

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ



СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ
НАПРАВЛЕНИЯ

Том 72, № 2, 2026

DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-2

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Научный журнал

Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.

Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

Главный редактор

А. Л. Скубачевский,
д.ф.-м.н., профессор,
Российский университет
дружбы народов, Москва,
Россия

E-mail: skubachevskii-al@rudn.ru

Зам. главного редактора

А. Ю. Савин,
д.ф.-м.н., профессор,
Российский университет
дружбы народов, Москва,
Россия

E-mail: savin-ayu@rudn.ru

Ответственный секретарь

Е. М. Варфоломеев,
к.ф.-м.н.,
Российский университет
дружбы народов, Москва,
Россия

E-mail: varfolomeev-em@rudn.ru

Члены редакционной коллегии

А. А. Азрачев, д.ф.-м.н., профессор, Международная школа передовых исследований (SISSA), Триест, Италия; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

П. С. Красильников, д.ф.-м.н., профессор, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

А. Б. Муравник, д.ф.-м.н., Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

А. В. Овчинников, к.ф.-м.н., доцент, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва, Россия

В. Л. Попов, д.ф.-м.н., профессор, член-корр. РАН, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

А. В. Сарычев, д.ф.-м.н., профессор, Флорентийский университет, Флоренция, Италия

Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

4 выпуска в год

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Включен в Единый государственный перечень научных изданий («Белый список»)

Индексируется в *РИНЦ*, *DOAJ*, *MathSciNet*, *Zentralblatt Math*.

Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences (New York)*.

Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты.

Правила оформления статей, архив публикаций в открытом доступе и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала: <http://journals.rudn.ru/cmfd>, <http://www.mathnet.ru/cmfd>.

Редактор: Е. М. Варфоломеев

Компьютерная верстка: Е. М. Варфоломеев

Адрес редакции:

115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Подписано в печать 15.06.2026. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.

Усл. печ. л. 24,65. Тираж 110 экз. Заказ 566.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» (РУДН)

117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН

115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-08-61; e-mail: publishing@rudn.ru

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba



CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 72, No. 2, 2026

DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-2

[http: //journals.rudn.ru/cmfd](http://journals.rudn.ru/cmfd)

Founded in 2003

Founder: Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

EDITOR-IN-CHIEF

Alexander Skubachevskii,

RUDN University

Moscow, Russia

E-mail: skubachevskii-al@rudn.ru

DEPUTY EDITOR

Anton Savin,

RUDN University

Moscow, Russia

E-mail: savin-ayu@rudn.ru

EXECUTIVE SECRETARY

Evgeniy Varfolomeev,

RUDN University

Moscow, Russia

E-mail: varfolomeev-em@rudn.ru

EDITORIAL BOARD

Andrei Agrachev, International School for Advanced Studies (SISSA), Trieste, Italy; Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Pavel Krasil'nikov, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

Andrey Muravnik, RUDN University, Moscow, Russia

Alexey Ovchinnikov, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; Russian Institute for Scientific and Technical Information of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Vladimir Popov, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Andrei Sarychev, University of Florence, Florence, Italy

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Published by the Peoples' Friendship University of Russia
named after Patrice Lumumba, Moscow, Russian Federation

ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

4 issues per year

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Indexed by *Russian Index of Science Citation*, *DOAJ*, *MathSciNet*, *Zentralblatt Math*.

Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences* (New York).

Aims and Scope

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results.

Guidelines for authors, free accessible archive of issues, and other information can be found at the journal's website: <http://journals.rudn.ru/cmfd>, <http://www.mathnet.ru/eng/cmfd>.

Editor: *E. M. Varfolomeev*

Computer design: *E. M. Varfolomeev*

Address of the Editorial Office:

3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia

Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Print run 110 copies.

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba (RUDN University), Moscow, Russia
6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia

Printed at RUDN Publishing House:

3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia

Tel. +7 495 955-08-61; e-mail: publishing@rudn.ru

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Байраш Р. А., Скубачевский А. Л.</i> Суммируемость по Абелю системы корневых функций дифференциального оператора четного порядка с интегральными условиями	213
<i>Барышева И. В., Трусова Н. И., Фролова Е. В.</i> Частно-интегральные операторы со слабой особенностью	227
<i>Богатов Е. М., Демидова Е. Г.</i> Коалиционные теоретико-игровые модели структуры капитала и их параметрический анализ	237
<i>Егорова А. А., Шамаев А. С.</i> Существование волнового фронта в модели динамики слабовязкой сжимаемой жидкости	250
<i>Закора Д. А.</i> Асимптотическое поведение решений неполного интегро-дифференциального уравнения второго порядка	258
<i>Зеленчук П. А.</i> Асимптотика стационарных распределений в системах диффузии—реакции для двух взаимодействующих биологических видов	282
<i>Кулаев Р. Ч., Елоева В. А.</i> Осцилляционные свойства спектра оператора четвертого порядка на графе-кресте	297
<i>Лангаршоев М. Р.</i> О наилучшем среднеквадратическом приближении аналитических функций в пространстве Бергмана $\mathcal{B}_2$	309
<i>Пастухов М. С., Рыжлов В. С.</i> Решение начально-граничной задачи для волнового уравнения со смешанной производной в уравнении в случае краевых условий Дирихле—Неймана	323
<i>Петров В. Э., Петров Ф. В.</i> Несколько замечаний о зависимости мер Фавара от начальных значений	360
<i>Чжан Ю., Темнов А. Н.</i> Спектральные свойства оператора внутренних волн в неклассических задачах	368
<i>Штраус В. А.</i> Спектральное разложение и модельное представление унитарных операторов в пространствах с индефинитной метрикой	388

CONTENTS

<i>Bayrash R. A., Skubachevskii A. L.</i> Abel summability of a system of root functions of an even-order differential operator with integral conditions	213
<i>Barysheva I. V., Trusova N. I., Frolova E. V.</i> Partial integral operators with weak singularity	227
<i>Bogatov E. M., Demidova E. G.</i> Coalition game-theoretic models of capital structure and their parametric analysis	237
<i>Egorova A. A., Shamaev A. S.</i> Existence of a wave front in a model of the dynamics of a low-viscosity compressible fluid	250
<i>Zakora D. A.</i> Asymptotic behavior of solutions of an incomplete second-order integro-differential equation	258
<i>Zelenchuk P. A.</i> Asymptotics of stationary distributions in diffusion–reaction systems for two interacting biological species	282
<i>Kulaev R. Ch., Eloeva V. A.</i> Oscillatory properties of the spectrum of a fourth-order operator on a cross graph	297
<i>Langarshoev M. R.</i> On the best mean-square approximation of analytic functions in the Bergman space $\mathcal{B}_2$	309
<i>Pastukhov M. S., Rykhlov V. S.</i> Solution of the initial-boundary value problem for the wave equation with a mixed derivative in the equation in the case of Dirichlet–Neumann boundary conditions	323
<i>Petrov V. E., Petrov F. V.</i> Some remarks on the dependence of Favard measures on initial values	360
<i>Zhang Y., Temnov A. N.</i> Spectral properties of the internal wave operator in nonclassical problems	368
<i>Straus V. A.</i> Spectral decomposition and model representation of unitary operators in spaces with indefinite metric	388

СУММИРУЕМОСТЬ ПО АБЕЛЮ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ЧЕТНОГО ПОРЯДКА С ИНТЕГРАЛЬНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Р. А. БАЙРАШ^{1,2}, А. Л. СКУБАЧЕВСКИЙ^{1,2}

¹Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

²Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

Аннотация. Рассматривается обыкновенный дифференциальный оператор $2m$ -го порядка с чисто интегральными условиями. В этом случае область определения соответствующего оператора не является плотной в $L_2(0, 1)$. При некоторых условиях на весовые функции, входящие в интегральные условия, доказана суммируемость по Абелю системы корневых функций соответствующего дифференциального оператора.

Ключевые слова: спектральные свойства, нелокальная задача, интегральные условия, суммируемость по Абелю.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации в рамках государственного задания (проект FSSF-2026-0013).

Вклад авторов. Скубачевский А. Л. — постановка задачи, формулировка результата о базисности по Абелю, идея использовать в доказательстве априорную оценку решений, зависящую от спектрального параметра. Байраш Р. А. — доказательство основного результата статьи (теорема 3.1 о базисности по Абелю), формулировка и доказательство вспомогательных утверждений (леммы 2.1–2.3, 3.1–3.2, следствие 3.1).

Для цитирования: Байраш Р. А., Скубачевский А. Л. Суммируемость по Абелю системы корневых функций дифференциального оператора четного порядка с интегральными условиями // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 2. С. 213–226. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-213-226](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-213-226) EDN: [AR SXNB](https://www.edn.ru/AR SXNB)

ВВЕДЕНИЕ

История изучения обыкновенных дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями насчитывает более ста лет, см. [15, 21, 26, 27, 29].

Вопросы спектральной теории обыкновенных дифференциальных операторов с нелокальными условиями рассматривались многими авторами в случае, когда в нелокальных условиях присутствовали значения неизвестной функции и её производных на концах интервала и в его внутренних точках, а также интегралы Лебега от неизвестной функции с некоторыми весами. В этом случае область определения соответствующего оператора была плотной в $L_2(0, 1)$. Авторами рассматривались вопросы об асимптотике собственных значений [12], полноте и базисности системы корневых функций [4–6, 16, 19] и др.

В работе [16] было доказано, что собственные и присоединенные функции дифференциального оператора n -го порядка с регулярными краевыми условиями образуют базис Рисса со скобками в пространстве $L_2(0, 1)$. Отметим также работы [5, 19], в которых изучен спектр оператора, порожденного в пространстве $L_2(0, 1)$ дифференциальным выражением второго порядка и интегральными условиями, а также исследованы условия полноты системы корневых функций рассматриваемого оператора.

В случае многоточечных краевых задач для обыкновенных дифференциальных уравнений и систем возникают более тонкие вопросы о полноте и базисности Рисса собственных и присоединенных функций, см. [22–25, 28] и имеющуюся там библиографию. Постановка задачи, когда нелокальные условия не содержат значений неизвестной функции и ее производных на концах интервала, является принципиально более сложной.

Отметим, что обыкновенные дифференциальные операторы с интегральными условиями обладают целым рядом принципиально новых свойств по сравнению с классическими дифференциальными операторами. Например, их спектр может занимать всю комплексную плоскость, оценка на резольвенту имеет меньший порядок убывания при росте спектрального параметра по сравнению с классическими оценками и т. д.

В работах [2, 3, 13, 14] получены априорные оценки решений и исследованы спектральные свойства обыкновенного дифференциального оператора второго порядка с чисто интегральными условиями. Обобщение этих результатов на случай дифференциального оператора четного порядка с переменными коэффициентами было получено в работах [1, 18, 20].

Вопрос суммируемости по Абелю системы корневых функций дифференциального оператора второго порядка с интегральными условиями исследован в [9], базисность Рисса системы собственных и присоединенных функций доказана в [11].

В данной работе рассматривается обыкновенный дифференциальный оператор четного порядка со спектральным параметром. Вместо классических краевых условий, возмущенных интегралами от неизвестной функции и значениями неизвестной функции во внутренних точках, задаются чисто интегральные условия. Доказана суммируемость по Абелю системы корневых функций соответствующего оператора.

Доказательство теоремы о суммируемости по Абелю системы корневых функций основано на использовании априорной оценки, полученной в работе [18], а также на методе, изложенном в статье В. Б. Лидского [8] и модифицированном в работах В. В. Подъяпольского [9, 10].

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим уравнение

$$Au + \lambda^{2m}u = (-1)^m a_0(t)u^{(2m)}(t) + \sum_{j=1}^{2m} a_j(t)u^{(2m-j)}(t) + \lambda^{2m}u = f_0(t) \quad (t \in (0, 1)) \quad (1.1)$$

с интегральными условиями

$$B_{\rho k}u = \int_0^1 \sum_{j=0}^k h_{\rho k j}(t)u^{(j)}(t)dt = f_{\rho k} \quad (\rho = 1, 2, k = 0, \dots, m-1). \quad (1.2)$$

Здесь a_i ($i = 0, \dots, 2m$) — вещественнозначные функции такие, что $a_0(t) \geq k_0 > 0$ ($0 \leq t \leq 1$) и $a_1, \dots, a_{2m} \in C[0, 1]$, $f_0 \in L_2(0, 1)$ — комплекснозначная функция, $f_{\rho k} \in \mathbb{C}$ ($\rho = 1, 2, k = 0, \dots, m-1$) — константы, а $h_{\rho k j}$ ($\rho = 1, 2, j = 0, \dots, k, k = 0, \dots, m-1$) — линейно независимые вещественнозначные функции.

Введем обозначения, которые будут в дальнейшем использоваться.

$C^\alpha[a, b]$ — пространство Гельдера непрерывных функций $u(t)$, $t \in [a, b]$, таких, что

$$|u(t_1) - u(t_2)| \leq c|t_1 - t_2|^\alpha \quad (t_1, t_2 \in [a, b]),$$

где константы $c > 0$ и $0 < \alpha \leq 1$ не зависят от t_1 и t_2 .

$W_2^k(0, 1)$, $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$, — пространство Соболева функций из $L_2(0, 1)$, имеющих все обобщенные производные из $L_2(0, 1)$ до порядка k включительно.

$W_{\infty}^{2m-1}(a, b)$ — пространство абсолютно непрерывных функций $v(t), t \in [a, b]$, таких, что все производные вплоть до $(2m - 1)$ -го порядка принадлежат $L_{\infty}(a, b)$, т. е. $v^{(k)} \in L_{\infty}(a, b)$ ($k = 1, \dots, 2m - 1$).

$C_{\beta}^{\alpha}[0, 1] = \{v \in L_2(0, 1) : v \in C^{\alpha}[0, \beta], v \in C^{\alpha}[1 - \beta, 1]\}$, где $0 < \beta < 1/2$.

Будем предполагать, что

$$a_0 \in W_{\infty}^{2m-1}(0, 1), \quad h_{\rho kj} \in C_{\beta}^{\alpha}[0, 1] \quad (\alpha \in (1/2, 1]).$$

Обозначим $\mathcal{W}[0, 1] = L_2(0, 1) \times \mathbb{C}^{2m}$. В пространстве Соболева $W_2^{2m}(0, 1)$ введем эквивалентную норму, зависящую от спектрального параметра:

$$|||u|||_{W_2^{2m}(0,1)} = \left(\|u\|_{W_2^{2m}(0,1)}^2 + |\lambda|^{4m} \|u\|_{L_2(0,1)}^2 \right)^{1/2}.$$

Эквивалентная норма в пространстве $\mathcal{W}[0, 1]$ зависит от порядка производных в условиях (1.2):

$$|||f|||_{\mathcal{W}[0,1]} = \left(\|f_0\|_{L_2(0,1)}^2 + \sum_{k=0}^{m-1} |\lambda|^{4m-2k} (|f_{1k}|^2 + |f_{2k}|^2) \right)^{1/2},$$

где $f = (f_0, f_{10}, f_{20}, \dots, f_{1,m-1}, f_{2,m-1})$, $|\lambda| \geq 1$.

Введем определители, зависящие от значений весовых функций при старших производных в интегральных условиях (1.2) в точках 0 и 1:

$$\Delta_h^k = \begin{vmatrix} h_{1kk}(0) & h_{1kk}(1) \\ h_{2kk}(0) & h_{2kk}(1) \end{vmatrix} \quad (k = 0, \dots, m-1).$$

Пусть

$$\omega_{\theta,q} = \{\gamma \in \mathbb{C} : |\arg \gamma| \leq \theta, |\gamma| \geq q\},$$

где $\theta > 0$. Рассмотрим линейный ограниченный оператор

$$L(\lambda) : W_2^{2m}(0, 1) \rightarrow \mathcal{W}[0, 1]$$

вида

$$L(\lambda)u = (Au + \lambda^{2m}u, B_{10}u, B_{20}u, \dots, B_{1,m-1}u, B_{2,m-1}u).$$

Введем линейный неограниченный оператор

$$\mathcal{A}_B : L_2(0, 1) \supset \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) \rightarrow L_2(0, 1)$$

с областью определения

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_B) = W_{2,B}^{2m}(0, 1) = \{u \in W_2^{2m}(0, 1) : B_{\rho k}u = 0, \quad \rho = 1, 2, \quad k = 0, \dots, m-1\}$$

по формуле $\mathcal{A}_B u = Au$ ($u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_B)$).

При указанных выше условиях на весовые функции $h_{\rho kj}$ и коэффициент a_0 при $2m$ -ой производной в уравнении (1.1) в работе [18] получена следующая априорная оценка.

Теорема 1.1. Пусть $\Delta_h^k \neq 0$ ($k = 0, \dots, m-1$). Тогда для любого $0 < \theta < \pi/2m$ существует $q > 1$ такое, что для $\lambda \in \omega_{\theta,q}$ любая функция $u \in W_2^{2m}(0, 1)$ удовлетворяет неравенству

$$|||u|||_{W_2^{2m}(0,1)} \leq C |\lambda|^{1/2} |||L(\lambda)u|||_{\mathcal{W}[0,1]}, \quad (1.3)$$

где $C > 0$ не зависит от λ, u .

Следствие 1.1. Пусть $\Delta_h^k \neq 0$ ($k = 0, \dots, m-1$). Тогда справедливы следующие утверждения:

1. Операторы $L(\lambda) : W_2^{2m}(0, 1) \rightarrow \mathcal{W}[0, 1]$ и $\mathcal{A}_B : L_2(0, 1) \supset \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) \rightarrow L_2(0, 1)$ фредгольмовы и $\text{ind } L(\lambda) = \text{ind } \mathcal{A}_B = 0$ для всех $\lambda \in \mathbb{C}$.
2. Спектр $\sigma(\mathcal{A}_B)$ дискретный.
3. Для $\mu \notin \sigma(\mathcal{A}_B)$ резольвента $R(\mu, \mathcal{A}_B) = (\mu I - \mathcal{A}_B)^{-1} : L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$ — компактный оператор.
4. Для любого $0 < \delta < \pi$ все точки спектра $\sigma(\mathcal{A}_B)$, кроме, быть может, конечного их числа, принадлежат углу комплексной плоскости $|\arg \mu| < \delta$.

2. ОЦЕНКА НОРМЫ РЕЗОЛЬВЕНТЫ

Обозначим

$$\Omega_{\varepsilon, r} = \{\gamma \in \mathbb{C} : |\arg \gamma| \geq \varepsilon, |\gamma| \geq r\},$$

где $0 < \varepsilon < \pi, r > 1$.

Из теоремы 1.1 и следствия 1.1 следует, что резольвента оператора $\mathcal{A}_B$

$$R(\mu, \mathcal{A}_B) = (\mu I - \mathcal{A}_B)^{-1}$$

может быть оценена сверху на любом луче $\arg \mu \neq 0$.

Лемма 2.1. Пусть $\Delta_h^k \neq 0$ ($k = 0, \dots, m-1$). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $r > 1$ такое, что для $\mu \in \Omega_{\varepsilon, r}$ справедлива оценка

$$\|R(\mu, \mathcal{A}_B)\| = O(|\mu|^{-1+1/4m}), \quad (2.1)$$

где $\|\cdot\|$ — норма оператора, действующего из $L_2(0, 1)$ в $L_2(0, 1)$.

Доказательство. Из априорной оценки (1.3) следует, что если $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_B)$, $\lambda \in \omega_{\theta, q}$ (θ и q определены в теореме 1.1), то

$$|\lambda|^{2m} \|u\|_{L_2(0,1)} \leq \|u\|_{W_2^{2m}(0,1)} \leq C|\lambda|^{1/2} \|Au + \lambda^{2m}u\|_{L_2(0,1)},$$

то есть

$$\|u\|_{L_2(0,1)} \leq C|\lambda|^{1/2-2m} \|Au + \lambda^{2m}u\|_{L_2(0,1)}. \quad (2.2)$$

В силу следствия 1.1 оператор $L(\lambda)$ имеет ограниченный обратный $L^{-1}(\lambda) : \mathcal{W}[0, 1] \rightarrow W_2^{2m}(0, 1)$ для $\lambda \in \omega_{\theta, q}$. Поэтому оператор $\mu I - \mathcal{A}_B : L_2(0, 1) \supset \mathcal{D}(\mathcal{A}_B) \rightarrow L_2(0, 1)$ имеет ограниченный обратный $(\mu I - \mathcal{A}_B)^{-1} : L_2(0, 1) \rightarrow W_2^{2m}(0, 1)$ для $\mu \in \Omega_{\varepsilon, r}$, где $\varepsilon = \pi - 2m\theta$, $r = q^{2m}$ и $\mu = -\lambda^{2m}$. Тогда неравенство (2.2) примет вид

$$\|u\|_{L_2(0,1)} \leq C|\mu|^{-1+1/4m} \|(A - \mu I)u\|_{L_2(0,1)}.$$

Положим $u = R(\mu, \mathcal{A}_B)f_0$, $f_0 \in L_2(0, 1)$. Тогда

$$\|R(\mu, \mathcal{A}_B)f_0\|_{L_2(0,1)} \leq C|\mu|^{-1+1/4m} \|f_0\|_{L_2(0,1)}.$$

Отсюда следует утверждение леммы. $\square$

Пусть выполнено условие леммы 2.1. Обозначим через μ_k собственные значения оператора $\mathcal{A}_B$. Пусть $z_0 \in \rho(\mathcal{A}_B)$ — некоторая фиксированная точка в резольвентном множестве оператора $\mathcal{A}_B$. Введем вполне непрерывный оператор

$$K = (\mathcal{A}_B - z_0 I)^{-1}$$

с собственными значениями $\nu_k = 1/(\mu_k - z_0)$. Очевидно, что

$$K^{-1} = (\mathcal{A}_B - z_0 I) = (\mu - z_0)I - (\mu I - \mathcal{A}_B) = (\mu - z_0)I - R(\mu, \mathcal{A}_B)^{-1}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} R\left(\frac{1}{\mu - z_0}, K\right) &= \left(\frac{1}{\mu - z_0}I - (\mathcal{A}_B - z_0 I)^{-1}\right)^{-1} = \left(\frac{I - (\mu - z_0)(\mathcal{A}_B - z_0 I)^{-1}}{\mu - z_0}\right)^{-1} = \\ &= \left(\frac{(\mathcal{A}_B - z_0 I)^{-1}((\mathcal{A}_B - z_0 I) - (\mu - z_0)I)}{\mu - z_0}\right)^{-1} = \left(\frac{K(\mathcal{A}_B - \mu I)}{\mu - z_0}\right)^{-1} = \\ &= -(\mu - z_0)R(\mu, \mathcal{A}_B)K^{-1} = (\mu - z_0)I - (\mu - z_0)^2 R(\mu, \mathcal{A}_B). \end{aligned}$$

Таким образом, резольвенты операторов $\mathcal{A}_B$ и K связаны следующим соотношением:

$$R\left(\frac{1}{\mu - z_0}, K\right) = (\mu - z_0)I - (\mu - z_0)^2 R(\mu, \mathcal{A}_B), \quad \mu \in \rho(\mathcal{A}_B) \setminus \{z_0\}. \quad (2.3)$$

Функция $\varphi \in L_2(0, 1)$ ($\varphi \neq 0$) — корневая функция оператора K , соответствующая собственному значению ν_k , если $(K - \nu_k I)^j \varphi = 0$ для некоторого $j \geq 1$. Как известно, размерности корневых подпространств конечны. Обозначим через $sp(K)$ замыкание в $L_2(0, 1)$ линейного пространства, образованного системой корневых функций оператора K .

Аналогичным образом определяется корневая функция $\varphi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_B)$ ($\varphi \neq 0$) оператора $\mathcal{A}_B$, соответствующая собственному значению μ_k .

Можно показать, что функция φ является корневой функцией оператора $\mathcal{A}_B$, соответствующей собственному значению μ_k тогда и только тогда, когда φ является корневой функцией оператора K , соответствующей собственному значению $\nu_k = 1/(\mu_k - z_0)$. То есть операторы $\mathcal{A}_B$ и K имеют одинаковые корневые функции. Поэтому в дальнейшем будем исследовать оператор K .

Лемма 2.2. Пусть $\Delta_h^k \neq 0$ ($k = 0, \dots, m-1$). Тогда для любого $\varkappa > 0$ существует $\delta_0 = \delta_0(\varkappa) > 0$ такое, что

$$\|C(\mu)R(\mu, K)\| \leq e^{|\mu|^{-1/2m-\varkappa}} \quad (|\mu| \leq \delta_0), \quad (2.4)$$

где $C(\mu)$ — целая функция по переменной $1/\mu$ порядка не выше $1/2m$.

Доказательство. В силу следствия 1.1, для любого $0 < \varepsilon < \pi$ существует $r > 1$ такое, что для $\mu \in \Omega_{\varepsilon, r}$ получим $R(\mu, \mathcal{A}_B)f_0 \in W_2^{2m}(0, 1)$ при $f_0 \in L_2(0, 1)$. Тогда, применяя тождество Гильберта, получим

$$\begin{aligned} K &= (\mathcal{A}_B - z_0 I)^{-1} = -R(z_0, \mathcal{A}_B) = -R(z_0, \mathcal{A}_B) + R(\mu, \mathcal{A}_B) - R(\mu, \mathcal{A}_B) = \\ &= (\mu - z_0)R(\mu, \mathcal{A}_B)R(z_0, \mathcal{A}_B) - R(\mu, \mathcal{A}_B) = -R(\mu, \mathcal{A}_B)(I - (\mu - z_0)R(z_0, \mathcal{A}_B)). \end{aligned}$$

Следовательно, оператор $K : L_2(0, 1) \rightarrow W_2^{2m}(0, 1)$ ограниченный. Поэтому в силу компактности вложения $W_2^{2m}(0, 1)$ в $L_2(0, 1)$ оператор $K : L_2(0, 1) \rightarrow L_2(0, 1)$ компактный. Применяя теорему A1.1 из [17], получим утверждение леммы. $\square$

Без ограничения общности предположим, что $\mu = 0$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}_B$. Поэтому возьмем $z_0 = 0$. Из (2.1) и (2.3) можно получить оценку нормы оператора $(I - \mu K)^{-1}$ на некоторых лучах.

Лемма 2.3. Пусть $\Delta_h^k \neq 0$ ($k = 0, \dots, m-1$). Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует $r > 1$ такое, что для $\mu \in \Omega_{\varepsilon, r}$ выполнена оценка

$$\|(I - \mu K)^{-1}\| = O(|\mu|^{1/4m}). \quad (2.5)$$

Доказательство. Из представления (2.3) при $z_0 = 0$ следует, что

$$\left(\frac{1}{\mu}I - K\right)^{-1} = \mu I - \mu^2 R(\mu, \mathcal{A}_B), \quad \mu \neq \mu_k,$$

откуда

$$(I - \mu K)^{-1} = I - \mu R(\mu, \mathcal{A}_B).$$

Тогда, применяя оценку (2.1) к последнему равенству, получим утверждение леммы. $\square$

3. СУММИРУЕМОСТЬ ПО АБЕЛЮ СИСТЕМЫ КОРНЕВЫХ ФУНКЦИЙ

В силу теоремы 1.1 и п. 4 следствия 1.1 имеем

$$\sigma(\mathcal{A}_B) \subset \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg \mu| < \varepsilon\} \cup \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| < r\},$$

где $\varepsilon = \pi - 2m\theta$, $r = q^{2m}$ ($0 < \theta < \pi/2m$, $q > 1$). Сдвинув при необходимости спектральный параметр, можно получить, что спектр оператора $\mathcal{A}_B$ лежит в угле $\{\mu \in \mathbb{C} : |\arg \mu| < \varepsilon\}$ и вне круга $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| < r\}$. Поэтому далее, без ограничения общности, будем считать, что спектр оператора $\mathcal{A}_B$ лежит в угле $\tilde{\omega}_\varepsilon = \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg \mu| < \varepsilon\}$, где $0 < \varepsilon < \pi$.

Рассмотрим многозначную функцию μ^α , где $\mu \in \mathbb{C}$. Очевидно, что при нецелых $\alpha > 0$ точка $\mu = 0$ — точка ветвления, и две различные ветви этой аналитической функции отличаются на множитель $e^{i2\pi k\alpha}$, где $k \in \mathbb{Z}$. Пусть $\alpha > 0$, причем $\alpha\varepsilon < \pi/2$. Положим

$$\mu^\alpha := |\mu|^\alpha e^{i\alpha \arg \mu}, \quad \mu \in \tilde{\omega}_\varepsilon,$$

так, что $|e^{-\mu^\alpha t}| \rightarrow 0$ при $t = \text{const} > 0$, $\mu \in \tilde{\omega}_\varepsilon$, $|\mu| \rightarrow \infty$. Очевидно, что при данном выборе α мы имеем $|\arg \mu^\alpha| < \pi/2$.

Построим систему векторов $\{e_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$) из жордановых базисов в корневых подпространствах оператора $\mathcal{A}_B$. В [8, гл. II, §4] показано, что найдется система векторов $\{g_j\}$ ($j = 1, 2, \dots$), биортогональная к системе $\{e_i\}$.

Для некоторого заданного $\alpha > 0$ введем полиномы относительно параметра t :

$$P_m^\alpha(\xi^{-1}, t) = \frac{e^{t\xi^{-\alpha}}}{m!} \frac{d^m}{d\xi^m} e^{-t\xi^{-\alpha}} \quad (m = 0, 1, \dots). \quad (3.1)$$

Пусть $f \in L_2(0, 1)$. Рассмотрим ряд

$$\sum_{s=1}^{\infty} c_s(t) e_s, \quad (3.2)$$

коэффициенты которого вычисляются следующим образом. Если e_q — собственный вектор оператора $\mathcal{A}_B$, не имеющий присоединенных векторов, то

$$c_q(t) = e^{-\mu_q^\alpha t} c_q, \quad (3.3)$$

где μ_q — собственное значение, соответствующее собственному вектору e_q , $\mu_q^\alpha = |\mu_q|^\alpha e^{i\alpha \arg \mu_q}$, $\alpha > 0$, c_q — коэффициент формального разложения вектора f по системе $\{e_i\}$ ($i = 1, 2, \dots$):

$$c_q = \frac{(f, g_q)}{(e_q, g_q)}.$$

Если векторы $e_q, e_{q+1}, \dots, e_{q+k}$ образуют жорданову цепочку, то

$$c_{q+j}(t) = e^{-\mu_q^\alpha t} \sum_{m=0}^{k-j} P_m^\alpha(\mu_q, t) c_{q+j+m} \quad (0 \leq j \leq k). \quad (3.4)$$

Определение 3.1. Будем говорить, что ряд (3.2), соответствующий f , суммируем к f по методу Абеля порядка α , если для этого ряда существует подпоследовательность частичных сумм

$$S_{N_\nu} = \sum_{s=N_\nu+1}^{N_\nu+1} c_s(t) e_s, \quad (3.5)$$

сходящаяся в $L_2(0, 1)$ при всех $t > 0$, такая, что

$$u(t) = \sum_{\nu=1}^{\infty} S_{N_\nu}, \quad (3.6)$$

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} u(t) = f.$$

Определение 3.2. Будем говорить, что система e_q ($q = 1, 2, \dots$) корневых функций оператора $\mathcal{A}_B$ образует базис Абеля со скобками порядка α в $L_2(0, 1)$, если для любого $f \in L_2(0, 1)$ соответствующий ряд (3.2) суммируем к f по методу Абеля порядка α .

Пусть $\tilde{\omega}_{\varepsilon, r} = \{\mu \in \tilde{\omega}_\varepsilon : |\mu| > r\}$. Рассмотрим интеграл

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-\mu^\alpha t} K(I - \mu K)^{-1} f d\mu, \quad (3.7)$$

где $\Gamma := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = r > 0, |\arg \mu| < \varepsilon\} \cup \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \geq r, |\arg \mu| = \varepsilon\}$ — контур, являющийся границей $\tilde{\omega}_{\varepsilon, r}$, ориентированный так, что при его обходе указанная область остается справа. Число r выбирается так, что оператор $(I - \mu K)^{-1}$ аналитичен внутри круга $B_r := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq r\}$.

Изложим план доказательства суммируемости ряда по корневым функциям, следуя В. Б. Лидскому [8]. Доказательство будет связано с вычислением интеграла (3.7) с использованием теории вычетов. Сначала в лемме 3.1 будет показано, что $\lim_{t \rightarrow 0+0} u(t) = f$ (для $f = Kw$, $w \in L_2(0, 1)$).

После этого в лемме 3.2 будут найдены выражения для вычетов подынтегральной функции в полюсах μ_i оператора $(I - \mu K)^{-1}$, что приведет нас к многочленам вида (3.1). То есть мы свяжем интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_i} e^{-\mu^\alpha t} K(I - \mu K)^{-1} f d\mu,$$

где замкнутый контур Γ_i , лежащий в угле $\tilde{\omega}_\varepsilon$, охватывает только полюс μ_i , с многочленами вида (3.1). Затем будет доказано существование уходящей в бесконечность последовательности контуров, на которых справедлива оценка вида

$$\|(I - \mu K)^{-1}\| \leq k e^{|\mu|^{1/2m+\kappa/2}}.$$

Эти утверждения позволят представить интеграл (3.7) в виде сходящегося ряда, членами которого являются вычеты, найденные в лемме 3.2, т. е. получить формулу вида (3.6).

Лемма 3.1. Если $f = Kw$, $w \in L_2(0, 1)$, то

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} u(t) = \lim_{t \rightarrow 0+0} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-\mu^\alpha t} K(I - \mu K)^{-1} f d\mu = f.$$

Доказательство. Заметим, что

$$(I - \mu K)^{-1} K^2 = \frac{1}{\mu^2} [(I - \mu K)^{-1} - (I + \mu K)].$$

Поэтому, если $f = Kw$, то

$$u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-\mu^\alpha t} \frac{(I - \mu K)^{-1} w}{\mu^2} d\mu - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} e^{-\mu^\alpha t} \frac{(I + \mu K)w}{\mu^2} d\mu =: I_1(t) + I_2(t).$$

Покажем, что $I_2(t) = 0$. Пусть $G_R := \{\mu \in \tilde{\omega}_{\varepsilon, r} : |\mu| < R\}$ ($R > r$). Определим контур Γ' как границу G_R . Очевидно, что подынтегральная функция аналитична в G_R . Нужно показать, что вклад этого интеграла по дуге $\Gamma'_R := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = R, |\arg \mu| \leq \varepsilon\}$ при $R \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Действительно,

$$\begin{aligned} \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_R} e^{-\mu^\alpha t} \frac{(I + \mu K)w}{\mu^2} d\mu \right\|_{L_2(0,1)} &\leq R^{-2} \|(I + RK)w\|_{L_2(0,1)} \int_{\Gamma'_R} |e^{-\mu^\alpha t}| d\mu \leq \\ &\leq R^{-1} \|(I + RK)w\|_{L_2(0,1)} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} e^{-t \operatorname{Re} \mu^\alpha} d \arg \mu. \end{aligned}$$

В силу выбора ветвей функции μ^α имеем $|\arg \mu^\alpha| < \pi/2$. Тогда существует число $\beta_0 > 0$ достаточно малое, такое, что $|\arg \mu^\alpha| \leq \pi/2 - \beta_0$, и

$$\operatorname{Re} \mu^\alpha \geq |\mu|^\alpha \cos(\pi/2 - \beta_0) \geq |\mu|^\alpha \sin \beta_0.$$

Тогда правую часть последнего неравенства можно сверху оценить следующим выражением:

$$R^{-1} \|(I + RK)w\|_{L_2(0,1)} (\pi - 2\beta_0) e^{-t|\mu|^\alpha \sin \beta_0}.$$

Таким образом, мы получим, что при $R \rightarrow \infty$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma'_R} e^{-\mu^\alpha t} \frac{(I + \mu K)w}{\mu^2} d\mu = 0.$$

Следовательно, по теореме Коши $I_2(t) = 0$.

Перейдем к вычислению $I_1(t)$. Очевидно, что оператор-функция $(I - \mu K)^{-1}$ аналитическая в пересечении дополнения $\tilde{\omega}_{\varepsilon, r}$ с кругом $B_R = \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| \leq R\}$. Кроме того, интеграл $I_1(t)$ в силу оценки (2.5) сходится равномерно по t при $t \geq 0$. Поэтому

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} u(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{(I - \mu K)^{-1} w}{\mu^2} d\mu.$$

Замкнем контур Γ по дуге $\Gamma''_R := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = R, |\arg \mu| \geq \varepsilon\}$. Внутри области, охватываемой этим контуром (обход совершается против часовой стрелки), нет других полюсов подынтегральной функции кроме $\mu = 0$. Поэтому мы получим, что последний интеграл равен вычету подынтегральной функции при $\mu = 0$. Для его вычисления представим оператор $(I - \mu K)^{-1}$ в виде ряда

Неймана в окрестности точки $\mu = 0$:

$$(I - \mu K)^{-1} = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^j K^j.$$

Тогда подынтегральная функция примет вид

$$\frac{(I - \mu K)^{-1} w}{\mu^2} = \sum_{j=0}^{\infty} \mu^{j-2} K^j w.$$

Поэтому

$$\operatorname{Res}_{\mu=0} \frac{(I - \mu K)^{-1} w}{\mu^2} = K w = f.$$

Таким образом

$$\lim_{t \rightarrow 0+0} u(t) = f.$$

□

Лемма 3.2. Вычет функции $e^{-\mu^\alpha t} K(I - \mu K)^{-1} f$ в полюсе μ_i оператора $(I - \mu K)^{-1}$ равен

$$- \sum_{q=q_1}^{q_2} c_q(t) e_s,$$

где $e_{q_1}, e_{q_1+1}, \dots, e_{q_2}$ — жорданов базис оператора K в корневом подпространстве $\mathcal{N}_i$, а $c_q(t)$ — коэффициенты, вычисляемые по формулам (3.3), (3.4).

Доказательство см. в [8, лемма 6].

Доказательство следующей теоремы аналогично доказательству теоремы 1 из [10]. Однако для удобства читателя приведем это доказательство полностью.

Теорема 3.1. Пусть $\Delta_h^k \neq 0$ ($k = 0, \dots, m-1$). Тогда для любого $f \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_B)$ ряд (3.2) по корневым функциям оператора $\mathcal{A}_B$ суммируем к f в $L_2(0, 1)$ по методу Абеля порядка α , где $\alpha > 1/2m$.

Доказательство. Для доказательства теоремы осталось показать, что для любого $t > 0$ существует сходящаяся подпоследовательность частичных сумм вида (3.5).

В силу леммы 2.2 для резольвенты оператора K справедлива оценка (2.4). Относительно переменной $1/\mu$ оценка примет вид:

$$\left\| C \left(\frac{1}{\mu} \right) R \left(\frac{1}{\mu}, K \right) \right\| \leq k_1 e^{|\mu|^{1/2m+\kappa}} \quad (|\mu| \geq \tilde{\delta}_0 > 0), \quad (3.8)$$

где константа $k_1 > 0$, $C(1/\mu)$ — целая функция по переменной μ порядка не выше $1/2m$, $\tilde{\delta}_0 = \tilde{\delta}_0(\kappa) = 1/\delta_0(\kappa) > 0$.

Очевидно, что

$$R \left(\frac{1}{\mu}, K \right) = \left(\frac{1}{\mu} I - K \right)^{-1} = \mu (I - \mu K)^{-1}.$$

Тогда неравенство (3.8) примет вид

$$\| \mu (I - \mu K)^{-1} \| \leq k_1 \frac{e^{|\mu|^{1/2m+\kappa}}}{|C(1/\mu)|} \quad (|\mu| \geq \tilde{\delta}_0). \quad (3.9)$$

Для дальнейших рассуждений нам понадобится оценка целой функции конечного порядка снизу (см., например, [7, гл. I, §3, п. 9]). А именно, пусть $F(z)$ — целая функция конечного порядка η и $z_1, z_2, \dots$ — ее нули. Тогда вне кружков $|z - z_m| < |z_m|^{-q}$, $q > \eta$ ($m = 1, 2, \dots$) имеет место оценка снизу

$$|F(z)| > e^{-r^{\eta+\kappa_0}}, \quad r > r_0(\kappa_0) \quad \forall \kappa_0 > 0.$$

Сумма диаметров исключительных кружков конечна. Пусть $R > 0$ и $0 < \delta < 1$. Тогда в кольце

$$(1 - \delta)R < |\mu| < R$$

найдется окружность

$$|\mu| = \tilde{R},$$

на которой верна оценка

$$|C(1/\mu)| \geq e^{-|\mu|^{1/2m+\kappa}}. \quad (3.10)$$

Подставив $\kappa/4$ вместо κ в (3.9) и (3.10), мы получим, что на окружности $|\mu| = \tilde{R}$ справедлива оценка

$$\|(I - \mu K)^{-1}\| \leq k_1 |\mu|^{-1} e^{2|\mu|^{1/2m+\kappa/4}}.$$

Отсюда нетрудно получить, что

$$\|(I - \mu K)^{-1}\| \leq k_2 e^{|\mu|^{1/2m+\kappa/2}} \quad (|\mu| = \tilde{R}), \quad (3.11)$$

где $k_2 > 0$.

Зафиксировав R и δ , рассмотрим монотонно возрастающую последовательность чисел $\{R_\nu\}_0^\infty$:

$$R_\nu = R(1 - \delta)^{-\nu+1} \quad (\nu = 0, 1, 2, \dots).$$

В каждом кольце $R_\nu < |\mu| < R_{\nu+1}$ найдется окружность $|\mu| = \tilde{R}_\nu$, на которой выполнена оценка (3.11). Обозначим через Γ_ν границу пересечения кольца $\tilde{R}_\nu \leq |\mu| \leq \tilde{R}_{\nu+1}$ с углом $\tilde{\omega}_\varepsilon$. Контур Γ_ν состоит из двух дуг окружностей $|\mu| = \tilde{R}_\nu$ и $|\mu| = \tilde{R}_{\nu+1}$ (обозначим их через $A_\nu B_\nu$ и $B_{\nu+1} A_{\nu+1}$, соответственно) и двух отрезков лучей, ограничивающих угол $\tilde{\omega}_\varepsilon$ (см. рис. 1).

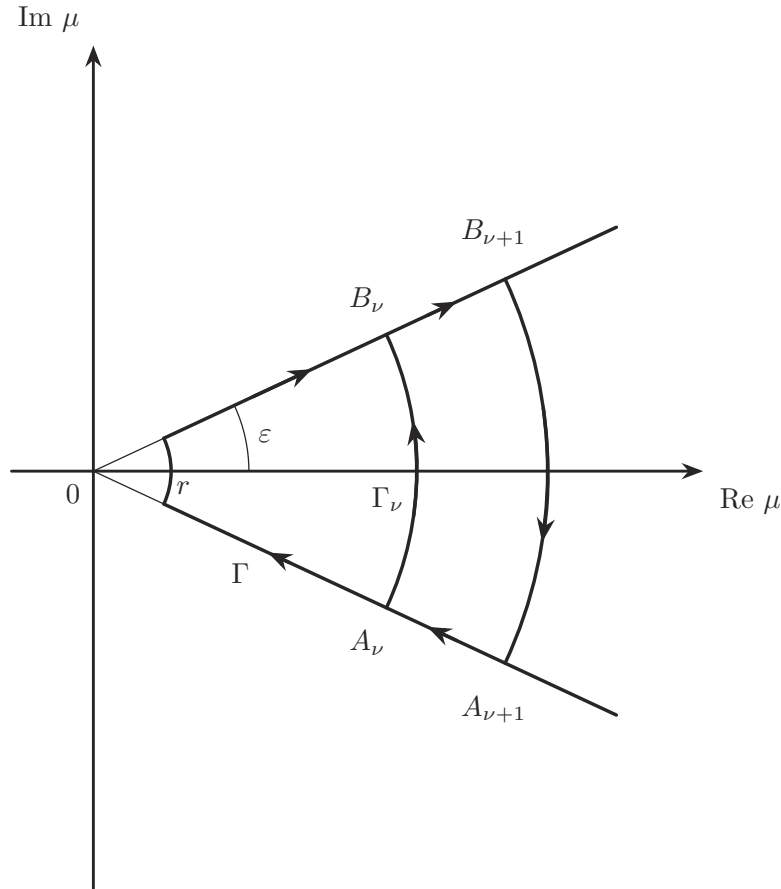


Рис. 1. Контур Γ_ν

FIG. 1. Contour Γ_ν

Пусть N_ν — число полюсов оператора $(I - \mu K)^{-1}$ (с учетом их кратности) в круге $|\mu| \leq \tilde{R}_\nu$. В силу леммы 3.2 получим, что

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\nu} e^{-\mu^\alpha t} K(I - \mu K)^{-1} f d\mu = \sum_{s=N_\nu+1}^{N_{\nu+1}} c_s(t) e_s.$$

Этот интеграл вычисляется по контуру $A_\nu B_\nu B_{\nu+1} A_{\nu+1}$ (обход совершается по часовой стрелке). Для того чтобы оценить норму этого интеграла, разобьем его на четыре части. На дуге $A_\nu B_\nu$, в силу оценки (3.11), справедливо неравенство

$$\|I_\nu\|_{L_2(0,1)} = \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{A_\nu B_\nu} e^{-\mu^\alpha t} K(I - \mu K)^{-1} f d\mu \right\|_{L_2(0,1)} \leq k_3 \|K\| |\mu| e^{-t \operatorname{Re} \mu^\alpha} e^{|\mu|^{1/2m+\kappa/2}} \|f\|_{L_2(0,1)},$$

где константа $k_3 > 0$.

И снова на рассматриваемой дуге для функции μ^α справедливо неравенство $|\arg \mu^\alpha| < \pi/2$, откуда следует, что существует $\beta_0 > 0$ такое, что $|\arg \mu^\alpha| \leq \pi/2 - \beta_0$, и

$$\operatorname{Re} \mu^\alpha \geq |\mu|^\alpha \cos(\pi/2 - \beta_0) \geq |\mu|^\alpha \sin \beta_0. \quad (3.12)$$

Учитывая, что

$$R_\nu < |\mu| < R_{\nu+1} = R(1 - \delta)^{-\nu} = R_\nu(1 - \delta)^{-1},$$

получим

$$\|I_\nu\|_{L_2(0,1)} \leq k_3 \|K\| R_\nu(1 - \delta)^{-1} e^{-t|R_\nu|^\alpha \sin \beta_0 + |R_\nu|^{1/2m+\kappa/2}} \|f\|_{L_2(0,1)}. \quad (3.13)$$

Аналогичная оценка справедлива и для интеграла $I_{\nu+1}$ взятого по дуге $B_{\nu+1} A_{\nu+1}$.

Для интеграла J_ν по прямолинейному участку $A_{\nu+1} A_\nu$ с учетом (2.5) получим

$$\begin{aligned} \|J_\nu\|_{L_2(0,1)} &= \left\| \frac{1}{2\pi i} \int_{A_{\nu+1} A_\nu} e^{-\mu^\alpha t} K(I - \mu K)^{-1} f d\mu \right\|_{L_2(0,1)} \leq \\ &\leq k_4 \|K\| |\mu|^{1/4m} e^{-t \operatorname{Re} \mu^\alpha} (R_{\nu+1} - R_\nu) \|f\|_{L_2(0,1)}, \end{aligned}$$

где константа $k_4 > 0$. Учитывая, что

$$R_{\nu+1} - R_\nu = R(1 - \delta)^{-\nu} - R(1 - \delta)^{-\nu+1} = R(1 - \delta)^{-\nu+1} ((1 - \delta)^{-1} - 1) = R_\nu ((1 - \delta)^{-1} - 1),$$

а также (3.12), мы получим

$$\begin{aligned} \|J_\nu\|_{L_2(0,1)} &\leq k_4 \|K\| R_{\nu+1}^{1/4m} e^{-t R_\nu^\alpha \sin \beta_0} R_\nu ((1 - \delta)^{-1} - 1) \|f\|_{L_2(0,1)} = \\ &= k_4 \|K\| R_\nu^{1+1/4m} (1 - \delta)^{-1/4m} e^{-t R_\nu^\alpha \sin \beta_0} ((1 - \delta)^{-1} - 1) \|f\|_{L_2(0,1)}. \end{aligned} \quad (3.14)$$

Аналогичная оценка справедлива для интеграла J'_ν по прямолинейному участку $B_\nu B_{\nu+1}$.

Если положить $\alpha > 1/2m + \kappa/2$, где $\kappa > 0$ — достаточно малое число, то из оценок (3.13) и (3.14) следует, что ряд

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} (\|I_\nu\| + \|I_{\nu+1}\| + \|J_\nu\| + \|J'_\nu\|)$$

сходится при любом $t > 0$. □

Следствие 3.1. Пусть $\Delta_h^k \neq 0$ ($k = 0, \dots, m-1$). Тогда система корневых функций оператора $\mathcal{A}_B$ полна в $\mathcal{D}(\mathcal{A}_B)$ в топологии $W_2^{2m}(0, 1)$.

Доказательство. В силу теоремы 3.1 система корневых функций оператора $\mathcal{A}_B$ плотна в $\mathcal{D}(\mathcal{A}_B)$ в топологии пространства $L_2(0, 1)$. Без ограничения общности будем считать, что $\mu = 0$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}_B$. Тогда оператор $\mathcal{A}_B^{-1}$ существует и отображает ограниченным образом $L_2(0, 1)$ в $\mathcal{D}(\mathcal{A}_B)$. Тогда для любой функции $u \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_B)$ функция $g = \mathcal{A}_B u \in L_2(0, 1)$. В силу полноты в $\mathcal{D}(\mathcal{A}_B)$ системы корневых функций оператора $\mathcal{A}_B$ существует последовательность $\{g_k\}$ конечных сумм корневых функций такая, что $g_k \rightarrow g$ в $L_2(0, 1)$. Тогда

$$\mathcal{A}_B^{-1} g_k \rightarrow \mathcal{A}_B^{-1} g = f \quad (k \rightarrow \infty) \quad (3.15)$$

в топологии $W_2^{2m}(0, 1)$. Кроме того, корневые функции инвариантны относительно $\mathcal{A}_B^{-1}$. Тогда $\{\mathcal{A}_B^{-1}g_k\}$ также является последовательностью конечных сумм корневых функций. Отсюда и из (3.15) следует полнота корневых функций оператора $\mathcal{A}_B$ в $\mathcal{D}(\mathcal{A}_B)$ в топологии $W_2^{2m}(0, 1)$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Байраш Р. А., Скубачевский А. Л. Обыкновенные дифференциальные уравнения четного порядка с интегральными условиями // Докл. РАН. Мат. Инф. Проц. упр. — 2025. — 522. — С. 7–10. — DOI: [10.7868/s3034504925020024](https://doi.org/10.7868/s3034504925020024).
2. Галахов Е. И., Скубачевский А. Л. Об одной нелокальной спектральной задаче // Дифф. уравн. — 1997. — 33, № 1. — С. 25–32.
3. Даровская К. А., Скубачевский А. Л. Об одной спектральной задаче с интегральными условиями // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2011. — 28. — С. 147–160.
4. Ильин В. А. Необходимые и достаточные условия базисности Рисса корневых векторов разрывных операторов второго порядка // Дифф. уравн. — 1986. — 22, № 12. — С. 2059–2071.
5. Ишкин Х. К., Кангуужин Б. Е. Об условиях полноты системы корневых функций дифференциального оператора на отрезке с интегральными условиями // Уфимск. мат. ж. — 2025. — 17, № 4. — С. 40–54. — DOI: [10.13108/2025-17-4-37](https://doi.org/10.13108/2025-17-4-37).
6. Кангуужин Б. Е., Токмагамбетов Н. Е. О полноте системы корневых функций обыкновенного дифференциального оператора второго порядка с интегральными краевыми условиями // Вестн. КазНУ. Сер. Мат. Мех. — 2014. — 2, № 81. — С. 72–87.
7. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. — М.: Наука, 1983.
8. Лидский В. Б. О суммируемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов // Тр. Моск. мат. об-ва — 1962. — 11. — С. 3–35.
9. Подъяпольский В. В. Суммируемость по Абелю системы корневых функций одной нелокальной задачи с интегральными условиями // Мат. заметки. — 1999. — 65, № 5. — С. 797–800. — DOI: [10.4213/mzm1114](https://doi.org/10.4213/mzm1114).
10. Подъяпольский В. В. Полнота системы корневых функций одной нелокальной задачи в L_p // Мат. заметки. — 2002. — 71, № 6. — С. 878–889. — DOI: [10.4213/mzm392](https://doi.org/10.4213/mzm392).
11. Сенцов Ю. Г. О базисности Рисса системы собственных и присоединенных функций дифференциального оператора с интегральными условиями // Мат. заметки. — 1999. — 65, № 6. — С. 948–952. — DOI: [10.4213/mzm1134](https://doi.org/10.4213/mzm1134).
12. Сильченко Ю. Т. Собственные значения и собственные функции дифференциального оператора с нелокальными граничными условиями // Дифф. уравн. — 2006. — 42, № 6. — С. 764–768.
13. Скубачевский А. Л. Неклассические краевые задачи. I // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — 26. — С. 3–132.
14. Скубачевский А. Л., Стеблов Г. М. О спектре дифференциальных операторов с областью определения, не плотной в $L_2(0, 1)$ // Докл. АН СССР. — 1991. — 321, № 6. — С. 1158–1163.
15. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. — Петроград: Тип. М. П. Фроловой, 1917.
16. Шкаликов А. А. О базисности собственных функций обыкновенных дифференциальных операторов с интегральными краевыми условиями // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1982. — № 6. — С. 12–21.
17. Agmon S. On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems // Commun. Pure Appl. Math. — 1962. — 15. — С. 119–147. — DOI: [10.1002/cpa.3160150203](https://doi.org/10.1002/cpa.3160150203).
18. Bayrash R. A., Skubachevskii A. L. A priori estimates of solutions of ordinary differential equation with spectral parameter and integral conditions // Math. Nachr. — 2026. — 299, № 1. — С. 85–116. — DOI: [10.1002/mana.70074](https://doi.org/10.1002/mana.70074).
19. Ishkin Kh. K. On conditions for the finiteness of the spectrum of a second order differential operator with integral boundary conditions // J. Math. Mech. Comp. Sci. — 2024. — 124, № 4. — С. 26–37. — DOI: [10.26577/JMMCS2024-v124-i4-a2](https://doi.org/10.26577/JMMCS2024-v124-i4-a2).
20. Karamyan R. D., Skubachevskii A. L. Spectral properties of the fourth order differential operator with integral conditions // Lobachevskii J. Math. — 2024. — 45, № 4. — С. 1404–1420. — DOI: [10.1134/S1995080224601188](https://doi.org/10.1134/S1995080224601188).
21. Krall A. M. The development of general differential and general boundary systems // Rocky Mountain J. Math. — 1975. — 5, № 4. — С. 493–542. — DOI: [10.1216/RMJ-1975-5-4-493](https://doi.org/10.1216/RMJ-1975-5-4-493).
22. Lunyov A. A., Malamud M. M. On the completeness and Riesz basis property of root subspaces of boundary value problems for first order systems and applications // J. Spectr. Theory. — 2015. — 5, № 1. — С. 17–70. — DOI: [10.4171/JST/90](https://doi.org/10.4171/JST/90).

23. *Lunyv A. A., Malamud M. M.* On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators // J. Math. Anal. Appl. — 2016. — 441. — С. 57–103. — DOI: [10.1016/j.jmaa.2016.03.085](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.03.085).
24. *Lunyv A. A., Malamud M. M.* On the completeness property of root vector systems for 2×2 Dirac type operators with non-regular boundary conditions // J. Math. Anal. Appl. — 2025. — 543, № 2, pt. 1. — 128949. — DOI: [10.1016/j.jmaa.2024.128949](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2024.128949).
25. *Makin A. S.* On the completeness of the root function system of the Dirac operator with two-point boundary conditions // Math. Nachr. — 2024. — 297, №. 7. — С. 2468–2487. — DOI: [10.1002/mana.202300241](https://doi.org/10.1002/mana.202300241).
26. *Picone M.* I teoremi d'esistenza per gl'integrale di una equazione differenziale lineare ordinaria soddisfacenti ad una nuova classe di condizioni // Rend. Accad. Lincei. — 1908. — 17. — С. 340–347.
27. *Picone M.* Equazione integrale traduce il piu generale problema lineare per le equation differenziali lineari ordinarie di qualsivoglia ordine // Accad. Naz. Lincei Atti Convegni. Roma. — 1932. — 15, № 6. — С. 942–948.
28. *Savchuk A. M., Shkalikov A. A.* The Dirac operator with complex-valued summable potential // Math. Notes. — 2014. — 96, № 5-6. — С. 777–810. — DOI: [10.1134/S0001434614110169](https://doi.org/10.1134/S0001434614110169).
29. *Sommerfeld A.* Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklarung der turbulenten Flussigkeitsbewegungen // Atti IV Congr. Intern. Mat. Rome. — 1909. — 3. — С. 116–124.

Р. А. Байраш

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

E-mail: bayrash-ra@rudn.ru, РИНЦ SPIN-код: 4223-6706, РИНЦ AuthorID: [1343828](https://elibrary.ru/author_index.aspx?id=1343828), Scopus: [60165024600](https://orcid.org/0000-0001-60165024)

А. Л. Скубачевский

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

E-mail: skubachevskiy-al@rudn.ru, РИНЦ SPIN-код: 9751-1272, РИНЦ AuthorID: [3477](https://elibrary.ru/author_index.aspx?id=3477), ResearcherID: [H-7828-2016](https://orcid.org/0000-0001-78282016), Scopus: [6602633010](https://orcid.org/0000-0001-66026330), ORCID: [0000-0001-8385-0139](https://orcid.org/0000-0001-8385-0139)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-213-226](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-213-226)

EDN: [ARSXNB](https://elibrary.ru/arsxnb)

UDC 517.984.52

Research article

Abel summability of a system of root functions of an even-order differential operator with integral conditions

R. A. Bayrash^{1,2} and A. L. Skubachevskii^{1,2}

¹*RUDN University, Moscow, Russia*

²*Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Abstract. We consider an ordinary $2m$ -th order differential operator with purely integral conditions. In this case, the domain of definition of the corresponding operator is not dense in $L_2(0, 1)$. Under certain conditions for the weight functions included in the integral conditions, the Abel summability of the system of root functions of the corresponding differential operator is proved.

Keywords: spectral properties, non-local problem, integral conditions, Abel summability.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.



Acknowledgments and funding. The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation within the state assignment (project No. FSSF-2026-0013).

Authors' contribution. *Skubachevskii A. L.* — statement of the problem, formulation of the result on the Abel basis property, the idea of using in the proof an a priori estimate of solutions depending on the spectral parameter. *Bayrash R. A.* — proof of the main result of the paper (Theorem 3.1 on the Abel basis property), formulation and proof of auxiliary assertions (Lemmas 2.1–2.3, 3.1–3.2, Corollary 3.1).

For citation: R. A. Bayrash, A. L. Skubachevskii, “Abel summability of a system of root functions of an even-order differential operator with integral conditions,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. 72, No. 2, 213–226. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-213-226](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-213-226) EDN: ARSXNB

REFERENCES

1. R. A. Bayrash and A. L. Skubachevskii, “Obyknoennyye differentsial'nye uravneniya chetnogo poryadka s integral'nymi usloviyami” [Ordinary differential equations of even-order with integral conditions], *Dokl. RAN. Mat. Inf. Prots. Upr.* [Rep. Russ. Acad. Sci. Math. Inf. Control], 2025, **522**, 7–10 (in Russian), DOI: [10.7868/s3034504925020024](https://doi.org/10.7868/s3034504925020024).
2. E. I. Galakhov and A. L. Skubachevskii, “Ob odnoy nelokal'noy spektral'noy zadache” [On one nonlocal spectral problem], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1997, **33**, No. 1, 25–32 (in Russian).
3. K. A. Darovskaya and A. L. Skubachevskii, “Ob odnoy spektral'noy zadache s integral'nymi usloviyami” [On one spectral problem with integral conditions], *Tr. Sem. Im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 2011, **28**, 147–160 (in Russian).
4. V. A. Il'in, “Neobkhodimyye i dostatochnyye usloviya bazisnosti Rissa kornevykh vektorov razryvnykh operatorov vtorogo poryadka” [Necessary and sufficient conditions for the Riesz basis property of root vectors of discontinuous second-order operators], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1986, **22**, No. 12, 2059–2071 (in Russian).
5. Kh. K. Ishkin and B. E. Kanguzhin, “Ob usloviyakh polnoty sistemy kornevykh funktsiy differentsial'nogo operatora na otrezke s integral'nymi usloviyami” [On the conditions for the completeness of the system of root functions of a differential operator on a segment with integral conditions], *Ufimsk. Mat. Zh.* [Ufa Math. J.], 2025, **17**, No. 4, 40–54 (in Russian), DOI: [10.13108/2025-17-4-37](https://doi.org/10.13108/2025-17-4-37).
6. B. E. Kanguzhin and N. E. Tokmagambetov, “O polnote sistemy kornevykh funktsiy obyknovennogo differentsial'nogo operatora vtorogo poryadka s integral'nymi kraevymi usloviyami” [On the completeness of the system of root functions of an ordinary second-order differential operator with integral boundary conditions], *Vestn. KazNU. Ser. Mat. Mekh.* [Bull. Kazakh Nat. Univ. Ser. Math. Mech.], 2014, **2**, No. 81, 72–87 (in Russian).
7. A. F. Leont'ev, *Tselye Funktsii. Ryady Ekspontent* [Entire Functions. Exponential Series], Nauka, Moscow, 1983 (in Russian).
8. V. B. Lidskii, “O summiruемости рядов по главным векторам несамосопряженных операторов” [On the summability of series in principal vectors of non-self-adjoint operators], *Tr. Mosk. Mat. Ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1962, **11**, 3–35 (in Russian).
9. V. V. Pod'yapol'skii, “Summiruemost' po Abelyu sistemy kornevykh funktsiy odnoy nelokal'noy zadachi s integral'nymi usloviyami” [Abel summability of a system of root functions of a nonlocal problem with integral conditions], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 1999, **65**, No. 5, 797–800 (in Russian), DOI: [10.4213/mzm1114](https://doi.org/10.4213/mzm1114).
10. V. V. Pod'yapol'skii, “Polnota sistemy kornevykh funktsiy odnoy nelokal'noy zadachi v L_p ” [Completeness of the system of root functions of one nonlocal problem in L_p], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2002, **71**, No. 6, 878–889 (in Russian), DOI: [10.4213/mzm392](https://doi.org/10.4213/mzm392).
11. Yu. G. Sentsov, “O bazisnosti Rissa sistemy sobstvennykh i prisoedinennykh funktsiy differentsial'nogo operatora s integral'nymi usloviyami” [On the Riesz basis property of a system of eigen- and associated functions of a differential operator with integral conditions], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 1999, **65**, No. 6, 948–952 (in Russian), DOI: [10.4213/mzm1134](https://doi.org/10.4213/mzm1134).
12. Yu. T. Sil'chenko, “Sobstvennye znacheniya i sobstvennye funktsii differentsial'nogo operatora s nelokal'nymi granichnymi usloviyami” [Eigenvalues and eigenfunctions of a differential operator with nonlocal boundary conditions], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 2006, **42**, No. 6, 764–768 (in Russian).
13. A. L. Skubachevskii, “Neklassicheskie kraevye zadachi. I” [Nonclassical boundary-value problems. I], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2007, **26**, 3–132 (in Russian).

14. A. L. Skubachevskii and G. M. Steblov, “O spektre differentsial’nykh operatorov s oblast’yu opredeleniya, ne plotnoy v $L_2(0, 1)$ ” [On the spectrum of differential operators with domains not dense in $L_2(0, 1)$], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1991, **321**, No. 6, 1158–1163 (in Russian).
15. Ya. D. Tamarkin, *O Nekotorykh Obshchikh Zadachakh Teorii Obyknovennykh Lineynykh Differentsial’nykh Uravneniy i o Razlozhenii Proizvol’nykh Funktsiy v Ryady* [On Some General Problems of the Theory of Ordinary Linear Differential Equations and on the Expansion of Arbitrary Functions into Series], Typ. M. P. Frolova, Petrograd, 1917 (in Russian).
16. A. A. Shkalikov, “O bazisnosti sobstvennykh funktsiy obyknovennykh differentsial’nykh operatorov s integral’nymi kraevymi usloviyami” [On the basis property of eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary conditions], *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 1982, No. 6, 12–21 (in Russian).
17. S. Agmon, “On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1962, **15**, 119–147, DOI: [10.1002/cpa.3160150203](https://doi.org/10.1002/cpa.3160150203).
18. R. A. Bayrash and A. L. Skubachevskii, “A priori estimates of solutions of ordinary differential equation with spectral parameter and integral conditions,” *Math. Nachr.*, 2026, **299**, No. 1, 85–116, DOI: [10.1002/mana.70074](https://doi.org/10.1002/mana.70074).
19. Kh. K. Ishkin, “On conditions for the finiteness of the spectrum of a second order differential operator with integral boundary conditions,” *J. Math. Mech. Comp. Sci.*, 2024, **124**, No. 4, 26–37, DOI: [10.26577/JMMCS2024-v124-i4-a2](https://doi.org/10.26577/JMMCS2024-v124-i4-a2).
20. R. D. Karamyan and A. L. Skubachevskii, “Spectral properties of the fourth order differential operator with integral conditions,” *Lobachevskii J. Math.*, 2024, **45**, No. 4, 1404–1420, DOI: [10.1134/S1995080224601188](https://doi.org/10.1134/S1995080224601188).
21. A. M. Krall, “The development of general differential and general boundary systems,” *Rocky Mountain J. Math.*, 1975, **5**, No. 4, 493–542, DOI: [10.1216/RMJ-1975-5-4-493](https://doi.org/10.1216/RMJ-1975-5-4-493).
22. A. A. Lunyov and M. M. Malamud, “On the completeness and Riesz basis property of root subspaces of boundary value problems for first order systems and applications,” *J. Spectr. Theory*, 2015, **5**, No. 1, 17–70, DOI: [10.4171/JST/90](https://doi.org/10.4171/JST/90).
23. A. A. Lunyov and M. M. Malamud, “On the Riesz basis property of root vectors system for 2×2 Dirac type operators,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2016, **441**, 57–103, DOI: [10.1016/j.jmaa.2016.03.085](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2016.03.085).
24. A. A. Lunyov and M. M. Malamud, “On the completeness property of root vector systems for 2×2 Dirac type operators with non-regular boundary conditions,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2025, **543**, No. 2, pt. 1, 128949, DOI: [10.1016/j.jmaa.2024.128949](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2024.128949).
25. A. S. Makin, “On the completeness of the root function system of the Dirac operator with two-point boundary conditions,” *Math. Nachr.*, 2024, **297**, No. 7, 2468–2487, DOI: [10.1002/mana.202300241](https://doi.org/10.1002/mana.202300241).
26. M. Picone, “I teoremi d’esistenza per gl’integrale di una equazione differenziale lineare ordinaria soddisfacenti ad una nuova classe di condizioni,” *Rend. Accad. Lincei.*, 1908, **17**, 340–347.
27. M. Picone, “Equazione integrale traducente il piu generale problema lineare per le equation differenziali lineari ordinarie di qualsivoglia ordine,” *Accad. Naz. Lincei Atti Convegni. Roma*, 1932, **15**, No. 6, 942–948.
28. A. M. Savchuk and A. A. Shkalikov, “The Dirac operator with complex-valued summable potential,” *Math. Notes*, 2014, **96**, No. 5-6, 777–810, DOI: [10.1134/S0001434614110169](https://doi.org/10.1134/S0001434614110169).
29. A. Sommerfeld, “Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklarung der turbulenten Flussigkeitsbewegungen,” *Atti IV Congr. Intern. Mat. Rome*, 1909, **3**, 116–124.

R. A. Bayrash

RUDN University, Moscow, Russia

Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia

E-mail: bayrash-ra@rudn.ru, eLIBRARY SPIN-code: 4223-6706, eLIBRARY AuthorID: [1343828](https://elibrary.ru/1343828),

Scopus: [60165024600](https://scopus.com/authorid/60165024600)

A. L. Skubachevskii

RUDN University, Moscow, Russia

Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia

E-mail: alskubachevskii@yandex.ru, eLIBRARY SPIN-code: 9751-1272, eLIBRARY AuthorID:

[3477](https://elibrary.ru/3477), ResearcherID: [H-7828-2016](https://orcid.org/0000-0001-8385-0139), Scopus: [6602633010](https://scopus.com/authorid/6602633010), ORCID: [0000-0001-8385-0139](https://orcid.org/0000-0001-8385-0139)

ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ СО СЛАБОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

И. В. БАРЫШЕВА, Н. И. ТРУСОВА, Е. В. ФРОЛОВА

*Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк,
Россия*

Аннотация. Исследуется частно-интегральный оператор со слабой особенностью в $\mathbb{R}^n$ в анизотропном пространстве непрерывных функций со значениями в пространстве L_p , $p \in (1, \infty)$. Доказаны теоремы о равномерной ограниченности и равностепенной непрерывности исследуемого оператора. Из этих теорем вытекает теорема о переводе всякого ограниченного и равностепенно непрерывного множества в предкомпактное множество частно-интегральным оператором со слабой особенностью, действующим из пространства непрерывных по части переменных со значениями в L_p по другой части переменных функций в пространство непрерывных функций.

Ключевые слова: частный интеграл, частно-интегральный оператор, частно-интегральный оператор со слабой особенностью, анизотропное пространство функций, смешанная норма, равномерная ограниченность, равностепенная непрерывность, предкомпактность, компактность.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы благодарны профессору Л. Н. Ляхову за поставленную задачу и выражают искреннюю благодарность за консультацию.

Вклад авторов. Все авторы участвовали в анализе работ, посвященных исследованию частно-интегральных операторов со слабой особенностью в различных функциональных пространствах, формулировании теорем, разработке схем их доказательств и непосредственном проведении последних.

Для цитирования: Барышева И. В., Трусова Н. И., Фролова Е. В. Частно-интегральные операторы со слабой особенностью // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 2. С. 227–236. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-227-236](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-227-236) EDN: [ATNOMT](https://edn.ru/ATNOMT)

1. ВВЕДЕНИЕ

Частно-интегральным оператором (далее ЧИ-оператором), отвечающим ядру k , в $\mathbb{R}^n$ называется выражение вида

$$(Kf)(s) = \int_{\Omega^m} k(y, z, t) f(t, z) dt, \quad (1.1)$$

где $\Omega^m \subset \mathbb{R}^m$, $s = (y, z) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^{n-m}$. В случае $m = n$ оператор (1.1) является классическим интегральным оператором.

Функция $k(y, z, t)$ называется интегрально ограниченной, если

$$\sup_s \int_{\Omega^m} |k(y, z, t)| dt = L < \infty.$$

Непрерывность и интегральная ограниченность частно-интегральных операторов, как и интегральных операторов в $\mathbb{R}^2$ с непрерывными ядрами и в пространстве непрерывных функций двух переменных, изучена в [3, 9]. В лебеговых пространствах функций ограниченные действия частно-интегральных и интегральных операторов имеют принципиальные различия. Это было замечено еще А. С. Калитвиным в книге [3], в которой доказаны теоремы действия для различных случаев перестановки переменных в ядре оператора и различных соотношений сопряженных показателей лебеговых пространств. Там же приведено пожелание доказать аналогичные утверждения в общем виде с использованием только свойств лебеговых пространств. Такой подход был осуществлен в работе [11]. Оказалось, что ограниченное действие частно-интегральных операторов возможно лишь в лебеговых пространствах функций со смешанной нормой. Такие пространства впервые введены в работах А. Бенедекка и Р. Панцоне [10], исследовались в работах С. М. Никольского, его учеников и последователей, где эти пространства назывались анизотропными (см. [1, гл. 3]). Изучение частно-интегральных операторов, имеющих различные свойства по разным переменным, что обусловлено применением смешанных $\sup - L_p$ -норм, приведено в [8, 12].

В этой работе представлены результаты исследований частно-интегральных операторов со слабой особенностью в пространствах непрерывных функций со значениями в лебеговом пространстве функций L_p , $p \in (1, \infty)$. Классические интегральные операторы такого вида хорошо изучены, например, см. [2, 6, 7]. Частно-интегральные же операторы со слабой особенностью ранее рассматривались только для классов непрерывных функций двух переменных, принадлежащих $\mathbb{R}^1 \times \mathbb{R}^1$ (см. [4]).

2. ЧАСТНО-ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ СО СЛАБОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

Работа посвящена исследованию ограниченности и непрерывности действия частно-интегральных операторов со слабой особенностью. Через $D = \{x: a_i \leq x_i \leq b_i, i = \overline{1, n}\}$ обозначим конечный замкнутый параллелепипед в $\mathbb{R}^n$, $\alpha, \bar{\alpha}$ — мультииндексы, дополняющие друг друга до полного мультииндекса $(1, 2, \dots, n)$ и $D = D_\alpha \times D_{\bar{\alpha}}$, m — размерность, а d — диаметр параллелепипеда D_α ($1 \leq m \leq n$).

ЧИ-оператором со слабой особенностью называется выражение

$$(K_\alpha^{(m)}u)(x) = \int_{D_\alpha} \kappa_\alpha(x; t_\alpha) u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha) dt_\alpha, \quad (2.1)$$

где

$$x = (x_\alpha, x_{\bar{\alpha}}), \quad \kappa_\alpha = \frac{k(x; t_\alpha)}{|x_\alpha - t_\alpha|^\beta}, \quad \beta < m.$$

При $m = n$ ЧИ-оператор (2.1) является классическим интегральным оператором со слабой особенностью.

Пусть $\mathbf{p} = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, $p_i \geq 1$ ($i = \overline{1, n}$). Следуя [1, с. 19], введем пространство $L_{\mathbf{p}}((a_1, b_1) \times \dots \times (a_n, b_n))$, норма в котором определяется равенством

$$\|u\|_{L_{\mathbf{p}}(D)} = \left(\int_{a_n}^{b_n} \left(\int_{a_{n-1}}^{b_{n-1}} \dots \left(\int_{a_2}^{b_2} \left[\int_{a_1}^{b_1} |u(x)|^{p_1} dx_1 \right]^{\frac{p_2}{p_1}} dx_2 \right)^{\frac{p_3}{p_2}} \dots dx_{n-1} \right)^{\frac{p_n}{p_{n-1}}} dx_n \right)^{\frac{1}{p_n}}.$$

Следуя [5, с. 19], через $CL_p = C(D_{\bar{\alpha}}; L_p(D_\alpha))$ обозначим пространство непрерывных функций со значениями в лебеговом пространстве функций L_p , $p \in (1, \infty)$ с нормой

$$\|u\|_{CL_p} = \sup_{x_{\bar{\alpha}} \in D_{\bar{\alpha}}} \left(\int_{D_\alpha} |u(x_{\bar{\alpha}}, t_\alpha)|^p dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p}},$$

где $D_\alpha \subset \mathbb{R}^m$, $D_{\bar{\alpha}} \subset \mathbb{R}^{n-m}$, $1 \leq m < n$. При $m = n$ норма в CL_p совпадает с нормой в пространстве L_p .

3. РАВНОМЕРНАЯ ОГРАНИЧЕННОСТЬ ЧИ-ОПЕРАТОРА СО СЛАБОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ

Напомним, что числа $p, p' > 1$ называются сопряженными, если $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

Для ЧИ-оператора со слабой особенностью справедлива следующая теорема о равномерной ограниченности в CL_p .

Теорема 3.1. Пусть $p, p' > 1$ и $q, q' > 1$ — две пары сопряженных чисел, число β удовлетворяет неравенству $\beta p' q < m$, функция $k(x; t_\alpha) \in CL_{p'q'}$ и $U > 0$. Тогда для ЧИ-оператора $K_\alpha^{(m)}$ справедлива равномерная оценка

$$|(K_\alpha^{(m)}u)(x)| \leq A \|k\|_{CL_{p'q'}} U, \quad (3.1)$$

$$A = \left(\frac{|S_1(m)| d^{m-\beta p'q}}{m - \beta p'q} \right)^{\frac{1}{p'q}},$$

для любых $x \in \mathbb{R}^n$ и для любых функций $u(x_\alpha, x_\alpha)$ таких, что $\|u\|_{CL_p} \leq U$, где $|S_1(m)|$ — площадь поверхности сферы единичного радиуса в $\mathbb{R}^m$.

Доказательство. Отметим, что принадлежность $u(x)$ пространству $CL_p(D) = C(D_\alpha; L_p(D_\alpha))$ означает выполнение следующих условий: $\forall \varepsilon_1 > 0 \exists \delta_1 > 0$ такое, что из неравенства $|x' - x''| < \delta_1$ следует неравенство

$$\left(\int_{D_\alpha} |u(x''_\alpha; t_\alpha) - u(x'_\alpha; t_\alpha)|^p dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon_1$$

и

$$\sup_{x_\alpha \in D_\alpha} \left(\int_{D_\alpha} |u(x_\alpha; t_\alpha)|^p dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p}} = U_1 < \infty.$$

В свою очередь, для функции $k(x; t_\alpha)$, принадлежащей пространству $CL_{p'q'} = C(D; L_{p'q'}(D_{t_\alpha}))$, выполнены условия: $\forall \varepsilon_2 > 0 \exists \delta_2 > 0$ такое, что из неравенства $|x' - x''| < \delta_2$ следует неравенство

$$\left(\int_{D_\alpha} |k(x''; t_\alpha) - k(x'; t_\alpha)|^{p'q'} dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p'q'}} < \varepsilon_2$$

и

$$\sup_{x \in D} \left(\int_{D_\alpha} |k(x; t_\alpha)|^{p'q'} dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p'q'}} = K_1 < \infty.$$

Рассмотрим ЧИ-оператор со слабой особенностью (2.1). Имеем

$$|(K_\alpha^{(m)}u)(x)| = \left| \int_{D_\alpha} \kappa_\alpha(x; t_\alpha) u(x_\alpha, t_\alpha) dt_\alpha \right| \leq \sup_{x \in D} \left(\int_{D_\alpha} \frac{|k(x; t_\alpha)|}{|x_\alpha - t_\alpha|^\beta} |u(x_\alpha, t_\alpha)| dt_\alpha \right).$$

Применим неравенство Гельдера с сопряженными показателями p и p' . Получим

$$|(K_\alpha^{(m)}u)(x)| \leq \sup_{x \in D} \left(\int_{D_\alpha} \frac{|k(x; t_\alpha)|^{p'}}{|x_\alpha - t_\alpha|^{\beta p'}} dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p'}} \sup_{x_\alpha \in D_\alpha} \left(\int_{D_\alpha} |u(x_\alpha, t_\alpha)|^p dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p}}.$$

В этом неравенстве к интегралу

$$\int_{D_\alpha} \frac{|k(x; t_\alpha)|^{p'}}{|x_\alpha - t_\alpha|^{\beta p'}} dt_\alpha$$

вновь применим неравенство Гельдера с сопряженными показателями q и q' . Тогда

$$\int_{D_\alpha} \frac{|k(x; t_\alpha)|^{p'}}{|x_\alpha - t_\alpha|^{\beta p'}} dt_\alpha \leq \left(\int_{D_\alpha} |k(x; t_\alpha)|^{p'q'} dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p'q'}} \times \left(\int_{D_\alpha} \frac{1}{|x_\alpha - t_\alpha|^{\beta p'q}} dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p'q}}.$$

Следовательно, для ЧИ-оператора (2.1) имеем

$$\begin{aligned} |(K_\alpha^{(m)}u)(x)| &\leq \sup_{x \in D} \left(\int_{D_\alpha} |k(x; t_\alpha)|^{p'q'} dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p'q'}} \times \\ &\times \sup_{x_\alpha \in D_\alpha} \left(\int_{D_\alpha} \frac{1}{|x_\alpha - t_\alpha|^{\beta p'q}} dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p'q}} \sup_{x_\alpha \in D_\alpha} \left(\int_{D_\alpha} |u(x_\alpha, t_\alpha)|^p dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$|K_\alpha^{(m)}u| \leq \|k\|_{CL_{p'q'}} \|u\|_{CL_p} \sup_{x_\alpha \in D_\alpha} \left(\int_{D_\alpha} \frac{1}{|x_\alpha - t_\alpha|^{\beta p'q}} dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p'q}}. \quad (3.2)$$

Ограниченность частного интеграла

$$\left(\int_{D_\alpha} \frac{1}{|x_\alpha - t_\alpha|^{\beta p'q}} dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p'q}} \quad (3.3)$$

получается введением сферических координат в пространстве $\mathbb{R}^m$. Действительно, шар B_d с центром в точке x_α и радиуса d содержит параллелепипед D_α . Тогда

$$\left(\int_{D_\alpha} \frac{1}{|x_\alpha - t_\alpha|^{\beta p'q}} dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p'q}} \leq \left(\int_{B_d} \frac{1}{|x_\alpha - t_\alpha|^{\beta p'q}} dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p'q}}.$$

Перейдем к сферическим координатам по формулам

$$x_\alpha - t_\alpha = r\theta, \quad |\theta| = 1, \quad dt_\alpha = dS_1 r^{m-1} dr,$$

где через dS_1 обозначен элемент поверхности сферы $S_1(m)$ единичного радиуса в $\mathbb{R}^m$.

Имеем

$$\left(\int_{B_d} \frac{1}{|x_\alpha - t_\alpha|^{\beta p'q}} dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p'q}} = \left(\int_{S_1(m)} dS_1 \int_0^d \frac{r^{m-1} dr}{r^{\beta p'q}} \right)^{\frac{1}{p'q}} = \left(\frac{|S_1(m)| d^{m-\beta p'q}}{m - \beta p'q} \right)^{\frac{1}{p'q}} = A.$$

Следовательно, (3.2) примет вид

$$|K_\alpha^{(m)}u| \leq A \|k\|_{CL_{p'q'}} \|u\|_{CL_p}. \quad (3.4)$$

Наконец, так как $\|u\|_{CL_p(D)} \leq U$, то будет справедливым неравенство (3.1). $\square$

4. РАВНОСТЕПЕННАЯ НЕПРЕРЫВНОСТЬ ЧИ-ОПЕРАТОРА СО СЛАБОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ НА ОГРАНИЧЕННОМ И РАВНОСТЕПЕННО НЕПРЕРЫВНОМ МНОЖЕСТВЕ ФУНКЦИЙ

Определение. Будем говорить, что множество $M \subset CL_p(D)$ *равностепенно непрерывно*, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta_3 > 0$ такое, что для любых $u \in M$ из неравенства $|x' - x''| < \delta_3$ следует неравенство

$$\left(\int_{D_\alpha} |u(x''_\alpha; t_\alpha) - u(x'_\alpha; t_\alpha)|^p dt_\alpha \right)^{\frac{1}{p}} < \varepsilon.$$

Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда справедлива

Теорема 4.1. Пусть функция $k(x; t_\alpha)$ принадлежит пространству $C(D; L_{p'q'}(D_\alpha))$, и пусть множество $M \subset CL_p(D)$ ограничено и равномерно непрерывно в $CL_p(D)$. Тогда множество $\{K_\alpha^{(m)}u : u \in M\}$ равномерно непрерывно в $C(D)$.

Доказательство. Требуется доказать, что для каждого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, зависящее только от ε, β , что неравенство

$$\left| (K_\alpha^{(m)}u)(x'') - (K_\alpha^{(m)}u)(x') \right| < \varepsilon$$

выполняется для всех $x', x'' \in D$ таких, что $|x'' - x'| < \delta$, и для всех функций из $\{K_\alpha^{(m)}u : u \in M\}$.

Рассмотрим

$$\begin{aligned} & \left| (K_\alpha^{(m)}u)(x'') - (K_\alpha^{(m)}u)(x') \right| = \\ & = \left| \int_{D_\alpha} \frac{k_\alpha(x''; t_\alpha)}{|x''_\alpha - t_\alpha|^\beta} u(x''_\alpha, t_\alpha) dt_\alpha - \int_{D_\alpha} \frac{k_\alpha(x'; t_\alpha)}{|x'_\alpha - t_\alpha|^\beta} u(x'_\alpha, t_\alpha) dt_\alpha \right| \leq \\ & \leq \int_{D_\alpha} \left| \frac{k_\alpha(x''; t_\alpha)}{|x''_\alpha - t_\alpha|^\beta} u(x''_\alpha, t_\alpha) - \frac{k_\alpha(x'; t_\alpha)}{|x'_\alpha - t_\alpha|^\beta} u(x'_\alpha, t_\alpha) \right| dt_\alpha + \\ & + \int_{D_\alpha} \left| \frac{k_\alpha(x''; t_\alpha)}{|x''_\alpha - t_\alpha|^\beta} - \frac{k_\alpha(x'; t_\alpha)}{|x'_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right| |u(x'_\alpha, t_\alpha)| dt_\alpha = \\ & = \int_{D_\alpha} \left| \frac{k_\alpha(x''; t_\alpha)}{|x''_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right| |u(x''_\alpha, t_\alpha) - u(x'_\alpha, t_\alpha)| dt_\alpha + \\ & + \int_{D_\alpha} \left| \frac{k_\alpha(x''; t_\alpha)}{|x''_\alpha - t_\alpha|^\beta} - \frac{k_\alpha(x'; t_\alpha)}{|x'_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right| |u(x'_\alpha, t_\alpha)| dt_\alpha. \end{aligned}$$

Применим неравенство Гельдера с сопряженными показателями p и p' . Получим

$$\begin{aligned} & \left| (K_\alpha^{(m)}u)(x'') - (K_\alpha^{(m)}u)(x') \right| \leq \\ & \leq \left\{ \int_{D_\alpha} \left| \frac{k_\alpha(x''; t_\alpha)}{|x''_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right|^{p'} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'}} \cdot \left\{ \int_{D_\alpha} |u(x''_\alpha, t_\alpha) - u(x'_\alpha, t_\alpha)|^p dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p}} + \\ & + \left\{ \int_{D_\alpha} \left| \frac{k_\alpha(x''; t_\alpha)}{|x''_\alpha - t_\alpha|^\beta} - \frac{k_\alpha(x'; t_\alpha)}{|x'_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right|^{p'} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'}} \cdot \left\{ \int_{D_\alpha} |u(x'_\alpha, t_\alpha)|^p dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned} \quad (4.1)$$

К первому слагаемому в правой части неравенства (4.1) еще раз применим неравенство Гельдера с произвольными показателями q и q' и воспользуемся результатом теоремы 3.1. Имеем

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_{D_\alpha} \left| \frac{k_\alpha(x''; t_\alpha)}{|x''_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right|^{p'} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'}} \cdot \left\{ \int_{D_\alpha} |u(x''_\alpha, t_\alpha) - u(x'_\alpha, t_\alpha)|^p dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \leq \left\{ \int_{D_\alpha} \frac{dt_\alpha}{|x''_\alpha - t_\alpha|^{\beta p'q}} \right\}^{\frac{1}{p'q}} \left\{ \int_{D_\alpha} |k_\alpha(x''; t_\alpha)|^{p'q'} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'q'}} \left\{ \int_{D_\alpha} |u(x''_\alpha, t_\alpha) - u(x'_\alpha, t_\alpha)|^p dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \leq A \|k\|_{CL_{p'q'}} \left\{ \int_{D_\alpha} |u(x''_\alpha, t_\alpha) - u(x'_\alpha, t_\alpha)|^p dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Так как $u \in M$, то для произвольного $\varepsilon > 0$ выберем в качестве $\delta_3 = \delta_3(\varepsilon)$ такое $\delta_3 > 0$, чтобы при $|x'' - x'| < \delta_3$ выполнялось неравенство

$$A \|k\|_{CL_{p'q'}} \left\{ \int_{D_\alpha} |u(x''_{\alpha}, t_{\alpha}) - u(x'_{\alpha}, t_{\alpha})|^p dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p}} < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.2)$$

Теперь рассмотрим второе слагаемое в правой части неравенства (4.1). Воспользуемся тем, что $\|u\|_{CL_p} \leq U$. Без ограничения общности будем считать, что $|x'_{\alpha} - t_{\alpha}| < |x''_{\alpha} - t_{\alpha}|$. Для произвольного числа $\eta > 0$ обозначим $g = \{t_{\alpha} : |x'_{\alpha} - t_{\alpha}| < \eta\}$. Тогда

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_{D_\alpha} \left| \frac{k_{\alpha}(x''; t_{\alpha})}{|x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}} - \frac{k_{\alpha}(x'; t_{\alpha})}{|x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}} \right|^{p'} dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p'}} \cdot \left\{ \int_{D_\alpha} |u(x'_{\alpha}, t_{\alpha})|^p dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p}} \leq \\ & \leq U \left[\left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} \left| \frac{k_{\alpha}(x''; t_{\alpha})}{|x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}} - \frac{k_{\alpha}(x'; t_{\alpha})}{|x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}} \right|^{p'} dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p'}} + \left\{ \int_g \left| \frac{k_{\alpha}(x''; t_{\alpha})}{|x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}} - \frac{k_{\alpha}(x'; t_{\alpha})}{|x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}} \right|^{p'} dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p'}} \right]. \end{aligned}$$

Для первого слагаемого имеем

$$\begin{aligned} & U \cdot \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} \left| \frac{k_{\alpha}(x''; t_{\alpha})}{|x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}} - \frac{k_{\alpha}(x'; t_{\alpha})}{|x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}} \right|^{p'} dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p'}} = \\ & = U \cdot \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} \left| \frac{k_{\alpha}(x''; t_{\alpha}) |x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta} - k_{\alpha}(x'; t_{\alpha}) |x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}}{|x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta} |x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}} \right|^{p'} dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p'}} = \\ & = U \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} \left| \frac{k_{\alpha}(x''; t_{\alpha}) |x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta} - k_{\alpha}(x'; t_{\alpha}) |x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta} + k_{\alpha}(x'; t_{\alpha}) |x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta} - k_{\alpha}(x'; t_{\alpha}) |x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}}{|x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta} |x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}} \right|^{p'} dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p'}} \leq \\ & \leq U \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} \left(\frac{|k_{\alpha}(x''; t_{\alpha}) - k_{\alpha}(x'; t_{\alpha})| |x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}}{|x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta} |x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}} + \frac{|k_{\alpha}(x'; t_{\alpha})| (|x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta} - |x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta})}{|x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta} |x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}} \right)^{p'} dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p'}}. \end{aligned}$$

Применяя последовательно неравенство Минковского и неравенство Гельдера с показателями q и q' , получим согласно 3.1

$$\begin{aligned} & U \cdot \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} \left| \frac{k_{\alpha}(x''; t_{\alpha})}{|x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}} - \frac{k_{\alpha}(x'; t_{\alpha})}{|x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}} \right|^{p'} dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p'}} \leq \\ & \leq U \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} \frac{|k_{\alpha}(x''; t_{\alpha}) - k_{\alpha}(x'; t_{\alpha})|^{p'}}{|x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta p'}} dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p'}} + U \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} \left(\frac{|k_{\alpha}(x'; t_{\alpha})| (|x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta} - |x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta})}{|x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{2\beta}} \right)^{p'} dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p'}} \leq \\ & \leq U \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} |k_{\alpha}(x''; t_{\alpha}) - k_{\alpha}(x'; t_{\alpha})|^{p'q'} dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p'q'}} \cdot \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} |x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{-\beta p'q} dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p'q}} + \\ & + U \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} |k_{\alpha}(x'; t_{\alpha})|^{p'q'} dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p'q'}} \cdot \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} \left(\frac{|x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta} - |x''_{\alpha} - t_{\alpha}|^{\beta}}{|x'_{\alpha} - t_{\alpha}|^{2\beta}} \right)^{p'q} dt_{\alpha} \right\}^{\frac{1}{p'q}} \leq \end{aligned}$$

$$\leq U\varepsilon_2 \cdot \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} \eta^{-\beta p' q} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'q}} + UK_1 \cdot \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} \left(\frac{|x'_\alpha - t_\alpha|^\beta - |x''_\alpha - t_\alpha|^\beta}{|x'_\alpha - t_\alpha|^{2\beta}} \right)^{p'q} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'q}}.$$

Поскольку разность $|x'_\alpha - t_\alpha|^{2\beta} > \eta^{2\beta}$ на $D_\alpha \setminus g$, а функция $|x_\alpha - t_\alpha|^\beta$ равномерно непрерывна на $D_\alpha \setminus g$, то для любого $\varepsilon_4 > 0$ найдется $\delta_4 = \delta_4(\varepsilon_4) > 0$ такое, что из неравенства $|x'' - x'| < \delta_4$ будет следовать неравенство $\frac{|x'_\alpha - t_\alpha|^\beta - |x''_\alpha - t_\alpha|^\beta}{|x'_\alpha - t_\alpha|^{2\beta}} < \varepsilon_4$. Тогда

$$U \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} \left| \frac{k_\alpha(x''; t_\alpha)}{|x''_\alpha - t_\alpha|^\beta} - \frac{k_\alpha(x'; t_\alpha)}{|x'_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right|^{p'} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'}} \leq U(\varepsilon_2 \eta^{-\beta} + K_1 \varepsilon_4) \left(V(D_\alpha \setminus g) \right)^{\frac{1}{p'q}},$$

где через $V(D_\alpha \setminus g)$ обозначен объем области интегрирования.

