m}(x)|) \right].$$

Отсюда

$$|u(x, y, z)| \leq M \sum_{n,m=1}^{+\infty} \left[\sum_{i=1}^3 \frac{|\Psi_{in,m}|}{n^3 m^4} + \frac{1}{n^3 m^3} (|F_{n,m}(0)| + |F_{n,m}(p)| + |F_{n,m}(x)| + |F'_{n,m}(x)|) \right] < \infty.$$

Отсюда следует, что ряд (4.17) сходится абсолютно и равномерно в области $\overline{D}$.

Теперь докажем, что частные производные ряда (4.17), входящие в уравнение (2.1), также сходятся абсолютно и равномерно в области $\overline{D}$. Для этого вычислим частные производные ряда (4.17) по переменным y и z до второго порядка, получим

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = -\frac{\pi^2}{q^2} \sum_{n,m=1}^{+\infty} n^2 (U_{n,m}(x) + \rho_{n,m}(x)) V_{n,m}(y, z),$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = -\frac{\pi^2}{r^2} \sum_{n,m=1}^{+\infty} m^2 (U_{n,m}(x) + \rho_{n,m}(x)) V_{n,m}(y, z).$$

Учитывая оценку $u(x, y, z)$, получим

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| \leq M \sum_{n,m=1}^{+\infty} \left[\sum_{i=1}^3 \frac{|\Psi_{in,m}|}{nm^4} + \frac{1}{nm^3} (|F_{n,m}(0)| + |F_{n,m}(p)| + |F_{n,m}(x)| + |F'_{n,m}(x)|) \right],$$

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| \leq M \sum_{n,m=1}^{+\infty} \left[\sum_{i=1}^3 \frac{|\Psi_{in,m}|}{n^3 m^2} + \frac{1}{n^3 m} (|F_{n,m}(0)| + |F_{n,m}(p)| + |F_{n,m}(x)| + |F'_{n,m}(x)|) \right].$$

Используя неравенства Коши—Буняковского и Бесселя, получим

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| \leq M \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{nm^4} \right)^2} \left(\sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |\Psi_{1n,m}|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |\Psi_{2n,m}|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |\Psi_{3n,m}|^2} \right) +$$

$$+ M \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{nm^3} \right)^2} \left(\sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |F_{n,m}(0)|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |F_{n,m}(p)|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |F_{n,m}(x)|^2} + \right.$$

$$\left. + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |F'_{n,m}(x)|^2} \right) \leq \overline{M} \left(\sum_{i=1}^3 \left\| \frac{\partial^7 \psi_i(y, z)}{\partial y^3 \partial z^4} \right\|_{L_2(0 < y < q, 0 < z < r)} + \left\| \frac{\partial^4 f(0, y, z)}{\partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(0 < y < q, 0 < z < r)} + \right.$$

$$\left. + \left\| \frac{\partial^4 f(p, y, z)}{\partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(0 < y < q, 0 < z < r)} + \left\| \frac{\partial^4 f(x, y, z)}{\partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(D)} + \left\| \frac{\partial^5 f(x, y, z)}{\partial x \partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(D)} \right) < \infty,$$

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right| &\leq M \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{n^3 m} \right)^2} \left(\sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |F_{n,m}(0)|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |F_{n,m}(p)|^2} + \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |F_{n,m}(x)|^2} + \right. \\ &+ \left. \sqrt{\sum_{n,m=1}^{+\infty} |F'_{n,m}(x)|^2} \right) \leq \overline{M} \left(\left\| \frac{\partial^4 f(0, y, z)}{\partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(0 < y < q, 0 < z < r)} + \left\| \frac{\partial^4 f(p, y, z)}{\partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(0 < y < q, 0 < z < r)} + \right. \\ &+ \left. \left\| \frac{\partial^4 f(x, y, z)}{\partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(D)} + \left\| \frac{\partial^5 f(x, y, z)}{\partial x \partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(D)} \right) < \infty, \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} \sum_{n,m=1}^{+\infty} |\Psi_{in,m}|^2 &\leq \left\| \frac{\partial^7 \psi_i(y, z)}{\partial y^3 \partial z^4} \right\|_{L_2(0 < y < q, 0 < z < r)}^2, \quad i = \overline{1, 3}, \\ \sum_{n,m=1}^{+\infty} |F_{n,m}(x)|^2 &\leq \left\| \frac{\partial^4 f(x, y, z)}{\partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(D)}^2, \\ \sum_{n,m=1}^{+\infty} |F'_{n,m}(x)|^2 &\leq \left\| \frac{\partial^5 f(x, y, z)}{\partial x \partial y^2 \partial z^2} \right\|_{L_2(D)}^2, \quad \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}, \quad \sum_{m=1}^{+\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6}. \end{aligned}$$

Следовательно, ряд, соответствующий функции $\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, сходится абсолютно и равномерно в области $\overline{D}$. Абсолютная и равномерная сходимость третьей производной по x ряда (4.17) следует из неравенства $\left| \frac{\partial^3 u}{\partial x^3} \right| \leq \left| \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right| + \left| \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right|$ и доказанного выше.

Теорема 4.1 доказана. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Апаков Ю. П. К теории уравнений третьего порядка с кратными характеристиками. — Ташкент: Fan va texnologiya, 2019.
2. Арнольд В. И. Малые знаменатели и проблемы устойчивости движения в классической и небесной механике // Усп. мат. наук. — 1963. — 18, № 6. — С. 91–192.
3. Джураев Т. Д., Апаков Ю. П. Об автомодельном решении одного уравнения третьего порядка с кратными характеристиками // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2007. — 15, № 2. — С. 18–26. — DOI: [10.14498/vsgtu525](https://doi.org/10.14498/vsgtu525).
4. Джураев Т. Д., Апаков Ю. П. К теории уравнения третьего порядка с кратными характеристиками, содержащего вторую производную по времени // Укр. мат. ж. — 2010. — 62, № 1. — С. 40–51.
5. Диесперов Т. К. О функции Грина линеаризованного вязкого трансзвукового уравнения // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1972. — 12, № 5. — С. 1265–1279.
6. Козлов В. В. Условие вмерзновения поля направлений, малые знаменатели и хаотизация стационарных течений вязкой жидкости // Прикл. мат. мех. — 1999. — 63, № 2. — С. 237–244.
7. Рыжов О. С. Асимптотическая картина обтекания тел вращения со звуковым потоком вязкого и теплопроводящего газа // Прикл. мат. мех. — 1965. — 29, № 6. — С. 1004–1014.
8. Сабитов К. Б. Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа третьего порядка // Докл. РАН. — 2009. — 427, № 5. — С. 593–596.
9. Сабитов К. Б. Задача Дирихле для уравнения смешанного типа третьего порядка в прямоугольной области // Дифф. уравн. — 2011. — 47, № 5. — С. 705–713.
10. Сабитов К. Б., Удалова Г. Ю. Краевая задача для уравнения смешанного типа третьего порядка с условиями периодичности // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2013. — 32, № 3. — С. 29–45. — DOI: [10.14498/vsgtu1220](https://doi.org/10.14498/vsgtu1220).
11. Юлдашев Т. К. Обратная задача для одного интегро-дифференциального уравнения Фредгольма в частных производных третьего порядка // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-мат. науки. — 2014. — 34, № 1. — С. 56–65. — DOI: [10.14498/vsgtu1299](https://doi.org/10.14498/vsgtu1299).
12. Block H. Sur les equations lineaires aux derivees partielles a carateristiques multiples // Ark. Mat. Astron. Fus. Note 1. — 1912. — 13, № 7. — С. 1–34.
13. Cattabriga L. Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabilia caratteristiche multiple // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 1961. — 31. — С. 1–45.

14. *Del Vecchio E.* Sulle equazioni $z_{xxx} - z_y + \varphi_1(x, y) = 0$, $z_{xxx} - z_{yy} + \varphi_2(x, y) = 0$ // *Memorie R. Accad. Sci. Ser. 2.* — 1915. — 66. — С. 1–41.

Ю. П. Апаков

Институт математики им. В. И. Романовского АН РУз, Ташкент, Узбекистан

Наманганский государственный технический университет, Наманган, Узбекистан

E-mail: yusupjonapakov@gmail.com, РИНЦ AuthorID: [261525](#), ResearcherID: [ABG-4969-2020](#), Scopus: [36452842000](#), ORCID: [0000-0001-9611-1466](#)

А. А. Хамитов

Наманганский государственный технический университет, Наманган, Узбекистан

E-mail: azizbek.khamitov.93@mail.ru

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-1-12](#)
EDN: [TDHXIW](#)

UDC 517.956:517.956.6
Research article

Construction of a solution to a boundary-value problem for a third-order nonhomogeneous equation using Green's function

Yu. P. Apakov^{1,2} and A. A. Khamitov²

¹ *V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan*

² *Namangan State Technical University, Namangan, Uzbekistan*

Abstract. In this paper, we consider the third boundary-value problem for a third-order nonhomogeneous equation with multiple characteristics in three-dimensional space. We prove the uniqueness of the solution using the energy integral method, and we prove the existence of the solution using the separation of variables method. We present the solution explicitly using the constructed Green's function. We find the conditions on the given functions that ensure the regularity of the solution. Proving the uniform convergence, we establish that the “small denominator” is nonzero.

Keywords: third boundary-value problem, third-order nonhomogeneous equation, energy integral, separation of variables, Green's function.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

Authors' contribution. All authors participated in the development of the study concept, collection, processing, and analysis of data, writing the manuscript, and formulation of conclusions.

For citation: Yu. P. Apakov, A. A. Khamitov, “Construction of a solution to a boundary-value problem for a third-order nonhomogeneous equation using Green's function,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. 72, No. 1, 1–12. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-1-12](#) EDN: [TDHXIW](#)

REFERENCES

1. Yu. P. Apakov, *K teorii uravneniy tret'ego por'yadka s kratnymi kharakteristikami* [On the Theory of Third-Order Equations with Multiple Characteristics], Fan Va Texnologiya, Tashkent, 2019 (in Russian).



2. V. I. Arnol'd, "Mal'ye znamenateli i problemy ustoychivosti dvizheniya v klassicheskoy i nebesnoy mekhanike" [Small denominators and problems of stability of motion in classical and celestial mechanics], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 1963, **18**, No. 6, 91–192 (in Russian).
3. T. D. Dzhuraev and Yu. P. Apakov, "Ob avtomodel'nom reshenii odnogo uravneniya tret'ego poryadka s kratnymi kharakteristikami" [On a self-similar solution of one third-order equation with multiple characteristics], *Vestn. Sam. Gos. tekhn. Un-ta. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [Bull. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys.-Math. Sci.], 2007, **15**, No. 2, 18–26 (in Russian), DOI: [10.14498/vsgtu525](https://doi.org/10.14498/vsgtu525).
4. T. D. Dzhuraev and Yu. P. Apakov, "K teorii uravneniya tret'ego poryadka s kratnymi kharakteristikami, soderzhashchego vtoruyu proizvodnyuyu po vremeni" [On the theory of a third-order equation with multiple characteristics containing a second derivative with respect to time], *Ukr. Mat. Zh.* [Ukr. Math. J.], 2010, **62**, No. 1, 40–51 (in Russian).
5. T. K. Diesperov, "O funktsii Grina linearizovannogo vyazkogo transzvukovogo uravneniya" [On the Green's function of the linearized viscous transonic equation], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 1972, **12**, No. 5, 1265–1279 (in Russian).
6. V. V. Kozlov, "Uslovie vmorozhennosti polya napravleniy, mal'ye znamenateli i khaotizatsiya statsionarnykh techeniy vyazkoy zhidkosti" [The condition of freezing the direction field, small denominators and chaotization of stationary flows of viscous fluid], *Prikl. Mat. Mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1999, **63**, No. 2, 237–244 (in Russian).
7. O. S. Ryzhov, "Asimptoticheskaya kartina obtekaniya tel vrashcheniya so zvukovym potokom vyazkogo i teploprovodnyashchego gaza" [Asymptotic view of the flow around bodies of revolution with a sonic flow of viscous and heat-conducting gas], *Prikl. Mat. Mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1965, **29**, No. 6, 1004–1014 (in Russian).
8. K. B. Sabitov, "Ob odnoy kraevoy zadache dlya uravneniya smeshannogo tipa tret'ego poryadka" [On a boundary-value problem for a third-order equation of mixed type], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2009, **427**, No. 5, 593–596 (in Russian).
9. K. B. Sabitov, "Zadacha Dirikhle dlya uravneniya smeshannogo tipa tret'ego poryadka v pryamougol'noy oblasti" [The Dirichlet problem for a third-order mixed-type equation in a rectangular domain], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 2011, **47**, No. 5, 705–713 (in Russian).
10. K. B. Sabitov and G. Yu. Udalova, "Kraevaya zadacha dlya uravneniya smeshannogo tipa tret'ego poryadka s usloviyami periodichnosti" [Boundary-value problem for a third-order equation of mixed-type with periodicity conditions], *Vestn. Sam. Gos. Tekhn. Un-ta. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [Bull. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys.-Math. Sci.], 2013, **32**, No. 3, 29–45 (in Russian), DOI: [10.14498/vsgtu1220](https://doi.org/10.14498/vsgtu1220).
11. T. K. Yuldashev, "Obratnaya zadacha dlya odnogo integro-differentsial'nogo uravneniya Fredgol'ma v chastnykh proizvodnykh tret'ego poryadka" [Inverse problem for one Fredholm integro-differential equation in partial derivatives of the third order], *Vestn. Sam. Gos. Tekhn. Un-ta. Ser. Fiz.-Mat. Nauki* [Bull. Samara State Tech. Univ. Ser. Phys.-Math. Sci.], 2014, **34**, No. 1, 56–65 (in Russian), DOI: [10.14498/vsgtu1299](https://doi.org/10.14498/vsgtu1299).
12. H. Block, "Sur les equations lineaires aux derivees partielles a carateristiques multiples," *Ark. Mat. Astron. Fus. Note 1*, 1912, **13**, No. 7, 1–34.
13. L. Cattabriga, "Potenziali di linea e di dominio per equazioni non paraboliche in due variabilia caratteristiche multiple," *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 1961, **31**, 1–45.
14. E. DelVecchio, "Sulle equazioni $z_{xxx} - z_y + \varphi_1(x, y) = 0$, $z_{xxx} - z_{yy} + \varphi_2(x, y) = 0$," *Memorie R. Accad. Sci. Ser. 2*, 1915, **66**, 1–41.

Yu. P. Apakov

V. I. Romanovsky Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Republic of Uzbekistan, Tashkent, Uzbekistan

Namangan State Technical University, Namangan, Uzbekistan

E-mail: yusupjonapakov@gmail.com, eLIBRARY AuthorID: 261525,

ResearcherID: [ABG-4969-2020](https://orcid.org/0000-0001-9611-1466), Scopus: 36452842000, ORCID: 0000-0001-9611-1466

A. A. Khamitov

Namangan State Technical University, Namangan, Uzbekistan

E-mail: azizbek.khamitov.93@mail.ru

СОЛИТОНЫ РИЧЧИ РАЗРЕШИМЫХ ГРУПП ЛИ

Л. БЕЛАРБИ

University of Mostaganem, Mostaganem, Algeria

Аннотация. В данной работе мы рассматриваем и изучаем существование нетривиальных (т. е. не эйнштейновских) солитонов Риччи на римановых трехмерных и пятимерных разрешимых группах Ли. Более того, мы показываем, что они не являются градиентными солитонами Риччи.

Ключевые слова: солитоны Риччи, разрешимые группы Ли, римановы многообразия, градиентные солитоны Риччи, трехмерные группы Ли, пятимерные группы Ли, метрики Эйнштейна, поток Риччи, лоренцевы многообразия, связность Леви-Чивиты.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Беларби Л. Солитоны Риччи разрешимых групп Ли // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 13–23. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-13-23](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-13-23) EDN: [TGXCNE](https://www.edn.ru/TGXCNE)

1. ВВЕДЕНИЕ

Солитон Риччи — это естественное обобщение метрики Эйнштейна, и он определяется на псевдоримановом многообразии (M, g) следующим образом:

$$L_X g + \varrho = \lambda g, \quad (1.1)$$

где X — гладкое векторное поле на M , L_X обозначает производную Ли в направлении X , ϱ — тензор Риччи, а λ — действительное число. Солитон Риччи называется *сжимающимся*, *устойчивым* или *расширяющимся*, если $\lambda > 0$, $\lambda = 0$ или $\lambda < 0$, соответственно. Кроме того, будем говорить, что солитон Риччи (M, g) является *градиентным солитоном Риччи*, если он допускает векторное поле X , удовлетворяющее условию $X = \text{grad } h$ для некоторой потенциальной функции h .

Изучение солитонов Риччи в различных геометрических пространствах является одной из интересных тем в геометрии и математической физике. В частности, эта тема приобрела большее значение после того, как Григорий Перельман применил солитоны Риччи для решения давней гипотезы Пуанкаре. Солитоны Риччи соответствуют автомодельным решениям гамильтонова потока Риччи [15], играют фундаментальную роль в формировании сингулярностей потока, и изучались несколькими авторами (см. [11, 12]). Их можно рассматривать в качестве неподвижных точек потока Риччи как динамической системы на пространстве римановых метрик по модулю диффеоморфизмов и масштабирований. Солитоны Риччи представляют интерес и для физиков, и в физической литературе называются *квазиэйнштейновскими метриками*. Фактически, физики-теоретики изучают уравнение солитонов Риччи в связи с теорией струн. Важный вклад в этом направлении принадлежит Фридану [14].

Лоренцевы солитоны Риччи интенсивно изучались и обнаружили множество существенных различий по сравнению с римановым случаем (см. [7, 21]). В самом деле, хотя существуют трехмерные римановы однородные солитоны Риччи [1, 18], на трехмерных группах Ли [13] не существует левоинвариантных римановых солитонов Риччи [13] (см. также [16]). В работе [8] Кальварузо и Фио (см. также [9]) было доказано, в отличие от риманового случая, существование некомпактных четырехмерных однородных псевдоримановых солитонов Риччи, которые не изометричны солвмногообразиям. Эти результаты стимулируют дальнейшее исследование солитонов Риччи на лоренцевских многообразиях.

2. СОЛИТОНЫ РИЧЧИ ТРЕХМЕРНОЙ РАЗРЕШИМОЙ ГРУППЫ ЛИ

В этом разделе мы анализируем существование солитонов Риччи на трехмерной римановой разрешимой группе Ли (Sol_3, g) .

Пусть $X = f_1 e_1 + f_2 e_2 + f_3 e_3$ — произвольное векторное поле на (Sol_3, g) , где $f_1, \dots, f_3$ — гладкие функции переменных x, y, z . Мы будем обозначать координатный базис $\left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}$ через $\{\partial_x, \partial_y, \partial_z\}$.

Риманова группа Ли Sol_3 — это группа Ли в $\mathbb{R}^3$, снабженная левоинвариантной римановой метрикой

$$g = e^{2z} dx^2 + e^{-2z} dy^2 + dz^2, \quad (2.1)$$

где (x, y, z) — стандартные координаты в $\mathbb{R}^3$.

Левоинвариантный ортонормированный репер $\{E_1, E_2, E_3\}$ в римановой группе Ли Sol_3 задается следующим образом:

$$E_1 = e^{-z} \frac{\partial}{\partial x}, \quad E_2 = e^z \frac{\partial}{\partial y}, \quad E_3 = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Связность Леви-Чивиты ∇ римановой группы Ли Sol_3 относительно этого репера задается как

$$\begin{cases} \nabla_{E_1} E_1 = -E_3, & \nabla_{E_1} E_2 = 0, & \nabla_{E_1} E_3 = E_1, \\ \nabla_{E_2} E_1 = 0, & \nabla_{E_2} E_2 = E_3, & \nabla_{E_2} E_3 = -E_2, \\ \nabla_{E_3} E_1 = 0, & \nabla_{E_3} E_2 = 0, & \nabla_{E_3} E_3 = 0. \end{cases}$$

Ненулевые компоненты тензора кривизны R вычисляются следующим образом:

$$\begin{cases} R(E_1, E_2)E_1 = -E_2, & R(E_1, E_2)E_2 = E_1, \\ R(E_1, E_3)E_1 = E_3, & R(E_1, E_3)E_3 = -E_1, \\ R(E_2, E_3)E_2 = E_3, & R(E_2, E_3)E_3 = -E_2. \end{cases}$$

Компоненты кривизны Риччи $\{\varrho_{ij}\}$ вычисляются следующим образом:

$$\varrho_{11} = \varrho_{12} = \varrho_{13} = \varrho_{23} = \varrho_{22} = 0, \quad Ric_{33} = -2. \quad (2.2)$$

Скалярная кривизна τ римановой группы Ли Sol_3 постоянна, и мы имеем

$$\tau = tr \varrho = \sum_{i=1}^3 g(E_i, E_i) \varrho(E_i, E_i) = -2.$$

Рассмотрим трехмерную разрешимую группу Ли (Sol_3, g) , снабженную левоинвариантной римановой метрикой (2.1), и пусть X — векторное поле на Sol_3 . Производная Ли метрики (2.1) по X задается формулой

$$\begin{cases} (\mathcal{L}_X g)(E_1, E_1) = 2[f_3 + e^{-z} \partial_x f_1], \\ (\mathcal{L}_X g)(E_1, E_2) = e^{-z} \partial_x f_2 + e^z \partial_y f_1, \\ (\mathcal{L}_X g)(E_1, E_3) = e^{-z} \partial_x f_3 - f_1 + \partial_z f_1, \\ (\mathcal{L}_X g)(E_2, E_2) = -2[f_3 - e^z \partial_y f_2], \\ (\mathcal{L}_X g)(E_2, E_3) = e^z \partial_y f_3 + f_2 + \partial_z f_2, \\ (\mathcal{L}_X g)(E_3, E_3) = 2\partial_z f_3. \end{cases} \quad (2.3)$$

Таким образом, с учетом равенств (2.1), (2.2) и (2.3) в (1.1), простые вычисления показывают, что риманова трехмерная разрешимая группа Ли (Sol_3, g) является солитоном Риччи тогда и только тогда, когда справедлива следующая система:

$$\begin{cases} f_3 + e^{-z}\partial_x f_1 = \frac{\lambda}{2}, \\ e^{-z}\partial_x f_2 + e^z\partial_y f_1 = 0, \\ e^{-z}\partial_x f_3 - f_1 + \partial_z f_1 = 0, \\ f_3 - e^z\partial_y f_2 = -\frac{\lambda}{2}, \\ e^z\partial_y f_3 + f_2 + \partial_z f_2 = 0, \\ \partial_z f_3 - 1 = \frac{\lambda}{2}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Шестое уравнение в (2.4) дает

$$f_3 = \left(\frac{\lambda}{2} + 1\right)z + F(x, y). \quad (2.5)$$

Из первого уравнения в (2.4) имеем

$$\partial_x f_1 = e^z \left[\frac{\lambda}{2} - \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)z - F \right] \quad (2.6)$$

и, выписывая (2.6) относительно z , получим

$$\partial_z \partial_x f_1 = e^z \left[-\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)z - F - 1 \right]. \quad (2.7)$$

Далее выпишем третье уравнение в (2.4) относительно x и, используя (2.6) и (2.7), докажем, что $\lambda = -2$ и

$$\partial_x^2 F = 0. \quad (2.8)$$

С другой стороны, из четвертого уравнения в (2.4) получим

$$\partial_y f_2 = e^{-z} \left[\frac{\lambda}{2} + \left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)z + F \right] \quad (2.9)$$

и, выписывая уравнение (2.9) относительно z , получим

$$\partial_z \partial_y f_2 = e^{-z} \left[-\left(1 + \frac{\lambda}{2}\right)z - F + 1 \right]. \quad (2.10)$$

Далее выпишем пятое уравнение в (2.4) относительно y и, используя (2.9) и (2.10), убедимся, что $\lambda = -2$, и получим, что

$$\partial_y^2 F = 0. \quad (2.11)$$

Из уравнений (2.5), (2.11) и (2.8) следует, что

$$f_3 = F(x, y) = \beta_1 x + \beta_2 y + \beta_3 xy + \beta_4, \quad (2.12)$$

где $\beta_i \in \mathbb{R}$.

Из первого уравнения в (2.4) и из (2.12) получим

$$f_1 = e^z \left[-(1 + \alpha_4)x - \frac{\beta_1}{2}x^2 - \beta_2 xy - \frac{\beta_3}{2}x^2 y \right] + T(y, z),$$

где T — гладкая функция.

Из четвертого уравнения в (2.4) и равенства (2.12) получим

$$f_2 = e^{-z} \left[(\beta_4 - 1)y + \beta_1 xy + \frac{\beta_2}{2}y^2 + \frac{\beta_3}{2}xy^2 \right] + I(x, z),$$

где I — гладкая функция.

Далее, заменив f_1 и f_2 во втором уравнении в (2.4), получим

$$\left(e^z \partial_y T + e^{-2z} \left[\beta_1 y + \frac{\beta_3}{2} y^2 \right] \right) + \left(e^{-z} \partial_x I - e^{2z} \left[\beta_2 x + \frac{\beta_3}{2} x^2 \right] \right) = 0. \quad (2.13)$$

Поскольку приведенное выше уравнение (2.13) выполняется для всех значений z , в частности, это означает, что

$$\begin{cases} e^z \partial_y T + e^{-2z} \left[\beta_1 y + \frac{\beta_3}{2} y^2 \right] = 0, \\ e^{-z} \partial_x I - e^{2z} \left[\beta_2 x + \frac{\beta_3}{2} x^2 \right] = 0. \end{cases}$$

откуда, интегрируя, получим

$$\begin{cases} T = -e^{-3z} \left[\frac{\beta_1}{2} y^2 + \frac{\beta_3}{6} y^3 \right] + \bar{T}(z), \\ I = e^{3z} \left[\frac{\beta_2}{2} x^2 + \frac{\beta_3}{6} x^3 \right] + \bar{I}(z). \end{cases}$$

где $\bar{T}$ и $\bar{I}$ — гладкие функции.

Таким образом,

$$\begin{cases} f_1 = e^z \left[-(1 + \beta_4)x - \frac{\beta_1}{2} x^2 - \beta_2 xy - \frac{\beta_3}{2} x^2 y \right] - e^{-3z} \left[\frac{\beta_1}{2} y^2 + \frac{\beta_3}{6} y^3 \right] + \bar{T}(z), \\ f_2 = e^{-z} \left[(\beta_4 - 1)y + \beta_1 xy + \frac{\beta_2}{2} y^2 + \frac{\beta_3}{2} xy^2 \right] + e^{3z} \left[\frac{\beta_2}{2} x^2 + \frac{\beta_3}{6} x^3 \right] + \bar{I}(z). \end{cases}$$

Подставляя f_1 и f_3 в третье уравнение в (2.4), получим

$$e^{-z} [\beta_1 + \beta_3 y] + 4e^{-3z} \left[\frac{\beta_1}{2} y^2 + \frac{\beta_3}{6} y^3 \right] - \bar{T}(z) + \bar{T}'(z) = 0. \quad (2.14)$$

Поскольку приведенное выше уравнение (2.14) выполняется для всех значений z , в частности, это означает, что $\beta_1 = \beta_3 = 0$ и

$$\bar{T} = t_1 e^z,$$

где $t_1 \in \mathbb{R}^{*,+}$.

Подставив f_2 и f_3 в пятое уравнение в (2.4), получим

$$e^z [\beta_2 + \beta_3 x] + 4e^{3z} \left[\frac{\beta_2}{2} x^2 + \frac{\beta_3}{6} x^3 \right] + \bar{I}(z) + \bar{I}'(z) = 0. \quad (2.15)$$

Поскольку приведенное выше уравнение (2.15) выполняется для всех значений z , в частности, это означает, что $\beta_2 = \beta_3 = 0$ и

$$\bar{I} = t_2 e^{-z},$$

где $t_2 \in \mathbb{R}^{*,+}$.

Наконец, решение системы (2.4) выражается следующим образом:

$$\begin{cases} f_1 = (t_1 - (\beta_4 + 1)x) e^z, \\ f_2 = (t_2 + (\beta_4 - 1)y) e^{-z}, \\ f_3 = \beta_4, \end{cases} \quad (2.16)$$

где $\beta_4 \in \mathbb{R}$, и $t_1, t_2 \in \mathbb{R}^{*,+}$. Таким образом, легко следует, что векторное поле $X = f_1 E_1 + f_2 E_2 + f_3 E_3$, где $f_1, \dots, f_3$ задаются формулой (2.16), удовлетворяет системе (2.4). Заметим, что $\lambda = -2$. Подводя итог, мы доказали, что риманова трехмерная разрешимая группа Ли Sol_3 допускает векторные поля, для которых выполняется уравнение (1.1). Справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. Пусть (Sol_3, g) — трехмерная разрешимая группа Ли, снабженная левосинвариантной римановой метрикой g , заданной уравнением (2.1). Тогда (Sol_3, g) является расширяющимся солитоном Риччи.

Пусть $X = \text{grad } f$ — произвольное градиентное векторное поле на (Sol_3, g) с потенциальной функцией f , а X задается следующим образом:

$$\text{grad } f = e^{-2z} \partial_x f \partial_x + e^{2z} \partial_y f \partial_y + \partial_z f \partial_z.$$

Из (2.16) следует, что (Sol_3, g) является градиентным солитоном тогда и только тогда, когда потенциальная функция h удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \partial_x f = (t_1 - (\beta_4 + 1)x) e^{2z}, \\ \partial_y f = (t_2 + (\beta_4 - 1)y) e^{-2z}, \\ \partial_z f = \beta_4. \end{cases}$$

Следовательно, взяв производные по z первого уравнения и по x последнего уравнения в приведенной выше системе, мы заключаем, что $\partial_x \partial_z f = 2(t_1 - (\beta_4 + 1)x) e^{2z} = 0$ и, следовательно, $t_1 = 0$ и $\beta_4 = 1$. Далее, взяв производные по z второго уравнения и по y последнего уравнения в приведенной выше системе, мы заключаем, что $\partial_y \partial_z f = -2(t_2 + (\beta_4 - 1)y) e^{-2z} = 0$ и, следовательно, $t_2 = 0$ и $\beta_4 = -1$, что приводит к противоречию. Таким образом, мы доказали следующий результат.

Следствие 2.1. Пусть (Sol_3, g) — трехмерная разрешимая группа Ли, снабженная левоинвариантной римановой метрикой g , заданной уравнением (2.1). Тогда (Sol_3, g) не является градиентным солитоном Риччи.

3. Солитоны Риччи пятимерной разрешимой группы Ли

В этом разделе мы анализируем существование солитонов Риччи на пятимерной римановой разрешимой группе Ли (Sol_5, g) .

Рассмотрим пятимерную разрешимую группу Ли (Sol_5, g) , снабженную левоинвариантной римановой метрикой.

$$g = \sum_{i=0}^2 e^{-2u_i} (dx_i)^2 + a \sum_{\alpha, \beta=1}^2 du_\alpha du_\beta. \quad (3.1)$$

Пусть $V = X\partial_{x_0} + Y\partial_{x_1} + Z\partial_{x_2} + S\partial_{u_1} + T\partial_{u_2}$ — векторное поле на Sol_5 , где X, Y, Z, S, T — гладкие функции переменных x_0, x_1, x_2, u_1, u_2 . Ненулевые компоненты тензора Риччи:

$$\varrho_{u_1 u_1} = \varrho_{u_2 u_2} = -2 \text{ и } \varrho_{u_1 u_2} = -1. \quad (3.2)$$

Производная Ли метрики (3.1) по V задается формулой

$$\left\{ \begin{array}{l} (L_V g)(\partial_{x_0}, \partial_{x_0}) = 2e^{2(u_1+u_2)}(S+T+\partial_{x_0}X), \\ (L_V g)(\partial_{x_0}, \partial_{x_1}) = e^{-2u_1}\partial_{x_0}Y + e^{2(u_1+u_2)}\partial_{x_1}X, \\ (L_V g)(\partial_{x_0}, \partial_{x_2}) = e^{-2u_2}\partial_{x_0}Z + e^{2(u_1+u_2)}\partial_{x_2}X, \\ (L_V g)(\partial_{x_0}, \partial_{u_1}) = a\partial_{x_0}S + \frac{a}{2}\partial_{x_0}T + e^{2(u_1+u_2)}\partial_{u_1}X, \\ (L_V g)(\partial_{x_0}, \partial_{u_2}) = a\partial_{x_0}T + \frac{a}{2}\partial_{x_0}S + e^{2(u_1+u_2)}\partial_{u_2}X, \\ (L_V g)(\partial_{x_1}, \partial_{x_1}) = 2e^{-2u_1}(-S+\partial_{x_1}Y), \\ (L_V g)(\partial_{x_1}, \partial_{x_2}) = e^{-2u_2}\partial_{x_1}Z + e^{-2u_1}\partial_{x_2}Y, \\ (L_V g)(\partial_{x_1}, \partial_{u_1}) = a\partial_{x_1}S + \frac{a}{2}\partial_{x_1}T + e^{-2u_1}\partial_{u_1}Y, \\ (L_V g)(\partial_{x_1}, \partial_{u_2}) = a\partial_{x_1}T + \frac{a}{2}\partial_{x_1}S + e^{-2u_1}\partial_{u_2}Y, \\ (L_V g)(\partial_{x_2}, \partial_{x_2}) = 2e^{-2u_2}(-T+\partial_{x_2}Z), \\ (L_V g)(\partial_{x_2}, \partial_{u_1}) = a\partial_{x_2}S + \frac{a}{2}\partial_{x_2}T + e^{-2u_2}\partial_{u_1}Z, \\ (L_V g)(\partial_{x_2}, \partial_{u_2}) = a\partial_{x_2}T + \frac{a}{2}\partial_{x_2}S + e^{-2u_2}\partial_{u_2}Z, \\ (L_V g)(\partial_{u_1}, \partial_{u_1}) = 2a\partial_{u_1}S + a\partial_{u_1}T, \\ (L_V g)(\partial_{u_1}, \partial_{u_2}) = a\partial_{u_1}T + a\partial_{u_2}S + \frac{a}{2}\partial_{u_1}S + \frac{a}{2}\partial_{u_2}T, \\ (L_V g)(\partial_{u_2}, \partial_{u_2}) = 2a\partial_{u_2}T + a\partial_{u_2}S. \end{array} \right. \quad (3.3)$$

Таким образом, подставляя равенства (3.1), (3.2) и (3.3) в уравнение (1.1), с помощью стандартных вычислений получаем, что риманова пятимерная разрешимая группа Ли (Sol_5, g) является

солитоном Риччи тогда и только тогда, когда справедлива следующая система уравнений:

$$\left\{ \begin{array}{l} S + T + \partial_{x_0} X = \frac{\lambda}{2}, \\ e^{-2u_1} \partial_{x_0} Y + e^{2(u_1+u_2)} \partial_{x_1} X = 0, \\ e^{-2u_2} \partial_{x_0} Z + e^{2(u_1+u_2)} \partial_{x_2} X = 0, \\ a \partial_{x_0} S + \frac{a}{2} \partial_{x_0} T + e^{2(u_1+u_2)} \partial_{u_1} X = 0, \\ a \partial_{x_0} T + \frac{a}{2} \partial_{x_0} S + e^{2(u_1+u_2)} \partial_{u_2} X = 0, \\ \partial_{x_1} Y - S = \frac{\lambda}{2}, \\ e^{-2u_2} \partial_{x_1} Z + e^{-2u_1} \partial_{x_2} Y = 0, \\ a \partial_{x_1} S + \frac{a}{2} \partial_{x_1} T + e^{-2u_1} \partial_{u_1} Y = 0, \\ a \partial_{x_1} T + \frac{a}{2} \partial_{x_1} S + e^{-2u_1} \partial_{u_2} Y = 0, \\ \partial_{x_2} Z - T = \frac{\lambda}{2}, \\ a \partial_{x_2} S + \frac{a}{2} \partial_{x_2} T + e^{-2u_2} \partial_{u_1} Z = 0, \\ a \partial_{x_2} T + \frac{a}{2} \partial_{x_2} S + e^{-2u_2} \partial_{u_2} Z = 0, \\ 2a \partial_{u_1} S + a \partial_{u_1} T = \lambda a + 2, \\ a \partial_{u_1} T + a \partial_{u_2} S + \frac{a}{2} \partial_{u_1} S + \frac{a}{2} \partial_{u_2} T = \lambda \frac{a}{2} + 1, \\ 2a \partial_{u_2} T + a \partial_{u_2} S = \lambda a + 2. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Выпишем тринадцатое и последнее уравнения в (3.4) относительно u_2 и u_1 соответственно, получим

$$\partial_{u_1} \partial_{u_2} S = \partial_{u_1} \partial_{u_2} T = 0.$$

Производные четырнадцатого и последнего уравнения (3.4) по u_2 дают

$$\partial_{u_2}^2 S = \partial_{u_2}^2 T = 0.$$

Снова выпишем тринадцатое и четырнадцатое уравнения в (3.4) относительно u_1 , получим

$$\partial_{u_1}^2 S = \partial_{u_1}^2 T = 0.$$

Следовательно, имеем

$$S = \overline{S}u_2 + \overline{\overline{S}}u_1 + \widehat{S},$$

$$T = \overline{T}u_2 + \overline{\overline{T}}u_1 + \widehat{T},$$

где $\overline{S}, \overline{\overline{S}}, \widehat{S}, \overline{T}, \overline{\overline{T}}, \widehat{T}$ — вещественнозначные гладкие функции, зависящие от (x_0, x_1, x_2) .

Затем, заменив S и T в трех последних уравнениях (3.4), получим

$$\left\{ \begin{array}{l} 2\overline{\overline{S}} + \overline{\overline{T}} = \lambda + \frac{2}{a}, \\ 2\overline{S} + 2\overline{\overline{T}} + \overline{\overline{S}} + \overline{T} = \lambda + \frac{2}{a}, \\ 2\overline{T} + \overline{S} = \lambda + \frac{2}{a}, \end{array} \right.$$

что дает

$$\left\{ \begin{array}{l} \overline{T} = \lambda + \frac{2}{a} - \overline{\overline{S}}, \\ \overline{\overline{T}} = \lambda + \frac{2}{a} - 2\overline{S}, \\ \overline{S} = -\lambda - \frac{2}{a} + 2\overline{\overline{S}}, \end{array} \right.$$

и, следовательно, S и T выражаются в виде

$$S = \bar{\bar{S}}u_1 + \left(-\lambda - \frac{2}{a} + 2\bar{\bar{S}}\right)u_2 + \hat{S}, \quad (3.5)$$

$$T = \left(\lambda + \frac{2}{a} - 2\bar{\bar{S}}\right)u_1 + \left(\lambda + \frac{2}{a} - \bar{\bar{S}}\right)u_2 + \hat{T}.$$

Далее выпишем восьмое уравнение в (3.4) относительно u_1 и, используя (3.5), получим

$$\partial_{u_1}^2 Y - 2\partial_{u_1} Y = 0. \quad (3.6)$$

Дважды продифференцировав шестое уравнение в (3.4) по u_1 и взяв производную от (3.6) по x_1 , мы получим, что, поскольку $\partial_{u_1}^2 S = 0$,

$$\partial_{u_1} S = \partial_{x_1} \partial_{u_1} Y = 0,$$

система (3.5) сводится к

$$S = -\left(\lambda + \frac{2}{a}\right)u_2 + \hat{S}, \quad (3.7)$$

$$T = \left(\lambda + \frac{2}{a}\right)u_1 + \left(\lambda + \frac{2}{a}\right)u_2 + \hat{T}.$$

Теперь выпишем восьмое и девятое уравнения в (3.4) относительно u_2 и u_1 , соответственно, и, используя (3.7), заключим, что $\partial_{u_2} Y = 0$. Следовательно, интегрируя (3.6) по u_1 и учитывая, что $\partial_{x_1} \partial_{u_1} Y = 0$, получим

$$Y = \bar{Y}e^{2u_1} + \bar{\bar{Y}} \quad (3.8)$$

для произвольных гладких функций $\bar{Y} = \bar{Y}(x_0, x_2)$ и $\bar{\bar{Y}} = \bar{\bar{Y}}(x_0, x_1, x_2)$.

С другой стороны, производная шестого уравнения в (3.4) по u_2 дает $\partial_{u_2} S = 0$, и поэтому мы имеем $\lambda = -\frac{2}{a}$. Таким образом, (3.7) записывается как

$$S = \hat{S}(x_0, x_1, x_2),$$

$$T = \hat{T}(x_0, x_1, x_2).$$

Взяв производную одиннадцатого и двенадцатого уравнений в (3.4) по u_2 и u_1 , соответственно, получим $\partial_{u_1} Z = 0$. Затем, выписывая десятое уравнение в (3.4) по u_2 , получим $\partial_{x_2} \partial_{u_2} Z = 0$.

Далее, выпишем двенадцатое уравнение в (3.4) относительно u_2 и получим

$$\partial_{u_2}^2 Z - 2\partial_{u_2} Z = 0,$$

что дает

$$Z = \bar{Z}e^{2u_2} + \bar{\bar{Z}} \quad (3.9)$$

для произвольных гладких функций $\bar{Z} = \bar{Z}(x_0, x_1)$ и $\bar{\bar{Z}} = \bar{\bar{Z}}(x_0, x_1, x_2)$.

Из шестого и десятого уравнений в (3.4) с учетом (3.8) и (3.9) получим

$$S = \partial_{x_1} \bar{\bar{Y}} - \frac{\lambda}{2}, \quad (3.10)$$

$$T = \partial_{x_2} \bar{\bar{Z}} - \frac{\lambda}{2}.$$

Выполнив замены (3.8) и (3.9) в седьмом уравнении (3.4), получим

$$\begin{cases} \bar{\bar{Z}} = \bar{\bar{Z}}(x_0, x_2), \\ \bar{\bar{Y}} = \bar{\bar{Y}}(x_0, x_1), \\ \partial_{x_1} \bar{Z}(x_0, x_1) + \partial_{x_2} \bar{Y}(x_0, x_2) = 0. \end{cases}$$

Используя одиннадцатое и двенадцатое уравнения в (3.4) и тот факт, что $\bar{\bar{Y}} = \bar{\bar{Y}}(x_0, x_1)$, мы заключаем, что $\partial_{x_2}^2 \bar{\bar{Z}}(x_0, x_2) = \bar{Z}(x_0, x_1) = 0$, и, следовательно, $\bar{Y} = \bar{Y}(x_0)$. Таким образом, уравнение (3.9) принимает вид

$$Z = \hat{Z}x_2 + \tilde{Z} \quad (3.11)$$

для произвольных вещественных гладких функций $\widehat{Z} = \widehat{Z}(x_0)$ и $\widetilde{Z} = \widetilde{Z}(x_0)$.

Теперь, выполнив замены (3.10) и (3.8) в восьмом и девятом уравнениях (3.4) и приняв во внимание (3.11), получим

$$\partial_{x_1}^2 \overline{\overline{Y}} = 0 \quad \text{и} \quad \overline{Y} = 0.$$

Следовательно, равенство (3.8) принимает вид

$$Y = \widehat{Y}x_1 + \widetilde{Y}, \quad (3.12)$$

где $\widehat{Y} = \widehat{Y}(x_0)$ и $\widetilde{Y} = \widetilde{Y}(x_0)$ — гладкие функции.

Таким образом, (3.10) сводится к

$$\begin{aligned} S &= \widehat{Y} - \frac{\lambda}{2}, \\ T &= \widehat{Z} - \frac{\lambda}{2}. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Выписав пятое уравнение в (3.4) относительно x_1 и используя (3.13), получим

$$\partial_{x_1} \partial_{u_2} X = 0.$$

Затем возьмем производную второго уравнения в (3.4) по u_2 и получим (поскольку $\partial_{u_2} Y = 0$)

$$\partial_{x_1} X = 0,$$

что вместе со вторым уравнением в (3.4) дает $\partial_{x_0} Y = 0$, и поэтому (3.12) сводится к

$$Y = c_1 x_1 + c_2, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.14)$$

Далее выпишем четвертое уравнение в (3.4) относительно x_2 и, используя (3.13), (3.12) и (3.11), получим

$$\partial_{x_2} \partial_{u_1} X = 0.$$

Таким образом, производная третьего уравнения в (3.4) по u_1 дает (поскольку $\partial_{u_1} Z = 0$)

$$\partial_{x_2} X = 0,$$

что вместе с третьим уравнением (3.4) влечет $\partial_{x_0} Z = 0$, и, следовательно, (3.11) принимает вид

$$Z = c_3 x_2 + c_4, \quad c_3, c_4 \in \mathbb{R}. \quad (3.15)$$

Следовательно, из (3.13) получим

$$\begin{aligned} S &= c_1 - \frac{\lambda}{2}, \\ T &= c_3 - \frac{\lambda}{2}. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Наконец, используя первое, четвертое и пятое уравнения в (3.4), мы получим, что

$$X = \left(\frac{3\lambda}{2} - c_1 - c_3 \right) x_0 + c_5, \quad c_5 \in \mathbb{R}. \quad (3.17)$$

Таким образом, имеем векторное поле $V = X\partial_{x_0} + Y\partial_{x_1} + Z\partial_{x_2} + S\partial_{u_1} + T\partial_{u_2}$, где X, Y, Z, S, T задаются равенствами (3.17), (3.14), (3.15) и (3.16). Заметим, что $\lambda = -\frac{2}{a} < 0$. Подводя итог, мы доказали, что пятимерная риманова группа Ли Sol_5 допускает векторные поля, для которых выполняется уравнение (1.1), получив следующий результат.

Теорема 3.1. Пусть (Sol_5, g) — пятимерная разрешимая группа Ли, снабженная левосинвариантной римановой метрикой g , заданной формулой (3.1). Тогда (Sol_5, g) является расширяющимся солитоном Риччи.

Пусть $V = \text{grad } h$ — произвольное градиентное векторное поле на (Sol_5, g) с потенциальной функцией h , тогда V задается следующим образом:

$$\begin{aligned} \text{grad } h &= e^{-2(u_1+u_2)} \partial_{x_0} h \partial_{x_0} + e^{2u_1} \partial_{x_1} h \partial_{x_1} + e^{2u_2} \partial_{x_2} h \partial_{x_2} + \\ &+ \frac{2}{3a} (2\partial_{u_1} h - \partial_{u_2} h) \partial_{u_1} + \frac{2}{3a} (2\partial_{u_2} h - \partial_{u_1} h) \partial_{u_2}. \end{aligned}$$

Из (3.17), (3.14), (3.15) и (3.16) следует, что (Sol_5, g) является градиентным солитоном тогда и только тогда, когда потенциальная функция h удовлетворяет системе

$$\begin{cases} \partial_{x_0} h = e^{2(u_1+u_2)} \left[\left(\frac{3\lambda}{2} - c_1 - c_3 \right) x_0 + c_5 \right], \\ \partial_{x_1} h = e^{-2u_1} (c_1 x_1 + c_2), \\ \partial_{x_2} h = e^{-2u_2} (c_3 x_2 + c_4), \\ \frac{2}{3a} (2\partial_{u_1} h - \partial_{u_2} h) = c_1 - \frac{\lambda}{2}, \\ \frac{2}{3a} (2\partial_{u_2} h - \partial_{u_1} h) = c_3 - \frac{\lambda}{2}, \end{cases}$$

где $\lambda = -\frac{2}{a}$. Следовательно, взяв производную по x_0 от последних двух уравнений в приведенной выше системе, мы заключаем, что

$$\partial_{x_0} \partial_{u_1} h = 2e^{2(u_1+u_2)} \left[\left(\frac{3\lambda}{2} - c_1 - c_3 \right) x_0 + c_5 \right] = 0,$$

Таким образом, $c_3 = \frac{3\lambda}{2} - c_1$ и $c_5 = 0$. Снова, выписывая последние два уравнения в приведенной выше системе относительно x_1 , получим

$$\partial_{x_1} \partial_{u_1} h = -2e^{-2u_1} (c_1 x_1 + c_2) = 0,$$

откуда $c_1 = c_2 = 0$. Теперь, взяв производную по x_2 от последних двух уравнений в приведенной выше системе, получим, что

$$\partial_{x_2} \partial_{u_2} h = -2e^{-2u_2} (c_3 x_2 + c_4) = 0.$$

Таким образом, мы получили $c_3 = c_4 = 0$, что противоречит $\lambda = -\frac{2}{a}$. Мы доказали следующий результат.

Следствие 3.1. Пусть (Sol_5, g) — пятимерная разрешимая группа Ли, снабженная левоинвариантной римановой метрикой g , заданной формулой (3.1). Тогда (Sol_5, g) не является градиентным солитоном Риччи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Baird P., Danielo L. Three-dimensional Ricci solitons which project to surfaces // J. Reine Angew. Math. — 2007. — 608. — С. 65–91. — DOI: [10.1515/CRELLE.2007.053](https://doi.org/10.1515/CRELLE.2007.053).
2. Belarbi L. On the symmetries of Lorentzian four-dimensional generalized symmetric spaces of type C // Mathematica. — 2020. — 62, № 2. — С. 133–147. — DOI: [10.24193/mathcluj.2020.2.03](https://doi.org/10.24193/mathcluj.2020.2.03).
3. Belarbi L. On the symmetries of the Sol_3 Lie group // J. Korean Math. Soc. — 2020. — 57, № 2. — С. 523–537. — DOI: [10.4134/JKMS.j190198](https://doi.org/10.4134/JKMS.j190198).
4. Belarbi L. On the symmetries of three-dimensional generalized symmetric spaces // Bull. Transilv. Univ. Brasov Ser. III. — 2020. — 13, № 2. — С. 451–462. — DOI: [10.31926/but.mif.2020.13.62.2.7](https://doi.org/10.31926/but.mif.2020.13.62.2.7).
5. Belarbi L. Ricci solitons of the $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ Lie group // Elec. Res. Arch. — 2020. — 28, № 1. — С. 157–163. — DOI: [10.3934/era.2020010](https://doi.org/10.3934/era.2020010).
6. Belarbi L. Ricci solitons of the Sol_3 Lie group // J. Indian Math. Soc. — 2025. — 92, № 2. — С. 329–339. — DOI: [10.18311/jims/2025/35442](https://doi.org/10.18311/jims/2025/35442).
7. Calvaruso G., De Leo B. Ricci solitons on Lorentzian Walker three-manifolds // Acta Math. Hungar. — 2011. — 132, № 3. — С. 269–293. — DOI: [10.1007/s10474-010-0049-z](https://doi.org/10.1007/s10474-010-0049-z).
8. Calvaruso G., Fino A. Ricci solitons and geometry of four-dimensional non-reductive homogeneous spaces // Canad. J. Math. — 2012. — 64, № 4. — С. 778–804. — DOI: [10.4153/CJM-2011-091-1](https://doi.org/10.4153/CJM-2011-091-1).
9. Calvaruso G., Fino A. Four-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous Ricci solitons // Int. J. Geom. Methods Mod. Phys. — 2015. — 12, № 5. — 1550056. — DOI: [10.1142/S0219887815500565](https://doi.org/10.1142/S0219887815500565).
10. Calvaruso G., Kowalski O., Marinosci A. Homogeneous geodesics in solvable Lie groups // Acta. Math. Hungar. — 2003. — 101, № 4. — С. 313–322. — DOI: [10.1023/B:AMHU.0000004942.87374.0e](https://doi.org/10.1023/B:AMHU.0000004942.87374.0e).
11. Cao H. D. Recent progress on Ricci solitons // В сб.: «Recent Advances in Geometric Analysis. Proc. Int. Conf. on Geometric Analysis, Taipei, Taiwan, June 18–22, 2007». — Beijing—Somerville: International Press, 2010. — С. 1–38.

12. *Cao H. D.* Geometry of complete gradient shrinking Ricci solitons // Б с.: «Geometry and Analysis, No. 1. Collected papers of the conference “Geometric analysis: Present and future,” Harvard Univ., Cambridge, USA, August 27 – September 1, 2008». — Beijing—Somerville: International Press, 2011. — С. 227–246.
13. *Cerbo L. F.* Generic properties of homogeneous Ricci solitons // Adv. Geom. — 2014. — 14, № 2. — С. 225–237. — DOI: [10.1515/advgeom-2013-0031](https://doi.org/10.1515/advgeom-2013-0031).
14. *Friedan D.* Nonlinear models in $2+\varepsilon$ dimensions // Ann. Phys. — 1985. — 163. — С. 318–419. — DOI: [10.1016/0003-4916\(85\)90384-7](https://doi.org/10.1016/0003-4916(85)90384-7).
15. *Hamilton R. S.* Three manifolds with positive Ricci curvature // J. Diff. Geom. — 1982. — 17. — С. 255–306. — DOI: [10.4310/jdg/1214436922](https://doi.org/10.4310/jdg/1214436922).
16. *Hervik S.* Ricci nilsoliton black holes // J. Geom. Phys. — 2008. — 58. — С. 1253–1264. — DOI: [10.1016/j.geomphys.2008.05.001](https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2008.05.001).
17. *Kowalski O.* Generalized symmetric spaces. — Berlin—Heidelberg—New York: Springer, 1980. — DOI: [10.1007/BFb0103324](https://doi.org/10.1007/BFb0103324).
18. *Lauret J.* Ricci soliton solvmanifolds // J. Reine Angew. Math. — 2011. — 650. — С. 1–21. — DOI: [10.1515/crelle.2011.001](https://doi.org/10.1515/crelle.2011.001).
19. *Mostefaoui A., Belarbi L., Batat W.* Ricci solitons of five-dimensional solvable Lie group // Panamer. Math J. — 2019. — 29, № 1. — С. 1–16.
20. *Mostefaoui A., Belarbi L.* On the symmetries of five-dimensional Solvable Lie group // J. Lie Theory. — 2020. — 30, № 1. — С. 155–169.
21. *Onda K.* Lorentz Ricci solitons on 3-dimensional Lie groups // Geom. Dedicata. — 2010. — 147. — С. 313–322. — DOI: [10.1007/s10711-009-9456-0](https://doi.org/10.1007/s10711-009-9456-0).

Л. Беларби

University of Mostaganem, Mostaganem, Algeria

E-mail: lakehalbelarbi@gmail.com, ResearcherID: [ABD-4782-2022](https://orcid.org/0000-0002-9196-1979), Scopus: [55871634700](https://orcid.org/0000-0002-9196-1979),

ORCID: [0000-0002-9196-1979](https://orcid.org/0000-0002-9196-1979)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-13-23](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-13-23)

EDN: [TGXCNE](https://www.edn.ru/TGXCNE)

UDC 512.81

Research article

Ricci solitons for solvable Lie groups

L. Belarbi

University of Mostaganem, Mostaganem, Algeria

Abstract. In this work, the existence of nontrivial (i.e., not Einstein) Ricci solitons on Riemannian three-dimensional and five-dimensional solvable Lie groups is considered and studied. Moreover, it is shown that they are not gradient Ricci solitons.

Keywords: Ricci solitons, solvable Lie groups, Riemannian manifolds, gradient Ricci solitons, three-dimensional Lie groups, five-dimensional Lie groups, Einstein metrics, Ricci flow, Lorentzian manifolds, Levi-Civita connection.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: L. Belarbi, “Ricci solitons for solvable Lie groups,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. 72, No. 1, 13–23. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-13-23](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-13-23) EDN: [TGXCNE](https://www.edn.ru/TGXCNE)



REFERENCES

1. P. Baird, L. Danielo, “Three-dimensional Ricci solitons which project to surfaces,” *J. Reine Angew. Math.*, 2007, **608**, 65–91, DOI: [10.1515/CRELLE.2007.053](https://doi.org/10.1515/CRELLE.2007.053).
2. L. Belarbi, “On the symmetries of Lorentzian four-dimensional generalized symmetric spaces of type C,” *Mathematica*, 2020, **62**, No. 2, 133–147, DOI: [10.24193/mathcluj.2020.2.03](https://doi.org/10.24193/mathcluj.2020.2.03).
3. L. Belarbi, “On the symmetries of the Sol_3 Lie group,” *J. Korean Math. Soc.*, 2020, **57**, No. 2, 523–537, DOI: [10.4134/JKMS.j190198](https://doi.org/10.4134/JKMS.j190198).
4. L. Belarbi, “On the symmetries of three-dimensional generalized symmetric spaces,” *Bull. Transilv. Univ. Brasov Ser. III*, 2020, **13**, No. 2, 451–462, DOI: [10.31926/but.mif.2020.13.62.2.7](https://doi.org/10.31926/but.mif.2020.13.62.2.7).
5. L. Belarbi, “Ricci solitons of the $\mathbb{H}^2 \times \mathbb{R}$ Lie group,” *Elec. Res. Arch.*, 2020, **28**, No. 1, 157–163, DOI: [10.3934/era.2020010](https://doi.org/10.3934/era.2020010).
6. L. Belarbi, “Ricci solitons of the Sol_3 Lie group,” *J. Indian Math. Soc.*, 2025, **92**, No. 2, 329–339, DOI: [10.18311/jims/2025/35442](https://doi.org/10.18311/jims/2025/35442).
7. G. Calvaruso and B. De Leo, “Ricci solitons on Lorentzian Walker three-manifolds,” *Acta Math. Hungar.*, 2011, **132**, No. 3, 269–293, DOI: [10.1007/s10474-010-0049-z](https://doi.org/10.1007/s10474-010-0049-z).
8. G. Calvaruso and A. Fino, “Ricci solitons and geometry of four-dimensional non-reductive homogeneous spaces,” *Canad. J. Math.*, 2012, **64**, No. 4, 778–804, DOI: [10.4153/CJM-2011-091-1](https://doi.org/10.4153/CJM-2011-091-1).
9. G. Calvaruso and A. Fino, “Four-dimensional pseudo-Riemannian homogeneous Ricci solitons,” *Int. J. Geom. Methods Mod. Phys.*, 2015, **12**, No. 5, 1550056, DOI: [10.1142/S0219887815500565](https://doi.org/10.1142/S0219887815500565).
10. G. Calvaruso, O. Kowalski, and A. Marinosci, “Homogeneous geodesics in solvable Lie groups,” *Acta Math. Hungar.*, 2003, **101**, No. 4, 313–322, DOI: [10.1023/B:AMHU.0000004942.87374.0e](https://doi.org/10.1023/B:AMHU.0000004942.87374.0e).
11. H. D. Cao, “Recent progress on Ricci solitons,” In: *Recent Advances in Geometric Analysis. Proc. Int. Conf. on Geometric Analysis, Taipei, Taiwan, June 18–22, 2007*, International Press, Beijing—Somerville, 2010, pp. 1–38.
12. H. D. Cao, “Geometry of complete gradient shrinking Ricci solitons,” In: *Geometry and Analysis, No. 1. Collected papers of the conference “Geometric analysis: Present and future,” Harvard Univ., Cambridge, USA, August 27 – September 1, 2008*, International Press, Beijing—Somerville, 2011, pp. 227–246.
13. L. F. Cerbo, “Generic properties of homogeneous Ricci solitons,” *Adv. Geom.*, 2014, **14**, No. 2, 225–237, DOI: [10.1515/advgeom-2013-0031](https://doi.org/10.1515/advgeom-2013-0031).
14. D. Friedan, “Nonlinear models in $2 + \varepsilon$ dimensions,” *Ann. Phys.*, 1985, **163**, 318–419, DOI: [10.1016/0003-4916\(85\)90384-7](https://doi.org/10.1016/0003-4916(85)90384-7).
15. R. S. Hamilton, “Three manifolds with positive Ricci curvature,” *J. Diff. Geom.*, 1982, **17**, 255–306, DOI: [10.4310/jdg/1214436922](https://doi.org/10.4310/jdg/1214436922).
16. S. Hervik, “Ricci nilsoliton black holes,” *J. Geom. Phys.*, 2008, **58**, 1253–1264, DOI: [10.1016/j.geomphys.2008.05.001](https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2008.05.001).
17. O. Kowalski, *Generalized symmetric spaces*, Springer, Berlin—Heidelberg—New York, 1980, DOI: [10.1007/BFb0103324](https://doi.org/10.1007/BFb0103324).
18. J. Lauret, “Ricci soliton solvmanifolds,” *J. Reine Angew. Math.*, 2011, **650**, 1–21, DOI: [10.1515/crelle.2011.001](https://doi.org/10.1515/crelle.2011.001).
19. A. Mostefaoui, L. Belarbi, and W. Batat, “Ricci solitons of five-dimensional solvable Lie group,” *Panamer. Math J.*, 2019, **29**, No. 1, 1–16.
20. A. Mostefaoui and L. Belarbi, “On the symmetries of five-dimensional Solvable Lie group,” *J. Lie Theory*, 2020, **30**, No. 1, 155–169.
21. K. Onda, “Lorentz Ricci solitons on 3-dimensional Lie groups,” *Geom. Dedicata*, 2010, **147**, 313–322, DOI: [10.1007/s10711-009-9456-0](https://doi.org/10.1007/s10711-009-9456-0).

L. Belarbi

University of Mostaganem, Mostaganem, Algeria

E-mail: lakehalbelarbi@gmail.com, ResearcherID: [ABD-4782-2022](https://orcid.org/0000-0002-9196-1979), Scopus: [55871634700](https://orcid.org/0000-0002-9196-1979),

ORCID: [0000-0002-9196-1979](https://orcid.org/0000-0002-9196-1979)

СУЩЕСТВОВАНИЕ СПИРАЛЬНЫХ СТРАТЕГИЙ ДЛЯ БЛОКИРОВАНИЯ РАСПРОСТРАНЕНИЯ ОГНЯ

С. Бьянкини

S.I.S.S.A., Trieste, Italy

Аннотация. В данной работе мы рассматриваем проблему блокирования огня путем строительства стены ζ , имеющей спиралевидную форму. Предполагается, что это наилучшая стратегия в случае, когда один пожарный строит стену с конечной скоростью строительства σ : барьеры, удовлетворяющие этому ограничению скорости строительства, называются допустимыми.

В этом случае мы доказываем точную версию гипотезы Брессана о пожаре [5], т. е. когда допустимые барьеры представляют собой спиралевидные кривые: а именно, спиралевидный барьер, ограничивающий огонь в ограниченной области $\mathbb{R}^2$, существует тогда и только тогда, когда скорость построения барьера σ строго больше критической скорости $\bar{\sigma} = 2,614 \dots$

Существование ограничивающих спиральных барьеров при $\sigma > \bar{\sigma}$ уже известно [7, 15]. В настоящей работе мы исследуем обратную ситуацию, т. е. если $\sigma \leq \bar{\sigma}$, то никакая допустимая спираль не блокирует огонь.

Доказательство этих результатов основано на:

1. точном определении спирального барьера и его представлении;
2. анализе насыщенных спиральных барьеров как дифференциального уравнения с запаздыванием, следуя [15];
3. эквивалентной переформулировке гипотезы как задачи минимизации функционала для заданного функционала;
4. построении оптимальной замыкающей спирали;
5. анализе дифференцируемого пути допустимых спиралей, вдоль которого функционал дифференцируем и, в частности, возрастает при переходе от оптимальной спирали к любой другой.

Ввиду сложности решения, оценка величин, необходимых для доказательства возрастания функционала, выполняется численно.

Ключевые слова: блокирование пожара, спиральные барьеры, гипотеза Брессана, допустимые стратегии, дифференциальное уравнение с запаздыванием, аргумент гомотопии, изотропное распространение пожара, динамическая проблема блокирования, спрямляемые кривые, мера Хаусдорфа.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Бьянкини С. Существование спиральных стратегий для блокирования распространения огня // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 24–34. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-24-34](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-24-34) EDN: [TICEMV](https://www.edn.ru/TICEMV)

1. ВВЕДЕНИЕ

Мы изучаем динамическую задачу блокирования, впервые предложенную А. Брессаном в работе [4]. Задача касается модели распространения лесного пожара в области плоскости $\mathbb{R}^2$ и возможности его блокирования путем построения *барьеров*, т. е. спрямляемых кривых, которые

не могут быть пересечены огнем. Локальное распространение огня описывается с помощью многозначной функции

$$F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \{K \subset \mathbb{R}^2 \text{ компактное, замкнутое}\}$$

такой, что

1. существует $r > 0$ такое, что $B_r(0) \subset F(x) \forall x \in \mathbb{R}^2$;
2. функция $x \rightarrow F(x)$ является липшицево-непрерывной в топологии Хаусдорфа.

Эта функция описывает бесконечно малую эволюцию огня при отсутствии барьеров, т. е. $x + \delta t F(x)$ — это точки, достигнутые огнем за бесконечно малое время δt . Другими словами, если барьеры отсутствуют, то *достижимое множество* $R(t)$ является решением дифференциального включения

$$R(t) = \left\{ x(t), x(\cdot) \text{ абс. непр., } x(0) \in R_0, \dot{x}(\tau) \in F(x(\tau)) \text{ для п.в. } \tau \in [0, t] \right\},$$

где множество $R_0 \subset \mathbb{R}^2$ — открытая область, выжженная огнем в начальный момент времени $t = 0$.

Когда огонь начинает распространяться, пожарный может построить несколько барьеров, смоделированных одномерным спрямляемым множеством $\zeta \subset \mathbb{R}^2$, чтобы заблокировать огонь. Более подробно рассмотрим непрерывную функцию $\psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ вместе с положительной константой $\psi_0 > 0$ такой, что $\psi \geq \psi_0$. Если обозначить через $\zeta(t) \subset \mathbb{R}^2$ часть барьера, построенного за время $t \geq 0$, то мы говорим, что ζ является *допустимым барьером* (или *допустимой стратегией*), если

(Н1):

$$\zeta(t_1) \subset \zeta(t_2), \quad \forall t_1 \leq t_2;$$

(Н2):

$$\int_{\zeta(t)} \psi d\mathcal{H}^1 \leq t, \quad \forall t \geq 0,$$

где $\mathcal{H}^1$ обозначает одномерную меру Хаусдорфа.

Имея допустимую стратегию ζ , определим *множество достижимых значений* для ζ в момент времени t как

$$R^\zeta(t) = \left\{ x(t) : x \text{ абс. непр., } x(0) \in R_0, \dot{x}(\tau) \in F(x(\tau)) \text{ для п.в. } \tau \in [0, t], x(\tau) \notin \zeta(\tau) \forall \tau \in [0, t] \right\}.$$

Определение 1.1. Пусть $t \rightarrow \zeta(t)$ — допустимая стратегия. Мы говорим, что это *блокирующая стратегия*, если

$$R_\infty^\zeta \doteq \bigcup_{t \geq 0} R^\zeta(t)$$

является ограниченным множеством.

Мы называем *изотропным* случай, когда предполагается, что огонь распространяется с единичной скоростью во всех направлениях, а барьер строится с постоянной скоростью $\sigma > 0$:

$$F \equiv \overline{B_1(0)}, \quad R_0 = B_1(0), \quad \psi \equiv \frac{1}{\sigma}, \quad (1.1)$$

где $\overline{B_1(0)}$ обозначает замыкание единичного шара на плоскости с центром в начале координат. Отметим, что в работе [7] приведены результаты сравнения более общих вариантов выбора данных R_0 и F и изотропной задачи для изучения проблемы пожара в более общей постановке.

Существование допустимых блокирующих стратегий для изотропной задачи блокирования является очень сложной открытой проблемой, которая рассматривалась¹ главным образом в работах [4, 7]. Это одна из главных причин, по которой проблема изучалась в изотропном случае. В частности, справедливы следующие теоремы:

Теорема 1.1. Пусть выполняется условие (1.1). Тогда если $\sigma > 2$, то существует допустимая блокирующая стратегия.

¹Можно доказать [6], что существование блокирующей стратегии не зависит от начального множества R_0 , а только от скорости σ .

Теорема 1.2. Пусть выполняется условие (1.1). Тогда если $\sigma \leq 1$, то допустимой блокирующей стратегии не существует.

Обе теоремы доказаны в работе [4] и обосновывают следующую гипотезу о пожаре [5]:

Гипотеза 1.1. Пусть выполняется условие (1.1). Тогда если $\sigma \leq 2$, то допустимой блокирующей стратегии не существует.

Обзор результатов, связанных с гипотезой 1.1, см. в [6].

Эквивалентная формулировка. На протяжении всей статьи мы будем использовать эквивалентную формулировку задачи динамического блокирования для изотропного случая (доказательство эквивалентности см. в [10]). Пусть $Z \subset \mathbb{R}^2$ — спрямляемое множество. Обозначим

$$R^Z(t) = \left\{ x(t) : x \text{ абс. непр., } \dot{x}(\tau) \in \overline{B_1(0)} \text{ для п.в. } \tau \in [0, t], x(\tau) \notin Z \forall \tau \in [0, t] \right\}. \quad (1.2)$$

Будем говорить, что стратегия Z является *допустимой*, если $\forall t \geq 0$

$$\mathcal{H}^1(Z \cap \overline{R^Z(t)}) \leq \sigma t.$$

Аналогично предыдущей формулировке, обозначим через

$$R_\infty^Z = \bigcup_{t \geq 0} R^Z(t) \quad (1.3)$$

выгоревшую область, и будем говорить, что Z является *допустимой блокирующей стратегией*, если R_∞^Z ограничено. Преимущество этого описания заключается в том, что барьер фиксирован и не увеличивается со временем. Здесь мы можем интерпретировать $Z \cap \overline{R^Z(t)}$ как количество барьера Z , выгоревшего в результате пожара за время t .

Функция минимального времени и формулировка Гамильтона—Якоби. Распространение огня также можно описать с помощью *функции минимального времени*

$$u(x) \doteq \inf \left\{ t \geq 0 : x \in \overline{R^Z(t)} \right\}. \quad (1.4)$$

Функция u — это время, необходимое огню для достижения точки x в зоне выгорания без пересечения барьера. Функцию минимального времени можно вычислить, решив уравнение Гамильтона—Якоби с препятствиями: а именно, u — это супремум среди всех липшицевых функций u' , удовлетворяющих условию

$$\begin{cases} |\nabla u'(x)| \leq 1, & x \notin Z, \\ u'(x) = 0, & x \in R_0. \end{cases} \quad (1.5)$$

Свойства решения задачи (1.5) описаны в работе [13]. Мы предполагаем, что $|\nabla u(x)| = 1$ для каждого $x \notin Z$, как в классическом случае уравнения эйконала без препятствий. При наличии функции минимального времени u и допустимого барьера Z определяется *функционал допустимости*:

$$\mathcal{A}(x) = u(x) - \frac{1}{\sigma} \mathcal{H}^1(Z \cap \overline{R^Z(u(x))}) \geq 0, \quad \forall x \in Z.$$

Неравенство следует из допустимости барьера Z . В частности, *насыщенное множество* определяется как

$$\mathcal{S} = \{x \in Z : \mathcal{A}(x) = 0\}$$

и соответствует точкам на барьере, где пожарные используют все имеющиеся в их распоряжении средства для блокирования огня.

Легко доказать [4], что если стратегия Z состоит из простой замкнутой кривой, то она недопустима при $\sigma \leq 2$ (ключевая идея заключается в том, чтобы взять последнюю точку P на кривой, достигнутую огнем, и заметить, что $\mathcal{A}(P) < 0$). Однако известны лишь частичные результаты для случая, когда стратегия имеет более сложные структуры, например, наличие внутренних барьеров, замедляющих распространение огня.

Оптимизационная задача. Возможный подход к решению гипотезы Брессана о пожаре (1.1) — рассмотреть оптимальные стратегии для данной задачи минимизации и доказать, что они не могут быть допустимыми блокирующими стратегиями, сводя анализ к конкретным случаям. В этом духе можно сформулировать задачу оптимизации среди блокирующих барьеров следующим образом: вводится *функционал стоимости*

$$J(Z) = \int_{R_\infty^Z} \kappa_1 d\mathcal{L}^2 + \int_Z \kappa_2 d\mathcal{H}^1 \quad (1.6)$$

среди всех возможных допустимых блокирующих стратегий, где $\kappa_1, \kappa_2: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^+$ — две неотрицательные непрерывные функции. В работе [9] доказано, что если класс допустимых блокирующих стратегий непуст, то существует оптимальная стратегия. Более того, существует оптимальная стратегия Z^* , которая является полной:

Определение 1.2. Пусть $Z \subset \mathbb{R}^2$ — спрямляемое множество. Z является *полным*, если оно содержит все свои точки положительной верхней плотности, т. е. такие точки $x \in \mathbb{R}^2$, для которых

$$\limsup_{r \rightarrow 0^+} \frac{\mathcal{H}^1(Z \cap B_r(x))}{2r} > 0 \implies x \in Z.$$

Также справедливо следующее следствие [10]:

Следствие 1.1. Если существует допустимая блокирующая стратегия Z с $\mathcal{H}^1(Z) < \infty$, то существует оптимальная блокирующая стратегия Z^* такая, что

$$Z^* = \left(\bigcup_i Z_i \right) \cup \mathcal{N},$$

где Z_i — счетное число компактных спрямляемых связных компонент, и $\mathcal{H}^1(\mathcal{N}) = 0$.

Также упомянем недавний результат в работе [8], где доказано, что оптимальная стратегия нигде не является плотной. Что действительно усложняет задачу оптимизации, так это то, что класс допустимых стратегий может быть пустым (и предполагается, что он пуст, если $\sigma \leq 2$, гипотеза 1.1).

Определение необходимых условий оптимальности — сложная открытая проблема. Некоторые необходимые условия оптимальности выведены в работе [12] с предположением о дополнительной регулярности оптимальной стратегии. В работе [2] приведены некоторые необходимые условия оптимальности для характеристики границы ∂R_∞^Z в случае, когда Z является оптимальной стратегией (для задачи с $\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = 1$) без предположения о какой-либо регулярности барьера. Там выведены некоторые свойства оптимального барьера, такие как связность в случае $Z = Z^2 \cup Z^1$, где $Z^2 = \partial R_\infty^Z$ и Z^1 — единая внутренняя кривая, и проанализированы некоторые конкретные случаи. Однако основной проблемой остается вывод необходимых условий для внутренних барьеров.

2. НЕДОПУСТИМОСТЬ СПИРАЛЕВИДНЫХ СТРАТЕГИЙ

В данной работе мы изучаем стратегии спиралевидной формы: а именно, допустимые стратегии, построенные таким образом, чтобы все усилия были сосредоточены на одной кривой. Изучение спиралевидных стратегий имеет ключевое значение для полного решения гипотезы Брессана о пожаре; действительно, предполагается, что эти стратегии являются «наилучшими» возможными барьерами, которые можно построить при $\sigma \leq 2$. Эвристическое обоснование заключается в том, что если $\sigma \leq 2$, то мы не можем иметь двух пожарных (одновременно строящих две ветви стратегии) со скоростью, строго превышающей скорость огня, так что они будут поглощены огнем: таким образом, наилучшей стратегией должна быть одна кривая. В случае $\sigma > 2$ мы ожидаем, что оптимальными стратегиями являются простые замкнутые кривые. В работе [11] авторы строят наилучшую стратегию для задачи оптимизации (1.6) среди простых замкнутых кривых.

Начнем с определения спиральных стратегий.

Определение 2.1. Пусть $Z = \zeta([0, S]) \subset \mathbb{R}^2$ — стратегия, где ζ — липшицева кривая, параметризованная длиной дуги. Мы говорим, что это *спиральная стратегия*, если она удовлетворяет условиям:

1. $\zeta(0) = (1, 0)$ и $\zeta|_{[0, S]}$ инъективна,
2. $s \mapsto u \circ \zeta(s)$ возрастает,
3. функция ζ локально выпукла, т. е. локально является графиком выпуклой функции: для каждого $s > 0$ существует система координат вокруг $\zeta(s)$ такая, что $\text{Graph}(\zeta)$ совпадает с графиком выпуклой функции в окрестности $\zeta(s)$ ($\dot{\zeta}(s)$ можно записать как $\dot{\zeta}(s) = e^{i\theta(s)}$ с монотонной $\theta(s)$).
4. ζ вращается против часовой стрелки вокруг 0.

Спираль ζ является *допустимой*, если она также является допустимым барьером.

Предположение о том, что ζ локально выпукла, позволяет определить направление вращения кривой, после чего условие 4 задает направление вращения.

Более глубокого обсуждения требует предположение

$$s \rightarrow u \circ \zeta(s) \text{ возрастает,}$$

соответствующее тому факту, что либо часть барьера лежит на множестве уровня $\{u = t\}$, либо огонь не может одновременно сжечь две части барьера. Иными словами, $\zeta^{-1}(\{u < t\})$ является связным отрезком. Отметим, что, имея барьер до момента времени $\bar{t}$ (или, эквивалентно, длиной $\bar{s}$), мы можем задаться вопросом, какой барьер является оптимальным для данной задачи оптимизации с той же степенью свободы, что и для исходной задачи. Это последнее наблюдение будет иметь фундаментальное значение в нашем гомотопическом аргументе (пункт 5 в аннотации).

Единственные известные результаты об этом семейству барьеров можно найти в работах [7, 15]. В этих двух работах независимо и с использованием различных методик доказан следующий результат:

Теорема 2.1. Пусть $\sigma > 2,6144\dots$ (критическая скорость). Тогда существует спиралевидная стратегия, которая ограничивает распространение огня.

Доказательство этого результата получается путем изучения конкретной спирали, которую мы назовем насыщенной спиралью. Пусть Z — допустимая спираль. Мы говорим, что $Z = Z_{\text{sat}}$ является *насыщенной спиралью*, если

$$\mathcal{S}(Z_{\text{sat}}) = \{t \in [0, T] : \mathcal{H}^1(Z_{\text{sat}} \cap \overline{R^{Z_{\text{sat}}}(t)}) = \sigma t\} = [0, T].$$

В терминах ранее определенного функционала допустимости каждая точка $P \in Z$ на насыщенной спирали является *насыщенной*, т. е. $\mathcal{A}(P) = 0$.

Насыщенные спирали (или компактные и связные подмножества насыщенных спиралей) считаются строительными блоками для оптимальных стратегий. Действительно, в работе [11] доказано, что если $\sigma > 2$, то оптимальная стратегия (минимизирующая функционал стоимости (1.6)) среди простых замкнутых кривых представляет собой объединение дуги окружности и двух ветвей насыщенных логарифмических спиралей в полярных координатах. Как мы увидим, между логарифмическими спиралями и насыщенными спиралями существуют тесные связи. Также в работе [2] доказано, что при $\sigma < 2$, если стратегия Z является оптимальной ($\kappa_1 = 0$, $\kappa_2 = 1$) и ее внутренний барьер представляет собой отрезок, то граница ∂R_{∞}^Z представляет собой объединение отрезка и ветви логарифмической спирали.

Доказательство теоремы 2.1 основано на следующем факте: насыщенная спираль Z_{sat} может быть представлена в полярных координатах $(\phi, r_{\text{sat}}(\phi)) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^+$, и, кроме того, $r_{\text{sat}}(\phi)$ является решением следующего уравнения с запаздыванием:

$$\frac{d}{d\phi} r_{\text{sat}}(\phi) = \text{ctg}(\alpha) r_{\text{sat}}(\phi) - \frac{r_{\text{sat}}(\phi - (2\pi + \alpha))}{\sin(\alpha)} \quad (2.1)$$

с начальными данными

$$r_{\text{sat}}(\phi) = \begin{cases} e^{\text{ctg} \alpha \phi} & \forall \phi \in [0, 2\pi), \\ (e^{2\pi \text{ctg} \alpha} - 1) e^{\text{ctg} \alpha (\phi - 2\pi)} & \forall \phi \in [2\pi, 2\pi + \alpha]. \end{cases} \quad (2.2)$$

Угол $\alpha \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right)$ задается формулой

$$\alpha = \arccos\left(\frac{1}{\sigma}\right),$$

(это именно тот подход, которому следует работа [15]). Угол α — это постоянный угол, образованный лучом пожара со спиралью. Здесь начальное условие для пожара — это множество $R_0 = B_1(0)$, а спираль начинается в точке $P = (1, 0)$. Заметим, что при $\phi < 2\pi$ решение представляет собой дугу логарифмической спирали в полярных координатах $r_{\text{sat}}(\phi) = e^{\text{ctg } \alpha \phi}$.

Доказательство теоремы 2.1 осуществляется исследованием собственных значений оператора, связанного с уравнением выше: существует критическое значение ($\bar{\sigma} = 2,6144\dots$, решение трансцендентного уравнения) такое, что если $\sigma > \bar{\sigma}$, то все собственные значения соответствующего линейного оператора являются комплексно сопряженными: в частности, решение колеблется, следовательно, существует некоторый первый угол $\bar{\phi}$ такой, что $r_{\text{sat}}(\bar{\phi}) = 0$. Это точно соответствует тому факту, что Z_{sat} блокирует огонь.

Однако в работе [7] не доказано, что, наоборот, при $\sigma \leq \bar{\sigma}$ насыщенная спираль не ограничивает огонь, т. е. $r_{\text{sat}}(\phi) > 0$ для любого угла ϕ : этот факт можно вывести из утверждения [15, теорема 3], которая дает оценку

$$\text{минимальный угол закрытия} \sim (\text{мнимая часть наибольшего собственного значения})^{-1}.$$

Полученные результаты обосновывают следующую гипотезу относительно спиралей общего типа.

Гипотеза 2.1. *Если $\sigma \leq \bar{\sigma}$, то никакая спиралевидная стратегия не сможет остановить огонь.*

Здесь отметим, что из-за ограничений на барьер критическая скорость $\bar{\sigma}$ больше скорости $\sigma = 2$ для исходной гипотезы 1.1.

Частичный ответ на это предположение был дан в работе [15], где авторы используют геометрический аргумент для доказательства следующего результата:

Теорема 2.2. *Если $\sigma \leq \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$, то никакая спиралевидная стратегия не является допустимой.*

Эта оценка получена в предположении, что допустимы лишь некоторые точки на спирали, тогда как предположение о допустимости всего барьера требует больших усилий.

Цель нашего исследования — доказать предположение выше:

Теорема 2.3. *Никакая допустимая спиралевидная стратегия не сможет локализовать огонь, если $\sigma \leq \bar{\sigma}$.*

Здесь мы приводим значительно упрощенное представление о нашем подходе. Мы опустим некоторые технические вопросы, которые потребовали бы глубокого анализа; см. [3], где также приведен численный метод, необходимый для анализа.

Во-первых, спиральная стратегия допускает полярное представление $(\phi, r(\phi)) \in [0, +\infty) \times \mathbb{R}^+$, как показано на рис. 1 (мы будем называть это представление *уголо-лучевыми* координатами):

- r — длина отрезка, начинающегося от одной точки ζ и направленного по $\dot{\zeta}$, заканчивающегося в следующем витке ζ ;
- ϕ — угол поворота r ;
- $\beta(\phi)$ — угол между ζ в конечной точке $r(\phi)$ и направлением $r(\phi)$.

Мы также можем рассматривать $r(\phi)$ как последнюю часть оптимального луча, необходимую для вычисления функции минимального времени u в точке $\zeta(\phi)$, где используется ϕ вместо s .

Параметр $\beta(\phi)$ является управляющим параметром: после его выбора уравнение на $r(\phi)$ принимает вид

$$\frac{d}{d\phi} r(\phi) = \text{ctg}(\beta(\phi)) r(\phi) - \frac{r(\phi^-)}{\sin(\beta(\phi^-))},$$

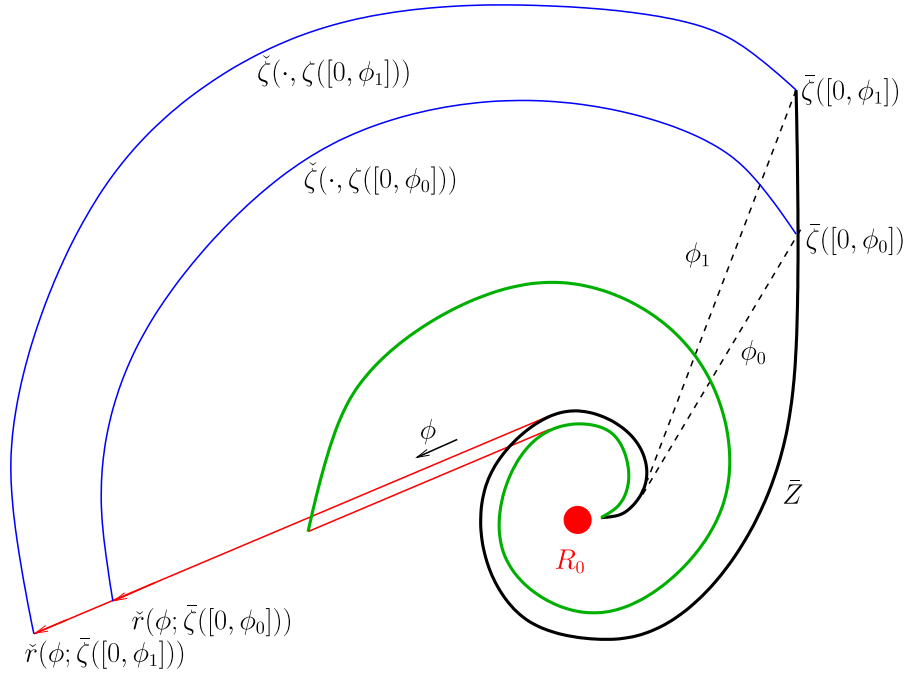


Рис. 2. Барьер $\bar{\zeta}([0, \phi_0])$ фиксирован. Для произвольного угла $\phi \geq \phi_0$ мы строим новую спираль $\tilde{\zeta}(\phi; \bar{\zeta}([0, \phi_0]))$ (синяя). Семейство $\tilde{\zeta}$ продолжений $\bar{Z}$ (черная спираль) представлено синим цветом. Базовая спираль (зеленая) — $\tilde{\zeta}(\phi; \bar{\zeta}(\{0\}))$.

FIG. 2. The barrier $\bar{\zeta}([0, \phi_0])$ is fixed. Given any angle $\phi \geq \phi_0$, we construct a new spiral $\tilde{\zeta}(\phi; \bar{\zeta}([0, \phi_0]))$ (blue). The family $\tilde{\zeta}$ of continuations of $\bar{Z}$ (black spiral) is represented in blue. The base spiral (green) is $\tilde{\zeta}(\phi; \bar{\zeta}(\{0\}))$.

Поскольку спираль $\bar{\zeta}$ фиксирована в ходе гомотопического аргумента, мы сокращаем обозначение до $\tilde{r}(\cdot, \phi_0)$ или также $\tilde{r}(\cdot; s_0)$ при использовании параметризации по длине для $\bar{\zeta}$.

Существование такого семейства для каждой спирали $\bar{\zeta}$ дает, таким образом, расширенную версию основной теоремы 2.3 (которая теперь становится следствием):

Теорема 2.4. *Для каждой спиральной стратегии $\bar{\zeta}$ и угла поворота $\bar{\phi}$ спираль $\tilde{\zeta}(\cdot; \phi_0)$ является оптимальным решением задачи минимизации (2.3) при заданной начальной спиральной дуге $\bar{\zeta}([0, \phi_0])$. В частности, $\tilde{\zeta}(\phi; 0)$ является оптимальной среди всех спиралей.*

Учитывая оптимальность $\tilde{\zeta}(\phi; 0)$, обозначим эту спираль как $Z_{\text{opt}} = \zeta_{\text{opt}}([0, \bar{\phi}]; 0)$. Пункты 3 и 2 выше подразумевают, что

$$\tilde{r}(\bar{\phi}; s_0) = \tilde{r}(\bar{\phi}; 0) + \int_0^{\phi_0} \frac{d}{d\phi} \tilde{r}(\bar{\phi}; \phi_0) d\phi \geq \tilde{r}(\bar{\phi}; 0),$$

но поскольку это справедливо для каждого s_0 , уравнение выше также справедливо для последнего параметра $\bar{s}$, так что $\tilde{r}(\bar{\phi}) \geq \tilde{r}(\bar{\phi}; 0)$, где мы использовали $(\phi, \tilde{r}(\phi))$ в качестве угло-лучевых координат фиксированной спирали $\bar{Z}$. В частности, справедлива теорема 2.3.

Также докажем, что единственный случай, когда производная $\frac{d}{d\phi_0} \tilde{r}(\bar{\phi}; s_0)$ равна 0, — это точное следование по спирали $\tilde{r}(\cdot; \phi_0)$, так что приведенная выше цепочка неравенств становится строгой, как только мы возмущаем спираль Z_{opt} .

Следствие 2.1. *Оптимальная спиральная стратегия для угла $\bar{\phi}$ — это Z_{opt} , параметризованная как $\tilde{r}(\phi; 0) = \tilde{r}(\phi)$.*

Отметим, что при изменении угла $\bar{\phi}$ оптимальная спираль изменяется. Поэтому мы часто будем ссылаться на оптимальную спираль при фиксированном угле $\bar{\phi}$. Также отметим, что оптимальная

спираль не является регулярной, а лишь липшицевой на последнем витке. Это можно эвристически объяснить тем, что последний виток не оказывает влияния на следующую эволюцию (будучи последним), поэтому регуляризующий эффект уравнения с запаздыванием не действует.

Описав оптимальную спираль, можно дать оценки, в частности, доказать асимптотическую расходимость оптимальной спирали:

Следствие 2.2. *Спираль Z_{opt} , оптимальная под углом $\bar{\phi}$, удовлетворяет условию*

$$\dot{r}(\bar{\phi}) \simeq \bar{\phi} e^{\bar{c}\bar{\phi}},$$

где $\bar{c}$ — единственное положительное собственное значение уравнения с запаздыванием.

Мы также можем точно определить значение константы перед $\phi e^{\bar{c}\phi}$.

Подведем итоги. Разработан новый дифференциальный инструмент для работы со спиралевидными стратегиями. Выбор угло-лучевых координат для данной спирали является одной из ключевых идей этой статьи. В частности, в этих координатах спираль является решением дифференциального уравнения с запаздыванием, что позволяет сформулировать новую задачу оптимизации, допускающую дифференциальную структуру. Для любой спирали $\bar{Z}$ действительно можно найти дифференциальное семейство спиралей и использовать подход гомотопического типа, чтобы доказать, что любая спиралевидная стратегия не ограничивает огонь при $\sigma \leq \bar{\sigma} = 2,6144\dots$. Главное — угадать правильное выражение семейства спиралей, доказать его дифференцируемость и вычислить производную, и, наконец, показать, что эта производная положительна. Для этого потребуются подробное исследование, проведенное в [3], а также использование программного обеспечения *Mathematica* для вычисления трансцендентных функций. Каждый отдельный строительный блок имеет фундаментальное значение в доказательстве гипотезы Брессана о пожаре для спиралей в ее точной форме. Отметим, что важность этой работы заключается не только в доказательстве гипотезы в контексте спиралевидных стратегий, но и в реализации структуры, которая может быть применена для изучения более общих ситуаций, что, как мы надеемся, приведет к полному решению гипотезы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мьижис А. Д. Линейные дифференциальные уравнения с запаздывающим аргументом. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1951.
2. Bianchini S., Zizza M. A case study in fire confinement problems // *Preprint*.
3. Bianchini S., Zizza M. Existence of spiral strategies for blocking fire spreading // ArXiv. — 2025. — 2508.05324 [math.AP]. — DOI: [10.48550/arXiv.2508.05324](https://doi.org/10.48550/arXiv.2508.05324).
4. Bressan A. Differential inclusions and the control of forest fires // J. Differ. Equ. — 2007. — 243. — С. 179–207. — DOI: [10.1016/j.jde.2007.03.009](https://doi.org/10.1016/j.jde.2007.03.009).
5. Bressan A. Prize offered for the solution of a dynamic blocking problem // Sites at Penn State. Alberto Bressan. — 2011. — Режим доступа: <https://bpb-us-e1.wpmucdn.com/sites.psu.edu/dist/c/168431/files/2023/07/prize2.pdf> (дата обращения 24.03.2026).
6. Bressan A. Dynamic blocking problems for a model of fire propagation // В сб.: «Advances in Applied Mathematics, Modeling, and Computational Science». — Boston: Springer, 2013. — С. 11–40. — DOI: [10.1007/978-1-4614-5389-5_2](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5389-5_2).
7. Bressan A., Burago M., Friend A., Jou J. Blocking strategies for a fire control problem // Anal. Appl. — 2008. — 6. — С. 229–246. — DOI: [10.1142/S0219530508001146](https://doi.org/10.1142/S0219530508001146).
8. Bressan A., Chiri M. T. On the regularity of optimal dynamic blocking strategies // Calc. Var. Partial Differ. Equ. — 2022. — 61, № 1. — 36. — DOI: [10.1007/s00526-021-02148-6](https://doi.org/10.1007/s00526-021-02148-6).
9. Bressan A., De Lellis C. Existence of optimal strategies for a fire confinement problem // Commun. Pure Appl. Math. — 2009. — 62. — С. 789–830. — DOI: [10.1002/cpa.20271](https://doi.org/10.1002/cpa.20271).
10. Bressan A., Wang T. Equivalent formulation and numerical analysis of a fire confinement problem // ESAIM Control Optim. Calc. Var. — 2010. — 16. — С. 974–1001. — DOI: [10.1051/cocv/2009033](https://doi.org/10.1051/cocv/2009033).
11. Bressan A., Wang T. On the optimal strategy for an isotropic blocking problem // Calc. Var. Partial Differ. Equ. — 2012. — 45, № 1-2. — С. 125–145. — DOI: [10.1007/s00526-011-0453-4](https://doi.org/10.1007/s00526-011-0453-4).
12. Bressan A., Wang T. Global necessary conditions for a dynamic blocking problem // ESAIM Control Optim. Calc. Var. — 2012. — 18. — С. 124–145. — DOI: [10.1051/cocv/2010053](https://doi.org/10.1051/cocv/2010053).
13. De Lellis C., Robyr R. Hamilton–Jacobi equation with obstacles // Arch. Ration. Mech. Anal. — 2011. — 200. — С. 1051–1073. — DOI: [10.1007/s00205-010-0382-y](https://doi.org/10.1007/s00205-010-0382-y).

14. Hale J. K., Verduyn Lunel S. M. Introduction to Functional Differential Equations. — New York: Springer, 1993. — DOI: [10.1007/978-1-4612-4342-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4342-7).
15. Klein R., Langetepe E., Levcopoulos C., Lingas A., Schwarzwald B. On a fire fighter's problem // Int. J. Found. Comput. Sci. — 2019. — 30, № 2. — С. 231–246. — DOI: [10.1142/S0129054119500023](https://doi.org/10.1142/S0129054119500023).
16. Fitzpatrick P. M., Royden H. I. Real Analysis. — New York: Prentice Hall, 2010.

С. Бьянкини

S.I.S.S.A., Trieste, Italy

E-mail: bianchin@sissa.it, РИНЦ SPIN-код: 8421-6093, РИНЦ AuthorID: [1100693](https://elibrary.ru/author_index.aspx?id=1100693), ResearcherID: [AAC-6123-2021](https://orcid.org/0000-0001-7886-3285), Scopus: [6603954512](https://orcid.org/0000-0001-7886-3285), ORCID: [0000-0001-7886-3285](https://orcid.org/0000-0001-7886-3285)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-24-34](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-24-34)
EDN: [TICEMV](https://elibrary.ru/author_index.aspx?id=1100693)

UDC 517.974:517.911:517.977.1
Research article

Existence of the spiral strategies for blocking fire spreading

S. Bianchini

S.I.S.S.A., Trieste, Italy

Abstract. In this work, we study the problem on blocking fire by constructing a wall ζ whose shape is spiral-like. This is supposed to be the best strategy in the case where a single firefighter is constructing the wall with a finite construction speed σ : the barriers that satisfy this restriction on the construction speed are called admissible.

We prove a sharp version of Bressan's Fire Conjecture [5] in this case, i.e. when admissible barriers are spiral-like curves: namely, there exists a spiral-like barrier confining the fire in a bounded domain of $\mathbb{R}^2$ if and only if the speed of construction of the barrier σ is strictly larger than a critical speed $\bar{\sigma} = 2,614\dots$

The existence of confining spiral barriers for $\sigma > \bar{\sigma}$ is already known [7, 15], while we concentrate on the negative side, i.e. if $\sigma \leq \bar{\sigma}$, then no admissible spiral blocks the fire.

The proof of these results relies on:

1. the precise definition of a spiral barrier and its representation;
2. the analysis of saturated spiral barriers as a Retarded Differential Equation (RDE) in the spirit of [15];
3. the equivalent reformulation of the conjecture as a minimum problem of a functional for a prescribed functional;
4. the construction of the optimal closing spiral;
5. the analysis of a differentiable path of admissible spirals along which the functional is differentiable, and in particular increasing when moving from the optimal spiral to any other one (homotopy argument).

Due to the complexity of the solution, the evaluation of the quantities needed to prove that the functional is increasing is performed numerically.

Keywords: fire blocking, spiral barriers, Bressan fire conjecture, admissible strategies, delay differential equation, homotopy argument, isotropic fire propagation, dynamic blocking problem, rectifiable curves, Hausdorff measure.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: S. Bianchini, “Existence of the spiral strategies for blocking fire spreading,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 1, 24–34. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-24-34](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-24-34) EDN: [TICEMV](https://www.edn.net/TICEMV)

REFERENCES

1. A. D. Myshkis, *Lineynye differentsial'nye uravneniya s zapazdyvayushchim argumentom* [Linear Differential Equations with Retarded Argument], GITTL, Moscow–Leningrad, 1951 (in Russian).
2. S. Bianchini and M. Zizza, “A case study in fire confinement problems,” *Preprint*.
3. S. Bianchini and M. Zizza, “Existence of spiral strategies for blocking fire spreading,” *ArXiv*, 2025, — 2508.05324 [math.AP], DOI: [10.48550/arXiv.2508.05324](https://doi.org/10.48550/arXiv.2508.05324).
4. A. Bressan, “Differential inclusions and the control of forest fires,” *J. Differ. Equ.*, 2007, **243**, 179–207, DOI: [10.1016/j.jde.2007.03.009](https://doi.org/10.1016/j.jde.2007.03.009).
5. A. Bressan, “Prize offered for the solution of a dynamic blocking problem,” *Sites at Penn State. Alberto Bressan*, 2011. Available online: <https://bpb-us-e1.wpmucdn.com/sites.psu.edu/dist/c/168431/files/2023/07/prize2.pdf>, accessed on March 24, 2026.
6. A. Bressan, “Dynamic blocking problems for a model of fire propagation,” In: *Advances in Applied Mathematics, Modeling, and Computational Science*, Springer, Boston, 2013, pp. 11–40, DOI: [10.1007/978-1-4614-5389-5_2](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-5389-5_2).
7. A. Bressan, M. Burago, A. Friend, and J. Jou, “Blocking strategies for a fire control problem,” *Anal. Appl.*, 2008, **6**, 229–246, DOI: [10.1142/S0219530508001146](https://doi.org/10.1142/S0219530508001146).
8. A. Bressan and M. T. Chiri, “On the regularity of optimal dynamic blocking strategies,” *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 2022, **61**, No. 1, 36, DOI: [10.1007/s00526-021-02148-6](https://doi.org/10.1007/s00526-021-02148-6).
9. A. Bressan and C. De Lellis, “Existence of optimal strategies for a fire confinement problem,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 2009, **62**, 789–830, DOI: [10.1002/cpa.20271](https://doi.org/10.1002/cpa.20271).
10. A. Bressan and T. Wang, “Equivalent formulation and numerical analysis of a fire confinement problem,” *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 2010, **16**, 974–1001, DOI: [10.1051/cocv/2009033](https://doi.org/10.1051/cocv/2009033).
11. A. Bressan and T. Wang, “On the optimal strategy for an isotropic blocking problem,” *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 2012, **45**, No. 1-2, 125–145, DOI: [10.1007/s00526-011-0453-4](https://doi.org/10.1007/s00526-011-0453-4).
12. A. Bressan and T. Wang, “Global necessary conditions for a dynamic blocking problem,” *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 2012, **18**, 124–145, DOI: [10.1051/cocv/2010053](https://doi.org/10.1051/cocv/2010053).
13. C. De Lellis and R. Robyr, “Hamilton–Jacobi equation with obstacles,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2011, **200**, 1051–1073, DOI: [10.1007/s00205-010-0382-y](https://doi.org/10.1007/s00205-010-0382-y).
14. J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to Functional Differential Equations*, Springer, New York, 1993, DOI: [10.1007/978-1-4612-4342-7](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4342-7).
15. R. Klein, E. Langetepe, C. Levcopoulos, A. Lingas, and B. Schwarzwald, “On a fire fighter’s problem,” *Int. J. Found. Comput. Sci.*, 2019, **30**, No. 2, 231–246, DOI: [10.1142/S0129054119500023](https://doi.org/10.1142/S0129054119500023).
16. P. M. Fitzpatrick and H. I. Royden, *Real Analysis*, Prentice Hall, New York, 2010.

S. Bianchini

S.I.S.S.A., Trieste, Italy

E-mail: bianchin@sissa.it, eLIBRARY SPIN-code: 8421-6093, eLIBRARY AuthorID: [1100693](https://www.e-library.it/author/1100693), ResearcherID: [AAC-6123-2021](https://www.researcherid.org/ID/AAC-6123-2021), Scopus: [6603954512](https://www.scopus.com/authid/detail/authid?tid=6603954512), ORCID: [0000-0001-7886-3285](https://orcid.org/0000-0001-7886-3285)

О ПРИЛОЖЕНИЯХ ОБОБЩЁННОГО ПОТЕНЦИАЛА БЕССЕЛЯ К РЕШЕНИЮ СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ШРЁДИНГЕРА ДРОБНОГО ПОРЯДКА И ТЕОРИИ ЁМКОСТИ

А. Л. Джабраилов³, Э. Л. Шишкина^{1,2,3,4}

¹Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

²Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия

³Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова, Грозный, Россия

⁴Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

Аннотация. В статье на основе обобщённого потенциала Бесселя строится весовое пространство Соболева дробного порядка. Полученные результаты применяются для анализа сингулярного уравнения Шрёдингера дробного порядка. Для решения задачи Коши для этого уравнения доказана оценка, связывающая норму решения с нормой начального условия в весовом пространстве Соболева. Остальная часть статьи посвящена вопросам теории ёмкости, построенной на основе обобщённого потенциала Бесселя.

Ключевые слова: обобщённый потенциал Бесселя, весовое пространство Соболева, сингулярное уравнение Шрёдингера, теория ёмкости.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена в рамках государственного задания Минобрнауки РФ (FEGS-2026-0004).

Вклад авторов. Шишкина Э. Л. — научное руководство, формулирование идеи, гипотезы, цели исследования, разработка методов и процедур, доработка текста; Джабраилов А. Л. — написание первоначального текста статьи, проверка результатов, редактирование, доработка текста, организационное управление.

Для цитирования: Джабраилов А. Л., Шишкина Э. Л. О приложениях обобщённого потенциала Бесселя к решению сингулярного уравнения Шрёдингера дробного порядка и теории ёмкости // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 35–50. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-35-50](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-35-50) EDN: [TLBNOI](https://www.edn.ru/TLBNOI)

1. ВВЕДЕНИЕ

Потенциалы Бесселя представляют собой крайне интересный объект для исследования благодаря своим устойчивым структурным свойствам, применению в теории дифференциальных уравнений в частных производных дробного порядка, в том числе нелинейных, и удобству при построении обобщённых мер.

Применение потенциалов Бесселя в теории УЧП дробного порядка осуществляется через построение пространств потенциалов Бесселя и доказательство ограниченности операторов и решений в этих пространствах. При этом пространство потенциалов Бесселя совпадает с дробным пространством Соболева, которое, в свою очередь, является обобщением классического пространства Гёльдера.

Другое применение потенциалов Бесселя состоит в построении функции множеств для измерения их «размера». Такая функция называется ёмкостью и служит для характеристики «исключительных» множеств при для решений дифференциальных уравнений. Вполне естественно рассматривать ёмкости как «уточнения» классических мер Хаусдорфа. Они являются уточнениями в том смысле, что их можно использовать для различения множеств с нулевой мерой Хаусдорфа.

С развитием теории уравнений в частных производных с оператором Бесселя появилась необходимость в активном применении весовых пространств Соболева дробного порядка, построенных на основе обобщённых потенциалов Бесселя, а также введение обобщённых ёмкостей, приспособленных для измерения исключительных множеств, возникающих при решении краевых задач. В этой статье мы изучаем обобщённые потенциалы Рисса и Бесселя (опираясь на [3, 4, 9, 11]), строим весовое пространство Соболева дробного порядка, применяем полученные результаты для оценки решения сингулярного уравнения Шрёдингера дробного порядка, приводим общие аспекты теории ёмкости (опираясь на [1]) и, наконец, с помощью обобщённого потенциала Бесселя строим новую ёмкость и доказываем её свойства.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Приведем определения, относящиеся к весовому гармоническому анализу, опираясь на [6].

Пусть $\mathbb{R}^n$ — n -мерное евклидово пространство,

$$\mathbb{R}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ x_1 > 0, \dots, x_n > 0\},$$

$$\overline{\mathbb{R}}_+^n = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \ x_1 \geq 0, \dots, x_n \geq 0\}.$$

Мультииндекс $\gamma = (\gamma_1, \dots, \gamma_n)$, состоит из положительных фиксированных чисел $\gamma_i > 0$, $i = 1, \dots, n$, $|\gamma| = \gamma_1 + \dots + \gamma_n$.

Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, симметричное относительно каждой гиперплоскости $x_i = 0$, $i = 1, \dots, n$, $\Omega_+ = \Omega \cap \mathbb{R}_+^n$ и $\overline{\Omega}_+ = \Omega \cap \overline{\mathbb{R}}_+^n$. Имеем $\Omega_+ \subseteq \mathbb{R}_+^n$ и $\overline{\Omega}_+ \subseteq \overline{\mathbb{R}}_+^n$.

Пространство $L_p^\gamma(\Omega_+)$, $1 \leq p < \infty$ состоит из измеримых на $\overline{\Omega}_+$ функций, чётных по каждой из своих переменных x_i , $i = 1, \dots, n$, таких, что если $f \in L_p^\gamma(\Omega_+)$, то

$$\int_{\Omega_+} |f(x)|^p x^\gamma dx < \infty, \quad x^\gamma = \prod_{i=1}^n x_i^{\gamma_i}.$$

Для вещественного числа $p \geq 1$ $L_p^\gamma(\Omega_+)$ — норма функции $f \in L_p^\gamma(\Omega_+)$, определяется формулой

$$\|f\|_{L_p^\gamma(\Omega_+)} = \|f\|_{p, \gamma, \Omega_+} = \left(\int_{\Omega_+} |f(x)|^p x^\gamma dx \right)^{1/p}.$$

Будем использовать обозначения $L_p^\gamma = L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$ и

$$\|f\|_{p, \gamma} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)|^p x^\gamma dx \right)^{1/p}. \quad (2.1)$$

Мы будем использовать множество $C^m(\Omega_+)$, состоящее из m раз дифференцируемых на Ω_+ функций. Через $C^m(\overline{\Omega}_+)$ обозначим подмножество функций из $C^m(\Omega_+)$ таких, что все производные этих функций по x_i для любого $i = 1, \dots, n$ непрерывно продолжаются на $x_i = 0$. Функции $f \in C^m(\overline{\Omega}_+)$ мы будем называть *чётными по переменным x_i , $i = 1, \dots, n$* если $\frac{\partial^{2k+1} f}{\partial x_i^{2k+1}} \Big|_{x_i=0} = 0$ для всех неотрицательных целых $k \leq m$. Класс $C_{ev}^m(\overline{\Omega}_+)$ состоит из функций из $C^m(\overline{\Omega}_+)$, чётных по каждой из своих переменных x_i , $i = 1, \dots, n$. Тогда $C_{ev}^\infty(\overline{\Omega}_+) = \bigcap_{m=0}^\infty C_{ev}^m(\overline{\Omega}_+)$. Положим $C_{ev}^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+) = C_{ev}^\infty$.

Пусть $\dot{C}_{ev}^\infty(\overline{\Omega}_+)$ — пространство всех функций $f \in C_{ev}^\infty(\overline{\Omega}_+)$ с конечным носителем. Будем использовать обозначение $\dot{C}_{ev}^\infty(\overline{\Omega}_+) = \mathcal{D}_+(\overline{\Omega}_+)$ и $\dot{C}_{ev}^\infty(\mathbb{R}_+) = \dot{C}_{ev}^\infty$.

Будем использовать также часть пространства Шварца вида

$$S_{ev} = S_{ev}(\mathbb{R}_+^n) = \left\{ f \in C_{ev}^\infty : \sup_{x \in \mathbb{R}_+^n} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{Z}_+^n \right\},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n, \beta_1, \dots, \beta_n$ — целые неотрицательные числа, $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_n^{\alpha_n}$, $D^\beta = D_{x_1}^{\beta_1} \dots D_{x_n}^{\beta_n}$, $D_{x_j} = \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Для любой измеримой функции $f(x)$, определённой на $\mathbb{R}_+^n$ функцию

$$\mu_\gamma(f, t) = \text{mes}_\gamma \{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)| > t\} = \int_{\{x \in \mathbb{R}_+^n : |f(x)| > t\}} x^\gamma dx \quad (2.2)$$

будем называть *весовой функцией распределения* $|f(x)|$.

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}_+^n$. Тогда $\text{mes}_\gamma(\Omega)$ — *весовая мера* множества Ω , определяемая равенством

$$\text{mes}_\gamma(\Omega) = \int_\Omega x^\gamma dx.$$

Нормированная функция Бесселя j_ν определяется формулой

$$j_\nu(x) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu + 1)}{x^\nu} J_\nu(x), \quad (2.3)$$

где J_ν — функция Бесселя первого рода. Функция $j_{\frac{\nu-1}{2}}(t)$ есть собственная функция оператора

$$B_\nu = \frac{1}{t^\nu} \frac{d}{dt} t^\nu \frac{d}{dt}:$$

$$(B_\nu)_t j_{\frac{\nu-1}{2}}(\tau t) = -\tau^2 j_{\frac{\nu-1}{2}}(\tau t). \quad (2.4)$$

Для $x \in \mathbb{R}^n$ используем обозначение

$$\mathbf{j}_\gamma(x, \xi) = \prod_{i=1}^n j_{\frac{\gamma_i-1}{2}}(x_i \xi_i), \quad \mathbf{j}_\gamma(0, \xi) = 1. \quad (2.5)$$

Очевидно, что

$$|\mathbf{j}_\gamma(x, \xi)| \leq 1.$$

Многомерное преобразование Ханкеля функции $f \in L_1^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$ имеет вид

$$\mathbf{F}_\gamma[f](\xi) = \mathbf{F}_\gamma[f(x)](\xi) = \widehat{f}(\xi) = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(x) \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) x^\gamma dx. \quad (2.6)$$

Пусть $f \in L_1^\gamma(\mathbb{R}_+)$ и является функцией ограниченной вариации по каждой из переменных x_i , $i = 1, \dots, n$ в окрестности каждой точки x , в которой функция f непрерывна. Тогда обратное многомерное преобразование Ханкеля имеет вид

$$\mathbf{F}_\gamma^{-1}[\widehat{f}(\xi)](x) = f(x) = \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod_{j=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}_+^n} \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) \widehat{f}(\xi) \xi^\gamma d\xi.$$

Многомерный обобщённый сдвиг имеет вид

$$({}^\gamma \mathbf{T}_x^y f)(x) = {}^\gamma \mathbf{T}_x^y f(x) = ({}^{\gamma_1} T_{x_1}^{y_1} \dots {}^{\gamma_n} T_{x_n}^{y_n} f)(x), \quad (2.7)$$

где каждый одномерный обобщённый сдвиг ${}^{\gamma_i} T_{x_i}^{y_i}$, $i = 1, \dots, n$

$$({}^{\gamma_i} T_{x_i}^{y_i} f)(x) = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi} \Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)} \int_0^\pi f(x_1, \dots, x_{i-1}, \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos \varphi_i}, x_{i+1}, \dots, x_n) \sin^{\gamma_i-1} \varphi_i d\varphi_i.$$

Для $\gamma_i = 0$ обобщённый сдвиг ${}^{\gamma_i}T_{x_i}^{y_i}$ имеет вид

$${}^0T_{x_i}^{y_i} = \frac{f(x_i + y_i) + f(x_i - y_i)}{2}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Следующая формула справедлива:

$${}^{\gamma}\mathbf{T}_x^y \mathbf{j}_{\gamma}(x, \xi) = \mathbf{j}_{\gamma}(x, \xi) \mathbf{j}_{\gamma}(y, \xi). \quad (2.8)$$

Обобщённая свертка, порождённая многомерным обобщённым сдвигом ${}^{\gamma}\mathbf{T}_x^y$, даётся формулой

$$(f * g)_{\gamma}(x) = (f * g)_{\gamma} = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y) ({}^{\gamma}\mathbf{T}_x^y g)(x) y^{\gamma} dy. \quad (2.9)$$

Применение многомерного преобразования Ханкеля к обобщённой свертке (2.9) даёт

$$\mathbf{F}_{\gamma}[(f * g)_{\gamma}(x)](\xi) = \mathbf{F}_{\gamma}[f(x)](\xi) \mathbf{F}_{\gamma}[g(x)](\xi). \quad (2.10)$$

Мы будем иметь дело с сингулярным дифференциальным оператором Бесселя B_{γ}

$$(B_{\gamma})_t = \frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\gamma}{t} \frac{\partial}{\partial t} = \frac{1}{t^{\gamma}} \frac{\partial}{\partial t} t^{\gamma} \frac{\partial}{\partial t}, \quad t > 0, \quad \gamma > 0, \quad (2.11)$$

и Δ_{γ} — оператором Лапласа—Бесселя

$$\Delta_{\gamma} = (\Delta_{\gamma})_x = \sum_{k=1}^n (B_{\gamma_k})_{x_k}. \quad (2.12)$$

Перечислим следующие задачи для различных сингулярных дифференциальных уравнений с оператором Лапласа—Бесселя:

$$\begin{cases} u_{tt} - \Delta_{\gamma} u = f(u, u_t), & x \in \mathbb{R}_+^n, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = \psi(x), & x \in \mathbb{R}_+^n, \end{cases} \quad (2.13)$$

$$\begin{cases} u_t - \Delta_{\gamma} u = f(u, u_t), & x \in \mathbb{R}_+^n, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}_+^n, \end{cases} \quad (2.14)$$

$$\begin{cases} iu_t + \Delta_{\gamma} u = f(u, u_t), & x \in \mathbb{R}_+^n, \quad t > 0; \\ u(x, 0) = \varphi(x), & x \in \mathbb{R}_+^n, \end{cases} \quad (2.15)$$

$$\begin{cases} \Delta_{\gamma} u = f(u, u_t), & x \in \Omega_+; \\ u(x) = \varphi(x), & x \in \partial\Omega_+. \end{cases} \quad (2.16)$$

Для всех таких задач ставится вопрос о поиске класса функций, в котором существует решение. Для (2.13)–(2.16) и других задач для дифференциальных уравнений с оператором Лапласа—Бесселя таким классом оказывается пространство обобщённых потенциалов Бесселя.

Поскольку

$$\|f\|_{p, \gamma}^p = \int_{\mathbb{R}_+^n} |f(x)|^p x^{\gamma} dx \geq \int_{\{x: |f(x)| > t\}^+} |f(x)|^p x^{\gamma} dx \geq t^p \mu_{\gamma}(f, t),$$

то справедливо неравенство

$$\mu_{\gamma}(f, t) \leq \frac{\|f\|_{p, \gamma}^p}{t^p}. \quad (2.17)$$

Например, справедлива формула (см. [6, формула 2.174])

$$\text{mes}_{\gamma}(S_1^+(n)) = |S_1^+(n)|_{\gamma} = \int_{S_1^+(n)} x^{\gamma} dS = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)}. \quad (2.18)$$

3. B -ПОТЕНЦИАЛ РИССА И ЕГО ОБРАЩЕНИЕ

Теория потенциальных операторов получила своё развитие из теории дифференциальных уравнений в частных производных. Первые потенциальные операторы — потенциалы Рисса — появились как решения задач для уравнения Лапласа и волнового уравнения [10]. Впоследствии теория потенциальных операторов сыграла фундаментальную роль в развитии функционального анализа и теории гильбертова пространства. В последнее время идеи теории потенциала обогатили теорию функциональных пространств, которые естественным образом возникают при изучении уравнений в частных производных, в том числе и нелинейных.

Формальную операцию

$$(-\Delta_\gamma)^{-\frac{\alpha}{2}}\varphi = \mathbf{F}_\gamma^{-1}|x|^{-\alpha}\mathbf{F}_\gamma\varphi, \quad \alpha \in \mathbb{R}$$

будем называть *дробным риссовым B -интегро-дифференцированием*.

В работе [3] построен обратный оператор к B -потенциалу Рисса. B -потенциал Рисса имеет вид

$$(\mathbf{U}_\gamma^\alpha\varphi)(x) = C_{n,\gamma,\alpha} \int_{\mathbb{R}_+^n} k_\alpha(y) (\gamma \mathbf{T}_x^y \varphi(x)) y^\gamma dy, \quad (3.1)$$

где $\gamma \mathbf{T}_x^y$ — многомерный обобщённый сдвиг (2.7),

$$k_\alpha(x) = \begin{cases} |x|^{\alpha-n-|\gamma|}, & \text{если } \alpha - n - |\gamma| \neq 0, 2, 4, \dots; \\ |x|^{\alpha-n-|\gamma|} \ln |x|, & \text{если } \alpha - n - |\gamma| = 0, 2, 4, \dots, \end{cases}$$

$C_{n,\gamma,\alpha}$ — нормировочная константа

$$C_{n,\gamma,\alpha} = \begin{cases} \frac{\Gamma(\frac{\alpha}{2}) \prod_{j=1}^n \Gamma(\frac{\gamma_j+1}{2})}{2^{n-\alpha} \Gamma(\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2})}, & \text{если } \alpha - n - |\gamma| \neq 0, 2, 4, \dots; \\ \frac{(-1)^{\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}} \Gamma(\frac{\alpha}{2}) \prod_{j=1}^n \Gamma(\frac{\gamma_j+1}{2})}{2^{n-\alpha+1}}, & \text{если } \alpha - n - |\gamma| = 0, 2, 4, \dots \end{cases}$$

Преобразование Ханкеля (2.6), применённое к интегралу (3.1) при $0 < \alpha < \frac{n+|\gamma|+1}{2}$ и соответствующем выборе константы $C_{n,\gamma}$, даёт равенство

$$\mathbf{F}_\gamma[(\mathbf{U}_\gamma^\alpha\varphi)(x)](\xi) = |\xi|^{-\alpha} \mathbf{F}_\gamma[\varphi(x)](\xi). \quad (3.2)$$

При $\alpha \geq \frac{n+|\gamma|+1}{2}$ интеграл (3.1) и его преобразование Ханкеля изучается в пространстве обобщённых функций Φ'_γ , построенном по схеме П. И. Лизоркина [5] в работе [2].

В силу (3.2) B -потенциал Рисса представляет собой один из возможных способов определения дробной отрицательной степени оператора Лапласа—Бесселя:

$$(-\Delta_\gamma)^{-\frac{\alpha}{2}}\varphi(x) = (\mathbf{U}_\gamma^\alpha\varphi)(x).$$

Левый обратный оператор к оператору (3.1) получен в работе [3], назван *B -гиперсингулярным интегралом* и имеет вид

$$(\mathbf{D}_\gamma^\alpha\varphi)(x) = \frac{1}{d_{n,\gamma,\ell}(\alpha)} \int_{\mathbb{R}_+^n} \frac{(\gamma \square_y^\ell \varphi)(x)}{|y|^{n+|\gamma|+\alpha}} y^\gamma dy, \quad \alpha > 0, \quad (3.3)$$

где

$$(\gamma \square_y^\ell \varphi)(x) = \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^k C_\ell^k \gamma \mathbf{T}_x^{ky} \varphi(x)$$

— обобщённая конечная разность порядка,

$$d_{n,\gamma,\ell}(\alpha) = \beta_{n,\gamma}(\alpha) \frac{A_\ell(\alpha)}{\sin \frac{\alpha\pi}{2}},$$

$$\beta_{n,\gamma}(\alpha) = \frac{\pi \prod_{j=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}{2^{n+\alpha} \Gamma\left(1 + \frac{\alpha}{2}\right) \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|+\alpha}{2}\right)}, \quad A_\ell(\alpha) = \sum_{k=0}^{\ell} (-1)^{k-1} C_\ell^k k^\alpha.$$

Поскольку

$$\mathbf{F}_\gamma[(\mathbf{D}_\gamma^\alpha \varphi)(x)](\xi) = |\xi|^\alpha \mathbf{F}_\gamma[f(x)](\xi), \quad (3.4)$$

для достаточно хороших функций (например, из основного пространства Φ_γ , см. [2]), следует, что

$$\mathbf{D}_\gamma^\alpha \mathbf{U}_\gamma^\alpha \varphi = \varphi$$

и

$$(-\Delta_\gamma)^{\frac{\alpha}{2}} \varphi(x) = (\mathbf{D}_\gamma^\alpha \varphi)(x).$$

Отметим, что в случае, когда $\frac{\alpha}{2}$ — натуральное число, оператор $(-\Delta_\gamma)^{\frac{\alpha}{2}}$ определяется итерированием, $(-\Delta_\gamma)^0 = I$.

4. ОБОБЩЁННЫЙ ПОТЕНЦИАЛ БЕССЕЛЯ И ЕГО СВОЙСТВА

Потенциал Бесселя похож на потенциал Рисса, но имеет лучшие свойства убывания на бесконечности. Такие потенциалы изучены в [8].

В этом разделе мы приведем некоторую информацию об обобщённом потенциале Бесселя, который формально можно определить как дробную отрицательную степень оператора $(I - \Delta_\gamma)$:

$$(I - \Delta_\gamma)^{-\frac{\alpha}{2}} \varphi(x),$$

где Δ_γ — оператор Лапласа—Бесселя (2.12).

Обобщённое ядро Бесселя имеет вид

$$G_\alpha^\gamma(x) = \mathbf{F}_\gamma^{-1}[(1 + |\xi|^2)^{-\frac{\alpha}{2}}](x), \quad \alpha > 0.$$

Для этого ядра справедливы свойства:

(1)

$$G_\alpha^\gamma(x) = \frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{|x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|); \quad (4.1)$$

(2) функция $G_\alpha^\gamma(x)$ бесконечно дифференцируема за пределами начала координат;

(3) при $|x| \rightarrow 0$ функция $G_\alpha^\gamma(x)$ допускает оценку

$$G_\alpha^\gamma(x) \sim \frac{2^{n-|\gamma|}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} \begin{cases} \frac{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}\right)}{2^{\alpha-|\gamma|}} |x|^{\alpha-n-|\gamma|}, & \text{если } 0 < \alpha < n + |\gamma|; \\ -2^{1-n} \left(\ln\left(\frac{|x|}{2}\right) + \vartheta \right), & \text{если } \alpha = n + |\gamma|; \\ \frac{\Gamma\left(\frac{\alpha-n-|\gamma|}{2}\right)}{2^n}, & \text{если } n + |\gamma| < \alpha; \end{cases} \quad (4.2)$$

(4) при $|x| \rightarrow \infty$ функция $G_\alpha^\gamma(x)$ допускает оценку

$$G_\alpha^\gamma(x) \sim \frac{\sqrt{\pi} 2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha+1}{2}}}{|x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha+1}{2}} \Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)} e^{-|x|}; \quad (4.3)$$

(5) $G_\alpha^\gamma(x) \in L_1^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$;

(6) преобразование Ханкеля ядра Бесселя для $\alpha > 0$ имеет вид

$$\mathbf{F}_\gamma[G_\alpha^\gamma](\xi) = (1 + |\xi|^2)^{-\alpha/2}. \quad (4.4)$$

Свойства ядра $G_\alpha^\gamma(x)$ (1)–(6) доказаны в статье [4].

Обобщённый потенциал Бесселя определяется соотношением

$$(\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} G_\alpha^\gamma(y) (\gamma \mathbf{T}_x^\gamma \varphi(x)) y^\gamma dy. \quad (4.5)$$

Используя перечисленные свойства ядра G_α^γ , можно легко получить основные свойства обобщённого потенциала Бесселя:

(1) для $\varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$, $1 \leq p \leq \infty$

$$\|\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi\|_{p,\gamma} \lesssim \|\varphi\|_{p,\gamma}, \quad \alpha > 0;$$

(2) полугрупповое свойство

$$\mathbf{G}_\gamma^\alpha \mathbf{G}_\gamma^\beta \varphi = \mathbf{G}_\gamma^{\alpha+\beta} \varphi, \\ \varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n);$$

(3)

$$(I - \Delta_\gamma)^k \mathbf{G}_\gamma^{\alpha+2k} \varphi = \mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi, \quad k \in \mathbb{N}, \quad \varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n);$$

(4)

$$\mathbf{G}_\gamma^0 \varphi = \varphi, \quad \varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n).$$

В статье [9] построены две формы обратного оператора к обобщённому потенциалу Бесселя. Применение обобщённого потенциала Бесселя к решению неоднородного сингулярного экранированного уравнения Пуассона вида $(I - \Delta_\gamma)^k u = f$, $k \in \mathbb{N}$ было произведено в [11].

5. ВЕСОВОЕ ПРОСТРАНСТВО СОБОЛЕВА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

Дробные шкалы пространств широко применяются в теории дифференциальных уравнений с частными производными (см. [7]). Для изучения уравнений в частных производных, содержащих оператор Лапласа—Бесселя (2.12), применяются пространства Соболева дробного порядка, построенные на основе обобщённого потенциала Бесселя (4.5).

Для $\alpha \geq 0$ определим *весовое пространство Соболева дробного порядка* $H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)$ как

$$H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n) = \{f \in L_\gamma^2(\mathbb{R}_+^n) : \|f\|_{H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)} < \infty\}, \quad (5.1)$$

где

$$\|f\|_{H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} (1 + |\xi|^2)^{2\alpha} |\mathbf{F}_\gamma[f](\xi)|^2 \xi^\gamma d\xi \right)^{1/2}.$$

В силу связи нормы $\|f\|_{H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)}$ с обобщённым потенциалом Бесселя (4.5) пространство $H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)$ называется также *пространством обобщённых потенциалов Бесселя*. Очевидно, что

$$H_\gamma^0(\mathbb{R}_+^n) = L^2(\mathbb{R}_+^n).$$

Справедливо вложение

$$H_\gamma^{\alpha_2}(\mathbb{R}_+^n) \subset H_\gamma^{\alpha_1}(\mathbb{R}_+^n), \quad \alpha_1 < \alpha_2.$$

Лемма 5.1. $\dot{C}_{ev}^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ плотно в $H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)$.

Доказательство. Пусть $\{\psi_\varepsilon : \varepsilon > 0\}$ — гладкая аппроксимационная единица: $\psi_\varepsilon(x) = \frac{1}{\varepsilon^{n+|\gamma|}} \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right)$, функция $\psi \in C_{ev}^\infty$ с носителем из $B_1^+(n)$, такая, что $\int_{\mathbb{R}_+^n} \psi(x) x^\gamma dx = 1$.

Если $f \in H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)$, то функция

$$f_\varepsilon(x) = (\psi_\varepsilon(x) * f(x))_\gamma = \frac{1}{\varepsilon^{n+|\gamma|}} \int_{\mathbb{R}_+^n} \gamma \mathbf{T}_y^\gamma f(y) \psi\left(\frac{y}{\varepsilon}\right) y^\gamma dy$$

бесконечно дифференцируема.

Покажем, что

$$\|f - f_\varepsilon\|_{H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)} \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0.$$

Учитывая, что $\mathbf{F}_\gamma[f_\varepsilon](\xi) = \mathbf{F}_\gamma[\psi](\varepsilon\xi) \cdot \mathbf{F}_\gamma[f](\xi)$, применяя обобщённое неравенство Коши—Буняковского и обобщённое равенство Парсеваля, запишем

$$\begin{aligned} \|f - f_\varepsilon\|_{H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)}^2 &= \int_{\mathbb{R}_+^n} (1 + |\xi|^2)^{2\alpha} |1 - \mathbf{F}_\gamma[\psi](\varepsilon\xi)|^2 |\mathbf{F}_\gamma[f](\xi)|^2 \xi^\gamma d\xi \leq \\ &\leq C \int_{\mathbb{R}_+^n} |(1 - \mathbf{F}_\gamma[\psi](\varepsilon\xi))|^2 \cdot |\mathbf{F}_\gamma[f](\xi)|^2 \xi^\gamma d\xi \leq C \|f\|_{2,\gamma}^2 \int_{\mathbb{R}_+^n} |(1 - \mathbf{F}_\gamma[\psi](\varepsilon\xi))|^2 \xi^\gamma d\xi \rightarrow 0, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Таким образом, $\dot{C}_{ev}^\infty(\mathbb{R}_+^n)$ -функции плотны в $H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)$. $\square$

6. СИНГУЛЯРНОЕ УРАВНЕНИЕ ШРЁДИНГЕРА ДРОБНОГО ПОРЯДКА

В качестве примера использования весового пространства Соболева дробного порядка рассмотрим вопрос о решении сингулярного уравнения Шрёдингера вида

$$i \frac{\partial u}{\partial t} + \Delta_\gamma u = 0, \quad (6.1)$$

где $u = u(x, t)$, $x \in \mathbb{R}_+^n$, $t \geq 0$, Δ_γ — оператор Лапласа—Бесселя (2.12).

К уравнению (6.1) добавим начальное условие

$$u(x, 0) = \varphi(x). \quad (6.2)$$

Для простоты пусть $\varphi \in S_{ev}(\mathbb{R}_+^n)$. Применяя преобразование Ханкеля по x к обеим частям уравнения (6.1) и к условию (6.2), получим

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} (\mathbf{F}_\gamma)_x[u](\xi) &= -i|\xi|^2 (\mathbf{F}_\gamma)_x[u](\xi), \\ (\mathbf{F}_\gamma)_x[u](\xi)|_{t=0} &= (\mathbf{F}_\gamma)_x[\varphi](\xi), \end{aligned}$$

тогда

$$u(x, t) = \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod_{j=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}_+^n} \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) e^{-i|\xi|^2 t} (\mathbf{F}_\gamma)_x[\varphi](\xi) \xi^\gamma d\xi.$$

Когда $\varphi \in L_\gamma^2(\mathbb{R}_+^n)$, этот интеграл можно интерпретировать в смысле L_γ^2 . Это означает, что при фиксированном t преобразование Ханкеля функции $u(x, t)$ по x равно $e^{-i|\xi|^2 t} (\mathbf{F}_\gamma)_x[\varphi](\xi)$. Тогда $u(x, t) \rightarrow \varphi(x)$ в $L_\gamma^2(\mathbb{R}_+^n)$ при $t \rightarrow 0$.

Аналогично можно рассмотреть сингулярное уравнение Шрёдингера дробного порядка вида

$$i \frac{\partial u}{\partial t} - (-\Delta_\gamma)^{\frac{\beta}{2}} u = 0, \quad (6.3)$$

где $(-\Delta_\gamma)^{\frac{\beta}{2}}$ — B -гиперсингулярный интеграл (3.3) с условием (6.2).

Используя (3.4), получим, что решение задачи (6.3)-(6.2) имеет вид

$$u(x, t) = \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod_{j=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \int_{\mathbb{R}_+^n} \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) e^{-i|\xi|^\beta t} (\mathbf{F}_\gamma)_x[\varphi](\xi) \xi^\gamma d\xi. \quad (6.4)$$

Мы получили формальное решение задачи (6.3)-(6.2) вида (6.4). Докажем, что в весовом пространстве Соболева дробного порядка (5.1), т. е. при $\varphi \in H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)$ для $\alpha > \frac{n+|\gamma|}{4}$, решение $u(x, t)$ оценивается через норму функции φ в пространстве $H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)$.

Теорема 6.1. Пусть $\beta > 0$. Для $\varphi \in H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)$, $\alpha > \frac{n+|\gamma|}{4}$ справедлива оценка

$$|u(x, t)| \leq C(n, \gamma, \alpha) \|\varphi\|_{H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)},$$

где $u(x, t)$ — решение задачи

$$\begin{aligned} i \frac{\partial u}{\partial t} - (-\Delta_\gamma)^{\frac{\beta}{2}} u &= 0, \\ u(x, 0) &= \varphi(x), \end{aligned}$$

определяемое формулой (6.4).

Доказательство. Применяя неравенство Коши—Буняковского, получим

$$\begin{aligned} |u(x, t)| &= \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod_{j=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \left| \int_{\mathbb{R}_+^n} \mathbf{j}_\gamma(x, \xi) e^{-i|\xi|^\beta t} (\mathbf{F}_\gamma)_x[\varphi](\xi) \xi^\gamma d\xi \right| \leq \\ &\leq \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod_{j=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} (1 + |\xi|^2)^{-2\alpha} \xi^\gamma d\xi \right)^{1/2} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} |e^{-i2|\xi|^\beta t} \mathbf{j}_\gamma^2(x, \xi) (1 + |\xi|^2)^{2\alpha} |(\mathbf{F}_\gamma)_x[\varphi](\xi)|^2 \xi^\gamma d\xi \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod_{j=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)} \|\varphi\|_{H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)} \left(\int_{\mathbb{R}_+^n} (1 + |\xi|^2)^{-2\alpha} \xi^\gamma d\xi \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Произведя оставшемуся интеграле сферическую замену $\xi = r\sigma$ и используя формулу (2.18), будем иметь

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} (1 + |\xi|^2)^{-2\alpha} \xi^\gamma d\xi = \int_0^\infty (1 + r^2)^{-2\alpha} r^{n+|\gamma|-1} dr \int_{S_1^+(n)} \sigma^\gamma dS = \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \int_0^\infty (1 + r^2)^{-2\alpha} r^{n+|\gamma|-1} dr.$$

Легко видеть, что при $\alpha > \frac{n+|\gamma|}{4}$ полученный интеграл сходится:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}_+^n} (1 + |\xi|^2)^{-2\alpha} \xi^\gamma d\xi &= \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)}{2^{n-1} \Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right)} \frac{\Gamma\left(\frac{n+|\gamma|}{2}\right) \Gamma\left(2\alpha - \frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{2\Gamma(2\alpha)} = \\ &= \frac{\prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right) \Gamma\left(2\alpha - \frac{n+|\gamma|}{2}\right)}{2^n \Gamma(2\alpha)} = A^2(n, \gamma, \alpha). \end{aligned}$$

Тогда

$$|u(x, t)| \leq C(n, \gamma, \alpha) \|\varphi\|_{H_\gamma^\alpha(\mathbb{R}_+^n)},$$

где

$$C(n, \gamma, \alpha) = A(n, \gamma, \alpha) \frac{2^{n-|\gamma|}}{\prod_{j=1}^n \Gamma^2\left(\frac{\gamma_j+1}{2}\right)}.$$

□

7. ОБЩИЕ АСПЕКТЫ ТЕОРИИ ЁМКОСТИ

Выше мы применили построенное в разделе 5 пространство обобщённых потенциалов Бесселя к оценке решения уравнения Шрёдингера с оператором Лапласа—Бесселя дробного порядка. Другое приложение обобщённых потенциалов Бесселя состоит в построении ёмкости для описания тонкой структуры множеств в различных задачах анализа и дифференциальных уравнений в частных производных.

Опираясь на обзорную работу [1], сформулируем основные аспекты, касающиеся определения ёмкости.

В формулировках многих теорем математического анализа, дифференциальных уравнений, теории вероятностей и др. участвуют множества, в том или ином смысле слова пренебрежимо малые. Например, хорошо известны множества лебеговой меры нуль. Об утверждениях говорят, что они справедливы «почти всюду», «почти наверняка» и т. д. Кроме того, широко используются теоремы, в которых сходимость ряда Фурье гарантируется во всех точках, не принадлежащих некоторому «исключительному» множеству.

Такие проблемы, как:

- аспекты сходимости и единственности разложения функции в тригонометрический ряд;
- проблемы существования граничных значений и описания особенностей гармонических и аналитических функций;
- вопросы об устранимых множествах на римановой поверхности

— создали потребность в разработке целой системы тонких характеристик малости множества.

Исключительные множества очень разнородны по происхождению и по своей природе. Методы и технические приемы, применяемые для изучения разных классов исключительных множеств, тоже сильно отличаются друг от друга. Таким образом, может оказаться затруднительным ответить на вопрос, в чём же именно состоит единство, несомненно присущее всем объектам, собранным под этим названием.

Интуитивно, исключительные множества — это множества настолько «тонкие», что на них наблюдаются явления, обычным («большим») множествам не присущие. Как правило, эти явления состоят в специальном поведении на рассматриваемых множествах некоторых элементов тех или иных функциональных пространств. Каждому такому явлению отвечает, разумеется, своя особая система исключительных множеств.

Пусть G — локально компактная абелева группа. Семейство $\mathcal{F}$ замкнутых подмножеств группы G называется *системой исключительных множеств*, если выполнены следующие условия.

1. Если $A \subset B \in \mathcal{F}$ и A замкнуто, то $A \in \mathcal{F}$.
2. Если $A \in \mathcal{F}$ и $g \in G$, то $A + g \in \mathcal{F}$.
3. Все множества семейства $\mathcal{F}$ являются в том или ином смысле «малыми».

Это определение служит лишь грубой основой, и его не всегда придерживаются. Так, требование, чтобы все исключительные множества были замкнуты, иногда оказывается слишком тяжелым и его опускают.

Пусть G — локально компактная абелева группа, k — положительная непрерывная функция на $G \setminus \{0\}$, имеющая в нуле предел $+\infty$ (такая функция называется *ядром*). Если μ — неотрицательная мера с компактным носителем, то *потенциалом* меры μ относительно ядра k называется функция u_μ :

$$u_\mu(t) = \int_G k(t-s) d\mu(s),$$

а *энергией* меры μ (относительно того же ядра) — число $I(\mu)$:

$$I(\mu) = \iint_{G \times G} k(t-s) d\mu(s) d\mu(t).$$

Наконец, *ёмкостью* компактного множества E , $E \subset G$, называется число $\text{cap}_k E$:

$$\text{cap}_k E = \sup \{ \|\mu\|^2 : \text{supp } \mu \subset E, I(\mu) \leq 1 \}.$$

Хорошо изучен случай, когда $G = \mathbb{R}^n$, а ядро $k(t) = |t|^{-\alpha} = k_\alpha(t)$, $0 \leq \alpha < n$, где через $|\cdot|$ обозначается обычная евклидова норма (ядра k_α называются *ядрами Рисса*; пишут сар_α вместо сар_{k_α}). В этом случае понятия, введённые только что, изучаются важной и глубокой аналитической дисциплиной — теорией потенциала.

«Исключительными» естественно считать множества нулевой ёмкости. Вообще, оценивать ёмкость множества относительно того или иного ядра — один из способов судить о «размере» этого множества.

Ёмкость не является аддитивной функцией множества — она только субаддитивна:

$$\text{сар}_\alpha(E_1 \cup E_2) \leq \text{сар}_\alpha(E_1) + \text{сар}_\alpha(E_2).$$

При $n - 2 \leq \alpha < n$ справедливо более сильное неравенство («выпуклость ёмкости»):

$$\text{сар}_\alpha(E_1 \cup E_2) + \text{сар}_\alpha(E_1 \cap E_2) \leq \text{сар}_\alpha(E_1) + \text{сар}_\alpha(E_2).$$

В оставшейся части данной статьи мы сосредоточим своё внимание на ёмкостях, порождённых обобщёнными потенциалами Бесселя. Такие ёмкости приспособлены для работы в классах функций, связанных оператором Лапласа—Бесселя.

8. Ёмкость, построенная с помощью обобщённого потенциала Бесселя

Пусть E — произвольное множество в $\mathbb{R}_+^n$. Будем иметь дело со всевозможными неотрицательными функциями φ , суммируемыми в $\mathbb{R}_+^n$ в степени $p > 1$ с весом x^γ , такими, что для всех $x \in E$

$$(\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi)(x) \geq 1,$$

где

$$(\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi)(x) = \int_{\mathbb{R}_+^n} G_\gamma^\alpha(y) ({}^\gamma \mathbf{T}_x^\gamma \varphi(y)) y^\gamma dy$$

— обобщённый потенциал Бесселя (4.5).

Если $1 < p < \infty$, определим ёмкость на основе обобщённого потенциала Бесселя.

Определение 8.1. Точная нижняя граница величины $\|\varphi\|_{p,\gamma}^p$, взятая по множеству всех функций $\varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$ таких, что $(\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi)(x) \geq 1$ для всех $x \in E$, называется $(\alpha, p)_\gamma$ -ёмкостью множества E . Будем использовать обозначение $V_{\alpha,p}^\gamma(E)$ для $(\alpha, p)_\gamma$ -ёмкости множества E . Можно записать

$$V_{\alpha,p}^\gamma(E) = \inf \{ \|\varphi\|_{p,\gamma}^p : (\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi)(x) \geq 1 \text{ на } E, \varphi \geq 0 \}.$$

Обозначим через $\mathfrak{M}_{\alpha,p}^\gamma(E)$ совокупность всех неотрицательных функций $\varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$ таких, что $(\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi)(x) \geq 1$ для всех $x \in E$.

Для $\varphi \in \mathfrak{M}_{\alpha,p}^\gamma(E)$ $(\alpha, p)_\gamma$ -ёмкость множества E можно записать в виде

$$V_{\alpha,p}^\gamma(E) = \inf_{\varphi \in \mathfrak{M}_{\alpha,p}^\gamma(E)} \|\varphi\|_{p,\gamma}.$$

Рассмотрим вопрос о нахождении соотношений включения между классами нуль-множеств обобщённых бesselевых ёмкостей. Будем говорить, что ёмкость B *сильнее*, чем ёмкость B' , если из того, что $B(A) = 0$, всегда следует, что $B'(A) = 0$. Если, кроме того, найдётся множество A такое, что $B(A) > 0$, но $B'(A) = 0$, будем говорить, что B *строго сильнее*, чем B' .

Пусть $0 < \alpha < n + |\gamma|$, $\alpha p \leq n + |\gamma|$, тогда $(\alpha, p)_\gamma$ -ёмкость множества $E \subset \mathbb{R}_+^n$ обращается в нуль в том и только в том случае, если существует функция φ , суммируемая в $\mathbb{R}_+^n$ в степени $p > 1$ с весом x^γ , такая, что $(\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi)(x) = \infty$ для всех $x \in E$.

Приведем некоторые свойства $(\alpha, p)_\gamma$ -ёмкости.

Лемма 8.1. Для $0 \leq \alpha < n + |\gamma|$ и $p > 1$ справедливы следующие утверждения:

1. $V_{\alpha,p}^\gamma(\emptyset) = 0$,
2. если $E_1 \subset E_2$, то $V_{\alpha,p}^\gamma(E_1) \leq V_{\alpha,p}^\gamma(E_2)$,

3. если $E_i \subset \mathbb{R}_+^n$, $i = 1, \dots, n$, то

$$B_{\alpha,p}^\gamma \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) \leq \sum_{i=1}^{\infty} B_{\alpha,p}^\gamma(E_i). \quad (8.1)$$

Доказательство. Пункты 1 и 2 очевидны. В пункте 3 будем считать, что $\sum_{i=1}^{\infty} B_{\alpha,p}^\gamma(E_i) < \infty$, т. е. этот ряд сходится. Тогда $\lim_{i \rightarrow \infty} B_{\alpha,p}^\gamma(E_i) = 0$, каждый член ряда $B_{\alpha,p}^\gamma(E_i)$ конечен и для каждого $\varepsilon > 0$ существует неотрицательная функция $\varphi_i \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$ такая, что

$$(\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi_i)(x) \geq 1 \text{ на } E_i, \quad \|\varphi_i\|_{p,\gamma}^p < B_{\alpha,p}^\gamma(E_i) + \frac{\varepsilon}{2^i}.$$

Пусть $\varphi(x) = \sup_{i=1,\dots,n} \varphi_i(x)$. Очевидно, что $\varphi \geq 0$ и $(\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi)(x) \geq 1$ на $\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i$. Кроме того,

$$\varphi^p(x) \leq \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i^p(x).$$

Тогда

$$B_{\alpha,p}^\gamma \left(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_i \right) \leq \|\varphi\|_{p,\gamma}^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} \|\varphi_i\|_{p,\gamma}^p \leq \sum_{i=1}^{\infty} B_{\alpha,p}^\gamma(E_i) + \varepsilon \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} = \sum_{i=1}^{\infty} B_{\alpha,p}^\gamma(E_i) + \varepsilon.$$

В силу произвольности ε получаем (8.1). $\square$

Из леммы 8.1 следует, что $B_{\alpha,p}^\gamma(E)$ является внешней мерой множества E .

Лемма 8.2. Пусть E — произвольное множество в $\mathbb{R}_+^n$ и $\varphi \in L_p^\gamma(\mathbb{R}_+^n)$ — неотрицательная функция такая, что $(\mathbf{G}_\gamma^\alpha \varphi)(x) > \delta > 0$ для всех $x \in E$. Тогда

$$B_{\alpha,p}^\gamma(E) \leq \frac{1}{\delta^p} \|\varphi\|_{p,\gamma}^p.$$

Доказательство. Имеем, что функция $\psi = \frac{\varphi}{\delta} \in \mathfrak{M}_{\alpha,p}^\gamma(E)$, тогда

$$B_{\alpha,p}^\gamma(E) = \inf_{\psi \in \mathfrak{M}_{\alpha,p}^\gamma(E)} \|\psi\|_{p,\gamma}^p \leq \|\psi\|_{p,\gamma}^p = \frac{1}{\delta^p} \|\varphi\|_{p,\gamma}^p.$$

Доказательство закончено. $\square$

Теорема 8.1. Для $p > 1$, $\alpha p < n + |\gamma|$ существует такая константа $C = C(\alpha, p, n, \gamma)$, что

$$\frac{1}{C} r^{n+|\gamma|-\alpha p} \leq B_{\alpha,p}^\gamma(B_r^+(n)) \leq C r^{n+|\gamma|-\alpha p} \quad (8.2)$$

при $0 < r \leq \frac{1}{2}$.

Доказательство. Пусть $B_r^+(2)$ — часть шара $|x| \leq 2$, $|x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$, принадлежащая $\mathbb{R}_+^n$, функция $f \in L_p(\mathbb{R}_+^n)$, $f \geq 0$ такая, что на $B_2^+(n)$

$$(G_\alpha^\gamma(x) * f)_\gamma = \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y) {}^\gamma \mathbf{T}_x^\gamma G_\alpha^\gamma(x) y^\gamma dy \geq 1,$$

$$(G_\alpha^\gamma(x) * f)_\gamma = C(\gamma) \int_{\mathbb{R}_+^n} f(y) y^\gamma dy \int_0^\pi \dots \int_0^\pi G_\alpha^\gamma \left(\sqrt{x_1^2 - 2x_1 y_1 \cos \beta_1 + y_1^2}, \dots, \sqrt{x_n^2 - 2x_n y_n \cos \beta_1 + y_n^2} \right) \times \\ \times \prod_{i=1}^n \sin^{\gamma_i-1} \beta_i d\beta_i.$$

Переходя к координатам

$$\begin{aligned}\tilde{y}_1 &= y_1 \cos \beta_1, & \tilde{y}_2 &= y_1 \sin \beta_1, \\ \tilde{y}_3 &= y_2 \cos \beta_2, & \tilde{y}_4 &= y_2 \sin \beta_2, \\ &\dots \\ \tilde{y}_{2n-1} &= y_n \cos \beta_n, & \tilde{y}_{2n} &= y_n \sin \beta_n,\end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned}(G_\alpha^\gamma(x) * f)_\gamma &= C(\gamma) \int_{\tilde{\mathbb{R}}_+^{2n}} G_\alpha^\gamma \left(\sqrt{(x_1 - \tilde{y}_1)^2 + \tilde{y}_2^2}, \dots, \sqrt{(x_n - \tilde{y}_{2n-1})^2 + \tilde{y}_{2n}^2} \right) \times \\ &\quad \times f \left(\sqrt{\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2}, \dots, \sqrt{\tilde{y}_{2n-1}^2 + \tilde{y}_{2n}^2} \right) \prod_{i=1}^n \tilde{y}_{2i}^{\gamma_i-1} d\tilde{y},\end{aligned}$$

где $\tilde{\mathbb{R}}_+^{2n} = \{\tilde{y} \in \mathbb{R}^{2n} : \tilde{y}_{2i} > 0, i = 1, \dots, n\}$. Поскольку

$$G_\alpha^\gamma(x) = A(\alpha, n, \gamma) \tilde{K}_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|), \quad \tilde{K}_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|) = \frac{K_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|x|)}{|x|^{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}},$$

$$A(\alpha, n, \gamma) = \frac{2^{\frac{n-|\gamma|-\alpha}{2}+1}}{\Gamma\left(\frac{\alpha}{2}\right) \prod_{i=1}^n \Gamma\left(\frac{\gamma_i+1}{2}\right)},$$

то

$$\begin{aligned}G_\alpha^\gamma \left(\sqrt{(x_1 - \tilde{y}_1)^2 + \tilde{y}_2^2}, \dots, \sqrt{(x_n - \tilde{y}_{2n-1})^2 + \tilde{y}_{2n}^2} \right) &= \\ &= A(\alpha, n, \gamma) \tilde{K}_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}} \left(\left[(x_1 - \tilde{y}_1)^2 + \tilde{y}_2^2 + \dots + (x_n - \tilde{y}_{2n-1})^2 + \tilde{y}_{2n}^2 \right]^{1/2} \right) = \\ &= A(\alpha, n, \gamma) \tilde{K}_{\frac{n+|\gamma|-\alpha}{2}}(|\tilde{x} - \tilde{y}|) = \tilde{G}_\alpha^\gamma(|\tilde{x} - \tilde{y}|),\end{aligned}$$

где $\tilde{x} = (x_1, 0, x_2, 0, \dots, x_n, 0) \in \tilde{\mathbb{R}}_+^{2n}$. Таким образом,

$$(G_\alpha^\gamma(x) * f)_\gamma = C(\gamma) \int_{\tilde{\mathbb{R}}_+^{2n}} \tilde{G}_\alpha^\gamma(|\tilde{x} - \tilde{y}|) \tilde{f}(\tilde{y}) \prod_{i=1}^n \tilde{y}_{2i}^{\gamma_i-1} d\tilde{y},$$

где

$$\tilde{f}(\tilde{y}) = f \left(\sqrt{\tilde{y}_1^2 + \tilde{y}_2^2}, \dots, \sqrt{\tilde{y}_{2n-1}^2 + \tilde{y}_{2n}^2} \right).$$

Производя замену переменных $\tilde{y} \rightarrow \tilde{y}/r$, $\tilde{x} \rightarrow \tilde{x}/r$, получим

$$1 \leq C(\gamma) \int_{\tilde{\mathbb{R}}_+^{2n}} \tilde{G}_\alpha^\gamma \left(\frac{|\tilde{x} - \tilde{y}|}{r} \right) \tilde{f} \left(\frac{\tilde{y}}{r} \right) \prod_{i=1}^n \tilde{y}_{2i}^{\gamma_i-1} r^{-n-|\gamma|} d\tilde{y}, \quad (8.3)$$

при всех $\tilde{x} \in \tilde{\mathbb{R}}_+^{2n}$ таких, что $|\tilde{x}| \leq 2r$, что соответствует $x \in B_{2r}^+(n)$.

Из свойств функции K_ν следует, что для некоторой константы $C > 0$

$$\frac{e^{-2|\tilde{x}-\tilde{y}|}}{C|\tilde{x} - \tilde{y}|^{n+|\gamma|-\alpha}} \leq \tilde{G}_\alpha^\gamma(|\tilde{x} - \tilde{y}|) \leq \frac{C e^{-|\tilde{x}-\tilde{y}|}}{|\tilde{x} - \tilde{y}|^{n+|\gamma|-\alpha}},$$

тогда

$$\tilde{G}_\alpha^\gamma \left(\frac{|\tilde{x} - \tilde{y}|}{r} \right) \leq \frac{C r^{n+|\gamma|-\alpha}}{|\tilde{x} - \tilde{y}|^{n+|\gamma|-\alpha}} e^{-|\tilde{x}-\tilde{y}|/r} \leq \frac{C r^{n+|\gamma|-\alpha}}{|\tilde{x} - \tilde{y}|^{n+|\gamma|-\alpha}} e^{-2|\tilde{x}-\tilde{y}|} \leq C^2 r^{n+|\gamma|-\alpha} \tilde{G}_\alpha^\gamma(|\tilde{x} - \tilde{y}|)$$

при $r \leq 1/2$.

Следовательно, из (8.3) получаем

$$1 \leq C(\gamma) C^2 r^{-\alpha} \int_{\widehat{\mathbb{R}}_+^{2n}} \tilde{G}_\alpha^\gamma(|\tilde{x} - \tilde{y}|) \tilde{f}\left(\frac{\tilde{y}}{r}\right) \prod_{i=1}^n \tilde{y}_{2i}^{\gamma_i-1} d\tilde{y}$$

при всех $x \in B_{2r}^+(n)$, где $r \leq 1/2$. Возвращаясь к переменным y , будем иметь

$$1 \leq C^2 r^{-\alpha} \int_{\mathbb{R}_+^n} \gamma \mathbf{T}_x^y G_\alpha^\gamma(x) f\left(\frac{y}{r}\right) y^\gamma dy = (G_\alpha^\gamma(x) * C^2 r^{-\alpha} f(x/r))_\gamma.$$

Поскольку

$$\int_{\mathbb{R}_+^n} \left(C^2 r^{-\alpha} f\left(\frac{y}{r}\right)\right)^p y^\gamma dy = C^{2p} r^{n+|\gamma|-\alpha p} \int_{\mathbb{R}_+^n} f^p(y) y^\gamma dy = C^{2p} r^{n+|\gamma|-\alpha p} \|f\|_{L_p^\gamma}^p,$$

то при $r \leq 1/2$

$$B_{\alpha,p}^\gamma(B_{2r}^+(n)) = \inf\{C^{2p} r^{n+|\gamma|-\alpha p} \|f\|_{L_p^\gamma}^p : (G_\alpha^\gamma(x) * C^2 r^{-\alpha} f(x/r))_\gamma \geq 1 \text{ на } B_{2r}^+(n), f \geq 0\}$$

и

$$B_{\alpha,p}^\gamma(B_{2r}^+(n)) \leq C^{2p} r^{n+|\gamma|-\alpha p} \|f\|_{L_p^\gamma}^p, \quad r \leq 1/2$$

для всех f таких, что $(G_\alpha^\gamma(x) * f(x))_\gamma \geq 1$ на $B_2^+(n)$, $f \geq 0$. Следовательно, переходя к инфимуму по f ,

$$B_{\alpha,p}^\gamma(B_{2r}^+(n)) \leq C^{2p} r^{n+|\gamma|-\alpha p} B_{\alpha,p}^\gamma(B_2^+(n)), \quad r \leq 1/2,$$

что даёт правую часть (8.2).

Для доказательства левой части в (8.2) возьмём $f \in L_p^\gamma$, $f \geq 0$, такую, что

$$(G_\alpha^\gamma(x) * f(x))_\gamma \geq 1 \quad \text{на } B_r^+(n).$$

Тогда

$$|B_1^+(n)|_\gamma = \int_{B_1^+(n)} (G_\alpha^\gamma(x) * f(x))_\gamma x^\gamma dx = |B_1^+(n)|_\gamma^{1/q'} \|(G_\alpha^\gamma(x) * f(x))_\gamma\|_{L_q^\gamma},$$

где $1/q' + 1/q = 1$, $q = (n + |\gamma|)/(n + |\gamma| - \alpha p)$. Оценивая $G_\alpha^\gamma(x) \leq C r^{\alpha-n-|\gamma|}$, получим

$$r^{n+|\gamma|-\alpha p} \leq C \|f\|_{L_p^\gamma}.$$

Взятие инфимума по всем таким f даёт левую часть в виде (8.2). $\square$

Следствие 8.1. Имеем $B_{\alpha,p}^\gamma(B_r^+(n)) \approx r^{n+|\gamma|-\alpha p}$, и при $\alpha p > n + |\gamma|$ существует такая константа $C = C(\alpha, p, n, \gamma)$, что

$$B_{\alpha,p}^\gamma(E) \geq C$$

для всякого множества $E \neq \emptyset$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кисляков С. В. Исключительные множества в гармоническом анализе // Итоги науки и техн. Сер. Современ. пробл. мат. Фундам. направл. — 1989. — 41. — С. 199–227.
2. Ляхов Л. Н. Об одном классе гиперсингулярных интегралов // Докл. АН СССР. — 1990. — 315, № 2. — С. 291–296.
3. Ляхов Л. Н. Обращение В-потенциалов Рисса // Докл. АН СССР. — 1991. — 321, № 3. — С. 466–469.
4. Ляхов Л. Н., Половинкина М. В. Пространство весовых потенциалов Бесселя // Тр. МИАН. — 2005. — 250. — С. 192–197.
5. Лизоркин П. И. Обобщённое лиувиллевское дифференцирование и функциональное пространство $L_p^r(E_n)$. Теоремы вложения // Мат. сб. — 1963. — 60, № 3. — С. 325–353.
6. Ситник С. М., Шишкина Э. Л. Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. — М.: Физматлит, 2019.
7. Слободецкий Л. Н. Пространства С. Л. Соболева дробного порядка и их приложение к краевым задачам для дифференциальных уравнений в частных производных // Докл. АН СССР. — 1958. — 118, № 2. — С. 243–246.

8. Aronszajn N., Smith K. T. Theory of Bessel potentials // I. Ibid.—1961.—11.—С. 365–475.—DOI: [10.5802/aif.116](https://doi.org/10.5802/aif.116).
9. Dzhabrailov A., Luchko Y., Shishkina E. Two forms of an inverse operator to the generalized Bessel potential // Axioms.—2021.—10, № 3.—С. 1–20.—DOI: [10.3390/axioms10030232](https://doi.org/10.3390/axioms10030232).
10. Riesz M. L'intégrale de Riemann–Liouville et le problème de Cauchy // Acta Math.—1949.—81, № 1-2.—С. 1–223.—DOI: [10.1007/BF02395016](https://doi.org/10.1007/BF02395016).
11. Shishkina E., Ekincioglu I., Keskin C. Generalized Bessel potential and its application to non-homogeneous singular screened Poisson equation // Integral Transforms Spec. Funct.—2021.—32, № 12.—С. 932–947.—DOI: [10.1080/10652469.2020.1867983](https://doi.org/10.1080/10652469.2020.1867983).

А. Л. Джабраилов

Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова, Грозный, Россия

E-mail: ahmed_0065@mail.ru, РИНЦ SPIN-код: 3419-5303, РИНЦ AuthorID: [654720](https://elibrary.ru/author_index.aspx?id=654720), ResearcherID: [AAF-3792-2020](https://orcid.org/0000-0002-3792-2020), Scopus: [57220747140](https://orcid.org/0000-0002-5722-0747)

Э. Л. Шишкина

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Белгородский государственный национальный исследовательский университет, Белгород, Россия

Чеченский государственный университет им. А. А. Кадырова, Грозный, Россия

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

E-mail: shishkina@amm.vsu.ru, РИНЦ SPIN-код: 8731-8301, РИНЦ AuthorID: [173810](https://elibrary.ru/author_index.aspx?id=173810), ResearcherID: [M-5413-2015](https://orcid.org/0000-0002-5413-2015), Scopus: [13005142800](https://orcid.org/0000-0002-1300-5142), ORCID: [0000-0003-4083-1207](https://orcid.org/0000-0003-4083-1207)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-35-50](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-35-50)

EDN: [TLBNOI](https://elibrary.ru/TLBNOI)

UDC 517.987.4

Research article

On applications of the generalized Bessel potential to solving the singular fractional Schrödinger equation and capacity theory

A. L. Dzhabrailov³ and E. L. Shishkina^{1,2,3,4}

¹Voronezh State University, Voronezh, Russia

²Belgorod State University, Belgorod, Russia

³Kadyrov Chechen State University, Grozny, Russia

⁴HSE University, Moscow, Russia

Abstract. In this paper, we construct a weighted Sobolev space of fractional order based on the generalized Bessel potential. We apply these results to the analysis of the singular fractional Schrödinger equation. To solve the Cauchy problem for this equation, we prove an estimate that relates the norm of the solution to the norm of the initial condition in the weighted Sobolev space. We devote the remainder of the paper to aspects of capacity theory constructed based on the generalized Bessel potential.

Keywords: generalized Bessel potential, weighted Sobolev space, singular Schrödinger equation, capacity theory.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was carried out within the framework of the state assignment of the Ministry of Education and Science of the Russian Federation (FEFS-2026-0004).



Authors' contribution. *E. L. Shishkina* — scientific supervision, formulation of the idea, hypothesis, research objectives, development of methods and procedures, text revision; *A. L. Dzhabrailov* — writing the initial text of the article, checking the results, editing, text revision, organizational management.

For citation: A. L. Dzhabrailov, E. L. Shishkina, “On applications of the generalized Bessel potential to solving the singular fractional Schrödinger equation and capacity theory,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 1, 35–50. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-35-50](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-35-50) EDN: [TLBNOI](https://www.edn.ru/TLBNOI)

REFERENCES

1. S. V. Kislyakov, “Isklyuchitel'nye mnozhestva v garmonicheskom analize” [Exceptional sets in harmonic analysis], *Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Sovrem. Probl. Mat. Fundam. Napravl.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math. Fundam. Directions], 1989, **41**, 199–227 (in Russian).
2. L. N. Lyakhov, “Ob odnom klasse gipersingulyarnykh integralov” [On a class of hypersingular integrals], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1990, **315**, No. 2, 291–296 (in Russian).
3. L. N. Lyakhov, “Obrashchenie B-potentsialov Rissa” [Inversion of Riesz B-potentials], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1991, **321**, No. 3, 466–469 (in Russian).
4. L. N. Lyakhov and M. V. Polovinkina, “Prostranstvo vesovykh potentsialov Besselya” [The space of Bessel weighted potentials], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2005, **250**, 192–197 (in Russian).
5. P. I. Lizorkin, “Obobshchennoe liouvillevskoe differentsirovanie i funktsional'noe prostranstvo $L_p^r(E_n)$. Teoremy vlozheniya” [Generalized Liouville differentiation and the functional space $L_p^r(E_n)$. Embedding theorems], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 1963, **60**, No. 3, 325–353 (in Russian).
6. S. M. Sitnik and E. L. Shishkina, *Metod operatorov preobrazovaniya dlya differentsial'nykh uravneniy s operatorami Besselya* [Method of Transmutation Operators for Differential Equations with Bessel Operators], Fizmatlit, Moscow, 2019 (in Russian).
7. L. N. Slobodetskiy, “Prostranstva S. L. Soboleva drobnogo poryadka i ikh prilozhenie k kraevym zadacham dlya differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh” [S. L. Sobolev spaces of fractional order and their application to boundary-value problems for partial differential equations], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1958, **118**, No. 2, 243–246 (in Russian).
8. N. Aronszajn and K. T. Smith, “Theory of Bessel potentials,” *I. Ibid.*, 1961, **11**, 365–475, DOI: [10.5802/aif.116](https://doi.org/10.5802/aif.116).
9. A. Dzhabrailov, Y. Luchko, and E. Shishkina, “Two forms of an inverse operator to the generalized Bessel potential,” *Axioms*, 2021, **10**, No. 3, 1–20, DOI: [10.3390/axioms10030232](https://doi.org/10.3390/axioms10030232).
10. M. Riesz, “L'intégrale de Riemann–Liouville et le probleme de Cauchy,” *Acta Math.*, 1949, **81**, No. 1–2, 1–223, DOI: [10.1007/BF02395016](https://doi.org/10.1007/BF02395016).
11. E. Shishkina, I. Ekincioglu, and C. Keskin, “Generalized Bessel potential and its application to non-homogeneous singular screened Poisson equation,” *Integral Transforms Spec. Funct.*, 2021, **32**, No. 12, 932–947, DOI: [10.1080/10652469.2020.1867983](https://doi.org/10.1080/10652469.2020.1867983).

A. L. Dzhabrailov

Kadyrov Chechen State University, Grozny, Russia

E-mail: ahmed_0065@mail.ru, eLIBRARY SPIN-code: 3419-5303, eLIBRARY AuthorID: [654720](https://www.elibrary.ru/654720),

ResearcherID: [AAF-3792-2020](https://orcid.org/0000-0002-3792-2020), Scopus: [57220747140](https://orcid.org/0000-0002-57220747140)

E. L. Shishkina

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Belgorod State University, Belgorod, Russia

Kadyrov Chechen State University, Grozny, Russia

HSE University, Moscow, Russia

E-mail: shishkina@amm.vsu.ru, eLIBRARY SPIN-code: 8731-8301, eLIBRARY AuthorID:

[173810](https://orcid.org/0000-0003-173810), ResearcherID: [M-5413-2015](https://orcid.org/0000-0003-5413-2015), Scopus: [13005142800](https://orcid.org/0000-0003-13005142800), ORCID: [0000-0003-4083-1207](https://orcid.org/0000-0003-4083-1207)

О ГИПОТЕЗЕ АРНОЛЬДА ДЛЯ СЕМЕЙСТВА СТАЦИОНАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ ШРЕДИНГЕРА С САМОСОПРЯЖЕННЫМИ НЕРАЗДЕЛЕННЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Я. М. ДЫМАРСКИЙ, С. С. НИКОЛАЕНКО

*Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
Долгопрудный, Россия*

Аннотация. Дано аналитическое и топологическое описания многообразий собственных функций и потенциалов, порожденных семейством одномерных стационарных операторов Шредингера и многообразием самосопряженных неразделенных краевых условий. В частности, доказана гипотеза Арнольда о коразмерности многообразия тех потенциалов, которым отвечают двукратные собственные значения при выбранных самосопряженных неразделенных краевых условиях.

Ключевые слова: гипотеза Арнольда, гипотеза трансверсальности, оператор Шредингера.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Вклад авторов. Дымарский Я. М. — концепция исследования и оформление текста; Николаенко С. С. — обработка материала и оформление текста.

Для цитирования: Дымарский Я. М., Николаенко С. С. О гипотезе Арнольда для семейства стационарных операторов Шредингера с самосопряженными неразделенными краевыми условиями // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 51–62. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-51-62](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-51-62) EDN: [TOXSPT](https://www.edn.ru/TOXSPT)

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [1] В. И. Арнольд сформулировал «гипотезу трансверсальности» следующего содержания: в «типичном» семействе самосопряженных операторов с дискретным спектром те операторы, у которых выделенное собственное значение двукратно, образуют подмногообразие коразмерности два. Нетривиальность утверждения состоит в том, что указанное подмножество определяется одним условием — совпадением двух собственных значений. Анализ этого условия в простейшем случае симметрических матриц 2×2 приводит к одному вырожденному уравнению, которое распадается на два невырожденных. Гипотеза была подтверждена одним из авторов настоящей статьи для случаев конечномерных и компактных операторов, а также для некоторых семейств дифференциальных операторов [2]. Дальнейшие исследования показали, что целесообразно рассмотреть многообразия операторов, у которых спектральная лакуна положительна и фиксирована. Наиболее полные результаты были получены для семейства стационарных операторов Шредингера на отрезке с периодическими краевыми условиями [3–5]. В данной работе мы доказываем гипотезу В. И. Арнольда для семейства стационарных операторов Шредингера на отрезке с произвольными самосопряженными неразделенными краевыми условиями.

Наш метод исследования опирается на следующие наблюдения:

1. множество Y всех функций, которые могут быть собственными для оператора Шредингера при некотором самосопряженном неразделенном краевом условии, допускает аналитическое описание;
2. по функции $y \in Y$, которая может быть собственной, однозначно восстанавливаются потенциал оператора Шредингера и собственное значение, т. е. однозначно восстанавливается дифференциальное уравнение, решением которого является функция y .

Таким образом, возникает проблема описания множества всех тех краевых условий, которым удовлетворяет выбранная функция y . Здесь мы опираемся на некоторые результаты статьи [11]. Оказывается, искомое множество представляет собой прямолинейную образующую многообразия самосопряженных неразделенных краевых условий; на этой прямой есть единственное условие, которому удовлетворяют все решения единственного дифференциального уравнения, порожденного функцией y . Следовательно, с каждой функцией $y \in Y$ канонически связаны оператор Шредингера и краевое условие, при которых функции y отвечает двукратное собственное значение. Последний вывод приводит нас к доказательству гипотезы Арнольда.

2. ОБОЗНАЧЕНИЯ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

2.1. Семейство краевых задач. Обозначим через $L_2 = L_2[0, 2\pi]$ гильбертово пространство вещественных суммируемых с квадратом функций. Через

$$P := \left\{ p \in L_2 : \int_0^{2\pi} p(x) dx = 0 \right\} \quad (2.1)$$

обозначим подпространство в L_2 с нулевым средним, через $W_2^2 = W_2^2[0, 2\pi]$ обозначим гильбертово пространство функций, которые суммируемы с квадратом вместе со своими производными вплоть до второго порядка (в силу теоремы Соболева [7] вложение $W_2^2 \subset C^1[0, 2\pi]$ непрерывно).

Обозначим через

$$B = B(\alpha, \beta, \gamma, \delta) := \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}, \quad \alpha\delta - \beta\gamma = 1 \quad (2.2)$$

вещественную матрицу, принадлежащую специальной линейной группе Ли $SL(2, \mathbb{R})$; множество всех таких матриц обозначим через $\mathbb{B}$ и понимаем его как гладкое трехмерное подмногообразие $\mathbb{B} \subset \mathbb{R}^4$. В силу условия (2.2) для любого $B \in \mathbb{B}$ справедливо $(\alpha^2 + \beta^2)(\gamma^2 + \delta^2)(\alpha^2 + \gamma^2)(\beta^2 + \delta^2) > 0$.

На отрезке $[0, 2\pi]$ рассмотрим семейство спектральных краевых задач

$$-y'' + p(x)y = \lambda y \quad (2.3)$$

с самосопряженными неразделенными краевыми условиями

$$B \begin{pmatrix} y(0) \\ y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(2\pi) \\ y'(2\pi) \end{pmatrix}; \quad (2.4)$$

параметром семейства является пара $(p, B) \in P \times \mathbb{B}$. Функцию p будем называть *потенциалом*, число λ — *собственным значением*, краевое условие (2.4) мы отождествляем с матрицей B .

Напомним свойства спектра краевой задачи (2.3), (2.4) при фиксированной паре (p, B) (см. [6, 7]). Спектр состоит из вещественных собственных значений, которые не более, чем двукратны:

$$(\lambda_0^+(p, B)) < \lambda_1^-(p, B) \leq \lambda_1^+(p, B) < \dots < \lambda_n^-(p, B) \leq \lambda_n^+(p, B) < \dots \quad (2.5)$$

(λ_0^+ существует только если $\beta < 0$ или $\beta = 0, \alpha > 0$). Соответствующие собственные функции $y_n^\pm(x)$ принадлежат пространству W_2^2 ; нули собственных функций невырождены и на полуотрезке $(0, 2\pi]$ их количество $N(n)$ зависит от знаков элементов матрицы B :

$$\begin{array}{llll} 2n-2 & \text{или} & 2n-1 & \text{при } \beta > 0, \\ 2n-1 & & & \text{при } \beta = 0, \quad \alpha < 0, \\ 2n-1 & \text{или} & 2n & \text{при } \beta < 0, \\ 2n & & & \text{при } \beta = 0, \quad \alpha > 0. \end{array} \quad (2.6)$$

Отрезок $[\lambda_n^-(p, B), \lambda_n^+(p, B)]$ называется n -й *лакуной*. Собственные функции, отвечающие разным собственным значениям, попарно ортогональны в L_2 . В случае совпадения собственных значений $\lambda_n^-(p, B) = \lambda_n^+(p, B) = \lambda_n^0(p, B)$ (вырожденная лакуна) возникает «проколотая» плоскость собственных функций; нули линейно независимых собственных функций, отвечающих общему собственному значению, перемежаются.

Поскольку собственные функции определяются с точностью до ненулевого коэффициента, в дальнейшем мы не различаем функции $y(x)$ и $ky(x)$, где $k \neq 0$. Указанную факторизацию называем «проективизацией» и обозначаем ее результат через $\Pi_n^0(p, B)$. Таким образом, $\Pi_n^0(p, B) \cong \mathbb{R}P^1$ ($\cong$ — диффеоморфность класса C^∞).

Замечание 2.1. При фиксированном $B \in \mathbb{B}$ на пространстве P определены функционалы

$$P \ni p \mapsto \lambda_0^+(p, B), \quad P \ni p \mapsto \lambda_n^\pm(p, B) \quad (n \in \mathbb{N}),$$

значения которых, как это следует из (2.5), строго упорядочены по номеру n . Будет показано, что именно эта упорядоченность позволяет исследовать семейство краевых задач (2.3), (2.4) отдельно для каждого $n \in \mathbb{N}$.

Обозначим через $Y(p, \lambda)$ проколотую плоскость всех ненулевых решений $y = y(x)$ ($x \in [0, 2\pi]$) дифференциального уравнения (2.3) при указанных потенциале и собственном значении. Нас интересует множество

$$Y = \bigcup_{(p, \lambda) \in P \times \mathbb{R}} Y(p, \lambda).$$

Мы различаем собственную функцию $y \in \Pi_n^0(p, B) \cong \mathbb{R}P^1$ (элемент проективной прямой) и решение $y \in Y(p, \lambda)$ (конкретная функция, удовлетворяющая дифференциальному уравнению). Ниже мы научимся сопоставлять каждой функции $y \in Y$ единственное краевое условие, т. е. интерпретируем функцию $y \in Y$ как собственную $y \in \Pi_n^0(p, B)$. Значительная часть статьи посвящена исследованию связи между этими понятиями.

Начнем с описания множества Y .

Лемма 2.1. *Множество Y состоит из всех таких функций $y \in W_2^2$, для которых выполнены следующие условия:*

- на $[0, 2\pi]$ функция $y(x)$ имеет конечное количество нулей, причем все они невырождены (если $y(x_i) = 0$, то $y'(x_i) \neq 0$);
- $\int_0^{2\pi} \left(\frac{y''}{y} \right)^2 dx < \infty$.

При этом по функции $y \in Y$ уравнение (2.3), для которого она является решением, определяется единственным образом по формулам

$$\Lambda : Y \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Lambda(y) = \lambda := -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{y''}{y} dx, \quad (2.7)$$

$$\Phi : Y \rightarrow P, \quad \Phi(y) = p := \frac{y''}{y} + \Lambda(y). \quad (2.8)$$

Доказательство. Пусть $y \in Y$. Тогда все нули функции $y(x)$ невырождены, что следует из теоремы единственности для тривиального решения $y(x) \equiv 0$ задачи Коши для уравнения (2.3) с начальными условиями $y(x_i) = y'(x_i) = 0$ (см. [9]). В частности, это означает, что нулей функции $y(x)$ конечное число. Поэтому почти всюду определена функция $y''/y = p - \lambda$. С учетом (2.1) получаем неравенство из второго условия.

Обратно, если функция y удовлетворяет приведенным выше условиям, то определим число λ по формуле (2.7) и функцию p по формуле (2.8). Тогда y является на $[0, 2\pi]$ решением линейного дифференциального уравнения (2.3), которое, в силу (2.1), определяется единственным образом. $\square$

2.2. Многообразие неразделенных краевых условий. Для многообразия $\mathbb{B}$ (см. [10]) напомним два вспомогательных утверждения:

1. Многообразие $\mathbb{B}$ покрывается четырьмя картами:

$$\begin{aligned} \alpha > 0 (< 0), \quad (\beta, \gamma) \in \mathbb{R}^2, \quad \delta = \frac{1 + \beta\gamma}{\alpha}; \\ \beta > 0 (< 0), \quad (\alpha, \delta) \in \mathbb{R}^2, \quad \gamma = \frac{-1 + \alpha\delta}{\beta}. \end{aligned}$$

2. Пусть $\psi \in (0, \pi)$ — угол между векторами (α, β) и (γ, δ) . Тогда многообразие $\mathbb{B}$ диффеоморфно прямому произведению

$$\mathbb{B} \cong \{(\alpha, \beta, \psi) : \alpha^2 + \beta^2 > 0, \psi \in (0, \pi)\} = (\mathbb{R}^2 \setminus \{O\}) \times (0, \pi).$$

Наше исследование опирается на утверждение о прямолинейных образующих.

Лемма 2.2. *Каждая точка $B \in \mathbb{B}$ является вершиной двумерной эллиптической конической поверхности $\text{Con}(B)$, целиком принадлежащей $\mathbb{B}$. Других прямолинейных образующих, проходящих через точку B , многообразие $\mathbb{B}$ не имеет.*

Доказательство. Если $B = E$ — единичная матрица, то условие принадлежности прямолинейной образующей таково: для произвольного $t \in \mathbb{R}$ выполняется тождество

$$\begin{vmatrix} 1 + t\mu_{11} & t\mu_{12} \\ t\mu_{21} & 1 + t\mu_{22} \end{vmatrix} \equiv 1 \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_{11} + \mu_{22} = 0 \\ \mu_{11}\mu_{22} - \mu_{12}\mu_{21} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \mu_{11} + \mu_{22} = 0 \\ \mu_{11}^2 + \mu_{12}\mu_{21} = 0. \end{cases}$$

Полученная система уравнений задает двумерный конус $\text{Con}(E) = \{\mu_{11}^2 + \mu_{12}\mu_{21} = 0\} \subset \mathbb{A}^3$, целиком лежащий в трехмерном аффинном подпространстве $\mathbb{A}^3 = \{\mu_{11} + \mu_{22} = 0\} \subset \mathbb{R}^4$.

Обозначим через τ_B матричное умножение (например, справа) на произвольную фиксированную матрицу $B \in \mathbb{B}$ как линейное отображение в $\mathbb{R}^4$:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \circ \begin{pmatrix} b_1 & b_2 \\ b_3 & b_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1\alpha + b_3\beta & b_2\alpha + b_4\beta \\ b_1\gamma + b_3\delta & b_2\gamma + b_4\delta \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b_1 & b_3 & 0 & 0 \\ b_2 & b_4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_1 & b_3 \\ 0 & 0 & b_2 & b_4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \\ \delta \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Обозначим через $\text{Lin}(B)$ объединение всех прямолинейных образующих, проходящих через B . Поскольку τ_B есть линейное невырожденное (с определителем один) преобразование в $\mathbb{R}^4$, то $\tau_B(\text{Con}(E)) \subset \text{Lin}(B)$. Рассматривая обратное преобразование $\tau_{B^{-1}} = (\tau_B)^{-1}$, аналогичным образом получаем, что $\tau_{B^{-1}}(\text{Lin}(B)) \subset \text{Con}(E)$. Теперь, применяя к последнему включению преобразование τ_B , получим

$$\text{Lin}(B) = \tau_B(\tau_{B^{-1}}(\text{Lin}(B))) \subset \tau_B(\text{Con}(E)).$$

Следовательно, $\text{Lin}(B) = \tau_B(\text{Con}(E)) =: \text{Con}(B)$. □

Заметим, что полученная система уравнений равносильна следующей:

$$\begin{cases} \mu_{11} + \mu_{22} = 0, \\ \mu_{11}^2 + \mu_{12}\mu_{21} = 0, \end{cases} \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 1 + \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & 1 + \mu_{22} \end{vmatrix} = 1, \quad \begin{vmatrix} \mu_{11} & \mu_{12} \\ \mu_{21} & \mu_{22} \end{vmatrix} = 0. \quad (2.9)$$

Замечание 2.2. Попутно мы доказали, что умножение конуса $\text{Con}(E) \subset \mathbb{B}$ как подмножества на произвольную матрицу $B \in \mathbb{B}$ не зависит от того, справа ли оно или слева: результатом является один и тот же конус $\text{Con}(B)$.

2.3. Краевые условия, порожденные решениями дифференциального уравнения. Теперь мы покажем, что каждую функцию $y \in Y$ можно интерпретировать как собственную некоторой краевой задач (2.3), (2.4), причем пара $(p, \lambda) \in P \times \mathbb{R}$ определяется единственным образом по формулам (2.7), (2.8), а все допустимые краевые условия описывает следующее утверждение.

Лемма 2.3. *Множество всех краевых условий, которым удовлетворяет данная функция $y \in Y$, является некоторой прямолинейной образующей $l(y)$ многообразия $\mathbb{B}$.*

Доказательство. Рассмотрим систему (2.2), (2.4) как систему из трех уравнений относительно четырех неизвестных $(\alpha, \beta, \gamma, \delta)$. Поскольку $y^2(0) + y'^2(0) > 0$, то полагаем (без ограничения общности), что $y(0) \neq 0$. Данная система равносильна линейной системе из трех уравнений: двух уравнений (2.4) и третьего уравнения $y(2\pi)\delta - y'(2\pi)\beta = y(0)$. В силу неравенства $y^2(2\pi) + y'^2(2\pi) > 0$ ранг этой системы равен трем. Значит, она определяет в пространстве $\mathbb{R}^4$ прямую. $\square$

Чтобы описать все краевые условия, которым удовлетворяют все ненулевые решения фиксированного уравнения (2.3), введем решения $\text{co}(x), \text{si}(x) \in Y(p, \lambda)$, удовлетворяющие начальным условиям $\text{co}(0) = 1, \text{co}'(0) = 0, \text{si}(0) = 0, \text{si}'(0) = 1$. Обозначим

$$B(2\pi) := \begin{pmatrix} \text{co}(2\pi) & \text{si}(2\pi) \\ \text{co}'(2\pi) & \text{si}'(2\pi) \end{pmatrix}. \quad (2.10)$$

В силу формулы Остроградского—Лиувилля $\det B(2\pi) = 1$, значит, $B(2\pi) \in \mathbb{B}$.

Лемма 2.4. *Множество всех краевых условий, которым удовлетворяют ненулевые решения фиксированного уравнения (2.3), является двумерной эллиптической конической поверхностью $\text{Con}(B(2\pi))$:*

$$\bigcup_{y \in Y(p, \lambda)} l(y) = \text{Con}(B(2\pi)) \subset \mathbb{B};$$

вершина $B(2\pi)$ является единственным краевым условием, при котором собственное значение λ двукратно, т. е. существует такое единственное $n \in \mathbb{N}$, что каждая функция $y \in Y(p, \lambda)$ является собственной для краевой задачи с потенциалом p и краевыми условиями $B(2\pi)$, а собственное число $\lambda = \lambda_n^0(p, B(2\pi))$.

Доказательство. Имеет место совпадение

$$\bigcup_{y \in Y(p, \lambda)} l(y) = \bigcup_{\varphi \in S^1} l(\cos \varphi \text{co} + \sin \varphi \text{si})$$

(S^1 — единичная окружность). Но принадлежность $B \in \bigcup_{\varphi \in S^1} l(\cos \varphi \text{co} + \sin \varphi \text{si})$ равносильна разрешимости относительно неизвестного $\varphi \in S^1$ системы уравнений

$$\begin{aligned} B \left(\cos \varphi \begin{pmatrix} \text{co}(0) \\ \text{co}'(0) \end{pmatrix} + \sin \varphi \begin{pmatrix} \text{si}(0) \\ \text{si}'(0) \end{pmatrix} \right) &= \cos \varphi \begin{pmatrix} \text{co}(2\pi) \\ \text{co}'(2\pi) \end{pmatrix} + \sin \varphi \begin{pmatrix} \text{si}(2\pi) \\ \text{si}'(2\pi) \end{pmatrix} \Leftrightarrow \\ &\Leftrightarrow (B - B(2\pi)) \begin{pmatrix} \cos \varphi \\ \sin \varphi \end{pmatrix} = \vec{0}. \end{aligned}$$

Разрешимость последней системы равносильна равенству $\det(B - B(2\pi)) = 0$, причем система разрешима при всех $\varphi \in S^1$ только в случае матричного равенства $B = B(2\pi)$. Поскольку $\det B = \det(B(2\pi)) = 1$, то после замены $B = B(2\pi)(E + C)$ получаем равносильную систему из двух уравнений относительно матрицы C

$$\det B = 1, \det(B - B(2\pi)) = 0 \Leftrightarrow \det(E + C) = 1, \det C = 0,$$

которая совпадает с системой (2.9). $\square$

2.4. Многообразие решений. В заключение раздела мы определим на множестве Y структуру гладкого гильбертова многообразия. С этой целью выразим значения функций $\text{co}(x)$ и $\text{si}(x)$ через полярные координаты (ρ, θ) : $\text{co}(x) = \rho(x) \cos \theta(x)$, $\text{si}(x) = \rho(x) \sin \theta(x)$. Тогда вронскиан, порожденный функциями $\text{co}(x), \text{si}(x)$, равен

$$\begin{aligned} 1 \equiv W(\text{co}(x), \text{si}(x)) &= \begin{vmatrix} \text{co}(x) & \text{si}(x) \\ \text{co}'(x) & \text{si}'(x) \end{vmatrix} = \\ &= \begin{vmatrix} \rho(x) \cos \theta(x) & \rho(x) \sin \theta(x) \\ \rho'(x) \cos \theta(x) - \rho(x) \sin \theta(x) \theta'(x) & \rho'(x) \sin \theta(x) + \rho(x) \cos \theta(x) \theta'(x) \end{vmatrix} = \rho^2(x) \theta'(x). \end{aligned}$$

Значит, справедливы соотношения:

$$\eta(x) := \theta'(x) > 0, \rho^2(x) \eta(x) = 1, \rho, \eta \in W_2^2, \eta(0) = 1, \eta'(0) = 0. \quad (2.11)$$

В самом деле, функция $\rho^2 = \text{co}^2 + \text{si}^2 \in C^1$ и строго положительна на $[0, 2\pi]$, поэтому, во-первых, функция $\eta = 1/\rho \in C^1$ и обе функции принадлежат пространству W_2^2 , что вытекает из прямого дифференцирования.