Осталось подобрать число $\delta_5 = \delta_5(\varepsilon) > 0$ так, чтобы $\delta_5 < \min\{\delta_2, \delta_4\}$, $\delta_5 < \eta/2$ и чтобы при $|x'' - x'| < \delta_5$ выполнялось неравенство

$$U \left\{ \int_{D_\alpha \setminus g} \left| \frac{k_\alpha(x''; t_\alpha)}{|x''_\alpha - t_\alpha|^\beta} - \frac{k_\alpha(x'; t_\alpha)}{|x'_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right|^{p'} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'}} < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (4.3)$$

Тогда при $\delta = \min\{\delta_3, \delta_5\}$ неравенства (4.2) и (4.3) будут выполняться одновременно.

Теперь к интегралу

$$\left\{ \int_g \left| \frac{k_\alpha(x''; t_\alpha)}{|x''_\alpha - t_\alpha|^\beta} - \frac{k_\alpha(x'; t_\alpha)}{|x'_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right|^{p'} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'}}$$

применим неравенство Минковского. Имеем

$$\left\{ \int_g \left| \frac{k_\alpha(x''; t_\alpha)}{|x''_\alpha - t_\alpha|^\beta} - \frac{k_\alpha(x'; t_\alpha)}{|x'_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right|^{p'} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'}} \leq \left\{ \int_g \left| \frac{k_\alpha(x''; t_\alpha)}{|x''_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right|^{p'} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'}} + \left\{ \int_g \left| \frac{k_\alpha(x'; t_\alpha)}{|x'_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right|^{p'} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'}}.$$

Продолжая к обоим слагаемым применять неравенство Гельдера с показателями q и q' , получим

$$\begin{aligned} & \left\{ \int_g \left| \frac{k_\alpha(x''; t_\alpha)}{|x''_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right|^{p'} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'}} + \left\{ \int_g \left| \frac{k_\alpha(x'; t_\alpha)}{|x'_\alpha - t_\alpha|^\beta} \right|^{p'} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'}} \leq \\ & \leq \left\{ \int_g |k_\alpha(x''; t_\alpha)|^{p'q'} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'q'}} \cdot \left\{ \int_g |x''_\alpha - t_\alpha|^{-\beta p'q} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'q}} + \\ & + \left\{ \int_g |k_\alpha(x'; t_\alpha)|^{p'q'} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'q'}} \cdot \left\{ \int_g |x'_\alpha - t_\alpha|^{-\beta p'q} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'q}}. \end{aligned}$$

Применяя теорему 3.1 к интегралу по области g , получим

$$\left\{ \int_g |x'_\alpha - t_\alpha|^{-\beta p'q} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'q}} = \left(\frac{|S_1(m)| \eta^{m-\beta p'q}}{m - \beta p'q} \right)^{\frac{1}{p'q}}.$$

Оценим интеграл

$$\left\{ \int_g |x''_\alpha - t_\alpha|^{-\beta p'q} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'q}}.$$

Пусть $|x''_\alpha - x'_\alpha| < \eta/2$. Тогда $r = |x''_\alpha - t_\alpha| < |x'_\alpha - t_\alpha| + \eta/2$, но $|x'_\alpha - t_\alpha| < \eta$ и поэтому $r < 3\eta/2$. Следовательно, шар $|x'_\alpha - t_\alpha| < \eta$ заключен в шаре $r < 3\eta/2$. Отсюда имеем

$$\left\{ \int_g |x''_\alpha - t_\alpha|^{-\beta p'q} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'q}} < \left\{ \int_{r < 3\eta/2} |x''_\alpha - t_\alpha|^{-\beta p'q} dt_\alpha \right\}^{\frac{1}{p'q}} = \left(\frac{|S_1(m)|(3\eta/2)^{m-\beta p'q}}{m - \beta p'q} \right)^{\frac{1}{p'q}}.$$

Из неравенства (4.1) с учетом неравенств (4.2) и (4.3) получим

$$\begin{aligned} & \left| (K_\alpha^{(m)}u)(x'') - (K_\alpha^{(m)}u)(x') \right| \leq \\ & \leq \frac{2\varepsilon}{3} + U \|k\|_{CL_{p'q'}} \left[\left(\frac{|S_1(m)|\eta^{m-\beta p'q}}{m - \beta p'q} \right)^{\frac{1}{p'q}} + \left(\frac{|S_1(m)|(3\eta/2)^{m-\beta p'q}}{m - \beta p'q} \right)^{\frac{1}{p'q}} \right] = \\ & = \frac{2}{3}\varepsilon + U \|k\|_{CL_{p'q'}} \left(1 + \frac{3}{2} \right)^{\frac{m}{p'q}-\beta} \left(\frac{|S_1(m)|}{m - \beta p'q} \right)^{\frac{1}{p'q}} \eta^{\frac{m}{p'q}-\beta} = \frac{2}{3}\varepsilon + U \gamma \eta^{\frac{m}{p'q}-\beta}, \end{aligned}$$

где

$$\gamma = \|k\|_{CL_{p'q'}} \left(1 + \frac{3}{2} \right)^{\frac{m}{p'q}-\beta} \left(\frac{|S_1(m)|}{m - \beta p'q} \right)^{\frac{1}{p'q}}.$$

Величину η выберем настолько малой, чтобы выполнялось неравенство

$$U \gamma \eta^{\frac{m}{p'q}-\beta} < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Тогда для всех функций из $\{(K_\alpha^{(m)}u)(x)\}$ выполняется неравенство

$$\left| (K_\alpha^{(m)}u)(x'') - (K_\alpha^{(m)}u)(x') \right| < \varepsilon$$

при $|x'' - x'| < \delta$ для любой функции $u \in M$. Следовательно, множество $\{K_\alpha^{(m)}u : u \in M\}$ равномерно непрерывно в $C(D)$. $\square$

Из теорем 3.1, 4.1 и теоремы Арцела—Асколи вытекает

Теорема 4.2. Пусть выполнены условия теорем 3.1 и 4.1, тогда множество $\{K_\alpha^{(m)}u : u \in M\}$ предкомпактно в $C(D)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М. Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975.
2. Владимиров В. С. Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1976.
3. Калитвин А. С. Линейные операторы с частными интегралами. — Воронеж: ЦЧКИ, 2000.
4. Калитвин А. С., Фролова Е. В. Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория. — Липецк: ЛГПУ, 2004.
5. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
6. Михлин С. Г. Линейные уравнения в частных производных. — М.: Высшая школа, 1977.
7. Соболев С. Л. Введение в теорию кубатурных формул. — М.: Наука, 1974.
8. Трусова Н. И. Весовые частно-интегральные уравнения Фредгольма и Вольтерра второго рода в пространствах функций со смешанной анизотропностью // Дисс. к.ф.-м.н. — Казань, 2023.
9. Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P. Partial integral operators and integro-differential equations. — New York: Marcel Dekker, 2000. — DOI: [10.1201/9781482270402](https://doi.org/10.1201/9781482270402).
10. Benedek A., Panzone R. The space L_p with mixed norm // Duke Math. J. — 1961. — 28, № 3. — С. 301–324. — DOI: [10.1215/S0012-7094-61-02828-9](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-61-02828-9).
11. Lyakhov L. N., Inozemtsev A. I. Partial integrals in anisotropic Lebesgue spaces. II: Multidimensional case // J. Math. Sci. (N. Y.). — 2020. — 247, № 6. — С. 893–899. — DOI: [10.1007/s10958-020-04845-7](https://doi.org/10.1007/s10958-020-04845-7).
12. Lyakhov L. N., Inozemtsev A. I., Trusova N. I. About Fredholm equations for partial integral in $\mathbb{R}_2$ // J. Math. Sci. (N. Y.). — 2020. — 251, № 6. — С. 839–849. — DOI: [10.1007/s10958-020-05132-1](https://doi.org/10.1007/s10958-020-05132-1).

И. В. Барышева

Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия

E-mail: barysheva_iv@mail.ru, РИНЦ SPIN-код: 2918-8263, РИНЦ AuthorID: [746263](#), Scopus: [58171343100](#), ORCID: [0009-0000-6644-8113](#)

Н. И. Трусова

Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия

E-mail: trusova.nat@gmail.com, РИНЦ SPIN-код: 7119-7653, РИНЦ AuthorID: [830030](#), Scopus: [57195455908](#)

Е. В. Фролова

Липецкий государственный педагогический университет им. П. П. Семенова-Тян-Шанского, Липецк, Россия

E-mail: lsnn48@mail.ru, РИНЦ SPIN-код: 7044-5867, РИНЦ AuthorID: [178464](#), Scopus: [56908069300](#)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-227-236](#)

EDN: [ATNOMT](#)

UDC 517.98

Research article

Partial integral operators with weak singularity

I. V. Barysheva, N. I. Trusova, and E. V. Frolova

Lipetsk State Pedagogical P. Semenov-Tyan-Shansky University, Lipetsk, Russia

Abstract. We study a partial integral operator with a weak singularity in $\mathbb{R}^n$ in the anisotropic space of continuous functions with values in the space L_p , $p \in (1, \infty)$. We prove theorems on the uniform boundedness and equicontinuity of the operator under study. These theorems imply a theorem on the mapping of any bounded and equicontinuous set into a precompact set by a partial integral operator with a weak singularity acting from the space of functions continuous in some variables with values in L_p with respect to the other part of the variables to the space of continuous functions.

Keywords: partial integral, partial integral operator, partial integral operator with weak singularity, anisotropic function space, mixed norm, uniform boundedness, equicontinuity, precompactness, compactness.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors are grateful to Prof. L. N. Lyakhov for the problem formulation and express their sincere gratitude for his consultation.

Authors' contribution. All authors participated in the analysis of works devoted to the study of partial integral operators with a weak singularity in various functional spaces, the formulation of theorems, the development of schemes for their proofs and the direct implementation of the latter.

For citation: I. V. Barysheva, N. I. Trusova, E. V. Frolova, "Partial integral operators with weak singularity," *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. 72, No. 2, 227–236. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-227-236](#) EDN: [ATNOMT](#)



REFERENCES

1. O. V. Besov, V. P. Il'in, and S. M. Nikol'skii, *Integral'nye Predstavleniya Funktsiy i Teoremy Vlozheniya* [Integral Representations of Functions and Embedding Theorems], Nauka, Moscow, 1975 (in Russian).
2. V. S. Vladimirov, *Uravneniya Matematicheskoy Fiziki* [Equations of Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
3. A. S. Kalitvin, *Lineynye Operatory s Chastnymi Integralami* [Linear Operators with Partial Integrals], TsChKI, Voronezh, 2000 (in Russian).
4. A. S. Kalitvin and E. V. Frolova, *Lineynye Uravneniya s Chastnymi Integralami. S-teoriya* [Linear Partial Integral Equations. C-Theory], LGPU, Lipetsk, 2004 (in Russian).
5. J.-L. Lions, *Nekotorye Metody Resheniya Nelineynykh Kraevykh Zadach* [Some Methods of Solving Nonlinear Boundary Value Problems], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
6. S. G. Mikhlin, *Lineynye Uravneniya v Chastnykh Proizvodnykh* [Linear Partial Differential Equations], Vysshaya Shkola, Moscow, 1977 (in Russian).
7. S. L. Sobolev, *Vvedenie v Teoriyu Kubaturnykh Formul* [Introduction to the Theory of Cubature Formulas], Nauka, Moscow, 1974 (in Russian).
8. N. I. Trusova "Vesovye chastno-integral'nye uravneniya Fredgol'ma i Vol'terra vtorogo roda v prostranstvakh funktsiy so smeshannoy anizotropnost'yu" [Weighted Fredholm and Volterra partial integral equations of the second kind in spaces of functions with mixed anisotropy], *PhD Thesis*, Kazan', 2023.
9. J. M. Appell, A. S. Kalitvin, and P. P. Zabrejko, *Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations*, Marcel Dekker, New York, 2000, DOI: [10.1201/9781482270402](https://doi.org/10.1201/9781482270402).
10. A. Benedek and R. Panzone, "The space L_p with mixed norm," *Duke Math. J.*, 1961, **28**, No. 3, 301–324, DOI: [10.1215/S0012-7094-61-02828-9](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-61-02828-9).
11. L. N. Lyakhov and A. I. Inozemtsev, "Partial integrals in anisotropic Lebesgue spaces. II: Multidimensional case," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2020, **247**, No. 6, 893–899, DOI: [10.1007/s10958-020-04845-7](https://doi.org/10.1007/s10958-020-04845-7).
12. L. N. Lyakhov, A. I. Inozemtsev, and N. I. Trusova, "About Fredholm equations for partial integral in $\mathbb{R}_2$," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2020, **251**, No. 6, 839–849, DOI: [10.1007/s10958-020-05132-1](https://doi.org/10.1007/s10958-020-05132-1).

I. V. Barysheva

Lipetsk State Pedagogical P. Semenov-Tyan-Shansky University, Lipetsk, Russia

E-mail: barysheva_iv@mail.ru, eLIBRARY SPIN-code: 2918-8263, eLIBRARY AuthorID: [746263](#),

Scopus: [58171343100](#), ORCID: [0009-0000-6644-8113](#)

N. I. Trusova

Lipetsk State Pedagogical P. Semenov-Tyan-Shansky University, Lipetsk, Russia

E-mail: trusova.nat@gmail.com, eLIBRARY SPIN-code: 7119-7653, eLIBRARY AuthorID:

[830030](#), Scopus: [57195455908](#)

E. V. Frolova

Lipetsk State Pedagogical P. Semenov-Tyan-Shansky University, Lipetsk, Russia

E-mail: lsnn48@mail.ru, eLIBRARY SPIN-code: 7044-5867, eLIBRARY AuthorID: [178464](#),

Scopus: [56908069300](#)

КОАЛИЦИОННЫЕ ТЕОРЕТИКО-ИГРОВЫЕ МОДЕЛИ СТРУКТУРЫ КАПИТАЛА И ИХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Е. М. Богатов¹, Е. Г. Демидова²

¹Губкинский филиал НИТУ «МИСиС», Губкин, Россия

²Старооскольский технологический институт (филиал НИТУ «МИСиС»), Старый Оскол, Россия

Аннотация. Работа является продолжением исследований, проведенных в [2, 3]. При формировании структуры капитала предприятий (определения долей заёмных и собственных средств) важную роль играет баланс интересов собственников и менеджеров. При этом собственник заинтересован в получении максимальной отдачи от своего капитала (максимизации рентабельности собственного капитала ROE), а менеджер — в увеличении финансовой устойчивости фирмы за счёт снижения средневзвешенной стоимости капитала $WACC$. Разрешение конфликтной ситуации возможно, как показано авторами, в рамках неантагонистической теории игр, а именно в контексте биматричной игры и кооперативной игры двух лиц. В роли игрока А были выбраны собственники предприятий Π_i , а в качестве компонент его игровой матрицы — величины ROE предприятий из репрезентативной выборки, наблюдаемые в определённый период T . В роли игрока В были выбраны менеджеры предприятий Π_i , а в качестве компонент его игровой матрицы — величины вида $1/(1+WACC)$, определяемые в том же периоде T . Апробация алгоритмов нахождения равновесной по Нэшу структуры капитала для обеих моделей осуществлялась на основе реальных данных по пяти предприятиям металлургического сегмента, наблюдаемым в течение 5 лет. В результате удалось не только получить новые методы определения сбалансированной структуры капитала, но и провести анализ устойчивости полученных решений по отношению к возмущению начальных данных (редуцированных игровых матриц), что позволило рассчитать коридоры возможных изменений ROE и $WACC$ для эталонного набора предприятий Π_α в выделенном (укороченном) периоде наблюдений, а также наметить пути дальнейшего развития данной темы.

Ключевые слова: биматричные игры, кооперативные игры двух лиц, параметрический анализ, анализ устойчивости, равновесная структура капитала.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Вклад авторов. Богатов Е. М. — разработка концепции исследования, формулирование идеи, цели и задач исследования, разработка методов и процедур, написание текста рукописи. Демидова Е. Г. — сбор, обработка и анализ данных, проверка результатов, доработка выводов, редактирование текста и списка литературы.

Для цитирования: Богатов Е. М., Демидова Е. Г. Коалиционные теоретико-игровые модели структуры капитала и их параметрический анализ // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 2. С. 237–249. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-237-249](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-237-249) EDN: AUKPEA

ВВЕДЕНИЕ

Под структурой капитала в экономике принято понимать соотношение между собственными и заёмными средствами компании. К определению сбалансированной структуры капитала существует множество подходов (см., например, [5, 11]), среди которых особо выделим теоретико-игровой, берущий своё начало от работ американского исследователя С. В. Рю [16]. Рю (1985 г.)

рассмотрел модель некооперативной игры, характеризующей конфликт интересов собственников и кредиторов компании и привёл достаточные условия для нахождения Парето-оптимального решения соответствующей биматричной игры. Работа Рю стимулировала повышение интереса к применению теории игр в финансах (см. обзор [14]), однако до начала 2010-х гг. каких-либо моделей, основанных на конфликте интересов собственников и менеджеров компаний, предложено, по-видимому, не было. Ситуация поменялась в 2014 г. с выходом работы Ю. Тудосе [17], формализовавшей конфликтную ситуацию в виде антагонистической (матричной) игры и сведя её к линейной оптимизационной задаче. Подход Тудосе был продолжен авторами в заметке [2] и статье [3], где были рассмотрены модели биматричной и кооперативной игры соответственно, а также алгоритм нахождения равновесной (по Нэшу) структуры капитала в сегменте S , состоящей из пяти промышленных предприятий, финансово-экономические показатели которых наблюдались в течение пяти лет (период T). При этом результатом решения по Нэшу в смешанных стратегиях в биматричной игре является величина K^* , получаемая путём матричного умножения¹:

$$K^* = X^* C Y^*,$$

где X^* — вектор вероятностей выбора предприятия $\Pi_j \in S$, Y^* — вектор вероятностей выбора года из периода T ; C — матрица «структуры капитала», состоящая из долей собственного или заёмного капитала, зафиксированного для предприятий Π_j ($j = 1, \dots, 5$) в период T .

Нахождение арбитражного решения Нэша N в смешанных стратегиях в кооперативной игре сводилось к определению² «средневзвешенной» структуры капитала по предприятиям Π_i и Π_m , соответствующим точкам P_i и Q_m Парето-оптимального множества, между которыми (то есть на отрезке $P_i Q_m$) находится точка N . При этом весами p и q в определении оптимальной по Нэшу структуры капитала по формуле

$$K^* = pK_i + qK_j$$

являются пропорции, в которых точка N делит отрезок $P_i Q_m$ (см. [3]).

Представляется актуальным (в том числе для теории структуры капитала) выяснить, можно ли осуществить возмущение исходных данных задач (игровых матриц) в обеих постановках таким образом, чтобы равновесная структура капитала осталась без изменения? Поиску ответа на этот вопрос и посвящена настоящая статья.

1. КООПЕРАТИВНАЯ ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ ДВУХ ЛИЦ КАК МОДЕЛЬ РАВНОВЕСНОЙ СТРУКТУРЫ КАПИТАЛА

Несмотря на то, что эта модель и вариант расчёта уже были рассмотрены авторами в [3], мы приведём их ещё раз (для другого периода T и для набора S), поскольку геометрическая структура множества допустимых решений и его частей будет использоваться ниже для параметрического анализа задачи.

Как и в [2, 3], предположим, что имеется выборка n компаний из одного промышленного сегмента $\Pi_1, \Pi_2, \dots, \Pi_n$, придерживающихся сходной стратегии финансово-экономического поведения как со стороны собственников, так и со стороны менеджеров. Тогда игровую матрицу A первого игрока (обобщённого гипотетического собственника) можно определить как матрицу, состоящую из величин ROE_{ij} , наблюдаемых для предприятий Π_i в течение m лет. При этом соответствующая матрица B второго игрока (обобщённого гипотетического управляющего) будет состоять из элементов b_{ij} , $i = 1, \dots, n$; $j = 1, \dots, m$, вычисленных по формуле [4]:

$$b_{ij} = \frac{1}{1 + WACC_{ij}}. \quad (1.1)$$

Расчёт $WACC$ осуществляется по формуле

$$WACC = R_d \cdot K_d(1 - t) + R_e \cdot K_e, \quad (1.2)$$

где K_d — доля заёмного капитала, K_e — доля собственного капитала, R_d — стоимость заёмного капитала, R_e — стоимость собственного капитала, t — ставка налога на прибыль. При этом стоимость собственного капитала можно вычислить по модели $САРМ$, основанной на том, что ожидаемая

¹Назовём этот вариант расчёта равновесной структуры капитала алгебраическим.

²Этот вариант расчёта равновесной структуры капитала будем называть геометрическим.

доходность акций является суммой безрисковой процентной ставки и премии за рыночный риск акций:

$$\text{CAPM} = R_e = R_f + \beta_i(R_m - R_f),$$

где R_f — безрисковая ставка; R_e — стоимость собственного капитала; R_m — среднерыночная ставка доходности; β_i — коэффициент чувствительности доходности акций к изменениям рыночной доходности (подробности см. в [3]).

Стратегией игрока I будет являться выбор им определённого года (строки в матрице A), а игрока II — выбор конкретного предприятия (столбца в матрице B).

В качестве эмпирической базы будем использовать данные бухгалтерской отчетности пяти крупных компаний металлургической отрасли за пять лет [13], на основе которых определим рентабельность собственного капитала ROE, следуя [5] (см. табл. 1).

ТАБЛИЦА 1. Рентабельность собственного капитала (ROE) пяти металлургических предприятий России

TABLE 1. Return on equity (ROE) of five Russian metallurgical enterprises

Годы/Years	Предприятия/Enterprises				
	П1	П2	П3	П4	П5
2020	0,21	0,24	0,56	0,44	0,36
2021	0,60	0,78	1,01	0,77	0,43
2022	0,14	0,36	0,36	-0,15	0,35
2023	0,20	0,32	0,27	0,09	0,91
2024	0,15	0,09	0,26	0,11	0,32

Здесь:

П1 — «Магнитогорский металлургический комбинат»,

П2 — «Новолипецкий металлургический комбинат»,

П3 — «Северсталь»,

П4 — «Евраз Нижнетагильский металлургический комбинат»,

П5 — «Трубная металлургическая компания».

Таким образом, платёжная матрица A будет иметь вид:

$$A = \begin{pmatrix} 0,21 & 0,24 & 0,56 & 0,44 & 0,36 \\ 0,60 & 0,78 & 1,01 & 0,77 & 0,43 \\ 0,14 & 0,36 & 0,36 & -0,15 & 0,35 \\ 0,20 & 0,32 & 0,27 & 0,09 & 0,91 \\ 0,15 & 0,09 & 0,26 & 0,11 & 0,32 \end{pmatrix} \quad (1.3)$$

Пользуясь информацией о дивидендных выплатах по акциям анализируемых компаний, рассчитаем средневзвешенную стоимость капитала WACC по формуле (1.2) на основе сведений о долях заёмного и собственного капитала, а также о его стоимости в предположении о том, что средняя доходность собственного капитала определяется на основе выплаченных дивидендов. Результат сведём в табл. 2.

ТАБЛИЦА 2. Средневзвешенная стоимость капитала пяти металлургических предприятий России

TABLE 2. Weighted average cost of capital of five metallurgical enterprises in Russia

Годы/Years	Предприятия/Enterprises				
	П1	П2	П3	П4	П5
2020	0,0576	0,0606	0,0465	0,0298	0,0630
2021	0,0846	0,0943	0,0516	0,0289	0,0459
2022	0,0421	0,0157	0,0356	0,0282	0,0548
2023	0,0665	0,1132	0,0852	0,0386	0,0641
2024	0,0870	0,0231	0,0708	0,0525	0,0768

Вычислим элементы матрицы B на основе формулы (1.1), исходя из сведений, представленных в табл. 2. В результате получим платёжную матрицу следующего вида:

$$B = \begin{pmatrix} 0,946 & 0,943 & 0,956 & 0,971 & 0,941 \\ 0,922 & 0,914 & 0,951 & 0,972 & 0,956 \\ 0,960 & 0,985 & 0,966 & 0,973 & 0,948 \\ 0,938 & 0,898 & 0,921 & 0,963 & 0,940 \\ 0,920 & 0,977 & 0,934 & 0,950 & 0,929 \end{pmatrix} \quad (1.4)$$

Будем считать, что акционеры и менеджеры выбранных нами компаний, интересы которых описываются матрицами A и B , могут вступать в кооперацию, допускающую совместный выбор стратегий, в том числе смешанных. Пользуясь известным алгоритмом решения кооперативной игры двух лиц (см., например, [10, гл. 3]), обозначим через U — множество всех точек плоскости Oxy , соответствующим значениям выигрышей игроков при применении ими своих стратегий вида

$$\lambda(x, y) + (1 - \lambda)(x', y').$$

Здесь $\lambda \in [0, 1]$, а (x, y) и (x', y') — пара чистых стратегий, которым соответствуют точки (a_{ij}, b_{ij}) с координатами, взятыми из матриц (1.3) и (1.4). В итоге множество U будет представлять собой выпуклую комбинацию 25 точек:

- $M_1, \dots, M_5$ с координатами (a_{1j}, b_{1j}) , $j = 1, \dots, 5$;
- $L_1, \dots, L_5$ с координатами (a_{2j}, b_{2j}) , $j = 1, \dots, 5$;
- $K_1, \dots, K_5$ с координатами (a_{3j}, b_{3j}) , $j = 1, \dots, 5$;
- $N_1, \dots, N_5$ с координатами (a_{4j}, b_{4j}) , $j = 1, \dots, 5$;
- $Q_1, \dots, Q_5$ с координатами (a_{5j}, b_{5j}) , $j = 1, \dots, 5$;

которое в нашем случае являет собой многоугольник с вершинами $K_4 K_2 L_4 L_3 L_2 N_2$ (см. рис. 1).

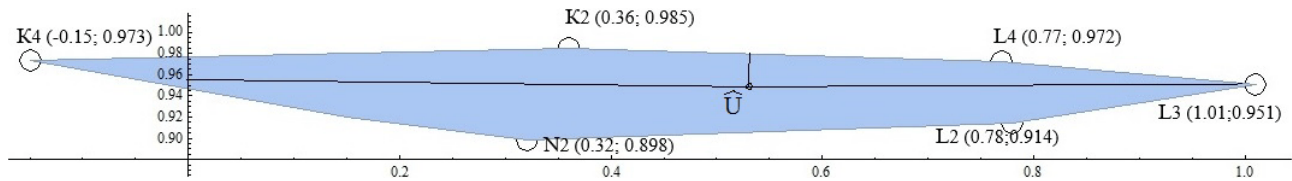


Рис. 1. Область допустимых решений и переговорное множество кооперативной задачи с платёжными матрицами A , B . Горизонтальная ось — ROE .

FIG. 1. The feasible region and the negotiating set of a cooperative problem with payoff matrices A , B . The horizontal axis is ROE .

Выделим из U Парето-оптимальное множество, удовлетворяющее условию того, что увеличение выигрыша одного игрока возможно только за счёт уменьшения выигрыша его партнёра — северо-восточную границу множества U . В нашем случае это ломаная $K_2 L_4 L_3$. Придерживаясь алгоритма решения кооперативной игры двух лиц методом арбитражных схем (см., например [1]), определим точку угрозы $\hat{U}(\hat{u}_1, \hat{u}_2)$. Её координаты — это величины выигрышей игроков v_A и v_B , которые они могут получить, не заключая каких-либо соглашений друг с другом. При оценке гарантированного уровня v_A будем исходить из того, что игрок II может вести себя, как противник игрока I в антагонистической игре с платёжной матрицей A .

Перейдём к её решению, для чего редуцируем матрицу A на основе принципа доминирования [9, §1.8]. Поскольку элементы первого столбца A меньше элементов её второго столбца ($B_1 < B_2$), а элементы второго столбца A , в свою очередь, меньше элементов её третьего столбца ($B_2 < B_3$), то столбцы B_2 и B_3 можно из рассмотрения исключить, поскольку противник игрока I их заведомо не выберет. Получим редуцированную матрицу вида:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0,21 & 0,44 & 0,36 \\ 0,60 & 0,77 & 0,43 \\ 0,14 & -0,15 & 0,35 \\ 0,20 & 0,09 & 0,91 \\ 0,15 & 0,11 & 0,32 \end{pmatrix}.$$

Рассуждая зеркальным образом по отношению к строкам ($A_1 > A_3$, $A_2 > A_1$, $A_2 > A_5$), исключаем строки A_1 , A_3 и A_5 , так как их выбор заведомо невыгоден игроку I. В итоге будем иметь:

$$\bar{A} = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,77 & 0,43 \\ 0,2 & 0,09 & 0,91 \end{pmatrix}.$$

Эта матрица не имеет седловой точки, но допускает решение в смешанных стратегиях, которые можно найти геометрически (см., например [6]) — рис. 2).

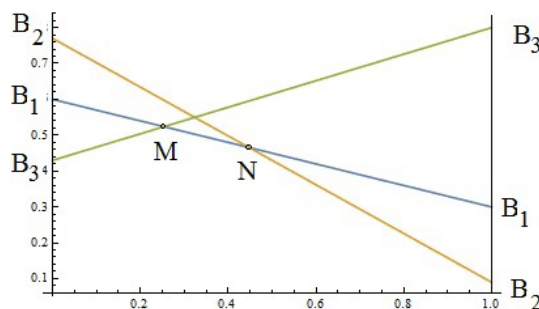


Рис. 2. Максиминное решение антагонистической игры с матрицей $\bar{A}$

FIG. 2. Maximin solution of an antagonistic game with matrix $\bar{A}$

Система уравнений для определения выигрыша v_A игрока I и вероятности p будет иметь вид

$$\begin{cases} 0,43p + 0,91(1 - p) = v, \\ 0,6p + 0,2(1 - p) = v. \end{cases}$$

Таким образом, $p = 71/88$; $\hat{u}_1 = v_A = 23/44$.

Найдём теперь цену игры с платёжной матрицей B . Исключая доминируемые столбцы B_1 , B_3 , B_5 ($B_4 > B_3$, $B_4 > B_3$, $B_4 \geq B_1$), получаем матрицу

$$\bar{B} = \begin{pmatrix} 0,943 & 0,971 \\ 0,914 & 0,972 \\ 0,985 & 0,973 \\ 0,898 & 0,963 \\ 0,977 & 0,950 \end{pmatrix}.$$

Исключим доминируемые строки A_1 , A_2 , A_3 (невыгодные для противника игрока II стратегии, поскольку они дают игроку II больший выигрыш), опираясь на неравенства $A_3 > A_2$, $A_1 > A_4$, $A_2 > A_4$. Получим редуцированную матрицу

$$\bar{\bar{B}} = \begin{pmatrix} 0,898 & 0,963 \\ 0,977 & 0,950 \end{pmatrix},$$

которая не имеет седловой точки. Для нахождения решения матричной игры в смешанных стратегиях, обозначим через q вероятность выбора игроком II первого столбца (предприятия П2), тогда $(1 - q)$ — это вероятность выбора им второго столбца (предприятия П4). При этом система уравнений для определения выигрыша v_B игрока II и вероятности q будет иметь вид (см., например, [1])

$$\begin{cases} 0,898q + 0,963(1 - q) = v, \\ 0,977q + 0,950(1 - q) = v. \end{cases}$$

Решением этой системы будет пара чисел $(0,1413; 0,9538)$, второе из которых и является выигрышем игрока v_B . Таким образом, $\hat{u}_2 = v_B = 0,9538$ и точка угрозы $\hat{U}$ имеет координаты $(23/44; 0,9538)$, а переговорное множество S , соответствующее увеличенным выигрышам игроков при совместном выборе стратегий, представляет собой трапецию $\hat{U}QL_4D$, высекаемую из множества допустимых решений U прямыми $x = 23/44$ и $y = 0,9538$.

Действуя согласованно, игроки всегда могут договориться выбирать стратегии, соответствующие точкам на множестве $L = QL_4D$, являющимся пересечением множества S с Парето-оптимальным, поскольку это выгодно обеим сторонам. Именно на L будет располагаться точка арбитражного решения Нэша N , в которой достигается максимум произведения превышения выигрышей каждого из игроков над гарантированными выигрышами, которые могут быть получены без кооперирования. Поскольку область допустимых решений U выпукло, замкнуто и ограничено сверху, то по теореме Нэша (см., например, [10, §3.2]), точка N существует, единственна и представляет максимум функции полезности вида $g(x, y) = (x - v_A)(y - v_B)$ на множестве L .

Для решения задачи условной оптимизации

$$\begin{cases} g(M) \rightarrow \max \\ M \in L \end{cases} \quad (1.5)$$

рассмотрим два случая.

Случай 1. Точка M принадлежит отрезку QL_4 . Составим уравнение прямой, проходящей через точки $K_2(0,36; 0,985)$ и $L_4(0,77; 0,972)$, получим $y = 0,996415 - 0,0317073x$.

Таким образом, функция полезности приобретёт вид $g(x, y) = (x - 23/44)(y - 0,9538)$ на отрезке QL_4 , что после преобразований даст следующее квадратичное выражение:

$$g(x) = -0,0317x^2 + 0,0592x - 0,0223 \quad (1.6)$$

Найдём абсциссу вершины параболы (1.6) по обычной формуле $x_0 = -b/2a$, получим $x_0 \approx 0,934$. Поскольку x_0 не принадлежит проекции $[a, b]$ отрезка QL_4 на ось абсцисс, наибольшее значение функции $g(x)$ будет достигаться в правой границе этого отрезка. Найдём это значение, подставив в формулу (1.6) вместо x число 0,77, получим $g_{\max}^1 \approx 0,0045$.

Случай 2. Точка M принадлежит отрезку L_4D .

Составим уравнение прямой, проходящей через точки $L_4(0,77; 0,972)$ и $L_3(1,01; 0,951)$, получим $y = 1,03938 - 0,0879x$.

Функция полезности будет иметь вид $g(x) = -0,0875x^2 + 0,131319x - 0,044735$.

Она достигает максимума в точке $x_1 \approx 0,7504$, которая не принадлежит проекции L_4D на ось абсцисс. В данном случае максимальное значение функции полезности будет достигаться в левой границе проекции L_4L_3 на ось абсцисс, поэтому $g_{\max}^2 = g(0,7504) \approx 0,0045$ и $g_{\max}^2 = g_{\max}^1$ и решением задачи (1.5) будет точка L_4 с абсциссой $x = 0,77$ (см. рис. 1) и ординатой $y = 0,972$.

Таким образом, арбитражное решение Нэша находится в точке $L_4(0,77; 0,972)$; ему соответствует оптимальная (по Парето) величина рентабельности собственного капитала ROE , равная 0,77 и структура капитала предприятия П4 в 2021 г., состоящая из 51,3% собственных и 48,7% заёмных средств.

2. ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ КОАЛИЦИОННОЙ ИГРОВОЙ МОДЕЛИ (ГЕОМЕТРИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ)

Как и в [15], проведём анализ игровой ситуации на основании «сохранения рисунка» игры. Введём параметр ε возмущения редуцированной матрицы $\bar{A}$ в предположении о том, что угловые точки, образующие северо-восточную границу области допустимых решений (K_2, L_4, L_3) остались прежними:

$$A_\varepsilon = \begin{pmatrix} 0,6 & 0,77 & 0,43 \\ 0,2 + \varepsilon & 0,09 & 0,91 - \varepsilon \end{pmatrix}.$$

Для нахождения абсциссы точки угрозы необходимо решить матричную игру с платёжной матрицей A_ε . Следуя стандартной логике геометрического способа решения игры 2×3 (см., например, [6, §1]), найдём нижнюю огибающую семейства трёх прямых, соответствующих стратегиям противника игрока A (столбцам матрицы A_ε , которые обозначим через B_1, B_2, B_3) (см. рис. 2).

Ею будет ломаная B_3MNB_2 . При заданном значении ε (на рисунке $\varepsilon = 0,1$) точка M будет являться точкой минимакса. Найдём её координаты, как точки пересечения прямых B_1B_1 и B_3B_3 , считая, что первая строка матрицы A_ε играет с вероятностью p :

$$0,43p + (0,91 - \varepsilon)(1 - p) = 0,6p + (0,2 + \varepsilon)(1 - p). \quad (2.1)$$

Отсюда $p = (0,71 - 2\varepsilon)/(0,88 - 2\varepsilon)$. Найдём ординату точки M , подставив в правую часть равенства (2.1), получим $y_M = (0,515\varepsilon - 0,23)/(\varepsilon - 0,44)$. Для сохранения рисунка игры (точка M остаётся точкой минимакса) ордината точки N не должна превышать y_M . Найдём координаты точки N , как точки пересечения прямых B_1B_1 и B_2B_2 :

$$0,77p + 0,09(1 - p) = 0,6p + (0,2 + \varepsilon)(1 - p).$$

Получаем $p = (0,11 + \varepsilon)/(0,28 + \varepsilon)$. Тогда $y_N = (0,77\varepsilon + 0,1)/(\varepsilon + 0,28)$. Решая неравенство $y_M \geq y_N$, получим

$$\frac{0,515\varepsilon - 0,23}{\varepsilon - 0,44} \geq \frac{0,77\varepsilon + 0,1}{\varepsilon + 0,28},$$

что даёт промежутки возможного изменения ε :

$$\varepsilon \in (-0,28; 0,2] \cup [0,4; 0,44). \quad (2.2)$$

При этом абсцисса точки угрозы $u_1 = v_A(\varepsilon) = (0,515\varepsilon - 0,23)/(\varepsilon - 0,44)$ должна принадлежать проекции отрезка K_2L_4 на ось абсцисс: $u_1 \in (0,36, 0,77)$, откуда получаем ещё одно (двойное) неравенство:

$$0,36 < \frac{0,515\varepsilon - 0,23}{\varepsilon - 0,44} < 0,77,$$

решением которого являются два промежутка: $(-\infty; 0,426667) \cup (0,461935; +\infty)$. С учётом (2.2) это даёт

$$\varepsilon \in (-0,28; 0,2] \cup [0,4; 0,427). \quad (2.3)$$

Если предполагать, что мы имеем дело с безубыточными предприятиями ($a_{ij} \geq 0$), то промежуток (2.3) переходит в

$$\varepsilon \in [-0,2; 0,2] \cup [0,4; 0,427).$$

Подставляя минимальное и максимальное значения ε в последнюю строку матрицы A_ε , получим $\text{ROE}_{23}^{\min} = 0,473$; $\text{ROE}_{21}^{\max} = 0,627$. По отношению к исходным значениям ROE ($\text{ROE}_{23}^0 = 0,91$, $\text{ROE}_{21}^0 = 0,2$) получается предел уменьшения ROE в размере 48% (предприятие П1), предел увеличения ROE в размере 213% (предприятие П5) соответственно. Таким образом, один из репрезентативных экономических агентов (П5) имеет запас роста рентабельности собственного капитала более, чем в два раза, причём равновесная (по сегменту) структура капитала при условии наличия такого роста будет оставаться прежней¹.

Перейдём к аналогичной задаче для матрицы B , предполагая, что исходные данные (WACC) могут измениться, что приведёт к новой матрице $\bar{B}$, которую обозначим через B_δ :

$$B_\delta = \begin{pmatrix} 0,898 + \delta & 0,963 \\ 0,977 - \delta & 0,950 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

Для решения игры с матрицей B_δ в смешанных стратегиях составим уравнение

$$(0,898 + \delta)q + 0,963(1 - q) = (0,977 - \delta)q + 0,95(1 - q),$$

где q — вероятность выбора вторым игроком первой чистой стратегии (первого столбца). Решение этого уравнения выглядит так: $q = \frac{13}{4(23 - 500\delta)}$. При этом выигрыш игрока будет равен $u_2 = u_2(\delta) = \frac{87,751 - 1900\delta}{4(23 - 500\delta)}$.

Для того, чтобы точка угрозы не вышла за пределы переговорного множества, достаточно, чтобы величина u_2 принадлежала проекции отрезка K_2L_4 на ось Y — промежутку $[0,951; 0,985]$. Это даёт следующие пределы для возможного изменения δ :

$$\delta \in [-0,1295; 0,041]. \quad (2.5)$$

Вернёмся к исходным для матрицы B данным — величинам WACC. Обращая формулу $b = 1/(1 + \text{WACC})$, получим

$$\text{WACC} = \frac{1}{b} - 1,$$

¹Наличие указанной возможности свидетельствует о потенциале роста доходности собственного капитала во всём сегменте S .

тогда для компонент первого столбца в (2.3) находим

$$WACC_{11} = \frac{1}{0,898 + \delta} - 1 = \frac{0,102 - \delta}{0,898 + \delta}; \quad WACC_{21} = \frac{1}{0,977 - \delta} - 1 = \frac{0,023 + \delta}{0,977 - \delta}.$$

Подставляя крайние границы промежутка изменения δ из (2.5) в последние формулы, получим:

$$WACC_{11}^{\max} \approx 0,30; \quad WACC_{11}^{\min} \approx 0,065; \quad WACC_{21}^{\max} \approx 0,068; \quad WACC_{21}^{\min} \approx -0,096.$$

Таким образом, возможный размах изменения $WACC$ на предприятии П2 (по отношению к исходным значениям $WACC_{11}^0 = 0,1132$, $WACC_{21}^0 = 0,0231$) может составлять от -43% до 172% (2023 г.) и до 194% (2024 г.), что свидетельствует о его финансовой устойчивости.

Подводя итог, заключаем, что найдены своего рода пределы устойчивости структуры капитала по отношению к изменению ROE и $WACC$ на предприятиях, формирующих заданный промышленный сегмент.

3. БИМАТРИЧНАЯ ИГРОВАЯ МОДЕЛЬ И ЕЁ ПАРАМЕТРИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

Будем предполагать, что игроки не вступают в коалицию, не имеют возможности договориться и играют «каждый сам за себя». Тогда мы имеем дело с классической (неантагонистической) биматричной игрой, решать которую будет традиционным способом (см., например, [6]). Обозначая строки матрицы A в (1.3) через A_i ($i = 1, \dots, 5$) и опираясь на принцип доминирования стратегий, в силу неравенств $A_2 > A_1$, $A_2 > A_3$, $A_2 > A_5$, исключаем из рассмотрения строки A_1 , A_3 , A_5 . Остаётся матрица A_r вида

$$A_r = \begin{pmatrix} 0,60 & 0,78 & 1,01 & 0,77 & 0,43 \\ 0,20 & 0,32 & 0,27 & 0,09 & 0,91 \end{pmatrix}.$$

Принцип доминирования стратегий для столбцов матрицы B в силу неравенств $B_4 > B_3$, $B_4 > B_5$, $B_4 > B_1$ позволяет исключить из рассмотрения стратегии B_1 , B_3 , B_5 . После редуцирования останется матрица B_r вида

$$B_r = \begin{pmatrix} 0,943 & 0,971 \\ 0,914 & 0,972 \\ 0,985 & 0,973 \\ 0,898 & 0,963 \\ 0,977 & 0,950 \end{pmatrix}.$$

Предполагая далее, для простоты, что игрок I знает, какие предприятия оставлены игроком II (или, наоборот, что игроку II известны годы, которые игрок I считает наиболее благоприятными), редуцируем матрицы A_r и B_r повторно. Получим двумерную биматричную игру с матрицами $\bar{A}_r$ и $\bar{B}_r$:

$$\bar{A}_r = \begin{pmatrix} 0,78 & 0,77 \\ 0,32 & 0,09 \end{pmatrix}, \quad \bar{B}_r = \begin{pmatrix} 0,914 & 0,972 \\ 0,898 & 0,963 \end{pmatrix}. \quad (3.1)$$

В этой игре есть седловая точка (A_1, B_2) , которой соответствует ROE , равное 77% (предприятие П4, 2021-й год) и $WACC$, равный $0,0288$ (см. (2.4)). Отвечающая этому предприятию структура капитала предполагает наличие $51,3\%$ собственных средств и $49,7\%$ заёмных (табл. 3).

ТАБЛИЦА 3. Структура капитала предприятий выбранного сегмента

TABLE 3. Capital structure of enterprises in the selected segment

Показатель/Indicator	Годы/Years	П1	П2	П3	П4	П5
K_e (Доля собственного капитала/Share of equity)	2020	0,57	0,45	0,40	0,41	0,14
	2021	0,63	0,53	0,42	0,513	0,05
	2022	0,70	0,50	0,58	0,44	0,05
	2023	0,70	0,70	0,61	0,40	0,09
	2024	0,75	0,65	0,55	0,37	0,10

Решение Нэша в смешанных стратегиях для матриц (3.1) отсутствует. Следуя логике, приведённой в [15], осуществим возмущения матриц $\bar{A}_r$, $\bar{B}_r$ таким образом, чтобы игра стала иметь

решение в смешанных стратегиях, а седловая точка отсутствовала¹. Для этого достаточно одновременно уменьшить компоненты матриц $\bar{A}_r$, $\bar{B}_r$ (a_{11} и b_{12}) таким образом, чтобы выполнялись неравенства:

$$\begin{cases} 0 < a_{11}(\varepsilon) < 0,32, \\ 0 < b_{12}(\delta) < 0,914. \end{cases} \quad (3.2)$$

Сами матрицы в этом случае примут вид:

$$A_r^\varepsilon = \begin{pmatrix} 0,78 - \varepsilon & 0,77 \\ 0,32 & 0,09 \end{pmatrix}, \quad B_r^\delta = \begin{pmatrix} 0,914 & 0,972 - \delta \\ 0,898 & 0,963 \end{pmatrix}. \quad (3.3)$$

Тогда (3.2) влечёт выполнение неравенств:

$$\begin{cases} 0,46 < \varepsilon < 0,78, \\ 0,058 < \delta < 0,972. \end{cases} \quad (3.4)$$

Обозначим равновесную смешанную стратегию игрока I через $X = (p, 1 - p)$; равновесную смешанную стратегию игрока II — через $Y = (q, 1 - q)^T$, где $p, q \in [0, 1]$. Условие приемлемости ситуации (X, Y) для обоих игроков имеют вид [6]:

$$A_i Y^T \leq X A Y^T; \quad i = 1, 2 \quad (3.5)$$

$$X B_j \leq X B Y^T; \quad j = 1, 2 \quad (3.6)$$

где A_i — i -я строка матрицы A_r^ε ; B_j — j -й столбец матрицы B_r^δ .

В предположении о том, что игра с матрицами (3.3) не имеет решений в чистых стратегиях, для приемлемой ситуации в силу (3.5) получаем равновесную стратегию второго игрока:

$$Y^* = \left(\frac{34}{11 + 50\varepsilon}, \frac{50\varepsilon - 23}{11 + 50\varepsilon} \right). \quad (3.7)$$

Из условия (3.6) определяем равновесную стратегию первого игрока:

$$X^* = \left(\frac{65}{7 + 1000\delta}, \frac{1000\delta - 58}{7 + 1000\delta} \right). \quad (3.8)$$

Рассчитаем теперь выигрыши игроков I и II по известным формулам $H_1 = X^* A (Y^*)^T$ и $H_2 = X^* B (Y^*)^T$, получим:

$$H_1(\varepsilon, \delta) = \frac{61,67 + 31,5\varepsilon + 8810\delta + 4500\varepsilon\delta}{(11 + 50\varepsilon)(7 + 1000\delta)}, \quad (3.9)$$

$$H_2(\varepsilon, \delta) = \frac{80,586 + 366,3\varepsilon + 9878\delta + 44900\varepsilon\delta}{(11 + 50\varepsilon)(7 + 1000\delta)}. \quad (3.10)$$

Для нахождения границ возможных выигрышей игроков достаточно решить задачу на экстремум для функций двух переменных (3.9), (3.10), заданных в прямоугольнике Π в системе координат (ε, δ) , определяемом неравенствами (3.4):

$$\begin{cases} H_i(\varepsilon, \delta) \rightarrow \max \\ (\varepsilon, \delta) \in \Pi; \quad i = 1, 2 \end{cases} \quad (3.11)$$

$$\begin{cases} H_i(\varepsilon, \delta) \rightarrow \min \\ (\varepsilon, \delta) \in \Pi; \quad i = 1, 2 \end{cases} \quad (3.12)$$

Применяя к задачам (3.11)-(3.12) стандартные методы дифференциального исчисления, получим:

$$H_1^{\min} = H_1(0,78; 0,88) \approx 0,2464 = \text{ROE}_1; \quad (3.13)$$

$$H_1^{\max} = H_1(0,46; 0,71) \approx 0,3199 = \text{ROE}_2; \quad (3.14)$$

$$H_2^{\min} = H_2(0,748; 0,97) \approx 0,899; \quad (3.15)$$

¹Максимальные элементы в столбцах матрицы $\bar{A}_r$ не совпадают с максимальными элементами в строках матрицы $\bar{B}_r$.

$$H_2^{\max} = H_2(0,744; 0,058) \approx 0,914. \quad (3.16)$$

Из этих результатов следует, что в рамках указанных возмущений величина ROE может варьироваться от 24,64% до 31,99%, а величина $WACC$ может находиться в пределах от 0,0941 до 0,112 (см. формулу (2.5)). При этом будет наблюдаться различная структура капитала, определяемая равенством¹:

$$K_\alpha = X_\alpha C Y_\alpha,$$

где C — фрагмент матрицы заёмного/собственного капитала из табл. 3, соответствующей предпрятиям П2, П4 для 2021 и 2023 гг.; $X_\alpha = X_\alpha(\delta)$, $Y_\alpha = Y_\alpha(\varepsilon)$ — стратегии игроков I и II, получаемые из формул (3.7) и (3.8) путём подстановки величин δ и ε , фигурирующих в качестве аргументов функций H_i ($i = 1, 2$) в формулах (3.13)-(3.14).

Переходя к первому случаю ($\delta = 0,88$, $\varepsilon = 0,78$), получим:

$$K_1 = \begin{pmatrix} 65 & 822 \\ 887 & 887 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,53 & 0,513 \\ 0,7 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,68 \\ 0,32 \end{pmatrix} \approx 0,5982.$$

Этому случаю соответствует величина ROE , равная 24,64%.

Для второго случая ($\delta = 0,71$, $\varepsilon = 0,46$) имеем:

$$K_2 = \begin{pmatrix} 65 & 652 \\ 717 & 717 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0,53 & 0,513 \\ 0,7 & 0,4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \approx 0,6846.$$

Ему соответствует $ROE \approx 32\%$.

Таким образом, с точки зрения игрока I желаемый процент собственного капитала должен находиться в пределах $P_1 = [59,82; 68,46]$.

Перейдём к позиции игрока II. Для случая ($\delta = 0,97$, $\varepsilon = 0,478$) выводим:

$$K_3 = \begin{pmatrix} 65 & 917 \\ 977 & 977 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,53 & 0,513 \\ 0,7 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 85 \\ 121 \\ 36 \\ 121 \end{pmatrix} \approx 0,605.$$

Соответствующая величина $WACC$ будет равна 11,23%.

Для последнего случая ($\delta = 0,058$, $\varepsilon = 0,744$) вычисляем:

$$K_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0,53 & 0,513 \\ 0,7 & 0,4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 170 \\ 241 \\ 71 \\ 241 \end{pmatrix} \approx 0,525.$$

Такому проценту (52,5) собственного капитала соответствует $WACC$, равный 9,4%.

Получается, что предпочтительный для игрока II процент собственного капитала K будет находиться в пределах $P_2 = [52,5; 60,5]$. Пересечение промежутков P_1 и P_2 даст сегмент P_2 , определяющий пределы варьирования K , в рамках которых возможно сохранение баланса экономических интересов игроков (собственников и менеджеров).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Возможности реализации представленного алгоритма параметрического анализа кооперативной и биматричной игровых моделей структуры капитала ограничены. Существенное значение имеет размерность редуцированных матриц $\bar{A}$, $\bar{B}$: $\dim \bar{A} \leq 3$, $\dim \bar{B} \leq 3$ (в нашем случае это соответствует случаю не более трёх «эталонных»² предприятий, оставшихся в репрезентативной выборке) и матриц A_r , B_r : $\dim A_r = \dim B_r = 2$ (это соответствует выбору «эталонного» периода,

¹Отметим, что способ нахождения равновесной (по Нэшу) структуры капитала предполагает, по сути, наличие трёх матриц — игровых матриц A и B , связанных с ценой капитала и его рентабельностью, а также «внеигровой» матрицы C , связанной со структурой капитала.

²С точки зрения экономики это говорит о существовании «ядра предприятий» в выбранном сегменте, на финансово-кредитную политику которых в эталонном периоде целесообразно ориентироваться остальным предпрятиям сегмента.

состоящего из двух лет). Если для количества строк (m) матрицы $\bar{A}$ и столбцов (n) матрицы $\bar{B}$ будут выполняться неравенства

$$\begin{cases} n \geq 3, \\ m \geq 3, \end{cases}$$

то, при отсутствии седловых точек, придётся находить решение соответствующих матричных игр путём перехода к эквивалентной задаче линейного программирования (см., например, [8, гл. III]), что уже не позволяет апеллировать к тезису о сохранении рисунка игры для коалиционного случая. Увеличение размерности матриц A_r , B_r (в отсутствии седловой точки) в свою очередь, приведёт к необходимости использования итерационного алгоритма Лемке—Хоусона (см., например, [7]), что представляется более сложным, но реальным вариантом. Здесь появляется возможность для добавления ещё одного параметра в матрицы A_r и B_r ($A_r = A_r(\varepsilon_i)$, $B_r = B_r(\delta_i)$, $i = 1, 2$) и проведения двухпараметрического анализа игровой ситуации (см. [15]), что, в итоге, приведёт к задачам на экстремум для функций четырёх переменных $H_j = H_j(\varepsilon_i, \delta_i)$; $j = 1, 2$.

Перспективным, на наш взгляд, является переход от дискретных игровых моделей структуры капитала к непрерывным (к дифференциальным играм), что позволит рассматривать вопросы устойчивости решений в контексте теории динамических систем [12]. Но эта тема требует отдельной серьёзной проработки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безруков А. Б., Саитгараев С. С. Прикладная теория игр: учеб. пособие. — Челябинск: Челяб. гос. унив., 2001.
2. Богатов Е. М., Демидова Е. Г. Теоретико-игровая модель структуры капитала: биматричный подход // В сб.: «Современные методы прикладной математики, теории управления и компьютерных технологий (ПМТУКТ-2025): Сб. тр. Международной научной конференции, Воронеж, 3–5 декабря 2025 г.». — Воронеж: Научная книга. — С. 18–20.
3. Богатов Е. М., Демидова Е. Г. Теоретико-игровое моделирование структуры капитала // Цифр. модели и решения. — 2026. — 5, № 1. — С. 53–76. — DOI: [10.29141/2949-477X-2026-5-1-4](https://doi.org/10.29141/2949-477X-2026-5-1-4).
4. Гулюгина Т. И. Теоретико-игровая модель оптимизации структуры капитала компании // Вопр. экономики и права. — 2012. — 46. — С. 100–104.
5. Демидова Е. Г., Богатов Е. М. Моделирование структуры корпоративного капитала с применением формулы приращений // Вопр. экономики. — 2023. — № 6. — С. 62–75. — DOI: [10.32609/0042-8736-2023-6-62-75](https://doi.org/10.32609/0042-8736-2023-6-62-75).
6. Конюховский П. В., Малова А. С. Теория игр. — М.: ЮРАЙТ, 2014.
7. Набатова Д. С. Обеспечение сходимости для вычислительного алгоритма Лемке—Хоусона решения биматричной игры // Соврем. мат. и ее прилож. — 2015. — 95. — С. 100–113.
8. Оуэн Г. Теория игр. — М.: Мир, 1971.
9. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр. — СПб.: БХВ-Петербург, 2014.
10. Стронгин Р. Г. Исследование операций и модели экономического поведения. — М.: ИНТУИТ, 2016.
11. Шарикова О. В. Определение оптимальной структуры капитала российских организаций // Корпорат. финансы. — 2013. — № 1. — С. 33–43. — DOI: [10.17323/j.jcfr.2073-0438.7.1.2013.34-46](https://doi.org/10.17323/j.jcfr.2073-0438.7.1.2013.34-46).
12. Якушкина Т. С. О распределенной репликаторной системе, соответствующей биматричной игре // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Выч. мат. и киберн. — 2016. — № 1. — С. 19–27.
13. Центр раскрытия корпоративной информации // Интерфакс [электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://www.e-disclosure.ru> (дата обращения: 15.06.2026).
14. Allen F., Morris S. Game theory models in finance // В сб.: «Game Theory and Business Applications». — Boston: Springer, 2013. — С. 17–41. — DOI: [10.1007/978-1-4614-7095-3_2](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7095-3_2).
15. Bogatov E. M., Bogatova N. E. Research of the problem of fair distribution of fishing quotas by the methods of game theory // J. Math. Sci. (N. Y.). — 2024. — 285, № 3. — С. 316–327. — DOI: [10.1007/s10958-024-07444-y](https://doi.org/10.1007/s10958-024-07444-y).
16. Ryu S. W. Game theoretic approach to the capital structure and investment decision problems of a levered firm. — Philadelphia: Univ. Pennsylvania, 1985.
17. Tudose B. M. Game theory: minimising the cost of capital vs. maximising the return of investors // Studies and Scientific Researches. Economics Edition. — 2014. — 20. — DOI: [10.29358/sceco.v0i20.264](https://doi.org/10.29358/sceco.v0i20.264).

Е. М. Богатов

Губкинский филиал НИТУ «МИСиС», Губкин, Россия

E-mail: embogatov@inbox.ru, РИНЦ SPIN-код: 4609-9235, РИНЦ AuthorID: [14859](#), ResearcherID: [GWR-2097-2022](#), Scopus: [8912933400](#), ORCID: [0000-0002-4897-0394](#)

Е. Г. Демидова

Старооскольский технологический институт (филиал НИТУ «МИСиС»), Старый Оскол, Россия

E-mail: dmitrikey@mail.ru, РИНЦ SPIN-код: 1270-9040, РИНЦ AuthorID: [774582](#), ResearcherID: [KLY-7919-2024](#), ORCID: [0000-0001-8496-973X](#)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-237-249](#)

EDN: [AUKPEA](#)

UDC 519.83

Research article

Coalition game-theoretic models of capital structure and their parametric analysis

Е. М. Bogatov¹ and Е. Г. Demidova²

¹National University of Science and Technology “MISIS,” Gubkin branch, Gubkin, Russia

²Starooskol'skii Technological Institute (branch of NUST “MISIS”), Starii Oskol, Russia

Abstract. This work is a continuation of the research conducted in [2,3]. When forming the capital structure of enterprises (determining the shares of borrowed and equity funds), the balance of interests of owners and managers plays an important role. In this case, the owner is interested in obtaining the maximum return on his capital (maximizing its rentability ROE), and the manager — in increasing the financial stability of the company by reducing the weighted average cost of capital $WACC$. Resolving the conflict situation is possible, as shown by the authors, within the framework of nonantagonistic game theory, namely in the context of a bimatrix game and a cooperative game of two people. The owners of enterprises Π_i were chosen as player A, and the ROE values of enterprises from a representative sample, observed in a certain period T , were chosen as the components of his game matrix. The role of player B was played by the managers of enterprises Π_i , and the components of his game matrix were values of the form $1/(1 + WACC)$ determined in the same period T . The algorithms for finding the Nash equilibrium capital structure for both models were tested using real data for five enterprises in the metallurgical segment observed over a period of 5 years. As a result, it was possible not only to obtain new methods for determining the balanced capital structure, but also to analyze the stability of the obtained solutions with respect to perturbations of the initial data (reduced game matrices), which made it possible to calculate the corridors of possible changes in ROE and $WACC$ for the reference set of enterprises Π_α in the selected (shortened) observation period, as well as to outline paths for further development of this topic.

Keywords: bimatrix games, two-person cooperative games, parametric analysis, stability analysis, equilibrium capital structure.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

Authors' contribution. *Bogatov E. M.* — development of the research concept, formulation of the idea, goals and objectives of the research, development of methods and procedures, writing the text of the manuscript. *Demidova E. G.* — collection, processing and analysis of data, verification of results, finalization of conclusions, editing of the text and list of references.

For citation: E. M. Bogatov, E. G. Demidova, “Coalition game-theoretic models of capital structure and their parametric analysis,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 2, 237–249. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-237-249](#) EDN: [AUKPEA](#)



REFERENCES

1. A. B. Bezrukov and S. S. Saitgaraev, *Prikladnaya Teoriya Igr: Ucheb. Posobie* [Applied Game Theory: A Textbook], Chelyab. State Univ., Chelyabinsk, 2001 (in Russian).
2. E. M. Bogatov and E. G. Demidova, “Teoretiko-igrovaya model’ struktury kapitala: bimatrichnyy podkhod” [Game-theoretic model of capital structure: a bimatrix approach], In: *Sovremennye Metody Prikladnoy Matematiki, Teorii Upravleniya i Komp’yuternykh Tekhnologiy (PMTUKT-2025): Sb. Tr. Mezhd. Nauch. Konf., Voronezh, 3–5 Dek. 2025 g.* [Modern Methods of Applied Mathematics, Control Theory and Computer Technology: Proc. Int. Sci. Conf. Voronezh, 3–5 Dec. 2025], Nauchnaya Kniga, Voronezh, 2025, pp. 18–20 (in Russian).
3. E. M. Bogatov and E. G. Demidova, “Teoretiko-igrovoe modelirovanie struktury kapitala” [Game-theoretic modeling of capital structure], *Tsifr. Modeli i Resheniya* [Digit. Models Solutions], 2026, **5**, No. 1, 53–76 (in Russian), DOI: [10.29141/2949-477X-2026-5-1-4](https://doi.org/10.29141/2949-477X-2026-5-1-4).
4. T. I. Gulyugina, “Teoretiko-igrovaya model’ optimizatsii struktury kapitala kompanii” [Game-theoretic model of optimization of a company’s capital structure], *Vopr. Ekonomiki i Prava* [Issues Econ. Law], 2012, **46**, 100–104 (in Russian).
5. E. G. Demidova and E. M. Bogatov, “Modelirovanie struktury korporativnogo kapitala s primeneniem formuly prirashcheniy” [Modeling the structure of corporate capital using the increment formula], *Vopr. Ekonomiki* [Issues Econ.], 2023, No. 6, 62–75 (in Russian), DOI: [10.32609/0042-8736-2023-6-62-75](https://doi.org/10.32609/0042-8736-2023-6-62-75).
6. P. V. Konyukhovskii and A. S. Malova, *Teoriya Igr* [Game Theory], YuRAYT, Moscow, 2014 (in Russian).
7. D. S. Nabatova, “Obespechenie skhodimosti dlya vychislitel’nogo algoritma Lemke–Khousona resheniya bimatrichnoy igry” [Ensuring convergence for the Lemke–Howson computational algorithm for solving a bimatrix game], *Sovrem. Mat. i Ee Prilozh.* [Contemp. Math. Appl.], 2015, **95**, 100–113 (in Russian).
8. G. Owen, *Teoriya Igr* [Game Theory], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
9. L. A. Petrosyan, N. A. Zenkevich, and E. V. Shevkoplyas, *Teoriya Igr* [Game Theory], BKhV-Peterburg, St. Petersburg, 2014 (in Russian).
10. R. G. Strongin, *Issledovanie Operatsiy i Modeli Ekonomicheskogo Povedeniya* [Operations Research and Models of Economic Behavior], INTUIT, Moscow, 2016 (in Russian).
11. O. V. Sharikova, “Opredelenie optimal’noy struktury kapitala rossiyskikh organizatsiy” [Determining the optimal capital structure of Russian organizations], *Korporat. Finansy* [Corporate Finances], 2013, No. 1, 33–43 (in Russian), DOI: [10.17323/j.jcfr.2073-0438.7.1.2013.34-46](https://doi.org/10.17323/j.jcfr.2073-0438.7.1.2013.34-46).
12. T. S. Yakushkina, “O raspredelennoy replikatornoy sisteme, sootvetstvuyushchey bimatrichnoy igre” [On a distributed replicator system corresponding to a bimatrix game], *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 15. Vych. mat. i kibern.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 15. Comput. Math. Cybern.], 2016, No. 1, 19–27 (in Russian).
13. “Corporate Disclosure Center,” *Interfax*. Available online: <https://www.e-disclosure.ru>, accessed on June 15, 2026 (in Russian).
14. F. Allen and S. Morris, “Game theory models in finance,” In: *Game Theory and Business Applications*, Springer, Boston, 2013, pp. 17–41, DOI: [10.1007/978-1-4614-7095-3_2](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-7095-3_2).
15. E. M. Bogatov and N. E. Bogatova, “Research of the problem of fair distribution of fishing quotas by the methods of game theory,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2024, **285**, No. 3, 316–327, DOI: [10.1007/s10958-024-07444-y](https://doi.org/10.1007/s10958-024-07444-y).
16. S. W. Ryu, *Game Theoretic Approach to the Capital Structure and Investment Decision Problems of a Levered Firm*, Univ. Pennsylvania, Philadelphia, 1985.
17. B. M. Tudose, “Game theory: minimising the cost of capital vs. maximising the return of investors,” *Studies and Scientific Researches. Economics Edition*, 2014, **20**, DOI: [10.29358/sceco.v0i20.264](https://doi.org/10.29358/sceco.v0i20.264).

E. M. Bogatov

National University of Science and Technology “MISIS,” Gubkin branch, Gubkin, Russia

E-mail: embogatov@inbox.ru, eLIBRARY SPIN-code: 4609-9235, eLIBRARY AuthorID: [14859](https://elibrary.ru/14859),
ResearcherID: [GWR-2097-2022](https://orcid.org/0000-0002-4897-0394), Scopus: [8912933400](https://orcid.org/8912933400), ORCID: [0000-0002-4897-0394](https://orcid.org/0000-0002-4897-0394)

E. G. Demidova

Starooskol’skii Technological Institute (branch of NUST “MISIS”), Starii Oskol, Russia

E-mail: dmitrikey@mail.ru, eLIBRARY SPIN-code: 1270-9040, eLIBRARY AuthorID: [774582](https://elibrary.ru/774582),
ResearcherID: [KLY-7919-2024](https://orcid.org/0000-0001-8496-973X), ORCID: [0000-0001-8496-973X](https://orcid.org/0000-0001-8496-973X)

СУЩЕСТВОВАНИЕ ВОЛНОВОГО ФРОНТА В МОДЕЛИ ДИНАМИКИ СЛАБОВЯЗКОЙ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

А. А. Егорова¹, А. С. Шамаев²

¹МИРЭА "— Российский технологический институт, Москва, Россия

²Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлinskого РАН, Москва, Россия

Аннотация. В данной работе мы рассматриваем модель взвеси двух жидкостей в трехмерной области, заполненной одной жидкостью и имеющей небольшие включения другой жидкости. Для анализа в таких комбинированных средах предполагается, что структура области периодическая с быстро чередующимися параметрами, при этом характерный размер чередования берется как малый параметр $\varepsilon > 0$. Вопрос о существовании фронта распространения звука для этой модели исследуется для соответствующей эффективной краевой задачи с интегро-дифференциальными уравнениями с медленно изменяющимися коэффициентами, полученными методом асимптотического усреднения при $\varepsilon \rightarrow 0$. Показано, что при определенной гладкости изменения плотности между фазами в эффективной модели существуют передний фронт. Таким образом, доказано, что при финитном начальном возмущении рассматриваемой комбинированной среды распространение колебаний будет иметь конечную скорость.

Ключевые слова: волновой фронт, слабовязкая сжимаемая жидкость, взвесь, периодическая структура, асимптотическое усреднение, интегро-дифференциальное уравнение, финитное начальное возмущение.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена в рамках госзадания №124012500443-0.

Вклад авторов. Шамаев А. С. — постановка задачи, методика доказательства, редакция рукописи; Егорова А. А. — обработка материалов, реализация метода доказательства, написание рукописи.

Для цитирования: Егорова А. А., Шамаев А. С. Существование волнового фронта в модели динамики слабовязкой сжимаемой жидкости // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 2. С. 250–257. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-250-257](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-250-257) EDN: [AWMJMS](https://www.edn.ru/awmjms)

1. ВВЕДЕНИЕ

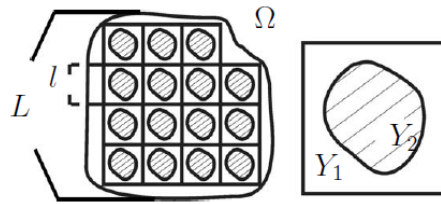
Вопрос о существовании волнового фронта является ключевым для описания различных моделей термодинамических и механических процессов, таких как распространение ударных волн или тепловых импульсов, где фронт определяет границу резкого изменения параметров системы (давления, температуры, плотности). Его корректное моделирование напрямую влияет на точность расчетов в аэродинамике, физике плазмы и термодинамике быстротекущих процессов, разделяя область возмущенного и невозмущенного состояния среды. Известен парадокс о том, что скорость распространения тепла в классической модели теплопроводности бесконечна, что противоречит основным физическим принципам. Использование моделей теплопроводности с

интегральным последствием в определенном смысле снимает это противоречие: скорость распространения в таких моделях становится конечной. Но для каждой конкретной модели этот вопрос о существовании фронта возникает. Известны результаты исследования о фронте для интегро-дифференциальных уравнений в работах американских и немецких математиков [5, 6] в 80-х годах 20 века. Они показали, что при достаточной гладкости ядра диссипации существование фронта будет зависеть от соответствующей задачи без интегрального слагаемого. При отсутствии гладкости ядра вопрос существования фронта становится неясным и требует отдельного исследования для каждой модели. Отметим работы Романова И. В. и Шамаева А. С. [4, 7], где доказано, что для одномерного уравнения Гуртина—Пипкина с конечным числом экспоненциальных слагаемых в ядре диссипации передний фронт будет существовать. А если ядро диссипации негладкое, например, заданное в виде функции Работнова, то уже можно указать случаи, когда фронт не будет существовать.

В данной работе рассматривается модель взвеси из двух слабвязких жидкостей (с коэффициентом вязкости порядка ε^2 , $0 < \varepsilon \ll 1$), где некоторая трехмерная область заполнена одной жидкостью и имеет малые по размеру (порядка ε) включения другой жидкости. Для анализа в подобных комбинированных средах предполагают включение фаз быстро чередующейся периодической структурой, при этом характерный размер чередования принимают за малый параметр $\varepsilon > 0$. Вопрос существования фронта для данной модели исследуется для соответствующей эффективной краевой задачи с интегро-дифференциальными уравнениями с медленно меняющимися коэффициентами, полученной методом асимптотического усреднения при $\varepsilon \rightarrow 0$. Показано, что при определенной гладкости изменения плотности между фазами в эффективной модели существуют передний фронт. Таким образом, доказано, что при финитном начальном возмущении рассматриваемой комбинированной среды, распространение акустических колебаний будет иметь конечную скорость и даны формулы для скорости звука.

2. ЗАДАЧА О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ В ВЗВЕСИ ИЗ СЛАБОВЯЗКИХ ЖИДКОСТЕЙ

Рассматривается движение взвеси в ограниченной области Ω с гладкой границей $\partial\Omega$ при внешних звуковых возмущениях $\mathbf{f}(x, t)$ малой амплитуды. Периодически расположенные одинаковые включения имеют достаточно гладкую форму.



Характеристики жидкостей в состоянии покоя (вязкости μ и скорости звука c) считаются сравнимыми:

$$c(\xi) = c_i, \quad \varepsilon^2 \mu(\xi) = \varepsilon^2 \mu_i, \quad \xi \in Y_i, \quad i = 1, 2;$$

$$c_1 \sim c_2, \quad \mu_1 \sim \mu_2.$$

Плотность $\rho(\xi)$ считаем достаточно гладкой функцией, отношение стороны l ячейки периодичности Y и размера L области Ω мало и равно $\varepsilon \ll 1$. Закон движения в взвеси задаётся уравнением типа Навье—Стокса:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} = -\nabla p + \varepsilon^2 \mu \Delta \mathbf{v} + \frac{\varepsilon^2 \mu}{3} \nabla (\operatorname{div} \mathbf{v}) + \mathbf{f}, \quad (2.1)$$

где $\mathbf{v}(x, t, \varepsilon)$ — скорость дисперсионной среды, $p(x, t, \varepsilon)$ — давление, $\mathbf{f}(x, t)$ — функция воздействия звукового поля на область Ω , удовлетворяющая неравенству:

$$|\mathbf{f}(x, t)| \leq M,$$

где $M > 0$ — заданная константа. На границах фаз предполагается непрерывность скорости и тензора напряжений. Перемещение $\mathbf{u}(x, t, \varepsilon) \in \mathbb{H}_0^1(\Omega) \equiv (H_0^1(\Omega))^3$ связано со скоростью $\mathbf{v}$ и давлением p следующими соотношениями:

$$\mathbf{u}(x, t, \varepsilon) = \int_0^t \mathbf{v}(x, s, \varepsilon) ds, \quad p(x, t, \varepsilon) = -\gamma\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \operatorname{div} \mathbf{u}, \quad (2.2)$$

где характеристики жидкостей: $\gamma(\xi) = c^2(\xi)\rho(\xi) > 0$ — модуль объемной упругости, $c(\xi)$ — скорость звука, $\rho(\xi)$ — плотность — принимают разные значения для каждой из жидкостей. Начальное перемещение и скорость задаются вектор-функциями:

$$\mathbf{u}|_{t=0} = \varphi_0(x), \quad \mathbf{v}|_{t=0} = \varphi_1(x). \quad (2.3)$$

3. ЭФФЕКТИВНАЯ ЗАДАЧА

На основе техники двухмасштабных асимптотических разложений, разработанной Ж. П. Лионсом и Н. С. Бахваловым, в работе [1] выводится и строго обосновывается усредненное уравнение для рассматриваемой задачи (2.1)–(2.3). Согласно этому методу, компоненты решения $\mathbf{u}(x, t, \varepsilon)$ отыскиваются с помощью асимптотического разложения вида

$$u(x, x/\varepsilon, t) = u^0\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t\right) + \varepsilon u^1\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t\right) + \varepsilon^2 u^2\left(x, \frac{x}{\varepsilon}, t\right) + \dots,$$

где $u^0(x, y, t), u^1(x, y, t), u^2(x, y, t)$ — функции от трех переменных x, y, t , периодические по переменной y , подлежащие определению.

В ходе усреднения возникает краевая задача на ячейке периодичности Y для вектор-функций $\mathbf{V}^j(t)$ со значениями в $\mathbb{H}_{per}^1(Y) \equiv (H_{per}^1(Y))^3$:

$$\rho(\xi) \frac{\partial \mathbf{V}^j(\xi, t)}{\partial t} - \mu \Delta \mathbf{V}^j(\xi, t) + \nabla q(\xi, t) = 0, \quad \xi \in Y, \quad (3.1)$$

$$\operatorname{div}_{\xi} \mathbf{V}^j = 0, \quad \mathbf{V}^j|_{t=0} = \frac{\mathbf{e}_j}{\rho(\xi)}, \quad (3.2)$$

$$\mathbf{V}^{j1}|_S = \mathbf{V}^{j2}|_S, \quad \sigma(\mathbf{V}^{j1}) \cdot \mathbf{n}|_S = \sigma(\mathbf{V}^{j2}) \cdot \mathbf{n}|_S, \quad (3.3)$$

где $\sigma = (\sigma_{ij})$, $\sigma_{ij} = \delta_{ij}q + 2\mu\delta_{ik}\delta_{jl}e_{ij}e_{kl}$, S — граница между фазами.

Для решений $\mathbf{V}^j \in \mathbb{H}_{per}^1(Y)$ определим матрицу

$$\mathbf{K}(t) = \{K_{ij}(t)\} : \quad K_{ij} = \left\langle V_i^j \right\rangle_Y = \frac{1}{|Y|} \int_Y V_i^j(\xi, t) d\xi.$$

Тогда задача для усредненного давления $p^0(x, t)$ имеет вид:

$$\left\langle \frac{1}{\gamma(\xi)} \right\rangle_Y \frac{\partial p^0(x, t)}{\partial t} + \operatorname{div}_x \int_0^t \mathbf{K}(t-s)(\mathbf{f}(x, s) - \nabla p^0(x, s)) ds = 0, \quad (3.4)$$

$$[\mathbf{K}(t) * (\mathbf{f}(x, t) - \nabla p^0(x, t))] \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (3.5)$$

Для предельных функций перемещения $\mathbf{u}^0$ и скорости $\mathbf{v}^0$, имеющих значения в $\mathbb{H}^1(\Omega, \mathbb{H}_{per}^1(Y))$, справедливы равенства:

$$\mathbf{v}^0(x, \xi, t) = \frac{\partial \mathbf{u}^0(x, \xi, t)}{\partial t}, \quad (3.6)$$

$$\langle \mathbf{v}^0(x, \xi, t) \rangle_Y = \int_0^t \mathbf{K}(t-s)(\mathbf{f}(x, s) - \nabla p^0(x, s)) ds, \quad (3.7)$$

где $\langle g(\xi) \rangle_Y = \frac{1}{|Y|} \int_Y g(\xi) d\xi$ — среднее по ячейке.

Теорема 3.1 (см. [1]). Для решений усредненной (3.4)–(3.7) и исходной задач (2.1)–(2.3) справедливы равенства:

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\mathbf{v}(x, t, \varepsilon) - \mathbf{v}^0(x, \frac{x}{\varepsilon}, t)\|_{L_2(\Omega)} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|\varepsilon \nabla_x \mathbf{v}(x, t, \varepsilon) - \nabla_{\frac{x}{\varepsilon}} \mathbf{v}^0(x, \frac{x}{\varepsilon}, t)\|_{L_2(\Omega)} &= 0, \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \|p(x, t, \varepsilon) - p^0(x, t)\|_{L_2(\Omega)} &= 0.\end{aligned}$$

Таким образом, из этой теоремы следует, что, исследуя эффективную модель, мы можем судить и о колебаниях в двухфазной взвеси с периодически повторяющимися включениями малых размеров одной жидкости в другой.

4. Плотность и ядро диссипации

Существенную роль в дальнейшем будет играть матрица $\mathbf{K}(t)$, элементы которой определяются как средние по ячейке Y от решений вспомогательной задачи (3.1)–(3.3). В случае симметричности включений можно считать, что ядро диссипации $\mathbf{K}(t)$ — диагональная матрица, т. е. $\mathbf{K}(t) = K(t)\mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ — единичная матрица, а $K(t)$ — скалярная функция, которая представима в виде:

$$K(t) = \sum_{i=1}^{\infty} C_i e^{-\lambda_i t}. \quad (4.1)$$

Из вида задачи (3.1)–(3.3) следует, что показатели $\lambda_i > 0$ являются собственными значениями спектральной задачи типа Стокса [1]

$$-\mu \Delta \psi_k + \nabla q_k = \rho \lambda_k \psi_k, \quad \operatorname{div} \psi_k = 0, \quad \psi_k - Y\text{-периодична}, \quad (4.2)$$

а коэффициенты $c_i > 0$ можно найти по формулам:

$$C_i = \left\langle \frac{1}{\gamma(\xi)} \right\rangle_Y^{-1} \left\langle \frac{\psi_i(\xi)}{\rho(\xi)} \right\rangle_Y \langle \psi_i(\xi) \rangle_Y, \quad \gamma(\xi) = c^2(\xi) \rho(\xi). \quad (4.3)$$

Аналогично утверждениям из работы [2] можно доказать справедливость следующей леммы.

Лемма 4.1. Для каждого собственного значения λ_k спектральной задачи типа Стокса (4.2) в трехмерной периодической области Ω существуют положительные постоянные α_1, α_2 такие, что выполняется неравенство:

$$\alpha_1 k^{\frac{2}{3}} \leq \lambda_k \leq \alpha_2 k^{\frac{2}{3}}. \quad (4.4)$$

5. СУЩЕСТВОВАНИЕ ВОЛНОВОГО ФРОНТА ПРИ УСЛОВИИ РЕГУЛЯРНОСТИ ФУНКЦИИ ПЛОТНОСТИ

Введем определение и приведем теорему из [5]. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ рефлексивное банахово пространство.

Определение 5.1. Семейство ограниченных линейных операторов $\{T(t)\}_{t \geq 0}$ на пространстве X распространяет семейство замкнутых подпространств $\{P_t\}_{t \geq 0}$ из X , если $T(t)P_s \subset P_{t+s}$ для каждого $t, s > 0$. Аналогично, семейство замкнутых подпространств $\{Q_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ распространяется семейством $\{T(t)\}_{t \geq 0}$, если $T(t)Q_s \subset Q_{t+s}$ для каждого $t \geq 0, s \in \mathbb{R}$.

Теорема 5.1. Пусть A — инфинитезимальный оператор линейной C_0 -полугруппы на рефлексивном пространстве X , и $F(\cdot), K(\cdot)$ — ограниченные линейные операторы на X такие, что для любого $x^* \in X^*$ $t \rightarrow F^*(t)x^*$ также как и $t \rightarrow K^*(t)x^*$ принадлежат пространству $H^1(0, \infty; X^*)$. Рассмотрим уравнение

$$\begin{aligned}x'(t) &= A \left[x(t) + \int_{-\infty}^0 F(-u)x_t(u) du \right] + \int_{-\infty}^0 K(-u)x_t(u) du, \\ (x(0), x_0) &= (z, \psi) \in X \times L^2(\mathbb{R}^-; X).\end{aligned} \quad (5.1)$$

Предположим, что $\{P_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ — возрастающее семейство замкнутых подпространств пространства X , непрерывное в каждой точке t . Кроме того, предположим, что каждое подпространство P_t инвариантно относительно операторов $F(s)$ и $K(s)$ для всех $t \in \mathbb{R}, s \geq 0$. Тогда полугруппа $S(s)$, порожденная оператором A , распространяет семейство $\{P_t\}_{t \in \mathbb{R}}$ в том и только том случае, если из условий $z \in P_\alpha$ и $\psi(u) \in P_\alpha$ п.в. следует, что сильное решение $x(t)$ уравнения (5.1) удовлетворяет условию $x(t) \in P_{\alpha+t}, t \geq 0$.

Предположим, что колебания среды направлены только по одной из осей координат Ox_1 и величины компонент смещения и давления зависят только от переменных t, x_1 . Полагая $\mathbf{f}(x, t) \equiv 0, x = x_1$, рассмотрим одномерное уравнение:

$$\begin{aligned} \frac{\partial p^0(x, t)}{\partial t} - \int_0^t K(t-s) p_{xx}^0(x, s) ds &= 0, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0, \\ p^0|_{t=0} &= \theta_0(x), \quad p^0(0, t) = p^0(1, t) = 0, \\ K(t) &= \sum_{i=1}^{\infty} C_i e^{-\lambda_i t}. \end{aligned} \quad (5.2)$$

Пусть $H_{per}^2(Y)$ — пространство Y -периодических функций из $L_2(Y)$, имеющих обобщенные производные до 2-го порядка.

Теорема 5.2. Если функция θ_0 достаточно гладкая и финитная функция и функция плотности $\rho(\xi) \in H_{per}^2(Y)$, то решение задачи (5.2) является финитной по x функцией для каждого фиксированного конечного момента времени t .

Эта теорема означает, что у эффективной модели будет существовать передний фронт, если предполагать, что граница между фазами двух жидкостей непрерывна.

Формально, одномерное уравнение (5.2) совпадает с одномерным уравнением Гуртина—Пипкина. Заметим, что, если ядро диссипации состоит из конечного числа слагаемых: $K(t) = \sum_{i=1}^m C_i e^{-\lambda_i t}$, то существование фронта в одномерном уравнении Гуртина—Пипкина доказано в работе [4]. В отличие от техники доказательств в [4], где применялись преобразование Фурье и методы теории функций комплексного переменного, в настоящей работе используются методы из теории полугрупп.

Доказательство. Предполагаем, что плотность $\rho(\xi)$ периодична и не может быть равна нулю, поэтому $\frac{1}{\rho(\xi)} \in H_{per}^2(Y)$. Можно показать, что ее коэффициенты $f_s = \left\langle \frac{\psi_s(\xi)}{\rho(\xi)} \right\rangle_Y$ разложения в ряд Фурье по ортонормированной системе собственных функций $\{\psi_k\}_{k=1}^{\infty}$ задачи типа Стокса (4.2) удовлетворяют неравенству:

$$\sum_{s=1}^{\infty} f_s^2 |\lambda_s|^2 \leq C \left\| \frac{1}{\rho} \right\|_{H^2(Y)}^2, \quad (5.3)$$

где λ_s — собственные значения задачи (4.2), а положительная постоянная C не зависит от функции $\frac{1}{\rho}(\xi)$. Это утверждение доказывается для периодических функций так же, как для оператора Лапласа (см. [3, гл. IV, §2]). Тогда из формул (4.3) следует, что

$$|K(t)| = \left| \sum_{i=1}^{\infty} C_i e^{-\lambda_i t} \right| \leq M \sum_{i=1}^{\infty} |f_i| = M \sum_{i=1}^{\infty} |f_i| |\lambda_i| |\lambda_i|^{-1} \leq M \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |f_i|^2 |\lambda_i|^2} \cdot \sqrt{\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^{-2}}. \quad (5.4)$$

Тогда из леммы 4.1 следует, что ряд в последнем множителе неравенства (5.4) сходится. Таким образом, из (5.3), (5.4) получим, что $|K(t)| \leq M_1 \left\| \frac{1}{\rho} \right\|_{H^2(Y)}, \forall t \in [0; \infty)$ т. е. $K(t) \in C[0; +\infty)$.

Воспользуемся теоремой Вейерштрасса о том, что для любой непрерывной функции существует последовательность бесконечно гладких функций, стремящихся к ней равномерно. Пусть последовательность $\{K_n(t)\}_{n=1}^{+\infty}$ состоит из бесконечно гладких функций $K_n \in C^\infty[0; +\infty)$ и $K_n(t) \rightrightarrows K(t)$.

Рассмотрим следующую задачу:

$$\frac{\partial p_n(x, t)}{\partial t} - \int_0^t K_n(t-s) \frac{\partial^2 p_n(x, s)}{\partial x^2} ds = 0, \quad t > 0, \quad (5.5)$$

$$p_n|_{t=0} = \theta_0(x), \quad p_n(0, t) = p_n(1, t) = 0.$$

Докажем, что утверждение теоремы верно для решений этой задачи.

Продифференцируем уравнение (5.5) по t :

$$\frac{\partial^2 p_n(x, t)}{\partial t^2} - K_n(0) \frac{\partial^2 p_n(x, t)}{\partial x^2} - \int_0^t K'_n(t-s) \frac{\partial^2 p_n(x, s)}{\partial x^2} ds = 0, \quad t > 0 \quad (5.6)$$

Введем замену: $v = \frac{\partial p_n}{\partial t}$, $w = \sqrt{K_n(0)} \frac{\partial p_n}{\partial x}$. Тогда из (5.6) получим:

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix}_t = \begin{pmatrix} 0 & \sqrt{K_n(0)} \frac{\partial}{\partial x} \\ \sqrt{K_n(0)} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} + \int_0^t \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{K'_n(t-s)}{K_n(0)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v(s) \\ w(s) \end{pmatrix} ds \right] = 0. \quad (5.7)$$

Пусть $X = L^2(\mathbb{R}) \times L^2(\mathbb{R})$ и $D(A) = H^1(\mathbb{R}) \times H^1(\mathbb{R})$, тогда оператор A из (5.7), заданный как

$$\begin{pmatrix} 0 & \sqrt{K_n(0)} \frac{\partial}{\partial x} \\ \sqrt{K_n(0)} \frac{\partial}{\partial x} & 0 \end{pmatrix},$$

порождает C_0 -полугруппу, которая распространяет семейство подпространств

$$\{P_s\}_{s \in \mathbb{R}} : P_s = \{u \in L^2(\mathbb{R}) : \text{supp}(u) \subset (-\infty; \sqrt{K_n(0)}s)\}^2.$$

Так как оператор

$$F(t) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \frac{K'_n(t)}{K_n(0)} \end{pmatrix}$$

отображает $\{P_s\}_{s \in \mathbb{R}}$ в себя, то из теоремы 5.1 следует, что C_0 -полугруппа, порожденная оператором A , распространяет семейство $\{P_t\}_{t \geq 0}$ тогда и только тогда, когда решение уравнения (5.7)

$$\begin{pmatrix} v \\ w \end{pmatrix} \in P_{\alpha+t}, t \geq 0 \text{ при условии } \begin{pmatrix} v(0) \\ w(0) \end{pmatrix} \in P_\alpha \text{ п.в.}$$

Таким образом, получаем, что задача (5.5) имеет передний волновой фронт, т. к. носитель решения будет ограничен справа, как и у начального условия $\theta_0(x)$.

Так как $K_n(t) \rightrightarrows K(t)$, $n \rightarrow \infty$, то нетрудно показать, что соответствующие решения $p_n(x, t)$ и $p^0(x, t)$ также будут близки при $n \rightarrow \infty$. Это значит, что из финитности решения $p_n(x, t)$ следует финитность и для $p^0(x, t)$. Теорема доказана. $\square$

Дополнительно отметим, что из выражений для коэффициентов ядра $K(t)$ можно увидеть, что скорость распространения звука в эффективной модели взвеси имеет вид:

$$\sqrt{K(0)} = \sqrt{\sum_{k=1}^{\infty} C_k}, \quad C_k = \left\langle \frac{1}{\gamma(\xi)} \right\rangle_Y^{-1} \left\langle \frac{\psi_k(\xi)}{\rho(\xi)} \right\rangle_Y \langle \psi_k(\xi) \rangle_Y.$$

Эта формула обобщает хорошо известную формулу распространения звука в однородной среде:

$$c = \sqrt{\frac{\gamma}{\rho}}.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гавриков А. А., Шамаев А. С. Некоторые вопросы акустики эмульсий // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2011. — 28. — С. 114–146.
2. Ильин А. А. О спектре оператора Стокса // Функци. анализ и его прилож. — 2009. — 43, № 4. — С. 14–25. — DOI: [10.4213/faa2962](https://doi.org/10.4213/faa2962).
3. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.
4. Романов И. В., Шамаев А. С. О существовании волнового фронта в задаче Коши для уравнения Гуртина–Пипкина // Мат. заметки. — 2024. — 116, № 4. — С. 636–640. — DOI: [10.4213/mzm14368](https://doi.org/10.4213/mzm14368).
5. Desch W., Grimmer R., Schappacher W. Wellposedness and wave propagation for a class of integrodifferential equations in Banach space // J. Differ. Equ. — 1988. — 74. — С. 391–411. — DOI: [10.1016/0022-0396\(88\)90011-3](https://doi.org/10.1016/0022-0396(88)90011-3).
6. Desch W., Schappacher W. A semigroup approach to integrodifferential equations in Banach spaces // J. Integral Equ. — 1985. — 10. — С. 99–110.
7. Romanov I. V., Shamaev A. S. On the Absence of a propagation front in the Cauchy problem for a certain integro-differential equation with a Rabotnov kernel // Russ. J. Math. Phys. — 2024. — 31. — С. 758–761. — DOI: [10.1134/S1061920824040137](https://doi.org/10.1134/S1061920824040137).