Ниже мы воспользуемся выражениями функций co и si через функцию η :

$$\text{co}(x) = \frac{1}{\sqrt{\eta(x)}} \cos \int_0^x \eta(t) dt, \quad \text{si}(x) = \frac{1}{\sqrt{\eta(x)}} \sin \int_0^x \eta(t) dt. \quad (2.12)$$

Нам понадобится выпуклое гильбертово подмногообразие

$$H := \{\eta \in W_2^2 : \eta > 0, \eta(0) = 1, \eta'(0) = 0\}$$

пространства W_2^2 , которое является пересечением открытого конуса $\{\eta \in W_2^2 : \eta > 0\}$ и аффинного подпространства $\{\eta \in W_2^2 : \eta(0) = 1, \eta'(0) = 0\}$ коразмерности два.

Обозначим через $\mathbb{R}^+$ множество действительных положительных чисел.

Лемма 2.5. *Отображение*

$$G^{-1} : H \times S^1 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow Y, \quad G^{-1}(\eta, \varphi, k) = y(x) := \frac{k}{\sqrt{\eta(x)}} \cos(\varphi + \int_0^x \eta(t) dt). \quad (2.13)$$

является биекцией, которая индуцирует в Y структуру гладкого гильбертова многообразия.

Доказательство. Определим прямое отображение $G : Y \rightarrow H \times S^1 \times \mathbb{R}^+$. Функция $y \in Y$ задает формулами (2.7), (2.8) единственную пару (p, λ) , для которой $y \in Y(p, \lambda)$. Поэтому, и в силу (2.11), (2.12), существует такая единственная тройка $(\eta, \varphi, k) \in H \times S^1 \times \mathbb{R}^+$, что

$$y(x) = k(\cos(-\varphi) \text{co}(x) + \sin(-\varphi) \text{si}(x)) = \frac{k}{\sqrt{\eta(x)}} \cos(\varphi + \int_0^x \eta(t) dt).$$

Обратно, любая функция вида (2.13) является решением уравнения (2.3), в котором

$$\lambda = \lambda(\eta) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(-\frac{\eta''}{2\eta} + \frac{3(\eta')^2}{4\eta^2} - \eta^2 \right) dx, \quad (2.14)$$

$$p(x) = p(\eta) = -\frac{\eta''}{2\eta} + \frac{3(\eta')^2}{4\eta^2} - \eta^2 + \lambda(\eta). \quad (2.15)$$

Прямой проверкой убеждаемся, что второе отображение является обратным к первому: по функции (2.13) определяем функции $\text{co}(x)$ и $\text{si}(x)$ — это именно функции (2.12). $\square$

Следствие 2.1. *В параметризации леммы 2.5 вершина конуса (2.10) равна*

$$B(2\pi) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\eta(2\pi)}} \cos \int_0^{2\pi} \eta(t) dt & \frac{1}{\sqrt{\eta(2\pi)}} \sin \int_0^{2\pi} \eta(t) dt \\ \frac{-\eta'(2\pi)}{2\eta^{3/2}(2\pi)} \cos \int_0^{2\pi} \eta(t) dt - \sqrt{\eta(2\pi)} \sin \int_0^{2\pi} \eta(t) dt & \frac{-\eta'(2\pi)}{2\eta^{3/2}(2\pi)} \sin \int_0^{2\pi} \eta(t) dt + \sqrt{\eta(2\pi)} \cos \int_0^{2\pi} \eta(t) dt \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Обозначим через

$$\Pi_\eta : H \times S^1 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow H, \quad \Pi_\eta(\eta, \varphi, k) = \eta$$

отображение проектирования.

Следствие 2.2. *Функционал*

$$I : Y \rightarrow \mathbb{R}^+, \quad I(y) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (\Pi_\eta G(y)) \, dx = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta(x) \, dx$$

является субмерсией [8].

Замечание 2.3. Завершая раздел, отметим, что мы имеем три описания решений $y \in Y$ уравнений (2.3), где $(p, \lambda) \in P \times \mathbb{R}$:

1. y — это решение единственного линейного дифференциального уравнения указанного вида, с которым связана единственная плоскость решений $Y(p, \lambda)$;
2. y — это собственная функция единственного стационарного оператора Шредингера, которая удовлетворяет одномерному семейству $l(y)$ самосопряженных неразделенных краевых условий, последнее (т. е. семейство) есть прямолинейная образующая многообразия краевых условий $\mathbb{B}$; среди всех $B \in l(y)$ есть единственное условие $B(2\pi)$, относительно которого функция y отвечает двукратному собственному значению;
3. по y определяется единственная тройка $(\eta, \varphi, k) \in H \times S^1 \times \mathbb{R}^+$.

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

3.1. Подмногообразия собственных функций. Введем следующие обозначения.

1. $\mathbf{b}: P \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{B}$ — гладкое отображение, сопоставляющее каждому конкретному уравнению (2.3) краевое условие $B(2\pi)$. Гладкость $\mathbf{b}$ гарантируется гладкой зависимостью решений co и si от потенциала P и числа λ .
2. $\mathbf{B}: Y \rightarrow \mathbb{B}$ — гладкое отображение, сопоставляющее каждой функции $y \in Y$ краевое условие $B(2\pi)$ (т. е. единственное краевое условие, при котором y отвечает двукратному собственному значению).
3. $\bar{\Lambda}: H \rightarrow \mathbb{R}$ и $\bar{\Phi}: H \rightarrow P$ — гладкие отображения, задаваемые формулами (2.14) и (2.15) соответственно.
4. $\bar{\mathbf{B}}: H \rightarrow \mathbb{B}$ — гладкое отображение, задаваемое формулой (2.16).

Перечисленные отображения связаны коммутативной диаграммой

$$\begin{array}{ccccc}
 Y & \xrightarrow{G} & H \times S^1 \times \mathbb{R}^+ & \xrightarrow{\Pi_\eta} & H \\
 & \searrow (\Phi, \Lambda) & & \swarrow (\bar{\Phi}, \bar{\Lambda}) & \\
 & & P \times \mathbb{R} & & \\
 & \searrow \mathbf{B} & \downarrow \mathbf{b} & \swarrow \bar{\mathbf{B}} & \\
 & & \mathbb{B} & &
 \end{array}$$

Припишем каждой функции $y \in Y$ номер $n \in \mathbb{N}$ ее двукратного собственного значения. Множество всех функций $y \in Y$ с номером n обозначим через Y_n^0 , сужение отображения $\mathbf{B}$ на страт Y_n^0 — через $\mathbf{B}_n$. Понятно, что $Y = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} Y_n^0$, где объединение дизъюнктивное.

Лемма 3.1. Номер $n \in \mathbb{N}$ собственного значения определяется однозначно из двусторонних оценок

$$n - 1 < I(y) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta(t) dt \leq n.$$

Доказательство. Доказательство следует из осцилляционных неравенств (2.6), определений функций $\text{co}(x)$, $\text{si}(x)$ и угла $\theta(x) = \varphi + \int_0^x \eta(t) dt$. Приведем рассуждения для случая $n = 1$.

Если $\int_0^{2\pi} \eta dx < 2\pi$, то номер $n = 1$, так как функция $\text{si}(x)$ имеет на $(0, 2\pi]$ только один ноль, а номеру $n = 2$ отвечает количество нулей не менее двух.

Если $\int_0^{2\pi} \eta dx = 2\pi$, то количество нулей на $(0, 2\pi]$ у любой собственной функции равно двум, что не противоречит по-прежнему номеру $n = 1$. Если же допустить, что номер стал равен двум, то для случая $\alpha > 0$, $\beta = 0$ из таблицы (2.6) получаем, что количество нулей равно четырем. Значит, номер остался равен единице.

При условии $2\pi < \int_0^{2\pi} \eta dx < 3\pi$ количество нулей у функций $\text{co}(x)$ и $\text{si}(x)$ не меньше, чем два, что не противоречит номеру $n = 2$. Если допустить, что номер не изменился и равен единице, то из таблицы (2.6) следует, что при $n = 1$ и $\beta > 0$ количество нулей не больше одного — противоречие.

С ростом интеграла $\int_0^{2\pi} \eta dx$ номер не уменьшается, что обосновывает утверждение теоремы для $n = 1$.

Для остальных номеров $n \geq 2$ доказательство осуществляется по индукции. $\square$

Обозначим через $\bar{\mathbf{B}}_n$ сужение отображения $\bar{\mathbf{B}}$ на подмногообразии с краем

$$H_n := \left\{ \eta \in H : \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \eta(t) dt \in (n-1, n] \right\}.$$

Для $B \in \mathbb{B}$ положим $H_n(B) = (\bar{\mathbf{B}}_n)^{-1}(B) \subset H$.

Теорема 3.1. *Справедливы следующие утверждения.*

1. Если $n - m \geq 2$, то $\overline{H_n} \cap \overline{H_m} = \emptyset$; $\overline{H_n} \cap \overline{H_{n+1}} \subset H_n$.
2. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ многообразие H_n гомотопически тривиально.
3. Для произвольного краевого условия $B \in \mathbb{B}$ $H_n(B)$ есть гомотопически тривиальное подмногообразие в H коразмерности три.
4. Для любой функции $\eta_0 \in H$ найдется такая окрестность $U(\eta_0) \subset H$, что ограничение отображения $\bar{\mathbf{B}}$ на $U(\eta_0)$ есть тривиальное расслоение над $\bar{\mathbf{B}}(U(\eta_0))$.

Доказательство. Утверждение пункта 1 тривиально следует из определения многообразий H_n .

Гомотопическая тривиальность многообразий H_n следует из их выпуклости.

Докажем пункты 3 и 4. Сообразуясь с матрицей (2.16), определим отображение

$$f : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times S^1 \rightarrow \mathbb{B},$$

$$f(\xi_1, \xi_2, \vartheta) := \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{\xi_1}} \cos \vartheta & \frac{1}{\sqrt{\xi_1}} \sin \vartheta \\ \frac{-\xi_2}{2\xi_1^{3/2}} \cos \vartheta - \sqrt{\xi_1} \sin \vartheta & \frac{-\xi_2}{2\xi_1^{3/2}} \sin \vartheta + \sqrt{\xi_1} \cos \vartheta \end{pmatrix}.$$

Очевидно, f — диффеоморфизм. Поэтому вместо отображения $\mathbf{B}$ можно рассмотреть локально линейное отображение

$$f^{-1} \cdot \bar{\mathbf{B}}_n \cdot G^{-1} : H_n \rightarrow \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R} \times S^1,$$

$$(f^{-1} \cdot \bar{\mathbf{B}}_n \cdot G^{-1})(\eta, \varphi, k) = (\eta(2\pi), \eta'(2\pi), \int_0^{2\pi} \eta(t) dt \pmod{2\pi}),$$

которое, очевидно, является субмерсией. $\square$

Из доказанной теоремы и лемм 2.5 и 3.1 вытекает следующий результат о структуре многообразия Y .

Теорема 3.2. *Справедливы следующие утверждения.*

1. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$ многообразие Y_n^0 диффеоморфно $H_n \times S^1 \times \mathbb{R}^+$.
2. Если $n - m \geq 2$, то $\overline{Y_n^0} \cap \overline{Y_m^0} = \emptyset$; $\overline{Y_n^0} \cap \overline{Y_{n+1}^0} \subset Y_n^0$.
3. $Y_n^0 \sim S^1$ (« $\sim$ » — гомотопическая эквивалентность).
4. Для произвольного краевого условия $B \in \mathbb{B}$ полный прообраз

$$Y^0(B) := (\mathbf{B})^{-1}(B) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\mathbf{B}_n)^{-1}(B)$$

есть счетное несвязное объединение, в котором $Y_n^0(B) := (\mathbf{B}_n)^{-1}(B) \sim S^1$ — подмногообразие многообразия Y коразмерности три.

5. Для любой функции $\eta_0 \in H$ найдется такая окрестность $U(\eta_0) \subset H$, что ограничение отображения $B \circ G^{-1}$ на $U(\eta_0) \times S^1 \times \mathbb{R}^+$ есть тривиальное расслоение над $B \circ G^{-1}(U(\eta_0) \times S^1 \times \mathbb{R}^+)$.

Из следствия 2.2 и диффеоморфности отображения f получаем

Следствие 3.1. *Имеет место вложение подмногообразий*

$$Y_n^0(B) \subset I^{-1}(t) \subset Y_n^0, \text{ где } t \in (n-1, n].$$

Применяя проективизацию к многообразию Y и его подмногообразиям $Y_n^0 \subset Y$, $Y_n^0(B) \subset Y_n^0(B) \subset Y$, получаем описание многообразий собственных функций. Напомним, что говоря о функциях $y \in Y$ как о собственных функциях краевой задачи (2.3), (2.4), мы рассматриваем их с точностью до умножения на ненулевую константу.

Введем обозначения:

1. Π — множество, полученное в результате проективизации многообразия Y . Корректно определено отображение $\hat{B}: \Pi \rightarrow \mathbb{B}$, сопоставляющее собственной функции единственное краевое условие, при котором она отвечает двукратному собственному значению.
2. Ранее введенное обозначение $\Pi_n^0(p, B)$ есть проективизация проколотой плоскости $Y(p, \lambda)$, при этом $B = B(2\pi)$.
3. Π_n^0 — проективизация многообразия Y_n^0 ; $\hat{B}_n$ — сужение отображения $\hat{B}$ на Π_n^0 .
4. $\Pi^0(B)$ — проективизация многообразия $Y^0(B)$.
5. $\Pi_n^0(B)$ — проективизация многообразия $Y_n^0(B)$.

В этих терминах теорема 3.2 принимает следующий вид.

Теорема 3.3. *Справедливы следующие утверждения.*

1. *Отображение*

$$\hat{G}^{-1}: H \times \mathbb{R}P^1 \rightarrow \Pi, \quad \hat{G}^{-1}(h, \varphi) = y(x) := \frac{1}{\sqrt{\eta(x)}} \cos\left(\varphi + \int_0^x \eta(t) dt\right)$$

является диффеоморфизмом.

2. $\Pi = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \Pi_n^0$, где объединение дизъюнктное.
3. Для произвольного $n \in \mathbb{N}$

$$\Pi_n^0 = \bigcup_{p \in P, B \in \mathbb{B}} \Pi_n^0(p, B) \cong H_n \times \mathbb{R}P^1.$$

4. Если $n - m \geq 2$, то $\overline{\Pi_n^0} \cap \overline{\Pi_m^0} = \emptyset$; $\overline{\Pi_n^0} \cap \overline{\Pi_{n+1}^0} \subset \Pi_n^0$.
5. Отображение $\hat{B}$ является локально тривиальным расслоением. Для произвольного краевого условия $B \in \mathbb{B}$ полный прообраз

$$\Pi^0(B) := \hat{B}^{-1}(B) = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} (\hat{B}_n)^{-1}(B)$$

есть счетное дизъюнктное объединение, в котором $\Pi_n^0(B) = (\hat{B}_n)^{-1}(B) \sim \mathbb{R}P^1$ — подмногообразие многообразия Π коразмерности три.

3.2. Подмногообразия потенциалов. Переходим к описанию подмногообразий потенциалов. Обозначим

$$P_n^0(B) := \{p \in P: \lambda_n^+(p, B) - \lambda_n^-(p, B) = 0\},$$

т. е. это подмножество всех потенциалов, для которых краевая задача (2.3), (2.4) имеет вырожденные собственные значения с номером n . Нам понадобятся сужения: Φ_n^0 — сужение Φ на многообразии (с краем) Y_n^0 и $\Phi_{B,n}^0$ — сужение Φ_n^0 на подмногообразии (без края) $Y_n^0(B)$.

Теорема 3.4. *Справедливы утверждения:*

1. Подмножество $P_n^0(B) \subset P$ является гладким гомотопически тривиальным подмногообразием коразмерности два.
2. Отображение $\Phi_{B,n}^0 : Y_n^0(B) \rightarrow P_n^0(B)$ является гладким тривиальным расслоением, слой которого диффеоморфен S^1 .

Доказательство. Наряду с уравнениями (2.3) рассмотрим семейство уравнений

$$-y'' + r(x)y = 0, \quad r \in L_2.$$

Отображение

$$\check{\Phi} : H \rightarrow L_2, \quad \check{\Phi}(\eta) = r := -\frac{\eta''}{2\eta} + \frac{3(\eta')^2}{4\eta^2} - \eta^2 \quad (3.1)$$

(сравните с формулой (2.15)) является диффеоморфизмом: его биективность следует из утверждения леммы 2.5 и независимости функции r от переменных k и φ (см. формулу (2.13)), дифференцируемость — непосредственно из формулы (3.1), а дифференцируемость обратного отображения следует из гладкой зависимости решений so и si от функционального параметра r . В силу п. 3 теоремы 3.1 образ $\check{\Phi}(H_n(B)) \subset L_2$ является гладким гомотопически тривиальным подмногообразием коразмерности три.

Пусть $\Pi_P : L_2 \rightarrow P$ — ортогональное проектирование. Образ $\Pi_P(\check{\Phi}(H_n(B))) = P_n^0(B)$ есть исследуемое подмножество. Но сужение Π_P на $\check{\Phi}(H_n(B))$ является вложением. Докажем это.

Во первых, по функции $p \in \Pi_P(\check{\Phi}(H_n(B)))$, краевому условию B и номеру n мы восстанавливаем собственное значение $\lambda_n^0(p, B)$, которое, в силу выбора матрицы B , будет вырожденным; затем находим $r(x) = p(x) - \lambda_n^0(p, B)$. Следовательно, сужение Π_P является биекцией.

Во-вторых, локальная диффеоморфность сужения следует из того обстоятельства, что в любой точке $p \in \check{\Phi}(H_n(B))$ касательное пространство $T_p\check{\Phi}(H_n(B))$ не содержит постоянную функцию $e(x) \equiv 1$. В самом деле, пространство $T_p\check{\Phi}(H_n(B))$ есть образ производной

$$D\check{\Phi}(\eta) : T_\eta H_n(B) \rightarrow L_2,$$

$$D\check{\Phi}(\eta)\sigma = -\frac{\sigma''}{2\eta} + \frac{\eta''\sigma}{2\eta^2} + \frac{3\eta'\sigma'}{2\eta^2} - \frac{3(\eta')^2\sigma}{2\eta^3} - 2\eta\sigma,$$

$$\text{где } \sigma \in W_2^2, \quad \sigma(0) = \sigma'(0) = \sigma(2\pi) = \sigma'(2\pi) = 0, \quad \int_0^{2\pi} \sigma dx = 0.$$

Если допустить противное, то получим тождество $D\check{\Phi}(\eta)\sigma \equiv 1$. Разделим его на $\eta(x)$ и проинтегрируем на $[0, 2\pi]$, причем первые два слагаемые по частям. Получим противоречие: $0 =$

$$= \int_0^{2\pi} (1/\eta) dx > 0.$$

Значит, коразмерность $\check{\Phi}(H_n(B))$ в P на единицу меньше, чем коразмерность $H_n(B)$ в H и равна двум.

Второе утверждение следует из того, что сужение композиции $\Pi_P \circ \check{\Phi}$ на $H_n(B)$ является вложением, а $Y_n^0(B)$ диффеоморфно $H_n(B) \times S^1 \times \mathbb{R}^+$. $\square$

Из первого пункта теоремы 3.4 следует, что гипотеза Арнольда справедлива для стационарного оператора Шредингера на отрезке при любых самосопряженных неразделенных краевых условиях.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Арнольд В. И. Моды и квазимоды // Функц. анализ и его прилож. — 1972. — 6, № 2. — С. 94–101.
2. Дymarский Я. М. Метод многообразий в теории собственных векторов нелинейных операторов // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — 24. — С. 3–159.
3. Дymarский Я. М. Функционалы собственных значений на многообразии потенциалов // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2024. — 64, № 6. — С. 116–127. — DOI: [10.31857/S0044466924060105](https://doi.org/10.31857/S0044466924060105).
4. Дymarский Я. М., Бондарь А. А. Многообразие собственных функций семейства периодических краевых задач // Мат. сб. — 2021. — 212, № 9. — С. 18–39. — DOI: [10.4213/sm9294](https://doi.org/10.4213/sm9294).

5. Дымарский Я. М., Евтушенко Е. А. Расслоение пространства периодических краевых задач на гиперповерхности постоянной длины n -й спектральной лакуны // *Мат. сб.* — 2016. — 207, № 5. — С. 43–68. — DOI: [10.4213/sm8467](https://doi.org/10.4213/sm8467).
6. Камке Э. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1971.
7. Ладыженская О. А. Краевые задачи математической физики. — М.: Наука, 1973.
8. Ленг С. Введение в теорию дифференцируемых многообразий. — М.: Мир, 1967.
9. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
10. Постников М. М. Группы и алгебры Ли. — М.: Наука, 1982.
11. Kong Q., Wu H., Zettl A. Geometric aspects of Sturm–Liouville problems I. Structures on spaces of boundary conditions // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh.* — 2000. — 130A. — С. 561–589. — DOI: [10.1017/S0308210500000305](https://doi.org/10.1017/S0308210500000305).

Я. М. Дымарский

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
Долгопрудный, Россия

E-mail: dymarskii@mail.ru, ResearcherID: [E-3526-2016](https://orcid.org/E-3526-2016), Scopus: [25025623500](https://orcid.org/25025623500)

С. С. Николаенко

Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет),
Долгопрудный, Россия

E-mail: nikolaenko.s@phystech.edu, РИНЦ SPIN-код: 3289-9306, РИНЦ AuthorID: [1225190](https://orcid.org/1225190),
ResearcherID: [N-6090-2019](https://orcid.org/N-6090-2019), Scopus: [55924768600](https://orcid.org/55924768600), ORCID: [0009-0007-2907-706X](https://orcid.org/0009-0007-2907-706X)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-51-62](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-51-62)

EDN: [TOXSPT](https://edn.ru/TOXSPT)

UDC 517.927.25:517.988.2

Research article

On the Arnold conjecture for a family of stationary Schrödinger operators with self-adjoint nonseparated boundary conditions

Ya. M. Dymarskii and S. S. Nikolaenko

Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russia

Abstract. We give an analytical and topological description of the manifolds of eigenfunctions and potentials generated by a family of one-dimensional stationary Schrödinger operators and the manifold of self-adjoint nonseparated boundary conditions. In particular, we prove Arnold’s conjecture on the codimension of the manifold of those potentials that correspond to double eigenvalues under the chosen self-adjoint nonseparated boundary conditions.

Keywords: Arnold’s conjecture, transversality conjecture, Schrödinger operator.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

Authors’ contribution. *Ya. M. Dymarskii* — research concept and text design; *S. S. Nikolaenko* — material processing and text design.



For citation: Ya. M. Dymarskii, S. S. Nikolaenko, “On the Arnold conjecture for a family of stationary Schrödinger operators with self-adjoint nonseparated boundary conditions,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 1, 51–62. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-51-62](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-51-62)
EDN: [TOXSPT](https://www.edn.ru/TOXSPT)

REFERENCES

1. V. I. Arnol'd, “Mody i kvazimody” [Modes and quasimodes], *Funkts. Analiz i ego Prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1972, **6**, No. 2, 94–101 (in Russian).
2. Ya. M. Dymarskii, “Metod mnogoobraziy v teorii sobstvennykh vektorov nelineynykh operatorov” [Manifold method in eigenvector theory of nonlinear operators], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2007, **24**, 3–159 (in Russian).
3. Ya. M. Dymarskii, “Funktsionaly sobstvennykh znacheniy na mnogoobrazii potentsialov” [Eigenvalue functionals on the potential manifold], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2024, **64**, No. 6, 116–127 (in Russian), DOI: [10.31857/S0044466924060105](https://doi.org/10.31857/S0044466924060105).
4. Ya. M. Dymarskii and A. A. Bondar', “Mnogoobrazie sobstvennykh funktsiy semeystva periodicheskikh kraevykh zadach” [The manifold of eigenfunctions of a family of periodic boundary-value problems], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 2021, **212**, No. 9, 18–39 (in Russian), DOI: [10.4213/sm9294](https://doi.org/10.4213/sm9294).
5. Ya. M. Dymarskii and E. A. Evtushenko, “Rassloenie prostranstva periodicheskikh kraevykh zadach na giperpoverkhnosti postoyannoy dliny n -y spektral'noy lakuny” [Stratification of the space of periodic boundary-value problems into hypersurfaces of constant length of the n th spectral gap], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 2016, **207**, No. 5, 43–68 (in Russian), DOI: [10.4213/sm8467](https://doi.org/10.4213/sm8467).
6. E. Kamke, *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nykh uravneniyam* [Differential Equations. Solution Methods and Solutions], Nauka, Moscow, 1971 (Russian translation).
7. O. A. Ladyzhenskaya, *Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki* [Boundary-Value Problems of Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
8. S. Lang, *Vvedenie v teoriyu differentsiruemykh mnogoobraziy* [Introduction to Differentiable Manifolds], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
9. M. A. Naimark, *Lineynye differentsial'nye operatory* [Linear Differential Operators], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
10. M. M. Postnikov, *Gruppy i algebry Li* [Lie Groups and Algebras], Nauka, Moscow, 1982 (in Russian).
11. Q. Kong, H. Wu, and A. Zettl, “Geometric aspects of Sturm–Liouville problems I. Structures on spaces of boundary conditions,” *Proc. Roy. Soc. Edinburgh*, 2000, **130A**, 561–589, DOI: [10.1017/S0308210500000305](https://doi.org/10.1017/S0308210500000305).

Ya. M. Dymarskii

Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russia
E-mail: dymarskii@mail.ru, ResearcherID: [E-3526-2016](https://orcid.org/0000-0001-9352-6216), Scopus: [25025623500](https://orcid.org/0000-0001-9352-6216)

S. S. Nikolaenko

Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russia
E-mail: nikolaenko.s@phystech.edu, eLIBRARY SPIN-code: 3289-9306, eLIBRARY AuthorID: [1225190](https://orcid.org/0000-0001-9352-6216), ResearcherID: [N-6090-2019](https://orcid.org/0000-0001-9352-6216), Scopus: [55924768600](https://orcid.org/0000-0001-9352-6216), ORCID: [0009-0007-2907-706X](https://orcid.org/0000-0001-9352-6216)

ОБ ОДНОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ

А. К. КЕРИМБЕКОВ

Кыргызско-Российский Славянский университет, Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. В статье исследованы вопросы построения частных решений скалярных и матричных уравнений Риккати. Найдено условие, которое обеспечивает взаимосвязь между частными решениями уравнений Риккати, Бернулли и неоднородного линейного дифференциального уравнения. Разработан алгоритм построения частного решения скалярного и матричного дифференциальных уравнений Риккати с переменными коэффициентами, а также скалярного и матричного алгебраических уравнений Риккати.

Ключевые слова: дифференциальное уравнение Риккати, алгебраическое уравнение Риккати, коэффициентно-сопряженное уравнение, уравнение Бернулли.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Керимбеков А. К. Об одном методе решения уравнений Риккати // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 63–74. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-63-74](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-63-74) EDN: [TQREXH](https://www.edn.ru/TQREXH)

ВВЕДЕНИЕ

Уравнение Риккати, начиная с момента его появления (1724 г.), уже более 300 лет привлекает внимание математиков и ученых, занимающихся исследованиями в различных областях естествознания, науки и техники. В работах [4, 5, 7, 10] более или менее полно изложены основные свойства скалярного дифференциального уравнения Риккати, а в работах [1–3, 8, 9, 11, 12] приведены примеры прикладных задач, где уравнение Риккати встречается в виде скалярного или матричного дифференциального уравнения, а также в виде матричного алгебраического уравнения. Оно становится более привлекательным при решении прикладных задач — теории оптимального управления технологическими процессами, где управление следует находить как функцию (функционал) от состояния управляемого процесса [1–3, 8, 9]. Интерес к уравнениям Риккати и в настоящее время не ослабевает [13, 14]. Однако, несмотря на большой поток исследований, до сих пор не разработан алгоритм построения частного решения уравнения Риккати, который остается одной из актуальных проблем теории дифференциальных уравнений.

В данной работе изложены результаты исследований дополнительных свойств дифференциальных и алгебраических уравнений Риккати. В частности, установлено, что существуют отдельные уравнения Риккати, для которых частное решение определяются известными аналитическими методами. Эти уравнения обладают специфическими свойствами, и мы их называем коэффициентно-сопряженными уравнениями Риккати. Доказано, что знание частных решений коэффициентно-сопряженных уравнений позволяет найти частное решение уравнения Риккати с произвольно заданными непрерывными коэффициентами. Показано, что разработанный алгоритм построения частных решений скалярных уравнений Риккати может быть обобщен и для

матричных уравнений Риккати, т. е. в отдельных случаях может быть полезным и при построения частных решений матричных дифференциальных и алгебраических уравнений Риккати.

Поскольку уравнение Риккати тесно связано с линейными дифференциальными уравнениями второго порядка [4, 5, 7, 10] и линейными интегро-дифференциальными уравнениями [6] с переменными коэффициентами, то для таких уравнений и их систем проблему построения частных решений также можно считать решенной. Таким образом, разработанный метод построения частного решения уравнений Риккати обладает свойством универсальности.

1. СКАЛЯРНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

1.1. Коэффициентно-сопряженные дифференциальные уравнения Риккати.

Рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение Риккати

$$y'(t) = k_0(t) + k_1(t)y(t) + k_2(t)y^2(t), \quad (1.1)$$

где $y(t)$ — неизвестная функция, коэффициенты $k_0(t)$, $k_1(t)$, $k_2(t)$ являются непрерывными скалярными функциями, определенными на заданном интервале (a, b) .

Теорема 1.1. Пусть коэффициенты уравнения (1.1) удовлетворяют интегральному тождеству

$$\int k_0(t)e^{-\int k_1(t)dt}dt \int k_2(t)e^{\int k_1(t)dt}dt \equiv 2, \quad t \in (a, b) \quad (1.2)$$

и $u(t)$ является частным решением нелинейного дифференциального уравнения Бернулли

$$u'(t) = k_1(t)u(t) + k_2(t)u^2(t), \quad t \in (a, b), \quad (1.3)$$

а $x(t)$ является частным решением линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$x'(t) = k_0(t) + k_1(t)x(t), \quad (1.4)$$

выделенные из общего решения при нулевом значении произвольной постоянной. Тогда каждая из функций

$$y_1(t) = -u(t) \quad \text{и} \quad y_2(t) = -x(t) \quad (1.5)$$

является частным решением уравнения Риккати (1.1).

Доказательство. Доказательство проведем, используя решение уравнения Бернулли (1.3). Из семейства решений выделяем частное решение

$$u(t) = -e^{\int k_1(t)dt} \left(\int k_2(t)e^{\int k_1(t)dt}dt \right)^{-1}, \quad (1.6)$$

полученное при нулевом значении произвольной постоянной. Образуем функцию

$$y_1(t) = -u(t) = e^{\int k_1(t)dt} \left(\int k_2(t)e^{\int k_1(t)dt}dt \right)^{-1} \quad (1.7)$$

и покажем, что она является решением уравнения Риккати (1.1). Дифференцируя (1.7), имеем равенство

$$y_1'(t) = k_1(t)e^{\int k_1(t)dt} \left(\int k_2(t)e^{\int k_1(t)dt}dt \right)^{-1} - k_2(t)e^{2\int k_1(t)dt} \left(k_2(t)e^{2\int k_1(t)dt}dt \right)^{-2}. \quad (1.8)$$

Дифференцируя тождество (1.2), после несложных преобразований имеем равенство

$$k_0(t) = -2k_2(t)e^{\int k_1(t)dt} \left(k_2(t)e^{\int k_1(t)dt}dt \right)^{-2}.$$

Учитывая эти соотношения, находим, что

$$\begin{aligned} k_0(t) + k_1(t)y(t) + k_2(t)y^2(t) &= \\ &= -2k_2(t)e^{2\int k_1(t)dt} \left(k_2(t)e^{\int k_1(t)dt}dt \right)^{-2} + k_1(t)e^{\int k_1(t)dt} \left(k_2(t)e^{-\int k_1(t)dt}dt \right)^{-1} + \\ &+ k_2(t)e^{2\int k_1(t)dt} \left(k_2(t)e^{\int k_1(t)dt}dt \right)^{-2} = \end{aligned}$$

$$= k_1(t)e^{\int k_1(t) dt} \left(k_2(t)e^{-\int k_1(t) dt} \right)^{-1} - k_2(t)e^{2\int k_1(t) dt} \left(k_2(t)e^{\int k_1(t) dt} \right)^{-2}. \quad (1.9)$$

Сравнивая (1.8) и (1.9), убеждаемся в том, что функция (1.7) является решением уравнения Риккати (1.1).

Аналогичным образом доказывается, что функция

$$y_2(t) = -x(t) = -e^{\int k_1(t) dt} \int k_0(t)e^{-\int k_1(t) dt} dt,$$

где $x(t)$ является частным решением линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$x'(t) = k_0(t) + k_1(t)x(t),$$

также удовлетворяет уравнению Риккати (1.1). В самом деле, при подстановке функции $y_2(t)$ в уравнение (1.1) получим следующие соотношения:

$$y_2'(t) = -k_0(t) - k_1(t)e^{\int k_1(t) dt} \int k_0(t)e^{-\int k_1(t) dt} dt, \quad (1.10)$$

$$\begin{aligned} k_0(t) + k_1(t)y_2(t) + k_2(t)y_2^2(t) &= k_0(t) - k_1(t)e^{\int k_1(t) dt} \int k_0(t)e^{-\int k_1(t) dt} dt + \\ &+ k_2(t) \left(e^{\int k_1(t) dt} \int k_0(t)e^{-\int k_1(t) dt} dt \right)^2. \end{aligned} \quad (1.11)$$

Далее, дифференцируя интегральное тождество (1.2), получим равенство

$$k_2(t)e^{\int k_1(t) dt} = -2k_0(t)e^{-\int k_1(t) dt} \left(\int k_0(t)e^{-\int k_1(t) dt} dt \right)^{-2},$$

которое перепишем в виде

$$k_2(t) \left(e^{\int k_1(t) dt} \int k_0(t)e^{-\int k_1(t) dt} dt \right)^2 = -2k_0(t).$$

С учетом этого равенства соотношение (1.11) приводим к виду

$$k_0(t) + k_1(t)y_2(t) + k_2(t)y_2^2(t) = -k_0(t) - k_1(t)e^{\int k_1(t) dt} \int k_0(t)e^{-\int k_1(t) dt} dt$$

и сравнивая с (1.10) убеждаемся, что функция $y_2(t)$ является решением уравнения Риккати (1.1). $\square$

Наряду с уравнением (1.1) будем рассматривать уравнение Риккати вида

$$y'(t) = k_2(t) - k_1(t)y + k_0(t)y^2(t), \quad t \in (a, b), \quad (1.12)$$

которое отличается от уравнения (1.1) расположением коэффициентов. Нетрудно заметить, что (1.1) и (1.12) — разные уравнения, однако коэффициенты удовлетворяют интегральному тождеству (1.2). Уравнение (1.12) обладает теми же свойствами, что и уравнение Риккати (1.1). Уравнения (1.1) и (1.12) назовем *коэффициентно-сопряженными* уравнениями Риккати. Совокупность таких уравнений образуют множество, которое является подмножеством множества общих уравнений Риккати.

1.2. О преобразовании произвольного уравнения Риккати к коэффициентно-сопряженному уравнению. Рассмотрим уравнение Риккати

$$z'(t) = p(t) + q(t)z(t) + r(t)z^2(t) \quad (1.13)$$

с произвольными непрерывными коэффициентами $p(t)$, $q(t)$ и $r(t)$, определенными на заданном интервале (a, b) . Если уравнение (1.13) не принадлежит к классу коэффициентно-сопряженных уравнений, то вышеизложенный метод построения частного решения становится непригодным. В этой связи рассмотрим вопросы о преобразовании уравнения (1.13) к уравнению класса

коэффициентно-сопряженных уравнений. Согласно свойствам уравнения Риккати [4, 5, 7, 10], используя дробно-линейное преобразование

$$z(t) = \frac{a(t)y(t) + b(t)}{c(t)y(t) + h(t)}, \quad Q(t) = a(t)h(t) - c(t)b(t) \neq 0, \quad (1.14)$$

где $a(t), b(t), c(t), h(t)$ — непрерывные функции, определенные на заданном интервале (a, b) , уравнение (1.13) можно преобразовать к коэффициентно-сопряженному уравнению Риккати вида

$$y'(t) = k_0(t) + k_1(t)y(t) + k_2(t)y^2(t). \quad (1.15)$$

Если из коэффициентов уравнения (1.13) образовать вектор-функцию $P(t) = (p(t), q(t), r(t))$, а из коэффициентов уравнения (1.15) образовать вектор-функцию $K(t) = (k_0(t), k_1(t), k_2(t))$, то из функции, связывающей $y(t)$ и $z(t)$ по формуле (1.14), образуем вектор-функцию $A(t) = (a(t), b(t), c(t), h(t))$. Тогда нетрудно проверить, что эти вектор-функции будут связаны соотношением

$$K(t) = D(t)(P(t) - F'(t, A(t))), \quad (1.16)$$

где

$$D(t) = \frac{1}{Q^3(t)} \begin{pmatrix} h^2(t) & b(t)h(t) & b^2(t) \\ 2c(t)h(t) & a(t)h(t) + c(t)b(t) & 2a(t)b(t) \\ c^2(t) & a(t)c(t) & a^2(t) \end{pmatrix},$$

$$F'(t, A(t)) = \frac{1}{Q(t)} \begin{pmatrix} b'(t)h(t) - b(t)h'(t) \\ a'(t)h(t) - a(t)h'(t) + b'(t)c(t) - b(t)c'(t) \\ a'(t)c(t) - a(t)c'(t) \end{pmatrix}.$$

Легко проверить, что определитель матрицы $D(t)$ при любом наборе функций $a(t), b(t), c(t), h(t)$, удовлетворяющих условию $Q(t) \neq 0$, отличен от нуля, т. е.

$$|D(t)| = 1, \quad \forall t \in (a, b). \quad (1.17)$$

Это обстоятельство позволяет определить коэффициенты $k_0(t), k_1(t), k_2(t)$ так, чтобы они удовлетворяли интегральному тождеству

$$\int k_0(t, A(t)) e^{-\int k_1(t, A(t)) dt} dt \int k_2(t) e^{\int k_1(t, A(t)) dt} dt \equiv 2. \quad (1.18)$$

Эта задача, где количество неизвестных превышает количество условий, имеет бесконечно много решений. Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 1.2. Пусть уравнения Риккати (1.13) и (1.15) связаны дробно-линейными преобразованиями (1.14). При преобразовании среди наборов функций $(a(t), b(t), c(t), h(t))$ существует хотя бы один набор такой, чтобы (1.15) было коэффициентно-сопряженным уравнением Риккати.

Отметим, что, в силу условия (1.17) уравнение (1.16) можно переписать в виде

$$P(t) = D^{-1}(t)(K(t) + F'(t, A(t))) \quad (1.19)$$

и использовать для перехода от уравнения Риккати (1.15) к исходному уравнению Риккати (1.13). При этом переход от уравнения (1.13) к уравнению (1.15) или от уравнения (1.15) к уравнению (1.13) при каждом наборе функций $a(t), b(t), c(t)$ и $h(t)$ осуществляется однозначно.

Пример. Рассмотрим уравнение Риккати

$$y'(t) = p(t) + q(t)y(t) + r(t)y^2(t), \quad (1.20)$$

где

$$p(t) = 2 \cos t \left(2e^{2t} - \frac{e^{-2t}}{\sin^2 t} \right) - 4, \quad q(t) = 4 \cos t \left(-e^{2t} + \frac{e^{-2t}}{\sin^2 t} \right) + 6,$$

$$r(t) = \cos t \left(e^{2t} - \frac{2e^{-2t}}{\sin^2 t} \right) - 2.$$

Подстановкой

$$y(t) = \frac{a(t)z(t) + b(t)}{c(t)z(t) + h(t)}, \quad Q(t) = a(t)h(t) - b(t)c(t) \neq 0 \quad (1.21)$$

уравнение (1.20) преобразуем к виду

$$z'(t) = k_0(t) + k_1(t)z(t) + k_2(t)z^2(t), \quad (1.22)$$

где коэффициенты $k_0(t)$, $k_1(t)$ и $k_2(t)$ определяются по формуле

$$K(t) = D(t)P(t) - F'(t, A(t)).$$

Это равенство при $a(t) = 2$, $h(t) = 1$, $b(t) = 1$, $c(t) = 1$ имеет вид

$$\begin{aligned} k_0(t) &= p(t) + q(t) + r(t) = e^{2t} \cos t, \\ k_1(t) &= 2p(t) + 3q(t) + 4r(t) = 2, \\ k_2(t) &= p(t) + 2q(t) + 4r(t) = -\frac{2e^{-2t} \cos t}{\sin^2 t}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$\begin{aligned} \int k_0(t) e^{-\int k_1(t) dt} dt &= \int e^{2t} \cos t e^{-\int 2 dt} dt = \int \cos t dt = \sin t, \\ \int k_2(t) e^{\int k_1(t) dt} dt &= \int \left(-\frac{2e^{-2t} \cos t}{\sin^2 t} \right) e^{2t} dt = -\int \frac{2 \cos t}{\sin^2 t} dt = \frac{2}{\sin t}, \end{aligned}$$

то легко видеть, что найденные коэффициенты $k_0(t)$, $k_1(t)$ и $k_2(t)$ удовлетворяют интегральному тождеству (1.18).

Далее находим частное решение линейного неоднородного дифференциального уравнения

$$z'_0(t) = k_0(t) + k_1(t)z_0(t) \equiv e^{2t} \cos t + 2z_0(t).$$

Оно имеет вид

$$z_0(t) = e^{\int k_1(t) dt} \left(c + \int k_0(t) e^{-\int k_1(t) dt} dt \right) \Big|_{c=0} = e^{2t} \int e^{2t} \cos t e^{-2t} dt = e^{2t} \sin t.$$

Частное решение исходного уравнения Риккати (1.22) имеет вид

$$z(t) = -z_0(t) = -e^{2t} \sin t. \quad (1.23)$$

Далее согласно (1.21) частное решение уравнения (1.20) находим в виде

$$y_1(t) = \frac{-2e^{2t} \sin t + 1}{e^{2t} \sin t + 1}.$$

Известно, что существует связь дифференциального уравнения Риккати

$$x'(t) = k_0(t) + k_1(t)x(t) + k_2(t)x^2(t) \quad (1.24)$$

с линейными дифференциальными уравнениями второго порядка, системой дифференциальных уравнений и интегро-дифференциальными уравнениями с переменными коэффициентами.

Все свойства уравнения Риккати и его связи с другими уравнениями сохраняются и для коэффициентно-сопряженных уравнений. Это обстоятельство позволяет, зная частное решение коэффициентно-сопряженного уравнения Риккати, находить частные решения некоторых дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений и их систем с переменными коэффициентами, которые также являются актуальными проблемами теории дифференциальных уравнений. Ниже приведены примеры таких связей.

Связь с линейным дифференциальным уравнением второго порядка. Пусть $x(t)$ — известное решение коэффициентно-сопряженного уравнения Риккати (1.24). Тогда, используя формулу

$$x(t) = -\frac{1}{k_2(t)} \frac{z'(t)}{z(t)}, \quad (1.25)$$

можно найти частное решение $z(t)$ линейного дифференциального уравнения второго порядка с переменными коэффициентами вида

$$z'' - \left(\frac{k'_2(t)}{k_2(t)} + k_1(t) \right) z' + k_0(t)k_2(t)z = 0. \quad (1.26)$$

Связь с линейной системой дифференциальных уравнений первого порядка. Пусть $z(t)$ — частное решение уравнения (1.26), найденное по формуле (1.25). Тогда одно из частных решений $\{z(t), y(t)\}$ системы с переменными коэффициентами вида

$$\begin{cases} z' = y, \\ y' = -k_0(t)k_2(t)z + \left(\frac{k_2'(t)}{k_2(t)} + k_1(t)\right)y \end{cases} \quad (1.27)$$

определяется достаточно просто. То есть, если $z(t)$ известно, то $y(t)$ находится по первому уравнению.

Связь с линейным интегро-дифференциальным уравнением. Рассмотрим систему (1.27) и согласно методике работы [4] для второго уравнения рассмотрим задачу Коши:

$$y' - \left(\frac{k_2'(t)}{k_2(t)} + k_1(t)\right)y = -k_0(t)k_2(t), \quad y(t_0) = y_0. \quad (1.28)$$

Решение задачи Коши имеет вид

$$\begin{aligned} y(t) &= e^{\int_{t_0}^t \left(\frac{k_2'(\tau)}{k_2(\tau)} + k_1(\tau)\right) d\tau} \left(y_0 + \int_{t_0}^t k_0(\xi)k_2(\xi) e^{-\int_{t_0}^{\xi} \left(\frac{k_2'(s)}{k_2(s)} + k_1(s)\right) ds} d\xi \right) = \\ &= y_0 e^{\int_{t_0}^t \left(\frac{k_2'(\tau)}{k_2(\tau)} + k_1(\tau)\right) d\tau} + \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^{\xi} \left(\frac{k_2'(s)}{k_2(s)} + k_1(s)\right) ds} k_0(\xi)k_2(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (1.29)$$

Подставляя это решение в уравнение $z' = y$, получаем интегро-дифференциальное уравнение

$$z'(t) = \int_{t_0}^t e^{\int_{t_0}^{\tau} \left(\frac{k_2'(s)}{k_2(s)} + k_1(s)\right) ds} k_0(\tau)k_2(\tau) d\tau + y_0 e^{\int_{t_0}^t \left(\frac{k_2'(\tau)}{k_2(\tau)} + k_1(\tau)\right) d\tau}, \quad (1.30)$$

которое эквивалентно системе (1.27).

Таким образом, установлено, что коэффициентно-сопряженные уравнения Риккати позволяют решать ряд задач, связанных с построением частных решений дифференциальных и интегро-дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами.

2. ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА МАТРИЧНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ

Рассмотрим матричное дифференциальное уравнение Риккати

$$Y'(t) = K_0(t) + K_1(t)Y(t) + Y(t)K_2(t)Y(t), \quad (2.1)$$

где $Y(t)$ — неизвестная матрица порядка $n \times n$, $K_0(t)$, $K_1(t)$, $K_2(t)$ — непрерывные матричные коэффициенты того же порядка, независимая переменная t изменяется на заданном интервале (a, b) .

Теорема 2.1. Пусть коэффициенты $K_0(t)$, $K_1(t)$, $K_2(t)$ уравнения (2.1) удовлетворяют интегральному тождеству

$$\int \Phi(t, \tau) K_0(\tau) d\tau \int K_2(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau = 2E, \quad (2.2)$$

где E — единичная матрица порядка $n \times n$, $\Phi(t, \tau) = \Phi(t)\Phi^{-1}(\tau)$ — матрица Коши, а $\Phi(t)$ — фундаментальная матрица¹ линейного однородного матричного дифференциального уравнения

$$X_0'(t) = K_1(t)X_0(t). \quad (2.3)$$

Если $X(t)$ — частное решение линейного неоднородного матричного дифференциального уравнения

$$X'(t) = K_0(t) + K_1(t)X(t), \quad (2.4)$$

¹Заметим, что обратная матрица $\Phi^{-1}(t)$ удовлетворяет тождеству $(\Phi^{-1}(t))' = -\Phi^{-1}(t)K_1(t)$.

а $U(t)$ — частное решение матричного уравнения Бернулли

$$U'(t) = K_1(t)U(t) + U(t)K_2(t)U(t), \quad (2.5)$$

полученные при нулевом значении произвольной постоянной, то каждая из матриц

$$Y_1(t) = -X(t) \quad \text{и} \quad Y_2(t) = -U(t) \quad (2.6)$$

является частным решением матричного уравнения (2.1).

Доказательство. Из семейства решений уравнения (2.4) выделяем решение

$$X(t) = \int \Phi(t, \tau) K_0(\tau) d\tau \quad (2.7)$$

и образуем матрицу $Y_1(t) = -X(t)$. Покажем, что матрица $Y_1(t)$ является частным решением уравнения Риккати (1.1). Учитывая, что для любой матрицы $H(t)$ имеет место соотношение

$$\left(\int H(\tau) d\tau \right)' = \left(\int_0^t H(\tau) d\tau \right)' = H(t),$$

находим, что

$$Y_1'(t) = -K_1(t) \int \Phi(t, \tau) K_0(\tau) d\tau - K_0(t). \quad (2.8)$$

С другой стороны, имеем равенство

$$\begin{aligned} K_0(t) + K_1(t)Y_1(t) + Y_1(t)K_2(t)Y_1(t) = \\ = K_0(t) - K_1(t) \int \Phi(t, \tau) K_0(\tau) d\tau + \int \Phi(t, \tau) K_0(\tau) d\tau K_2(t) \int \Phi(t, \tau) K_0(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Теперь тождество (2.2) представим в виде

$$\int K_2(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau = 2 \left(\int \Phi(t, \tau) K_0(\tau) d\tau \right)^{-1}$$

и продифференцируем по t . Учитывая известное соотношение $(H^{-1})' = -H^{-1}H'H^{-1}$ и (2.3), (2.5), находим, что

$$\int \Phi(t, \tau) K_0(\tau) d\tau \cdot K_2(t) \int \Phi(t, \tau) K_0(\tau) d\tau = -2K_0(t).$$

Тогда (2.9) перепишем в виде

$$K_0(t) + K_1(t)Y_1(t) + Y_1(t)K_2(t)Y_1(t) = -K_0(t) - K_1(t) \int \Phi(t, \tau) K_0(\tau) d\tau$$

и, сравнивая с (2.8), убедимся в том, что матрица $Y_1(t)$ удовлетворяет уравнению Риккати (2.1).

Теперь рассмотрим матричное дифференциальное уравнение Бернулли

$$U'(t) = K_1(t)U(t) + U(t)K_2(t)U(t) \quad (2.10)$$

и из семейства его решений выделим частное решение

$$U(t) = \left(- \int K_2(t) \Phi(\tau, t) d\tau \right)^{-1}, \quad (2.11)$$

приравнивая к нулевой матрице произвольную постоянную матрицу. Далее непосредственными вычислениями доказывается, что матрица

$$Y_2(t) = -U(t) = \left(\int K_2(\tau) H^{-1}(t, \tau) d\tau \right)^{-1}$$

является частным решением уравнения Риккати (2.1).

Дифференцируя матрицу $Y_2(t)$ и учитывая тождество (2.3), находим что

$$Y_2'(t) = - \left(\int K_2(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \right)^{-1} K_2(t) \left(\int K_2(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \right)^{-1} + K_1(t) \left(\int K_2(\tau) \Phi(\tau, t) d\tau \right)^{-1}. \quad (2.12)$$

С другой стороны, подставляя матрицу $Y_2(t)$ в правую часть уравнения (2.1), имеем соотношение:

$$K_0(t) + K_1(t)Y_2(t) + Y_2(t)K_2(t)Y_2(t) = K_0(t) + K_1(t) \left(\int K_2(\tau)\Phi(\tau, t)d\tau \right)^{-1} + \\ + \left(\int K_2(\tau)\Phi(\tau, t)d\tau \right)^{-1} K_2(t) \left(\int K_2(\tau)\Phi(\tau, t)d\tau \right)^{-1}. \quad (2.13)$$

Далее продифференцируем по t интегральное тождество (2.2) и с учетом (2.3) найдем, что

$$K_0(t) = -2 \left(\int K_2(\tau)\Phi(\tau, t)d\tau \right)^{-1} K_2(t) \left(\int K_2(\tau)\Phi(\tau, t)d\tau \right)^{-1}.$$

Учитывая это соотношение, сравним (2.12) с (2.13) и убедимся в том, что матрица $Y_2(t)$ является решением уравнения (2.1). $\square$

3. СКАЛЯРНЫЕ АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ РИККАТИ

3.1. Коэффициентно-сопряженные алгебраические уравнения Риккати. Скалярное алгебраическое уравнение Риккати известно как квадратное уравнение

$$0 = p + qy + ry^2, \quad (3.1)$$

где p, q, r — действительные числа. Известны алгоритмы построения корней (частных решений) этого уравнения. Мы будем рассматривать это уравнение с иных позиций, т. е. будем рассматривать вопросы определения его корней по схеме, изложенной в предыдущих пунктах.

Сначала рассмотрим уравнения вида

$$0 = k_0 + k_1z + k_2z^2, \quad (3.2)$$

$$0 = k_2 - k_1z + k_0z^2, \quad (3.3)$$

коэффициенты которых удовлетворяют условию

$$2k_1^2 + k_0k_2 = 0. \quad (3.4)$$

Пару таких уравнений вида (3.2) и (3.3) назовем *коэффициентно-сопряженными* алгебраическими уравнениями Риккати.

Теорема 3.1. Пусть (3.2) является коэффициентно-сопряженным алгебраическим уравнением. Если x является корнем линейного неоднородного алгебраического уравнения

$$0 = k_0 + k_1x, \quad \text{т. е.} \quad x = -k_0k_1^{-1}, \quad (3.5)$$

и является нетривиальным корнем нелинейного алгебраического уравнения

$$0 = k_0 + k_1u + k_2u^2, \quad \text{т. е.} \quad u = -k_1k_2^{-1}, \quad (3.6)$$

то каждое из чисел

$$z_1 = -x = k_0k_1^{-1}, \quad z_2 = -u = k_1k_2^{-1}$$

является корнем алгебраического уравнения Риккати (3.2).

Доказательство проводится непосредственной проверкой.

3.2. О преобразовании скалярного алгебраического уравнения Риккати общего вида. Теперь возвращаемся к уравнению (3.1) и рассмотрим вопрос о преобразовании его к коэффициентно-сопряженному уравнению. Используя дробно-линейное преобразование

$$y = \frac{az + b}{cz + h}, \quad ah - bc \neq 0, \quad (3.7)$$

переходим к уравнению

$$0 = k_0 + k_1z + k_2z^2, \quad (3.8)$$

где коэффициенты k_0, k_1, k_2 связаны с коэффициентами уравнения (3.1) по формулам

$$\begin{aligned} k_0 &= h^2 p + b h q + b^2 r, \\ k_1 &= 2 c h p + (a h + b c) q + 2 a b r, \\ k_2 &= c^2 p + a c q + a^2 r, \end{aligned} \quad (3.9)$$

или в матричной форме

$$K = D P, \quad K = (k_0, k_1, k_2), \quad P = (p, q, r).$$

Поскольку определитель матрицы D отличен от нуля, т. е.

$$|D| = \begin{vmatrix} h^2 & b h & b^2 \\ 2 c h & a h + b c & 2 a b r \\ c^2 & a c & a^2 \end{vmatrix} = (a h - b c)^3 \neq 0, \quad (3.10)$$

то соотношение (3.9) можно представить в виде

$$P = D^{-1} K,$$

Следовательно, при любом наборе чисел a, b, c, h , удовлетворяющих условию (3.10), переход от уравнения (3.1) к уравнению (3.8) или обратно от уравнения (3.8) к уравнению (3.1) осуществляется однозначно. Это обстоятельство позволяет определить коэффициенты k_0, k_1, k_2 так, чтобы они удовлетворяли условию

$$2 k_1^2 + k_0 k_2 = 0. \quad (3.11)$$

Заметим, что эта задача имеет бесконечно много решений. Имеет место теорема.

Теорема 3.2. Пусть (3.1) и (3.8) — алгебраические уравнения Риккати, связанные с дробно-линейным преобразованием (3.7). При преобразовании среди наборов чисел (a, b, c, h) существует хотя бы один набор такой, чтобы (3.8) было коэффициентно-сопряженным алгебраическим уравнением Риккати.

4. ПОСТРОЕНИЕ ЧАСТНЫХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА МАТРИЧНЫХ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ РИККАТИ

Рассмотрим матричное алгебраическое уравнение Риккати вида

$$\Theta = K_0 + K_1 Y + Y K_2 Y, \quad (4.1)$$

где Y — искомая матрица порядка $n \times n$, коэффициенты K_0, K_1, K_2 — постоянные матрицы порядка $n \times n$, причем K_1 и K_2 считаем неособенными, Θ — нулевая матрица порядка $n \times n$.

Теорема 4.1. Пусть коэффициенты уравнения (4.1) K_0, K_1, K_2 удовлетворяют условию

$$K_1^{-1} K_0 K_2 K_1^{-1} = -2E, \quad (4.2)$$

где K_1^{-1} — обратная матрица, E — единичная матрица. Если матрица X является решением линейного неоднородного матричного алгебраического уравнения

$$\Theta = K_0 + K_1 X, \quad \text{т. е.} \quad X = K_1^{-1} K_0, \quad (4.3)$$

а матрица U является нетривиальным частным решением нелинейного матричного алгебраического уравнения

$$\Theta = K_1 U + U K_2 U, \quad \text{т. е.} \quad U = -K_1 K_2^{-1}, \quad (4.4)$$

где K_2^{-1} — обратная матрица, то каждая из матриц

$$\text{а) } Y_1 = -X, \quad \text{б) } Y_2 = -U \quad (4.5)$$

является частным решением матричного алгебраического уравнения (4.1).

Доказательство. Докажем это непосредственной проверкой.

Случай а). Подставим матрицу $Y_1 = -X$ в уравнение (4.1) и получим равенство:

$$\Theta = K_0 + K_1(-X) + (-X)K_2(-X) = K_0 + K_1(-K_1^{-1}K_0) + K_1^{-1}K_0K_2K_1^{-1}K_0 = 2K_0 - 2K_0 = \Theta, \quad (4.6)$$

из которого следует первое утверждение теоремы.

Случай б). Подставим матрицу $Y_2 = -U$ в уравнение (4.1). Имеем равенство:

$$\begin{aligned} \Theta &= K_0 + K_1(-U) + (-U)K_2(-U) = K_0 + K_1(K_1K_2^{-1}) + (K_1K_2^{-1})K_2(K_1K_2^{-1}) = \\ &= K_0 - K_1K_1K_2^{-1} + K_1K_2^{-1}K_2K_1K_2^{-1} = K_0 + 2K_1K_1K_2^{-1}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Умножим это равенство слева на матрицу K_1^{-1} , а справа последовательно на K_2 и K_1^{-1} . Тогда с учетом условия (4.2) получим равенство

$$\Theta = K_1^{-1}K_0K_2K_1^{-1} + 2E = (-2E) + 2E = \Theta,$$

из которого следует второе утверждение теоремы. $\square$

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В заключение отметим, что разработан алгоритм построения частного решения скалярного уравнения Риккати с произвольными коэффициентами, согласно которому частное решение определяется по следующей схеме:

1. рассмотрим данное уравнение Риккати;
2. используя дробно-линейное преобразование, приводим его к коэффициентно-сопряженному уравнению;
3. находим частное решение коэффициентно-сопряженного уравнения;
4. согласно дробно-линейному преобразованию осуществляем обратный переход и находим частное решение исходного уравнения Риккати.

Разработанный метод построения частного решения уравнения Риккати может быть полезен для построения частных решений матричных уравнений Риккати, а также при решении прикладных задач естествознания и науки, связанных с уравнением Риккати.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Андреев Ю. А. Управление конечномерными линейными объектами. — М.: Наука, 1976.
2. Егоров А. И. Оптимальное управление тепловыми и диффузионными процессами. — М.: Наука, 1978.
3. Егоров А. И. Основы теории управления. — М.: Физматлит, 2004.
4. Егоров А. И. Уравнения Риккати. — М.: Солон-Пресс, 2017.
5. Егоров А. И. Обновленный курс обыкновенных дифференциальных уравнений: учебное пособие для вузов. — СПб.: Янус, 2022.
6. Егоров А. И. Properties of solutions to Volterra-type integro-differential equations // Lobachevskii J. Math. — 2023. — 44, № 10. — С. 1837–1848. — DOI: [10.1134/S1995080223100098](https://doi.org/10.1134/S1995080223100098).
7. Еругин Н. П. Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. — Минск: Наука и техника, 1972.
8. Керимбеков А. К. Нелинейное оптимальное управление линейными системами с распределенными параметрами // Дисс. докт. физ.-мат. наук. — Бишкек: Инст. математики НАН КР, 2003.
9. Ройтенберг Я. Я. Автоматическое управление. — М.: Наука, 1978.
10. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. — М.: Физматлит, 1958.
11. Сю Д., Мейер А. Современная теория автоматического управления и ее применение. — М.: Машиностроение, 1972.
12. Чаки Ф. Современная теория управления: нелинейные, оптимальные и адаптивные системы. — М.: Мир, 1975.
13. Чочиев Т. З. Об одном варианте исследования уравнения Риккати // В сб.: «Актуальные проблемы естественных и математических наук в России и зарубежом». — Новосибирск: ИЦРОН, 2015. — С. 10–13.
14. Rivera-Oliva E. Solving the Riccati equation // ArXiv. — 2025. — 2502.20688 [math-ph]. — DOI: [10.48550/arXiv.2502.20688](https://doi.org/10.48550/arXiv.2502.20688).

А. К. Керимбеков

Кыргызско-Российский Славянский университет, Бишкек, Кыргызстан

E-mail: ak17@rambler.ru, РИНЦ SPIN-код: 8307-7845, РИНЦ AuthorID: 866529, Scopus: 54383472500, ORCID: 0000-0002-7401-4312

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-63-74](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-63-74)

EDN: [TQPEXH](https://www.edn.ru/TQPEXH)

UDC 517.91

Research article

On one method for solving Riccati equations

A. K. Kerimbekov

Kyrgyz-Russian Slavic University, Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract. In this paper, we investigate the construction of particular solutions to scalar and matrix Riccati equations. We find a condition that ensures a relationship between particular solutions to the Riccati and Bernoulli equations, as well as to nonhomogeneous linear differential equations. We develop an algorithm for constructing a particular solution to scalar and matrix Riccati differential equations with variable coefficients, as well as scalar and matrix algebraic Riccati equations.

Keywords: Riccati differential equation, algebraic Riccati equation, coefficient-conjugate equation, Bernoulli equation.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: A. K. Kerimbekov, “On one method for solving Riccati equations,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. 72, No. 1, 63–74. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-63-74](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-63-74) EDN: [TQPEXH](https://www.edn.ru/TQPEXH)

REFERENCES

1. Yu. A. Andreev, *Upravlenie konechnomernymi lineynymi ob"ektami* [Control of Finite-Dimensional Linear Objects], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
2. A. I. Egorov, *Optimal'noe upravlenie teplovymi i diffuzionnymi protsessami* [Optimal Control of Thermal and Diffusion Processes], Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).
3. A. I. Egorov, *Osnovy teorii upravleniya* [Fundamentals of Control Theory], Fizmatlit, Moscow, 2004 (in Russian).
4. A. I. Egorov, *Uravneniya Rikcati* [Riccati Equations], Solon-Press, Moscow, 2017 (in Russian).
5. A. I. Egorov, *Obnovlennyy kurs obyknovennykh differentsial'nykh uravneniy: uchebnoe posobie dlya vuzov* [An Updated Course in Ordinary Differential Equations: a Textbook for Universities], Yanus, Saint Petersburg, 2022 (in Russian).
6. A. I. Egorov, “Properties of solutions to Volterra-type integro-differential equations,” *Lobachevskii J. Math.*, 2023, 44, No. 10, 1837–1848, DOI: [10.1134/S1995080223100098](https://doi.org/10.1134/S1995080223100098).
7. N. P. Erugin, *Kniga dlya chteniya po obshchemu kursu differentsial'nykh uravneniy* [A Book for Reading on the General Course of Differential Equations], Nauka i Tekhnika, Minsk, 1972 (in Russian).
8. A. K. Kerimbekov, “Nelineynoe optimal'noe upravlenie lineynymi sistemami s raspredelennymi parametrami” [Nonlinear optimal control of linear systems with distributed parameters], Doctoral Diss., Inst. Math. NAN KR, Bishkek, 2003 (in Russian).
9. Ya. Ya. Roytenberg, *Avtomaticheskoe upravlenie* [Automatic Control], Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).

10. V. V. Stepanov, *Kurs differentsial'nykh uravneniy* [Course in Differential Equations], Fizmatlit, Moscow, 1958 (in Russian).
11. J. C. Hsu and A. U. Meyer, *Sovremennaya teoriya avtomaticheskogo upravleniya i ee primeneniye* [Modern Control Principles and Applications], Mashinostroenie, Moscow, 1972 (Russian translation).
12. F. Csáki, *Sovremennaya teoriya upravleniya: nelineynye, optimal'nye i adaptivnye sistemy* [Modern Control Theories: Nonlinear, Optimal and Adaptive Systems], Mir, Moscow, 1975 (Russian translation).
13. T. Z. Chochiev, “Ob odnom variante issledovaniya uravneniya Rikkati” [On one variant of studying the Riccati equation], In: *Aktual'nye problemy estestvennykh i matematicheskikh nauk v Rossii i zarubezhom* [Current Issues in Natural and Mathematical Sciences in Russia and Abroad], ITsRON, Novosibirsk, 2015, pp. 10–13 (in Russian).
14. E. Rivera-Oliva, “Solving the Riccati equation,” *ArXiv*, 2025, 2502.20688 [math-ph], DOI: [10.48550/arXiv.2502.20688](https://doi.org/10.48550/arXiv.2502.20688).

A. K. Kerimbekov

Kyrgyz-Russian Slavic University, Bishkek, Kyrgyzstan

E-mail: ak17@rambler.ru, eLIBRARY SPIN-code: 8307-7845, eLIBRARY AuthorID: [866529](#),

Scopus: [54383472500](#), ORCID: [0000-0002-7401-4312](#)

ДВА ПОДХОДА К УСРЕДНЕНИЮ СТОХАСТИЧЕСКИХ ВОЗМУЩЕНИЙ ИНТЕГРИРУЕМЫХ СИСТЕМ

С. Б. Куксин

Université Paris Cité, Paris, France

Sorbonne Université, CNRS, IMJ-PRG, Paris, France

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

Аннотация. Обсуждаются два подхода к изучению поведения решений интегрируемых гамильтоновых систем в течение длительного времени и в течение бесконечного времени при малых стохастических возмущениях. Эти результаты сравниваются с результатами для детерминированных возмущений интегрируемых систем.

Ключевые слова: стохастические возмущения, интегрируемые системы, гамильтоновы системы, принцип усреднения, быстро-медленные системы, биркгофово-интегрируемые, винеровские процессы, невырожденность Аносова, координаты действие—угол, невырожденность Колмогорова.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Куксин С. Б. Два подхода к усреднению стохастических возмущений интегрируемых систем // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 75–84. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-75-84](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-75-84) EDN: [TTBTSA](https://www.edn.ru/TTBTSA)

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В симплектическом пространстве $(\mathbb{R}_{x,y}^{2n}, dx \wedge dy)$ рассмотрим интегрируемую по Биркхофу гамильтонову систему — ее гамильтониан H зависит только от действий $I_j = (x_j^2 + y_j^2)/2$. Вводя комплексные координаты $v_j = x_j + iy_j$, запишем эту систему в удобной комплексной форме:

$$\frac{\partial}{\partial t} v_k(t) = i \nabla_k H(I) v_k, \quad k = 1, \dots, n, \quad I = I(v), \quad v(t) \in \mathbb{C}^n. \quad (1.1)$$

Отметим, что $I_j = \frac{1}{2}|v_j|^2$, и что в $\mathbb{C}^n$ мы используем вещественное скалярное произведение $(v, w) \mapsto \Re \langle v, \bar{w} \rangle = \Re \sum v_j \bar{w}_j$. Изучение малых возмущений этой системы для больших значений времени, либо глобально в $\mathbb{R}^n$, либо локально вблизи равновесия, является классической задачей динамических систем, начиная с конца XVIII века¹. Существуют две основные задачи:

- А) возмущение представляет собой небольшое гладкое векторное поле;
- Б) возмущение представляет собой малое гамильтоново поле.

¹Другой классический вопрос — изучение решений возмущенных систем вблизи торов $\{v : I_k(v) = I_k^0 \neq 0, k = 1, \dots, n\}$, которые инвариантны для системы (1.1). Мы не будем его здесь рассматривать.

Мы рассмотрим третий случай, а затем сравним полученные результаты с тем, что известно для случаев А) и Б).

Рассмотрим ε -малое стохастическое возмущение интегрируемой системы (1.1). Во-первых, только для $0 \leq t \leq T\varepsilon^{-1}$:

$$\frac{\partial}{\partial t} v_k(t) = i\nabla_k H(I)v_k + \varepsilon P_k(v) + \sqrt{\varepsilon} \sum_{j=1}^{n_1} B_{kj}(v) \dot{\beta}_j^c(t), \quad v(0) = v^0, \quad (1.2)$$

где $k = 1, \dots, n$ и $\{\beta_j^c(t), 1 \leq j \leq n_1\}$ — стандартные независимые комплексные винеровские процессы, т. е. $\beta_j^c(t) = \beta_j^+(t) + i\beta_j^-(t)$, а $\beta_j^\pm(t)$ — стандартные независимые вещественные винеровские процессы. Удобно перейти к медленному времени $\tau = \varepsilon t$ и переписать приведенные выше уравнения следующим образом:

$$\dot{v}_k(\tau) = i\varepsilon^{-1} \nabla_k H(I)v_k + P_k(v) + \sum_{j=1}^{n_1} B_{kj}(v) \dot{\beta}_j^c(\tau), \quad k = 1, \dots, n, \quad (1.3)$$

$v(0) = v^0$. Здесь и ниже точка сверху обозначает $d/d\tau$, а $\{\beta_j^c(\tau)\}$ — это еще один набор стандартных независимых комплексных винеровских процессов. В векторной записи:

$$\dot{v}(\tau) = i\varepsilon^{-1} \text{diag}\{\nabla_k H(I)\}v + P(v) + B(v)\dot{\beta}^c(\tau), \quad v(0) = v^0, \quad (1.4)$$

где $v(\tau) \in \mathbb{C}^n$, $0 \leq \tau \leq T$, а дисперсия $B(v)$ — комплексная матрица размера $n \times n_1$. Решение этого уравнения будет обозначаться как $v^\varepsilon(\tau)$.

Мы накладываем на уравнение (1.4) следующие предположения:

A1) (Невырожденность по Аносову): Для п.в. $I \in \mathbb{R}^n$ компоненты вектора частот являются независимыми над целыми числами, т. е.

$$\text{если } s \in \mathbb{Z}^n \text{ и } \nabla H(I) \cdot s = 0, \text{ то } s = 0. \quad (1.5)$$

A2) Векторные функции $\nabla H(I)$, $P(v)$ и матричная функция $B(v)$ являются локально липшицевыми, с не более чем полиномиальным ростом на бесконечности.

A3) Уравнение (1.4) является корректно поставленным при $0 \leq \tau \leq T$, и в этом случае первые несколько моментов его решений равномерно ограничены по τ и ε .

A4) Шум в уравнении невырожден: ранг дисперсионной матрицы $B(v)$ равен n для всех v (следовательно, $n_1 \geq n$). Более того, для каждого v справедливо $B(v)B^*(v) \geq cE$, где $c > 0$, и B^* является эрмитово сопряженным с B .

Замечание 1.1. Предположение A1) (невырожденность по Аносову) выполняется, например, если ∇H — постоянная векторная функция с некоторыми компонентами λ_j , независимыми над целыми числами. Тогда невозмущенная система (1.1) является линейной:

$$\frac{\partial}{\partial t} v_k = i\lambda_k v_k, \quad k = 1, \dots, n. \quad (1.6)$$

Приведенные ниже теоремы применимы к этому случаю, но их более сильные версии можно найти в нашей предыдущей работе [6]. Результаты [6] применимы, когда матрица $B(v)$ в (1.4) вырождена, и их подходящие версии справедливы, если частоты $\{\lambda_j\}$ зависимы над целыми числами. Легко видеть, что A1) также выполняется, если H является C^2 -гладким и

$$\text{meas}\{I : \det d^2 H(I) = 0\} = 0$$

(условие невырожденности по Колмогорову).

Предположение A3) (априорные оценки) справедливо, например, если матрица $B(v)$ равномерно ограничена и

$$\Re\langle P(v), \bar{v} \rangle \leq C|v|^2 + C_1 \quad \forall v \in \mathbb{C}^n.$$

2. ПЕРВЫЙ ПОДХОД: БЫСТРО-МЕДЛЕННАЯ СИСТЕМА

Введем в $\mathbb{C}^n = \{v = (v_1, \dots, v_n)\}$ обычные координаты действие—угол (I, φ) , где $I = (I_1, \dots, I_n) \in \mathbb{R}_+^n$ и $\varphi = (\varphi_1, \dots, \varphi_n) \in \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / (2\pi\mathbb{Z})^n$:

$$I_j = \frac{1}{2}|v_j|^2, \quad \varphi_j = \arg v_j, \quad j = 1, \dots, n$$

(т. е. $v_j = \sqrt{2I_j} \exp i\varphi_j$). Тогда уравнение (1.4) можно переписать в этих координатах. Применив формулу Ито к $I_k(v^\varepsilon(\tau))$, где $v^\varepsilon(\tau)$ является решением уравнения (1.4), получим

$$\dot{I}_k^\varepsilon(\tau) = \Re(\bar{v}_k^\varepsilon P_k(v^\varepsilon)) + \sum_l |B_{kl}(v^\varepsilon)|^2 + \sum_{j=1}^{n_1} \Re(\bar{v}_k^\varepsilon B_{kj}(v^\varepsilon)) \dot{\beta}_j(\tau), \quad (2.1)$$

где $k = 1, \dots, n$ и $\beta_1(\tau), \dots, \beta_{n_1}(\tau)$ — независимые стандартные вещественные винеровские процессы. (Напомним, что в $\mathbb{C}$ мы используем вещественное скалярное произведение $(z_1, z_2) \mapsto \Re(z_1, \bar{z}_2)$). Переобозначая члены этих уравнений и используя векторную запись, запишем систему (2.1) в векторной форме:

$$\dot{I}^\varepsilon(\tau) = F(v^\varepsilon) + G(v^\varepsilon) \dot{\beta}(\tau), \quad I^\varepsilon(0) = I^0 := I(v^0), \quad (2.2)$$

где $0 \leq \tau \leq T$. Применяя формулу к углам $\varphi_k(v^\varepsilon(\tau))$, получаем φ -уравнения:

$$\dot{\varphi}_k^\varepsilon(\tau) = \varepsilon^{-1} \nabla_k H(I^\varepsilon) + \Phi_k(v^\varepsilon) + 2\Re \sum_{j=1}^{n_1} \frac{\partial \varphi_k}{\partial v_k} B_{kj}(v^\varepsilon) \dot{\beta}_j^c(\tau), \quad 1 \leq k \leq n,$$

где

$$\Phi_k = 2\Re \left[\frac{\partial \varphi_k}{\partial v_k} P_k + \sum_{k,l} B_{kl} \bar{B}_{kl} \frac{\partial}{\partial v_k} \frac{\partial}{\partial \bar{v}_k} \varphi_k \right].$$

Напомним, что для $z = x + iy$, $\partial/\partial z = \frac{1}{2}(\partial/\partial x + i\partial/\partial y)$, $\partial/\partial \bar{z} = \frac{1}{2}(\partial/\partial x - i\partial/\partial y)$, и подчеркнем, что для каждого r уравнение для φ_r имеет сильную сингулярность, когда I_r обращается в нуль. Вычисления, приводящие к φ -уравнениям, являются простыми, но утомительным, и проще получить их с помощью формулы Ито в комплексных переменных, см. [6, Приложение С].

Имеем *быстро-медленную систему*, где действия I_k^ε являются *медленными переменными*, а углы φ_k^ε — *быстрыми переменными*. Как обычно, нас больше всего интересуют действия. Логика усреднения предполагает, что их предельное поведение при $\varepsilon \rightarrow 0$ можно описать усреднением по углам φ медленной системы (2.2).

Соответственно, усредним (2.2) по быстрым переменным φ , используя правила стохастического усреднения:

$$\dot{I}(\tau) = \langle\langle F \rangle\rangle(I) + \langle\langle G \rangle\rangle(I) \dot{\beta}(\tau), \quad I(0) = I^0, \quad I(\tau) \in \mathbb{R}_+^n. \quad (2.3)$$

Здесь векторное поле $\langle\langle F \rangle\rangle(I)$ представляет собой усреднение по φ поля F , записанное как $F(I, \varphi)$. Заметив, что в силу предположения A1) для п.в. I траектории $t \mapsto \varphi^0 + t\varepsilon^{-1} \nabla H(I)$, $\varphi^0 \in \mathbb{T}^n$, плотны в $\mathbb{T}^n$, получим, что усреднение $F(I, \varphi)$ по φ — это усреднение по $\varphi \in \mathbb{T}^n$ относительно меры Лебега (более подробно см. в [7]), т. е.

$$\langle\langle F \rangle\rangle(I) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} F(I, \varphi) d\varphi. \quad (2.4)$$

Поскольку $v_j = r_j e^{i\varphi_j}$, где $r_j = \sqrt{2I_j}$, и F локально липшицева по v , то $\langle\langle F \rangle\rangle$ является локально липшицевой векторной функцией $r = (r_1, \dots, r_n)$. Таким образом, эта функция $1/2$ -гельдерова по I . Вещественная матрица $\langle\langle G \rangle\rangle(I)$ размера $n \times n$ определяется аналогичным, но более сложным способом. А именно, $\langle\langle G \rangle\rangle(I)$ является главным квадратным корнем из неотрицательной вещественной симметричной матрицы $S(I)$, где

$$S_{kj}(I) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \sum_l \Re(v_k \bar{B}_{kl}(v) v_j B_{lj}(v)) d\varphi$$

(как указано выше, каждое v_k следует выражать через I_k и φ_k); см. [7] и приведенные там ссылки. Априори $\langle\langle G \rangle\rangle(I)$ является лишь $1/2$ -гельдеровой. Но легко видеть, что

$$\text{Если } B \text{ — постоянная матрица, то } \langle\langle G \rangle\rangle = \text{diag} (b_k \sqrt{2I_k}), \quad (2.5)$$

где все b_k — положительные числа.

Частичное описание предельной динамики действий в уравнении (1.4) при $\varepsilon \rightarrow 0$ дается следующим результатом (доказательство см. в [7, раздел 6], а аналогичное утверждение см. в [4]).

Теорема 2.1. *Совокупность кривых действий $I^\varepsilon(\tau)$ ($0 \leq \tau \leq T$) решений $v^\varepsilon(\tau)$ для (1.4) с $0 < \varepsilon \leq 1$ является предкомпактной в пространстве кривых в смысле распределения.*

- 1) *Каждый предельный (в смысле распределения) случайный процесс $I^0(\tau)$ является слабым решением усредненного уравнения (2.3).*
- 2) *Уравнение (2.3) всегда имеет по крайней мере одно решение $I^0(\tau)$. Если такое решение единственно, то $I^\varepsilon(\tau)$ сходится к $I^0(\tau)$ в смысле распределения при $\varepsilon \rightarrow 0$.*

Напомним, что в (2.3) $\langle\langle F \rangle\rangle$ и $\langle\langle G \rangle\rangle$ являются $1/2$ -гельдеровыми функциями по I , поэтому нет оснований полагать, что это уравнение имеет только одно решение. В связи с этим мы имеем следующие результаты (см. [7]):

- i) Результат Уитни [9] подразумевает, что если коэффициенты уравнения (1.4) являются C^2 -гладкими, то $\langle\langle F \rangle\rangle(I)$ является C^1 -гладкой, и $\langle\langle G \rangle\rangle(I) = \sqrt{S(I)}$, где матрица $S(I)$ является C^1 -гладкой, самосопряженной и неотрицательной, и $\det S(I) = 0$, если некоторое I_j равно нулю. Это лучше, чем раньше, но все еще $\langle\langle G \rangle\rangle(I)$ имеет $\sqrt{I_j}$ -сингулярность при $I_j = 0$, и неясно, являются ли решения подобных уравнений единственными.
- ii) Пусть в (1.4) дисперсионная матрица B постоянна. Тогда в силу (2.5) шум в (2.3) задается (непостоянной) диагональной матрицей, которая имеет сингулярности в виде квадратного корня, когда некоторое I_j обращается в нуль. В этом случае результат статьи [11] подразумевает, что уравнение (2.3) имеет единственное решение. Таким образом, применяется пункт 2) теоремы 2.1, и (2.3) описывает предельное поведение действий решений $v^\varepsilon(\tau)$ при $0 \leq \tau \leq T$. Но что происходит, если матрица $B(v)$ не является постоянной? Тогда $\langle\langle G \rangle\rangle(I) = \sqrt{S(I)}$ имеет сложные $1/2$ -гельдеровы сингулярности, когда $I_j = 0$ для некоторого j . Для этого случая неизвестен результат о единственности. Напротив,
- iii) В статье [10] авторы приводят пример системы с $1/2$ -гельдеровой сингулярностью при $I_j = 0$, где решение не является единственным.

Замечание 2.2. В работе [2] рассматривается класс стохастических уравнений на единичном кубе $K^n \subset \mathbb{R}^n$ с подходящими граничными условиями на ∂K^n и со стохастическим членом $\sqrt{K(v)} d\beta(t)$, где $K(v)$ — гладкая неотрицательная симметричная матрица, которая может вырождаться для некоторого v . Используя методы мартингаловых решений, установлено, что уравнение имеет единственное слабое решение. Нам неизвестно, могут ли результаты [2] быть распространены на стохастические уравнения в $\mathbb{R}^n$ и на уравнения в $\mathbb{R}_+^n$ вида (2.3), и нам неизвестны публикации, связанные с этим вопросом.

Заключение. Уравнение (2.3) описывает предельную динамику действий решений $v^\varepsilon(\tau)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$ только если в (1.4) $P(v)$ является C^2 -гладким и B — постоянная матрица.

Что мы можем сделать в общем случае?

3. ВТОРОЙ ПОДХОД: ЭФФЕКТИВНОЕ УРАВНЕНИЕ

Вернемся к исходному уравнению (1.4). Напомним, что классическое усреднение Крылова—Боголюбова для малых возмущений линейных гамильтоновых систем в $\mathbb{R}^{2n}$ (см. [1]) выполняется непосредственно в $\mathbb{R}^{2n}$ без перехода к переменным действие—угол. Оно дает предельную динамику действий через некоторое *эффективное уравнение* в $\mathbb{R}^{2n}$, построенное с помощью *интеракционного представления*¹.

¹То есть некоторой неавтономной линейной замены переменных в $\mathbb{R}^{2n}$; см., напр., [5, 6].

Последнее не существует для нашего уравнения (1.4), где невозмущенное уравнение (1.1) является нелинейным. Тем не менее, руководствуясь принципами Крылова—Боголюбова, мы *предполагаем* подходящее эффективное уравнение. Оно получается из уравнения (1.4) следующим образом:

- отбрасывая первый член,
- соответствующим образом усредняя два других члена.

Таким образом, уравнение выглядит следующим образом:

$$\dot{a}(\tau) = \langle\langle P \rangle\rangle(a) + \langle\langle B \rangle\rangle(a) \dot{\beta}^c(\tau), \quad a(\tau) \in \mathbb{C}^n, \quad a(0) = v^0. \quad (3.1)$$

Для построения усредненных объектов $\langle\langle P \rangle\rangle(a)$ и $\langle\langle B \rangle\rangle(a)$ мы делаем следующее. Для любого $\omega \in \mathbb{T}^n$ оператор вращения

$$\Phi_\omega = \text{diag}(e^{i\omega_1}, \dots, e^{i\omega_n}) : \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n$$

преобразует векторное поле $P(a)$ в $\Phi_\omega \circ P(\Phi_{-\omega}a)$. Поле $\langle\langle P \rangle\rangle(a)$ определяется как усреднение последнего по $\omega \in \mathbb{T}^n$:

$$\langle\langle P \rangle\rangle(a) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} \Phi_\omega \circ P(\Phi_{-\omega}a) d\omega.$$

Далее мы определяем действие Φ_ω на матрицу дисперсии $B(a)$ уравнения (1.4) как $\Phi_\omega \circ B(\Phi_{-\omega}a)$. Соответствующая диффузия — это матрица $(\Phi_\omega \circ B(\Phi_{-\omega}a))(\Phi_\omega \circ B(\Phi_{-\omega}a))^*$ размера $n \times n$. Рассмотрим его усреднение в ω ,

$$A(a) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int_{\mathbb{T}^n} (\Phi_\omega \circ B(\Phi_{-\omega}a))(\Phi_\omega \circ B(\Phi_{-\omega}a))^* d\omega.$$

Это симметричная матрица размера $n \times n$, и из соотношения невырожденности A4) следует, что $A(a) \geq cE$ для всех a . Теперь мы положим $\langle\langle B \rangle\rangle(a)$ в (3.1) как главный квадратный корень из $A(a)$. Эта матрица имеет ту же гладкость, что и $B(a)$. Подробности см. в [7].

Теорема 3.1. *При заданных предположениях A1)–A4) эффективное уравнение (3.1) имеет единственное решение $a(\tau)$, которое наследует оценки из A3). При $\varepsilon \rightarrow 0$ действия $I^\varepsilon(\tau) = I(v^\varepsilon(\tau))$ решений для уравнения (1.4) с $0 \leq \tau \leq T$ сходятся по распределению к вектору действий $I(a(\tau))$. Кривая $I(a(\tau))$ удовлетворяет уравнению (2.3).*

Теперь, в дополнение к предположениям A1)–A4), предположим, что:

A5) Уравнение (1.4) корректно поставлено для $\tau \geq 0$, и первые несколько моментов его решений равномерно ограничены по ε и τ (это расширение предположения A3)).

Замечание 3.2. Предположение A5) выполняется, если $B(v)$ равномерно ограничено, а $P(v)$ коэрцитивно:

$$\Re \langle P(v), \bar{v} \rangle \leq -\alpha_1 |v| + \alpha_2, \quad \alpha_1 > 0. \quad (3.2)$$

(Это означает, что векторное поле P «содержит трение».)

Теорема 3.3. *Если выполняются предположения A1)–A5), то решение $a(\tau)$ эффективного уравнения (3.1) удовлетворяет оценкам в A3) равномерно по $\tau \geq 0$, и сходимости в теореме 3.1 также равномерна по времени τ .*

Доказательство этого результата в значительной степени использует тот факт, что поскольку первые моменты решений $a(\tau)$ ограничены равномерно по времени, а матрица $\langle\langle B \rangle\rangle(a)$ невырождена, то уравнение (3.1) является перемешивающим: в $\mathbb{C}^n$ существует мера такая, что для любого v^0 распределение решения $a(\tau)$ сходится к ней при $\tau \rightarrow \infty$, см. [7, раздел 10] и [6, раздел 7].

Напомним, что векторное поле $\tilde{P}$ в $\mathbb{C}^n$ является гамильтоновым с C^1 -гладким вещественным гамильтонианом h , если

$$\tilde{P}_k(v) = 2i \frac{\partial}{\partial \bar{v}_k} h(v), \quad k = 1, \dots, n. \quad (3.3)$$

Предположим, что в (1.4) $P(v) = P_1(v) + P_2(v)$, где поле P_2 является гамильтоновым.

Теорема 3.4. Если $P(v)$ соответствует приведенному выше условию, то эффективное уравнение может быть изменено путем удаления усреднения гамильтоновой части P_2 :

$$\dot{a}(\tau) = \langle \langle P_1 \rangle \rangle(a) + \langle \langle B \rangle \rangle(a) \dot{\beta}^c(\tau), \quad v^\varepsilon(0) = v^0. \quad (3.4)$$

То есть утверждения теорем 3.1 и 3.3 остаются верными, если для $a(\tau)$ взять решение уравнения (3.4).

В работе [5] этот результат установлен для возмущений линейных систем (1.6). Доказательство для решений (1.4) аналогично и дополнительно использует конструкцию из [7, раздел 8]. Заметим, что в подходе действие—угол из раздела 2 утверждение последней теоремы является тавтологией, поскольку усредненное уравнение (2.3) не изменится, если мы модифицируем векторное поле P в (1.4) добавлением гамильтониана $\tilde{P}$, как в (3.3), см. начало раздела 3 в работе [5].

4. ЛОКАЛЬНЫЕ ВЕРСИИ РЕЗУЛЬТАТОВ

Наше исходное предположение заключалось в том, что невозмущенная интегрируемая система может быть приведена к глобальной нормальной форме Биркхофа (1.1). Это ограничение. Теперь предположим, что нормальная форма Биркхофа справедлива только локально¹, для $v \in Q$, где Q — окрестность начала координат в $\mathbb{C}^n$ вида $\{v : |v_j| \leq C_j > 0, j = 1, \dots, n\}$. Рассмотрим то же возмущенное уравнение (1.4), что и раньше:

$$\dot{v}(\tau) = i\varepsilon^{-1} \text{diag}\{\nabla_k H(I)\}v + P(v) + B(v) \dot{\beta}^c(\tau), \quad v(0) = v^0 \in Q.$$

Тогда утверждения теорем 3.1 и 3.4 справедливы для $0 \leq \tau \leq \theta$, где θ — случайный момент времени, когда решение (1.4) выходит за пределы Q . Это случайная величина первого порядка (см. [7, раздел 9]):

$$\text{вероятность, что } \theta \leq \lambda \text{ ограничена } C\sqrt{\lambda}, \forall \lambda > 0.$$

5. ПРИЛОЖЕНИЯ

Более подробное обсуждение применения наших результатов к приведенным ниже уравнениям см. в [7].

5.1. Цепочки осцилляторов. Для невозмущенной интегрируемой системы (1.1) возьмем цепочку нелинейных осцилляторов:

$$\ddot{q}_k = -Q(q_k), \quad k = 1, \dots, n, \quad (5.1)$$

где потенциал Q — гладкая функция, выпуклая и нечетная. Предположим, что она является «хорошей» на бесконечности, а вблизи нуля

$$Q(q) = \alpha q + \beta q^3 + o(|q|^4), \quad \alpha, \beta > 0.$$

Тогда эта система является глобально интегрируемой и может быть записана в форме (1.1). Теоремы 3.1–3.4 применимы для изучения ее стохастических возмущений. Полученные таким образом результаты связаны с неравновесной статистической физикой.

5.2. Гамильтоновы системы с затуханием или возбуждением. Рассмотрим следующее уравнение в $\mathbb{C}^n$:

$$\dot{v}_k(\tau) = i\varepsilon^{-1} \nabla_k H(I(v))v_k + 2i \frac{\partial}{\partial \bar{v}_k} h(v) - \nu_k v_k + b_k \dot{\beta}_k^c(\tau), \quad 1 \leq k \leq n, \quad (5.2)$$

где $\nu_k > 0$ и $b_k \neq 0$ для всех k . Пусть $H, h \in C^2$, отображение частот $I \mapsto \nabla H(I)$ является невырожденным по Аносову, и выполняется² условие A5). Тогда выполнены предположения A1)–A5). Усреднение не изменяет векторное поле $\dot{v} = -\text{diag}\{\nu_k\}v$, поэтому ввиду теоремы 3.3 в качестве модифицированного эффективного уравнения можно взять систему

$$\dot{a}_k(\tau) = -\nu_k a_k + b_k \dot{\beta}_k^c(\tau), \quad 1 \leq k \leq n. \quad (5.3)$$

¹Этого можно достичь, используя теорему Вея, см. [3].

²В частности, условие A5) выполняется, если гамильтоново поле $i\nabla_{\bar{v}} h(v)$ удовлетворяет условию (3.2) с $\alpha_1 = 0$.

Для малых ε действия решений уравнения (5.3) аппроксимируют (по распределению) действия решений уравнения (5.2) равномерно во времени. Заметим, что уравнение (5.3) может быть проинтегрировано в явном виде. (Его решения представляют собой совокупности n независимых комплексных процессов Орнштейна—Уленбека.)

6. ОБСУЖДЕНИЕ

Сначала сравним приведенные выше результаты с результатами, полученными для неслучайных возмущений интегрируемых систем.

6.1. Гамильтоновы возмущения интегрируемых систем. Рассмотрим следующую детерминированно возмущенную интегрируемую систему, записанную в медленном времени τ :

$$\dot{v}_k(\tau) = i\varepsilon^{-1}\nabla_k H(I(v))v_k + 2i\frac{\partial}{\partial \bar{v}_k}h(v), \quad 1 \leq k \leq n, \quad v(0) = v^0. \quad (6.1)$$

Если H и h — аналитические вещественнозначные функции, то при условии крутизны гамильтониана H применяется теорема Нехорошева (см. [1]), если v^0 не находится слишком близко к множеству

$$X = \{v \in \mathbb{C}^n : I_k(v) = 0 \text{ для некоторого } k\}.$$

Теорема утверждает, что для времен $\tau \lesssim \exp \varepsilon^{-a}$, $a > 0$ действия решений уравнения (6.1) остаются ε^b -близкими ($b > 0$) к исходному вектору действия $I(v^0)$. Это означает, что в течение экспоненциально длительного времени гамильтонов член в уравнении (6.1) не влияет на динамику действий решений с точностью до $O(\varepsilon^b)$.

Теорема 3.3 выше рассматривает возмущения (1.4) интегрируемой части уравнения (6.1), и для любых начальных данных v^0 она позволяет равномерно управлять действиями решений для (1.4) во времени. Это выполняется, потому что возмущение в (1.4) содержит шум и трение (см. замечание 3.2), которые стабилизируют динамику. В частности, если мы добавим к каждому уравнению в (6.1) диссипацию $-\nu_k a_k$ и случайность $b_k \dot{\beta}_k(\tau)$, то окажется, что гамильтонов член вообще не влияет на динамику действий с точностью до $o(1)$.

Отметим, что в теореме 3.3 нам пришлось предположить, что невозмущенная система интегрируема во всем пространстве, тогда как для справедливости результата Нехорошева достаточно предположить ее интегрируемость только в некоторой открытой области, содержащей v^0 (и диффеоморфной $\mathbb{T}^n \times O$, где O — область в $\mathbb{R}^n$).

Теорема Нехорошева не позволяет брать начальные данные v^0 вблизи X , поскольку в ее доказательстве используются координаты действие—угол, которые сингулярны в X , тогда как теорема 3.3 в них не нуждается. Для некоторого класса возмущенных систем (6.1), Нидерман в [8] установил версию теоремы Нехорошева в окрестности начала координат, избегая координат действие—угол. Таким образом, его результат применим к решениям (6.1) с малыми v^0 . По-видимому, на момент написания не существует версии теоремы Нехорошева, справедливой для решений с начальными данными в X или вблизи него.

6.2. Произвольные возмущения интегрируемых систем. Теперь рассмотрим возмущенную систему

$$\dot{v}_k(\tau) = i\varepsilon^{-1}\nabla_k H(I(v))v_k + P_k(v), \quad 1 \leq k \leq n, \quad v(0) = v^0, \quad (6.2)$$

где H и P являются C^∞ -гладкими. Пусть H удовлетворяет условию невырожденности Бахтина (см. [1]), и v^0 — случайный вектор, $v^0 = v^0(\omega)$. Тогда по теореме Нейштадта—Бахтина для случайных параметров ω вне некоторого множества¹ малой меры $\lesssim \varepsilon^b$, $b > 0$, для $0 \leq \tau \leq T$ действия решений уравнения (6.2) остаются близкими к решениям усредненного уравнения для действий:

$$\dot{I}(\tau) = \langle\langle P \rangle\rangle(I), \quad I(0) = I^0,$$

где $\langle\langle P \rangle\rangle$ определяется так же, как в (2.4). Этот результат, очевидно, связан с нашей теоремой 3.1, с ее локальной версией, обсуждаемой в разделе 4, и с теоремой 3.3. Утверждение теоремы 3.3 значительно сильнее результата Нейштадта—Бахтина. Опять же, это происходит потому, что возмущенное уравнение (1.4), рассмотренное в теореме 3.3, стабилизируется шумом и трением (и потому, что теорема предполагает глобальные координаты Биркхофа).

¹В частности, начальные данные $v^0(\omega)$ должны избегать окрестности X .

6.3. Связанные результаты. Варианты результатов, представленных в разделах 3 и 4, доступны для некоторых классов стохастических возмущений линейных и интегрируемых дифференциальных уравнений в частных производных, см. ссылки в [6, 7]. Подход с использованием координат действие—угол, как в разделе 2, применительно к стохастическим дифференциальным уравнениям в частных производных может позволить получить для них первое утверждение теоремы 2.1. Однако установить, что соответствующее уравнение (2.3) имеет единственное решение (как требуется для справедливости второго утверждения теоремы), представляется невозможным.

Если невозмущенная интегрируемая система является линейной системой (1.6), то результаты разделов 3, 4 применимы к ее стохастическим возмущениям, если частоты $\{\lambda_k\}$ независимы над целыми числами. Однако подходящие версии этих результатов справедливы, если частоты представляют собой любые n ненулевых действительных числа, а матрица $B(v)$ в (1.4) является локально липшицевой комплексной матрицей размера $n \times n_1$, см. [5]. Подход с использованием координат действие—угол, по-видимому, неприменим в этом общем случае.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Arnold V. I., Kozlov V. V., Neishtadt A. I. Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics. — New York—Berlin—Heidelberg: Springer, 2006. — DOI: [10.1007/978-3-540-48926-9](https://doi.org/10.1007/978-3-540-48926-9).
2. Cerrai S., Clement Ph. Well-posedness of the martingale problem for some degenerate diffusion processes occurring in dynamics of populations // Bull. Sci. Math. — 2004. — 128. — С. 355–389. — DOI: [10.1016/j.bulsci.2004.03.004](https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2004.03.004).
3. Eliasson L. H. Normal forms for hamiltonian systems with Poisson commuting integrals — elliptic case // Comment. Math. Helv. — 1990. — 65. — С. 4–35. — DOI: [10.1007/BF02566590](https://doi.org/10.1007/BF02566590).
4. Freidlin M., Wentzell A. Averaging principle for stochastic perturbations of multifrequency systems // Stoch. Dyn. — 2003. — 3. — С. 393–408. — DOI: [10.1142/S0219493703000747](https://doi.org/10.1142/S0219493703000747).
5. Guo J., Kuksin S. B., Liu Z. On the averaging theorems for stochastic perturbations of conservative linear systems // ArXiv. — 2025. — 2504.04379 [math.DS]. — DOI: [10.48550/arXiv.2504.04379](https://doi.org/10.48550/arXiv.2504.04379).
6. Huang G., Kuksin S. B. Averaging and mixing for stochastic perturbations of linear conservative systems // Russ. Math. Surv. — 2023. — 78. — С. 3–52. — DOI: [10.4213/rm10081](https://doi.org/10.4213/rm10081).
7. Huang G., Kuksin S. B., Piatnitski A. Averaging for stochastic perturbations of integrable systems // J. Dyn. Differ. Equ. — 2025. — 37. — С. 1053–1105. — DOI: [10.1007/s10884-024-10405-3](https://doi.org/10.1007/s10884-024-10405-3).
8. Niederman L. Nonlinear stability around an elliptic equilibrium point in an Hamiltonian system // Nonlinearity. — 1998. — 11. — С. 1465–1479. — DOI: [10.1088/0951-7715/11/6/002](https://doi.org/10.1088/0951-7715/11/6/002).
9. Whitney H. Differentiable even functions, II // Duke Math. J. — 1943. — 10. — С. 159–160. — DOI: [10.1215/S0012-7094-43-01015-4](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-43-01015-4).
10. Watanabe S., Yamada T. On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations, II // J. Math. Kyoto Univ. — 1971. — 11. — С. 553–563. — DOI: [10.1215/kjm/1250523620](https://doi.org/10.1215/kjm/1250523620).
11. Yamada T., Watanabe S. On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations // J. Math. Kyoto Univ. — 1971. — 11. — С. 155–167. — DOI: [10.1215/kjm/1250523691](https://doi.org/10.1215/kjm/1250523691).

С. Б. Куksин

Université Paris Cité, Paris, France

Sorbonne Université, CNRS, IMJ-PRG, Paris, France

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия

E-mail: sergei.kuksin@imj-prg.fr, РИНЦ AuthorID: 3760, ResearcherID: AAC-3293-2022,

Scopus: 7003775978, ORCID: 0000-0003-2322-2821

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-75-84](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-75-84)
 EDN: TTBTC A

UDC 517.928.7:519.216
Research article

Two approaches to averaging stochastic perturbations of integrable systems

S. B. Kuksin

Université Paris Cité, Paris, France
Sorbonne Université, CNRS, IMJ-PRG, Paris, France
Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
RUDN University, Moscow, Russia
National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

Abstract. In this paper, we discuss two approaches to the study of the long-time behaviour and infinite-time behaviour of solutions for integrable hamiltonian systems under small stochastic perturbations. Then we compare these results with the results for deterministic perturbations of integrable systems.

Keywords: stochastic perturbations, integrable systems, Hamiltonian systems, averaging principle, fast-slow systems, Birkhoff-integrable Wiener processes, Anosov nondegeneracy, action-angle coordinates, Kolmogorov nondegeneracy.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: S. B. Kuksin, “Two approaches to averaging stochastic perturbations of integrable systems,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 1, 75–84. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-75-84](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-75-84) EDN: TTBTC A

REFERENCES

1. V. I. Arnold, V. V. Kozlov, and A. I. Neishtadt, *Mathematical Aspects of Classical and Celestial Mechanics*, Springer, New York—Berlin—Heidelberg, 2006, DOI: [10.1007/978-3-540-48926-9](https://doi.org/10.1007/978-3-540-48926-9).
2. S. Cerrai and Ph. Clement, “Well-posedness of the martingale problem for some degenerate diffusion processes occurring in dynamics of populations,” *Bull. Sci. Math.*, 2004, **128**, 355–389, DOI: [10.1016/j.bulsci.2004.03.004](https://doi.org/10.1016/j.bulsci.2004.03.004).
3. L. H. Eliasson, “Normal forms for hamiltonian systems with Poisson commuting integrals — elliptic case,” *Comment. Math. Helv.*, 1990, **65**, 4–35, DOI: [10.1007/BF02566590](https://doi.org/10.1007/BF02566590).
4. M. Freidlin and A. Wentzell, “Averaging principle for stochastic perturbations of multifrequency systems,” *Stoch. Dyn.*, 2003, **3**, 393–408, DOI: [10.1142/S0219493703000747](https://doi.org/10.1142/S0219493703000747).
5. J. Guo, S. B. Kuksin, and Z. Liu, “On the averaging theorems for stochastic perturbations of conservative linear systems,” *ArXiv*, 2025, 2504.04379 [math.DS], DOI: [10.48550/arXiv.2504.04379](https://doi.org/10.48550/arXiv.2504.04379).
6. G. Huang and S. B. Kuksin, “Averaging and mixing for stochastic perturbations of linear conservative systems,” *Russ. Math. Surv.*, 2023, **78**, 3–52, DOI: [10.4213/rm10081](https://doi.org/10.4213/rm10081).
7. G. Huang, S. B. Kuksin, and A. Piatnitski, “Averaging for stochastic perturbations of integrable systems,” *J. Dyn. Differ. Equ.*, 2025, **37**, 1053–1105, DOI: [10.1007/s10884-024-10405-3](https://doi.org/10.1007/s10884-024-10405-3).
8. L. Niederman, “Nonlinear stability around an elliptic equilibrium point in an Hamiltonian system,” *Nonlinearity*, 1998, **11**, 1465–1479, DOI: [10.1088/0951-7715/11/6/002](https://doi.org/10.1088/0951-7715/11/6/002).
9. H. Whitney, “Differentiable even functions, II,” *Duke Math. J.*, 1943, **10**, 159–160, DOI: [10.1215/S0012-7094-43-01015-4](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-43-01015-4).
10. S. Watanabe and T. Yamada, “On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations, II,” *J. Math. Kyoto Univ.*, 1971, **11**, 553–563, DOI: [10.1215/kjm/1250523620](https://doi.org/10.1215/kjm/1250523620).
11. T. Yamada and S. Watanabe, “On the uniqueness of solutions of stochastic differential equations,” *J. Math. Kyoto Univ.*, 1971, **11**, 155–167, DOI: [10.1215/kjm/1250523691](https://doi.org/10.1215/kjm/1250523691).

S. B. Kuksin
 Université Paris Cité, Paris, France

Sorbonne Université, CNRS, IMJ-PRG, Paris, France

Steklov Mathematical Institute of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

RUDN University, Moscow, Russia

National Research University Higher School of Economics, Moscow, Russia

E-mail: sergei.kuksin@imj-prg.fr, eLIBRARY AuthorID: [3760](#), ResearcherID: [AAC-3293-2022](#),
Scopus: [7003775978](#), ORCID: [0000-0003-2322-2821](#)

ПРИБЛИЖЕННАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ ПОЛУЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ С ПОМОЩЬЮ РЕГУЛЯРИЗАЦИИ ТИХОНОВА

С. КУМАР

Indira Gandhi National Tribal University, Amarkantak, India

Аннотация. В данной работе исследуется приближенная управляемость полулинейного уравнения теплопроводности с запаздыванием с использованием регуляризации Тихонова. Рассматриваемая задача в виде дифференциального уравнения в частных производных преобразуется в эквивалентное операторное уравнение. Были исследованы достаточные условия и проанализировано операторное уравнение, гарантирующее приближенную управляемость в соответствии с методом регуляризации Тихонова. Основной результат доказывает, что полулинейная система с запаздыванием является приближенно управляемой, если соответствующая линейная система без запаздывания также является приближенно управляемой. В заключение была установлена оценка погрешности для решения операторного уравнения, регуляризованного по Тихонову.

Ключевые слова: приближенная управляемость, полулинейное уравнение теплопроводности, запаздывание, тихоновская регуляризация, операторное уравнение, некорректная задача, оценка погрешности, C_0 -полугруппа.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Кумар С. Приближенная управляемость полулинейного уравнения теплопроводности с запаздыванием с помощью регуляризации Тихонова // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 85–93. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-85-93](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-85-93) EDN: TUYAYJ

1. ВВЕДЕНИЕ

Практический опыт показывает, что математические модели явлений реальной жизни в большинстве областей науки, техники и социальных наук часто оказываются некорректно поставленными. Это побудило математиков к разработке теории некорректно поставленных задач, и теперь эта теория играет значительную роль в различных областях исследований, таких как задачи обратной теплопроводности, уравнения диффузии с дробной производной по времени и т. д. Теория некорректно поставленных задач оснащена различными методами аппроксимации. Одним из наиболее известных методов является метод регуляризации Тихонова. В работах Катта и соавторов [12, 13, 19] был применен метод регуляризации Тихонова для вычисления управления в линейных и полулинейных системах. В работе Сингха и Дабаса [23] было получено регуляризованное управление с помощью регуляризации Тихонова для линейных систем второго порядка, которое затем было применено к соответствующей полулинейной системе.

Управляемость — это свойство системы изменять свое состояние, переходя из любого заданного начального состояния в желаемое. Она описывается в различных формах, среди которых приближенная управляемость является наиболее важной для математиков из-за широкого спектра ее применений. Поэтому существует длинный список работ математиков, посвященных изучению приближенной управляемости дифференциальных систем с запаздыванием [4, 6–9, 11, 14–16, 21, 22, 24–26]. В работе Дауэра и Махмудова [4] была рассмотрена приближенная и полная управляемость полулинейных функциональных дифференциальных систем в гильбертовых пространствах. В работе Сукаванама и Томара [25] была установлена приближенная управляемость с помощью условия на образ нелинейности и оператора управления. В работах Сукаванама и Тафессе [24], а также Вана [26] была получена приближенная управляемость полулинейных систем управления с запаздыванием. В работе Энрикеса и Прокопчика [8] была исследована управляемость и стабилизируемость изменяющейся во времени линейной абстрактной системы управления с распределенной задержкой в переменных состояния. В работе Чжона и Хвана [11] было доказано включение достижимых множеств линейной системы управления в полулинейные запаздывающие функциональные дифференциальные уравнения. В работах Сукаванама и его коллег [6, 7, 21, 22] была исследована приближенная и полная управляемость запаздывающих полулинейных систем как детерминированного, так и стохастического типов. В работе Кима и соавторов [14] была доказана приближенная управляемость полулинейной задачи управления с запаздыванием с использованием результатов о сюръективности. В работе Эрнандеса и соавторов [9] был рассмотрен общий класс абстрактных задач управления первого порядка с запаздыванием, зависящим от состояния. В работе Кумара [15] была установлена приближенная управляемость линейных и полулинейных систем управления с запаздыванием с помощью построения оператора Немыцкого и использования теоремы о неподвижной точке типа Роте.

Несколько математиков внесли вклад в исследование управляемости уравнения теплопроводности с запаздыванием и, в более общем смысле, параболического уравнения с запаздыванием. В работе Чжоу [27] показано, что если нелинейная функция равномерно ограничена, то полулинейное уравнение теплопроводности является приближенно управляемым для любого заданного конечного момента времени $T > 0$. В работе Фабра и соавторов [5] была изучена приближенная управляемость полулинейного уравнения теплопроводности в пространстве L^p , $1 \leq p < \infty$, в предположении, что нелинейность является глобально липшицевой с управлением из L^∞ в обоих случаях: внутреннего и граничного управления. В работе Карраско с соавторами [1, 2] были представлены результаты о приближенной управляемости полулинейных параболических уравнений с запаздыванием по переменной состояния. В работе Хуанга и соавторов [10] была установлена приближенная управляемость дробных полулинейных параболических уравнений с использованием теории полугрупп линейных операторов и теории неподвижной точки.

Основываясь на этом обзоре литературы, в данной работе изучена приближенная управляемость полулинейного уравнения теплопроводности с запаздыванием в ограниченной области. Новизна этой работы заключается в применении теории тихоновской регуляризации. Ограниченность нелинейности F заменяется более мягким условием на константу Липшица. Кроме того, для регуляризованного по Тихонову решения получена оценка погрешности в терминах управления. Статья организована следующим образом: раздел 2 является введением, раздел 3 описывает рассматриваемую систему, а раздел 4 представляет основные результаты.

2. ОПИСАНИЕ СИСТЕМЫ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geq 1$ — ограниченное множество, а $\partial\Omega$ обозначает его границу. Система, рассматриваемая в данной статье, — это полулинейное уравнение с запаздыванием для распространения тепла с граничным условием, заданная следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{\partial z(t, x)}{\partial t} = \Delta z(t, x) + \chi_V u(t, x) + f(t, z(t - \tau, x), u(t, x)), & (t, x) \in [0, T] \times \Omega, \\ z(t, x) = 0 & \text{на } (0, T) \times \partial\Omega, \\ z(s, x) = \eta(s, x), & (s, x) \in [-\tau, 0] \times \Omega, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $z: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$; Δ — оператор Лапласа; $u: [0, T] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — источник тепла; χ_V — характеристическая функция $V \subset \Omega$, $\tau > 0$; $\eta: [-\tau, 0] \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ — непрерывная функция, и $f: [0, T] \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ — нелинейная функция.

Идея состоит в том, чтобы преобразовать полулинейное уравнение теплопроводности с запаздыванием (2.1) в абстрактную функционально-дифференциальную систему, включающую определенные операторы. Для этого возьмем представления: $z(t, x) = [y(t)](x)$ так, что $y(t) = z(t, \cdot) \in L^2(\Omega)$ и $y \in L^2([0, T]; L^2(\Omega))$, $v(t) = u(t, \cdot) \in L^2(\Omega)$ и $F(t, y(t - \tau), v(t)) = f(t, z(t - \tau, \cdot), u(t, \cdot)) \in L^2(\Omega)$. Далее определим $Az = \Delta z$ с областью определения $D(A) = H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$. Этот оператор A порождает сильно непрерывную полугруппу $\{S(t)\}_{t \geq 0}$ на $L^2(\Omega)$ с $\|S(t)\| \leq M$ при некоторой константе $M > 0$ (см. [3, 17, 20]). Возьмем $B = \chi_V : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ — оператор на $V \subset \Omega$, который, очевидно, является ограниченным линейным оператором с нормой $\|B\|_o = 1$. Тогда полулинейное уравнение теплопроводности с запаздыванием (2.1) принимает абстрактную форму

$$\begin{cases} y'(t) = Ay(t) + Bv(t) + F(t, y(t - \tau), v(t)), & t > 0, \\ y(t) = \eta(t), & t \in [-\tau, 0]. \end{cases} \quad (2.2)$$

Предположение (A1). Нелинейная функция F измерима в $[0, T]$ и удовлетворяет условию Липшица в $\mathbb{R}^2$ для некоторой константы $L_f > 0$,

$$\|F(t, y_1, v_1) - F(t, y_2, v_2)\| \leq L_f(\|y_1 - y_2\| + \|v_1 - v_2\|) \quad \text{для любых } y_1, y_2 \in \mathbb{R}^p, \quad v_1, v_2 \in \mathbb{R}^p.$$

Существует единственное слабое решение уравнения (2.2) в условиях предположения (A1) (см. [9, 20]), заданное в форме

$$y(t) = \begin{cases} \eta(t), & t \leq 0, \\ S(t)\eta(0) + \int_0^t S(t-s)Bv(s)ds + \int_0^t S(t-s)F(s, y(s-\tau), v(s))ds, & t > 0. \end{cases} \quad (2.3)$$

3. ПРИБЛИЖЕННАЯ УПРАВЛЯЕМОСТЬ

В этом разделе рассматривается приближенная управляемость полулинейной абстрактной системы с задержкой (2.2). Методология основана на теории регуляризации Тихонова. Математическое обсуждение вдохновлено новаторскими работами Наира и соавторов [19], а также Сингха и Дабаса [23].

Определение 3.1. Система теплопроводности (2.2) называется *приближенно управляемой* на $[0, T]$, если для каждого начального состояния $\eta(0)$, желаемого состояния $\hat{y} \in L^2(\Omega)$ и $\varepsilon > 0$ существует управление $v \in L^2(\Omega)$ такое, что решение $y(t)$ удовлетворяет условию

$$y(0) = \eta(0) \quad \text{и} \quad \|y(T) - \hat{y}\| < \varepsilon.$$

Линейная система управления, связанная с (2.2), имеет вид

$$\begin{cases} p'(t) = Ap(t) + Bw(t), & t > 0, \\ p(0) = \eta(0), \end{cases} \quad (3.1)$$

а соответствующее слабое решение уравнения (3.1) имеет вид

$$p(t) = S(t)\eta(0) + \int_0^t S(t-s)Bw(s)ds. \quad (3.2)$$

Определим оператор управляемости $G : L^2([0, T]; L^2(\Omega)) \rightarrow L^2(\Omega)$ как

$$Gw = \int_0^T S(T-s)Bw(s)ds. \quad (3.3)$$

Сопряженный оператор $G^* : L^2(\Omega) \rightarrow L^2([0, T]; L^2(\Omega))$ с оператором G имеет вид

$$(G^*y)(t) = B^*S^*(T-t)y \quad \forall \quad t \in [0, T], \quad y \in L^2(\Omega). \quad (3.4)$$

Лемма 3.1 (см. [3]). *Линейная система управления (3.1) является приближенно управляемой на $[0, T]$ тогда и только тогда, когда выполняется одно из следующих условий:*

- (i) $\overline{R(G)} = L^2(\Omega)$, $R(G)$ обозначает образ оператора G ;
- (ii) $\ker(G^*) = \{0\}$;
- (iii) $\langle GG^*y, y \rangle > 0$, $y \neq 0$;
- (iv) $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} \alpha(GG^* + \alpha I)^{-1}y = 0$;
- (v) для всех $y \in L^2(\Omega)$ выполняется $Gv_\alpha = y - \alpha(GG^* + \alpha I)^{-1}y$, где $v_\alpha = G^*(GG^* + \alpha I)^{-1}y$.

Очевидно, семейство линейных операторов $\Gamma_\alpha : L^2(\Omega) \rightarrow L^2([0, T]; L^2(\Omega))$, определяемое как

$$\Gamma_\alpha y = G^*(GG^* + \alpha I)^{-1}y,$$

является приближенным правым обратным элементом к G , т. е. $\lim_{\alpha \rightarrow 0^+} G\Gamma_\alpha = I$.

Определение 3.2. Пусть $G : X \rightarrow Y$ — линейный оператор. Операторное уравнение $Gx = y$ называется *корректным*, если выполняются следующие условия:

- (i) G биективно, т. е. $\ker(G) = \{0\}$ и $\operatorname{ran}(G) = Y$;
- (ii) G^{-1} непрерывен, т. е. для всех $\varepsilon > 0$ и $y \in Y$ существует $\delta > 0$ такое, что если $\hat{y} \in Y$ так, что $\|y - \hat{y}\| < \delta$ и $x, \hat{x} \in X$ так, что $Gx = y$, $G\hat{x} = \hat{y}$, то $\|x - \hat{x}\| < \varepsilon$.

Лемма 3.2 (см. [18]). Пусть X и Y — гильбертовы пространства и $G \in \mathcal{L}(X, Y)$. Тогда для $\alpha > 0$ справедливо следующее:

- (i) $\|(GG^* + \alpha I)^{-1}\| = \|(G^*G + \alpha I)^{-1}\| \leq \frac{1}{\alpha}$;
- (ii) $\|G^*(GG^* + \alpha I)^{-1}\| = \|(G^*G + \alpha I)^{-1}G^*\| \leq \frac{1}{2\sqrt{\alpha}}$.

Пусть $\hat{y} \in L^2(\Omega)$ — целевое состояние. Рассмотрим операторное уравнение

$$Gw = \xi, \quad \text{где } \xi = \hat{y} - S(T)\eta(0). \quad (3.5)$$

Тогда нахождение $w \in L^2([0, T]; L^2(\Omega))$ для линейной системы управления (3.1), удовлетворяющей условию $p(T) = \hat{y}$, эквивалентно решению уравнения (3.5) относительно w .

Теорема 3.1 (Теорема Тихонова). При $\alpha > 0$ решение w_α операторного уравнения

$$(G^*G + \alpha I)w_\alpha = G^*\xi \quad (3.6)$$

минимизирует функционал $J_\alpha(w) = \|Gw - \xi\| + \alpha\|w\|^2$ и удовлетворяет

$$\|Gw_\alpha - \xi\| \rightarrow 0 \text{ при } \alpha \rightarrow 0^+. \quad (3.7)$$

Уравнение (3.6) дает регуляризованное управление $w_\alpha = (G^*G + \alpha I)^{-1}G^*\xi$, а слабое решение (3.2), соответствующее регуляризованному управлению w_α , имеет вид

$$p_\alpha(t) = S(t)\eta(0) + \int_0^t S(t-s)Bw_\alpha(s)ds \quad \Rightarrow \quad p_\alpha(T) = S(T)\eta(0) + Gw_\alpha.$$

Тогда

$$\|p_\alpha(T) - \hat{y}\| = \|S(T)\eta(0) + Gw_\alpha - \hat{y}\| = \|Gw_\alpha - \xi\| \rightarrow 0 \quad \text{при } \alpha \rightarrow 0^+ \quad (3.8)$$

ввиду (3.5) и (3.7). Это подтверждает приближенную управляемость линейной системы управления (3.1).

Для дальнейшего обсуждения введем следующие предположения:

Предположение (A2). $R(F) \subseteq R(B)$.

Предположение (A3). $L_F < 1$.

Лемма 3.3. Пусть выполняются предположения (A2) и (A3). Тогда операторное уравнение

$$Bv_\alpha(t) = Bw_\alpha(t) - F(t, p_\alpha(t - \tau), v_\alpha(t)) \quad (3.9)$$

существует и имеет решение v_α .

Доказательство. Рассмотрим последовательности

$$Bv_{\alpha,n}(t) = Bw_{\alpha}(t) - F(t, p_{\alpha}(t - \tau), v_{\alpha,n-1}(t)).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|v_{\alpha,n}(t) - v_{\alpha,n-1}(t)\| &= \|Bv_{\alpha,n}(t) - Bv_{\alpha,n-1}(t)\| \stackrel{(\text{при } B = \chi_V)}{=} \\ &= \|F(t, p_{\alpha}(t - \tau), v_{\alpha,n-1}(t)) - F(t, p_{\alpha}(t - \tau), v_{\alpha,n-2}(t))\| = \\ &\leq L_F \|v_{\alpha,n-1}(t) - v_{\alpha,n-2}(t)\| \leq \dots \leq (L_F)^{n-1} \|v_{\alpha,1}(t) - v_{\alpha,0}(t)\|. \end{aligned}$$

Поскольку $L_F < 1$, получим, что $\{v_{\alpha,n}(t)\}$ является последовательностью Коши в $L^2(\Omega)$ и, следовательно, сходится к некоторому $v_{\alpha}(t) \in L^2(\Omega)$. Это дает решение уравнения (3.9). $\square$

Теорема 3.2. Пусть выполняются предположения (A1)–(A3). Пусть линейная система управления (3.1) приближенно управляема на $[0, T]$. Тогда полулинейная система управления (2.2) приближенно управляема на $[0, T]$.

Доказательство. Поскольку линейная система управления приближенно управляема на $[0, T]$, то существует регуляризованное управление $w_{\alpha} \in L^2([0, T]; L^2(\Omega))$ такое, что $\|p_{\alpha}(T) - \hat{y}\| \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$. Из (3.2) следует, что

$$p_{\alpha}(t) = S(t)\eta(0) + \int_0^t S(t-s)Bw_{\alpha}(s)ds. \quad (3.10)$$

Цель состоит в том, чтобы найти регуляризованное управление $v_{\alpha} \in L^2([0, T]; L^2(\Omega))$ для полулинейной системы такое, что $\|y_{\alpha}(T) - \hat{y}\| \rightarrow 0$ при $\alpha \rightarrow 0$. Из (2.3) получаем

$$y_{\alpha}(t) = S(t)\eta(0) + \int_0^t S(t-s)Bv_{\alpha}(s)ds + \int_0^t S(t-s)F(s, y_{\alpha}(s - \tau), v_{\alpha}(s))ds, \quad t > 0. \quad (3.11)$$

Вычитая (3.10) из (3.11), с учетом (3.9) получаем

$$\begin{aligned} y_{\alpha}(t) - p_{\alpha}(t) &= \int_0^t S(t-s)[Bv_{\alpha}(s) - Bw_{\alpha}(s)]ds + \int_0^t S(t-s)F(s, y_{\alpha}(s - \tau), v_{\alpha}(s))ds = \\ &= \int_0^t S(t-s)[F(s, y_{\alpha}(s - \tau), v_{\alpha}(s)) - F(s, p_{\alpha}(s - \tau), v_{\alpha}(s))]ds. \end{aligned}$$

Затем,

$$\begin{aligned} \|y_{\alpha}(t) - p_{\alpha}(t)\| &\leq M \int_0^t \|F(s, y_{\alpha}(s - \tau), v_{\alpha}(s)) - F(s, p_{\alpha}(s - \tau), v_{\alpha}(s))\|ds \leq \\ &\leq ML_F \int_0^t \|y_{\alpha}(s - \tau) - p_{\alpha}(s - \tau)\|ds. \end{aligned}$$

Согласно неравенству Гронуолла, получаем

$$\|y_{\alpha}(t) - p_{\alpha}(t)\| \leq 0 \Rightarrow y_{\alpha}(t) \equiv p_{\alpha}(t).$$

Таким образом,

$$\|y_{\alpha}(T) - \hat{y}\| \leq \|y_{\alpha}(T) - p_{\alpha}(T)\| + \|p_{\alpha}(T) - \hat{y}\| \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad \alpha \rightarrow 0,$$

что завершает доказательство. $\square$

Теорема 3.3. Пусть уравнение

$$\xi = Gv + \int_0^T S(T-s)F(s, y(s-\tau), v(s))ds \quad (3.12)$$

имеет регуляризованное по Тихонову решение v_α . Если для данного $\varepsilon > 0$ найдется $\xi^\varepsilon \in R(G)$ и $w^\varepsilon \in L^2([0, T]; L^2(\Omega))$ таково, что $Gw^\varepsilon = \xi^\varepsilon$ и $\|\xi - \xi^\varepsilon\| \leq \frac{\varepsilon}{2}$, т. е. ξ^ε является малым возмущением в ξ , то

$$\left\| \xi - Gv_\alpha - \int_0^T S(T-s)F(s, y_\alpha(s-\tau), v_\alpha(s))ds \right\| \leq \frac{\sqrt{\alpha}}{2} \|w^\varepsilon\|^2 + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (3.13)$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} & \left\| \xi - Gv_\alpha - \int_0^T S(T-s)F(s, y_\alpha(s-\tau), v_\alpha(s))ds \right\| = \\ & \stackrel{(\text{в силу (3.9)})}{=} \left\| \xi - Gw_\alpha + \int_0^T S(T-s)F(s, p_\alpha(s-\tau), v_\alpha(s))ds - \int_0^T S(T-s)F(s, y_\alpha(s-\tau), v_\alpha(s))ds \right\| \leq \\ & \leq \|\xi - Gw_\alpha\| + \int_0^T \|F(s, p_\alpha(s-\tau), v_\alpha(s)) - F(s, y_\alpha(s-\tau), v_\alpha(s))\| ds \leq \\ & \stackrel{(\text{в силу (3.9)})}{\leq} \|\xi - Gw_\alpha\| + ML_F \int_0^T \|p_\alpha(s-\tau) - y_\alpha(s-\tau)\| ds \leq \|\xi - Gw_\alpha\|. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Используя регуляризованное управление $w_\alpha = (G^*G + \alpha I)^{-1}G^*\xi$ и лемму 3.2, получаем

$$\begin{aligned} \|\xi - Gw_\alpha\| &= \|\xi - G(G^*G + \alpha I)^{-1}G^*\xi\| = \|(I - (GG^* + \alpha I)^{-1}GG^*)\xi\| = \\ &= \|\alpha(GG^* + \alpha I)^{-1}\xi\| = \|\alpha(GG^* + \alpha I)^{-1}(\xi^\varepsilon - \xi^\varepsilon + \xi)\| \leq \\ &\leq \|\alpha(GG^* + \alpha I)^{-1}\xi^\varepsilon\| + \|\alpha(GG^* + \alpha I)^{-1}(\xi^\varepsilon - \xi)\| \leq \\ &\leq \|\alpha(GG^* + \alpha I)^{-1}Gw^\varepsilon\| + \alpha\|(GG^* + \alpha I)^{-1}\|\|\xi^\varepsilon - \xi\| \leq \frac{\sqrt{\alpha}}{2}\|w^\varepsilon\| + \frac{\varepsilon}{2}. \end{aligned}$$

На этом доказательство завершено. $\square$

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе рассматривается одномерное полулинейное уравнение теплопроводности с запаздыванием и однородными граничными условиями. Приближенная управляемость его абстрактной формы устанавливается с помощью метода регуляризации Тихонова. Математическое обсуждение включает теорию сильно непрерывной полугруппы линейных операторов и глобальное условие Липшица нелинейности F . В результате используется условие включения области F в область B . Это более слабое условие, чем равномерная ограниченность F , что делает его менее применимым на практике. Однако проверка условия включения области в общем случае непростая. Поэтому поиск еще более простого достаточного условия является частью будущих исследований.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Carrasco A., Leiva H. Approximate controllability of a system of parabolic equations with delay // J. Math. Anal. Appl. — 2008. — 345, № 2. — С. 845–853. — DOI: [10.1016/j.jmaa.2008.04.068](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.04.068).
2. Carrasco A., Leiva H., Merentes N., Sanchez J.L. Controllability of semilinear systems of parabolic equations with delay on the state // Asian J. Control. — 2015. — 17, № 6. — С. 2105–2114. — DOI: [10.1002/asjc.1162](https://doi.org/10.1002/asjc.1162).

3. *Curtain R. F., Zwart H. J.* An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory. — New York: Springer, 1995. — DOI: [10.1007/978-1-4612-4224-6](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4224-6).
4. *Dauer J. P., Mahmudov N. I.* Approximate controllability of semilinear functional equations in Hilbert spaces // *J. Math. Anal. Appl.* — 2002. — 273. — С. 310–327. — DOI: [10.1016/S0022-247X\(02\)00225-1](https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00225-1).
5. *Fabre C., Puel J. P., Zuazua E.* Approximate controllability of the semilinear heat equation // *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.* — 1995. — 125, № 1. — С. 31–61. — DOI: [10.1017/S0308210500030742](https://doi.org/10.1017/S0308210500030742).
6. *Haq A., Sukavanam N.* Mild solution and approximate controllability of retarded semilinear systems with control delays and nonlocal conditions // *Numer. Funct. Anal. Optim.* — 2021. — 42, № 6. — С. 721–737. — DOI: [10.1080/01630563.2021.1928697](https://doi.org/10.1080/01630563.2021.1928697).
7. *Haq A., Sukavanam N.* Mild solution and approximate controllability of second-order retarded systems with control delays and nonlocal conditions // *Bull. Iran. Math. Soc.* — 2022. — 48, № 2. — С. 447–464. — DOI: [10.1007/s41980-021-00527-5](https://doi.org/10.1007/s41980-021-00527-5).
8. *Henríquez H. R., Prokopczyk A.* Controllability and stabilizability of linear time-varying distributed hereditary control systems // *Math. Methods Appl. Sci.* — 2015. — 38, № 11. — С. 214–224. — DOI: [10.1002/mma.3219](https://doi.org/10.1002/mma.3219).
9. *Hernandez E., Wu J., Chadha A.* Existence, uniqueness and approximate controllability of abstract differential equations with state-dependent delay // *J. Differ. Equ.* — 2020. — 269, № 10. — С. 8701–8735. — DOI: [10.1016/j.jde.2020.06.030](https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.06.030).
10. *Huang Y., Liu Z., Wen C.-F.* Approximate controllability for fractional semilinear parabolic equations // *Comput. Math. Appl.* — 2019. — 77, № 11. — С. 2971–2979. — DOI: [10.1016/j.camwa.2018.08.003](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.08.003).
11. *Jeong J. M., Hwang H. J.* Controllability for retarded semilinear integrodifferential control systems with unbounded operators // *IMA J. Math. Control Inform.* — 2017. — 34, № 3. — С. 1031–1043. — DOI: [10.1093/imamci/dnw027](https://doi.org/10.1093/imamci/dnw027).
12. *Katta R., Reddy G. D., Sukavanam N.* Computation of control for linear approximately controllable system using weighted Tikhonov regularization // *Appl. Math. Comput.* — 2018. — 317. — С. 252–263. — DOI: [10.1016/j.amc.2017.08.012](https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.08.012).
13. *Katta R., Sukavanam N.* Approximate controllability of semilinear control system with state delay using Tikhonov regularization // *J. Dyn. Control Syst.* — 2024. — 30, № 2. — С. 20. — DOI: [10.1007/s10883-024-09683-3](https://doi.org/10.1007/s10883-024-09683-3).
14. *Kim D., Jeong J. M., Cho S. H.* Approximate controllability for semilinear retarded control equations using surjectivity results // *Syst. Control Lett.* — 2019. — 131. — С. 104496. — DOI: [10.1016/j.sysconle.2019.104496](https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2019.104496).
15. *Kumar S.* Controllability of retarded semilinear systems with control delay // *Rend. Circ. Mat. Palermo (2).* — 2023. — 72, № 8. — С. 3801–3813. — DOI: [10.1007/s12215-023-00865-9](https://doi.org/10.1007/s12215-023-00865-9).
16. *Kumar S., Tomar N. K.* Mild solution and controllability of second-order non-local retarded semilinear systems // *IMA J. Math. Control Inform.* — 2020. — 37, № 1. — С. 39–49. — DOI: [10.1093/imamci/dny037](https://doi.org/10.1093/imamci/dny037).
17. *Leiva H.* Controllability of the semilinear heat equation with impulses and delay on the state // *Nonauton. Dyn. Syst.* — 2015. — 2. — С. 52–62. — DOI: [10.1515/msds-2015-0004](https://doi.org/10.1515/msds-2015-0004).
18. *Nair M. T.* Linear Operator Equations: Approximation and Regularization. — Hackensack: World Scientific, 2009. — DOI: [10.1142/7055](https://doi.org/10.1142/7055).
19. *Nair M. T., Sukavanam N., Katta R.* Computation of control for linear approximately controllable system using Tikhonov regularization // *Numer. Funct. Anal. Optim.* — 2018. — 39, № 3. — С. 308–321. — DOI: [10.1080/01630563.2017.1361440](https://doi.org/10.1080/01630563.2017.1361440).
20. *Pazy A.* Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations. — New York: Springer, 1983. — DOI: [10.1007/978-1-4612-5561-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1).
21. *Shukla A., Arora U., Sukavanam N.* Approximate controllability of retarded semilinear stochastic system with nonlocal conditions // *J. Appl. Math. Comput.* — 2015. — 49, № 1-2. — С. 513–527. — DOI: [10.1007/s12190-014-0851-9](https://doi.org/10.1007/s12190-014-0851-9).
22. *Shukla A., Sukavanam N., Pandey D. N.* Approximate controllability of semilinear system with state delay using sequence method // *J. Franklin Inst.* — 2015. — 352, № 11. — С. 5380–5392. — DOI: [10.1016/j.jfranklin.2015.08.019](https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2015.08.019).
23. *Singh S., Dabas J.* Tikhonov solutions of approximately controllable second-order semilinear control systems // *Rend. Circ. Mat. Palermo (2).* — 2023. — 72, № 4. — С. 2375–2387. — DOI: [10.1007/s12215-022-00802-2](https://doi.org/10.1007/s12215-022-00802-2).
24. *Sukavanam N., Tafesse S.* Approximate controllability of a delayed semilinear control system with growing nonlinear term // *Nonlinear Anal.* — 2011. — 74. — С. 6868–6875. — DOI: [10.1016/j.na.2011.07.009](https://doi.org/10.1016/j.na.2011.07.009).
25. *Sukavanam N., Tomar N. K.* Approximate controllability of semilinear delay control systems // *Nonlinear Funct. Anal. Appl.* — 2007. — 12, № 1. — С. 53–59.

26. Wang L. Approximate controllability of delayed semilinear control systems // J. Appl. Math. Stoch. Anal. — 2005. — 2005, № 1. — C. 67–76. — DOI: [10.1155/JAMSA.2005.67](https://doi.org/10.1155/JAMSA.2005.67).
27. Zhou H. X. A note on approximate controllability for semilinear one-dimensional heat equation // Appl. Math. Optim. — 1982. — 8, № 1. — C. 275–285. — DOI: [10.1007/BF01447763](https://doi.org/10.1007/BF01447763).

C. Kymap

Indira Gandhi National Tribal University, Amarkantak, India

E-mail: suman@igntu.ac.in, ResearcherID: [C-5056-2017](https://orcid.org/0000-0002-2736-1848), Scopus: [55500517400](https://orcid.org/0000-0002-2736-1848),

ORCID: [0000-0002-2736-1848](https://orcid.org/0000-0002-2736-1848)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-85-93](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-85-93)

UDC 517.977:517.956.4:517.929

EDN: [TUYAYJ](https://edn.ru/TUYAYJ)

Research article

Approximate controllability of a semilinear delayed heat equation by Tikhonov regularization

S. Kumar

Indira Gandhi National Tribal University, Amarkantak, India

Abstract. In this work, we study approximate controllability of a semilinear heat equation with delay using the Tikhonov regularization. The considered problem for partial differential equation is transformed into an equivalent operator equation. We explore sufficient conditions and analyze the operator equation to guarantee the approximate controllability by means of Tikhonov regularization method. The main result proves that the semilinear delay system is approximately controllable if the corresponding linear nondelay system is approximately controllable. Finally, we establish an error estimate for the Tikhonov regularized solution of an operator equation.

Keywords: approximate controllability, semilinear heat equation, delay, Tikhonov regularization, operator equation, ill-posed problem, error estimate, C_0 -semigroup.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: S. Kumar, “Approximate controllability of a semilinear delayed heat equation by Tikhonov regularization,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 1, 85–93. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-85-93](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-85-93) EDN: [TUYAYJ](https://edn.ru/TUYAYJ)

REFERENCES

1. A. Carrasco and H. Leiva, “Approximate controllability of a system of parabolic equations with delay,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2008, **345**, No. 2, 845–853, DOI: [10.1016/j.jmaa.2008.04.068](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2008.04.068).
2. A. Carrasco, H. Leiva, N. Merentes, and J. L. Sanchez, “Controllability of semilinear systems of parabolic equations with delay on the state,” *Asian J. Control*, 2015, **17**, No. 6, 2105–2114, DOI: [10.1002/asjc.1162](https://doi.org/10.1002/asjc.1162).
3. R. F. Curtain and H. J. Zwart, *An Introduction to Infinite-Dimensional Linear Systems Theory*, Springer, New York, 1995, DOI: [10.1007/978-1-4612-4224-6](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-4224-6).
4. J. P. Dauer and N. I. Mahmudov, “Approximate controllability of semilinear functional equations in Hilbert spaces,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, **273**, 310–327, DOI: [10.1016/S0022-247X\(02\)00225-1](https://doi.org/10.1016/S0022-247X(02)00225-1).
5. C. Fabre, J. P. Puel, and E. Zuazua, “Approximate controllability of the semilinear heat equation,” *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 1995, **125**, No. 1, 31–61, DOI: [10.1017/S0308210500030742](https://doi.org/10.1017/S0308210500030742).



6. A. Haq and N. Sukavanam, “Mild solution and approximate controllability of retarded semilinear systems with control delays and nonlocal conditions,” *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 2021, **42**, No. 6, 721–737, DOI: [10.1080/01630563.2021.1928697](https://doi.org/10.1080/01630563.2021.1928697).
7. A. Haq and N. Sukavanam, “Mild solution and approximate controllability of second-order retarded systems with control delays and nonlocal conditions,” *Bull. Iran. Math. Soc.*, 2022, **48**, No. 2, 447–464, DOI: [10.1007/s41980-021-00527-5](https://doi.org/10.1007/s41980-021-00527-5).
8. H. R. Henríquez and A. Prokopczyk, “Controllability and stabilizability of linear time-varying distributed hereditary control systems,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2015, **38**, No. 11, 214–224, DOI: [10.1002/mma.3219](https://doi.org/10.1002/mma.3219).
9. E. Hernandez, J. Wu, and A. Chadha, “Existence, uniqueness and approximate controllability of abstract differential equations with state-dependent delay,” *J. Differ. Equ.*, 2020, **269**, No. 10, 8701–8735, DOI: [10.1016/j.jde.2020.06.030](https://doi.org/10.1016/j.jde.2020.06.030).
10. Y. Huang, Z. Liu, and C.-F. Wen, “Approximate controllability for fractional semilinear parabolic equations,” *Comput. Math. Appl.*, 2019, **77**, No. 11, 2971–2979, DOI: [10.1016/j.camwa.2018.08.003](https://doi.org/10.1016/j.camwa.2018.08.003).
11. J. M. Jeong and H. J. Hwang, “Controllability for retarded semilinear integrodifferential control systems with unbounded operators,” *IMA J. Math. Control Inform.*, 2017, **34**, No. 3, 1031–1043, DOI: [10.1093/imamci/dnw027](https://doi.org/10.1093/imamci/dnw027).
12. R. Katta, G. D. Reddy, and N. Sukavanam, “Computation of control for linear approximately controllable system using weighted Tikhonov regularization,” *Appl. Math. Comput.*, 2018, **317**, 252–263, DOI: [10.1016/j.amc.2017.08.012](https://doi.org/10.1016/j.amc.2017.08.012).
13. R. Katta and N. Sukavanam, “Approximate controllability of semilinear control system with state delay using Tikhonov regularization,” *J. Dyn. Control Syst.*, 2024, **30**, No. 2, 20, DOI: [10.1007/s10883-024-09683-3](https://doi.org/10.1007/s10883-024-09683-3).
14. D. Kim, J. M. Jeong, and S. H. Cho, “Approximate controllability for semilinear retarded control equations using surjectivity results,” *Syst. Control Lett.*, 2019, **131**, 104496, DOI: [10.1016/j.sysconle.2019.104496](https://doi.org/10.1016/j.sysconle.2019.104496).
15. S. Kumar, “Controllability of retarded semilinear systems with control delay,” *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, 2023, **72**, No. 8, 3801–3813, DOI: [10.1007/s12215-023-00865-9](https://doi.org/10.1007/s12215-023-00865-9).
16. S. Kumar and N. K. Tomar, “Mild solution and controllability of second-order non-local retarded semilinear systems,” *IMA J. Math. Control Inform.*, 2020, **37**, No. 1, 39–49, DOI: [10.1093/imamci/dny037](https://doi.org/10.1093/imamci/dny037).
17. H. Leiva, “Controllability of the semilinear heat equation with impulses and delay on the state,” *Nonauton. Dyn. Syst.*, 2015, **2**, 52–62, DOI: [10.1515/msds-2015-0004](https://doi.org/10.1515/msds-2015-0004).
18. M. T. Nair, *Linear Operator Equations: Approximation and Regularization*, World Scientific, Hackensack, 2009, DOI: [10.1142/7055](https://doi.org/10.1142/7055).
19. M. T. Nair, N. Sukavanam, and R. Katta, “Computation of control for linear approximately controllable system using Tikhonov regularization,” *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 2018, **39**, No. 3, 308–321, DOI: [10.1080/01630563.2017.1361440](https://doi.org/10.1080/01630563.2017.1361440).
20. A. Pazy, *Semigroups of Linear Operators and Applications to Partial Differential Equations*, Springer, New York, 1983, DOI: [10.1007/978-1-4612-5561-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5561-1).
21. A. Shukla, U. Arora, and N. Sukavanam, “Approximate controllability of retarded semilinear stochastic system with nonlocal conditions,” *J. Appl. Math. Comput.*, 2015, **49**, No. 1-2, 513–527, DOI: [10.1007/s12190-014-0851-9](https://doi.org/10.1007/s12190-014-0851-9).
22. A. Shukla, N. Sukavanam, and D. N. Pandey, “Approximate controllability of semilinear system with state delay using sequence method,” *J. Franklin Inst.*, 2015, **352**, No. 11, 5380–5392, DOI: [10.1016/j.jfranklin.2015.08.019](https://doi.org/10.1016/j.jfranklin.2015.08.019).
23. S. Singh and J. Dabas, “Tikhonov solutions of approximately controllable second-order semilinear control systems,” *Rend. Circ. Mat. Palermo (2)*, 2023, **72**, No. 4, 2375–2387, DOI: [10.1007/s12215-022-00802-2](https://doi.org/10.1007/s12215-022-00802-2).
24. N. Sukavanam and S. Tafesse, “Approximate controllability of a delayed semilinear control system with growing nonlinear term,” *Nonlinear Anal.*, 2011, **74**, 6868–6875, DOI: [10.1016/j.na.2011.07.009](https://doi.org/10.1016/j.na.2011.07.009).
25. N. Sukavanam and N. K. Tomar, “Approximate controllability of semilinear delay control systems,” *Nonlinear Funct. Anal. Appl.*, 2007, **12**, No. 1, 53–59.
26. L. Wang, “Approximate controllability of delayed semilinear control systems,” *J. Appl. Math. Stoch. Anal.*, 2005, **2005**, No. 1, 67–76, DOI: [10.1155/JAMSA.2005.67](https://doi.org/10.1155/JAMSA.2005.67).
27. H. X. Zhou, “A note on approximate controllability for semilinear one-dimensional heat equation,” *Appl. Math. Optim.*, 1982, **8**, No. 1, 275–285, DOI: [10.1007/BF01447763](https://doi.org/10.1007/BF01447763).

S. Kumar

Indira Gandhi National Tribal University, Amarkantak, India

E-mail: suman@igntu.ac.in, ResearcherID: [C-5056-2017](https://orcid.org/0000-0002-2736-1848), Scopus: [55500517400](https://orcid.org/0000-0002-2736-1848),

ORCID: [0000-0002-2736-1848](https://orcid.org/0000-0002-2736-1848)

ПРЕДСТАВЛЕНИЯ МОНОДРОМИИ СИСТЕМ ЖОРДАНА—ПОХГАММЕРА

В. П. ЛЕКСИН

Государственный социально-гуманитарный университет, Коломна, Россия

Аннотация. В работе рассматриваются представления Бурау групп кос и представления Гасснер групп крашенных кос и их реализация в виде представлений монодромии систем Жордана—Похгаммера с подходящими параметрами. Системы Жордана—Похгаммера являются системами типа Фукса, это показывает разрешимость проблемы Римана—Гильберта для представлений Бурау и Гасснер. Рассматривается распространение этого утверждения на обобщенные группы кос и их представления.

Ключевые слова: система Жордана—Похгаммера, представление Бурау, представление Гасснер, представление монодромии, проблема Римана—Гильберта.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Лексин В. П. Представления монодромии систем Жордана—Похгаммера // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 94–101. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-94-101](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-94-101) EDN: TYWNVТ

1. СИСТЕМЫ ЖОРДАНА—ПОХГАММЕРА

Линейная пфафхова система Жордана—Похгаммера [9], определяемая набором параметров $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$ имеет вид:

$$dy_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n (\beta_j y_i(z) - \beta_i y_j(z)) \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j}, \quad i = 1, \dots, n. \quad (1.1)$$

В работах [9, 12] показано, что система Жордана—Похгаммера является вполне интегрируемой пфаффовой системой в смысле Фробениуса. Это, в частности, означает, что система имеет линейное пространство решений размерности, равной порядку системы, т. е. размерности n .

2. РЕШЕНИЯ И ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТРИЦА РЕШЕНИЙ СИСТЕМЫ ЖОРДАНА—ПОХГАММЕРА

Теперь мы дадим описание фундаментальной матрицы решений системы Жордана—Похгаммера.

Пусть $y(z_1, \dots, z_n) = (y_1(z_1, \dots, z_n), \dots, y_n(z_1, \dots, z_n))$ — решение системы (1.1) с параметрами $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_n)$. Как показано в работах [9, 12], компоненты решения системы $y_i(z_1, \dots, z_n)$, $i = 1, \dots, n$ задаются интегралами гипергеометрического типа

$$y_i(z_1, \dots, z_n) = \beta_i \int_{\gamma} \frac{\Phi(t)}{t - z_i} dt,$$

где $\Phi(t) = \prod_{i=1}^n (t - z_i)^{\beta_i}$.

Подробнее опишем подынтегральное выражение. Рассмотрим проколотую комплексную плоскость $M = \mathbb{C} \setminus \{z_1, \dots, z_n\}$ в n точках и многозначную аналитическую функцию на ней $\Phi(t) = \prod_{j=1}^n (t - z_j)^{\beta_j}$, $t \in M$. Ветвление этой функции определяет представление фундаментальной группы $\rho_\Phi : \pi_1(M, t_0) \rightarrow \mathbb{C}^*$ в группу по умножению ненулевых комплексных чисел. Как хорошо известно, фундаментальная группа $\pi_1(M, t_0) = F_n$ изоморфна свободной группе F_n с n свободными образующими γ_j , $i = 1, \dots, n$. Представителями свободных образующих γ_j , $j = 1, \dots, n$ в свободной группе $\pi_1(M, t_0)$ можно выбрать так называемые «малые петли», каждая из которых выходит из одной и той же точки $t_0 \in M$, подходит в M к точке z_j , обходит ее против часовой стрелки по достаточно малой окружности и затем по начальному пути возвращается в точку t_0 . Все пути подхода к выколотым точкам можно выбрать непересекающимися друг с другом, кроме точки t_0 . Обозначим соответствующие малые петли и их классы в фундаментальной группе через γ_j . Представление ρ_Φ принимает на этих петлях значения

$$\rho_\Phi(\gamma_j) = e^{2\pi\sqrt{-1}\beta_j}, \quad 1 \leq j \leq n.$$

Рассмотрим многозначные аналитические 1-формы (дифференциалы)

$$\eta_i = \frac{\Phi(t)}{t - z_i} dt, \quad 1 \leq i \leq n.$$

Выберем такой элемент γ фундаментальной группы $\pi_1(M, t_0) = F_n$, представленный отображением окружности $\gamma : S^1 \rightarrow M$, чтобы дифференциальные 1-формы $\gamma^* \eta_i$, $1 \leq i \leq n$ были однозначными дифференциальными 1-формами на окружности. Отметим, что для этого достаточно, чтобы отображение γ представляло либо единичный элемент группы, либо элемент, представленный некоторым коммутатором малых петель $\gamma_i \gamma_j \gamma_i^{-1} \gamma_j^{-1}$ (петли Похгаммера или двойные петли [2]). Точнее, элемент берется из подгруппы фундаментальной группы $\pi_1(M, t_0)$, порожденной коммутаторами малых петель.

Теперь мы можем интегрировать эти однозначные 1-формы по окружности. Получим интегралы, зависящие как от параметров, так и от точек $z_1, \dots, z_n$ на комплексной плоскости $I_i(z_1, \dots, z_n) = \int_{S^1} \gamma^* \eta_i$. По определению, положим $\int_\gamma \eta_i = \int_{S^1} \gamma^* \eta_i$. Такой подход к интегрированию многозначных дифференциалов (вместо использования гомологий и когомологий с коэффициентами в локальных системах и их спаривания) использовался в лекциях А. Варченко [15]. Из коммутаторов малых петель можно набрать базис $([\gamma_1], \dots, [\gamma_n])$ в группе гомологий свободной группы $H_1(F_n = \pi_1(M, t_0), \mathbb{Z})$.

Теперь сформулируем теорему, в утверждении которой дано описание интегрального представления компонент решений системы Жордана—Похгаммера и ее фундаментальной матрицы решений.

Теорема 2.1. Вектор-функция $y_\gamma(z) = (y_1(z), \dots, y_n(z))$, в которой компоненты $y_i(z)$ задаются интегралами гипергеометрического типа

$$y_i(z_1, \dots, z_n) = \beta_i \int_\gamma \frac{\Phi(t)}{t - z_i} dt,$$

где γ — это некоторая петля Похгаммера, является решением системы Жордана—Похгаммера

$$dy_i = \sum_{j=1, j \neq i}^n (\beta_j y_i(z) - \beta_i y_j(z)) \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j}, \quad i = 1, \dots, n.$$

Матрица $Y(z) = (y_{ij}(z))_{(i,j=1,\dots,n)}$, $z \in \mathbb{C}^n$, где $y_{ij}(z) = \beta_i \int_{\gamma_j} \frac{\Phi(t)}{t - z_i} dt$, является фундаментальной матрицей решений системы (1.1).

Доказательство теоремы 2.1 можно найти в работах [6, 9, 12].

3. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ МОНОДРОМИИ СИСТЕМЫ ЖОРДАНА—ПОХГАММЕРА

Система Жордана—Похгаммера не имеет особых точек в дополнении к объединению диагональных гиперплоскостей $\mathbb{C}_*^n = \mathbb{C}^n \setminus H$, где $H = \bigcup_{i,j=1}^n \{z_i = z_j\}$. Возьмем неособую точку $z_0 \in \mathbb{C}_*^n$ и петлю γ с началом и концом в z_0 . Аналитическое продолжение $Y_\gamma(z)$ вдоль петли γ фундаментальной матрицы решений $Y(z)$, рассматриваемой в малой окрестности точки z_0 , в силу интегрируемости системы Жордана—Похгаммера приводит к равенству $Y_\gamma(z) = Y(z)G(\gamma)$, где $G(\gamma)$ — невырожденная постоянная матрица, зависящая лишь от гомотопического класса петли γ . Сопоставление каждому гомотопическому классу петли γ матрицы $G^{-1}(\gamma) = G(\gamma^{-1})$ определяет представление фундаментальной группы

$$\rho : \pi_1(\mathbb{C}_*^n, z_0) \rightarrow GL(n, \mathbb{C}),$$

которое называется *представлением монодромии* системы Жордана—Похгаммера (1.1).

Пусть ρ — произвольное алгебраически определенное (например, значениями на образующих) представление фундаментальной группы дополнения $\mathbb{C}^n \setminus D$, где D — комплексное многообразие коразмерности один, и это представление реализуется как представление монодромии интегрируемой мероморфной пфаффовоу системы, форма которой представлена логарифмическими формами, т. е. формами, являющимися линейными комбинациями форм вида $\frac{d\varphi}{\varphi}$, где φ — голоморфная функция, равная нулю на D . В этом случае говорят, что для представления ρ разрешима *многомерная проблема Римана—Гильберта* [1, 5] (многомерная при $n \geq 2$, а для $n = 1$ слово «многомерная» надо опустить).

4. ТОПОЛОГИЯ ДОПОЛНЕНИЯ КОМПЛЕКСНОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОСТРАНСТВА К ОБЪЕДИНЕНИЮ ДИАГОНАЛЬНЫХ ГИПЕРПЛОСКОСТЕЙ

Указанное в заглавии раздела дополнение (обозначенное ранее как $\mathbb{C}_*^n$) имеет нетривиальную фундаментальную группу, изоморфную группе крашенных кос P_n с образующими A_{ij} , представленными обходами по малым петлям диагональных гиперплоскостей и явно указанным ниже набором соотношений. Все гомотопические группы более высокого порядка равны нулю, т. е. пространство $\mathbb{C}_*^n$ является пространством Эйлеберга—Маклейна типа $K(\pi, 1)$, где группа $\pi = P_n$ изоморфна группе крашенных кос P_n с названными выше образующими A_{ij} , $i \neq j$, $i, j = 1, \dots, n$ и соотношениями

$$A_{rs}A_{ij}A_{rs}^{-1} = \begin{cases} A_{ij}, & \text{если } s < i \text{ или } i < r < s < j, \\ A_{rj}A_{ij}A_{rj}^{-1}, & \text{если } s = i, \\ A_{rj}A_{sj}A_{ij}A_{sj}^{-1}A_{rj}^{-1}, & \text{если } i = r < s < j, \\ A_{rj}A_{sj}A_{rj}^{-1}A_{sj}^{-1}A_{ij}A_{sj}A_{rj}A_{sj}^{-1}A_{rj}^{-1}, & \text{если } r < i < s < j. \end{cases}$$

Алгебра когомологий пространства $\mathbb{C}_*^n$ над полем комплексных чисел вычислена В. И. Арнольдом, и она изоморфна алгебре дифференциальных форм, порожденной логарифмическими формами $\omega_{ij} = \frac{d(z_i - z_j)}{z_i - z_j}$, $i \neq j$, с соотношениями Арнольда для каждой тройки индексов i, j, k

$$\omega_{ij} \wedge \omega_{ik} + \omega_{ik} \wedge \omega_{jk} + \omega_{kj} \wedge \omega_{ij} = 0.$$

Профакторизуем комплексное линейное пространство $\mathbb{C}^n = \{(z_1, \dots, z_n) \mid z_i \in \mathbb{C}, i = 1, \dots, n\}$ по группе перестановок S_n , действующей перестановками координат. Результатом факторизации всего пространства $\mathbb{C}^n$ будет, в силу теоремы Шевалле, также $\mathbb{C}^n$. Обозначим через D результат факторизации объединения диагональных гиперплоскостей. Тогда фундаментальная группа фактор-пространства $\mathbb{C}_*^n/S_n$ по указанному действию группы перестановок S_n изоморфна группе кос B_n с образующими σ_k , $k = 1, \dots, n - 1$ и соотношениями

$$\begin{aligned} \sigma_k \sigma_{k+1} \sigma_k &= \sigma_{k+1} \sigma_k \sigma_{k+1}, & k &= 1, \dots, n - 2, \\ \sigma_k \sigma_\ell &= \sigma_\ell \sigma_k, & |k - \ell| &\geq 2. \end{aligned} \tag{4.1}$$

Описанная факторизация определяет длинную точную последовательность гомотопических групп, нетривиальная часть которой есть последовательность с участием группы крашенных

кос P_n , группы кос B_n , группы подстановок S_n и тривиальной единичной группы 1

$$1 \rightarrow P_n \rightarrow B_n \rightarrow S_n \rightarrow 1.$$

Группа крашенных кос P_n является подгруппой группы кос B_n , и образующие A_{ij} , $i < j$, группы крашенных кос выражаются через образующие группы кос B_n следующим образом:

$$A_{ij} = \sigma_{j-1}\sigma_{j-2}\dots\sigma_{i+1}\sigma_i^2\sigma_{i+1}^{-1}\dots\sigma_{j-2}^{-1}\sigma_{j-1}^{-1}.$$

5. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ БУРАУ ГРУППЫ КОС

Представление Бурату группы кос B_n определяется чисто алгебраически — сопоставлением стандартным образующим σ_k , $k = 1, \dots, n-1$ группы кос B_n следующих обратимых матриц над кольцом многочленов Лорана от одной переменной:

$$M_k = \rho_B(\sigma_k) = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-T & T & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-k-1} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Легко проверить, что указанные матрицы удовлетворяют соотношениям группы кос (4.1):

$$\begin{aligned} M_k M_{k+1} M_k &= M_{k+1} M_k M_{k+1}; \\ M_k M_l &= M_l M_k. \end{aligned}$$

Таким образом, ρ_B определяет представление группы кос

$$\rho_B : B_n \rightarrow GL_n(\mathbb{Z}[T, T^{-1}])$$

в группу обратимых матриц порядка n над кольцом многочленов Лорана от одной переменной.

Ограничение представления Бурату на подгруппу крашенных кос задает представление последней, которое мы обозначим ρ_P .

6. ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ГАССНЕР ГРУППЫ КРАШЕННЫХ КОС

Представление Гасснер [7] ρ_G является представлением группы крашенных кос P_n в группу обратимых матриц над кольцом полиномов Лорана от n переменных

$$\rho_G : P_n \rightarrow GL_n(T_1^\pm, \dots, T_n^\pm).$$

Это представление есть обобщение ограничения представления Бурату ρ_P на группу крашенных кос, и они строятся по одной алгебраической схеме. Но если представление Бурату продолжается до представления ρ_B всей группы кос B_n , то для представления Гасснер продолжение в общем случае отсутствует. Выше указано, как образующие A_{ij} группы крашенных кос выражаются через стандартные образующие σ_k группы кос, и потому представление Гасснер также можно задать как мультипликативное отображение в обратимые матрицы на косах σ_i , и затем проверяется, что соотношения группы крашенных кос для полученных матриц $\rho_G(A_{ij})$ выполняются. Итак, мы определим значения на образующих σ_k следующим равенствами:

$$M_k = \rho_G(\sigma_k) = \begin{pmatrix} I_{k-1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1-T_k & T_k & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{n-k-1} \end{pmatrix}, \quad k = 1, \dots, n-1.$$

Однако часть соотношений группы кос B_n , а именно $M_k M_{k+1} M_k = M_{k+1} M_k M_{k+1}$, $k = 1, \dots, n-2$, выполняются только тогда, когда все переменные $T_1 = T_2 = \dots = T_{n-1}$ равны между собой, и мы получаем представление Бурату. Но если вычислить матрицы, соответствующие образующим A_{ij} , используя точное представление группы кос B_n в группу автоморфизмов свободной группы с n образующими, то, как показала Бетти Джейн Гасснер [7], соотношения группы крашенных кос выполняются, и возникает матричное представление группы крашенных

кос, названное именем Гасснер. В книге З. Морана [13] и в работе К. Кнудсена [10] указаны матрицы, соответствующие образующим A_{ij} в представлении Гасснер

$$\rho_G(A_{rs}) = \begin{pmatrix} I_{r-1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 - T_r + T_r T_s & 0 & (1 - T_r)T_r & 0 \\ 0 & \bar{u} & I_{r-s-1} & \bar{v} & 0 \\ 0 & 1 - t_s & 0 & t_r & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & I_{n-s} \end{pmatrix},$$

где векторы-столбцы $\bar{u}$, $\bar{v}$ имеют вид

$$\bar{u} = ((1 - T_{r+1})(1 - T_s), \dots, (1 - T_{s-1})(1 - T_s))^t,$$

$$\bar{v} = ((1 - T_r + 1)(T_r - 1), \dots, (1 - T_{s-1})(T_r - 1))^t,$$

где t обозначает транспонирование, а I_k обозначают единичные матрицы порядка $k = 1, 2, \dots, n$.

7. МОНОДРОМИЯ СИСТЕМЫ ЖОРДАНА—ПОХГАММЕРА С РАВНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Теорема 7.1. *Для представления Бурау разрешима проблема Римана—Гильберта.*

Системы Жордана—Похгаммера и некоторые фактор-системы, полученные из них, являются системами Пфаффа типа Фукса, которые участвуют в формулировке проблемы Римана—Гильберта [1, 5]. Поэтому доказательство разрешимости проблемы Римана—Гильберта можно осуществить вычислив представление монодромии некоторой системы Жордана—Похгаммера и показав, что оно совпадает или эквивалентно представлению Бурау. Это сделал Т. Коно в 1988 году для системы Жордана—Похгаммера (1.1), когда все параметры системы равны между собой: $\beta_1 = \beta_2 = \dots = \beta_n = \lambda$. Коно использовал инвариантность такой системы Жордана—Похгаммера относительно перестановок координат и компонент решения и показал, что система Жордана—Похгаммера опускается на фактор-пространство по указанному диагональному действию группы перестановок, и представление монодромии фактор-системы совпадает с представлением Бурау, когда в матрицах монодромии Бурау вместо формального параметра T используется комплексное число $e^{2\pi i \lambda}$. В рассматриваемом случае это является решением многомерной проблемы Римана—Гильберта, когда алгебраически заданное представление Бурау реализовано как представление монодромии интегрируемой системы с простыми полярными особенностями, а именно, фактор-система имеет полюса первого порядка на дивизоре особенностей.

8. МОНОДРОМИЯ СИСТЕМЫ ЖОРДАНА—ПОХГАММЕРА С ПРОИЗВОЛЬНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Теорема 8.1. *Для представления Гасснер разрешима проблема Римана—Гильберта.*

В случае представления Гасснер уже не требуется рассматривать фактор-системы, как для представления Бурау. Капович и Милсон, используя свободное дифференциальное исчисление Фокса и алгоритм специализации формальных параметров в кольце многочленов от многих переменных, в работе 2001 года [9, теорема С] показали, что представление монодромии системы Жордана—Похгаммера с произвольными параметрами (1.1) эквивалентно представлению Гасснер, когда формальным переменным присвоены комплексные значения $T_k = e^{2\pi \beta_k}$, $k = 1, \dots, n$. Это также решение многомерной проблемы Римана—Гильберта для представления Гасснер. Таким образом, доказана разрешимость проблемы Римана—Гильберта для представления Гасснер.

9. АНАЛОГИ СИСТЕМ ЖОРДАНА—ПОХГАММЕРА, СВЯЗАННЫЕ С ДРУГИМИ СИСТЕМАМИ КОРНЕЙ ОТЛИЧНЫМИ ОТ A_n

Системы Жордана—Похгаммера теснейшим образом связаны с коксетеровской системой корней типа A_n . Полными аналогами этих систем являются системы Книжника—Замолодчикова в форме Чередника

$$d\Psi = k \sum_{\alpha \in R_+} (1 - s_\alpha) \frac{d(\alpha, z)}{(\alpha, z)} \Psi,$$

где s_α — отражения, отвечающие положительным корням системы корней R . Эта система переписывается в следующем виде:

$$d\Psi = \sum_{\alpha \in R} h_\alpha \frac{\alpha^* \otimes \alpha}{\alpha(z)} \Psi,$$

где α^* — двойственный вектор относительно стандартной билинейной формы $(\bar{u}, \bar{v}) = \sum_i u_i v_i$, а h_α — $W(R)$ -инвариантная система констант $h_{w\alpha} = h_\alpha$, $w \in W(R)$. Для систем корней типа A_n , $n \geq 2$, уравнения Книжника—Замолодчикова в форме Чередника (будем говорить — уравнения Чередника) являются системами Жордана—Похгаммера с равными параметрами.

Уравнения Чередника входят в класс $\vee$ -систем Веселова

$$dy = \sum_{\alpha \in R} \alpha^\vee \otimes \alpha \frac{(d\alpha(z))}{\alpha(z)} y,$$

где R — конечная система линейных функционалов в некотором $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, а вектор $\alpha^\vee$ является дуальным ковектору α относительно билинейной формы $B(x, y) = \sum_{\alpha \in R} (\alpha, x)(\alpha, y)$.

Если набор ковекторов является системой положительных корней некоторой коксетеровской системы корней, то система Веселова вполне интегрируема. Веселов и Чалых нашли деформации систем корней (уже не в классе систем корней), для которых система Веселова сохраняет интегрируемость. Уравнения Чередника и $\vee$ -системы Веселова являются аналогами систем Жордана—Похгаммера, связанными с другими системами корней или просто наборами векторов.

Для систем корней определены группы кос $B_n(R)$ и группы крашенных кос $P_n(R)$, для которых имеет место точная последовательность

$$1 \rightarrow P_n(R) \rightarrow B_n(R) \rightarrow W_n(R) \rightarrow 1,$$

$W_n(R)$ — группа Коксетера, порожденная отражениями относительно корней из R .

Основными результатами в начале двухтысячных годов были доказательства того, что эти обобщенные системы Жордана—Похгаммера определяют представления обобщенных групп кос [3, 4, 8, 12]. Однако явная матричная форма полученных представлений была найдена лишь частично. Результаты, полученные для обобщенных представлений Бурау, были затем расширены Сквайром [8, 14].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Болибрух А. А.* Проблема Римана—Гильберта // Усп. мат. наук. — 1990. — 45. — С. 3–47. — DOI: [10.1070/RM1990v045n02ABEH002350](https://doi.org/10.1070/RM1990v045n02ABEH002350).
2. *Уиттекер Э. Т., Ватсон Дж. Н.* Курс современного анализа. — М.: Физматлит, 1962.
3. *Чередник И.* Монодромия r -систем и обобщенные группы кос // Докл. АН СССР. — 1989. — 256. — С. 15–18.
4. *Cherednik I.* Monodromy representations for generalized Knizhnik–Zamolodchikov equations // Publ. RIMS. Kyoto Univ. — 1991. — 27. — С. 711–726. — DOI: [10.2977/prims/1195169268](https://doi.org/10.2977/prims/1195169268).
5. *Deligne P.* Equations différentielles à points singuliers réguliers. — Berlin–Heidelberg: Springer, 1970. — DOI: [10.1007/BFb0061194](https://doi.org/10.1007/BFb0061194).
6. *Feigin M. V., Veselov A. P.* $\vee$ -systems, holonomy Lie algebras and holomorphic vector fields // Int. Math. Research Notes. — 2017. — 2018, № 7. — С. 2070–2098. — DOI: [10.1093/imrn/rnw289](https://doi.org/10.1093/imrn/rnw289).
7. *Gassner B. J.* On braid groups // Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. — 1961. — 25. — С. 10–22. — DOI: [10.1007/BF02992772](https://doi.org/10.1007/BF02992772).
8. *Givental A. B.* Twisted Picard–Lefschetz formulas // Funct. Anal. Appl. — 1988. — 22. — С. 10–18. — DOI: [10.1007/BF01077718](https://doi.org/10.1007/BF01077718).
9. *Kapovich M., Millson J.* Quantization of bending deformations of polygons in $\mathbb{E}^3$, hypergeometric integrals and the Gassner representation // Can. Math. Bull. — 2001. — 44. — С. 36–60. — DOI: [10.4153/CMB-2001-006-3](https://doi.org/10.4153/CMB-2001-006-3).
10. *Knudsen K. P.* On the kernel of the Gassner representation // Arch. Math. — 2005. — 85, № 2. — С. 108–117. — DOI: [10.1007/s00013-005-1271-8](https://doi.org/10.1007/s00013-005-1271-8).
11. *Kohno T.* Linear representations of braid groups and classical Yang–Baxter equations // Contemp. Math. — 1988. — 78. — С. 339–363. — DOI: [10.1090/conm/078/975088](https://doi.org/10.1090/conm/078/975088).

12. *Leksin V. P.* Monodromy of Cherednik–Kohno–Veselov connections // В сб.: «Differential equations and quantum groups. Andrey A. Bolibrukh memorial volume». — Zürich: EMS Publishing House, 2007. — С. 255–267. — DOI: [10.4171/020-1/11](https://doi.org/10.4171/020-1/11).
13. *Moran S.* Mathematical theory of knots and braids. An introduction. — Amsterdam–New York–Oxford: North-Holland, 1983.
14. *Squier C. C.* Matrix representations of Artin groups // Proc. Am. Math. Soc. — 1988. — 103. — С. 49–53. — DOI: [10.1090/S0002-9939-1988-0938643-3](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1988-0938643-3).
15. *Varchenko A. N.* Special functions, KZ type equations, and representations theory // CBMS Reg. Conf. Ser. Math. — 2003. — 98. — AMS0NSF. — DOI: [10.1090/cbms/098](https://doi.org/10.1090/cbms/098).

В. П. Лексин

Государственный социально-гуманитарный университет, Коломна, Россия

E-mail: lexin_vp@mail.ru, РИНЦ SPIN-код: 2131-5008, РИНЦ AuthorID: [16003](https://elibrary.ru/author_index.aspx?id=16003), Scopus: [6507298133](https://orcid.org/0000-0002-6507-2981)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-94-101](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-94-101)

EDN: [TYWNVT](https://elibrary.ru/tywnvt)

UDC 917.952:917.552

Research article

Monodromy representations of Jordan–Pochhammer systems

V. P. Leksin

State Socio-Humanitarian University, Kolomna, Russia

Abstract. In this paper, we consider Burau representations of braid groups and Gassner representations of pure braid groups, and their realization as monodromy representations of Jordan–Pochhammer systems with suitable parameters. Jordan–Pochhammer systems are Fuchs-type systems, which demonstrates the solvability of the Riemann–Hilbert problem for Burau and Gassner representations. We consider an extension of this statement to generalized braid groups and their representations.

Keywords: Jordan–Pochhammer system, Burau representation, Gassner representation, monodromy representation, Riemann–Hilbert problem.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: V. P. Leksin, “Monodromy representations of Jordan–Pochhammer systems,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 1, 94–101. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-94-101](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-94-101) EDN: [TYWNVT](https://elibrary.ru/tywnvt)

REFERENCES

1. A. A. Bolibrukh, “Problema Rimana–Gil’berta” [Riemann–Hilbert problem], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 1990, **45**, 3–47 (in Russian), DOI: [10.1070/RM1990v045n02ABEH002350](https://doi.org/10.1070/RM1990v045n02ABEH002350).
2. E. T. Whittaker and G. N. Watson, *Kurs sovremennogo analiza* [A Course of Modern Analysis], Fizmatlit, Moscow, 1962 (Russian translation).
3. I. Cherednik, “Monodromiya r -sistem i obobshchennye gruppy kos” [Monodromy of r -systems and generalized braid groups], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1989, **256**, 15–18 (in Russian).
4. I. Cherednik, “Monodromy representations for generalized Knizhnik–Zamolodchikov equations,” *Publ. RIMS. Kyoto Univ.*, 1991, **27**, 711–726, DOI: [10.2977/prims/1195169268](https://doi.org/10.2977/prims/1195169268).



5. P. Deligne, *Equations différentielles à points singuliers réguliers*, Springer, Berlin–Heidelberg, 1970, DOI: [10.1007/BFb0061194](https://doi.org/10.1007/BFb0061194).
6. M. V. Feigin and A. P. Veselov, “V-systems, holonomy Lie algebras and holomorphic vector fields,” *Int. Math. Research Notes*, 2017, **2018**, No. 7, 2070–2098, DOI: [10.1093/imrn/rnw289](https://doi.org/10.1093/imrn/rnw289).
7. B. J. Gassner, “On braid groups,” *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.*, 1961, **25**, 10–22, DOI: [10.1007/BF02992772](https://doi.org/10.1007/BF02992772).
8. A. B. Givental, “Twisted Picard–Lefschetz formulas,” *Funct. Anal. Appl.*, 1988, **22**, 10–18, DOI: [10.1007/BF01077718](https://doi.org/10.1007/BF01077718).
9. M. Kapovich and J. Millson, “Quantization of bending deformations of polygons in $\mathbb{E}^3$, hypergeometric integrals and the Gassner representation,” *Can. Math. Bull.*, 2001, **44**, 36–60, DOI: [10.4153/CMB-2001-006-3](https://doi.org/10.4153/CMB-2001-006-3).
10. K. P. Knudsen, “On the kernel of the Gassner representation,” *Arch. Math.*, 2005, **85**, No. 2, 108–117, DOI: [10.1007/s00013-005-1271-8](https://doi.org/10.1007/s00013-005-1271-8).
11. T. Kohno, “Linear representations of braid groups and classical Yang–Baxter equations,” *Contemp. Math.*, 1988, **78**, 339–363, DOI: [10.1090/conm/078/975088](https://doi.org/10.1090/conm/078/975088).
12. V. P. Leksin, “Monodromy of Cherednik–Kohno–Veselov connections,” In: *Differential equations and quantum groups. Andrey A. Bolibrukh memorial volume*, EMS Publishing House, Zürich, 2007, pp. 255–267, DOI: [10.4171/020-1/11](https://doi.org/10.4171/020-1/11).
13. S. Moran, *Mathematical theory of knots and braids. An introduction*, North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1983.
14. C. C. Squier, “Matrix representations of Artin groups,” *Proc. Am. Math. Soc.*, 1988, **103**, 49–53, DOI: [10.1090/S0002-9939-1988-0938643-3](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1988-0938643-3).
15. A. N. Varchenko, “Special functions, KZ type equations, and representations theory,” *CBMS Reg. Conf. Ser. Math.*, 2003, **98**, AMS0NSF, DOI: [10.1090/cbms/098](https://doi.org/10.1090/cbms/098).

V. P. Leksin

State Socio-Humanitarian University, Kolomna, Russia

E-mail: lexin_vp@mail.ru, eLIBRARY SPIN-code: 2131-5008, eLIBRARY AuthorID: [16003](https://elibrary.ru/16003),
Scopus: [6507298133](https://orcid.org/0000-0002-6507-2981)

ТОЧНЫЕ ОЦЕНКИ УСТОЙЧИВЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

В. В. МАРЫГИНА

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

Аннотация. Для дифференциально-разностного уравнения с положительным фундаментальным решением получены признаки экспоненциальной устойчивости с точными оценками показателя и коэффициента экспоненциального убывания, определяемые через наибольший из вещественных корней характеристической функции. Показано, что на основе оценки фундаментального решения можно получить точные оценки любого решения с учетом начальной функции. Полученные результаты иллюстрируются рядом примеров. В частности, показано, как найти двусторонние оценки фундаментального решения в случае, когда параметры уравнения заданы интервально.

Ключевые слова: дифференциально-разностное уравнение, экспоненциальная устойчивость, фундаментальное решение.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Марыгина В. В. Точные оценки устойчивых решений дифференциально-разностных уравнений // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 102–113. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-102-113](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-102-113) EDN: [UCYXOE](https://www.edn.ru/UCYXOE)

1. ВВЕДЕНИЕ

Классическое определение экспоненциальной устойчивости для обыкновенного дифференциального уравнения показывает, как известно, что его решения стремятся к нулю не медленнее экспоненты. Иными словами, найдутся такие $N, \gamma > 0$, что для любого решения x справедлива оценка $|x(t)| \leq N e^{-\gamma(t-t_0)} |x(t_0)|$; от постоянных N, γ требуется только существование, их величина в определении экспоненциальной устойчивости никак не оговаривается. Однако при решении конкретных задач необходимо знать эти постоянные или хотя бы уметь их точно оценивать: без указания оценок на N, γ или алгоритма их эффективного вычисления задача об экспоненциальной устойчивости не может считаться до конца решенной.

Для обыкновенных дифференциальных уравнений найти N, γ точно можно лишь для скалярного случая; получить точные оценки удастся для автономных и сводящихся к ним систем.

На функционально-дифференциальные уравнения определение экспоненциальной устойчивости переносится практически дословно (с заменой начального условия на начальную функцию). Но для этих уравнений задача оценки постоянных N, γ , оставаясь столь же актуальной, оказывается нетривиальной даже для скалярных уравнений.

Различные способы оценки постоянных N, γ для функционально-дифференциальных уравнений приведены в [3, 10, 16], но вопрос о точности оценок в этих работах не ставился и не решался.

2. ОПИСАНИЕ ОБЪЕКТА И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R} = (-\infty, \infty)$, $\mathbb{R}_+ = [0, \infty)$, $\mathbb{C}$ — множество комплексных чисел.

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение вида

$$(Lx)(t) \equiv \dot{x}(t) - \sum_{k=1}^K a_k x(t - r_k) + \sum_{m=1}^M b_m x(t - h_m) = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (2.1)$$

где $K, M \in \mathbb{N}$, $a_k \geq 0$ для всех $k = \overline{1, K}$, $0 \leq r_1 < r_2 < \dots < r_K$, $b_m \geq 0$ для всех $m = \overline{1, M}$, $0 \leq h_1 < h_2 < \dots < h_M$, $r_K < h_1$, f — локально-суммируемая функция.

При отрицательных значениях аргумента решение уравнения (2.1) требует доопределения, т. е. задания некоторой локально-суммируемой начальной функции. Однако, как показано в [1], не нарушая общности, можно считать начальную функцию частью внешнего возмущения f и полагать, что $x(\xi) = 0$ при $\xi < 0$.

Как известно, уравнение (2.1) с заданным начальным условием однозначно разрешимо в классе локально абсолютно непрерывных функций, а его решение имеет вид [1, с. 84]:

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t X(t-s)f(s)ds, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (2.2)$$

Функция X называется *фундаментальным решением* уравнения (2.1). Она является локально абсолютно непрерывной функцией и однозначно определяется как решение уравнения (2.1) при $f = 0$ с начальным условием $X(0) = 1$. Из представления (2.2) следует, что любые свойства решений уравнения (2.1) полностью определяются соответствующими свойствами фундаментального решения.

В частности, определения устойчивости также удобно давать в терминах фундаментального решения: будем называть уравнение (2.1) *экспоненциально устойчивым*, если при некоторых $N, \gamma > 0$ справедлива оценка

$$|X(t)| \leq Ne^{-\gamma t}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (2.3)$$

Цель нашей работы — максимально точно и эффективно оценить параметры N, γ в неравенстве (2.3). В работах [6, 8], эта задача была успешно решена для уравнений вида (2.1) в случае $a_k = 0$ для всех $k = \overline{1, K}$. Здесь мы покажем, что результаты работ [6, 8] справедливы для более общей ситуации, когда коэффициенты и запаздывания уравнения (2.1) подчинены условиям, приведенным в начале раздела 2.

Поставим уравнению (2.1) в соответствие характеристическую функцию

$$F(\lambda) = \lambda - \sum_{k=1}^K a_k e^{-\lambda r_k} + \sum_{m=1}^M b_m e^{-\lambda h_m}, \quad \lambda \in \mathbb{C}, \quad (2.4)$$

которая играет важную роль в исследовании различных асимптотических свойств уравнения (2.1). В частности, справедлив следующий критерий экспоненциальной устойчивости уравнения (2.1).

Теорема 2.1. *Уравнение (2.1) экспоненциально устойчиво, если и только если характеристическая функция не имеет нулей в полуплоскости $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$.*

Одно из существенных отличий уравнений с последействием от обыкновенных дифференциальных уравнений — наличие нулей у решений скалярных уравнений первого порядка. Однако это свойство присуще не всем функционально-дифференциальным уравнениям: уравнения с т. н. «малым» запаздыванием [9, 11] по свойствам близки к обыкновенным, поскольку их фундаментальное решение, не являясь экспонентой, сохраняет знак на полуоси и может быть монотонным. Если такое уравнение экспоненциально устойчиво, то для него, как мы покажем ниже, оказывается возможным дать точные оценки коэффициента и показателя экспоненты.

Найдем критерий положительности фундаментального решения уравнения (2.1).

Лемма 2.1. *Фундаментальное решение уравнения (2.1) положительно при всех $t \in \mathbb{R}_+$, если и только если существует локально абсолютно непрерывная функция v такая, что при всех $t \in \mathbb{R}_+$ справедливы неравенства $v(t) > 0$, а $(Lv)(t) \leq 0$.*

Доказательство. Необходимость утверждения очевидна, т. к. можно положить $v(t) = X(t)$.

Доказательство достаточности проведем от противного: допустим, что условия леммы выполнены, но фундаментальное решение X имеет нули на $\mathbb{R}_+$. Так как $X(0) > 0$, то первый нуль t_0 положителен, следовательно, $X(t) > 0$ при $t \in [0, t_0)$, а $X(t_0) = 0$.

Обозначим $\phi(t) = (Lv)(t)$ и применим к решению $x = v(t)$ уравнения $(Lx)(t) = \phi(t)$ формулу (2.2):

$$v(t_0) = X(t_0)v(0) + \int_0^{t_0} X(t_0 - s)\phi(s) ds = \int_0^{t_0} X(t_0 - s)\phi(s) ds.$$

Поскольку при всех $s \in [0, t_0]$ имеем $\phi(s) \leq 0$ (по условию леммы), а $X(t_0 - s) \geq 0$ (по предположению), то $v(t_0) \leq 0$, что противоречит неравенству $v(t) > 0$. $\square$

Лемма 2.2. *Если характеристическая функция (2.4) имеет отрицательный вещественный корень, то фундаментальное решение уравнения (2.1) положительно при всех $t \in \mathbb{R}_+$.*

Доказательство. Пусть $\zeta < 0$ — вещественный корень функции F . Положим $v(t) = e^{\zeta t} > 0$. Легко видеть, что $(Lv)(t) < 0$ при $t \in [0, h_M]$ и $(Lv)(t) = 0$ при $t > h_M$. Таким образом, условия леммы 2.1 выполнены, следовательно, фундаментальное решение положительно. $\square$

3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Отметим следующие известные [2] свойства характеристической функции F : существует λ_0 , такое, что уравнение $F(\lambda) = 0$ не имеет корней при $\operatorname{Re} \lambda > \lambda_0$, а в любой вертикальной полосе комплексной плоскости их лежит лишь конечное множество. Отсюда, с учетом соотношения $\lim_{\lambda \rightarrow -\infty} F(\lambda) = +\infty > 0$, следует, что характеристическая функция может иметь лишь конечное число вещественных корней, среди которых есть наибольший.

Лемма 3.1. *Если $F(\zeta_0) = 0$ и $F(\zeta) > 0$ при всех вещественных $\zeta > \zeta_0$, то $F'(\zeta_0) \geq 0$.*

Доказательство. Допущение $F'(\zeta_0) < 0$ приводит к противоречию с тем, что при $\zeta > \zeta_0$ функция F сохраняет знак. $\square$

Далее нас будет интересовать случай, когда характеристическая функция имеет вещественные корни, и при этом все они отрицательны. Поэтому обозначим наибольший вещественный корень функции F через $\zeta = -\omega < 0$.

Представим фундаментальное решение уравнения (2.1) в виде $X(t) = e^{-\omega t}Y(t)$. Тогда Y есть решение уравнения

$$\dot{y}(t) - \omega y(t) - \sum_{k=1}^K a_k e^{r_k \omega} y(t - r_k) + \sum_{m=1}^M b_m e^{h_m \omega} y(t - h_m) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+ \quad (3.1)$$

с начальным условием $y(0) = 1$.

Обозначим через $G = G(\lambda)$ характеристическую функцию уравнения (3.1):

$$G(\lambda) = \lambda - \omega - \sum_{k=1}^K a_k e^{(\omega - \lambda)r_k} + \sum_{m=1}^M b_m e^{(\omega - \lambda)h_m}, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Функция G является аналитической при всех $\lambda \in \mathbb{C}$. Заметим, что Лаплас-образ функции Y определяется через функцию G равенством $Y(t) \doteq 1/G(\lambda)$. Легко видеть, что функции F и G связаны простым соотношением $F(\lambda - \omega) = G(\lambda)$, следовательно, наибольший вещественный корень $\lambda = -\omega$ функции F переходит в наибольший вещественный корень $\lambda = 0$ функции G . Из леммы 3.1 следует, что $G'(0) \geq 0$.