А. А. Егорова

МИРЭА "— Российский технологический институт, Москва, Россия

E-mail: alena.egorova@gmail.com, РИНЦ SPIN-код: 5547-7195, РИНЦ AuthorID: [551678](https://elibrary.ru/author_index.action?id=551678), ResearcherID: [AEP-2107-2022](https://orcid.org/0000-0002-0606-0130), Scopus: [57210848119](https://orcid.org/57210848119), ORCID: [0000-0002-0606-0130](https://orcid.org/0000-0002-0606-0130)

А. С. Шамаев

Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия

E-mail: shamaev@ipmnet.ru, РИНЦ SPIN-код: 9735-0458, РИНЦ AuthorID: [5556](https://elibrary.ru/author_index.action?id=5556), ResearcherID: [N-8776-2015](https://orcid.org/N-8776-2015), Scopus: [6603596715](https://orcid.org/6603596715), ORCID: [0000-0003-2766-6382](https://orcid.org/0000-0003-2766-6382)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-250-257](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-250-257)

EDN: [AWMJMS](https://edn.ru/AWMJMS)

UDC 517.958

Research article

Existence of a wave front in a model of the dynamics of a low-viscosity compressible fluid

A. A. Egorova¹ and A. S. Shamaev²

¹MIREA — Russian Technological University, Moscow, Russia

²Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. In this paper, we consider a model of an emulsion of two liquids in a three-dimensional domain filled with one liquid and having small inclusions of another liquid. For analysis in such combined media, it is assumed that the structure of the domain is periodic with rapidly alternating parameters, while the characteristic size of the alternation is taken as a small parameter $\varepsilon > 0$. The question of the existence of a sound propagation front for this model is investigated for the corresponding effective boundary value problem with integro-differential equations with slowly varying coefficients obtained by the method of asymptotic averaging at $\varepsilon \rightarrow 0$. It is shown that with a certain smoothness of the density change between phases, there is a leading edge in the effective model. Thus, it is proved that with a finite initial perturbation of the combined medium under consideration, the propagation of vibrations will have a finite velocity.



Keywords: wave front, low-viscosity compressible fluid, suspension, periodic structure, asymptotic averaging, integro-differential equation, finite initial disturbance.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was carried out within the framework of state assignment No. 124012500443-0.

Authors' contribution. Shamaev A. S. — statement of the problem, proof method, editing of the manuscript; Egorova A. A. — processing of materials, implementation of the proof method, writing of the manuscript.

For citation: A. A. Egorova, A. S. Shamaev, “Existence of a wave front in a model of the dynamics of a low-viscosity compressible fluid,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. 72, No. 2, 250–257. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-250-257](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-250-257) EDN: [AWMJMS](https://www.edn.ru/awmjms)

REFERENCES

1. A. A. Gavrikov and A. S. Shamaev, “Nekotorye voprosy akustiki emul'siy” [Some issues of acoustics of emulsions], *Tr. Sem. Im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 2011, **28**, 114–146 (in Russian).
2. A. A. Il'in, “O spektre operatora Stoksa” [On the spectrum of the Stokes operator], *Funkts. Analiz i Ego Prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2009, **43**, No. 4, 14–25 (in Russian), DOI: [10.4213/faa2962](https://doi.org/10.4213/faa2962).
3. V. P. Mikhaylov, *Differentsial'nye Uravneniya v Chastnykh Proizvodnykh* [Partial Differential Equations], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
4. I. V. Romanov and A. S. Shamaev, “O sushchestvovanii volnovogo fronta v zadache Koshi dlya uravneniya Gurtina—Pipkina” [On the existence of a wave front in the Cauchy problem for the Gurtin—Pipkin equation], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2024, **116**, No. 4, 636–640 (in Russian), DOI: [10.4213/mzm14368](https://doi.org/10.4213/mzm14368).
5. W. Desch, R. Grimmer, and W. Schappacher, “Wellposedness and wave propagation for a class of integrodifferential equations in Banach space,” *J. Differ. Equ.*, 1988, **74**, 391–411, DOI: [10.1016/0022-0396\(88\)90011-3](https://doi.org/10.1016/0022-0396(88)90011-3).
6. W. Desch and W. Schappacher, “A semigroup approach to integrodifferential equations in Banach spaces,” *J. Integral Equ.*, 1985, **10**, 99–110.
7. I. V. Romanov and A. S. Shamaev, “On the Absence of a propagation front in the Cauchy problem for a certain integro-differential equation with a Rabotnov kernel,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2024, **31**, 758–761, DOI: [10.1134/S1061920824040137](https://doi.org/10.1134/S1061920824040137).

A. A. Egorova

MIREA — Russian Technological University, Moscow, Russia

E-mail: alena.egorova@gmail.com, eLIBRARY SPIN-code: 5547-7195, eLIBRARY AuthorID: 551678, ResearcherID: [AEP-2107-2022](https://orcid.org/0000-0002-0606-0130), Scopus: [57210848119](https://orcid.org/0000-0002-0606-0130), ORCID: [0000-0002-0606-0130](https://orcid.org/0000-0002-0606-0130)

A. S. Shamaev

Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

E-mail: shamaev@ipmnet.ru, eLIBRARY SPIN-code: 9735-0458, eLIBRARY AuthorID: 5556, ResearcherID: [N-8776-2015](https://orcid.org/0000-0003-2766-6382), Scopus: [6603596715](https://orcid.org/0000-0003-2766-6382), ORCID: [0000-0003-2766-6382](https://orcid.org/0000-0003-2766-6382)

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ РЕШЕНИЙ НЕПОЛНОГО ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Д. А. ЗАКОРА

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия

Аннотация. В работе изучается неполное интегро-дифференциальное операторное уравнение второго порядка в гильбертовом пространстве. Ядро разностного типа интегрального возмущения представляет собой голоморфную полугруппу, окаймленную неограниченными операторами. Исследуется асимптотическое поведение решений этого уравнения. Доказаны асимптотические формулы для решений в случае, когда правая часть близка к почти периодической функции. Полученные формулы применены к одному уравнению, описывающему ряд приложений из механики вязкоупругих систем.

Ключевые слова: операторное уравнение, интегро-дифференциальное уравнение, задача Коши, асимптотика решения.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2026-1313.

Для цитирования: *Закора Д. А.* Асимптотическое поведение решений неполного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 2. С. 258–281. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-258-281](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-258-281) EDN: [AZYDIE](https://www.edn.ru/AZYDIE)

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ УТВЕРЖДЕНИЯ

1.1. Введение. Функционально-дифференциальные и, в частности, интегро-дифференциальные уравнения возникают в задачах динамики различных вязкоупругих систем, в задачах управления системами с распределёнными параметрами, задачах наследственной механики, задачах теории распространения тепла в средах с памятью, и т. д. Различные вопросы по указанной теме обсуждаются в монографиях [7, 14, 20, 24, 30] (см. также указанную в них литературу). В монографии [1] к изучению функционально-дифференциальных уравнений систематически применяются методы спектральной теории операторов, а также приведён обширный список литературы по обсуждаемым вопросам.

В работах [16, 17] доказано, что решение однородного неполного интегро-дифференциального уравнения второго порядка с операторным ядром достаточно общего вида стремится к нулю с ростом времени, но без оценки скорости убывания. Это утверждение применено к исследованию движения вязкоупругого тела. Динамика вязкоупругих систем, а также подобные вопросы в других задачах, изучалась далее многими авторами. Например, в работах [13, 18, 21, 25, 26, 29]

исследуются вопросы устойчивости одномерных систем, описывающих модели Тимошенко вязкоупругих стержней. Работы [2, 11, 12, 27] (см. также указанную в них литературу) посвящены исследованию устойчивости абстрактных интегро-дифференциальных уравнений. В работах [4–6, 33] исследуются вопросы, аналогичные изучаемым в настоящей статье. А именно, исследуется вопрос асимптотического поведения решений интегро-дифференциальных уравнений в случае «правой части» вида

$$f(t) = g(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} f_k(t), \quad \sigma_0 = 0, \quad 0 \neq \sigma_k \in \mathbb{R} \quad (k = \overline{1, n}),$$

где $\|g(t)\| \rightarrow 0$, $\|f'_k(t)\| \rightarrow 0$ ($k = \overline{0, n}$) при $t \rightarrow +\infty$.

Цель работы — вывод асимптотических формул для решений неполного интегро-дифференциального операторного уравнения второго порядка в описанном выше случае (см. теоремы 1.1, 1.2). Доказанные утверждения применяются к одному уравнению, моделирующему ряд приложений из механики вязкоупругих систем (см. лемму 3.5).

1.2. Постановка задачи и основные утверждения.

1.2.1. Общий случай. Пусть H , H_0 — комплексные гильбертовы пространства, $\mathcal{L}(H, H_0)$ — банахово пространство линейных ограниченных операторов, действующих из H в H_0 , $\mathcal{L}(H) := \mathcal{L}(H, H)$. Пусть A , G , C — плотно определённые замкнутые операторы:

$$A : \mathcal{D}(A) \subset H \rightarrow H, \quad G : \mathcal{D}(G) \subset H_0 \rightarrow H_0, \quad C : \mathcal{D}(C) \subset H \rightarrow H_0,$$

причём A , G — самосопряжённые положительно определённые операторы. Будем считать, что введённые операторы удовлетворяют следующей гипотезе:

1') Оператор-функция $C^* \exp(-tG)CA^{-1}$ сильно непрерывна на $\mathbb{R}_+ := [0, +\infty)$.

Отсюда, из неравенства Гайнца (см. [9, гл. 1, §7, теорема 7.1]) и полярного разложения замкнутого оператора (см. [8, гл. 6, §2, п. 7]) следует, в частности, что $\mathcal{D}(A^{1/2}) \subset \mathcal{D}(C)$. Обозначим через $\omega_G := \inf\{\lambda \in \sigma(G)\}$ ($\sigma(G)$ — спектр оператора G) нижнюю грань оператора G и предположим, что выполнены следующие гипотезы:

2') Существует $a_1 \in (0, 1)$ такое, что

$$\omega_G^{-1} \|Cu\|_{H_0}^2 \leq a_1 \|A^{1/2}u\|_H^2 \quad \forall u \in \mathcal{D}(A^{1/2}); \quad (1.1)$$

3') Существенный спектр $\sigma_{ess}(A)$ оператора A не более чем счётен и

$$\{0 \neq u \in \mathcal{D}(A) : \exists \lambda > 0 : Au = \lambda u\} \cap \text{Ker } C = \emptyset. \quad (1.2)$$

По операторам A , G , C с учётом гипотез 1'), 2') построим операторный пучок (оператор-функцию) $M(\cdot)$ следующим образом:

$$M(\lambda) := I + \lambda^2 A^{-1} - (CA^{-1/2})^*(G - \lambda I)^{-1}(CA^{-1/2}). \quad (1.3)$$

Замечание 1.1. Гипотеза 2') призвана обеспечить положительную определённость оператора $M(0)$ и в конкретной ситуации может быть ослаблена (см. (3.5) или (3.9)).

В гильбертовом пространстве H рассмотрим задачу Коши для неполного интегро-дифференциального операторного уравнения второго порядка:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -Au + \int_0^t C^* \exp(-G(t-s))Cu(s)ds + f(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \quad (1.4)$$

Определение 1.1. Решением задачи Коши (1.4) назовём функцию $u \in C^2(\mathbb{R}_+; H)$ такую, что $u(t) \in \mathcal{D}(A)$, $u'(t) \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ при $t \in \mathbb{R}_+$, $Au, A^{1/2}u' \in C(\mathbb{R}_+; H)$, выполнены начальные условия и уравнение из (1.4) для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

Теорема 1.1. Пусть выполнены гипотезы 1'), 2'), 3').

1) Если $u^0 \in \mathcal{D}(A)$, $u^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $f \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$, то решение задачи Коши (1.4) существует и единственно.

2) Будем считать дополнительно, что

$$f(t) = g(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} f_k(t), \quad \sigma_0 = 0, \quad 0 \neq \sigma_k \in \mathbb{R} \quad (k = \overline{1, n}), \quad (1.5)$$

где $g, f_k \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$ ($k = \overline{0, n}$). Если $g, f'_k \in L_1(\mathbb{R}_+; H)$ ($k = \overline{0, n}$) и $\sigma_k^2 \notin \sigma_{ess}(A)$ ($k = \overline{1, n}$), то для решения задачи Коши (1.4) выполнено соотношение

$$\left\| A^{1/2} \left(u(t) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right) \right\|_H^2 + \left\| u'(t) + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right\|_H^2 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty). \quad (1.6)$$

1.2.2. Один частный случай. Рассмотрим теперь частный случай описанной выше конструкции. Пусть H_l ($l = 1, 2$) — комплексные гильбертовы пространства. Пусть $G_1 \in \mathcal{L}(H_1)$, G_2, C_l — плотно определённые замкнутые операторы:

$$G_2 : \mathcal{D}(G_2) \subset H_2 \rightarrow H_2, \quad C_l : \mathcal{D}(C_l) \subset H \rightarrow H_l \quad (l = 1, 2),$$

причём G_l — самосопряжённые положительно определённые операторы. Обозначим через $\omega_{G_l} := \inf\{\lambda \in \sigma(G_l)\}$ нижнюю грань оператора G_l и будем считать, что введенные операторы удовлетворяют следующим гипотезам:

- 1'') Оператор-функции $C_l^* \exp(-tG_l) C_l A^{-1}$ ($l = 1, 2$) сильно непрерывны на $\mathbb{R}_+$;
2'') Существуют $a_1 \in (0, 1)$, $a_2 > 0$ такие, что

$$\sum_{l=1}^2 \frac{1}{\omega_{G_l}} \|C_l u\|_{H_l}^2 \leq a_1 \|A^{1/2} u\|_H^2, \quad \|C_1 u\|_{H_1}^2 \geq a_2 \|A^{1/2} u\|_H^2 \quad \forall u \in \mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{D}(C_1). \quad (1.7)$$

Замечание 1.2. Условие $G_1 \in \mathcal{L}(H_1)$ и второе требование гипотезы 2'') призваны обеспечить равномерную экспоненциальную устойчивость полугруппы, связанной с (1.4) (см. лемму 2.9).

Будем теперь считать, что $H_0 = H_1 \oplus H_2$, а операторы G и C определены следующим образом:

$$G := \text{diag}(G_1, G_2), \quad G : \mathcal{D}(G) = H_1 \oplus \mathcal{D}(G_2) \subset H_0 \rightarrow H_0, \quad (1.8)$$

$$C := (C_1, C_2)^\top, \quad C : \mathcal{D}(C) = \mathcal{D}(C_1) \cap \mathcal{D}(C_2) \subset H \rightarrow H_0.$$

Здесь и далее символ $\top$ обозначает операцию транспонирования. Теперь ядро интегрального возмущения в (1.4) и оператор-функция $M(\cdot)$ из (1.3) примут следующий вид:

$$C^* \exp(-Gt) C = \sum_{l=1}^2 C_l^* \exp(-G_l t) C_l, \quad (1.9)$$

$$M(\lambda) = I + \lambda^2 A^{-1} - \sum_{l=1}^2 (C_l A^{-1/2})^* (G_l - \lambda I)^{-1} (C_l A^{-1/2}). \quad (1.10)$$

Теорема 1.2. Пусть выполнены гипотезы 1''), 2''), а ядро интегрального слагаемого в (1.4) и оператор-функция $M(\cdot)$ имеют вид (1.9) и (1.10) соответственно.

- 1) Если $u^0 \in \mathcal{D}(A)$, $u^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $f \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$, то решение задачи Коши (1.4) существует и единственно.
- 2) Будем считать дополнительно, что функция $f(\cdot)$ имеет вид (1.5), где $g, f_k \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$ ($k = \overline{0, n}$). Если $\|g(t)\|_H \rightarrow 0$, $\|f'_k(t)\|_H \rightarrow 0$ ($k = \overline{0, n}$) при $t \rightarrow +\infty$, то имеет место соотношение (1.6).
- 3) Если, в частности, $\|g(t)\|_H$, $\|f'_k(t)\|_H$ ($k = \overline{0, n}$) убывают экспоненциально при $t \rightarrow +\infty$, то сходимость к нулю в (1.6) также экспоненциальная.

2. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ

Идея доказательства теорем 1.1, 1.2 заключается в установлении связи между решениями задачи Коши (1.4) и решениями задачи Коши для некоторого дифференциально-операторного уравнения первого порядка с последующим использованием свойств решений этой задачи Коши.

В п. 2.1 доказываются леммы об асимптотическом поведении решений задач Коши для уравнений первого порядка с правой частью специального вида. Рассматриваются две ситуации — когда оператор уравнения генерирует сильно устойчивую либо равномерно экспоненциально устойчивую полугруппу. В п. 2.2 осуществляется переход от задачи Коши (1.4) к задаче Коши для некоторого дифференциально-операторного уравнения первого порядка. Оператор этого уравнения представляет собой операторную матрицу специального вида. В п. 2.3 исследуются операторные матрицы указанного вида. Находятся условия, достаточные для того, чтобы эти операторные матрицы генерировали сильно устойчивые либо равномерно экспоненциально устойчивые полугруппы. В п. 2.4 с использованием результатов п. 2.1 и п. 2.3 доказываются утверждения теоремы 1.1 (см. леммы 2.10, 2.11) и теоремы 1.2 (см. леммы 2.12, 2.13).

2.1. Асимптотика решений дифференциального уравнения первого порядка. Пусть оператор $-\mathcal{A}$ генерирует сильно непрерывную полугруппу $\mathcal{U}(t)$ на банаховом пространстве $\mathcal{E}$. Рассмотрим в $\mathcal{E}$ следующую задачу Коши:

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\mathcal{A}\zeta + \mathcal{F}(t), \quad \zeta(0) = \zeta^0. \quad (2.1)$$

Определение 2.1. Решением задачи Коши (2.1) назовём функцию $\zeta \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{E})$ такую, что $\zeta(t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ при $t \in \mathbb{R}_+$, $\mathcal{A}\zeta \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{E})$, выполнено начальное условие и уравнение из (2.1) для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

Лемма 2.1. Пусть выполнены следующие условия. Сильно непрерывная полугруппа $\mathcal{U}(t)$ равномерно ограничена. Множество $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R}$ не более чем счётно и $\sigma_p(\mathcal{A}^*) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$.

Функция $\mathcal{F}(t)$ имеет вид

$$\mathcal{F}(t) := \mathcal{G}(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{F}_k(t), \quad \sigma_0 = 0, \quad 0 \neq \sigma_k \in \mathbb{R} \quad (k = \overline{1, n}), \quad (2.2)$$

где $\mathcal{G} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{E})$, $\mathcal{F}_k \in C^{m_k}(\mathbb{R}_+; \mathcal{E})$ ($m_k \in \mathbb{N}, k = \overline{0, n}$). Если $\zeta^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\mathcal{G}, \mathcal{F}_k^{(m_k)} \in L_1(\mathbb{R}_+; \mathcal{E})$, $i\sigma_k \notin \sigma(\mathcal{A})$ ($k = \overline{0, n}$), то решение задачи Коши (2.1) существует, единственно и удовлетворяет асимптотической формуле $(\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) := (\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I})^{-1})$

$$\left\| \zeta(t) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \sum_{j=0}^{m_k-1} (-1)^j \mathcal{R}_{i\sigma_k}^{j+1}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k^{(j)}(t) \right\|_{\mathcal{E}} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty). \quad (2.3)$$

Доказательство.

1) Покажем однозначную разрешимость задачи Коши (2.1) и найдём специальное представление для её решения.

Из $\zeta^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, сильной непрерывности полугруппы $\mathcal{U}(t)$ и $\mathcal{F} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{E})$ следует, что задача Коши (2.1) имеет единственное решение в смысле определения 2.1 (см., например, [9, гл. 1, §6, теорема 6.5] или [3, гл. 2, §1, теорема 1.4]).

С учётом $i\sigma_k \notin \sigma(\mathcal{A})$ ($k = \overline{0, n}$) будем разыскивать это решение в виде

$$\zeta(t) = \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \sum_{j=0}^{m_k-1} (-1)^j \mathcal{R}_{i\sigma_k}^{j+1}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k^{(j)}(t) + \chi(t). \quad (2.4)$$

Отсюда, из (2.1) и (2.2) получим, что

$$\frac{d\zeta}{dt} = \sum_{k=0}^n -i\sigma_k e^{-i\sigma_k t} \sum_{j=0}^{m_k-1} (-1)^j \mathcal{R}_{i\sigma_k}^{j+1}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k^{(j)}(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \sum_{j=0}^{m_k-1} (-1)^j \mathcal{R}_{i\sigma_k}^{j+1}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k^{(j+1)}(t) + \frac{d\chi}{dt} =$$

$$\begin{aligned}
&= -\mathcal{A}\zeta + \mathcal{F}(t) = \sum_{k=0}^n -\mathcal{A}e^{-i\sigma_k t} \sum_{j=0}^{m_k-1} (-1)^j \mathcal{R}_{i\sigma_k}^{j+1}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k^{(j)}(t) - \mathcal{A}\chi + \mathcal{G}(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{F}_k(t); \\
&\sum_{k=0}^n (\mathcal{A} - i\sigma_k \mathcal{I}) e^{-i\sigma_k t} \sum_{j=0}^{m_k-1} (-1)^j \mathcal{R}_{i\sigma_k}^{j+1}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k^{(j)}(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \sum_{j=1}^{m_k} (-1)^{j-1} \mathcal{R}_{i\sigma_k}^j(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k^{(j)}(t) + \frac{d\chi}{dt} = \\
&= -\mathcal{A}\chi + \mathcal{G}(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{F}_k(t); \\
&\sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{F}_k(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \sum_{j=1}^{m_k-1} (-1)^j \mathcal{R}_{i\sigma_k}^j(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k^{(j)}(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \sum_{j=1}^{m_k-1} (-1)^{j-1} \mathcal{R}_{i\sigma_k}^j(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k^{(j)}(t) + \\
&+ \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} (-1)^{m_k-1} \mathcal{R}_{i\sigma_k}^{m_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k^{(m_k)}(t) + \frac{d\chi}{dt} = -\mathcal{A}\chi + \mathcal{G}(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{F}_k(t).
\end{aligned}$$

Отсюда следует, что функция $\chi(\cdot)$ должна быть решением задачи Коши

$$\begin{aligned}
\frac{d\chi}{dt} &= -\mathcal{A}\chi + \mathcal{G}(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} (-1)^{m_k} \mathcal{R}_{i\sigma_k}^{m_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k^{(m_k)}(t), \\
\chi(0) &= \zeta^0 - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{m_k-1} (-1)^j \mathcal{R}_{i\sigma_k}^{j+1}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k^{(j)}(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}).
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Чтобы обосновать представление для функции $\chi(\cdot)$ через интеграл Дюамеля, заметим, что решение задачи (2.5) можно представить в виде суммы $\chi(t) = \chi_1(t) + \chi_2(t)$, где $\chi_1(\cdot)$, $\chi_2(\cdot)$ — решения задач Коши

$$\frac{d\chi_1}{dt} = -\mathcal{A}\chi_1 + \mathcal{G}(t), \quad \chi_1(0) = \zeta^0 - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{m_k-1} (-1)^j \mathcal{R}_{i\sigma_k}^{j+1}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k^{(j)}(0) \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \tag{2.6}$$

$$\frac{d\chi_2}{dt} = -\mathcal{A}\chi_2 + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} (-1)^{m_k} \mathcal{R}_{i\sigma_k}^{m_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k^{(m_k)}(t), \quad \chi_2(0) = 0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}). \tag{2.7}$$

Задача Коши (2.6) разрешима в силу п. 2° теоремы [9, гл. 1, §6, теорема 6.5] (см. также п. (ii) теоремы [3, гл. 2, §1, теорема 1.3]). Задача Коши (2.7) разрешима в силу п. 1° теоремы [9, гл. 1, §6, теорема 6.5] (см. также п. (i) теоремы [3, гл. 2, §1, теорема 1.3]). При этом $\chi_1(\cdot)$, $\chi_2(\cdot)$ представимы через интегралы Дюамеля.

Итак, складывая решения задач Коши (2.6) и (2.7), найдём представление для решения задачи (2.5). С учётом связи (2.4) найдём, что

$$\begin{aligned}
\zeta(t) &= \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \sum_{j=0}^{m_k-1} (-1)^j \mathcal{R}_{i\sigma_k}^{j+1}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k^{(j)}(t) + \mathcal{U}(t) \left(\zeta^0 - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{m_k-1} (-1)^j \mathcal{R}_{i\sigma_k}^{j+1}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k^{(j)}(0) \right) + \\
&+ \int_0^t \mathcal{U}(t-s) \left(\mathcal{G}(s) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k s} (-1)^{m_k} \mathcal{R}_{i\sigma_k}^{m_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k^{(m_k)}(s) \right) ds.
\end{aligned} \tag{2.8}$$

2) Докажем теперь формулу (2.3).

Из условий на спектр оператора $\mathcal{A}$ леммы 2.1 и теоремы Арендта—Батти—Любича—Ву (см. [15, гл. 2, §5, п. 5.5, теорема 5.5.5] или [28, гл. 5, §5.1, теорема 5.1.5]) следует, что полугруппа $\mathcal{U}(t)$, генерируемая оператором $-\mathcal{A}$, сильно устойчива, т. е. $\|\mathcal{U}(t)\xi\|_{\mathcal{E}} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ для любого $\xi \in \mathcal{E}$. Следовательно,

$$\left\| \mathcal{U}(t) \left(\zeta^0 - \sum_{k=0}^n \sum_{j=0}^{m_k-1} (-1)^j \mathcal{R}_{i\sigma_k}^{j+1}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k^{(j)}(0) \right) \right\|_{\mathcal{E}} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty). \tag{2.9}$$

Далее, из $\mathcal{G}, \mathcal{F}_k^{(m_k)} \in L_1(\mathbb{R}_+; \mathcal{E})$ ($k = \overline{0, n}$) следует, что неоднородность в (2.5) также принадлежит пространству $L_1(\mathbb{R}_+; \mathcal{E})$. Отсюда, из равномерной ограниченности и сильной устойчивости полугруппы $\mathcal{U}(t)$, и из [15, гл. 2, §5, п. 5.6, предложение 5.6.4] следует, что

$$\left\| \int_0^t \mathcal{U}(t-s) \left(\mathcal{G}(s) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k s} (-1)^{m_k} \mathcal{R}_{i\sigma_k}^{m_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k^{(m_k)}(s) \right) ds \right\|_{\mathcal{E}} \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow +\infty). \quad (2.10)$$

Теперь из (2.9), (2.10) и (2.8) следует (2.3). Лемма доказана. $\square$

Замечание 2.1. Если банахово пространство $\mathcal{E}$ рефлексивно, то условие $\sigma_p(\mathcal{A}^*) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ можно заменить на $\sigma_p(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ (см. [28, гл. 5, §5.1, предложение 5.1.15 и предложение 5.1.17]).

Лемма 2.2. Пусть выполнены следующие условия. Сильно непрерывная полугруппа $\mathcal{U}(t)$ равномерно экспоненциально устойчива, т. е. существуют $M \geq 1$, $\omega > 0$ такие, что $\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{E})} \leq M \exp(-\omega t)$ для любого $t \in \mathbb{R}_+$. Функция $\mathcal{F}(\cdot)$ имеет вид (2.2), где $\mathcal{G} \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{E})$, $\mathcal{F}_k \in C^{m_k}(\mathbb{R}_+; \mathcal{E})$ ($m_k \in \mathbb{N}, k = \overline{0, n}$).

- 1) Если $\zeta^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\|\mathcal{G}(t)\|_{\mathcal{E}} \longrightarrow 0$, $\|\mathcal{F}_k^{(m_k)}(t)\|_{\mathcal{E}} \longrightarrow 0$ ($k = \overline{0, n}$) при $t \longrightarrow +\infty$, то решение задачи Коши (2.1) существует, единственно и удовлетворяет асимптотической формуле (2.3).
- 2) Если, в частности, $\|\mathcal{G}(t)\|_{\mathcal{E}}, \|\mathcal{F}_k^{(m_k)}(t)\|_{\mathcal{E}}$ ($k = \overline{0, n}$) убывают экспоненциально при $t \longrightarrow +\infty$, то сходимость к нулю в (2.3) также экспоненциальная.

Доказательство.

1) Однозначная разрешимость задачи Коши (2.1) и представление (2.8) для её решения доказываются как в лемме 2.1. Нужно только учесть, что $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$, поскольку по условию леммы полугруппа $\mathcal{U}(t)$ равномерно экспоненциально устойчива.

2) Для доказательства формулы (2.3) заметим, что, например, из [15, гл. 2, §5, п. 5.5, предложение 5.6.1, d)] и $\|\mathcal{G}(t)\|_{\mathcal{E}} \longrightarrow 0$, $\|\mathcal{F}_k^{(m_k)}(t)\|_{\mathcal{E}} \longrightarrow 0$ ($k = \overline{0, n}$) при $t \longrightarrow +\infty$ следует (2.10), а соотношение (2.9) следует из равномерной экспоненциальной устойчивости полугруппы $\mathcal{U}(t)$.

Если $\|\mathcal{G}(t)\|_{\mathcal{E}}, \|\mathcal{F}_k^{(m_k)}(t)\|_{\mathcal{E}}$ ($k = \overline{0, n}$) убывают экспоненциально, то из представления (2.8) и равномерной экспоненциальной устойчивости полугруппы $\mathcal{U}(t)$ непосредственными вычислениями несложно вывести, что сходимость к нулю в (2.3) также экспоненциальная. Лемма доказана. $\square$

2.2. Переход от (1.4) к задаче Коши для дифференциального уравнения первого порядка.

2.2.1. Общий случай, выполнены гипотезы 1'), 2'), 3'). С учётом гипотез 1'), 2') и формулы (1.3), определяющей оператор-функцию $M(\cdot)$, введём операторы $Q := CA^{-1/2} \in \mathcal{L}(H, H_0)$ и $T := M(0)$.

Лемма 2.3. Имеет место формула $Q^*|_{\mathcal{D}(C^*)} = A^{-1/2}C^*$, оператор T положительно определён в гильбертовом пространстве H .

Доказательство. Для любых $u \in H$, $v \in \mathcal{D}(C^*)$ имеем

$$(Qu, v)_{H_0} = (u, Q^*v)_H = (u, A^{-1/2}C^*v)_H,$$

откуда следует, что $Q^*|_{\mathcal{D}(C^*)} = A^{-1/2}C^*$.

Докажем, что оператор $T = M(0) \in \mathcal{L}(H)$ (см. (1.3)) положительно определён. Для любых $u \in H$ с учётом гипотезы 2') (см. (1.1)) имеем

$$\begin{aligned} (Tu, u)_H &= ((I - Q^*G^{-1}Q)u, u)_H = \|u\|_H^2 - (G^{-1}Qu, Qu)_{H_0} \geq \|u\|_H^2 - \omega_G^{-1} \|Qu\|_{H_0}^2 = \\ &= \|A^{1/2}(A^{-1/2}u)\|_H^2 - \omega_G^{-1} \|C(A^{-1/2}u)\|_{H_0}^2 \geq (1 - a_1) \|A^{1/2}(A^{-1/2}u)\|_H^2 = (1 - a_1) \|u\|_H^2, \end{aligned}$$

где $1 - a_1 > 0$. Лемма доказана. $\square$

Предположим, что задача Коши (1.4) имеет решение $u(\cdot)$ (в смысле определения 1.1). Тогда по необходимости для начальных данных получим включения $u^0 \in \mathcal{D}(A)$, $u^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$. Перепишем уравнение из (1.4) в следующей эквивалентной форме:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -A^{1/2} \left(A^{1/2} u - \int_0^t (A^{-1/2} C^*) \exp(-G(t-s)) (C A^{-1/2}) A^{1/2} u(s) ds \right) + f(t). \quad (2.11)$$

Отсюда и из леммы 2.3 следует, что функция $u(\cdot)$ будет также решением уравнения

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -A^{1/2} \left(A^{1/2} u - Q^* \int_0^t \exp(-G(t-s)) Q A^{1/2} u(s) ds \right) + f(t). \quad (2.12)$$

По условию $A^{1/2} u' \in C(\mathbb{R}_+; H)$ (см. определение 1.1). Отсюда и из [3, гл. 1, §1, лемма 1.5] следует, что $(A^{1/2} u(t))' = A^{1/2} u'(t)$. Из этого соотношения и из $u^0 \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2})$ теперь можно вывести следующую форму интегрирования по частям:

$$\begin{aligned} \int_0^t \exp(-G(t-s)) Q A^{1/2} u(s) ds &= \\ &= G^{-1} Q A^{1/2} u(t) - \exp(-Gt) G^{-1} Q A^{1/2} u^0 - \int_0^t \exp(-G(t-s)) G^{-1} Q A^{1/2} u'(s) ds. \end{aligned}$$

Преобразуем уравнение (2.12) с помощью полученной формулы. С учётом формулы для оператора T (см. лемму 2.3) из последнего соотношения получим, что (2.12) эквивалентно уравнению

$$\begin{aligned} \frac{d^2 u}{dt^2} &= -A^{1/2} \left(T^{1/2} (T^{1/2} A^{1/2} u) + Q^* \exp(-Gt) G^{-1} Q A^{1/2} u^0 + \right. \\ &\quad \left. + Q^* G^{-1/2} \int_0^t \exp(-G(t-s)) G^{-1/2} Q A^{1/2} u'(s) ds \right) + f(t). \end{aligned} \quad (2.13)$$

Определим функции

$$z(t) := u'(t), \quad v(t) := T^{1/2} A^{1/2} u(t), \quad w(t) := \int_0^t \exp(-G(t-s)) G^{-1/2} Q A^{1/2} u'(s) ds. \quad (2.14)$$

Функции $z(\cdot)$, $v(\cdot)$, очевидно, непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}_+$. Относительно функции $w(\cdot)$ докажем следующее утверждение.

Лемма 2.4. *Фиксируем произвольное $\tau > 0$. Пусть $A^{1/2} u' \in C([0, \tau]; H)$, тогда функция $w(\cdot)$, определённая в (2.14), является решением (в смысле определения 2.1) следующей задачи Коши:*

$$\frac{dw}{dt} = -Gw + G^{-1/2} Q A^{1/2} u'(t), \quad w(0) = 0. \quad (2.15)$$

Доказательство.

1) Пусть $A^{1/2} u' \in C([0, \tau]; H)$. Тогда $A^{1/2} u' \in L_1([0, \tau]; H)$ и из [15, гл. 1, §3, п. 3.1, предложение 3.1.16] следует, что функция $w(\cdot)$, определённая в (2.14), является *слабым решением* (*mild solution*, см. [15, гл. 1, §3, п. 3.1]) задачи Коши (2.15). Теперь из $A^{1/2} u' \in C([0, \tau]; H)$ и [15, гл. 1, §3, п. 3.1, предложение 3.1.15] следует, что слабое решение $w(\cdot)$ тогда и только тогда будет решением задачи Коши (2.15) в смысле определения 2.1, когда $w \in C^1([0, \tau]; H)$.

2) Для дальнейшего понадобится вспомогательное соотношение. Пусть $h \in C([0, \tau]; H)$, тогда

$$\max_{s \in [0, \tau]} \|(\exp(-Gt) - I)h(s)\|_H \longrightarrow 0 \quad (t \longrightarrow +0). \quad (2.16)$$

Допустим, что (2.16) не имеет места. Тогда существуют числовые последовательности $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$, $\{s_k\}_{k=1}^{\infty} \subset [0, \tau]$ такие, что $t_k \rightarrow +0$ и $\|(\exp(-Gt_k) - I)h(s_k)\|_H \not\rightarrow 0$ ($k \rightarrow \infty$). Поскольку последовательность $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ ограничена, можно считать, что она сходится. Иначе ограничимся её сходящейся подпоследовательностью. Итак, $s_k \rightarrow s_0 \in [0, \tau]$ ($k \rightarrow \infty$). Далее имеем

$$\begin{aligned} \|(\exp(-Gt_k) - I)h(s_k)\|_H &\leq \|(\exp(-Gt_k) - I)(h(s_k) - h(s_0))\|_H + \|(\exp(-Gt_k) - I)h(s_0)\|_H \leq \\ &\leq \|(\exp(-Gt_k) - I)\|_{\mathcal{L}(H)} \|h(s_k) - h(s_0)\|_H + \|(\exp(-Gt_k) - I)h(s_0)\|_H \leq \\ &\leq 2\|h(s_k) - h(s_0)\|_H + \|(\exp(-Gt_k) - I)h(s_0)\|_H \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty) \end{aligned}$$

в силу непрерывности функции $h(\cdot)$ и сильной непрерывности в нуле полугруппы $\exp(-Gt)$. Полученное противоречие доказывает (2.16).

3) Итак, докажем, что $w \in C^1([0, \tau]; H)$. Вычислим формально производную функции $w(\cdot)$ и покажем, что она непрерывна:

$$w'(t) = G^{-1/2}QA^{1/2}u'(t) - \int_0^t G^{1/2} \exp(-G(t-s))QA^{1/2}u'(s) ds. \quad (2.17)$$

Функция $G^{-1/2}QA^{1/2}u'(\cdot)$, очевидно, непрерывна на $[0, \tau]$, так как $G^{-1/2}Q \in \mathcal{L}(H, H_0)$ и по условию леммы $A^{1/2}u' \in C([0, \tau]; H)$. Покажем, что свёртка в (2.17) непрерывна на $[0, \tau]$. Фиксируем $t_0 \in (0, \tau]$. С использованием оценки $\|G^\alpha \exp(-Gt)\|_{\mathcal{L}(H_0)} \leq C_\alpha t^{-\alpha} \exp(-\omega t)$ ($\alpha \geq 0$, $C_\alpha > 0$, $\omega > 0$) для любого $t > 0$ (см. [10, гл. 1, §1.3, теорема 1.4.3]) и (2.16) для $0 \leq t < t_0$ найдём, что

$$\begin{aligned} &\left\| \int_0^t G^{1/2} \exp(-G(t-s))QA^{1/2}u'(s) ds - \int_0^{t_0} G^{1/2} \exp(-G(t_0-s))QA^{1/2}u'(s) ds \right\|_{H_0} = \\ &= \left\| \int_0^t G^{1/2} (e^{-G(t-s)} - e^{-G(t_0-s)})QA^{1/2}u'(s) ds - \int_t^{t_0} G^{1/2} e^{-G(t_0-s)}QA^{1/2}u'(s) ds \right\|_{H_0} = \\ &= \left\| - \int_0^t G^{1/2} e^{-G(t-s)} (e^{-G(t_0-t)} - I)QA^{1/2}u'(s) ds - \int_t^{t_0} G^{1/2} e^{-G(t_0-s)}QA^{1/2}u'(s) ds \right\|_{H_0} \leq \\ &\leq \max_{s \in [0, \tau]} \|(e^{-G(t_0-t)} - I)QA^{1/2}u'(s)\|_{H_0} \int_0^t C_{1/2}(t-s)^{-1/2} e^{-\omega(t-s)} ds + \\ &\quad + \max_{s \in [0, \tau]} \|QA^{1/2}u'(s)\|_{H_0} \int_t^{t_0} C_{1/2}(t_0-s)^{-1/2} e^{-\omega(t_0-s)} ds \leq \\ &\leq 2C_{1/2}t^{1/2} \max_{s \in [0, \tau]} \|(e^{-G(t_0-t)} - I)QA^{1/2}u'(s)\|_{H_0} + \\ &\quad + 2C_{1/2}(t_0-t)^{1/2} \max_{s \in [0, \tau]} \|QA^{1/2}u'(s)\|_{H_0} \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow t_0 - 0). \end{aligned}$$

Таким образом, свёртка непрерывна в точке t_0 слева.

Фиксируем теперь $t_0 \in [0, \tau)$. Вычислениями, аналогичными проведенным выше, показывается, что свёртка непрерывна в точке t_0 справа. Таким образом, $w \in C^1([0, \tau]; H)$. Лемма доказана. $\square$

Из (2.13), (2.14) и леммы 2.4 следует, что функции $z(\cdot)$, $v(\cdot)$, $w(\cdot)$ удовлетворяют следующей системе уравнений и начальных условий:

$$\begin{cases} \frac{dz}{dt} = -A^{1/2}(T^{1/2}v + Q^*G^{-1/2}w + Q^* \exp(-Gt)G^{-1}QA^{1/2}u^0) + f(t), \\ \frac{dv}{dt} = -(-T^{1/2}A^{1/2}z), \\ \frac{dw}{dt} = -(-G^{-1/2}QA^{1/2}z + Gw), \end{cases} \quad (2.18)$$

$$z(0) = u^1, \quad v(0) = T^{1/2}A^{1/2}u^0, \quad w(0) = 0.$$

Перепишем систему (2.18) в виде задачи Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := H \oplus H \oplus H_0$:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}(\xi + \xi(u^0, t)) + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0. \quad (2.19)$$

Оператор $\mathcal{A}$ и его естественная область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ имеют следующий вид:

$$\mathcal{A} := \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & T^{1/2} & Q^*G^{-1} \\ -T^{1/2} & 0 & 0 \\ -G^{-1}Q & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix}, \quad (2.20)$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) := \{\xi = (z; v; w)^\top \in \mathcal{H} : z \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad T^{1/2}v + Q^*G^{-1/2}w \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad w \in \mathcal{D}(G)\},$$

$$\xi^0 := (u^1; T^{1/2}A^{1/2}u^0; 0)^\top, \quad \xi(u^0, t) := (0; T^{-1/2}Q^* \exp(-Gt)G^{-1}QA^{1/2}u^0; 0)^\top, \quad \mathcal{F}(t) := (f(t); 0; 0)^\top.$$

Осуществим в задаче (2.19) замену $\zeta(t) := \xi(t) + \xi(u^0, t)$. В результате получим следующую основную задачу Коши:

$$\frac{d\zeta}{dt} = -\mathcal{A}\zeta + \xi'(u^0, t) + \mathcal{F}(t), \quad \zeta(0) = \xi^0 + \xi(u^0, 0). \quad (2.21)$$

2.2.2. Частный случай, выполнены гипотезы 1''), 2''). Пусть теперь выполнены гипотезы 1'') и 2''), а ядро интегрального возмущения в (1.4) и оператор-функция $M(\cdot)$ из (1.3) имеют вид (1.9) и (1.10) соответственно. Определим операторы $Q_l := C_l A^{-1/2} \in \mathcal{L}(H, H_l)$ ($l = 1, 2$) и $T := M(0)$. Имеет место лемма, аналогичная лемме 2.3.

Лемма 2.5. *Имеет место формула $Q_l^*|_{\mathcal{D}(C_l^*)} = A^{-1/2}C_l^*$ ($l = 1, 2$), операторы T и $Q_1^*Q_1$ положительно определены в гильбертовом пространстве H .*

Доказательство. В доказательстве здесь нуждается только положительная определённость оператора $Q_1^*Q_1$. Действительно, с учётом гипотезы 2'') (см. (1.7)) для любого $u \in H$ имеем

$$(Q_1^*Q_1 u, u)_H = \|Q_1 u\|_{H_1}^2 = \|C_1(A^{-1/2}u)\|_{H_1}^2 \geq a_2 \|A^{1/2}(A^{-1/2}u)\|_H^2 = a_2 \|u\|_H^2,$$

где $a_2 > 0$. Лемма доказана. $\square$

Далее проводятся рассуждения, аналогичные проведенным выше при переходе от (2.11) к (2.18). Система (2.18) переписывается в виде (2.19). При этом в (2.20) для сокращения записи введены обозначения:

$$w := \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \end{pmatrix} \in H_0 := H_1 \oplus H_2, \quad Q := \begin{pmatrix} Q_1 \\ Q_2 \end{pmatrix}, \quad G := \text{diag}(G_1, G_2), \quad \mathcal{D}(G) = H_1 \oplus \mathcal{D}(G_2). \quad (2.22)$$

После соответствующей замены в (2.19) снова приходим к задаче (2.21).

2.3. Свойства оператора $\mathcal{A}$.

2.3.1. Общий случай, выполнены гипотезы 1'), 2'), 3'). В дальнейших вычислениях понадобятся факторизации Шура—Фробениуса операторных блоков с ограниченными операторными коэффициентами и формулы обращения этих блоков (см., например, [31, гл. 1, §1.6, предложение 1.6.2]).

Замечание 2.2. Пусть E_1, E_2 банаховы пространства, $A_{kl} \in \mathcal{L}(E_l, E_k)$ ($k, l = 1, 2$), $A_{22}^{-1} \in \mathcal{L}(E_2)$, $D_1 := A_{11} - A_{12}A_{22}^{-1}A_{21}$. Если $D_1^{-1} \in \mathcal{L}(E_1)$, то существует

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} &= \left[\begin{pmatrix} I & A_{12}A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{22}^{-1}A_{21} & I \end{pmatrix} \right]^{-1} = \\ &= \begin{pmatrix} D_1^{-1} & -D_1^{-1}A_{12}A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1}A_{21}D_1^{-1} & A_{22}^{-1}(A_{22} + A_{21}D_1^{-1}A_{12})A_{22}^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Пусть $A_{11}^{-1} \in \mathcal{L}(E_1)$, $D_2 := A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}$. Если $D_2^{-1} \in \mathcal{L}(E_2)$, то существует

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \left[\begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21}A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1}A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} \right]^{-1} =$$

$$= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1}(A_{11} + A_{12}D_2^{-1}A_{21})A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1} \\ -D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & D_2^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2). \quad (2.24)$$

Лемма 2.6. *Оператор $-\mathcal{A}$ является генератором сжимающей сильно непрерывной полугруппы. Кроме того, существует $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$ и справедливо представление*

$$\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & -T^{-1/2}Q^*G^{-1} \\ 0 & 0 & G^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -T^{-1/2} & 0 \\ T^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -G^{-1}QT^{-1/2} & G^{-1/2} \end{pmatrix}. \quad (2.25)$$

Доказательство.

1) Докажем, что оператор $\mathcal{A}$ непрерывно обратим и выведем формулу (2.25). Отсюда будет следовать, что оператор $\mathcal{A}$ замкнут на своей естественной области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$. Плотная определённость оператора $\mathcal{A}$ следует из формулы $\mathcal{H} = \overline{\text{Im}\mathcal{A}^{-1}} \oplus \text{Ker}(\mathcal{A}^{-1})^*$ ($\text{Im}\mathcal{A}^{-1}$ — область значений оператора $\mathcal{A}^{-1}$) и равенства $\text{Ker}(\mathcal{A}^{-1})^* = \{0\}$.

Применим факторизацию (2.24) к обращению среднего операторного блока в разложении (2.20). С учётом $T^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ (см. лемму 2.3) найдём, что существует

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} 0 & T^{1/2} & Q^*G^{-1} \\ -T^{1/2} & 0 & 0 \\ -G^{-1}Q & 0 & I \end{pmatrix}^{-1} = \\ & = \left[\begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & G^{-1}QT^{-1/2} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & T^{1/2} & 0 \\ -T^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & T^{-1/2}Q^*G^{-1} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \right]^{-1} = \\ & = \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & -T^{-1/2}Q^*G^{-1} \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -T^{-1/2} & 0 \\ T^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & -G^{-1}QT^{-1/2} & I \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}). \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.20) следует (2.25). Из (2.25) видно, что $\text{Ker}(\mathcal{A}^{-1})^* = \{0\}$, а значит, естественная область определения оператора $\mathcal{A}$ плотна в $\mathcal{H}$.

2) Покажем, что оператор $-\mathcal{A}$ является генератором сжимающей сильно непрерывной полугруппы. Для этого достаточно установить, что оператор $-\mathcal{A}$ является замкнутым максимальным диссипативным оператором (см., например, [9, гл. 1, §4, п. 2, теорема 4.5]).

В 1) доказано, что оператор $\mathcal{A}$ плотно определён. Пусть $\xi = (z; v; w)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. (2.20)), тогда $z \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $w \in \mathcal{D}(G) \subset \mathcal{D}(G^{1/2})$ и с использованием представления (2.20) найдём, что $\text{Re}(-\mathcal{A}\xi, \xi)_{\mathcal{H}} = -\|A^{1/2}z\|_H^2 - \|G^{1/2}w\|_{H_0}^2 \leq 0$, то есть оператор $-\mathcal{A}$ диссипативен. Далее, из (2.25) следует, что $0 \in \rho(\mathcal{A})$ ($\rho(\mathcal{A})$ — резольвентное множество оператора $\mathcal{A}$). Учитывая, что $\rho(\mathcal{A})$ открытое множество, найдём, что $\rho(-\mathcal{A}) \cap (0, +\infty) \neq \emptyset$. Следовательно (см., например, [9, гл. 1, §4, п. 2, теорема 4.3] или [24, гл. 1, §1.2, теорема 1.2.3]) замкнутый оператор $-\mathcal{A}$ максимален. Лемма доказана. $\square$

Замечание 2.3. По лемме 2.6 оператор $\mathcal{A}$ плотно определён, замкнут и $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Из [8, гл. 3, §5, п. 5, теорема 5.30] следует, что $(\mathcal{A}^{-1})^* = (\mathcal{A}^*)^{-1}$. Отсюда и из (2.25) непосредственными вычислениями выводится формула

$$\mathcal{A}^* = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -T^{1/2} & -Q^*G^{-1} \\ T^{1/2} & 0 & 0 \\ G^{-1}Q & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix}, \quad (2.26)$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}^*) = \{\xi = (z; v; w)^T \in \mathcal{H} : z \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad T^{1/2}v + Q^*G^{-1/2}w \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad w \in \mathcal{D}(G)\}.$$

Лемма 2.7. *Имеет место следующая формула для резольвенты оператора $\mathcal{A}$:*

$$\mathcal{R}_\lambda(\mathcal{A}) = \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ -\lambda^{-1}T^{1/2} & I & 0 \\ G^{-1/2}\mathcal{R}_\lambda(G)Q & 0 & G^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda M^{-1}(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda^{-1}I & 0 \\ 0 & 0 & (I - \lambda G^{-1})^{-1} \end{pmatrix} \times$$

$$\times \begin{pmatrix} A^{-1/2} & \lambda^{-1}T^{1/2} & -Q^*\mathcal{R}_\lambda(G)G^{-1/2} \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad (2.27)$$

при всех $\lambda \notin \sigma(M(\cdot)) \cup \sigma(G) \cup \{0\}$ (здесь $\sigma(M(\cdot))$, $\sigma(G)$ — спектры операторного пучка $M(\cdot)$ и оператора G соответственно).

Доказательство. Из факторизации (2.20) оператора $\mathcal{A}$ в симметричной форме имеем

$$\mathcal{A} - \lambda\mathcal{I} = \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\lambda A^{-1} & T^{1/2} & Q^*G^{-1} \\ -T^{1/2} & -\lambda I & 0 \\ -G^{-1}Q & 0 & I - \lambda G^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix}.$$

Применим факторизацию (2.23) к обращению среднего операторного блока в последнем разложении. При $\lambda \notin \sigma(G) \cup \{0\}$ найдём, что

$$\begin{aligned} \mathcal{A} - \lambda\mathcal{I} &= \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\lambda^{-1}T^{1/2} & Q^*\mathcal{R}_\lambda(G) \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \times \\ &\times \begin{pmatrix} D_1(\lambda) & 0 & 0 \\ 0 & -\lambda I & 0 \\ 0 & 0 & I - \lambda G^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 & 0 \\ \lambda^{-1}T^{1/2} & I & 0 \\ -\mathcal{R}_\lambda(G)Q & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & 0 \\ 0 & 0 & G^{1/2} \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Здесь оператор-функция $D_1(\cdot)$, с учётом (1.3), $Q = CA^{-1/2}$ и $T = M(0)$ (см. лемму 2.3), вычисляется следующим образом (см. (2.23)):

$$\begin{aligned} D_1(\lambda) &= -\lambda A^{-1} - (T^{1/2}, Q^*G^{-1}) \begin{pmatrix} -\lambda^{-1}I & 0 \\ 0 & (I - \lambda G^{-1})^{-1} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -T^{1/2} \\ -G^{-1}Q \end{pmatrix} = \\ &= -\lambda A^{-1} - \lambda^{-1}T + Q^*(G - \lambda I)^{-1}G^{-1}Q = \\ &= -\lambda A^{-1} - \lambda^{-1}(I - Q^*G^{-1}Q) + Q^*(G - \lambda I)^{-1}G^{-1}Q = \\ &= -\lambda^{-1}(I + \lambda^2 A^{-1} - (Q^*G^{-1}Q + \lambda Q^*(G - \lambda I)^{-1}G^{-1}Q)) = \\ &= -\lambda^{-1}(I + \lambda^2 A^{-1} - Q^*(I + \lambda(G - \lambda I)^{-1})G^{-1}Q) = -\lambda^{-1}M(\lambda). \end{aligned}$$

Отсюда и из (2.28) следует (2.27). Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.8. Пусть выполнены гипотезы 1'), 2'), 3'). Тогда сильно непрерывная полугруппа $\mathcal{U}(t)$, генерируемая оператором $-\mathcal{A}$, является сильно устойчивой, т. е. $\|\mathcal{U}(t)\xi\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow +\infty$ для любого $\xi \in \mathcal{H}$. При этом если $i\beta \in \sigma(\mathcal{A})$ при некотором $\beta \in \mathbb{R}$, то $\beta^2 \in \sigma_{\text{ess}}(A)$.

Доказательство. Доказательство первой части леммы состоит в применении теоремы Арендта—Батти—Любича—Ву (см. [15, гл. 2, §5, п. 5.5, теорема 5.5.5] или [28, гл. 5, §5.1, теорема 5.1.5]): если сильно непрерывная полугруппа $\mathcal{U}(t)$ с генератором $-\mathcal{A}$ равномерно ограничена, множество $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R}$ счётно и $\sigma_p(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R} = \emptyset$ (см. замечание 2.1), то $\mathcal{U}(t)$ сильно устойчива.

1) По лемме 2.6 сильно непрерывная полугруппа $\mathcal{U}(t)$ равномерно ограничена (сжимающая).

2) Проверим, что оператор $\mathcal{A}$ не имеет собственных значений на мнимой оси. Допустим, что это не так, тогда существуют $\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ (по лемме 2.6 можно считать, что $\beta \neq 0$, так как $0 \in \rho(\mathcal{A})$) и $0 \neq \xi = (z; v; w)^T \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ такие, что $(\mathcal{A} - i\beta\mathcal{I})\xi = 0$. С учётом (2.20) последнее соотношение запишем в виде

$$\begin{cases} A^{1/2}(T^{1/2}v + Q^*G^{-1/2}w) - i\beta z = 0, \\ -T^{1/2}A^{1/2}z - i\beta v = 0, \\ -G^{-1/2}QA^{1/2}z + Gw - i\beta w = 0. \end{cases} \quad (2.29)$$

Умножим правую и левую части первого, второго и третьего уравнений системы (2.29) на z справа, v слева и w слева соответственно. Просуммируем полученные соотношения и с использованием включений $z \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $w \in \mathcal{D}(G) \subset \mathcal{D}(G^{1/2})$, следующих из $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. (2.20)), получим, что $\|G^{1/2}w\|_{H_0}^2 + i\beta(-\|z\|_H^2 + \|v\|_H^2 + \|w\|_{H_0}^2) = 0$. Выделяя действительную часть из последнего соотношения и используя положительную определённую оператора G , найдём, что

$w = 0$. Теперь из первого уравнения в (2.29) следует, что $T^{1/2}v \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, а из второго, следовательно, что $TA^{1/2}z \in \mathcal{D}(A^{1/2})$. Применяя к левой и правой части второго уравнения в (2.29) оператор $T^{1/2}$, а затем $A^{1/2}$ найдём, что $A^{1/2}TA^{1/2}z = \beta^2z$. Отсюда, из $T = M(0) = I - Q^*G^{-1}Q$ (см. (1.3)) и третьего соотношения в (2.29) ($G^{-1/2}QA^{1/2}z = G^{-1/2}Cz = 0$) получим, что $Az = \beta^2z$. Таким образом, $z \in \{0 \neq u \in \mathcal{D}(A) : \exists \lambda > 0 : Au = \lambda u\} \cap \text{Ker } C$, однако в силу гипотезы 3'') последнее множество пусто, а значит, $z = 0$. Теперь из второго уравнения в (2.29) следует, что $v = 0$. Следовательно, $\xi = 0$, а значит, число $i\beta$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}$.

3) Покажем, что множество $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R}$ не более чем счётно. Точнее, если $i\beta \in \sigma(\mathcal{A})$ при некотором $\beta \in \mathbb{R}$, то $\beta^2 \in \sigma_{ess}(A)$.

Вычислениями, аналогичными проведенным выше в 2), показывается, что оператор $\mathcal{A}^*$ (см. замечание 2.3 и (2.26)) не имеет собственных значений на мнимой оси. Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ не имеет остаточного спектра на мнимой оси.

Предположим, что $i\beta$ ($\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) — точка непрерывного спектра оператора $\mathcal{A}$. Тогда, поскольку $\text{Im}(\mathcal{A} - i\beta\mathcal{I})$ плотно в $\mathcal{H}$, аппроксимативная степень вырождения и аппроксимативный дефект оператора $\mathcal{A} - i\beta\mathcal{I}$ равны бесконечности (см. [8, гл. 4, §5, п. 2, теорема 5.10]). По теореме Вольфа (см. [32] или [8, гл. 4, §5, п. 2, теорема 5.11]) существует последовательность нормированных к единице элементов $\{\xi_k = (z_k; v_k; w_k)^\top\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$, не содержащая сходящуюся подпоследовательность и такая, что $\|(\mathcal{A} - i\beta\mathcal{I})\xi_k\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. С учётом (2.20) последнее соотношение запишем в виде (см. (2.29))

$$\begin{cases} A^{1/2}(T^{1/2}v_k + Q^*G^{-1/2}w_k) - i\beta z_k = o(1), \\ -T^{1/2}A^{1/2}z_k - i\beta v_k = o(1), \\ -G^{-1/2}QA^{1/2}z_k + Gw_k - i\beta w_k = o(1) \quad (k \rightarrow \infty), \\ \|\xi_k\|_{\mathcal{H}}^2 = \|z_k\|_H^2 + \|v_k\|_H^2 + \|w_k\|_{H_0}^2 = 1, \end{cases} \quad (2.30)$$

где под $o(1)$ понимается бесконечно малая последовательность элементов в соответствующем пространстве. Как и при исследовании (2.29), умножим левую и правую части первого, второго и третьего уравнений системы из (2.30) на z_k справа, v_k слева и w_k слева соответственно. Просуммируем полученные соотношения и с использованием включений $z_k \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $w_k \in \mathcal{D}(G) \subset \mathcal{D}(G^{1/2})$, следующих из $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. (2.20)), получим, что

$$\|G^{1/2}w_k\|_{H_0}^2 + i\beta(-\|z_k\|_H^2 + \|v_k\|_H^2 + \|w_k\|_{H_0}^2) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Отсюда и из нормировочного соотношения в (2.30) следует, что

$$\|z_k\|_H^2 \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \|v_k\|_H^2 \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \|w_k\|_{H_0}^2 \leq \omega_G^{-1} \|G^{1/2}w_k\|_{H_0}^2 \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \quad (2.31)$$

Выразим v_k из второго соотношения в (2.30) и подставим его в первое соотношение. Преобразованное первое соотношение и третье примут следующий вид:

$$\begin{cases} A^{1/2}(-TA^{1/2}z_k + i\beta Q^*G^{-1/2}w_k + o(1)) + i\beta^2 z_k = o(1), \\ G^{-1/2}QA^{1/2}z_k + i\beta w_k = Gw_k + o(1) \quad (k \rightarrow \infty). \end{cases}$$

Вспомяная, что $T = M(0) = I - Q^*G^{-1}Q$ (см. (1.3)), преобразуем здесь первое соотношение с помощью второго. Получим, что

$$(A^{-1} - \beta^{-2}I)z_k = o(1) \quad (k \rightarrow \infty). \quad (2.32)$$

Рассмотрим различные варианты расположения точки β .

Предположим, что $\beta^2 \in \rho(A)$. Тогда из (2.32) получим, что $\|z_k\|_H \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$. Приходим к противоречию с (2.31).

Предположим теперь, что β^2 изолированное конечнократное собственное значение оператора A , или, что то же, β^{-2} изолированное конечнократное собственное значение оператора A^{-1} . Обозначим через P_{β^2} ортогональный проектор пространства H на $\text{Ker}(A^{-1} - \beta^{-2}I)$. Применяя P_{β^2} и

$P_{\beta^2}^\perp$ к левой и правой части соотношения (2.32), найдём, что $\|P_{\beta^2}^\perp z_k\|_H \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, а последовательность $\{P_{\beta^2} z_k\}_{k=1}^\infty \subset \text{Ker}(A^{-1} - \beta^{-2}I)$ содержит сходящуюся подпоследовательность. Последнее следует из ограниченности последовательности и $\dim \text{Ker}(A^{-1} - \beta^{-2}I) < \infty$. Итак, предположим, что $P_{\beta^2} z_{k_l} \rightarrow z$ при $l \rightarrow \infty$. Тогда и предыдущего получим, что $z_{k_l} \rightarrow z$ при $l \rightarrow \infty$. Из первого соотношения в (2.30) теперь получим, что $v_{k_l} \rightarrow i\beta T^{-1/2} A^{-1/2} z$ при $l \rightarrow \infty$. Таким образом, последовательность $\{\xi_k\}_{k=1}^\infty$ содержит сходящуюся подпоследовательность, что противоречит исходному предположению.

Таким образом, β^2 может лежать только в $\sigma_{\text{ess}}(A)$, а это множество не более чем счётно по гипотезе 3'). Итак, множество $\sigma(\mathcal{A}) \cap i\mathbb{R}$ не более чем счётно. Применение теоремы Арендта—Батти—Любича—Ву завершает доказательство леммы. $\square$

2.3.2. Частный случай, выполнены гипотезы 1''), 2''). В рассматриваемом случае имеют место леммы 2.6 и 2.7. Докажем утверждение об устойчивости полугруппы.

Лемма 2.9. Пусть выполнены гипотезы 1''), 2''). Сильно непрерывная полугруппа $\mathcal{U}(t)$, генерируемая оператором $-\mathcal{A}$, является равномерно экспоненциально устойчивой, т. е. существуют $\omega > 0$ и $M \geq 1$ такие, что

$$\|\mathcal{U}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})} \leq M e^{-\omega t} \quad \forall t \geq 0. \quad (2.33)$$

Доказательство. Доказательство леммы состоит в применении теоремы Герхарта (см. [22] или [19, гл. 5, §1, теорема 1.11]). Точнее, применяется утверждение, эквивалентное указанной теореме в случае, когда сильно непрерывная полугруппа является сжимающей (см. [24, гл. 1, §1.3, теорема 1.3.2]): *сильно непрерывная сжимающая полугруппа на гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$ равномерно экспоненциально устойчива тогда и только тогда, когда $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$ и*

$$\sup_{\lambda \in i\mathbb{R}} \|(\mathcal{A} - \lambda \mathcal{I})^{-1}\|_{\mathcal{H}} < \infty. \quad (2.34)$$

1) По лемме 2.6 сильно непрерывная полугруппа $\mathcal{U}(t)$ является сжимающей.

2) Покажем, что $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$.

Проверим, что оператор $\mathcal{A}$ не имеет собственных значений на мнимой оси. Рассуждая как в лемме 2.8, придём к системе (2.29), затем и к равенству $w = 0$. Теперь из третьего уравнения в (2.29), с учётом (1.8) и обозначения $Q_l = C_l A^{-1/2}$ (см. лемму 2.5), получим следующие соотношения: $-G_l^{1/2} C_l z = 0$ ($l = 1, 2$). Отсюда и из гипотезы 2'') (см. (1.7)) следует, что $z = 0$. Теперь из второго уравнения в (2.29) и условия $\beta \neq 0$ найдём, что $v = 0$. Следовательно, $\xi = 0$, а значит, число $i\beta$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}$.

Далее как и в лемме 2.8 заключаем, что оператор $\mathcal{A}$ не имеет остаточного спектра на $i\mathbb{R}$.

Предположим, что $i\beta$ ($\beta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$) — точка непрерывного спектра оператора $\mathcal{A}$. Рассуждая как в лемме 2.8, придём к системе (2.30) и к соотношениям (2.31).

Учитывая (2.22), обозначим $w_k := (w_{1k}; w_{2k})^\top$ и распишем третье уравнение в (2.30) в виде

$$-G_l^{-1/2} Q_l A^{1/2} z_k + G_l w_{lk} - i\beta w_{lk} = o(1) \quad (k \rightarrow \infty), \quad l = 1, 2. \quad (2.35)$$

Учитывая $\|w_k\|_{H_0}^2 = \|w_{1k}\|_{H_1}^2 + \|w_{2k}\|_{H_2}^2 \rightarrow 0$ при $k \rightarrow \infty$, а также $G_1, G_1^{-1} \in \mathcal{L}(H_1)$, из (2.35) при $l = 1$ найдём, что

$$\begin{aligned} \|w_{1k} - (G_1 - i\beta I)^{-1} o(1)\|_{H_1}^2 &= \|(G_1 - i\beta I)^{-1} Q_1 A^{1/2} z_k\|_{H_1}^2 = \\ &= ((G_1^2 + \beta^2 I)^{-1} Q_1 A^{1/2} z_k, Q_1 A^{1/2} z_k)_{H_1} \geq \gamma((G_1^2 + \beta^2)^{-1}) \cdot \gamma(Q_1^* Q_1) \cdot \|A^{1/2} z_k\|_H^2, \end{aligned}$$

где $\gamma((G_1^2 + \beta^2)^{-1}) > 0$, $\gamma(Q_1^* Q_1) \geq a_2 > 0$ (см. лемму 2.5) — нижние грани соответствующих операторов. Из последнего соотношения теперь найдём, что

$$\|A^{1/2} z_k\|_H^2 \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty).$$

Отсюда и из второго соотношения в системе (2.30) теперь получим противоречие с (2.31):

$$\begin{aligned} \|v_k\|_H^2 &= \|i\beta^{-1}(T^{1/2} A^{1/2} z_k + o(1))\|_H^2 \leq 2\beta^{-2}(\|T^{1/2} A^{1/2} z_k\|_H^2 + \|o(1)\|_H^2) \leq \\ &\leq 2\beta^{-2}(\|T^{1/2}\|_{\mathcal{L}(H)}^2 \|A^{1/2} z_k\|_H^2 + \|o(1)\|_H^2) \rightarrow 0 \quad (k \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Из проведенных вычислений следует, что $i\mathbb{R} \subset \rho(\mathcal{A})$.

3) Докажем оценку (2.34). Допустим, что (2.34) не верно. Тогда существует последовательность $\{\beta_k\}_{k=1}^\infty \subset \mathbb{R}$ и последовательность элементов $\{\xi_k = (z_k; v_k; w_k)^\top\}_{k=1}^\infty \subset \mathcal{D}(\mathcal{A})$ такие, что

$$|\beta_k| > 0, \quad \|\xi_k\|_{\mathcal{H}} = 1, \quad |\beta_k| \longrightarrow \infty, \quad \|(\mathcal{A} - i\beta_k \mathcal{I})\xi_k\|_{\mathcal{H}} \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty).$$

С учётом (2.20) последнее соотношение запишем в виде (см. (2.29), (2.30))

$$\begin{cases} A^{1/2}(T^{1/2}v_k + Q^*G^{-1/2}w_k) - i\beta_k z_k = o(1), \\ -T^{1/2}A^{1/2}z_k - i\beta_k v_k = o(1), \\ -G^{-1/2}QA^{1/2}z_k + Gw_k - i\beta_k w_k = o(1) \quad (k \longrightarrow \infty), \\ \|\xi_k\|_{\mathcal{H}}^2 = \|z_k\|_H^2 + \|v_k\|_H^2 + \|w_k\|_{H_0}^2 = 1. \end{cases} \quad (2.36)$$

Рассуждая как при исследовании системы (2.30), придём к соотношениям (2.31) и аналогу (2.35):

$$-G_l^{-1/2}Q_l A^{1/2}z_k + G_l w_{lk} - i\beta_k w_{lk} = o(1) \quad (k \longrightarrow \infty), \quad l = 1, 2.$$

Отсюда при $l = 1$ как и выше найдём, что

$$\begin{aligned} \|w_{1k} - (G_1 - i\beta_k I)^{-1}o(1)\|_{H_1}^2 &= \|(G_1 - i\beta_k I)^{-1}Q_1 A^{1/2}z_k\|_{H_1}^2 = \\ &= ((G_1^2 + \beta_k^2 I)^{-1}Q_1 A^{1/2}z_k, Q_1 A^{1/2}z_k)_{H_1} = \beta_k^{-2}((I + \beta_k^{-2}G_1^2)^{-1}Q_1 A^{1/2}z_k, Q_1 A^{1/2}z_k)_{H_1} \geq \\ &\geq \gamma((I + \beta_k^{-2}G_1^2)^{-1}) \cdot \gamma(Q_1^* Q_1) \cdot \beta_k^{-2} \|A^{1/2}z_k\|_H^2, \end{aligned}$$

где $\gamma(Q_1^* Q_1) \geq a_2 > 0$, $\gamma((I + \beta_k^{-2}G_1^2)^{-1}) \geq \gamma_0 > 0$ при всех $k \in \mathbb{N}$, поскольку $0 < |\beta_k| \longrightarrow \infty$. Из последнего соотношения теперь найдём, что

$$\beta_k^{-2} \|A^{1/2}z_k\|_H^2 \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty).$$

Отсюда и из второго соотношения в системе (2.36) теперь получим противоречие с (2.31):

$$\begin{aligned} \|v_k\|_H^2 &= \|i\beta_k^{-1}(T^{1/2}A^{1/2}z_k + o(1))\|_H^2 \leq 2\beta_k^{-2}(\|T^{1/2}A^{1/2}z_k\|_H^2 + \|o(1)\|_H^2) \leq \\ &\leq 2\beta_k^{-2}(\|T^{1/2}\|_{\mathcal{L}(H)}^2 \|A^{1/2}z_k\|_H^2 + \|o(1)\|_H^2) \longrightarrow 0 \quad (k \longrightarrow \infty). \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

2.4. Доказательство теорем 1.1, 1.2.

2.4.1. *Общий случай, выполнены гипотезы 1'), 2'), 3').* В следующих двух леммах докажем утверждения 1) и 2) теоремы 1.1.

Лемма 2.10. *Если $u^0 \in \mathcal{D}(A)$, $u^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $f \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$, то задача Коши (1.4) имеет единственное решение (в смысле определения 1.1).*

Доказательство.

1) Покажем, что из условий леммы следует однозначная разрешимость задачи Коши (2.21). Будем искать решение задачи Коши (2.21) в виде $\zeta(t) = \zeta_1(t) + \zeta_2(t)$, где $\zeta_1(\cdot)$, $\zeta_2(\cdot)$ — решения следующих начальных задач:

$$\frac{d\zeta_1}{dt} = -\mathcal{A}\zeta_1 + \mathcal{F}(t), \quad \zeta_1(0) = \xi^0 + \xi(u^0, 0), \quad (2.37)$$

$$\frac{d\zeta_2}{dt} = -\mathcal{A}\zeta_2 + \xi'(u^0, t), \quad \zeta_2(0) = 0. \quad (2.38)$$

Проверим выполнение условий п. 2° теоремы [9, гл. 1, §6, теорема 6.5] о разрешимости задачи Коши (2.37) (см. также условие п. (ii) теоремы [3, гл. 2, §1, теорема 1.3]). Из (1.8), (2.20) и леммы 2.3 найдём, что

$$\begin{aligned} \zeta_1(0) &= \xi^0 + \xi(u^0, 0) = (u^1; T^{1/2}A^{1/2}u^0; 0)^\top + (0; T^{-1/2}Q^*G^{-1}QA^{1/2}u^0; 0)^\top = \\ &= (u^1; T^{-1/2}((I - Q^*G^{-1}Q)A^{1/2}u^0 + Q^*G^{-1}QA^{1/2}u^0); 0)^\top = (u^1; T^{-1/2}A^{1/2}u^0; 0)^\top \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), \end{aligned}$$

так как (см. определение области определения $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ в (2.20))

$$u^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad T^{1/2}(T^{-1/2}A^{1/2}u^0) + Q^*G^{-1/2}0 = A^{1/2}u^0 = A^{-1/2}(Au^0) \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad 0 \in \mathcal{D}(G).$$

Далее, если $f \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$, то, очевидно, $\mathcal{F} = (f; 0; 0)^\top \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$. Таким образом, задача Коши (2.37) имеет единственное решение в смысле определения 2.1.

Проверим теперь выполнение условий п. 1° теоремы [9, гл. 1, §6, теорема 6.5] о разрешимости задачи Коши (2.38) (см. также условие п. (i) теоремы [3, гл. 2, §1, теорема 1.3]). Очевидно, что $\zeta_2(0) = 0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Покажем, что $\xi'(u^0, t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $\mathcal{A}\xi'(u^0, \cdot) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$. Из (2.20) найдём, что $\xi'(u^0, t) = (0; T^{-1/2}Q^* \exp(-Gt)QA^{1/2}u^0; 0)^\top$. Отсюда, учитывая гипотезу 1'), формулу для $\mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. (2.20)) и $Q = CA^{-1/2}$ (см. лемму 2.3), имеем при любом $t \in \mathbb{R}_+$

$$0 \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad T^{1/2}(T^{-1/2}Q^* \exp(-Gt)QA^{1/2}u^0) + Q^*G^{-1/2}0 = Q^*|_{\mathcal{D}(C^*)} \exp(-Gt)CA^{-1}(Au^0) = \\ = A^{-1/2}C^* \exp(-Gt)CA^{-1}(Au^0) \in \mathcal{D}(A^{1/2}), \quad 0 \in \mathcal{D}(G),$$

т. е. $\xi'(u^0, t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$. Теперь непосредственные вычисления показывают, что

$$\mathcal{A}\xi'(u^0, t) = (0; C^* \exp(-Gt)CA^{-1}(Au^0); 0)^\top$$

— непрерывная на $\mathbb{R}_+$ функция со значениями в $\mathcal{H}$. Таким образом, задача Коши (2.38), а значит, и задача Коши (2.21), имеет единственное решение в смысле определения 2.1.

2) Пусть $\zeta(\cdot)$ — (единственное) решение задачи Коши (2.21). Введём функцию $\xi(t) := \zeta(t) - \xi(u^0, t)$. Тогда $\xi(\cdot)$ есть решение задачи Коши (2.19) в том смысле, что $\xi \in C^1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, $\xi(t) + \xi(u^0, t) \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $\mathcal{A}(\xi + \xi(u^0, \cdot)) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$, выполнено начальное условие и уравнение из (2.19). Последнее эквивалентно тому, что функции $z(\cdot)$, $v(\cdot)$, $w(\cdot)$, являющиеся координатами функции $\xi(\cdot) = (z(\cdot); v(\cdot); w(\cdot))^\top$, удовлетворяют включениям

$$z, v \in C^1(\mathbb{R}_+; H), \quad w \in C^1(\mathbb{R}_+; H_0), \quad Gw \in C(\mathbb{R}_+; H_0), \\ A^{1/2}z \in C(\mathbb{R}_+; H), \quad A^{1/2}(T^{1/2}v + Q^*G^{-1/2}w) \in C(\mathbb{R}_+; H) \quad (2.39)$$

и являются решением системы (2.18).

Введём функцию $u(t) := A^{-1/2}T^{-1/2}v(t)$, исходя из формул (2.14), и покажем, что эта функция и есть (единственное) решение исходной задачи Коши (1.4).

Из второго уравнения в (2.18) следует, что $u'(t) = z(t)$, а значит, $u \in C^2(\mathbb{R}_+; H)$ (см. (2.39)). Кроме того, из (2.39) следует, что $u'(t) = z(t) \in \mathcal{D}(A^{1/2})$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $A^{1/2}u' \in C(\mathbb{R}_+; H)$. Из равенства $u'(t) = z(t)$ следует также, что $u'(0) = z(0) = u^1$, а из определения функции $u(\cdot)$, что $u(0) = A^{-1/2}T^{-1/2}v(0) = A^{-1/2}T^{-1/2}(T^{1/2}A^{1/2}u^0) = u^0$, то есть начальные условия в (1.4) выполнены. Осталось показать, что $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$, $Au \in C(\mathbb{R}_+; H)$ и $u(\cdot)$ удовлетворяет уравнению из (1.4).

Итак, учитывая $z(t) = u'(t)$, найдём из третьего соотношения в (2.18) функцию w (см. (2.14)):

$$w(t) = \int_0^t \exp(-G(t-s))G^{-1/2}QA^{1/2}u'(s) ds.$$

Подставляя найденные $w(t)$, $z(t) = u'(t)$, $v(t) = T^{1/2}A^{1/2}u(t)$ в первое соотношение в (2.18), получим, что функция $u(\cdot)$ есть решение уравнения (2.13). Поскольку $A^{1/2}u' \in C(\mathbb{R}_+; H)$ и $u^0 \in \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(A^{1/2})$, можем осуществить обратный переход от (2.13) к уравнению (2.12). Из (2.12) теперь получим, что на $\mathbb{R}_+$ непрерывна функция

$$A\left(u(t) + \int_0^t R(t-s)u(s) ds\right), \quad \text{где } R(t) := A^{-1/2}Q^* \exp(-Gt)QA^{1/2}. \quad (2.40)$$

Это утверждение перепишем в следующей эквивалентной форме:

$$u(t) + \int_0^t R(t-s)u(s) ds = g(t), \quad Ag \in C(\mathbb{R}_+; H). \quad (2.41)$$

Определим на $\mathcal{D}(A)$ норму $\|u\|_{E(A)} := \|Au\|_H$, эквивалентную норме графика, и превратим его таким образом в банахово пространство $E(A)$. Тогда (2.41) можно рассматривать как уравнение Вольтерра второго рода в $E(A)$.

Покажем, что оператор-функция $R(t)$ сильно непрерывна на $\mathbb{R}_+$ со значениями в $E(A)$. Для любого $u \in E(A) = \mathcal{D}(A)$ и $t_0 \in \mathbb{R}_+$ с учётом $Q = CA^{-1/2}$, леммы 2.3, (2.40) и гипотезы 1') имеем

$$\begin{aligned}\|R(t)u\|_{E(A)} &= \|A^{1/2}Q^* \exp(-Gt)QA^{-1/2}(Au)\|_H = \|A^{1/2}Q^*|_{\mathcal{D}(C^*)} \exp(-Gt)CA^{-1}(Au)\|_H = \\ &= \|C^* \exp(-Gt)CA^{-1}(Au)\|_H \leq \|C^* \exp(-Gt)CA^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} \cdot \|u\|_{E(A)},\end{aligned}$$

$$\|R(t)u - R(t_0)u\|_{E(A)} = \|(C^* \exp(-Gt)CA^{-1} - C^* \exp(-Gt_0)CA^{-1})(Au)\|_H \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow t_0).$$

Из проведенных вычислений следует, что уравнение (2.41) имеет единственное решение $u \in C(\mathbb{R}_+; E(A))$. Последнее означает, что $u(t) \in \mathcal{D}(A)$ при всех $t \in \mathbb{R}_+$ и $Au \in C(\mathbb{R}_+; H)$. Отсюда следует, что в (2.12) можно раскрыть скобки и заменить Q^* на $Q^*|_{\mathcal{D}(C^*)} = A^{-1/2}C^*$. Таким образом, функция $u(\cdot)$ — (единственное) решение уравнения (2.11). Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.11. Пусть функция $f(\cdot)$ имеет вид (1.5), где $g, f_k \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$ ($k = \overline{0, n}$).

Если $g, f'_k \in L_1(\mathbb{R}_+; H)$ ($k = \overline{0, n}$) и $\sigma_k^2 \notin \sigma_{ess}(A)$ ($k = \overline{1, n}$), то имеет место соотношение (1.6).

Доказательство.

1) По (единственному) решению задачи Коши (1.4) построим решение задачи Коши (2.21). Если функция $f(\cdot)$ имеет вид (1.5), где $g, f_k \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$ ($k = \overline{0, n}$), то задача (2.21) примет вид задачи Коши (2.1) с $\zeta^0 = \xi^0 + \xi(u^0, 0)$ и функцией $\mathcal{F}(\cdot)$ вида (2.2), где

$$\mathcal{G}(t) := (g(t); T^{-1/2}Q^* \exp(-Gt)QA^{-1/2}u^0; 0)^\top, \quad \mathcal{F}_k(t) := (f_k(t); 0; 0)^\top \quad (k = \overline{0, n}). \quad (2.42)$$

2) По лемме 2.8 сильно непрерывная полугруппа $\mathcal{U}(t)$, генерируемая оператором $-\mathcal{A}$, сильно устойчива и если $\sigma_k^2 \notin \sigma_{ess}(A)$, то $i\sigma_k \notin \sigma(\mathcal{A})$ ($k = \overline{0, n}$). Применим лемму 2.1 при $m_k = 1$ ($k = \overline{0, n}$) к сложившейся ситуации. Несложно видеть, что из условия $g, f'_k \in L_1(\mathbb{R}_+; H)$ ($k = \overline{0, n}$) следует, что $\mathcal{G}, \mathcal{F}'_k \in L_1(\mathbb{R}_+; \mathcal{H})$ ($k = \overline{0, n}$) (см. (2.42)). Учитывая связь $\zeta(t) = \xi(t) + \xi(u^0, t)$ между решениями задач Коши (2.21) и (2.19), формулу для $\xi(u^0, t)$, по лемме 2.1 имеем при $t \rightarrow +\infty$

$$\left\| \xi(t) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k(t) \right\|_{\mathcal{H}} \leq \left\| \zeta(t) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k(t) \right\|_{\mathcal{H}} + \|\xi(u^0, t)\|_{\mathcal{H}} \rightarrow 0. \quad (2.43)$$

Учитывая формулу (2.25) для оператора $\mathcal{A}^{-1}$, формулу (2.27) для резольвенты оператора $\mathcal{A}$ и связи (2.14), найдём, что

$$\begin{aligned}\left\| \xi(t) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k(t) \right\|_{\mathcal{H}}^2 &= \left\| \xi(t) - \mathcal{A}^{-1} \mathcal{F}_0(t) - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \mathcal{R}_{i\sigma_k}(\mathcal{A}) \mathcal{F}_k(t) \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \\ &= \left\| \begin{pmatrix} z(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & I & -T^{-1/2}Q^*G^{-1} \\ 0 & 0 & G^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -T^{-1/2} & 0 \\ T^{-1/2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A^{-1/2}f_0(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} \begin{pmatrix} A^{-1/2} & 0 & 0 \\ -(i\sigma_k)^{-1}T^{1/2} & I & 0 \\ G^{-1/2}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(G)Q & 0 & G^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -i\sigma_k M^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}f_k(t) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2 = \\ &= \left\| \begin{pmatrix} z(t) \\ v(t) \\ w(t) \end{pmatrix} - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} \begin{pmatrix} -i\sigma_k A^{-1/2}M^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}f_k(t) \\ T^{1/2}M^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}f_k(t) \\ -i\sigma_k G^{-1/2}\mathcal{R}_{i\sigma_k}(G)QM^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}f_k(t) \end{pmatrix} \right\|_{\mathcal{H}}^2 \geq \\ &\geq \left\| u'(t) + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k A^{-1/2}M^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}f_k(t) \right\|_H^2 + \\ &\quad + \left\| T^{1/2}A^{1/2}u(t) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} T^{1/2}M^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}f_k(t) \right\|_H^2 \geq \\ &\geq \left\| u'(t) + \sum_{k=1}^n e^{-i\sigma_k t} i\sigma_k A^{-1/2}M^{-1}(i\sigma_k)A^{-1/2}f_k(t) \right\|_H^2 +\end{aligned}$$

$$+ (1 - a_1) \left\| A^{1/2} \left(u(t) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} A^{-1/2} M^{-1}(i\sigma_k) A^{-1/2} f_k(t) \right) \right\|_H^2. \quad (2.44)$$

Из (2.43), (2.44) следует (1.6). Лемма доказана. $\square$

2.4.2. *Частный случай, выполнены гипотезы 1''), 2'').* Доказательство следующего утверждения почти полностью повторяет доказательство леммы 2.10 и лишь учитывает (1.8).

Лемма 2.12. Пусть ядро интегрального слагаемого в (1.4) и оператор-функция $M(\cdot)$ имеют вид (1.9) и (1.10) соответственно. Если $u^0 \in \mathcal{D}(A)$, $u^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $f \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$, то решение задачи Коши (1.4) существует и единственно.

Лемма 2.13. Пусть ядро интегрального слагаемого в (1.4) и $M(\cdot)$ имеют вид (1.9) и (1.10) соответственно. Пусть функция $f(\cdot)$ имеет вид (1.5), где $g, f_k \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$ ($k = \overline{0, n}$).

Если $\|g(t)\|_H \rightarrow 0$, $\|f'_k(t)\|_H \rightarrow 0$ ($k = \overline{0, n}$) при $t \rightarrow +\infty$, то имеет место соотношение (1.6).

Если, в частности, $\|g(t)\|_H, \|f'_k(t)\|_H$ ($k = \overline{0, n}$) убывают экспоненциально при $t \rightarrow +\infty$, то сходимость к нулю в (1.6) также экспоненциальная.

Доказательство. Доказательство этой леммы почти полностью повторяет доказательство леммы 2.11. Нужно только вместо леммы 2.8 использовать лемму 2.9, а вместо леммы 2.1, соответственно, лемму 2.2. Экспоненциальное убывание к нулю в (1.6) следует из (2.33), п. 2) леммы 2.2 и экспоненциального убывания к нулю при $t \rightarrow +\infty$ функции $\|\xi(u^0, t)\|_H$. $\square$

3. ПРИЛОЖЕНИЯ

3.1. Пример реализации операторного ядра.

3.1.1. *Общий случай, выполнены гипотезы 1'), 2'), 3').* Рассмотрим пример реализации операторного ядра в интегральном слагаемом из (1.4). Пусть H_k ($k = \overline{1, m}$) — комплексные гильбертовы пространства. Введём m гильбертовых пространств $l_2(H_k)$ со обычными скалярными произведениями и нормами:

$$l_2(H_k) := \left\{ X_k = \{x_p\}_{p \in \mathbb{N}} : x_p \in H_k, \sum_{p \in \mathbb{N}} \|x_p\|_{H_k}^2 < +\infty \right\},$$

$$(X_k, Y_k)_{l_2(H_k)} := \sum_{p \in \mathbb{N}} (x_p, y_p)_{H_k}, \quad \|X_k\|_{l_2(H_k)}^2 = \sum_{p \in \mathbb{N}} \|x_p\|_{H_k}^2 \quad (k = \overline{1, m}).$$

Определим гильбертово пространство H_0 со скалярным произведением и нормой:

$$H_0 := \bigoplus_{k=1}^m l_2(H_k) = \left\{ X = (X_1; X_2; \dots; X_m)^T : X_k \in l_2(H_k) \quad (k = \overline{1, m}) \right\},$$

$$(X, Y)_H := \sum_{k=1}^m (X_k, Y_k)_{l_2(H_k)}, \quad \|X\|_H^2 = \sum_{k=1}^m \|X_k\|_{l_2(H_k)}^2.$$

Пусть $C_{k,\alpha}$ ($k = \overline{1, m}$) — плотно определённые замкнутые операторы, действующие из H в H_k : $C_{k,\alpha} : \mathcal{D}(C_{k,\alpha}) \subset H \rightarrow H_k$, $\{\alpha_{kp}\}_{p \in \mathbb{N}}$, $\{\gamma_{kp}\}_{p \in \mathbb{N}}$ ($k = \overline{1, m}$) — последовательности положительных чисел. Будем считать, что выполнены следующие условия:

$$\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(C_{k,\alpha}^* C_{k,\alpha}), \quad \sum_{p \in \mathbb{N}} \alpha_{kp} < +\infty, \quad \inf_{p \in \mathbb{N}} \gamma_{kp} > 0 \quad (k = \overline{1, m}). \quad (3.1)$$

Определим операторы C_k, G_k ($k = \overline{1, m}$) по следующим формулам:

$$C_k u := \{\sqrt{\alpha_{kp}} C_{k,\alpha} u\}_{p \in \mathbb{N}}, \quad \mathcal{D}(C_k) = \mathcal{D}(C_{k,\alpha}), \quad C_k : \mathcal{D}(C_k) \subset H \rightarrow l_2(H_k),$$

$$G_k X_k := \{\gamma_{kp} x_p\}_{p \in \mathbb{N}}, \quad \mathcal{D}(G_k) := \left\{ X_k \in l_2(H_k) : \sum_{p \in \mathbb{N}} \|\gamma_{kp} x_p\|_{H_k}^2 < +\infty \right\} \subset l_2(H_k). \quad (3.2)$$

Лемма 3.1. Операторы G_k ($k = \overline{1, m}$) являются самосопряженными и положительно определенными. Операторы C_k замкнуты на $\mathcal{D}(C_k)$ и

$$C_k^* X_k = C_{k,\alpha}^* \sum_{p \in \mathbb{N}} \sqrt{\alpha_{kp}} x_p, \quad \mathcal{D}(C_k^*) = \left\{ X_k \in l_2(H_k) : \sum_{p \in \mathbb{N}} \sqrt{\alpha_{kp}} x_p \in \mathcal{D}(C_{k,\alpha}^*) \right\} \subset l_2(H_k).$$

Доказательство.

1) С учётом (3.1) видно, что $G_k^{-1} X_k = \{(\gamma_{kp})^{-1} x_p\}_{p \in \mathbb{N}}$, $G_k^{-1} \in \mathcal{L}(H_k)$ ($k = \overline{1, m}$). Отсюда и из $(G_k^{-1} X_k, X_k)_{l_2(H_k)} \in \mathbb{R}$ следует (см., например, [23, гл. 2, §12, теорема 12.3]), что операторы G_k^{-1} , а значит, и G_k , самосопряженные.

2) Покажем, что операторы C_k замкнуты на $\mathcal{D}(C_k)$. Пусть $\{u_n\}_{n=1}^\infty \subset \mathcal{D}(C_k)$ такая, что $\|u_n - u\|_H \rightarrow 0$, $\|C_k u_n - X_k\|_{l_2(H_k)} \rightarrow 0$ ($X_k := \{x_p\}_{p \in \mathbb{N}}$) при $n \rightarrow \infty$. Отсюда следует, в частности, что последовательность $\{C_k u_n\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна в $l_2(H_k)$:

$$\begin{aligned} \|C_k u_n - C_k u_m\|_{l_2(H_k)}^2 &= \sum_{p \in \mathbb{N}} \|\sqrt{\alpha_{kp}} C_{k,\alpha} u_n - \sqrt{\alpha_{kp}} C_{k,\alpha} u_m\|_{H_k}^2 = \\ &= \|C_{k,\alpha} u_n - C_{k,\alpha} u_m\|_{H_k}^2 \sum_{p \in \mathbb{N}} \alpha_{kp} \rightarrow 0 \quad (n, m \rightarrow \infty). \end{aligned}$$

Следовательно, последовательность $\{C_{k,\alpha} u_n\}_{n=1}^\infty$ фундаментальна в H_k , а значит, существует $v \in H_k$ такой, что $\|C_{k,\alpha} u_n - v\|_{H_k} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда, в силу замкнутости операторов $C_{k,\alpha}$, имеем $u \in \mathcal{D}(C_{k,\alpha}) = \mathcal{D}(C_k)$ и $C_{k,\alpha} u = v$. Отсюда и из единственности предела сходящейся последовательности имеем $X_k = \{x_p\}_{p \in \mathbb{N}} = \{\sqrt{\alpha_{kp}} v\}_{p \in \mathbb{N}}$. Таким образом, $u \in \mathcal{D}(C_k)$ и $C_k u = \{\sqrt{\alpha_{kp}} C_{k,\alpha} u\}_{p \in \mathbb{N}} = \{\sqrt{\alpha_{kp}} v\}_{p \in \mathbb{N}} = X_k$, то есть оператор C_k замкнут.