Очевидно, что из положительности функции X вытекает положительность Y ; ниже будет показано, что функция Y обладает еще и свойством монотонности. Для доказательства этого факта нам понадобится одно известное утверждение.

Назовем функцию, определенную на положительной полуоси, *осциллирующей*, если существует неограниченная справа последовательность точек, в которых функция меняет знак.

Лемма 3.2 (см. [17]). Если $R(t) = \sum_{j=1}^n (A_j(t) \cos \beta_j t + B_j(t) \sin \beta_j t) + z(t)$, где $A_j(t)$ и $B_j(t)$ — полиномы, а $\lim_{t \rightarrow +\infty} |z(t)| = 0$, то функция $R(t)$ является осциллирующей.

Лемма 3.3. Функция Y является монотонно возрастающей функцией на полуоси $\mathbb{R}_+$.

Доказательство. Пусть $t \in [0, h_1)$. Тогда из условий $\omega > 0$ и $a_k > 0$ получаем

$$\dot{Y}(t) = \omega Y(t) + \sum_{k=1}^K a_k e^{r_k \omega} Y(t - r_k) > 0,$$

т. е. функция Y монотонно возрастает.

Используя равенство $\omega + \sum_{k=1}^K a_k e^{\omega r_k} = \sum_{m=1}^M b_m e^{\omega h_m}$, представим $\dot{Y}$ при $t \geq h_1$ в преобразованном виде. Если $t \in [h_{p-1}, h_p)$, $2 \leq p \leq M$, то

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) = & \omega(Y(t) - Y(t - h_1)) + \sum_{k=1}^K a_k e^{r_k \omega} (Y(t - r_k) - Y(t - h_1)) + \\ & + \sum_{m=2}^{p-1} b_m e^{h_m \omega} (Y(t - h_1) - Y(t - h_m)) + \sum_{m=p}^M b_m e^{h_m \omega} Y(t - h_1), \end{aligned}$$

а если $t > h_M$, то

$$\begin{aligned} \dot{Y}(t) = & \omega(Y(t) - Y(t - h_1)) + \sum_{k=1}^K a_k e^{r_k \omega} (Y(t - r_k) - Y(t - h_1)) + \\ & + \sum_{m=2}^M b_m e^{h_m \omega} (Y(t - h_1) - Y(t - h_m)). \end{aligned}$$

Если функция Y не является монотонно возрастающей на множестве $t \in [h_1, \infty)$, то она имеет первый максимум в точке $t_0 \geq h_1$. Но тогда, из приведенных выше представлений для производной, получаем, что $\dot{Y}(t_0) > 0$. Полученное противоречие доказывает лемму. $\square$

Лемма 3.4. Функция G не имеет нулей в полуплоскости $\Pi = \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda \geq 0\}$, за исключением единственного корня $\lambda = 0$: простого, если $G'(0) > 0$, и кратного, если $G'(0) = 0$.

Доказательство. Очевидно, что функция G не имеет положительных вещественных корней. Допустим, у нее есть комплексные корни справа от мнимой оси; обозначим $\alpha + i\beta_j$, $j = 1, 2, \dots, n$ — корни G с наибольшей вещественной частью $\alpha > 0$. Тогда из [4] получаем

$$Y(t) = e^{\alpha t} \sum_{j=1}^n (A_j(t) \cos \beta_j t + B_j(t) \sin \beta_j t) + u(t),$$

где $A_j(t)$ и $B_j(t)$ — полиномы, а $\lim_{t \rightarrow +\infty} |u(t)| e^{-\alpha t} = 0$. Функция $R(t) = Y(t) e^{-\alpha t}$ удовлетворяет условиям леммы 3.2 и, следовательно, является осциллирующей. Значит, и функция X — осциллирующая, что противоречит лемме 2.2.

Рассмотрим случай, когда функция G имеет на мнимой оси корни, отличные от нулевого. Обозначим их $i\beta_j$, $j = 1, 2, \dots, n$.

Пусть $L_y(\lambda)$ и $L_{\dot{y}}(\lambda)$ — Лаплас-образы функций Y и $\dot{Y}$. Тогда

$$L_{\dot{y}}(\lambda) = \lambda L_y(\lambda) - 1 = \frac{\lambda}{G(\lambda)} - 1 = \frac{-\omega - \sum_{k=1}^K a_k e^{-r_k(\lambda - \omega)} + \sum_{m=1}^M b_m e^{-h_m(\lambda - \omega)}}{\lambda - \omega - \sum_{k=1}^K a_k e^{-r_k(\lambda - \omega)} + \sum_{m=1}^M b_m e^{-h_m(\lambda - \omega)}}.$$

Из соотношения $\lim_{\lambda \rightarrow 0} L_{\dot{y}}(\lambda) = 1$ вытекает, что $\lambda = 0$ не является особой точкой для $L_{\dot{y}}(\lambda)$.

Следовательно, для функции $\dot{Y}(t)$ справедливо представление [4]:

$$\dot{Y}(t) = \sum_{j=1}^n (\tilde{A}_j(t) \cos \beta_j t + \tilde{B}_j(t) \sin \beta_j t) + \tilde{z}(t), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где $\tilde{A}_j(t)$ и $\tilde{B}_j(t)$ — полиномы, а $\lim_{t \rightarrow +\infty} |\tilde{z}(t)| = 0$. Применяя лемму 3.2, заключаем, что функция $\dot{Y}$ является осциллирующей — а это противоречит лемме 3.3.

Следовательно, в полуплоскости Π у функции G нет нулей, кроме $\lambda = 0$. Кратность нулевого корня при условии $G'(0) = 0$ очевидна. $\square$

Лемма 3.5. Пусть функция G не имеет нулей на прямой $\{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} \lambda = -\nu < 0\}$. Тогда при некотором $M > 0$ для любого $t \geq 0$ справедлива оценка:

$$\left| \int_{-\nu-i\infty}^{-\nu+i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{G(\lambda)} d\lambda \right| \leq M e^{-\nu t}.$$

Доказательство. Так как $\int_{-\nu-i\infty}^{-\nu+i\infty} \frac{e^{\lambda t} d\lambda}{\lambda} = 0$ (см. [5, с. 464-465]), то

$$\begin{aligned} \int_{-\nu-i\infty}^{-\nu+i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{G(\lambda)} d\lambda &= \int_{-\nu-i\infty}^{-\nu+i\infty} e^{\lambda t} \left(\frac{1}{G(\lambda)} - \frac{1}{\lambda} \right) d\lambda = \\ &= \int_{-\nu-i\infty}^{-\nu+i\infty} \left(\omega + \sum_{k=1}^K a_k e^{-r_k(\lambda-\omega)} - \sum_{m=1}^M b_m e^{-h_m(\lambda-\omega)} \right) \frac{e^{\lambda t}}{\lambda G(\lambda)} d\lambda = e^{-\nu t} \int_{-\infty}^{+\infty} O\left(\frac{1}{\nu^2 + \zeta^2}\right) d\zeta. \end{aligned}$$

$\square$

Лемма 3.6. Для любого $\nu > 0$ при всех $t \geq 0$ справедливо равенство:

$$\lim_{y \rightarrow \pm\infty} \left| \int_{-\nu+iy}^{\nu+iy} \frac{e^{\lambda t}}{G(\lambda)} d\lambda \right| = 0.$$

Доказательство. Так как для достаточно большого $|y|$ и любого $\zeta \in [-\nu, \nu]$ при некотором $m > 0$ справедлива оценка $|G(\zeta + iy)| \geq m\sqrt{\zeta^2 + y^2}$, то

$$\left| \int_{-\nu+iy}^{\nu+iy} \frac{e^{\lambda t}}{G(\lambda)} d\lambda \right| = \left| \int_{-\nu}^{\nu} \frac{e^{(\zeta+iy)t}}{G(\zeta+iy)} d\zeta \right| \leq \frac{e^{\nu t}}{m} \int_{-\nu}^{\nu} \frac{d\zeta}{\sqrt{\zeta^2 + y^2}} = \frac{e^{\nu t}}{m} \ln \left| \frac{\nu + \sqrt{\nu^2 + y^2}}{-\nu + \sqrt{\nu^2 + y^2}} \right| \xrightarrow{y \rightarrow \pm\infty} 0.$$

$\square$

Лемма 3.7. Если $G'(0) > 0$, то фундаментальное решение уравнения (3.1):

1. Является монотонно возрастающей функцией на полуоси $[0, \infty)$.
2. Имеет предел на бесконечности $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = \frac{1}{G'(0)}$.
3. Имеет двустороннюю оценку

$$1 < Y(t) < \frac{1}{G'(0)}, \quad t > 0. \quad (3.2)$$

Доказательство. Первое утверждение установлено в лемме 3.3.

Чтобы доказать второе утверждение, рассмотрим на комплексной плоскости прямоугольник $ABCD$ со сторонами, параллельными вещественной и мнимой осям. Пусть сторона AB лежит на прямой $\operatorname{Re} \lambda = -\nu < 0$, сторона CD — на прямой $\operatorname{Re} \lambda = \nu > 0$, точка A лежит ниже вещественной оси, точка B симметрична ей относительно той же оси. Из леммы 3.4 следует, что найдется число

$\nu > 0$ такое, что справа от прямой $\operatorname{Re} \lambda = -\nu$ у функции G есть только один корень $\lambda = 0$. Интеграл от функции $\frac{1}{2\pi i} \frac{e^{\lambda t}}{G(\lambda)}$ по контуру $ABCD$ равен, с одной стороны, вычету в точке $\lambda = 0$, а с другой стороны — разбивается на сумму четырех интегралов по сторонам прямоугольника. Перейдем к пределу при $\operatorname{Im} \lambda \rightarrow \pm\infty$ (движение происходит с одинаковой скоростью к $+\infty$ и $-\infty$). Как уже отмечалось выше, $1/G(\lambda)$ есть Лаплас-образ функции Y , следовательно,

$$Y(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\nu-i\infty}^{\nu+i\infty} \frac{e^{\lambda t}}{G(\lambda)} d\lambda.$$

Применяя к интегралу по отрезку AB лемму 3.5, а к интегралам по отрезкам BC и DA лемму 3.6, получаем оценку:

$$\left| Y(t) - \operatorname{res}_{\lambda=0} \frac{e^{\lambda t}}{G(\lambda)} \right| \leq \frac{M}{2\pi} e^{-\nu t}. \quad (3.3)$$

По условию леммы $\lambda = 0$ — простой полюс функции $\frac{e^{\lambda t}}{G(\lambda)}$; следовательно,

$$\operatorname{res}_{\lambda=0} \frac{e^{\lambda t}}{G(\lambda)} = \lim_{\lambda \rightarrow 0} \frac{e^{\lambda t}}{G'(\lambda)} = \frac{1}{G'(0)},$$

и из неравенства (3.3) следует, что $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = \frac{1}{G'(0)}$, т. е. второе утверждение леммы 3.7 доказано.

Третье утверждение следует из первых двух. $\square$

Замечание 3.1. Если уравнение (3.1) рассматривать на полуоси $[T, \infty)$, то из леммы 3.7 следует, что оценку (3.2) можно уточнить, заменив ее оценкой

$$Y(T) < Y(t) < \frac{1}{G'(0)}, \quad t > T,$$

при этом за счет увеличения T разность $1/G'(0) - Y(T)$ может быть сделана сколь угодно малой.

Опираясь на лемму 3.7, докажем следующий основной результат.

Теорема 3.1. Пусть $-\omega < 0$ — наибольший вещественный корень характеристической функции F уравнения (2.1). Тогда, если $F'(-\omega) > 0$, то фундаментальное решение уравнения (2.1) имеет двустороннюю оценку

$$e^{-\omega t} < X(t) < \frac{1}{F'(-\omega)} e^{-\omega t}, \quad t > 0. \quad (3.4)$$

Доказательство. Так как фундаментальные решения уравнений (2.1) и (3.1) связаны равенством $X(t) = e^{-\omega t} Y(t)$, а характеристические функции — равенством $F(\lambda - \omega) = G(\lambda)$, теорема 3.1 вытекает из леммы 3.7. $\square$

Замечание 3.2. Постоянные 1 и $\frac{1}{F'(-\omega)}$ в оценке (3.4) не улучшаемы: это следует из п. 2 леммы 3.7 и свойства $X(0) = 1$.

Замечание 3.3. Оценка (3.4) двусторонняя, поэтому показатель экспоненты ω нельзя ни увеличить, ни уменьшить.

Замечание 3.4. Рассмотрим уравнение вида (2.1), в котором решение при отрицательных значениях аргумента доопределено начальной функцией:

$$\begin{cases} \dot{x}(t) - \sum_{k=1}^K a_k x(t - r_k) + \sum_{m=1}^M b_m x(t - h_m) = 0, & t > 0, \\ x(\xi) = \varphi(\xi), & \xi < 0. \end{cases} \quad (3.5)$$

Все условия на коэффициенты уравнения (3.5) оставим теми же, что и в уравнении (2.1). Функцию φ можно считать принадлежащей пространству $L_1[-r, 0]$ или некоторому его линейному

подпространству, снабженному собственной нормой. Если, следуя [12, 13], понимать под решением уравнения (3.5) непрерывное продолжение начальной функции, то надо требовать выполнения условия $x(0) = \varphi(0)$, но, вообще говоря, это требование не обязательно. Следуя [1], перепишем уравнение (3.5) в виде (2.1), положив $f(t) = \sum_{k=1}^K a_k \varphi(t - r_k) - \sum_{m=1}^M b_m \varphi(t - h_m)$, где $\varphi(\xi) = 0$, если $\xi > 0$. Опираясь на формулу (2.2), получаем следующее представление для решения задачи (3.5):

$$x(t) = X(t)x(0) + \sum_{k=1}^K a_k \int_0^t X(t-s)\varphi(s-r_k)ds - \sum_{m=1}^M b_m \int_0^t X(t-s)\varphi(s-h_m)ds. \quad (3.6)$$

Если для фундаментального решения уравнения (3.5) выполнены условия теоремы 3.1, то из представления (3.6) легко получить оценки на любое решение задачи (3.5) с учетом нормы пространства, из которого выбирается начальная функция.

4. КОММЕНТАРИИ И ПРИМЕРЫ

Теорему 3.1 можно рассматривать как признак экспоненциальной устойчивости уравнения (2.1). Очевидно, однако, что в ней содержится больше информации: во-первых, оценка (3.4) двусторонняя; во-вторых, показатель экспоненты находится как вещественный корень функции, имеющей простую структуру; в-третьих, по найденному показателю точно определяется еще и коэффициент при экспоненте. Для проверки условий теоремы 3.1 удобно располагать эффективными признаками, гарантирующими положительность фундаментального решения уравнения (2.1); такие признаки получены в работах [7, 14, 19]. Следует также иметь в виду, что для уравнений, рассматриваемых в данной статье, область положительности фундаментального решения является точным дополнением к области осцилляции [18], что позволяет использовать ряд установленных для дифференциально-разностных уравнений критериев осцилляции (см., напр. монографию [15]).

Рассмотрим несколько примеров уравнений вида (2.1) и найдем для них на основе теоремы 3.1 двусторонние оценки решений.

Пример 4.1. Найдем оценки для фундаментального решения уравнения

$$\dot{x}(t) - 0,35x(t-1) + 0,45x(t-1,2) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (4.1)$$

Выпишем характеристическую функцию и ее производную:

$$\begin{aligned} F(\zeta) &= \zeta - 0,35e^{-\zeta} + 0,45e^{-1,2\zeta}, \\ F'(\zeta) &= 1 + 0,35e^{-\zeta} - 0,54e^{-1,2\zeta}. \end{aligned}$$

Вещественные корни уравнения $F(\zeta) = 0$: $\zeta_1 \approx -1,80071$, $\zeta_2 \approx -0,12659$. Искомый показатель $\omega \approx 0,12659 \in (0,126, 0,127)$. Так как $0 < 1/F'(-\omega) \approx 1,30099 < 1,301$, то условия теоремы 3.1 выполнены. Теперь, используя неравенства (3.4), получаем двустороннюю оценку фундаментального решения уравнения (4.1):

$$e^{-0,127t} < X(t) < 1,301 e^{-0,126t}, \quad t > 0.$$

Пример 4.2. Найдем оценки для фундаментального решения уравнения

$$\dot{x}(t) - 0,2x(t-0,5) + 0,3x(t-1) + 0,1x(t-1,5) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (4.2)$$

Выпишем характеристическую функцию и ее производную:

$$\begin{aligned} F(\zeta) &= \zeta - 0,2e^{-0,5\zeta} + 0,3e^{-\zeta} + 0,1e^{-1,5\zeta}, \\ F'(\zeta) &= 1 + 0,1e^{-0,5\zeta} - 0,3e^{-\zeta} - 0,15e^{-1,5\zeta}. \end{aligned}$$

Численно решая уравнение $F(\zeta) = 0$, находим два вещественных отрицательных корня: $\zeta_1 \approx -1,1446$, $\zeta_2 \approx -0,365009$. Искомый показатель $\omega \approx 0,365009 \in (0,365, 0,366)$, а $0 < 1/F'(-\omega) \approx 2,33361 < 2,334$. Условия теоремы 3.1 выполнены, из неравенства (3.4) получаем двустороннюю оценку фундаментального решения уравнения (4.2):

$$e^{-0,366t} < X(t) < 2,334 e^{-0,365t}, \quad t > 0.$$

Уточняя границы интервала, которому принадлежит ω , можно получать все более точные оценки, сколь угодно сближая показатели экспонент.

Пример 4.3. Найдем оценки для фундаментального решения уравнения

$$\dot{x}(t) - 0,5x(t) + 0,8x(t - 0,1) + 0,6x(t - 0,2) + 0,4x(t - 0,3) + 0,1x(t - 0,4) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+. \quad (4.3)$$

Интересно отметить, что если в уравнении (4.3) отбросить все слагаемые с запаздываниями, то получится неустойчивое обыкновенное дифференциальное уравнение $\dot{x}(t) - 0,5x(t) = 0$. Тем не менее, применение к уравнению (4.3) теоремы 3.1 позволяет установить весьма сильное экспоненциальное убывание фундаментального решения — вопреки распространенному мнению, что «запаздывания дестабилизируют».

Выпишем характеристическую функцию и ее производную:

$$\begin{aligned} F(\lambda) &= \lambda - 0,5 + 0,8e^{-0,1\lambda} + 0,6e^{-0,2\lambda} + 0,4e^{-0,3\lambda} + 0,1e^{-0,4\lambda}, \\ F'(\lambda) &= 1 - 0,08e^{-0,1\lambda} - 0,12e^{-0,2\lambda} - 0,12e^{-0,3\lambda} - 0,04e^{-0,4\lambda}. \end{aligned}$$

Вещественные корни уравнения $F(\lambda) = 0$: $\lambda_1 \approx -5,06107$, $\lambda_2 \approx -2,95599$. Искомый показатель $\omega \approx 2,95599 \in (2,955, 2,956)$. Так как $0 < 1/F'(-\omega) \approx 3,93733 < 3,938$, то условия теоремы 3.1 выполнены. Теперь, используя неравенства (3.4), получаем двустороннюю оценку фундаментального решения уравнения (4.3):

$$e^{-2,956t} < X(t) < 3,938 e^{-2,955t}, \quad t > 0.$$

Пример 4.4. Найдем оценки для решения уравнения

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + 0,3x(t - 1) = 0, & t > 0, \\ x(\xi) = \xi, & \xi \leq 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Выпишем характеристическую функцию уравнения (4.4) и ее производную:

$$F(\lambda) = \lambda + 0,3e^{-\lambda}, \quad F'(\lambda) = 1 - 0,3e^{-\lambda}.$$

Найдем вещественные корни уравнения $F(\lambda) = 0$: $\lambda_1 \approx -1,78134$, $\lambda_2 \approx -0,48940$. Искомый показатель $\omega \approx 0,48940 \in (0,489, 0,490)$. Так как $F'(-\omega) = 1 - \omega > 0$, то условия теоремы 3.1 выполнены. Находим $1/F'(-\omega) \approx 1,95849 < 1,959$. Используя неравенства (3.4), двустороннюю оценку для фундаментального решения уравнения (4.4) можно записать в виде

$$e^{-0,490t} < X(t) < 1,959 e^{-0,489t}, \quad t > 0. \quad (4.5)$$

Теперь найдем оценку на решение уравнения (4.4). На отрезке $[0, 1]$ решение уравнения (4.4) строится прямым интегрированием, поэтому будем считать, что $t \geq 1$. Из формулы (3.6) и начального условия $x(0) = 0$ имеем

$$x(t) = 0,3 \int_0^1 X(t-s)(1-s) ds, \quad t \geq 1,$$

а с учетом оценки (4.5) получаем:

$$e^{-0,490t} \int_0^1 e^{0,490s}(1-s) ds < \int_0^1 X(t-s)(1-s) ds < 1,959 e^{-0,489t} \int_0^1 e^{0,489s}(1-s) ds.$$

Вычисляя интегралы в обеих частях неравенства, получаем двустороннюю оценку для решения исходного уравнения:

$$0,177e^{-0,490t} < x(t) < 0,384e^{-0,489t}, \quad t \geq 1.$$

Пример 4.5. Рассмотрим семейство уравнений, для которых показатель ω удастся найти точно. Пусть $\alpha \in (0, 1)$.

$$\begin{cases} \dot{x}(t) + \alpha e^{-\alpha} x(t - 1) = 0, & t > 0, \\ x(\xi) = 1, & \xi \leq 0. \end{cases} \quad (4.6)$$

Выпишем характеристическую функцию уравнения (4.6) и ее производную:

$$F(\lambda) = \lambda + \alpha e^{-\alpha} e^{-\lambda}, \quad F'(\lambda) = 1 - \alpha e^{-\alpha} e^{-\lambda}.$$

Наибольший вещественный корень уравнения $F(\lambda) = 0$ находится точно: $\lambda = -\alpha$, т. е. $\omega = \alpha$. Так как $F'(-\omega) = 1 - \alpha > 0$, то условия теоремы 3.1 выполнены. Находим $1/F'(-\omega) = \frac{1}{1-\alpha}$. Используя неравенства (3.4), двустороннюю оценку для фундаментального решения уравнения (4.6) можно записать в виде

$$e^{-\alpha t} < X(t) < \frac{e^{-\alpha t}}{1-\alpha}, \quad t > 0. \quad (4.7)$$

Теперь найдем оценку на решение уравнения (4.6). Из определения фундаментального решения для уравнения (4.6) следует, что $x(t) = X(t+1)$ при всех $t \geq 0$. Следовательно, из (4.7) вытекает оценка для решения любого уравнения семейства (4.6) с единичной начальной функцией:

$$e^{-\alpha(t+1)} < x(t) < \frac{e^{-\alpha(t+1)}}{1-\alpha}, \quad t > 0.$$

Пример 4.6. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) + \frac{1}{2\sqrt{e}}x(t-1) = 0, \quad t \geq 0. \quad (4.8)$$

Это уравнение является частным случаем семейства, рассмотренного в предыдущем примере (при $\alpha = 1/2$). Следовательно, для его фундаментального решения справедлива двусторонняя оценка

$$e^{-t/2} < X(t) < 2e^{-t/2}, \quad t > 0. \quad (4.9)$$

Замена $x(t) = e^{-\frac{t}{2}}y(t)$ сводит уравнение (4.8) к уравнению

$$\dot{y}(t) - \frac{1}{2}y(t) + \frac{1}{2}y(t-1) = 0, \quad t \geq 0, \quad (4.10)$$

для фундаментального решения Y которого справедлива оценка

$$1 < Y(t) < 2, \quad t > 0.$$

По лемме 3.7 функция $Y(t)$ монотонно возрастает и, кроме того, $\lim_{t \rightarrow \infty} Y(t) = 2$. Сравним значения функции $Y(t)$ в начальных точках с предельным значением. Выстраивая фундаментальное решение уравнения (4.10) «по шагам», имеем: $Y(0) = 1$, $Y(1) > 1,648$, $Y(2) > 1,893$, $Y(3) > 1,969$, $Y(4) > 1,991$, $Y(5) > 1,997$, $Y(6) > 1,999$. Следовательно, на каждом шаге оценку (4.9) можно заменить на более точную, иллюстрируя тем самым замечание 3.1; в частности, при $t > 6$ получаем

$$1,999e^{-t/2} < X(t) < 2e^{-t/2}, \quad t > 6.$$

Пример 4.7. Покажем, что на основе теоремы 3.1 можно оценивать решения дифференциально-разностных уравнений в случае, когда для коэффициентов и запаздываний известны лишь интервальные оценки. Найдем двусторонние оценки для фундаментального решения уравнения

$$\dot{x}(t) + ax(t) + bx(t-r) = 0, \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (4.11)$$

если коэффициенты и запаздывание заданы интервально: $2 < a < 2,01$, $0,83 < b < 0,84$, $0,24 < r < 0,25$. Запишем функции

$$\overline{F}(\lambda) = \lambda + 2,01 + 0,84e^{-0,25\lambda}, \quad \underline{F}(\lambda) = \lambda + 2 + 0,83e^{-0,24\lambda}$$

и производную

$$\overline{F}'(\lambda) = 1 - 0,21e^{-0,25\lambda}.$$

Численно решая уравнения $\overline{F}(\lambda) = 0$, $\underline{F}(\lambda) = 0$, находим $\overline{\omega} \approx 4,79636 \in (4,796, 4,797)$, $\underline{\omega} \approx 4,66273 \in (4,662, 4,663)$. Так как $\overline{F}'(-\overline{\omega}) = 1 - 0,25(\overline{\omega} - 2,01) > 0$, то условия теоремы 3.1 выполнены. Далее, вычисляем $1/\overline{F}'(-\overline{\omega}) \approx 3,29588 < 3,296$ и из (3.4) получаем двустороннюю оценку фундаментального решения уравнения (4.11):

$$e^{-4,797t} < X(t) < 3,296 e^{-4,662t}, \quad t > 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991.
2. Беллман Р., Кук К. Л. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967.
3. Демиденко Г. В., Матвеева И. И. Асимптотические свойства решений дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом // Вестн. НГУ. Сер. Мат., мех., инф. — 2005. — 5, № 3. — С. 20–28.
4. Зубов В. И. К теории линейных стационарных систем с запаздывающим аргументом // Изв. вузов. Сер. Мат. — 1958. — № 6. — С. 86–95.
5. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функции комплексного переменного. — М.: Наука, 1987.
6. Малыгина В. В. Оценка показателя экспоненты для устойчивых решений одного класса дифференциально-разностных уравнений // Изв. вузов. Сер. Мат. — 2021. — № 12. — С. 67–79. — DOI: [10.26907/0021-3446-2021-12-67-79](https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-12-67-79).
7. Малыгина В. В., Чудинов К. М. Устойчивость решений дифференциальных уравнений с несколькими переменными запаздываниями. II // Изв. вузов. Сер. Мат. — 2013. — № 7. — С. 3–15.
8. Малыгина В. В., Чудинов К. М. О точных двусторонних оценках устойчивых решений автономного функционально-дифференциального уравнения // Сиб. мат. ж. — 2022. — 62, № 2. — С. 360–378. — DOI: [10.33048/smzh.2022.63.208](https://doi.org/10.33048/smzh.2022.63.208).
9. Мышкис А. Д. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Наука, 1972.
10. Перцев Н. В. Применение М-матриц для построения экспоненциальных оценок решений задачи Коши для некоторых систем линейных разностных и дифференциальных уравнений // Мат. труды. — 2013. — 16, № 2. — С. 111–141.
11. Рябов Ю. А. Некоторые асимптотические свойства линейных систем с малым запаздыванием по времени // Докл. АН СССР. — 1963. — 151, № 1. — С. 52–54.
12. Хейл Дж. Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984.
13. Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б. Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971.
14. Agarwal R. P., Berezansky L., Braverman E., Domoshnitsky A. Nonoscillation theory of functional differential equations with applications. — New York: Springer, 2012. — DOI: [10.1007/978-1-4614-3455-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3455-9).
15. Györi I., Ladas G. Oscillation theory of delay differential equations with applications. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1992. — DOI: [10.1093/oso/9780198535829.001.0001](https://doi.org/10.1093/oso/9780198535829.001.0001).
16. Liz E., Pituk M. Exponential stability in a scalar functional-differential equation // J. Inequal. Appl. — 2006. — 2006. — 37195. — DOI: [10.1155/JIA/2006/37195](https://doi.org/10.1155/JIA/2006/37195).
17. Malygina V., Sabatulina T. On oscillation of solutions for differential equations with distributed delay // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2016. — 116. — С. 1–16. — DOI: [10.14232/ejqtde.2016.1.116](https://doi.org/10.14232/ejqtde.2016.1.116).
18. Sabatulina T. L. Oscillating and sign-definite solutions to autonomous functional-differential equation // J. Math. Sci. — 2018. — 230, № 5. — С. 766–769. — DOI: [10.1007/s10958-018-3786-0](https://doi.org/10.1007/s10958-018-3786-0).
19. Sabatulina T., Malygina V. On positiveness of the fundamental solution for a linear autonomous differential equation with distributed delay // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2014. — 61. — С. 1–16. — DOI: [10.14232/ejqtde.2014.1.61](https://doi.org/10.14232/ejqtde.2014.1.61).

В. В. Малыгина

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

E-mail: mavera@list.ru, РИНЦ SPIN-код: 2194-6910, РИНЦ AuthorID: [5483](https://elibrary.ru/5483), ResearcherID: [ABI-6471-2020](https://orcid.org/0000-0003-2194-680X), Scopus: [36775201200](https://orcid.org/0000-0003-2194-680X), ORCID: [0000-0003-2194-680X](https://orcid.org/0000-0003-2194-680X)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-102-113](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-102-113)
EDN: UCYXOE

UDC 517.929
Research article

Exact estimates of stable solutions of differential-difference equations

V. V. Malygina

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

Abstract. For a differential-difference equation with a positive fundamental solution, we obtain exponential stability criteria with precise estimates of the exponent and the exponential decay coefficient. These criteria are determined by the largest real root of the characteristic function. We show that, based on the estimate of the fundamental solution, one can obtain precise estimates of any solution taking into account the initial function. The results are illustrated by a number of examples. In particular, we show how to find two-sided estimates of the fundamental solution when the parameters of the equation are defined intervalwise.

Keywords: differential-difference equation, exponential stability, fundamental solution.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: V. V. Malygina, “Exact estimates of stable solutions of differential-difference equations,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 1, 102–113. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-102-113](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-102-113) EDN: UCYXOE

REFERENCES

1. N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, and L. F. Rakhmatullina, *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the Theory of Functional Differential Equations], Nauka, Moscow, 1991 (in Russian).
2. R. Bellman and K. L. Cooke, *Differentsial'no-raznostnye uravneniya* [Differential-Difference Equations], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
3. G. V. Demidenko and I. I. Matveeva, “Asimptoticheskie svoystva resheniy differentsial'nykh uravneniy s zapazdyvayushchim argumentom” [Asymptotic properties of solutions of differential equations with retarded argument], *Vestn. NGU. Ser. Mat., Mekh., Inf.* [Bull. NSU. Ser. Math. Mech. Inf.], 2005, **5**, No. 3, 20–28 (in Russian).
4. V. I. Zubov, “K teorii lineynykh statsionarnykh sistem s zapazdyvayushchim argumentom” [To the theory of linear stationary systems with retarded argument], *Izv. Vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1958, No. 6, 86–95 (in Russian).
5. M. A. Lavrent'ev and B. V. Shabat, *Metody teorii funktsii kompleksnogo peremennogo* [Methods of the Theory of Functions of Complex Variable], Nauka, Moscow, 1987 (in Russian).
6. V. V. Malygina, “Otsenka pokazatelya eksponenty dlya ustoychivyykh resheniy odnogo klassa differentsial'no-raznostnykh uravneniy” [Estimate of the exponent for stable solutions of one class of differential-difference equations], *Izv. Vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2021, No. 12, 67–79 (in Russian), DOI: [10.26907/0021-3446-2021-12-67-79](https://doi.org/10.26907/0021-3446-2021-12-67-79).
7. V. V. Malygina and K. M. Chudinov, “Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy s neskol'kimi peremennymi zapazdyvaniyami. II” [Stability of solutions of differential equations with several variable delays. II], *Izv. Vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2013, No. 7, 3–15 (in Russian).
8. V. V. Malygina and K. M. Chudinov, “O tochnyykh dvustoronnikh otsenkakh ustoychivyykh resheniy avtonomnogo funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya” [On exact two-sided estimates of stable solutions

- of an autonomous functional differential equation], *Sib. Mat. Zh.* [Siberian Math. J.], 2022, **62**, No. 2, 360–378 (in Russian), DOI: [10.33048/smzh.2022.63.208](https://doi.org/10.33048/smzh.2022.63.208).
9. A. D. Myshkis, *Differentsial'no-raznostnye uravneniya* [Differential-Difference Equations], Nauka, Moscow, 1972 (in Russian).
 10. N. V. Pertsev, “Primenenie M-matrits dlya postroeniya eksponentsial'nykh otsenok resheniy zadachi Koshi dlya nekotorykh sistem lineynykh raznostnykh i differentsial'nykh uravneniy” [Application of M-matrices to construct exponential estimates of solutions to the Cauchy problem for some systems of linear difference and differential equations], *Mat. Trudy* [Math. Proceedings], 2013, **16**, No. 2, 111–141 (in Russian).
 11. Yu. A. Ryabov, “Nekotorye asimptoticheskie svoystva lineynykh sistem s malym zapazdyvaniem po vremeni” [Some asymptotic properties of linear systems with small time delay], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1963, **151**, No. 1, 52–54 (in Russian).
 12. J. Hale, *Teoriya funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Theory of Functional Differential Equations], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
 13. L. E. El'sgol'ts and S. B. Norkin, *Vvedenie v teoriyu differentsial'nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom* [Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Argument], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
 14. R. P. Agarwal, L. Berezansky, E. Braverman, and A. Domoshnitsky, *Nonoscillation theory of functional differential equations with applications*, Springer, New York, 2012, DOI: [10.1007/978-1-4614-3455-9](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-3455-9).
 15. I. Györi and G. Ladas, *Oscillation theory of delay differential equations with applications*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1992, DOI: [10.1093/oso/9780198535829.001.0001](https://doi.org/10.1093/oso/9780198535829.001.0001).
 16. E. Liz and M. Pituk, “Exponential stability in a scalar functional-differential equation,” *J. Inequal. Appl.*, 2006, **2006**, 37195, DOI: [10.1155/JIA/2006/37195](https://doi.org/10.1155/JIA/2006/37195).
 17. V. Malygina and T. Sabatulina, “On oscillation of solutions for differential equations with distributed delay,” *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2016, **116**, 1–16, DOI: [10.14232/ejqtde.2016.1.116](https://doi.org/10.14232/ejqtde.2016.1.116).
 18. T. L. Sabatulina, “Oscillating and sign-definite solutions to autonomous functional-differential equation,” *J. Math. Sci.*, 2018, **230**, No. 5, 766–769, DOI: [10.1007/s10958-018-3786-0](https://doi.org/10.1007/s10958-018-3786-0).
 19. T. Sabatulina and V. Malygina, “On positiveness of the fundamental solution for a linear autonomous differential equation with distributed delay,” *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2014, **61**, 1–16, DOI: [10.14232/ejqtde.2014.1.61](https://doi.org/10.14232/ejqtde.2014.1.61).

V. V. Malygina

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

E-mail: mavera@list.ru, eLIBRARY SPIN-code: 2194-6910, eLIBRARY AuthorID: [5483](#), ResearcherID: [ABI-6471-2020](#), Scopus: [36775201200](#), ORCID: [0000-0003-2194-680X](#)

АСИМПТОТИКА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В КРИТИЧЕСКОМ СЛУЧАЕ

А. В. НЕСТЕРОВ

Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Москва, Россия

Аннотация. Строятся первые члены формального асимптотического разложения по малому параметру решения задачи Коши с начальными условиями типа «узкая шапочка» для сингулярно возмущенной системы уравнений колебаний в критическом случае. Асимптотическое разложение построено в виде суммы слагаемых типа бегущих волн и пограничных функций. Слагаемые типа бегущих волн описываются обобщенными уравнениями Кортевега—де Фриза. При определенных предположениях сделана оценка остаточного члена по невязке.

Ключевые слова: асимптотические разложения, сингулярные возмущения, критический случай, начальные задачи, системы гиперболических уравнений, обобщенное уравнение Кортевега—де Фриза.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ, номер проекта FSSW-2023-0004.

Для цитирования: Нестеров А. В. Асимптотика решения задачи Коши для сингулярно возмущенной системы гиперболических уравнений в критическом случае // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 114–125. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-114-125](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-114-125) EDN: [UERBYQ](https://www.edn.ru/uerbyq)

1. ВВЕДЕНИЕ

Строится формальное асимптотическое разложение (ФАР, AP) решения начальной задачи для системы гиперболических уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon^6(u_{tt} - k_1^2 u_{xx}) = -p(au - bv) - \varepsilon^3 q(au - bv)_t - \varepsilon^2 f(u, v), \\ \varepsilon^6(v_{tt} - k_2^2 v_{xx}) = p(au - bv) + \varepsilon^3 q(au - bv)_t + \varepsilon^2 f(u, v), \\ 0 < t < T, \quad |x| < \infty, \quad T > 0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь $\{u(x, t, \varepsilon), v(x, t, \varepsilon)\}$ — решение, $0 < \varepsilon \ll 1$ малый параметр, $k_1 > 0$, $k_2 > 0$, $a > 0$, $b > 0$, $p > 0$, $q = \text{const} > 0$, гладкая функция $f(u, v) \in C^\infty \forall |u| < \infty, |v| < \infty$, такая, что $f(0, 0) = 0$, удовлетворяет определенным требованиям, сформулированным ниже.

Отметим, что система (1.1) относится к т. н. критическому случаю [2], когда вырожденная задача ($\varepsilon = 0$) имеет семейство решений.

Предыстория задачи такова. В работе А. Б. Васильевой [1] исследовалась начально-краевая задача для сингулярно возмущенной системы двух уравнений в частных производных первого порядка в критическом случае

$$\varepsilon(U_t + DU_x) = AU, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad U(x, 0) = U^0(x), \quad U(0, t) = \Phi^0(t), \quad (1.2)$$

здесь $U = \{u(x, t, \epsilon), v(x, t, \epsilon)\}$ — решение, матрица $D = \text{diag}(\Lambda_1 > 0, \Lambda_2 > 0)$ диагональна, матрица A вырожденная, имеющая одно нулевое собственное значение и второе отрицательное (обозначения не совпадают с оригиналом). Было обнаружено явление внутреннего слоя в окрестности «псевдохарактеристики» системы (1.2), выходящей из угловой точки границы.

Ранее автором в ряде работ [4–6] исследовались различные обобщения этой задачи — сингулярно возмущенные системы уравнений переноса вида

$$\epsilon(U_t + DU_x) = AU + \epsilon^\alpha F, \quad t > 0, \quad x > 0, \quad U(x, 0) = U^0(x), \quad U(0, t) = \Phi^0(t),$$

Здесь $U(x, t) \in \mathbb{R}^N$ — решение ($N \geq 2$), $0 < \epsilon \ll 1$ — малый параметр, D — диагональная матрица, в слагаемое $\epsilon^\alpha F$, $\alpha > 0$, может входить малая нелинейность, слагаемые с производными второго порядка по пространственной переменной и т. д. Рассматривались случаи, когда матрица A имеет однократное нулевое собственное значение (остальные полагались имеющими отрицательные вещественные части). В этом случае системы относятся к т. н. критическому случаю [2]: у вырожденной ($\epsilon = 0$) задачи

$$AU = 0$$

имеется однопараметрическое семейство решений вида $U(x, t) = \varphi(x, t, \epsilon)h_0$, здесь $\varphi(x, t, \epsilon)$ — произвольная гладкая функция, h_0 — собственный вектор, отвечающий нулевому собственному значению матрицы A . Наличие однократного собственного значения у матрицы A приводит к интересному поведению асимптотики решения в областях больших градиентов.

Оказывается, что в случае быстро убывающих начальных условий вида $U(x, 0) = \omega(x/\epsilon)H$, $|\omega(x)| < Ce^{-\kappa x^2}$, $\kappa > 0$, и $F = 0$ функция $\varphi(x, t, \epsilon)$ описывается параболическим уравнением ($M < 0$)

$$\varphi_t + M\varphi\zeta = 0,$$

где $\zeta = \frac{x - kt}{\epsilon}$ — растянутая переменная ($k = \text{const}$). В некоторых случаях (что зависит от слагаемого $\epsilon^\alpha F$) функция $\varphi(x, t)$ описывается обобщенными уравнениями Бюргерса или Кортевега—де Фриза [7].

Интересным представляется обобщение систем уравнений переноса как на случай вырождения матрицы A до двукратного нулевого собственного значения, так и на системы уравнений более высокого порядка. Таким обобщением можно считать систему (1.1).

Система (1.1) также относится к критическому случаю [2], т. к. вырожденная система уравнений ($\epsilon = 0$)

$$\begin{cases} 0 = -p(au - bv), \\ 0 = p(au - bv), \end{cases}$$

имеет семейство решений $v = a/bu$. Однако степень вырождения системы (1.1) выше, чем системы (1.2) и систем, рассмотренных в [1, 6].

Более детальный анализ показывает, что матрица A системы (1.1) (после приведения к системе уравнений первого порядка) имеет двукратное нулевое собственное значение. Это существенно сказывается на асимптотике решения системы (1.1).

Пусть функции $u^0, v^0(x), \varphi(x), \psi(x)$ гладкие и стремятся к нулю: $u^0(x), v^0(x), \varphi(x), \psi(x) \rightarrow 0$ при $|x| \rightarrow \pm\infty$ (имеют вид «шапочки»).

Для выявления некоторых особенностей поведения решения в областях с большими градиентами поставим специальные начальные условия в виде асимптотически «узких шапочек»:

$$\begin{cases} u(x, 0) = u^0(x/\epsilon^2), & u_t(x, 0) = \varphi(x/\epsilon^2), \\ v(x, 0) = v^0(x/\epsilon^2), & v_t(x, 0) = \psi(x/\epsilon^2). \end{cases} \quad (1.3)$$

Для построения ФАР решения задачи (1.1)–(1.3) этих требований достаточно. Более детальные требования будут наложены ниже, в разделе 6, где рассматриваются вопросы существования, единственности и оценок некоторых членов ФАР.

Асимптотическое разложение решения задачи (1.1), (1.3) до порядка N строится в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u(x, t, \epsilon) \\ v(x, t, \epsilon) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Su^I(\zeta_1, t) \\ Sv^I(\zeta_1, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Su^{II}(\zeta_2, t, \epsilon) \\ Sv^{II}(\zeta_2, t, \epsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Pu(\xi, \tau, \epsilon) \\ Pv(\xi, \tau, \epsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Ru \\ Rv \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{i=0}^N \epsilon^i \left(\begin{pmatrix} Su_i^I(\zeta_1, t) \\ Sv_i^I(\zeta_1, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Su_i^{II}(\zeta_2, t) \\ Sv_i^{II}(\zeta_2, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Pu_i(\xi, \tau) \\ Pv_i(\xi, \tau) \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} Ru \\ Rv \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Здесь $S^I u, S^{II} u, S^I v, S^{II} v$ — слагаемые, описывающие АР решения вдоль определенных линий — «псевдохарактеристик» системы (1.1), $\Pi u, \Pi v$ — погранслойные слагаемые, R — остаточный член, вид растянутых переменных $\zeta_1, \zeta_2, \xi, \tau$ описан ниже. Предельное число членов разложения N определяется гладкостью функций, входящих в задачу (1.1), (1.3).

В настоящей работе ограничимся построением только главных членов АР (1.4).

Для построения АР преобразуем нелинейные слагаемые, следуя [2]:

$$\begin{aligned} f(u, v) &= f(S^I u + S^{II} u + \Pi u + Ru, S^I v + S^{II} v + \Pi v + Rv) = \\ &= f(S^I u, S^I v) + f(S^{II} u, S^{II} v) + (f(S^I u + S^{II} u + \Pi u, S^I v + S^{II} v + \Pi v) - \\ &- f(S^I u, S^I v)) - f(S^{II} u, S^{II} v) + \\ &+ (f(S^I u + S^{II} u + \Pi u + Ru, S^I v + S^{II} v + \Pi v + Rv) - \\ &- (f(S^I u + S^{II} u + \Pi u, S^I v + S^{II} v + \Pi v))) = \\ &= S^I f + S^{II} f + \Pi f + Rf. \end{aligned} \quad (1.5)$$

2. ПОСТРОЕНИЕ РЕГУЛЯРНОЙ ЧАСТИ АР

Хотя регулярная часть АР решения при начальных данных (1.3) отсутствует, для построения членов АР (1.4) необходимо определить уравнение, которому подчиняется старший член регулярной части.

Регулярная часть $\bar{U}$ должна удовлетворять системе уравнений

$$\begin{cases} \varepsilon^6(\bar{u}_{tt} - k_1^2 \bar{u}_{xx}) = -p(a\bar{u} - b\bar{v}) - \varepsilon^3 q(a\bar{u} - b\bar{v})_t - \varepsilon^2 \bar{f}(\bar{u}, \bar{v}), \\ \varepsilon^6(\bar{v}_{tt} - k_2^2 \bar{v}_{xx}) = p(a\bar{u} - b\bar{v}) + \varepsilon^3 q(a\bar{u} - b\bar{v})_t + \varepsilon^2 \bar{f}(\bar{u}, \bar{v}). \end{cases} \quad (2.1)$$

Стандартной процедурой (см. [2]), подставляя

$$\bar{U}_6(x, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^6 \varepsilon^i \begin{pmatrix} \bar{u}_i(x, t) \\ \bar{v}_i(x, t) \end{pmatrix} + \dots \quad (2.2)$$

и разложение нелинейности

$$f(\bar{u}, \bar{v}) = f(\bar{u}_0 + \varepsilon \bar{u}_1 + \dots, \bar{v}_0 + \varepsilon \bar{v}_1 + \dots) = f(\bar{u}_0, \bar{v}_0) + \varepsilon(\bar{f}_u(\bar{u}_0, \bar{v}_0)\bar{u}_1 + \bar{f}_v(\bar{u}_0, \bar{v}_0)\bar{v}_1) + \dots$$

в систему (2.1) и приравнявая коэффициенты при одинаковых степенях параметра ε , получаем систему уравнений для определения членов разложения (2.2).

При ε^0 получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 0 = -p(a\bar{u}_0 - b\bar{v}_0), \\ 0 = p(a\bar{u}_0 - b\bar{v}_0), \end{cases}$$

откуда

$$\bar{v}_0 = \frac{a}{b} \bar{u}_0, \bar{u}_0(x, t) = \chi_0(x, t).$$

Здесь $\chi_0(x, t)$ — произвольная гладкая функция.

Опуская объемные выкладки, запишем систему уравнений при ε^6 :

$$\begin{cases} p(a\bar{u}_6 - b\bar{v}_6) = -(\bar{u}_{0,tt} - k_1^2 \bar{u}_{0,xx}) - q(a\bar{u}_3 - b\bar{v}_3)_t - (f_u(\bar{u}_0, \bar{v}_0)\bar{u}_4 + f_v(\bar{u}_0, \bar{v}_0)\bar{v}_4) - F_4, \\ -p(a\bar{u}_6 - b\bar{v}_6) = -(\bar{v}_{0,tt} - k_2^2 \bar{v}_{0,xx}) + q(a\bar{u}_3 - b\bar{v}_3)_t + (f_u(\bar{u}_0, \bar{v}_0)\bar{u}_4 + f_v(\bar{u}_0, \bar{v}_0)\bar{v}_4) + F_4. \end{cases} \quad (2.3)$$

Здесь F_4 известным образом выражается через $\bar{u}_i, \bar{v}_i, i < 6$.

Условие разрешимости этой системы уравнений имеет вид

$$\bar{u}_{0,tt} - k_1^2 \bar{u}_{0,xx} + \bar{v}_{0,tt} - k_1^2 \bar{v}_{0,xx} = 0,$$

что дает уравнение для определения $\bar{u}_0, \bar{v}_0$.

Так как $\bar{v}_0 = \frac{a}{b} \bar{u}_0$ и $\bar{u}_0(x, t) = \chi_0(x, t)$, то функция χ_0 подчиняется уравнению

$$\chi_{0,tt} - \frac{bk_1^2 + ak_2^2}{a+b} \chi_{0,xx} = 0,$$

или

$$\chi_{0,tt} - k^2 \chi_{0,xx} = 0,$$

где

$$k^2 = \frac{bk_1^2 + ak_2^2}{a + b}. \quad (2.4)$$

Можно отметить, что $\min(k_1^2, k_2^2) < k^2 < \max(k_1^2, k_2^2)$. Величина k^2 существенна для дальнейших построений. Легко проверить, что

$$(k^2 - k_1^2) + \frac{a}{b}(k^2 - k_2^2) = \frac{(a + b)k^2 - (ak_2^2 + bk_1^2)}{b} = 0. \quad (2.5)$$

Это соотношение потребуется в дальнейшем.

3. ПОСТРОЕНИЕ АР ПРИ НАЧАЛЬНЫХ УСЛОВИЯХ ТИПА «ВСПЛЕСК»

Пусть начальные условия для системы (1.1) имеют вид (1.3)

$$\begin{cases} u(x, 0) = u^0(x/\varepsilon^2), u_t(x, 0) = \varphi(x/\varepsilon^2), \\ v(x, 0) = v^0(x/\varepsilon^2), v_t(x, 0) = \psi(x/\varepsilon^2), \end{cases}$$

где функции $u^0(x), v^0(x), \varphi(x), \psi(x)$ удовлетворяют условию стремления к нулю на бесконечности. В этом случае (1.3) задают начальные данные в виде асимптотически узких «шапочек», «всплесков».

Будем искать АР решения системы (1.1) с начальными условиями (1.3) в виде

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u(x, t, \varepsilon) \\ v(x, t, \varepsilon) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} Su^I(\zeta_1, t, \varepsilon) \\ Sv^I(\zeta_1, t, \varepsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Su^{II}(\zeta_2, t, \varepsilon) \\ Sv^{II}(\zeta_2, t, \varepsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Pu(\xi, \tau, \varepsilon) \\ Pv(\xi, \tau, \varepsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Ru \\ Rv \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{i=0}^N \varepsilon^i \left(\begin{pmatrix} Su_i^I(\zeta_1, t) \\ Sv_i^I(\zeta_1, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Su_i^{II}(\zeta_2, t) \\ Sv_i^{II}(\zeta_2, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Pu_i(\xi, \tau) \\ Pv_i(\xi, \tau) \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} Ru \\ Rv \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (3.1)$$

В разложении (3.1) функции Su, Sv имеют характер бегущих волн, Pu, Pv — характер пограничных функций (см. ниже), растянутые переменные $\zeta_{1,2}$ определены ниже, $\xi = \frac{x}{\varepsilon^2}, \tau = \frac{t}{\varepsilon^3}$.

Число N членов разложения при гладких начальных условиях и функции f произвольно. В этой работе ограничимся определением старших членов разложения (3.1), взяв $N = 4$. При определении старших членов разложения ($i = 0$) часть слагаемых в (3.1) играют вспомогательные роли (см. ниже).

Построим функции Su, Sv .

Определим растянутые переменные $\zeta_{1,2} = \frac{x \pm kt}{\varepsilon^2}$, где k определено выражением (2.4). Соответственно, функции Su, Sv должны удовлетворять системе (1.1) с соответствующими нелинейностями Sf и начальным условиям (1.3) или части этих условий, а так же удовлетворять требованию $S \rightarrow 0$ при $\zeta \rightarrow \pm\infty$.

Строим функцию S^I в виде

$$S^I(\zeta_1, t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} S^I u(\zeta_1, t, \varepsilon) \\ S^I v(\zeta_1, t, \varepsilon) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^4 \varepsilon^i \begin{pmatrix} S_i^I u(\zeta_1, t) \\ S_i^I v(\zeta_1, t) \end{pmatrix} + R, \quad (3.2)$$

где $\zeta_1 = \frac{x - kt}{\varepsilon^2}$.

Подставим (3.2) в слагаемое $S^I f$ в (1.5) и разложим правую часть в ряд по степеням параметра ε :

$$\begin{aligned} S^I f &= f(S^I u, S^I v) = f(S_0^I u + \varepsilon S_1^I u + \dots, S_0^I v + \varepsilon S_1^I v + \dots) = \\ &= f(S_0^I u, S_0^I v) + \varepsilon(f_u(S_0^I u, S_0^I v)S_1^I u + f_v(S_0^I u, S_0^I v)S_1^I v) + \dots = \\ &= f(S_0 u, S_0 v) + \varepsilon S F_1 + \varepsilon^2 S F_2 + \varepsilon^3 S F_3 + \dots \end{aligned} \quad (3.3)$$

Ниже индексы I у функций $S^I u, S^I v, S^I f$ и индекс 1 у переменной ζ опущены.

Подставим (3.2), (3.3) в систему (1.1) с модифицированной нелинейностью, перейдем в системе (1.1) от переменных (x, t) к переменным (ζ, t) и проведем стандартную процедуру определения

систем уравнений для нахождения членов АР (3.2). При нулевой степени параметра получаем

$$\varepsilon^0 : \begin{cases} p(aS_0u - bS_0v) = 0, \\ -p(aS_0u - bS_0v) = 0, \end{cases}$$

отсюда

$$S_0v = \frac{a}{b}S_0u, \quad (3.4)$$

где $S_0u(\zeta, t)$ — пока не определенная функция.

При первой степени параметра получаем

$$\varepsilon^1 : \begin{cases} p(aS_1u - bS_1v) = -qk(aS_0u - bS_0v)_\zeta, \\ -p(aS_1u - bS_1v) = qk(aS_0u - bS_0v)_\zeta. \end{cases}$$

Эта система разрешима, отсюда

$$S_1v = \frac{a}{b}S_1u, \quad (3.5)$$

где $S_1u(\zeta, t)$ — пока не определенная функция.

При второй степени параметра получаем

$$\varepsilon^2 : \begin{cases} p(aS_2u - bS_2v) = -(k^2 - k_1^2)Su_{0\zeta\zeta} - qk(aS_1u - bS_1v)_\zeta - f(S_0u, S_0v), \\ -p(aS_2u - bS_2v) = -(k^2 - k_2^2)Sv_{0\zeta\zeta} + qk(aS_0u - bS_0v)_\zeta + f(S_0u, S_0v). \end{cases}$$

Условие разрешимости этой системы

$$(k^2 - k_1^2)Su_{0\zeta\zeta} + (k^2 - k_2^2)Sv_{0\zeta\zeta} = \frac{a(k^2 - k_2^2) + b(k^2 - k_1^2)}{b}Su_{0\zeta\zeta} = 0$$

выполняется в силу равенств (2.5) и (3.4). Отсюда

$$S_2v = \frac{a}{b}S_2u + \frac{(k^2 - k_1^2)}{pb}Su_{0\zeta\zeta} + \frac{1}{pb}f(S_0u, S_0v), \quad (3.6)$$

где $S_2u(\zeta, t)$ — пока не определенная функция.

Опуская объемные выкладки, отметим, что система уравнений при третьей степени малого параметра разрешима. Систему уравнений при четвертой степени малого параметра удобно записать, введя обозначение

$$q((aSu_1 - bSv_1)_t - k(aSu_3 - bSv_3)_\zeta) + F_2S = D.$$

С учетом этого обозначения получим систему уравнений при четвертой степени малого параметра:

$$\varepsilon^4 : \begin{cases} p(aS_4u - bS_4v) = 2kSu_{0,\zeta t} - (k^2 - k_1^2)Su_{2,\zeta\zeta} - D, \\ -p(aS_4u - bS_4v) = 2kSv_{0,\zeta t} - (k^2 - k_2^2)Sv_{2,\zeta\zeta} + D. \end{cases} \quad (3.7)$$

Условие разрешимости этой системы имеет вид

$$(k^2 - k_1^2)S_2u_{\zeta\zeta} - 2kS_0u_{\zeta t} + (k^2 - k_2^2)S_2v_{\zeta\zeta} - 2kS_0v_{\zeta t} = 0. \quad (3.8)$$

Используя (3.4), (3.5), исключим из (3.8) S_0v и S_2v .

Опуская несложные, но объемные выкладки, отметим лишь, что функция S_2u в окончательное выражение не входит благодаря тому, что коэффициент перед ней обращается в нуль (равенство (2.5)).

Введем обозначения

$$\frac{(k^2 - k_2^2)(k^2 - k_1^2)}{2pk(a+b)} = K, \quad \frac{1}{2pk(a+b)}f(S_0u, \frac{a}{b}S_0u) = f_{\text{eff}}(S_0u). \quad (3.9)$$

В этих обозначениях условие разрешимости (3.8) — уравнение для определения S_0u — имеет вид

$$(-S_0u_t + KS_0u_{\zeta\zeta\zeta} + (f_{\text{eff}}(S_0u))_\zeta)_\zeta = 0,$$

или

$$-S_0u_t + KS_0u_{\zeta\zeta\zeta} + (f_{\text{eff}}(S_0u))_\zeta = \Psi(t),$$

где $\Psi(t)$ — произвольная функция. Исходя из требования $S_0u_{\zeta \rightarrow \pm\infty} \rightarrow 0$, естественно положить $\Psi(t) \equiv 0$. Это дает окончательный вид уравнения для функции S_0u

$$-S_0u_t + KS_0u_{\zeta\zeta\zeta} + (f_{\text{eff}}(S_0u))_\zeta = 0. \quad (3.10)$$

Аналогично строится функция

$$S^{II}(\zeta_2, t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} S^{II}u(\zeta_2, t, \varepsilon) \\ S^{II}v(\zeta_2, t, \varepsilon) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^4 \varepsilon^i \begin{pmatrix} S_i^{II}u(\zeta_2, t) \\ S_i^{II}v(\zeta_2, t) \end{pmatrix} + R, \quad (3.11)$$

где $\zeta_2 = \frac{x+kt}{\varepsilon^2}$ (ниже индексы II у функции S^{II} и 2 у переменной ζ_2 могут быть опущены). Совершенно аналогично получаем, что функция $S_0^{II}u(\zeta_2, t)$ удовлетворяет уравнению

$$S_0^{II}u_t + K S_0^{II}u_{\zeta_2 \zeta_2} + (f_{\text{eff}}(S_0^{II}u))_{\zeta_2} = 0, \quad (3.12)$$

и $S_0^{II}v = \frac{a}{b} S_0^{II}u$.

Начальные условия для функций $S_0^I u, S_0^I v, S_0^{II} u, S_0^{II} v$ поставим ниже.

Отметим, что уравнения (3.10) и (3.12) являются обобщенными уравнениями Кортевега—де Фриза [7].

Последующие функции с номерами $i > 0$ удовлетворяют линейным неоднородным уравнениям

$$\begin{aligned} -S_i^I u + K S_i^I u_{\zeta_1 \zeta_1} + (f_{\text{eff},u}(S_0^I u) S_i^I u + s_i^I)_{\zeta} &= 0, \\ S_i^{II} u_t + K S_i^{II} u_{\zeta_2 \zeta_2} + (f_{\text{eff},u}(S_0^I u) S_i^{II} u + s_i^{II})_{\zeta} &= 0, \end{aligned} \quad (3.13)$$

где $s_i u, s_i v$ выражаются через $S_j u, S_j v$ с номерами $j < i$.

Окончательно S -функции построены в виде

$$S(\zeta, t, \varepsilon) = S^I(\zeta_1, t, \varepsilon) + S^{II}(\zeta_2, t, \varepsilon) = \sum_{i=0}^4 \varepsilon^i \left(\begin{pmatrix} S_i^I u(\zeta_1, t) \\ S_i^I v(\zeta_1, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_i^{II} u(\zeta_2, t) \\ S_i^{II} v(\zeta_2, t) \end{pmatrix} \right) + R. \quad (3.14)$$

Для всех членов разложения (3.14) получены уравнения.

4. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ Π

Начальные условия (1.3)

$$\begin{cases} u(x, 0) = u^0(x/\varepsilon^2), u_t(x, 0) = \varphi(x/\varepsilon^2), \\ v(x, 0) = v^0(x/\varepsilon^2), v_t(x, 0) = \psi(x/\varepsilon^2) \end{cases}$$

не могут быть удовлетворены S -функциями, поскольку условий четыре, а число степеней свободы у функций S равно двум (S^I и S^{II}). Для выполнения начальных условий строим пограничные функции

$$\begin{pmatrix} \Pi u(\xi, \tau, \varepsilon) \\ \Pi v(\xi, \tau, \varepsilon) \end{pmatrix} = \sum_{i=0}^4 \varepsilon^i \begin{pmatrix} \Pi u_i(\xi, \tau) \\ \Pi v_i(\xi, \tau) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Ru \\ Rv \end{pmatrix}, \quad (4.1)$$

где $\tau = t/\varepsilon^3$, $\xi = x/\varepsilon^2$. Функции Πu и Πv должны формально удовлетворять с необходимой точностью системе (1.1) с соответствующей нелинейностью, совместно с функциями S^I и S^{II} удовлетворять начальным условиям

$$\begin{cases} S^I u(x, 0) + S^{II} u(x, 0) + \Pi u(x, 0) = u^0(x/\varepsilon^2), \\ (S^I u(x, t) + S^{II} u(x, t) + \Pi u(x, t))|_{t=0} = \varphi(x/\varepsilon^2), \\ S^I v(x, 0) + S^{II} v(x, 0) + \Pi v(x, 0) = v^0(x/\varepsilon^2), \\ (S^I v(x, t) + S^{II} v(x, t) + \Pi v(x, t))|_{t=0} = \psi(x/\varepsilon^2). \end{cases} \quad (4.2)$$

Кроме того, все $\Pi_i u$ и $\Pi_i v$ должны быть функциями погранслоя

$$\lim_{\tau \rightarrow +\infty} \Pi u_i = 0, \quad \lim_{\tau \rightarrow +\infty} \Pi v_i = 0 \quad \forall i = 0, 1, 2, \dots \quad (4.3)$$

Переходя в системе (1.1) к переменным (τ, ξ) , оставляя от нелинейности (1.5) соответствующие слагаемые Πf , запишем ее в виде

$$\begin{aligned} \Pi u_{\tau\tau} &= -p(a\Pi u - b\Pi v) - q(a\Pi u - b\Pi v)_{\tau} + \varepsilon^2 k_1^2 \Pi u_{\xi\xi} - \varepsilon^2 \Pi f(\Pi u, \Pi v), \\ \Pi v_{\tau\tau} &= p(a\Pi u - b\Pi v) + q(a\Pi u - b\Pi v)_{\tau} + \varepsilon^2 k_2^2 \Pi v_{\xi\xi} + \varepsilon^2 \Pi f(\Pi u, \Pi v). \end{aligned}$$

Подставим разложение (4.1) в нелинейность (1.5), в функциях S перейдем к переменным $\xi = x/\varepsilon^2$, $\tau = t/\varepsilon^3$ (см. [2]). Опуская стандартные объемные выкладки, запишем системы уравнений для определения членов разложения (4.1).

Ограничимся лишь системой для определения $\Pi_0 u$ и $\Pi_0 v$

$$\begin{aligned}\Pi_{0,\tau\tau} u &= -p(a\Pi u_0 - b\Pi v_0) - q(a\Pi u_0 - b\Pi v_0)_\tau, \\ \Pi_{0,\tau\tau} v &= p(a\Pi u_0 - b\Pi v_0) + q(a\Pi u_0 - b\Pi v_0)_\tau.\end{aligned}\quad (4.4)$$

Остальные $\Pi_i u$ и $\Pi_i v$ определяются из аналогичных неоднородных систем, в которых неоднородность зависит от найденных ранее членов разложения $\Pi_j u, \Pi_j v, j < i$. Дополнительное условие — все $\Pi_i u$ и $\Pi_i v \lim_{\zeta \rightarrow 0} \Pi_i u$ и $\Pi_i v$ должны быть функциями погранслоя (4.3).

5. НАЧАЛЬНЫЕ УСЛОВИЯ

Перепишем начальные условия (4.2) в новых переменных. Учтем, что $x/\varepsilon^2 = \xi$:

$$Su(\zeta, t)_t = Su(\zeta(x, t), t)_t = Su(\zeta, t)_t + Su(\zeta, t)_\zeta \zeta_t = Su(\zeta, t)_t + \varepsilon^{-2}(\mp)kSu(\zeta, t)_\zeta. \quad (5.1)$$

В новых переменных начальные условия имеют вид

$$\begin{cases} S^I u(\zeta_1) + S^{II} u(\zeta_2) + \Pi u(\xi) = u^0(\xi), \\ S^I v(\zeta_1) + S^{II} v(\zeta_2) + \Pi v(\xi) = v^0(\xi), \\ (S^I u(\zeta_1, t) + S^{II} u(\zeta_2, t))_t + \varepsilon^{-3} \Pi u(\xi, \tau)_\tau \Big|_{t=0} = \varphi(\xi), \\ (S^I v(\zeta_1, t) + S^{II} v(\zeta_2, t))_t + \varepsilon^{-3} \Pi v(\xi, \tau)_\tau \Big|_{t=0} = \psi(\xi). \end{cases} \quad (5.2)$$

Соотношения (5.2) с учетом требований (4.3) дают начальные условия для функций $S^I_i u, S^{II}_i u, \Pi_i u, \Pi_i v, i = 0, 1, 2, \dots$. Подставляя в (5.2) разложения (3.14) и (4.1), учитывая равенства (5.1), разделяя степени параметра ε , получаем начальные условия для $S^I_i u, S^{II}_i u, \Pi_i u, \Pi_i v, i = 0, 1, 2, \dots$

Опуская объемные выкладки, приведем начальные условия для нулевого приближения $\zeta_1(x, 0) = \zeta_2(x, 0) = \xi$:

$$S^I_0 u(\zeta_1, 0) = S^{II}_0 u(\zeta_2, 0) = \frac{1}{2} \frac{b}{a+b} (u^0(\xi) + v^0(\xi)), \quad (5.3)$$

$$\begin{aligned}\Pi_0 u(\xi, 0) &= -\Pi_0 v(\xi, 0) = \frac{au^0(\xi) - bv^0(\xi)}{a+b}, \\ \Pi_0 u(\xi, \tau)_\tau \Big|_{t=0} &= 0, \\ \Pi_0 v(\xi, \tau)_\tau \Big|_{t=0} &= 0.\end{aligned} \quad (5.4)$$

Начальные условия для остальных $S^I_i u, S^{II}_i u, \Pi_i u, \Pi_i v, i = 0, 1, 2, \dots$ получаются аналогично.

6. ОЦЕНКИ ФУНКЦИЙ S, Π

6.1. Оценки функций S . Для формального вывода уравнений (3.10), (3.12) и начальных условий (5.3) для определения функций S^I_0, S^{II}_0 достаточно наложенных выше условий гладкости функции $f(u, v)$ и быстрого убывания начальных условий (1.3). Однако для решения вопроса существования и оценок решений уравнений (3.10), (3.12) с начальными условиями (5.3) этих условий недостаточно.

Уравнения (3.10), (3.12) являются одним из обобщений хорошо известного уравнения Кортевега—де Фриза [7] (ниже — КдФ), а задача (3.10), (5.3) — начальная задача для обобщенного уравнения КдФ. Само уравнение КдФ и многие его обобщения исследовались в большом количестве работ, значительная часть которых посвящена образованию солитонов и поведению решения при больших временах. Для наших целей необходимы результаты о существовании и единственности решений задачи Коши для обобщенных уравнений КдФ на конечном промежутке по времени и оценки убывания по пространственной переменной на бесконечности, которые есть, например, в работах [3, 8, 9].

Обозначение 6.1. Введем обозначение пространства Шварца гладких быстро убывающих функций: $\tilde{S}(\mathbb{R}^1)$ (знак $\tilde{S}$ добавлен, чтобы сделать различие в схожих обозначениях класса функций и членов $\mathcal{AP}$). Пространство функций $f(x, t)$, быстро убывающих по переменной x на промежутке $[0, T]$, обозначим $\tilde{S}C_1(T)$.

Наложим на данные задачи (1.1), (1.3) дополнительные условия 6.1 и 6.2 или 6.3.

Условие 6.1. Гладкие функции $u^0(z), v^0(z), \varphi(z), \psi(z)$ принадлежат пространству Шварца быстро убывающих функций: $u^0(z), v^0(z), \varphi(z), \psi(z) \in \tilde{S}(\mathbb{R}^1)$.

Условие 6.2. Функция $f(u, v)$ является многочленом с постоянными коэффициентами.

Условие 6.3. Для производной функции $\tilde{f}_{\text{eff}}(z) = f(z, \frac{a}{b}z)$ выполняется оценка: существуют $\delta > 0, 0 \leq p < 4$ такие, что при $z \in \mathbb{R}^1$

$$\left| \frac{\partial^2 \tilde{f}_{\text{eff}}(z)}{\partial z^2} \right| \leq \beta(|z|^p + 1).$$

Для того, чтобы воспользоваться результатами этих работ, сформулируем следствия из наложенных выше условий 6.1, 6.2 и 6.3.

Следствие 6.1 (из условия 6.1). При выполнении условия 6.1 правая часть начальных условий (5.3) для функций $S_0^I u, S_0^{II} u$ принадлежит классу быстро убывающих функций $SC^\infty(\mathbb{R}^1)$.

Следствие 6.2. Начальные условия для членов разложения $S_i^I u, S_i^{II} u, i > 0$ также принадлежат классу быстро убывающих функций $SC^\infty(\mathbb{R}^1)$.

Следствие 6.3 (из условия 6.2). При выполнении условия 6.2 функция

$$f_{\text{eff}}(s) = \frac{1}{2pk(a+b)} f\left(s, \frac{a}{b}s\right)$$

в уравнениях (3.10), (3.12) также является многочленом с постоянными коэффициентами.

Следствие 6.4 (из условия 6.3). Для функции $f_{\text{eff}}(z) = \frac{1}{2pk(a+b)} f\left(z, \frac{a}{b}z\right)$ справедливы такие же оценки на производную $\frac{\partial^2 f_{\text{eff}}(z)}{\partial z^2}$ при выполнении условия 6.3.

Сформулируем теоремы существования, единственности функций S_0 и их оценки.

Теорема 6.1 (существование и оценка S -функций). При выполнении условий 6.1, 6.2 существует $T > 0$ такое, что при всех $0 \leq t \leq T$ решения уравнений (3.10), (3.12) с начальными условиями (5.3) существуют, единственны и принадлежат классу быстро убывающих функций $\tilde{SC}_1(T)$.

Доказательство. В силу следствия 6.1 правая часть начального условия (5.3) является быстро убывающей функцией из класса SR^1 (следствие 6.1).

В силу следствия 6.2 нелинейность в уравнениях (3.10), (3.12) $f_{\text{eff}}(s) = \frac{1}{2pk(a+b)} f\left(s, \frac{a}{b}s\right)$ является многочленом.

Поскольку выполнены все условия основной теоремы работы [9, §3, с. 559], то отсюда следует доказательство теоремы 6.1. $\square$

Сформулируем еще одну теорему существования и единственности решения задач (3.10), (3.12) с начальными условиями (5.3) при несколько иных условиях.

Теорема 6.2 (существование и оценка S функций). При выполнении условий 6.1, 6.3 существует $T > 0$ такое, что при всех $0 \leq t \leq T$ решения уравнений (3.10), (3.12) с начальными условиями (5.3) существуют, единственны и принадлежат классу быстро убывающих функций $\tilde{SC}_1(T)$.

Доказательство. Задачи (3.10)–(5.3), (3.12)–(5.3) при $f_{\text{eff}}(s) = \frac{1}{2pk(a+b)} f\left(s, \frac{a}{b}s\right)$ в силу следствий 6.1, 6.3 полностью удовлетворяют всем условиям теоремы 2.1 работы [8]. Отсюда следует доказательство теоремы 6.1. $\square$

Оценки функций $S_i, i = 1, 2, 3, 4$.

При выполнении условий 6.1, 6.2 или 6.3 справедлива также и теорема существования, единственности и оценки остальных функций S .

Теорема 6.3 (существование и оценка S_i , $i = 1, 2, 3, 4$). При выполнении условий 6.1, 6.2 или 6.3 существует $T > 0$ такое, что при всех $0 \leq t \leq T$ все $S_i^I u, S_i^{II} u, S_i^I v, S_i^{II} v$, $i = 1, 2, 3, 4$ существуют, единственны и принадлежат классу быстро убывающих функций $\tilde{S}C_1(T)$.

Доказательство. Доказательство почти дословно повторяет доказательство предыдущей теоремы 6.2. $\square$

Из теорем 6.1, 6.2, 6.3 вытекает:

Следствие 6.5. Существует быстро убывающая функция $\theta_1(z) \in \tilde{S}C_1(T)$ такая, что для всех $0 \leq t \leq T$ выполняются неравенства

$$\begin{aligned} |D^k S_i^I u| &< \theta_1(\zeta_1), & |D^k S_i^{II} u| &< \theta_1(\zeta_2), \\ |D^k S_i^I v| &< \theta_1(\zeta_1), & |D^k S_i^{II} v| &< \theta_1(\zeta_2), \end{aligned} \quad (6.1)$$

$$i = 0, 1, 2, 3, 4; \quad k = 0, 1, 2, 3.$$

Эту функцию удобно использовать при оценках остаточного члена.

6.2. Оценки функций Π .

Теорема 6.4. Все $\Pi_i u, \Pi_i v, i = 0, 1, 2, 3, 4$ существуют, единственны и удовлетворяют оценкам

$$|\Pi_i u(\tau, \xi)| < C e^{-\kappa \tau} \theta_2(\xi), \quad C > 0, \quad \kappa > 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (6.2)$$

вместе со своими производными (до третьего порядка включительно), где функция $\theta_2(z) \in \tilde{S}$.

Доказательство. Доказательство стандартное [2]. Экспоненциальные оценки убывания по переменной τ делаются стандартно [2], оценка скорости убывания по переменной ξ следует из оценок функций S . $\square$

7. ОЦЕНКА ОСТАТОЧНОГО ЧЛЕНА

Окончательно построенное АР имеет вид

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} u(x, t, \varepsilon) \\ v(x, t, \varepsilon) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} S^I u(\zeta_1, t, \varepsilon) \\ S^I v(\zeta_1, t, \varepsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S^{II} u(\zeta_2, t, \varepsilon) \\ S^{II} v(\zeta_2, t, \varepsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Pi u(\xi, \tau, \varepsilon) \\ \Pi v(\xi, \tau, \varepsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} Ru \\ Rv \end{pmatrix} = \\ &= \sum_{i=0}^4 \varepsilon^i \left(\begin{pmatrix} S_i^I u(\zeta_1, t) \\ S_i^I v(\zeta_1, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_i^{II} u(\zeta_2, t) \\ S_i^{II} v(\zeta_2, t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \Pi_i u(\xi, \tau) \\ \Pi_i v(\xi, \tau) \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} Ru \\ Rv \end{pmatrix} = \\ &= S^I(\zeta_1, t, \varepsilon) + S^{II}(\zeta_2, t, \varepsilon) + \Pi(\xi, \tau, \varepsilon) + R = U + R. \end{aligned} \quad (7.1)$$

В соответствии с алгоритмом построения АР остаточные члены (Ru, Rv) удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} \varepsilon^6 (Ru_{tt} - k_1^2 Ru_{xx}) &= -p(aRu - bRv) - \varepsilon^3 q(aRu - bRv)_t - \varepsilon^2 Rf(Ru, Rv) + ru, \\ \varepsilon^6 (Rv_{tt} - k_2^2 Rv_{xx}) &= p(aRu - bRv) + \varepsilon^3 q(aRu - bRv)_t + \varepsilon^2 Rf(Ru, Rv) + rv \end{aligned} \quad (7.2)$$

и начальным условиям

$$\begin{cases} Ru(x, 0) = 0, Ru_t(x, 0) = 0, \\ Rv(x, 0) = 0, Rv_t(x, 0) = 0. \end{cases} \quad (7.3)$$

Здесь функция Rf имеет вид

$$\begin{aligned} Rf(Ru, Rv) &= (f(S^I u + S^{II} u + \Pi u + Ru, S^I v + S^{II} v + \Pi v + Rv) - \\ &\quad - (f(S^I u + S^{II} u + \Pi u, S^I v + S^{II} v + \Pi v))), \\ Rf(0, 0) &= 0. \end{aligned}$$

При выполнении условия 6.2 функция Rf является многочленом, при выполнении условия 6.3 функция Rf удовлетворяет таким же условиям на производные.

Замечание 7.1. Очевидно, что в оценках (6.1), (6.2) быстро убывающие функции $\theta_1(z), \theta_2(z)$ можно заменить на одну $\theta(z) \in \tilde{S}$, что использовано ниже, при формулировке теоремы 7.1.

Теорема 7.1. *Существует такое $T > 0$, не зависящее от ϵ , что на отрезке $0 < t \leq T$ остаточные члены (Ru, Rv) в АР (7.1) удовлетворяют системе уравнений (7.2) и начальным условиям (7.3).*

Слагаемые (ru, rv) в уравнениях (7.2) удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned} ru &= O(\epsilon^5(\theta(\zeta_1) + \theta(\zeta_2)) + \epsilon^4\theta(\xi)e^{-\kappa\tau}), \\ rv &= O(\epsilon^5(\theta(\zeta_1) + \theta(\zeta_2)) + \epsilon^4\theta(\xi)e^{-\kappa\tau}). \end{aligned} \quad (7.4)$$

Здесь функция $\theta(z)$ взята в соответствие с замечанием 7.1.

Доказательство. Доказательство следует из оценок (6.1), (6.2) и алгоритма построения АР (7.1). $\square$

8. ИТОГИ

1. Построены главные члены асимптотического разложения решения задачи Коши с начальными условиями (1.3) типа «узкая шапочка» для сингулярно возмущенной системы гиперболических уравнений (1.1) в критическом случае.
2. Для любого $t \geq t_0 > 0$, где $t_0 > 0$ — произвольное, не зависящее от ϵ , АР (7.1) может быть записано в виде

$$\begin{pmatrix} u(x, t, \epsilon) \\ v(x, t, \epsilon) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} S_0^I u(\zeta_1, t, \epsilon) \\ S_0^I v(\zeta_1, t, \epsilon) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} S_0^{II} u(\zeta_2, t, \epsilon) \\ S_0^{II} v(\zeta_2, t, \epsilon) \end{pmatrix} + O(\epsilon). \quad (8.1)$$

Вид АР (8.1) следует из экспоненциального убывания (6.2) пограничных функций П:

$$\left| \Pi_i u\left(\frac{t}{\epsilon^3}, \xi\right) \right| = O(\epsilon^N) \quad \forall N > 0, \quad i = 0, 1, 2, \dots \quad (8.2)$$

3. Главные слагаемые в АР (7.1), оставленные в (8.1), суть решения начальных задач для обобщенных уравнений Кортевега—де Фриза (3.10), (3.12).
4. Сформулированы условия 6.1, 6.2 или 6.3, при выполнении которых функции S существуют и являются быстро убывающими на некотором промежутке $[0, T]$.
5. При выполнении условий 6.1, 6.2 или 6.3 сделана оценка невязки остаточного члена в АР.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Васильева А. Б. О внутреннем переходном слое в решении системы уравнений в частных производных первого порядка // Дифф. уравн. — 1985. — 21, № 9. — С. 1537–1544.
2. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Сингулярно возмущенные уравнения в критических случаях. — М.: Изд-во Моск. ун-та, 1978.
3. Кружков С. Н., Фаминский А. В. Обобщенные решения задачи Коши для уравнения Кортевега—де Фриза // Мат. сб. — 1983. — 120, № 3. — С. 396–425.
4. Нестеров А. В. О структуре решения одного класса гиперболических систем с несколькими пространственными переменными в дальней зоне // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2016. — 56, № 4. — С. 639–649. — DOI: [10.7868/S0044466916040141](https://doi.org/10.7868/S0044466916040141).
5. Нестеров А. В. Об одном эффекте влияния малой взаимной диффузии на процессы переноса в многофазной среде // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2021. — 61, № 3. — С. 519–528. — DOI: [10.31857/S0044466921020095](https://doi.org/10.31857/S0044466921020095).
6. Нестеров А. В., Шулико О. В. Об асимптотике решения сингулярно возмущенной системы параболических уравнений в критическом случае // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2010. — 50, № 2. — С. 268–275.
7. Уизем Дж. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
8. Фаминский А. В. Задача Коши для уравнения Кортевега—де Фриза и его обобщений // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1988. — № 13. — С. 57–105.
9. Якулов В. М. О задаче Коши для уравнения Кортевега—де Фриза // Дифф. уравн. — 1975. — 11, № 3. — С. 556–561.

А. В. Нестеров

Российский экономический университет им. Г. В. Плеханова, Москва, Россия

E-mail: andrenerov@yandex.ru, РИНЦ SPIN-код: 7754-2242, РИНЦ AuthorID: [173696](https://elibrary.ru/author_index.aspx?id=173696), ResearcherID: [JNR-9882-2023](https://orcid.org/0000-0002-4702-4777), Scopus: [24360671800](https://orcid.org/0000-0002-4702-4777), ORCID: [0000-0002-4702-4777](https://orcid.org/0000-0002-4702-4777)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-114-125](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-114-125)
 EDN: [UERBYQ](#)

UDC 517.955.8:519.633
Research article

Asymptotics of the solution of the Cauchy problem for a singularly perturbed system of hyperbolic equations in the critical case

A. V. Nesterov

Plekhanov Russian State University of Economics, Moscow, Russia

Abstract. We construct the first terms of the formal asymptotic expansion in a small parameter of the solution to the Cauchy problem with “narrow cap” initial conditions for a singularly perturbed system of wave equations in the critical case. The asymptotic expansion is constructed as a sum of traveling-wave terms and boundary-value functions. The traveling-wave terms are described by generalized Korteweg–de Vries equations. Under certain assumptions, the remainder term is estimated by the residual.

Keywords: asymptotic expansions, singularly perturbations, critical case, initial problems, systems of hyperbolic equations, generalized Korteweg–de Vries equation.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. This work was supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, project No. FSSW-2023-0004.

For citation: A. V. Nesterov, “Asymptotics of the solution of the Cauchy problem for a singularly perturbed system of hyperbolic equations in the critical case,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 1, 114–125. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-114-125](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-114-125) EDN: [UERBYQ](#)

REFERENCES

1. A. B. Vasil’eva, “O vnutrennem perekhodnom sloe v reshenii sistemy uravneniy v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka” [On the internal transition layer in the solution of a system of first-order partial differential equations], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1985, **21**, No. 9, 1537–1544 (in Russian).
2. A. B. Vasil’eva and V. F. Butuzov, *Singulyarno vozmushchennye uravneniya v kriticheskikh sluchayakh* [Singularly Perturbed Equations in Critical Cases], Moscow State Univ., Moscow, 1978 (in Russian).
3. S. N. Kruzhkov and A. V. Faminskii, “Obobshchennye resheniya zadachi Koshi dlya uravneniya Kortevega–de Friza” [Generalized solutions of the Cauchy problem for the Korteweg–de Vries equation], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 1983, **120**, No. 3, 396–425 (in Russian).
4. A. V. Nesterov, “O strukture resheniya odnogo klassa giperbolicheskikh sistem s neskol’kimi prostranstvennymi peremennymi v dal’ney zone” [On the structure of the solution of one class of hyperbolic systems with several spatial variables in the far field], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2016, **56**, No. 4, 639–649 (in Russian), DOI: [10.7868/S0044466916040141](https://doi.org/10.7868/S0044466916040141).
5. A. V. Nesterov, “Ob odnom effekte vliyaniya maloy vzaimnoy diffuzii na protsessy perenosa v mnogofaznoy srede” [On one effect of the influence of small mutual diffusion on transport processes in a multiphase medium], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2021, **61**, No. 3, 519–528 (in Russian), DOI: [10.31857/S0044466921020095](https://doi.org/10.31857/S0044466921020095).
6. A. V. Nesterov and O. V. Shuliko, “Ob asimptotike resheniya singulyarno vozmushchennoy sistemy parabolicheskikh uravneniy v kriticheskom sluchae” [On the asymptotic behavior of the solution of a singularly perturbed system of parabolic equations in the critical case], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2010, **50**, No. 2, 268–275 (in Russian).

7. G. B. Whitham, *Lineynye i nelineynye volny* [Linear and Nonlinear Waves], Mir, Moscow, 1977 (Russian translation).
8. A. V. Faminskii, “Zadacha Koshi dlya uravneniya Kortevega—de Friza i ego obobshcheniy” [The Cauchy problem for the Korteweg—de Vries equation and its generalizations], *Tr. Sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 1988, No. 13, 57–105 (in Russian).
9. V. M. Yakupov, “O zadache Koshi dlya uravneniya Kortevega—de Friza” [On the Cauchy problem for the Korteweg—de Vries equation], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1975, **11**, No. 3, 556–561 (in Russian).

A. V. Nesterov

Plekhanov Russian State University of Economics, Moscow, Russia

E-mail: andrenesterov@yandex.ru, eLIBRARY SPIN-code: 7754-2242, eLIBRARY AuthorID: 173696, ResearcherID: JNR-9882-2023, Scopus: 24360671800, ORCID: 0000-0002-4702-4777

РЕГУЛЯРИЗИРУЮЩИЙ ОПЕРАТОР ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ПЕРВОГО РОДА В ПРОСТРАНСТВЕ КВАДРАТИЧНО-СУММИРУЕМЫХ ФУНКЦИЙ

И. А. УСЕНОВ, Р. К. УСЕНОВА

Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызстан

Аннотация. Задачи решения нелинейных интегральных уравнений первого рода относятся к классу некорректно поставленных задач, так как их решение может не существовать, быть неопределенным либо неустойчивым относительно малых возмущений исходных данных. Это существенно осложняет их практическое применение в математическом моделировании и смежных областях, где такие уравнения возникают при описании обратных задач.

В данной работе построен оператор регуляризации для решения одного класса нелинейных интегральных уравнений первого рода в пространстве квадратично-суммируемых функций в случае, когда ядро и правая часть заданы приближенно.

Конструкция предлагаемого метода регуляризации основана на регуляризованном уравнении, полученном по аналогии с методом Лаврентьева.

В работе получен выбор параметра регуляризации в зависимости от погрешностей правой части и ядра. Получены априорные оценки. Установлены оценки скорости сходимости регуляризованного решения к точному решению исходного нелинейного интегрального уравнения первого рода. Для явного представления решения использованы фундаментальные функции Э. Шмидта.

Ключевые слова: нелинейное интегральное уравнение первого рода, некорректно поставленная задача, оператор регуляризации, метод Лаврентьева, фундаментальные функции Э. Шмидта.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Вклад авторов. *Усенов И. А.* — исследование сходимости приближенного решения к точному решению исходного уравнения; *Усенова Р. К.* — выбор параметра регуляризации в зависимости от погрешностей приближенно заданных данных.

Для цитирования: *Усенов И. А., Усенова Р. К.* Регуляризирующий оператор для решения нелинейного интегрального уравнения первого рода в пространстве квадратично-суммируемых функций // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 126–137. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-126-137](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-126-137) EDN: [UFBDNA](https://www.edn.ru/UFBDNA)

ВВЕДЕНИЕ

Теория некорректно поставленных задач является одним из ведущих математических направлений. Ее развитие в значительной степени стимулируется богатейшими практическими приложениями. В свою очередь, необходимость решения прикладных задач ставит перед исследователями широкий комплекс сложнейших математических задач и требует развития теоретического аппарата, существенно обогащающего математику в целом. Не зря это направление всегда привлекало

к себе величайшие математические умы XX века, которые, с уверенностью можно сказать, стояли у истоков развития данного направления — А. Н. Тихонов, М. М. Лаврентьев, В. К. Иванов, В. Н. Страхов, Р. Латтес, Ж.-Л. Лионс и др.

В данной работе исследуется класс нелинейного интегрального уравнения первого рода в пространстве квадратично-суммируемых функций с приближенно заданными данными.

Конструкция метода регуляризации связана с регуляризованным уравнением, полученным на основе идеи метода Лаврентьева. Устанавливаются оценки скорости сходимости регуляризованного решения к точному решению исходного уравнения первого рода.

Данная работа имеет теоретическую направленность. Результат может быть использован для решения прикладных задач геофизики, теплофизики, фильтрующей оптики, медицинской визуализации и т. д.

Многие прикладные задачи физики и геофизики сводятся к операторным уравнениям первого рода. К таким уравнениям сводятся также обратные задачи математической физики в тех случаях, когда выражение для функции Грина неизвестно.

Обратная задача электрокаротаж скважин, определяющая месторождения и подсчет запасов полезных ископаемых, является примером таких задач.

Вышперечисленные прикладные задачи являются актуальными задачами современной науки, решение этих задач может открыть новые грани современного состояния развития человечества. В связи с этим подчеркивается важность исследования некорректно поставленных задач.

В [1, 2, 6, 7, 10–12] систематически изучались линейные уравнения первого рода и некоторые классы нелинейных операторных уравнений первого рода.

Методы регуляризации для решения нелинейных уравнений первого рода рассматриваются в [1–18, 20–22].

В работе [9] исследовано нелинейное интегральное уравнение первого рода в пространстве непрерывных функций.

В работе [15] построен регуляризирующий оператор для решения интегрального уравнения первого рода, когда приближенно задана правая часть уравнения. Данная работа является продолжением работы [15], т. е. исследуется нелинейное интегральное уравнение первого рода с приближенными данными.

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ

В $L_2[0, 1]$ введем интегральные операторы:

$$Az = \int_0^1 K(t, s)z(s)ds, \quad K(z) = \int_0^1 H(t, s)M(s, z(s))ds.$$

Линейный оператор отображает $L_2([0, 1] \times [0, 1])$ в себя, т. е. $A: L_2([0, 1] \times [0, 1]) \rightarrow L_2([0, 1] \times [0, 1])$, нелинейный оператор K определен в пространстве $L_2([0, 1] \times [0, 1])$.

Используем стандартные обозначения и условия:

А) $K(t, s) = K(s, t) \in L_2([0, 1] \times [0, 1])$, $\int_0^1 \int_0^1 K(t, s)z(s)z(t)dsdt > 0$, $u(t) \in L_2[0, 1]$;

В) $H(t, s) \in L_2([0, 1] \times [0, 1])$ удовлетворяет равенству

$$H(t, s) = \int_0^s K(t, v)dv;$$

С) $M(s, z(s)) \in C([0, 1] \times \mathbb{R})$ истокпредставимо в виде

$$M(s, z(s)) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j(s)}{\lambda_j^\sigma} \int_0^1 M_1(w, z(w))\phi_j(w)dw,$$

где $0 < \sigma < 1$, $M_1(v, z(v)) \in C([0, 1] \times \mathbb{R})$ и удовлетворяет условию Липшица по z , т. е.

$$\|M_1(v, z_1(v)) - M_1(v, z_2(v))\|_{L_2[0,1]} \leq N\|z_1(v) - z_2(v)\|_{L_2[0,1]}.$$

Введем интегральное уравнение

$$\int_0^1 K(t, s)M(s, z(s))ds = u(t), \quad (1.1)$$

где $\int_0^1 K(t, s)M(s, z(s))ds = Az + K(z)$.

Предположим, что

- D) при $u(t) = u_0(t) \in L_2[0, 1]$ уравнение (1.1) имеет единственное решение $z_0(t) \in L_2[0, 1]$;
- E) вместо $u_0(t) \in L_2[0, 1]$ нам известно $u_\delta(t) \in L_2[0, 1]$ такое, что $\|u_\delta(t) - u_0(t)\|_{L_2[0, 1]} \leq \delta$, где δ — параметр погрешности;
- F) вместо ядра $K(t, s) \in L_2([0, 1] \times [0, 1])$ нам известно $K_h(t, s) \in L_2[0, 1]$ такое, что выполнено $\|K_h(t, s) - K(t, s)\|_{L_2[0, 1]} \leq h$, где h — параметр погрешности.

Тогда уравнение (1.1) с приближенными данными запишется в виде

$$\int_0^1 K_h(t, s)M(s, z(s))ds = u_\delta(t).$$

Наряду с уравнением (1.1) введем регуляризованное уравнение

$$\alpha z_\alpha(t) + \int_0^1 K(t, s)z_\alpha(s)ds + \int_0^1 H(t, s)M(s, z_\alpha(s))ds = u(t) \quad (1.2)$$

и регуляризованное уравнение с приближенными данными

$$\alpha z_\alpha(t) + \int_0^1 K_h(t, s)z_\alpha(s)ds + \int_0^1 H_h(t, s)M(s, z_\alpha(s))ds = u_\delta(t). \quad (1.3)$$

Изучим вопрос о связи решений уравнений (1.1), (1.2), (1.3).

В данной работе с помощью α -регуляризации Лаврентьева [12] построен регуляризирующий оператор для решения одного класса нелинейного интегрального уравнения первого рода в случае, когда ядро и правая часть заданы приближенно.

2. РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

Основным объектом исследования является уравнение (1.3). Для регуляризации решения уравнения (1.3) используем результаты [15] регуляризации уравнения (1.2). Для этого уравнение (1.3) запишем в виде

$$\begin{aligned} \alpha z_\alpha(t) + \int_0^1 K(t, s)z_\alpha(s)ds + \int_0^1 H(t, s)M(s, z_\alpha(s))ds + \\ + \int_0^1 R_h(t, s)z_\alpha(s)ds + \int_0^1 T_h(t, s)M(s, z_\alpha(s))ds = u_\delta(t), \end{aligned}$$

где $R_h(t, s) = K_h(t, s) - K(t, s)$, $T_h(t, s) = H_h(t, s) - H(t, s)$. Тогда ядро $T_h(t, s)$ в силу условия B) запишется в виде:

$$T_h(t, s) = H_h(t, s) - H(t, s) = \int_0^s (K_h(t, v) - K(t, v))dv = \int_0^s R_h(t, v)dv.$$

Для явного представления решения используем фундаментальные функции Э. Шмидта.

Пусть $\{\phi_k\}_{k=1}^\infty$ — ортонормированные собственные функции ядра $K(t, s)$, соответствующие собственным значениям $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$.

В силу теоремы Гильберта—Шмидта имеем

$$\int_0^1 K(t, s)z(s)ds = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{\lambda_k} \phi_k(t), \quad z_k = \int_0^1 z(s)\phi_k(s)ds. \quad (2.1)$$

Функцию $u(t) \in L_2[0, 1]$ разлагаем в ряд Фурье по системе функций $\{\phi_k\}_{k=1}^{\infty}$:

$$u(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \phi_k(t), \quad u_k = \int_0^1 u(s)\phi_k(s)ds. \quad (2.2)$$

Используя (1.2), (1.3), (2.1) и (2.2), из (1.1) получим, учитывая ортонормированность собственных функций

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{\lambda_k} \phi_k(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k \phi_k(t) - \int_0^s \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_k(t)\phi_k(s)}{\lambda_k^{\sigma+1}} M_1(v, z(v)) ds dv - \\ &\quad - \int_0^1 R_h(t, s)z_{\alpha}(s)ds - \int_0^1 \int_0^s R_h(t, v)dv \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\phi_j(s)}{\lambda_j^{\sigma}} \int_0^1 M_1(w, z(w))\phi_j(w)dw ds. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Меняя порядок интегрирования в (2.3), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{\lambda_k} \phi_k(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k \phi_k(t) + \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_k(t)\phi_k(s)}{\lambda_k^{\sigma+1}} M_2(s, z(s))ds - \\ &\quad - \int_0^1 R_h(t, s)z_{\alpha}(s)ds - \int_0^1 R_h(t, w)dw \int_0^1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_k(t)\phi_k(s)}{\lambda_k^{\sigma}} M_2(s, z(s))ds, \\ M_2(s, z(s)) &= \int_0^s M_1(v, z(v))dv. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Наряду с уравнением (2.4) рассмотрим уравнение второго рода вида

$$\begin{aligned} \alpha z_{\alpha}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{\lambda_k} \phi_k(t) &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k \phi_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(t)}{\lambda_k^{\sigma+1}} - \\ &\quad - \int_0^1 R_h(t, s)z_{\alpha}(s)ds - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(t)}{\lambda_k^{\sigma}} \int_0^1 R_h(t, s)ds, \quad M_k = \int_0^1 M_2(s, z(s))\phi_k(s)ds. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Введем обозначение

$$f_k(t) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k \phi_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(t)}{\lambda_k^{\sigma+1}} - \int_0^1 R_h(t, s)z_{\alpha}(s)ds - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(t)}{\lambda_k^{\sigma}} \int_0^1 R_h(t, s)ds. \quad (2.6)$$

Тогда уравнение (2.5) формально запишется в виде

$$\alpha z_{\alpha}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z_k}{\lambda_k} \phi_k(t) = f_k(t). \quad (2.7)$$

Обе части (2.7) умножим на функцию $\phi_k(t)$ и проинтегрируем от 0 до 1. Учитывая ортонормированность собственных функций $\phi_k(t)$, получаем

$$\alpha z_k + \frac{z_k}{\lambda_k} = f_k.$$

Отсюда

$$z_k = \frac{\lambda_k f_k}{1 + \alpha \lambda_k}, \quad f_k = \int_0^1 f_k(s) \phi_k(s) ds. \quad (2.8)$$

С учетом обозначения (2.6) вычислим значение f_k :

$$\begin{aligned} f_k &= \int_0^1 \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k \phi_k(s) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(s)}{\lambda_k^{\sigma+1}} - \int_0^1 R_h(s, v) z_{\alpha}(v) dv - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(s)}{\lambda_k^{\sigma}} \int_0^1 R_h(s, v) dv \right) \phi_k(s) ds = \\ &= u_k + \frac{M_k}{\lambda_k^{\sigma+1}} - \int_0^1 \phi_k(s) \int_0^1 R_h(s, v) z_{\alpha}(v) dv ds - \frac{M_k}{\lambda_k^{\sigma}} \int_0^1 R_h(s, v) dv. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Подставляя (2.9) в (2.8), имеем

$$\begin{aligned} z_k &= \frac{\lambda_k}{1 + \alpha \lambda_k} \left(u_k + \frac{M_k}{\lambda_k^{\sigma+1}} - \int_0^1 \phi_k(s) \int_0^1 R_h(s, v) z_{\alpha}(v) dv ds - \frac{M_k}{\lambda_k^{\sigma}} \int_0^1 R_h(s, v) dv \right) = \\ &= \frac{\lambda_k u_k}{1 + \alpha \lambda_k} + \frac{M_k}{\lambda_k^{\sigma} (1 + \alpha \lambda_k)} - \frac{\lambda_k}{1 + \alpha \lambda_k} \int_0^1 \phi_k(s) \int_0^1 R_h(s, v) z_{\alpha}(v) dv ds - \frac{M_k}{\lambda_k^{\sigma-1} (1 + \alpha \lambda_k)} \int_0^1 R_h(s, v) dv. \end{aligned} \quad (2.10)$$

Подставляем (2.10) в (2.5), имеем

$$\begin{aligned} z_{\alpha}(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_k(t)}{\alpha \lambda_k} &\left(\frac{\lambda_k u_k}{1 + \alpha \lambda_k} + \frac{M_k}{\lambda_k^{\sigma} (1 + \alpha \lambda_k)} - \frac{\lambda_k}{1 + \alpha \lambda_k} \int_0^1 \phi_k(s) \int_0^1 R_h(s, v) z_{\alpha}(v) dv ds - \right. \\ &\quad \left. - \frac{M_k}{\lambda_k^{\sigma-1} (1 + \alpha \lambda_k)} \int_0^1 R_h(s, v) dv \right) = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} u_k \phi_k(t) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(t)}{\lambda_k^{\sigma+1}} - \int_0^1 R_h(s, v) z_{\alpha}(v) dv - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(t)}{\lambda_k^{\sigma}} \int_0^1 R_h(s, v) dv = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k u_k \phi_k(t)}{1 + \alpha \lambda_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(t)}{\lambda_k^{\sigma} (1 + \alpha \lambda_k)} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \phi_k(t)}{1 + \alpha \lambda_k} \int_0^1 \phi_k(s) \int_0^1 R_h(s, v) z_{\alpha}(v) dv ds - \\ &\quad - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(t)}{\lambda_k^{\sigma} (1 + \alpha \lambda_k)} \int_0^1 R_h(s, v) dv. \end{aligned} \quad (2.11)$$

Введем новую неизвестную функцию $h(t)$:

$$h_{\alpha}(t) = z_{\alpha}(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(t)}{\lambda_k^{\sigma} (1 + \alpha \lambda_k)}.$$

В работе [15] доказано, что оператор $E - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(t)}{\lambda_k^{\sigma} (1 + \alpha \lambda_k)}$ имеет обратный оператор. Тогда

$$z_{\alpha}(t) = B_{\alpha} h_{\alpha}(t), \quad \text{где} \quad B_{\alpha} = \left(- \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(t)}{\lambda_k^{\sigma} (1 + \alpha \lambda_k)} \right)^{-1}. \quad (2.12)$$

Оператор B_{α} удовлетворяет условию Липшица

$$\|B_{\alpha} h_1 - B_{\alpha} h_2\|_{L_2[0,1]} \leq \frac{1}{1-q} \|h_1(t) - h_2(t)\|_{L_2[0,1]}.$$

Уравнение (2.11) запишется в виде

$$h_\alpha(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k u_k \phi_k(t)}{1 + \alpha \lambda_k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \phi_k(t)}{1 + \alpha \lambda_k} \int_0^1 \phi_k(s) \int_0^1 R_h(s, v) B_\alpha h_\alpha(v) dv ds - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(t)}{\lambda_k^\sigma (1 + \alpha \lambda_k)} \int_0^1 R_h(s, v) dv. \quad (2.13)$$

Уравнение (2.13) решаем методом последовательных приближений:

$$h_k(t) = h_0(t) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \phi_k(t)}{1 + \alpha \lambda_k} \int_0^1 \phi_k(s) \int_0^1 R_h(s, v) B_\alpha h_{k-1}(v) dv ds - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(t)}{\lambda_k^\sigma (1 + \alpha \lambda_k)} \int_0^1 R_h(s, v) dv, \quad (2.14)$$

где

$$h_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k u_k \phi_k(t)}{1 + \alpha \lambda_k}$$

— нулевое приближение.

Покажем, что последовательность $\{h_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ приближений сходится в пространстве $L_2[0, 1]$. Для этого из элементов последовательности составим функциональный ряд

$$h_0(t) + [h_1(t) - h_0(t)] + [h_2(t) - h_1(t)] + \dots + [h_k(t) - h_{k-1}(t)] + \dots \quad (2.15)$$

Оценивая каждый член ряда, составляем мажорантный ряд.

Оценим первый член ряда (2.15):

$$\|h_0(t)\|_{L_2[0,1]} = \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k u_k}{1 + \alpha \lambda_k} \phi_k(t) \right\|_{L_2[0,1]} \leq \frac{1}{\alpha} \|u\|_{L_2[0,1]}.$$

Оценим второй член ряда (2.15):

$$\begin{aligned} \|h_1(t) - h_0(t)\|_{L_2[0,1]} &\leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \phi_k(t)}{1 + \alpha \lambda_k} \int_0^1 \phi_k(s) \int_0^1 R_h(s, v) B_\alpha h_0(v) dv ds \right\|_{L_2[0,1]} + \\ &+ \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_k(t)}{\lambda_k^\sigma (1 + \alpha \lambda_k)} \int_0^1 \phi_k(s) \int_0^1 R_h(s, v) M_2(v, B_\alpha h_0(v)) dv ds \right\|_{L_2[0,1]} \leq \\ &\leq \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{\lambda_k}{1 + \alpha \lambda_k} \right)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \phi_k(s) \int_0^1 R_h(s, v) B_\alpha h_0(v) dv ds \phi_k(t) \right)^2 \right)^{1/2} + \\ &+ \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{1}{\lambda_k^\sigma (1 + \alpha \lambda_k)} \right)^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_0^1 \phi_k(s) \int_0^1 R_h(s, v) M_2(v, B_\alpha h_0(v)) dv ds \phi_k(t) \right)^2 \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \frac{1}{\alpha} \left(\left(\int_0^1 R_h(s, v) B_\alpha h_0(v) dv \right)^2 \right)^{1/2} + \\ &+ (1 - \sigma)^{-\sigma} \sigma^{\sigma+1} \alpha^\sigma \left(\left(\int_0^1 R_h(s, v) M_2(v, B_\alpha h_0(v)) dv ds \phi_k(t) \right)^2 \right)^{1/2}. \quad (2.16) \end{aligned}$$

Рассмотрим первое слагаемое справа в неравенстве (2.16):

$$\left(\int_0^1 R_h(s, v) B_\alpha h_0(v) dv \right)^2 \leq \int_0^1 (R_h(s, v))^2 dv \int_0^1 (B_\alpha h_0(v))^2 dv \leq h^2 \|B_\alpha h_0(v)\|_{L_2[0,1]}^2. \quad (2.17)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \left(\int_0^1 R_h(s, v) M_2(v, B_\alpha h_0(v)) dv \right)^2 &\leq \int_0^1 (R_h(s, v))^2 dv \int_0^1 (M_2(v, B_\alpha h_0(v)))^2 dv \leq \\ &\leq h^2 \left(\sup_{0 \leq v \leq 1} |M_2(v, B_\alpha h_0(v))| \right)^2. \end{aligned} \quad (2.18)$$

Учитывая неравенства (2.17), (2.18), из неравенства (2.16) получаем

$$\begin{aligned} \|h_1(t) - h_0(t)\|_{L_2[0,1]} &\leq \frac{h}{\alpha} \|B_\alpha h_0(v)\|_{L_2[0,1]} + (1 - \sigma)^{-\sigma} \sigma^{\sigma+1} \alpha^\sigma h \|M_2(v, B_\alpha h_0(v))\|_{L_2[0,1]} \leq \frac{h}{\alpha} c, \\ c &= \|B_\alpha h_0(v)\|_{L_2[0,1]} - (1 - \sigma)^{-\sigma} \sigma^{\sigma+1} \alpha^{\sigma+1} \|M_2(v, B_\alpha h_0(v))\|_{L_2[0,1]}. \end{aligned}$$

Оценим третий член ряда (2.15):

$$\begin{aligned} \|h_2(t) - h_1(t)\| &\leq \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \phi_k(t)}{1 + \alpha \lambda_k} \int_0^1 \phi_k(s) \int_0^1 R_h(s, v) (B_\alpha h_1(v) - B_\alpha h_0(v)) dv ds \right\| + \\ &+ \left\| \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\phi_k(t)}{\lambda_k^\sigma (1 + \alpha \lambda_k)} \int_0^1 \phi_k(s) \int_0^1 R_h(s, v) (M_2(v, B_\alpha h_1(v)) - M_2(v, B_\alpha h_0(v))) dv ds \right\| \leq \\ &\leq \frac{h}{\alpha} c_1 \|h_1(t) - h_0(t)\|_{L_2[0,1]}, \quad c_1 = \frac{N(1 + (1 - \sigma)^{-\sigma} \sigma^{\sigma+1} \alpha^{\sigma+1})}{1 - q}. \end{aligned}$$

По методу полной математической индукции можно доказать справедливость неравенства для любого натурального $k \geq 2$:

$$\|h_k(t) - h_{k-1}(t)\|_{L_2[0,1]} \leq \left(\frac{h}{\alpha} c_1 \right)^{k-1} \|h_1(t) - h_0(t)\|_{L_2[0,1]}.$$

Таким образом, функциональный ряд (2.15) мажорируется следующим числовым рядом:

$$\|h_0(t)\|_{L_2[0,1]} + \left(\frac{h}{\alpha} c_1 \right)^{k-1} \|h_1(t) - h_0(t)\|_{L_2[0,1]}. \quad (2.19)$$

Допустим, что параметр α выбран так, чтобы выполнялось условие

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{h}{\alpha(h)} = 0. \quad (2.20)$$

Тогда существует число h_0^0 такое, что

$$q_1 \equiv \frac{h}{\alpha} c_1 < 1, \quad h < h_0^0.$$

При выполнении этого условия числовой ряд (2.19) сходится, и его сумма равна

$$\|h_0(t)\|_{L_2(0,1)} + \frac{1}{1 - q_1} \|h_1 - h_0\|_{L_2(0,1)}.$$

Через $h_\alpha^h(t)$ обозначим сумму ряда (2.15), причем по построению

$$\lim_{k \rightarrow \infty} h_k(t) = h_\alpha^h(t).$$

Переходя к пределу при $k \rightarrow \infty$ в (2.14), получаем, что функция $h_\alpha^h(t)$ удовлетворяет уравнению (2.13) при любом $u(t) \in L_2[0, 1]$. В силу формулы (2.12) функции $h_\alpha^h(t)$ соответствует функция

$$z_\alpha^h(t) = B_\alpha h_\alpha^h(t). \quad (2.21)$$

Легко видеть, что функция $z_\alpha^h(t)$ удовлетворяет уравнению (2.11).

Теорема 2.1. Пусть:

- 1) выполнены условия $A), B), C), F)$;
- 2) параметр α удовлетворяет условию (2.20).

Тогда уравнение (2.11) при любом $u(t) \in L_2[0, 1]$ имеет единственное решение, представимое в виде (2.21).

Доказательство. Покажем, что решение уравнения (2.11) при $u(t) = u_0(t)$ сходится к точному решению уравнения (1.1) при $\alpha, h \rightarrow 0$.

Функция $h_\alpha^h(t)$ как решение уравнения (2.13) представима в виде

$$h_\alpha^h(t) = I_\alpha^h h_0(t), \quad I_\alpha^h = E + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_k \phi_k(t)}{1 + \alpha \lambda_k} \int_0^1 \phi_k(s) \int_0^1 R_h(s, v) B_\alpha(\circ) dv ds + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{M_k \phi_k(t)}{\lambda_k^\sigma (1 + \alpha \lambda_k)} \int_0^1 R_h(s, v) dv. \quad (2.22)$$

Подставляя это в (2.22), получаем

$$z_\alpha^h(t) = B_\alpha I_\alpha^h h_0(t). \quad (2.23)$$

Оценим разность $z_\alpha^h(t) - z_\alpha^0(t)$:

$$\left\| z_\alpha^h(t) - z_\alpha^0(t) \right\|_{L_2[0,1]} = \left\| B_\alpha I_\alpha^h h_0(t) - B_\alpha h_0(t) \right\|_{L_2[0,1]} \leq \frac{c}{(1-q)(1-q_1)} \frac{h}{\alpha}.$$

Оценим разность $z_{\alpha,0}^h(t) - z_0(t)$.

$$\left\| z_{\alpha,0}^h(t) - z_0(t) \right\|_{L_2(0,1)} \leq \left\| z_{\alpha,0}^h(t) - z_\alpha^0(t) \right\|_{L_2(0,1)} + \left\| z_\alpha^0(t) - z_0(t) \right\|_{L_2(0,1)} \leq \\ \leq \frac{1}{(1-q)(1-q_1)} \left(\frac{h}{\alpha} \right) c + \frac{q_0 \alpha^\beta}{1-q}. \quad (2.24)$$

Рассмотрим функцию

$$\phi(\alpha) = c_2 \alpha^\beta + c_3 \frac{h}{\alpha}, \quad c_2 = \frac{c}{(1-q)(1-q_1)}, \quad c_3 = \frac{q_0}{1-q}.$$

Найдем минимум этой функции:

$$\alpha(h) = \left(\frac{c_3}{\beta c_2} h \right)^{1/\beta+1}. \quad (2.25)$$

Подставляя это в правую часть (2.24), получаем

$$\left\| z_{\alpha,0}^h(t) - z_0(t) \right\|_{L_2(0,1)} \leq c_4 h^{\frac{\beta}{1+\beta}}, \quad c_4 = (1+\beta) \beta^{-\beta/1+\beta} c_2^{1/1+\beta} c_3^{\beta/1+\beta}. \quad (2.26)$$

□

Теорема 2.2. Пусть:

- 1) выполнены условия теоремы 2.1,
- 2) параметр α удовлетворяет условию (2.25).

Тогда решение $z_{\alpha,0}^h(t)$ уравнения (2.11) с $u = u_0(t)$ при $h \rightarrow 0$ сходится к точному решению уравнения (1.1). Скорость сходимости удовлетворяет неравенству (2.26).

Доказательство. Рассмотрим случай E).

Через $z_{\alpha,\delta}^h(t)$ обозначим решение уравнения (2.11) при $u = u_\delta(t)$. В силу формулы (2.23) $z_{\alpha,\delta}^h(t)$ представим в виде

$$z_{\alpha,\delta}^h(t) = {}_\alpha G_\alpha^h h_\delta(t).$$

Оценим разность $z_{\alpha,\delta}^h(t) - z_{\alpha,0}^h(t)$:

$$\begin{aligned} \left\| z_{\alpha,\delta}^h(t) - z_{\alpha,0}^h(t) \right\|_{L_2[0,1]} &= \left\| B_\alpha I_\alpha^h h_\delta(t) - B_\alpha I_\alpha^h h_0(t) \right\|_{L_2[0,1]} \leq \\ &\leq \frac{1}{(1-q)(1-q_1)} \|h_\delta(t) - h_0(t)\|_{L_2[0,1]} \leq \frac{1}{(1-q)(1-q_1)} \frac{\delta}{\alpha}. \end{aligned}$$

Оценим разность $z_{\alpha,\delta}^h(t) - z_0(t)$:

$$\begin{aligned} \left\| z_{\alpha,\delta}^h(t) - z_0(t) \right\|_{L_2(0,1)} &\leq \left\| z_{\alpha,\delta}^h(t) - z_{\alpha,0}^h(t) \right\|_{L_2(0,1)} + \left\| z_{\alpha,0}^h(t) - z_0(t) \right\|_{L_2(0,1)} \leq \\ &\leq c_2 \alpha^\beta + c_3 \frac{h}{\alpha} + c_5 \frac{\delta}{\alpha}, \quad c_2 = \frac{c}{(1-q)(1-q_1)}, \quad c_3 = \frac{q_0}{1-q}, \quad c_5 = \frac{1}{(1-q)(1-q_1)}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Рассмотрим функцию

$$\phi(\alpha) = c_2 \alpha^\beta + c_3 \frac{h}{\alpha} + c_5 \frac{\delta}{\alpha}.$$

Минимизируя функцию, получаем

$$\alpha(\delta, h) = \left(\frac{c_3 h + c_5 \delta}{\beta c_2} \right)^{1/(1+\beta)}. \quad (2.28)$$

Подставляя это в правую часть (2.27), получаем

$$\left\| z_{\alpha,\delta}^h(t) - z_0(t) \right\|_{L_2(0,1)} \leq c_6 (3h + c_5 \delta)^{\beta/(1+\beta)}, \quad c_6 = c_2^{\beta/(1+\beta)} \beta^{-\beta/(1+\beta)} + c_2^{1/(1+\beta)} \beta^{1/(1+\beta)}. \quad (2.29)$$

□

Теорема 2.3. Пусть:

- 1) выполняются все условия теоремы 2.2;
- 2) функция $u_\delta(t)$ удовлетворяет условию E);
- 3) параметр α выбран по закону (2.28).

Тогда решение $z_{\alpha,\delta}^h(t)$ уравнения (2.11) при $u(t) = u_\delta(t)$ и при $\delta, h \rightarrow 0$ сходится к точному решению уравнения (1.1). Скорость сходимости удовлетворяет неравенству (2.29).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Обоснование метода регуляризации, предлагаемого в данной работе, заключается в следующих результатах исследования:

- 1) построен регуляризирующий оператор в $L_2[0, 1]$;
- 2) доказана сходимость регуляризированного решения к точному решению исходного уравнения;
- 3) получен выбор параметра регуляризации в зависимости от погрешностей правой части и ядра;
- 4) получена оценка скорости сходимости регуляризированного решения к точному решению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Иванов В. К., Васин В. В., Тихонов В. П. Теория линейных некорректных задач и ее приложения. — М.: Наука, 1978.
2. Иманалиев М. Методы решения нелинейных обратных задач и их приложение. — Фрунзе: Илим, 1977.
3. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ в нормированных пространствах. — М.: Наука, 1977.
4. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 2004.

5. Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рунцкий Я. Б., Стеценко В. Я. Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969.
6. Лаврентьев М. М. О некоторых некорректных задачах математической физики. — Новосибирск: СО АН СССР, 1962.
7. Саадабаев А. Приближенные методы решения нелинейных операторных и интегральных уравнений первого рода. — Бишкек, 1997.
8. Саадабаев А. Сходимость метода Ньютона в нелинейных некорректных задачах // Изв. вузов. Бишкек. — 2003. — № 1-2. — С. 12–15.
9. Саадабаев А., Усенов И. А. Регуляризация решения нелинейного операторного уравнения первого рода типа Фредгольма в пространстве непрерывных функций // Вестн. ОшГУ. Сер. мат., физ., техн. — 2023. — № 1. — С. 187–193. — DOI: [10.52754/16948645_2023_1_187](https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_187).
10. Танана В. П. Методы решения операторных уравнений. — М.: Наука, 1981.
11. Тихонов А. Н. О решении некорректно поставленных задач и методе регуляризации // Докл. АН СССР. — 1963. — 151, № 3. — С. 501–504.
12. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. Методы решения некорректных задач. — М.: Наука, 1974.
13. Треногин В. А. Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.
14. Усенов И. А. Регуляризация решения неявного операторного уравнения первого рода // В сб.: «Функц. анализ и его прилож.» — Астана, 2012. — С. 203.
15. Усенов И. А. Построение приближенного решения нелинейного операторного уравнения первого рода в гильбертовом пространстве // Вестн. МГОУ. Сер. Физ.-Мат. — 2016. — № 1. — С. 8–14. — DOI: [10.18384/2310-7251-2016-1-08-14](https://doi.org/10.18384/2310-7251-2016-1-08-14).
16. Lu S., Pereverzev S., Ramlau R. An analysis of Tikhonov regularization for nonlinear ill-posed problems under a general smoothness assumption // Inverse Problems. — 2007. — 23. — С. 217–230. — DOI: [10.1088/0266-5611/23/1/011](https://doi.org/10.1088/0266-5611/23/1/011).
17. Pereverzev S., Schock E. On the adaptive selection of the parameter in regularization of ill-posed problems // SIAM J. Numer. Anal. — 2005. — 43. — С. 2060–2076. — DOI: [10.1137/S0036142903433819](https://doi.org/10.1137/S0036142903433819).
18. Pöschl C. An overview on convergence rates for Tikhonov regularization methods for non-linear operators // J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2009. — 17, № 1. — С. 77–83. — DOI: [10.1515/JIIP.2009.009](https://doi.org/10.1515/JIIP.2009.009).
19. Saadabaev A., Usenov I. On the regularization of the solution of a nonlinear operator equation of the first kind in Hilbert space // В сб.: «Materials of the VII World Congress of Turkic World Mathematicians» (TWMS Congress-2023), Part II. — Turkestan–Kazakhstan, 2023. — С. 99–106.
20. Tautenhahn U. On the method of Lavrentiev regularization for nonlinear ill-posed problems // Inverse Problems. — 2002. — 18. — С. 191–207. — DOI: [10.1088/0266-5611/18/1/313](https://doi.org/10.1088/0266-5611/18/1/313).
21. Tautenhahn U., Hamarik U. The use of monotonicity for choosing the regularization parameter in ill-posed problems // Inverse Problems. — 1999. — 15. — С. 1487–1505. — DOI: [10.1088/0266-5611/15/6/307](https://doi.org/10.1088/0266-5611/15/6/307).
22. Usenov I. Combined regularization method for solving an implicit operator equation of the first kind // Lect. Notes Networks Systems. — 2024. — 1044. — С. 24–33. — DOI: [10.1007/978-3-031-64010-0_3](https://doi.org/10.1007/978-3-031-64010-0_3).

И. А. Усенов

Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызстан

E-mail: iausen72@mail.ru

Р. К. Усенова

Кыргызский национальный университет им. Ж. Баласагына, Бишкек, Кыргызстан

E-mail: usenrk@mail.ru

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-126-137](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-126-137)
 EDN: UFDHHA

UDC 519.683.5
Research article

Regularizing operator for solving a nonlinear integral equation of the first kind in the space of square-summable functions

I. A. Usenov and R. K. Usenova

Kyrgyz National University named after J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyzstan

Abstract. Problems of solving nonlinear integral equations of the first kind belong to the class of ill-posed problems, since their solution may not exist, be ambiguous, or be unstable with respect to small perturbations of the initial data. This significantly complicates their practical application in mathematical modeling and related fields, where such equations arise when describing inverse problems.

In this paper, we construct a regularization operator for solving a class of nonlinear integral equations of the first kind in the space of square-summable functions in the case where the kernel and right-hand side are given approximately.

The construction of the proposed regularization method is based on the regularized equation obtained by analogy with Lavrentiev's method.

We choose the regularization parameter depending on the errors of the right-hand side and the kernel. A priori estimates are obtained. We obtain also estimates for the rate of convergence of the regularized solution to the exact solution of the original nonlinear integral equation of the first kind. To explicitly represent the solution, we use Schmidt fundamental functions.

Keywords: nonlinear integral equations of the first kind, ill-posed problem, regularization operator, Lavrentiev's method, Schmidt fundamental functions.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

Authors' contribution. I. A. Usenov — study of the convergence of an approximate solution to the exact solution of the original equation; R. K. Usenova — selection of a regularization parameter depending on the errors of approximately specified data.

For citation: I. A. Usenov, R. K. Usenova, "Regularizing operator for solving a nonlinear integral equation of the first kind in the space of square-summable functions," *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. 72, No. 1, 126–137. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-126-137](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-126-137)
 EDN: UFDHHA

REFERENCES

1. V. K. Ivanov, V. V. Vasin, and V. P. Tanana, *Teoriya lineynykh nekorrektnykh zadach i ee prilozheniya* [Theory of Linear Ill-Posed Problems and Its Applications], Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).
2. M. Imanaliev, *Metody resheniya nelineynykh obratnykh zadach i ikh prilozhenie* [Methods for Solving Nonlinear Inverse Problems and Their Application], Ilim, Frunze, 1977 (in Russian).
3. L. V. Kantorovich and G. P. Akilov, *Funktsional'nyy analiz v normirovannykh prostranstvakh* [Functional Analysis in Normed Spaces], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
4. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis], Nauka, Moscow, 2004 (in Russian).
5. M. A. Krasnosel'skii, G. M. Vaynikko, P. P. Zabreyko, Ya. B. Rutitskii, and V. Ya. Stetsenko, *Priblizhennoe reshenie operatornykh uravneniy* [Approximate Solution of Operator Equations], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).



6. M. M. Lavrent'ev, *O nekotorykh nekorrektnykh zadachakh matematicheskoy fiziki* [On Some Ill-Posed Problems of Mathematical Physics], SO AN SSSR, Novosibirsk, 1962 (in Russian).
7. A. Saadabaev, *Priblizhennyye metody resheniya nelineynykh operatornykh i integral'nykh uravneniy pervogo roda* [Approximate Methods for Solving Nonlinear Operator and Integral Equations of the First Kind], Bishkek, 1997 (in Russian).
8. A. Saadabaev, "Skhodimost' metoda N'yutona v nelineynykh nekorrektnykh zadachakh" [Convergence of Newton's method in nonlinear ill-posed problems], *Izv. Vuzov. Bishkek* [Izv. vuzov. Bishkek], 2003, No. 1-2, 12–15 (in Russian).
9. A. Saadabaev and I. A. Usenov, "Regulyarizatsiya resheniya nelineynogo operatornogo uravneniya pervogo roda tipa Fredgol'ma v prostranstve nepreryvnykh funktsiy" [Regularization of the solution of a first-kind nonlinear operator equation of Fredholm type in the space of continuous functions], *Vestn. OshGU. Ser. Mat., Fiz., Tekhn.* [Bull. Osh. State Univ. Ser. Math. Phys. Techn.], 2023, No. 1, 187–193 (in Russian), DOI: [10.52754/16948645_2023_1_187](https://doi.org/10.52754/16948645_2023_1_187).
10. V. P. Tanana, *Metody resheniya operatornykh uravneniy* [Methods for Solving Operator Equations], Nauka, Moscow, 1981 (in Russian).
11. A. N. Tikhonov, "O reshenii nekorrektno postavlennykh zadach i metode regulyarizatsii" [On solving ill-posed problems and the regularization method], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1963, **151**, No. 3, 501–504 (in Russian).
12. A. N. Tikhonov and V. Ya. Arsenin, *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for Solving Ill-Posed Problems], Nauka, Moscow, 1974 (in Russian).
13. V. A. Trenogin, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1980 (in Russian).
14. I. A. Usenov, "Regulyarizatsiya resheniya neyavnogo operatornogo uravneniya pervogo roda" [Regularization of the solution of an implicit operator equation of the first kind], In: *Funkts. Analiz i Ego Prilozh.* [Funct. Anal. and Its Appl.], Astana, 2012, p. 203 (in Russian).
15. I. A. Usenov, "Postroenie priblizhennogo resheniya nelineynogo operatornogo uravneniya pervogo roda v gil'bertovom prostranstve" [Construction of an approximate solution to a nonlinear operator equation of the first kind in a Hilbert space], *Vestn. MGOU. Ser. Fiz.-Mat.* [Bull. State Univ. Edu. Ser. Phys.-Math.], 2016, No. 1, 8–14 (in Russian), DOI: [10.18384/2310-7251-2016-1-08-14](https://doi.org/10.18384/2310-7251-2016-1-08-14).
16. S. Lu, S. Pereverzev, and R. Ramlau, "An analysis of Tikhonov regularization for nonlinear ill-posed problems under a general smoothness assumption," *Inverse Problems*, 2007, **23**, 217–230, DOI: [10.1088/0266-5611/23/1/011](https://doi.org/10.1088/0266-5611/23/1/011).
17. S. Pereverzev and E. Schock, "On the adaptive selection of the parameter in regularization of ill-posed problems," *SIAM J. Numer. Anal.*, 2005, **43**, 2060–2076, DOI: [10.1137/S0036142903433819](https://doi.org/10.1137/S0036142903433819).
18. C. Pöschl, "An overview on convergence rates for Tikhonov regularization methods for non-linear operators," *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, 2009, **17**, No. 1, 77–83, DOI: [10.1515/JIIP.2009.009](https://doi.org/10.1515/JIIP.2009.009).
19. A. Saadabaev and I. Usenov, "On the regularization of the solution of a nonlinear operator equation of the first kind in Hilbert space," In: *Materials of the VII World Congress of Turkic World Mathematicians (TWMS Congress-2023), Part II*, Turkestan–Kazakhstan, 2023, pp. 99–106.
20. U. Tautenhahn, "On the method of Lavrentiev regularization for nonlinear ill-posed problems," *Inverse Problems*, 2002, **18**, 191–207, DOI: [10.1088/0266-5611/18/1/313](https://doi.org/10.1088/0266-5611/18/1/313).
21. U. Tautenhahn and U. Hamarik, "The use of monotonicity for choosing the regularization parameter in ill-posed problems," *Inverse Problems*, 1999, **15**, 1487–1505, DOI: [10.1088/0266-5611/15/6/307](https://doi.org/10.1088/0266-5611/15/6/307).
22. I. Usenov, "Combined regularization method for solving an implicit operator equation of the first kind," *Lect. Notes Networks Systems*, 2024, **1044**, 24–33, DOI: [10.1007/978-3-031-64010-0_3](https://doi.org/10.1007/978-3-031-64010-0_3).

I. A. Usenov

Kyrgyz National University named after J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyzstan

E-mail: iausen72@mail.ru

R. K. Usenova

Kyrgyz National University named after J. Balasagyn, Bishkek, Kyrgyzstan

E-mail: usenrk@mail.ru

ОБ УСЛОВИЯХ УСТОЙЧИВОСТИ ЛИНЕЙНОГО РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ С ПЕРЕМЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

К. М. Чудинов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

Аннотация. Константа $3/2$, определяющая достаточные условия устойчивости линейных неавтономных дифференциальных уравнений с запаздыванием, была впервые указана А. Д. Мышкисом в середине XX века, и эти результаты положили начало направлению исследований уравнений с последействием, целью которого являются условия устойчивости, явно выраженные через параметры уравнения. В последнее десятилетие XX века были установлены первые дискретные аналоги результатов таких исследований — эффективные достаточные условия устойчивости разностных уравнений с последействием. Недавно были получены условия устойчивости дифференциальных уравнений с последействием, являющиеся усилением известных теорем, выраженных через оценку значений функционалов от параметров уравнения константой $3/2$. В настоящей статье получены дискретные аналоги этих результатов, т. е. достаточные условия устойчивости линейного неавтономного разностного уравнения с запаздыванием, выраженные через параметры уравнения (коэффициенты и запаздывания) и существенно усиливающие известные условия такого рода.

Ключевые слова: линейное неавтономное разностное уравнение, переменное запаздывание, равномерная устойчивость, асимптотическая устойчивость, экспоненциальная устойчивость.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Чудинов К. М. Об условиях устойчивости линейного разностного уравнения с переменным запаздыванием // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 138–150. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-138-150](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-138-150) EDN: UIEWLQ

1. ВВЕДЕНИЕ

Будем называть (дискретной) *полуосью* и обозначать символом $\mathbb{N}_n$, где n — целое неотрицательное число, множество целых чисел, не меньших n . Положим $\mathbb{N}_m^n = \{m, m+1, \dots, n-1\}$ и $\Delta x(n) = x(n+1) - x(n)$. Символом ∞ будем обозначать $+\infty$. Сумму пустого множества слагаемых везде будем считать равной 0.

Основным объектом исследования в настоящей статье является разностное уравнение

$$\Delta x(n) + a(n)x(h(n)) = 0, \quad n \in \mathbb{N}_0, \quad (1.1)$$

где $a: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{R}$, $h: \mathbb{N}_0 \rightarrow \mathbb{Z}$, $h(n) \leq n$, $a(n) \geq 0$. Уравнение (1.1) естественно рассматривать как дискретный аналог дифференциального уравнения с запаздывающим аргументом

$$\dot{x}(t) + \alpha(t)x(\tau(t)) = 0, \quad t \in [0, \infty), \quad (1.2)$$

где $\tau(t) \leq t$ и $\alpha(t) \geq 0$.

В конце 40-х гг. XX в. А. Д. Мышкис установил, что при условии

$$\sup_{t \geq 0} \alpha(t) \cdot \sup_{t \geq 0} (t - \tau(t)) \leq 3/2$$

все решения уравнения (1.2) устойчивы по Ляпунову, а при выполнении строгого неравенства и дополнительном условии $a(t) \geq m > 0$ асимптотически устойчивы. Мышкис также показал, что константа $3/2$ неулучшаема: строгое неравенство нельзя заменить нестрогим, а в нестрогом нельзя заменить верхние грани верхними пределами. Теоремы Мышкиса «о $3/2$ » послужили отправной точкой исследований уравнений с последствием на предмет условий устойчивости, явно выраженных через параметры уравнения. Наиболее сильные известные результаты, обобщающие теоремы Мышкиса «о $3/2$ » для уравнения (1.2), систематизированы в работе [5].

Теория разностных уравнений приобрела статус самостоятельного раздела математики только в последней четверти XX века, когда разностные уравнения стали рассматриваться как дискретные аналоги не только дифференциальных уравнений традиционных видов, но и функционально-дифференциальных уравнений, в том числе уравнений с отклоняющимся аргументом. Первые аналоги теорем «о $3/2$ » для неавтономного уравнения (1.1) были установлены в 1990-х гг. Наиболее законченный вид такие условия приобрели в работе [6]: если $\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m=h(n)}^n a(m) \leq 3/2$, то все

решения уравнения (1.1) ограничены, а если заменить в неравенстве строгий знак нестрогим, то при дополнительном условии $\sum_{n=0}^{\infty} a(n) = \infty$ все решения уравнения (1.1) будут стремиться к 0.

Недавно в работе [8] был обнаружен подход, позволяющий сделать ряд принципиальных уточнений основных результатов работы [5] для уравнения (1.2). В настоящей работе исследуются возможности получения дискретных аналогов этих уточнений.

2. Функция Коши и устойчивость

Для фиксированного $m \in \mathbb{N}_0$ назовем *решением уравнения (1.1) на полуоси $\mathbb{N}_m$* функцию $x: \mathbb{N}_m \rightarrow \mathbb{R}$, удовлетворяющую равенству (1.1), в котором для $\xi < m$ полагается $x(\xi) = \varphi(\xi)$, где φ — заданная *начальная функция*. Нетрудно видеть, что для любой начальной функции, заданной для всех $\xi \leq m$, решение уравнения (1.1) на полуоси $\mathbb{N}_m$ существует и единственно.

Обозначим $\mathbb{D} = \{(n, m) \in \mathbb{N}_0 \mid n \geq m\}$.

Определение 2.1. *Функцией Коши* уравнения (1.1) называется функция $K: \mathbb{D} \rightarrow \mathbb{R}$, такая что

$$\begin{aligned} K(n+1, m) - K(n, m) + a(n)K(h(n), m) &= 0, \quad n \geq m; \\ K(m, m) &= 1; \quad K(\xi, m) = 0, \quad \xi < m. \end{aligned}$$

Данное определение соответствует определению *фундаментального решения* из работ [6, 9]. Мы предпочитаем термин *функция Коши*, поскольку он был введен раньше и соответствует терминологии дифференциальных уравнений с последствием, где понятия *фундаментальная функция* и *функция Коши* (в векторном случае вместо слова *функция* используется *матрица*) имеют разный смысл и при этом тесно связаны [1].

Заметим, что при фиксированном втором аргументе m функция $c(\cdot) = K(\cdot, m)$, где K — функция Коши уравнения (1.1), является решением уравнения (1.1) на полуоси $\mathbb{N}_m$.

Существуют разные подходы к определению видов устойчивости разностного уравнения с последствием; их сопоставление проводится, например, в [3]. Здесь ограничимся замечанием: удобство использования функции Коши определяется наследуемой из классической теории линейных разностных уравнений формулой представления решения на полуоси $\mathbb{N}_m$ соответствующего уравнению (1.1) неоднородного уравнения с правой частью $f: \mathbb{N}_m \rightarrow \mathbb{R}$ (см. [6, 9])

$$x(n) = K(n, m)x(m) + \sum_{k=m}^{n-1} K(n, k+1)[f(k) - \chi_{\mathbb{N}_m}(h(k))a(k)\varphi(h(k))], \quad n \in \mathbb{N}_m,$$

где φ — начальная функция и $\chi_{\mathbb{N}_m}$ — характеристическая функция множества $\mathbb{N}_m$. Таким образом, начальная функция переносится в правую часть уравнения и оказывается составляющей

внешнего возмущения, а определение устойчивости показывает, что устойчивость является свойством только заданного левой частью уравнения оператора.

Определение 2.2. Будем называть уравнение (1.1):

- *равномерно устойчивым*, если найдется $N > 0$, что для всех $(n, m) \in \mathbb{D}$ имеем $|K(t, s)| \leq N$;
- *асимптотически устойчивым*, если для любого $m \in \mathbb{N}_0$ имеем $K(n, m) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;
- *равномерно асимптотически устойчивым*, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $l \in \mathbb{N}_0$, что для любых $m \in \mathbb{N}_0$ и $n \in \mathbb{N}_{m+l}$ имеем $|K(n, m)| < \varepsilon$;
- *экспоненциально устойчивым*, если при некоторых $N, \gamma > 0$ для всех $(n, m) \in \mathbb{D}$ имеем $|K(n, m)| \leq N \exp(-\gamma(n - m))$.

Дальнейшее изложение посвящено поиску достаточных условий устойчивости уравнения (1.1) (в смыслах определения 2.2), выраженных в явном виде через параметры уравнения.

3. УСЛОВИЯ РАВНОМЕРНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

3.1. Известные положения. Известные условия равномерной устойчивости наиболее полно описывает следующий результат.

Предложение 3.1 (см. [6]). Если для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_{n_0}} \sum_{m=h(n)}^n a(m) \leq 3/2, \quad (3.1)$$

то функция Коши уравнения (1.1) ограничена.

Предложение 3.2 (см. [3]). Если для уравнения (1.1) выполнено условие

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m=h(n)}^n a(m) < \infty,$$

то его равномерная устойчивость равносильна ограниченности его функции Коши.

Предложение 3.1 является дискретным аналогом следующего факта.

Предложение 3.3 (см. [4]). Если для некоторого $t_0 \geq 0$ справедливо неравенство

$$\sup_{t \geq t_0} \int_{h(t)}^t \alpha(s) ds \leq 3/2, \quad (3.2)$$

то функция Коши уравнения (1.2) ограничена.

$$\text{Положим } \mu(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ \xi, & \xi \in [0, 1], \\ 1, & \xi > 1. \end{cases}$$

Недавно было установлено следующее обобщение предложения 3.3.

Предложение 3.4 (см. [8]). Если для некоторого $t_0 \geq 0$ справедливо неравенство

$$\sup_{t \geq t_0} \int_t^\infty \mu \left(\int_{\tau(s)}^t \alpha(\xi) d\xi \right) \alpha(s) ds \leq 1, \quad (3.3)$$

то функция Коши уравнения (1.2) ограничена.

В работе [8] показано, что предложение 3.3 является следствием предложения 3.4, и приведены примеры уравнений, устойчивость которых устанавливается предложением 3.4, но не устанавливается предложением 3.3. Таким образом, предложение 3.4 примыкает к классу теорем Мышкиса «о 3/2», усиливая известные результаты.

3.2. Уточнение известных условий ограниченности функции Коши. В работе [8] приведено наглядное рассуждение, позволяющее относительно просто доказать предложение 3.3 и получить новое более тонкое условие устойчивости уравнения (1.2) — предложение 3.4. Рассуждение основано на изучении возможного поведения решения исследуемого уравнения на промежутке, начинающемся в точке смены знака, — именно такие точки дают максимум функционалам, стоящим в левых частях неравенств (3.2) и (3.3). Для разностных уравнений смена знака решения не подразумевает наличие нуля решения. В доказательстве приведенной ниже теоремы параметр δ играет роль значения решения уравнения (1.1) в последней до смены знака точке. Это значение может быть разным, что отражается на формулировке результата.

Для каждого $n \in \mathbb{N}_0$ определим множество $E_n = \{m \in \mathbb{N}_n \mid h(m) \leq n\}$ и функцию

$$\chi_n(m) = \begin{cases} 1, & m \in E_n, \\ 0, & m \notin E_n. \end{cases}$$

Теорема 3.1. Если для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_{n_0}, \delta \in [0,1]} \left[\sum_{m=n}^{\infty} \mu \left(\delta \chi_n(m) + \sum_{k=h(m)}^{n-1} a(k) \right) a(m) - \delta \right] \leq 1, \quad (3.4)$$

то функция Коши уравнения (1.1) ограничена.

Доказательство. Если для некоторого фиксированного $m \in \mathbb{N}_0$ значения $K(n, m)$ не меняют знак при $n \in \mathbb{N}_m$, то очевидно, что они не возрастают с ростом n , следовательно, $|K(n, m)| \leq 1$.

Зафиксируем произвольное $m \in \mathbb{N}_0$ такое, что значения $K(n, m)$ меняют знак при $n \in \mathbb{N}_m$.

Обозначим $c(n) = K(n, m)$. Функция c есть решение уравнения (1.1) на полуоси $\mathbb{N}_m$.

Покажем, что при выполнении условий теоремы для любого числа $M > 0$ и любой такой точки $n_1 \in \mathbb{N}_m$, что $c(n_1) < 0$, имеем: если $c(n) \leq M$ для всех $n \in \mathbb{N}_m^{n_1}$, то $c(n_1) \geq -M$.

В силу линейности уравнения без ограничения общности полагаем $M = 1$.

Обозначим $m_0 = \max\{n \in \mathbb{N}_m^{n_1} \mid c(n) \geq 0\}$ и $\delta = c(m_0)$.

Для всех $n \in \mathbb{N}_m^{m_0+1}$ имеем:

$$c(n) = c(n) - c(m_0) + \delta = \delta - \sum_{k=n}^{m_0-1} \Delta c(k) = \delta + \sum_{k=n}^{m_0-1} a(k)c(h(k)) \leq \delta + \sum_{k=n}^{m_0-1} a(k).$$

В силу определения функции μ и условия $c(n) \leq M$ для всех $n \in \mathbb{N}_m^{n_1}$ справедливо неравенство

$$c(n) \leq \mu \left(\delta \chi_{m_0}(n) + \sum_{k=n}^{m_0-1} a(k) \right).$$

Отсюда получаем

$$c(n_1) = \delta + \sum_{i=m_0}^{n_1-1} \Delta c(i) = \delta - \sum_{i=m_0}^{n_1-1} a(i)c(h(i)) \geq \delta - \sum_{i=m_0}^{n_1-1} a(i) \mu \left(\delta \chi_{m_0}(i) + \sum_{k=h(i)}^{m_0-1} a(k) \right).$$

Следовательно, если выполнено условие теоремы, то $c(n_1) \geq -1$.

Аналогично получаем, что $c(n_1) \leq \max_{n \in \mathbb{N}_m^{n_1}} |c(n)|$, если $c(n)$ меняет знак при $n \in \mathbb{N}_m^{n_1}$ и $c(n_1) > 0$.

Таким образом, в условиях теоремы функция Коши уравнения (1.1) ограничена. $\square$

3.3. Вывод предложения 3.1 из теоремы 3.1. Для произвольного $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ определим на полуоси $\mathbb{N}_n$ функцию $s = s(m) = \sum_{k=n}^m a(k)$. Таким образом, $\Delta s(m) = a(m+1)$.

Предположим, что выполнены условия предложения 3.1. Тогда для любого $m \in E_n$ имеем:

$$\sum_{k=h(m)}^{n-1} a(k) = \sum_{k=h(m)}^m a(k) - \sum_{k=n}^m a(k) \leq 3/2 - s(m).$$

Функция s не убывает. Если $s(m) < 1/2 + \delta$ для всех $m \in \mathbb{N}_n$, то

$$\sum_{m=n}^{\infty} \mu \left(\delta \chi_n(m) + \sum_{k=h(m)}^{n-1} a(k) \right) a(m) = \sum_{m=n}^{\infty} a(m) < 1/2 + \delta.$$

В противном случае существует такая точка $n_1 \in \mathbb{N}_{n+1}$, что $s(n_1 - 1) \leq 1/2 + \delta$ и $s(n_1) \geq 1/2 + \delta$. Заметим, что для любой точки $n_2 \in \mathbb{N}_{n_1}$ значение суммы $\sum_{m=n_1}^{n_2} \mu(3/2 + \delta - s(m)) \Delta s(m)$ не превосходит половины площади квадрата со стороной $(3/2 + \delta) - (1/2 + \delta) = 1$, т. е. не превосходит $1/2$. Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum_{m=n}^{n_2} \mu \left(\delta \chi_n(m) + \sum_{k=h(m)}^{n-1} a(k) \right) a(m) &\leq \sum_{m=n}^{n_2} \mu(\delta + 3/2 - s(m)) \Delta s(m) = \\ &= \sum_{m=n}^{n_1-1} \mu(3/2 + \delta - s(m)) \Delta s(m) + \sum_{m=n_1}^{n_2} \mu(3/2 + \delta - s(m)) \Delta s(m) = \\ &= 1/2 + \delta + \sum_{m=n_1}^{n_2} \mu(3/2 + \delta - s(m)) \Delta s(m) \leq 1/2 + \delta + 1/2 = 1 + \delta. \end{aligned}$$

Таким образом, если выполнено условие (3.1) предложения 3.1, то выполнено и условие (3.4) теоремы 3.1. Примеры уравнений вида (1.1), показывающие преимущества теоремы 3.1 перед предложением 3.1, приведены ниже в разделе 3.5.

3.4. Другие условия ограниченности функции Коши. В этом разделе статьи получим достаточные условия ограниченности решений уравнения (1.1), в которые не входит параметр δ , и которые, тем самым, могут быть удобнее для проверки. Доказательства этих условий основаны на той же идее, что и доказательство теоремы 3.1.

Теорема 3.2. Если для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_{n_0}} \sum_{m=n}^{\infty} \mu \left(\sum_{k=h(m)}^n a(k) \right) a(m) \leq 1, \quad (3.5)$$

то функция Коши уравнения (1.1) ограничена.

Доказательство. Если для некоторого фиксированного $m \in \mathbb{N}_0$ значения $K(n, m)$ не меняют знак при $n \in \mathbb{N}_m$, то очевидно, что они не возрастают с ростом n , следовательно, $|K(n, m)| \leq 1$.

Зафиксируем произвольное $m \in \mathbb{N}_0$ такое, что значения $K(n, m)$ меняют знак при $n \in \mathbb{N}_m$.

Обозначим $c(n) = K(n, m)$. Функция c есть решение уравнения (1.1) на полуоси $\mathbb{N}_m$.

Покажем, что при выполнении условий теоремы для любого числа $M > 0$ и любой такой точки $n_1 \in \mathbb{N}_m$, что $c(n_1) < 0$, имеем: если $c(n) \leq M$ для всех $n \in \mathbb{N}_m^{n_1}$, то $c(n_1) \geq -M$.

В силу линейности уравнения без ограничения общности полагаем $M = 1$.

Обозначим $m_0 = \max\{n \in \mathbb{N}_m^{n_1} \mid c(n) \geq 0\}$.

Для всех $n \in \mathbb{N}_m^{m_0+1}$ имеем:

$$c(n) \leq c(n) - c(m_0 + 1) = - \sum_{k=n}^{m_0} \Delta c(k) = \sum_{k=n}^{m_0} a(k) c(h(k)) \leq \sum_{k=n}^{m_0} a(k),$$

следовательно, для всех $n \in \mathbb{N}_m^{n_1}$ справедливо неравенство

$$c(n) \leq \mu \left(\sum_{k=n}^{m_0} a(k) \right). \quad (3.6)$$

Отсюда получаем

$$c(n_1) \geq c(n_1) - c(m_0) = \sum_{i=m_0}^{n_1-1} \Delta c(i) = - \sum_{i=m_0}^{n_1-1} a(i) c(h(i)) \geq - \sum_{i=m_0}^{n_1-1} a(i) \mu \left(\sum_{k=h(i)}^{m_0} a(k) \right) \geq -1.$$

Аналогично получаем, что $c(n_1) \leq \max_{n \in \mathbb{N}_m^{n_1}} |c(n)|$, если $c(n)$ меняет знак при $n \in \mathbb{N}_m^{n_1}$ и $c(n_1) > 0$.

Таким образом, в условиях теоремы функция Коши уравнения (1.1) ограничена. $\square$

Теорема 3.2 позволяет устанавливать устойчивость некоторых уравнений вида (1.1), к которым неприменимо предложение 3.1, однако теорема 3.2 не является обобщением предложения 3.1 (см. раздел 3.5).

Усилим неравенство (3.5):

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_{n_0}} \sum_{m=n}^{\infty} \mu \left(\sum_{k=h(m)}^{n-1} a(k) \right) a(m) \leq 1. \quad (3.7)$$

Из показанного выше следует, что если выполнено условие (3.1) предложения 3.1, то выполнено и условие (3.7). Однако равномерную устойчивость уравнения (1.1) неравенство (3.7) не гарантирует, что видно на примере автономного уравнения $\Delta x(n) = ax(n)$.

Лемма 3.1. Если для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}_0$ имеем

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_{n_0}} \sum_{m=n}^{\infty} a(m) \chi_n(m) \leq 1,$$

то функция Коши уравнения (1.1) ограничена.

Доказательство. Предположим, что выполнено условие леммы, $K(n, m) \geq 0$ для некоторых $n, m \in \mathbb{N}_{n_0}$, $n \geq m$, $K(n+k, m) \leq 0$ для $k = 1, 2, \dots, p$ и $\max_{k \in \mathbb{N}_m^n} K(k, m) \leq M$. Тогда

$$\begin{aligned} K(n+p, m) &= K(n, m) - \sum_{k=n}^{n+p-1} a(k) K(h(k), m) \geq \\ &\geq K(n, m) - \sum_{k=n}^{n+p-1} a(k) \chi_n(k) M \geq K(n, m) - M \geq -M. \end{aligned}$$

Очевидно, это означает, что $|K(n, m)| \leq M$ для всех $n \in \mathbb{N}_m$. $\square$

Теорема 3.3. Если для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}_0$ для всех $n \in \mathbb{N}_{n_0}$ справедливо неравенство

$$\sum_{m=n}^{\infty} \mu \left(\sum_{k=h(m)}^{n-1} a(k) \right) a(m) \leq 2 - \sum_{m=n}^{\infty} a(m) \chi_n(m), \quad (3.8)$$

то функция Коши уравнения (1.1) ограничена.

Доказательство. Если для некоторого фиксированного $m \in \mathbb{N}_0$ значения $K(n, m)$ не меняют знак при $n \in \mathbb{N}_m$, то очевидно, что они не возрастают с ростом n , следовательно, $|K(n, m)| \leq 1$.

Зафиксируем произвольное $m \in \mathbb{N}_0$ такое, что значения $K(n, m)$ меняют знак при $n \in \mathbb{N}_m$.

Обозначим $c(n) = K(n, m)$. Функция c есть решение уравнения (1.1) на полуоси $\mathbb{N}_m$.

Покажем, что при выполнении условий теоремы для любого числа $M > 0$ и любой такой точки $n_1 \in \mathbb{N}_m$, что $c(n_1) < 0$, имеем: если $c(n) \leq M$ для всех $n \in \mathbb{N}_m^{n_1}$, то $c(n_1) \geq -M$.

В силу линейности уравнения без ограничения общности полагаем $M = 1$.

Обозначим $m_0 = \max\{n \in \mathbb{N}_m^{n_1} \mid c(n) \geq 0\}$. Обозначим $c(m_0) = \delta$.

Для всех $n \in \mathbb{N}_m^{m_0+1}$ имеем:

$$c(n) = c(n) - c(m_0) + \delta = \delta - \sum_{k=n}^{m_0-1} \Delta c(k) = \delta + \sum_{k=n}^{m_0-1} a(k) c(h(k)) \leq \delta + \sum_{k=n}^{m_0-1} a(k).$$

Для всех $n \in \mathbb{N}_m^{n_1}$ справедливо неравенство

$$c(n) \leq \mu \left(\delta + \sum_{k=n}^{m_0-1} a(k) \right) \leq \delta \chi_{m_0}(n) + \mu \left(\sum_{k=n}^{m_0-1} a(k) \right). \quad (3.9)$$

Отсюда получаем

$$c(n_1) - \delta = \sum_{i=m_0}^{n_1-1} \Delta c(i) = - \sum_{i=m_0}^{n_1-1} a(i)c(h(i)) \geq - \sum_{i=m_0}^{n_1-1} a(i) \left(\delta \chi_{m_0}(i) + \mu \left(\sum_{k=h(i)}^{m_0-1} a(k) \right) \right),$$

что равносильно неравенству

$$c(n_1) \geq - \sum_{i=m_0}^{n_1-1} a(i) \mu \left(\sum_{k=h(i)}^{m_0-1} a(k) \right) + \delta \left(1 - \sum_{i=m_0}^{n_1-1} a(i) \chi_{m_0}(i) \right).$$

Если $\sum_{m=m_0}^{\infty} a(m) \chi_{m_0}(m) \leq 1$ для любого m_0 , то $c(n)$ ограничена в силу леммы 3.1. Если же сумма больше 1, то правая часть последнего неравенства минимальна при $\delta = 1$, поэтому при выполнении неравенства (3.8) получаем:

$$c(n_1) \geq - \left(2 - \sum_{m=m_0}^{\infty} a(m) \chi_{m_0}(m) \right) + \left(1 - \sum_{m=m_0}^{\infty} a(m) \chi_{m_0}(m) \right) = -1.$$

Аналогично получаем, что $c(n_1) \leq \max_{n \in \mathbb{N}_m^{n_1}} |c(n)|$, если $c(n)$ меняет знак при $n \in \mathbb{N}_m^{n_1}$ и $c(n_1) > 0$.

Таким образом, в условиях теоремы функция Коши уравнения (1.1) ограничена. $\square$

3.5. Сравнения и примеры. Из полученных выше достаточных условий ограниченности функции Коши уравнения (1.1) теорема 3.1 имеет, по-видимому, наиболее широкую область применимости, поскольку предложение 3.1 является ее следствием, а теоремы 3.2 и 3.3 получены упрощением условий теоремы 3.1.

Сравним области применимости предложения 3.1 и теорем 3.2 и 3.3: приведем примеры, показывающие, что любое из трех этих утверждений может быть применимо к уравнению, к которому остальные два утверждения неприменимы. Теорему 3.1 также применим во всех трех примерах.

Пример 3.1. Рассмотрим уравнение (1.1) с параметрами $a(n) \equiv 1$, $h(n) = \begin{cases} n, & n \in 2\mathbb{N}_0; \\ n-1, & n \notin 2\mathbb{N}_0. \end{cases}$

Его функция Коши ограничена: для четных m

$$K(n, m) = \begin{cases} 1, & n - m = 4k, \ k \in \mathbb{N}_0; \\ 0, & n - m = 2k + 1, \ k \in \mathbb{N}_0; \\ -1, & n - m = 4k + 2, \ k \in \mathbb{N}_0; \end{cases}$$

для нечетных m выражение для $K(n, m)$ имеет сдвиг на 1, поскольку $K(m+1, m) = K(m, m)$.

Предложение 3.1 не устанавливает ограниченность функции Коши:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m=h(n)}^n a(m) = \sum_{m=0}^1 1 = 2 > 3/2.$$

Теорема 3.2 не устанавливает ограниченность функции Коши:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m=n}^{\infty} \mu \left(\sum_{k=h(m)}^n a(k) \right) a(m) = \sum_{m=0}^1 \mu \left(\sum_{k=h(m)}^0 1 \right) = 2 > 1.$$

Теорема 3.3 устанавливает ограниченность функции Коши, поскольку

$$\begin{aligned} \sum_{m=1}^{\infty} \mu \left(\sum_{k=h(m)}^{-1} a(k) \right) a(m) &= \sum_{m=1}^1 (\mu(1) \cdot 1) = 1 \leq 2 - \sum_{m=1}^1 1; \\ \sum_{m=2}^{\infty} \mu \left(\sum_{k=h(m)}^1 a(k) \right) a(m) &= \sum_{m=2}^3 (\mu(0) \cdot 1) = 0 \leq 2 - \sum_{m=2}^3 1. \end{aligned}$$

Теорема 3.1 устанавливает ограниченность функции Коши, поскольку

$$\begin{aligned} \sup_{\delta \in [0,1]} \sum_{m=0}^{\infty} \mu \left(\delta \chi_0(m) + \sum_{k=h(m)}^{-1} a(k) \right) a(m) &= \sup_{\delta \in [0,1]} \sum_{m=0}^1 \mu(\delta) = 2\delta \leq 1 + \delta, \\ \sup_{\delta \in [0,1]} \sum_{m=1}^{\infty} \mu \left(\delta \chi_1(m) + \sum_{k=h(m)}^0 a(k) \right) a(m) &= \sup_{\delta \in [0,1]} \sum_{m=1}^1 \mu(\delta + 1) \leq 1 + \delta. \end{aligned}$$

Пример 3.2. Рассмотрим уравнение (1.1) с параметрами

$$a(n) = \begin{cases} 3/10, & n \neq 5k, k \in \mathbb{N}_1; \\ 9/10, & n = 5k, k \in \mathbb{N}_1; \end{cases} \quad h(n) = \begin{cases} n, & n \neq 5k, k \in \mathbb{N}_1; \\ n - 4, & n = 5k, k \in \mathbb{N}_1. \end{cases}$$

Его функция Коши ограничена: нетрудно видеть, что для любых $(n, m) \in \mathbb{D}$ имеем:

$$K(n + 5, m) = K(n, m) \cdot ((3/10)^4 - 9/10).$$

Предложение 3.1 не устанавливает ограниченность функции Коши:

$$\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m=h(n)}^n a(m) = \sum_{m=1}^5 a(m) = 21/10 > 3/2.$$

Теорема 3.2 устанавливает ограниченность функции Коши:

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m=n}^{\infty} \mu \left(\sum_{k=h(m)}^n a(k) \right) a(m) &= \sum_{m=4}^5 \mu \left(\sum_{k=h(m)}^4 a(k) \right) a(m) = \\ &= \mu(3/10) \cdot 3/10 + \mu(12/10) \cdot 9/10 = 9/100 + 9/10 = 99/100 < 1. \end{aligned}$$

Теорема 3.3 не устанавливает ограниченность функции Коши:

$$\begin{aligned} \sum_{m=4}^{\infty} \mu \left(\sum_{k=h(m)}^3 a(k) \right) a(m) &= \mu \left(\sum_{k=h(4)}^3 a(k) \right) 3/10 + \mu \left(\sum_{k=h(1)}^3 a(k) \right) 9/10 = \\ &= \mu(9/10) \cdot 9/10 = 81/100 > 8/10 = 2 - 3/10 - 9/10 = 2 - \sum_{m=4}^{\infty} a(m) \chi_4(m). \end{aligned}$$

Теорема 3.1 устанавливает ограниченность функции Коши:

$$\begin{aligned} \sup_{n \in \mathbb{N}_0, \delta \in [0,1]} \left[\sum_{m=n}^{\infty} \mu \left(\delta + \sum_{k=h(m)}^{n-1} a(k) \right) a(m) - \delta \right] &= \sup_{\delta \in [0,1]} \left[\sum_{m=4}^4 \mu \left(\delta + \sum_{k=1}^4 a(k) \right) a(m) - \delta \right] = \\ &= \sup_{\delta \in [0,1]} [9/10 \cdot \mu(\delta + 9/10) - \delta] < 1. \end{aligned}$$

Ниже рассмотрим некоторые автономные уравнения вида $\Delta x(n) + ax(n-r) = 0$, где $a, r \geq 0$. Необходимым и достаточным условием ограниченности решений этих уравнений (а значит, и ограниченности их функций Коши) является $a \leq 2 \cos \frac{r\pi}{2r+1}$ (см. [11]).

Пример 3.3. Рассмотрим уравнение $\Delta x(n) + ax(n-1) = 0$, где $a \geq 0$. Необходимым и достаточным условием ограниченности его функции Коши является $a \leq 1$.

Предложение 3.1 дает условие $a + a \leq 3/2$, т. е. $a \leq 3/4$.

Теорема 3.2 дает условие $a(\mu(a) + \mu(2a)) \leq 1$, что равносильно оценке $a \leq \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Теорема 3.3 дает условие $a(\mu(a)) \leq 2 - 2a$, что равносильно оценке $a \leq \sqrt{3} - 1$.

Таким образом для $a \in (\sqrt{3} - 1, 3/4]$ предложение 3.1 устанавливает ограниченность функции Коши, а теоремы 3.2 и 3.3 нет.

Теорема 3.1 дает условие: $a(\mu(\delta) + \mu(\delta + a)) \leq 1 + \delta$ для всех $\delta \in [0, 1]$. Нетрудно установить, что это равносильно точной оценке $a \leq 1$.

Уравнение $\Delta x(n) + ax(n-1) = 0$ — не единственное автономное уравнение вида (1.1), для которое достаточное условие ограниченности функции Коши, получаемое с помощью теоремы 3.1, оказывается необходимым.

Пример 3.4. Рассмотрим автономное уравнение без запаздывания $\Delta x(n) + ax(n) = 0$, $a \geq 0$. Необходимым и достаточным условием ограниченности его функции Коши является неравенство $a \leq 2$.

Нетрудно видеть, что предложение 3.1 дает условие $a \leq 3/2$, теоремы 3.1 и 3.3 дают точное условие $a \leq 2$, а теорема 3.2 — условие $a \leq 1$.

Интересным был бы анализ близости условий ограниченности функции Коши автономного уравнения $\Delta x(n) + ax(n-r) = 0$, которые дают предложение 3.1 и теоремы 3.1–3.3, к точным. Заметим, что в этом вопросе теоремы 3.1–3.3 существенно уступают предложению 3.1 в удобстве использования, поэтому такой анализ нетривиален. В этой работе он не проводится.

4. УСЛОВИЯ АСИМПТОТИЧЕСКОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В этом разделе коснемся вопроса о том, какие требуются дополнительные условия к полученным выше условиям ограниченности функции Коши уравнения (1.1), чтобы получать достаточные условия асимптотических видов устойчивости.

Предложение 4.1 (см. [6]). Если $\sum_{m=0}^{\infty} a(m) < \infty$, то для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $l > 0$, что при $n \geq m + l$ для функции Коши уравнения (1.1) справедлива оценка

$$|K(n, m) - 1| \leq \varepsilon.$$

Предложение 4.2 (см. [6]). Если справедливо неравенство

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sum_{m=h(n)}^n a(m) < 3/2, \quad (4.1)$$

то для некоторых $N, \gamma > 0$ функция Коши уравнения (1.1) подчинена оценке

$$|K(n, m)| \leq N e^{-\gamma \sum_{k=m}^n a(k)}, \quad (n, m) \in \mathbb{D}. \quad (4.2)$$

Следствие 4.1. Если $\sum_{m=0}^{\infty} a(m) = \infty$ и для некоторого $n_0 \in \mathbb{N}_0$ справедливо неравенство (4.1), то уравнение (1.1) асимптотически устойчиво.

Предложение 4.3 (см. [3]). Если для уравнения (1.1) выполнено $\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m=h(n)}^n a(m) < \infty$, то его равномерная асимптотическая устойчивость равносильна справедливости оценки (4.2).

Предложение 4.4 (см. [3]). Если уравнение (1.1) равномерно асимптотически устойчиво и $\sup_{n \in \mathbb{N}_0} \sum_{m=h(n)}^n a(m) < \infty$, то оно экспоненциально устойчиво.

В предыдущем разделе, излагая новые результаты, мы привели несколько их видов. В этом разделе мы будем вводить дополнительные условия к условиям теоремы 3.1, а теоремы 3.2 и 3.3 развивать далее не будем. Такой подход объясняется тем, что мы считаем, что основное внимание следует уделить различию условий, накладываемых для разных видов асимптотической устойчивости; реализация этих дополнений к условиям равномерной устойчивости для теорем 3.1–3.3 идейно не отличается.

Предложение 4.1 показывает, что условие $\sum_{m=0}^{\infty} a(m) = \infty$ является необходимым условием асимптотической устойчивости уравнения (1.1). Поэтому везде ниже оно будет входить в любой список достаточных условий асимптотической устойчивости уравнения (1.1).

Теорема 4.1. Если $\sum_{m=0}^{\infty} a(m) = \infty$ и справедлива оценка

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sup_{\delta \in [0,1]} \left[\sum_{m=n}^{\infty} \mu \left(\delta \chi_n(m) + \sum_{k=h(m)}^{n-1} a(k) \right) a(m) - \delta \right] < 1, \quad (4.3)$$

то уравнение (1.1) асимптотически устойчиво.

Доказательство. Поскольку $\sum_{m=0}^{\infty} a(m) = \infty$, то решение уравнения, сохраняющее знак на полуоси, убывает к нулю, поэтому рассмотрим знакопеременное решение.

В таком случае единственное существенное отличие от доказательства теоремы 3.1 состоит в том, что величину $c(n_1)$ следует оценивать снизу числом не (-1) , а таким $(-S) > (-1)$, что выражение под знаком верхнего предела меньше S для достаточно больших n . $\square$

Теорему 4.1 естественно сопоставить со следствием 4.1. Однако аналогия не продолжается на предложение 4.2: неравенство (4.3) само по себе не гарантирует выполнения оценки (4.2).

Пример 4.1. Положим $a(n) = 1/2$ для $n \in \mathbb{N}_0$. Зададим последовательность точек полуоси $\mathbb{N}_0$ рекуррентно: $n_0 = 0$; $n_{i+1} = n_i + i + 1$ для $i \in \mathbb{N}_0$. Определим запаздывание

$$h(n) = \begin{cases} n, & n \in \mathbb{N}_{n_i}^{n_{i+1}-1}, \\ n_i, & n = n_{i+1} - 1; \end{cases} \quad i \in \mathbb{N}_0.$$

Нетрудно видеть, что условие (4.3) выполнено:

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{m=n}^{\infty} \mu \left(\delta \chi_n(m) + \sum_{k=h(m)}^{n-1} a(k) \right) a(m) - \delta \right] &= \frac{1}{2} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\sum_{m=n}^{\infty} \mu \left(\delta \chi_n(m) + \frac{n - h(m)}{2} \right) - \delta \right] = \\ &= \frac{1}{2} \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \left[\sum_{m=n_{i+1}-1}^{n_{i+1}-1} \mu \left(\delta + \frac{n_{i+1} - n_i}{2} \right) - \delta \right] = \frac{1}{2} \overline{\lim}_{i \rightarrow \infty} \left[\mu \left(\delta + \frac{2^i + 1}{2} \right) - \delta \right] = \frac{1 - \delta}{2} < 1. \end{aligned}$$

Пусть $x(0) = 1$. Тогда

$$x(n) = \begin{cases} x(n_i) \cdot 2^{-(n-n_i)}, & n \in \mathbb{N}_{n_i}^{n_{i+1}}; \\ x(n_{i+1} - 1) - x(n_i)/2, & n = n_{i+1}. \end{cases}$$

Отсюда

$$x(n_{i+1}) = x(n_{i+1} - 1) - x(n_i)/2 = x(n_i)2^{-i} - x(n_i)/2 = x(n_i)(2^{-i} - 2^{-1}) = \frac{x(n_i)(2^{1-i} - 1)}{2}.$$

Элементы последовательности $\{x(n_i)\}$ являются локальными экстремумами функции x . Поскольку $x(n_{i+1})/x(n_i) \rightarrow -1/2$, а $n_i - n_{i-1} \rightarrow \infty$ при $i \rightarrow \infty$, то функция x убывает медленнее любой экспоненты.

Таким образом, оценка (4.2) не выполняется. Более того, выполнение условий теоремы 4.1 не гарантирует равномерной асимптотической устойчивости уравнения (1.1).

Для равномерности асимптотической устойчивости требуется наложить условие на последствие. Например, в свете доказательств предыдущих теорем очевидно следующее утверждение.

Теорема 4.2. Если выполнены условия теоремы 4.1 и, более того, для некоторого $b > 0$ справедливо $a(n) \geq b$, то уравнение (1.1) экспоненциально устойчиво.

ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

С конца XX века дифференциальные и разностные уравнения с последействием развиваются часто параллельными курсами. Интересно сопоставить достижения и трудности в этих исследованиях, не обращаясь без необходимости к объединениям или обобщениям этих двух классов

уравнений (к гибридным уравнениям, уравнениям «на шкалах» и др.). Многие вопросы для уравнений на дискретной полуоси решаются проще вследствие более простой аналитической техники. С другой стороны, в исследовании разностных уравнений возникает немало трудностей, для дифференциальных уравнений отсутствующих. В отношении вопросов, исследуемых в настоящей статье, отметим следующее. Важный класс уравнений с последствием составляют уравнения, для которых последствие ограничено; в нашем случае это ограниченность величины $n - h(n)$. Для дифференциальных уравнений ограничение последствия отменяет особенно сложные виды поведения решений, что, как правило, упрощает исследование. Однако для разностных уравнений запрет такого поведения существенно влияет на точность условий устойчивости: в частности, оказывается, что константа $3/2$ перестает быть точной (в работе [12] для уравнения (1.1) с ограниченным последствием найдена новая граница устойчивости, затем в работе [6] доказана точность этой константы, а в работе [2] результаты обобщены на случай уравнения с несколькими запаздываниями).

Об уравнениях с несколькими запаздываниями следует сказать отдельно. Более 30 лет назад было замечено [10], что содержательное обобщение условий устойчивости на такие уравнения — нетривиальная задача: формально «точное» обобщение теорем «о $3/2$ » плохо описывает асимптотику решений уравнений с сильно отличающимися функциями запаздываний. С тех пор вопрос о хорошем обобщении теорем «о $3/2$ » остается актуальным. Работа [8] была написана как попытка подступиться именно к этому вопросу, в таком свете можно рассматривать и настоящую работу: автор полагает, что полученные в ней новые условия устойчивости допускают существенно более точный перенос на уравнения с несколькими запаздываниями, чем теоремы в виде ограничений интеграла или суммы коэффициентов по длине запаздывания.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф. Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991.
2. Куликов А. Ю. Устойчивость линейного неавтономного разностного уравнения с ограниченными запаздываниями // Изв. вузов. Мат. — 2010. — № 11. — С. 22–30.
3. Куликов А. Ю., Малыгина В. В. Устойчивость линейного разностного уравнения и оценки его фундаментального решения // Изв. вузов. Мат. — 2011. — № 12. — С. 30–41.
4. Малыгина В. В. Некоторые признаки устойчивости уравнений с запаздывающим аргументом // Дифф. уравн. — 1992. — 28, № 10. — С. 1716–1723.
5. Малыгина В. В. Теорема Мышкиса о $3/2$ и ее обобщения // Сиб. мат. ж. — 2023. — 64, № 6. — С. 1248–1262. — DOI: [10.33048/smzh.2023.64.611](https://doi.org/10.33048/smzh.2023.64.611).
6. Малыгина В. В., Куликов А. Ю. Об устойчивости неавтономных разностных уравнений с несколькими запаздываниями // Изв. вузов. Мат. — 2008. — № 3. — С. 18–26.
7. Мышкис А. Д. О решениях линейных однородных дифференциальных уравнений первого порядка устойчивого типа с запаздывающим аргументом // Мат. сб. — 1951. — 28, №3. — С. 641–658.
8. Чудинов К. М. Новый подход к задаче Мышкиса об устойчивости дифференциального уравнения первого порядка с последствием // Мат. труды. — В печати, 2025.
9. Berezansky L., Braverman E. On existence of positive solutions for linear difference equations with several delays // Adv. Dynam. Syst. Appl. — 2006. — 1, № 1. — С. 29–47. — DOI: [10.1155/ADE/2006/82143](https://doi.org/10.1155/ADE/2006/82143).
10. Krisztin T. On stability properties for one-dimensional functional-differential equations // Funkcial. Ekvac. — 1991. — 34. — С. 241–256.
11. Levin S. A., May R. M. A note on delay-differential equations // Theoret. Popul. Biol. — 1976. — № 9. — С. 178–187. — DOI: [10.1016/0040-5809\(76\)90043-5](https://doi.org/10.1016/0040-5809(76)90043-5).
12. Yu J.-S. Asymptotic stability for a linear difference equation with variable delay // Comput. Math. Appl. — 1998. — 36, № 10–12. — С. 203–210. — DOI: [10.1016/S0898-1221\(98\)80021-7](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(98)80021-7).

К. М. Чудинов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

E-mail: cyril@list.ru, РИНЦ SPIN-код: 1944-6552, РИНЦ AuthorID: [475163](https://elibrary.ru/475163), ResearcherID: [ABI-6384-2020](https://orcid.org/0000-0002-7574-793X), Scopus: [55759745800](https://orcid.org/55759745800), ORCID: [0000-0002-7574-793X](https://orcid.org/0000-0002-7574-793X)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-138-150](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-138-150)
 EDN: UIEWLQ

UDC 517.929
 Research article

On the stability conditions for a linear difference equation with variable delay

K. M. Chudinov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

Abstract. The constant $3/2$, which determines sufficient conditions for the stability of linear nonautonomous differential equations with delay, was first obtained by A. D. Myshkis in the middle of the twentieth century, and these results initiated the research of equations with aftereffect. The goal of such a research is stability conditions explicitly expressed in terms of the equation parameters. In the last decade of the twentieth century, the first discrete analogues of the results of such investigations were established: effective sufficient conditions for the stability of difference equations with aftereffect. Recently, stability conditions for differential equations with aftereffect have been obtained, which strengthen the well-known theorems, expressed through estimating the values of functionals of the parameters of the equation by the constant $3/2$. In this paper, we obtain discrete analogs of these results, i.e., sufficient conditions for the stability of a linear nonautonomous difference equation with delay expressed in terms of the equation parameters (coefficients and delays) and significantly strengthening the well-known conditions of this kind.

Keywords: linear nonautonomous differential equation, variable delay, uniform stability, asymptotic stability, exponential stability.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: K. M. Chudinov, “On the stability conditions for a linear difference equation with variable delay,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. 72, No. 1, 138–150. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-138-150](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-138-150) EDN: UIEWLQ

REFERENCES

1. N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, and L. F. Rakhmatullina, *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the Theory of Functional Differential Equations], Nauka, Moscow, 1991 (in Russian).
2. A. Yu. Kulikov, “Ustoychivost' lineynogo neavtonomnogo raznostnogo uravneniya s ogranichennymi zapazdyvaniyami” [Stability of a linear nonautonomous difference equation with bounded delays], *Izv. Vuzov. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2010, No. 11, 22–30 (in Russian).
3. A. Yu. Kulikov and V. V. Malygina, “Ustoychivost' lineynogo raznostnogo uravneniya i otsenki ego fundamental'nogo resheniya” [Stability of a linear difference equation and estimates of its fundamental solution], *Izv. Vuzov. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2011, No. 12, 30–41 (in Russian).
4. V. V. Malygina, “Nekotorye priznaki ustoychivosti uravneniy s zapazdyvayushchim argumentom” [Some stability criteria for equations with delayed arguments], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1992, **28**, No. 10, 1716–1723 (in Russian).
5. V. V. Malygina, “Teorema Myshkisa o $3/2$ i ee obobshcheniya” [Myshkis's $3/2$ theorem and its generalizations], *Sib. Mat. Zh.* [Siberian Math. J.], 2023, **64**, No. 6, 1248–1262 (in Russian), DOI: [10.33048/smzh.2023.64.611](https://doi.org/10.33048/smzh.2023.64.611).
6. V. V. Malygina and A. Yu. Kulikov, “Ob ustoychivosti neavtonomnykh raznostnykh uravneniy s neskol'kimi zapazdyvaniyami” [On the stability of nonautonomous difference equations with several delays], *Izv. Vuzov. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2008, No. 3, 18–26 (in Russian).



7. A. D. Myshkis, “O resheniyakh lineynykh odnorodnykh differentsial’nykh uravneniy pervogo poryadka ustoychivogo tipa s zapazdyvayushchim argumentom” [On solutions of first-order linear homogeneous differential equations of stable type with delayed argument], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 1951, **28**, No. 3, 641–658 (in Russian).
8. K. M. Chudinov, “Novyy podkhod k zadache Myshkisa ob ustoychivosti differentsial’nogo uravneniya pervogo poryadka s posledeystviem” [A new approach to the Myshkis problem on the stability of a first-order differential equation with aftereffect], *Mat. Trudy* [Math. Proceedings], 2025, *to be printed*.
9. L. Berezansky and E. Braverman, “On existence of positive solutions for linear difference equations with several delays,” *Adv. Dynam. Syst. Appl.*, 2006, **1**, No 1, 29–47, DOI: [10.1155/ADE/2006/82143](https://doi.org/10.1155/ADE/2006/82143).
10. T. Krisztin, “On stability properties for one-dimensional functional-differential equations,” *Funkcial. Ekvac.*, 1991, **34**, 241–256.
11. S. A. Levin and R. M. May, “A note on delay-differential equations,” *Theoret. Popul. Biol.*, 1976, No. 9, 178–187, DOI: [10.1016/0040-5809\(76\)90043-5](https://doi.org/10.1016/0040-5809(76)90043-5).
12. J.-S. Yu, “Asymptotic stability for a linear difference equation with variable delay,” *Comput. Math. Appl.*, 1998, **36**, No. 10–12, 203–210, DOI: [10.1016/S0898-1221\(98\)80021-7](https://doi.org/10.1016/S0898-1221(98)80021-7).

K. M. Chudinov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

E-mail: cyril@list.ru, eLIBRARY SPIN-code: 1944-6552, eLIBRARY AuthorID: [475163](https://elibrary.ru/475163), ResearcherID: [ABI-6384-2020](https://orcid.org/0000-0002-7574-793X), Scopus: [55759745800](https://orcid.org/55759745800), ORCID: [0000-0002-7574-793X](https://orcid.org/0000-0002-7574-793X)

О РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ГАМИЛЬТОНА—ЯКОБИ С ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНОЙ ЗАВИСИМОСТЬЮ ОТ ИМПУЛЬСА

Л. Г. ШАГАЛОВА

*Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН, Екатеринбург,
Россия*

Аннотация. На ограниченном отрезке времени рассмотрены три начальные задачи для одномерных уравнений Гамильтона—Якоби эволюционного типа. Во всех задачах гамильтонианы зависят от координатной и импульсной переменных. При этом зависимость от импульса экспоненциальна, и не выполняется условие коэрцитивности. В двух из рассматриваемых задач гамильтонианы отличаются только знаками перед экспоненциальными слагаемыми, и эти задачи рассматриваются в ограниченной прямоугольной области, определяемой нулями функций-коэффициентов перед экспоненциальными слагаемыми. В случае, когда внутри области функции-коэффициенты положительны, и гамильтониан является выпуклым по импульсной переменной, доказаны существование и единственность вязкостного решения. В случае отрицательных функций-коэффициентов вязкостного решения не существует. Введено обобщенное решение и получены достаточные условия его существования. В третьей задаче отсутствуют фазовые ограничения, но гамильтониан склеивается из трех компонент. Доказано существование вязкостного решения, установлена его связь с обобщенным решением рассмотренной задачи с фазовыми ограничениями. Исследования и построения базируются на анализе поведения решений соответствующих характеристических систем, применении методов негладкого анализа, вариационного исчисления и оптимального управления.

Ключевые слова: уравнение Гамильтона—Якоби, некоэрцитивный гамильтониан, вязкостное решение, обобщенное решение, фазовые ограничения, характеристики, оптимальное управление, задача Больца, функция цены.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Шагалова Л. Г. О решениях уравнений Гамильтона—Якоби с экспоненциальной зависимостью от импульса // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 151–164. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-151-164](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-151-164) EDN: [UIRGDJ](https://www.edn.ru/2026-72-1-151-164)

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие задачи механики, физики, оптики и других областей приводят к рассмотрению различных типов задач для нелинейных уравнений Гамильтона—Якоби. Теория этих уравнений активно развивается, в ней рассмотрены различные подходы к определению обобщенного решения, доказаны теоремы существования и единственности, разработаны аналитические и численные методы построения решений (см., например, [1, 7, 11, 15]). При этом развитие науки и техники приводит к появлению новых задач. В частности, такие задачи возникают в кристаллографии и молекулярной генетике [8, 17]. В силу нетипичности новых задач их не всегда удастся решить известными методами, и поскольку для таких задач не выполняются условия известных теорем существования, требуется вводить и исследовать новые обобщенные решения.

Настоящая работа продолжает цикл исследований, начатый в [3, 6], источником которых является полученная в [13] задача Коши для уравнения Гамильтона—Якоби в модели Кроу—Кимуры молекулярной эволюции. Для этой задачи с фазовыми ограничениями и некоэрцитивным вогнутым по импульсной переменной гамильтонианом, экспоненциально зависящим от этой переменной, известные концепции обобщенного решения (минимаксного и вязкостного [11, 15]) оказались неприменимы, что потребовало введения нового понятия решения. Были получены достаточные условия существования этого решения, репрезентативная формула, позволяющая строить его с помощью решений характеристической системы, исследованы свойства.

В данной работе уравнение с экспоненциальными слагаемыми в непрерывном гамильтониане рассматривается в достаточно общем виде, когда коэффициенты перед этими слагаемыми являются монотонными функциями фазовой переменной. Рассмотрены три типа начальных задач: две задачи с фазовыми ограничениями, когда некоэрцитивный гамильтониан является соответственно выпуклым или вогнутым по импульсной переменной, а также задача без фазовых ограничений с трехкомпонентным вогнутым по импульсу гамильтонианом. Показано, что ключевую роль в существовании как вязкостного, так и обобщенного решений играет условие продолжимости характеристик. При этом в случае выпуклости гамильтониана по импульсу существует и единственно вязкостное решение, а в задаче с фазовыми ограничениями и вогнутым по импульсу гамильтонианом вязкостного решения не существует, и для построения обобщенного решения требуется непрерывно продолжить начальную функцию на границу фазовых ограничений. Продолжение начальной функции неединственно, его можно построить разными способами, в частности, с помощью вязкостного решения рассматриваемой задачи с трехкомпонентным гамильтонианом.

2. РАССМАТРИВАЕМЫЕ ЗАДАЧИ

В статье рассматриваются начальные задачи Коши для уравнения Гамильтона—Якоби эволюционного типа, которые в общем виде можно представить следующим образом:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + H\left(x, \frac{\partial u}{\partial x}\right) = 0, \quad t \in (0, T), \quad x \in \text{cl } X \subset \mathbb{R}, \quad (2.1)$$

$$u(0, x) = u_0(x), \quad x \in \text{cl } X. \quad (2.2)$$

Здесь T — заданный момент времени, $T > 0$; X — ограниченный или бесконечный интервал, который в случае отсутствия фазовых ограничений совпадает с $\mathbb{R}$; $\text{cl } X$ — замыкание множества X . Начальная функция $u_0(\cdot) : \text{cl } X \rightarrow \mathbb{R}$ непрерывно дифференцируема.

Пусть заданы непрерывно дифференцируемые функции $h(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $f(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ и $g(\cdot) : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Предполагается, что функция $f(\cdot)$ является строго монотонно возрастающей, а функция $g(\cdot)$ — строго монотонно убывающей, и существуют точки x_* и x^* такие, что

$$f(x_*) = 0, \quad g(x^*) = 0, \quad \text{при этом} \quad x_* < x^*. \quad (2.3)$$

Далее будем рассматривать задачу (2.1), (2.2) в трех частных случаях, когда гамильтониан $H(\cdot)$ задается с помощью функций $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$, которые являются коэффициентами перед экспоненциальными слагаемыми. При этом основными объектами исследования являются две задачи с фазовыми ограничениями — задачи А и В. Для этих задач изучаются вопросы определения обобщенных решений, а также существования и единственности этих решений. Задача С имеет вспомогательный характер, она может быть использована для задания граничных условий в задаче В.

2.1. Задача А. Задачей А будем называть задачу (2.1), (2.2) в случае, когда гамильтониан имеет вид

$$H(x, p) = h(x) + f(x)e^p + g(x)e^{-p}, \quad (2.4)$$

а область изменения фазовой переменной — отрезок, определяемый нулями введенных выше монотонных функций $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$:

$$X = [x_*, x^*]. \quad (2.5)$$

Поскольку значения функций $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$ на отрезке $[x_*, x^*]$ неотрицательны, гамильтониан (2.4) является выпуклым по импульсной переменной p .

2.2. Задача В. В этом случае задача (2.1), (2.2) рассматривается, когда X является отрезком (2.5), для гамильтониана вида

$$H(x, p) = h(x) - f(x)e^p - g(x)e^{-p}. \quad (2.6)$$

В рассматриваемой области гамильтониан (2.6) является вогнутым по переменной p .

2.3. Задача С. В этом случае в задаче (2.1), (2.2) нет фазовых ограничений, и множество X совпадает со всей числовой прямой, т. е. $X = \mathbb{R}$. Непрерывный гамильтониан склеивается из трех компонент следующим образом:

$$H(x, p) = \begin{cases} h(x_*) - g(x_*)e^{-p}, & x \leq x_*, p \in \mathbb{R}, \\ h(x) - f(x)e^p - g(x)e^{-p}, & x_* < x < x^*, p \in \mathbb{R}, \\ h(x^*) - f(x^*)e^p, & x \geq x^*, p \in \mathbb{R}. \end{cases} \quad (2.7)$$

Таким образом, в области $[0, T] \times (x_*, x^*)$ гамильтониан зависит от фазовой и импульсной переменных, а при $x < x_*$ и $x > x^*$ гамильтониан является функцией только импульсной переменной p . Отметим, что гамильтониан (2.7) является вогнутым по переменной p .

3. НЕПРЕРЫВНОЕ ВЯЗКОСТНОЕ РЕШЕНИЕ

Вязкостное решение можно определить различными по форме, но эквивалентными по существу способами. В данной работе удобным оказалось использование определения вязкостного решения задачи (2.1), (2.2) с помощью суб- и супердифференциалов. Представим здесь это определение для актуального для нас случая одномерного фазового пространства.

Сначала приведем определения суб- и супердифференциала функции в точке, которые в негладком анализе являются обобщениями понятий производной и градиента.

Пусть дано множество $W \subset \mathbb{R}^2$. Через ∂W и $C(W)$ обозначим соответственно границу этого множества и класс функций, непрерывных на W .