3) Вычислим C_k^* . Пусть $X_k = \{x_p\}_{p \in \mathbb{N}} \in l_2(H_k)$ такой, что функционал $f(u) := (C_k u, X_k)$ является (линейным) и ограниченным на $\mathcal{D}(C_k) = \mathcal{D}(C_{k,\alpha})$. Используя свойства скалярного произведения и, в частности, его непрерывность, имеем

$$f(u) = (C_k u, X_k)_{l_2(H_k)} = \sum_{p \in \mathbb{N}} (\sqrt{\alpha_{kp}} C_{k,\alpha} u, x_p)_{H_k} = (C_{k,\alpha} u, \sum_{p \in \mathbb{N}} \sqrt{\alpha_{kp}} x_p)_{H_k} \quad \forall u \in \mathcal{D}(C_{k,\alpha}).$$

Отсюда следует искомое утверждение. Лемма доказана. $\square$

С использованием (3.2) определим, наконец, операторы C и G по следующим формулам:

$$\begin{aligned} C &:= (C_1; C_2; \dots; C_m)^\top, \quad C : \mathcal{D}(C) = \bigcap_{k=1}^m \mathcal{D}(C_k) \subset H \rightarrow H_0, \\ G &:= \text{diag}(G_1, G_2, \dots, G_m), \quad G : \mathcal{D}(G) = \bigoplus_{k=1}^m \mathcal{D}(G_k) \subset H_0 \rightarrow H_0, \end{aligned}$$

тогда для любого $u \in \mathcal{D}(C_{k,\alpha}^* C_{k,\alpha})$, с учётом леммы 3.1,

$$\begin{aligned} C^* \exp(-tG) C u &= \sum_{k=1}^m C_k^* \exp(-tG_k) C_k u = \sum_{k=1}^m C_{k,\alpha}^* \sum_{p \in \mathbb{N}} \sqrt{\alpha_{kp}} e^{-\gamma_{kp} t} (\sqrt{\alpha_{kp}} C_{k,\alpha} u) = \\ &= \sum_{k=1}^m C_{k,\alpha}^* \sum_{p \in \mathbb{N}} \alpha_{kp} e^{-\gamma_{kp} t} C_{k,\alpha} u = \sum_{k=1}^m \sum_{p \in \mathbb{N}} \alpha_{kp} e^{-\gamma_{kp} t} C_{k,\alpha}^* C_{k,\alpha} u. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Лемма 3.2. Оператор-функция $C^* \exp(-tG) C A^{-1}$ сильно непрерывна на $\mathbb{R}_+$.

Доказательство. Из $\mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(C_{k,\alpha}^* C_{k,\alpha})$ (см. (3.1)) следует, что $C_{k,\alpha}^* C_{k,\alpha} A^{-1} \in \mathcal{L}(H)$. Отсюда и из (3.3) для любых $t, t_0 \in \mathbb{R}_+$ и $u \in H$ имеем

$$\begin{aligned} \|C^* \exp(-Gt) C A^{-1} u - C^* \exp(-Gt_0) C A^{-1} u\| &= \left\| \sum_{k=1}^m \sum_{p \in \mathbb{N}} \alpha_{kp} (e^{-\gamma_{kp} t} - e^{-\gamma_{kp} t_0}) C_{k,\alpha}^* C_{k,\alpha} A^{-1} u \right\| \leq \\ &\leq \sum_{k=1}^m \|C_{k,\alpha}^* C_{k,\alpha} A^{-1} u\|_{\mathcal{L}(H)} \sum_{p \in \mathbb{N}} \alpha_{kp} |e^{-\gamma_{kp} t} - e^{-\gamma_{kp} t_0}|. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Из (3.1) получим, что

$$\begin{aligned} \exists N(\varepsilon, u) \in \mathbb{N}: \sum_{k=1}^m \|C_{k,\alpha}^* C_{k,\alpha} A^{-1} u\|_{\mathcal{L}(H)} \sum_{p=N(\varepsilon, u)+1}^{\infty} 2\alpha_{kp} &< \frac{\varepsilon}{2}, \\ \exists \delta(\varepsilon, u) > 0: \sum_{k=1}^m \|C_{k,\alpha}^* C_{k,\alpha} A^{-1} u\|_{\mathcal{L}(H)} \sum_{p=1}^{N(\varepsilon, u)} \alpha_{kp} |e^{-\gamma_{kp}t} - e^{-\gamma_{kp}t_0}| &< \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall t \in (t_0 - \delta, t_0 + \delta). \end{aligned}$$

Отсюда и из (3.4) следует, что

$$\|C^* \exp(-G_l t) C A^{-1} u - C^* \exp(-G_l t_0) C A^{-1} u\| < \varepsilon \quad \forall t \in (t_0 - \delta(\varepsilon, u), t_0 + \delta(\varepsilon, u)),$$

то есть оператор-функция (3.3) сильно непрерывна в точке t_0 . Лемма доказана. $\square$

Таким образом, для оператор-функции (3.3) выполнена гипотеза 1'). Гипотеза 2') (см. (1.1)), связывающая введённые операторы и числовые коэффициенты, принимает следующий вид:

2') Существует $a_1 \in (0, 1)$ такое, что

$$\sum_{k=1}^m \left(\sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_{kp}}{\gamma_{kp}} \right) \|C_{k,\alpha} u\|_{H_k}^2 \leq a_1 \|A^{1/2} u\|_H^2 \quad \forall u \in \mathcal{D}(A^{1/2}). \quad (3.5)$$

Гипотеза 3') (см. (1.2)) остаётся без изменений.

3.1.2. *Частный случай, выполнены гипотезы 1''), 2'').* В этом случае мы можем построить два ядра по образцу приведенной выше конструкции, поскольку в гипотезах 1') и 1'') содержатся идентичные требования. При этом чтобы выполнить условия, достаточные для равномерной экспоненциальной устойчивости полугруппы $\mathcal{U}(t)$, для «первого» ядра нужно обеспечить условие $G_1 \in \mathcal{L}(H_1)$ (см. замечание 1.2).

Итак, пусть $H_{k,l}$ ($k = \overline{1, m_l}$, $l = 1, 2$) — комплексные гильбертовы пространства. Введём m_l гильбертовых пространств $l_2(H_{k,l})$ ($k = \overline{1, m_l}$) со обычными скалярными произведениями и нормами. Определим гильбертовы пространства $H_l := \bigoplus_{k=1}^{m_l} l_2(H_{k,l})$ ($l = 1, 2$).

Пусть $C_{k,\alpha,l}$ — плотно определённые замкнутые операторы, действующие из H в $H_{k,l}$: $C_{k,\alpha,l}: \mathcal{D}(C_{k,\alpha,l}) \subset H \rightarrow H_{k,l}$, $\{\alpha_{kp}^{(l)}\}_{p \in \mathbb{N}}$, $\{\gamma_{kp}^{(l)}\}_{p \in \mathbb{N}}$ ($k = \overline{1, m_l}$, $l = 1, 2$) — последовательности положительных чисел. Будем считать, что выполнены следующие условия:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(A) \subset \mathcal{D}(C_{k,\alpha,l}^* C_{k,\alpha,l}), \quad \sum_{p \in \mathbb{N}} \alpha_{kp}^{(l)} < +\infty \quad (k = \overline{1, m_l}, l = 1, 2), \\ \inf_{p \in \mathbb{N}} \gamma_{kp}^{(l)} > 0, \quad \sup_{p \in \mathbb{N}} \gamma_{kp}^{(1)} < +\infty \quad (k = \overline{1, m_l}, l = 1, 2). \end{aligned} \quad (3.6)$$

Определим операторы $C_{k,l}$, $G_{k,l}$ ($k = \overline{1, m_l}$, $l = 1, 2$) по следующим формулам:

$$\begin{aligned} C_{k,l} u &:= \{ \sqrt{\alpha_{kp}^{(l)}} C_{k,\alpha,l} u \}_{p \in \mathbb{N}}, \quad \mathcal{D}(C_{k,l}) = \mathcal{D}(C_{k,\alpha,l}), \quad C_{k,l}: \mathcal{D}(C_{k,l}) \subset H \rightarrow l_2(H_{k,l}), \\ G_{k,l} X_k &:= \{ \gamma_{kp}^{(l)} x_p \}_{p \in \mathbb{N}}, \quad \mathcal{D}(G_{k,l}) := \left\{ X_k \in l_2(H_{k,l}) : \sum_{p \in \mathbb{N}} \|\gamma_{kp}^{(l)} x_p\|_{H_{k,l}}^2 < +\infty \right\} \subset l_2(H_{k,l}). \end{aligned} \quad (3.7)$$

Без доказательства сформулируем лемму, аналогичную лемме 3.1.

Лемма 3.3. *Операторы $G_{k,l}$ ($k = \overline{1, m_l}$, $l = 1, 2$) являются самосопряженными и положительно определёнными, $G_{k,1} \in \mathcal{L}(l_2(H_{k,1}))$. Операторы $C_{k,l}$ замкнуты на $\mathcal{D}(C_{k,l})$ и*

$$C_{k,l}^* X_k = C_{k,\alpha,l}^* \sum_{p \in \mathbb{N}} \sqrt{\alpha_{kp}^{(l)}} x_p, \quad \mathcal{D}(C_{k,l}^*) = \left\{ X_k \in l_2(H_{k,l}) : \sum_{p \in \mathbb{N}} \sqrt{\alpha_{kp}^{(l)}} x_p \in \mathcal{D}(C_{k,\alpha,l}^*) \right\} \subset l_2(H_{k,l}).$$

С использованием (3.7) определим теперь операторы C_l и G_l ($l = 1, 2$) по следующим формулам:

$$C_l := (C_{1,l}; C_{2,l}; \dots; C_{m_l,l})^T, \quad C_l: \mathcal{D}(C_l) = \bigcap_{k=1}^{m_l} \mathcal{D}(C_{k,l}) \subset H \rightarrow H_l,$$

$$G_l := \text{diag}(G_{1,l}, G_{2,l}, \dots, G_{m_l,l}), \quad G_l : \mathcal{D}(G_l) = \bigoplus_{k=1}^{m_l} \mathcal{D}(G_{k,l}) \subset H_l \longrightarrow H_l,$$

тогда для любого $u \in \mathcal{D}(C_{k,\alpha,l}^* C_{k,\alpha,l})$, с учётом леммы 3.3, получим (см. вычисления в (3.3))

$$\sum_{l=1}^2 C_l^* \exp(-tG_l) C_l u = \sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^{m_l} \sum_{p \in \mathbb{N}} \alpha_{kp}^{(l)} e^{-\gamma_{kp}^{(l)} t} C_{k,\alpha,l}^* C_{k,\alpha,l} u. \quad (3.8)$$

Аналогично лемме 3.2 доказывается следующее утверждение.

Лемма 3.4. *Оператор-функции $C_l^* \exp(-tG_l) C_l A^{-1}$ ($l = 1, 2$) сильно непрерывны на $\mathbb{R}_+$.*

Таким образом, для оператор-функции (3.8) выполнена гипотеза 1''). Гипотеза 2'') (см. (1.7)), связывающая введённые операторы и числовые коэффициенты, принимает следующий вид:

2'') Существуют $a_1 \in (0, 1)$, $a_2 > 0$ такие, что

$$\sum_{l=1}^2 \sum_{k=1}^{m_l} \left(\sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_{kp}^{(l)}}{\gamma_{kp}^{(l)}} \right) \|C_{k,\alpha,l} u\|_{H_{k,l}}^2 \leq a_1 \|A^{1/2} u\|_H^2, \quad (3.9)$$

$$\|C_{k,\alpha,1} u\|_{H_{k,1}}^2 \geq a_2 \|A^{1/2} u\|_H^2 \quad \forall u \in \mathcal{D}(A^{1/2}) = \mathcal{D}(C_{k,\alpha,1}) \quad (k = \overline{1, m_1}).$$

Замечание 3.1. Рассмотрим ядро, представляющее собой ряд экспоненциальных функций с операторными коэффициентами (ядро вида (3.8)). Пусть операторы и числовые коэффициенты в этом ядре удовлетворяют условиям подчинённости, суммируемости и ограниченности снизу из (3.6). Если найдётся хотя бы один оператор $C_{k,\alpha,l}$, удовлетворяющий второму условию из (3.9), то понятно, что можно разбить ядро на две части так, чтобы они уложились в описанную выше конструкцию.

3.1.3. Частный случай ядра (3.8). Пусть $H_{k,l} = H$, $C_{k,\alpha,l} = A^{1/2}$ ($k = \overline{1, m_l}$, $l = 1, 2$). Тогда получим ядро, в котором фигурирует только один оператор A . Уравнение (1.4) с таким ядром, в зависимости от реализации главного оператора A (см. [7, гл. 6, §23]), может описывать продольные колебания однородного стержня, поперечные колебания неоднородной по толщине балки либо пластины, поперечные колебания ортотропной пластинки из гомогенного полимера и т. д.

Это уравнение изучалось, в частности, в [1, гл. 3, §3.2]. В указанной монографии исследовались вопросы существования, единственности и гладкости решений, а также проводился спектральный анализ символа этого уравнения. Отмечено, что уравнение (1.4) возникает в теории теплопроводности, теории вязкоупругих сред, кинетической теории газов.

Итак, в комплексном гильбертовом пространстве H рассмотрим следующую задачу Коши:

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = -Au + \int_0^t \sum_{p \in \mathbb{N}} \alpha_p e^{-\gamma_p(t-s)} Au(s) ds + g(t) + \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} f_k(t), \quad u(0) = u^0, \quad u'(0) = u^1. \quad (3.10)$$

Здесь числа σ_k ($k = \overline{0, n}$) те же, что и в теореме 1.1 (или в теореме 1.2), а $\{\alpha_p\}_{p \in \mathbb{N}}$, $\{\gamma_p\}_{p \in \mathbb{N}}$ — последовательности положительных чисел, удовлетворяющих неравенствам (см. (3.6), (3.9))

$$\sum_{p \in \mathbb{N}} \alpha_p < +\infty, \quad \inf_{p \in \mathbb{N}} \gamma_p > 0, \quad 1 - \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_p}{\gamma_p} > 0. \quad (3.11)$$

Непосредственно проверяется, что операторный пучок $M(\cdot)$ из (1.10) в рассматриваемом случае имеет следующий вид:

$$M(\lambda) = I + \lambda^2 A^{-1} - \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_p}{\gamma_p - \lambda} I. \quad (3.12)$$

Предположим дополнительно, что спектр оператора A дискретен и $\{\lambda_j(A)\}_{j=1}^\infty$, $\{u_j(A)\}_{j=1}^\infty$ — последовательности его собственных значений и соответствующих им собственных элементов, нормированных к единице. Применим теорему 1.2 к задаче Коши (3.10). С учётом предположения относительно оператора A придём к следующему утверждению.

Лемма 3.5. Пусть $u^0 \in \mathcal{D}(A)$, $u^1 \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $g, f_k \in C^1(\mathbb{R}_+; H)$ ($k = \overline{0, n}$). Если $\|g(t)\|_H \rightarrow 0$, $\|f'_k(t)\|_H \rightarrow 0$ ($k = \overline{0, n}$) при $t \rightarrow +\infty$, то для решения $u(\cdot)$ задачи Коши (3.10) выполнено

$$\left\| A^{1/2} \left(u(t) - \sum_{k=0}^n e^{-i\sigma_k t} u_k(t) \right) \right\|_H^2 + \left\| u'(t) + \sum_{k=1}^n i\sigma_k e^{-i\sigma_k t} u_k(t) \right\|_H^2 \rightarrow 0 \quad (t \rightarrow +\infty),$$

где (с.м. (1.6), (3.12))

$$u_k(t) := \sum_{j=1}^{\infty} \left(\left\{ 1 - \sum_{p \in \mathbb{N}} \frac{\alpha_p}{\gamma_p - i\sigma_k} \right\} \lambda_j(A) - \sigma_k^2 \right)^{-1} (f_k(t), u_j(A))_H u_j(A) \quad (k = \overline{0, n}).$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов В. В., Раутиан Н. А. Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.
2. Власов В. В., Раутиан Н. А. Экспоненциальная устойчивость полугрупп, порождаемых вольтерровыми интегро-дифференциальными уравнениями с сингулярными ядрами // Дифф. уравн. — 2021. — 57, № 10. — С. 1426–1430. — DOI: [10.31857/S0374064121100149](https://doi.org/10.31857/S0374064121100149).
3. Голдстейн Дж. Полугруппы линейных операторов и их приложения. — Киев: Выща школа, 1989.
4. Загора Д. А. Экспоненциальная устойчивость одной полугруппы и приложения // Мат. заметки. — 2018. — 103, № 5. — С. 702–719. — DOI: [10.4213/mzm11703](https://doi.org/10.4213/mzm11703).
5. Загора Д. А. Асимптотика решений в задаче о малых движениях сжимаемой жидкости Максвелла // Дифф. уравн. — 2019. — 55, № 9. — С. 1195–1208. — DOI: [10.1134/S0374064119090048](https://doi.org/10.1134/S0374064119090048).
6. Загора Д. А. Асимптотическое поведение решений полного интегро-дифференциального уравнения второго порядка // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2022. — 68, № 3. — С. 451–466. — DOI: [10.22363/2413-3639-2022-68-3-451-466](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-3-451-466).
7. Ильюшин А. А., Победра Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. — М.: Наука, 1970.
8. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
9. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
10. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985.
11. Alabau-Boussouria F., Cannarsa P. A general method for proving sharp energy decay rates for memory-dissipative evolution equations // C. R. Acad. Sci. Paris. — 2009. — 347. — С. 867–872. — DOI: [10.1016/j.crma.2009.05.011](https://doi.org/10.1016/j.crma.2009.05.011).
12. Alabau-Boussouria F., Cannarsa P., Sforza D. Decay estimates for second order evolution equations with memory // J. Funct. Anal. — 2008. — 254. — С. 1342–1372. — DOI: [10.1016/j.jfa.2007.09.012](https://doi.org/10.1016/j.jfa.2007.09.012).
13. Ammar-Khodja F., Benabdallah A., Muñoz Rivera J. E., Racke R. Energy decay for Timoshenko systems of memory type // J. Differ. Equ. — 2003. — 194, № 1. — С. 82–115. — DOI: [10.1016/S0022-0396\(03\)00185-2](https://doi.org/10.1016/S0022-0396(03)00185-2).
14. Amendola G., Fabrizio M., Golden J. M. Thermodynamics of materials with memory. — Boston: Springer, 2012. — DOI: [10.1007/978-1-4614-1692-0](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1692-0).
15. Arendt W., Batty C. J. K., Hieber M., Neubrander F. Vector-valued Laplace transforms and Cauchy problems. — Basel: Birkhäuser, 2011. — DOI: [10.1007/978-3-0348-0087-7](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0087-7).
16. Dafermos C. M. Asymptotic stability in viscoelasticity // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1970. — 37. — С. 297–308. — DOI: [10.1007/bf00251609](https://doi.org/10.1007/bf00251609).
17. Dafermos C. M. An abstract Volterra equation with applications to linear viscoelasticity // J. Differ. Equ. — 1970. — 7, № 3. — С. 554–569. — DOI: [10.1016/0022-0396\(70\)90101-4](https://doi.org/10.1016/0022-0396(70)90101-4).
18. Dell’Oro F. Asymptotic stability of thermoelastic systems of Bresse type // J. Differ. Equ. — 2015. — 258, № 11. — С. 3902–3927. — DOI: [10.1016/j.jde.2015.01.025](https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.01.025).
19. Engel K.-J., Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. — New York: Springer, 2000.
20. Fabrizio M., Morro A. Mathematical problems in linear viscoelasticity. — Philadelphia: SIAM, 1992. — DOI: [10.1137/1.9781611970807](https://doi.org/10.1137/1.9781611970807).
21. Fatori L. H., Monteiro R. N., Sare H. D. F. The Timoshenko system with history and Cattaneo law // Appl. Math. Comput. — 2014. — 228, № 1. — С. 128–140. — DOI: [10.1016/j.amc.2013.11.054](https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.11.054).
22. Gearhart L. Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces // Trans. Am. Math. Soc. — 1978. — 236. — С. 385–394. — DOI: [10.1090/S0002-9947-1978-0461206-1](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1978-0461206-1).
23. Gohberg I., Goldberg S. Basic operator theory. — Boston—Basel—Stuttgart: Birkhäuser, 1981. — DOI: [10.1007/978-1-4612-5985-5](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5985-5).
24. Liu Z., Zheng S. Semigroups associated with dissipative systems. — London: Chapman & Hall/CRC, 1999.

25. *Ma Z., Zhang L., Yang X.* Exponential stability for a Timoshenko-type system with history // J. Math. Anal. Appl. — 2011. — 380, № 1. — С. 299–312. — DOI: [10.1016/j.jmaa.2011.02.078](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.02.078).
26. *Messaoudi S. A., Apalara T. A.* General stability result in a memory-type porous thermoelasticity system of type III // Arab J. Math. Sci. — 2014. — 20, № 2. — С. 213–232. — DOI: [10.1016/j.ajmsc.2013.08.004](https://doi.org/10.1016/j.ajmsc.2013.08.004).
27. *Muñoz Rivera J. E., Naso M. G.* Asymptotic stability of semigroups associated with linear weak dissipative systems with memory // J. Math. Anal. Appl. — 2007. — 326. — С. 691–707. — DOI: [10.1016/j.jmaa.2006.03.022](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.03.022).
28. *Neerven J.* The Asymptotic behaviour of semigroups of linear operators. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1996.
29. *Racke R., Said-Houari B.* Global existence and decay property of the Timoshenko system in thermoelasticity with second sound // Nonlinear Anal. — 2012. — 75, № 13. — С. 4957–4973. — DOI: [10.1016/j.na.2012.04.011](https://doi.org/10.1016/j.na.2012.04.011).
30. *Renardy M., Hrusa W. J., Nohel J. A.* Mathematical problems in viscoelasticity. — New York: Longman Sci. & Tech., 1987.
31. *Tretter C.* Spectral theory of block operator matrices and applications. — London: Imperial College Press, 2008. — DOI: [10.1142/P493](https://doi.org/10.1142/P493).
32. *Wolf F.* On the essential spectrum of partial differential boundary problems // Commun. Pure. Appl. Math. — 1959. — 12. — С. 211–228. — DOI: [10.1002/cpa.3160120202](https://doi.org/10.1002/cpa.3160120202).
33. *Zakora D. A.* Forced motions of thermoelastic systems of memory type // Lobachevskii J. Math. — 2021. — 42, № 5. — С. 1124–1139. — DOI: [10.1134/S199508022105022X](https://doi.org/10.1134/S199508022105022X).

Д. А. Загора

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия

E-mail: dmitry.zkr@gmail.com, РИНЦ SPIN-код: 4632-1311, РИНЦ AuthorID: [771394](https://elibrary.ru/author_index.aspx?author_id=771394),
Scopus: [25026570600](https://orcid.org/0000-0002-6084-1114), ORCID: [0000-0002-6084-1114](https://orcid.org/0000-0002-6084-1114)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-258-281](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-258-281)

EDN: [AZYDIE](https://elibrary.ru/author_index.aspx?author_id=771394)

UDC 517.968.72

Research article

Asymptotic behavior of solutions of an incomplete second-order integro-differential equation

D. A. Zakora

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia

Abstract. In this paper, we study an incomplete second-order integro-differential operator equation in a Hilbert space. The difference-type kernel of an integral perturbation is a holomorphic semigroup bordered by unbounded operators. The asymptotic behavior of solutions of this equation is studied. Asymptotic formulas for solutions are proved in the case when the right-hand side is close to an almost periodic function. The obtained formulas are applied to one equation describing a number of applications from the mechanics of viscoelastic systems.

Keywords: operator equation, integro-differential equation, Cauchy problem, solution asymptotics.

Conflict-of-interest. The author declares no conflict of interest.

Acknowledgments and funding. The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement No. 075-02-2026-1313.



For citation: D. A. Zakora, “Asymptotic behavior of solutions of an incomplete second-order integro-differential equation,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 2, 258–281. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-258-281](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-258-281) EDN: [AZYDIE](https://edn.asydie.ru)

REFERENCES

1. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, *Spektral'nyy Analiz Funktsional'no-Differentsial'nykh Uravneniy* [Spectral Analysis of Functional Differential Equations], MAKS Press, Moscow, 2016 (in Russian).
2. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, “Ekspontentsial'naya ustoychivost' polugrupp, porozhdaemykh vol'terrovymi integro-differentsial'nymi uravneniyami s singulyarnymi yadrami” [Exponential stability of semigroups generated by Volterra integro-differential equations with singular kernels], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 2021, **57**, No. 10, 1426–1430 (in Russian), DOI: [10.31857/S0374064121100149](https://doi.org/10.31857/S0374064121100149).
3. J. Goldstein, *Polugruppy Lineynykh Operatorov i Ikh Prilozheniya* [Semigroups of Linear Operators and Applications], Vyshcha shkola, Kiev, 1989 (Russian translation).
4. D. A. Zakora, “Ekspontentsial'naya ustoychivost' odnoy polugruppy i prilozheniya” [Exponential stability of one semigroup and applications], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2018, **103**, No. 5, 702–719 (in Russian), DOI: [10.4213/mzm11703](https://doi.org/10.4213/mzm11703).
5. D. A. Zakora, “Asimptotika resheniy v zadache o malykh dvizheniyakh szhimaemoy zhidkosti Maksvella” [Asymptotics of solutions in the problem of small motions of a compressible Maxwell fluid], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 2019, **55**, No. 9, 1195–1208 (in Russian), DOI: [10.1134/S0374064119090048](https://doi.org/10.1134/S0374064119090048).
6. D. A. Zakora, “Asimptoticheskoe povedenie resheniy polnogo integro-differentsial'nogo uravneniya vtorogo poriyadka” [Asymptotic behavior of solutions of a complete second-order integro-differential equation], *Sovrem. Mat. Fundam. Naprav.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2022, **68**, No. 3, 451–466 (in Russian), DOI: [10.22363/2413-3639-2022-68-3-451-466](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-3-451-466).
7. A. A. Il'yushin and B. E. Pobedrya, *Osnovy Matematicheskoy Teorii Termovyzkouprugosti* [Fundamentals of the Mathematical Theory of Thermoviscoelasticity], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
8. T. Kato, *Teoriya Vozmushcheniy Lineynykh Operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
9. C. G. Kreyn, *Lineynye Differentsial'nye Uravneniya v Banakhovom Prostranstve* [Linear Differential Equations in a Banach Space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
10. D. Henry, *Geometricheskaya Teoriya Polulineynykh Parabolicheskikh Uravneniy* [Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations], Mir, Moscow, 1985 (Russian translation).
11. F. Alabau-Boussouria and P. Cannarsa, “A general method for proving sharp energy decay rates for memory-dissipative evolution equations,” *C. R. Acad. Sci. Paris*, 2009, **347**, 867–872, DOI: [10.1016/j.crma.2009.05.011](https://doi.org/10.1016/j.crma.2009.05.011).
12. F. Alabau-Boussouria, P. Cannarsa, and D. Sforza, “Decay estimates for second order evolution equations with memory,” *J. Funct. Anal.*, 2008, **254**, 1342–1372, DOI: [10.1016/j.jfa.2007.09.012](https://doi.org/10.1016/j.jfa.2007.09.012).
13. F. Ammar-Khodja, A. Benabdallah, J. E. Muñoz Rivera, R. Racke, “Energy decay for Timoshenko systems of memory type,” *J. Differ. Equ.*, 2003, **194**, No. 1, 82–115, DOI: [10.1016/S0022-0396\(03\)00185-2](https://doi.org/10.1016/S0022-0396(03)00185-2).
14. G. Amendola, M. Fabrizio, and Golden J. M., *Thermodynamics of Materials with Memory*, Springer, Boston, 2012, DOI: [10.1007/978-1-4614-1692-0](https://doi.org/10.1007/978-1-4614-1692-0).
15. W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber, and F. Neubrander, *Vector-Valued Laplace Transforms and Cauchy Problems*, Birkhäuser, Basel, 2011, DOI: [10.1007/978-3-0348-0087-7](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0087-7).
16. C. M. Dafermos, “Asymptotic stability in viscoelasticity,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1970, **37**, 297–308, DOI: [10.1007/bf00251609](https://doi.org/10.1007/bf00251609).
17. C. M. Dafermos, “An abstract Volterra equation with applications to linear viscoelasticity,” *J. Differ. Equ.*, 1970, **7**, No. 3, 554–569, DOI: [10.1016/0022-0396\(70\)90101-4](https://doi.org/10.1016/0022-0396(70)90101-4).
18. F. Dell'Oro, “Asymptotic stability of thermoelastic systems of Bresse type,” *J. Differ. Equ.*, 2015, **258**, No. 11, 3902–3927, DOI: [10.1016/j.jde.2015.01.025](https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.01.025).
19. K.-J. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer, New York, 2000.
20. M. Fabrizio and A. Morro, *Mathematical Problems in Linear Viscoelasticity*, SIAM, Philadelphia, 1992, DOI: [10.1137/1.9781611970807](https://doi.org/10.1137/1.9781611970807).
21. L. H. Fatori, R. N. Monteiro, and H. D. F. Sare, “The Timoshenko system with history and Cattaneo law,” *Appl. Math. Comput.*, 2014, **228**, No. 1, 128–140, DOI: [10.1016/j.amc.2013.11.054](https://doi.org/10.1016/j.amc.2013.11.054).
22. L. Gearhart, “Spectral theory for contraction semigroups on Hilbert spaces,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1978, **236**, 385–394, DOI: [10.1090/S0002-9947-1978-0461206-1](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1978-0461206-1).

23. I. Gohberg and S. Goldberg, *Basic operator theory*, Birkhäuser, Boston—Basel—Stuttgart, 1981, DOI: [10.1007/978-1-4612-5985-5](https://doi.org/10.1007/978-1-4612-5985-5).
24. Z. Liu and S. Zheng, *Semigroups Associated with Dissipative Systems*, Chapman & Hall/CRC, London, 1999.
25. Z. Ma, L. Zhang, and X. Yang, “Exponential stability for a Timoshenko-type system with history,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2011, **380**, No. 1, 299–312, DOI: [10.1016/j.jmaa.2011.02.078](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2011.02.078).
26. S. A. Messaoudi and T. A. Apalara, “General stability result in a memory-type porous thermoelasticity system of type III,” *Arab J. Math. Sci.*, 2014, **20**, No. 2, 213–232, DOI: [10.1016/j.ajmsc.2013.08.004](https://doi.org/10.1016/j.ajmsc.2013.08.004).
27. J. E. Muñoz Rivera, M. G. Naso, “Asymptotic stability of semigroups associated with linear weak dissipative systems with memory,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, **326**, 691–707, DOI: [10.1016/j.jmaa.2006.03.022](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.03.022).
28. J. Neerven, *The Asymptotic Behaviour of Semigroups of Linear Operators*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1996.
29. R. Racke and B. Said-Houari, “Global existence and decay property of the Timoshenko system in thermoelasticity with second sound,” *Nonlinear Anal.*, 2012, **75**, No. 13, 4957–4973, DOI: [10.1016/j.na.2012.04.011](https://doi.org/10.1016/j.na.2012.04.011).
30. M. Renardy, W. J. Hrusa, and J. A. Nohel, *Mathematical Problems in Viscoelasticity*, Longman Sci. & Tech., New York, 1987.
31. C. Tretter, *Spectral Theory of Block Operator Matrices and Applications*, Imperial College Press, London, 2008, DOI: [10.1142/P493](https://doi.org/10.1142/P493).
32. F. Wolf, “On the essential spectrum of partial differential boundary problems,” *Commun. Pure. Appl. Math.*, 1959, **12**, 211–228, DOI: [10.1002/cpa.3160120202](https://doi.org/10.1002/cpa.3160120202).
33. D. A. Zakora, “Forced motions of thermoelastic systems of memory type,” *Lobachevskii J. Math.*, 2021, **42**, No. 5, 1124–1139, DOI: [10.1134/S199508022105022X](https://doi.org/10.1134/S199508022105022X).

D. A. Zakora

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia

E-mail: dmitry.zkr@gmail.com, eLIBRARY SPIN-code: 4632-1311, eLIBRARY AuthorID: [771394](https://elibrary.ru/771394),
Scopus: [25026570600](https://orcid.org/25026570600), ORCID: [0000-0002-6084-1114](https://orcid.org/0000-0002-6084-1114)

АСИМПТОТИКА СТАЦИОНАРНЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ В СИСТЕМАХ ДИФФУЗИИ—РЕАКЦИИ ДЛЯ ДВУХ ВЗАИМОДЕЙСТВУЮЩИХ БИОЛОГИЧЕСКИХ ВИДОВ

П. А. ЗЕЛЕНЧУК

*Научно-технологический университет «Сириус», Федеральная территория «Сириус», Россия
Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия*

Аннотация. Для двух классов систем диффузии—реакции, описывающих взаимодействие биологических видов (конкуренция и хищник—жертва) в неоднородной среде обитания, построены асимптотические приближения к стационарным решениям. Исходные модели дополнены условиями периодичности на одномерном ареале; коэффициенты диффузии предполагаются малыми и, вообще говоря, разномасштабными. В предположении, что вырожденная система допускает решение в виде идеального свободного распределения (ИСР), методами теории сингулярных возмущений получены явные аналитические формулы для главных членов асимптотики. Установлено, что диффузионные поправки к ИСР пропорциональны локальной кривизне ресурсного профиля $p''(x)/p(x)$ и определяются как параметрами межвидового взаимодействия, так и отношением коэффициентов диффузии. Для системы хищник—жертва показано, что неоднородность ресурса существенно влияет на распределение хищника, в то время как распределение жертвы остается близким к ИСР даже при относительно больших значениях диффузии. Сформулирован количественный критерий применимости асимптотики, позволяющий априори оценить ее точность для произвольного профиля ресурса. Достоверность аналитических результатов подтверждена численными расчетами.

Ключевые слова: асимптотика решения, стационарное распределение, уравнения диффузии—реакции, конкуренция, хищник—жертва, идеальное свободное распределение.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор выражает благодарность за интерес к своей работе всем участникам Крымской осенней математической школы-симпозиума Н. Д. Копачевского КРОМШ-2025 а также лично Галине Алексеевне Куриной за полезные замечания. Автор благодарен анонимному рецензенту, чьи обстоятельные замечания способствовали глубокой переработке материала и более точной расстановке акцентов в работе. Исследование выполнено в Научно-технологическом университете «Сириус» при финансовой поддержке РФФ, грант № 25-21-00419.

Для цитирования: Зеленчук П. А. Асимптотика стационарных распределений в системах диффузии—реакции для двух взаимодействующих биологических видов // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 2. С. 282–296. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-282-296](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-282-296) EDN: [BACWVC](https://www.edn.ru/BACWVC)

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения диффузии—реакции (УДР) — один из основных и фундаментальных классов уравнений, используемых в математическом моделировании для описания различных процессов [9, 12, 34]. УДР находят свое применение в физике, химии, биологии, экономике и других науках,

а также на их стыке, в междисциплинарных исследованиях. Особое значение УДР имеют в математической биологии и экологии, позволяя описывать, как локальные взаимодействия (реакции) и пространственное перемешивание (диффузия) порождают глобальные пространственно-временные структуры [11, 16, 25]. Решения УДР могут носить как стационарный, так и нестационарный характер. Нестационарные решения охватывают богатейший спектр динамических явлений, от бегущих волн [24, 25] до сложного пространственно-временного хаоса [5]. В биологии и экологии они описывают функциональную динамику систем: распространение сигналов [21], инвазию видов [2, 29], эпидемические процессы [20] и популяционные волны и циклы [15, 33]. Обзор новейших тенденций и разработок в изучении волн на основе уравнений диффузии-реакции для различных биологических контекстов — динамики популяций, экологии и биомедицинских приложений — представлен в работе [35]. В отличие от нестационарных, для которых ключевыми факторами являются время и движение, стационарные решения описывают устойчивые структуры — пространственные распределения [19] и морфогенез [27]. Неустойчивость Тьюринга (диффузионная неустойчивость) — пожалуй, наиболее яркий классический пример [32], иллюстрирующий, как стационарное однородное решение уравнений диффузии-реакции теряет устойчивость, и на его месте возникают стационарные пространственно-неоднородные решения [28]. Современный обзор, прослеживающий путь идей Тьюринга от математической абстракции до их признания в биологии развития, приведен в работе [23]. Для большинства задач нелинейность УДР не позволяет получить аналитическое решение в замкнутой форме [7]. Численное же моделирование в двумерных и трехмерных [14] областях требует значительных вычислительных ресурсов [13]. В качестве альтернативы прямому численному моделированию УДР, эффективным подходом является построение асимптотических решений. Методы теории сингулярных возмущений [3] позволяют получить приближенные аналитические представления, которые дают качественное понимание поведения системы и выявляют основные механизмы управления ее параметрами [26]. Цель данного исследования состоит в построении асимптотик стационарных распределений в УДР для систем хищник—жертва и двух конкурирующих популяций. Особый интерес представляют случаи с идеальным свободным распределением (ИСР) [17, 31, 36, 40], позволяющим реализовать эволюционно стабильную стратегию (ЭСС) выбранной популяции или всей системы [18, 22, 37, 41].

Отметим, что в отличие от предыдущих работ, где основное внимание уделялось рассмотрению концепции ИСР и условиям его реализации в двумерных областях [31, 40], а асимптотический анализ использовался лишь как вспомогательный инструмент для качественных оценок, в данной статье приближение стационарных распределений с использованием метода сингулярных возмущений для систем взаимодействующих на неоднородном ареале видов является самостоятельным предметом исследования. Акцент переносится на построение явных аналитических формул решений подходящих для анализа отклонений от ИСР, вызванных малой разномасштабной диффузией. Это позволяет выявлять степень влияния различных факторов на структуру асимптотических поправок. Предложенный подход применяется одновременно к различным системам — двум конкурирующим популяциям одного вида и хищник—жертва.

2. ОБЩАЯ МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Рассмотрим два биологических вида $u(x, t)$ и $v(x, t)$, взаимодействующих на одномерном ареале $\Omega = [0, 1]$, неоднородность которого задается неравномерным распределением обобщенной функции ресурса $p(x)$. Пространственно-временная динамика видов может быть описана классической системой УДР

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F_1(u, v, p(x)), \quad \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + F_2(u, v, p(x)), \quad (2.1)$$

где F_1, F_2 — нелинейные функции локального взаимодействия, а d_1, d_2 — не зависящие от координаты малые коэффициенты диффузии, подчиняющиеся условию

$$d_1 = \varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \ll 1, \quad d_2 = \gamma \varepsilon, \quad \gamma > 0. \quad (2.2)$$

Такая ситуация с биологической точки зрения соответствует малоподвижным видам, причем, если $\gamma > 1$, то второй вид подвижнее первого, в противном случае, когда $0 < \gamma < 1$, наоборот.

Заметим, что в силу малой диффузии основной вклад в неравномерное распределение видов по пространству будет определяться функциями F_1, F_2 . Чтобы не усложнять исследуемую модель

взаимодействия популяций, целесообразно использовать обобщенный ресурс в виде усредненной функции пространственных координат $p(x)$, которая аккумулирует в себе все разнородные факторы [36]. Однако подобное упрощение применимо не всегда: в ряде случаев отдельные параметры приходится трактовать как уникальные, поскольку они оказывают специфическое воздействие на развитие вида. Отметим, что функция $p(x)$ непрерывна, строго положительна и как минимум дважды дифференцируема на Ω .

Система (2.1) дополняется начальными условиями

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad v(x, 0) = v_0(x)$$

и условиями периодичности

$$u(0, t) = u(1, t), \quad v(0, t) = v(1, t), \quad \frac{\partial}{\partial x} u(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} u(1, t), \quad \frac{\partial}{\partial x} v(0, t) = \frac{\partial}{\partial x} v(1, t).$$

Для одномерного случая условия периодичности приводят к кольцевому ареалу, нередко встречающемуся в природе. Часто выделяют ленточные ареалы, отличающиеся значительной протяженностью при крайне малой ширине. Такие ареалы характерны для речных долин и литоральной зоны морских побережий. Например, поселения усоногих ракообразных и других супралиторальных организмов, обрастающих скалистыми атлантические берега Скандинавии, могут простирались на сотни и тысячи километров при ширине всего в несколько метров [10].

Предельно узкие ленточные ареалы называют линейными и описывают с помощью одномерных математических моделей, что существенно упрощает анализ протекающих в них процессов. Некоторые ленточные ареалы замкнуты в кольцо или почти замкнуты — их края соединяются напрямую либо разделяются небольшим препятствием. Кольцевые ареалы формируются вдоль узкой береговой линии озер и прудов, на постоянных высотных уровнях в горах [1], а в меньшем масштабе — вокруг древесных стволов, крупных валунов и на поверхности искусственных медицинских трубок. В качестве примера можно привести усоногих раков (*Cirripedia*, *Thoracica*), обитающих в литорали островов прибрежных вод Южного Вьетнама, а также брюхоногих и двусторчатых моллюсков (*Mollusca: Gastropoda*, *Bivalvia*), населяющих омываемые водой скалы в заливе Петра Великого [8, 10].

Кольцевые ареалы дают чисто математические преимущества, заключающиеся в устранении граничных эффектов, появляющихся при описании распределенных динамических систем. Так, в сингулярно возмущенных задачах УДР с условиями Неймана или Дирихле, вследствие несоответствия между граничными условиями и решением вырожденной задачи (при стремлении малого параметра к нулю), возникает пограничный слой. В случае периодических граничных условий такое несоответствие отсутствует, поскольку решение продолжается периодически и не требуется «подстраивать» его под фиксированные значения на границе.

Анализ системы (2.1) будем вести в предположении, что вырожденная задача

$$\frac{du}{dt} = F_1(u, v, p(x)), \quad \frac{dv}{dt} = F_2(u, v, p(x))$$

имеет стационарные решения, удовлетворяющие ИСР и существованию обоих видов. Находя интересные нас стационарные решения, будем возвращать малую диффузию и строить асимптотические приближения. Полученные приближения будем сравнивать с численными решениями, реализуемыми с помощью комплекса программ SPECIES-25, защищенного свидетельством о государственной регистрации программ для ЭВМ [6]. Данный комплекс позволяет проводить вычислительные эксперименты для различных задач популяционной динамики (в том числе и на основе нелинейных систем диффузии—адвекции—реакции), в условиях неоднородного ареала.

3. ДВЕ КОНКУРИРУЮЩИХ ПОПУЛЯЦИИ ОДНОГО ВИДА

Рассмотрим две конкурирующие за единый ресурс популяции одного вида, и для определенности будем полагать, что $u(x, t) = u_1(x, t)$ и $v(x, t) = u_2(x, t)$:

$$\frac{\partial u_1}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 u_1}{\partial x^2} + u_1 [p(x) - u_1 - \beta_1 u_2], \quad \frac{\partial u_2}{\partial t} = d_2 \frac{\partial^2 u_2}{\partial x^2} + u_2 [p(x) - \beta_2 u_1 - u_2],$$

где β_1 и β_2 — нормированные коэффициенты межпопуляционной конкуренции [1, 37].

Вырожденная стационарная задача

$$u_1 [p(x) - u_1 - \beta_1 u_2] = 0, \quad u_2 [p(x) - \beta_2 u_1 - u_2] = 0$$

будет иметь четыре решения: тривиальное $\{0, 0\}$, два решения $\{p(x), 0\}$ и $\{0, p(x)\}$ соответствующие полной победе одного из конкурентов, и решение

$$u_1 = \frac{(1 - \beta_1)}{(1 - \beta_1 \beta_2)} p(x), \quad u_2 = \frac{(1 - \beta_2)}{(1 - \beta_1 \beta_2)} p(x). \quad (3.1)$$

Это решение соответствует ИСР (обе популяции пропорциональны неравномерно распределенному ресурсу [31, 40]) и устойчиво при выполнении условия $\beta_1 < 1$, $\beta_2 < 1$.

Считая, что условие (2.2) выполнено, будем искать асимптотическое приближение к решению (3.1) в виде рядов [3]: $u_1 = u_{10} + \varepsilon u_{11} + \varepsilon^2 u_{12} + \dots$, $u_2 = u_{20} + \varepsilon u_{21} + \varepsilon^2 u_{22} + \dots$

Ограничиваясь первыми двумя членами разложения, получим

$$u_1 = \frac{(1 - \beta_1)}{(1 - \beta_1 \beta_2)} p(x) + \frac{p''(x)}{p(x)} \frac{(d_1 - \beta_1 d_2)}{(1 - \beta_1 \beta_2)}, \quad u_2 = \frac{(1 - \beta_2)}{(1 - \beta_1 \beta_2)} p(x) + \frac{p''(x)}{p(x)} \frac{(d_2 - \beta_2 d_1)}{(1 - \beta_1 \beta_2)}, \quad (3.2)$$

где $p''(x)$ означает вторую производную функции ресурса по координате.

Видно, что полученное приближенное решение уже не удовлетворяет ИСР, однако в силу малости вторых членов в (3.2) его можно назвать ИСР-подобным [40]. Этот факт хорошо проиллюстрирован на рис. 1(а), где изображено сравнение плотностей конкурирующих популяций $u_1(x)$ и $u_2(x)$ (красный и синий цвет соответственно) с функцией обобщенного ресурса (черный цвет) для двух стационарных решений: без диффузии — сплошные линии, и при ее наличии — пунктир. Расчеты проводились численно с использованием программы SPECIES-25 для функции ресурса $p(x) = 2 + \frac{1}{2} \sin(2\pi x) + \frac{1}{2} \cos(4\pi x)$, удовлетворяющей условиям периодичности и обладающей двумя одинаковыми по высоте максимумами и двумя минимумами, один из которых значительно глубже другого.

В соответствии с интуитивными ожиданиями, наличие небольшой одинаковой ($\gamma = 1$) диффузии слегка «сглаживает» исходное решение, уменьшая максимумы распределений и повышая значения плотностей популяций в окрестности минимумов.

Дело обстоит иначе, если диффузия является разномасштабной: здесь интуитивные ожидания могут оказаться ошибочными. На рис. 1(б) приведено сравнение двух случаев разномасштабной диффузии ($\gamma = 0,5$ — тонкие кривые, $\gamma = 1,5$ — пунктир) с решением без диффузии (жирные кривые). Вторая популяция, хотя и сосуществует на одном ареале с первой, уступает ей по численности в конкурентной борьбе ($\beta_2 > \beta_1$). Введение малой разномасштабной диффузии (при которой u_1 подвижнее u_2 в два раза) приводит к тому, что эффект «сглаживания» проявляется лишь у первой популяции, в то время как вторая демонстрирует обратную тенденцию: увеличивается в местах максимумов и сокращается в области минимума (тонкая синяя кривая). Если же сделать более подвижной вторую популяцию, то на первый взгляд ситуация возвращается к привычному поведению (пунктирные линии). Однако это справедливо лишь в области минимума. В точках максимума первая популяция благодаря конкурентному преимуществу возрастает быстрее, чем убывает вследствие диффузии. Наиболее отчетливо это проявится при $\gamma > 2$, в этом случае пунктирная линия в максимумах станет выше сплошной толстой линии и еще сильнее приблизится к ней в минимумах.

Сравнение приближенного решения с численным для двух различных значений диффузии представлено на рис. 2. Видно, что чем меньше параметр ε , тем точнее асимптотическое решение (3.2), рис. 2(а). Для значений выше $\varepsilon = 0,002$ ошибка начинает стремительно нарастать в местах локальных экстремумов рис. 2(б) и это особенно заметно на распределении популяции с большей численностью (в данном случае u_1).

Рассмотрим теперь вопрос о том, могут ли диффузионные отклонения при умеренных значениях ε приблизить систему к границе неустойчивости. Исследуем устойчивость стационарного решения (3.1) относительно пространственно-неоднородных возмущений при наличии неоднородного ресурса $p(x) \neq \text{const}$. Для этого воспользуемся методом замороженных коэффициентов, строго обоснованных для сингулярно возмущенных параболических систем [4]. В силу малости коэффициентов диффузии ($\varepsilon \ll 1$) характерный пространственный масштаб наиболее опасных

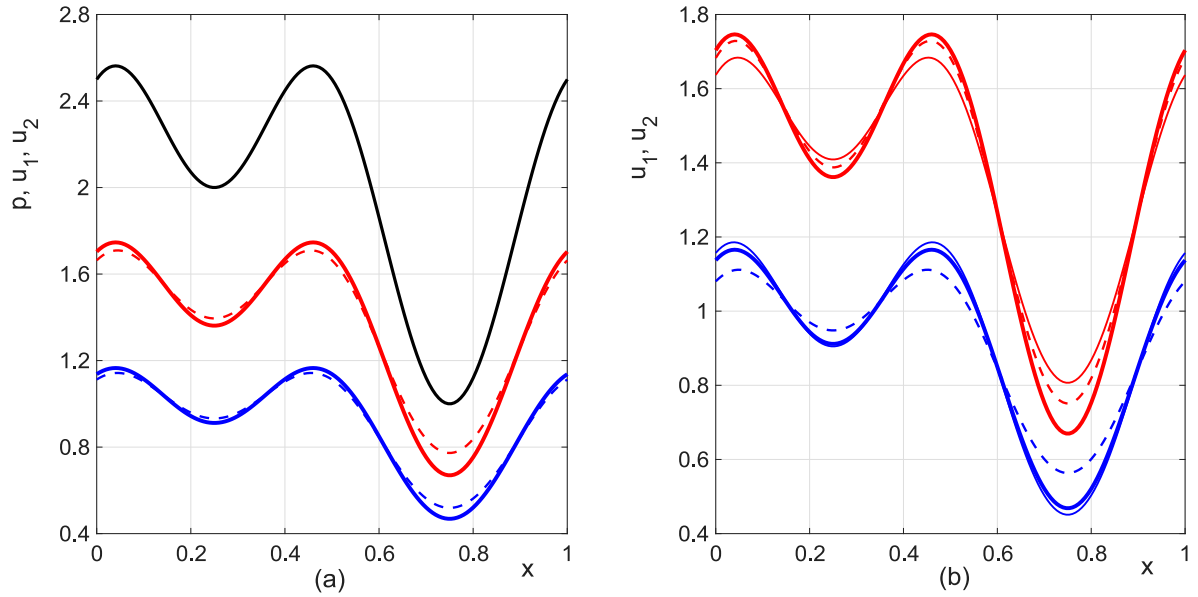


РИС. 1. Стационарные распределения популяций $u_1(x)$ — красная кривая, $u_2(x)$ — синяя кривая, и функции ресурса $p(x) = 2 + 0.5 \sin(2\pi x) + 0.5 \cos(4\pi x)$ — черная кривая, сплошные жирные линии — отсутствие диффузии ($\varepsilon = 0, \gamma = 1, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 0.8$).

(a) Сравнение с решением при диффузии $\varepsilon = 0.002, \gamma = 1$ (пунктирные кривые),

(b) Сравнение с двумя решениями при $\gamma = 0.5$ (тонкие линии) и $\gamma = 1.5$ (пунктир)

FIG. 1. Stationary population distributions $u_1(x)$ — red curve, $u_2(x)$ — blue curve, and resource functions $p(x) = 2 + 0.5 \sin(2\pi x) + 0.5 \cos(4\pi x)$ — black curve, solid bold lines — no diffusion ($\varepsilon = 0, \gamma = 1, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 0.8$).

(a) Comparison with the solution with diffusion $\varepsilon = 0.002, \gamma = 1$ (dashed curves),

(b) Comparison with two solutions with $\gamma = 0.5$ (thin lines) and $\gamma = 1.5$ (dashed line)

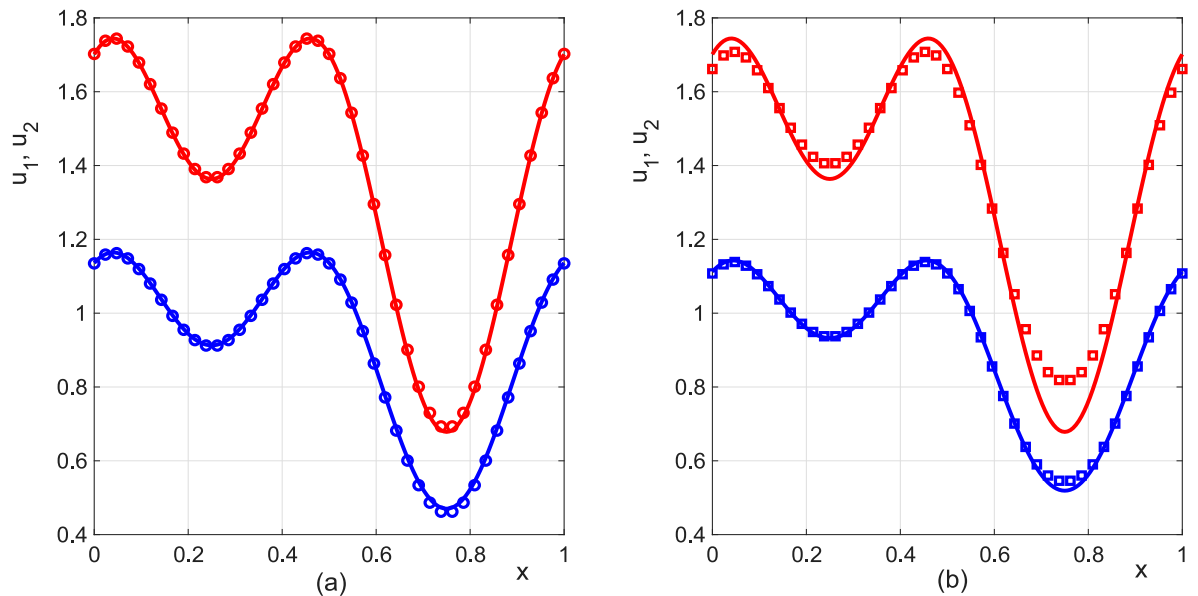


РИС. 2. Численное решение (сплошные жирные линии), $\gamma = 1, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 0.8$, в сравнении с асимптотическими приближениями (3.2) при

(a) диффузии $\varepsilon = 0.0001$ (кружочки),

(b) диффузии $\varepsilon = 0.002$ (квадратики)

FIG. 2. Numerical solution (solid bold lines), $\gamma = 1, \beta_1 = 0.7, \beta_2 = 0.8$, compared to asymptotic approximations (3.2) for

(a) diffusion $\varepsilon = 0.0001$ (circles),

(b) diffusion $\varepsilon = 0.002$ (squares)

возмущений имеет порядок $\sim \sqrt{\varepsilon}$, что много меньше масштаба изменения макроскопического профиля $p(x)$. Это позволяет исследовать устойчивость локально, зафиксировав ресурс $p(x) \approx p(x_0)$ в окрестности произвольной точки $x_0 \in [0, 1]$.

Подстановка локальной спектральной моды возмущения $\sim e^{ikx}$ приводит к анализу модифицированной матрицы Якоби в точке x_0 :

$$J_{\text{diff}}(x_0) = J(x_0) - \varepsilon k^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u_1(x_0) - \varepsilon k^2 & -\beta_1 u_1(x_0) \\ -\beta_2 u_2(x_0) & -u_2(x_0) - \gamma \varepsilon k^2 \end{pmatrix},$$

где элементы реакционной матрицы $J(x_0)$ зафиксированы в точке x_0 . Согласно критерию Рауса—Гурвица, локальная устойчивость гарантируется при $\text{Tr}(J_{\text{diff}}) < 0$ и $\det(J_{\text{diff}}) > 0$ для всех $k \geq 0$. След матрицы $\text{Tr}(J_{\text{diff}}) = -(u_1(x_0) + u_2(x_0)) - \varepsilon k^2(1 + \gamma)$ строго отрицателен во всей области определения.

Рассмотрим локальный детерминант как функцию волнового параметра $M = \varepsilon k^2 \geq 0$:

$$\det(J_{\text{diff}}(M; x_0)) = \gamma M^2 + (\gamma u_1(x_0) + u_2(x_0))M + u_1(x_0)u_2(x_0)(1 - \beta_1\beta_2). \quad (3.3)$$

График данной функции представляет собой параболу с ветвями, направленными вверх ($\gamma > 0$), локальная вершина которой $M_v(x_0) = -(\gamma u_1(x_0) + u_2(x_0))/(2\gamma)$ всегда строго отрицательна в силу положительности стационарных плотностей популяций $u_1, u_2 > 0$. Следовательно, на интервале $M \geq 0$ функция детерминанта является монотонно возрастающей, и ее глобальный минимум по M достигается в длинноволновом пределе $M = 0$. В пределе $M = 0$ задача сводится к исследованию бездиффузионной матрицы $J(x_0)$, которая является гурвицевой в каждой точке при выполнении условий $\beta_1 < 1, \beta_2 < 1$.

Таким образом, $\det(J_{\text{diff}}) > 0$ выполнено при всех $k \geq 0$ и в любой точке x_0 . Пространственная неоднородность ресурса $p(x)$ не индуцирует диффузионную неустойчивость (эффект Тьюринга невозможен ни при каком $\gamma > 0$), а условия локального сосуществования полностью сохраняют свою силу для описания устойчивости полной системы УДР.

4. СИСТЕМА ХИЩНИК—ЖЕРТВА

Пусть теперь два биологических вида взаимодействуют по принципу «хищник—жертва» [38]

$$\frac{\partial u}{\partial t} = d_1 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u \left[\mu_1 \left(1 - \frac{u}{p(x)} \right) - \lambda_1 \frac{v}{p(x)} \right], \quad \frac{\partial v}{\partial t} = d_2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + v \left[\mu_2 \frac{u}{p(x)} - \lambda_2 \right],$$

где $u(x)$ — популяция жертвы, а $v(x)$ — популяция хищника, μ_j и λ_j (где $j = 1, 2$) — положительные коэффициенты роста и убыли двух видов соответственно. Заметим, что функция роста жертвы, стоящая в круглых скобках в первом уравнении после μ_1 , соответствует логистическому закону роста [11, 25], где роль емкости среды играет обобщенная, неравномерная по ареалу функция ресурса жертвы $p(x)$ (см. [30]), требования к которой остаются прежними (см. раздел 3). В качестве функционального отклика хищника использована модернизированная функция Лотки—Вольтерры [39] обеспечивающая формирование ИСР.

Стационарная задача для вырожденной системы

$$u \left[\mu_1 \left(1 - \frac{u}{p(x)} \right) - \lambda_1 \frac{v}{p(x)} \right] = 0, \quad v \left[\mu_2 \frac{u}{p(x)} - \lambda_2 \right] = 0$$

будет иметь три решения [38]: тривиальное $\{u = 0, v = 0\}$, решение без хищника $\{u = p(x), v = 0\}$ и решение для двух сосуществующих видов

$$u = \frac{\lambda_2}{\mu_2} p(x), \quad v = \frac{\mu_1}{\lambda_1} \left(1 - \frac{\lambda_2}{\mu_2} \right) p(x), \quad (4.1)$$

которое удовлетворяет ИСР и будет сохранять устойчивость при выполнении условия

$$\lambda_2 < \mu_2. \quad (4.2)$$

Предполагая, как и прежде, что имеет место соотношение (2.2), построим асимптотическое приближение к (4.1) в виде рядов [3, 26]: $u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots$, $v = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots$

В результате, ограничиваясь первыми двумя членами разложения, будем иметь

$$u = \frac{\lambda_2}{\mu_2} p(x) - \frac{d_2}{\mu_2} p''(x), \quad v = \frac{\mu_1}{\lambda_1} \left(1 - \frac{\lambda_2}{\mu_2} \right) p(x) + \frac{1}{\lambda_1} \left(d_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} d_2 \right) p''(x). \quad (4.3)$$

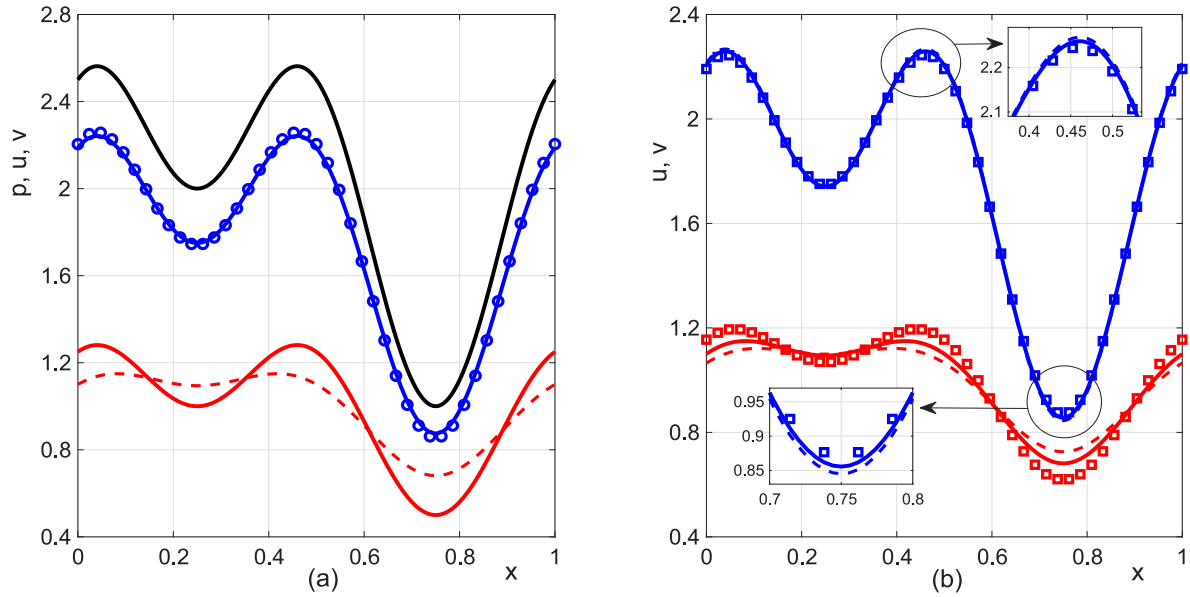


РИС. 3. Стационарные распределения популяции жертвы — синяя кривая, хищника — красная кривая, и ресурса $p(x) = 2 + 0.5 \sin(2\pi x) + 0.5 \cos(4\pi x)$ — черная кривая, сплошные линии — без диффузии ($\varepsilon = 0, \gamma = 1, \mu_1 = 4, \mu_2 = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1.75$).

(a) Сравнение с решением при диффузии $\varepsilon = 0.001, \gamma = 1$ (пунктир и кружочки);

(b) Сравнение с двумя решениями при $\gamma = 0.5$ (квадратики) и $\gamma = 1.5$ (пунктир)

FIG. 3. Stationary population distributions of prey — blue curve, predator — red curve, and resource $p(x) = 2 + 0.5 \sin(2\pi x) + 0.5 \cos(4\pi x)$ — black curve, solid lines — without diffusion ($\varepsilon = 0, \gamma = 1, \mu_1 = 4, \mu_2 = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1.75$).

(a) Comparison with the solution with diffusion $\varepsilon = 0.001, \gamma = 1$ (dashed line and circles);

(b) Comparison with two solutions with $\gamma = 0.5$ (squares) and $\gamma = 1.5$ (dashed line)

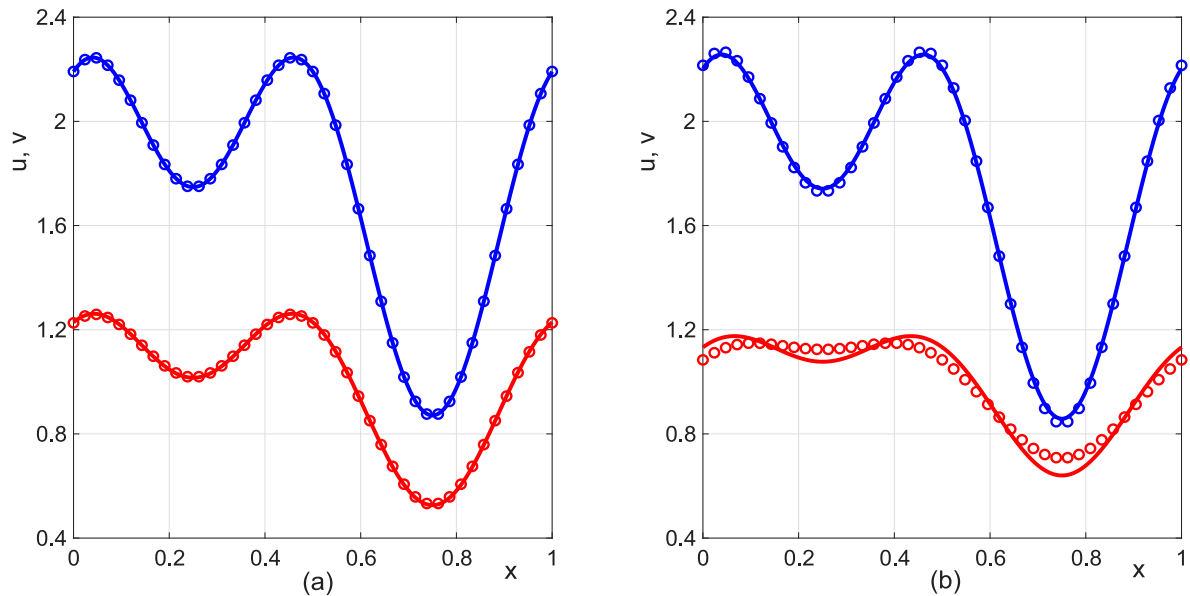


РИС. 4. Численный расчет (сплошные линии), $\mu_1 = 4, \mu_2 = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1.75, \gamma = 1$ в сравнении с асимптотическими приближениями (кружочки)

(a) диффузии $\varepsilon = 0.0001$, (b) диффузии $\varepsilon = 0.007$

FIG. 4. Numerical calculation (solid lines), $\mu_1 = 4, \mu_2 = 2, \lambda_1 = 1, \lambda_2 = 1.75, \gamma = 1$ in comparison with asymptotic approximations (circles)

(a) diffusion $\varepsilon = 0.0001$, (b) diffusion $\varepsilon = 0.007$

Отметим, что как следует из (4.2), для того, чтобы v_0 было больше нуля, необходимо выполнение неравенства $\lambda_2/\mu_2 < 1$.

Приближенное решение (4.3) уже не обладает ИСР, причем поправка, делающая его ИСР-подобным, в случае жертвы зависит только от d_2 (диффузии хищника), а в случае хищника — от обеих диффузий (d_1 и d_2). На рис. 3(a) приведено сравнение плотностей популяций $u(x)$ и $v(x)$ (синий и красный цвет соответственно) с функцией ресурса жертвы (черный цвет) для двух стационарных решений: без диффузии — сплошные линии, и при ее наличии — пунктир. Хорошо видно, что распределение хищника сильно «сглаживается», в то время как распределение жертвы практически не изменяется даже при разномасштабной диффузии (пришлось значительно увеличить параметр ε , чтобы это увидеть на графике), лишь немного увеличиваясь в максимуме и немного убывая в окрестности минимума.

Сравнение приближенного решения с численным для двух различных значений диффузии представлено на рис. 4. Асимптотическое решение (4.3) для жертвы остается достаточно «точным» даже при больших значениях ε , чего нельзя сказать об асимптотике для хищника, которая начинает отклоняться от точного решения при возрастании диффузии рис. 4(b). Ошибка становится существенной уже при $\varepsilon = 0,0008$.

Рассмотрим причину более быстрой потери точности асимптотического приближения у хищника. Исследуем величину относительного вклада (поправку) вторых членов в асимптотическом разложении для каждого вида:

$$\Delta u = \frac{u_2}{u_0} = -\frac{d_2}{\lambda_2} \frac{p''(x)}{p(x)}, \quad \Delta v = \frac{v_2}{v_0} = \frac{d_1 + \frac{\mu_1}{\mu_2} d_2}{\mu_1 \left(1 - \frac{\lambda_2}{\mu_2}\right)} \frac{p''(x)}{p(x)}. \quad (4.4)$$

Из выражения для Δv видно, что ключевым элементом является множитель $(1 - \lambda_2/\mu_2)$. Если λ_2 близко к μ_2 , этот множитель становится малым, кроме того, числитель содержит сумму d_1 и $(\mu_1/\mu_2)d_2$, что также увеличивает абсолютную величину поправки. Так, при выбранных параметрах модели ($\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1,75$, $\gamma = 1$ и $\varepsilon = 0,0008$) относительная поправка для жертвы будет $\approx 0,00046 p''(x)/p(x)$, а для хищника $= 0,0048 p''(x)/p(x)$, что на порядок больше. Именно это мы и наблюдаем на рисунках: профиль жертвы визуально почти не меняется, а профиль хищника сильно «сглаживается». Следовательно, «узость» диапазона применимости асимптотического приближения для хищника вызвана не пороком модели, а конкретными значениями параметров, взятыми для иллюстрации. Если взять $\lambda_2 \ll \mu_2$, то точность асимптотики для хищника сохранялась бы вплоть до заметно больших ε .

Однако с биологической точки зрения уменьшение параметра λ_2 ведет к снижению смертности хищника и, следовательно, к росту его численности (в то время как популяция жертвы уменьшается). На рис. 5 изображено сравнение асимптотических приближений с численными решениями для двух разных значений $\lambda_2 = 1,7$ и $\lambda_2 = 1,4$ в одинаковом масштабе. Видно, что при меньшем λ_2 отклонение асимптотики от численного решения существенно меньше.

Рассмотрим устойчивость пространственно-неоднородного стационарного решения (4.1), существующего при условии положительных $\lambda_2 < \mu_2$. Как и в случае двух конкурирующих популяций, воспользуемся для анализа методом замороженных коэффициентов. Линеаризуя систему на решении (u, v) и замораживая коэффициенты, получаем локальную реакционную матрицу $\mathcal{J}(x_0) = p(x_0)M$, где постоянная матрица M имеет вид

$$M = \begin{pmatrix} -\mu_1 \alpha & -\lambda_1 \alpha \\ \mu_2 \beta & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{\lambda_2}{\mu_2}, \quad \beta = \frac{\mu_1}{\lambda_1} (1 - \alpha).$$

При $\lambda_2 < \mu_2$ выполнено $\alpha > 0$, $\beta > 0$. След и определитель M :

$$\text{Tr } M = -\mu_1 \alpha < 0, \quad \det M = \lambda_1 \alpha \mu_2 \beta > 0,$$

что гарантирует локальную устойчивость бездиффузионной системы в каждой точке.

После подстановки пространственной моды $\sim e^{ikx}$ и учета диффузии возникает модифицированная матрица Якоби

$$J_{\text{diff}}(x_0) = p(x_0)M - \varepsilon k^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \gamma \end{pmatrix}.$$

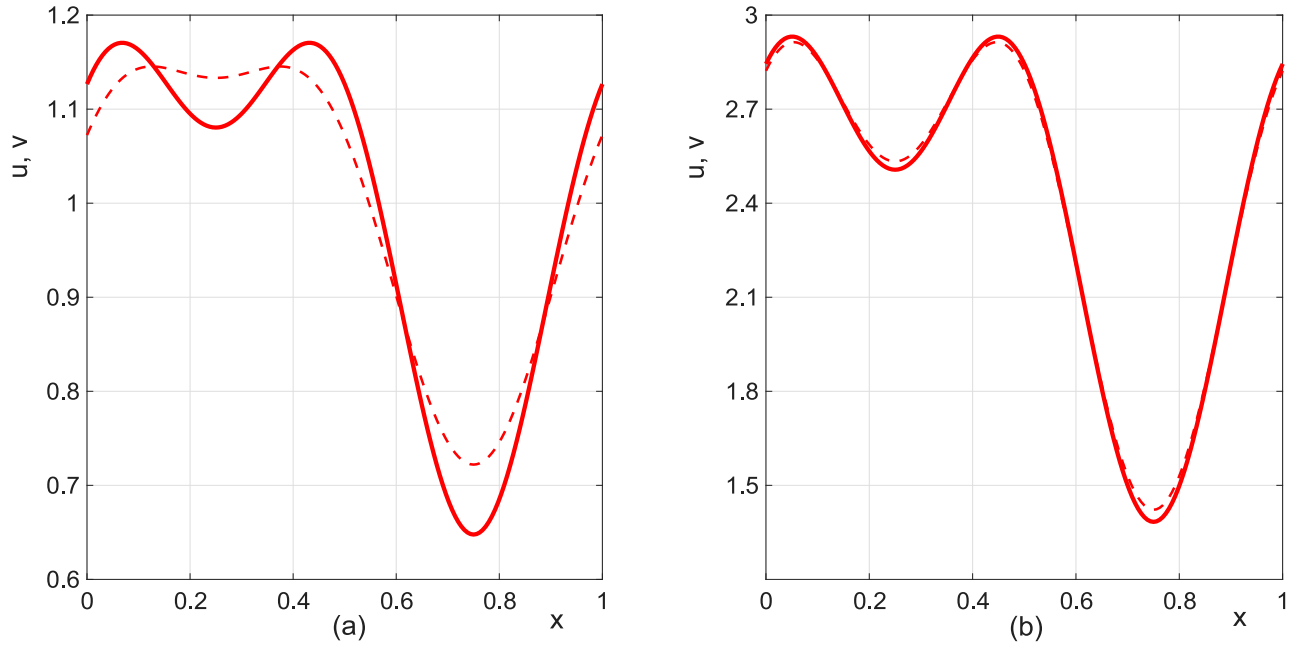


РИС. 5. Сравнение асимптотических приближений (пунктирные линии) с численным расчетом (сплошные) при $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\varepsilon = 0,00075$, $\gamma = 1$ для случаев: (а) $\lambda_2 = 1,75$ и (б) $\lambda_2 = 1,4$.

FIG. 5. Comparison of asymptotic approximations (dashed lines) with numerical calculation (solid lines) for $\mu_1 = 4$, $\mu_2 = 2$, $\lambda_1 = 1$, $\varepsilon = 0.00075$, $\gamma = 1$ for the cases: (а) $\lambda_2 = 1.75$ and (б) $\lambda_2 = 1.4$.

Ее след

$$\text{Tr } J_{\text{diff}} = -p(x_0)\mu_1\alpha - \varepsilon k^2(1 + \gamma) < 0$$

всегда отрицателен. Рассмотрим определитель как функцию $M = \varepsilon k^2 \geq 0$:

$$\det J_{\text{diff}}(M; x_0) = \gamma M^2 + \gamma p(x_0)\mu_1\alpha M + p^2(x_0) \det M.$$

Как и ранее, это парабола с ветвями вверх, вершина которой $M_v = -\frac{1}{2}p(x_0)\mu_1\alpha < 0$. Следовательно, на интервале $M \geq 0$ определитель монотонно возрастает, а его минимум достигается в длинноволновом пределе $M = 0$:

$$\det J_{\text{diff}}(0; x_0) = p^2(x_0) \det M > 0.$$

Таким образом, $\det J_{\text{diff}} > 0$ для всех $k \geq 0$ и любых x_0 . Диффузионная неустойчивость (эффект Тьюринга) невозможна ни при каком $\gamma > 0$, а условие $\lambda_2 < \mu_2$ является достаточным для устойчивости полной системы диффузии–реакции с неоднородным ресурсом.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В силу большой вычислительной сложности многие задачи для систем популяционной динамики, описываемые уравнениями диффузии–реакции (УДР), требуют значительных вычислительных затрат. Вместе с тем системы такого рода встречаются в природе достаточно часто, а сами УДР являются универсальной математической моделью для описания разнообразных процессов, где есть перенос вещества и его химическое (или биологическое) превращение. Одной из альтернатив прямому численному моделированию является использование приближенных асимптотических решений УДР.

В работе развит подход асимптотических приближений к стационарным решениям для двух классов систем диффузии–реакции: пары конкурирующих видов и системы «хищник–жертва», в которых реализуется идеальное свободное распределение (ИСП). Показано, что введение малой

и разномасштабной диффузии приводит к отклонению распределений от ИСР, причем характер поправок определяется как параметрами межвидового взаимодействия, так и отношением коэффициентов диффузии.

Полученные асимптотические формулы (3.2) и (4.3) содержат ключевое слагаемое, пропорциональное отношению $p''(x)/p(x)$. Данному отношению можно дать ясную геометрическую интерпретацию: оно характеризует локальную относительную кривизну профиля функции ресурса, являясь нормированной на значение самого ресурса мерой его выпуклости или вогнутости. В экологическом контексте эта величина велика в окрестности узких пиков и мала на пологих участках ареала. С физической точки зрения, появление $p''(x)$ в решении отражает фундаментальный баланс между диффузионным потоком и локальным воспроизводством: в точках, где профиль ресурса имеет положительную кривизну (впадины), диффузия «наполняет» популяцию, увеличивая ее плотность относительно пропорционального ресурсу распределения; напротив, в областях отрицательной кривизны (пики) диффузия «растаскивает» особей, уменьшая плотность.

Для того чтобы асимптотическое разложение сохраняло количественную точность, диффузионные поправки должны оставаться малыми по сравнению с главным членом $O(p(x))$. Это приводит к естественному условию

$$\varepsilon \cdot \max_{x \in [0,1]} \left| \frac{p''(x)}{p(x)} \right| \ll 1. \quad (5.1)$$

Если характерная величина $|p''/p|$ имеет порядок единицы, малость ε автоматически гарантирует выполнение (5.1). Однако для функций ресурса с резкими пиками, например, $p(x) \sim \exp(-x^2/\sigma^2)$ при $\sigma \ll 1$, значение $|p''/p|$ может достигать $O(\sigma^{-2})$, и для сохранения точности требуется дополнительное ограничение $\varepsilon \ll \sigma^2$.

В настоящей работе в качестве модельной использовалась гладкая периодическая функция ресурса

$$p(x) = 2 + \frac{1}{2} \sin(2\pi x) + \frac{1}{2} \cos(4\pi x).$$

Для нее вторая производная и искомое отношение принимают вид

$$p''(x) = -2\pi^2 (\sin(2\pi x) + 4 \cos(4\pi x)), \quad \frac{p''(x)}{p(x)} = \frac{-2\pi^2 (\sin(2\pi x) + 4 \cos(4\pi x))}{2 + 0,5 \sin(2\pi x) + 0,5 \cos(4\pi x)}.$$

Максимальное абсолютное значение этого отношения на отрезке $[0, 1]$ достигается в точках, где одновременно $\sin(2\pi x) = -1$ и $\cos(4\pi x) = -1$, и составляет

$$\max_{x \in [0,1]} \left| \frac{p''(x)}{p(x)} \right| = 10\pi^2 \approx 98,7.$$

При типичных значениях $\varepsilon = 0,001 \div 0,002$, использованных в расчетах, произведение $\varepsilon \max |p''/p|$ находится в диапазоне $0,099 \div 0,197$, что обеспечивает приемлемую точность асимптотики. Численные сравнения на рис. 2 полностью подтверждают этот вывод: для $\varepsilon \leq 0,002$ асимптотическое приближение хорошо согласуется с численным решением; заметные расхождения возникают лишь при $\varepsilon \geq 0,005$, когда указанное произведение приближается к 0,49.

Таким образом, условие (5.1) позволяет провести простую априорную оценку пригодности асимптотики для любого конкретного профиля ресурса, не прибегая к полномасштабному численному счету. Предложенный в работе подход и полученные аналитические формулы могут быть распространены на более сложные многомерные модели популяционной динамики с пространственно-неоднородными параметрами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Базыкин А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. — М.—Ижевск: Инст. комп. иссл., 2003.
2. Будянский А. В., Цибулин В. Г. Моделирование динамики популяций на неоднородном ареале: инвазия и мультистабильность // Биофизика. — 2022. — 67, № 1. — С. 174–182. — DOI: [10.31857/S0006302922010197](https://doi.org/10.31857/S0006302922010197).
3. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высш. шк., 1990.

4. Генри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985.
5. Зайцева М. Ф., Магницкий Н. А. Пространственно-временной хаос в одной системе уравнений типа реакция—диффузия // Дифф. уравн. — 2017. — 53, № 11. — С. 1550–1554. — DOI: [10.1134/S0374064117110152](https://doi.org/10.1134/S0374064117110152).
6. Зеленчук П. А., Нгуен Х. Б., Цибулин В. Г. Свидетельство о государственной регистрации программы для ЭВМ № 2025680157, Российская Федерация. Программа SPECIES-25 для анализа систем популяционной динамики: заявл. 27.06.2025; опубл. 04.08.2025. — заявитель федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Южный федеральный университет», 2025.
7. Косов А. А., Семенов Э. И., Турских В. В. О многомерных точных решениях одной нелинейной системы реакции—диффузии // Вестн. Удмурт. унив. Мат. Мех. Комп. науки. — 2023. — 33, № 2. — С. 225–239. — DOI: [10.35634/vm230203](https://doi.org/10.35634/vm230203).
8. Лебедев Е. Б., Левенец И. Р. Фауна и распространение брюхоногих и двустворчатых моллюсков (Mollusca: Gastropoda, Bivalvia) на литорали Дальневосточного морского биосферного заповедника (залив Петра Великого, Японское море) // Юг России: экол., разв. — 2019. — 14, № 1. — С. 26–41. — DOI: [10.18470/1992-1098-2019-1-26-41](https://doi.org/10.18470/1992-1098-2019-1-26-41).
9. Марчук Г. И. Избранные труды. Т. 4. Математическое моделирование в иммунологии и медицине. — М.: РАН, 2018.
10. Полтараха О. П. К фауне усоногих раков (Cirripedia, Thoracica) прибрежных вод Южного Вьетнама // Бюлл. Моск. об-ва испыт. природы. Отд. биол. — 2013. — 118, № 1. — С. 21–32.
11. Ризниченко Г. Ю. Математическое моделирование биологических процессов. Модели в биофизике и экологии: учебное пособие для бакалавриата и магистратуры. — М.: Юрайт, 2019.
12. Самарский А. А., Галактионов В. А., Курдюмов С. П., Михайлов А. П. Нестационарные структуры и диффузионный хаос. — М.: Наука, 1992.
13. Arrarás A., Gaspar F. J., Jimenez-Ciga I., Portero L. Space-time parallel solvers for reaction-diffusion problems forming Turing patterns // Appl. Numer. Math. — 2025. — 218. — С. 91–108. — DOI: [10.1016/j.apnum.2025.07.012](https://doi.org/10.1016/j.apnum.2025.07.012).
14. Bánsági T., Vanag V. K., Epstein I. R. Tomography of reaction-diffusion microemulsions reveals three-dimensional Turing patterns // Science. — 2011. — 331. — С. 1309–1312. — DOI: [10.1126/science.1200815](https://doi.org/10.1126/science.1200815).
15. Bjørnstad O. N., Ims R. A., Lambin X. Spatial population dynamics: analyzing patterns and processes of population synchrony // Trends Ecol. Evol. — 1999. — 14, № 11. — С. 427–432. — DOI: [10.1016/S0169-5347\(99\)01677-8](https://doi.org/10.1016/S0169-5347(99)01677-8).
16. Cantrell R. S., Cosner C. Spatial ecology via reaction-diffusion equations. — Chichester: John Wiley & Sons, 2003. — DOI: [10.1002/0470871296](https://doi.org/10.1002/0470871296).
17. Cantrell R. S., Cosner C. Ideal free dispersal in a predator-prey system // Numer. Algebra Control Optim. — 2026. — 16, № 2. — С. 198–217. — DOI: [10.3934/naco.2025018](https://doi.org/10.3934/naco.2025018).
18. Cantrell R. S., Cosner C., DeAngelis D. L., Padron V. The ideal free distribution as an evolutionarily stable strategy // J. Biol. Dynam. — 2007. — 1, № 3. — С. 249–271. — DOI: [10.1080/17513750701450227](https://doi.org/10.1080/17513750701450227).
19. Ha T. D., Tsybulin V. G., Zelenchuk P. A. How to model the local interaction in the predator-prey system at slow diffusion in a heterogeneous environment? // Ecol. Complex. — 2022. — 53. — 101026. — DOI: [10.1016/j.ecocom.2022.101026](https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2022.101026).
20. Keeling M. J., Rohani P. Modeling infectious diseases in humans and animals. — Princeton: Princeton Univ. Press, 2008. — DOI: [10.1515/9781400841035](https://doi.org/10.1515/9781400841035).
21. Keener J. P., Sneyd J. Mathematical physiology. — New York: Springer, 1998. — DOI: [10.1007/b98841](https://doi.org/10.1007/b98841).
22. Krivan V. The ideal free distribution in temporally varying environments // J. Theor. Biol. — 2026. — 629. — 112490. — DOI: [10.1016/j.jtbi.2026.112490](https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2026.112490).
23. Lacalli T. C. Patterning, from confers to consciousness: Turing's theory and order from fluctuations // Front. Cell Develop. Biol. — 2022. — 10. — 871950. — DOI: [10.3389/fcell.2022.871950](https://doi.org/10.3389/fcell.2022.871950).
24. Lin J., Andreasen V., Casagrandi R., Levin S. A. Traveling waves in a model of influenza A drift // J. Theor. Biol. — 2003. — 222, № 4. — С. 437–445. — DOI: [10.1016/S0022-5193\(03\)00056-0](https://doi.org/10.1016/S0022-5193(03)00056-0).
25. Murray J. D. Mathematical biology II: Spatial models and biomedical applications. — New York: Springer, 2003. — DOI: [10.1007/b98869](https://doi.org/10.1007/b98869).
26. Nayfeh A. H. Perturbation methods. — New York: John Wiley & Sons., 2000. — DOI: [10.1002/9783527617609](https://doi.org/10.1002/9783527617609).
27. Ouchdiri M. A., Benjelloun S., Saoud A., Otero-Muras I. Turing patterns in a morphogenetic model with single regulatory function // Math. Biosci. — 2025. — 389. — 109536. — DOI: [10.1016/j.mbs.2025.109536](https://doi.org/10.1016/j.mbs.2025.109536).
28. Revina S. V. Diffusion instability domains for systems of parabolic equations // Sib. Math. J. — 2024. — 65, № 2. — С. 487–494. — DOI: [10.1134/S0037446624020216](https://doi.org/10.1134/S0037446624020216).

29. *Shigesada N., Kawasaki K.* Biological invasions: Theory and practice. — Oxford: Oxford Univ. Press, 1977.
30. *Tsybulin V. G., Ha T. D., Zelenchuk P. A.* Nonlinear dynamics of the predator–prey system in a heterogeneous habitat and scenarios of local interaction of species // *Izv. VUZ. Appl. Nonlin. Dynam.* — 2021. — 29, № 5. — С. 751–764. — DOI: [10.18500/0869-6632-2021-29-5-751-764](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-5-751-764).
31. *Tsybulin V., Zelenchuk P.* Predator–prey dynamics and ideal free distribution in a heterogeneous environment // *Mathematics.* — 2024. — 12, № 2. — С. 275. — DOI: [10.3390/math12020275](https://doi.org/10.3390/math12020275).
32. *Turing A. M.* The chemical basis of morphogenesis // *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. B. Biol. Sci.* — 1952. — 237. — С. 37–72. — DOI: [10.1098/rstb.1952.0012](https://doi.org/10.1098/rstb.1952.0012).
33. *Tyutyunov Yu. V., Govorukhin V. N., Tsybulin V. G.* Modeling study of factors determining efficacy of biological control of adventive weeds // *Mathematics.* — 2024. — 12, № 1. — 160. — DOI: [10.3390/math12010160](https://doi.org/10.3390/math12010160).
34. *Volpert V.* Elliptic partial differential equations. Vol. 2: Reaction–diffusion equations. — Basel: Birkhäuser, 2014. — DOI: [10.1007/978-3-0348-0813-2](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0813-2).
35. *Volpert V., Petrovskii S.* Reaction–diffusion waves in biology: new trends, recent developments // *Phys. Life Rev.* — 2025. — 52. — С. 1–20. — DOI: [10.1016/j.plrev.2024.11.007](https://doi.org/10.1016/j.plrev.2024.11.007).
36. *Zelenchuk P. A.* A Predator–prey system with ideal free distribution in a two-dimensional ring habitat // *Math. Biol. Bioinform.* — 2025. — 20, № 1. — С. 83–99. — DOI: [10.17537/2025.20.83](https://doi.org/10.17537/2025.20.83).
37. *Zelenchuk P.* Mathematical model of evolutionary stable strategy for population under conditions of competition in a heterogeneous habitat // *Russ. J. Biomech.* — 2025. — 29, № 2. — С. 27–38. — DOI: [10.15593/rjbiomech/2025.2.03](https://doi.org/10.15593/rjbiomech/2025.2.03).
38. *Zelenchuk P. A.* Ideal free distribution in the predator–prey model with the Allee effect // *Russ. J. Biomech.* — 2026. — 30, № 1. — С. 144–150. — DOI: [10.15593/RJBiomech/2026.1.14](https://doi.org/10.15593/RJBiomech/2026.1.14).
39. *Zelenchuk P. A., Tsybulin V. G.* The ideal free distribution in a predator–prey model with multifactor taxis // *Biophys.* — 2021. — 66, № 3. — С. 464–471. — DOI: [10.1134/S0006350921030246](https://doi.org/10.1134/S0006350921030246).
40. *Zelenchuk P. A., Tsybulin V. G.* Mathematical model of ideal free distribution in the predator–prey system // *J. Math. Sci. (N. Y.).* — 2024. — 285, № 3. — С. 328–338. — DOI: [10.1007/s10958-024-07445-x](https://doi.org/10.1007/s10958-024-07445-x).
41. *Zelenchuk P. A., Tsybulin V. G.* Modelling of evolutionary strategies of interacting populations in a heterogeneous habitat // *J. Math. Sci. (N. Y.).* — 2026. — 299, № 2. — С. 137–148. — DOI: [10.1007/s10958-026-08410-6](https://doi.org/10.1007/s10958-026-08410-6).

П. А. Зеленчук

Научно-технологический университет «Сириус», Федеральная территория «Сириус», Россия

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: zelenchuk@sfedu.ru, ПИНЦ SPIN-код: 4836-9453, ПИНЦ AuthorID: [1092911](https://orcid.org/1092911), ResearcherID: [HKF-7189-2023](https://orcid.org/HKF-7189-2023), Scopus: [57233847500](https://orcid.org/57233847500), ORCID: [0000-0001-6598-8521](https://orcid.org/0000-0001-6598-8521)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-282-296](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-282-296)
 EDN: [BACWVC](#)

UDC 517.956.4:517.928
Research article

Asymptotics of stationary distributions in diffusion–reaction systems for two interacting biological species

P. A. Zelenchuk

Sirius University of Science and Technology, Sirius Federal Territory, Russia
Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

Abstract. Asymptotic approximations to stationary solutions are constructed for two classes of diffusion–reaction systems describing the interactions of biological species (competition and predator–prey) in a heterogeneous habitat. The initial models are supplemented with periodicity conditions on a one-dimensional area; the diffusion coefficients are assumed to be small and, generally speaking, multi-scale. Under the assumption that the degenerate system admits a solution in the form of an ideal free distribution (IFD), methods of singular perturbation theory are used to obtain explicit analytical formulas for the leading terms of the asymptotics. It is established that diffusion corrections to the IFD are proportional to the local curvature of the resource profile $p''(x)/p(x)$ and are determined by both the parameters of interspecies interaction and the ratio of the diffusion coefficients. For a predator–prey system, it is shown that resource heterogeneity significantly influences the predator distribution, while the prey distribution remains close to the IFD even at relatively high diffusion values. A quantitative criterion for the applicability of the asymptotic model is formulated, allowing for an a priori assessment of its accuracy for an arbitrary resource profile. The reliability of the analytical results is confirmed by numerical calculations.

Keywords: asymptotics of the solution, stationary distribution, diffusion–reaction equations, competition, predator–prey, ideal free distribution.

Conflict-of-interest. The author declares no conflict of interest.

Acknowledgments and funding. The author expresses his gratitude to all participants of the N. D. Kopachevsky Crimean Autumn Mathematical School-Symposium (KROMSH-2025) for their interest in this work, as well as to Galina Alekseevna Kurina for helpful comments. The author is grateful to an anonymous reviewer, whose detailed comments facilitated a thorough revision of the material and a more precise focus of the work. This research was conducted at the Sirius University of Science and Technology with financial support from the Russian Science Foundation, grant No. 25-21-00419.