Определение 3.1. Пусть $u(\cdot) \in C(W)$ и $(t, x) \in W$. Субдифференциалом функции $u(\cdot)$ в точке (t, x) называется множество

$$D^-u(t, x) = \left\{ (a, s) \in \mathbb{R}^2 \left| \liminf_{\substack{(\tau, y) \rightarrow (t, x) \\ (\tau, y) \in W}} \frac{u(\tau, y) - u(t, x) - a(\tau - t) - s(y - x)}{|\tau - t| + |y - x|} \geq 0 \right. \right\}. \quad (3.1)$$

Супердифференциалом функции $u(\cdot)$ в точке (t, x) называется множество

$$D^+u(t, x) = \left\{ (a, s) \in \mathbb{R}^2 \left| \limsup_{\substack{(\tau, y) \rightarrow (t, x) \\ (\tau, y) \in W}} \frac{u(\tau, y) - u(t, x) - a(\tau - t) - s(y - x)}{|\tau - t| + |y - x|} \leq 0 \right. \right\}.$$

Замечание 3.1. В граничных точках замкнутого множества W субдифференциал $D^-u(t, x)$, если он непуст, является неограниченным множеством. Действительно, пусть $(t_*, y_*) \in \partial W$, $(a, s) \in D^-u(t_*, y_*)$, а вектор (n_1, n_2) — внешняя нормаль к множеству $\text{cl } W$ в точке (t_*, y_*) . Тогда, как нетрудно заметить из определения субдифференциала (3.1), для любого положительного числа k справедливо

$$(a + kn_1, s + kn_2) \in D^-u(t_*, y_*).$$

Ниже используются обозначения $\Omega_T = (0, T) \times X$ and $\overline{\Omega}_T = (0, T) \times \text{cl } X$.

Определение 3.2. Функция $u \in C(\overline{\Omega}_T)$ называется вязкостным решением задачи (2.1), (2.2), если она удовлетворяет начальному условию (2.2) и дифференциальным неравенствам

$$a + H(x, s) \leq 0, \quad \forall (t, x) \in \Omega_T, \quad \forall (a, s) \in D^+u(t, x), \quad (3.2)$$

$$a + H(x, s) \geq 0, \quad \forall (t, x) \in \overline{\Omega}_T, \quad \forall (a, s) \in D^-u(t, x). \quad (3.3)$$

Замечание 3.2. В определении 3.2 для точек, расположенных на границе фазовых ограничений, $(t, x) \in \overline{\Omega}_T \setminus \Omega_T$, требуется выполнение только одного дифференциального неравенства — неравенства (3.3) для субдифференциала. Это объясняется тем фактом, что при достаточно общих условиях, накладываемых на гамильтониан и начальную функцию, набор условий (2.2), (3.2), (3.3) обеспечивает единственность вязкостного решения задачи (2.1), (2.2) и выполнение для этого решения неравенства (3.2) во всех точках области $\overline{\Omega}_T$.

Отметим, что гамильтонианы (2.4), (2.6) и (2.7) рассматриваемых задач А, В и С не удовлетворяют условиям, при которых доказаны известные теоремы существования вязкостных решений. В частности, для этих гамильтонианов не выполнено условие коэрцитивности. Для выпуклого по импульсной переменной p гамильтониана условие коэрцитивности имеет вид

$$\frac{H(x, p)}{|p|} \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad |p| \rightarrow \infty, \quad x \in \text{cl } X, \quad (3.4)$$

а для вогнутого по p гамильтониана условие коэрцитивности записывается следующим образом:

$$\frac{H(x, p)}{|p|} \rightarrow -\infty \quad \text{при} \quad |p| \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

В формулах (3.4) и (3.5) $|p|$ обозначает модуль числа p .

Легко проверить, что для гамильтонианов (2.4) и (2.6) соответствующие условия коэрцитивности нарушаются на линиях $x = x_*$ и $x = x^*$, а для гамильтониана (2.7) — при $x \leq x_*$ и при $x \geq x^*$.

Далее будет доказано, что в задаче А вязкостное решение существует и единственно, а в задаче В вязкостного решения не существует. Для задачи В на основе вязкостного подхода предложено определение обобщенного решения, требующее дополнительных условий на границе фазовых ограничений — на линиях $x = x_*$ и $x = x^*$. Эти дополнительные условия определяются неоднозначно и, в частности, могут быть получены с помощью решения задачи С.

4. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ВЯЗКОСТНОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ А

Рассматривая задачи А и В, в которых присутствует фазовое ограничение вида (2.5), будем использовать обозначения $\Pi_T = (0, T) \times (x_*, x^*)$ и $\overline{\Pi}_T = (0, T) \times [x_*, x^*]$, а также

$$\Gamma_T = \overline{\Pi}_T \setminus \Pi_T = \{(t, x) \mid 0 < t < T, x = x_*\} \cup \{(t, x) \mid 0 < t < T, x = x^*\}.$$

Рассмотрим задачу А. Заметим, что для этой задачи $\Omega_T = \Pi_T$, $\overline{\Omega}_T = \overline{\Pi}_T$.

Пусть число $\varepsilon > 0$ таково, что $x_* + \varepsilon < x^* - \varepsilon$. Символом X^ε обозначим отрезок $[x_* + \varepsilon; x^* - \varepsilon]$ и определим область

$$\overline{\Pi}_T^\varepsilon = \{(t, x) \mid 0 < t < T, x \in X^\varepsilon\}.$$

Очевидно, что $\overline{\Pi}_T^\varepsilon \subset \overline{\Pi}_T$, и в области $\overline{\Pi}_T^\varepsilon$ гамильтониан (2.4) удовлетворяет условию коэрцитивности (3.4).

Из [9, Theorem X.I, с. 678] получаем, что в области $\overline{\Pi}_T^\varepsilon$ существует единственное вязкостное решение $u^\varepsilon(\cdot)$ уравнения (2.1) с гамильтонианом вида (2.4), удовлетворяющее начальному условию (2.2). Это решение можно представить с помощью репрезентативной формулы

$$u^\varepsilon(t, x) = \inf \left\{ u_0(\xi(0)) + \int_0^t H^*(\xi(s), \xi'(s)) ds \mid \xi(0) = y, \xi(t) = x, y \in [x_* + \varepsilon; x^* - \varepsilon] \right\}. \quad (4.1)$$

Здесь $\xi'(s)$ — производная функции ξ в точке s , H^* — функция, сопряженная к гамильтониану (преобразование Лежандра), определяемая следующим образом:

$$H^*(x, q) = \sup_{p \in \mathbb{R}} \{pq - H(x, p)\}, \quad x \in X, \quad q \in \mathbb{R}. \quad (4.2)$$

Точная нижняя грань в выражении (4.1) ищется по функциям ξ из класса $C^2([0, T]; [x_* + \varepsilon; x^* - \varepsilon])$ дважды непрерывно дифференцируемых функций, определенных на отрезке $[0, T]$ и принимающих значения из $[x_* + \varepsilon; x^* - \varepsilon]$.

В области $\bar{\Pi}_T$ рассмотрим функцию

$$u(t, x) = \min \left\{ u_0(\xi(0)) + \int_0^t H^*(\xi(s), \xi'(s)) ds \mid \xi(0) = y, \xi(t) = x, y \in [x_*; x^*] \right\}. \quad (4.3)$$

Минимум в (4.3) ищется по функциям ξ из класса $C^1([0, T]; [x_*; x^*])$ непрерывно дифференцируемых функций, определенных на отрезке $[0, T]$ и принимающих значения из сегмента $[x_*; x^*]$.

Характеристическая система (см., например, [2, 16]) для задачи А имеет вид

$$\begin{aligned} \dot{x} &= H_p(x, p) = f(x)e^p - g(x)e^{-p}, \\ \dot{p} &= -H_x(x, p) = -h'(x) - f'(x)e^p - g'(x)e^{-p}, \\ \dot{z} &= pH_p(x, p) - H(x, p) = p(f(x)e^p - g(x)e^{-p}) - f(x)e^p - g(x)e^{-p} - h(x). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Здесь $H_x(x, p) = \partial H(x, p)/\partial x$, $H_p(x, p) = \partial H(x, p)/\partial p$.

Система (4.4) рассматривается с начальными условиями

$$x(0, y) = y, \quad p(0, y) = u'_0(y), \quad z(0, y) = u_0(y), \quad y \in [x_*; x^*]. \quad (4.5)$$

Решения системы (4.4), (4.5) называются *характеристиками*. Компоненты $x(\cdot, y)$, $p(\cdot, y)$ и $z(\cdot, y)$ решения называются соответственно *фазовыми*, *импульсными* и *ценовыми характеристиками*.

Выписывая необходимые условия экстремума, получим, что экстремалими вариационной задачи (4.3) являются фазовые характеристики. Из первого уравнения системы (4.4), учитывая условия, накладываемые на функции $f(\cdot)$ и $g(\cdot)$, получаем, что все экстремали, приходящие в точку $(t, x) \in \Pi_T$, лежат внутри Π_T , т. е. для значений $0 < \tau \leq t$ справедливо неравенство $x_* < x(\tau) < x^*$, и экстремали принадлежат классу $C^1([0, t]; (x_*; x^*))$.

Поскольку в области Π_T гамильтониан H (2.4) удовлетворяет условию коэрцитивности (3.4), вторая частная производная H_{qq}^* сопряженного гамильтониана (4.2) по переменной q неотрицательна в этой области.

Вычислим

$$\begin{aligned} H^*(x, q) &= -h(x) + q \ln \left(\frac{q + \sqrt{q^2 + 4f(x)g(x)}}{2f(x)} \right) - \sqrt{q^2 + 4f(x)g(x)}, \\ H_{qq}^*(x, q) &= \frac{1}{\sqrt{q^2 + 4f(x)g(x)}} > 0, \quad x \in (x_*, x^*), \quad q \in \mathbb{R}. \end{aligned} \quad (4.6)$$

Поскольку фазовое пространство одномерно, из (4.6) и результатов работ [10, 14] следует, что минимум в (4.3) достигается.

В соответствии с результатами работ [12, 16], посвященными методу обобщенных характеристик, значение (4.1) вязкостного решения в точке $(t, x) \in \Pi_T$ равно

$$u(t, x) = \min \left\{ u_0(y) + \int_0^t (p(\tau)H_p(x(\tau), p(\tau)) - H(x(\tau), p(\tau))) d\tau \mid x(t, y) = x \right\}, \quad (4.7)$$

где $x(t) = x(t, y)$ и $p(t) = p(t, y)$ — соответственно фазовая и импульсная компоненты решения характеристической системы (4.4), (4.5), определяемого параметром $y \in (x_*, x^*)$.

Рассмотрим дифференциальное уравнение для импульсной компоненты в характеристической системе (4.4). Поскольку функции h , f и g определены на ограниченном отрезке $[x_*, x^*]$ и непрерывно дифференцируемы, и при этом f строго возрастает, а g строго убывает, можно получить следующую оценку:

$$-Ae^p - B < \dot{p} < Ae^{-p} + B,$$

где $A > 0$, $B \geq 0$. Используя эту оценку, можно показать, что существуют числа $K > 0$, C_1 и C_2 такие, что

$$-Kt + C_1 < p(t) < Kt + C_2. \quad (4.8)$$

Из оценки (4.8) следует, что в области Π_T импульсные компоненты $p(t)$ характеристик принимают конечные значения, и, следовательно, соответствующие фазовые компоненты $x(t)$ характеристической системы (4.4) продолжимы либо до момента $t = T$, либо до верхней ($x = x^*$)

или нижней ($x = x_*$) границы области Π_T . Таким образом, функцию, заданную формулой (4.7), можно непрерывно продолжить на область $\bar{\Pi}_T$, замкнутую по переменной x .

Очевидно, что непрерывное продолжение $u(t, x)$ на область $\bar{\Pi}_T$ удовлетворяет начальному условию (2.2). Применяя схему, аналогичную использованной в работе [3] для доказательства супердифференцируемости определенного там обобщенного решения, можно показать, что функция $u(t, x)$ является субдифференцируемой в области $\bar{\Pi}_T$, т. е. справедливо соотношение

$$\forall(t, x) \in \bar{\Pi}_T \quad D^-(t, x) \neq \emptyset.$$

Отметим, что если функция u дифференцируема в точке (t, x) , тогда

$$D^-(t, x) = D^+(t, x) = \left\{ \left(\frac{\partial u(t, x)}{\partial t}, \frac{\partial u(t, x)}{\partial x} \right) \right\}.$$

Из (4.7) следует, что функция $u(t, x)$ удовлетворяет дифференциальным неравенствам (3.2), (3.3) в области Π_T . Таким образом, чтобы показать, что эта функция является вязкостным решением задачи А, необходимо проверить выполнение неравенства (3.3) в точках множества Γ_T — на линиях $x = x_*$ и $x = x^*$.

Пусть $\text{Dif}(u)$ — множество точек, в которых функция $u(\cdot)$ дифференцируема, а со W обозначает выпуклую оболочку множества W . Определим множество

$$\begin{aligned} \partial u(t, x) = \text{co} \left\{ (a, s) \mid a = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\partial u(t_i, x_i)}{\partial t}, s = \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{\partial u(t_i, x_i)}{\partial x}; \right. \\ \left. (t_i, x_i) \rightarrow (t, x) \text{ при } i \rightarrow \infty, (t_i, x_i) \in \text{Dif}(u) \right\}. \end{aligned} \quad (4.9)$$

При $0 < t < T$ справедливы включения

$$\begin{aligned} D^-(t, x_*) &\subset \{(a, s - k) \mid (a, s) \in \partial u(t, x_*), k > 0\}, \\ D^-(t, x^*) &\subset \{(a, s + k) \mid (a, s) \in \partial u(t, x_*), k > 0\}. \end{aligned}$$

Таким образом, в силу (2.4), для проверки выполнения неравенства (3.3) на верхней границе области $\bar{\Pi}_T$ достаточно показать, что если

$$a + h(x^*) + f(x^*)e^p \geq 0,$$

тогда для всех $s > 0$ выполняется неравенство

$$a + h(x^*) + f(x^*)e^{p+s} \geq 0. \quad (4.10)$$

Поскольку $f(x^*) > 0$, неравенство (4.10) справедливо. Итак, для субдифференциала функции $u(\cdot)$ на верхней границе $x = x^*$ выполнено дифференциальное неравенство (3.3).

Аналогично, для проверки неравенства (3.3) на линии $x = x_*$, нижней границе множества $\bar{\Pi}_T$, достаточно показать, что если

$$a + h(x_*) + g(x_*)e^{-p} \geq 0,$$

тогда для всех $s > 0$ имеем

$$a + h(x_*) + g(x_*)e^{-(p-s)} = a + h(x_*) + g(x_*)e^{-p+s} \geq 0. \quad (4.11)$$

Неравенство (4.11) справедливо, поскольку $g(x_*) > 0$. Таким образом, в точках нижней границы $x = x_*$ выполнено дифференциальное неравенство (3.3), и это завершает доказательство того, что функция $u(\cdot)$, построенная в области $\bar{\Pi}_T$, удовлетворяет определению 3.2 вязкостного решения.

Поскольку гамильтониан (2.4) и начальная функция $u_0(\cdot)$ непрерывно дифференцируемы, из результатов [9] следует единственность вязкостного решения в ограниченной и замкнутой по x области $\bar{\Pi}_T$.

Итак, справедливо следующее утверждение.

Теорема 4.1. *Вязкостное решение задачи А существует и единственно. Это решение является субдифференцируемой функцией и может быть построено с помощью характеристик в соответствии с репрезентативной формулой (4.7), где параметр $y \in [x_*, x^*]$.*

Доказательство. Утверждение теоремы следует из приведенных выше построений и рассуждений. $\square$

Отметим, что значительную роль в доказательстве теоремы 4.1 играет анализ поведения решений характеристической системы (4.4), (4.5). Вязкостное решение строится из фазовых характеристик, и эти построения осуществимы, поскольку все фазовые характеристики продолжимы либо до момента T , либо до границы множества, на котором рассматривается задача.

5. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ В

5.1. Поведение характеристик. Несуществование вязкостного решения. Гамильтониан в задаче В определяется выражением (2.6), и соответствующая характеристическая система имеет вид

$$\dot{x} = H_p(x, p) = -f(x)e^p + g(x)e^{-p}, \quad (5.1)$$

$$\dot{p} = -H_x(x, p) = -h'(x) + f'(x)e^p + g'(x)e^{-p}, \quad (5.2)$$

$$\dot{z} = pH_p(x, p) - H(x, p) = p(-f(x)e^p + g(x)e^{-p}) + f(x)e^p + g(x)e^{-p} - h(x). \quad (5.3)$$

Система (5.1)–(5.3) рассматривается с начальными условиями (4.5).

Исследование поведения решений системы (5.1)–(5.3), (4.5) показывает, что возможны ситуации непродолжимости характеристик, когда значения импульсных компонент бесконечно убывают или возрастают, стремясь соответственно к $-\infty$ или $+\infty$. При этом соответствующие фазовые компоненты решения стремятся соответственно к значениям x^* или x_* , но не достигают их. Кроме того, в Π_T существуют области, через точки которых не проходит ни одна фазовая характеристика. Примеры таких ситуаций и подробный анализ поведения решений характеристической системы для гамильтониана вида

$$H(x, p) = h(x) - \frac{1+x}{2}e^{2p} - \frac{1-x}{2}e^{-2p} \quad (5.4)$$

приведены в [3–5].

На рис. 1 и рис. 2 в случае, когда $h(x) = 0,25x^2$, $f(x) = 1+x$, $g(x) = 1-x$, $u_0(x) = 0,2 \cos(5(x - 0,2))$, показано поведение фазовых характеристик задачи А и задачи В соответственно. Фазовые характеристики задачи А заполняют всю прямоугольную область $\bar{\Pi}_T$, включая нижнюю ($x = x_*$) и верхнюю ($x = x^*$) границы. Фазовые характеристики задачи В не заполняют полностью прямоугольник $\bar{\Pi}_T$ и не достигают его границ, стремясь к ним в случае непродолжимости.

Покажем, что если в некоторой точке множества $\bar{\Pi}_T$, лежащей на одной из линий $x = x_*$ или $x = x^*$, субдифференциал функции u непуст, тогда эта функция не может быть вязкостным решением задачи В. Пусть, для определенности, существует $t_* \in (0, T)$ такое, что $(a, s) \in D^-u(t_*, x^*)$. Из определения 3.1 субдифференциала (формула (3.1)) следует, что тогда для любого $k > 0$ справедливо включение $(a, s+k) \in D^-u(t_*, x^*)$. В этом случае неравенство (3.3), которому должно удовлетворять вязкостное решение, принимает вид

$$a + h(x^*) - f(x^*)e^{s+k} \geq 0 \quad \forall k > 0. \quad (5.5)$$

Поскольку $f(x^*) > 0$, неравенство (5.5) не выполняется.

Таким образом, для задачи В в общем случае невозможно построить непрерывное вязкостное решение, и для ее исследования обобщенное решение нужно определять иначе.

5.2. Обобщенные решения. Существование и неединственность. В [3] на базе вязкостного подхода было введено определение обобщенного решения для задачи В с гамильтонианом вида (5.4), которое можно использовать и в рассматриваемом здесь общем случае вогнутого по импульсной переменной гамильтониана вида (2.6).

Определение 5.1. Функция $u \in C(\bar{\Pi}_T)$ называется *обобщенным решением* задачи В, если она удовлетворяет начальному условию (2.2) и дифференциальным неравенствам

$$a + H(x, s) \leq 0, \quad \forall (t, x) \in \Pi_T, \quad \forall (a, s) \in D^+u(t, x), \quad (5.6)$$

$$a + H(x, s) \geq 0, \quad \forall (t, x) \in \Pi_T, \quad \forall (a, s) \in D^-u(t, x), \quad (5.7)$$

$$a + H(x, s) \geq 0, \quad \forall (t, x) \in \Gamma_T, \quad \forall (a, s) \in D^-u(t, x) \cap \partial u(t, x). \quad (5.8)$$

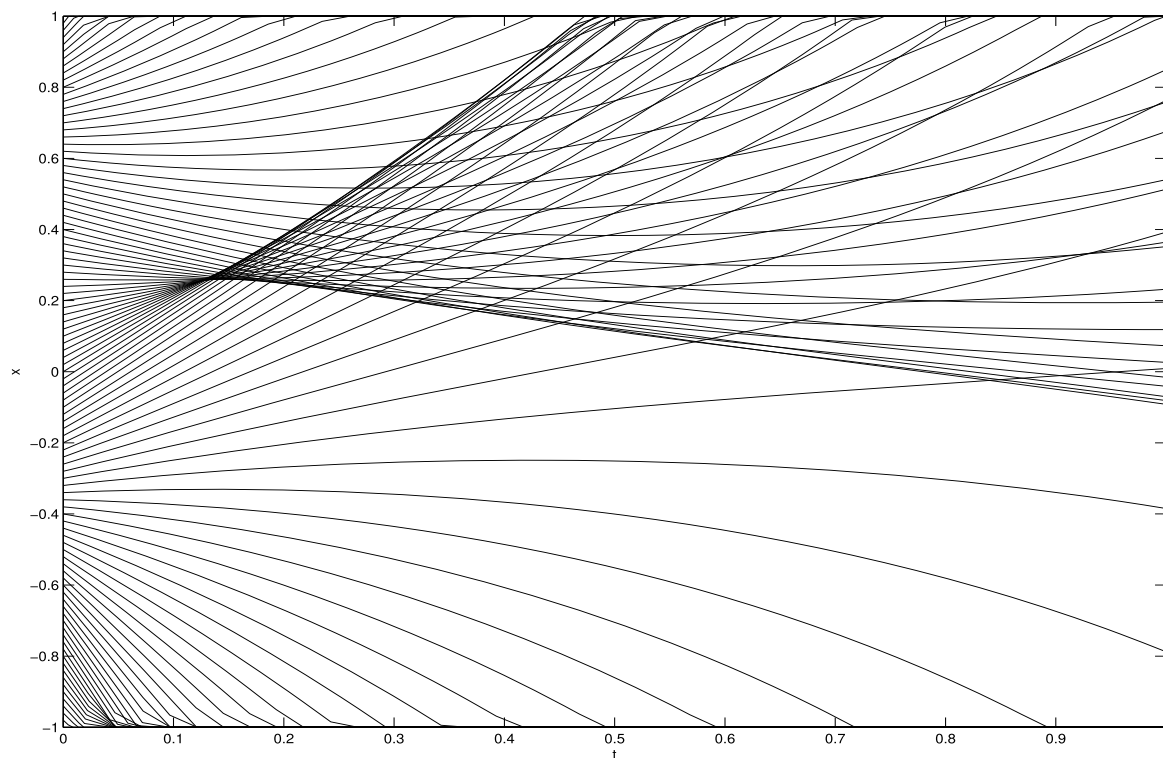


Рис. 1. Пример поведения фазовых характеристик в задаче А.

FIG. 1. An example of the behavior of phase characteristics in problem A.

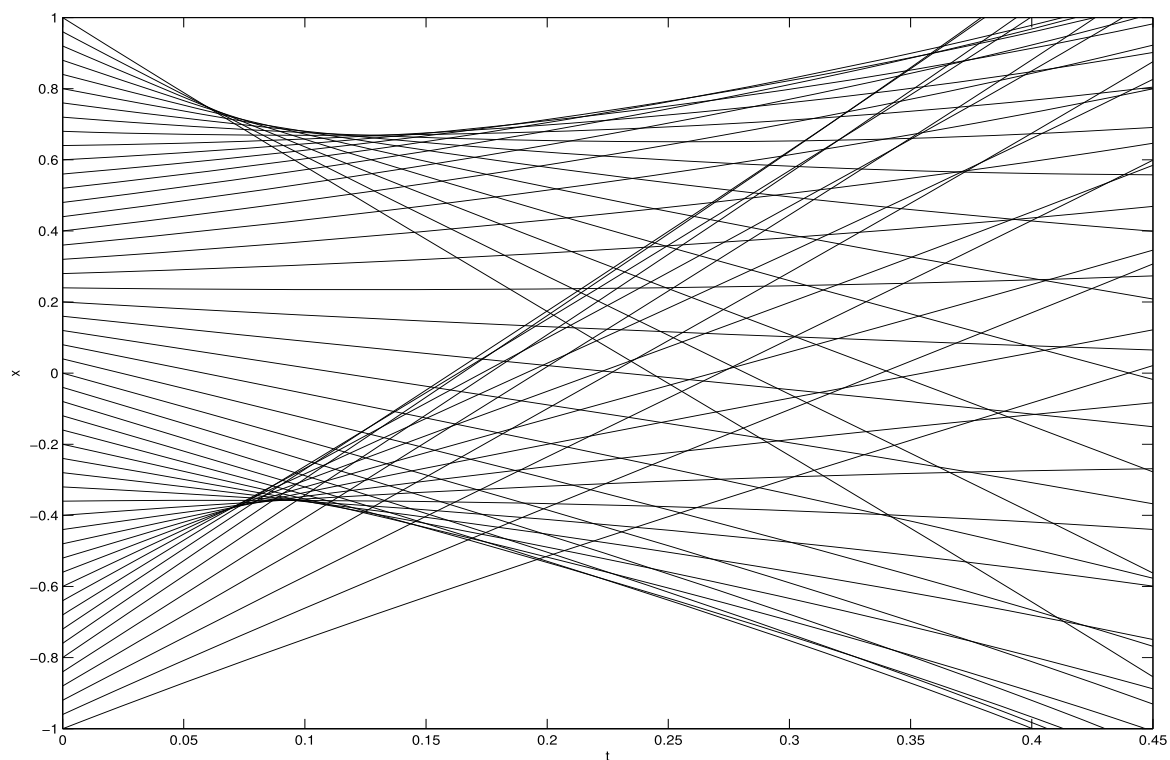


Рис. 2. Пример поведения фазовых характеристик в задаче В.

FIG. 2. An example of the behavior of phase characteristics in problem B.

Отличие определения 5.1 от определения 3.2 вязкостного решения заключается в том, что в точках границы Γ_T фазовых ограничений выполнение неравенства (5.8) требуется не для всех элементов соответствующего субдифференциала $D^-u(t, x)$, а лишь для тех, которые содержатся во

множестве $\partial u(t, x)$. Напомним, что множество $\partial u(t, x)$ определено соотношением (4.9), и отметим, что в случае локальной липшицевости функции u это множество совпадает с субдифференциалом Кларка.

Применяя конструкции и рассуждения, аналогичные использованным в [3], можно указать достаточные условия, при которых обобщенное решение задачи В существует. Ключевую роль при этом играет условие продолжимости характеристик.

U1. Решения характеристической системы (5.1)–(5.3), (4.5) продолжимы до момента T .

Кроме того, предполагается, что существует непрерывно дифференцируемая функция $\varphi(t, x)$, определенная в $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющая следующему набору условий:

$$\varphi(0, x) = u_0(x), \quad x \in [x_*, x^*], \quad (5.9)$$

$$\varphi_t(t, x_*) + H((x_*, \varphi_x(t, x_*))) = 0 \quad \forall t \geq 0, \quad (5.10)$$

$$\varphi_t(t, x^*) + H((x^*, \varphi_x(t, x^*))) = 0 \quad \forall t \geq 0. \quad (5.11)$$

Гамильтониан H в условиях (5.10), (5.11) имеет вид (2.6).

Справедливо следующее утверждение.

Теорема 5.1. Пусть выполнено условие **U1** и функция $\varphi(\cdot)$ удовлетворяет условиям (5.9)–(5.11). Тогда существует обобщенное в смысле определения 5.1 решение задачи В, являющееся супердифференцируемой функцией, которое при всех $(t, x) \in \bar{\Pi}_T$ представимо в виде

$$u(t, x) = \max_{x(t, y^\sharp) = x} \left[\varphi(t^\sharp, y^\sharp) + \int_{t^\sharp}^t \left(p(\tau, y^\sharp) H_p(x(\tau, y^\sharp), p(\tau, y^\sharp)) - H(x(\tau, y^\sharp), p(\tau, y^\sharp)) \right) d\tau \right], \quad (5.12)$$

где $t^\sharp \in [0, T]$, и при этом $y^\sharp \in [x_*, x^*]$, если $t^\sharp = 0$, и $y^\sharp = x_*$ или $y^\sharp = x^*$, если $t^\sharp > 0$. Функции $(x(\cdot, y^\sharp), p(\cdot, y^\sharp)) : [t^\sharp, t] \rightarrow \mathbb{R}^2$ – решения системы (5.1), (5.2), удовлетворяющие начальным условиям

$$x(t^\sharp, y^\sharp) = y^\sharp, \quad p(t^\sharp, y^\sharp) = \varphi_x(t^\sharp, y^\sharp) = p_0(t^\sharp, y^\sharp).$$

Доказательство. Из условия **U1** следует, что импульсные компоненты $p(\cdot, y)$ решений системы (5.1)–(5.3), (4.5) ограничены на отрезке $[0, T]$. Пусть $P \subset \mathbb{R}$ – такой ограниченный замкнутый отрезок, что

$$p(t, y) \in P \quad \forall t \in [0, T], \quad y \in [x_*, x^*]. \quad (5.13)$$

В области $\bar{\Pi}_T$ в «обратном» времени $\tau = T - t$ рассмотрим задачу **ОСР** оптимального управления системой, динамика которой описывается дифференциальным уравнением

$$\dot{x} = -H_p(x, p) = f(x)e^p - g(x)e^{-p}, \quad p \in P. \quad (5.14)$$

Значение управляющего параметра выбирается из множества P . Если задано начальное состояние системы $x(t_0) = x_0$, $(t_0, x_0) \in \bar{\Pi}_T$, то допустимыми управлениями являются измеримые функции $p(\cdot) : [t_0, T] \rightarrow P$. Множество всех допустимых управлений обозначим символом $\mathbf{P}_{[t_0, T]}$. Введем функцию

$$\psi(t, x) = \varphi(T - t, x), \quad (t, x) \in \bar{\Pi}_T$$

и на движениях системы (5.14) определим функционал платы

$$I_{(t_0, x_0)}(p(\cdot)) = \int_{t_0}^{t^\sharp} [p(\tau) H_p(x(\tau), p(\tau)) - H(x(\tau), p(\tau))] d\tau + \psi(t^\sharp, x(t^\sharp)),$$

где $x(\cdot) = x(\cdot; t_0, x_0, p(\cdot)) : [t_0, T] \rightarrow [x_*, x^*]$ – траектория системы (5.14), стартующая из начальной точки (t_0, x_0) под воздействием управления $p(\cdot) \in \mathbf{P}_{[t_0, T]}$, $t^\sharp = t^\sharp(t_0, x_0, p(\cdot))$ – момент первого выхода этой траектории на целевое множество G_T :

$$G_T = \Gamma_T \cup \{(t, x) \mid t = 0, x \in [x_*, x^*]\},$$

$$t^\sharp = \min_{t \in [t_0, T]} \{t \mid x(t; t_0, x_0, p(\cdot)) \in G_T\}.$$

Задача **ОСР** оптимального управления состоит в управлении системой (5.14) таким образом, чтобы обеспечить оптимальный результат (цену), который для начальной точки $(t_0, x_0) \in \bar{\Pi}_T$ определяется соотношением

$$V(t_0, x_0) = \sup_{p(\cdot) \in \mathbf{P}_{[t_0, T]}} I_{(t_0, x_0)}(p(\cdot)).$$

В задаче **ОСР** существует непрерывная функция цены $V(t, x)$, $(t, x) \in \bar{\Pi}_T$, обладающая такими свойствами, что обобщенное решение, о существовании которого говорится в утверждении теоремы, связано с функцией $V(\cdot)$ соотношением

$$u(t, x) = V(T - t, x), \quad (t, x) \in \bar{\Pi}_T. \quad (5.15)$$

Доказательство существования функции цены задачи **ОСР** и ее свойств, обеспечивающих выполнение соотношения (5.15), можно провести аналогично тому, как это сделано в [3] для задачи с гамильтонианом вида (5.4). $\square$

Итак, построение обобщенного решения задачи В осуществляется посредством сведения начальной краевой задачи к задаче Дирихле путем непрерывного продолжения начальной функции $u_0(\cdot)$ на границу фазовых ограничений с помощью гладкой функции $\varphi(\cdot)$. Обобщенное решение при этом формируется с помощью операции максимума из характеристик, выпущенных с начального многообразия и с границ фазового ограничения.

Поскольку возможны различные продолжения $\varphi(\cdot)$ начальной функции $u_0(\cdot)$, решение задачи В неединственно.

6. ВЯЗКОСТНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ С. СВЯЗЬ С РЕШЕНИЕМ ЗАДАЧИ В

Рассмотрим задачу С. Введем обозначения

$$\bar{\Omega}_T^- = (0, T) \times (-\infty, x_*], \quad \bar{\Omega}_T^+ = (0, T) \times [x_*, +\infty).$$

Область $\Omega_T = (0, T) \times \mathbb{R}$, в которой рассматривается задача С, можно представить в виде

$$\Omega_T = \bar{\Omega}_T^- \cup \bar{\Pi}_T \cup \bar{\Omega}_T^+. \quad (6.1)$$

При этом из (2.7) следует, что в каждой из трех областей в разбиении (6.1) гамильтониан задается своей формулой, поэтому в этих областях характеристическая система уравнения (2.1), (2.2) имеет разный вид.

Докажем следующее утверждение.

Теорема 6.1. Пусть выполнено условие **U1** и начальная функция $u_0(\cdot)$ такова, что справедливо условие:

U2. Производная $u'_0(\cdot)$ не возрастает на интервалах $(-\infty, x_*]$ и $[x_*, +\infty)$.

Тогда существует вязкостное решение $u(t, x) : \Omega_T \rightarrow \mathbb{R}$ задачи С такое, что в областях $\bar{\Omega}_T^-$ и $\bar{\Omega}_T^+$ функция $u(\cdot)$ непрерывно дифференцируема, а сужение $u(\cdot)$ на область $\bar{\Pi}_T$ является обобщенным в смысле определения 5.1 решением задачи В.

Доказательство. В областях $\bar{\Omega}_T^-$ и $\bar{\Omega}_T^+$ гамильтониан (2.7) не зависит от фазовой переменной x , поэтому импульсные компоненты решений соответствующих характеристических систем сохраняют постоянные значения, а фазовые компоненты являются прямыми линиями. Выписав характеристическую систему для $\bar{\Omega}_T^-$,

$$\begin{aligned} \dot{x} &= g(x_*)e^{-p}, \\ \dot{p} &= 0, \end{aligned} \quad (6.2)$$

$$\dot{z} = (p + 1)g(x_*)e^{-p} - h(x_*),$$

$$x(0) = y, \quad p(0) = u'_0(y), \quad z(0) = u_0(y), \quad y \in (-\infty, x_*),$$

нетрудно проверить, что в этой области фазовые характеристики имеют вид

$$x(t) = y + g(x_*)e^{-u'_0(y)t}, \quad y \in (-\infty, x_*). \quad (6.3)$$

Поскольку $g(x_*) > 0$, из (6.3) получаем, что фазовая характеристика, выпущенная из точки $(0, y)$, пересечет прямую $x = x_*$ в момент $t_*(y) = \frac{(x_* - y)e^{u'_0(y)}}{g(x_*)}$. Соответствующее значение ценовой компоненты при этом будет равно $u_0(y) + [u'_0(y) + 1]g(x_*)e^{-u'_0(y)} - h(x_*)t_*(y)$. Из (6.3) и **U2** получаем, что фазовые характеристики системы (6.2) полностью заполняют область $\bar{\Omega}_T^-$ и не пересекаются в этой области. Таким образом, применяя метод характеристик, мы можем построить гладкую функцию: $u^-(\cdot) : \bar{\Omega}_T^- \rightarrow \mathbb{R}$, являющуюся решением начальной задачи Коши (2.1), (2.2) с гамильтонианом вида (2.7) при $X = (-\infty, x_*)$.

Рассмотрев характеристическую систему задачи С в $\bar{\Omega}_T^+$, получим, что в этой области фазовые характеристики имеют вид

$$x(t) = y - f(x^*)e^{u'_0(y)t}, \quad y \in (x^*, +\infty). \quad (6.4)$$

Из (6.4) и **U2** получаем, что фазовые характеристики системы (6.2) полностью заполняют область $\bar{\Omega}_T^+$ и не пересекаются в этой области. Применяя метод характеристик, построим гладкую функцию $u^+(\cdot) : \bar{\Omega}_T^+ \rightarrow \mathbb{R}$, являющуюся решением начальной задачи Коши (2.1), (2.2) с гамильтонианом вида (2.7) при $X = [x^*, +\infty)$.

Заметим, что непрерывно дифференцируемые функции $u^-(\cdot, x_*)$ и $u^+(\cdot, x^*)$ удовлетворяют условиям (5.10) и (5.11) соответственно, откуда следует существование функции $\varphi(\cdot)$ такой, с помощью которой согласно утверждению теоремы 5.1 осуществляется построение обобщенного решения задачи В. Положив

$$\varphi(t, x_*) = u^-(\cdot, x_*), \quad \varphi(t, x^*) = u^+(\cdot, x^*) \quad \forall t \in [0, T],$$

построим с помощью репрезентативной формулы (5.12) в области $\bar{\Pi}_T$ функцию $u^0(\cdot)$ — обобщенное решение задачи В.

Итак, на множествах $\bar{\Omega}_T^-$, $\bar{\Pi}_T$ и $\bar{\Omega}_T^+$ мы соответственно построили непрерывные функции $u^-(\cdot)$, $u^0(\cdot)$ и $u^+(\cdot)$. Положим

$$u(t, x) = \begin{cases} u^-(t, x), & t \in [0, T], \quad x \leq x_*, \\ u^0(t, x), & t \in [0, T], \quad x \in [x_*, x^*], \\ u^+(t, x), & t \in [0, T], \quad x \geq x^*. \end{cases} \quad (6.5)$$

Из построений компонент функции $u(\cdot)$ (6.5) следует, что эта функция непрерывна и является вязкостным решением задачи С, удовлетворяющим заявленным в утверждении теоремы свойствам. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кружков С. Н. Обобщенные решения нелинейных уравнений первого порядка со многими независимыми переменными, I // Мат. сб. — 1966. — 70, № 3. — С. 394–415.
2. Курант Р. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964.
3. Субботина Н. Н., Шагалова Л. Г. О решении задачи Коши для уравнения Гамильтона–Якоби с фазовыми ограничениями // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. — 2011. — 17, № 2. — С. 191–208.
4. Субботина Н. Н., Шагалова Л. Г. Конструкция непрерывного минимаксного/вязкостного решения уравнения Гамильтона–Якоби–Беллмана с непродолжимыми характеристиками // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. — 2014. — 20, № 4. — С. 247–257.
5. Субботина Н. Н., Шагалова Л. Г. О непрерывном продолжении обобщенного решения уравнения Гамильтона–Якоби характеристиками, образующими центральное поле экстремалей // Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. — 2015. — 21, № 2. — С. 220–235.
6. Шагалова Л. Г. О решении уравнения Гамильтона–Якоби, возникающего в молекулярной биологии // Автомат. и телемех. — 2013. — 8. — С. 160–172.
7. Bardi M., Capuzzo-Dolcetta I. Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations. — Boston: Birkhauser, 1997. — DOI: [10.1007/978-0-8176-4755-1](https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4755-1).
8. Calvez V., Lam K.-Y. Uniqueness of the viscosity solution of a constrained Hamilton–Jacobi equation // Calc. Var. Partial Differ. Equ. — 2020. — 59, № 5. — 163. — DOI: [10.1007/s00526-020-01819-0](https://doi.org/10.1007/s00526-020-01819-0).
9. Capuzzo-Dolcetta I., Lions P.-L. Hamilton–Jacobi equations with state constraints // Trans. Am. Math. Soc. — 1990. — 318, № 2. — С. 643–683. — DOI: [10.1090/S0002-9947-1990-0951880-0](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1990-0951880-0).

10. *Clarke F. H.* Tonelli's regularity theory in the calculus of variations: recent progress // В сб.: «Optimization and related fields». — Berlin–Heidelberg: Springer, 1986. — С. 163–179. — DOI: [10.1007/BFb0076705](https://doi.org/10.1007/BFb0076705).
11. *Crandall M. G., Lions P.-L.* Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations // Trans. Am. Math. Soc. — 1983. — 277, № 1. — С. 1–42. — DOI: [10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8).
12. *Mirică Ș.* Generalized solutions by Cauchy's method of characteristics // Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 1987. — 77. — С. 317–350.
13. *Saakian D. B., Rozanova O., Akmetzhanov A.* Dynamics of the Eigen and the Crow–Kimura models for molecular evolution // Phys. Rev. E. — 2008. — 78, № 4. — 041908. — DOI: [10.1103/PhysRevE.78.041908](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.78.041908).
14. *Soga K.* A remark on Tonelli's calculus of variations // Russ. J. Nonlinear Dyn. — 2023. — 19, № 2. — С. 239–248. — DOI: [10.20537/nd230501](https://doi.org/10.20537/nd230501).
15. *Subbotin A. I.* Generalized solutions of first order PDEs: the dynamical optimization perspective. — Boston: Birkhauser, 1995. — DOI: [10.1007/978-1-4612-0847-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0847-1).
16. *Subbotina N. N.* The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization // Modern Math. Appl. — 2004. — 20. — С. 2955–3091. — DOI: [10.1007/s10958-006-0146-2](https://doi.org/10.1007/s10958-006-0146-2).
17. *Yokoyama E., Giga Y., Rybka P.* A microscopic time scale approximation to the behavior of the local slope on the faceted surface under a nonuniformity in supersaturation // Phys. D: Nonlinear Phenomena. — 2008. — 237, № 22. — С. 2845–2855. — DOI: [10.1016/j.physd.2008.05.009](https://doi.org/10.1016/j.physd.2008.05.009).

Л. Г. Шагалова

Институт математики и механики им. Н. Н. Красовского Уральского отделения РАН, Екатеринбург, Россия

E-mail: shag@imm.uran.ru, ПИИЦ SPIN-код: 8448-6980, ПИИЦ AuthorID: [14285](https://orcid.org/14285), ResearcherID: [A-4754-2019](https://orcid.org/A-4754-2019), Scopus: [44961227500](https://orcid.org/44961227500), ORCID: [0000-0002-5602-076X](https://orcid.org/0000-0002-5602-076X)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-151-164](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-151-164)

EDN: [UIRGDJ](https://edn.ru/UIRGDJ)

UDC 517.957
Research article

On solutions of Hamilton–Jacobi equations with exponential dependence on momentum

L. G. Shagalova

Abstract. Three initial problems for one-dimensional Hamilton–Jacobi equations of evolutionary type are considered on a bounded time segment. In all problems, the Hamiltonians depend on the coordinate and momentum variables. The dependence on momentum is exponential, and the coercivity condition is not satisfied. In two of the problems, the Hamiltonians differ only in the signs of the exponential terms, and these problems are considered in a bounded rectangular domain defined by the zeros of the coefficient functions before the exponential terms. In the case where the coefficients inside the domain are positive and the Hamiltonian is convex in the momentum variable, the existence and uniqueness of a viscosity solution are proved. In the case of negative coefficient functions, a viscosity solution does not exist. A generalized solution is introduced, and sufficient conditions for its existence are obtained. In the third problem, there are no state constraints, but the Hamiltonian is glued together from three components. The existence of a viscosity solution is proved, and its relationship with the generalized solution to the considered problem with state constraints is established. Research and construction are based on the analysis of the behavior of solutions to the corresponding characteristic systems, applying methods of nonsmooth analysis, calculus of variations and optimal control.



Keywords: Hamilton–Jacobi equation, noncoercive Hamiltonian, viscosity solution, generalized solution, state constraints, characteristics, optimal control, Bolza problem, value function theorem, quantum channel.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: L. G. Shagalova, “On solutions of Hamilton–Jacobi equations with exponential dependence on momentum,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. 72, No. 1, 151–164. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-151-164](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-151-164) EDN: [UIRGDJ](https://edn.ru/10.22363/2413-3639-2026-72-1-151-164)

REFERENCES

1. S. N. Kruzhkov, “Obobshchennye resheniya nelineynykh uravneniy pervogo poryadka so mnogimi nezavisimymi peremennymi, I” [Generalized solutions of first-order nonlinear equations with many independent variables, I], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 1966, **70**, No. 3, 394–415 (in Russian).
2. R. Courant, *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations], Mir, Moscow, 1964 (Russian translation).
3. N. N. Subbotina and L. G. Shagalova, “O reshenii zadachi Koshi dlya uravneniya Gamil’tona–Yakobi s fazovymi ogranicheniyami” [On the solution of the Cauchy problem for the Hamilton–Jacobi equation with phase constraints], *Tr. In-ta Mat. i Mekh. UrO RAN* [Proc. Inst. Math. Mech. Ural Branch RAS], 2011, **17**, No. 2, 191–208 (in Russian).
4. N. N. Subbotina and L. G. Shagalova, “Konstruktsiya nepreryvnogo minimaksnogo/vyazkostnogo resheniya uravneniya Gamil’tona–Yakobi–Bellmana s neprodolzhimymi kharakteristikami” [Construction of a continuous minimax/viscous solution of the Hamilton–Jacobi–Bellman equation with nonextendable characteristics], *Tr. In-ta Mat. i Mekh. UrO RAN* [Proc. Inst. Math. Mech. Ural Branch RAS], 2014, **20**, No. 4, 247–257 (in Russian).
5. N. N. Subbotina and L. G. Shagalova, “O nepreryvnom prodolzhenii obobshchennogo resheniya uravneniya Gamil’tona–Yakobi kharakteristikami, obrazuyushchimi tsentral’noe pole ekstremaley” [On the continuous extension of a generalized solution of the Hamilton–Jacobi equation by characteristics forming a central field of extremals], *Tr. In-ta Mat. i Mekh. UrO RAN* [Proc. Inst. Math. Mech. Ural Branch RAS], 2015, **21**, No. 2, 220–235 (in Russian).
6. L. G. Shagalova, “O reshenii uravneniya Gamil’tona–Yakobi, vznikayushchego v molekulyarnoy biologii” [On the solution of the Hamilton–Jacobi equation arising in molecular biology], *Avtomat. i Telemekh.* [Automat. Telemekh.], 2013, **8**, 160–172 (in Russian).
7. M. Bardi and I. Capuzzo-Dolcetta, *Optimal control and viscosity solutions of Hamilton–Jacobi–Bellman equations*, Birkhauser, Boston, 1997, DOI: [10.1007/978-0-8176-4755-1](https://doi.org/10.1007/978-0-8176-4755-1).
8. V. Calvez and K.-Y. Lam, “Uniqueness of the viscosity solution of a constrained Hamilton–Jacobi equation” [Uniqueness of the viscosity solution of a constrained Hamilton–Jacobi equation], *Calc. Var. Partial Differ. Equ.* [Calc. Var. Partial Differ. Equ.], 2020, **59**, No. 5, 163 (in Russian), DOI: [10.1007/s00526-020-01819-0](https://doi.org/10.1007/s00526-020-01819-0).
9. I. Capuzzo-Dolcetta and P.-L. Lions, “Hamilton–Jacobi equations with state constraints,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1990, **318**, No. 2, 643–683, DOI: [10.1090/S0002-9947-1990-0951880-0](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1990-0951880-0).
10. F. H. Clarke, “Tonelli’s regularity theory in the calculus of variations: recent progress,” In: *Optimization and related fields*, Springer, Berlin–Heidelberg, 1986, pp. 163–179, DOI: [10.1007/BFb0076705](https://doi.org/10.1007/BFb0076705).
11. M. G. Crandall and P.-L. Lions, “Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations” [Viscosity solutions of Hamilton–Jacobi equations], *Trans. Am. Math. Soc.* [Trans. Am. Math. Soc.], 1983, **277**, No. 1, 1–42 (in Russian), DOI: [10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1983-0690039-8).
12. Mirică Ș., “Generalized solutions by Cauchy’s method of characteristics,” *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 1987, **77**, 317–350.
13. D. B. Saakian, O. Rozanova, and A. Akmetzhanov, “Dynamics of the Eigen and the Crow–Kimura models for molecular evolution” [Dynamics of the Eigen and the Crow–Kimura models for molecular evolution], *Phys. Rev. E* [Phys. Rev. E], 2008, **78**, No. 4, 041908 (in Russian), DOI: [10.1103/PhysRevE.78.041908](https://doi.org/10.1103/PhysRevE.78.041908).
14. K. Soga, “A remark on Tonelli’s calculus of variations,” *Russ. J. Nonlinear Dyn.*, 2023, **19**, No. 2, 239–248, DOI: [10.20537/nd230501](https://doi.org/10.20537/nd230501).
15. A. I. Subbotin, *Generalized solutions of first order PDEs: the dynamical optimization perspective*, Birkhauser, Boston, 1995, DOI: [10.1007/978-1-4612-0847-1](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-0847-1).
16. N. N. Subbotina, “The method of characteristics for Hamilton–Jacobi equation and its applications in dynamical optimization,” *Modern Math. Appl.*, 2004, **20**, 2955–3091, DOI: [10.1007/s10958-006-0146-2](https://doi.org/10.1007/s10958-006-0146-2).

17. E. Yokoyama, Y. Giga, and P. Rybka, “A microscopic time scale approximation to the behavior of the local slope on the faceted surface under a nonuniformity in supersaturation,” *Phys. D: Nonlinear Phenomena*, 2008, **237**, No. 22, 2845–2855, DOI: [10.1016/j.physd.2008.05.009](https://doi.org/10.1016/j.physd.2008.05.009).

L. G. Shagalova

Krasovskii Institute of Mathematics and Mechanics of the Ural Branch of the RAS, Yekaterinburg, Russia

E-mail: shag@imm.uran.ru, eLIBRARY SPIN-code: 8448-6980, eLIBRARY AuthorID: [14285](#), ResearcherID: [A-4754-2019](#), Scopus: [44961227500](#), ORCID: [0000-0002-5602-076X](#)

ТОЧНЫЕ ОГРАНИЧЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ НЕСКОЛЬКИХ ПЕРЕМЕННЫХ

Р. Ф. Шамоян, Н. М. Махина

Брянский государственный университет им. академика И. Г. Петровского, Брянск, Россия

Аннотация. В этой обзорной статье мы собрали множество последних достижений в области аналитических функциональных пространств нескольких комплексных переменных, связанных с проблемой следа в трубчатых областях над симметричными конусами и ограниченными сильно псевдовыпуклыми областями с гладкой границей. Мы рассматриваем различные функциональные пространства аналитических функций нескольких переменных в различных областях в $\mathbb{C}^n$ и приводим либо полные описания следов, либо оценки следов различных аналитических функциональных пространств в различных областях, полученные в последние годы различными авторами.

Проблема нахождения точных оценок следов аналитических функциональных пространств Харди в единичном полидиске впервые была поставлена У. Рудиным в 1969 году. С тех пор в литературе появилось множество работ по этой теме. В данной обзорной статье мы собрали не только уже известные результаты о следах различных аналитических функциональных пространств в различных областях, но и обсудили различные новые интересные результаты, связанные с этой проблемой. Ранее по теме следов были получены различные результаты, относящиеся к проблеме следов, Г. Хенкиным, Э. Амаром, Г. Александром и другими авторами. Наконец, отметим, что теоремы о следах тесно связаны с проекциями типа Бергмана, действующими между функциональными пространствами различной размерности.

Эта обзорная статья содержит в основном новые результаты, касающиеся следов в трубчатых и ограниченных сильно псевдовыпуклых областях. Доказательства этих теорем основаны, в частности, также на различных свойствах проекций типа Бергмана. В этой обзорной статье мы также кратко обсудим некоторые новые результаты, полученные первым автором по проекциям типа Бергмана в этих сложных областях в $\mathbb{C}^n$. Это вторая часть наших заметок, посвященных проблеме следов. В первой части, опубликованной в [43], мы представили обширный список последних точных результатов по следам в полидиске и полишаре. В заключительном разделе этой обзорной статьи мы собрали множество интересных замечаний и сформулировали различные открытые интересные вопросы для заинтересованных читателей, а также добавили несколько кратких комментариев, связанных с проблемой следов в различных простых и сложных областях в $\mathbb{C}^n$ в различных аналитических функциональных пространствах нескольких переменных. Также добавлены некоторые новые результаты, касающиеся следов в гармонических функциональных пространствах нескольких переменных.

Ключевые слова: оператор следа, пространства Бергмана и Харди со смешанной нормой, пространство Герца, проекция типа Бергмана, трубчатая область, псевдовыпуклая область, аналитическая функция, точная теорема вложения, гармоническая функция.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Вклад авторов. Обзорная работа написана под руководством *Шамояна Р. Ф.* совместно с доцентом БГУ *Махиной Н. М.* Подбор материала принадлежит первому автору, второй автор вносил рекомендации и замечания к тексту в процессе работы и также отвечал за все технические вопросы, связанные с оформлением статьи.

Для цитирования: Шамоян Р. Ф., Махина Н. М. Точные ограничения аналитических функциональных пространств нескольких переменных // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 1. С. 165–194. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-165-194](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-165-194) EDN: UJHLAF

1. ВВЕДЕНИЕ

Данная статья является второй частью наших заметок, посвященных проблеме следа в аналитических функциональных пространствах нескольких комплексных переменных, а именно в трубчатых, псевдовыпуклых и связанных с ними областях. Первая часть содержала обширный список недавних точных результатов в полидисковой и единичной полишаровой областях и была недавно опубликована в [43].

Пусть G — любая ограниченная или неограниченная область в $\mathbb{C}^n$. Пусть f — аналитическая функция в G из некоторого фиксированного квазинормированного аналитического функционального пространства $X(G)$. Данная обзорная статья посвящена следующей задаче: найти точные оценки множества $|f(z, \dots, z)|$, где z — произвольная точка из G в $\mathbb{C}^n$.

Очевидно, что очень похожая задача может быть поставлена в трубчатых областях над симметричными конусами и ограниченными сильно псевдовыпуклыми областями с гладкой границей, а также в произведениях областей такого типа в $\mathbb{C}^n$.

Эта проблема впервые была поставлена в книге У. Рудина [29] в 1969 году для следов пространств Харди в бидиске, и с тех пор появилось множество работ в этом направлении. Мы упомянем, например, старые работы [4, 5, 7, 18, 19, 23, 26, 70] и различные ссылки в них.

Мы начали работу [43] со следовых результатов в простейших областях, а именно в единичном полидиске и единичном полишаре. В этой статье мы представляем новые результаты.

Одна из целей данной работы — рассмотреть новое отображение следа в задаче о следе, связанной с теоремами вложения, для случая ограниченных сильно псевдовыпуклых (или трубчатых) областей D с гладкой границей; это отображение $T_r f(z) = f(z, \dots, z)$, $z \in D$, при $f \in X \subset H(D^m)$ для некоторого квазинормированного аналитического пространства X на D^m .

Дадим точные определения.

Определение 1.1. Пусть D — ограниченная или неограниченная область в $\mathbb{C}^n$, а $H(D^m)$ — пространство всех аналитических функций в $D^m = D \times \dots \times D$, $m \in \mathbb{N}$. Мы говорим, что $\text{Trace}(X) = Y$, если X является квазинормированным подпространством $H(D^m)$ и Y — некоторое фиксированное квазинормированное подпространство $H(D)$, и если для каждого $F \in X$, $F(z, \dots, z) = f(z)$, $f \in Y$, и обратное также верно: для каждого $g \in Y$ существует функция $F \in X$ такая, что $F(z, \dots, z) = g(z)$ для всех $z \in D$.

Это определение следов аналитических функциональных пространств, очевидно, легко может быть распространено на функциональные пространства, состоящие из гармонических и плюригармонических функций в произведениях нескольких переменных.

Отметим, что ниже мы иногда заменяем $\text{Trace}(X) = \text{Trace } X$ на более простую запись DX .

В последние годы в этом направлении были получены различные новые интересные оценки и точные результаты. См., например, недавние работы [6, 11, 12, 24, 32–34, 37–41, 44–56, 58, 59, 69], а также множество ссылок в них.

Цель данной работы — объединить все эти новые интересные результаты. Следует отметить, что в данной работе также будут рассмотрены различные новые открытые интересные проблемы, связанные с этой темой.

В этой обзорной статье мы соберем множество старых и новых результатов, касающихся этой проблемы для многих аналитических функциональных пространств X в различных областях в $\mathbb{C}^n$. Сначала мы приведем определения, необходимые для формулировки результатов такого типа, а затем сформулируем результаты (старые и новые) о следах.

Замечание 1.1. Также отметим, что очень похожие задачи, теоремы о следах или различные оценки следов функций были представлены, доказаны и рассмотрены во многих сложных функциональных пространствах в $\mathbb{R}^n$ многими авторами. Мы отсылаем читателя, например, к работам [1, 25, 71] и многим другим ссылкам в них.

Теоремы о следе также имеют интересные расширения и прекрасные приложения; мы, например, отсылаем читателя к работам Э. Амара, К. Менини [10] и Д. Кларка [16], где были представлены приложения и обобщения такого типа.

В заключение отметим, что рассматриваемые теоремы о следах тесно связаны с проекциями типа Бергмана, действующими между функциональными пространствами различной размерности.

Для удобства читателя эта обзорная статья организована следующим простым образом. Все результаты, касающиеся следов и связанных с ними результатов, разделены по областям. А именно, различные теоремы о следах, относящиеся к разным областям, будут собраны в соответствующих разделах.

В данной статье особое внимание будет уделено недавним исследовательским работам первого автора, посвященным проблеме следа, и план статьи следующий: сначала приводятся различные определения разных интересных аналитических функциональных пространств в различных областях в $\mathbb{C}^n$, а затем дается некоторая точная информация о следах функциональных пространств такого типа в $\mathbb{C}$. Следует также отметить, что операторы следа могут рассматриваться в связи с различными теоремами вложения, и такие точные результаты будут также представлены в этой вводной статье в трубчатых или псевдовыпуклых областях.

В заключительном разделе этой обзорной статьи собрано множество интересных замечаний и сформулированы различные интересные открытые вопросы для заинтересованных читателей, а также дано несколько интересных кратких комментариев, касающихся проблемы следов в различных простых и сложных областях в $\mathbb{C}^n$ в разных аналитических функциональных пространствах нескольких переменных.

Также добавлены некоторые новые результаты, касающиеся следов в пространствах гармонических функций нескольких переменных.

Заинтересованный читатель легко заметит, что в данной статье все теоремы о следах и аналитические пространства в трубчатых областях имеют полные аналоги в псевдовыпуклых областях, а формулировки наших результатов, касающихся следов в этих совершенно разных областях в $\mathbb{C}^n$, также имеют сходства.

В работах [6, 24, 32–34, 44–49] первым автором были начаты исследования следов различных аналитических функций в простых областях, таких как бидиск, полидиск, полишар. Позже эти вопросы были рассмотрены в более сложных областях в $\mathbb{C}^n$, таких как трубчатые и ограниченные сильно псевдовыпуклые области, а также в аналитических функциональных пространствах смешанного типа нормы и типа Бергмана на них.

2. СЛЕДЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В СИЛЬНО ПСЕВДОВЫПУКЛЫХ ОБЛАСТЯХ

В этом разделе собраны несколько недавних результатов о следах в многогранных и псевдовыпуклых областях из работ первого автора [52–54]. Ниже мы определяем различные аналитические функциональные пространства в контексте ограниченных псевдовыпуклых областей и приводим описания их следов или оценки размеров их следов.

Сначала первым автором были представлены различные (точные) результаты о следах в единичном шаре совместно с О. Михичем, а позже они были распространены на аналогичные аналитические функциональные пространства в ограниченных сильно псевдовыпуклых областях с гладкой границей в $\mathbb{C}^n$ в совместных работах с О. Михичем и С. Куриленко.

Для определения дифференциального оператора $\mathcal{D}^\alpha$, который появляется ниже в определении пространств, мы ссылаемся на статью Дж. Фабреги и Дж. Ортеги [27].

Для получения базовых сведений об интегралах Мартинелли–Бохнера и ядрах Мартинелли–Бохнера $U(z, w)$, которые приводятся ниже, мы отсылаем заинтересованного читателя к научным статьям, упомянутым в приведенных ниже теоремах.

Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — область, т. е. открытое связное подмножество. Говорят, что D является *псевдовыпуклой* (или *псевдовыпуклой по Хартогсу*), если существует непрерывная плюрисубгармоническая функция φ на G такая, что множество $\{z \in D \mid \varphi(z) < x\}$ является относительно компактным подмножеством D для всех действительных чисел x . Другими словами, область является псевдовыпуклой, если D имеет непрерывную плюрисубгармоническую исчерпывающую

функцию. Каждое (геометрически) выпуклое множество является псевдовыпуклым. Однако существуют псевдовыпуклые области, которые не являются геометрически выпуклыми.

Когда D имеет границу класса C^2 (дважды непрерывно дифференцируемую), это понятие совпадает с псевдовыпуклостью Леви, с которой проще работать. Более конкретно, для границы класса C^2 можно показать, что D имеет определяющую функцию, т. е. существует $\rho: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{R}$, которая является C^2 -гладкой, такая, что $D = \{\rho < 0\}$, и $\partial D = \{\rho = 0\}$. Теперь D является псевдовыпуклой тогда и только тогда, когда для каждого $p \in \partial D$ и w в комплексном касательном пространстве в точке p , т. е.

$$\nabla \rho(p)w = \sum_{i=1}^n \frac{\partial \rho(p)}{\partial z_i} w_i = 0,$$

выполняется

$$\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 \rho(p)}{\partial z_i \partial \bar{z}_j} w_i \bar{w}_j \geq 0.$$

Приведенное выше определение аналогично определениям выпуклости в действительном анализе.

Пусть D — псевдовыпуклая область в $\mathbb{C}$, $\tilde{D}^\alpha$ — дифференциальный оператор в D , $0 < p, q < +\infty$. Пространства аналитических функций Харди—Соболева и Бергмана—Бесова (см. [27]):

$$H_{\alpha,\beta}^p(D) = \left\{ f \in H(D) : \sup_{\varepsilon > 0} \left(\int_{\partial D_\varepsilon} |\tilde{D}^\alpha f(\zeta)|^p d\sigma_\zeta \right)^{\frac{1}{p}} \varepsilon^\beta < +\infty \right\}, \quad \beta \geq 0, \quad \alpha > 0,$$

$$A_{\delta,k}^{p,q}(D) = \left\{ f \in H(D) : \sum_{|\alpha| \leq k} \int_0^{r_0} \left(\int_{\partial D_r} |\tilde{D}^\alpha f(\zeta)|^p d\sigma_r \right)^{\frac{q}{p}} r^{\delta \frac{q}{p} - 1} dr < +\infty \right\}, \quad \delta > 0, \quad \alpha > 0,$$

где $D_r = \{z \in \mathbb{C}^n : \rho(z) < (-r)\}$, ∂D_r — граница, $d\sigma_r$ — нормированная мера поверхности на ∂D_r , а через dr обозначен нормированный элемент объема на $(0, r)$, $0 < p < \infty$, $0 < q \leq \infty$, $\delta > 0$, $k = 0, 1, 2, \dots$, и

$$\|f\|_{p,\infty,\delta,k} = \sup \left\{ \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \left(r^\delta \int_{\partial D_r} |\mathcal{D}^\alpha f|^p d\sigma_r \right)^{\frac{1}{p}} : 0 < r < r_0 \right) \right\},$$

(для $p, q < 1$ это квазинорма, см. [27]). Легко показать, что эти пространства являются банаховыми пространствами при $\min(p, q) \geq 1$. Кроме того, при $p = q$ мы имеем

$$\|f\|_{p,\delta,k} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_D |\mathcal{D}^\alpha f(\zeta)|^p (-\rho(\zeta))^{\delta-1} dv(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \delta > 0, \quad k \geq 0,$$

где $dv(\zeta)$ (или иногда $dV(\zeta)$) — нормированная мера Лебега на D (для $k = 0$ мы будем использовать другое, более удобное обозначение для пространств A_α^p). Как мы видим, для $p = q$, $k = 0$ мы получаем обычные пространства Бергмана $A_\delta^p(D) = A_\alpha^p(D)$.

Мы естественным образом определяем те же пространства в произведениях областей: $D^m = D \times \dots \times D$.

В теоремах 2.1–2.2 приводятся некоторые аналоги результатов о следах в терминах интегралов и ядер Мартинелли—Бохнера.

Сформулируем теорему 2.1 в контексте единичного шара B в $\mathbb{C}^n$, но аналогичные результаты могут быть справедливы и в ограниченных сильно псевдовыпуклых областях с гладкой границей.

Теорема 2.1 (см. [39]).

1. Пусть $p \leq 1$, $\beta \geq \alpha \geq 0$, тогда $A_{nm+(\beta-\alpha)pm-n}^{p,p}(B) \subset \text{Trace}(H_{\alpha,\beta}^p(B^m))$;

2. Пусть $p \leq 1$, $\alpha_j \geq 0$, $t \geq \frac{\sum_{j=1}^m \alpha_j}{m}$, $\beta_j = \alpha_j + 1$, $j = 1, \dots, m$. Тогда

$$A_{mt+mn-n-\sum_{j=1}^m \alpha_j}^{p,p}(B) \subset \text{Trace}(A_{t,\beta}^{p,p}(B^m)).$$

Теорема 2.2 (см. [39]).

1. Пусть $p \leq 1$, $\alpha \geq \beta$, тогда $\text{Trace}(H_{\alpha,\beta}^p(B^m))$ содержит функцию, для которой

$$f(z) = \int_{\partial D} f(\zeta) U(\zeta, z), \quad z \in D. \quad (\text{IR})$$

2. Пусть $p \leq 1$, $\alpha_j \geq 0$, $t \geq \frac{\sum_{j=1}^m \alpha_j}{m}$, $\beta_j = \alpha_j + 1$, $j = 1, \dots, m$. Тогда $\text{Trace}(A_{t,\beta}^p(B^m))$ содержит функцию f , для которой допустимо интегральное представление (IR).

В работе [38] рассматривались аналитические пространства Блоха в сильно псевдовыпуклых областях с гладкой границей, пространства смешанной нормы и так называемые новые пространства аналитических функций типа Герца в областях того же типа.

Пусть D — ограниченная сильно псевдовыпуклая область $\mathbb{C}^n$ с границей C^∞ . Предположим, что сильно плюрисубгармоническая функция ρ принадлежит классу $\mathbb{C}^\infty$ в окрестности $\bar{D}$, $-1 \leq \rho < 0$, $z \in D$, и $|\partial \rho| \geq c_0 > 0$ для $|\rho| \geq r_0$.

Пусть также $\delta: D \rightarrow \mathbb{R}^+$ обозначает евклидово расстояние от границы, т.е. $\delta(z) = d(z, \partial D)$; для заданных $r \in (0, 1)$, $z_0 \in D$, обозначим через $B_D(z_0, r)$ шар с центром z_0 и радиусом $\frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}$.

Нам также потребуется наличие подходящих покрытий из шаров Кобаяси.

Определение 2.1. Пусть $D \subset \mathbb{C}^n$ — ограниченная область и $r > 0$. Назовем r -решеткой в D последовательность $\{a_k\} \subset D$ такую, что $D = \bigcup_k B_D(a_k, r)$ и существует $m > 0$ такая, что любая

точка в D принадлежит не более чем m шарам вида $B_D(a_k, R)$, где $R = \frac{1}{2}(1+r)$.

Пусть $\Delta_k = |B(a_k, r)|$, $dv(z_1, \dots, z_m) = \prod_{j=1}^m dv(z_j) = dv(\vec{z})$, $z_j \in D$, $j = 1, \dots, m$, — нормированная мера Лебега на произведении областей. Мы обозначаем, как обычно, через $dv_\gamma = \delta^\gamma(z) dv(z)$ взвешенную меру Лебега на D и аналогично на произведениях таких областей, используя произведения δ -функций стандартным способом. Определим новые аналитические пространства типа Герца на произведениях псевдовыпуклых областей с гладкой границей в $\mathbb{C}^n$ следующим образом.

Пусть

$$K_{\alpha,\beta}^{p,q}(D^m) = \left\{ f \in H(D^m): \right. \\ \int_D \dots \int_D \left(\int_{B(\tilde{z}_1, R)} \dots \int_{B(\tilde{z}_1, R)} |f(z_1, \dots, z_m)|^p \delta^\alpha(z_1) \dots \delta^\alpha(z_m) dv(z_1, \dots, z_m) \right)^{\frac{q}{p}} \times \\ \left. \times \prod_{k=1}^m \delta^\beta(\tilde{z}_k) dv(\tilde{z}_1, \dots, \tilde{z}_m) < +\infty, \quad 0 < p, q < +\infty, \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1 \right\}.$$

Это банаховы пространства при $\min(p, q) \geq 1$ и полные метрические пространства при других значениях p и q . Зафиксируем r -решетку $\{a_k\} \in D$. Для тех же значений параметров определим другое аналитическое пространство типа Герца в псевдовыпуклых областях с гладкой границей:

$$K_\beta^{p,q}(D^m) = \left\{ f \in H(D^m): \right.$$

$$\sum_{k_1} \dots \sum_{k_m} \left(\int_{B(a_{k_1}, r)} \dots \int_{B(a_{k_m}, r)} |f(z_1, \dots, z_m)|^p \delta^\beta(z_1) \dots \delta^\beta(z_m) dv(z_1, \dots, z_m) \right)^{\frac{q}{p}} < +\infty, \\ 0 < p, \quad q < +\infty, \quad \beta > -1 \Big\}.$$

Если $p = q$, мы получаем классические пространства Бергмана на произведениях псевдовыпуклых областей с гладкой границей. Этот простой факт основан на свойствах r -решеток. Эти новые классы аналитических функций являются банаховыми пространствами для всех значений p, q таких, что $\min(p, q) > 1$, и полными метрическими пространствами для других значений параметров. Рассматривая приведенные выше квазинормы, мы можем заменить внешние кратные интегрирования или кратные суммирования одним интегралом или одной суммой, определяющими аналогичные пространства с квазинормами:

$$\sum_k \left(\int_{B(a_k, r)} \dots \int_{B(a_k, r)} |f(z_1, \dots, z_m)|^p \delta^\beta(z_1) \dots \delta^\beta(z_m) dv(z_1, \dots, z_m) \right)^{\frac{q}{p}} < \infty, \\ 0 < p, \quad q < \infty, \quad \beta > -1,$$

$$\int_D \left(\int_{B_D(\tilde{z}, R)} \dots \int_{B_D(\tilde{z}, R)} |f(z_1, \dots, z_m)|^p \delta^\alpha(z_1) \dots \delta^\alpha(z_m) dv(z_1, \dots, z_m) \right)^{\frac{q}{p}} \delta^\beta(\tilde{z}) dv(\tilde{z}) < +\infty, \\ p, q \in (0, +\infty), \quad \alpha > -1, \quad \beta > -1.$$

Следы классов $K_{t, \beta}^{q, p}(D^m)$ можно описать следующим образом.

Теорема 2.3 (см. [38]). Пусть $0 < p < +\infty$, $t_j > -1$, $\beta_j > -1$, $j = 1, \dots, m$, $\alpha > -1$, $\alpha_2 = \sum_{j=1}^m (\beta_j + 2(n+1) + t_j) - (n+1)$. Тогда $\text{Trace}(K_{t, \beta}^{p, p}(D^m)) = A_{\alpha_2}^p$.

При тех же значениях параметров $\text{Trace}(K_{t, \beta}^{p, p}(D^m)) = A_{\alpha_3}^p$, где $\alpha_2 = \sum_{j=1}^m \beta_j + (n+1)(m-1)$.

Более того, $\text{Trace}(K_{\beta}^{q, p}(D^m)) \subset A_{\alpha_1}^p$, $\text{Trace}(K_{\beta_t}^{q, p}(D^m)) \subset A_{\alpha}^p$, где $\alpha_1 = \sum_{j=1}^m (\beta_j + n+1)p/q - (n+1)$, $\alpha_1 = \sum_{j=1}^m (\beta_j + n+1)p/q + \sum_{j=1}^m (t_j + n+1) - (n+1)$ для всех положительных значений p и q .

Замечание 2.1. При $m = 1$ некоторые из этих утверждений очевидны. Для случая единичного шара в $\mathbb{C}^n$ эти утверждения были доказаны в работах [44, 46, 47, 49].

Ниже приведем еще одну новую теорему о точном следе для аналитических функциональных пространств типа Блоха в псевдовыпуклых областях с гладкой границей в $\mathbb{C}^n$.

Пусть

$$A_{\ln}(r_1, \dots, r_m) = \left\{ f \in H(D^m) : \sup_{z_j \in D} |f(z_1, \dots, z_m)| \prod_{j=1}^m \ln \left(\frac{c}{\delta(z_j)} \right)^{-\frac{1}{r_j}} \delta^{\frac{1}{r_j}}(z_j) < +\infty \right\},$$

где $\sum_{j=1}^m \frac{1}{r_j} = 1$, $r_j > 0$, $c = \text{diam}(D)$;

$$A_{\ln}(1) = \left\{ f \in H(D) : \sup_{z \in D} |f(z)| \delta^r(z) \left(\ln \frac{c}{\delta(z)} \right)^{-1} < +\infty \right\}; \\ A_F^\infty(D^m) = \left\{ f \in H(D^m) : \sup_{z_j \in D} |f(z_1, \dots, z_m)| \prod_{j=1}^m \delta^{r_j}(z_j) < +\infty \right\},$$

где $r_j > 0$, $j = 1, \dots, m$;

$$A_r^\infty(D) = \left\{ f \in H(D) : \sup_{z \in D} |f(z)| \delta^r(z) < +\infty \right\},$$

где $r > 0$.

В следующей теореме дается точный результат о следах аналитических пространств $A_r^\infty(D^m)$ и $A_{\ln}(r_1, \dots, r_m)$.

Теорема 2.4 (см. [38]).

1. Пусть $r_j > 0$, $\sum_{j=1}^m r_j = r$, $j = 1, \dots, m$. Тогда $\text{Trace}(A_r^\infty(D^m)) = A_r^\infty(D)$.
2. Пусть $r_j > 0$, $\sum_{j=1}^m r_j = 1$, $j = 1, \dots, m$. Тогда $\text{Trace}(A_{\ln}(r_1, \dots, r_m)) = A_{\ln}(1)$.

Рассмотрим далее следы пространств Бергмана со смешанной нормой на D^m :

$$A_{\vec{\alpha}}^{\vec{p}}(D^m) = \left\{ f \in H(D^m) : \left(\int_D \dots \left(\int_D |f(\omega_1, \dots, \omega_m)|^{p_1} \delta^{\alpha_1}(\omega_1) dv(\omega_1) \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \right)^{\frac{1}{p_m}} < +\infty \right\}$$

при $p_{i+1} \geq p_i$, $p_i \geq 1$, $\alpha > -1$, $i = 1, \dots, m$.

В следующей теореме мы покажем, что следы аналитических пространств $A_{\vec{\alpha}}^{\vec{p}}(D^m)$ равны пространствам $A_{\gamma}^{p_m}(D)$.

Теорема 2.5 (см. [38]). Пусть $p_{i+1} \geq p_i$, $p_j \geq 1$, $j = 1, \dots, m$.

Пусть также $\gamma = \alpha_m + \sum_{j=1}^{m-1} (n+1+\alpha_j) \frac{p_m}{p_j}$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, m$.

Тогда $\text{Trace}(A_{\vec{\alpha}}^{\vec{p}}(D^m)) = A_{\gamma}^{p_m}(D)$, $1 \leq p < +\infty$, $j = 1, \dots, m$.

Замечание 2.2. Для $D = B$ (единичный шар) теорема 2.5 известна (см. [46]).

В работе [52] также получены новые точные оценки для следов в пространствах типа Бергмана аналитических пространств в сильно псевдовыпуклых областях с гладкой границей.

Пусть

$$A_{\vec{\beta}}^p(D^m) = A^p(D^m, \vec{\beta}) = \left\{ f \in H(D^m) : \int_D \dots \int_D |f(\omega_1, \dots, \omega_m)|^p \prod_{j=1}^m \delta^{\beta_j}(\omega_j) dm(\omega_1) \dots dm(\omega_m) < \infty \right\},$$

где $0 < p < \infty$, $\beta_j > -1$, $j = \overline{1, m}$.

Следующая теорема дает точный результат о следах аналитических пространств $A^p(D^m, \vec{\beta})$.

Теорема 2.6 (см. [52]). Пусть $0 < p < \infty$, $\beta_j > -1$, $j = \overline{1, m}$.

Тогда $\text{Trace } A^p(D^m, \vec{\beta}) = A^p\left(D, \sum_{j=1}^m \beta_j + (m-1)(n+1)\right)$.

Также определим аналитические функциональные пространства типа Бесова на $D^m \subset \mathbb{C}^m$:

$$A_{\delta, \vec{k}}^p(D^m) = \left\{ f \in H(D^m) : \left(\sum_{|\alpha_1| \leq k_1} \dots \sum_{|\alpha_m| \leq k_m} \int_D \dots \int_D |D^{\alpha_1 \dots \alpha_m} f|^p (-\rho_1)^{\delta-1} \dots (-\rho_m)^{\delta-1} dv(\zeta_1, \dots, \zeta_m) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\},$$

где $\rho_j(z) = \rho(z_j)$, $j = 1, \dots, m$, $0 < p < +\infty$, $\delta > 0$.

Следы классов $A_{t+1, \vec{k}}^p(D^m)$ для $p \leq 1$ можно описать следующим образом.

Теорема 2.7 (см. [38]). $A_{mt+m(n+1)-(n+1)-\sum_{j=1}^m k_j}^p(D) \subset \text{Trace}(A_{t+1, \vec{k}}^p(D^m))$ при $p \leq 1$, $t > t_0$, где

t_0 достаточно велико.

Оператор следа в приведенной ниже теореме связан с некоторыми новыми интересными теоремами о точном вложении в контексте ограниченных сильно псевдовыпуклых областей для пространств аналитических функций типа Бергмана, которые могут представлять самостоятельный интерес.

Теорема 2.8 (см. [38]). Пусть $0 < p < +\infty$, $s_j > -1$, $j = 1, \dots, m$. Пусть μ — положительная борелевская мера на D . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $\mu(\Delta_k) \leq C |\Delta_k|^{m + \frac{1}{n+1} \sum_{j=1}^m s_j}$, $k \geq 1$;
2. $\text{Trace}(A_s^p) \hookrightarrow L^p(D, d\mu)$;
3. $\int_D \prod_{j=1}^m |f_j(z)|^p d\mu(z) \leq c \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{A_{s_j}^p}^p$, $f_j \in A_{s_j}^p$, $1 \leq j \leq m$.

Далее определим пространства типа Герца в произведениях псевдовыпуклых областей D . Заметим, что, при рассмотрении весов и мер из контекста ясно, что рассматриваются произведения весов и произведения мер, а также интегрирование по произведениям областей, хотя это и не указано ниже. Пусть

$$H_{\alpha}^{p,q}(D^m) = \left\{ f \in H(D^m) : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{B_0(z_k, r)} |f(\omega)|^p (\delta(\omega))^{\alpha} dV(\omega) \right)^{\frac{q}{p}} < \infty \right\},$$

где $\delta(z) = \text{dist}(z, \partial D)$ и $0 < p, q < \infty$, $\alpha > -1$ с обычной модификацией, когда α является вектором. Заметим, что мы имеем классическое пространство Бергмана при $p = q$, банаховы пространства при $\min(p, q) > 1$ и полные метрические пространства для других значений параметров. Здесь $\{z^k\} \subset D$ — это некоторые фиксированные r -решетки в ограниченных псевдовыпуклых областях с гладкой границей D . Заметим, что эти аналитические пространства в более высокой размерности зависят от последовательностей $\{z_n\}$, но мы опускаем это в обозначениях пространств. Здесь через $dV(z)$ обозначим нормированную меру Лебега на произведениях ограниченных псевдовыпуклых областей с гладкой границей.

В следующей теореме показывается, что следы пространства $H_{\beta}^{p,q}(D^m)$ равны пространствам $A_{\alpha_1}^q(D)$.

Теорема 2.9 (см. [69]). Пусть $F \in H_{\beta}^{p,q}(D^m)$, $0 < p, q < \infty$, $n > n_0$, $q \leq p$, и пусть β_0, n_0 достаточно велики. Тогда $F(z, \dots, z) \in A_{\alpha_1}^q(D)$, т. е.

$$\int_D |F(z, \dots, z)|^q \delta(z)^{\alpha_1} dV(z) < +\infty,$$

$$\text{где } \alpha_1 = \sum_{j=1}^m (\beta_j + n + 1) \frac{p}{q} - (n + 1).$$

Пусть $f \in A_{\alpha_1}^q(D)$. Тогда можно найти функцию F такую, что $F \in H_{\beta}^{p,q}(D^m)$ и $F(z, \dots, z) = f(z)$, $z \in D$, а также

$$\text{Trace}(H_{\beta}^{p,q}(D^m)) = (A_{\alpha_1}^q)(D).$$

3. СЛЕДЫ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ТРУБЧАТЫХ ОБЛАСТЯХ

В этом разделе мы рассмотрим некоторые интересные задачи о следах в различных пространствах аналитических функций в трубчатых областях.

Трубчатые области — это очень общие неограниченные области Зигеля, которые изучались во многих недавних работах Б. Сехбы и его соавторов за последние два десятилетия (см. [30, 31]). Список этих работ приведен в библиографии. Определение следов аналитических функциональных пространств в трубчатой области аналогично определению 1.1. В доказательствах всех теорем о следах, приведенных ниже, использовались хорошие свойства r -решеток в трубке. Эти важные r -решетки были изобретены А. Бонами и соавторами (см. [14]). Ниже мы приводим множество точных теорем о следах для различных функциональных пространств аналитических

функций типов Бергмана и Герца. Все определения этих аналитических функциональных пространств даны ниже.

Введем основные обозначения из [13, 14, 30].

Пусть $T_\Omega = V + i\Omega$ — трубчатая область над неприводимым симметричным конусом Ω в комплексификации $V^{\mathbb{C}}$ n -мерного евклидова пространства $\tilde{V}$.

Обозначим ранг конуса Ω через r , а детерминантную функцию на $\tilde{V}$ через Δ . Пусть $\tilde{V} = \mathbb{R}^n$, тогда в качестве примера симметричного конуса на $\mathbb{R}^n$ рассмотрим конус Лоренца Λ_n , определенный для $n \geq 3$ как $\Lambda_n = \{y \in \mathbb{R}^n : y_1^2 - \dots - y_n^2 > 0, y_1 > 0\}$.

Также мы обозначаем m -произведения трубок как $T_\Omega^m = T_\Omega \times \dots \times T_\Omega$, $m \in \mathbb{N}$. Пространство всех аналитических функций на этом новом произведении областей, аналитических по каждой переменной в отдельности, будет обозначаться как $H(T_\Omega^m)$.

В работе [58] впервые в литературе рассматривается известная проблема, связанная с оценками следа в пространствах аналитических функций в неограниченных областях в $\mathbb{C}^n$, а именно в трубчатых областях над симметричными конусами. В работе [59] авторы интересуются свойствами некоторых аналитических подпространств $H(T_\Omega^m)$ и получают новые точные оценки для следов в пространствах типа Бергмана аналитических функций в типичных областях Зигеля.

Ниже через m мы будем обозначать натуральное число больше 1. Для $\tau \in \mathbb{R}_+$ и соответствующей функции определителя $\Delta(x)$ мы полагаем

$$A_\tau^\infty(T_\Omega) = \left\{ F \in \mathcal{H}(T_\Omega) : \|F\|_{A_\tau^\infty} = \sup_{x+iy \in T_\Omega} |F(x+iy)| \Delta^\tau(y) < \infty \right\}$$

(см. [14] и приведенные там ссылки).

При $1 \leq p, q < +\infty$, $\nu \in \mathbb{R}$ и $\nu > \frac{n}{r} - 1$ обозначим через $A_\nu^{p,q}(T_\Omega)$ взвешенное пространство Бергмана со смешанной нормой, состоящее из аналитических функций f в T_Ω , для которых

$$\|F\|_{A_\nu^{p,q}} = \left(\int_\Omega \left(\int_{\tilde{V}} |F(x+iy)|^p dx \right)^{q/p} \Delta^\nu(y) \frac{dy}{\Delta(y)^{n/r}} \right)^{1/q} < +\infty.$$

Известно, что пространство $A_\nu^{p,q}(T_\Omega)$ является нетривиальным тогда и только тогда, когда $\nu > \frac{n}{r} - 1$. При $p = q$ мы пишем $A_\nu^{p,q}(T_\Omega) = A_\nu^p(T_\Omega)$.

Для определения двух связанных пространств типа Бергмана $A_\nu^p(T_\Omega^m)$ и $A_\tau^\infty(T_\Omega^m)$ (ν и τ могут быть также векторами) в m -произведениях трубчатых областей T_Ω^m мы следуем стандартной процедуре. Например, положим для всех $z_j = x_j + iy_j$, $\tau_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, $F(z) = F(z_1, \dots, z_m)$, $|F(x+iy)| = |F(x_1 + iy_1, \dots, x_m + iy_m)|$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m)$,

$$A_\tau^\infty(T_\Omega^m) = \left\{ F \in H(T_\Omega^m) : \|F\|_{A_\tau^\infty} = \sup_{x+iy \in T_\Omega^m} |F(x+iy)| \Delta^\tau(y) < \infty \right\},$$

где $\Delta^\tau(y)$ — произведение m -одномерных функций $\Delta^{\tau_j}(y_j)$, $j = 1, \dots, m$.

Аналогично, пространство Бергмана A_τ^p можно определить на произведениях трубок для всех $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m)$, $\tau_j > \frac{n}{r} - 1$, $j = 1, \dots, m$. Можно показать, что все эти пространства являются банаховыми пространствами. Заменяя выше A на L , мы, как обычно, получим соответствующее большее пространство всех измеримых функций в произведениях трубок над симметричным конусом с той же квазинормой.

Как и ранее в случае аналитических функций в единичном диске, полидиске, единичном шаре и верхнем полупространстве $\mathbb{C}_+$, а также как в доказательствах теорем о следе в случае пространств гармонических функций в евклидовом пространстве, роль формулы представления Бергмана имеет решающее значение.

Следующая теорема полностью описывает следы пространств Бергмана.

Теорема 3.1 (см. [58]). Пусть $f \in A_\nu^p(T_\Omega^m)$, $1 \leq p < \infty$, $\nu \in \mathbb{R}^n$, $\nu_j > \nu_0$ для фиксированного $\nu_0 = \nu_0(p, n, r, m)$ для всех $j = 1, \dots, m$. Тогда $f(z, \dots, z) \in A_s^p$, где $s = \sum_{j=1}^m \left(\nu_j - \frac{n}{r} \right) + 2\frac{n}{r}(m-1)$

с соответствующими оценками норм. Для всех $\frac{n}{r} \leq p_1$, где p_1 является сопряженным с p , верно и обратное. Для каждой функции $g \in A_s^p(T_\Omega)$ существует функция F , $F(z, \dots, z) = g(z)$, $F \in A_\nu^p(T_\Omega^m)$. Пусть также

$$(T_\beta f)(z_1, \dots, z_m) = C_\beta \int_{T_\Omega} f(w) \prod_{j=1}^m \Delta^{-t}((z_j - \bar{w})/i) dV_\beta(w),$$

где $mt = \beta + \frac{n}{r}$, $z_j \in T_\Omega$, $j = 1, \dots, m$.

Тогда справедливы следующие утверждения для всех $\beta > \beta_0$ для некоторого фиксированного достаточно большого положительного числа β_0 . Интегральный оператор типа Бергмана T_β (расширенная проекция Бергмана) отображает $A_s^p(T_\Omega)$ в $A_\nu^p(T_\Omega^m)$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$, $\nu_j > \nu_0$, $j = 1, \dots, m$.

Полный аналог этой теоремы верен также и для случая $p = \infty$.

В следующей теореме мы подробно описываем следы пространств Блоха.

Теорема 3.2 (см. [58]). Пусть $f \in A_\nu^\infty(T_\Omega^m)$, $\nu \in \mathbb{R}^n$, $\nu_j > \frac{n}{r} - 1$ для всех $j = 1, \dots, m$. Тогда $f(z, \dots, z) \in A_s^\infty$, где $s = \sum_{j=1}^m \nu_j$. Верно и обратное: для каждой функции $g \in A_s^\infty(T_\Omega)$ существует функция $F(z, \dots, z) = g(z)$, $F \in A_\nu^\infty(T_\Omega^m)$.

Пусть также

$$(T_\beta f)(z_1, \dots, z_m) = C_\beta \int_{T_\Omega} f(w) \prod_{j=1}^m \Delta^{-t}((z_j - \bar{w})/i) dV_\beta(w),$$

где $mt = \beta + \frac{n}{r}$, $z_j \in T_\Omega$, $j = 1, \dots, m$. Тогда следующие утверждения справедливы для всех $\beta > \beta_0$ при некотором фиксированном достаточно большом положительном числе β_0 .

Интегральный оператор типа Бергмана T_β (расширенная проекция Бергмана) отображает $A_s^\infty(T_\Omega)$ в $A_\nu^\infty(T_\Omega^m)$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$, $\nu_j > \frac{n}{r} - 1$, $j = 1, \dots, m$, $s = \sum_{j=1}^m \nu_j$.

Обозначим через $A_\nu^{\vec{p}}(T_\Omega^m)$, $1 \leq p_j < +\infty$ и $\nu_j \in \mathbb{R}$, $\nu_j > \frac{n}{r} - 1$, $j = 1, \dots, m$, взвешенное пространство Бергмана со смешанной нормой, состоящее из аналитических функций f в T_Ω :

$$A_\nu^{\vec{p}}(T_\Omega^m) = \left\{ f \in H(T_\Omega^m) : \left(\int_{T_\Omega} \dots \left(\int_{T_\Omega} |f(z_1, \dots, z_m)|^{p_1} [\Delta(y_1)]^{\nu_1 - n/r} dx_1 dy_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots [\Delta(y_m)]^{\nu_m - n/r} dx_m dy_m \right)^{\frac{1}{p_m}} < +\infty \right\}.$$

Это банахово пространство. Заменяя выше A на L , мы, как обычно, получим соответствующее большее пространство всех измеримых функций в трубке над симметричным конусом с той же нормой.

Определим новое банахово пространство (аналитические пространства типа Герца) в трубчатых областях над симметричными конусами следующим образом. Пусть сначала

$$L_\tau^p(T_\Omega^m) = \left\{ f \text{ лок. интегрируема в } T_\Omega : \|f\|_{L_\tau^p} = \int_{T_\Omega} |f(z)|^p \prod_{j=1}^m \Delta^{\tau_j - \frac{n}{r}}(y_j) dx_j dy_j < \infty \right\},$$

где $\tau_j > \frac{n}{r} - 1$, $j = 1, \dots, m$.

Для определения следующего пространства функций напомним читателю, что семейство шаров Бергмана $B_\delta(z)$ образует r -решетку в трубчатой области T_Ω . Обозначим через $B_\delta^m(z)$ стандартное декартово m -произведение таких шаров Бергмана в $\mathbb{C}^m$, $z = (z_1, \dots, z_m)$.

Через $S_{\nu, \tau}^p$ обозначим все функции f , аналитические в T_Ω^m , такие что

$$\int_{B_\delta^m(z)} |f(z_1, \dots, z_m)| \prod_{j=1}^m \Delta^{s_j}(y_j) dx_j dy_j$$

принадлежит $L_{\tau_1, \dots, \tau_m}^p(T_\Omega^m)$, где $s_j = \nu - \frac{n}{r}$, $\nu_j > \frac{n}{r} - 1$, $\tau_j > \frac{n}{r} - 1$, $j = 1, \dots, m$, и $1 \leq p < \infty$ с той же нормой (см. [20, 31]).

В следующей теореме подробно опишем следы общих пространств со смешанной нормой.

Теорема 3.3 (см. [59]). Пусть $f \in A_{\vec{\nu}}^{\vec{p}}(T_\Omega^m)$, $1 \leq p_j < \infty$, $\nu \in \mathbb{R}^m$, $\nu_j > \nu_0$ для фиксированного $\nu_0 = \nu_0(n, p, r, m)$, $j = 1, \dots, m$.

Тогда $f(z, \dots, z) \in A_s^{p_m}$, $s = \nu_m - \frac{n}{r} + \sum_{j=1}^{m-1} \left(\nu_j + \frac{n}{r} \right) \frac{p_m}{p_j}$ с соответствующими оценками норм.