For citation: P. A. Zelenchuk, “Asymptotics of stationary distributions in diffusion–reaction systems for two interacting biological species,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 2, 282–296. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-282-296](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-282-296) EDN: [BACWVC](#)

REFERENCES

1. A. D. Bazykin, *Nelineynaya Dinamika Vzaimodeystviyushchikh Populyatsiy* [Nonlinear Dynamics of Interacting Populations], Inst. Komp. Issl., Moscow–Izhevsk, 2003 (in Russian).
2. A. V. Budyanskii and V. G. Tsibulin, “Modelirovanie dinamiki populyatsiy na neodnorodnom areale: invaziya i mul'tistabil'nost'” [Modeling population dynamics in a heterogeneous habitat: invasion and multistability], *Biofizika* [Biophysics], 2022, **67**, No. 1, 174–182 (in Russian), DOI: [10.31857/S0006302922010197](https://doi.org/10.31857/S0006302922010197).
3. A. B. Vasil'eva and V. F. Butuzov, *Asimptoticheskie Metody v Teorii Singulyarnykh Vozmushcheniy* [Asymptotic Methods in Singular Perturbation Theory], Vyssh. Shk., Moscow, 1990 (in Russian).



4. D. Henry, *Geometricheskaya Teoriya Polulineynykh Parabolicheskikh Uravneniy* [Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations], Mir, Moscow, 1985 (Russian translation).
5. M. F. Zaytseva and N. A. Magnitskii, “Prostranstvenno-vremennoy khaos v odnoy sisteme uravneniy tipa reaktsiya–diffuziya” [Spatio-temporal chaos in a system of reaction–diffusion equations], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 2017, **53**, No. 11, 1550–1554 (in Russian), DOI: [10.1134/S0374064117110152](https://doi.org/10.1134/S0374064117110152).
6. P. A. Zelenchuk, Kh. B. Nguen, and V. G. Tsibulin, *Certificate of State Registration of Computer Software No. 2025680157*, Russian Federation, “SPECIES-25 program for the analysis of population dynamics systems,” appl. Jun. 27, 2025; publ. Aug. 04, 2025. Applicant: Fed. State Autonomous Edu. Inst. of Higher Edu. Southern Fed. Univ., 2025.
7. A. A. Kosov, E. I. Semenov, and V. V. Tirsikh, “O mnogomernykh tochnykh resheniyakh odnoy nelineynoy sistemy reaktsii–diffuzii” [On multidimensional exact solutions of a nonlinear reaction–diffusion system], *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki* [Bull. Udmurt. Univ. Math. Mech. Comp. Sci.], 2023, **33**, No. 2, 225–239 (in Russian), DOI: [10.35634/vm230203](https://doi.org/10.35634/vm230203).
8. E. B. Lebedev and I. R. Levenets, “Fauna i rasprostranenie bryukhonogikh i dvustvorchatykh mollyuskov (Mollusca: Gastropoda, Bivalvia) na litorali Dal’nevostochnogo morskogo biosfernogo zapovednika (zaliv Petra Velikogo, Yaponskoe more)” [Fauna and distribution of gastropods and bivalves (Mollusca: Gastropoda, Bivalvia) in the littoral zone of the Far Eastern Marine Biosphere Reserve (Peter the Great Bay, Sea of Japan)], *Yug Rossii: Ekol., Razv.* [Russ. South. Ecol. Develop.], 2019, **14**, No. 1, 26–41 (in Russian), DOI: [10.18470/1992-1098-2019-1-26-41](https://doi.org/10.18470/1992-1098-2019-1-26-41).
9. G. I. Marchuk, *Izbrannyye Trudy. T. 4. Matematicheskoe Modelirovanie v Immunologii i Meditsine* [Selected Works. Vol. 4. Mathematical Modeling in Immunology and Medicine], Russ. Acad. Sci., Moscow, 2018 (in Russian).
10. O. P. Poltarukha, “K faune usonogikh rakov (Cirripedia, Thoracica) pribrezhnykh vod Yuzhnogo V’etnama” [On the fauna of barnacles (Cirripedia, Thoracica) of the coastal waters of South Vietnam], *Byull. Mosk. Ob-va Ispyt. Prirody. Otd. Biol.* [Bull. Moscow Soc. Naturalists Dep. Biol.], 2013, **118**, No. 1, 21–32 (in Russian).
11. G. Yu. Riznichenko, *Matematicheskoe Modelirovanie Biologicheskikh Protsessov. Modeli v Biofizike i Ekologii: Uchebnoe Posobie dlya Bakalavriata i Magistratury* [Mathematical Modeling of Biological Processes. Models in Biophysics and Ecology: A Textbook for Undergraduate and Graduate Students], Yurayt, Moscow, 2019 (in Russian).
12. A. A. Samarskii, V. A. Galaktionov, S. P. Kurdyumov, and A. P. Mikhaylov, *Nestatsionarnye Struktury i Diffuzionnyy Khaos* [Nonstationary Structures and Diffusion Chaos], Nauka, Moscow, 1992 (in Russian).
13. A. Arrarás, F. J. Gaspar, I. Jimenez-Ciga, and L. Portero, “Space-time parallel solvers for reaction-diffusion problems forming Turing patterns,” *Appl. Numer. Math.*, 2025, **218**, 91–108, DOI: [10.1016/j.apnum.2025.07.012](https://doi.org/10.1016/j.apnum.2025.07.012).
14. T. Bánsági, V. K. Vanag, and I. R. Epstein, “Tomography of reaction–diffusion microemulsions reveals three-dimensional Turing patterns,” *Science*, 2011, **331**, 1309–1312, DOI: [10.1126/science.1200815](https://doi.org/10.1126/science.1200815).
15. O. N. Bjørnstad, R. A. Ims, X. Lambin, “Spatial population dynamics: analyzing patterns and processes of population synchrony,” *Trends Ecol. Evol.*, 1999, **14**, No. 11, 427–432, DOI: [10.1016/S0169-5347\(99\)01677-8](https://doi.org/10.1016/S0169-5347(99)01677-8).
16. R. S. Cantrell and C. Cosner, *Spatial Ecology via Reaction–Diffusion Equations*, John Wiley & Sons, Chichester, 2003, DOI: [10.1002/0470871296](https://doi.org/10.1002/0470871296).
17. R. S. Cantrell and C. Cosner, “Ideal free dispersal in a predator–prey system,” *Numer. Algebra Control Optim.*, 2026, **16**, No. 2, 198–217, DOI: [10.3934/naco.2025018](https://doi.org/10.3934/naco.2025018).
18. R. S. Cantrell, C. Cosner, D. L. DeAngelis, and V. Padron, “The ideal free distribution as an evolutionarily stable strategy,” *J. Biol. Dynam.*, 2007, **1**, No. 3, 249–271, DOI: [10.1080/17513750701450227](https://doi.org/10.1080/17513750701450227).
19. T. D. Ha, V. G. Tsybulin, and P. A. Zelenchuk, “How to model the local interaction in the predator–prey system at slow diffusion in a heterogeneous environment?,” *Ecol. Complex.*, 2022, **53**, 101026, DOI: [10.1016/j.ecocom.2022.101026](https://doi.org/10.1016/j.ecocom.2022.101026).
20. M. J. Keeling and P. Rohani, *Modeling Infectious Diseases in Humans and Animals*, Princeton Univ. Press, Princeton, 2008, DOI: [10.1515/9781400841035](https://doi.org/10.1515/9781400841035).
21. J. P. Keener and J. Sneyd, *Mathematical physiology*, Springer, New York, 1998, DOI: [10.1007/b98841](https://doi.org/10.1007/b98841).
22. V. Křivan, “The ideal free distribution in temporally varying environments,” *J. Theor. Biol.*, 2026, **629**, 112490, DOI: [10.1016/j.jtbi.2026.112490](https://doi.org/10.1016/j.jtbi.2026.112490).
23. T. C. Lacalli, “Patterning, from conifers to consciousness: Turing’s theory and order from fluctuations,” *Front. Cell Develop. Biol.*, 2022, **10**, 871950, DOI: [10.3389/fcell.2022.871950](https://doi.org/10.3389/fcell.2022.871950).
24. J. Lin, V. Andreassen, R. Casagrandi, and S. A. Levin, “Traveling waves in a model of influenza A drift,” *J. Theor. Biol.*, 2003, **222**, No. 4, 437–445, DOI: [10.1016/S0022-5193\(03\)00056-0](https://doi.org/10.1016/S0022-5193(03)00056-0).

25. J. D. Murray, *Mathematical Biology II: Spatial Models and Biomedical Applications*, Springer, New York, 2003, DOI: [10.1007/b98869](https://doi.org/10.1007/b98869).
26. A. H. Nayfeh, *Perturbation Methods*, John Wiley & Sons., New York, 2000, DOI: [10.1002/9783527617609](https://doi.org/10.1002/9783527617609).
27. M. Ouchdiri, A., S. Benjelloun, A. Saoud, I. Otero-Muras, “Turing patterns in a morphogenetic model with single regulatory function,” *Math. Biosci.*, 2025, **389**, 109536, DOI: [10.1016/j.mbs.2025.109536](https://doi.org/10.1016/j.mbs.2025.109536).
28. S. V. Revina, “Diffusion instability domains for systems of parabolic equations,” *Sib. Math. J.*, 2024, **65**, No. 2, 487–494, DOI: [10.1134/S0037446624020216](https://doi.org/10.1134/S0037446624020216).
29. N. Shigesada and K. Kawasaki, *Biological invasions: Theory and practice*, Oxford Univ. Press, Oxford, 1977.
30. V. G. Tsybulin, T. D. Ha, and P. A. Zelenchuk, “Nonlinear dynamics of the predator–prey system in a heterogeneous habitat and scenarios of local interaction of species,” *Izv. VUZ. Appl. Nonlin. Dynam.*, 2021, **29**, No. 5, 751–764, DOI: [10.18500/0869-6632-2021-29-5-751-764](https://doi.org/10.18500/0869-6632-2021-29-5-751-764).
31. V. Tsybulin and P. Zelenchuk, “Predator–prey dynamics and ideal free distribution in a heterogeneous environment,” *Mathematics*, 2024, **12**, No. 2, 275, DOI: [10.3390/math12020275](https://doi.org/10.3390/math12020275).
32. A. M. Turing, “The chemical basis of morphogenesis,” *Philos. Trans. R. Soc. Lond. Ser. B. Biol. Sci.*, 1952, **237**, 37–72, DOI: [10.1098/rstb.1952.0012](https://doi.org/10.1098/rstb.1952.0012).
33. Yu. V. Tyutyunov, V. N. Govorukhin, and V. G. Tsybulin, “Modeling study of factors determining efficacy of biological control of adventive weeds,” *Mathematics*, 2024, **12**, No. 1, 160, DOI: [10.3390/math12010160](https://doi.org/10.3390/math12010160).
34. V. Volpert, *Elliptic Partial Differential Equations. Vol. 2: Reaction–Diffusion Equations*, Birkhäuser, Basel, 2014, DOI: [10.1007/978-3-0348-0813-2](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-0813-2).
35. V. Volpert and S. Petrovskii, “Reaction–diffusion waves in biology: new trends, recent developments,” *Phys. Life Rev.*, 2025, **52**, 1–20, DOI: [10.1016/j.plprev.2024.11.007](https://doi.org/10.1016/j.plprev.2024.11.007).
36. P. A. Zelenchuk, “A Predator–prey system with ideal free distribution in a two-dimensional ring habitat,” *Math. Biol. Bioinform.*, 2025, **20**, No. 1, 83–99, DOI: [10.17537/2025.20.83](https://doi.org/10.17537/2025.20.83).
37. P. Zelenchuk, “Mathematical model of evolutionary stable strategy for population under conditions of competition in a heterogeneous habitat,” *Russ. J. Biomech.*, 2025, **29**, No. 2, 27–38, DOI: [10.15593/rjbiomech/2025.2.03](https://doi.org/10.15593/rjbiomech/2025.2.03).
38. P. A. Zelenchuk, “Ideal free distribution in the predator–prey model with the Allee effect,” *Russ. J. Biomech.*, 2026, **30**, No. 1, 144–150, DOI: [10.15593/RJBiomech/2026.1.14](https://doi.org/10.15593/RJBiomech/2026.1.14).
39. P. A. Zelenchuk and V. G. Tsybulin, “The ideal free distribution in a predator–prey model with multifactor taxis,” *Biophys.*, 2021, **66**, No. 3, 464–471, DOI: [10.1134/S0006350921030246](https://doi.org/10.1134/S0006350921030246).
40. P. A. Zelenchuk and V. G. Tsybulin, “Mathematical model of ideal free distribution in the predator–prey system,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2024, **285**, No. 3, 328–338, DOI: [10.1007/s10958-024-07445-x](https://doi.org/10.1007/s10958-024-07445-x).
41. P. A. Zelenchuk and V. G. Tsybulin, “Modelling of evolutionary strategies of interacting populations in a heterogeneous habitat,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2026, **299**, No. 2, 137–148, DOI: [10.1007/s10958-026-08410-6](https://doi.org/10.1007/s10958-026-08410-6).

P. A. Zelenchuk

Sirius University of Science and Technology, Sirius Federal Territory, Russia

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

E-mail: zelenchuk@sfedu.ru, eLIBRARY SPIN-code: 4836-9453, eLIBRARY AuthorID: [1092911](https://elibrary.ru/1092911),
ResearcherID: [HKF-7189-2023](https://orcid.org/0000-0001-6598-8521), Scopus: [57233847500](https://orcid.org/57233847500), ORCID: [0000-0001-6598-8521](https://orcid.org/0000-0001-6598-8521)

ОСЦИЛЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА СПЕКТРА ОПЕРАТОРА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА НА ГРАФЕ-КРЕСТЕ

Р. Ч. КУЛАЕВ^{1,2}, В. А. ЕЛОЕВА^{1,2}

¹Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, Владикавказ, Россия

²Южный математический институт ВЦ РАН, Владикавказ, Россия

Аннотация. Исследуются осцилляционные свойства спектра задачи о собственных колебаниях стержневой системы в форме креста. Модель сводится к краевой задаче четвертого порядка на графе с условиями жесткой спайки стержней. Предложен метод редукции исходной задачи к многоточечной краевой задаче на выделенном маршруте, что позволяет интерпретировать систему как упруго подпертый стержень. Дается обоснование данного метода и формулируется условие осцилляционности спектра.

Ключевые слова: уравнение на графе, функция Грина, осцилляционность спектра, уравнение стержня.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2026-1324.

Вклад авторов. Кулаев Р. Ч. — научное руководство, формулирование идеи, гипотезы, цели исследования, разработка методов и процедур, доработка текста, организационное управление. Елоева В. А. — написание первоначального текста статьи, проверка результатов, редактирование, доработка текста.

Для цитирования: Кулаев Р. Ч., Елоева В. А. Осцилляционные свойства спектра оператора четвертого порядка на графе-кресте // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 2. С. 297–308. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-297-308](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-297-308) EDN: [BWQXD](https://www.edn.ru/BWQXD)

1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей работе устанавливаются осцилляционные свойства спектра краевой задачи о собственных колебаниях плоской стержневой системы, состоящей из четырех стержней, жестко спаянных в форме креста. Такая модель сводится к краевой задаче четвертого порядка на плоском графе-кресте, состоящем из двух пересекающихся под прямым углом интервалов.

Осцилляционным спектральным свойствам дифференциальных операторов (вещественность, положительность и простота точек спектра, перемежаемость нулей собственных функций и др.) посвящена значительная литература (см. [2, 7, 8, 14, 16, 17] и библиографию там же).

Для упругой балки осцилляционные свойства собственных частот были строго обоснованы в 30-х годах XX века (см. [3]). Идеология, развитая в [3], основана на фундаментальном результате Келлога об осцилляционных ядрах (функциях Грина). Эта теория послужила основой для переноса результатов Штурма на более широкие классы задач и привела к теории колебаний математических моделей сложных упругих систем, таких как цепочки балок [5, 14]. Однако попытка непосредственного использования классической теории в случае ветвящихся структур (задачи

на графах) обнаружила ее неприменимость и потребовала поиска принципиально иных методов. Группой воронежских математиков был разработан совершенно иной подход к изучению качественных свойств решений уравнения Штурма—Лиувилля на графе. Этот подход учитывает геометрию графа и приводит к понятию зоны знакопостоянства (S -зоны) функций на графе [6, 7]. Концепция S -зоны позволила обобщить смысл интервала между нулями и установить точный аналог теорем сравнения Штурма, понятия неосцилляции и осцилляционной спектральной теоремы для уравнения второго порядка на графе [6, 17].

Успех качественной теории для операторов второго порядка закономерно поставил вопрос о ее распространении на более сложные объекты — дифференциальные операторы четвертого порядка на графах. Однако, как отмечено в [2, 8, 14, 15], задача исследования их собственных функций значительно сложнее. В силу этих трудностей уравнения четвертого порядка на сетях изучены существенно меньше. Тем не менее, для одного важного класса задач — модели стержневой системы с условиями упруго-шарнирного соединения — в работах [15, 16] был предложен новый подход. Опираясь на понятие кратной зоны знакопостоянства (обобщающее S -зону на случай высших порядков), авторам удалось показать, что в терминах кратных S -зон для оператора четвертого порядка можно определить понятие неосцилляции и сформулировать условия при которых он наследует осцилляционные свойства оператора Штурма—Лиувилля.

Следует подчеркнуть, что условия связи в узловых вершинах графа играют принципиальную роль при изучении вопросов распределения нулей, знакопостоянства и монотонности решений. Подход, использованный в работах [15, 16], опирается на специфические свойства условий согласования и не может быть использован для других условий.

В данной работе исследуется краевая задача четвертого порядка на графе типа «крест» с условиями трансмиссии жесткого типа [4, 10]. Поскольку прямое применение методов, развитых в [15, 16], в данном случае невозможно, то возникает необходимость разработки нового подхода. Предлагаемый метод основан на редукции исходной задачи. Его ключевая идея заключается в том, что краевая задача на графе может быть сведена к задаче со специальными условиями на более узком подмножестве (маршруте) при условии, что правая часть дифференциального уравнения обращается в нуль на дополнительном подграфе. Такая ситуация физически интерпретируется как возможность воздействия на систему и наблюдения за ней лишь на некоторой ее части. Если нагрузка сосредоточена исключительно на выбранном маршруте, задача допускает скаляризацию и сводится к многоточечной задаче на этом маршруте. При этом влияние каждого примыкающего ребра моделируется условием упругой опоры, что в итоге приводит к задаче об изгибе упруго подпертого стержня. Указанная аналогия позволяет применить результаты работы [14] для анализа осцилляционных свойств спектра исходной задачи на графе. Более того, предложенный метод редукции открывает возможность для детального исследования функции Грина: структура редуцированной задачи позволяет изучать ее знакопостоянство и другие качественные характеристики, определяющие осцилляционные свойства системы.

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

В данной статье мы используем терминологию и обозначения монографии [7] и работ [13, 16].

Рассматривается плоский граф-крест Γ , состоящий из четырех ребер $\gamma_i = (a, a_i)$, $i = \overline{1, 4}$, и одной внутренней вершины a . Здесь a_i — граничные вершины графа. Обратим внимание, что граничные вершины a_i не включены в граф. Объединение точек всех ребер графа будем обозначать $E(\Gamma)$, а множество граничных вершин обозначаем $\partial\Gamma$. Тогда $\Gamma = E(\Gamma) \cup \{a\}$.

Расстояние $d(x_1, x_2)$ между двумя точками $x_1, x_2 \in \Gamma$ определяется как длина кратчайшего пути от x_1 до x_2 вдоль графа Γ . Тогда под ε -окрестностью точки $x_0 \in \Gamma$ понимается множество всех точек $x \in \Gamma$, для которых выполнено неравенство $d(x_0, x) < \varepsilon$.

Любое связное открытое подмножество $\Gamma_0 \subset \Gamma$ называется подграфом Γ .

Введем функциональные пространства:

$$C[\Gamma] = \{u : \Gamma \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ равномерно непрерывна на каждом ребре } \gamma_i \subset E(\Gamma)\};$$

$$C[E(\Gamma)] = \{u : E(\Gamma) \rightarrow \mathbb{R} \mid u \text{ равномерно непрерывна на каждом ребре } \gamma_i \subset E(\Gamma)\}.$$

Через u_i будем обозначать сужение функции $u \in C[\Gamma]$ (или $E(\Gamma)$) на ребро γ_i . Под $u(a_i)$ понимается $\lim_{\gamma_i \ni x \rightarrow a_i} u_i(x)$. Аналогично определяются значения $u_i(a) = \lim_{\gamma_i \ni x \rightarrow a} u_i(x)$.

Производная функции на ребре γ_i определяется как производная на параметризованном интервале и обозначается $u'_i(x)$. Аналогично определяются производные высших порядков. Через $C^n[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$) мы обозначаем пространство функций $u(x) \in C[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$), производные которых до порядка n включительно существуют и принадлежат пространству $C[E(\Gamma)]$. Для функции $u(x) \in C^n[\Gamma]$ (или $C^n[E(\Gamma)]$) во внутренней вершине a определено множество производных $u_i^{(j)}(a)$, $1 \leq j \leq n$, вдоль каждого ребра γ_i . При этом производные нечетных порядков зависят от направления параметризации ребер графа, т. е. определяются с точностью до знака. При записи условий связи с производными в вершинах графа нам будет удобно использовать производные по направлению «от вершины», которые обозначим $u_{i\nu}^{(j)}(a)$ (одномерный аналог производных по внутренней нормали). Отметим, что для четной производной ориентация не важна, и поэтому, для краткости, вместо $u_{i\nu}''(a)$ мы пишем просто $u_i''(a)$.

Для функции $u \in C[\Gamma]$ (или $C[E(\Gamma)]$) интеграл на графе определяем по правилу:

$$\int_{\Gamma} u(x) dx = \sum_{\gamma_i \in E(\Gamma)} \int_{\gamma_i} u_i(x) dx.$$

На графе-кресте Γ рассматривается краевая задача для дифференциального уравнения четвертого порядка. На ребрах графа уравнение задается обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$(p_i(x)u_i'')'' - (q_i(x)u_i')' = f_i(x), \quad x \in \gamma_i \subset E(\Gamma). \quad (2.1)$$

Во внутренней вершине a накладываются условия трансмиссии:

$$\begin{aligned} u_i(a) &= u(a), \quad u'_{1\nu}(a) = -u'_{3\nu}(a), \quad u'_{2\nu}(a) = -u'_{4\nu}(a), \\ p_1(a)u''_1(a) &= p_3(a)u''_3(a), \quad p_2(a)u''_2(a) = p_4(a)u''_4(a), \\ \sum_{i=1}^4 D^3_{\nu} u_i(a) &= f(a), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где $D^3 u = (pu'')' - qu'$ — третья квазипроизводная.

В каждой граничной вершине $a_i \in \partial\Gamma$ соотношения (2.1), (2.2) дополняются краевыми условиями

$$u(a_i) = 0, \quad \vartheta(a_i)u'_{\nu}(a_i) - \beta(a_i)u''(a_i) = 0, \quad (2.3)$$

с заданными коэффициентами $\vartheta(a_i), \beta(a_i)$.

Везде далее мы предполагаем, что выполняются следующие условия:

- $p \in C^2[E(\Gamma)]$, $\inf_{E(\Gamma)} p(x) > 0$; $q \in C^1[E(\Gamma)]$, $q \geq 0$ на $E(\Gamma)$ и $f \in C[\Gamma]$;
- в граничных условиях (2.3) считаем $\vartheta, \beta \geq 0$ и $\vartheta + \beta > 0$ в каждой вершине из $\partial\Gamma$.

Соотношения (2.1), (2.2) определяют дифференциальное уравнение на графе Γ , которое вместе с граничными условиями (2.3) образует краевую задачу, которую мы будем обозначать

$$Lu = f(x), \quad x \in \Gamma, \quad u|_{\partial\Gamma} = 0, \quad (\vartheta u'_{\nu} - \beta u'')|_{\partial\Gamma} = 0. \quad (2.4)$$

Здесь и всюду далее через L обозначаем дифференциальный оператор, порожденный соотношениями (2.1)–(2.3).

Замечание 2.1. Соотношения (2.1)–(2.3) имеют естественную физическую интерпретацию (см. [4, 10, 13]). Они моделируют малые деформации плоского каркаса в форме прямоугольного креста из четырех прямых тонких стержней. В положении равновесия стержни размещены в плоскости и образуют граф-крест Γ . Узлом системы является общая концевая точка всех четырех стержней, которые жестко спаяны друг с другом.

Замечание 2.2. Задача (2.4), порожденная равенствами (2.1)–(2.3), является частным случаем более общей задачи, изучавшейся в работах [11–13]. При рассматриваемых здесь условиях трансмиссии (2.2) для краевой задачи (2.4) выполнены условия однозначной разрешимости (см. [11, Theorem 4]), что гарантирует существование функции Грина $G(x, s)$ краевой задачи (2.4).

3. РЕДУКЦИЯ

Всюду далее в этом пункте мы будем полагать, что правая часть уравнения $Lu = f(x)$ равна тождественно нулю на $\gamma_2 \cup \gamma_4$.

Обозначим через Γ_1, Γ_2 два подмножества $\Gamma \setminus \{\gamma_2 \cup \gamma_4\}$, $\Gamma \setminus \{\gamma_1 \cup \gamma_3\}$, и рассмотрим сужение дифференциального уравнения $Lu = f$ на Γ_1 . На ребрах $\gamma_1, \gamma_3 \in E(\Gamma_1)$ имеем уравнение

$$(p(x)u'')' - (q(x)u')' = f(x), \quad x \in E(\Gamma_1). \quad (3.1)$$

Во внутренней вершине a имеем условия

$$u_1(a) = u_3(a), \quad u'_{1\nu}(a) = -u'_{3\nu}(a), \quad (p_1u''_1)(a) = (p_3u''_3)(a). \quad (3.2)$$

И, наконец, в граничных вершинах заданы условия

$$u|_{\partial\Gamma_1} = 0, \quad (\vartheta u'_\nu - \beta u'')|_{\partial\Gamma_1} = 0. \quad (3.3)$$

Поэтому исходная краевая задача (2.4) эквивалентна набору из соотношений в точках маршрута Γ_1 (неоднородное уравнение на $E(\Gamma_1)$, условия (3.2) и граничные условия (3.3)), набору соотношений в точках $\gamma_2 \cup \gamma_4$ (однородное уравнение на $E(\Gamma_2)$, условия непрерывности $u_2(a) = u_4(a) = u_1(a)$, гладкого согласования $u'_{2\nu}(a) = -u'_{4\nu}(a)$, условия на вторые производные $(p_2u''_2)(a) = (p_4u''_4)(a)$) и, наконец, одно условие на третьи квазипроизводные, связывающее соотношения на Γ_1 и на $\gamma_2 \cup \gamma_4$:

$$\sum_{i=1}^4 D_\nu^3 u_i(a) = f(a). \quad (3.4)$$

Рассмотрим произвольное ребро $\gamma_i = (a, a_i)$ графа Γ . Обозначим через z_i и y_i решения однородного уравнения $(p_i(x)z'')' - (q_i(x)z')' = 0$ на ребре γ_i , удовлетворяющие соответственно краевым условиям

$$\begin{aligned} z_i(a) = 1, \quad z'_{i\nu}(a) = 0, \quad z_i(a_i) = \vartheta(a_i)z'_{i\nu}(a_i) - \beta(a_i)z''_i(a_i) = 0; \\ y_i(a) = 0, \quad y'_{i\nu}(a) = 1, \quad y_i(a_i) = \vartheta(a_i)y'_{i\nu}(a_i) - \beta(a_i)y''_i(a_i) = 0. \end{aligned}$$

Лемма 3.1. Для любого ребра $\gamma_i = (a, a_i)$ функции z_i и y_i определяются однозначно.

Доказательство. Чтобы установить, что функции z_i и y_i определяются однозначно, достаточно показать, что соответствующая однородная краевая задача

$$\begin{aligned} (p_i(x)z'')' - (q_i(x)z')' = 0, \quad x \in \gamma_i, \\ z(a) = z'_\nu(a) = 0, \quad z(a_i) = \vartheta(a_i)z'_\nu(a_i) + \beta(a_i)z''(a_i) = 0 \end{aligned}$$

имеет только нулевое решение.

Умножая уравнение $(p_i(x)z'')' - (q_i(x)z')' = 0$ на z и интегрируя по частям, получим

$$\begin{aligned} 0 = \int_a^{a_i} [p_i(z'')^2 + q_i(z')^2] dx - z(a)D_\nu^3 z(a) + z'_\nu(a)(pz'')(a) - z(a_i)D_\nu^3 z(a_i) + z'_\nu(a_i)(pz'')(a_i) = \\ = \int_a^{a_i} [p_i(z'')^2 + q_i(z')^2] dx + z'_\nu(a_i)(pz'')(a_i). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Из свойств коэффициентов уравнения и краевых условий следует, что правая часть последнего равенства есть сумма неотрицательных чисел. А поскольку $p_i(x) > 0$, то $z'' \equiv 0$, т. е. z — линейная функция. Теперь из граничных условий в точке a следует, $z \equiv 0$ на $[a, a_i]$. $\square$

Следствие 3.1. Пусть u — решение краевой задачи (2.4) на графе-кресте Γ . Если $f(x) \equiv 0$ на ребре $\gamma_i \subset E(\Gamma)$, то сужение u_i функции u на ребро γ_i может быть представлено формулой

$$u_i(x) = u(a)z_i(x) + u'_{i\nu}(a)y_i(x), \quad x \in \gamma_i. \quad (3.6)$$

Далее нам понадобятся следующие свойства функций z_i, y_i .

Лемма 3.2. Справедливы следующие свойства:

- (i) $y''_i(a) < 0$;
- (ii) $D_\nu^3 z_i(a) > 0$;

- (iii) $D_\nu^3 y_i(a) = -(p z_i'')(a)$;
 (iv) $[(p z_i'')(a)]^2 \leq -D_\nu^3 z_i(a)(p y_i'')(a)$.

Доказательство. Умножим тождество $(p_i y_i'')'' - (q_i y_i')' = 0$ на y_i и проинтегрируем по частям на ребре $\gamma_i = (a, a_i)$. Привлекая граничные условия в точке a , определяющие y_i , имеем:

$$\int_a^{a_i} [p_i (y_i'')^2 + q_i (y_i')^2] dx + y_{i\nu}'(a_i)(p y_i'')(a_i) = -(p y_i'')(a). \quad (3.7)$$

Очевидно, что левая часть последнего равенства есть сумма неотрицательных чисел. Если интеграл слева не равен нулю, то неравенство $y_i''(a) < 0$ очевидно. Покажем, что другой вариант невозможен. Действительно, если интеграл равен нулю, то $y_i'' \equiv 0$ на $[a, a_i]$ и y_i есть линейная функция, удовлетворяющая граничным условиям

$$y_i(a) = 0, \quad y_{i\nu}'(a) = 1, \quad y_i(a_i) = 0,$$

что невозможно. Свойство (i) доказано.

Для доказательства (ii) подставим в (3.5) функцию z_i и воспользуемся граничными условиями в вершине a :

$$\int_a^{a_i} (p_i (z_i'')^2 + q_i (z_i')^2) dx - D_\nu^3 z_i(a) = -z_{i\nu}'(a_i)(p_i z_i'')(a_i). \quad (3.8)$$

Из граничных условий

$$z_i(a) = 1, \quad z_{i\nu}'(a) = 0, \quad z_i(a_i) = 0,$$

следует, что z_i не может быть линейной функцией, т. е. $z_i'' \neq 0$. Поскольку $\inf_{x \in \gamma_i} p_i(x) > 0$ и $q_i \geq 0$, интеграл больше нуля. А поскольку правая часть в (3.8) в силу граничного условия в точке a_i есть величина неположительная, то получаем утверждение (ii).

Умножим теперь тождество $(p_i z_i'')'' - (q_i z_i')' = 0$ на y_i и проинтегрируем по частям вдоль ребра $\gamma_i = (a, a_i)$. После двукратного интегрирования по частям и учета краевых условий в точке a получаем:

$$\int_a^{a_i} (p_i z_i'' y_i'' + q_i z_i' y_i') dx + (p_i z_i'')(a) = -y_{i\nu}'(a_i)(p_i z_i'')(a_i). \quad (3.9)$$

Аналогично, умножая тождество $(p_i y_i'')'' - (q_i y_i')' = 0$ на z_i и интегрируя, получаем

$$\int_a^{a_i} (p_i z_i'' y_i'' + q_i z_i' y_i') dx - D_\nu^3 y_i(a) = -z_{i\nu}'(a_i)(p_i y_i'')(a_i).$$

Вычитая одно равенство из другого, имеем

$$(p_i z_i'')(a) + D_\nu^3 y_i(a) = p_i(a_i) \begin{vmatrix} z_{i\nu}'(a_i) & y_{i\nu}'(a_i) \\ z_i''(a_i) & y_i''(a_i) \end{vmatrix}. \quad (3.10)$$

Функции z_i и y_i удовлетворяют одним и тем же граничным условиям в точке a_i . Поэтому векторы $(z_{i\nu}'(a_i); z_i''(a_i))$ и $(y_{i\nu}'(a_i); y_i''(a_i))$ ортогональны ненулевому вектору $(\vartheta(a_i); -\beta(a_i))$. Следовательно, определитель в (3.10) равен нулю, и свойство (iii) доказано.

Остается доказать неравенство (iv).

Определим неотрицательную симметричную билинейную форму

$$B[z, y] = \int_a^{a_i} (p_i z'' y'' + q_i z' y') dx.$$

Перепишем формулы (3.9), (3.8) и (3.7) в виде

$$\begin{aligned} B[z_i, y_i] + y_{i\nu}'(a_i)(p_i z_i'')(a_i) &= -(p_i z_i'')(a), \\ B[z_i, z_i] + z_{i\nu}'(a_i)(p_i z_i'')(a_i) &= D_\nu^3 z_i(a), \\ B[y_i, y_i] + y_{i\nu}'(a_i)(p y_i'')(a_i) &= |(p y_i'')(a)|. \end{aligned} \quad (3.11)$$

В последнем равенстве мы воспользовались уже доказанным свойством (i).

Привлекая неравенство Гельдера, имеем

$$\begin{aligned} |(py_i'')(a)| \cdot D_\nu^3 z_i(a) &= (B[y_i, y_i] + y_{i\nu}'(a_i)(py_i'')(a_i)) (B[z_i, z_i] + z_{i\nu}'(a_i)(pz_i'')(a_i)) \geq \\ &\geq \left(\sqrt{B[y_i, y_i]B[z_i, z_i]} + \sqrt{|z_{i\nu}'(a_i)(py_i'')(a_i)| \cdot |y_{i\nu}'(a_i)(pz_i'')(a_i)|} \right)^2. \end{aligned}$$

Поскольку правая часть (3.10) равна нулю, то $z_{i\nu}'(a_i)(py_i'')(a_i) = y_{i\nu}'(a_i)(pz_i'')(a_i)$. Данное равенство вместе с неравенством Коши—Буняковского для $B[\cdot, \cdot]$ и первым соотношением в (3.11) дают

$$\begin{aligned} |(py_i'')(a)| \cdot D_\nu^3 z_i(a) &\geq (|B[z_i, y_i]| + |y_{i\nu}'(a_i)(pz_i'')(a_i)|)^2 \geq \\ &\geq |B[z_i, y_i] + y_{i\nu}'(a_i)(pz_i'')(a_i)|^2 = |(pz_i'')(a)|^2. \end{aligned}$$

Лемма полностью доказана. $\square$

Возвращаясь к редукции краевой задачи на графе-кресте, рассмотрим условие (3.4). Подставляя выражения (3.6) для u_2 и u_4 в условие (3.4), получим

$$\sum_{i=1}^4 D_\nu^3 u_i(a) = D_\nu^3 u_1(a) + D_\nu^3 u_3(a) + u_1(a) (D_\nu^3 z_2(a) + D_\nu^3 z_4(a)) + u_{2\nu}'(a) (D_\nu^3 y_2(a) - D_\nu^3 y_4(a)). \quad (3.12)$$

Теперь рассмотрим условие на вторые производные для u_2 и u_4 в (2.2). Используя представление (3.6), условие непрерывности $u_2(a) = u_4(a) = u_1(a)$ и условие гладкости $u_{2\nu}'(a) = -u_{4\nu}'(a)$, получим

$$(p_2 u_2'')(a) - (p_4 u_4'')(a) = u_1(a) [(p_2 z_2'')(a) - (p_4 z_4'')(a)] + u_{2\nu}'(a) [(p_2 y_2'')(a) + (p_4 y_4'')(a)] = 0. \quad (3.13)$$

Из леммы 3.2 следует, что $(p_2 y_2'')(a) + (p_4 y_4'')(a) < 0$. Поэтому последнее равенство в (3.13) дает соотношение

$$u_{2\nu}'(a) = -\rho(a) u_1(a), \quad (3.14)$$

где

$$\rho(a) = \frac{(p_2 z_2'')(a) - (p_4 z_4'')(a)}{(p_2 y_2'')(a) + (p_4 y_4'')(a)}. \quad (3.15)$$

Теперь вернемся к рассмотрению равенства (3.12). Используя (3.6) и (3.14), мы приходим к формуле

$$\sum_{i=1}^4 D_\nu^3 u_i(a) = D_\nu^3 u_1(a) + D_\nu^3 u_3(a) + u_1(a) (D_\nu^3 z_2(a) + D_\nu^3 z_4(a) - \rho(a) (D_\nu^3 y_2(a) - D_\nu^3 y_4(a))).$$

Положим

$$\delta(a) = D_\nu^3 z_2(a) + D_\nu^3 z_4(a) - \rho(a) (D_\nu^3 y_2(a) - D_\nu^3 y_4(a)). \quad (3.16)$$

Тогда условие трансмиссии (2.3) с третьими квазипроизводными во внутренней вершине a принимает форму

$$D_\nu^3 u_1(a) + D_\nu^3 u_3(a) + \delta(a) u(a) = f(a). \quad (3.17)$$

Суммируя изложенное выше, приходим к следующей теореме.

Теорема 3.1. *Если $f(x)$ равна тождественно нулю на $\gamma_2 \cup \gamma_4$, то краевая задача (2.4) на графе-кресте Γ эквивалентна следующему набору задач:*

1. *Краевая задача на графе-цепочке Γ_1 :*

$$\begin{aligned} (p(x)u'')'' - (q(x)u')' &= f(x), \quad x \in E(\Gamma_1), \\ u_1(a) &= u_3(a), \quad u_{1\nu}'(a) = -u_{3\nu}'(a), \quad (p_1 u_1'')(a) = (p_3 u_3'')(a), \\ D_\nu^3 u_1(a) + D_\nu^3 u_3(a) + \delta(a) u(a) &= f(a); \\ u|_{\partial\Gamma_1} &= (\vartheta u_\nu' - \beta u'')|_{\partial\Gamma_1} = 0. \end{aligned} \quad (3.18)$$

2. Две краевые задачи на ребрах γ_2 и γ_4 :

$$\begin{aligned} (p_2(x)u_2'')'' - (q_2(x)u_2')' &= 0, \quad x \in \gamma_2, \\ u_2(a) &= u_1(a), \quad u_{2\nu}'(a) = -\rho(a)u_1(a), \quad u_2(a_2) = \vartheta(a_2)u_{2\nu}'(a_2) - \beta(a_2)u_2''(a_2) = 0; \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} (p_4(x)u_4'')'' - (q_4(x)u_4')' &= 0, \quad x \in \gamma_4, \\ u_4(a) &= u_1(a), \quad u_{4\nu}'(a) = \rho(a)u_1(a), \quad u_4(a_4) = \vartheta(a_4)u_{4\nu}'(a_4) - \beta(a_4)u_4''(a_4) = 0. \end{aligned}$$

Здесь коэффициенты $\rho(a)$ и $\delta(a)$ определяются по формулам (3.15), (3.16).

Лемма 3.3. Справедливо следующее неравенство:

$$\delta(a) \geq 0. \quad (3.19)$$

Доказательство. Используя свойства (i), (iii) леммы 3.2, преобразуем выражение (3.16):

$$\begin{aligned} \delta(a) &= D_\nu^3 z_2(a) + D_\nu^3 z_4(a) - \frac{(p_2 z_2'')(a) - (p_4 z_4'')(a)}{(p_2 y_2'')(a) + (p_4 y_4'')(a)} (D^3 y_2(a) - D^3 y_4(a)) = \\ &= D_\nu^3 z_2(a) + D_\nu^3 z_4(a) - \frac{((p_2 z_2'')(a) - (p_4 z_4'')(a))^2}{-(p_2 y_2'')(a) - (p_4 y_4'')(a)}. \end{aligned}$$

Поскольку $(p_2 y_2'')(a) < 0$ и $(p_4 y_4'')(a) < 0$, то

$$\delta(a) = D_\nu^3 z_2(a) + D_\nu^3 z_4(a) - \frac{((p_2 z_2'')(a) - (p_4 z_4'')(a))^2}{|(p_2 y_2'')(a)| + |(p_4 y_4'')(a)|} \geq D_\nu^3 z_2(a) + D_\nu^3 z_4(a) - \frac{(|(p_2 z_2'')(a)| + |(p_4 z_4'')(a)|)^2}{|(p_2 y_2'')(a)| + |(p_4 y_4'')(a)|}.$$

Теперь из той же леммы 3.2, (iii) следует

$$\begin{aligned} \delta(a) &\geq \frac{D_\nu^3 z_2(a)|(p_4 y_4'')(a)| + D_\nu^3 z_4(a)|(p_2 y_2'')(a)| - 2|(p_2 z_2'')(a)| \cdot |(p_4 z_4'')(a)|}{|(p_2 y_2'')(a)| + |(p_4 y_4'')(a)|} \geq \\ &\geq \frac{D_\nu^3 z_2(a) \cdot |(p_4 y_4'')(a)| + D_\nu^3 z_4(a) \cdot |(p_2 y_2'')(a)| - 2\sqrt{D_\nu^3 z_2(a) \cdot |(p_2 y_2'')(a)|} \cdot \sqrt{D_\nu^3 z_4(a) \cdot |(p_4 y_4'')(a)|}}{|(p_2 y_2'')(a)| + |(p_4 y_4'')(a)|} = \\ &= \frac{\left(\sqrt{D_\nu^3 z_2(a) \cdot |(p_4 y_4'')(a)|} - \sqrt{D_\nu^3 z_4(a) \cdot |(p_2 y_2'')(a)|}\right)^2}{|(p_2 y_2'')(a)| + |(p_4 y_4'')(a)|} \geq 0. \end{aligned}$$

Лемма доказана. $\square$

В работе [14] было доказано, что если $\delta(a) \geq 0$, то краевая задача (3.18) однозначно разрешима. Следовательно, функция Грина $G_1(x, s)$ краевой задачи (3.18) существует.

Следующая теорема указывает на связь функций Грина краевых задач (2.4) и (3.18).

Теорема 3.2. Для функции Грина $G(x, s)$ краевой задачи (2.4) при $s \in \Gamma_1$ имеет место представление

$$G(x, s) = \begin{cases} G_1(x, s), & x, s \in \Gamma_1, \\ G_1(a, s)(z_2(x) - \rho(a)y_2(x)), & x \in \gamma_2, s \in \Gamma_1, \\ G_1(a, s)(z_4(x) + \rho(a)y_4(x)), & x \in \gamma_4, s \in \Gamma_1. \end{cases}$$

Доказательство теоремы следует из свойств функции Грина $G(x, s)$ краевой задачи (2.4) (см., например, [13] или [7, гл. 6]) и теоремы 3.1.

Замечание 3.1. Краевая задача (3.18) с коэффициентом $\delta(a) \geq 0$ моделирует задачу об изгибе упруго подпертого стержня. При этом величина $\delta(a)$ задает жесткость упругой опоры (см. [14]).

Таким образом, можно заключить, что если внешняя нагрузка на стержневой крест сосредоточена только вдоль одной пары взаимно дополнительных стержней, то другая пара стержней выступает в роли упругой опоры.

Для дальнейшего изучения свойств решений уравнения на графе-кресте нам понадобится следующий результат.

Теорема 3.3 (см. [9]). *Всякое решение однородного уравнения*

$$(p(x)u'')'' - (q(x)u')' = 0, \quad x \in [b_1, b_2] \subset \mathbb{R},$$

удовлетворяющее условиям

$$u''(b_1)u'_{2\nu}(b_1) \geq 0, \quad u''(b_2)u'_{2\nu}(b_2) \geq 0,$$

либо постоянно, либо строго монотонно. При этом решение строго возрастает (убывает или постоянно) тогда и только тогда, когда $D^3u(x) < 0$ (> 0 или $= 0$).

Теорема 3.4. *Пусть u — решение задачи (2.4). Если $f \equiv 0$ на $\gamma_2 \cup \gamma_4$, то либо $u \equiv 0$ на Γ_2 , либо u не обращается в нуль на Γ_2 .*

Доказательство.

СЛУЧАЙ 1. Предположим сначала, что $u''_2(a)u'_{2\nu}(a) \geq 0$. Тогда, учитывая равенство $u(a_2) = 0$ и теорему 3.3, получаем, что либо $u \equiv 0$ на γ_2 , либо $u_2(a) \neq 0$.

В первом случае, ввиду (2.2) получаем $u'_{4\nu}(a) = 0$ и, как следует из $u_4(a) = u_2(a) = 0$ и теоремы 3.3, $u \equiv 0$ на Γ_2 .

Если же $u_2(a) \neq 0$, то для определенности можно положить $u(a) > 0$. Ввиду $u''_2(a)u'_{2\nu}(a) \geq 0$, граничных условий (2.3) и теоремы 3.3 сужение u_2 строго убывает на ребре γ_2 от a к a_2 . Поэтому $u'_{2\nu}(a) \leq 0$, а значит, $u''_2(a) \leq 0$. Привлекая условия (2.2), имеем $u''_4(a)u'_{4\nu}(a) \leq 0$ и $u'_{4\nu}(a) \geq 0$.

Если $u''_4(a)u'_{4\nu}(a) = 0$, то опять ввиду (2.3) и теоремы 3.3 сужение u_4 строго убывает на ребре γ_4 от a к a_4 . В этом случае получаем $u > 0$ на Γ_2 .

Если же $u''_4(a)u'_{4\nu}(a) < 0$, то имеем $u'_{4\nu}(a) > 0$. Поскольку $u_4(a) > 0$ и $u_4(a_4) = 0$, то существует точка $x^* \in (a, a_4)$ такая, что u_4 строго возрастает от a к x^* и $u_4(x^*) > 0$, $u'_{4\nu}(x^*) = 0$. Тогда привлекая теорему 3.3 к функции u_4 на промежутке $(x^*, a_4) \subset \gamma_4$, заключаем, что u_4 строго убывает на (x^*, a_4) от x^* к a_4 , т. е. $u > 0$ на Γ_2 .

СЛУЧАЙ 2. Рассмотрим теперь случай $u''_2(a)u'_{2\nu}(a) < 0$. Здесь из условия (2.2) следует $u''_4(a)u'_{4\nu}(a) > 0$. Поэтому можно повторить предыдущие рассуждения, поменяв ребра γ_2 и γ_4 местами. Теорема доказана. $\square$

4. ОСЦИЛЛЯЦИОННАЯ ТЕОРЕМА

В настоящем пункте рассмотрим на графе-кресте $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$ задачу на собственные значения

$$Lu = \lambda \rho(x)u, \quad x \in \Gamma, \quad u|_{\partial\Gamma} = 0, \quad (\beta u'' - \vartheta u')|_{\partial\Gamma} = 0. \quad (4.1)$$

Дифференциальное уравнение в (4.1) на ребрах графа определяется обыкновенными дифференциальными уравнениями

$$(p(x)u'')'' - (q(x)u')' = \lambda \rho(x)u, \quad x \in E(\Gamma), \quad (4.2)$$

а в узловой точке a — условиями трансмиссии:

$$\begin{aligned} u_i(a) &= u(a), \quad u'_{1\nu}(a) = -u'_{3\nu}(a), \quad u'_{2\nu}(a) = -u'_{4\nu}(a), \\ p_1(a)u''_1(a) &= p_3(a)u''_3(a), \quad p_2(a)u''_2(a) = p_4(a)u''_4(a), \\ \sum_{i=1}^4 D^3_{\nu} u_i(a) &= \lambda \rho(a)u(a), \end{aligned}$$

где $\rho \in C[\Gamma]$ и $\rho \geq 0 (\neq 0)$ на Γ .

Прежде чем сформулировать спектральные свойства оператора L , дадим два определения.

Определение 4.1. S -зоной непрерывной на графе Γ функции u будем называть подграф $\Gamma_0 \subset \Gamma$ такой, что $u(x) \neq 0$ в Γ_0 и $u(x) = 0$ на $\partial\Gamma_0$.

Определение 4.2. Точка $x_0 \in \Gamma$ называется нуль-узлом непрерывной на графе Γ функции u , если $u(x_0) = 0$ и в любой окрестности точки x_0 функция u принимает значения любого знака.

Теорема 4.1 (осцилляционные свойства). *Пусть $\rho \equiv 0$ на $\gamma_2 \cup \gamma_4$. Если функция Грина краевой задачи (2.4) положительна на $\Gamma \times \Gamma$, то спектр оператора L состоит из неограниченной последовательности вещественных простых положительных собственных значений*

$0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 \dots$, а соответствующие собственные функции $\varphi^{[k]}$ ($k = 0, 1, 2, \dots$) обладают следующими свойствами:

- (i) функция $\varphi^{[k]}$ имеет в Γ точно $k + 1$ S -зону;
- (ii) если $\varphi^{[k]}(a) \neq 0$, то $\varphi^{[k]}$ имеет в Γ точно k нулей-узлов;
- (iii) если $\varphi^{[k]}(a) = 0$, то $\varphi^{[k]}$ имеет в Γ_1 точно k нулей-узлов и равна тождественно нулю на Γ_2 ;
- (iv) все изолированные нули $\varphi^{[k]}$ являются простыми;
- (v) в любой S -зоне функции $\varphi^{[k]}$ функция $\varphi^{[k+1]}$ меняет знак.

Доказательство. В силу теоремы 3.1 решение задачи (4.1) на подграфе Γ_1 совпадает с решением задачи:

$$\begin{aligned} (p(x)u'')'' - (q(x)u')' &= \lambda\rho(x)u, \quad x \in E(\Gamma_1), \\ u_1(a) &= u_3(a), \quad u'_{1\nu}(a) = -u'_{3\nu}(a), \quad (p_1u'_1)(a) = (p_3u'_3)(a), \\ D_\nu^3u_1(a) + D_\nu^3u_3(a) + \delta(a)u(a) &= \lambda\rho(a)u(a); \\ u|_{\partial\Gamma_1} &= (\vartheta u'_\nu - \beta u'')|_{\partial\Gamma_1} = 0. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Это означает, что спектр краевой задачи (4.1) на графе Γ и спектр задачи (4.3) на подграфе Γ_1 совпадают.

Пусть $\{\phi^{[k]}\}$ — собственные функции краевой задачи (4.3). Тогда в силу теоремы 3.1 собственные функции $\{\varphi^{[k]}\}$ задачи (4.1) могут быть представлены в виде

$$\varphi^{[k]}(x) = \begin{cases} \phi^{[k]}(x), & x \in \Gamma_1, \\ \psi_2^{[k]}(x), & x \in \gamma_2, \\ \psi_4^{[k]}(x), & x \in \gamma_4; \end{cases}$$

где $\psi_2^{[k]}$ и $\psi_4^{[k]}$ решения краевых задач

$$\begin{aligned} (p_2(x)\psi_2'')'' - (q_2(x)\psi_2')' &= 0, \quad x \in \gamma_2, \\ \psi_2(a) &= \phi^{[k]}(a), \quad \psi'_{2\nu}(a) = -\rho(a)\phi^{[k]}(a), \quad \psi_2(a_2) = \vartheta(a_2)\psi'_{2\nu}(a_2) - \beta(a_2)\psi_2''(a_2) = 0; \end{aligned} \quad (4.4)$$

и

$$\begin{aligned} (p_4(x)\psi_4'')'' - (q_4(x)\psi_4')' &= 0, \quad x \in \gamma_4, \\ \psi_4(a) &= \phi^{[k]}(a), \quad \psi'_{4\nu}(a) = \rho(a)\phi^{[k]}(a), \quad \psi_4(a_4) = \vartheta(a_4)\psi'_{4\nu}(a_4) - \beta(a_4)\psi_4''(a_4) = 0. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Так как $\rho \equiv 0$ на $\gamma_2 \cup \gamma_4$, то в силу теоремы 3.4 всякая собственная функция задачи (4.1) либо равна тождественно нулю на Γ_2 , либо не имеет нулей в Γ_2 . Поэтому все утверждения теоремы следуют из теоремы 3.2 и следующего результата работы [14, теорема 3]:

Если функция Грина $G_1(x, s)$ краевой задачи (3.18) положительна на $\Gamma_1 \times \Gamma_1$, то спектр соответствующего дифференциального оператора L_1 состоит из неограниченной последовательности вещественных простых положительных собственных значений $0 < \lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_2 \dots$, а соответствующие собственные функции обладают свойствами:

1. собственная функция $\phi^{[k]}$, соответствующая λ_k , имеет в Γ_1 точно k нулей, причем все эти нули простые, а в граничных точках a_1 и a_3 любая собственная функция имеет нули точно той кратности, которая задана краевыми условиями;
2. между любыми двумя последовательными нулями собственной функции $\phi^{[k]}$ находится точно один нуль функции $\phi^{[k+1]}$.

Теорема доказана. $\square$

Замечание 4.1. Как показывает доказанная теорема, наличие осцилляционных спектральных свойств оператора L задачи (4.1) обеспечивается положительностью соответствующей функции Грина. В работе [13, теорема 8] показано, что для положительности функции Грина необходимо и достаточно положительности решений краевых задач

$$\begin{aligned} Lu &= 0, \quad x \in \Gamma, \\ u(a_i) &= 0, \quad u'(a_i) = 1, \quad u|_{\partial\Gamma \setminus a_i} = (\beta u'' - \vartheta u')|_{\partial\Gamma \setminus a_i} = 0. \end{aligned}$$

Замечание 4.2. Другой способ проверки положительности функции Грина связан с теоремой 3.2 и результатом работы [14, следствие 4], который определяет промежуток $[0, \delta^*]$ значений коэффициента $\delta(a)$ задачи (3.18), при которых соответствующая этой задаче функция Грина $G_1(x, s)$ положительна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурлуцкая М. Ш., Зверева М. Б., Каменский М. И. Краевая задача на геометрическом графе-звезде с нелинейным условием в узле // Мат. заметки. — 2023. — 114, № 2. — С. 316–320. — DOI: [10.4213/mzm13936](https://doi.org/10.4213/mzm13936).
2. Владимиров А. А., Шкалик А. А. Осцилляционные свойства самосопряженных граничных задач четвертого порядка // Алгебра и анализ. — 2023. — 35, № 1. — С. 109–133.
3. Гантмахер Ф. Р., Крейн М. Г. Осцилляционные матрицы и ядра и малые колебания механических систем. — М.—Л.: Гостехиздат, 1950.
4. Завгородний М. Г. Вариационные принципы построения моделей стержневых стержней // Воронеж. гос. технол. академия. — 2000. — № 4. — С. 59–62.
5. Покорный Ю. В., Лазарев К. П. Некоторые осцилляционные теоремы для многоточечных задач // Дифф. уравн. — 1987. — 23, № 4. — С. 658–670.
6. Покорный Ю. В., Пенкин О. М. О теоремах сравнения для уравнений на графах // Дифф. уравн. — 1989. — 25, № 7. — С. 1141–1150.
7. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. — М.: Физматлит, 2004.
8. Ben Amara J., Shkalikov A. A., Vladimirov A. A. Spectral and oscillatory properties of a linear pencil of fourth-order differential operators // Math. Notes. — 2013. — 94, № 1. — С. 49–59. — DOI: [10.1134/S0001434613070055](https://doi.org/10.1134/S0001434613070055).
9. Borovskikh A. V., Lazarev K. P. Fourth-order differential equations on geometric graphs // J. Math. Sci. (N. Y.). — 2004. — 119, № 6. — С. 719–738. — DOI: [10.1023/B:JOTH.0000012753.65477.23](https://doi.org/10.1023/B:JOTH.0000012753.65477.23).
10. Kiik J.-C., Kurasov P., Usman M. On vertex conditions for elastic systems // Phys. Lett. A. — 2015. — 379, № 34–35. — С. 1871–1876. — DOI: [10.1016/j.physleta.2015.05.017](https://doi.org/10.1016/j.physleta.2015.05.017).
11. Kulaev R. Ch. On the solvability of a boundary value problem for a fourth-order equation on a graph // Diff. Equ. — 2014. — 50, № 1. — С. 27–34. — DOI: [10.1134/S0012266114010042](https://doi.org/10.1134/S0012266114010042).
12. Kulaev R. Ch. On the nonoscillation of an equation on a graph // Differ. Equ. — 2015. — 50, № 12. — С. 1565–1566. — DOI: [10.1134/S0012266114110196](https://doi.org/10.1134/S0012266114110196).
13. Kulaev R. Ch. Necessary and sufficient condition for the positivity of the Green function of a boundary value problem for a fourth-order equation on a graph // Differ. Equ. — 2015. — 51, № 3. — С. 303–317. — DOI: [10.1134/S0012266115030039](https://doi.org/10.1134/S0012266115030039).
14. Kulaev R. Ch. Oscillation of the Green function of a multipoint boundary value problem for a fourth-order equation // Differ. Equ. — 2015. — 51, № 4. — С. 1–15. — DOI: [10.1134/S0012266115040035](https://doi.org/10.1134/S0012266115040035).
15. Kulaev R. Ch. The qualitative theory of fourth-order differential equations on a graph // Mediterr. J. Math. — 2022. — 19, № 73. — С. 1–16. — DOI: [10.1007/s00009-022-02005-6](https://doi.org/10.1007/s00009-022-02005-6).
16. Kulaev R. Ch., Urtaeva A. A. Spectral properties of a fourth-order differential operator on a network // Math. Meth. Appl. Sci. — 2023. — 46, № 1. — С. 15743–15763. — DOI: [10.1002/mma.9424](https://doi.org/10.1002/mma.9424).
17. Pokornyi Yu. V., Pryadiev V. L. Some problems of the qualitative Sturm–Liouville theory on a spatial network // Russ. Math. Surv. — 2004. — 59, № 3. — С. 515–552. — DOI: [10.1070/RM2004v059n03ABEH000738](https://doi.org/10.1070/RM2004v059n03ABEH000738).

Р. Ч. Кулаев

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, Владикавказ, Россия
Южный математический институт ВНИЦ РАН, Владикавказ, Россия

E-mail: r.ch.kulaev@yandex.ru, РИНЦ SPIN-код: 4941-1764, РИНЦ AuthorID: [360127](https://elibrary.ru/author_index.aspx?id=360127), ResearcherID: [AAO-6785-2021](https://orcid.org/0000-0002-1501-5024), Scopus: [26532903900](https://orcid.org/0000-0002-1501-5024), ORCID: [0000-0002-1501-5024](https://orcid.org/0000-0002-1501-5024)

В. А. Елоева

Северо-Осетинский государственный университет им. К. Л. Хетагурова, Владикавказ, Россия
Южный математический институт ВНИЦ РАН, Владикавказ, Россия

E-mail: v.a.eloeva@yandex.ru, Scopus: [60090703300](https://orcid.org/0000-0002-1501-5024)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-297-308](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-297-308)
 EDN: [BBWQXD](#)

UDC 517.927
Research article

Oscillatory properties of the spectrum of a fourth-order operator on a cross graph

R. Ch. Kulaev^{1,2} and V. A. Eloeva^{1,2}

¹*North Ossetian State University after K. L. Khetagurov, Vladikavkaz, Russia*

²*Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia*

Abstract. The oscillatory properties of the spectrum of a problem on the natural vibrations of a cross-shaped rod system are investigated. The model is reduced to a fourth-order boundary value problem on a graph with rigid joint conditions for the rods. A method is proposed for reducing the original problem to a multipoint boundary value problem on a selected route, allowing the system to be interpreted as an elastically supported rod. A justification for this method is provided, and a condition for the oscillatory nature of the spectrum is formulated.

Keywords: graph equation, Green's function, spectrum oscillation, rod equation.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was carried out with the financial support of the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement No. 075-02-2026-1324.

Authors' contribution. *Kulaev R. Ch.* — scientific supervision, formulation of the idea, hypothesis, research objectives, development of methods and procedures, text revision, organizational management. *Eloeva V. A.* — writing the initial text of the article, checking the results, editing, text revision.

For citation: R. Ch. Kulaev, V. A. Eloeva, “Oscillatory properties of the spectrum of a fourth-order operator on a cross graph,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 2, 297–308. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-297-308](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-297-308) EDN: [BBWQXD](#)

REFERENCES

1. M. Sh. Burlutskaya, M. B. Zvereva, and M. I. Kamenskii, “Kraevaya zadacha na geometricheskom grafe-zvezde s nelineynym uslovиеm v uzle” [Boundary-value problem on a geometric star graph with a nonlinear condition at a node], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2023, **114**, No. 2, 316–320 (in Russian), DOI: [10.4213/mzm13936](https://doi.org/10.4213/mzm13936).
2. A. A. Vladimirov and A. A. Shkalikov, “Ostsillyatsionnye svoystva samosopryazhennykh granichnykh zadach chetvertogo poryadka” [Oscillatory properties of fourth-order self-adjoint boundary-value problems], *Algebra i Analiz* [Algebra Anal.], 2023, **35**, No. 1, 109–133 (in Russian).
3. F. R. Gantmakher and M. G. Kreyn, *Ostsillyatsionnye Matritsy i Yadra i Malye Kolebaniya Mekhanicheskikh Sistem* [Oscillatory Matrices and Kernels and Small Oscillations of Mechanical Systems], Gostekhizdat, Moscow–Leningrad, 1950 (in Russian).
4. M. G. Zavgorodnii, “Variatsionnye printsipy postroeniya modeley sterzhnevyykh sterzhney” [Variational principles for constructing rod models], *Voronezh. Gos. Tekhnol. Akademiya* [Voronezh State Tech. Acad.], 2000, No 4, 59–62 (in Russian).
5. Yu. V. Pokornyi and K. P. Lazarev, “Nekotorye ostsillyatsionnye teoremy dlya mnogotochechnyykh zadach” [Some oscillation theorems for multipoint problems], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1987, **23**, No. 4, 658–670 (in Russian).
6. Yu. V. Pokornyi and O. M. Penkin, “O teoremakh sravneniya dlya uravneniy na grafakh” [On comparison theorems for equations on graphs], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1989, **25**, No. 7, 1141–1150 (in Russian).



7. Yu. V. Pokornyi, O. M. Penkin, V. L. Pryadiev, A. V. Borovskikh, K. P. Lazarev, S. A. Shabrov, *Differentsial'nye Uravneniya na Geometricheskikh Grafakh* [Differential Equations on Geometric Graphs], Fizmatlit, Moscow, 2004 (in Russian).
8. Ben J. Amara, A. A. Shkalikov, and A. A. Vladimirov, “Spectral and oscillatory properties of a linear pencil of fourth-order differential operators,” *Math. Notes*, 2013, **94**, No. 1, 49–59, DOI: [10.1134/S0001434613070055](https://doi.org/10.1134/S0001434613070055).
9. A. V. Borovskikh and K. P. Lazarev, “Fourth-order differential equations on geometric graphs,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2004, **119**, No. 6, 719–738, DOI: [10.1023/B:JOTH.0000012753.65477.23](https://doi.org/10.1023/B:JOTH.0000012753.65477.23).
10. J.-C. Kiik, P. Kurasov, and M. Usman, “On vertex conditions for elastic systems,” *Phys. Lett. A*, 2015, **379**, No. 34–35, 1871–1876, DOI: [10.1016/j.physleta.2015.05.017](https://doi.org/10.1016/j.physleta.2015.05.017).
11. R. Ch. Kulaev, “On the solvability of a boundary value problem for a fourth-order equation on a graph,” *Diff. Equ.*, 2014, **50**, No. 1, 27–34, DOI: [10.1134/S0012266114010042](https://doi.org/10.1134/S0012266114010042).
12. R. Ch. Kulaev, “On the nonoscillation of an equation on a graph,” *Differ. Equ.*, 2015, **50**, No. 12, 1565–1566, DOI: [10.1134/S0012266114110196](https://doi.org/10.1134/S0012266114110196).
13. R. Ch. Kulaev, “Necessary and sufficient condition for the positivity of the Green function of a boundary value problem for a fourth-order equation on a graph,” *Differ. Equ.*, 2015, **51**, No. 3, 303–317, DOI: [10.1134/S0012266115030039](https://doi.org/10.1134/S0012266115030039).
14. R. Ch. Kulaev, “Oscillation of the Green function of a multipoint boundary value problem for a fourth-order equation,” *Differ. Equ.*, 2015, **51**, No. 4, 1–15, DOI: [10.1134/S0012266115040035](https://doi.org/10.1134/S0012266115040035).
15. R. Ch. Kulaev, “The qualitative theory of fourth-order differential equations on a graph,” *Mediterr. J. Math.*, 2022, **19**, No. 73, 1–16, DOI: [10.1007/s00009-022-02005-6](https://doi.org/10.1007/s00009-022-02005-6).
16. R. Ch. Kulaev and A. A. Urtaeva, “Spectral properties of a fourth-order differential operator on a network,” *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2023, **46**, No. 1, 15743–15763, DOI: [10.1002/mma.9424](https://doi.org/10.1002/mma.9424).
17. Yu. V. Pokornyi and V. L. Pryadiev, “Some problems of the qualitative Sturm–Liouville theory on a spatial network,” *Russ. Math. Surv.*, 2004, **59**, No. 3, 515–552, DOI: [10.1070/RM2004v059n03ABEH000738](https://doi.org/10.1070/RM2004v059n03ABEH000738).

R. Ch. Kulaev

North Ossetian State University after K. L. Khetagurov, Vladikavkaz, Russia

Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia

E-mail: r.ch.kulaev@yandex.ru, eLIBRARY SPIN-code: 4941-1764, eLIBRARY AuthorID: 360127, ResearcherID: [AAO-6785-2021](https://orcid.org/0000-0002-1501-5024), Scopus: 26532903900, ORCID: 0000-0002-1501-5024

V. A. Eloeva

North Ossetian State University after K. L. Khetagurov, Vladikavkaz, Russia

Southern Mathematical Institute of the Vladikavkaz Scientific Center of the Russian Academy of Sciences, Vladikavkaz, Russia

E-mail: v.a.eloeva@yandex.ru, Scopus: 60090703300

О НАИЛУЧШЕМ СРЕДНЕКВАДРАТИЧЕСКОМ ПРИБЛИЖЕНИИ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА $\mathcal{B}_2$

М. Р. ЛАНГАРШОВ

Московский гуманитарно-технологический университет "— Московский архитектурно-строительный институт, Москва, Россия

Аннотация. В гильбертовом пространстве Бергмана изучается задача об оценке наилучшего приближения аналитической функции в единичном круге алгебраическими многочленами через усреднение ее модуля гладкости. Найдено общее условие на весовую функцию, при котором удастся получить точную оценку. Это условие аналогично условию Шабозова—Юсупова, но дополнительно учитывает специфику пространства Бергмана. Полученные верхние оценки применены к вычислению в пространстве Бергмана поперечников некоторых классов функций по Колмогорову, Гельфанду и Бернштейну, а также линейных и проекционных поперечников.

Ключевые слова: пространство Бергмана, приближение аналитической функции, усреднение модуля гладкости, условие Шабозова—Юсупова, поперечник функции.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор искренне признателен рецензенту за внимательное чтение рукописи, ценные замечания и советы по улучшению текста. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Лангаршов М. Р. О наилучшем среднеквадратическом приближении аналитических функций в пространстве Бергмана $\mathcal{B}_2$ // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 2. С. 309–322. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-309-322](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-309-322) EDN: [BNHVFV](https://www.edn.ru/BNHVFV)

1. ВВЕДЕНИЕ

В экстремальных задачах теории приближения функций, как в действительной, так и в комплексной области, одной из наиболее важных задач является задача отыскания точной константы в неравенствах типа Джексона—Стечкина.

Известно [1, 19, 36], что под неравенством типа Джексона—Стечкина понимают неравенство, в котором величина наилучшего приближения функции конечномерным подпространством оценивается сверху через некоторую характеристику гладкости самой функции или ее некоторой производной. Первые точные константы в неравенстве Джексона в пространстве $C[0, 2\pi]$ были выявлены Н. П. Корнейчуком [10], а в пространстве $L_2[0, 2\pi]$ Н. И. Черных [23]. Первые точные результаты по наилучшим полиномиальным приближениям аналитических в круге функций в пространстве Харди принадлежат К. И. Бабенко [2] и Л. В. Тайкову [20]. Именно работа К. И. Бабенко [2] явилась отправным пунктом для получения точных значений колмогоровских поперечников в работах В. М. Тихомирова [21] и Л. В. Тайкова [20]. В пространстве Бергмана первоначальные работы, в которых были затронуты вопросы нахождения точных значений поперечников классов аналитических функций, принадлежат С. Б. Вакарчуку [4, 5]. Дальнейшим развитием задач вычисления точных констант в неравенствах типа Джексона—Стечкина, как в

действительной, так и в комплексных областях, занимались и другие математики (см., например, работы [3, 6–9, 11–17, 24–34] и литературу, приведенную в них).

В работе [16] А. А. Лигун получил точную оценку величины наилучшего приближения периодической функции тригонометрическими полиномами в пространстве L_2 через усреднение ее модуля гладкости и тем самым инициировал новое направление исследований по точным константам в теории приближений. Это направление получило значительное развитие. В работе [33] М. Ш. Шабозов и Г. А. Юсупов нашли общее условие на весовую функцию, при котором справедливы результаты А. А. Лигуна. Позднее в [14] нами была рассмотрена аналогичная в работах [16, 33] задача в весовом пространстве Бергмана $\mathcal{B}_{2,\gamma}$. В недавно опубликованной работе [30] были обобщены результаты, полученные в [33] на случай аналитических в круге функций, принадлежащих пространству Бергмана $\mathcal{B}_2$.

В настоящей работе мы продолжим исследование в данном направлении и обобщим некоторые ранее, а также недавно полученные результаты для классов аналитических функций, принадлежащих пространству Бергмана.

2. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

Пусть $\mathbb{N}$ — множество натуральных чисел, $\mathbb{Z}_+ = \mathbb{N} \cup \{0\}$. Пусть далее $\mathbb{C}$ — комплексная плоскость, $U := \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ — единичный круг в $\mathbb{C}$, $A(U)$ — множество функций, аналитических в круге U . Известно [35], что аналитическая в единичном круге функция

$$f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(f) z^k, \quad z = \rho e^{it}, \quad 0 \leq \rho < 1, \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (2.1)$$

принадлежит пространству Бергмана $\mathcal{B}_2$, если

$$\|f\|_2 := \|f\|_{\mathcal{B}_2} = \left(\frac{1}{\pi} \iint_{(U)} |f(z)|^2 d\sigma \right)^{1/2} < \infty, \quad (2.2)$$

где интеграл понимается в смысле Лебега. Через $\mathcal{P}_n$ обозначим подпространство комплексных алгебраических полиномов степени $\leq n$:

$$\mathcal{P}_n = \left\{ p_n(z) : p_n(z) = \sum_{k=0}^n a_k z^k, \quad a_k \in \mathbb{C} \right\}.$$

Величину $E_n(f)_2 = \inf\{\|f - p_n\|_2 : p_n \in \mathcal{P}_n\}$ называют *наилучшим полиномиальным сред-неквадратическим приближением* функции $f \in \mathcal{B}_2$ подпространством $\mathcal{P}_n$. Для произвольной функции $f \in \mathcal{B}_2$ имеет место соотношение [18]

$$E_{n-1}(f)_2 = \|f - T_{n-1}(f)\|_2 = \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right\}^{1/2}, \quad (2.3)$$

где $T_{n-1}(f) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k(f) z^k$ — частная сумма n -го порядка ряда Маклорена (2.1).

Записывая норму (2.2) в более удобном нам виде

$$\|f\|_2 := \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |f(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt \right)^{1/2},$$

СИМВОЛОМ

$$\Delta_h^m f(\rho e^{it}) = \sum_{k=0}^m (-1)^k C_m^k f(\rho e^{i(t+kh)})$$

обозначим разность m -го порядка функции $f(\rho e^{it})$ по аргументу t с шагом h .

Величину

$$\omega_m(f, t)_2 = \sup \left\{ \|\Delta_h^m f(\rho e^{it})\|_2 : |h| \leq t \right\} = \sup \left\{ \left(\frac{1}{\pi} \int_0^1 \int_0^{2\pi} |\Delta_h^m f(\rho e^{it})|^2 \rho d\rho dt \right)^{1/2} : |h| \leq t \right\} \quad (2.4)$$

назовем *интегральным модулем непрерывности m -го порядка функции $f \in \mathcal{B}_2$* .

Для любого $r \in \mathbb{Z}_+$ обычную производную r -го порядка функции $f \in A(U)$ обозначим через $f^{(r)}(z) = d^r f/dz^r$ ($f^{(0)}(z) \equiv f(z)$):

$$f^{(r)}(z) = \sum_{k=r}^{\infty} k(k-1)(k-2) \cdots (k-r+1) c_k(f) z^{k-r}. \quad (2.5)$$

Умножим обе части равенства (2.5) на z^s , $s \in \mathbb{Z}_+$, $s \leq r$ и получим

$$z^s f^{(r)} = \sum_{k=r}^{\infty} \alpha_{k,r} c_k(f) z^{k-r+s}, \quad (2.6)$$

где $\alpha_{k,r} = k(k-1)(k-2) \cdots (k-r+1) = \frac{k!}{(k-r)!}$, $k \geq r$.

Всюду далее через $\mathcal{B}_2^{s,(r)}(s, r \in \mathbb{Z}_+)$ обозначим множество функций $f \in A(U)$, принадлежащих пространству $\mathcal{B}_2$, у которых производные $z^s f^{(r)} \neq 0$ также принадлежат пространству $\mathcal{B}_2$, т. е. $\mathcal{B}_2^{s,(r)} = \{f(z) \in \mathcal{B}_2 : \|z^s f^{(r)}\|_2 < \infty\}$.

Под весовой функцией на отрезке $[0, u]$ будем понимать вещественную неотрицательную измеримую и суммируемую на этом же отрезке функцию $\varphi(t)$, не эквивалентную нулю, такую, для которой $\int_0^u \varphi(t) dt > 0$.

Введем в рассмотрение следующую экстремальную аппроксимационную характеристику:

$$\mathcal{K}_{m,n,r,s,q}(\varphi, u) = \sup_{\substack{f \in \mathcal{B}_2^{s,(r)} \\ z^s f^{(r)} \neq 0}} \frac{2^{m/2} E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^u \omega_m^q(z^s f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/q}}, \quad (2.7)$$

где $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $s \leq r$, $0 < q \leq 2$, $0 < t \leq u$, $0 < u \leq \pi/(n-r+s)$, φ — весовая функция на отрезке $[0, u]$.

3. ТОЧНЫЕ КОНСТАНТЫ В НЕРАВЕНСТВЕ ДЖЕКСОНА—СТЕЧКИНА

Теорема 3.1. Если $m, n \in \mathbb{N}$, $s, r \in \mathbb{Z}_+$, $n > r$, $0 < q \leq 2$, $0 < u \leq \pi/(n-r+s)$ и φ — весовая на отрезке $[0, u]$ функция, то справедливы неравенства

$$\{G_{m,n,r,s,q}(\varphi; u)\}^{-1} \leq \mathcal{K}_{m,n,r,s,q}(\varphi, u) \leq \left\{ \inf_{n \leq k < \infty} G_{m,k,r,s,q}(\varphi; u) \right\}^{-1}, \quad (3.1)$$

где

$$G_{m,k,r,s,q}(\varphi; u) = \left[\alpha_{k,r}^q \left(\frac{k+1}{k-r+s+1} \right)^{q/2} \int_0^u (1 - \cos(k-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right]^{1/q}. \quad (3.2)$$

Доказательство. Применяя формулу (2.4) к функции (2.6), будем иметь:

$$\omega_m^2(z^s f^{(r)}, t)_2 = 2^m \sup_{|u| \leq t} \sum_{k=r}^{\infty} \frac{\alpha_{k,r}^2}{k-r+s+1} |c_k(f)|^2 (1 - \cos(k-r+s)u)^m. \quad (3.3)$$

Для установления двойного неравенства (3.1) воспользуемся следующим так называемым «упрощенным» вариантом неравенства Минковского [37, с. 104]:

$$\left(\int_0^u \left(\sum_{k=n}^{\infty} |f_k(t)|^2 \right)^{q/2} dt \right)^{1/q} \geq \left(\sum_{k=n}^{\infty} \left(\int_0^u |f_k(t)|^q dt \right)^{2/q} \right)^{1/2},$$

справедливого при $0 < q \leq 2$ и любом $u \in \mathbb{R}_+$. С учетом соотношения (3.3) и равенства (2.3) запишем

$$\begin{aligned} & \left(\int_0^u \omega_m^q(z^s f^{(r)}, t)_{2, \varphi(t)} dt \right)^{1/q} \geq \\ & \geq \left\{ \int_0^u 2^{mq/2} \left[\sum_{k=r}^{\infty} \frac{\alpha_{k,r}^2}{k-r+s+1} |c_k(f)|^2 (1 - \cos(k-r+s)t)^m \right]^{q/2} \varphi(t) dt \right\}^{1/q} \geq \\ & \geq 2^{m/2} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \left[\frac{\alpha_{k,r}^q}{(\sqrt{k-r+s+1})^q} |c_k(f)|^q \int_0^u (1 - \cos(k-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right]^{2/q} \right\}^{1/2} = \\ & = 2^{m/2} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \left[\left(\alpha_{k,r}^q \left(\frac{k+1}{k-r+s+1} \right)^{q/2} \int_0^u (1 - \cos(k-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right) \right]^{2/q} \right\}^{1/2} = \\ & = 2^{m/2} \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} [(G_{k,m,r,s,q}(\varphi; u))^q]^{2/q} \right\}^{1/2} \geq 2^{m/2} \inf_{n \leq k < \infty} G_{m,k,r,s,q}(\varphi; u) \left\{ \sum_{k=n}^{\infty} \frac{|c_k(f)|^2}{k+1} \right\}^{1/2} = \\ & = 2^{m/2} \inf_{n \leq k < \infty} G_{m,k,r,s,q}(\varphi; u) E_{n-1}(f)_2. \end{aligned}$$

Таким образом, получили следующее неравенство:

$$\frac{2^{m/2} E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^u \omega_m^q(z^s f^{(r)}, t)_{2, \varphi(t)} dt \right)^{1/q}} \leq \left\{ \inf_{n \leq k < \infty} G_{m,k,r,s,q}(\varphi; u) \right\}^{-1},$$

откуда следует оценка сверху для величины (2.7):

$$\mathcal{K}_{m,n,r,s,q}(\varphi, u) \leq \left\{ \inf_{n \leq k < \infty} G_{m,k,r,s,q}(\varphi; u) \right\}^{-1}. \quad (3.4)$$

С целью получения оценки снизу указанной величины введем в рассмотрение функцию $f_0(z) = z^n \in \mathcal{B}_2^{s,(r)}$. Для этой функции непосредственными вычислениями получим

$$E_{n-1}(f_0)_2 = \frac{1}{\sqrt{n+1}}, \quad \omega_m(z^s f_0^{(r)}, t)_2 = 2^{m/2} \frac{\alpha_{n,r}}{\sqrt{n-r+s+1}} (1 - \cos(n-r+s)t)^{m/2}.$$

Используя два последних равенства, получим оценку снизу для величины $\mathcal{K}_{m,n,r,s,q}(\varphi, u)$:

$$\mathcal{K}_{m,n,r,s,q}(\varphi, u) \geq \frac{2^{m/2} E_{n-1}(f_0)_2}{\left(\int_0^u \omega_m^q(z^s f_0^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/q}} =$$

$$= \frac{1}{\left(\alpha_{n,r}^q \left(\frac{n+1}{n-r+s+1} \right)^{q/2} \int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right)^{1/q}} = \{G_{m,n,r,s,q}(\varphi; u)\}^{-1}. \quad (3.5)$$

Сравнивая оценку сверху (3.4) и оценку снизу (3.5), получим утверждение теоремы 3.1. $\square$

Из теоремы 3.1, в частности, при $s = r$ следует результат автора [12, 13], а при $s = 0$ вытекает результат М. Ш. Шабозова и Х. М. Хуромонова из работы [30].

Далее определим, какими дифференциальными свойствами должна обладать весовая функция $\varphi(t)$, $0 \leq t \leq u$, чтобы имело место равенство

$$\inf \{G_{m,k,r,s,q}(\varphi; u) : n \leq k < \infty\} = \{G_{m,n,r,s,q}(\varphi; u)\}. \quad (3.6)$$

Теорема 3.2. Пусть весовая функция $\varphi(t) > 0$ дифференцируема на отрезке $[0, u]$, и пусть для всех $m, k, n, r \in \mathbb{N}$, $s \in \mathbb{Z}_+$, $k \geq n > r \geq s$, $0 \leq t \leq u$, $0 < u \leq \pi/(n-r+s)$, $0 < q \leq 2$ выполняется неравенство

$$\left[\frac{q}{2} \left(\frac{1}{k+1} + \frac{k-r+2s+1}{(k-r+1)(k-r+s+1)} \right) + q \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{k-1} + \dots + \frac{1}{k-r+2} \right) \right] \varphi(t) - \\ - \frac{1}{k-r+s} [\varphi(t) + t\varphi'(t)] \geq 0.$$

Тогда имеет место соотношение (3.6), и следовательно

$$\sup_{f \in \mathcal{B}_2^{s,(r)}} \frac{E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^u \omega_m^q(z^s f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/q}} = \\ = \frac{1}{2^{m/2} \alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+s+1}{n+1}} \left\{ \int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right\}^{-1/q}. \quad (3.7)$$

Доказательство. Используя величину (3.2), введем в рассмотрение функцию натурального аргумента

$$y(k) = \alpha_{k,r}^q \left(\frac{k+1}{k-r+s+1} \right)^{q/2} \int_0^u (1 - \cos(k-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt$$

и покажем, что эта функция при $k \geq n > r \geq s$ является монотонно возрастающей. С этой целью исследуем поведение соответствующей непрерывной функции

$$\varphi(x) = \alpha_{x,r}^q \left(\frac{x+1}{x-r+s+1} \right)^{q/2} \int_0^u (1 - \cos(x-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt, \quad (3.8)$$

где $x \geq n > r \geq s$. Из равенства (3.8) имеем

$$\left[\alpha_{x,r}^q \left(\frac{x+1}{x-r+s+1} \right)^{q/2} \right]' = (\alpha_{x,r}^q)' \left(\frac{x+1}{x-r+s+1} \right)^{q/2} + \alpha_{x,r}^q \left[\left(\frac{x+1}{x-r+s+1} \right)^{q/2} \right]' = \\ = \alpha_{x,r}^q \left(\frac{x+1}{x-r+s+1} \right)^{q/2} \left[\frac{q}{2} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x-r+2s+1}{(x-r+s+1)(x-r+1)} \right) + \right. \\ \left. + q \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-r+2} \right) \right]; \\ \left[\int_0^u (1 - \cos(x-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right]'_x = \int_0^u \frac{d}{dx} (1 - \cos(x-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt.$$

Далее, пользуясь очевидным тождеством

$$\frac{d}{dx}(1 - \cos(x - r + s)t)^{mq/2} = \frac{t}{x - r + s} \cdot \frac{d}{dt}(1 - \cos(x - r + s)t)^{mq/2}$$

и применением метода интегрирования по частям, получим:

$$\begin{aligned} & \left[\int_0^u (1 - \cos(x - r + s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right]'_x = \\ & = \frac{1}{x - r + s} \left[u \varphi(u) (1 - \cos(x - r + s)u)^{mq/2} - \int_0^u (1 - \cos(x - r + s)t)^{mq/2} (\varphi(t) + t \varphi'(t)) dt \right]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \varphi'(x) = \alpha_{x,r}^q & \left(\frac{x+1}{x-r+s+1} \right)^{q/2} \left\{ \frac{1}{x-r+s} u \varphi(u) (1 - \cos(x-r+s)u)^{mq/2} + \right. \\ & + \int_0^u (1 - \cos(x-r+s)t)^{mq/2} \left\{ \left[\frac{q}{2} \left(\frac{1}{x+1} + \frac{x-r+2s+1}{(x-r+1)(x-r+s+1)} \right) + \right. \right. \\ & \left. \left. + q \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{x-1} + \dots + \frac{1}{x-r+2} \right) \right] \varphi(t) - \frac{1}{x-r+s} [\varphi(t) + t \varphi'(t)] \right\} dt \right\} \geq 0. \end{aligned}$$

Соответственно, отсюда вытекает, что $\inf \{y(k) : k \geq n\} = y(n)$.

Таким образом, $\inf_{n \leq k < \infty} G_{m,k,r,s,q}(\varphi; u) = G_{m,n,r,s,q}(\varphi; u)$, откуда в силу двойного неравенства (3.1) получаем (3.7). Теорема 3.2 доказана. $\square$

Из равенства (3.7) при различных значениях параметров s и q , а также различном виде весовой функции $\varphi(t)$ вытекают некоторые ранее полученные результаты. Например, величины $\mathcal{K}_{m,n,r,2}(1, u)$, $\mathcal{K}_{m,n,r,2}(\sin(\pi t/u), u)$, $\mathcal{K}_{m,n,r,2/m}(\sin nt, u)$, $\mathcal{K}_{m,n,r,q}(\varphi, u)$, $\mathcal{K}_{m,n,r,0,2/m}(1, u)$, $\mathcal{K}_{m,n,r,0,q}(\varphi, u)$, $\mathcal{K}_{m,n,r,0,2}(\sin(\pi t/u), u)$ были рассмотрены в работах [11, 13, 15, 17, 24, 25, 27, 28].

Из доказанной теоремы вытекают следующие следствия.

Следствие 3.1. В условиях теоремы 3.2 при $\varphi(t) \equiv 1$ справедливо равенство

$$\sup_{\substack{f \in \mathcal{B}_2^{s,(r)} \\ z^s f^{(r)} \neq 0}} \frac{2^{m/2} E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^u \omega_m^q(z^s f^{(r)}, t)_2 dt \right)^{1/q}} = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+s+1}{n+1}} \left(\int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} dt \right)^{-1}. \quad (3.9)$$

Следствие 3.2. В условиях теоремы 3.2 при $\varphi(t) = t$ имеет место равенство

$$\sup_{\substack{f \in \mathcal{B}_2^{s,(r)} \\ z^s f^{(r)} \neq 0}} \frac{2^{m/2} E_{n-1}(f)_2}{\left(\int_0^u t \omega_m^q(z^s f^{(r)}, t)_2 dt \right)^{1/q}} = \frac{1}{\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+s+1}{n+1}} \int_0^u t (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} dt.$$

4. ВЕРХНИЕ ГРАНИ КЛАССОВ $W_{m,q}^{s,(r)}(u, \Phi)$ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathcal{B}_2$

Пусть $\Phi(u)$ — произвольная непрерывная возрастающая при $u \geq 0$ функция такая, что $\Phi(0) = 0$. Символом $W_{m,q}^{s,(r)}(u, \Phi)$, $m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $r \geq s$, $0 < q \leq 2$, $0 < u \leq \pi/(n-r+s)$ обозначим класс функций $f \in \mathcal{B}_2^{s,(r)}$, для которых имеет место неравенство

$$\left(\frac{1}{u} \int_0^u \omega_m^q(z^s f^{(r)}, t)_2 dt \right)^{1/q} \leq \Phi(u).$$

Требуется при любых $n \in \mathbb{N}$ и $r, s \in \mathbb{Z}_+$ найти точное значение величины

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_{m,q}^{s,(r)}(u, \Phi))_2 := \sup \{E_{n-1}(f)_2 : f \in W_{m,q}^{s,(r)}(u, \Phi)\}. \quad (4.1)$$

Теорема 4.1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$, $0 < q \leq 2$ и $0 < u \leq \pi/(n - r + s)$. Тогда имеет место равенство

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_{m,q}^{s,(r)}(u, \Phi)) = \frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+s+1}{n+1}} \left(\frac{1}{u} \int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} dt \right)^{-1/q} \Phi(u). \quad (4.2)$$

Доказательство. Из соотношения (3.9) для любого $f \in \mathcal{B}_2^{s,(r)}$ имеем неравенство

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{\left(\frac{1}{u} \int_0^u \omega_m^q(z^s f^{(r)}, t)_2 dt \right)^{1/q}}{2^{m/2}\alpha_{n,r} \sqrt{\frac{n+1}{n-r+s+1}} \left(\frac{1}{u} \int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} dt \right)^{1/q}}. \quad (4.3)$$

Используя определение класса $W_{m,q}^{s,(r)}(u, \Phi)$, из формул (4.1) и (4.3) получим оценку сверху

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{n-1}(W_{m,q}^{s,(r)}(u, \Phi))_2 &= \sup \{E_{n-1}(f)_2 : f \in W_{m,q}^{s,(r)}(u, \Phi)\} \leq \\ &\leq \frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+s+1}{n+1}} \left(\frac{1}{u} \int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} dt \right)^{-1/q} \Phi(u). \end{aligned} \quad (4.4)$$

С целью получения оценки снизу будем рассматривать функцию

$$g(z) = \frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}} \sqrt{n-r+s+1} \left(\frac{1}{u} \int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} dt \right)^{-1/q} \Phi(u) z^n.$$

Докажем, что $g(z) \in W_{m,q}^{s,(r)}(u, \Phi)$. Так как

$$z^s g^{(r)}(z) = \frac{1}{2^{m/2}} \sqrt{n-r+s+1} \left(\frac{1}{u} \int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} dt \right)^{-1/q} \Phi(u) z^{n-r+s},$$

то простыми вычислениями из (2.4) получаем

$$\omega_m(z^s g^{(r)}, t) = (1 - \cos(n-r+s)t)^{m/2} \left(\frac{1}{u} \int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} dt \right)^{-1/q} \Phi(u). \quad (4.5)$$

Используя равенство (4.5) и определение класса $W_{m,q}^{s,(r)}(u, \Phi)$, приходим к следующему выражению:

$$\begin{aligned} \frac{1}{u} \int_0^u \omega_m^q(z^s g^{(r)}, t)_2 dt &= \\ &= \frac{1}{u} \int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} dt \left(\frac{1}{u} \int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} dt \right)^{-1} \Phi^q(u) = \Phi^q(u). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Равенство (4.6) означает, что $g(z) \in W_{m,q}^{s,(r)}(u, \Phi)$. Поэтому мы имеем

$$\mathcal{E}_{n-1}(W_{m,q}^{s,(r)}(u, \Phi))_2 := \sup \{E_{n-1}(f)_2 : f \in W_{m,q}^{s,(r)}(u, \Phi)\} \geq E_{n-1}(g)_2 =$$

$$= \frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}} \sqrt{n-r+s+1} \left(\frac{1}{u} \int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} dt \right)^{-1/q} \Phi(u) E_{n-1}(z^n)_2. \quad (4.7)$$

Так как $E_{n-1}(z^n)_2 = \frac{1}{\sqrt{n+1}}$, то из (4.7) получим

$$\mathcal{E}_{n-1} \left(W_{m,q}^{s,(r)}(u, \Phi) \right)_2 \geq \frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+s+1}{n+1}} \left(\frac{1}{u} \int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} dt \right)^{-1/q} \Phi(u). \quad (4.8)$$

Сопоставляя неравенства (4.4) и (4.8), получаем требуемое равенство (4.2). Теорема 3.2 доказана. $\square$

5. ПОПЕРЕЧНИКИ КЛАССОВ $W_{m,q}^{s,(r)}(u)$ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathcal{B}_2$

Пусть S — единичный шар в пространстве $\mathcal{B}_2$, $\mathfrak{N}$ — выпуклое центрально-симметричное подмножество из $\mathcal{B}_2$, $\Lambda_n \subset \mathcal{B}_2$ — n -мерное подпространство, $\Lambda^n \subset \mathcal{B}_2$ — подпространство коразмерности n , $\mathcal{L}: \mathcal{B}_2 \rightarrow \Lambda_n$ — непрерывный линейный оператор, переводящий элементы пространства $\mathcal{B}_2$ в Λ_n ; $\mathcal{L}^\perp: \mathcal{B}_2 \rightarrow \Lambda_n$ — непрерывный оператор линейного проектирования $\mathcal{B}_2$ на подпространство Λ_n .

Величины

$$\begin{aligned} b_n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_2) &= \sup \{ \sup \{ \varepsilon > 0; \varepsilon S \cap \Lambda_{n+1} \subset \mathfrak{N} \} : \Lambda_{n+1} \subset \mathcal{B}_2 \}, \\ d_n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_2) &= \inf \{ \sup \{ \inf \{ \|f - \varphi\|_{\mathcal{B}_2} : \varphi \in \Lambda_n \} : f \in \mathfrak{N} \} : \Lambda_n \subset \mathcal{B}_2 \}, \\ \lambda_n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_2) &= \inf \{ \inf \{ \sup \{ \|f - \mathcal{L}f\|_{\mathcal{B}_2} : f \in \mathfrak{N} \} : \mathcal{L}\mathcal{B}_2 \subset \Lambda_n \} : \Lambda_n \subset \mathcal{B}_2 \}, \\ d^n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_2) &= \inf \{ \sup \{ \|f\|_{\mathcal{B}_2} : f \in \mathfrak{N} \cap \Lambda^n \} : \Lambda^n \subset \mathcal{B}_2 \}, \\ \Pi_n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_2) &= \inf \left\{ \inf \left\{ \sup \left\{ \|f - \mathcal{L}^\perp f\|_{\mathcal{B}_2} : f \in \mathfrak{N} \right\} : \mathcal{L}^\perp \mathcal{B}_2 \subset \Lambda_n \right\} : \Lambda_n \subset \mathcal{B}_2 \right\}, \end{aligned}$$

называют соответственно бернштейновским, колмогоровским, линейным, гильбертовским и проекционным n -поперечниками. Так как $\mathcal{B}_2$ является гильбертовым пространством, то между перечисленными n -поперечниками выполняются следующие соотношения [22, с. 239]:

$$b_n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_2) \leq d^n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_2) \leq d_n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_2) = \lambda_n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_2) = \Pi_n(\mathfrak{N}, \mathcal{B}_2). \quad (5.1)$$

Через $W_{m,q}^{s,(r)}(u, \varphi)$, где $m \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $0 < q \leq 2$, $0 < u \leq \pi/(n-r+s)$, обозначим класс функций $f \in \mathfrak{B}_2^{s,(r)}$, удовлетворяющих условию $\int_0^u \omega_m^q(z^s f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \leq 1$.

Положим также

$$(1 - \cos(n-r+s)t)_*^m = \begin{cases} (1 - \cos(n-r+s)t)^m, & \text{если } (n-r+s)t < \pi, \\ 2^m, & \text{если } (n-r+s)t \geq \pi. \end{cases} \quad (5.2)$$

Теорема 5.1. Пусть $m, n \in \mathbb{N}$, $r, s \in \mathbb{Z}_+$, $n > r \geq s$, $0 < q \leq 2$, $0 < u \leq \pi/(n-r+s)$, φ — весовая на $[0, u]$ функция. Тогда справедливо следующее равенство:

$$\begin{aligned} \sigma_n \left(W_{m,q}^{s,(r)}(u, \varphi), \mathcal{B}_2 \right) &= \mathcal{E}_{n-1} \left(W_{m,q}^{s,(r)}(u, \varphi) \right)_2 = \\ &= \frac{1}{2^{m/2}\alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+s+1}{n+1}} \left(\int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right)^{-1/q}, \end{aligned} \quad (5.3)$$

где $\sigma_n(\cdot)$ — любой из вышеперечисленных n -поперечников.

Доказательство. Из (3.7) для произвольной функции $f \in \mathcal{B}_2^{s,(r)}$ вытекает неравенство

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{\left(\int_0^u \omega_m^q(z^s f^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt \right)^{1/q}}{2^{m/2} \alpha_{n,r} \sqrt{\frac{n+1}{n-r+s+1}} \left(\int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right)^{1/q}}.$$

Отсюда, учитывая определение класса $W_{m,q}^{s,(r)}(u, \varphi)$, имеем

$$E_{n-1}(f)_2 \leq \frac{1}{2^{m/2} \alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+s+1}{n+1}} \left(\int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right)^{-1/q}.$$

Из последнего неравенства получим оценку сверху для проекционного n -поперечника

$$\begin{aligned} \Pi_n \left(W_{m,q}^{s,(r)}(u, \varphi); \mathcal{B}_2 \right) &\leq \mathcal{E}_{n-1} \left(W_{m,q}^{s,(r)}(u, \varphi) \right)_2 \leq \\ &\leq \frac{1}{2^{m/2} \alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+s+1}{n+1}} \left(\int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right)^{-1/q}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Для получения оценки снизу рассматриваемых n -поперечников введем в рассмотрение шар

$$S_{n+1} = \left\{ p_n \in \mathcal{P}_n : \|p_n\|_2 \leq \frac{1}{2^{m/2} \alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+s+1}{n+1}} \left(\int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right)^{-1/q} \right\}$$

и покажем, что $S_{n+1} \in W_{m,q}^{s,(r)}(u, \varphi)$. Для любого $p_n \in \mathcal{P}_n$ имеет место неравенство

$$\omega_m^2(z^s p_n^{(r)}, t)_2 \leq 2^m \alpha_{n,r}^2 \frac{n+1}{n-r+s+1} (1 - \cos(n-r+s)t)_*^m \|p_n\|_2^2. \quad (5.5)$$

Возведем обе части неравенства (5.5) в степень $q/2$, результат умножим на $\varphi(t)$, и полученное неравенство проинтегрируем по переменной t от 0 до u , после чего согласно условию (5.2) получим

$$\begin{aligned} \int_0^u \omega_m^q(z^s p_n^{(r)}, t)_2 \varphi(t) dt &\leq 2^{mq/2} \alpha_{n,r}^q \left(\frac{n+1}{n-r+s+1} \right)^{q/2} \int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)_*^{mq/2} \varphi(t) dt \|p_n\|_2^q = \\ &= 2^{mq/2} \alpha_{n,r}^q \left(\frac{n+1}{n-r+s+1} \right)^{q/2} \int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \times \\ &\times \left(\frac{1}{2^{m/2} \alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+s+1}{n+1}} \left(\int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right)^{-1/q} \right)^q = 1. \end{aligned}$$

Это означает, что $S_{n+1} \in W_{m,q}^{s,(r)}(u, \varphi)$. Используя определение бернштейновского поперечника, запишем оценку снизу всех n -поперечников

$$\begin{aligned} b_n \left(W_{m,q}^{s,(r)}(u, \varphi), \mathcal{B}_2 \right) &\geq b_n(S_{n+1}, \mathcal{B}_2) = \\ &= \frac{1}{2^{m/2} \alpha_{n,r}} \sqrt{\frac{n-r+s+1}{n+1}} \left(\int_0^u (1 - \cos(n-r+s)t)^{mq/2} \varphi(t) dt \right)^{-1/q}. \end{aligned} \quad (5.6)$$

Из сопоставления неравенств (5.4) и (5.6) с учетом соотношения (5.1) получим равенство (5.3). Теорема 5.1 доказана. $\square$

Из теоремы 5.1, в частности, при $s = r$, $q = 2$ и $\varphi(t) = \sin \frac{\pi}{h}t$ вытекает результат, полученный в работе [11].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н. И. Лекции по теории аппроксимации. — М.: Гостехиздат, 1947.
2. Бабенко К. И. О наилучших приближениях одного класса аналитических функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1958. — 22, № 5. — С. 631–640.
3. Бабенко А. Г. Точное неравенство Джексона–Стечкина в пространстве L^2 функций на многомерной сфере // Мат. заметки. — 1996. — 60, № 3. — С. 333–355. — DOI: [10.4213/mzm1834](https://doi.org/10.4213/mzm1834).
4. Вакарчук С. Б. О поперечниках некоторых классов аналитических в единичном круге функций // Укр. мат. ж. — 1990. — 42, № 7. — С. 873–881.
5. Вакарчук С. Б. Наилучшие линейные методы приближения и поперечники классов аналитических в круге функций // Мат. заметки. — 1995. — 57, № 1. — С. 30–39.
6. Вакарчук С. Б. Неравенства типа Джексона и поперечники классов функций в L_2 // Мат. заметки. — 2006. — 80, № 1. — С. 11–19. — DOI: [10.4213/mzm2774](https://doi.org/10.4213/mzm2774).
7. Вакарчук С. Б. О приближении классическими ортогональными полиномами с весом в пространствах $L_{2,\gamma}(a, b)$ и о поперечниках функциональных классов // Изв. вузов. Сер. Мат. — 2019. — № 12. — С. 37–51. — DOI: [10.26907/0021-3446-2019-12-37-51](https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-12-37-51).
8. Есмаганбетов М. Г. Поперечники классов из $L_2[0, 2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона // Мат. заметки. — 1999. — 65, № 6. — С. 816–820. — DOI: [10.4213/mzm1117](https://doi.org/10.4213/mzm1117).
9. Иванов В. И. О точности неравенства Джексона в пространствах L_p на полупрямой со степенным весом // Мат. заметки. — 2015. — 98, № 5. — С. 684–694. — DOI: [10.4213/mzm10894](https://doi.org/10.4213/mzm10894).
10. Корнейчук Н. П. Точная константа в теореме Д. Джексона о наилучшем равномерном приближении непрерывных периодических функций // Докл. АН СССР. — 1962. — 145, № 3. — С. 514–516.
11. Лангаршоев М. Р. Значение поперечников некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана B_2 // Вестн. ХГУ. — 2000. — 1, № 3. — С. 63–69.
12. Лангаршоев М. Р. Наилучшее приближение аналитических функций в пространстве Бергмана // Дисс. к.ф.-м.н. — Душанбе, 2008.
13. Лангаршоев М. Р. О значении поперечников классов аналитических функций в пространстве Бергмана // Межд. конф. «Соврем. пробл. мат. анализа и теории функций». — Душанбе, 2012. — С. 80–83.
14. Лангаршоев М. Р. Неравенства типа Джексона–Стечкина и поперечники классов функций в весовом пространстве Бергмана // Чебышевский сб. — 2021. — 22, № 2. — С. 135–144. — DOI: [10.22405/2226-8383-2021-22-2-135-144](https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-2-135-144).
15. Лангаршоев М. Р. О наилучшем среднеквадратическом приближении аналитических функций в пространстве Бергмана // Межд. конф. «Соврем. пробл. теории функций и их прилож.». — Саратов, 2024. — С. 146–148.
16. Лигун А. А. Некоторые неравенства между наилучшими приближениями и модулями непрерывности в пространстве L_2 // Мат. заметки. — 1978. — 24, № 6. — С. 785–792.
17. Пиров Х. Х., Лангаршоев М. Р. Значение поперечников некоторых классов аналитических функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков, в пространстве Бергмана // Докл. АН. Респ. Тадж. — 2011. — 54, № 7. — С. 519–525.
18. Смирнов В. И., Лебедев Н. А. Конструктивная теория функций комплексного переменного. — М.—Л.: Наука, 1964.
19. Стечкин С. Б. О порядке наилучших приближений непрерывных функций // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1951. — 15. — С. 219–242.
20. Тайков Л. В. О наилучшем приближении в среднем некоторых классов аналитических функций // Мат. заметки. — 1967. — 1, № 2. — С. 155–162.
21. Тихомиров В. М. Поперечники множеств в функциональных пространствах и теория наилучших приближений // Усп. мат. наук. — 1960. — 15, № 3. — С. 81–120.
22. Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. — М.: МГУ, 1976.
23. Черных Н. И. О неравенстве Джексона в L_2 // Тр. МИАН. — 1967. — 88. — С. 71–74.
24. Шабозов М. Ш. Поперечники некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана // Докл. РАН. — 2002. — 383, № 2. — С. 171–174.
25. Шабозов М. Ш., Лангаршоев М. Р. Приближение некоторых классов аналитических функций в пространстве B_p // Вестн. ХГУ. — 1999. — 1, № 1. — С. 45–50.

26. Шабозов М. Ш., Саидусайнов М. С. Среднеквадратичное приближение функций комплексной переменной рядами Фурье в весовом пространстве Бергмана // Владикавказ. мат. ж. — 2018. — 20, № 1. — С. 86–97. — DOI: [10.23671/VNC.2018.1.11400](https://doi.org/10.23671/VNC.2018.1.11400).
27. Шабозов М. Ш., Тухлиев Д. К. О среднеквадратическом приближении функций в пространстве Бергмана B_2 и значение поперечников некоторых классов функций // Уфимск. мат. ж. — 2024. — 16, № 2. — С. 67–76. — DOI: [10.13108/2024-16-2-66](https://doi.org/10.13108/2024-16-2-66).
28. Шабозов М. Ш., Тухлиев Д. К. О поперечниках некоторых классов аналитических функций в пространстве Бергмана // Чебышевский сб. — 2025. — 26, № 1. — С. 116–130. — DOI: [10.22405/2226-8383-2025-26-1-116-130](https://doi.org/10.22405/2226-8383-2025-26-1-116-130).
29. Шабозов М. Ш., Хуромонов Х. М. О наилучшем приближении в среднем функций комплексного переменного рядами Фурье в пространстве Бергмана // Изв. вузов. Сер. Мат. — 2020. — № 2. — С. 74–92. — DOI: [10.26907/0021-3446-2020-2-74-92](https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-2-74-92).
30. Шабозов М. Ш., Хуромонов Х. М. О наилучшем полиномиальном приближении аналитических функций в пространстве Бергмана B_2 // Изв. вузов. Сер. Мат. — 2025. — № 4. — С. 90–103. — DOI: [10.26907/0021-3446-2025-4-91-103](https://doi.org/10.26907/0021-3446-2025-4-91-103).
31. Шабозов М. Ш., Шабозов О. Ш. О наилучшем приближении некоторых классов аналитических функций в весовых пространствах Бергмана // Докл. РАН. — 2007. — 412, № 4. — С. 466–469.
32. Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А. Наилучшее приближение и значения поперечников некоторых классов аналитических функций // Докл. РАН. — 2002. — 382, № 6. — С. 747–749.
33. Шабозов М. Ш., Юсупов Г. А. Наилучшие полиномиальные приближения в L_2 некоторых классов 2π -периодических функций и точные значения их поперечников // Мат. заметки. — 2011. — 90, № 5. — С. 764–775. — DOI: [10.4213/mzm8821](https://doi.org/10.4213/mzm8821).
34. Шалаев В. В. О поперечниках в L_2 классов дифференцируемых функций, определяемых модулями непрерывности высших порядков // Укр. мат. ж. — 1991. — 43, № 1. — С. 125–129.
35. Bergman S. The kernel function and conformal mapping. — Providence: Am. Math. Soc., 1950. — DOI: [10.1090/surv/005](https://doi.org/10.1090/surv/005).
36. Jackson D. On approximation by trigonometric sums and polynomials // Trans. Am. Math. Soc. — 1912. — 13. — С. 491–515. — DOI: [10.1090/S0002-9947-1912-1500930-2](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1912-1500930-2).
37. Pinkus A. n-Widths in approximation theory. — Berlin: Springer, 1985. — DOI: [10.1007/978-3-642-69894-1](https://doi.org/10.1007/978-3-642-69894-1).

М. Р. Лангаршоев

Московский гуманитарно-технологический университет "— Московский архитектурно-строительный институт, Москва, Россия

E-mail: mukhtor77@mail.ru, РИНЦ SPIN-код: 6739-7777, РИНЦ AuthorID: [828107](https://elibrary.ru/authors/828107), Scopus: [55790260900](https://orcid.org/0000-0002-3278-4781), ORCID: [0000-0002-3278-4781](https://orcid.org/0000-0002-3278-4781)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-309-322](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-309-322)EDN: [BHHVFFV](https://www.edn.ru/BHHVFFV)

UDC 517.5

Research article

On the best mean-square approximation of analytic functions in the Bergman space $\mathcal{B}_2$

M. R. Langarshoev

*Moscow University of Humanities and Technology — Moscow Institute of Architecture and Construction,
Moscow, Russia*

Abstract. In a Bergman Hilbert space, we study the problem of estimating the best approximation of an analytic function in the unit disk by algebraic polynomials via averaging its modulus of smoothness. A general condition on the weight function is found that allows us to obtain an exact estimate. This condition is analogous to the Shabozov–Yusupov condition but additionally takes into account the specific features of the Bergman space. The resulting upper bounds are applied to calculating the diameters of certain classes of functions in the Kolmogorov, Gelfand, and Bernstein classes, as well as linear and projection diameters, in the Bergman space.

Keywords: Bergman space, approximation of an analytic function, averaging of the modulus of smoothness, Shabozov–Yusupov condition, diameter of a function.

Conflict-of-interest. The author declares no conflict of interest.

Acknowledgments and funding. The author sincerely thanks the reviewer for their careful reading of the manuscript, valuable comments, and suggestions for improving the text. The author declares no financial support.

For citation: M. R. Langarshoev, “On the best mean-square approximation of analytic functions in the Bergman space $\mathcal{B}_2$,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 2, 309–322. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-309-322](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-309-322) EDN: [BHHVFFV](https://www.edn.ru/BHHVFFV)

REFERENCES

1. N. I. Akhiezer, *Lektsii po Teorii Approksimatsii* [Lectures on Approximation Theory], Gostekhizdat, Moscow, 1947 (in Russian).
2. K. I. Babenko, “O nailuchshikh priblizheniyakh odnogo klassa analiticheskikh funktsiy” [On the best approximations of one class of analytic functions], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1958, **22**, No. 5, 631–640 (in Russian).
3. A. G. Babenko, “Tochnoe neravenstvo Dzheksona–Stechkina v prostranstve L^2 funktsiy na mnogomernoy sfere” [The exact Jackson–Stechkin inequality in the space of L^2 functions on a multidimensional sphere], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 1996, **60**, No. 3, 333–355 (in Russian), DOI: [10.4213/mzm1834](https://doi.org/10.4213/mzm1834).
4. S. B. Vakarchuk, “O poperechnikakh nekotorykh klassov analiticheskikh v edinichnom kruge funktsiy” [On the diameters of some classes of functions analytic in the unit circle], *Ukr. Mat. Zh.* [Ukr. Math. J.], 1990, **42**, No. 7, 873–881 (in Russian).
5. S. B. Vakarchuk, “Nailuchshie lineynye metody priblizheniya i poperechniki klassov analiticheskikh v kruge funktsiy” [Best linear approximation methods and diameters of classes of functions analytic in a circle], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 1995, **57**, No. 1, 30–39 (in Russian).
6. S. B. Vakarchuk, “Neravenstva tipa Dzheksona i poperechniki klassov funktsiy v L_2 ” [Jackson-type inequalities and widths of classes of functions in L_2], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2006, **80**, No. 1, 11–19 (in Russian), DOI: [10.4213/mzm2774](https://doi.org/10.4213/mzm2774).



7. S. B. Vakarchuk, “O priblizhenii klassicheskimi ortogonal’nymi polinomami s vesom v prostranstvakh $L_{2,\gamma}(a, b)$ i o poperechnikakh funktsional’nykh klassov” [On approximation by classical orthogonal polynomials with weight in the spaces $L_{2,\gamma}(a, b)$ and on the diameters of function classes], *Izv. Vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2019, No. 12, 37–51 (in Russian), DOI: [10.26907/0021-3446-2019-12-37-51](https://doi.org/10.26907/0021-3446-2019-12-37-51).
8. M. G. Esmaganbetov, “Poperechniki klassov iz $L_2[0, 2\pi]$ i minimizatsiya tochnykh konstant v neravenstvakh tipa Dzheksona” [Diameters of classes from $L_2[0, 2\pi]$ and minimization of exact constants in Jackson-type inequalities], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 1999, **65**, No. 6, 816–820 (in Russian), DOI: [10.4213/mzm1117](https://doi.org/10.4213/mzm1117).
9. V. I. Ivanov, “O tochnosti neravenstva Dzheksona v prostranstvakh L_p na polupryamoy so stepennym vesom” [On the exactness of Jackson’s inequality in L_p spaces on the half-line with power weight], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2015, **98**, No. 5, 684–694 (in Russian), DOI: [10.4213/mzm10894](https://doi.org/10.4213/mzm10894).
10. N. P. Korneychuk, “Tochnaya konstanta v teoreme D. Dzheksona o nailuchshem ravnomernom priblizhenii nepreryvnykh periodicheskikh funktsiy” [The exact constant in D. Jackson’s theorem on the best uniform approximation of continuous periodic functions], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1962, **145**, No. 3, 514–516 (in Russian).
11. M. R. Langarshoev, “Znachenie poperechnikov nekotorykh klassov analiticheskikh funktsiy v prostranstve Bergmana B_2 ” [The value of the diameters of some classes of analytic functions in the Bergman space B_2], *Vestn. KhoGU* [Bull. Khorog Univ.], 2000, **1**, No. 3, 63–69 (in Russian).
12. M. R. Langarshoev “Nailuchshee priblizhenie analiticheskikh funktsiy v prostranstve Bergmana” [Best approximation of analytic functions in Bergman space], *PhD Thesis*, Dushanbe, 2008.
13. M. R. Langarshoev, “O znachenie poperechnikov klassov analiticheskikh funktsiy v prostranstve Bergmana” [On the significance of the diameters of classes of analytic functions in Bergman space], *Mezhd. Konf. Sovrem. Probl. Mat. Analiza i Teorii Funktsiy* [Int. Conf. Contemp. Probl. of Math. Anal. and Theory of Functions], Dushanbe, 2012, pp. 80–83 (in Russian).
14. M. R. Langarshoev, “Neravenstva tipa Dzheksona–Stechkina i poperechniki klassov funktsiy v vesovom prostranstve Bergmana” [Jackson–Stechkin type inequalities and diameters of function classes in the weighted Bergman space], *Chebyshevskiy sb.* [Chebyshev Collect.], 2021, **22**, No. 2, 135–144 (in Russian), DOI: [10.22405/2226-8383-2021-22-2-135-144](https://doi.org/10.22405/2226-8383-2021-22-2-135-144).
15. M. R. Langarshoev, “O nailuchshem srednekvadratcheskim priblizheniem analiticheskikh funktsiy v prostranstve Bergmana” [On the best mean square approximation of analytic functions in Bergman space], *Mezhd. Konf. Sovrem. Probl. Teorii Funktsiy i ikh Prilozh.* [Int. Conf. Contemp. Problems of Function Theory and Their Appl.], Saratov, 2024, pp. 146–148 (in Russian).
16. A. A. Ligun, “Nekotorye neravenstva mezhd u nailuchshimi priblizheniyami i modulyami nepreryvnosti v prostranstve L_2 ” [Some inequalities between best approximations and moduli of continuity in the space L_2], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 1978, **24**, No. 6, 785–792 (in Russian).
17. Kh. Kh. Pirov and M. R. Langarshoev, “Znachenie poperechnikov nekotorykh klassov analiticheskikh funktsiy, opredelyaemykh modulyami nepreryvnosti vysshikh poryadkov, v prostranstve Bergmana” [The value of the diameters of some classes of analytic functions defined by moduli of continuity of higher orders in the Bergman space], *Dokl. AN. Resp. Tadzh.* [Rep. Acad. Sci. Tajikistan], 2011, **54**, No. 7, 519–525 (in Russian).
18. V. I. Smirnov and N. A. Lebedev, *Konstruktivnaya Teoriya Funktsiy Kompleksnogo Peremennogo* [Constructive Theory of Functions of a Complex Variable], Nauka, Moscow–Leningrad, 1964 (in Russian).
19. S. B. Stechkin, “O poryadke nailuchshikh priblizheniy nepreryvnykh funktsiy” [On the order of best approximations of continuous functions], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1951, **15**, 219–242 (in Russian).
20. L. V. Taykov, “O nailuchshem priblizhenii v srednem nekotorykh klassov analiticheskikh funktsiy” [On the best approximation in the mean of some classes of analytic functions], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 1967, **1**, No. 2, 155–162 (in Russian).
21. V. M. Tikhomirov, “Poperechniki mnozhestv v funktsional’nykh prostranstvakh i teoriya nailuchshikh priblizheniy” [Diameters of sets in function spaces and the theory of best approximations], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 1960, **15**, No. 3, 81–120 (in Russian).
22. V. M. Tikhomirov, *Nekotorye Voprosy Teorii Priblizheniy* [Some Issues of Approximation Theory], MGU, Moscow, 1976 (in Russian).
23. N. I. Chernykh, “O neravenstve Dzheksona v L_2 ” [On Jackson’s inequality in L_2], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1967, **88**, 71–74 (in Russian).
24. M. Sh. Shabozov, “Poperechniki nekotorykh klassov analiticheskikh funktsiy v prostranstve Bergmana” [Diameters of some classes of analytic functions in Bergman space], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2002, **383**, No. 2, 171–174 (in Russian).

25. M. Sh. Shabozov and M. R. Langarshoev, “Priblizhenie nekotorykh klassov analiticheskikh funktsiy v prostranstve B_p ” [Approximation of some classes of analytic functions in the space B_p], *Vestn. KhoGU* [Bull. Khorog Univ.], 1999, **1**, No. 1, 45–50 (in Russian).
26. M. Sh. Shabozov and M. S. Saidusaynov, “Srednekvadratichtnoe priblizhenie funktsiy kompleksnoy peremennoy ryadami Fur’e v vesovom prostranstve Bergmana” [Mean-square approximation of functions of a complex variable by Fourier series in the weighted Bergman space], *Vladikavkaz. Mat. Zh.* [Vladikavkaz Math. J.], 2018, **20**, No. 1, 86–97 (in Russian), DOI: [10.23671/VNC.2018.1.11400](https://doi.org/10.23671/VNC.2018.1.11400).
27. M. Sh. Shabozov and D. K. Tukhliev, “O srednekvadraticheskom priblizhenii funktsiy v prostranstve Bergmana B_2 i znachenie poperechnikov nekotorykh klassov funktsiy” [On the mean-square approximation of functions in the Bergman space B_2 and the value of the diameters of some classes of functions], *Ufmsk. Mat. Zh.* [Ufa Math. J.], 2024, **16**, No. 2, 67–76 (in Russian), DOI: [10.13108/2024-16-2-66](https://doi.org/10.13108/2024-16-2-66).
28. M. Sh. Shabozov and D. K. Tukhliev, “O poperechnikakh nekotorykh klassov analiticheskikh funktsiy v prostranstve Bergmana” [On the diameters of some classes of analytic functions in Bergman space], *Chebyshevskiy sb.* [Chebyshev Coll.], 2025, **26**, No. 1, 116–130 (in Russian), DOI: [10.22405/2226-8383-2025-26-1-116-130](https://doi.org/10.22405/2226-8383-2025-26-1-116-130).
29. M. Sh. Shabozov and Kh. M. Khuromonov, “O nailuchshem priblizhenii v srednem funktsiy kompleksnogo peremennogo ryadami Fur’e v prostranstve Bergmana” [On the best approximation in the mean of functions of a complex variable by Fourier series in Bergman space], *Izv. Vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2020, No. 2, 74–92 (in Russian), DOI: [10.26907/0021-3446-2020-2-74-92](https://doi.org/10.26907/0021-3446-2020-2-74-92).
30. M. Sh. Shabozov and Kh. M. Khuromonov, “O nailuchshem polinomial’nom priblizhenii analiticheskikh funktsiy v prostranstve Bergmana B_2 ” [On the best polynomial approximation of analytic functions in the Bergman space B_2], *Izv. Vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2025, No. 4, 90–103 (in Russian), DOI: [10.26907/0021-3446-2025-4-91-103](https://doi.org/10.26907/0021-3446-2025-4-91-103).
31. M. Sh. Shabozov and O. Sh. Shabozov, “O nailuchshem priblizhenie nekotorykh klassov analiticheskikh funktsiy v vesovykh prostranstvakh Bergmana” [On the best approximation of some classes of analytic functions in weighted Bergman spaces], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2007, **412**, No. 4, 466–469 (in Russian).
32. M. Sh. Shabozov and G. A. Yusupov, “Nailuchshee priblizhenie i znacheniya poperechnikov nekotorykh klassov analiticheskikh funktsiy” [Best approximation and diameter values of some classes of analytic functions], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2002, **382**, No. 6, 747–749 (in Russian).
33. M. Sh. Shabozov and G. A. Yusupov, “Nailuchshie polinomial’nye priblizheniya v L_2 nekotorykh klassov 2π -periodicheskikh funktsiy i tochnye znacheniya ikh poperechnikov” [Best polynomial approximations in L_2 of some classes of 2π -periodic functions and exact values of their widths], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2011, **90**, No. 5, 764–775 (in Russian), DOI: [10.4213/mzm8821](https://doi.org/10.4213/mzm8821).
34. V. V. Shalaev, “O poperechnikakh v L_2 klassov differentsiruemykh funktsiy, opredelyaemykh modulyami nepreryvnosti vysshikh poruyadkov” [On the diameters in L_2 of classes of differentiable functions defined by moduli of continuity of higher orders], *Ukr. Mat. Zh.* [Ukr. Math. J.], 1991, **43**, No. 1, 125–129 (in Russian).
35. S. Bergman, *The Kernel Function and Conformal Mapping*, Am. Math. Soc., Providence, 1950, DOI: [10.1090/surv/005](https://doi.org/10.1090/surv/005).
36. D. Jackson, “On approximation by trigonometric sums and polynomials,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1912, **13**, 491–515, DOI: [10.1090/S0002-9947-1912-1500930-2](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1912-1500930-2).
37. A. Pinkus, *n-Widths in Approximation Theory*, Springer, Berlin, 1985, DOI: [10.1007/978-3-642-69894-1](https://doi.org/10.1007/978-3-642-69894-1).

M. R. Langarshoev

Moscow University of Humanities and Technology — Moscow Institute of Architecture and Construction, Moscow, Russia

E-mail: mukhtor77@mail.ru, eLIBRARY SPIN-code: 6739-7777, eLIBRARY AuthorID: [828107](https://elibrary.ru/828107), Scopus: [55790260900](https://orcid.org/55790260900), ORCID: [0000-0002-3278-4781](https://orcid.org/0000-0002-3278-4781)

РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ В УРАВНЕНИИ В СЛУЧАЕ КРАЕВЫХ УСЛОВИЙ ДИРИХЛЕ—НЕЙМАНА

М. С. Пастухов, В. С. Рыхлов

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия*

Аннотация. Исследуется начально-граничная задача в полуполосе плоскости для неоднородного гиперболического уравнения второго порядка с постоянными коэффициентами, содержащего смешанную производную, с нулевым и ненулевым потенциалами. Данное уравнение является уравнением поперечных колебаний движущейся конечной струны. Рассматривается случай краевых условий типа Дирихле—Неймана: левый конец закреплен, а правый — свободен. Предполагается, что корни характеристического уравнения простые и лежат на вещественной оси по разные стороны от начала координат. Ищется классическое решение (или решение почти всюду, иногда говорят — сильное решение) этой задачи. Исследуется спектральная задача, связанная с исходной начально-граничной задачей, порожденная обыкновенной дифференциальной оператор-функцией (пучком) второго порядка: находится асимптотика собственных значений, резольвента, проводится линеаризация оператор-функции в соответствующем пространстве вектор-функций, доказывается теорема о разложении первой компоненты вектор-функции по корневым функциям спектральной задачи. Формулируется и доказывается теорема о единственности классического решения и выводится формула для классического решения в виде ряда из контурных интегралов. Затем, с использованием этих формул в случае нулевого потенциала доказываются теоремы о конечных формулах для классического решения в частных случаях и на основе них дается конечная формула для классического решения в общем случае.

Ключевые слова: неоднородное гиперболическое уравнение, начально-граничная задача, смешанная производная в уравнении, классическое решение, единственность классического решения, конечная формула для классического решения.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Вклад авторов. Постановка задачи, рассматриваемой в статье, и основные идеи ее решения принадлежат Рыхлову В. С. Практическая реализация, подготовка материала и оформление статьи осуществлены Пастуховым М. С.

Для цитирования: Пастухов М. С., Рыхлов В. С. Решение начально-граничной задачи для волнового уравнения со смешанной производной в уравнении в случае краевых условий Дирихле—Неймана // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 2. С. 323–359. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-323-359](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-323-359) EDN: BRBAYC

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ, ИСТОРИЯ ВОПРОСА, ОСНОВНЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ И ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Рассмотрим начально-граничную задачу с граничными условиями типа Дирихле—Неймана

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} - q(x)u(x, t) = f(x, t), \quad (1.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} u(1, t) = 0, \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = \psi(x), \quad (1.3)$$

где $(x, t) \in Q := [0, 1] \times [0, +\infty)$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$ (здесь и далее знак «:=» означает «равно по определению»), все функции, входящие в (1.1)–(1.3), предполагаются комплекснозначными. Считаем, что $q(x) \in L_1[0, 1]$ и $f(x, t) \in L_1(Q_T)$, где $Q_T := [0, 1] \times [0, T]$ ($T > 0$ любое и фиксированное число), — в этом случае говорим, что функция $f(x, t)$ из класса $\mathcal{Q}$ и пишем $f(x, t) \in \mathcal{Q}$.

Далее нами будут также использоваться следующие обозначения для частных производных:

$$u_x := \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_t := \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{xx} := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xt} := \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad \dots$$

Рассматривается случай гиперболического (волнового) уравнения (1.1), то есть предполагается выполнение условия $p_1^2 - 4p_2 > 0$. В этом случае корни ω_1, ω_2 характеристического уравнения

$$\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0 \quad (1.4)$$

вещественны и различны.

Требуется найти решение начально-граничной задачи (сокращенно НГЗ) (1.1)–(1.3) в области Q с помощью метода Фурье при как можно более слабых условиях на параметры задачи, то есть на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$. В зависимости от того, как понимается решение задачи (1.1)–(1.3), накладываются различные требования на эти функции.

Уравнение (1.1) является уравнением поперечных колебаний продольно движущейся конечной струны. Такие уравнения актуальны для производственных процессов, связанных с продольным движением материалов (например, бумажного полотна). Исследование таких колебаний началось около 60 лет назад [48, 49, 51].

Излагаемые в статье результаты получены с использованием резольвентного метода решения НГЗ для волнового уравнения в полуполосе плоскости, предложенного А. П. Хромовым и наиболее просто описанного в [41, 42]. Такой подход к решению задачи сформировался не сразу. Историю формирования и развития этого подхода, а также полученные с помощью него результаты можно найти в [2, 3, 6–9, 26, 27, 29–32, 35–40, 43–45].

Аналогичный подход решения НГЗ в полуполосе плоскости для телеграфного уравнения при других краевых условиях используется в [10–14].

Другой подход, отличный от используемого в данной и вышеупомянутых статьях и при других постановках начально-граничных задач, в частности, в первой четверти плоскости, получил развитие в [15–20].

Рассматриваются и другие задачи для уравнения (1.1), например, задача гашения поперечных колебаний продольно движущейся струны [21, 22].

Отличие результатов, представленных в данной статье, от результатов, полученных ранее вторым автором в [29–32], состоит в том, что в данной статье рассматриваются краевые условия типа Дирихле–Неймана, что создает дополнительные, а иногда и принципиальные трудности.

Определение 1.1. Под *классическим решением* (используют также термины *решение почти всюду* или *сильное решение*) НГЗ (1.1)–(1.3) понимается функция $u(x, t)$ переменных $(x, t) \in Q$, которая:

- а) непрерывна вместе с $u_x(x, t)$ и $u_t(x, t)$, при этом функции $u_x(x, t)$ и $u_t(x, t)$ абсолютно непрерывны и по x , и по t , функции $u_{xx}(x, t)$, $u_{xt}(x, t)$ и $u_{tt}(x, t)$ из класса $\mathcal{Q}$ и почти всюду (п.в.) в Q выполняется равенство

$$u_{xt}(x, t) = u_{tx}(x, t); \quad (1.5)$$

- б) удовлетворяет условиям (1.2)–(1.3) всюду на границе множества Q и уравнению (1.1) п.в. в Q .

Отметим, что необходимость в условии (1.5) обусловлена тем, что в случае, когда $u_{xt}(x, t)$ и $u_{tx}(x, t)$ не являются непрерывными функциями, это равенство может не выполняться на множестве положительной меры [34].

Для классического решения задачи (1.1)–(1.3) по необходимости выполняются условия (далее ссылаемся на них, как на условия (N)):

$$(N_1) \quad \varphi(x) \in W_1^2[0, 1], \quad \psi(x) \in W_1^1[0, 1];$$

(N_2) $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$ и $\psi(0) = 0$.

Здесь используется стандартное обозначение для банахова пространства гладких функций $W_p^n[0, 1] := \{f(x) : f(x), \dots, f^{(n-1)} \in AC[0, 1], f^{(n)} \in L_p[0, 1]\}$ с нормой $\|f\|_{W_p^n[0, 1]} := \|f\|_{L_p[0, 1]} + \|f^{(n)}\|_{L_p[0, 1]}$.

Определение 1.2. НГЗ (1.1)–(1.3), в которой $\varphi(x) \in W_1^2[0, 1]$, $\psi(x) \in W_1^1[0, 1]$, $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$ и $\psi(0) = 0$, будем называть *классической начально-граничной задачей*.

Возможны только две принципиально разные ситуации:

$$\omega_1 < 0 < \omega_2, \quad (1.6)$$

$$0 < \omega_1 < \omega_2. \quad (1.7)$$

В случае (1.6) соответствующая спектральная задача является регулярной по Биркгофу [23, 66–67], а в случае (1.7) — нерегулярной. Далее будем рассматривать только случай (1.6). Нерегулярный случай другим методом рассмотрен в [28].

В случае $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = 1$ имеем $p_1 = 0$, $p_2 = -1$ и уравнение (1.1) является классическим уравнением колебания струны

$$u_{xx} - u_{tt} = 0.$$

В [42] и предыдущих работах А. П. Хромова (ссылки приведены в [42]) рассматривался именно такой случай. Результаты, излагаемые в настоящей статье, относятся к общему случаю $p_1 \in \mathbb{R}$.

2. СПЕКТРАЛЬНАЯ ЗАДАЧА, СВЯЗАННАЯ С НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧЕЙ

С НГЗ (1.1)–(1.3) связана спектральная задача

$$L(\lambda)y = 0, \quad (2.1)$$

порожденная оператор-функцией (о.-ф.) $L(\lambda)$, определяемой дифференциальным выражением с параметром λ

$$\ell(y, \lambda) := y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y - q(x)y \quad (2.2)$$

и краевыми условиями типа Дирихле–Неймана

$$U_1(y) := y(0) = 0, \quad U_2(y) := y'(1) = 0. \quad (2.3)$$

Пусть R_λ есть резольвента $L(\lambda)$, а $G(x, \xi, \lambda)$ ее функция Грина.

Далее, соответствующие объекты в случае $q = 0$ обозначаем теми же буквами, что и в случае ненулевого потенциала, но с индексами «0» внизу, например: $L_0(\lambda)$, $\ell_0(y, \lambda)$, $U_{0j}(y)$, $R_{0\lambda}$, $G_0(x, \xi, \lambda)$.

2.1. Асимптотические формулы для собственных значений спектральной задачи.

В случае $q = 0$ в качестве фундаментальной системы решений уравнения $\ell_0(y, \lambda) = 0$ берем решения

$$y_{01}(x, \lambda) := e^{\lambda\omega_1 x}, \quad y_{02}(x, \lambda) := e^{\lambda\omega_2 x}. \quad (2.4)$$

Тогда характеристический определитель $L_0(\lambda)$ (см. [23, с. 26]) имеет вид

$$\Delta_0(\lambda) = \begin{vmatrix} U_{01}(y_{01}) & U_{01}(y_{02}) \\ U_{02}(y_{01}) & U_{02}(y_{02}) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \lambda\omega_1 e^{\lambda\omega_1} & \lambda\omega_2 e^{\lambda\omega_2} \end{vmatrix} = \lambda(\omega_2 e^{\lambda\omega_2} - \omega_1 e^{\lambda\omega_1}) =: \lambda \hat{\Delta}_0(\lambda) \quad (2.5)$$

и его корни, очевидно, суть числа

$$\lambda_{0k} = \frac{2k\pi i + \sigma}{\omega_2 - \omega_1}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.6)$$

и число $\lambda_{00} = 0$, где

$$\sigma := \ln_0 \frac{\omega_1}{\omega_2} := \ln \frac{|\omega_1|}{\omega_2} + \pi i, \quad (2.7)$$

то есть $\ln_0$ есть ветвь натурального логарифма такая, что $\ln_0 1 = 0$.

Эти числа, кроме точки λ_{00} , являются простыми собственными значениями (с.з.) $L_0(\lambda)$. Число λ_{00} , как легко проверить, не является с.з.

Очевидно, этим с.з. соответствуют следующие собственные функции: $y_{0k}(x) := e^{\lambda_{0k}\omega_2 x} - e^{\lambda_{0k}\omega_1 x}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Введем области (полуплоскости) $\Pi_c^\pm := \{\lambda \in \mathbb{C} : \operatorname{Re}(\lambda + c) \geq 0 (\leq 0)\}$, где $c \in \mathbb{R}$ — произвольное фиксированное число. Ясно, что $\Pi_c^\pm$ суть полуплоскости $\Pi_0^\pm$, сдвинутые на число $-c$.

Если $\lambda \in \Pi_c^+$, то

$$\operatorname{Re}((\lambda + c)\omega_1) \leq 0 \leq \operatorname{Re}((\lambda + c)\omega_2). \quad (2.8)$$

А если $\lambda \in \Pi_c^-$, то

$$\operatorname{Re}((\lambda + c)\omega_2) \leq 0 \leq \operatorname{Re}((\lambda + c)\omega_1).$$

Лемма 2.1. Если $q(x) \in L_1[0, 1]$ и корни ω_1 и ω_2 характеристического уравнения (1.4) попарно различны и отличны от нуля, то в каждой из областей $\Pi_c^\pm$ при $|\lambda| \gg 1$ существуют линейно независимые решения $y_1(x, \lambda)$, $y_2(x, \lambda)$ уравнения $\ell(y, \lambda) = 0$, аналитические по λ и имеющие асимптотические представления

$$y_k^{(m)}(x, \lambda) = (\lambda \omega_k)^m e^{\lambda \omega_k x} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \right), \quad k = 1, 2, \quad m = 0, 1. \quad (2.9)$$

Доказательство. Справедливость доказываемой леммы есть следствие теоремы из [33] об асимптотике системы решений более общего дифференциального уравнения, коэффициенты которого зависят полиномиально от спектрального параметра (аналогичные результаты при более слабых условиях позднее получали и другие математики, библиографию можно найти, например, в [50]).

При $n = 2$ доказательство достаточно простое. Приведем его для полноты изложения.

Рассмотрим для примера случай $\lambda \in \Pi_c^+$. Доказательство для случая $\lambda \in \Pi_c^-$ аналогично. Для случая $\lambda \in \Pi_c^+$ выполняются неравенства (2.8).

Рассмотрим уравнение $\ell(y, \lambda) = 0$, или подробнее

$$y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y - q(x)y = 0. \quad (2.10)$$

Ищем решения $y_1(x)$ и $y_2(x)$ этого уравнения как решения следующих интегральных уравнений в $C[0, 1]$:

$$y(x) = e^{\lambda \omega_1 x} - \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} \int_0^x e^{\lambda \omega_1(x-\xi)} q(\xi) y(\xi) d\xi - \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} \int_x^1 e^{\lambda \omega_2(x-\xi)} q(\xi) y(\xi) d\xi, \quad (2.11)$$

$$y(x) = e^{\lambda \omega_1 x} - \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} \int_0^x e^{\lambda \omega_1(x-\xi)} q(\xi) y(\xi) d\xi + \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} \int_0^x e^{\lambda \omega_2(x-\xi)} q(\xi) y(\xi) d\xi. \quad (2.12)$$

Нетрудно проверить непосредственным подсчетом, что решения уравнений (2.11) и (2.12) являются в то же время и решениями уравнения (2.10).

Рассмотрим для примера уравнение (2.11). Уравнение (2.12) рассматривается аналогично.

Так как решение уравнения (2.11) ищется в пространстве $C[0, 1]$, то решение по необходимости абсолютно непрерывно и удовлетворяет равенству

$$y'(x) = (\lambda \omega_1) e^{\lambda \omega_1 x} - \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^x e^{\lambda \omega_1(x-\xi)} q(\xi) y(\xi) d\xi - \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \int_x^1 e^{\lambda \omega_2(x-\xi)} q(\xi) y(\xi) d\xi. \quad (2.13)$$

Для решения уравнения (2.11) проведем нормировку искомой функции

$$y(x) = e^{\lambda \omega_1 x} z(x). \quad (2.14)$$

Тогда для нахождения z из (2.11) получим уравнение

$$z(x) = 1 - \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} \int_0^x q(\xi) z(\xi) d\xi - \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} \int_x^1 e^{\lambda(\omega_2 - \omega_1)(x-\xi)} q(\xi) z(\xi) d\xi. \quad (2.15)$$

Имеем тождество по λ : $\operatorname{Re} \lambda(\omega_2 - \omega_1) \equiv \operatorname{Re}(\lambda + c)(\omega_2 - \omega_1) - \operatorname{Re} c(\omega_2 - \omega_1)$. Следовательно, на основании (2.8) выполнено $|e^{\lambda(\omega_2 - \omega_1)(x-\xi)}| = |e^{(\lambda+c)(\omega_2 - \omega_1)(x-\xi)}| |e^{-c(\omega_2 - \omega_1)(x-\xi)}| \leq C$ при всех $\lambda \in \Pi_c^+$ и $0 \leq x \leq \xi \leq 1$.

Таким образом, оператор справа в (2.15) является сжимающим из $C[0, 1] \rightarrow C[0, 1]$ при $|\lambda| \gg 1$ и, следовательно, уравнение (2.15) имеет единственное решение

$$z_1(x, \lambda) = 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad (2.16)$$

при этом соответствующий ряд справа (который дает оценку $O(1/\lambda)$) равномерно сходится. Этот ряд состоит из аналитических по λ функций при $\lambda \in \Pi_c^+$. Тогда по теореме Вейерштрасса [46, с. 106] он представляет собой аналитическую функцию в области Π_c^+ .

Учитывая асимптотику (2.16) в (2.14), получим решение $y_1(x, \lambda)$ уравнения (2.10) с асимптотикой

$$y_1(x, \lambda) = e^{\lambda\omega_1 x} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right), \quad (2.17)$$

аналитическое по λ в Π_c^+ при $|\lambda| \gg 1$.

Учитывая теперь асимптотику (2.17) в формуле (2.13), получим также асимптотику для производной $y_1'(x, \lambda)$

$$y_1'(x, \lambda) = (\lambda\omega_1)e^{\lambda\omega_1 x} \left(1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right),$$

причем функция $y_1'(x, \lambda)$ также является аналитической по λ в полуплоскости Π_c^+ при $|\lambda| \gg 1$.

Таким образом, получили решение $y_1(x, \lambda)$, удовлетворяющее утверждению леммы 2.1.

Аналогичными рассуждениями, используя уравнение (2.12), можно найти решение $y_2(x, \lambda)$, которое также удовлетворяет утверждению леммы 2.1.

Тем самым лемма 2.1 доказана. $\square$

Далее для краткости будем использовать обозначение Биркгофа

$$[1] := 1 + O\left(\frac{1}{\lambda}\right), \quad \lambda \rightarrow \infty.$$

Теорема 2.1. *О.-ф. $L(\lambda)$ имеет счетное число с.з. $\Lambda = \tilde{\Lambda} \cup \{\lambda_k\}_{|k| \geq k_0}$, где $\tilde{\Lambda}$ есть конечное множество, а k_0 достаточно большое натуральное число такое, что при $|k| \geq k_0$ с.з. λ_k простые и справедливы асимптотические формулы*

$$\lambda_k = \frac{2k\pi i}{\omega_2 - \omega_1} + O\left(\frac{1}{k}\right) \left(= \lambda_{0k} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right), \quad |k| \geq k_0. \quad (2.18)$$

Доказательство. Как известно, с.з. $L(\lambda)$ являются нулями характеристического определителя [23, с. 27], который с учетом формул (2.9) имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} [1] & [1] \\ \lambda\omega_1 e^{\lambda\omega_1} [1] & \lambda\omega_2 e^{\lambda\omega_2} [1] \end{vmatrix} = \lambda \left(\omega_2 e^{\lambda\omega_2} [1] - \omega_1 e^{\lambda\omega_1} [1] \right) \quad (2.19)$$

и аналитичен при $\lambda \in \Pi_c^+$, $|\lambda| \gg 1$, где константа c будет выбрана далее.

Отсюда получим, что с.з. $L(\lambda)$ при $|\lambda| \gg 1$ являются решениями уравнения $e^{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} = \frac{\omega_1}{\omega_2} [1]$, откуда

$$\lambda = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \left(\ln_0 \frac{\omega_1}{\omega_2} + 2k\pi i \right) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right). \quad (2.20)$$

При $|\lambda| \gg 1$ имеем оценку для корней уравнения (2.20): $\operatorname{Re} \lambda \geq \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \ln \frac{|\omega_1|}{\omega_2} - 1 := c_0$.

Тогда в качестве константы c можно выбрать, например, константу $1 - c_0$, то есть $c := 1 - c_0$. Проводя теперь рассуждения, аналогичные рассуждениям [23, с. 78-79] с использованием теоремы Руше (см., например, [46, с. 186]), получим, что при достаточно большом натуральном k_0 с.з. λ_k ($|k| \geq k_0$) простые и имеет место асимптотика (2.18).

Если в качестве ф.с.р. уравнения $\ell(y, \lambda) = 0$ взять аналитические во всей комплексной плоскости решения $\tilde{y}_1(x, \lambda)$ и $\tilde{y}_2(x, \lambda)$, удовлетворяющие начальным условиям $\tilde{y}_k^{(s-1)}(0, \lambda) = \delta_{ks}$, где δ_{ks} есть символ Кронекера, то получим, что соответствующий характеристический определитель $\tilde{\Delta}(\lambda)$ является аналитической функцией по λ во всей комплексной плоскости, нули которой являются с.з. $L(\lambda)$. Следовательно, в любой ограниченной области может быть только конечное число с.з.

Тем самым теорема 2.1 доказана. $\square$

2.2. Линеаризация спектральной задачи. Линеаризуем задачу (2.1), учитывая конкретный вид дифференциального выражения (2.2) и краевых условий (2.3). Для этого введем переменные $z_1 = y$, $z_2 = \lambda y$. В результате получим следующую задачу на с.з. в пространстве в.-ф. $Z(x) := (z_1(x), z_2(x))^T$:

$$AZ = \lambda Z, \quad z_1(0) = 0, \quad z'_1(1) = 0, \quad (2.21)$$

где

$$A := \begin{pmatrix} 0; & 1 \\ -\frac{1}{p_2}d_x^2 + \frac{1}{p_2}q(x)E; & -\frac{p_1}{p_2}d_x \end{pmatrix}, \quad (2.22)$$

E есть тождественный оператор, а $d_x := \frac{d}{dx}$.

На основе (2.21) введем оператор $\mathcal{L} \in \mathcal{W}_1^2[0, 1] \rightarrow \mathcal{W}_1^1[0, 1]$ в пространстве вектор-функций, где $\mathcal{W}_1^s[0, 1] := W_1^s[0, 1] \dot{+} W_1^{s-1}[0, 1]$ (знак $\dot{+}$ обозначает прямую сумму), определенный соотношениями

$$\mathcal{L}Z := AZ, \quad D_{\mathcal{L}} = \{Z = (z_1, z_2)^T \in \mathcal{W}_1^2[0, 1] : z_1(0) = 0, z'_1(1) = 0\}. \quad (2.23)$$

Тогда спектральную задачу (2.21) можно записать в виде $\mathcal{L}Z = \lambda Z$, а это есть уже линейная спектральная задача, которая является линеаризацией задачи (2.1).

Как показано в [47], с.з. и производные цепочки, построенные по корневым функциям о.-ф. $L(\lambda)$ (см. [23, с. 28]), совпадают с с.з. и корневыми вектор-функциями оператора $\mathcal{L}$, а, следовательно, двукратное разложение по корневым функциям о.-ф. $L(\lambda)$ есть не что иное, как разложение по корневым вектор-функциям оператора $\mathcal{L}$.

Найдем резольвенту $\mathcal{R}_\lambda = (\mathcal{L} - \lambda\mathcal{E})^{-1}$ оператора $\mathcal{L}$, где $\mathcal{E}$ — единичный оператор в пространстве в.-ф. Для этого решим задачу $\mathcal{L}Z - \lambda Z = H$, где $H = (h_1, h_2)^T \in \mathcal{W}_1^1[0, 1]$, или в подробной записи

$$\begin{cases} z_2 - \lambda z_1 = h_1, \\ -\frac{1}{p_2}z_1'' + \frac{1}{p_2}q(x)z_1 - \frac{p_1}{p_2}z_2' - \lambda z_2 = h_2, \\ z_1(0) = z_1(1) = 0. \end{cases} \quad (2.24)$$

Выразим z_2 из первого уравнения системы (2.24):

$$z_2 = \lambda z_1 + h_1 \quad (2.25)$$

и подставим во второе уравнение системы (2.24). Получим

$$\begin{aligned} -\frac{1}{p_2}z_1'' - \frac{p_1}{p_2}(\lambda z_1' + h_1') - \lambda(\lambda z_1 + h_1) + \frac{1}{p_2}q(x)z_1 &= h_2; \\ z_1'' + \lambda p_1 z_1' + (\lambda^2 p_2 - q(x))z_1 &= h_\lambda, \end{aligned}$$

где

$$h_\lambda := -p_1 h_1' - \lambda p_2 h_1 - p_2 h_2. \quad (2.26)$$

Таким образом, первая компонента $\mathcal{R}H$ является решением краевой задачи

$$\begin{aligned} z_1'' + \lambda p_1 z_1' + (\lambda^2 p_2 - q(x))z_1 &= h_\lambda, \\ z_1(0) &= z_1(1) = 0. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Используя введенные ранее резольвенту и функцию Грина о.-ф. $L(\lambda)$, из (2.27) получим

$$z_1(x, \lambda) = (R_\lambda h_\lambda)(x) = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) h_\lambda(\xi) d\xi, \quad (2.28)$$

а из (2.25) найдем

$$z_2(x, \lambda) = \lambda z_1(x, \lambda) + h_1(x) = \lambda(R_\lambda h_\lambda)(x) + h_1(x) = \lambda \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) h_\lambda(\xi) d\xi + h_1(x). \quad (2.29)$$

Таким образом, на основании (2.28) и (2.29) получим для резольвенты оператора $\mathcal{L}$ следующую формулу:

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_\lambda H(x) &= (\mathcal{L} - \lambda \mathcal{E})^{-1} H(x) = \begin{pmatrix} R_\lambda h_\lambda(x, \lambda) \\ R_\lambda(\lambda h_\lambda)(x, \lambda) + h_1(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) h_\lambda(\xi) d\xi \\ \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) (\lambda h_\lambda(\xi)) d\xi + h_1(x) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) (-p_1 h'_1(\xi) - \lambda p_2 h_1(\xi) - p_1 h_2(\xi)) d\xi \\ \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) (-\lambda p_1 h'_1(\xi) - \lambda^2 p_2 h_1(\xi) - \lambda p_1 h_2(\xi)) d\xi + h_1(x) \end{pmatrix}. \quad (2.30) \end{aligned}$$

2.3. Разложение первой компоненты вектор-функции по корневым функциям спектральной задачи. Обозначим через γ_k при $|k| \geq k_0$ окружности $\{\lambda : |\lambda - \lambda_k| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и настолько мало, что внутри γ_k находится по одному с.з. Через d_k будем обозначать круги, ограниченные окружностями γ_k . Соответственно, γ_{0k} и d_{0k} при $k = 0, \pm 1, \dots$ суть аналогичные окружности и круги радиуса δ с центрами в точках λ_{0k} . Из асимптотических формул (2.18) следует, что, начиная с некоторого достаточно большого номера $k_1 \geq k_0$, будем иметь $\lambda_k \in d_{0k}$ при $|k| \geq k_1$. Пусть $|\lambda| = r$ есть окружность, внутри которой лежит множество $\tilde{\Lambda}$ и с.з. λ_k при $k_0 \leq |k| \leq k_1 - 1$.

Из общей теории линейных операторов следует, что разложение в.-ф. $H(x)$ в ряд по корневым функциям оператора $\mathcal{L}$ или, что то же самое, по производным цепочкам [5, 47] о.-ф. $L(\lambda)$, построенным по ее корневым функциям, имеет вид

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{|k| \geq k_1} \int_{\gamma_{0k}} \right) (\mathcal{R}_\lambda H)(x, \lambda) d\lambda &= -\frac{1}{2\pi i} \left(\dots \right) \begin{pmatrix} z_1(x, \lambda) \\ z_2(x, \lambda) \end{pmatrix} d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \left(\dots \right) \begin{pmatrix} z_1(x, \lambda) \\ \lambda z_1(x, \lambda) + h_1(x) \end{pmatrix} d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \left(\dots \right) \begin{pmatrix} (R_\lambda h_\lambda)(x, \lambda) \\ \lambda (R_\lambda h_\lambda)(x, \lambda) \end{pmatrix} d\lambda, \end{aligned}$$

где используется обозначение

$$\left(\dots \right) := \left(\int_{|\lambda|=r} + \sum_{|k| \geq k_1} \int_{\gamma_{0k}} \right). \quad (2.31)$$

Найдем условия на компоненты в.-ф. $H(x)$, при которых имеет место равенство

$$h_1(x) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\dots \right) (R_\lambda h_\lambda)(x) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \left(\dots \right) \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) (p_1 h'_1(\xi) + \lambda p_2 h_1(\xi) + p_2 h_2(\xi)) d\xi d\lambda. \quad (2.32)$$

2.3.1. Разложение первой компоненты вектор-функции по корневым функциям спектральной задачи. Метод контурного интеграла Коши—Пуанкаре. Обозначим

$$\begin{aligned} I_n(x) &:= -\frac{1}{2\pi i} \left(\dots \right) \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) h_\lambda(\xi) d\xi d\lambda = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) h_\lambda(\xi) d\xi d\lambda = \\ &= -\frac{1}{2\pi i} \left(\int_{\Gamma_n^+} + \int_{\Gamma_n^-} \right) \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) h_\lambda(\xi) d\xi d\lambda = : I_n^+(x) + I_n^-(x), \quad (2.33) \end{aligned}$$

где Γ_n , $n \in \mathbb{N}$ и $n \gg 1$, суть кусочно-круговые контуры, охватывающие контуры γ_k при $|k| \geq k_0$ и окружность $|\lambda| = r$, такие, что между соседними контурами лежит ровно одно с.з. λ_k и имеют место оценки

$$c_1 n < \text{дл. } \Gamma_n < c_2 n \quad (0 < c_1 < c_2 < +\infty). \quad (2.34)$$

Γ_n^+ и Γ_n^- , суть части Γ_n , лежащие, соответственно, в правой и левой полуплоскостях. Из асимптотических формул (2.18) для с.з. $L(\lambda)$ видно, что такие контуры Γ_n существуют.

Справедлива следующая теорема о разложении первой компоненты по корневым функциям о.-ф. $L(\lambda)$.

Теорема 2.2. Если $h_1'(x), h_2(x) \in L_r[0, 1]$ ($r > 1$) и $h_1(0) = 0$, то

$$I_n(x) = h_1(x) + o(1), \quad (2.35)$$

где $o(1) \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ равномерно на отрезке $[0, 1]$ (далее в таком случае будем писать $o_u(1)$).

Доказательство. В соответствии с (2.26) будем обозначать

$$h_\lambda(x) = -p_2 h_2(x) - p_1 h_1'(x) - \lambda p_2 h_1(x) = -f_1(x) - \lambda p_2 h_1(x), \quad (2.36)$$

где

$$f_1(x) = p_2 h_2(x) + p_1 h_1'(x) \in L_r[0, 1]. \quad (2.37)$$

Далее потребуются асимптотические формулы для функции Грина о.-ф. $L(\lambda)$. В формулировке соответствующей леммы используются два определителя, связанные с характеристическим определителем (2.19), а именно, $\Delta^+(\lambda)$ и $\Delta^-(\lambda)$, соответственно, для правой полуплоскости комплексной плоскости (используется индекс «+») и левой полуплоскости (используется индекс «-»):

$$\begin{aligned} \Delta(\lambda) &= \lambda(\omega_2 e^{\lambda \omega_2} [1] - \omega_1 e^{\lambda \omega_1} [1]) = \lambda \omega_2 e^{\lambda \omega_2} \left([1] - \frac{\omega_1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1 - \omega_2)} [1] \right) = \lambda \omega_2 e^{\lambda \omega_2} \Delta^+(\lambda) = \\ &= -\lambda \omega_1 e^{\lambda \omega_1} \left([1] - \frac{\omega_2}{\omega_1} e^{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} [1] \right) = -\lambda \omega_1 e^{\lambda \omega_1} \Delta^-(\lambda), \end{aligned} \quad (2.38)$$

то есть это определители с асимптотикой при $|\lambda| \gg 1$

$$\Delta^+(\lambda) = [1] - \frac{\omega_1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1 - \omega_2)} [1], \quad \Delta^-(\lambda) = [1] - \frac{\omega_2}{\omega_1} e^{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} [1]. \quad (2.39)$$

Если $\lambda \in \mathbb{C}_\delta$, где $\mathbb{C}_\delta$ обозначает комплексную плоскость, из которой удалены кружки достаточного малого радиуса $\delta > 0$ с центрами в с.з., то существует такая константа $C_\delta > 0$, что справедливы неравенства

$$|\Delta^+(\lambda)| \geq C_\delta, \quad |\Delta^-(\lambda)| \geq C_\delta. \quad (2.40)$$

Пусть $\chi(x)$ есть функция Хевисайда ($\chi(x) = 1$, если $x \geq 0$, и $\chi(x) = 0$, если $x < 0$).

Лемма 2.2. Для функции Грина $G(x, \xi, \lambda)$ о.-ф. $L(\lambda)$ справедливы следующие асимптотические формулы при $|\lambda| \gg 1$:

1) при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$

$$\begin{aligned} G(x, \xi, \lambda) &= \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1) \Delta^+(\lambda)} \times \\ &\times \left(e^{\lambda(\omega_1 x - \omega_2 \xi)} [1] - \frac{\omega_1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1(x+1-\xi) - \omega_2)} [1] + \frac{\omega_1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1(1-\xi) + \omega_2(x-1))} [1] - \frac{\omega_1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1 - \omega_2(1-x+\xi))} [1] \right) - \\ &- \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} \left(e^{\lambda \omega_1(x-\xi)} [1] \chi(x - \xi) + e^{\lambda \omega_2(x-\xi)} [1] \chi(\xi - x) \right) = :G^+(x, \xi, \lambda) + g^+(x, \xi, \lambda); \end{aligned} \quad (2.41)$$

2) при $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$

$$\begin{aligned} G(x, \xi, \lambda) &= \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1) \Delta^-(\lambda)} \times \\ &\times \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} e^{\lambda(\omega_1(x-1-\xi) + \omega_2)} [1] - \frac{\omega_2}{\omega_1} e^{\lambda(\omega_1(x-1) + \omega_2(1-\xi))} [1] + \frac{\omega_2}{\omega_1} e^{\lambda(-\omega_1 + \omega_2(x+1-\xi))} [1] - e^{\lambda(-\omega_1 \xi + \omega_2 x)} [1] \right) + \\ &+ \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} \left(e^{\lambda \omega_1(x-\xi)} [1] \chi(\xi - x) + e^{\lambda \omega_2(x-\xi)} [1] \chi(x - \xi) \right) = :G^-(x, \xi, \lambda) + g^-(x, \xi, \lambda), \end{aligned} \quad (2.42)$$

Доказательство. Ищем резольвенту о.-ф. $L(\lambda)$ как решение краевой задачи

$$y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y = g(x), \quad y(0) = y'(1) = 0.$$

Для нахождения решения используем ф.с.р. уравнения с асимптотикой (2.9), а частное решение уравнения выбираем по-разному в случаях $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ и $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$ при использовании метода вариации произвольных постоянных. А именно, соответствующее интегрирование проводится или от 0 до x или от x до 1 в зависимости от того, какой знак имеют вещественные части показателей экспонент $\lambda \omega_1(x - \xi)$ и $\lambda \omega_2(x - \xi)$ в подынтегральных выражениях. Эти вещественные части должны быть неположительными.

Решением указанной краевой задачи является функция $y(x, \lambda) = (R_\lambda g)(x) = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) g(\xi) d\xi$, где для $G(x, \xi, \lambda)$ справедливы формулы (2.41) и (2.42), если учесть представления (2.38) характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ в зависимости от рассматриваемого случая $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$ или $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$. Тем самым, лемма 2.2 доказана. $\square$

Рассмотрим случай $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$. В соответствии с формулой (2.41) и обозначениями (2.36)-(2.37) справедливо представление

$$\begin{aligned} I_n^+(x) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \int_0^1 \left(G^+(x, \xi, \lambda) + g^+(x, \xi, \lambda) \right) (f_1(\xi) + \lambda p_2 h_1(\xi)) d\xi d\lambda = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \left(\int_0^1 G^+(x, \xi, \lambda) f_1(\xi) d\xi + \int_0^1 g^+(x, \xi, \lambda) f_1(\xi) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \lambda p_2 \int_0^1 G^+(x, \xi, \lambda) h_1(\xi) d\xi + \lambda p_2 \int_0^1 g^+(x, \xi, \lambda) h_1(\xi) d\xi \right) d\lambda = \\ &= I_{n1}^+(x) + I_{n2}^+(x) + I_{n3}^+(x) + I_{n4}^+(x). \end{aligned} \quad (2.43)$$

Важную роль далее играет следующая лемма.

Лемма 2.3. *Предположим $\gamma(x, \xi) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \gamma_2 \xi$; $\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2 \in \mathbb{R}$, $\gamma_2 \neq 0$ и $\gamma(x, \xi) \operatorname{Re} z \leq 0$ при $z \in \zeta_R^+$ (или $z \in \zeta_R^-$), где $x \in [0, 1]$, $\xi \in [a(x), b(x)] \subset [0, 1]$, $a(x)$ и $b(x)$ — заданные линейные вещественные функции, ζ_R^+ (или ζ_R^-): $:= \left\{ z \in \mathbb{C} : z = R e^{i\varphi}, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2} \right.$ (или $\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq \frac{3\pi}{2}$), $R > 0$ $\left. \right\}$. Тогда при условии $f(x) \in L_r[0, 1]$, $r > 1$, имеет место оценка*

$$\left| \int_{\zeta_R^+ \text{ (или } \zeta_R^-)} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} e^{\gamma(x, \xi) z} f(\xi) d\xi \right) dz \right| \leq C \|f\|_r \vartheta_r(R), \quad (2.44)$$

где $\vartheta_r(R) = R^{1/r}$ при $1 < r < \infty$ и $\vartheta_\infty(R) = \ln R$ при $r = \infty$.

Доказательство. Обозначим $q = r/(r-1)$, то есть $1/r + 1/q = 1$. Оценивая модуль интеграла в (2.44) через интеграл от модуля, применяя неравенство Гельдера к интегралу по ξ и делая вполне понятные оценки и замену переменной, получим в случае контура ζ_R^+

$$\begin{aligned} \left| \int_{\zeta_R^+} \left(\int_{a(x)}^{b(x)} e^{\gamma(x, \xi) z} f(\xi) d\xi \right) dz \right| &\leq \|f\|_r \left| \int_{\zeta_R^+} \left| \int_{a(x)}^{b(x)} e^{q\gamma(x, \xi) \operatorname{Re} z} \right| dz \right| \leq \\ &\leq C \|f\|_r \left| \int_{\zeta_R^+} \left(\frac{1 - \exp(-\eta \operatorname{Re} z)}{\operatorname{Re} z} \right)^{1/q} |dz| \right| \leq C \|f\|_r \int_0^{\eta R^{\frac{\pi}{2}}} \left(\frac{1 - \exp(-\xi)}{\xi} \right)^{1/q} d\xi \leq \end{aligned}$$

$$\leq C \|f\|_r \left(C + \int_1^{\eta R \frac{\pi}{2}} \left(\frac{1}{\xi} \right)^{1/q} d\xi \right) \leq C \|f\|_p \vartheta_p(R),$$

где $\eta > 0$ есть число, выражающееся через параметры леммы. А это и есть оценка (2.44) в случае контура ζ_R^+ . В случае контура ζ_R^- рассуждения аналогичны.

Тем самым, лемма доказана. $\square$

На основании левого неравенства в (2.40) из (2.41) и (2.43) получаем оценки

$$I_{n1}^+(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \int_0^1 O \left(\frac{1}{|\lambda|} \left(\left| e^{\lambda(\omega_1 x - \omega_2 \xi)} \right| + \left| e^{\lambda(\omega_1(x+1-\xi) - \omega_2)} \right| + \right. \right. \\ \left. \left. + \left| e^{\lambda(\omega_1(1-\xi) + \omega_2(x-1))} \right| + \left| e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2(x-1-\xi))} \right| \right) \right) f_1(\xi) d\xi d\lambda, \quad (2.45)$$

$$I_{n2}^+(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \left(\int_0^x O \left(\frac{1}{|\lambda|} \left| e^{\lambda \omega_1(x-\xi)} \right| \right) f_1(\xi) d\xi + \int_x^1 O \left(\frac{1}{|\lambda|} \left| e^{\lambda \omega_2(x-\xi)} \right| \right) f_1(\xi) d\xi \right) d\lambda. \quad (2.46)$$

Так как $f_1(\xi) \in L_r[0, 1]$ и для интегралов $I_{n1}^+(x)$ и $I_{n2}^+(x)$ выполняются все другие условия леммы 2.3, то на основании этой леммы из (2.45) и (2.46) заключаем, что

$$I_{n1}^+(x) = o_u(1), \quad I_{n2}^+(x) = o_u(1), \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.47)$$

Рассмотрим теперь слагаемое $I_{n3}^+(x)$ в (2.43). Так как $[1] = 1 + O(1/\lambda)$, то в $I_{n3}^+(x)$ в сумме под интегралом каждое слагаемое состоит из двух членов: один член соответствует 1, а другой — $O(1/\lambda)$. В соответствии с этим разобьем $I_{n3}^+(x)$ на две группы слагаемых $J_{n3}^+(x)$ и $K_{n3}^+(x)$ следующим образом

$$I_{n3}^+(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \int_0^1 \frac{p_2}{(\omega_2 - \omega_1)\Delta_+(\lambda)} \left(e^{\lambda(\omega_1 x - \omega_2 \xi)} - \frac{\omega_1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1(x+1-\xi) - \omega_2)} + \right. \\ \left. + \frac{\omega_1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1(1-\xi) + \omega_2(x-1))} - \frac{\omega_1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2(x-1-\xi))} \right) h_1(\xi) d\xi d\lambda + \\ + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \int_0^1 O \left(\frac{1}{|\lambda|} \left(\left| e^{\lambda(\omega_1 x - \omega_2 \xi)} \right| + \left| e^{\lambda(\omega_1(x+1-\xi) - \omega_2)} \right| + \right. \right. \\ \left. \left. + \left| e^{\lambda(\omega_1(1-\xi) + \omega_2(x-1))} \right| + \left| e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2(x-1-\xi))} \right| \right) \right) h_1(\xi) d\xi d\lambda =: J_{n3}^+(x) + K_{n3}^+(x), \quad (2.48)$$

Так как по предположению теоремы $h_1(x) \in W_r^1[0, 1]$, то и подавно $h_1(x) \in L_\infty[0, 1]$. Следовательно, на основании леммы 2.3 получим при всех $x \in [0, 1]$

$$K_{n3}^+(x) \leq C(h_1) \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.49)$$

В слагаемом $J_{n3}^+(x)$ в знаменателе присутствует член $\Delta^+(\lambda)$, для которого справедливы левая асимптотическая формула в (2.39). Следовательно, с учетом (2.40) при $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, $|\lambda| \gg 1$ и $\lambda \in \mathbb{C}_\delta$ справедлива асимптотика

$$\frac{1}{\Delta^+(\lambda)} = \frac{1}{[1] - \frac{\omega_1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1 - \omega_2)} [1]} = \frac{1}{1 - \frac{\omega_1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1 - \omega_2)} + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)} = \frac{1}{\Delta_0^+(\lambda)} + O_\delta\left(\frac{1}{\lambda}\right).$$

Учитывая эту асимптотику в $J_{n3}^+(x)$, получим

$$\begin{aligned}
J_{n3}^+(x) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \int_0^1 \frac{p_2}{(\omega_2 - \omega_1) \Delta_0^+(\lambda)} \left(e^{\lambda(\omega_1 x - \omega_2 \xi)} - \frac{\omega_1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1(x+1-\xi) - \omega_2)} + \right. \\
& + \frac{\omega_1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1(1-\xi) + \omega_2(x-1))} - \frac{\omega_1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2(x-1-\xi))} \Big) h_1(\xi) d\xi d\lambda + \\
& + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \int_0^1 O \left(\frac{1}{|\lambda|} \left(\left| e^{\lambda(\omega_1 x - \omega_2 \xi)} \right| + \left| e^{\lambda(\omega_1(x+1-\xi) - \omega_2)} \right| + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left| e^{\lambda(\omega_1(1-\xi) + \omega_2(x-1))} \right| + \left| e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2(x-1-\xi))} \right| \right) \right) h_1(\xi) d\xi d\lambda =: \hat{J}_{n3}^+(x) + \tilde{J}_{n3}^+(x). \quad (2.50)
\end{aligned}$$

На основании леммы 2.3 аналогично (2.49) получим при всех $x \in [0, 1]$

$$\tilde{J}_{n3}^+(x) \leq C(h_1) \frac{\ln n}{n} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.51)$$

В слагаемом $\hat{J}_{n3}^+(x)$ в интеграле по переменной ξ проведем один раз интегрирование по частям, учитывая, что $h_1(x) \in W_r^1[0, 1]$ и $h_1(0) = 0$. Получим

$$\begin{aligned}
\hat{J}_{n3}^+(x) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \int_0^1 \frac{p_2}{\lambda(\omega_2 - \omega_1) \Delta_0^+(\lambda)} h_1(\xi) d \left(-\frac{1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1 x - \omega_2 \xi)} + \frac{1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1(x+1-\xi) - \omega_2)} - \right. \\
& - \frac{1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1(1-\xi) + \omega_2(x-1))} + \frac{\omega_1}{\omega_2^2} e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2(x-1-\xi))} \Big) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \frac{p_2}{\lambda(\omega_2 - \omega_1) \Delta_0^+(\lambda)} h_1(1) \frac{1}{\omega_2} e^{\lambda\omega_2(x-1)} \times \\
& \times (-\Delta_0^+(\lambda)) d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \int_0^1 \frac{p_2}{\lambda(\omega_2 - \omega_1) \Delta_0^+(\lambda)} \left(-\frac{1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1 x - \omega_2 \xi)} + \frac{1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1(x+1-\xi) - \omega_2)} - \right. \\
& - \frac{1}{\omega_2} e^{\lambda(\omega_1(1-\xi) + \omega_2(x-1))} + \frac{\omega_1}{\omega_2^2} e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2(x-1-\xi))} \Big) h_1'(\xi) d\xi d\lambda = \\
& = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \frac{\omega_1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} e^{\lambda\omega_2(x-1)} d\lambda h_1(1) + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \int_0^1 O \left(\frac{1}{|\lambda|} \left(\left| e^{\lambda(\omega_1 x - \omega_2 \xi)} \right| + \left| e^{\lambda(\omega_1(x+1-\xi) - \omega_2)} \right| + \right. \right. \\
& \left. \left. + \left| e^{\lambda(\omega_1(1-\xi) + \omega_2(x-1))} \right| + \left| e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2(x-1-\xi))} \right| \right) \right) h_1(\xi) d\xi d\lambda =: L_{n1}^+(x) + L_{n2}^+(x), \quad (2.52)
\end{aligned}$$

где обозначено $L_{n1}^+(x) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \frac{\omega_1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} e^{\lambda\omega_2(x-1)} d\lambda h_1(1)$.

Так как $h_1'(x) \in L_r[0, 1]$ ($r > 1$), то аналогично предыдущему по лемме 2.3 для всех $x \in [0, 1]$ имеем оценку

$$|L_{n2}^+(x)| \leq C(h_1, \delta) \frac{1}{n} n^{1/r} = C(h_1, \delta) \frac{1}{n^{1/q}} \rightarrow 0 \quad \text{при } n \rightarrow \infty, \quad (2.53)$$

где $q = r/(r-1) > 1$.

Из (2.52)-(2.53) получим

$$\hat{J}_{n3}^+(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \frac{\omega_1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} e^{\lambda\omega_2(x-1)} d\lambda h_1(1) + o_u(1) \quad \text{равномерно по } x \in [0, 1]. \quad (2.54)$$

Следовательно, из (2.48), (2.49), (2.50), (2.51) и (2.54) найдем

$$\hat{J}_{n3}^+(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \frac{\omega_1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} e^{\lambda\omega_2(x-1)} d\lambda h_1(1) + o_u(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.55)$$

Наконец, рассмотрим слагаемое $I_{n4}^+(x)$ в (2.45). Проводя рассуждения, аналогичные рассуждениям при рассмотрении $I_{n3}^+(x)$, получим представление при $n \rightarrow \infty$:

$$I_{n4}^+(x) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \frac{p_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(\int_0^x e^{\lambda\omega_1(x-\xi)} h_1(\xi) d\xi + \int_x^1 e^{\lambda(\omega_2(x-\xi))} h_1(\xi) d\xi \right) d\lambda + o_u(1) =: \hat{I}_{n4}^+ + o_u(1). \quad (2.56)$$

Далее, интегрируя один раз по частям в интеграле по переменной ξ в $\hat{I}_{n4}^+(x)$, будем иметь

$$\begin{aligned} \hat{I}_{n4}^+(x, \lambda) = & \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \frac{1}{\lambda} h_1(x) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \frac{\omega_1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} e^{\lambda\omega_2(x-1)} d\lambda h_1(1) + \\ & + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \left(\int_0^x O\left(\frac{1}{|\lambda|} \left| e^{\lambda\omega_1(x-\xi)} \right| \right) h_1'(\xi) d\xi + \int_x^1 O\left(\frac{1}{|\lambda|} \left| e^{\lambda\omega_2(x-\xi)} \right| \right) h_1'(\xi) d\xi \right) d\lambda. \end{aligned}$$

На основании леммы 2.3 отсюда найдем

$$\hat{I}_{n4}^+(x, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \frac{1}{\lambda} h_1(x) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \frac{\omega_1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} e^{\lambda\omega_2(x-1)} d\lambda h_1(1) + o_u(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.57)$$

Таким образом, из (2.56) и (2.57) получим

$$I_{n4}^+(x, \lambda) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \frac{1}{\lambda} h_1(x) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \frac{\omega_1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} e^{\lambda\omega_2(x-1)} d\lambda h_1(1) + o_u(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.58)$$

Следовательно, с учетом (2.45), (2.47), (2.55) и (2.58) будем иметь

$$I_n^+(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^+} \frac{1}{\lambda} h_1(x) d\lambda + o_u(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.59)$$

Рассмотрим теперь случай $\operatorname{Re} \lambda \leq 0$. Используем теперь для функции Грина представление (2.42). Так как дальнейшие рассуждения в этом случае повторяют соответствующие рассуждения в случае $\operatorname{Re} \lambda \geq 0$, то опускаем подробности.

В результате получим

$$I_n^-(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n^-} \frac{1}{\lambda} h_1(x) d\lambda + o_u(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \quad (2.60)$$

Из (2.33), (2.59) и (2.60) найдем

$$I_n(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_n} \frac{1}{\lambda} h_1(x) d\lambda + o(1) = h_1(x) + o(1) \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

А это и есть утверждение (2.35) доказываемой теоремы. Тем самым, теорема 2.2 доказана. $\square$

В случае нулевого потенциала теорема о разложении первой компоненты по корневым функциям о.-.ф. $L_0(\lambda)$ вытекает из теоремы 2.2 как частный случай. Но для дальнейшего потребуются доказательства соответствующей теоремы о разложении другим методом, который для краткости назовем вычетным. Поводом для этого служит то, что основные моменты доказательства будут в дальнейшем существенно использоваться при выводе конечной формулы для классического решения в случае нулевого потенциала в разделе 4.

2.3.2. *Разложение первой компоненты вектор-функции по собственным функциям спектральной задачи с нулевым потенциалом. Вычетный метод.* Так как в данном подразделе $q = 0$, то в случае нулевого потенциала формула (2.32) приобретает более простой вид

$$h_1(x) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_{0k}} \int_0^1 G_0(x, \xi, \lambda) \left(p_1 h_1'(\xi) + \lambda p_2 h_1(\xi) + p_2 h_2(\xi) \right) d\xi d\lambda. \quad (2.61)$$

Требуется найти условия на компоненты в.-ф. $H(x)$, при которых имеет место равенство (2.61).

Преобразуем в этом равенстве первое слагаемое в круглых скобках под знаком интеграла справа, проведя интегрирование по частям. Для этого введем функцию

$$\tilde{h}_1(x) := h_1(x) - h_1(1). \quad (2.62)$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 2.4. *Для функции Грина $G(x, \xi, \lambda)$ о.-ф. $L(\lambda)$ справедливо равенство*

$$G(x, 0, \lambda) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Доказательство. Известно [23, с. 43], что по переменной ξ функция Грина $G(x, \xi, \lambda)$ удовлетворяет сопряженным краевым условиям к краевым условиям (2.3) (см. [23, с. 20-21]).

Непосредственным подсчетом убеждаемся, что сопряженные условия к условиям (2.3) имеют вид $z(0) = 0$, $z'(1) - \bar{\lambda} p_1 z(1) = 0$.

Следовательно, для функции Грина $G(x, \xi, \lambda)$ справедливо утверждение леммы. Лемма доказана. $\square$

В частности, в случае $q = 0$ из леммы 2.4 получаем следующее утверждение.

Лемма 2.5. *Для функции Грина $G_0(x, \xi, \lambda)$ о.-ф. $L_0(\lambda)$ справедливо равенство*

$$G_0(x, 0, \lambda) = 0, \quad x \in [0, 1], \quad \lambda \in \mathbb{C}. \quad (2.63)$$

Интегрируя по частям первое слагаемое в круглых скобках в (2.61) и учитывая, что $\tilde{h}_1(1) = 0$ и справедливо равенство (2.63), получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 G_0(x, \xi, \lambda) h_1'(\xi) d\xi &= \int_0^1 G_0(x, \xi, \lambda) d\tilde{h}_1(\xi) = \\ &= G_0(x, 1, \lambda) \tilde{h}_1(1) - G_0(x, 0, \lambda) \tilde{h}_1(0) - \int_0^1 G_{0\xi}(x, \xi, \lambda) \tilde{h}_1(\xi) d\xi = - \int_0^1 G_{0\xi}(x, \xi, \lambda) \tilde{h}_1(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (2.64)$$

С учетом (2.64) правую часть равенства (2.61) можно записать в виде

$$J(x) := \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_{0k}} \int_0^1 \left(-p_1 G_{0\xi}(x, \xi, \lambda) \tilde{h}_1(\xi) + \lambda p_2 G_0(x, \xi, \lambda) h_1(\xi) + p_2 G_0(x, \xi, \lambda) h_2(\xi) \right) d\xi d\lambda. \quad (2.65)$$

Таким образом, требуется найти условия на компоненты в.-ф. $H(x)$, при которых ряд $J(x)$ сходится к первой компоненте $h_1(x)$, то есть имеет место равенство

$$J(x) = h_1(x). \quad (2.66)$$

Справедлива следующая теорема о разложении первой компоненты в.-ф.

Теорема 2.3. *Если $h_1', h_2 \in L_1[0, 1]$ и $h_1(0) = 0$, то справедливо равенство (2.66), где ряд $J(x)$ сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$.*

Доказательство. Как уже отмечалось, справедливость теоремы установим не методом контурного интеграла Коши—Пуанкаре [23, с. 91–98], который обычно используется при доказательстве теорем о разложении и который использовался в предыдущем подразделе, а другим, вычетным методом.

Доказательство разобьем на ряд лемм.

Лемма 2.6. Для функции Грина $G_0(x, \xi, \lambda)$ о.-ф. $L_0(\lambda)$ справедлива формула

$$\begin{aligned} G_0(x, \xi, \lambda) = & \\ = & \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)\hat{\Delta}_0(\lambda)} \left(\omega_2 e^{\lambda(\omega_1 x + \omega_2(1-\xi))} - \omega_1 e^{\lambda\omega_1(x+1-\xi)} + \omega_1 e^{\lambda(\omega_1(1-\xi) + \omega_2 x)} - \omega_1 e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2(x-\xi))} \right) - \\ & - \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} \left(e^{\lambda\omega_1(x-\xi)} \chi(x-\xi) + e^{\lambda\omega_2(x-\xi)} \chi(\xi-x) \right), \quad (2.67) \end{aligned}$$

где $\hat{\Delta}_0(\lambda)$ определяется формулой (2.5).

Доказательство. Ищем резольвенту о.-ф. $L_0(\lambda)$ как решение краевой задачи

$$y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y = g(x), \quad y(0) = y'(1) = 0.$$

Для нахождения решения используем ф.с.р. уравнения с асимптотикой (2.4). Проводя стандартные рассуждения, получаем, что решение дается интегральным оператором и для его ядра справедлива формула (2.67). Лемма доказана. $\square$

Лемма 2.7. Справедливы формулы

$$r_k(x, \xi) := \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_{0k}} G_0(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{\lambda_{0k}(\omega_2 - \omega_1)^2} \left(e^{\lambda_{0k}\omega_2 x} - e^{\lambda_{0k}\omega_1 x} \right) \left(e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} - e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \right), \quad (2.68)$$

$$r_{1k}(x, \xi) := \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_{0k}} G_{0\xi}(x, \xi, \lambda) = -\frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \left(e^{\lambda_{0k}\omega_2 x} - e^{\lambda_{0k}\omega_1 x} \right) \left(\omega_1 e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} - \omega_2 e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \right), \quad (2.69)$$

где с.з. λ_{0k} определяются формулой (2.6).

Доказательство. Так как функция $G_0(x, \xi, \lambda)$ по λ есть мероморфная функция и λ_{0k} есть ее простой полюс, то из формулы (2.67) получим

$$\begin{aligned} r_k(x, \xi) = & \frac{1}{\lambda_{0k}(\omega_2 - \omega_1)\hat{\Delta}'_0(\lambda_{0k})} \left(\omega_2 e^{\lambda_{0k}(\omega_1 x + \omega_2(1-\xi))} - \omega_1 e^{\lambda_{0k}\omega_1(x+1-\xi)} + \right. \\ & \left. + \omega_1 e^{\lambda_{0k}(\omega_1(1-\xi) + \omega_2 x)} - \omega_1 e^{\lambda_{0k}(\omega_1 + \omega_2(x-\xi))} \right). \quad (2.70) \end{aligned}$$

На основании формул (2.6) справедливо представление

$$\hat{\Delta}'_0(\lambda_{0k}) = \omega_2^2 e^{\lambda_{0k}\omega_2} - \omega_1^2 e^{\lambda_{0k}\omega_1} = e^{\lambda_{0k}\omega_2} (\omega_2^2 - \omega_1^2 e^{\lambda_{0k}(\omega_1 - \omega_2)}). \quad (2.71)$$

Но так как

$$e^{\lambda_{0k}(\omega_1 - \omega_2)} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad (2.72)$$

то из (2.71) следует

$$\hat{\Delta}'_0(\lambda_{0k}) = e^{\lambda_{0k}\omega_2} (\omega_2^2 - \omega_1\omega_2) = e^{\lambda_{0k}\omega_2} \omega_2 (\omega_2 - \omega_1). \quad (2.73)$$

Подставим (2.73) в (2.70). Получим с учетом (2.72)

$$\begin{aligned} r_k(x, \xi) = & \frac{1}{\lambda_{0k}\omega_2(\omega_2 - \omega_1)^2} \left(\omega_2 e^{\lambda_{0k}(\omega_1 x - \omega_2 \xi)} - \omega_1 e^{\lambda_{0k}(\omega_1(x+1-\xi) - \omega_2)} + \omega_1 e^{\lambda_{0k}(\omega_1(1-\xi) + \omega_2(x-1))} - \right. \\ & \left. - \omega_1 e^{\lambda_{0k}(\omega_1 + \omega_2(x-1-\xi))} \right) = \frac{1}{\lambda_{0k}\omega_2(\omega_2 - \omega_1)^2} \left(\omega_1 e^{\lambda_{0k}\omega_1 x} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} - e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} e^{\lambda_{0k}(\omega_1 - \omega_2)} \right) + \right. \\ & \left. + \omega_1 e^{\lambda_{0k}\omega_2 x} \left(e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} e^{\lambda_{0k}(\omega_1 - \omega_2)} - e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} e^{\lambda_{0k}(\omega_1 - \omega_2)} \right) \right) = \\ = & \frac{1}{\lambda_{0k}\omega_2(\omega_2 - \omega_1)^2} \left(\omega_1 e^{\lambda_{0k}\omega_1 x} \left(\frac{\omega_2}{\omega_1} e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} - e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) + \omega_1 e^{\lambda_{0k}\omega_2 x} \left(e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} \frac{\omega_2}{\omega_1} - e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \frac{\omega_2}{\omega_1} \right) \right) = \\ = & \frac{1}{\lambda_{0k}(\omega_2 - \omega_1)^2} \left(e^{\lambda_{0k}\omega_2 x} - e^{\lambda_{0k}\omega_1 x} \right) \left(e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} - e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \right). \end{aligned}$$

Тем самым формула (2.68) установлена.

Формула (2.69) получается из формулы (2.68) путем дифференцирования $r_k(x, \xi)$ по ξ . Лемма доказана. $\square$

Будем далее обозначать

$$a := \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \in (0, 1) \implies 1 - a = -\frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{|\omega_1|}{\omega_2 - \omega_1}.$$

Лемма 2.8. Если $f(x) \in L_1[0, 1]$, то справедливы формулы

$$\int_0^1 e^{-\lambda_{0k}\omega_1\xi} f(\xi) d\xi = -\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \varkappa^*(\xi) f^*(\xi) d\xi = \frac{1}{1-a} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \varkappa^*(\xi) f^*(\xi) d\xi, \quad (2.74)$$

$$\int_0^1 e^{-\lambda_{0k}\omega_2\xi} f(\xi) d\xi = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \theta_*(\xi) f_*(\xi) d\xi = \frac{1}{a} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \theta_*(\xi) f_*(\xi) d\xi, \quad (2.75)$$

где

$$\varkappa(\xi) := e^{(1-a)\sigma\xi}, \quad \theta(\xi) := e^{-a\sigma\xi} \quad (2.76)$$

и используется обозначение для данной функции $g(x)$

$$g^*(\xi) := \begin{cases} 0, & \xi \in [0, a), \\ g\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1]; \end{cases} \quad g_*(\xi) := \begin{cases} g\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ 0, & \xi \in [a, 1]. \end{cases} \quad (2.77)$$

Доказательство. С учетом формул (2.6) для с.з. λ_{0k} справедливо представление

$$\int_0^1 e^{-\lambda_{0k}\omega_1\xi} f(\xi) d\xi = \int_0^1 e^{-2k\pi i\frac{\omega_1\xi}{\omega_2-\omega_1}} e^{(1-a)\sigma\xi} f(\xi) d\xi = \int_0^1 e^{-2k\pi i\frac{\omega_1\xi}{\omega_2-\omega_1}} \varkappa(\xi) f(\xi) d\xi. \quad (2.78)$$

Очевидно $\frac{\omega_1\xi}{\omega_2 - \omega_1} \in (-1; 0]$. Так как функция $e^{-2k\pi i x}$ является 1-периодичной, то из (2.78) следует

$$\int_0^1 e^{-\lambda_{0k}\omega_1\xi} f(\xi) d\xi = \int_0^1 e^{-2k\pi i\left(\frac{\omega_1\xi}{\omega_2-\omega_1}+1\right)} \varkappa(\xi) f(\xi) d\xi.$$

Сделаем в интеграле справа замену переменной интегрирования

$$\frac{\omega_1\xi}{\omega_2 - \omega_1} + 1 = \xi_1 \quad \longleftrightarrow \quad \xi = \frac{(\omega_2 - \omega_1)(\xi_1 - 1)}{\omega_1}.$$

В результате получим

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-\lambda_{0k}\omega_1\xi} f(\xi) d\xi &= -\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \int_{\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}}^1 e^{-2k\pi i\xi_1} \varkappa\left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)(\xi_1 - 1)}{\omega_1}\right) f\left(\frac{(\omega_2 - \omega_1)(\xi_1 - 1)}{\omega_1}\right) d\xi_1 = \\ &= \frac{1}{1-a} \int_a^1 e^{-2k\pi i\xi_1} \varkappa\left(\frac{1-\xi_1}{1-a}\right) f\left(\frac{1-\xi_1}{1-a}\right) d\xi_1 = \frac{1}{1-a} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \varkappa^*(\xi) f^*(\xi) d\xi, \end{aligned}$$

то есть установлена справедливость равенства (2.74), где функции $\varkappa^*(\xi)$ и $f^*(\xi)$ определяются левой формулой в (2.76), а $\varkappa(\xi)$ — левой формулой в (2.77).