Для всех $\tilde{p}_1$, $\frac{1}{\tilde{p}_1} + \frac{1}{p_m} = 1$, $n/r \leq \tilde{p}_1$, $j = 1, \dots, m$, для некоторого фиксированного достаточно большого k , $\nu_j > k$ верно и обратное. Для каждой функции $g \in A_s^{p_m}(T_\Omega)$ существует функция $F(z, \dots, z) = g(z)$, $F \in A_{\vec{\nu}}^{\vec{p}}(T_\Omega^m)$.

Пусть также

$$T_\beta(f)(z_1, \dots, z_m) = C_\beta \int_{T_\Omega} f(w) \left(\prod_{j=1}^m \Delta^{-t} \left(\frac{z_j - \bar{w}}{i} \right) \right) dV_\beta(w),$$

где $mt = \beta + \frac{n}{r}$, $z_j \in T_\Omega$, $j = 1, \dots, m$.

Тогда следующее утверждение выполняется для всех $\beta > \beta_0$ для некоторого фиксированного достаточно большого положительного числа β_0 . Интегральный оператор типа Бергмана T_β (расширенная проекция Бергмана) отображает $A_s^{p_m}(T_\Omega)$ в $A_{\vec{\nu}}^{\vec{p}}(T_\Omega^m)$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$, $\nu_j > \nu_0$, $j = 1, \dots, m$.

Для случая $p_j = p$, $j = 1, \dots, m$ при $1 \leq p < \infty$ эта теорема была доказана в [58]. Для $m = 1$ эта теорема очевидна. Для $n = 1$ имеем верхнее полупространство $\mathbb{C}_+$, эта теорема была доказана в [49].

Теоремы 3.4, 3.5 полностью описывают следы новых пространств Герца.

Теорема 3.4 (см. [59]). Пусть $\nu_j > \nu_0$ и $\tau_j > \tau_0$ для некоторых фиксированных положительных чисел $\nu_0 = \nu_0(p, n, r, m)$ и $\tau_0 = \tau_0(p, n, r, m)$, $1 \leq p < \infty$. Пусть $f \in S_{\nu, \tau}^p(T_\Omega^m)$.

Тогда $f(z, \dots, z)$ принадлежит $A_s^p(T_\Omega)$, где $s = \sum_{j=1}^m \left(\nu_j + \frac{n}{r} \right) p + \sum_{j=1}^m \left(\tau_j + \frac{n}{r} \right) - \frac{n}{r}$, и для каждой функции $f \in A_s^p(T_\Omega)$ существует функция $F \in S_{\nu, \tau}^p$ такая, что $F(z, \dots, z) = f(z)$ для всех $\frac{n}{r} \leq p'$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Пусть также

$$(T_\beta f)(z_1, \dots, z_m) = C_\beta \int_{T_\Omega} f(w) \prod_{j=1}^m \Delta^{-t} \left(\frac{z_j - \bar{w}}{i} \right) dV_\beta(w),$$

где $mt = \beta + \frac{n}{r}$, $z_j \in T_\Omega$, $j = 1, \dots, m$.

Тогда следующее утверждение выполняется для всех $\beta > \beta_0$ для некоторого фиксированного достаточно большого положительного числа β_0 . Интегральный оператор проекции Бергмана T_β отображает $A_s^p(T_\Omega)$ в $S_{\nu, \tau}^p(T_\Omega^m)$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_m)$, $\tau = (\tau_1, \dots, \tau_m)$, $\nu_j > \nu_0$, $\tau_j > \tau_0$, $j = 1, \dots, m$.

Для $p = 1$ эта теорема была доказана в работе [58] в трубчатых областях.

Далее определим пространства типа Герца в произведениях трубчатых областей T_Ω . В работе [69] представлены новые точные результаты о следах в некоторых новых аналитических пространствах типа Герца в некоторых общих областях (неограниченные типичные области Зигеля

второго типа) в $\mathbb{C}^n$ (трубчатые области). Эти пространства служат естественными обобщениями классических пространств Бергмана. Заметим, что здесь при использовании весов и мер из контекста ясно, что рассматриваются произведения весов и произведения мер. Пусть

$$H_{\alpha}^{p,q}(T_{\Omega}^m) = \left\{ f \in H(T_{\Omega}^m) : \sum_{k=1}^{\infty} \left(\int_{B_r(z_k, r)} |f(\omega)|^p (\operatorname{Im}^{\alpha} \omega) dV(\omega) \right)^{\frac{q}{p}} < \infty \right\},$$

где $0 < p, q < \infty$, $\alpha > -1$ с обычной модификацией, когда α является вектором. Заметим, что при $p = q$ имеем классическое пространство Бергмана, при $\min(p, q) > 1$ это банаховы пространства, а для других значений параметров это полные метрические пространства. Здесь $\{z^k\} \subset T_{\Omega}$ — это некоторые фиксированные r -решетки в трубчатых областях над симметричными конусами T_{Ω} , которые обсуждались выше. Заметим, что эти аналитические пространства в более высокой размерности зависят от последовательностей $\{z_n\}$, но мы опускаем это в обозначениях пространств. Здесь через $dV(z)$ обозначим нормированную меру Лебега на произведениях трубчатых областей.

В следующей теореме дается точный результат о следах аналитических пространств $H_{\beta}^{p,q}(T_{\Omega}^m)$.

Теорема 3.5 (см. [69]). Пусть $F \in H_{\beta}^{p,q}(T_{\Omega}^m)$, $1 < p, q < \infty$, $p \geq q$, β_0, α_1 достаточно велики. Тогда $F(z, \dots, z) \in A_{\alpha_1}^q(T_{\Omega})$, т. е.

$$\int_{T_{\Omega}} |F(z, \dots, z)|^q (\operatorname{Im} z)^{\alpha_1} dV(z) < \infty,$$

$$\text{где } \alpha_1 = \sum_{j=1}^m \left(\beta_j + \frac{2n}{r} \right) \frac{p}{q} - 2\frac{n}{r}.$$

Пусть $f \in A_{\alpha_1}^q(T_{\Omega})$. Тогда найдется функция F такая, что $F \in H_{\beta}^{p,q}(T_{\Omega}^m)$, $F(z, \dots, z) = f(z)$, $z \in T_{\Omega}$, и выполнено

$$\operatorname{Trace}(H_{\beta}^{p,q}(T_{\Omega}^m)) = A_{\alpha_1}^q(T_{\Omega}).$$

В работе [55] представлены некоторые результаты для неограниченных трубчатых областей над симметричными конусами. Пусть

$$A_s^p = \left\{ f \in H(T_{\Omega}^m) : \int_{T_{\Omega}} \dots \int_{T_{\Omega}} |f(z_1, \dots, z_m)|^p \prod_{j=1}^m \Delta^{s_j - \frac{n}{r}} (\operatorname{Im} z) dV(z) < +\infty \right\},$$

где $s = (s_1, \dots, s_m)$, $0 < p < \infty$, $s_j > \frac{n}{r} - 1$, $j = 1, \dots, m$. Пусть также $L^p(T_{\Omega}, d\mu)$ — пространство всех измеримых функций на T_{Ω} таких, что $\int_{T_{\Omega}} |f(z)|^p d\mu(z) < \infty$ для любой положительной борелевской меры μ на T_{Ω} .

В следующей теореме сформулированы некоторые новые интересные результаты о точном вложении, связанные с оператором следа. Подобные теоремы о точном вложении, связанные с оператором следа, справедливы и в других областях. Они были доказаны первым автором в последние годы.

Теорема 3.6 (см. [55]). Пусть $0 < p < +\infty$, $s_j > -1$, $j = 1, \dots, m$. Пусть μ — положительная борелевская мера на T_{Ω} . Тогда следующие утверждения эквивалентны:

1. $\mu(\Delta_k) \leq C |\Delta_k|^{m + (\frac{2n}{r})^{-1} \sum_{j=1}^m s_j}$, $k \geq 1$;
2. $\operatorname{Trace}(A_s^p) \hookrightarrow L^p(T_{\Omega}, d\mu)$;
3. $\int_{T_{\Omega}} \prod_{j=1}^m |f_j(z)|^p d\mu(z) \leq c \prod_{j=1}^m \|f_j\|_{A_{s_j}^p}^p$, $f_j \in A_{s_j}^p$, $1 \leq j \leq m$.

В работе [56] представлены новые точные теоремы о следах аналитических классов типа ВМОА (*Bounded Mean Oscillation Analytic functions* — аналитические функции с ограниченной средней вариацией) в трубчатых областях над симметричными конусами при одном дополнительном условии на так называемое ядро Бергмана в этих областях. Существенную роль играют так называемые r -решетки для трубчатых областей, полученные ранее в работах зарубежных авторов.

Теоремы данной статьи являются полными аналогами недавних точных результатов о следах классов ВМОА, полученных ранее первым автором в полишарах и в ограниченных сильно псевдовыпуклых областях.

Пусть T_Ω — трубчатая область над симметричными конусами с гладкой границей в $\mathbb{C}^n$. Пусть

$$M_{r_1, \dots, r_m, \tau, s_1, \dots, s_m}^p(T_\Omega^m) = \left\{ f \in H(T_\Omega^m) : \right. \\ \left. \sup_{\omega \in T_\Omega} \delta^{m\tau}(\omega) \int_{T_\Omega} \dots \int_{T_\Omega} |f(z_1, \dots, z_m)|^p \prod_{j=1}^m |B_{s_j}(z_j, \omega)| \prod_{j=1}^m \delta^{s_j}(z_j) dV(z_j) < +\infty \right\},$$

при $s_j = \tau + r_j$, $j = 1, \dots, m$, где $\tau > 0$, $s_j > -1$, $r_j \geq 0$, $j = 1, \dots, m$, $0 < p < +\infty$.

Это банаховы пространства для всех $p \geq 1$ и полные метрические пространства для других значений p . Следующие теоремы для случая единичного шара можно найти в [49].

В теоремах 3.7, 3.8 приводится точный результат о следах пространств $M_{r_1, \dots, r_m, \tau, s_1, \dots, s_m}^p(T_\Omega^m)$.

Теорема 3.7 (см. [56]). Пусть $p > 1$, $\tau \in (0, +\infty)$, $r_j \in \mathbb{N}$, $r = \sum_{j=1}^m r_j$, $s_j > -1$, $j = 1, \dots, m$, $t = (m-1)(2n/r) + \sum_{j=1}^m s_j$. Тогда $\text{Trace}(M_{r_1, \dots, r_m, \tau, s_1, \dots, s_m}^p(T_\Omega^m)) = M_{r, t, \tau m}^p(T_\Omega)$ для всех n , $n/r > n_0$, где $n_0 = n_0(p, \tau, r_1, \dots, r_m, m)$.

Теорема 3.8 (см. [56]). Пусть $p \leq 1$, $\tau \in (0, +\infty)$, $r_j \in \mathbb{N}$, $r = \sum_{j=1}^m r_j$, $s_j > -1$, $j = 1, \dots, m$, $\frac{r_j}{p} \in \mathbb{N}$, $j = 1, \dots, m$, $t = (m-1)(2n/r) + \sum_{j=1}^m s_j$. Тогда $\text{Trace}(M_{r_1, \dots, r_m, \tau, s_1, \dots, s_m}^p(T_\Omega^m)) = M_{r, t, \tau m}^p(T_\Omega)$ для всех n , $n/r > n_0$, где $n_0 = n_0(p, \tau, r_1, \dots, r_m, m)$.

Все теоремы о точном следе, представленные в разделе 4, справедливы с довольно схожими доказательствами в аналитических пространствах нескольких переменных в различных областях, и они были ранее получены первым автором в нескольких статьях, основанных на интересных свойствах так называемых r -решеток в этих областях в $\mathbb{C}^n$.

4. СЛЕДЫ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОИЗВЕДЕНИЯХ ВЕРХНИХ ПОЛУПРОСТРАНСТВ

В этом разделе мы рассмотрим некоторые интересные задачи о следах в различных пространствах гармонических функций в произведениях верхних полупространств.

Пусть B — единичный шар в $\mathbb{R}^n$, т. е.

$$B = \left\{ x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x| = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq 1 \right\},$$

и $S^{n-1} = \partial B = \{x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n : |x| = 1\}$, $x = rx'$, $r = |x| \in (0, 1)$, $x' \in S^{n-1}$.

Рассмотрим банаховы пространства Бергмана в B (см., например, [18]):

$$A_\alpha^p(B) = \left\{ f \in h(B) : \|f\|_{p, \alpha} := \left(\int_0^1 \int_{S^{n-1}} |f(rx')|^p (1-r)^\alpha r^{n-1} dr dx' \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\},$$

при $1 \leq p < +\infty$, $0 \leq \alpha < +\infty$ и $p = +\infty$, $0 \leq \alpha < +\infty$. Имеем

$$\|f\|_{\infty, \alpha} := \sup_{x \in B} |f(x)| (1 - |x|)^\alpha < +\infty.$$

Пусть также $B^m = B \times \dots \times B$. Обозначим через $A_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^\infty(B^m)$, $\alpha_j > 0$, $j = 1, \dots, m$, пространство всех функций f , гармонических по каждой переменной в B таких, что

$$\sup_{x_i \in B, i=1, \dots, m} |f(x_1, \dots, x_m)| \prod_{i=1}^m (1 - |x_i|^2)^{\alpha_i} < +\infty.$$

Пусть $\alpha_j > 0$, $j = 1, \dots, m$. Некоторые сведения о $\text{Trace}(A_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^\infty(B^m))$ приведена в [50].
Пусть

$$hA_\alpha^p(B^m) = \left\{ f \in h(B^m) : \int_B \int_B \dots \int_B |f(x_1, \dots, x_m)|^p \prod_{k=1}^m (1 - |x_k|)^{\alpha_k} (|x_1| \dots |x_m|)^{n-1} d|x_1| \dots d|x_m| dx'_1 \dots dx'_m < +\infty \right\}.$$

Пусть $p \geq 1$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, m$. Подробнее о $\text{Trace}(hA_\alpha^p(B^m))$ см. [50].

Введем гармонические классы Бергмана на $\mathbb{R}^{n+1}$ и на произведениях пространств следующим образом.

Зададим $\mathbb{R}_+^{n+1} = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\} \subset \mathbb{R}^{n+1}$. Точки в $\mathbb{R}_+^{n+1}$ обычно обозначают как $z = (x, t)$ или $w = (y, s)$. Мера Лебега обозначается как $dm(z) = dz = dxdt$ или $dm(w) = dw = dyds$. Мы также используем стандартные взвешенные меры $dm_\lambda(z) = t^\lambda dxdt$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Пусть $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$,

$$A_\alpha^p(\mathbb{R}_+^{n+1}) = \left\{ f \in h(\mathbb{R}_+^{n+1}) : \|f\|_{p, \alpha}^p = \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty |f(x', x_{n+1})|^p x_{n+1}^\alpha dx' dx_{n+1} < +\infty \right\},$$

и

$$A_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^p(\mathbb{R}_+^{n+1} \times \dots \times \mathbb{R}_+^{n+1}) = A_\alpha^p((\mathbb{R}_+^{n+1})^m) = \left\{ f \in h((\mathbb{R}_+^{n+1})^m) : \right. \\ \left. \|f\|_{p, \alpha}^p = \int_{\mathbb{R}^n} \dots \int_{\mathbb{R}^n} \int_0^\infty \dots \int_0^\infty |f(x'_1, \dots, x'_m, x_{n+1}^1, \dots, x_{n+1}^m)|^p \times \right. \\ \left. \times \prod_{k=1}^m (x_{n+1}^k)^{\alpha_k} dx'_1 \dots dx'_m dx_{n+1}^1 \dots dx_{n+1}^m < +\infty \right\}.$$

Пусть $0 < p < +\infty$, $m \in \mathbb{N}$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, m$. В [50] приведены некоторые свойства $\text{Trace}(A_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^p(\mathbb{R}_+^{n+1} \times \dots \times \mathbb{R}_+^{n+1}))$.

Теоремы о следах различных типов и различные оценки следов различных пространств гармонических функций можно найти в работах [11, 12]. Сформулируем некоторые результаты из этих работ.

Зададим $\mathbb{H} = \{(x, t) : x \in \mathbb{R}^n, t > 0\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. Взвешенные гармонические пространства Бергмана на $\mathbb{H}$ определены для $0 < p < +\infty$ и $\lambda > -1$:

$$A_\lambda^p = A_\lambda^p(\mathbb{H}) = \left\{ f \in h(\mathbb{H}) : \|f\|_{A_\lambda^p} = \left(\int_{\mathbb{H}} |f(z)|^p dm_\lambda(z) \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\}.$$

При $\vec{\alpha} = (\alpha_1, \dots, \alpha_m) \in \mathbb{R}^m$ имеем произведение мер $dm_{\vec{\alpha}}$ на $\mathbb{H}^m$, определенное как $dm_{\vec{\alpha}}(z_1, \dots, z_m) = dm_{\alpha_1}(z_1) \dots dm_{\alpha_m}(z_m)$, и полагаем $L_{\vec{\alpha}}^p = L^p(\mathbb{H}^m, dm_{\vec{\alpha}})$, $A_{\vec{\alpha}}^p = L_{\vec{\alpha}}^p \cap h(\mathbb{H}^m)$, $0 < p < +\infty$. Обозначим через $\tilde{A}_{\vec{\alpha}}^p$ подпространство $A_{\vec{\alpha}}^p$, состоящее из функций, которые являются гармоническими по каждой из переменных $z_1, \dots, z_m$ отдельно.

Для функции $f : \mathbb{H}^m \rightarrow \mathbb{C}$ определим $\text{Tr } f : \mathbb{H} \rightarrow \mathbb{C}$ как $\text{Tr } f(z) = f(z, \dots, z)$.

Справедливы следующие результаты.

Теорема 4.1 (см. [11]). Пусть $1 < p < +\infty$, $s_1, \dots, s_m > -1$ и $\lambda = (m-1)(n+1) + \sum_{j=1}^m s_j$.

Тогда $A_\lambda^p \subset \text{Trace}(\tilde{A}_s^p) \subset \text{Trace}(A_s^p) \subset L^p(\mathbb{R}_+^{n+1}, dm_\lambda)$.

В частности, если $f \in A_s^p$ и если $\text{Tr } f$ является гармоническим, то $\text{Tr } f \in A_\lambda^p$.

При $p = \infty$, $s_j > 0$, $1 \leq j \leq m$ определим A_s^∞ как пространство всех $f \in h((\mathbb{R}_+^{n+1})^m)$ таких, что

$$\|f\|_{A_s^\infty} = \sup_{z_j \in \mathbb{R}_+^{n+1}} |f(z_1, \dots, z_m)| t_1^{s_1} \dots t_m^{s_m} < +\infty;$$

при $m = 1$, $s_1 = \alpha$ используется более простое обозначение A_α^∞ .

Пространство всех функций $f(z_1, \dots, z_m)$ на $(\mathbb{R}_+^{n+1})^m$, гармонических по каждой из переменных $z_1, \dots, z_m$, обозначим через $\tilde{h}((\mathbb{R}_+^{n+1})^m)$. Также, если X — пространство гармонических функций на $(\mathbb{R}_+^{n+1})^m$, то полагаем $\tilde{h}X = X \cap \tilde{h}((\mathbb{R}_+^{n+1})^m)$.

Пусть $X \subset h((\mathbb{R}_+^{n+1})^m)$. След X задается как $\text{Trace } X = \{\text{Tr } f : f \in X\}$.

Теорема 4.2 (см. [12]). Пусть $s_1, \dots, s_m > -1$ и $\lambda = \sum_{j=1}^m s_j$. Тогда $A_\lambda^\infty \subset \text{Trace}(\tilde{h}A_s^\infty)$.

И наоборот, если $f \in A_s^\infty$ и $\text{Tr } f$ является гармоническим, то $\text{Tr } f \in A_\lambda^\infty$.

Ниже сформулируем полный аналог приведенной выше теоремы для случая пространств гармонических функций в единичном шаре $\mathbb{R}^n$. Формулировка очень похожа. Определение объектов в этой теореме приведено в упомянутой статье автора совместно с М. Арсеновичем.

Теорема 4.3 (см. [12]). Пусть $0 < p < 1$, $s_1, \dots, s_m > -1$ и $\lambda = (m-1)(n+1) + \sum_{j=1}^m s_j$. Тогда

$$A_\lambda^p \subset \text{Trace}(\tilde{h}A_s^p) \subset \text{Trace}(A_s^p) \subset L^p(\mathbb{R}_+^{n+1}, dm_\lambda).$$

В частности, если $f \in A_s^p$ и если $\text{Tr } f$ является гармоническим, то $\text{Tr } f \in A_\lambda^p$.

5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ. НАПРАВЛЕНИЯ РАЗВИТИЯ И НОВЫЕ ПРОСТРАНСТВА ТИПА ВМОА, БЛОХА, ГЕРЦА И СВЯЗАННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом разделе мы собрали множество интересных новых проблем, вопросов и различных комментариев, касающихся проблемы следа в аналитических функциональных пространствах нескольких комплексных переменных не только в ограниченных сильно псевдовыпуклых и трубчатых областях, но и в полидисках, единичных шарах и полишарах. Поэтому мы отсылаем заинтересованного читателя к обзорной статье авторов [43], посвященной различным стандартным объектам и определениям этих объектов, связанных с полидиском и полишаром.

В этом разделе мы определим не только различные аналитические функциональные пространства в различных областях в $\mathbb{C}^n$ и приводим некоторую информацию о следах этих пространств, но также рассмотрим отображения, близкие к отображению следа, и представим результаты об их действии в функциональных пространствах такого типа, полученную ранее первым автором.

В некоторых аналитических функциональных пространствах в произведениях областей, представленных ниже, мы видим хорошо известные операторы дифференцирования $\mathcal{D}^\alpha$ в квазинормах и приводим оценки следов таких пространств.

Теперь обсудим некоторые новые открытые вопросы, в частности, следы пространств смешанных норм с квазинормами в единичном полидиске:

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \left(\int_{T^n} |f(r\zeta)|^p d\zeta \right)^{\frac{q}{p}} (1-r)^\alpha dr.$$

Даже при более общих весах $\omega(r)$, чем $(1-r)^\alpha$, они были полностью описаны в недавних работах [24] для всех $0 < p, q < +\infty$, $\alpha > -1$.

Следующий вполне естественный вопрос — полностью описать следы аналитических пространств функций подобного типа с помощью конечных квазинорм, определенных на полишаре $B \times \dots \times B$ (произведениях шаров):

$$\int_0^1 \dots \int_0^1 \left(\int_S \dots \int_S |f(r_1\zeta_1, \dots, r_n\zeta_n)|^p d\zeta \right)^{\frac{q}{p}} \prod_{j=1}^n (1-r)^{\alpha_j} d\vec{r},$$

где $S \subset \mathbb{C}^m$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, m$, $0 < p, q < +\infty$.

Подобные пространства для $n = 1$ хорошо изучены. Следует отметить, что аналогичные, даже более общие задачи могут быть поставлены и в полных аналогах этих пространств аналитических функций, но в общих трубчатых областях над симметричными конусами T_Ω , или в ограниченных сильно псевдовыпуклых областях с гладкой границей D , а именно на произведениях этих областей.

Следы пространств Харди H^p для всех значений p были приведены в работах [38, 41, 44]. Естественным открытым вопросом остается поиск описания следов смешанной нормы $H^{\vec{p}}$.

Пространства Харди со смешанной нормой определяются следующим образом с помощью квазинорм в единичном полидиске в $\mathbb{C}^n$:

$$\sup_{r_m < 1} \dots \sup_{r_1 < 1} \left(\int_T \dots \left(\int_T |f(\vec{r}\vec{\zeta})|^{p_1} d\zeta_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots d\zeta_m \right)^{\frac{1}{p_m}}, \quad 0 < p < +\infty, \quad j = 1, \dots, m$$

(а также важное взвешенное обобщение $H^{\vec{p}}_\omega$).

Некоторые точные оценки следов новых классов $H^{\vec{p}}$ можно найти в работах [38, 41] и в работах [45, 46] для некоторых частных случаев этих пространств в полишаре; в обоих случаях оценки для $m = 2$ и частных значений p_j приведены в недавней статье [3].

Следует отметить, что очень похожий вопрос может быть поставлен в пространствах типа $H^{\vec{p}}$ аналитических функций в полидиске V^n с квазинормами $\Gamma_t(\zeta)$, т. е. в конусе Лузина: $\Gamma_t(\zeta) = \{z \in V : |1 - \bar{\zeta}z| < t(1 - |z|)\}$, $t > 1$ (или с заменой $\Gamma_t(\zeta_j)$ на $r_j < 1$)

$$\left(\int_T \sup_{z_m \in \Gamma_t(\zeta)} \dots \left(\int_T \sup_{z_1 \in \Gamma_t(\zeta)} |f(z_1, \dots, z_m)|^{p_1} d\zeta_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots d\zeta_m \right)^{\frac{1}{p_m}},$$

где $0 < p_j < +\infty$, $j = 1, \dots, m$, или

$$\left(\int_T \left(\int_T \sup_{z_1 \in \Gamma_t(\zeta)} \dots \sup_{z_m \in \Gamma_t(\zeta)} |f(z_1, \dots, z_m)|^{p_1} d\zeta_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots d\zeta_m \right)^{\frac{1}{p_m}},$$

где $0 < p_j < +\infty$, $j = 1, \dots, m$.

Следует отметить, что многие результаты справедливы также для пространств плюригармонических функций. Теперь введем новые пространства смешанной нормы в полишарах $B \times \dots \times B$ следующим образом:

$$A_{\alpha_1 \dots \alpha_m}^{p_1 \dots p_m}(B_n^m) = \left\{ f \in H(B_n \times \dots \times B_n) : \right. \\ \left. \|f\|_{A_{\alpha}^{\vec{p}}} \left(\int_{B_n} (1 - |z_m|)^{\alpha_m} \dots \left(\int_{B_n} |f(z_1, \dots, z_m)|^{p_1} (1 - |z_1|)^{\alpha_1} d\nu(z_1) \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots d\nu(z_m) \right)^{\frac{1}{p_m}} < +\infty \right\},$$

где $0 < p < +\infty$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, m$.

Эти аналитические пространства можно ввести также для $p_j = +\infty$. Для $1 \leq p_j < +\infty$ имеем банаховы пространства, а для других значений — полные метрические пространства.

Ниже дадим полное описание пространств Бергмана со смешанной нормой в полишаре и верхней полуплоскости. Будет интересно представить точные расширения этих результатов на общие взвешенные пространства, а также на трубчатые и псевдовыпуклые области.

Теорема 5.1 (см. [40, 44, 46, 47]). Пусть $\gamma = \alpha_m + \sum_{j=1}^{m-1} (n+1 + \alpha_j) \left(\frac{p_m}{p_j} \right)$, $\alpha_j > -1$, $1 < p_j < +\infty$, $j = 1, \dots, m$. Тогда $\text{Trace}(A_{\alpha_1, \dots, \alpha_m}^{p_1, \dots, p_m}(B_n^m)) = A_\gamma^{p_m}(B_n)$.

Пусть далее

$$A_{\alpha}^p(\mathbb{C}_+^m) = \left\{ f \in H(\mathbb{C}_+^m) : \right. \\ \left. \|f\|_{A_{\alpha}^p} = \left(\int_0^{+\infty} \int_0^{+\infty} \dots \int_0^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |f(x_1 + iy_1, \dots, x_m + iy_m)|^p \prod_{j=1}^m y_j^{\alpha_j} dx_j dy_j \right)^{\frac{1}{p}} < +\infty \right\},$$

где $0 < p < +\infty$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, m$.

Теорема 5.2 (см. [40, 44, 46, 47]). Пусть $0 < p < +\infty$, $j = \sum_{j=1}^m \alpha_j + 2m - 2$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, m$.

Тогда $\text{Trace}(A_{\alpha}^p(\mathbb{C}_+^m)) = A_j^p(\mathbb{C}_+)$.

Определим некоторые новые взвешенные пространства Харди в полишаре и пространства типа Бергмана—Соболева в полидиске, а также обобщим некоторые оценки и точные результаты, полученные ранее в полидиске другими авторами. Следует отметить, что для ознакомления с хорошо известной дробной производной $\mathcal{D}^{\alpha}$, которая приведена ниже, мы отсылаем читателя к соответствующим статьям, которые были процитированы выше. Обобщение этих результатов на очень сложные трубчатые области является интересной и, вероятно, довольно сложной открытой проблемой.

Некоторые удачные обобщения диагонального отображения можно найти в статье Д. Кларка [16].

Пусть

$$H_{\alpha, \beta}^p = \left\{ f \in H(B^m) : \sup_{r < 1} \tilde{M}_p(\mathcal{D}^{\beta} f, r) (1-r)^{\alpha} < +\infty, \alpha \geq 0, 0 < p < +\infty, \beta \in \mathbb{R} \right\},$$

где $\mathcal{D}^{\beta}$ — дробная производная функции f , $\mathcal{D}^{\beta} = \mathcal{D}_{z_1}^{\beta_1} \dots \mathcal{D}_{z_m}^{\beta_m} f$,

$$\tilde{M}_p^p(f, r) = \int_S \dots \int_S |f(r\zeta_1, \dots, r\zeta_m)|^p d\sigma(\zeta_1) \dots d\sigma(\zeta_m), r \in (0; 1).$$

Определим $H^p(B^m) = H_{0,0}^p$ для $0 < p < +\infty$,

$$A_{t, \vec{\alpha}}^p = \left\{ f \in H(B^m) : \int_B \dots \int_B |\mathcal{D}^{\alpha_1} \dots \mathcal{D}^{\alpha_m} f|^p (1 - |\tilde{z}|)^t d\nu(z) < +\infty \right\},$$

где $\alpha_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, \dots, m$, $t > -1$, $0 < p < +\infty$, $(1 - |\tilde{z}|) = \prod_{k=1}^m (1 - |z_k|)$.

Теорема 5.3 (см. [40, 44, 46, 47]).

1. $\text{Trace}(H^p) = A_{n(m-1)-1}^p$, $m, n \in \mathbb{N}$, $0 < p < +\infty$.
2. Пусть $p \leq 1$, $\alpha \geq \beta \geq 0$, тогда

$$A_{\tau}^p \subset \text{Trace}(H_{\alpha, \beta}^p), \tau = nm + (\alpha - \beta)pm - (n + 1).$$

3. Пусть $p \leq 1$, $\alpha_j \geq 0$, $t \geq \frac{1}{m} \sum_{j=1}^m \alpha_j$, тогда

$$A_{tm+m(n+1)-(n+1)-\sum_{j=1}^m \alpha_j}^p \subset \text{Trace}(A_{t, \vec{\alpha}}^p).$$

Будет интересно распространить этот результат на трубчатые и псевдовыпуклые области.

Следы новых аналитических функциональных пространств в полидиске со смешанной квазинормой:

$$\left(\int_U \dots \left(\int_U |f(z_1, \dots, z_m)|^{p_1} (1-r_1)^{\alpha_1} dr_1 d\zeta_1 \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots (1-r_m)^{\alpha_m} dr_m d\zeta_m \right)^{\frac{1}{p_m}},$$

где $0 < p_j < +\infty$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, m$.

Результаты этих исследований можно увидеть в недавних работах [49, 50]. Подобные задачи также легко могут быть поставлены в гораздо более общих контекстах областей $T_\Omega \times \dots \times T_\Omega$ или $D \times \dots \times D$.

Рассмотрим аналитические пространства в трубчатых или псевдовыпуклых областях с квазинормами

$$\left(\int_D \dots \left(\int_D |f(z_1, \dots, z_m)|^{p_1} \delta^{\alpha_1}(z_1) d\nu(z_1) \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \delta^{\alpha_m}(z_m) d\nu(z_m) \right)^{\frac{1}{p_m}},$$

где $0 < p_j < +\infty$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, m$;

$$\left(\int_{T_\Omega} \dots \left(\int_{T_\Omega} |f(z_1, \dots, z_m)|^{p_1} \Delta^{\alpha_1}(z_1) d\tilde{\nu}(z_1) \right)^{\frac{p_2}{p_1}} \dots \Delta^{\alpha_m}(z_m) d\tilde{\nu}(z_m) \right)^{\frac{1}{p_m}},$$

где $0 < p_j < +\infty$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, m$.

В теории функций также представляет интерес рассмотрение других отображений, которые близки и почти «диагональны» в единичном полидиске:

$$(Mf)(z_1, \dots, z_m) = f(r\zeta_1, \dots, r\zeta_m), \quad r \in (0, 1), \quad \zeta_j \in T, \quad j = 1, \dots, m,$$

$$(Tf)(z_1, \dots, z_m) = f(r_1\zeta, \dots, r_m\zeta), \quad r_j \in (0, 1), \quad \zeta \in T, \quad j = 1, \dots, m,$$

где $z_j \in U = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, $j = 1, \dots, m$.

Ниже дадим несколько точных результатов, полученных первым автором в недавней статье [45] (см. также ссылки в ней), касающихся этих довольно простых операторов в различных пространствах аналитических функций в единичном полидиске в $\mathbb{C}^n$.

Следует отметить, что операторы типа M , T могут рассматриваться также в ряде случаев в произведениях единичных шаров и в произведении трубчатых областей и ограниченных сильно псевдовыпуклых областей. Здесь мы опускаем простые подробности.

Пусть

$$U_*^n = \{z \in U^n : \zeta \in T, r_j \in (0, 1), j = 1, \dots, n\};$$

$$\tilde{U}^n = \{z \in U^n : |z_j| = r, r \in (0, 1], j = 1, \dots, n\};$$

$$\|f\|_{A_\alpha^p}^p = \int_{U^n} |f(z)|^p \prod_{j=1}^n (1 - |z_j|^2)^{\alpha_j} dm_{2n}(z) < +\infty, \quad 0 < p < +\infty, \quad \alpha_j > -1;$$

$$\|f\|_{A_\alpha^p(U_*^n)}^p = \int_0^1 \dots \int_0^1 \int_T |f(z)|^p \prod_{j=1}^n (1 - |z_j|^2)^{\alpha_j} d(z_j) d\zeta < +\infty, \quad 0 < p < +\infty, \quad \alpha_j > -1;$$

$$\|f\|_{A_\alpha^p(\tilde{U}^n)}^p = \int_{T^n} \int_0^1 |f(z)|^p (1 - |z|^2)^\alpha d(z) d\vec{\zeta} < +\infty, \quad 0 < p < +\infty, \quad \alpha > -1.$$

Имеем

$$\text{Trace}(A_\beta^p(\tilde{U}^n)) = A_{\beta+n-1}^p(U),$$

при $p \leq 1$, $\beta > -1$ и при $p > 1$, $\beta > \beta_0 = \beta_0(n, p)$;

$$\text{Trace}(A_\beta^p(U_*^n)) = A_{|\beta|+n-1}^p(U), \quad \beta = (\beta_1, \dots, \beta_n), \quad |\beta| = \sum_{k=1}^n \beta_k,$$

при $p \leq 1$, $\beta_k > -1$, $k = 1, \dots, n$, и при $p > 1$, $\beta > \beta_0 = \beta_0(n, p)$.

Следы на $(z, \dots, z)$ аналитических пространств со следующими квазинормами также можно увидеть в [45].

Интересно найти расширения для трубчатых и ограниченных сильно псевдовыпуклых областей

$$\Lambda_\alpha(U_*^n) = \left\{ f \in H(U^n) : \sup_{\zeta \in T, r_j \in (0,1)} |f(r_1\zeta, \dots, r_n\zeta)| \prod_{j=1}^n (1-r_j)^\alpha < +\infty \right\},$$

где $\alpha \geq 0$, $j = 1, \dots, n$;

$$\tilde{\Lambda}_\alpha(\tilde{U}^n) = \left\{ f \in H(U^n) : \sup_{\zeta_j \in T, r \in (0,1)} |f(r\zeta_1, \dots, r\zeta_n)| (1-r)^\alpha < +\infty \right\},$$

где $\alpha \geq 0$, $j = 1, \dots, n$.

Рассмотрим, например, аналитические пространства T_Ω для $\alpha \geq 0$:

$$\sup_{\zeta_j \in T, r \in (0,1)} |f(r\zeta_1, \dots, r\zeta_n)| (1-r)^\alpha < +\infty.$$

Задача состоит в том, чтобы найти следы этого и подобных пространств в T_Ω .

Подобный вопрос может быть задан и в ограниченной псевдовыпуклой области.

Гораздо более сложной задачей является предоставление полного описания следов различных аналитических функциональных пространств в очень сложных областях, а именно в трубчатых над симметричными конусами и в ограниченных сильно псевдовыпуклых областях с гладкой границей в $\mathbb{C}^n$.

Ниже мы дадим конкретные аналитические пространства, указывающие на то, что поиск следов всех этих аналитических пространств является открытой, интересной и, вероятно, сложной задачей.

Приведем некоторые квазинормы аналитических пространств со смешанной нормой в обеих областях и аналитических пространств типа Харди в обеих областях в $\mathbb{C}^n$.

Следует отметить, что пространства смешанного типа можно также рассматривать в T_Ω^m или D^m , $m \geq 1$, например, следующего типа: $\left\| \| \|f\|_{X_1} \|_{X_2} \dots \|_{X_m} \right\|$, где $(X_j) = (A_{\alpha_j}^{p_j})(T_\Omega)$, или $H^{p_j}(T_\Omega)$, $j = 1, \dots, m$, или $(X_j) = (A_{\alpha_j}^{p_j})(D)$, или $H^{p_j}(D)$, $j = 1, \dots, m$, — нахождение оценок следов этих аналитических пространств является открытой проблемой.

Для $1 \leq p < +\infty$ пространство Харди $H^p(T_\Omega)$ — это пространство голоморфных функций в T_Ω , удовлетворяющих оценке

$$\|F\|_{H^p} = \sup_{y \in \Omega} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |F(x + iy)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

В $T_\Omega^m = T_\Omega \times \dots \times T_\Omega$ можно определить $H^p(T_\Omega^m)$ двумя способами с использованием квазинорм, основанных на квазинормах в T_Ω :

$$\sup_{y \in \Omega} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |F(x + iy)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

$$\sup_{y_j \in \Omega_j, j=1, \dots, m} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \dots \int_{\mathbb{R}^n} |F(x_1 + iy_1, \dots, x_m + iy_m)|^p d\vec{x} \right)^{\frac{1}{p}}$$

или

$$\sup_{y_m \in \Omega} \int_{\mathbb{R}^n} \dots \sup_{y_1 \in \Omega} \int_{\mathbb{R}^n} |F(x_1 + iy_1, \dots, x_m + iy_m)|^p dx_1 \dots dx_m,$$

а затем рассмотреть следы квазинорм такого типа для всех значений $1 < p < +\infty$.

Эта проблема является открытой в ограниченных псевдовыпуклых областях с гладкой границей. Рассмотрим квазинормированные пространства функций $\left\| \| \|f\|_{X_1} \|_{X_2} \dots \|_{X_m} \right\|$, где (X_j) —

пространство функций (аналитических) с одной из следующих квазинорм в областях D :

$$\sum_{|\alpha| \leq k} \int_0^{r_0} \left(r^\delta \left(\int_{\partial D_r} |\mathcal{D}^\alpha f|^p d\sigma_r \right)^{\frac{q}{p}} \frac{dr}{r} \right)^{\frac{1}{q}}, \quad 0 < q \leq +\infty, \quad 0 < p < +\infty, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

$D_r = \{z \in D : \rho(z) > r\}$, $\delta > 0$, $d\sigma_r$ — нормированная мера поверхности на ∂D_r , $\mathcal{D}^\alpha$ — дробная производная f , или

$$\sup_{0 < r < r_0} \sum_{|\alpha| \leq k} \left(r^\delta \int_{\partial D_r} |\mathcal{D}^\alpha f|^p d\sigma_r \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < +\infty, \quad \delta > 0, \quad k = 0, 1, 2, \dots,$$

где $\sup_{z \in D} |f(z)| \rho^\delta(z) < +\infty$, $\delta \geq 0$, $\text{dist}(z, \partial D) \asymp \rho(z)$,

$$\left(\int_D |f(z)|^p \rho^\delta(z) dv(z) \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < +\infty, \quad \delta > -1,$$

$$\left(\int_0^{r_0} \left(\sup_{\partial D_r} |f|^p \right) r^{\delta p - 1} dr \right)^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < +\infty, \quad \delta > 0,$$

$$H^p(D_\varepsilon) = \left\{ f \in H(D) : \sup_{\varepsilon > 0} \left(\int_{\partial D_\varepsilon} |f(\zeta)|^p d\sigma(\zeta) \right)^{\frac{1}{p}} \varepsilon^\alpha < +\infty, \quad \alpha \geq 0, \quad 0 < p < +\infty \right\},$$

где $\partial D_\varepsilon = \{z \in D : \rho(z) = \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, $d\sigma$ — нормированная мера поверхности на ∂D_ε .

Пусть $B(z, r)$ — шар Кобаяси в D , $z \in D$, $r > 0$. Также можно рассмотреть квазинормы типа Герца на D :

$$\int_D \left(\int_{B(z, r)} |f(w)|^p \delta^\alpha(w) dv(w) \right)^{\frac{p}{q}} dv(z), \quad 0 < p < +\infty, \quad \alpha > -1,$$

$$\sum_{k \geq 0} \left(\int_{B(a_k, r)} |f(w)|^q \delta^\alpha(w) dv(w) \right)^{\frac{p}{q}}, \quad 0 < p, \quad q < +\infty, \quad \alpha > -1,$$

где $\{a_k\}$ — известная r -решетка в D (см. [27, 38, 41]). Все эти многочисленные проблемы, касающиеся оценок следов этих аналитических функций в $T_\Omega^m = T_\Omega \times \dots \times T_\Omega$ или $D \times \dots \times D$, остаются открытыми.

Также укажем на некоторые недавние точные результаты, касающиеся следов аналитических функциональных пространств типа ВМОА и пространств Герца и типа Блоха в трубчатых, псевдовыпуклых областях и в единичном шаре. Ниже рассмотрим некоторые открытые проблемы в этом направлении.

Следует отметить, что некоторые результаты о следах аналитических функциональных пространств области типа Неванлинны в полидиске можно найти в работах [4, 7, 18] (см. также множество ссылок в этих работах).

Определим банахово пространство Блоха

$$\Lambda(r_1, \dots, r_k) = \left\{ f \in H(B^m) : \right. \\ \left. \|f\|_{\Lambda(r_1, \dots, r_k)} = \sup_{z_1, \dots, z_k \in B} |f(z_1, \dots, z_k)| \prod_{j=1}^n \left(1 - |z_j|^2 \right)^{r_j} < +\infty, \quad r_j > 0, \quad j = 1, \dots, m, \quad k \geq 1 \right\}.$$

Теорема 5.4. Пусть $r_j > 0$, $j = 1, \dots, m$, $r = \sum_{j=1}^m r_j$. Тогда $\text{Trace}(\Lambda(r_1, \dots, r_m)) = \Lambda(r)$.

Пусть также

$$\Lambda_{\ln}(r_1, \dots, r_k) = \left\{ f \in H(B^m) : \|f\|_{\Lambda(r_1, \dots, r_k)} = \sup_{z_j \in B} |f(\bar{z})| \prod_{j=1}^n \ln \left(\frac{1}{1 - |z_j|} \right)^{-\frac{1}{r_j}} < +\infty \right\},$$

$$\sum_{j=1}^m \frac{1}{r_j} = 1, \quad r_j > 0.$$

Тогда имеем

$$\text{Trace}(\Lambda_{\ln}(r_1, \dots, r_m)) = \left\{ f \in H(B) : \sup_{z \in B} |f(z)| \left(\ln \frac{1}{1 - |z|} \right)^{-1} (1 - |z|) < +\infty \right\}.$$

Будет интересно найти полные аналоги этих результатов в трубчатых, псевдовыпуклых областях.

Мы приводим данные о следах пространств типа ВМОА в шарообразной, псевдовыпуклой и трубчатой областях; аналогичные результаты можно найти в [54, 56] для $E(0) = B$, $a \in B \setminus \{0\}$, $E(a) = \left\{ z \in B : \left| 1 - \left\langle z, \frac{a}{|a|} \right\rangle \right| < 1 - |a| \right\}$.

Пусть $k \geq 1$, $k \in \mathbb{Z}$, μ — положительная мера Бореля на $B \times \dots \times B$, $r_j > 0$, $j = 1, \dots, k$, μ — ограниченная мера Карлесона $(r_1, \dots, r_k)$, если

$$\sup \frac{\mu(E(a_1) \times \dots \times E(a_k))}{\prod_{j=1}^k (1 - |a_j|)^{r_j}} < +\infty, \quad a_j \in B, \quad j = 1, \dots, k.$$

Пусть $0 < p < +\infty$, $s_1, \dots, s_k > -1$, $r_1, \dots, r_k > 0$, $M_{r_1, \dots, r_k}(B^k; d\nu_{s_1}, \dots, d\nu_{s_m})$ — пространство измеримых функций на B^k , где $\mu_f = |f|^p \prod_{j=1}^k d\nu_{s_j}$ — ограниченная мера Карлесона $(r_1, \dots, r_m)$ с

$$\sup \frac{\mu_f(E(a_1), \dots, E(a_m))}{\prod_{j=1}^k (1 - |a_j|)^{r_j}}, \quad a_j \in B, \quad j = 1, \dots, k.$$

Теорема 5.5. Пусть $t = (m - 1)(n + 1) + \sum_{j=1}^m s_j$.

Тогда $\text{Trace}(H(B^m) \cap M_{r_1, \dots, r_m}^p(B^m; d\nu_{s_1}, \dots, d\nu_{s_m})) = H(B) \cap M_r^p(B; d\nu_t)$, $0 < p < +\infty$, $s_j > -1$, $r_j > 0$, $j = 1, \dots, m$, $r = \sum_{j=1}^m r_j$, $r_j < n + 1 + s_j$, $j = 1, \dots, m$.

Некоторые описания (или оценки) следов аналитических пространств (M_α^p) , $(K_{\alpha, \beta}^{p, q})$, $(D_{\alpha, \beta}^p)$ и связанных с ними пространств:

$$(M_\alpha^p) = \left\{ f \in H(B^m) : \int_S \int_{\Gamma_t(\zeta)} \dots \int_{\Gamma_t(\zeta)} |f(z)|^p d\nu_\alpha(z) d\sigma(\zeta) < +\infty \right\},$$

где $0 < p < +\infty$, $\alpha > -1$;

$$(K_{\alpha, \beta}^{p, q}) = \left\{ f \in H(B^m) : \int_B \dots \int_B \left(\int_{D(z_1, r)} \dots \int_{D(z_m, r)} |f(z)|^p d\nu_\alpha(z) \right)^{\frac{q}{p}} d\nu_\beta(z) < +\infty \right\},$$

где $0 < p, q < +\infty$, $\alpha > -1$, $\beta > -1$;

$$(D_{\alpha, \beta}^p) = \left\{ f \in H(B^m) : \int_0^1 (1 - r)^\beta \left(\int_{|z_1| < r} \dots \int_{|z_m| < r} |f(z)|^p \prod_{j=1}^m (1 - |z_j|)^{\alpha_j} d\nu(z_j) \right) dr < +\infty \right\},$$

где $0 < p < +\infty$, $\beta > -1$, $\alpha_j > -1$, $j = 1, \dots, m$.

Многие связанные и (или) очень близкие к этим теоремам о следах интересные результаты и проблемы рассматривались различными авторами в последние десятилетия в разных аналитических пространствах в различных областях в $\mathbb{C}^n$. Упомянем, например, работы [8, 9, 15, 22, 73].

В данной обзорной статье мы не будем обсуждать эти проблемы или проблемы такого типа, отсылая авторов к упомянутым статьям.

Практически во всех доказательствах различных теорем о следе очень важны различные теоремы типа проекции Бергмана, и мы отсылаем заинтересованных читателей к работам [42, 66–68] для ознакомления с различными новыми результатами в этом направлении.

Представленные в этой статье точные результаты о следах в гармонических и аналитических функциональных пространствах нескольких переменных были недавно распространены на различные пространства плюригармонических функций нескольких переменных типа Бергмана. Для ознакомления с этими результатами мы отсылаем читателя к работе [57].

В заключение мы хотели бы отослать читателя к работам [35, 36, 60–65], где представлены многочисленные новые результаты первого автора и его соавторов для вложений в аналитические пространства типа Бергмана и для проекций Бергмана в трубчатых областях над конусами и в ограниченных сильно псевдовыпуклых областях с гладкой границей, которые в будущем могут быть применены различными способами или использованы для получения доказательств новых теорем о следе в различных аналитических функциональных пространствах в таких сложных областях в $\mathbb{C}^n$.

Мы отсылаем читателя к работам [2, 17] и многочисленным ссылкам в них, где приводятся некоторые старые интересные результаты, тесно связанные с нашими теоремами о следе.

Вероятно, различные вложения для аналитических пространств Q_p из работы [72] могут быть использованы в доказательствах теорем о следе для пространств такого типа в единичном диске и полидиске.

Мы отсылаем читателя к работе [28] и многочисленным ссылкам в ней, где приводятся новые результаты о точных следах в простых полидисковых пространствах в смешанных нормах.

Некоторые вложения из работы [21] можно использовать для доказательства теорем о следах в различных пространствах типа Харди на полидиске.

Многие вложения из работы [74] могут быть обобщены на ограниченные сильно псевдовыпуклые области с гладкой границей, а затем использованы для получения теорем о следе в различных аналитических пространствах в таких областях; мы предлагаем это в качестве задачи для заинтересованных читателей.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975.
2. Хенкин Г. М. Продолжение ограниченных голоморфных функций с одномообразий общего положения в строго псевдовыпуклой области // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1972. — 36, № 3. — С. 540–567.
3. Часова Н. А. Интегральные представления, двойственность и теплицевы операторы в весовых анизотропных пространствах голоморфных в поликруге функций со смешанной нормой // Дисс. к.ф.-м.н. — СПб: РГПУ им. А. И. Герцена, 2003.
4. Шамоян Р. Ф. Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций // Докл. АН АрмССР. — 1987. — 85, № 1. — С. 7–11.
5. Шамоян Р. Ф. Диагональное отображение и вопросы представления в анизотропных пространствах голоморфных в полидиске функций // Сиб. мат. ж. — 1990. — 31, № 2. — С. 197–215.
6. Шамоян Р. Ф. Характеризации типа ВМО, диагональное отображение и ограниченность интегральных операторов в некоторых пространствах аналитических функций // Владикавказ. мат. ж. — 2007. — 9, № 2. — С. 40–53.
7. Шведенко С. В. Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. — 1985. — 23. — С. 3–124.
8. Alexander H. Extending bounded holomorphic function from certain subvarieties of a polydisk // Pacific J. Math. — 1969. — 3. — С. 485–490. — DOI: [10.2140/pjm.1969.29.485](https://doi.org/10.2140/pjm.1969.29.485).
9. Amar E. Extention de fonctions holomorphique avec estimation // Ark. Mat. — 1979. — 17, № 1. — С. 123–139. — DOI: [10.1007/BF02385462](https://doi.org/10.1007/BF02385462).

10. *Amar E., Menini C.* A counter example to corona problem for operators on Hardy H^2 space in the polydisk // Pacific J. Math. — 2002. — 206, № 2. — С. 21–29. — DOI: [10.2140/pjm.2002.206.257](https://doi.org/10.2140/pjm.2002.206.257).
11. *Arsenovic M., Shamoyan R.* Trace theorems in harmonic function spaces on $(R_+^{n+1})^m$, multipliers theorems and related problems // Kragujevac J. Math. — 2011. — 35, № 3. — С. 411–430.
12. *Arsenovic M., Shamoyan R.* On embeddings, traces and multipliers in harmonic function spaces // Kragujevac J. Math. — 2013. — 37, № 1. — С. 45–64.
13. *Bekolle D., Berger C., Coburn L., Zhu K.* BMO in the Bergman metric on bounded symmetric domains // J. Funct. Anal. — 1990. — 93, № 2. — С. 310–350. — DOI: [10.1016/0022-1236\(90\)90131-4](https://doi.org/10.1016/0022-1236(90)90131-4).
14. *Bekolle D., Bonami A., Garrigos G., Nana C., Peloso M. M., Ricci F.* Lecture notes on Bergman projectors in tube domains over cones: an analytic and geometric viewpoint // IMHOTEP J. Afr. Math. Pures Appl. — 2004. — 5, № 1. — С. 1–75.
15. *Cima J., Graham I. R.* On the extension of holomorphic function with growth condition across analytic subvarieties // Michigan Math. J. — 1981. — 28. — С. 241–256. — DOI: [10.1307/mmj/1029002513](https://doi.org/10.1307/mmj/1029002513).
16. *Clark D.* Restrictions of H^p spaces in the polydisk // Amer. J. Math. — 1988. — 110, № 6. — С. 1119–1152. — DOI: [10.2307/2374688](https://doi.org/10.2307/2374688).
17. *Cumenge A.* Extensions dans les classes de Hardy de fonctions holomorphes et estimations de type mesures de Carleson // Ann. Inst. Fourier. — 1983. — 3, № 33. — С. 59–87. — DOI: [10.5802/aif.931](https://doi.org/10.5802/aif.931).
18. *Djrbashian A. E., Shamoyan F. A.* Topics in the Theory of A_α^p Spaces. — Leipzig: Teubner, 1988.
19. *Duren P., Shields A.* Restrictions H^p functions to the diagonal of the polydisc // Duke Math. J. — 1975. — 42, № 4. — С. 567–579. — DOI: [10.1215/S0012-7094-75-04262-3](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-75-04262-3).
20. *Faraut J., Koranyi A.* Analysis on Symmetric Cones. — Oxford: Clarendon Press, 1994. — DOI: [10.1093/oso/9780198534778.001.0001](https://doi.org/10.1093/oso/9780198534778.001.0001).
21. *Frazier A.* The dual space of H^p of polydisk for $0 < p < 1$ // Duke Math. J. — 1972. — 39. — С. 369–379. — DOI: [10.1215/S0012-7094-72-03944-0](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-72-03944-0).
22. *Henkin G., Polyakov P.* Prolongement des fonctions holomorphes bornées d'une sousvariété du polydisque // C. R. Acad. Sci. Paris. — 1984. — 298. — С. 221–224.
23. *Horowitz C., Oberlin D.* Restriction of H^p functions to the diagonal of U^n // Indiana Univ. Math. J. — 1976. — 24, № 7. — С. 767–772. — DOI: [10.1512/iumj.1975.24.24060](https://doi.org/10.1512/iumj.1975.24.24060).
24. *Jevtic M., Pavlovic M., Shamoyan R.* A note on diagonal mapping theorem in spaces of analytic functions in the polydisk // Publ. Math. Debrecen. — 2009. — 74, № 1-2. — С. 1–14. — DOI: [10.5486/PMD.2009.4242](https://doi.org/10.5486/PMD.2009.4242).
25. *Mazya V.* Sobolev Spaces. — New York: Springer, 1985.
26. *Moulin B., Rosay J.-P.* Sur la restriction des fonctions plurisousharmoniques a la diagonale du polydisque // Indiana Univ. Math. J. — 1977. — 26, № 5. — С. 869–879. — DOI: [10.1512/iumj.1977.26.26069](https://doi.org/10.1512/iumj.1977.26.26069).
27. *Ortega J., Fabrega J.* Mixed-norm spaces and interpolation // Studia Math. — 1994. — 109, № 3. — С. 234–254.
28. *Ren G., Shi J.* The diagonal mapping in mixed norm spaces // Studia Math. — 2004. — 163, № 2. — С. 103–117. — DOI: [10.4064/sm163-2-1](https://doi.org/10.4064/sm163-2-1).
29. *Rudin W.* Function Theory in Polydisk. — New York: Benjamin, 1969.
30. *Sehba B. F.* Hankel operators on Bergman spaces of tube domains over symmetric cones // Integral Equ. Operator Theory. — 2008. — 62, № 2. — С. 233–245. — DOI: [10.1007/s00020-008-1620-7](https://doi.org/10.1007/s00020-008-1620-7).
31. *Sehba B. F.* Bergman type operators in tube domains over symmetric cones // Proc. Edinb. Math. Soc. — 2009. — 52, № 2. — С. 529–544. — DOI: [10.1017/S0013091506001593](https://doi.org/10.1017/S0013091506001593).
32. *Shamoyan R.* On some problems connected with diagonal map in some spaces of analytic functions // Math. Bohemica. — 2008. — 133, № 4. — С. 351–366. — DOI: [10.21136/MB.2008.140625](https://doi.org/10.21136/MB.2008.140625).
33. *Shamoyan R.* Some remarks on the operator of diagonal map and on multifunctional analytic spaces // Вестн. ЧелГУ. Мат. Мех. Инф. — 2008. — 10. — С. 19–24.
34. *Shamoyan R.* The diagonal mapping in BMOA-type spaces of analytic functions on the polydisk // Georgian Math. J. — 2009. — 16, № 3. — С. 561–574. — DOI: [10.1515/GMJ.2009.561](https://doi.org/10.1515/GMJ.2009.561).
35. *Shamoyan R. F.* On Bergman-type spaces in tubular domains over symmetric cones // Дагестан. электрон. мат. изв. — 2020. — 14. — С. 22–29. — DOI: [10.31029/demr.14.2](https://doi.org/10.31029/demr.14.2).
36. *Shamoyan R. F., Kurilenko S. M.* On a new embedding theorem in analytic Bergman type spaces in bounded strictly pseudoconvex domains of n -dimensional complex space // Журн. СВУ. Сер. Мат. и физ. — 2014. — 7, № 3. — С. 383–388.
37. *Shamoyan R., Kurilenko S.* On traces in analytic function spaces in polyballs // Palestine J. Math. — 2015. — 4, № 2. — С. 291–293. — DOI: [10.1155/2015/265245](https://doi.org/10.1155/2015/265245).
38. *Shamoyan R., Kurilenko S.* On traces of analytic Herz and Bloch type spaces in bounded strongly pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$ // Probl. Anal. Issues Anal. — 2015. — 4, № 1. — С. 73–94. — DOI: [10.15393/j3.art.2015.2669](https://doi.org/10.15393/j3.art.2015.2669).

39. *Shamoyan R., Kurilenko S.* Traces and distances in analytic Function spaces in C^n and Martinelly–Bochner integrals // Чебышев. сб. — 2015. — 16, № 2. — С. 254–272. — DOI: [10.1155/2015/265245](https://doi.org/10.1155/2015/265245).
40. *Shamoyan R., Kurilenko S.* On a trace operator in Bergman type analytic spaces in Siegel domains of the second type // Пробл. физ., мат. и техн. — 2015. — 2. — С. 83–90.
41. *Shamoyan R. F., Kurilenko S. M.* On traces in Hardy type analytic spaces in bounded strictly pseudoconvex domains and in tubular domains over symmetric cones // Журн. СФУ. Сер. Мат. и физ. — 2016. — 9, № 4. — С. 510–517. — DOI: [10.17516/1997-1397-2016-9-4-510-517](https://doi.org/10.17516/1997-1397-2016-9-4-510-517).
42. *Shamoyan R. F., Makhina N. M.* On Bergman type projections in bounded strongly pseudoconvex domains and tubular domains over symmetric cones // Math. Montisnigri. — 2024. — 60. — С. 50–57. — DOI: [10.20948/mathmontis-2024-60-4](https://doi.org/10.20948/mathmontis-2024-60-4).
43. *Shamoyan R., Makhina N.* Restrictions of analytic function spaces in the polydisk and related domains. Topical review // Math. Montisnigri. — 2025. — 62. — С. 5–20. — <https://www.montis.pmf.ac.me/allissues/62/Mathematica-Montisnigri-62-1.pdf>.
44. *Shamoyan R., Mihic O.* In search of traces of some holomorphic spaces in polyballs // Revista Notas Mat. — 2008. — 4, № 1. — С. 1–23.
45. *Shamoyan R., Mihic O.* Analytic classes on subframe and expanded disk and the R_s differential operator in polydisk // J. Inequal. Appl. — 2009. — 2009. — 353801. — DOI: [10.1155/2009/353801](https://doi.org/10.1155/2009/353801).
46. *Shamoyan R., Mihic O.* On traces of holomorphic functions on the unit polyball // Appl. Anal. Discrete Math. — 2009. — 3, № 2. — С. 198–211. — DOI: [10.2298/AADM0902198S](https://doi.org/10.2298/AADM0902198S).
47. *Shamoyan R., Mihic O.* A note on traces of some holomorphic functions classes on polyballs // J. Funct. Spaces Appl. — 2010. — 8, № 3. — С. 271–285. — DOI: [10.1155/2010/784896](https://doi.org/10.1155/2010/784896).
48. *Shamoyan R., Mihic O.* On some inequalities in holomorphic function theory related to diagonal mapping // Czechoslovak Math. J. — 2010. — 60, № 2. — С. 351–370. — DOI: [10.1007/s10587-010-0040-4](https://doi.org/10.1007/s10587-010-0040-4).
49. *Shamoyan R., Mihic O.* On traces of Q_p type spaces and mixed norm analytic function spaces in polyballs // Siauliai Math. Semin. — 2010. — 5, № 13. — С. 101–119.
50. *Shamoyan R., Mihic O.* On traces of analytic Q_p type spaces, mixed norm spaces and harmonic Bergman classes on certain polydomains // Filomat. — 2011. — 25, № 1. — С. 1–19. — DOI: [10.2298/FIL1101001S](https://doi.org/10.2298/FIL1101001S).
51. *Shamoyan R. F., Mihic O. R.* Sharp theorems on traces in analytic spaces in bounded strictly pseudoconvex domains // Reports NAS RA. — 2014. — 114, № 2. — С. 91–96.
52. *Shamoyan R., Mihic O.* On traces in some analytic spaces in bounded strictly pseudoconvex domains // J. Function Spaces. — 2015. — 2015. — 265245. — DOI: [10.1155/2015/265245](https://doi.org/10.1155/2015/265245).
53. *Shamoyan R., Mihic O.* Traces of Bergman spaces in pseudoconvex domains // Reports NAS RA. — 2015. — 8. — С. 56–62. — DOI: [10.1155/2015/265245](https://doi.org/10.1155/2015/265245).
54. *Shamoyan R., Mihic O.* On a sharp trace theorem in BMOA type spaces in pseudoconvex domains // C. R. Acad. Bulgare Sci. — 2017. — 70, № 2. — С. 161–166.
55. *Shamoyan R., Mihic O.* On some new sharp embedding theorems in strongly pseudoconvex and tubular domains involving the trace operator // Romai J. — 2019. — 15, № 1. — С. 95–116.
56. *Shamoyan R., Mihic O.* On traces of new BMOA type spaces in tubular domains over symmetric cones // Rep. Adyghe (Circassian) Int. Acad. Sci. — 2022. — 22, № 1. — С. 32–38. — DOI: [10.47928/1726-9946-2022-22-1-32-38](https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-1-32-38).
57. *Shamoyan R., Povprits E.* Multyfunctional analytic spaces in bounded strongly pseudoconvex domains and sharp embedding theorem // Kragujevac J. Math. — 2013. — 5. — С. 241–264.
58. *Shamoyan R., Povprits E.* Sharp theorems on traces in Bergman type spaces in tubular domains over symmetric cones // Журн. СФУ. Сер. Мат. и физ. — 2013. — 6, № 4. — С. 527–538.
59. *Shamoyan R., Povpritz E.* Trace theorems in unbounded Siegel domains // Uzbek. Math. J. — 2015. — № 1. — С. 149–157.
60. *Shamoyan R. F., Shipka A. N.* On some new projection theorems and sharp estimates in Herz type spaces in bounded pseudoconvex domains // Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2018. — 1, № 21. — С. 64–77. — DOI: [10.18454/2079-6641-2018-21-1-64-77](https://doi.org/10.18454/2079-6641-2018-21-1-64-77).
61. *Shamoyan R. F., Tomashevskaya E. B.* On new decomposition theorems in some analytic function spaces in bounded pseudoconvex domains // Журн. СФУ. Сер. Мат. и физ. — 2020. — 13, № 4. — С. 503–514. — DOI: [10.17516/1997-1397-2020-13-4-503-514](https://doi.org/10.17516/1997-1397-2020-13-4-503-514).
62. *Shamoyan R. F., Tomashevskaya E. B.* On some new decomposition theorems in multifunctional Herz and Bergman analytic function spaces in bounded pseudoconvex domains // Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2020. — 30, № 1. — С. 42–58. — DOI: [10.26117/2079-6641-2020-30-1-42-58](https://doi.org/10.26117/2079-6641-2020-30-1-42-58).
63. *Shamoyan R. F., Tomashevskaya E. B.* On new sharp theorems for multifunctional BMOA type spaces in bounded pseudoconvex domains // Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2020. — 32, № 3. — С. 102–113. — DOI: [10.26117/2079-6641-2020-32-3-102-113](https://doi.org/10.26117/2079-6641-2020-32-3-102-113).

64. *Shamoyan R. F., Tomashevskaya E. B.* On some new sharp embedding theorems for multifunctional Herz-type and Bergman-type spaces in tubular domains over symmetric cones // Rep. Adyghe (Circassian) Int. Acad. Sci. — 2021. — 21, № 3. — С. 21–33. — DOI: [10.47928/1726-9946-2021-21-3-21-33](https://doi.org/10.47928/1726-9946-2021-21-3-21-33).
65. *Shamoyan R. F., Tomashevskaya E. B.* On new sharp embedding theorems for multifunctional Herz-type and Bergman-type spaces in tubular domains over symmetric cones // Вестн. КРАУНЦ. Физ.-мат. науки. — 2021. — 34, № 1. — С. 63–79. — DOI: [10.26117/2079-6641-2021-34-1-63-79](https://doi.org/10.26117/2079-6641-2021-34-1-63-79).
66. *Shamoyan R., Tomashevskaya E.* On Bergman type projections in bounded strongly pseudoconvex domains // Rep. Adyghe (Circassian) Int. Acad. Sci. — 2023. — 23, № 2. — С. 18–26. — DOI: [10.47928/1726-9946-2023-23-2-18-26](https://doi.org/10.47928/1726-9946-2023-23-2-18-26).
67. *Shamoyan R., Tomashevskaya E.* Some generalizations of the Bergman projection theorem in tubular and bounded pseudoconvex domains // Siberian Adv. Math. — 2024. — 34. — С. 356–365. — DOI: [10.1134/S1055134424040114](https://doi.org/10.1134/S1055134424040114).
68. *Shamoyan R., Tomashevskaya E.* On Bergman type projections in new analytic spaces in tubular domains over symmetric cones // Мат. заметки СВФУ. — 2024. — 31, № 3. — С. 73–81. — DOI: [10.25587/2411-9326-2024-3-73-81](https://doi.org/10.25587/2411-9326-2024-3-73-81).
69. *Shamoyan R., Zaytseva O.* On sharp traces of some new analytic Herz-type spaces in Siegel domains in $\mathbb{C}^n$ // Пробл. физ., мат. и техн. — 2015. — 4. — С. 87–95.
70. *Shapiro J.* Mackey topologies, reproducing kernels and diagonal maps on the Hardy and Bergman spaces // Duke Math. J. — 1976. — 43. — С. 187–202. — DOI: [10.1215/S0012-7094-76-04316-7](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-76-04316-7).
71. *Triebel H.* Theory of Function Spaces II. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1992. — DOI: [10.1007/978-3-0346-0419-2](https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0419-2).
72. *Xiao J.* Holomorphic Q^p classes. — Berlin: Springer, 2001. — DOI: [10.1007/b87877](https://doi.org/10.1007/b87877).
73. *Zarantonello S.* The extentions of H^p functions from certain subvarieties of a polydisk // Proc. Amer. Math. Soc. — 1980. — 78, № 4. — С. 519–524. — DOI: [10.1090/S0002-9939-1980-0556624-1](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1980-0556624-1).
74. *Zhu K.* Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball. — New York: Springer, 2005.

Р. Ф. Шамоян

Брянский государственный университет им. академика И. Г. Петровского, Брянск, Россия

E-mail: rsham@mail.com, РИНЦ AuthorID: [118067](https://elibrary.ru/author_index.action?id=118067), Scopus: [6506006473](https://orcid.org/0000-0002-8415-9822),

ORCID: [0000-0002-8415-9822](https://orcid.org/0000-0002-8415-9822)

Н. М. Махина

Брянский государственный университет им. академика И. Г. Петровского, Брянск, Россия

E-mail: makhina32@gmail.com, РИНЦ SPIN-код: 1045-4238, РИНЦ AuthorID: [165091](https://elibrary.ru/author_index.action?id=165091), Scopus: [57192714258](https://orcid.org/0000-0003-2270-1775), ORCID: [0000-0003-2270-1775](https://orcid.org/0000-0003-2270-1775)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-165-194](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-165-194)
 EDN: UJHLAF

UDC 517.55
Review article

Exact restrictions of analytic function spaces of several variables

R. F. Shamoyan and N. M. Makhina

Bryansk State Academician I. G. Petrovski University, Bryansk, Russia

Abstract. In this expository paper, we collect many recent advances in analytic function spaces of several complex variables related with the trace problem in tubular domains over symmetric cones and bounded strongly pseudoconvex domains with smooth boundary. We consider various function spaces of analytic functions of several variables in various domains in $\mathbb{C}^n$ and provide either complete descriptions of traces or estimates of traces of various analytic function spaces in various domains obtained in recent years, by various authors.

The problem to find sharp estimates of traces of Hardy analytic function spaces in the unit polydisk first was posed by W. Rudin in 1969. Since then many papers appeared. We collect in this expository paper not only already many known results on traces of various analytic function spaces in product domains but also discuss various new interesting results related with this problem. Related to the trace problem various results were provided previously by G. Henkin, E. Amar, H. Alexander and various other authors. Finally, note that our trace theorems are closely related with the Bergman type projections acting between function spaces with different dimensions.

This expository paper contains mainly new results concerning traces in tubular and bounded strongly pseudoconvex domains, proofs of these theorems are based in particular also on various properties of Bergman type projection. In this expository paper we will also shortly discuss some new results obtained by the first author on Bergman type projections in these complicated domains in $\mathbb{C}^n$. This is the second part of our notes related to the trace problem. In the first part, we provided a large list of recent sharp results on traces in the polydisk and polyball; it was published in [43]. In the last section of this expository paper, we collect many interesting remarks and put various open interesting questions for interested readers and also add various interesting short comments related with this problem of traces in various simple and complicated domains in $\mathbb{C}^n$ in various analytic function spaces of several variables. Some new results concerning traces in harmonic function spaces of several variables will be also added.

Keywords: Trace operator, Bergman and Hardy mixed norm spaces, Herz spaces, Bergman type projection, tube domains, pseudoconvex domains, analytic functions, sharp embedding theorems, harmonic functions, spaces of harmonic functions.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

Authors' contribution. The review was written under the supervision of R. F. Shamoyan together with associate professor of BSU N. M. Makhinaya. The selection of material belongs to the first author, the second author made recommendations and comments on the text during the work and was also responsible for all technical issues related to the design of the article.

For citation: R. F. Shamoyan, N. M. Makhina, “Exact restrictions of analytic function spaces of several variables,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 1, 165–194. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-1-165-194](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-1-165-194) EDN: UJHLAF

REFERENCES

1. O. V. Besov, V. P. Il'in, and S. M. Nikol'skii, *Integral'nye predstavleniya funktsiy i teoremy vlozheniya* [Integral Representation of Functions and Embedding Theorems], Nauka, Moscow, 1975 (in Russian).



2. G. M. Henkin, “Prodlzhenie ogranichennykh golomorfnykh funktsiy s odnogoobraziy obshchego polozheniya v strogo psevdovypukloy oblasti” [On extension of bounded holomorphic functions from subvarieties of bounded strongly pseudoconvex domains], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1972, **36**, No. 3, 540–567 (in Russian).
3. N. A. Chasova, “Integral’nye predstavleniya, dvoystvennost’ i teplitsevy operatory v vesovykh anizotropnykh prostranstvakh golomorfnykh v polikrugu funktsiy so smeshannoy normoy” [Integral representations, duality and Toeplitz operators in weighted anisotropic spaces of holomorphic functions in a polydisk with mixed norm], *PhD Thesis*, RGPU im. A. I. Gertsena, Saint Petersburg, 2003 (in Russian).
4. R. F. Shamoyan, “Diagonal’noe otobrazhenie i voprosy predstavleniya v anizotropnykh prostranstvakh golomorfnykh v polidiske funktsiy” [Diagonal mapping and some problems representation in anisotropic spaces of holomorphic in polydisc functions], *Dokl. AN ArmSSR* [Rep. Acad. Sci. ArmSSR], 1987, **85**, No. 1, 7–11 (in Russian).
5. R. F. Shamoyan, “Diagonal’noe otobrazhenie i voprosy predstavleniya v anizotropnykh prostranstvakh golomorfnykh v polidiske funktsiy” [Diagonal mapping and problems of representation in anisotropic spaces of holomorphic functions in the polydisk], *Sib. Mat. Zh.* [Siberian Math. J.], 1990, **31**, No. 2, 197–215 (in Russian).
6. R. F. Shamoyan, “Kharakterizatsii tipa VMO, diagonal’noe otobrazhenie i ogranichennost’ integral’nykh operatorov v nekotorykh prostranstvakh analiticheskikh funktsiy” [BMO-type characterizations and the diagonal mapping and boundedness of integral operators in some spaces of analytic functions], *Vladikavkaz. Mat. Zh.* [Vladikavkaz Math. J.], 2007, **9**, No. 2, 40–53 (in Russian).
7. S. V. Shvedenko, “Klassy Khardi i svyazannye s nimi prostranstva analiticheskikh funktsiy v edinichnom krugu, polikrugu i share” [Hardy classes and related spaces of analytic functions in the unit disk, polydisk and unit ball], *Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Mat. Anal.* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Anal.], 1985, **23**, 3–124 (in Russian).
8. H. Alexander, “Extending bounded holomorphic function from certain subvarieties of a polydisk,” *Pacific J. Math.*, 1969, **3**, 485–490, DOI: [10.2140/pjm.1969.29.485](https://doi.org/10.2140/pjm.1969.29.485).
9. E. Amar, “Extention de fonctions holomorphes avec estimation,” *Ark. Mat.*, 1979, **17**, No. 1, 123–139, DOI: [10.1007/BF02385462](https://doi.org/10.1007/BF02385462).
10. E. Amar and C. Menini, “A counter example to corona problem for operators on Hardy H^2 space in the polydisk,” *Pacific J. Math.*, 2002, **206**, No. 2, 21–29, DOI: [10.2140/pjm.2002.206.257](https://doi.org/10.2140/pjm.2002.206.257).
11. M. Arsenovic and R. Shamoyan, “Trace theorems in harmonic function spaces on $(\mathbb{R}_+^{n+1})^m$, multipliers theorems and related problems,” *Kragujevac J. Math.*, 2011, **35**, No. 3, 411–430.
12. M. Arsenovic and R. Shamoyan, “On embeddings, traces and multipliers in harmonic function spaces,” *Kragujevac J. Math.*, 2013, **37**, No. 1, 45–64.
13. D. Bekolle, C. Berger, L. Coburn, and K. Zhu, “BMO in the Bergman metric on bounded symmetric domains,” *J. Funct. Anal.*, 1990, **93**, No. 2, 310–350, DOI: [10.1016/0022-1236\(90\)90131-4](https://doi.org/10.1016/0022-1236(90)90131-4).
14. D. Bekolle, A. Bonami, G. Garrigos, C. Nana, M. M. Peloso, F. Ricci, “Lecture notes on Bergman projectors in tube domains over cones: an analytic and geometric viewpoint,” *IMHOTEJ. Afr. Math. Pures Appl.*, 2004, **5**, No. 1, 1–75.
15. J. Cima and I. R. Graham, “On the extension of holomorphic function with growth condition across analytic subvarieties,” *Michigan Math. J.*, 1981, **28**, 241–256, DOI: [10.1307/mmj/1029002513](https://doi.org/10.1307/mmj/1029002513).
16. D. Clark, “Restrictions of H^p spaces in the polydisk,” *Amer. J. Math.*, 1988, **110**, No. 6, 1119–1152, DOI: [10.2307/2374688](https://doi.org/10.2307/2374688).
17. A. Cumenge, “Extention dans les classes de Hardy de fonctions holomorphes et estimations de type mesures de Carleson,” *Ann. Inst. Fourier*, 1983, **3**, No. 33, 59–87, DOI: [10.5802/aif.931](https://doi.org/10.5802/aif.931).
18. A. E. Djrbashian and F. A. Shamoyan, *Topics in the Theory of A_α^p Spaces*, Teubner, Leipzig, 1988.
19. P. Duren and A. Shields, “Restrictions H^p functions to the diagonal of the polydisc,” *Duke Math. J.*, 1975, **42**, No. 4, 567–579, DOI: [10.1215/S0012-7094-75-04262-3](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-75-04262-3).
20. J. Faraut and A. Koranyi, *Analysis on Symmetric Cones*, Clarendon Press, Oxford, 1994, DOI: [10.1093/oso/9780198534778.001.0001](https://doi.org/10.1093/oso/9780198534778.001.0001).
21. A. Frezier, “The dual space of H^p of polydisk for $0 < p < 1$,” *Duke Math. J.*, 1972, **39**, 369–379, DOI: [10.1215/S0012-7094-72-03944-0](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-72-03944-0).
22. G. Henkin and P. Polyakov, “Prolongement des fonctions holomorphes bornées d’une sousvariété du polydisque,” *C. R. Acad. Sci. Paris*, 1984, **298**, 221–224.
23. C. Horowitz and D. Oberlin, “Restriction of H^p functions to the diagonal of U^n ,” *Indiana Univ. Math. J.*, 1976, **24**, No. 7, 767–772, DOI: [10.1512/iumj.1975.24.24060](https://doi.org/10.1512/iumj.1975.24.24060).
24. M. Jevtic, M. Pavlovic, and R. Shamoyan, “A note on diagonal mapping theorem in spaces of analytic functions in the polydisk,” *Publ. Math. Debrecen.*, 2009, **74**, No. 1–2, 1–14, DOI: [10.5486/PMD.2009.4242](https://doi.org/10.5486/PMD.2009.4242).

25. V. Mazya, *Sobolev Spaces*, Springer, New York, 1985.
26. B. Moulin and J.-P. Rosay, “Sur la restriction des fonctions plurisousharmoniques a la diagonale du polydisque,” *Indiana Univ. Math. J.*, 1977, **26**, No. 5, 869–879, DOI: [10.1512/iumj.1977.26.26069](https://doi.org/10.1512/iumj.1977.26.26069).
27. J. Ortega and J. Fabrega, “Mixed-norm spaces and interpolation,” *Studia Math.*, 1994, **109**, No. 3, 234–254.
28. G. Ren and J. Shi, “The diagonal mapping in mixed norm spaces,” *Studia Math.*, 2004, **163**, No. 2, 103–117, DOI: [10.4064/sm163-2-1](https://doi.org/10.4064/sm163-2-1).
29. W. Rudin, *Function Theory in Polydisk*, Benjamin, New York, 1969.
30. B. F. Sehba, “Hankel operators on Bergman spaces of tube domains over symmetric cones,” *Integral Equ. Operator Theory*, 2008, **62**, No. 2, 233–245, DOI: [10.1007/s00020-008-1620-7](https://doi.org/10.1007/s00020-008-1620-7).
31. B. F. Sehba, “Bergman type operators in tube domains over symmetric cones,” *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 2009, **52**, No. 2, 529–544, DOI: [10.1017/S0013091506001593](https://doi.org/10.1017/S0013091506001593).
32. R. Shamoyan, “On some problems connected with diagonal map in some spaces of analytic functions,” *Math. Bohemica*, 2008, **133**, No. 4, 351–366, DOI: [10.21136/MB.2008.140625](https://doi.org/10.21136/MB.2008.140625).
33. R. Shamoyan, “Some remarks on the operator of diagonal map and on multifunctional analytic spaces,” *Vestn. ChelGU. Mat. Mekh. Inf.*, 2008, **10**, 19–24.
34. R. Shamoyan, “The diagonal mapping in BMOA-type spaces of analytic functions on the polydisk,” *Georgian Math. J.*, 2009, **16**, No. 3, 561–574, DOI: [10.1515/GMJ.2009.561](https://doi.org/10.1515/GMJ.2009.561).
35. R. F. Shamoyan, “On Bergman-type spaces in tubular domains over symmetric cones,” *Dagestan. Elektron. Mat. Izv.*, 2020, **14**, 22–29, DOI: [10.31029/demr.14.2](https://doi.org/10.31029/demr.14.2).
36. R. F. Shamoyan and S. M. Kurilenko, “On a new embedding theorem in analytic Bergman type spaces in bounded strictly pseudoconvex domains of n -dimensional complex space,” *Zhurn. SFU. Ser. Mat. i Fiz.*, 2014, **7**, No. 3, 383–388.
37. R. Shamoyan and S. Kurilenko, “On traces in analytic function spaces in polyballs,” *Palestine J. Math.*, 2015, **4**, No. 2, 291–293, DOI: [10.1155/2015/265245](https://doi.org/10.1155/2015/265245).
38. R. Shamoyan and S. Kurilenko, “On traces of analytic Herz and Bloch type spaces in bounded strongly pseudoconvex domains in $\mathbb{C}^n$,” *Probl. Anal. Issues Anal.*, 2015, **4**, No. 1, 73–94, DOI: [10.15393/j3.art.2015.2669](https://doi.org/10.15393/j3.art.2015.2669).
39. R. Shamoyan and S. Kurilenko, “Traces and distances in analytic Function spaces in C^n and Martinelly–Bochner integrals,” *Chebyshev. Sb.*, 2015, **16**, No. 2, 254–272, DOI: [10.1155/2015/265245](https://doi.org/10.1155/2015/265245).
40. R. Shamoyan and S. Kurilenko, “On a trace operator in Bergman type analytic spaces in Siegel domains of the second type,” *Probl. Fiz., Mat. i Tekhn.*, 2015, **2**, 83–90.
41. R. F. Shamoyan and S. M. Kurilenko, “On traces in Hardy type analytic spaces in bounded strictly pseudoconvex domains and in tubular domains over symmetric cones,” *Zhurn. SFU. Ser. Mat. i Fiz.*, 2016, **9**, No. 4, 510–517, DOI: [10.17516/1997-1397-2016-9-4-510-517](https://doi.org/10.17516/1997-1397-2016-9-4-510-517).
42. R. F. Shamoyan and N. M. Makhina, “On Bergman type projections in bounded strongly pseudoconvex domains and tubular domains over symmetric cones,” *Math. Montisnigri*, 2024, **60**, 50–57, DOI: [10.20948/mathmontis-2024-60-4](https://doi.org/10.20948/mathmontis-2024-60-4).
43. R. Shamoyan and N. Makhina, “Restrictions of analytic function spaces in the polydisk and related domains. Topical review,” *Math. Montisnigri*, 2025, **62**, 5–20. — <https://www.montis.pmf.ac.me/allissues/62/Mathematica-Montisnigri-62-1.pdf>.
44. R. Shamoyan and O. Mihic, “In search of traces of some holomorphic spaces in polyballs,” *Revista Notas Mat.*, 2008, **4**, No. 1, 1–23.
45. R. Shamoyan and O. Mihic, “Analytic classes on subframe and expanded disk and the R_s differential operator in polydisk,” *J. Inequal. Appl.*, 2009, **2009**, 353801, DOI: [10.1155/2009/353801](https://doi.org/10.1155/2009/353801).
46. R. Shamoyan and O. Mihic, “On traces of holomorphic functions on the unit polyball,” *Appl. Anal. Discrete Math.*, 2009, **3**, No. 2, 198–211, DOI: [10.2298/AADM0902198S](https://doi.org/10.2298/AADM0902198S).
47. R. Shamoyan and O. Mihic, “A note on traces of some holomorphic functions classes on polyballs,” *J. Funct. Spaces Appl.*, 2010, **8**, No. 3, 271–285, DOI: [10.1155/2010/784896](https://doi.org/10.1155/2010/784896).
48. R. Shamoyan and O. Mihic, “On some inequalities in holomorphic function theory related to diagonal mapping,” *Czechoslovak Math. J.*, 2010, **60**, No. 2, 351–370, DOI: [10.1007/s10587-010-0040-4](https://doi.org/10.1007/s10587-010-0040-4).
49. R. Shamoyan and O. Mihic, “On traces of Q_p type spaces and mixed norm analytic function spaces in polyballs,” *Siauliau Math. Semin.*, 2010, **5**, No. 13, 101–119.
50. R. Shamoyan and O. Mihic, “On traces of analytic Q_p type spaces, mixed norm spaces and harmonic Bergman classes on certain polydomains,” *Filomat*, 2011, **25**, No. 1, 1–19, DOI: [10.2298/FIL1101001S](https://doi.org/10.2298/FIL1101001S).
51. R. F. Shamoyan and O. R. Mihic, “Sharp theorems on traces in analytic spaces in bounded strictly pseudoconvex domains,” *Reports NAS RA*, 2014, **114**, No. 2, 91–96.
52. R. Shamoyan and O. Mihic, “On traces in some analytic spaces in bounded strictly pseudoconvex domains,” *J. Function Spaces*, 2015, **2015**, 265245, DOI: [10.1155/2015/265245](https://doi.org/10.1155/2015/265245).

53. R. Shamoyan and O. Mihic, “Traces of Bergman spaces in pseudoconvex domains,” *Reports NAS RA*, 2015, **8**, 56–62, DOI: [10.1155/2015/265245](https://doi.org/10.1155/2015/265245).
54. R. Shamoyan and O. Mihic, “On a sharp trace theorem in BMOA type spaces in pseudoconvex domains,” *C. R. Acad. Bulgare Sci.*, 2017, **70**, No. 2, 161–166.
55. R. Shamoyan and O. Mihic, “On some new sharp embedding theorems in strongly pseudoconvex and tubular domains involving the trace operator,” *Roma J.*, 2019, **15**, No. 1, 95–116.
56. R. Shamoyan and O. Mihic, “On traces of new BMOA type spaces in tubular domains over symmetric cones,” *Rep. Adyghe (Circassian) Int. Acad. Sci.*, 2022, **22**, No. 1, 32–38, DOI: [10.47928/1726-9946-2022-22-1-32-38](https://doi.org/10.47928/1726-9946-2022-22-1-32-38).
57. R. Shamoyan and E. Povprits, “Multifunctional analytic spaces in bounded strongly pseudoconvex domains and sharp embedding theorem,” *Kragujevac J. Math.*, 2013, **5**, 241–264.
58. R. Shamoyan and E. Povprits, “Sharp theorems on traces in Bergman type spaces in tubular domains over symmetric cones,” *Zhurn. SFU. Ser. Mat. i Fiz.*, 2013, **6**, No. 4, 527–538.
59. R. Shamoyan and E. Povpritz, “Trace theorems in unbounded Siegel domains,” *Uzbek. Math. J.*, 2015, No. 1, 149–157.
60. R. F. Shamoyan and A. N. Shipka, “On some new projection theorems and sharp estimates in Herz type spaces in bounded pseudoconvex domains,” *Vestn. KRAUNTs. Fiz.-Mat. Nauki*, 2018, **1**, No. 21, 64–77, DOI: [10.18454/2079-6641-2018-21-1-64-77](https://doi.org/10.18454/2079-6641-2018-21-1-64-77).
61. R. F. Shamoyan and E. B. Tomashevskaya, “On new decomposition theorems in some analytic function spaces in bounded pseudoconvex domains,” *Zhurn. SFU. Ser. Mat. i Fiz.*, 2020, **13**, No. 4, 503–514, DOI: [10.17516/1997-1397-2020-13-4-503-514](https://doi.org/10.17516/1997-1397-2020-13-4-503-514).
62. R. F. Shamoyan and E. B. Tomashevskaya, “On some new decomposition theorems in multifunctional Herz and Bergman analytic function spaces in bounded pseudoconvex domains,” *Vestn. KRAUNTs. Fiz.-Mat. Nauki*, 2020, **30**, No. 1, 42–58, DOI: [10.26117/2079-6641-2020-30-1-42-58](https://doi.org/10.26117/2079-6641-2020-30-1-42-58).
63. R. F. Shamoyan and E. B. Tomashevskaya, “On new sharp theorems for multifunctional BMOA type spaces in bounded pseudoconvex domains,” *Vestn. KRAUNTs. Fiz.-Mat. Nauki*, 2020, **32**, No. 3, 102–113, DOI: [10.26117/2079-6641-2020-32-3-102-113](https://doi.org/10.26117/2079-6641-2020-32-3-102-113).
64. R. F. Shamoyan and E. B. Tomashevskaya, “On some new sharp embedding theorems for multifunctional Herz-type and Bergman-type spaces in tubular domains over symmetric cones,” *Rep. Adyghe (Circassian) Int. Acad. Sci.*, 2021, **21**, No. 3, 21–33, DOI: [10.47928/1726-9946-2021-21-3-21-33](https://doi.org/10.47928/1726-9946-2021-21-3-21-33).
65. R. F. Shamoyan and E. B. Tomashevskaya, “On new sharp embedding theorems for multifunctional Herz-type and Bergman-type spaces in tubular domains over symmetric cones,” *Vestn. KRAUNTs. Fiz.-Mat. Nauki*, 2021, **34**, No. 1, 63–79, DOI: [10.26117/2079-6641-2021-34-1-63-79](https://doi.org/10.26117/2079-6641-2021-34-1-63-79).
66. R. Shamoyan and E. Tomashevskaya, “On Bergman type projections in bounded strongly pseudoconvex domains,” *Rep. Adyghe (Circassian) Int. Acad. Sci.*, 2023, **23**, No. 2, 18–26, DOI: [10.47928/1726-9946-2023-23-2-18-26](https://doi.org/10.47928/1726-9946-2023-23-2-18-26).
67. R. Shamoyan and E. Tomashevskaya, “Some generalizations of the Bergman projection theorem in tubular and bounded pseudoconvex domains,” *Siberian Adv. Math.*, 2024, **34**, 356–365, DOI: [10.1134/S1055134424040114](https://doi.org/10.1134/S1055134424040114).
68. R. Shamoyan and E. Tomashevskaya, “On Bergman type projections in new analytic spaces in tubular domains over symmetric cones,” *Mat. Zametki SVFU*, 2024, **31**, No. 3, 73–81, DOI: [10.25587/2411-9326-2024-3-73-81](https://doi.org/10.25587/2411-9326-2024-3-73-81).
69. R. Shamoyan and O. Zaytseva, “On sharp traces of some new analytic Herz-type spaces in Siegel domains in $\mathbb{C}^n$,” *Probl. Fiz., Mat. i Tekhn.*, 2015, **4**, 87–95.
70. J. Shapiro, “Mackey topologies, reproducing kernels and diagonal maps on the Hardy and Bergman spaces,” *Duke Math. J.*, 1976, **43**, 187–202, DOI: [10.1215/S0012-7094-76-04316-7](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-76-04316-7).
71. H. Triebel, *Theory of Function Spaces II*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1992, DOI: [10.1007/978-3-0346-0419-2](https://doi.org/10.1007/978-3-0346-0419-2).
72. J. Xiao, *Holomorphic Q^p classes*, Springer, Berlin, 2001, DOI: [10.1007/b87877](https://doi.org/10.1007/b87877).
73. S. Zarantonello, “The extensions of H^p functions from certain subvarieties of a polydisk,” *Proc. Amer. Math. Soc.*, 1980, **78**, No. 4, 519–524, DOI: [10.1090/S0002-9939-1980-0556624-1](https://doi.org/10.1090/S0002-9939-1980-0556624-1).
74. K. Zhu, *Spaces of Holomorphic Functions in the Unit Ball*, Springer, New York, 2005.

R. F. Shamoyan

Bryansk State Academician I. G. Petrovski University, Bryansk, Russia

E-mail: rsham@mail.com, eLIBRARY AuthorID: [118067](https://elibrary.ru/118067), Scopus: [6506006473](https://orcid.org/0000-0002-8415-9822),

ORCID: [0000-0002-8415-9822](https://orcid.org/0000-0002-8415-9822)

N. M. Makhina

Bryansk State Academician I. G. Petrovski University, Bryansk, Russia

E-mail: makhina32@gmail.com, eLIBRARY SPIN-code: 1045-4238, eLIBRARY AuthorID: [165091](#),
Scopus: [57192714258](#), ORCID: [0000-0003-2270-1775](#)