Далее, аналогично предыдущему, можно получить формулу

$$\begin{aligned} \int_0^1 e^{-\lambda_{0k}\omega_2\xi} f(\xi) d\xi &= \int_0^1 e^{-2k\pi i\frac{\omega_2\xi}{\omega_2-\omega_1}} e^{-a\hat{x}\xi} f(\xi) d\xi = \int_0^1 e^{-2k\pi i\frac{\omega_2\xi}{\omega_2-\omega_1}} \theta(\xi) f(\xi) d\xi = \\ &= \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \int_0^{\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}} e^{-2k\pi i\xi_1} \theta\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2}\xi_1\right) f\left(\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2}\xi_1\right) d\xi_1 = \frac{1}{a} \int_0^a e^{-2k\pi i\xi_1} \theta\left(\frac{\xi_1}{a}\right) f\left(\frac{\xi_1}{a}\right) d\xi_1 = \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{a} \int_0^1 e^{-2k\pi i \xi \theta_*(\xi)} f_*(\xi) d\xi,$$

то есть формулу (2.75), где функции $\varkappa_*(\xi)$ и $f_*(\xi)$ определяются правой формулой в (2.76), а $\theta(\xi)$ — правой формулой в (2.77).

Тем самым лемма 2.8 доказана. $\square$

Перейдем теперь к непосредственному доказательству теоремы 2.3.

Рассмотрим ряд $J(x)$, введенный в (2.65). Справедливо представление

$$\begin{aligned} J(x) &= \sum_k \int_0^1 \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_{0k}} (-p_1 G_\xi(x, \xi, \lambda) \tilde{h}_1(\xi) + \lambda p_2 G(x, \xi, \lambda) h_1(\xi) + p_2 G(x, \xi, \lambda) h_2(\xi)) d\xi = \\ &= \sum_k \int_0^1 (-p_1 r_{1k}(x, \xi) \tilde{h}_1(\xi) + \lambda_{0k} p_2 r_k(x, \xi) h_1(\xi) + p_2 r_k(x, \xi) h_2(\xi)) d\xi := J_1(x) + J_2(x) + J_3(x). \end{aligned} \quad (2.79)$$

Рассмотрим отдельно $J_1(x)$, $J_2(x)$ и $J_3(x)$. Для $J_1(x)$ имеем в силу формул (2.69), (2.74) и (2.75)

$$\begin{aligned} J_1(x) &= \frac{p_1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k (e^{\lambda_{0k} \omega_2 x} - e^{\lambda_{0k} \omega_1 x}) \int_0^1 (\omega_1 e^{-\lambda_{0k} \omega_1 \xi} - \omega_2 e^{-\lambda_{0k} \omega_2 \xi}) \tilde{h}_1(\xi) d\xi = \frac{p_1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \times \\ &\quad \times \sum_k \left(e^{a\sigma x} e^{2k\pi i(ax)} \int_0^1 e^{-2k\pi i \xi} \left(\frac{\omega_1}{1-a} \varkappa^*(\xi) \tilde{h}_1^*(\xi) - \frac{\omega_2}{a} \theta_*(\xi) \tilde{h}_{1*}(\xi) \right) dx - \right. \\ &\quad \left. - e^{(a-1)\sigma x} e^{2k\pi i((a-1)x+1)} \int_0^1 e^{-2k\pi i \xi} \left(\frac{\omega_1}{1-a} \varkappa^*(\xi) \tilde{h}_1^*(\xi) - \frac{\omega_2}{a} \theta_*(\xi) \tilde{h}_{1*}(\xi) \right) dx \right) = \\ &= \frac{p_1}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \left(-\frac{1}{\theta(x)} e^{2k\pi i(ax)} \int_0^1 e^{-2k\pi i \xi} (\varkappa^*(\xi) \tilde{h}_1^*(\xi) + \theta_*(\xi) \tilde{h}_{1*}(\xi)) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\varkappa(x)} e^{2k\pi i((a-1)x+1)} \int_0^1 e^{-2k\pi i \xi} (\varkappa^*(\xi) \tilde{h}_1^*(\xi) + \theta_*(\xi) \tilde{h}_{1*}(\xi)) d\xi \right). \end{aligned} \quad (2.80)$$

Далее используется обозначение для данной функции $g(x)$

$$\hat{g}(\xi) := \varkappa^*(\xi) g^*(\xi) + \theta_*(\xi) g_*(\xi). \quad (2.81)$$

На основании формул (2.76), (2.77) и (2.7) справедливо представление

$$\begin{aligned} \hat{g}(\xi) &= \begin{cases} \theta\left(\frac{\xi}{a}\right) g\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ \varkappa\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right) g\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1], \end{cases} = \\ &= \begin{cases} e^{-\sigma \xi} g\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ e^{\sigma(1-\xi)} g\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1], \end{cases} = e^{-\sigma \xi} \begin{cases} g\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ \frac{\omega_1}{\omega_2} g\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1]. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.82)$$

Таким образом, $\varkappa^*(\xi)\tilde{h}_1^*(\xi) + \theta_*(\xi)\tilde{h}_{1*}(\xi) = \hat{h}_1(\xi)$, и на основании (2.80) будем иметь

$$J_1(x) = \frac{p_1}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \left(-\frac{1}{\theta(x)} e^{2k\pi i(ax)} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \hat{h}_1(\xi) d\xi + \frac{1}{\varkappa(x)} e^{2k\pi i((a-1)x+1)} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \hat{h}_1(\xi) d\xi \right). \quad (2.83)$$

Далее потребуется следующая лемма.

Лемма 2.9. Пусть $g(x) \in W_1^1[0, 1]$ и $g(1) = 0$. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции $\hat{g}(x)$ ($\hat{g}(x)$ определяется формулой (2.81) и имеет представление (2.82), а функции $\varkappa(\xi)$ и $\theta(\xi)$ определяются формулами (2.77)) равномерно сходится на отрезке $[0, 1]$ к функции $\hat{g}(x)$.

Доказательство. В силу того, что $g(x) \in W_1^1[0, 1]$, то и $\hat{g}(x) \in W_1^1([0, a) \cup (a, 1])$. Покажем, что $\hat{g}(x)$ непрерывна в точке a . Тогда $\hat{g}(x)$ будет абсолютно непрерывна на $[0, 1]$ и $\hat{g}'(x) \in L_1[0, 1]$. В самом деле, так как $g(1) = 0$, то на основании (2.82) получим $\hat{g}(a-0) = \theta(1)g(1) = 0$, $\hat{g}(a+0) = \varkappa(1)g(1) = 0$, то есть $\hat{g}(x)$ непрерывна при $x = a$. Далее, $\hat{g}(0) = \theta(0)g(0) = g(0)$, $\hat{g}(1) = \varkappa(0)g(0) = g(0)$, то есть $\hat{g}(0) = \hat{g}(1)$.

По следствию [1, с. 122] из теоремы Жордана [1, с. 121], если функция $f(x)$ абсолютно непрерывна и $f(0) = f(1)$, то ряд Фурье этой функции сходится к ней равномерно на отрезке $[0, 1]$.

Так как $\hat{g}(x) \in W_1^1[0, 1]$ и $\hat{g}(0) = \hat{g}(1)$, то имеем $\hat{g}(x) = \sum_k e^{2k\pi ix} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \hat{g}(\xi) d\xi$ на основании вышесказанного, при этом тригонометрический ряд Фурье справа сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$. Тем самым лемма доказана. $\square$

Так как функция $\tilde{h}_1(x)$ удовлетворяет условия леммы 2.9, то из (2.83) получим

$$J_1(x) = \frac{p_1}{\omega_2 - \omega_1} \left(-\frac{1}{\theta(x)} \hat{h}_1(ax) + \frac{1}{\varkappa(x)} \hat{h}_1((a-1)x+1) \right). \quad (2.84)$$

Так как $ax \in [0, a]$ и $(a-1)x+1 \in [a, 1]$ при $x \in [0, 1]$, то из (2.84) с учетом представления (2.82) получим

$$J_1(x) = \frac{p_1}{\omega_2 - \omega_1} \left(-\frac{1}{\theta(x)} \theta(x) \tilde{h}_1(x) + \frac{1}{\varkappa(x)} \tilde{h}_1(x) \right) = \frac{p_1}{\omega_2 - \omega_1} (-\tilde{h}_1(x) + \tilde{h}_1(x)) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (2.85)$$

Рассмотрим теперь $J_2(x)$ из (2.79). В силу формул (2.69), (2.74) и (2.75) для $J_2(x)$ имеем

$$\begin{aligned} J_2(x) &= \frac{p_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k (e^{\lambda_{0k}\omega_2 x} - e^{\lambda_{0k}\omega_1 x}) \int_0^1 (e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} - e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi}) h_1(\xi) d\xi = \frac{p_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \times \\ &\quad \times \sum_k \left(e^{a\sigma x} e^{2k\pi i(ax)} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \left(\frac{1}{1-a} \varkappa^*(\xi) h_1^*(\xi) - \frac{1}{a} \theta_*(\xi) h_{1*}(\xi) \right) dx - \right. \\ &\quad \left. - e^{(a-1)\sigma x} e^{2k\pi i((a-1)x+1)} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \left(\frac{1}{1-a} \varkappa^*(\xi) h_1^*(\xi) - \frac{1}{a} \theta_*(\xi) h_{1*}(\xi) \right) dx \right) = \\ &= \frac{p_2}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \left(-\frac{1}{\theta(x)} e^{2k\pi i(ax)} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \left(\frac{1}{\omega_1} \varkappa^*(\xi) h_1^*(\xi) + \frac{1}{\omega_2} \theta_*(\xi) h_{1*}(\xi) \right) d\xi + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\varkappa(x)} e^{2k\pi i((a-1)x+1)} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \left(\frac{1}{\omega_1} \varkappa^*(\xi) h_1^*(\xi) + \frac{1}{\omega_2} \theta_*(\xi) h_{1*}(\xi) \right) d\xi \right). \quad (2.86) \end{aligned}$$

Введем следующее обозначение для данной функции $g(x)$:

$$\check{g}(\xi) := \frac{1}{\omega_1} \varkappa^*(\xi) g^*(\xi) + \frac{1}{\omega_2} \theta_*(\xi) g_*(\xi). \quad (2.87)$$

На основании формул (2.76), (2.77) и (2.7) справедливо представление

$$\begin{aligned} \check{g}(\xi) &= \begin{cases} \frac{1}{\omega_2} \theta\left(\frac{\xi}{a}\right) g\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ \frac{1}{\omega_1} \varkappa\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right) g\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1], \end{cases} = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\omega_2} e^{-\sigma\xi} g\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ \frac{1}{\omega_1} e^{\sigma(1-\xi)} g\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1], \end{cases} = \frac{1}{\omega_2} e^{-\xi} \begin{cases} g\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ g\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1]. \end{cases} \end{aligned} \quad (2.88)$$

Таким образом, $\frac{1}{\omega_1} \varkappa^*(\xi) h_1^*(\xi) + \frac{1}{\omega_2} \theta_*(\xi) h_{1*}(\xi) = \check{h}_1(\xi)$, и на основании (2.86) будем иметь

$$J_2(x) = \frac{p_2}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \left(-\frac{1}{\theta(x)} e^{2k\pi i(ax)} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \check{h}_1(\xi) dx + \frac{1}{\varkappa(x)} e^{2k\pi i((a-1)x+1)} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \check{h}_1(\xi) dx \right). \quad (2.89)$$

Далее воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2.10. Пусть $g(x) \in W_1^1[0, 1]$ и $g(0) = 0$. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции $\check{g}(x)$ равномерно сходится на отрезке $[0, 1]$ к функции $\check{g}(x)$ ($\check{g}(x)$ определяется формулой (2.87) и имеет представление (2.88), а функции $\varkappa(\xi)$ и $\theta(\xi)$ определяются формулами (2.77)).

Доказательство. Так как $g(x) \in W_1^1[0, 1]$, то и $\check{g}(x) \in W_1^1([0, a) \cup (a, 1])$. Покажем, что $\check{g}(x)$ непрерывна в точке a , тогда $\check{g}(x)$ будет абсолютно непрерывна на $[0, 1]$ и $\check{g}'(x) \in L_1[0, 1]$. В самом деле, на основании (2.88) получим

$$\check{g}(a-0) = \frac{1}{\omega_2} \theta(1) g(1), \quad \check{g}(a+0) = \frac{1}{\omega_1} \varkappa(1) g(1). \quad (2.90)$$

Покажем, что

$$\frac{1}{\omega_2} \theta(1) = \frac{1}{\omega_1} \varkappa(1), \quad (2.91)$$

или, что эквивалентно, $\frac{1}{\omega_2} e^{-a\sigma} = \frac{1}{\omega_1} e^{(1-a)\sigma}$, или $\frac{1}{\omega_2} = \frac{1}{\omega_1} e^{\sigma}$. Но по определению σ (см. (2.7)) последнее равенство верно, то есть (2.91) имеет место.

Тогда из (2.90) получим $\check{g}(a-0) = \check{g}(a+0)$, а это означает, что $\check{g}(x)$ непрерывна при $x = a$. Далее, $\check{g}(0) = \frac{1}{\omega_2} \theta(0) g(0) = 0$ и $\check{g}(1) = \frac{1}{\omega_1} \varkappa(0) g(0) = 0$, то есть $\check{g}(0) = \check{g}(1) = 0$.

По следствию [1, с. 122] из теоремы Жордана [1, с. 121], если функция $f(x)$ абсолютно непрерывна и $f(0) = f(1)$, то ряд Фурье этой функции сходится к ней равномерно на отрезке $[0, 1]$.

Так как $\check{g}(x) \in W_1^1[0, 1]$ и $\check{g}(0) = \check{g}(1)$, то имеем $\check{g}(x) = \sum_k e^{2k\pi ix} \int_0^1 e^{-2k\pi i\xi} \check{g}(\xi) dx$ на основании вышесказанного, при этом тригонометрический ряд Фурье справа сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$. Тем самым лемма доказана. $\square$

Так как функция $h_1(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2.10, то из (2.89) получим

$$J_2(x) = \frac{p_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(-\frac{1}{\theta(x)} \check{h}_1(ax) + \frac{1}{\varkappa(x)} \check{h}_1((a-1)x+1) \right). \quad (2.92)$$

Так как $ax \in [0, a]$ и $(a-1)x+1 \in [a, 1]$ при $x \in [0, 1]$, то из (2.92) с учетом представления (2.88) получим $\forall x \in [0, 1]$

$$J_2(x) = \frac{p_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(-\frac{1}{\theta(x)} \frac{1}{\omega_2} \theta(x) h_1(x) + \frac{1}{\varkappa(x)} \frac{1}{\omega_1} \varkappa(x) h_1(x) \right) = \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(-\frac{1}{\omega_2} + \frac{1}{\omega_1} \right) h_1(x) = h_1(x). \quad (2.93)$$

Наконец, рассмотрим слагаемое $J_3(x)$ из (2.79) и выполним в интеграле один раз интегрирование по частям, обозначив

$$H_2(x) := \int_x^1 h_2(\xi) d\xi. \quad (2.94)$$

В результате получим

$$\begin{aligned} J_3(x) &= \sum_k \int_0^1 p_2 r_k(x, \xi) h_2(\xi) d\xi = -p_2 \sum_k \int_0^1 r_k(x, \xi) dH_2(\xi) = \\ &= -p_2 \sum_k \left(r_k(x, 1)H_2(1) - r_k(x, 0)H_2(0) - \int_0^1 r_{1k}(x, \xi)H_2(\xi) d\xi \right) = p_2 \sum_k \int_0^1 r_{1k}(x, \xi)H_2(\xi) d\xi, \end{aligned} \quad (2.95)$$

так как $H_2(1) = 0$ по определению (2.94), а $r_k(x, 0) = 0$ в силу формулы (2.68).

При рассмотрении $J_1(x)$ (см. (2.85)) было установлено, что если $\tilde{h}_1(1) = 0$ и $\tilde{h}_1(\xi) \in W_1^1[0, 1]$, то $\sum_k \int_0^1 r_{1k}(x, \xi)\tilde{h}_1(\xi) d\xi = 0$, причем ряд слева сходится равномерно на $[0, 1]$.

Но $H_2(1) = 0$ и $H_2(\xi) \in W_1^1[0, 1]$. Следовательно, также будем иметь $\sum_k \int_0^1 r_{1k}(x, \xi)H_2(\xi) d\xi = 0$, где ряд слева сходится равномерно на $[0, 1]$. С учетом (2.95) отсюда следует, что ряд $J_3(x)$ равномерно сходится к нулю, то есть

$$J_3(x) = 0 \quad \forall x \in [0, 1]. \quad (2.96)$$

Из (2.79), (2.85), (2.93) и (2.96) следует утверждение доказываемой теоремы. Таким образом, теорема 2.3 полностью доказана. $\square$

3. ЕДИНСТВЕННОСТЬ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ И ФОРМУЛА ДЛЯ РЕШЕНИЯ В ВИДЕ РЯДА

Пусть R_λ^1 есть интегральный оператор с ядром $G_\xi(x, \xi, \lambda)$. Тогда, используя введенное ранее обозначение (2.31), можно сформулировать следующую теорему.

Теорема 3.1. *Если $u(x, t)$ есть классическое решение задачи (1.1)–(1.3), то это решение единственно и находится по формуле*

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \left(\dots \right) \left(-p_1 e^{\lambda t} R_\lambda^1 \tilde{\varphi} + p_2 e^{\lambda t} \lambda R_\lambda \varphi + p_2 e^{\lambda t} R_\lambda \psi + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_\lambda f(\cdot, \tau) d\tau \right) d\lambda, \quad (3.1)$$

в которой ряд справа сходится равномерно по $x \in [0, 1]$ при любом фиксированном $t > 0$. Здесь обозначено $\tilde{\varphi}(x) := \varphi(x) - \varphi(1)$.

Отметим, что формулы, аналогичные формуле (3.1), уже встречались ранее (например, в работах [2, 4, 25] и многих других).

Доказательство. Запишем задачу (1.1)–(1.3) в другом виде. Обозначим

$$v_1 = u, \quad v_2 = \frac{d}{dt} v_1 \left(= \frac{d}{dt} u \right), \quad (3.2)$$

тогда уравнение (1.1) запишется в виде системы

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} v_1 = v_2, \\ \frac{d}{dt} v_2 = -\frac{1}{p_2} d_x^2 v_1 + \frac{1}{p_2} q(x) v_1 - \frac{p_1}{p_2} d_x v_2 + \frac{1}{p_2} f(x, t), \end{cases} \quad (3.3)$$

где, как и раньше, $d_x := d/dx$.

Если обозначить $V := \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix}$, $F := \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{p_2} f(x, t) \end{pmatrix}$ и использовать введенный ранее оператор A (см. (2.22)), то система (3.3) запишется в виде

$$\frac{d}{dt} V(\cdot, t) = AV(\cdot, t) + F(\cdot, t), \quad (3.4)$$

где по предположению теоремы $V_t(x, t)$ и $F(x, t)$ суть функции класса $\mathcal{Q}$. А с использованием введенного формулой (2.23) оператора $\mathcal{L}$ и с учетом формулы (3.4) задача (1.1)–(1.3) запишется в виде

$$\frac{d}{dt} V(\cdot, t) = \mathcal{L}V(\cdot, t) + F(\cdot, t), \quad (3.5)$$

$$V(x, 0) = \Xi(x), \quad (3.6)$$

где $\Xi(x) = (\varphi(x), \psi(x))^T$. При этом вектор-функция $V(x, t)$ удовлетворяет уравнению (3.5) п.в. в области Q и равенству (3.6) всюду на $[0, 1]$. Так как $u(x, t)$ есть классическое решение задачи (1.1)–(1.3), то $V(x, t)$ удовлетворяет по x условиям теоремы 2.2 о разложении первой компоненты по собственным вектор-функциям оператора $\mathcal{L}$, то есть имеет место представление

$$v_1(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\dots \right) (\mathcal{R}_\lambda V(\cdot, t))_1 d\lambda, \quad (3.7)$$

где ряд справа сходится равномерно по переменной $x \in [0, 1]$ при любом фиксированном $t > 0$. По построению для вектор-функции $V(x, t)$ при п.в. $(x, t) \in Q$ выполняется соотношение (3.5). Подействуем оператором $\mathcal{R}_\lambda$ на обе части этого соотношения. Получим равенство

$$\mathcal{R}_\lambda V_t(\cdot, t) = \mathcal{R}_\lambda (\mathcal{L}V)(\cdot, t) + \mathcal{R}_\lambda F(\cdot, t). \quad (3.8)$$

Обозначим

$$Y(x, t, \lambda) := \mathcal{R}_\lambda V(\cdot, t). \quad (3.9)$$

Используя формулу (2.30) для резольвенты $\mathcal{R}_\lambda$, из (3.9) получим представление

$$Y(x, t, \lambda) := \begin{pmatrix} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) v_\lambda(\xi, t) d\xi \\ \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) (\lambda v_\lambda(\xi, t)) d\xi + v_1(x, t) \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

где аналогично (2.26) обозначено $v_\lambda(\xi, t) = -p_1 v'_{1\xi}(\xi, t) - \lambda p_2 v_1(\xi, t) - p_1 v_2(\xi, t)$.

Покажем, что для п.в. $t \geq 0$ при любых фиксированных $x \in [0, 1]$ и $\lambda \in \mathbb{C}$

$$\frac{d}{dt} Y(x, t, \lambda) = \begin{pmatrix} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) v'_{\lambda t}(\xi, t) d\xi \\ \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) (\lambda v'_{\lambda t}(\xi, t)) d\xi + v'_{1t}(x, t) \end{pmatrix} \left(= \mathcal{R}_\lambda V_t(\cdot, t) \right). \quad (3.11)$$

Для этого воспользуемся рассуждениями, аналогичными рассуждениям из статьи [43, с. 287–288]. Так как по построению компоненты $V(\xi, t)$ являются абсолютно непрерывными функциями по переменной t , то $v_\lambda(\xi, t) = v_\lambda(\xi, 0) + \int_0^t v'_{\lambda t}(\xi, \tau) d\tau$.

Отсюда на основании (3.10) будем иметь

$$Y(x, t, \lambda) := \begin{pmatrix} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) v_\lambda(\xi, 0) d\xi + \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \int_0^t v'_{\lambda t}(\xi, \tau) d\tau d\xi \\ \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \lambda v_\lambda(\xi, 0) d\xi + \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \int_0^t \lambda v'_{\lambda t}(\xi, \tau) d\tau d\xi + v_1(x, t) \end{pmatrix}. \quad (3.12)$$

Но, как уже отмечалось выше, на основании предположения теоремы и формул (3.2) имеем $v_{\lambda t}(\xi, \tau) \in L_1(Q_T)$ при любом $T > 0$ (или, по-другому, из класса $\mathcal{Q}$). Следовательно и $G(x, \xi, \lambda) V_t(\xi, \tau)$ есть функция класса $\mathcal{Q}$ по переменным ξ и τ . Поэтому по теореме

Фубини [24, с. 333] имеем $\int_0^1 \mathcal{G}(x, \xi, \lambda) v_{\lambda t}(\xi, \tau) d\xi \in L_1[0, T]$ по τ при любом $T > 0$ и любых фиксированных $x \in [0, 1]$. А значит, (3.12) можно представить в виде

$$Y(x, t, \lambda) := \left(\begin{array}{c} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) v_{\lambda}(\xi, 0) d\xi + \int_0^t \left(\int_0^1 G(x, \xi, \lambda) v'_{\lambda t}(\xi, \tau) d\xi \right) d\tau \\ \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \lambda v_{\lambda}(\xi, 0) d\xi + \int_0^t \left(\int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \lambda v'_{\lambda t}(\xi, \tau) d\xi \right) d\tau + v_1(x, t) \end{array} \right).$$

Отсюда следует, что $Y(x, t, \lambda)$ абсолютно непрерывна по t и для п.в. $t > 0$ выполняется равенство (3.11). Далее, преобразуем первое слагаемое справа в (3.8) следующим образом:

$$\mathcal{R}_{\lambda}(\mathcal{L}V) = \mathcal{R}_{\lambda}((\mathcal{L} - \lambda\mathcal{E} + \lambda\mathcal{E})V) = V + \lambda\mathcal{R}_{\lambda}V = V + \lambda Y. \quad (3.13)$$

Тогда из (3.8), (3.11) и (3.13) получим, что при фиксированных x и λ в.-ф. $Y(x, t, \lambda)$ является решением дифференциального уравнения

$$\frac{d}{dt}Y(x, t, \lambda) - \lambda Y(x, t, \lambda) = V(x, t) + \mathcal{R}_{\lambda}F(\cdot, t). \quad (3.14)$$

Кроме того, на основании (3.6)

$$Y(x, 0, \lambda) = \mathcal{R}_{\lambda}V(\cdot, 0) = \mathcal{R}_{\lambda}\Xi. \quad (3.15)$$

Таким образом, $Y(x, t, \lambda)$ при любых фиксированных $x \in [0, 1]$, и $\lambda \in \mathbb{C}$ является решением задачи Коши (3.14)-(3.15). Общее решение уравнения (3.14) есть

$$Y_{\text{о.н.}}(x, t, \lambda) = \begin{pmatrix} e^{\lambda t} & 0 \\ 0 & e^{\lambda t} \end{pmatrix} C + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} \left(V(x, \tau) + \mathcal{R}_{\lambda}F(\cdot, \tau) \right) d\tau, \quad (3.16)$$

где $C = (c_1, c_2)^T$ есть вектор, не зависящий от переменной t , то есть $c_j = c_j(x, \lambda)$, $j = 1, 2$. Удовлетворим решение (3.16) начальному условию (3.15). Получим $Y_{\text{о.н.}}(x, 0, \lambda) = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \mathcal{R}_{\lambda}\Xi$.

Отсюда следует, что

$$c_1(x, \lambda) = (\mathcal{R}_{\lambda}\Xi)_1, \quad c_2(x, \lambda) = (\mathcal{R}_{\lambda}\Xi)_2. \quad (3.17)$$

Используя формулы (3.16)-(3.17), получим следующее представление для решения задачи Коши (3.14)-(3.15):

$$Y(x, t, \lambda) = e^{\lambda t} \mathcal{R}_{\lambda}\Xi(x) + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} \left(V(x, \tau) + \mathcal{R}_{\lambda}F(\cdot, \tau) \right) d\tau, \quad (3.18)$$

причем это решение единственное.

Нас интересует только первая компонента равенства (3.18) (см. формулу (3.7)), то есть если $Y(x, t, \lambda) = (y_1(x, t, \lambda), y_2(x, t, \lambda))^T$, то из (3.18) получим с учетом (3.9)

$$y_1(x, t, \lambda) = (\mathcal{R}_{\lambda}V(\cdot, t))_1 = e^{\lambda t} (\mathcal{R}_{\lambda}\Xi)_1 + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} \left(v_1(x, \tau) + (\mathcal{R}_{\lambda}F(\cdot, \tau))_1 \right) d\tau. \quad (3.19)$$

Учитывая, что $u(x, t) = v_1(x, t)$, из формул (3.7) и (3.19) получим

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\dots \right) e^{\lambda t} (\mathcal{R}_{\lambda}\Xi)_1 d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \left(\dots \right) \left(\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} \left(u(x, \tau) + (\mathcal{R}_{\lambda}F(\cdot, \tau))_1 \right) d\tau \right) d\lambda.$$

А так как $\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} u(x, \tau) d\tau$ есть целая аналитическая функция по λ , то все интегралы по круговым контурам от нее равны нулю. В результате получим

$$u(x, t) = -\frac{1}{2\pi i} \left(\dots \right) e^{\lambda t} (\mathcal{R}_{\lambda}\Xi)_1 d\lambda - \frac{1}{2\pi i} \left(\dots \right) \left(\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} (\mathcal{R}_{\lambda}F(\cdot, \tau))_1 d\tau \right) d\lambda. \quad (3.20)$$

Запишем эту формулу в другом виде, используя представление (2.30) для резольвенты $\mathcal{R}_\lambda$,

$$\mathcal{R}_\lambda H = \mathcal{R}_\lambda \begin{pmatrix} h_1 \\ h_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\lambda h_\lambda \\ R_\lambda(\lambda h_\lambda) + h_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} R_\lambda(-p_1 h'_1 - \lambda p_2 h_1 - p_2 h_2) \\ R_\lambda(-\lambda p_1 h'_1 - \lambda^2 p_2 h_1 - \lambda p_2 h_2) + h_1 \end{pmatrix}. \quad (3.21)$$

С учетом того, что $\Xi = (\varphi, \psi)^T$, из (3.21) найдем

$$(\mathcal{R}_\lambda \Xi)_1 = R_\lambda(-p_1 \varphi' - \lambda p_2 \varphi - p_2 \psi). \quad (3.22)$$

А с учетом того, что $F = \left(0, \frac{1}{p_2} f\right)^T$, из (3.21) найдем

$$(\mathcal{R}_\lambda F)_1 = R_\lambda(-f(\cdot, \tau)). \quad (3.23)$$

Тогда из (3.20), (3.22) и (3.23) получим

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \left(\dots \right) e^{\lambda t} R_\lambda(p_1 \varphi' + \lambda p_2 \varphi + p_2 \psi) d\lambda + \frac{1}{2\pi i} \left(\dots \right) \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_\lambda f(\cdot, \tau) d\tau d\lambda. \quad (3.24)$$

Имеет место равенство

$$\begin{aligned} R_\lambda \varphi' &= \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) \varphi'(\xi) d\xi = \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) d\tilde{\varphi}(\xi) = G(x, 1, \lambda) \tilde{\varphi}(1) - G(x, 0, \lambda) \tilde{\varphi}(0) - \\ &\quad - \int_0^1 G_\xi(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi = - \int_0^1 G_\xi(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) d\xi = -R_\lambda^1 \varphi, \end{aligned} \quad (3.25)$$

так как по определению функции $\tilde{\varphi}(x)$ (см. (2.62)) имеем $\tilde{\varphi}(1) = 0$, а $G(x, 0, \lambda) = 0$ на основании леммы 2.4. Учитывая (3.25) в (3.24), получим в результате формулу (3.1) в формулировке доказываемой теоремы, причем ряд справа в этой формуле сходится равномерно по $x \in [0, 1]$ при любом фиксированном $t > 0$. Тем самым, теорема 3.1 полностью доказана. $\square$

Для получения конечных формул для классического решения задачи (1.1)–(1.3) в случае отсутствия потенциала ($q = 0$) потребуется теорема, аналогичная теореме 3.1.

Теорема 3.2. Если $u_0(x, t)$ есть классическое решение задачи (1.1)–(1.3) с нулевым потенциалом, то это решение единственно и находится по формуле

$$u_0(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_{0k}} \left(-p_1 e^{\lambda t} R_{0\lambda}^1 \tilde{\varphi} + p_2 e^{\lambda t} \lambda R_{0\lambda} \varphi + p_2 e^{\lambda t} R_{0\lambda} \psi + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_{0\lambda} f(\cdot, \tau) d\tau \right) d\lambda, \quad (3.26)$$

в которой ряд справа сходится равномерно по $x \in [0, 1]$ при любом фиксированном $t > 0$.

Доказательство. Доказательство теоремы проводится по той же самой схеме, что и доказательство теоремы 3.1, но только при получении формулы (3.7) вместо теоремы 2.2 о разложении первой компоненты нужно использовать теорему 2.3. $\square$

Обозначим

$$u_{011}(x, t) := \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_{0k}} \left(-p_1 e^{\lambda t} R_{0\lambda}^1 \tilde{\varphi} \right) d\lambda, \quad u_{012}(x, t) := \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_{0k}} p_2 e^{\lambda t} \lambda R_{0\lambda} \varphi d\lambda, \quad (3.27)$$

$$u_{01}(x, t) := u_{011}(x, t) + u_{012}(x, t); \quad (3.28)$$

$$u_{02}(x, t) := \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_{0k}} p_2 e^{\lambda t} R_{0\lambda} \psi d\lambda; \quad (3.29)$$

$$u_{03}(x, t) := \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_{0k}} \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_{0\lambda} f(\cdot, \tau) d\tau d\lambda. \quad (3.30)$$

Если ряды (3.27), (3.29), (3.30) сходятся, то классическое решение задачи (1.1)–(1.3) в случае $q = 0$ в соответствии с формулами (3.26)–(3.30) можно представить в виде

$$u_0(x, t) = u_{01}(x, t) + u_{02}(x, t) + u_{03}(x, t). \quad (3.31)$$

4. КОНЕЧНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ В СЛУЧАЕ НУЛЕВОГО ПОТЕНЦИАЛА

Рассмотрим далее НГЗ (1.1)–(1.3) в случае $q = 0$.

Для краткости будем использовать следующие обозначения:

$$\alpha = \alpha(x, t) := \frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}, \quad \beta = \beta(x, t) := \frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1}. \quad (4.1)$$

Кроме того, положим

$$\Psi(x) = \int_x^1 \psi(\xi) d\xi, \quad F(x, t) = \int_x^1 f(\xi, t) d\xi, \quad (4.2)$$

а $[x]$ и $\{x\}$ пусть обозначают, соответственно, целую и дробную части числа $x \in \mathbb{R}$.

4.1. Формула для классического решения в случае $\psi = 0$ и $f = 0$. В данном подразделе речь идет о получении конечной формулы для классического решения в случае отсутствия потенциала для

$$u_{01}(x, t) = u_{011}(x, t) + u_{012}(x, t), \quad (4.3)$$

в соответствии с формулой (3.28), где $u_{011}(x, t)$ и $u_{012}(x, t)$ определены формулами (3.27), при условии, что эти ряды сходятся.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. Пусть выполняется условие (1.6), $q = 0$, $\psi = 0$, $f = 0$. Если $u_{01}(x, t)$ есть классическое решение задачи (1.1)–(1.3), то $\varphi(x) \in W_1^2[0, 1]$, $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$, решение $u_{01}(x, t)$ единственно и для него справедлива формула

$$u_{01}(x, t) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \left(e^{\sigma[\alpha(x, t)]} \check{\varphi}(\{\alpha(x, t)\}) - e^{\sigma[\beta(x, t)]} \check{\varphi}(\{\beta(x, t)\}) \right), \quad (4.4)$$

где

$$\check{\varphi}(x) = \begin{cases} \omega_2 \varphi\left(\frac{x}{a}\right) - (\omega_1 + \omega_2) \varphi(1), & \xi \in [0, a]; \\ \frac{\omega_1}{\omega_2} \left(\omega_1 \varphi\left(\frac{1-x}{1-a}\right) - (\omega_1 + \omega_2) \varphi(1) \right), & \xi \in [a, 1]. \end{cases} \quad (4.5)$$

Доказательство. Так как по предположению теоремы $u_{01}(x, t)$ есть классическое решение задачи (1.1)–(1.3) в случае $q = 0$, $\psi = 0$ и $f = 0$, то в силу теоремы 3.2 оно единственно и определяется формулой (4.3). Кроме того, выполняются условия (N), которые в случае $\psi = 0$ имеют вид: $\varphi(x) \in W_1^2[0, 1]$, $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$.

Осталось получить формулу (4.4).

Используя обозначения леммы 2.7, для $u_{011}(x, t)$ и $u_{012}(x, t)$ получим

$$u_{011}(x, t) = \sum_k \int_0^1 \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_{0k}} \left(e^{\lambda t} \left(-p_1 G_{0\xi}(x, \xi, \lambda) \tilde{\varphi}(\xi) \right) \right) d\xi = \sum_k \int_0^1 e^{\lambda_{0k} t} \left(-p_1 r_{1k}(x, \xi) \tilde{\varphi}(\xi) \right) d\xi, \quad (4.6)$$

$$u_{012}(x, t) = \sum_k \int_0^1 \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_{0k}} \left(e^{\lambda t} \left(\lambda p_2 G_0(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) \right) \right) d\xi = \sum_k \int_0^1 e^{\lambda_{0k} t} \left(\lambda_{0k} p_2 r_k(x, \xi) \varphi(\xi) \right) d\xi. \quad (4.7)$$

Далее проводим рассуждения, аналогичные рассуждениям при выводе формулы (2.83).

На основании леммы 2.7 для $u_{011}(x, t)$ имеем представление

$$u_{011}(x, t) = \frac{p_1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k \left(e^{\lambda_{0k}(t+\omega_2 x)} - e^{\lambda_{0k}(t+\omega_1 x)} \right) \int_0^1 \left(\omega_1 e^{-\lambda_{0k} \omega_1 \xi} - \omega_2 e^{-\lambda_{0k} \omega_2 \xi} \right) \tilde{\varphi}(\xi) d\xi =$$

$$= \frac{\omega_1 + \omega_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k \left(e^{\lambda_{0k}(t+\omega_2 x)} \left(\int_0^1 \omega_1 e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} \tilde{\varphi}(\xi) d\xi - \int_0^1 \omega_2 e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \tilde{\varphi}(\xi) d\xi \right) - \right. \\ \left. - e^{\lambda_{0k}(t+\omega_1 x)} \left(\int_0^1 \omega_1 e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} \tilde{\varphi}(\xi) d\xi - \int_0^1 \omega_2 e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \tilde{\varphi}(\xi) d\xi \right) \right). \quad (4.8)$$

Далее, применяя лемму 2.8 и используя формулы (2.6) для с.з., из (4.8) получим

$$u_{011}(x, t) = -\frac{\omega_1 + \omega_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k \left(e^{(2k\pi i + \sigma)\frac{t+\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}} \left(-\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \omega_1 \int_0^1 \varkappa^*(\xi) \tilde{\varphi}^*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \right. \right. \\ \left. - \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \omega_2 \int_0^1 \theta_*(\xi) \tilde{\varphi}_*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) - e^{(2k\pi i + \sigma)\frac{t+\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1}} \left(-\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \omega_1 \int_0^1 \varkappa^*(\xi) \tilde{\varphi}^*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \right. \\ \left. - \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \omega_2 \int_0^1 \theta_*(\xi) \tilde{\varphi}_*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) \Bigg) = \\ = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \left(e^{\sigma\alpha(x, t)} e^{2k\pi i \alpha(x, t)} \int_0^1 \left(\varkappa^*(\xi) \tilde{\varphi}^*(\xi) + \theta_*(\xi) \tilde{\varphi}_*(\xi) \right) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \right. \\ \left. - e^{\sigma\beta(x, t)} e^{2k\pi i \beta(x, t)} \int_0^1 \left(\varkappa^*(\xi) \tilde{\varphi}^*(\xi) + \theta_*(\xi) \tilde{\varphi}_*(\xi) \right) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right). \quad (4.9)$$

Используя обозначение (2.81) и представление (2.82), выражение в круглых скобках в последних двух интегралах можно записать в виде

$$\varkappa^*(\xi) \tilde{\varphi}^*(\xi) + \theta_*(\xi) \tilde{\varphi}_*(\xi) = \hat{\varphi}(\xi) = \\ = \begin{cases} \theta\left(\frac{\xi}{a}\right) \tilde{\varphi}\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ \varkappa\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right) \tilde{\varphi}\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1], \end{cases} = e^{-\sigma\xi} \begin{cases} \tilde{\varphi}\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ \frac{\omega_1}{\omega_2} \tilde{\varphi}\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1]. \end{cases} \quad (4.10)$$

Тогда на основании (4.9) получим представление

$$u_{011}(x, t) = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \left(e^{\sigma\alpha(x, t)} e^{2k\pi i \alpha(x, t)} \int_0^1 \hat{\varphi}(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - e^{\sigma\beta(x, t)} e^{2k\pi i \beta(x, t)} \int_0^1 \hat{\varphi}(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right). \quad (4.11)$$

Очевидно, функция $\tilde{\varphi}(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2.9. На основании этой леммы справедливо равенство $\sum_k e^{2k\pi i x} \int_0^1 \hat{\varphi}(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi = \hat{\varphi}(x)$, причем ряд слева сходится равномерно на $[0, 1]$. В результате из (4.11) будем иметь

$$u_{011}(x, t) = \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(e^{\sigma\alpha(x, t)} \hat{\varphi}(\{\alpha(x, t)\}) - e^{\sigma\beta(x, t)} \hat{\varphi}(\{\beta(x, t)\}) \right). \quad (4.12)$$

Из представления (4.7) для функции $u_{012}(x, t)$ и леммы 2.7 получим

$$u_{012}(x, t) = \frac{p_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k \left(e^{\lambda_{0k}(t+\omega_2 x)} - e^{\lambda_{0k}(t+\omega_1 x)} \right) \int_0^1 \left(e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} - e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \right) \varphi(\xi) d\xi = \\ = \frac{\omega_1 \omega_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k \left(e^{\lambda_{0k}(t+\omega_2 x)} \left(\int_0^1 e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} \varphi(\xi) d\xi - \int_0^1 e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \varphi(\xi) d\xi \right) - \right.$$

$$- e^{\lambda_{0k}(t+\omega_1 x)} \left(\int_0^1 e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} \varphi(\xi) d\xi - \int_0^1 e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \varphi(\xi) d\xi \right) \Bigg) \Bigg). \quad (4.13)$$

Далее, применяя лемму 2.8 и используя формулы (2.6) для с.з., из (4.13) найдем

$$\begin{aligned} u_{012}(x, t) &= \frac{\omega_1 \omega_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k \left(e^{(2k\pi i + \sigma) \frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}} \left(-\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \int_0^1 \varkappa^*(\xi) \varphi^*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \int_0^1 \theta_*(\xi) \varphi_*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) - e^{(2k\pi i + \sigma) \frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1}} \left(-\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \int_0^1 \varkappa^*(\xi) \varphi^*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \int_0^1 \theta_*(\xi) \varphi_*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) \right) = \\ &= -\frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \left(e^{\sigma \alpha(x, t)} e^{2k\pi i \alpha(x, t)} \int_0^1 \left(\frac{1}{\omega_1} \varkappa^*(\xi) \varphi^*(\xi) + \frac{1}{\omega_2} \theta_*(\xi) \varphi_*(\xi) \right) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \right. \\ &\quad \left. - e^{\sigma \beta(x, t)} e^{2k\pi i \beta(x, t)} \int_0^1 \left(\frac{1}{\omega_1} \varkappa^*(\xi) \varphi^*(\xi) + \frac{1}{\omega_2} \theta_*(\xi) \varphi_*(\xi) \right) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right). \quad (4.14) \end{aligned}$$

Используя обозначение (2.87), а также представление (2.88), выражение в круглых скобках в последних двух интегралах можно записать в виде

$$\begin{aligned} \frac{1}{\omega_1} \varkappa^*(\xi) \varphi^*(\xi) + \frac{1}{\omega_2} \theta_*(\xi) \varphi_*(\xi) &= \check{\varphi}(\xi) = \\ &= \begin{cases} \frac{1}{\omega_2} \theta\left(\frac{\xi}{a}\right) \varphi\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ \frac{1}{\omega_1} \varkappa\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right) \varphi\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1]. \end{cases} = \frac{1}{\omega_2} e^{-\xi} \begin{cases} \varphi\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ \varphi\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1]. \end{cases} \quad (4.15) \end{aligned}$$

Тогда на основании (4.14) получим представление

$$u_{011}(x, t) = -\frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \left(e^{\sigma \alpha(x, t)} e^{2k\pi i \alpha(x, t)} \int_0^1 \check{\varphi}(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - e^{\sigma \beta(x, t)} e^{2k\pi i \beta(x, t)} \int_0^1 \check{\varphi}(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right). \quad (4.16)$$

Ясно, что функция $\varphi(x)$ удовлетворяет условиям леммы 2.10. Тогда на основании этой леммы справедливо равенство $\sum_k e^{2k\pi i x} \int_0^1 \check{\varphi}(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi = \check{\varphi}(x)$, причем ряд слева сходится равномерно на $[0, 1]$. В результате из (4.16) получим

$$u_{012}(x, t) = -\frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(e^{\sigma \alpha(x, t)} \check{\varphi}(\{\alpha(x, t)\}) - e^{\sigma \beta(x, t)} \check{\varphi}(\{\beta(x, t)\}) \right). \quad (4.17)$$

Так как ряды $u_{011}(x, t)$ и $u_{012}(x, t)$ равномерно сходятся, то и ряд $u_{01}(x, t)$ (см. (4.3)) также равномерно сходится. С учетом (4.12) и (4.17) будем иметь

$$\begin{aligned} u_{01}(x, t) &= \frac{\omega_1 + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(e^{\sigma \alpha(x, t)} \hat{\check{\varphi}}(\{\alpha(x, t)\}) - e^{\sigma \beta(x, t)} \hat{\check{\varphi}}(\{\beta(x, t)\}) \right) - \\ &\quad - \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(e^{\sigma \alpha(x, t)} \check{\varphi}(\{\alpha(x, t)\}) - e^{\sigma \beta(x, t)} \check{\varphi}(\{\beta(x, t)\}) \right) = \\ &= \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \left(e^{\sigma \alpha(x, t)} \left((\omega_1 + \omega_2) \hat{\check{\varphi}}(\{\alpha(x, t)\}) - \omega_1 \omega_2 \check{\varphi}(\{\alpha(x, t)\}) \right) - \right. \\ &\quad \left. - e^{\sigma \beta(x, t)} \left((\omega_1 + \omega_2) \hat{\check{\varphi}}(\{\beta(x, t)\}) - \omega_1 \omega_2 \check{\varphi}(\{\beta(x, t)\}) \right) \right). \quad (4.18) \end{aligned}$$

Обозначим

$$e^{-\sigma x} \check{\varphi}(x) := (\omega_1 + \omega_2) \hat{\check{\varphi}}(x) - \omega_1 \omega_2 \check{\varphi}(x). \quad (4.19)$$

Тогда (4.18) запишется в виде

$$\begin{aligned} u_{01}(x, t) &= \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \left(e^{\sigma \alpha(x, t)} e^{-\sigma \{\alpha(x, t)\}} \check{\varphi}(\{\alpha(x, t)\}) - e^{\sigma \beta(x, t)} e^{-\sigma \{\beta(x, t)\}} \check{\varphi}(\{\beta(x, t)\}) \right) = \\ &= \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \left(e^{\sigma[\alpha(x, t)]} \check{\varphi}(\{\alpha(x, t)\}) - e^{\sigma[\beta(x, t)]} \check{\varphi}(\{\beta(x, t)\}) \right), \end{aligned}$$

а это и есть формула (4.4).

Покажем, что функция $\check{\varphi}(x)$ имеет вид (4.5).

Из формул (4.19), (4.10), (4.15) с учетом определения функций $\varkappa(x)$ и $\theta(x)$ (см. (2.77)) следует — при $x \in [0, a]$:

$$\check{\varphi}(x) = (\omega_1 + \omega_2) \tilde{\varphi}\left(\frac{x}{a}\right) - \omega_1 \varphi\left(\frac{x}{a}\right) = (\omega_1 + \omega_2) \left(\varphi\left(\frac{x}{a}\right) - \varphi(1) \right) - \omega_1 \varphi\left(\frac{x}{a}\right) = \omega_2 \varphi\left(\frac{x}{a}\right) - (\omega_1 + \omega_2) \varphi(1) \quad (4.20)$$

— при $x \in [a, 1]$:

$$\begin{aligned} \check{\varphi}(\xi) &= \frac{\omega_1}{\omega_2} \left((\omega_1 + \omega_2) \tilde{\varphi}\left(\frac{1-x}{1-a}\right) - \omega_2 \varphi\left(\frac{1-x}{1-a}\right) \right) = \\ &= \frac{\omega_1}{\omega_2} \left((\omega_1 + \omega_2) \left(\varphi\left(\frac{1-x}{1-a}\right) - \varphi(1) \right) - \omega_2 \varphi\left(\frac{1-x}{1-a}\right) \right) = \frac{\omega_1}{\omega_2} \left(\omega_1 \varphi\left(\frac{1-x}{1-a}\right) - (\omega_1 + \omega_2) \varphi(1) \right). \end{aligned} \quad (4.21)$$

Из формул (4.20) и (4.21) получаем представление (4.5). Тем самым, теорема 4.1 полностью доказана. $\square$

4.2. Формула для классического решения в случае $\varphi = 0$ и $f = 0$. В данном подразделе речь идет о получении конечной формулы для классического решения в случае отсутствия потенциала для слагаемого

$$u_{02}(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_{0k}} p_2 e^{\lambda t} R_{0\lambda} \psi d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_{0k}} p_2 e^{\lambda t} \int_0^1 G_0(x, \xi, \lambda) \psi(\xi) d\xi d\lambda \quad (4.22)$$

в соответствии с формулой (3.29).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2. Пусть выполняется условие (1.6) и $q = 0$, $\varphi = 0$, $f = 0$. Если $u_{02}(x, t)$ есть классическое решение задачи (1.1)–(1.3), то $\psi(x) \in W_1^1[0, 1]$, $\psi(0) = 0$, решение $u_{02}(x, t)$ единственно и для него справедлива формула

$$u_{02}(x, t) = -\frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(e^{\sigma[\alpha(x, t)]} \hat{\Psi}(\{\alpha(x, t)\}) - e^{\sigma[\beta(x, t)]} \hat{\Psi}(\{\beta(x, t)\}) \right), \quad (4.23)$$

где

$$\hat{\Psi}(x) = \begin{cases} \Psi\left(\frac{x}{a}\right), & \xi \in [0, a); \\ \frac{\omega_1}{\omega_2} \Psi\left(\frac{1-x}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1]. \end{cases} \quad (4.24)$$

Доказательство. Так как по предположению теоремы $u_{02}(x, t)$ есть классическое решение задачи (1.1)–(1.3) в случае $q = 0$, $\varphi = 0$ и $f = 0$, то в силу теоремы 3.2 оно единственно и определяется формулой (4.22). Кроме того, выполняются условия (N), которые в случае $\varphi = 0$ имеют вид: $\psi(x) \in W_1^1[0, 1]$, $\psi(0) = 0$.

Таким образом, осталось получить формулу (4.23).

Используя обозначения леммы 2.7, из (4.22) получим

$$u_{02}(x, t) = \sum_k \int_0^1 \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_{0k}} \left(e^{\lambda t} p_2 G_0(x, \xi, \lambda) \right) \psi(\xi) d\xi = \sum_k \int_0^1 e^{\lambda_{0k} t} p_2 r_k(x, \xi) \psi(\xi) d\xi. \quad (4.25)$$

На основании леммы 2.7 и формулы (4.25) для $u_{02}(x, t)$ имеем представление

$$u_{02}(x, t) = \frac{p_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k \frac{1}{\lambda_{0k}} \left(e^{\lambda_{0k}(t+\omega_2 x)} - e^{\lambda_{0k}(t+\omega_1 x)} \right) \int_0^1 \left(e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} - e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \right) \psi(\xi) d\xi. \quad (4.26)$$

Проведем в интеграле один раз интегрирование по частям и воспользуемся тем, что $\Psi(1) = 0$:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \left(e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} - e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \right) \psi(\xi) d\xi &= - \left(\left(e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} - e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \right) \Psi(\xi) \right) \Big|_0^1 + \\ &+ \lambda_{0k} \int_0^1 \left(\omega_1 e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} - \omega_2 e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \right) \Psi(\xi) d\xi = \lambda_{0k} \int_0^1 \left(\omega_1 e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} - \omega_2 e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \right) \Psi(\xi) d\xi. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Подставляя (4.27) в (4.26), получим

$$\begin{aligned} u_{02}(x, t) &= \frac{p_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k \left(e^{\lambda_{0k}(t+\omega_2 x)} - e^{\lambda_{0k}(t+\omega_1 x)} \right) \int_0^1 \left(\omega_1 e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} - \omega_2 e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \right) \Psi(\xi) d\xi = \\ &= \frac{\omega_1 \omega_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k \left(e^{\lambda_{0k}(t+\omega_2 x)} \left(\omega_1 \int_0^1 e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} \Psi(\xi) d\xi - \omega_2 \int_0^1 e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \Psi(\xi) d\xi \right) - \right. \\ &\quad \left. - e^{\lambda_{0k}(t+\omega_1 x)} \left(\omega_1 \int_0^1 e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} \Psi(\xi) d\xi - \omega_2 \int_0^1 e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \Psi(\xi) d\xi \right) \right). \end{aligned} \quad (4.28)$$

Далее, применяя лемму 2.8, используя формулы (2.6) для с.з. и обозначение (2.81), из (4.28) получим

$$\begin{aligned} u_{02}(x, t) &= \frac{\omega_1 \omega_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k \left(e^{(2k\pi i + \sigma) \frac{t+\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}} \left(-\omega_1 \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \int_0^1 \varkappa^*(\xi) \Psi^*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \right. \right. \\ &\quad \left. - \omega_2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \int_0^1 \theta_*(\xi) \Psi_*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) - e^{(2k\pi i + \sigma) \frac{t+\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1}} \left(-\omega_1 \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \int_0^1 \varkappa^*(\xi) \Psi^*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \right. \\ &\quad \left. - \omega_2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \int_0^1 \theta_*(\xi) \Psi_*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) \Bigg) = \\ &= -\frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \left(e^{\sigma \alpha(x, t)} e^{2k\pi i \alpha(x, t)} \int_0^1 \left(\varkappa^*(\xi) \Psi^*(\xi) + \theta_*(\xi) \Psi_*(\xi) \right) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \right. \\ &\quad \left. - e^{\sigma \beta(x, t)} e^{2k\pi i \beta(x, t)} \int_0^1 \left(\varkappa^*(\xi) \Psi^*(\xi) + \theta_*(\xi) \Psi_*(\xi) \right) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) = \\ &= -\frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \left(e^{\sigma \alpha(x, t)} e^{2k\pi i \alpha(x, t)} \int_0^1 \hat{\Psi}(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - e^{\sigma \beta(x, t)} e^{2k\pi i \beta(x, t)} \int_0^1 \hat{\Psi}(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right), \end{aligned} \quad (4.29)$$

где в соответствии с ранее введенным обозначением (2.81) и представлением (2.81)

$$\hat{\Psi}(\xi) = \varkappa^*(\xi) \Psi^*(\xi) + \theta_*(\xi) \Psi_*(\xi) = e^{-\sigma \xi} \begin{cases} \Psi\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ \frac{\omega_1}{\omega_2} \Psi\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1], \end{cases} =: e^{-\sigma \xi} \hat{\hat{\Psi}}(\xi). \quad (4.30)$$

Теперь воспользуемся леммой 2.9. Условия этой леммы выполняются, так как по построению $\Psi(x) \in W_1^2[0, 1] \subset W_1^1[0, 1]$ и $\Psi(1) = 0$. На основании этой леммы $\sum_k e^{2k\pi i x} \int_0^1 \check{\Psi}(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi = \hat{\Psi}(x)$, причем ряд слева сходится равномерно на $[0, 1]$, поэтому из (4.29) с учетом обозначения (4.30) получим

$$\begin{aligned} u_{02}(x, t) &= -\frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(e^{\sigma \alpha(x, t)} e^{-\sigma \{\alpha(x, t)\}} \hat{\Psi}(\{\alpha(x, t)\}) - e^{\sigma \beta(x, t)} e^{-\sigma \{\beta(x, t)\}} \hat{\Psi}(\{\beta(x, t)\}) \right) = \\ &= -\frac{\omega_1 \omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(e^{\sigma [\alpha(x, t)]} \hat{\Psi}(\{\alpha(x, t)\}) - e^{\sigma [\beta(x, t)]} \hat{\Psi}(\{\beta(x, t)\}) \right), \end{aligned}$$

а это и есть формула (4.23), где функция $\hat{\Psi}(x)$ определяется формулой (4.24). Тем самым, теорема 4.2 полностью доказана. $\square$

4.3. Формула для классического решения в случае $\varphi = 0$ и $\psi = 0$. В данном подразделе речь идет о получении конечной формулы для классического решения в случае отсутствия потенциала для слагаемого

$$u_{03}(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_{0k}} \left(\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_{0\lambda} f(\cdot, \tau) d\tau \right) d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_{0k}} \left(\int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} \int_0^1 G_0(x, \xi, \lambda) f(\xi, \tau) d\xi d\tau \right) d\lambda \quad (4.31)$$

в соответствии с формулой (3.30) для $u_{03}(x, t)$ и формулой (3.31).

Справедлива следующая теорема.

Теорема 4.3. Пусть выполняется условие (1.6) и $q = 0$, $\varphi = 0$, $\psi = 0$. Если $u_{03}(x, t)$ есть классическое решение задачи (1.1)–(1.3), то решение $u_{03}(x, t)$ единственно и для него справедлива формула

$$u_{03}(x, t) = -\frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t \left(e^{\sigma [\alpha(x, t-\tau)]} \hat{F}(\{\alpha(x, t-\tau)\}, \tau) - e^{\sigma [\beta(x, t-\tau)]} \hat{F}(\{\beta(x, t-\tau)\}, \tau) \right) d\tau, \quad (4.32)$$

где

$$\hat{F}(x, t) = \begin{cases} F\left(\frac{x}{a}, t\right), & \xi \in [0, a); \\ \frac{\omega_1}{\omega_2} F\left(\frac{1-x}{1-a}, t\right), & \xi \in [a, 1]. \end{cases} \quad (4.33)$$

Доказательство. Так как по предположению теоремы $u_{03}(x, t)$ есть классическое решение задачи (1.1)–(1.3) в случае $q = 0$, $\varphi = 0$ и $\psi = 0$, то в силу теоремы 3.2 оно единственно и определяется формулой (4.31). Таким образом, осталось получить формулу (4.32). Используя обозначения леммы 2.7, из (4.31) получим

$$u_{03}(x, t) = \sum_k \int_0^t \int_0^1 \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_{0k}} \left(e^{\lambda(t-\tau)} G_0(x, \xi, \lambda) \right) f(\xi, \tau) d\xi d\tau = \sum_k \int_0^t \int_0^1 e^{\lambda_{0k}(t-\tau)} r_k(x, \xi) f(\xi, \tau) d\xi d\tau.$$

На основании леммы 2.7 для $u_{02}(x, t)$ имеем представление

$$u_{03}(x, t) = \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k \int_0^t \frac{1}{\lambda_{0k}} \left(e^{\lambda_{0k}(t-\tau+\omega_2 x)} - e^{\lambda_{0k}(t-\tau+\omega_1 x)} \right) \int_0^1 \left(e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} - e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \right) f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (4.34)$$

Проведем во внутреннем интеграле один раз интегрирование по частям и воспользуемся тем, что $F(1, t) = 0$:

$$\int_0^1 \left(e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} - e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \right) f(\xi, \tau) d\xi = - \left(\left(e^{-\lambda_{0k}\omega_1 \xi} - e^{-\lambda_{0k}\omega_2 \xi} \right) F(\xi, t) \right) \Big|_0^1 +$$

$$+ \lambda_{0k} \int_0^1 \left(\omega_1 e^{-\lambda_{0k} \omega_1 \xi} - \omega_2 e^{-\lambda_{0k} \omega_2 \xi} \right) F(\xi, \tau) d\xi = \lambda_{0k} \int_0^1 \left(\omega_1 e^{-\lambda_{0k} \omega_1 \xi} - \omega_2 e^{-\lambda_{0k} \omega_2 \xi} \right) F(\xi, \tau) d\xi. \quad (4.35)$$

Подставляя (4.35) в (4.34), получим

$$\begin{aligned} u_{03}(x, t) &= \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k \int_0^t \left(e^{\lambda_{0k}(t-\tau+\omega_2 x)} - e^{\lambda_{0k}(t-\tau+\omega_1 x)} \right) \int_0^1 \left(\omega_1 e^{-\lambda_{0k} \omega_1 \xi} - \omega_2 e^{-\lambda_{0k} \omega_2 \xi} \right) F(\xi, \tau) d\xi d\tau = \\ &= \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k \int_0^t \left(e^{\lambda_{0k}(t-\tau+\omega_2 x)} \left(\omega_1 \int_0^1 e^{-\lambda_{0k} \omega_1 \xi} F(\xi, \tau) d\xi - \omega_2 \int_0^1 e^{-\lambda_{0k} \omega_2 \xi} F(\xi, \tau) d\xi \right) - \right. \\ &\quad \left. - e^{\lambda_{0k}(t-\tau+\omega_1 x)} \left(\omega_1 \int_0^1 e^{-\lambda_{0k} \omega_1 \xi} F(\xi, \tau) d\xi - \omega_2 \int_0^1 e^{-\lambda_{0k} \omega_2 \xi} F(\xi, \tau) d\xi \right) \right) d\tau. \quad (4.36) \end{aligned}$$

Далее, применяя лемму 2.8, используя формулы (2.6) для с.з. и обозначения (2.81), из (4.36) найдем

$$\begin{aligned} u_{03}(x, t) &= \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \sum_k \int_0^t \left(e^{(2k\pi i + \sigma) \frac{t-\tau+\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}} \left(-\omega_1 \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \int_0^1 \varkappa^*(\xi) F^*(\xi, \tau) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \omega_2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \int_0^1 \theta_*(\xi) F_*(\xi, \tau) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) - e^{(2k\pi i + \sigma) \frac{t-\tau+\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1}} \left(-\omega_1 \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \int_0^1 \varkappa^*(\xi) F^*(\xi, \tau) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \omega_2 \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \int_0^1 \theta_*(\xi) F_*(\xi, \tau) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) \right) d\tau = \\ &= -\frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \int_0^t \left(e^{\sigma \alpha(x, t-\tau)} e^{2k\pi i \alpha(x, t-\tau)} \int_0^1 \left(\varkappa^*(\xi) F^*(\xi, \tau) + \theta_*(\xi) F_*(\xi, \tau) \right) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \right. \\ &\quad \left. - e^{\sigma \beta(x, t-\tau)} e^{2k\pi i \beta(x, t-\tau)} \int_0^1 \left(\varkappa^*(\xi) F^*(\xi, \tau) + \theta_*(\xi) F_*(\xi, \tau) \right) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) d\tau = \\ &= -\frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \sum_k \int_0^t \left(e^{\sigma \alpha(x, t-\tau)} e^{2k\pi i \alpha(x, t-\tau)} \int_0^1 \hat{F}(\xi, \tau) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \right. \\ &\quad \left. - e^{\sigma \beta(x, t-\tau)} e^{2k\pi i \beta(x, t-\tau)} \int_0^1 \hat{F}(\xi, \tau) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) d\tau, \quad (4.37) \end{aligned}$$

где в соответствии с ранее введенным обозначением (2.81) и представлением (2.81)

$$\hat{F}(\xi, \tau) = \varkappa^*(\xi) F^*(\xi, \tau) + \theta_*(\xi) F_*(\xi, \tau) = e^{-\sigma \xi} \begin{cases} F\left(\frac{\xi}{a}, \tau\right), & \xi \in [0, a), \\ \frac{\omega_1}{\omega_2} \left(\frac{1-\xi}{1-a}, \tau \right), & \xi \in [a, 1), \end{cases} =: e^{-\sigma \xi} \hat{\hat{F}}(\xi, \tau). \quad (4.38)$$

Теперь воспользуемся леммой 2.9. Ясно, что условия этой леммы выполняются, так как по построению $F(\cdot, t) \in W_1^2[0, 1] \subset W_1^1[0, 1]$ и $F(1, t) = 0$ при каждом фиксированном $t \geq 0$. Так как на основании этой леммы справедливо равенство $\sum_k e^{2k\pi i x} \int_0^1 \hat{F}(\xi, t) e^{-2k\pi i \xi} d\xi = \hat{F}(x, t)$, причем ряд слева сходится по x равномерно на $[0, 1]$ при любом фиксированном $t \geq 0$, то из (4.37) с учетом обозначения (4.38) получим

$$\begin{aligned}
u_{03}(x, t) &= -\frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t \left(e^{\sigma\alpha(x, t-\tau)} e^{-\sigma\{\alpha(x, t-\tau)\}} \hat{F}(\{\alpha(x, t-\tau)\}, \tau) - \right. \\
&\quad \left. - e^{\sigma\beta(x, t-\tau)} e^{-\sigma\{\beta(x, t-\tau)\}} \hat{F}(\{\beta(x, t-\tau)\}, \tau) \right) d\tau = \\
&= -\frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t \left(e^{\sigma[\alpha(x, t-\tau)]} \hat{F}(\{\alpha(x, t-\tau)\}, \tau) - e^{\sigma[\beta(x, t-\tau)]} \hat{F}(\{\beta(x, t-\tau)\}, \tau) \right) d\tau,
\end{aligned}$$

а это и есть формула (4.32), где функция $\hat{F}(x, t)$ определяется формулой (4.33).

Тем самым теорема 4.3 полностью доказана. $\square$

4.4. Формула для классического решения в общем случае. На основании теорем 3.2, 4.1–4.3, формул (3.31), (4.4), (4.22) и (4.32) получим утверждение следующей теоремы о конечной формуле для классического решения задачи (1.1)–(1.3) при отсутствии потенциала.

Теорема 4.4. Пусть выполняется условие (1.6) и $q = 0$. Если $u_0(x, t)$ есть классическое решение задачи (1.1)–(1.3), то $\varphi(x) \in W_1^2[0, 1]$, $\psi(x) \in W_1^1[0, 1]$, $\varphi(0) = \varphi'(1) = 0$, $\psi(0) = 0$, решение $u_0(x, t)$ единственно и для него справедлива формула

$$\begin{aligned}
u_{01}(x, t) &= \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \left(e^{\sigma[\alpha(x, t)]} \check{\varphi}(\{\alpha(x, t)\}) - e^{\sigma[\beta(x, t)]} \check{\varphi}(\{\beta(x, t)\}) - \right. \\
&\quad \left. - \left(e^{\sigma[\alpha(x, t)]} \hat{\Psi}(\{\alpha(x, t)\}) - e^{\sigma[\beta(x, t)]} \hat{\Psi}(\{\beta(x, t)\}) - \right. \right. \\
&\quad \left. \left. - \int_0^t \left(e^{\sigma[\alpha(x, t-\tau)]} \hat{F}(\{\alpha(x, t-\tau)\}, \tau) - e^{\sigma[\beta(x, t-\tau)]} \hat{F}(\{\beta(x, t-\tau)\}, \tau) \right) d\tau \right) \right),
\end{aligned}$$

где функции $\check{\varphi}(x)$, $\hat{\Psi}(x)$ и $\hat{F}(x, t)$ определяются, соответственно, формулами (4.5), (4.24) и (4.33), а функции $\alpha(x, t)$, $\beta(x, t)$, $\Psi(x)$ и $F(x, t)$ определяются формулами (4.1) и (4.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961.
2. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Резольвентный подход в методе Фурье // Докл. РАН. — 2014. — 458, № 2. — С. 138–140. — DOI: [10.7868/S0869565214260041](https://doi.org/10.7868/S0869565214260041).
3. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Резольвентный подход для волнового уравнения // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2015. — 55, № 2. — С. 229–241. — DOI: [10.7868/S0044466915020052](https://doi.org/10.7868/S0044466915020052).
4. Вагабов А. И. Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. — Ростов-на-Дону: Ростов. ун-в., 1994.
5. Келдыш М. В. О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений // Докл. АН СССР. — 1951. — 77, № 1. — С. 11–14.
6. Корнев В. В. О применении расходящихся рядов в смешанных задачах, не имеющих классического решения // В сб.: «Современные методы теории краевых задач: материалы межд. конференции: Воронеж. весенняя матем. школа «Понтрягинские чтения-XXXIII». — Воронеж: ВГУ, 2022. — С. 132–137.
7. Корнев В. В., Хромов А. П. Классическое решение смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2019. — 172. — С. 119–133. — DOI: [10.36535/0233-6723-2019-172-119-133](https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-172-119-133).
8. Корнев В. В., Хромов А. П. Использование резольвентного подхода и расходящихся рядов при решении смешанных задач // В сб.: «Мат. Мех. Вып. 23». — Саратов: Сарат. ун-в., 2021. — С. 18–24.
9. Курдюмов В. П., Хромов А. П., Халова В. А. Смешанная задача для однородного волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью с суммируемым потенциалом // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2020. — 20, № 4. — С. 444–456. — DOI: [10.18500/1816-9791-2020-20-4-444-456](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-444-456).
10. Ломов И. С. Эффективное применение метода Фурье для построения решения смешанной задачи для телеграфного уравнения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Выч. мат. и киберн. — 2021. — № 4. — С. 37–42.

11. Ломов И. С. Обобщенная формула Даламбера для телеграфного уравнения // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2021. — 172. — С. 66–79. — DOI: [10.36535/0233-6723-2021-199-66-79](https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-199-66-79).
12. Ломов И. С. Эффективное применение метода Фурье к решению смешанной задачи для телеграфного уравнения // В сб.: «Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й междунар. Саратовской зимней школы». — Саратов: Саратов. ун-т., 2022. — С. 178–180.
13. Ломов И. С. Новый метод построения обобщенного решения смешанной задачи для телеграфного уравнения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Выч. мат. и киберн. — 2022. — № 3. — С. 33–40.
14. Ломов И. С. Построение обобщенного решения смешанной задачи для телеграфного уравнения: секвенциальный и аксиоматический подходы // Дифф. уравн. — 2022. — 58, № 11. — С. 1471–1483. — DOI: [10.31857/S0374064122110048](https://doi.org/10.31857/S0374064122110048).
15. Ломовцев Ф. Е. Метод корректировки пробных решений волнового уравнения в криволинейной первой четверти плоскости для минимальной гладкости правой части // Журн. Белорус. гос. ун-та. Мат. Инф. — 2017. — 3. — С. 38–52.
16. Ломовцев Ф. Е., Лысенко В. Н. Смешанная задача для общего одномерного волнового уравнения в полуполосе плоскости при нестационарных нехарактеристических вторых производных // Весн. МДУ ім. А. А. Куляшова. Сер. В. Природозн. навукі: мат., фіз., біял. — 2021. — № 2. — С. 28–55.
17. Ломовцев Ф. Е. Глобальная теорема корректности по Адамару первой смешанной задачи для волнового уравнения в полуполосе плоскости // Весн. ГрДУ ім. Янкі Купалы. Сер. 2. Мат. Фіз. Інф, выліч. техн. і кір. — 2021. — 11, № 1. — С. 68–82.
18. Ломовцев Ф. Е. Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой // Журн. Белорус. гос. ун-та. Мат. Инф. — 2021. — 1. — С. 18–38. — DOI: [10.33581/2520-6508-2021-1-18-38](https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-18-38).
19. Ломовцев Ф. Е. Глобальная теорема корректности первой смешанной задачи для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на отрезке // Пробл. физ., мат. и техн. — 2022. — № 1. — С. 62–73. — DOI: [10.54341/20778708_2022_1_50_62](https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_62).
20. Моисеев Е. И., Ломовцев Ф. Е., Новиков Е. Н. Неоднородное факторизованное гиперболическое уравнение второго порядка в четверти плоскости при полунестационарной факторизованной второй косой производной в граничном условии // Докл. РАН. — 2014. — 459, № 5. — С. 544–549. — DOI: [10.7868/S0869565214350072](https://doi.org/10.7868/S0869565214350072).
21. Муравей Л. А., Петров В. М., Романенков А. М. О задаче гашения поперечных колебаний продольно движущейся струны // Вестн. Мордов. ун-та. — 2018. — 28, № 4. — С. 472–485. — DOI: [10.15507/0236-2910.028.201804.472-485](https://doi.org/10.15507/0236-2910.028.201804.472-485).
22. Муравей Л. А., Романенков А. М. Численные методы гашения колебаний движущегося бумажного полотна // В сб.: «Дифф. уравн., мат. модел. и выч. алгоритмы: сб. матер. межд. конф. Белгород, 25–29 октября 2021 г.». — Белгород: БелГУ, 2021. — С. 194–196.
23. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
24. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974.
25. Расулов М. Л. Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1964.
26. Рыжлов В. С. Решение начально-граничной задачи для уравнения гиперболического типа со смешанной производной // В сб.: «Соврем. пробл. теории функций и их прилож.: материалы 21-й междунар. Саратовской зимней школы». — Саратов: Саратов. ун-т., 2022. — С. 252–255.
27. Рыжлов В. С. О решении начально-граничной задачи для гиперболического уравнения со смешанной производной // В сб.: «Современные методы теории краевых задач: материалы межд. конференции: Воронеж. весенняя матем. школа “Понтрягинские чтения-XXXIII”». — Воронеж: ВГУ, 2022. — С. 237–240.
28. Рыжлов В. С. Разрешимость смешанной задачи для гиперболического уравнения с распадающимися краевыми условиями при отсутствии полноты собственных функций // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2022. — 204. — С. 124–134. — DOI: [10.36535/0233-6723-2022-204-124-134](https://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-204-124-134).
29. Рыжлов В. С. Единственность решения начально-граничной задачи для гиперболического уравнения со смешанной производной и формула для решения // Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2023. — 23, № 2. — С. 183–194. — DOI: [10.18500/1816-9791-2023-23-2-183-194](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-183-194).
30. Рыжлов В. С. О решении начально-граничной задачи в полуполосе для гиперболического уравнения со смешанной производной // Итоги науки и техн. Сер. Современ. мат. и ее прил. Темат. обз. — 2023. — 226. — С. 89–107. — DOI: [10.36535/0233-6723-2023-226-89-107](https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-226-89-107).

31. Рыхлов В. С. Обобщенная начально-граничная задача для волнового уравнения со смешанной производной // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2023. — 69, № 2. — С. 342–363. — DOI: [10.22363/2413-3639-2023-69-2-342-363](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-342-363).
32. Рыхлов В. С. Классическое решение начально-граничной задачи для волнового уравнения со смешанной производной // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2024. — 70, № 3. — С. 451–486. — DOI: [10.22363/2413-3639-2024-70-3-451-486](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-451-486).
33. Тамаркин Я. Д. О некоторых общих задачах теории обыкновенных дифференциальных уравнений и разложение произвольных функций в ряды. — Петроград: тип. М. П. Фроловой, 1917.
34. Толстов Г. П. О второй смешанной производной // Мат. сб. — 1949. — 24, № 1. — С. 27–51.
35. Хромов А. П. Поведение формального решения смешанной задачи для волнового уравнения // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2016. — 56, № 2. — С. 239–251. — DOI: [10.7868/S0044466916020149](https://doi.org/10.7868/S0044466916020149).
36. Хромов А. П. О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2019. — 19, № 3. — С. 280–288. — DOI: [10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288).
37. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и функциональные уравнения, связанные с аналогами геометрической прогрессии // В сб.: «Современные методы теории краевых задач: материалы межд. конференции: Воронеж. весенняя матем. школа “Понтрягинские чтения-XXX”». — Воронеж: ВГУ, 2019. — С. 291–300.
38. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и смешанная задача для волнового уравнения // В сб.: «Мат. Мех. Вып. 21.». — Саратов: Сарат. ун-т., 2019. — С. 62–67.
39. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения // В сб.: «Соврем. пробл. теории функций и их прилож.: материалы 20-й межд. Саратовской зимней школы». — Саратов: Научная книга, 2020. — С. 433–439.
40. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача // В сб.: «Мат. Мех. Вып. 23.». — Саратов: Сарат. ун-т., 2021. — С. 63–67.
41. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения // В сб.: «Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й междун. Саратовской зимней школы». — Саратов: Сарат. ун-т., 2022. — С. 319–324.
42. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача для волнового уравнения простейшего вида // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2022. — 22, № 3. — С. 322–331. — DOI: [10.18500/1816-9791-2022-22-3-322-331](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-322-331).
43. Хромов А. П., Корнев В. В. Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2019. — 59, № 2. — С. 286–300. — DOI: [10.1134/S0044466919020091](https://doi.org/10.1134/S0044466919020091).
44. Хромов А. П., Корнев В. В. Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения // Тр. Инст. мат. и мех. УрО РАН. — 2021. — 27, № 4. — С. 215–238. — DOI: [10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238](https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238).
45. Хромов А. П., Корнев В. В. Расходящиеся ряды и обобщенная смешанная задача, не допускающая разделения переменных // Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. — 2021. — 60. — С. 325–328.
46. Шабат Б. В. Введение в комплексный анализ. — М.: Наука, 1969.
47. Шкаликов А. А. Краевые задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений с параметром в граничных условиях // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 1983. — 9. — С. 190–229.
48. Archibald F. R., Emslie A. G. The vibration of a string having a uniform motion along its length // J. Appl. Mech. — 1958. — 25, № 1. — С. 347–348. — DOI: [10.1115/1.4011824](https://doi.org/10.1115/1.4011824).
49. Mahalingam S. Transverse vibrations of power transmission chains // British J. Appl. Phys. — 1957. — 8, № 4. — С. 145–148. — DOI: [10.1088/0508-3443/8/4/303](https://doi.org/10.1088/0508-3443/8/4/303).
50. Rykhlov V. S. Asymptotical formulas for solutions of linear differential systems of the first order // Res. Math. — 1999. — 36. — С. 342–353. — DOI: [10.1007/BF03322121](https://doi.org/10.1007/BF03322121).
51. Sack R. A. Transverse oscillations in traveling strings // British J. Appl. Phys. — 1954. — 5, № 6. — С. 224–226. — DOI: [10.1088/0508-3443/5/6/307](https://doi.org/10.1088/0508-3443/5/6/307).

М. С. Пастухов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия

E-mail: ritson67@outlook.com

В. С. Рыхлов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия

E-mail: RykhlovVS@yandex.ru, ПИИЦ SPIN-код: 5650-4265, ПИИЦ AuthorID: 2936, ResearcherID: D-8118-2013, Scopus: 35103360100, ORCID: 0000-0003-1556-7707

DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-2-323-359
EDN: BRBAYC

UDC 517.958:517.956.32
Research article

Solution of the initial-boundary value problem for the wave equation with a mixed derivative in the equation in the case of Dirichlet–Neumann boundary conditions

M. S. Pastukhov and V. S. Rykhlov

Saratov State University, Saratov, Russia

Abstract. We study the initial-boundary value problem for a second-order nonhomogeneous hyperbolic equation in a plane half-strip with constant coefficients, containing a mixed derivative, and with zero and nonzero potentials. This equation is the equation for the transverse oscillations of a moving finite string. We consider the case of Dirichlet–Neumann boundary conditions: the left end is fixed, and the right end is free. It is assumed that the roots of the characteristic equation are simple and lie on the real axis on opposite sides of the origin. We seek a classical solution (or a solution almost everywhere, sometimes called a “strong solution”) to this problem. A spectral problem associated with the original initial-boundary value problem, generated by an ordinary differential operator-valued function (pencil) of second order, is investigated. The asymptotic behavior of the eigenvalues and resolvent is determined, the operator-valued function is linearized in the corresponding space of vector functions, and a theorem on the expansion of the first component of the vector function in root functions of the spectral problem is proved. A theorem on the uniqueness of the classical solution is formulated and proved, and a formula for the classical solution is derived in the form of a series of contour integrals. Then, using these formulas in the case of zero potential, theorems on finite formulas for the classical solution in special cases are proved, and based on these, a finite formula for the classical solution in the general case is obtained.

Keywords: nonhomogeneous hyperbolic equation, initial-boundary value problem, mixed derivative in the equation, classical solution, uniqueness of the classical solution, finite formula for the classical solution.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

Authors’ contribution. The formulation of the problem considered in the article and the main ideas for its solution belong to *Rykhlov V. S.* Practical implementation, preparation of material and design of the article were carried out by *Pastukhov M. S.*

For citation: M. S. Pastukhov, V. S. Rykhlov, “Solution of the initial-boundary value problem for the wave equation with a mixed derivative in the equation in the case of Dirichlet–Neumann boundary conditions,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. 72, No. 2, 323–359. DOI: 10.22363/2413-3639-2026-72-2-323-359 EDN: BRBAYC

REFERENCES

1. N. K. Bari, *Trigonometricheskie Ryady* [Trigonometric Series], Fizmatgiz, Moscow, 1961 (in Russian).



2. M. Burlutskaya Sh and A. P. Khromov, “Rezol’ventnyy podkhod v metode Fur’e” [Resolvent approach in the Fourier method], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2014, **458**, No. 2, 138–140 (in Russian), DOI: [10.7868/S0869565214260041](https://doi.org/10.7868/S0869565214260041).
3. M. Sh. Burlutskaya and A. P. Khromov, “Rezol’ventnyy podkhod dlya volnovogo uravneniya” [Resolvent approach for the wave equation], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2015, **55**, No. 2, 229–241 (in Russian), DOI: [10.7868/S0044466915020052](https://doi.org/10.7868/S0044466915020052).
4. A. I. Vagabov, *Vvedenie v Spektral’nyuyu Teoriyu Differentsial’nykh Operatorov* [Introduction to the Spectral Theory of Differential Operators], Rostov. Univ., Rostov-on-Don, 1994 (in Russian).
5. M. V. Keldysh, “O sobstvennykh znacheniyakh i sobstvennykh funktsiyakh nekotorykh klassov nesamosopryazhennykh uravneniy” [On the eigenvalues and eigenfunctions of some classes of non-self-adjoint equations], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1951, **77**, No. 1, 11–14 (in Russian).
6. V. V. Kornev, “O primeneni raskhodyashchikhsya ryadov v smeshannykh zadachakh, ne imeyushchikh klassicheskogo resheniya” [On the application of divergent series in mixed problems that have no classical solution], In: *Sovremennyye Metody Teorii Kraevykh Zadach: Mater. Mezhd. Konf. Voronezh. Vesennyyaya Matem. Shkola “Pontryaginskije chteniya-XXXIII”* [Modern Methods of Boundary-Value Problem Theory: Proc. Int. Conf. Voronezh Spring Math. School “Pontryagin Readings-XXXIII”], VGU, Voronezh, 2022, pp. 132–137 (in Russian).
7. V. V. Kornev and A. P. Khromov, “Klassicheskoe reshenie smeshannoy zadachi dlya odnorodnogo volnovogo uravneniya s zakreplennymi kontsami” [Classical solution of the mixed problem for the homogeneous wave equation with fixed ends], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i ee pril. Temat. obz.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2019, **172**, 119–133 (in Russian), DOI: [10.36535/0233-6723-2019-172-119-133](https://doi.org/10.36535/0233-6723-2019-172-119-133).
8. V. V. Kornev and A. P. Khromov, “Ispol’zovanie rezol’ventnogo podkhoda i raskhodyashchikhsya ryadov pri reshenii smeshannykh zadach” [Using the resolvent approach and divergent series in solving mixed problems], In: *Mat. Mekh. Vyp. 23* [Math. Mech. Iss. 23], Sarat. Univ., Saratov, 2021, pp. 18–24 (in Russian).
9. V. P. Kurdyumov, A. P. Khromov, and V. A. Khalova, “Smeshannaya zadacha dlya odnorodnogo volnovogo uravneniya s nenulevoy nachal’noy skorost’yu s summiruemyim potentsialom” [Mixed problem for a homogeneous wave equation with nonzero initial velocity and summable potential], *Izv. Sarat. Univ. Nov. Ser. Ser. Mat. Mekh. Inf.* [Bull. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inf.], 2020, **20**, No. 4, 444–456 (in Russian), DOI: [10.18500/1816-9791-2020-20-4-444-456](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2020-20-4-444-456).
10. I. S. Lomov, “Effektivnoe primeneniye metoda Fur’e dlya postroeniya resheniya smeshannoy zadachi dlya telegrafnogo uravneniya” [An effective application of the Fourier method for constructing a solution to a mixed problem for the telegraph equation], *Vestn. Mosk. Univ. Ser. 15. Vych. Mat. i Kibernet.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 15. Comput. Math. Cybern.], 2021, No. 4, 37–42 (in Russian).
11. I. S. Lomov, “Obobshchennaya formula D’Alemberta dlya telegrafnogo uravneniya” [Generalized d’Alembert formula for the telegraph equation], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i ee pril. Temat. obz.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2021, **172**, 66–79 (in Russian), DOI: [10.36535/0233-6723-2021-199-66-79](https://doi.org/10.36535/0233-6723-2021-199-66-79).
12. I. S. Lomov, “Effektivnoe primeneniye metoda Fur’e k resheniyu smeshannoy zadachi dlya telegrafnogo uravneniya” [Efficient application of the Fourier method to solving a mixed problem for the telegraph equation], In: *Sovrem. Probl. Teorii Funktsiy i Ikh Prilozh.: Mater. 21-y Mezhd. Saratov. Zimney Shkoly* [Contemp. Probl. of Function Theory and Their Appl.: Proc. of the 21st Int. Saratov Winter School], Sarat. Univ., Saratov, 2022, pp. 178–180 (in Russian).
13. I. S. Lomov, “Novyy metod postroeniya obobshchennogo resheniya smeshannoy zadachi dlya telegrafnogo uravneniya” [Novyy metod postroeniya obobshchennogo resheniya smeshannoy zadachi dlya telegrafnogo uravneniya], *Vestn. Mosk. Univ. Ser. 15. Vych. Mat. i Kibernet.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 15. Comput. Math. Cybern.], 2022, No. 3, 33–40 (in Russian).
14. I. S. Lomov, “Postroenie obobshchennogo resheniya smeshannoy zadachi dlya telegrafnogo uravneniya: sekvensial’nyy i aksiomaticheskyy podkhody” [Construction of a generalized solution to a mixed problem for the telegraph equation: sequential and axiomatic approaches], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 2022, **58**, No. 11, 1471–1483 (in Russian), DOI: [10.31857/S0374064122110048](https://doi.org/10.31857/S0374064122110048).
15. F. E. Lomovtsev, “Metod korrektsirovki probnykh resheniy volnovogo uravneniya v krivolineynoy pervoy chetverti ploskosti dlya minimal’noy gladkosti pravoy chasti” [Method of correction of test solutions of the wave equation in the curvilinear first quadrant of the plane for minimal smoothness of the right-hand side], *Zhurn. Belorus. Gos. Univ. Mat. Inf.* [J. Belarus. State Univ. Math. Inf.], 2017, **3**, 38–52 (in Russian).
16. F. E. Lomovtsev and V. N. Lysenko, “Smeshannaya zadacha dlya obshchego odnomernogo volnovogo uravneniya v polupolose ploskosti pri nestatsionarnykh nekharakteristicheskikh vtorykh proizvodnykh” [Mixed problem for the general one-dimensional wave equation in a half-strip of the plane with nonstationary noncharacteristic second derivatives], *Vesn. MDU Im. A. A. Kulyashova. Ser. B. Pryrodazn. Navuki: Mat., Fiz., Biyal.* [Bull. Mogilev State Univ. Ser. V. Nat. Sci. Math. Phys. Biol.], 2021, No. 2, 28–55 (in Russian).

17. F. E. Lomovtsev, “Global’naya teorema korrektnosti po Adamaru pervoy smeshannoy zadachi dlya volnovogo uravneniya v polupolose ploskosti” [Global Hadamard well-posedness theorem for the first mixed problem for the wave equation in a half-strip of the plane], *Vesn. GrDU Im. Yanki Kupaly. Ser. 2. Mat. Fiz. Inf, Vylich. Tekhn. i Kir.* [Bull. Grodno State Univ. Ser. 2. Math. Phys. Inf. Comp. Tech.], 2021, **11**, No. 1, 68–82 (in Russian).
18. F. E. Lomovtsev, “Pervaya smeshannaya zadacha dlya obshchego telegrafnogo uravneniya s peremennymi koeffitsientami na polupryamoy” [The first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on the half-line], *Zhurn. Belorus. Gos. Univ. Mat. Inf.* [J. Belorus. State Univ. Math. Inf.], 2021, **1**, 18–38 (in Russian), DOI: [10.33581/2520-6508-2021-1-18-38](https://doi.org/10.33581/2520-6508-2021-1-18-38).
19. F. E. Lomovtsev, “Global’naya teorema korrektnosti pervoy smeshannoy zadachi dlya obshchego telegrafnogo uravneniya s peremennymi koeffitsientami na otrezke” [Global well-posedness theorem for the first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on an interval], *Probl. Fiz., Mat. i Tekhn.* [Probl. Phys. Math. Tech.], 2022, No. 1, 62–73 (in Russian), DOI: [10.54341/20778708_2022_1_50_62](https://doi.org/10.54341/20778708_2022_1_50_62).
20. E. Moiseev I, F. E. Lomovtsev, and E. N. Novikov, “Neodnorodnoe faktorizovannoe giperbolicheskoe uravnenie vtorogo poryadka v chetverti ploskosti pri polunestatsionarnoy faktorizovannoy vtoroy kosoy proizvodnoy v granichnom uslovii” [Nonhomogeneous factorized second-order hyperbolic equation in a quarter plane with a semi-nonstationary factorized second oblique derivative in the boundary condition], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2014, **459**, No. 5, 544–549 (in Russian), DOI: [10.7868/S0869565214350072](https://doi.org/10.7868/S0869565214350072).
21. L. A. Muravey, V. M. Petrov, and A. M. Romanenkov, “O zadache gasheniya poperechnykh kolebaniy prodol’no dvizhushchegosya struny” [On the problem of damping transverse vibrations of a longitudinally moving string], *Vestn. Mordov. Univ.* [Bull. Mordov. Univ.], 2018, **28**, No. 4, 472–485 (in Russian), DOI: [10.15507/0236-2910.028.201804.472-485](https://doi.org/10.15507/0236-2910.028.201804.472-485).
22. L. A. Muravey and A. M. Romanenkov, “Chislennyye metody gasheniya kolebaniy dvizhushchegosya bumazhnogo polotna” [Numerical methods for damping oscillations of a moving paper web], In: *Diff. Uravn., Mat. Model. i Vych. Algoritmy: Sb. Mater. Mezhd. Konf. Belgorod, 25–29 okt. 2021 g.* [Differ. Equ. Math. Model. Comp. Algorithms: Proc. Int. Conf. Belgorod, Oct. 25–29, 2021], BelGU, Belgorod, 2021, pp. 194–196 (in Russian).
23. M. A. Naimark, *Lineynye Differentsial’nye Operatory* [Linear Differential Operators], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
24. I. P. Natanson, *Teoriya Funktsiy Veshchestvennoy Peremennoy* [Theory of Functions of a Real Variable], Nauka, Moscow, 1974 (in Russian).
25. M. L. Rasulov, *Metod Konturnogo Integrala i ego Primenenie k Issledovaniyu Zadach dlya Differentsial’nykh Uravneniy* [The Contour Integral Method and Its Application to the Study of Problems for Differential Equations], Nauka, Moscow, 1964 (in Russian).
26. V. S. Rykhlov, “Reshenie nachal’no-granichnoy zadachi dlya uravneniya giperbolicheskogo tipa so smeshannoy proizvodnoy” [Solution of the initial-boundary value problem for a hyperbolic equation with a mixed derivative], In: *Sovrem. Probl. Teorii Funktsiy i Ikh Prilozh.: Mater. 21-y Mezhd. Saratov. Zimney Shkoly* [Contemp. Probl. of Function Theory and Their Appl.: Proc. of the 21st Int. Saratov Winter School], Sarat. univ., Saratov, 2022, pp. 252–255 (in Russian).
27. V. S. Rykhlov, “O reshenii nachal’no-granichnoy zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya so smeshannoy proizvodnoy” [On the solution of the initial-boundary value problem for a hyperbolic equation with a mixed derivative], In: *Sovremennyye Metody Teorii Kraevykh Zadach: Mater. Mezhd. Konf. Voronezh. Vesennyaya Matem. Shkola “Pontryaginskie chteniya-XXXIII”* [Modern Methods of Boundary-Value Problem Theory: Proc. Int. Conf. Voronezh Spring Math. School “Pontryagin Readings-XXXIII”], VGU, Voronezh, 2022, pp. 237–240 (in Russian).
28. V. S. Rykhlov, “Razreshimost’ smeshannoy zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya s raspadayushchimisya kraevymi usloviyami pri otsutstvii polnoty sobstvennykh funktsiy” [Solvability of a mixed problem for a hyperbolic equation with decaying boundary conditions in the absence of completeness of eigenfunctions], *Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Sovrem. mat. i ee Pril. Temat. Obz.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2022, **204**, 124–134 (in Russian), DOI: [10.36535/0233-6723-2022-204-124-134](https://doi.org/10.36535/0233-6723-2022-204-124-134).
29. V. S. Rykhlov, “Edinstvennost’ resheniya nachal’no-granichnoy zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya so smeshannoy proizvodnoy i formula dlya resheniya” [Uniqueness of the solution of the initial-boundary value problem for a hyperbolic equation with a mixed derivative and a formula for the solution], *Izv. Sarat. Univ. Nov. Ser. Ser. Mat. Mekh. Inf.* [Bull. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inf.], 2023, **23**, No. 2, 183–194 (in Russian), DOI: [10.18500/1816-9791-2023-23-2-183-194](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2023-23-2-183-194).

30. V. S. Rykhlov, “O reshenii nachal’no-granichnoy zadachi v polupolose dlya giperbolicheskogo uravneniya so smeshannoy proizvodnoy” [On the solution of the initial-boundary value problem in a half-strip for a hyperbolic equation with a mixed derivative], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i ee pril. Temat. obz.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2023, **226**, 89–107 (in Russian), DOI: [10.36535/0233-6723-2023-226-89-107](https://doi.org/10.36535/0233-6723-2023-226-89-107).
31. V. S. Rykhlov, “Obobshchennaya nachal’no-granichnaya zadacha dlya volnovogo uravneniya so smeshannoy proizvodnoy” [Generalized initial-boundary problem for the wave equation with mixed derivative], *Sovrem. mat. Fundam. naprav.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2023, **69**, No. 2, 342–363 (in Russian), DOI: [10.22363/2413-3639-2023-69-2-342-363](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-342-363).
32. V. S. Rykhlov, “Klassicheskoe reshenie nachal’no-granichnoy zadachi dlya vol novogo uravneniya so smeshannoy proizvodnoy” [Classical solution of the initial-boundary value problem for the wave equation with mixed derivative], *Sovrem. mat. Fundam. naprav.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2024, **70**, No. 3, 451–486 (in Russian), DOI: [10.22363/2413-3639-2024-70-3-451-486](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-451-486).
33. Ya. D. Tamarkin, *O Nekotorykh Obshchikh Zadachakh Teorii Obyknovennykh Differentsial’nykh Uravneniy i Razlozhenie Proizvol’nykh Funktsiy v Ryady* [On Some General Problems of the Theory of Ordinary Differential Equations and Expansion of Arbitrary Functions into Series], Typ. M. P. Frolova, Petrograd, 1917 (in Russian).
34. G. P. Tolstov, “O vtoroy smeshannoy proizvodnoy” [About the second mixed derivative], *Mat. Sb.* [Math. Digest], 1949, **24**, No. 1, 27–51 (in Russian).
35. A. P. Khromov, “Povedenie formal’nogo resheniya smeshannoy zadachi dlya volnovogo uravneniya” [Behavior of the formal solution of the mixed problem for the wave equation], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2016, **56**, No. 2, 239–251 (in Russian), DOI: [10.7868/S0044466916020149](https://doi.org/10.7868/S0044466916020149).
36. A. P. Khromov, “O klassicheskom reshenii smeshannoy zadachi dlya odnorodnogo volnovogo uravneniya s zakreplennymi kontsami i nulevoy nachal’noy skorost’yu” [On the classical solution of a mixed problem for a homogeneous wave equation with fixed endpoints and zero initial velocity], *Izv. Sarat. Univ. Nov. Ser. Ser. Mat. Mekh. Inf.* [Bull. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inf.], 2019, **19**, No. 3, 280–288 (in Russian), DOI: [10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288).
37. A. P. Khromov, “Raskhodyashchiesya ryady i funktsional’nye uravneniya, svyazannye s analogami geometricheskoy progressii” [Divergent series and functional equations related to analogues of geometric progression], In: *Sovremennye Metody Teorii Kraevykh Zadach: Mater. Mezhd. Konf. Voronezh. Vesennyyaya Matem. Shkola “Pontryaginskije chteniya-XXX”* [Modern Methods of Boundary-Value Problem Theory: Proc. Int. Conf. Voronezh Spring Math. School “Pontryagin Readings-XXX”], VGU, Voronezh, 2019, pp. 291–300 (in Russian).
38. A. P. Khromov, “Raskhodyashchiesya ryady i smeshannaya zadacha dlya volnovogo uravneniya” [Divergent series and a mixed problem for the wave equation], In: *Mat. Mekh. Vyp. 21* [Math. Mech. Iss. 21], Sarat. Univ., Saratov, 2019, pp. 62–67 (in Russian).
39. A. P. Khromov, “Raskhodyashchiesya ryady i metod Fur’e dlya volnovogo uravneniya” [Divergent series and the Fourier method for the wave equation], In: *Sovrem. Probl. Teorii Funktsiy i Ikh Prilozh.: Mater. 20-y Mezhd. Saratov. Zimney Shkoly* [Contemp. Probl. of Function Theory and Their Appl.: Proc. of the 20th Int. Saratov Winter School], Nauchnaya kniga, Saratov, 2020, pp. 433–439 (in Russian).
40. A. P. Khromov, “Raskhodyashchiesya ryady i obobshchennaya smeshannaya zadacha” [Divergent series and the generalized mixed problem], In: *Mat. Mekh. Vyp. 23* [Math. Mech. Iss. 23], Sarat. Univ., Saratov, 2021, pp. 63–67 (in Russian).
41. A. P. Khromov, “Raskhodyashchiesya ryady i obobshchennaya smeshannaya zadacha dlya volnovogo uravneniya” [Divergent series and a generalized mixed problem for the wave equation], In: *Sovrem. Probl. Teorii Funktsiy i Ikh Prilozh.: Mater. 21-y Mezhd. Saratov. Zimney Shkoly* [Contemp. Probl. of Function Theory and Their Appl.: Proc. of the 21st Int. Saratov Winter School], Sarat. Univ., Saratov, 2022, pp. 319–324 (in Russian).
42. A. P. Khromov, “Raskhodyashchiesya ryady i obobshchennaya smeshannaya zadacha dlya volnovogo uravneniya prosteyshogo vida” [Divergent series and a generalized mixed problem for the wave equation of the simplest form], *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mat. Mekh. Inf.* [Bull. Sarat. Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inf.], 2022, **22**, No. 3, 322–331 (in Russian), DOI: [10.18500/1816-9791-2022-22-3-322-331](https://doi.org/10.18500/1816-9791-2022-22-3-322-331).
43. A. P. Khromov and V. V. Kornev, “Klassicheskoe i obobshchennoe resheniya smeshannoy zadachi dlya neodnorodnogo volnovogo uravneniya” [Classical and generalized solutions of a mixed problem for an inhomogeneous wave equation], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2019, **59**, No. 2, 286–300 (in Russian), DOI: [10.1134/S0044466919020091](https://doi.org/10.1134/S0044466919020091).
44. A. P. Khromov and V. V. Kornev, “Raskhodyashchiesya ryady v metode Fur’e dlya volnovogo uravneniya” [Divergent series in the Fourier method for the wave equation], *Tr. Inst. Mat. i Mekh. UrO RAN* [Proc. Inst.

- Math. Mech. Ural Branch Russ. Acad. Sci.], 2021, **27**, No. 4, 215–238 (in Russian), DOI: [10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238](https://doi.org/10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238).
45. A. P. Khromov and V. V. Kornev, “Raskhodyashchiesya ryady i obobshchennaya smeshannaya zadacha, ne dopuskayushchaya razdeleniya peremennykh” [Divergent series and a generalized mixed problem that does not admit separation of variables], *Tr. Mat. Tsentra Im. N. I. Lobachevskogo* [Proc. Lobachevskii Math. Center], 2021, **60**, 325–328 (in Russian).
 46. B. V. Shabat, *Vvedenie v Kompleksnyy Analiz* [Introduction to Complex Analysis], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
 47. A. A. Shkalikov, “Kraevye zadachi dlya obyknovennykh differentsial’nykh uravneniy s parametrom v granichnykh usloviyakh” [Boundary-value problems for ordinary differential equations with a parameter in the boundary conditions], *Tr. Sem. Im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 1983, **9**, 190–229 (in Russian).
 48. F. R. Archibald and A. G. Emslie, “The vibration of a string having a uniform motion along its length,” *J. Appl. Mech.*, 1958, **25**, No. 1, 347–348, DOI: [10.1115/1.4011824](https://doi.org/10.1115/1.4011824).
 49. S. Mahalingam, “Transverse vibrations of power transmission chains,” *British J. Appl. Phys.*, 1957, **8**, No. 4, 145–148, DOI: [10.1088/0508-3443/8/4/303](https://doi.org/10.1088/0508-3443/8/4/303).
 50. V. S. Rykhlov, “Asymptotical formulas for solutions of linear differential systems of the first order,” *Res. Math.*, 1999, **36**, 342–353, DOI: [10.1007/BF03322121](https://doi.org/10.1007/BF03322121).
 51. R. A. Sack, “Transverse oscillations in traveling strings,” *British J. Appl. Phys.*, 1954, **5**, No. 6, 224–226, DOI: [10.1088/0508-3443/5/6/307](https://doi.org/10.1088/0508-3443/5/6/307).

M. S. Pastukhov

Saratov State University, Saratov, Russia

E-mail: ritson67@outlook.com

V. S. Rykhlov

Saratov State University, Saratov, Russia

E-mail: RykhlovVS@yandex.ru, eLIBRARY SPIN-code: 5650-4265, eLIBRARY AuthorID: [2936](https://elibrary.ru/2936),
ResearcherID: [D-8118-2013](https://orcid.org/0000-0003-1556-7707), Scopus: [35103360100](https://orcid.org/0000-0003-1556-7707), ORCID: [0000-0003-1556-7707](https://orcid.org/0000-0003-1556-7707)

НЕСКОЛЬКО ЗАМЕЧАНИЙ О ЗАВИСИМОСТИ МЕР ФАВАРА ОТ НАЧАЛЬНЫХ ЗНАЧЕНИЙ

В. Э. ПЕТРОВ¹, Ф. В. ПЕТРОВ^{2,3}

¹ООО «ТВЭЛЛ», Санкт-Петербург, Россия

²Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

³Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН,
Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. Обсуждается зависимость меры, относительно которой ортогональна последовательность многочленов, заданная трехчленным рекуррентным соотношением, от начальных данных.

Ключевые слова: ортогональные многочлены, мера, трехчленное рекуррентное соотношение, теорема Фавара.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы признательны К. Ремлингу, Р. Романову и П. Губкину за ценные консультации. Работа второго автора поддержана грантом РФФИ № 25-11-00251.

Вклад авторов. Оба автора участвовали в постановке задачи, переформулировке ее с языка теории ортогональных многочленов на язык теории мер и моментов, трактовке и интерпретации результатов.

Для цитирования: Петров В. Э., Петров Ф. В. Несколько замечаний о зависимости мер Фавара от начальных значений // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 2. С. 360–367. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-360-367](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-360-367) EDN: BUBZBG

В теории ортогональных многочленов известно [3, 4] прямое утверждение: если последовательность многочленов ортогональна по некоторой неотрицательной мере на вещественной оси, то справедливо трехчленное рекуррентное соотношение, которому удовлетворяют три последовательных многочлена:

$$p_{n+1}(x) = (A_n x + B_n)p_n(x) - C_n p_{n-1}(x). \quad (1)$$

Теорема Фавара [5] говорит об обращении этого факта: если A_n, B_n, C_n — вещественные числа при всех $n = 1, 2, \dots$, причем $A_n > 0$ и $C_n > 0$ (в дальнейшем эти условия предполагаются выполненными), то последовательность многочленов, заданная соотношением (1) и начальными условиями $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = ax + b$, $a > 0$, будет ортогональной относительно некоторой неотрицательной конечной меры на вещественной оси. Один из способов построения меры, по которой ортогональны многочлены p_n , состоит в рассмотрении слабого предела некоторых специальных мер, сосредоточенных в нулях этих многочленов (см., напр., доказательство теоремы 2.1.1 в книге [1]). Поэтому, в частности, если все нули лежат в замкнутом промежутке Δ (конечном или бесконечном), то мера μ может быть выбрана с носителем в Δ .

Отметим, что рекуррента (1) влечет такое алгебраическое свойство системы многочленов (p_n) : *многочлен $p_n x^k$ при всех $n > k \geq 0$ линейно выражается через $p_1, p_2, \dots$* Это можно доказать

индукцией по k : база $k = 0$ очевидна, индукционный переход от $k - 1$ к k следует из тождества $A_n p_n x^k = p_{n+1} x^{k-1} - B_n p_n x^{k-1} + C_n p_{n-1} x^{k-1}$.

Поэтому если для меры μ все многочлены $p_1, p_2, \dots$ ортогональны p_0 , то есть интегралы $\int p_k(x) d\mu$ при $k = 1, 2, \dots$ равны 0, то $\int p_n x^k d\mu = 0$ при всех $n > k$, что означает ортогональность системы многочленов (p_n) по мере μ . Бесконечная система уравнений $\int p_k(x) d\mu = 0$ для вероятностной меры μ является треугольной системой уравнений на моменты этой меры: каждый следующий момент однозначно выражается через предыдущие. С этой точки зрения она сводится к тому, что надо найти вероятностную меру с данными моментами. Поэтому единственность меры μ равносильна детерминированности соответствующей проблемы моментов. В частности, единственность имеет место, если носитель (хотя бы одной) меры, по которой ортогональны наши многочлены, ограничен.

Теорема 1. *Рассмотрим последовательность многочленов (p_n) , ортогональную относительно меры μ , сосредоточенной на замкнутом промежутке Δ , и удовлетворяющую (1) и начальным условиям $p_0(x) = 1$, $p_1(x) = ax + b$.*

- (i) *Для других начальных условий $p_0 = 1$, $p_1 = ax + \theta$ решением рекуррентности (1) будет другая последовательность многочленов, обозначим ее q_n^θ . Тогда существует мера μ_θ , по которой многочлены q_n^θ ортогональны, носитель которой содержит не более одной точки вне Δ .*
- (ii) *Пусть $r_n(x)$ — решение рекуррентности (1) с любыми начальными условиями $r_0 = 1$, $r_1 = \alpha x + \beta$, $\alpha > 0$. Тогда носитель меры ν , относительно которой ортогональны многочлены (r_n) , содержит не более одной точки справа от Δ и не более одной точки слева от Δ .*

Доказательство. (i) Из (1) ясно, что старшие коэффициенты p_n и q_n^θ положительны и равны. Зафиксируем θ и обозначим $g_n(x) = p_n(x) - q_n^\theta(x)$. Тогда $\deg g_n < n$ и для любого вещественного κ имеем, что $p_n + \kappa g_n = q_n^{\theta + \kappa(b-\theta)}$ ортогональны по некоторой мере. Поэтому все корни $p_n + \kappa g_n$ простые и вещественные. В частности, это так для p_n . Пусть h_n — наибольший общий делитель многочленов p_n и g_n , обозначим $p_n = h_n P_n$, $g_n = h_n G_n$. Разложим рациональную дробь $g_n/p_n = G_n/P_n$ в сумму простейших: $G_n/P_n = \sum c_k/(x - x_k)$, где $x_1 < x_2 < \dots$ — корни P_n и $c_k = G_n(x_k)/P_n'(x_k) \neq 0$ при всех k . Если c_i и c_{i+1} разного знака при некотором i , то функция G_n/P_n на интервале (x_i, x_{i+1}) стремится на обоих концах к $+\infty$ или на обоих концах к $-\infty$. Поэтому она достигает там максимума или минимума в точке, скажем, α , равного, скажем, M . Если $M \neq 0$, то многочлен $G_n - MP_n$, а с ним и $-M^{-1}G_n + P_n$, а с ним и $p_n - M^{-1}g_n$ имеет кратный корень — противоречие. Поэтому $M = 0$, не умаляя общности, это локальный минимум функции G_n/P_n . Тогда при малом $\varepsilon > 0$ уравнение $G_n/P_n - \varepsilon = 0$ имеет не больше чем $\deg G_n < \deg P_n$ корней (в окрестности каждого корня G_n , кроме α — не больше, чем кратность этого корня, и на плюс-минус бесконечности — не более чем по одному). Это противоречит тому, что многочлен $G_n - \varepsilon P_n = -\varepsilon(P_n - \varepsilon^{-1}G_n)$ имеет $\deg P_n$ корней.

Итак, все c_i одного знака, то есть знаки значений G_n в точках x_k чередуются.

Из этого следует, что при любом κ многочлен $P_n + \kappa G_n$ имеет хотя бы $\deg P_n - 1$ корней на Δ (по одному между соседними корнями P_n), так что $p_n + \kappa g_n$ имеет хотя бы $\deg p_n - 1 = n - 1$ корней на Δ . Поэтому μ_θ — слабый предел мер ν_n , имеющих не более одной точки вне Δ (сосредоточенных на корнях p_n). Несложно понять, что такой слабый предел является мерой, носитель которой имеет не более одной точки вне Δ (надо взять точки носителей μ_n вне Δ и выделить среди этих точек подпоследовательность, сходящуюся к вещественной точке τ или к бесконечности. Мера μ_θ любого интервала вне Δ , замыкание которого не содержит τ , равна 0 по определению слабого предела. Поэтому кроме точки τ никакая точка вне Δ не лежит в носителе μ_θ .)

(ii) Предположим, что два наибольших корня x_1, x_2 расположены правее Δ . Тогда рациональная функция p_n/r_n отрицательна между x_1 и x_2 , стремится к минус бесконечности при приближении к концам интервала (x_1, x_2) , поэтому достигает на этом интервале отрицательного максимума $-M$. Таким образом, многочлен $p_n + Mr_n$ имеет кратный корень, но это многочлен их семейства ортогональных многочленов (удовлетворяющих (1)) — противоречие. Дальнейшее аналогично (i). $\square$

Рассмотрим подробно случай рекуррентного соотношения для многочленов Чебышева.

Для положительного a и вещественного b рассмотрим последовательность многочленов $f_n(x) = f_n^{a,b}(x)$, заданную начальными условиями $f_0(x) = 1$, $f_1(x) = ax + b$ и $f_{n+1}(x) = 2xf_n(x) - f_{n-1}(x)$.

Заметим, что при $a = 1$, $b = 0$ получаются многочлены Чебышева первого рода T_n ($T_n(\cos t) = \cos nt$), ортогональные относительно веса $(1 - x^2)^{-1/2}$ на $[-1, 1]$; при $a = 2$, $b = 0$ — многочлены Чебышева второго рода U_n : $U_n(\cos t) = \frac{\sin(n+1)t}{\sin t}$, ортогональные относительно веса $(1 - x^2)^{1/2}$, при $a = 1$ и $b = \mp 1/2$ — многочлены Якоби с параметрами $(\pm 1/2, \mp 1/2)$ (точнее, пропорциональные им), ортогональные относительно веса $(1+x)^{\pm 1/2}(1-x)^{\mp 1/2}$.

Теорема Фавара утверждает, что многочлены $f_n^{a,b}(x)$ ортогональны относительно некоторой меры для любых $a > 0$ и $b \in \mathbb{R}$. Найдем эту меру.

Теорема 2. При $t \in [0, \pi]$ положим

$$w(\cos t) = \frac{(1 - \rho_1 \rho_2) \sin t}{(1 - 2\rho_1 \cos t + \rho_1^2)(1 - 2\rho_2 \cos t + \rho_2^2)},$$

где ρ_1, ρ_2 — корни квадратного трехчлена $a\rho^2 + 2b\rho + (a - 2)$.

Если $a \geq 1 + |b|$, то многочлены $(f_n(x))$ ортогональны на $[-1, 1]$ с весом $w_0(x)$.

Если $a < 1 + |b|$, рассмотрим для каждого из корней ρ_j , для которых $|\rho_j| > 1$, точечную нагрузку величиной $\frac{\pi(\rho_j - 1/\rho_j)}{\rho_j - \rho_{3-j}}$ (несложно проверить, что это число положительно) в точке $\tau_j := (\rho_j + 1/\rho_j)/2$, соответствующую меру обозначим λ_j .

Многочлены (f_n) ортогональны относительно меры $w(x)dx + \sum_j d\lambda_j$, где сумма содержит одно или два слагаемых в зависимости от количества корней ρ_j , больших по модулю 1.

Доказательство. Прежде всего заметим, что рекуррента Чебышева при общих начальных условиях имеет явное решение:

$$2f_n(\cos t) = \frac{a \sin(n+1)t + 2b \sin nt + (a-2) \sin(n-1)t}{\sin t}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

Сначала попробуем найти вес $w(x)$ на $[-1, 1]$, для которого $\int_{-1}^1 w(x) f_n(x) dx = 0$, $n = 1, 2, \dots$

(это получится сделать для некоторых значений параметров a, b , но не для всех: не всегда мера сосредоточена на $[-1, 1]$). Делая замену $x = \cos t$, $t \in [0, \pi]$, получаем равносильное условие

$$\int_0^\pi w(\cos t) (a \sin(n+1)t + 2b \sin nt + (a-2) \sin(n-1)t) dt = 0, \quad n \geq 1.$$

Раскладывая функцию $w(\cos t) = \sum w_n \sin nt$ по ортогональному нормированному (на константу $\sqrt{\pi/2}$) базису $(\sin nt)_{n>0}$ на $[0, \pi]$, получаем условие $aw_{n+1} + 2bw_n + (a-2)w_{n-1} = 0$ при $n \geq 1$, где надо считать $w_0 = 0$. Единственным с точностью до пропорциональности решением этой рекурренты является последовательность $w_n = (\rho_1^n - \rho_2^n)/(\rho_1 - \rho_2)$, где ρ_1, ρ_2 — корни характеристического уравнения $q^{a,b}(\rho) := a\rho^2 + 2b\rho + (a-2) = 0$ (при $\rho_1 = \rho_2$ это надо понимать как $w_n = n\rho_1^{n-1}$). Если оба корня по модулю меньше 1, то ряд равномерно сходится. Пользуясь известной формулой $\sum \rho^n \sin nt = \frac{\rho \sin t}{1 - 2\rho \cos t + \rho^2}$, получаем решение

$$w(\cos t) = \frac{1}{\rho_1 - \rho_2} \sum (\rho_1^n - \rho_2^n) \sin nt = \frac{(1 - \rho_1 \rho_2) \sin t}{(1 - 2\rho_1 \cos t + \rho_1^2)(1 - 2\rho_2 \cos t + \rho_2^2)}. \quad (2)$$

Обсудим, когда корни квадратного трехчлена $q^{a,b}$ по модулю меньше 1. Необходимым условием этого являются неравенства $q^{a,b}(1) > 0$, $q^{a,b}(-1) > 0$, то есть $a - 1 - |b| > 0$. Поймем, что этого и достаточно.

Рассмотрим сначала случай, когда корни вещественные. Точки ± 1 лежат вне промежутка между корнями, значит, либо оба корня по модулю меньше 1, либо оба больше 1, либо оба меньше -1 . Но произведение корней по теореме Виета равно $1 - 2/a < 1$, поэтому имеет место первый случай: оба корня по модулю меньше 1. Если же корни не вещественные, то они комплексно

сопряжены, их модули равны, и квадрат модуля каждого из них равен произведению корней $1 - 2/a < 1$.

Таким образом, случай, когда оба корня по модулю строго меньше 1, то есть $a > 1 + |b|$, рассмотрен. Случай, когда они не больше 1, то есть $a \geq 1 + |b|$, получается предельным переходом из рассмотренного (условия ортогональности допускают предельный переход, поскольку особенность предельной функции w интегрируема).

Теперь найдем меру, по которой ортогональны $f_n(x) = f_n^{a,b}(x)$ в случае, когда хотя бы один из корней ρ_1, ρ_2 по модулю больше 1. Вычислим интеграл $\int_0^\pi w(\cos t) f_n(\cos t) \sin t dt$ в этом случае.

Если $|\rho_j| < 1$ при $j \in \{1, 2\}$, то

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i(\rho_1 - \rho_2)} \int_0^\pi f_n(\cos t) \sin t \left(\frac{1}{1 - \rho_j e^{it}} - \frac{1}{1 - \rho_j e^{-it}} \right) dt = \\ = \frac{1}{\rho_1 - \rho_2} \int_0^\pi (a \sin(n+1)t + 2b \sin nt + (a-2) \sin(n-1)t) \left(\sum_{m=1}^\infty \rho_j^m \sin mt \right) dt = \\ = \frac{\pi}{2(\rho_1 - \rho_2)} (a\rho_j^2 + 2b\rho_j) \delta_{n,1} = \frac{\pi(2-a)}{2(\rho_1 - \rho_2)} \delta_{n,1}. \end{aligned}$$

Если же $|\rho_j| > 1$, то раскладывать геометрические прогрессии надо иначе:

$$\frac{1}{1 - \rho_j e^{it}} - \frac{1}{1 - \rho_j e^{-it}} = \sum_{m=1}^\infty \rho_j^{-m} (e^{imt} - e^{-imt}) = 2i \sum_{m=1}^\infty \rho_j^{-m} \sin mt,$$

откуда

$$\begin{aligned} \frac{1}{2i(\rho_1 - \rho_2)} \int_{-1}^1 f_n(\cos t) \sin t \left(\frac{1}{1 - \rho_j e^{it}} - \frac{1}{1 - \rho_j e^{-it}} \right) dt = \\ = \frac{1}{\rho_1 - \rho_2} \int_0^\pi (a \sin(n+1)t + 2b \sin nt + (a-2) \sin(n-1)t) \left(\sum_{m=1}^\infty \rho_j^{-m} \sin mt \right) dt = \\ = \frac{\pi}{2(\rho_1 - \rho_2)} \left(\rho_j^{-n-1} (a + 2b\rho_j + (a-2)\rho_j^2) - (a-2)\delta_{n,1} \right) =: \theta_n. \end{aligned}$$

Положим $2\tau = \rho_j + 1/\rho_j$. Полагая $\rho_j = e^{is}$ (для какого-то комплексного s), получаем $\tau = \cos s$, $\rho_j - 1/\rho_j = i \sin s$, поэтому

$$\begin{aligned} 2f_n(\tau)(\rho_j - 1/\rho_j) = a(\rho_j^{n+1} - \rho_j^{-n-1}) + 2b(\rho_j^n - \rho_j^{-n}) + (a-2)(\rho_j^{n-1} - \rho_j^{-(n-1)}) = \\ = -\rho_j^{-n-1} (a + 2b\rho_j + (a-2)\rho_j^2), \end{aligned}$$

откуда

$$\theta_n = \frac{\pi}{2(\rho_1 - \rho_2)} (\rho_j^{-n-1} (a + 2b\rho_j + (a-2)\rho_j^2) + (a-2)\delta_{n,1}).$$

Это позволяет компенсировать интеграл θ_n мерой $d\lambda_j$. Осталось убедиться, что члены с $\delta_{n,1}$ сокращаются как в случае, когда ровно один корень по модулю больше 1 по модулю, так и в случае, когда оба. $\square$

Классические многочлены Якоби [3] $P_n^{(\alpha, \beta)}(x)$ могут быть заданы рекуррентным соотношением типа (1) (см. [3, 10.8(11)]) и начальными условиями $P_0^{(\alpha, \beta)}(x) = 1$, $P_1^{(\alpha, \beta)}(x) = x + \alpha + \beta + 1$.

Они стандартизируются значением в точке $x = 1$. Если мы рассмотрим специальный случай $\alpha + \beta = 0$, то получим, что для многочленов Якоби

$$P_n^{(\alpha)}(x) := P_n^{(\alpha, -\alpha)}(x), \quad -1 < \alpha < 1, \quad P_n^{(\alpha)}(1) = \frac{(1+\alpha)_n}{n!} = \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+1)n!}, \quad (3)$$

$$P_n^{(\alpha)}(z) = \frac{(1+\alpha)_n}{n!} F\left(-n, n+1; 1+\alpha; \frac{1-z}{2}\right), \quad (4)$$

рекуррентное соотношение типа (1) имеет вид

$$n(n+1)P_{n+1}^{(\alpha)}(x) = n(2n+1)xP_n^{(\alpha)}(x) - (n^2 - \alpha^2)P_{n-1}^{(\alpha)}(x), \quad n \geq 1. \quad (5)$$

Начальные условия имеют вид $P_0^{(\alpha)}(x) = 1$, $P_1^{(\alpha)}(x) = x + \alpha$.

Из общей теории многочленов Якоби [3] следуют следующие свойства:

$$k_n = \frac{(2n-1)!!}{n!}, \quad P_n^{(\alpha)}(x) = (-1)^n P_n^{(-\alpha)}(-x), \quad (6)$$

где k_n — коэффициент при старшем члене. Как видим, при замене α на $-\alpha$ меняется только многочлен $P_1^{(\alpha)}(x) \rightarrow P_1^{(-\alpha)}(x) = x - \alpha$, а рекуррентное соотношение (5) остается тем же. Решения рекурренты (5) $P_n^{(\pm\alpha)}(x)$ при $\alpha \neq 0$ линейно независимы, поскольку вронскиан¹

$$P_{n+1}^{(\alpha)}(x)P_n^{(-\alpha)}(x) - P_n^{(\alpha)}(x)P_{n+1}^{(-\alpha)}(x) = 2\alpha \frac{(1-\alpha^2)(2-\alpha^2)\dots(n^2-\alpha^2)}{n!(n+1)!} \quad (7)$$

не обращается в нуль.

Это позволяет построить однопараметрическое семейство ортогональных (относительно некоторой меры) многочленов $W_n^\theta(x)$, заданное условиями (5) и начальными условиями $W_0^\theta(x) = 1$, $W_1^\theta(x) = x + \theta$. При этом для значений $\theta = \pm\alpha$ получаются многочлены Якоби $P_n^{(\pm\alpha)}(x)$, ортогональные на $[-1, 1]$ по весу $(1-x)^{\pm\alpha}(1+x)^{\mp\alpha}$, а меры, относительно которых ортогональны семейства $W_n^\theta(x)$ при других вещественных θ , остаются в значительной степени загадочными. В силу линейной независимости многочленов $P_n^{(\pm\alpha)}(x)$, общее решение для параметра $\kappa = (\theta + \alpha)/(2\alpha)$ можно представить в виде $W_n^\theta(x) = \kappa P_n^{(\alpha)}(x) + (1-\kappa)P_n^{(-\alpha)}(x)$.

Следующая теорема дает ответ на естественный вопрос: при каких значениях параметра θ многочлены $W_n^\theta(x)$ ортогональны по мере, сосредоточенной на $[-1, 1]$.

Теорема 3. Если $|\theta| \leq |\alpha|$, то существует единственная мера, по которой ортогональна последовательность многочленов (W_n^θ) , и она сосредоточена на отрезке $[-1, 1]$.

Если $|\theta| > |\alpha|$, то существует единственная мера, по которой ортогональны многочлены W_n^θ , и ее носитель содержит ровно одну точку ξ вне $[-1, 1]$. При $\alpha > 0$, $\theta < -\alpha$ эта точка ξ расположена справа от 1 и равна $\xi = \frac{b+1/b}{2}$, где $b > 1$ — корень уравнения $\left(\frac{b+1}{b-1}\right)^{2\alpha} = \frac{\kappa-1}{\kappa} = \frac{\theta-\alpha}{\theta+\alpha}$. Случаи знаков α и θ аналогичны: при смене знака одного из чисел α , θ число ξ тоже меняет знак.

Доказательство. В терминах κ условие $|\theta| \leq |\alpha|$ звучит как $\kappa \in [0, 1]$. Если оно выполнено, то для любого $x > 1$ и любого целого неотрицательного n имеем $W_n^\theta(x) > 0$. Действительно, старшие коэффициенты многочленов $P_n^{(\pm\alpha)}(x)$ (см. (6)) положительны, их корни лежат на отрезке $[-1, 1]$ (из ортогональности), а значит, оба они положительны в точке x . Аналогично, $(-1)^n W_n^\theta(x) > 0$ при $x < -1$. Таким образом, корни многочленов W_n^θ сосредоточены на $[-1, 1]$. Как известно, одна из мер Фавара, по которой они ортогональны, может быть получена как слабый предел мер, сосредоточенных на корнях этих многочленов, поэтому она тоже имеет носитель в $[-1, 1]$. Для таких мер детерминирована проблема моментов, поэтому других мер, по которым ортогональны W_n^θ , нет.

Предположим теперь, что $|\theta| > |\alpha|$, тогда одно из чисел κ или $1-\kappa$ отрицательно. В силу (6) достаточно рассмотреть случай $\alpha > 0$, $\kappa < 0$. Так как (см. (3))

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{P_n^{(\alpha)}(1)}{P_n^{(-\alpha)}(1)} = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\Gamma(1+\alpha+n)}{\Gamma(1-\alpha+n)} = \frac{\Gamma(1-\alpha)}{\Gamma(1+\alpha)} \lim_{n \rightarrow \infty} n^{2\alpha} = \infty,$$

¹Обозначим левую часть (7) через μ_n . Умножим рекурренту (5) на $P_n^{(-\alpha)}(x)$, затем рекурренту (5) для значка $-\alpha$ умножим на $P_n^{(\alpha)}(x)$ и вычтем. Получим $n(n+1)\mu_n = (n^2 - \alpha^2)\mu_{n-1}$.

при больших n значение многочлена W_n^θ в точке 1 отрицательно. Поэтому этот многочлен (его старший коэффициент положителен) имеет корень, больший 1. Такое невозможно для многочленов, ортогональных по мере, сосредоточенной на $[-1, 1]$. Итак, носитель меры, по которой ортогональны W_n^θ , не содержится в $[-1, 1]$, а значит, он содержит единственную точку вне $[-1, 1]$. В рассматриваемом случае $\alpha > 0$, $\kappa < 0$ эта точка ξ расположена правее 1.

Пользуясь записью многочленов в виде (4) и асимптотической формулой [2, 2.4(17)] при больших n , имеем

$$\frac{P_n^{(\alpha)}(z)}{P_n^{(-\alpha)}(z)} \rightarrow \left(\frac{b+1}{b-1} \right)^{2\alpha}, \quad z = \frac{b+b^{-1}}{2}, \quad b > 1.$$

Таким образом, если определить ξ как в формулировке теоремы, для всякой точки $\xi_1 \in (1, \xi)$ значение многочлена $W_n^\theta(x)$ в точке ξ отрицательно, а потому этот многочлен имеет корень $> \xi_1$. Но все корни многочленов W_n^θ расположены в выпуклой оболочке носителя меры, по которой они ортогональны. Таким образом, атом расположен в точке ξ или правее. Но и правее он быть не может, потому что для любого $\xi_2 > \xi$ при больших n из нашей асимптотики имеем $W_n^\theta(x) > 0$, а потому все корни $W_n^\theta(x)$ расположены до точки ξ_2 . Следовательно, носитель слабого предела мер, сосредоточенных на нулях $W_n^\theta(x)$, содержится в $(-1, \xi]$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. — М.: Физматгиз, 1961.
2. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 1. — М.: Наука, 1965.
3. Бейтмен Г., Эрдейи А. Высшие трансцендентные функции. Т. 2. — М.: Наука, 1966.
4. Сегё Г. Ортогональные многочлены. — М.: Физматлит, 1962.
5. Favard J. Sur les polynomes de Tchebicheff // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. — 1935. — 200. — С. 2052–2053.
6. Marcellán F., Álvarez-Nodarse R. On the “Favard theorem” and its extensions // J. Comput. Appl. Math. — 2001. — 127, № 1–2. — С. 231–254. — DOI: [10.1016/S0377-0427\(00\)00497-0](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00497-0).
7. Yafaev D. R. Self-adjoint Jacobi operators in the limit circle case // J. Operator Theory. — 2022. — 89, № 1. — С. 101–117. — DOI: [10.7900/jot.2021apr28.2325](https://doi.org/10.7900/jot.2021apr28.2325).

В. Э. Петров

ООО «ТВЭЛЛ», Санкт-Петербург, Россия

E-mail: petrov_twell@list.ru

Ф. В. Петров

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: f.v.petrov@spbu.ru, ПИНЦ SPIN-код: 1620-9564, ПИНЦ AuthorID: [166548](https://orcid.org/166548), ResearcherID: [M-7506-2013](https://orcid.org/M-7506-2013), Scopus: [15840366400](https://orcid.org/15840366400), ORCID: [0000-0003-1693-2745](https://orcid.org/0000-0003-1693-2745)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-360-367](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-360-367)
 EDN: BUBZBG

UDC 517.538.3:517.987.1
Research article

Some remarks on the dependence of Favard measures on initial values

V. E. Petrov¹ and F. V. Petrov^{2,3}

¹*TWELL LLC, St. Petersburg, Russia*

²*Saint Petersburg State University, St. Petersburg, Russia*

³*Saint Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, St. Petersburg, Russia*

Abstract. We discuss the dependence of the measure with respect to which a sequence of polynomials defined by a three-term recurrence relation is orthogonal on the initial data.

Keywords: orthogonal polynomials, measure, three-term recurrence relation, Favard's theorem.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors are grateful to K. Remling, R. Romanov, and P. Gubkin for valuable consultations. The author was supported by grant No. 25-11-00251 from the Russian Science Foundation.

Authors' contribution. Both authors participated in the setting of the problem, its reformulation from the language of the theory of orthogonal polynomials to the language of the theory of measures and moments, and the interpretation of the results.

For citation: V. E. Petrov, F. V. Petrov, "Some remarks on the dependence of Favard measures on initial values," *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 2, 360–367. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-360-367](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-360-367) EDN: BUBZBG

REFERENCES

1. N. I. Akhiezer, *Klassicheskaya Problema Momentov i Nekotorye Voprosy Analiza, Svyazannye s Neyu* [The Classical Problem of Moments and Some Related Analytical Questions], Fizmatgiz, Moscow, 1961 (in Russian).
2. H. Bateman and A. Erdélyi, *Vysshie Transtsendentnye Funktsii, T. 1* [Higher Transcendental Functions. Vol. 1], Nauka, Moscow, 1973 (Russian translation).
3. H. Bateman and A. Erdélyi, *Vysshie Transtsendentnye Funktsii, T. 2* [Higher Transcendental Functions. Vol. 2], Nauka, Moscow, 1973 (Russian translation).
4. G. Szegő, *Ortogonal'nye Mnogochleny* [Orthogonal polynomials], Fizmatlit, Moscow, 1962 (Russian translation).
5. J. Favard, "Sur les polynomes de Tchebicheff," *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*, 1935, **200**, 2052–2053.
6. F. Marcellán, R. Álvarez-Nodarse, "On the «Favard theorem» and its extensions," *J. Comput. Appl. Math.*, 2001, **127**, No. 1-2, 231–254, DOI: [10.1016/S0377-0427\(00\)00497-0](https://doi.org/10.1016/S0377-0427(00)00497-0).
7. D. R. Yafaev, "Self-adjoint Jacobi operators in the limit circle case," *J. Operator Theory*, 2022, **89**, No. 1, 101–117, DOI: [10.7900/jot.2021apr28.2325](https://doi.org/10.7900/jot.2021apr28.2325).

V. E. Petrov
 TWELL LLC, St. Petersburg, Russia
 E-mail: petrov_twell@list.ru



F. V. Petrov

Saint Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

Saint Petersburg Department of Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences,
St. Petersburg, Russia

E-mail: f.v.petrov@spbu.ru, eLIBRARY SPIN-code: 1620-9564, eLIBRARY AuthorID: [166548](#),
ResearcherID: [M-7506-2013](#), Scopus: [15840366400](#), ORCID: [0000-0003-1693-2745](#)

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРА ВНУТРЕННИХ ВОЛН В НЕКЛАССИЧЕСКИХ ЗАДАЧАХ

Ю. Чжан, А. Н. Темнов

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия

Аннотация. В работе рассматриваются малые колебания идеальной стратифицированной жидкости в ограниченных областях. Примеры решений таких задач, которые авторы называют классическими, обычно предполагают, что образующая боковой поверхности сосуда совпадает по направлению с вектором ускорения свободного падения $\vec{g}$ (и, следовательно, с направлением стратификации). В данном исследовании изучаются неклассические задачи, в которых образующая формы ёмкости и направление стратификации плотности образуют некоторый угол. Такое геометрическое несоответствие приводит к качественному изменению структуры спектра внутренних волн. На примере задачи для сосуда в форме наклонного прямоугольника показано, что наличие угла наклона между границей области и вектором $\vec{g}$ существенным образом влияет на формирование спектра. В частности, обнаружено, что спектр оператора малых колебаний перестаёт быть точечным и содержит участки непрерывного спектра. Определение границ непрерывного спектра важно для правильного решения неоднородных эволюционных задач. Установлено, что границы этих участков и точки перехода от точечного спектра к непрерывному зависят от величины угла наклона и геометрических параметров сосуда. Полученные результаты демонстрируют, что ориентация полости относительно поля силы тяжести является ключевым фактором, определяющим свойства внутренних волн в стратифицированной жидкости, занимающей ограниченный объём.

Ключевые слова: идеальная стратифицированная жидкость, внутренние волны, неклассические краевые задачи, операторный подход, спектральная теория.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Вклад авторов. Темнов А. Н. — научное руководство, концептуализация, утверждение окончательной версии статьи; Чжан Юе — написание оригинального текста, визуализация, редактирование рукописи.

Для цитирования: Чжан Ю., Темнов А. Н. Спектральные свойства оператора внутренних волн в неклассических задачах // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 2. С. 368–387. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-368-387](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-368-387) EDN: [BZHLLF](https://www.edn.ru/BZHLLF)

ВВЕДЕНИЕ

Проблемы динамики стратифицированной жидкости, находящейся в поле силы тяжести, привлекают устойчивое внимание исследователей на протяжении многих десятилетий. Это обусловлено как фундаментальным математическим интересом к уравнениям в частных производных смешанного типа, так и широким спектром приложений в океанологии, метеорологии и технической гидродинамике, в том числе и гидродинамике топлива космических аппаратов. основополагающие физические принципы и методы теоретической океанографии, описывающие внутренние волны, были систематизированы в классической монографии В. Краусса [15]. Дальнейшее

развитие теории, в частности, математическое моделирование волновой динамики стратифицированных и вращающихся жидкостей, получило отражение в работах С. Л. Соболева [37] и его учеников [1, 2, 17], в работах В. В. Булатова и Ю. В. Владимирова [3, 4], в монографии С. А. Габова и А. Г. Свешникова [5], а также в работах Н. Д. Копачевского, А. Н. Темнова и Д. О. Цветкова [12, 13, 24, 25].

При исследовании колебаний вращающейся или стратифицированной жидкости сформировались два фундаментальных аналитических направления. Одно направление связано с редукцией исходных векторных уравнений к одному скалярному уравнению для давления и последующему изучению начально-краевых задач. Второе направление основано на прямом рассмотрении исходных векторных уравнений движения как элементов некоторого гильбертова пространства и последующего проектирования на ортогональные подпространства.

В работах Н. Д. Копачевского и его учеников (второе направление) была построена теория малых движений идеальной и вязкой стратифицированной жидкости в терминах самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве. В частности, было доказано, что для широкого класса областей спектр оператора плавучести веществен, является предельным и лежит на отрезке $[0, N_0^2]$. Однако примеры, представленные в упомянутых работах, относились к случаям, которые можно называть классическими, где геометрия границы согласовалась с направлением стратификации (вектором $\vec{g}$).

В то же время вопрос о структуре спектра в областях другой формы, где имеются границы, не совпадающие с вектором силы тяжести, остаётся менее изученным и представляет собой серьёзную математическую проблему. С точки зрения теории дифференциальных уравнений, задача о колебаниях стратифицированной жидкости во многом подобна задаче о колебаниях вращающейся жидкости и сводится к проблемам задач Дирихле и Неймана для уравнений гиперболического типа. В ранних работах прошлого столетия [26, 27, 29] были затронуты вопросы корректной постановки и разрешимости рассматриваемых задач, а также отсутствия точечного спектра для любой области, а именно: в зависимости от топологических характеристик геометрии границы в спектре могут появляться области непрерывного спектра.

Фундаментальные результаты о структуре спектра в задачах с неклассической геометрией были получены учеником С. Л. Соболева — Р. А. Александряном [1, 2]. Использование свойств некоторых автоморфизмов границы области, применённых к исследованию этой задачи, позволило ему получить много новых содержательных результатов об особенностях структуры спектра оператора, возникшего в задаче о колебаниях вращающейся жидкости. Большой вклад в исследование различных спектральных свойств оператора и связанных с ними вопросов поведения решений рассматриваемой проблемы был сделан в работах Т. И. Зеленьяка [8], Дж. В. Ральстона [34], М. В. Фокина [22, 23], Ю. Н. Григорьева [7], А. А. Ляшенко [17] и др.

Как было отмечено в аннотации, выявление участков непрерывного спектра очень важно при решении задач с неоднородными граничными условиями и при наличии начальных условий. Здесь возникает необходимость представлять движение стратифицированной идеальной жидкости в виде суперпозиции инерционных мод, что оказывается невозможным при наличии участков непрерывного спектра. Как следует из результатов работы С. Д. Троицкой [21], движение жидкости должно быть в этих случаях представлено не только в виде суммы инерционных мод, но и обязательно должно содержать интегральные члены.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД

1.1. Исходные уравнения и краевые условия. Рассматриваются малые движения идеальной несжимаемой экспоненциально стратифицированной жидкости, полностью заполняющей ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с жёсткой неподвижной границей $\Sigma = \partial\Omega$. В состоянии покоя плотность жидкости $\rho_0(Z)$ зависит только от вертикальной координаты Z (направленной против вектора ускорения свободного падения $\vec{g} = -g\vec{e}_Z$) и определяется законом:

$$\rho_0(Z) = \rho_{00}e^{-\beta Z}, \quad (1.1)$$

где β — коэффициент распределения плотности по высоте, $N = \text{const} > 0$ — частота Брента—Вайсяля, которая по определению $N^2 = -g\frac{1}{\rho_0}\frac{d\rho_0}{dZ}$, g — ускорение свободного падения, $\rho_{00} > 0$ —

плотность на некотором уровне. В рамках приближения Буссинеска линеаризованная система уравнений гидродинамики, описывающая малые возмущения состояния равновесия, имеет вид [30, 40]:

$$\begin{cases} \rho_0 \frac{\partial \vec{u}}{\partial t} = -\nabla p - \rho g \vec{e}_Z, \\ \frac{\partial \rho}{\partial t} + (\vec{u} \cdot \nabla) \rho_0 = 0, \\ \nabla \cdot \vec{u} = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

где $\vec{u}(\vec{X}, t)$ — поле скоростей, $p(\vec{X}, t)$ — динамическое давление, $\rho(\vec{X}, t)$ — динамическое возмущение плотности. На твёрдой неподвижной границе Σ выполняется условие непротекания:

$$\vec{u} \cdot \vec{n}|_{\Sigma} = 0, \quad (1.3)$$

где $\vec{n}$ — вектор внешней нормали к поверхности Σ . Начальные условия задаются в виде: $\vec{u}|_{t=0} = \vec{u}^0$, $\rho|_{t=0} = \rho^0$.

1.2. Функциональные пространства и операторные уравнения. Для приведения начально-краевой задачи к дифференциально-операторному уравнению в гильбертовом пространстве введём необходимые функциональные пространства. В каждой точке $x = (x_1, x_2, x_3)$ области Ω определим вектор скорости жидкости $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ таким образом, что в Ω возникает поле скоростей $\vec{u}(x)$. Естественно предположить, что соответствующая масса жидкости имеет конечную кинетическую энергию T . Если жидкость имеет плотность $\rho_0 = \rho_0(x)$, то это означает, что $2T = \int_{\Omega} \rho_0(x) |\vec{u}(x)|^2 d\Omega < \infty$.

Тогда все поля, которым отвечает кинетическая энергия, образуют гильбертово пространство $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$ с нормой $\|\vec{u}\| = \left(\int_{\Omega} \rho_0 |\vec{u}|^2 d\Omega \right)^{\frac{1}{2}}$. Пространство $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$ допускает ортогональное разложение (см. подробнее в [11, 16]): $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0) = \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0) \oplus \mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$, где $\mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0)$ — подпространство соленоидальных вектор-функций, удовлетворяющих условию непротекания на границе: $\nabla \cdot \vec{u} = 0$, $u_n|_{\Sigma} = 0$; а $\mathbf{G}(\Omega, \rho_0)$ — подпространство квазипотенциальных полей вида $\vec{w} = \rho_0^{-1} \nabla \varphi$. В пространстве $\mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0)$ свяжем с полем равновесной плотности $\rho_0(z)$ гильбертово пространство вектор-функций $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$ со скалярным произведением:

$$(\vec{v}, \vec{w})_{\mathbf{J}_0} \equiv \int_{\Omega} \rho_0(z) (\vec{v} \cdot \vec{w}) d\Omega.$$

Наряду с пространством вектор-функций, нам понадобится гильбертово пространство скалярных функций $\mathfrak{L}_2(\Omega)$ для описания поля отклонений плотности ρ . Введём в него специальное скалярное произведение, учитывающее стратификацию:

$$(\varphi, \psi)_{\mathfrak{L}_2} := g^2 \int_{\Omega} [\rho_0(z) N^2]^{-1} \varphi(\vec{x}) \psi(\vec{x}) d\Omega.$$

Будем считать, что при каждом t вектор скорости $\vec{u}(\vec{x}, t)$ и градиент давления ∇p являются элементами введённых пространств. Вследствие введённых подпространств получаем:

$$\vec{u} \in \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0), \quad \frac{1}{\rho_0(z)} \nabla p \in \mathbf{G}(\Omega, \rho_0).$$

Пусть P_0 — ортопроектор на подпространство $\mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0)$. Подействуем оператором P_0 на линеаризованное уравнение движения идеальной жидкости (уравнение Эйлера в приближении Буссинеска). Поскольку $P_0(\rho_0^{-1} \nabla p) = 0$, градиент динамического давления исключается, и мы приходим к равносильной системе дифференциальных уравнений первого порядка:

$$\frac{d\vec{u}}{dt} = -C^* \rho, \quad \frac{d\rho}{dt} = C \vec{u},$$

где введены линейные операторы $C : \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0) \rightarrow \mathfrak{L}_2(\Omega)$ и $C^* : \mathfrak{L}_2(\Omega) \rightarrow \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0)$, действующие по правилу:

$$C\vec{u} := -\rho'_0(z)(\vec{u} \cdot \vec{k}), \quad C^*\rho := P_0 \left[\frac{g\rho}{\rho_0(z)} \vec{k} \right]. \quad (1.4)$$

Важным свойством операторов C и C^* является их взаимная сопряжённость. Действительно, используя определения скалярных произведений в $\mathbf{J}_0$ и $\mathfrak{L}_2$, имеем:

$$\begin{aligned} (\rho, C\vec{u})_{\mathfrak{L}_2} &= g^2 \int_{\Omega} [\rho_0 N^2]^{-1} \rho (-\rho'_0 u_z) d\Omega = g \int_{\Omega} \rho u_z d\Omega, \\ (C^*\rho, \vec{u})_{\mathbf{J}_0} &= \int_{\Omega} \rho_0 \left(P_0 \left[\frac{g\rho}{\rho_0} \vec{k} \right] \cdot \vec{u} \right) d\Omega = \int_{\Omega} \rho_0 \left(\frac{g\rho}{\rho_0} \vec{k} \cdot \vec{u} \right) d\Omega = \int_{\Omega} g\rho u_z d\Omega. \end{aligned}$$

Из приведённых выражений следует $(\rho, C\vec{u})_{\mathfrak{L}_2} = (C^*\rho, \vec{u})_{\mathbf{J}_0}$.

Дифференцируя первое уравнение системы (1.2) по времени и подставляя во второе, мы исключаем поле плотности ρ и приходим к эволюционному уравнению второго порядка относительно скорости:

$$\frac{d^2 \vec{u}}{dt^2} + B_0 \vec{u} = 0, \quad B_0 := C^*C.$$

Здесь B_0 — оператор плавучести, введённый в работе [20], который в явном виде записывается как

$$B_0 \vec{u} = C^*(C\vec{u}) = P_0 \left[N^2 u_z \vec{k} \right].$$

Теорема 1.1. *Спектр оператора B_0 вещественный, предельный и расположен на отрезке $[0, N_{\max}^2]$ (см. [11, с. 21]). Если собственные функции $\vec{\eta}_k$ и $\vec{\eta}_l$ отвечают собственным значениям $\lambda_k \neq \lambda_l$, то $\vec{\eta}_k$ и $\vec{\eta}_l$ ортогональны как в скалярном произведении в пространстве $\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_0)$, так и в энергетическом пространстве H_{B_0} оператора плавучести:*

$$(\vec{\eta}_k, \vec{\eta}_l) = (B_0^{\frac{1}{2}} \vec{\eta}_k, B_0^{\frac{1}{2}} \vec{\eta}_l) = 0 \quad (\lambda_k \neq \lambda_l).$$

Каждой собственной функции $\vec{\eta}_k(x)$ отвечает пара частот колебаний $\omega_k^{\pm} = \pm \sqrt{\lambda_k}$, причём все частоты ω расположены на отрезке $[-N_{\max}, N_{\max}]$.

Результат носит универсальный характер: он не зависит от формы и ориентации сосуда. Каким бы ни был угол наклона стенки, любые допустимые частоты нормальных колебаний обязаны принадлежать этому интервалу. Спектр оператора B_0 — предельный, а это означает, что помимо точечного спектра, система может обладать непрерывным спектром и собственными числами бесконечной кратности. Геометрия области полностью определяет структуру этого спектра внутри отрезка: наличие или отсутствие точечных мод и зон сгущения. Для понимания физической и математической природы спектра (появления непрерывного спектра при наклоне сосуда), целесообразно перейти к двумерной постановке задачи.

2. АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ И СТРУКТУРА СПЕКТРА В НАКЛОННОЙ ПРЯМОУГОЛЬНОЙ ОБЛАСТИ

2.1. Двумерная постановка и введение функции тока. Рассмотрим двумерную задачу о малых колебаниях идеальной несжимаемой стратифицированной жидкости, полностью заполняющей прямоугольный контейнер. Для получения дифференциального уравнения введём неподвижную декартову систему координат (Y, Z) . Направим ось Z вертикально вверх (антипараллельно вектору ускорения свободного падения $\vec{g}$), а ось Y — горизонтально. Для решения системы уравнений идеальной жидкости перейдём к функции тока $\Psi(Y, Z, t) = \psi(y, z)e^{i\omega t}$, которая тождественно удовлетворяет уравнению неразрывности:

$$u_Y = \frac{\partial \Psi}{\partial Z}, \quad u_Z = -\frac{\partial \Psi}{\partial Y}.$$

Исключая давление путём перекрестного дифференцирования уравнений движения, получаем скалярное уравнение для амплитуды функции тока $\Psi(Y, Z, t)$:

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} + \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Z^2} \right) + N^2 \frac{\partial^2 \Psi}{\partial Y^2} = 0.$$

Полная постановка задачи включает ещё и граничное условие $\Psi|_{\Sigma} = 0$ и начальные условия $\Psi(\vec{X}, 0) = \Psi_0(\vec{X})$, $\dot{\Psi}(\vec{X}, 0) = \dot{\Psi}_0(\vec{X})$. Будем далее рассматривать нормальные колебания, положив $\Psi(Y, Z, t) = \psi(y, z)e^{i\omega t}$, и перепишем уравнение для функции тока в безразмерном виде:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial Y^2} - \frac{\lambda}{1 - \lambda} \frac{\partial^2 \psi}{\partial Z^2} = 0, \quad (2.1)$$

где $\lambda = \frac{\omega^2}{N^2}$ — безразмерный параметр квадрата частоты.

Для внутренних гравитационных волн выполняется условие $\omega < N$ ($0 < \lambda < 1$). В этом диапазоне частот уравнение (2.1) относится к гиперболическому типу. Характеристическое уравнение для него имеет вид:

$$dZ^2 - \frac{\lambda}{1 - \lambda} dY^2 = 0 \implies \frac{dZ}{dY} = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{1 - \lambda}}.$$

Интегрируя, находим уравнения характеристик в переменных Y, Z : $Z = \pm \sqrt{\frac{\lambda}{1 - \lambda}} Y + C$.

Для удобства дальнейшего анализа введём угловой параметр $\mu = \sqrt{\frac{\lambda}{1 - \lambda}}$, соответствующий наклону характеристик в координатах OYZ . Тогда два семейства характеристик можно выразить через характеристические координаты ξ и η :

$$\xi = \mu Y + Z, \quad \eta = \mu Y - Z.$$

Переход к координатам (ξ, η) преобразует дифференциальное уравнение (2.1) к каноническому виду уравнения Даламбера $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$. В соответствии с формулой Даламбера, общее решение данного уравнения представляет собой суперпозицию двух функций описывающих характеристики гиперболического уравнения:

$$\psi(Y, Z) = F(\xi) + G(\eta) = F(\mu Y + Z) + G(\mu Y - Z),$$

где F и G — произвольные функции, которые должны быть однозначно определены из граничных условий.

Рассмотрим замкнутую область течения, представляющую собой плоский прямоугольный сосуд размерами $L \times H$ (рис. 1), наклонённый на угол θ относительно вектора силы тяжести. На твёрдых непроницаемых границах сосуда Σ должно выполняться классическое условие Дирихле, что эквивалентно постоянству функции тока на контуре:

$$\psi|_{\Sigma} = 0 \implies [F(\mu Y + Z) + G(\mu Y - Z)]|_{\Sigma} = 0.$$

То есть на границах Σ всегда выполняется условие $F(\xi) = -G(\eta)$.

Это уравнение означает, что характеристика, несущая значение функции F , попадает на границу области и должна преобразоваться в характеристику, несущую значение функции $-G$, и отразиться. Отметим здесь, что рассматриваемые характеристики являются функциями пространственных координат в отличие от принимаемых обычно в математической физике характеристик гиперболического уравнения, зависящих от координат пространства и времени. В терминах геометрической оптики характеристики гиперболического уравнения часто называют лучами, выходящими из точек границы области. Однако для рассматриваемого случая имеется существенное отличие, т. к. в уравнение характеристик рассматриваемой задачи входит не скорость распространения фронта волны, а угловой параметр μ , зависящий от частоты свободных колебаний. Поэтому для каждой собственной частоты должна отвечать своя характеристика и свой угловой

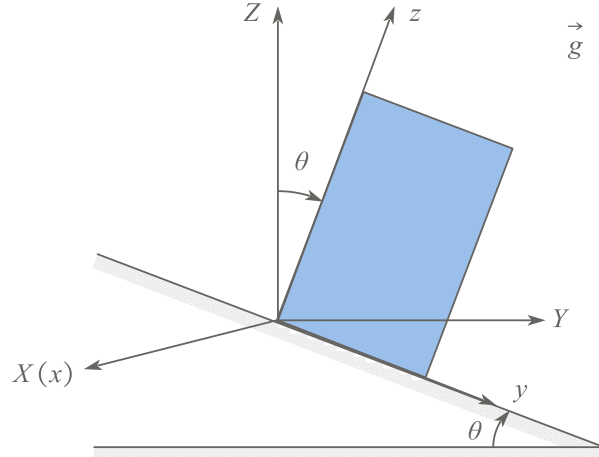


РИС. 1. Системы координат

FIG. 1. Systems of coordinates

параметр. В случае отсутствия наклона контейнера квадрат безразмерной частоты колебаний определяется известной формулой:

$$\lambda_{mn} = \frac{n^2 H^2}{n^2 H^2 + m^2 L^2} = \frac{\frac{n^2}{L^2}}{\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{H^2}},$$

где n — число полуволн вдоль горизонтальной оси, m — число полуволн вдоль вертикальной оси.

Легко убедиться, что множество собственных чисел всюду плотно на отрезке $[0, 1]$ и образуют предельный спектр свободных колебаний идеальной стратифицированной жидкости при постоянной частоте плавучести. При равенстве чисел (m, n) собственные числа становятся бесконечно кратными. Характеристики гиперболического уравнения в этом классическом случае ($\theta = 0$) отвечают законам геометрической оптики, так как вертикальная граница сосуда параллельна направлению стратификации. В работах [18, 31, 32, 38] отмечено, что в случае твёрдой границы, образующей некоторый угол с вектором $\vec{g}$ (с направлением стратификации) законы геометрической оптики не выполняются, а отражённая от твёрдой границы характеристика оказывается инвариантна по отношению к вектору $\vec{g}$, а не к вектору нормали к твёрдой границе. Отсюда следует, что угловой параметр должен включать в себя угол наклона характеристик по отношению к наклонному контейнеру. Спрашивается, как изменится структура спектра и расположение характеристик?

Чтобы ответить на поставленные вопросы и избежать определения угла наклона характеристик перейдём к локальной системе координат Oyz , связанной с сосудом.

2.2. Переход к локальной системе координат сосуда. Введём локальную систему координат (y, z) , связанную с наклонным сосудом:

$$\begin{cases} Y = y \cos \theta + z \sin \theta, \\ Z = -y \sin \theta + z \cos \theta, \end{cases} \quad (2.2)$$

В терминах функции тока при гармонической зависимости от времени $\Psi(y, z, t) = \psi(y, z)e^{i\omega t}$ исключение давления приводит систему уравнений (1.2) к дифференциальному уравнению второго порядка гиперболического типа для амплитуды $\psi(y, z)$:

$$A \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + 2B \frac{\partial^2 \psi}{\partial y \partial z} + C \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0,$$

где $A = N^2 \cos^2 \theta - \omega^2$, $B = N^2 \sin \theta \cos \theta$, $C = N^2 \sin^2 \theta - \omega^2$.

На твёрдых непроницаемых стенках сосуда должно выполняться условие Дирихле, что эквивалентно постоянству функции тока на границе: $\psi|_{\Sigma} = \text{const} \rightarrow \psi|_{\Sigma} = 0$ если $y = 0, L$, $z = 0, H$.

Уравнение для функции тока ψ содержит смешанные производные. Для приведения уравнения к каноническому виду (к волновому уравнению) составим обыкновенное дифференциальное уравнение, которое называется характеристическим:

$$C \left(\frac{dy}{dz} \right)^2 + 2B \frac{dy}{dz} + A = 0.$$

Интегралы этого уравнения являются характеристиками исходного уравнения и имеют следующий вид:

$$\begin{cases} \xi = Cy + (D + B)z, \\ \eta = Cy + (B - D)z, \end{cases}$$

где $D = \sqrt{B^2 - AC} = \omega \sqrt{N^2 - \omega^2}$.

Данное преобразование приводит исходное уравнение к каноническому виду: $\frac{\partial^2 \psi}{\partial \xi \partial \eta} = 0$.

Общее решение данного уравнения представляет собой решение Даламбера, т. е. суперпозицию двух функций, описывающих характеристики гиперболического уравнения в локальной системе:

$$\psi(\xi, \eta) = \phi_1(\xi) + \phi_2(\eta), \quad \psi(y, z) = \phi_1(Cy + (B + D)z) + \phi_2(Cy + (B - D)z).$$

Для получения конкретного результата сделаем ещё одну замену: $\xi = \alpha + \beta$, $\eta = \alpha - \beta$.

Тогда исходная задача запишется в виде:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial \alpha^2} - \frac{\partial^2 \psi}{\partial \beta^2} = 0,$$

где $\alpha = Cy + Bz$, $\beta = Dz$.

Разделяя переменные, получим:

$$\psi(\alpha, \beta) = A(\alpha)B(\beta), \quad \text{где} \quad \begin{cases} A(\alpha) = C_1 \cos k\alpha + C_2 \sin k\alpha, \\ B(\beta) = C_3 \cos k\beta + C_4 \sin k\beta. \end{cases}$$

Возвращаясь к переменным y, z , имеем:

$$\psi(y, z) = [C_1 \cos k(Cy + Bz) + C_2 \sin k(Cy + Bz)](C_3 \cos kDz + C_4 \sin kDz).$$

Используя граничные условия и уравнение характеристики на границе области, получим:

$$\begin{aligned} \psi(0, 0) = 0 &\rightarrow C_1 = C_3 = 0, \\ z = H \rightarrow k_n &= \frac{n\pi}{H}, \quad k = \frac{k_n}{D}, \quad n = \mathbb{Z}^+, \\ y = L \rightarrow k_m &= \frac{m\pi}{L} = k_n \frac{C}{B + D}, \quad m = \mathbb{Z}^+. \end{aligned}$$

Из граничных условий получаем частотное уравнение $k_m(B + D) = k_n C$, или

$$k_m(N^2 \sin \theta \cos \theta + \omega \sqrt{N^2 - \omega^2}) = k_n(N^2 \sin^2 \theta - \omega^2).$$

Выражение для функции $\psi(z, y)$ принимает вид

$$\psi(z, y) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \psi_{nm}(z, y), \quad \psi_{nm}(z, y) = \sin \left(k_m y \frac{B + D}{D} + k_n z \frac{B}{D} \right) \sin k_n z.$$

2.3. Условия возникновения непрерывного спектра. В зависимости от соотношения между характеристическим углом ϑ и углом наклона сосуда θ классифицируем спектральную структуру оператора в виде следующей теоремы.

Теорема 2.1. Если угол наклона характеристик удовлетворяет условиям $\vartheta < \theta$ или $\vartheta > 90^\circ - \theta$, спектр оператора является чисто непрерывным.

Доказательство.

1. Доказательство отсутствия точечного спектра в зонах $\vartheta < \theta$ и $\vartheta > 90^\circ - \theta$.

Рассмотрим случай пологих характеристик ($\vartheta < \theta$). В этом диапазоне луч не способен пересечь сосуд от левой стенки до правой.

$$\Lambda_{pair} = \frac{\sin(\theta - \vartheta)}{\sin(\theta + \vartheta)} \cdot \frac{\cos(\theta + \vartheta)}{\cos(\theta - \vartheta)} = \frac{\operatorname{tg}(\theta - \vartheta)}{\operatorname{tg}(\theta + \vartheta)}.$$

Поскольку $0 < \vartheta < \theta < 90^\circ$, углы удовлетворяют неравенству $0 < \theta - \vartheta < \theta + \vartheta < 90^\circ$. В силу монотонного возрастания функции тангенса в первой четверти, числитель меньше знаменателя, то есть $\Lambda_{pair} < 1$.

2. Доказательство существования непрерывного спектра по критерию Вейля (см. [11, с. 21] и [35]).

Для доказательства принадлежности данных диапазонов существенному (и, как следствие в данной задаче, непрерывному) спектру самосопряжённого ограниченного оператора плавучести B_0 используем классический критерий предельных точек Вейля для самосопряжённых операторов в гильбертовом пространстве:

Критерий. Число $\lambda \in \mathbb{R}$ принадлежит непрерывному спектру самосопряжённого оператора B_0 тогда и только тогда, когда существует последовательность векторных полей $\{\vec{u}_n\}_{n=1}^\infty \subset D(B_0)$ (область определения оператора), удовлетворяющая трём фундаментальным условиям:

1. Нормировка: $\|\vec{u}_n\|_{\mathbf{J}_0} = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$;
2. Сходимость операторной невязки к нулю: $\|(B_0 - \lambda N^2 I)\vec{u}_n\|_{\mathbf{J}_0} \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$;
3. Отсутствие сильно сходящихся подпоследовательностей: последовательность $\{\vec{u}_n\}$ слабо сходится к нулю в пространстве $\mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0)$.

Построим такую последовательность для любого $\lambda \in [0, \sin^2 \theta] \cup [\cos^2 \theta, 1]$, где критические границы определены из условия скольжения характеристик вдоль границ сосуда (определение границ в пункте 3.1).

Замечание. В качестве основы для построения последовательности Вейля используется одно из семейств характеристических координат $\xi = \mu Y + Z$; для второго семейства $\eta = \mu Y - Z$ построение полностью аналогично и приводит к тем же выводам.

2.1. Построение локализованной последовательности функций тока.

В рамках двумерной постановки задачи соленоидальное поле скорости $\vec{u} = (u_Y, u_Z)$ однозначно определяется функцией тока $\psi(Y, Z)$ соотношениями $u_Y = \frac{\partial \psi}{\partial Z}$, $u_Z = -\frac{\partial \psi}{\partial Y}$, при этом условие несжимаемости $\nabla \cdot \vec{u} = 0$ выполняется тождественно. Норма поля скорости в пространстве $\mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0)$ записывается в виде

$$\|\vec{u}\|_{\mathbf{J}_0}^2 = \int_{\Omega} \rho_0(z) (u_Y^2 + u_Z^2) d\Omega = \int_{\Omega} \rho_0(z) |\nabla \psi|^2 d\Omega.$$

Для исключения сингулярностей на границе Σ построим волновой пакет, локализованный внутри области течения. Выберем гладкую отсекающую функцию $\phi(Y, Z) \in C_0^\infty(\Omega)$, носитель которой $\operatorname{supp}(\phi)$ целиком лежит внутри Ω и не пересекается с границей.

Введём последовательность функций тока $\psi_n(Y, Z) = C_n \cdot \phi(Y, Z) \sin(n\xi)$, где $\xi = \mu Y + Z$ — характеристическая координата, $\mu = \sqrt{\frac{\lambda}{1-\lambda}}$; C_n — нормировочная константа. Функция тока ψ_n тождественно равна нулю на границе. Следовательно, условие непротекания $\vec{u}_n \cdot \vec{n}|_{\Sigma} = 0$ выполняется, и $\vec{u}_n \in D(B_0) \subset \mathbf{J}_0(\Omega, \rho_0)$ для любого n .

2.2. Выполнение условия нормировки.

Вычислим норму поля скорости $\|\vec{u}_n\|_{\mathbf{J}_0}^2$. Градиент функции тока равен

$$\nabla \psi_n = C_n [\nabla \phi \cdot \sin(n\xi) + n\phi \cos(n\xi) \nabla \xi].$$

Квадрат нормы принимает вид

$$\|\vec{u}_n\|_{\mathbf{J}_0}^2 = C_n^2 \int_{\Omega} \rho_0(z) |\nabla \phi \sin(n\xi) + n\phi \cos(n\xi) \nabla \xi|^2 d\Omega.$$

Для выполнения первого условия Вейля мы определяем константу C_n так, чтобы это выражение было в точности равно единице для каждого n :

$$C_n = \left(\int_{\Omega} \rho_0(z) |\nabla \phi \sin(n\xi) + n\phi \cos(n\xi) \nabla \xi|^2 d\Omega \right)^{-1/2}.$$

Таким образом, $\|\vec{u}_n\|_{\mathbf{J}_0} = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Оценим асимптотику C_n при $n \rightarrow \infty$. Главный член интеграла пропорционален n^2 :

$$\int_{\Omega} \rho_0 n^2 \phi^2 \cos^2(n\xi) |\nabla \xi|^2 d\Omega.$$

Используя тригонометрическое тождество $\cos^2(n\xi) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos(2n\xi)$, представим подынтегральное выражение в виде суммы постоянной составляющей и высокочастотной осциллирующей части. Согласно классической лемме Римана—Лебега [9], интеграл от произведения любой интегрируемой функции на $\cos(2n\xi)$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$. В терминах функционального анализа это означает слабую сходимость последовательности: $\cos^2(n\xi) \rightharpoonup 1/2$ в пространстве $\mathbf{L}_2(\Omega)$ (см. [10]). Отсюда следует важнейший вывод для дальнейших оценок: нормировочная константа убывает как $C_n = O(1/n)$.

2.3. Оценка сходимости операторной невязки к нулю.

Поскольку B_0 — ограниченный оператор в $\mathbf{J}_0$, норма невязки оценивается через её действие на произвольное пробное векторное поле $\vec{v} \in \mathbf{J}_0$. Это поле однозначно определяется своей пробной функцией тока $\tilde{\psi} \in \dot{W}_2^1(\Omega)$ (где пространство Соболева $\dot{W}_2^1$ обеспечивает равенство функции нулю на границе, что эквивалентно условию непротекания). Невязка стремится к нулю, если

$$\sup_{\|\vec{v}\|_{\mathbf{J}_0}=1} |((B_0 - \lambda N^2 I) \vec{u}_n, \vec{v})_{\mathbf{J}_0}| \rightarrow 0.$$

Соответствующая билинейная форма (слабая форма дифференциального уравнения) имеет вид

$$((B_0 - \lambda N^2 I) \vec{u}_n, \vec{v})_{\mathbf{J}_0} = \int_{\Omega} \rho_0(z) \left[(N^2 - \omega^2) \frac{\partial \psi_n}{\partial Y} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial Y} - \omega^2 \frac{\partial \psi_n}{\partial Z} \frac{\partial \tilde{\psi}}{\partial Z} \right] d\Omega,$$

где $\omega^2 = \lambda N^2$.

Вычислим производные ψ_n :

$$\frac{\partial \psi_n}{\partial Y} = C_n \left(\frac{\partial \phi}{\partial Y} \sin(n\xi) + n\mu \phi \cos(n\xi) \right), \quad \frac{\partial \psi_n}{\partial Z} = C_n \left(\frac{\partial \phi}{\partial Z} \sin(n\xi) + n\phi \cos(n\xi) \right).$$

Подставим их в билинейную форму. Сгруппируем слагаемые, содержащие старший порядок n (то есть члены с $\cos(n\xi)$). Вклад этих слагаемых равен

$$nC_n \int_{\Omega} \phi \cos(n\xi) \left[(N^2 - \omega^2) \mu \frac{\partial \eta}{\partial Y} - \omega^2 \frac{\partial \eta}{\partial Z} \right] d\Omega.$$

Однако, по определению характеристического направления $\mu^2 = \omega^2/(N^2 - \omega^2)$, слагаемые с n^2 (если бы мы брали вторую производную в сильной форме) взаимно уничтожаются. В слабой форме произведение $nC_n = O(1)$. Оставшийся интеграл содержит быстроосциллирующий множитель $\cos(n\xi)$, умноженный на фиксированные L_2 -интегрируемые функции. По лемме Римана—Лебега этот интеграл стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$.

Все остальные слагаемые билинейной формы пропорциональны $\sin(n\xi)$ и содержат коэффициент $C_n = O(1/n)$. Они тривиально стремятся к нулю как $O(1/n)$. Следовательно, супремум слабой невязки по всем нормированным $\vec{v}$ стремится к нулю. Второе условие Вейля выполнено.

2.4. Проверка отсутствия сильно сходящихся подпоследовательностей.

Построенная последовательность функций тока ψ_n и соответствующее поле скоростей $\vec{u}_n$ осциллируют с частотой n , стремящейся к бесконечности. В силу всё той же леммы Римана—Лебега, интеграл от скалярного произведения $\vec{u}_n$ с любой фиксированной функцией из $\mathbf{J}_0$ стремится к нулю, что означает слабую сходимость: $\vec{u}_n \rightharpoonup 0$.

Если бы существовала сильно сходящаяся подпоследовательность $\{\vec{u}_{n_k}\}$, то её предел должен был бы совпадать со слабым пределом, то есть равняться нулю. Однако $\|\vec{u}_{n_k}\|_{\mathbf{J}_0} = 1$ для всех k , что противоречит сильной сходимости к нулю. Следовательно, последовательность $\{\vec{u}_n\}$ не содержит сильно сходящихся подпоследовательностей, и третье условие критерия Вейля выполнено.

Все три условия критерия Вейля доказаны, любое значение $\lambda \in [0, \sin^2 \theta] \cup [\cos^2 \theta, 1]$ принадлежит существенному спектру оператора плавучести B_0 . Теорема доказана. $\square$

Теорема 2.2. *Точечный спектр может существовать тогда и только тогда, когда $\theta < \vartheta < 90^\circ - \theta$.*

Доказательство. В данном диапазоне характеристика достаточно крутая, чтобы преодолеть наклон дна, но достаточно пологая, чтобы отразиться от боковых стенок. Луч последовательно обходит все четыре границы сосуда. Поскольку верхняя стенка параллельна нижней, а левая — правой, геометрические преобразования характеристики взаимно компенсируются. В этом случае характеристика либо свободно проходит через всю область жидкости, либо образует замкнутый контур за счёт конечного числа отражений. Если дальнейшая судьба характеристики за один цикл отражений иррационально связана с геометрическим соотношением сторон $L \times H$, траектория характеристик луча является *эргодической*. В этом «неэффективном» режиме луч никогда не замыкается на себя, а его траектория всюду плотно заполняет прямоугольную область. Для того чтобы макроскопическое поле скоростей оставалось непрерывным и гладким, амплитуда волны, отвечающая такой характеристике неизбежно должна стремиться к нулю ($\psi \equiv 0$). Таким образом, эргодические траектории формируют лишь непрерывный спектр оператора. $\square$

Рациональный резонанс — это топологическое и геометрическое условие в теории динамических систем, при котором наклон характеристик относительно границ области соизмерим с её геометрическим соотношением через рациональный множитель. В задаче о колебаниях стратифицированной (или вращающейся) жидкости в ограниченных ёмкостях условие рационального резонанса означает, что характеристика гиперболического уравнения, многократно отражаясь от границ сосуда, за конечное число шагов формирует замкнутую периодическую орбиту, а не блуждает (эргодически) по всему объёму сосуда.

Теорема 2.3. *Точечный спектр (стоячие волны) существует тогда и только тогда, когда выполняется геометрическое условие рационального резонанса: $\operatorname{tg}(\vartheta \pm \theta) = \frac{mH}{nL}$, $m, n \in \mathbb{Z}^+$.*

В случае иррационального отношения траектории лучей эргодичны, и спектр оператора является чисто непрерывным.

Доказательство.

1. Доказательство необходимости условия рационального резонанса.

Рассмотрим движение волнового луча непосредственно внутри прямоугольного контейнера $L \times H$. В локальной системе координат (y, z) , связанной с границами сосуда, движение луча при отражении обладает свойством независимости: отражение от боковых стенок ($y = 0, L$) меняет только y -компоненту направления луча, а отражение от дна и крышки ($z = 0, H$) — только z -компоненту.

Обозначим локальный угол наклона луча относительно дна сосуда как α_{local} . Из геометрии задачи следует, что этот угол связан с абсолютным углом наклона характеристики ϑ и углом наклона сосуда θ как $\alpha_{local} = \vartheta \pm \theta$ (знак зависит от того, какое из двух семейств характеристик мы рассматриваем). Локальный угловой коэффициент луча внутри сосуда равен $k = |dz/dy| = \operatorname{tg}(\vartheta \pm \theta)$. Для того чтобы луч сформировал замкнутую периодическую орбиту (что является необходимым условием существования гладкой стоячей волны точечного спектра), он должен вернуться в исходную точку с тем же самым направлением распространения. Это означает, что за определённый

интервал времени луч должен совершить ровно n полных циклов отражений вдоль оси y (пройдя общее расстояние $2nL$) и одновременно ровно m полных циклов вдоль оси z (пройдя общее расстояние $2mH$). Следовательно, наклон траектории луча $|dz/dy|$ обязан равняться отношению пройденных расстояний:

$$|k| = \frac{\Delta z}{\Delta y} = \frac{2mH}{2nL} = \frac{mH}{nL}.$$

2. Доказательство достаточности условия рационального резонанса.

Покажем, что при выполнении условия рационального резонанса существует нетривиальное решение $\psi(Y, Z) \in W_2^1(\Omega)$ (пространство Соболева, соответствующее конечной энергии), удовлетворяющее уравнению (2.1) и граничному условию Дирихле $\psi|_{\Sigma} = 0$.

2.1. Переход к локальной системе координат сосуда.

В введённой в формуле (2.2) системе границы сосуда задаются условиями $y = 0$, $y = L$, $z = 0$, $z = H$, а граничное условие Дирихле записывается как $\psi|_{y=0} = \psi|_{y=L} = \psi|_{z=0} = \psi|_{z=H} = 0$. Условие рационального резонанса в локальных координатах принимает вид $\operatorname{tg}(\alpha_{local_{nm}}) = \frac{mH}{nL}$, где $\alpha_{local_{nm}} = (\vartheta \pm \theta)_{nm}$ — локальный угол наклона луча относительно стенки сосуда.

2.2. Конструкция явного решения.

Общее решение уравнения (2.1) в характеристических координатах имеет вид $\psi = F(\xi) + G(\eta)$, где $\xi = \mu Y + Z$, $\eta = \mu Y - Z$. Подставляя преобразование координат, получаем:

$$\begin{aligned}\xi &= y(\mu \cos \theta - \sin \theta) + z(\mu \sin \theta + \cos \theta), \\ \eta &= y(\mu \cos \theta + \sin \theta) + z(\mu \sin \theta - \cos \theta).\end{aligned}$$

Из условия рационального резонанса $\operatorname{tg}(\alpha_{local}) = mH/(nL)$ следует, что:

$$\begin{aligned}\mu \cos \theta - \sin \theta &= \frac{mH}{nL}(\mu \sin \theta + \cos \theta) = k_{\xi} \cdot \frac{m}{L}, \\ \mu \cos \theta + \sin \theta &= \frac{nH}{mL}(-\mu \sin \theta + \cos \theta) = k_{\eta} \cdot \frac{n}{L}.\end{aligned}$$

для некоторых констант $k_{\xi}, k_{\eta} > 0$. Следовательно, характеристические координаты можно записать как $\xi_{nm} = k_{\xi} \left(\frac{my}{L} + \frac{nz}{H} \right)$, $\eta_{nm} = k_{\eta} \left(\frac{ny}{L} - \frac{mz}{H} \right)$.

Выбираем функции F и G в виде синусоидальных функций, удовлетворяющих граничным условиям $F(\xi_{nm}) = A_{nm} \sin \left(\frac{\pi \xi_{nm}}{k_{\xi}} \right)$, $G(\eta_{nm}) = -A_{nm} \sin \left(\frac{\pi \eta_{nm}}{k_{\eta}} \right)$, где $A \neq 0$ — амплитуда волны. Тогда полное решение для функции тока имеет вид:

$$\psi(y, z) = \sum_{n,m=1}^{\infty} A_{nm} \left[\sin \left(\pi \left(\frac{my}{L} + \frac{nz}{H} \right) \right) - \sin \left(\pi \left(\frac{ny}{L} - \frac{mz}{H} \right) \right) \right]. \quad (2.3)$$

3. Проверка выполнения всех условий.

3.1. Уравнение движения.

Подставляя (2.3) в уравнение (2.1), убеждаемся, что оно удовлетворяется тождественно, поскольку построено на основе характеристических координат.

3.2. Граничное условие Дирихле.

- При $y = 0$: $\psi_{nm}(0, z) = A_{nm} \left[\sin \left(\frac{\pi nz}{H} \right) - \sin \left(-\frac{\pi mz}{H} \right) \right] = 0$ при $z = 0$ и $z = H$;
- при $y = L$: $\psi_{nm}(L, z) = A_{nm} \left[\sin \left(\pi m + \frac{\pi nz}{H} \right) - \sin \left(\pi n - \frac{\pi mz}{H} \right) \right] = 0$ для целых m, n ;
- при $z = 0$ и $z = H$: аналогично проверяется, что $\psi = 0$ на всей границе.

3.3. Квадратичная интегрируемость.

Функция $\psi(y, z)$ является непрерывной и гладкой на замкнутой области Ω , следовательно, её градиент принадлежит $L_2(\Omega)$, а энергия конечна. Таким образом, при выполнении условия рационального резонанса существует нетривиальное решение задачи, соответствующее точечному спектру оператора B_0 . Условие является не только необходимым, но и достаточным. Из определения параметра $\mu = \sqrt{\lambda/(1-\lambda)}$ и условия рационального резонанса получаем формулу для

собственных частот точечного спектра:

$$\lambda_{nm} = \sin^2 \left[\arctg \left(\frac{mH}{nL} \right) \mp \theta \right], \quad m, n \in \mathbb{Z}^+. \quad (2.4)$$

Если соотношение $\operatorname{tg}(\vartheta \pm \theta)_{nm} = \frac{mH}{nL}$ является иррациональным числом, фазы колебаний по осям y и z никогда не совпадут повторно. Траектория луча никогда не замкнётся и будет всюду плотно (эргодически) заполнять пространство прямоугольника. Для такой эргодической орбиты гладкое макроскопическое поле скоростей невозможно ($\psi \equiv 0$), что соответствует непрерывному спектру. $\square$

3. УРАВНЕНИЕ В ПОВЁРНУТОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ С ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ

3.1. Предельный случай скольжения и критические точки фазового перехода. Чтобы аналитически уловить эти критические состояния фазового перехода, вернёмся к характеристическим координатам ξ и η в системе координат, жёстко связанной с наклонным контейнером. Предположим существование вырожденного физического режима, при котором одна из характеристик идеально параллельна физической границе сосуда Σ . Физически это соответствует «режиму скольжения», когда волновая энергия распространяется касательно к твёрдой стенке, не испытывая регулярного отражения.

Математически данное условие скольжения можно искусственно наложить в виде вырождения краевой задачи:

$$\eta|_{\Sigma} = 0 \quad \text{или} \quad \xi|_{\Sigma} = 0. \quad (3.1)$$

Рассмотрим два возможных случая параллельности характеристик границам сосуда:

1. Скольжение вдоль дна или крышки.

В абсолютной системе координат это означает, что абсолютный угол наклона характеристики ϑ в точности равен углу наклона сосуда θ . Тогда $\vartheta = \theta$, откуда следует $\mu = \operatorname{tg} \theta$. Используя определение характеристического параметра $\mu = \sqrt{\frac{\lambda}{1-\lambda}}$, немедленно получаем первую критическую частоту:

$$\frac{\lambda}{1-\lambda} = \operatorname{tg}^2 \theta \implies \lambda_1 = \sin^2 \theta. \quad (3.2)$$

2. Скольжение вдоль боковых стенок.

В данном случае характеристика параллельна боковым стенкам сосуда, которые наклонены под углом $90^\circ - \theta$ к горизонтали. Следовательно, $\vartheta = 90^\circ - \theta$, откуда $\mu = \operatorname{tg}(90^\circ - \theta) = \operatorname{ctg} \theta$. Подставляя это значение, получаем вторую критическую частоту:

$$\frac{\lambda}{1-\lambda} = \operatorname{ctg}^2 \theta \implies \lambda_2 = \cos^2 \theta. \quad (3.3)$$

Физическая интерпретация. Получены через локальное условие скольжения (3.1) критические частоты $\lambda_1 = \sin^2 \theta$ и $\lambda_2 = \cos^2 \theta$. Как только частота колебаний переходит через эти пределы скольжения (лучи становятся либо слишком пологими $\lambda < \sin^2 \theta$, либо слишком крутыми $\lambda > \cos^2 \theta$). Внутри же интервала $(\sin^2 \theta, \cos^2 \theta)$ лучи «отрываются» от стенок, делая возможным резонансное формирование стоячих волн.

Наличие двух знаков ($\mp$) в формуле (2.4) указывает на существование двух математических ветвей дисперсионного соотношения. Однако не каждое из этих значений порождает физически реализуемую стоячую волну. Условия существования точечных мод регламентируются следующей теоремой.

Теорема 3.1. Пусть $\alpha_0 = \arctg \left(\frac{mH}{nL} \right) \in (0, 90^\circ)$ — локальный угол.

1. Если $2\theta < \alpha_0 < 90^\circ - 2\theta$ (что возможно при $\theta < 22,5^\circ$), обе математические ветви формируют регулярные стоячие волны.
2. Если $\alpha_0 < \min(2\theta, 90^\circ - 2\theta)$ или $\alpha_0 > \max(2\theta, 90^\circ - 2\theta)$, ровно одна из ветвей является физически реализуемой, а вторая вырождается в непрерывный спектр.

3. Если $90^\circ - 2\theta < \alpha_0 < 2\theta$ (что возможно только при $\theta > 22,5^\circ$), обе ветви выпадают из зоны точечного спектра и неизбежно коллапсируют в точечные аттракторы.

Доказательство. В абсолютной системе координат углы наклона характеристик для двух ветвей равны $\vartheta_1 = \alpha_0 + \theta$ и $\vartheta_2 = |\alpha_0 - \theta|$. Согласно теореме 2.2, точечный спектр существует тогда и только тогда, когда абсолютный угол попадает в интервал $\theta < \vartheta < 90^\circ - \theta$.

Рассмотрим первую ветвь $\vartheta_1 = \alpha_0 + \theta$. Поскольку по определению $\alpha_0 > 0$, левое неравенство $\vartheta_1 > \theta$ выполняется тривиально. Правое неравенство требует $\alpha_0 + \theta < 90^\circ - \theta$, откуда следует условие реализуемости первой ветви: $\alpha_0 < 90^\circ - 2\theta$. Рассмотрим вторую ветвь $\vartheta_2 = |\alpha_0 - \theta|$. Если

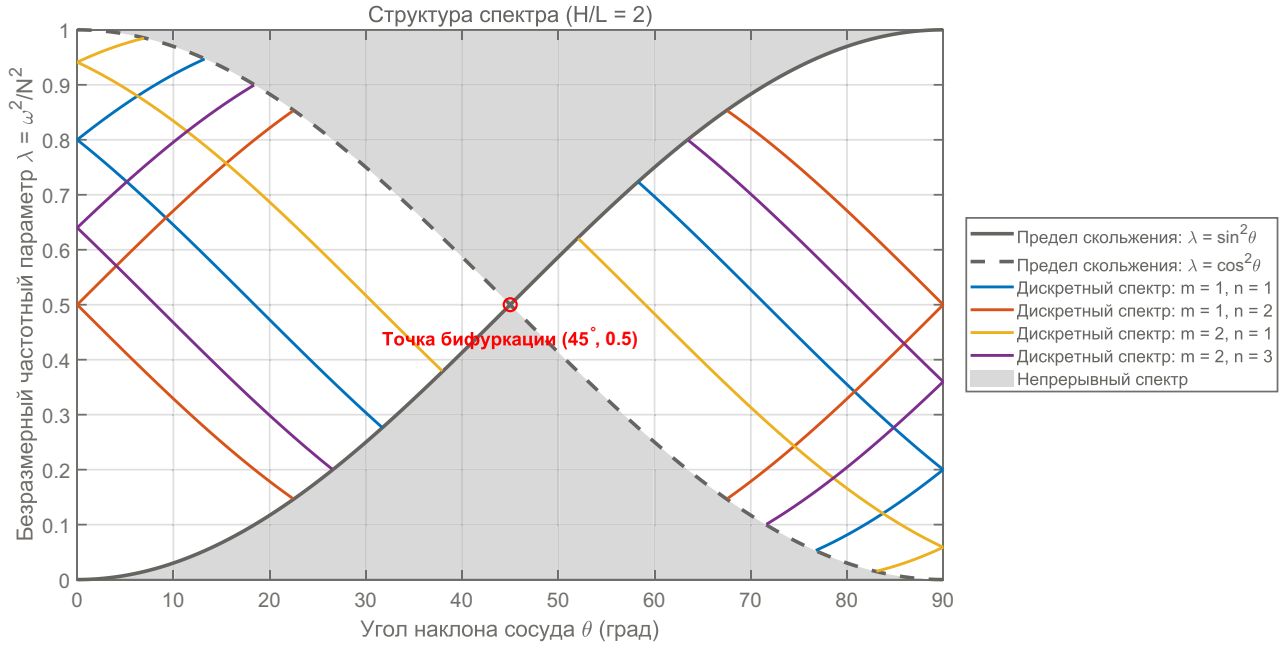


РИС. 2. Диаграмма бифуркации структуры спектра при рациональном соотношении $\frac{mH}{nL}$

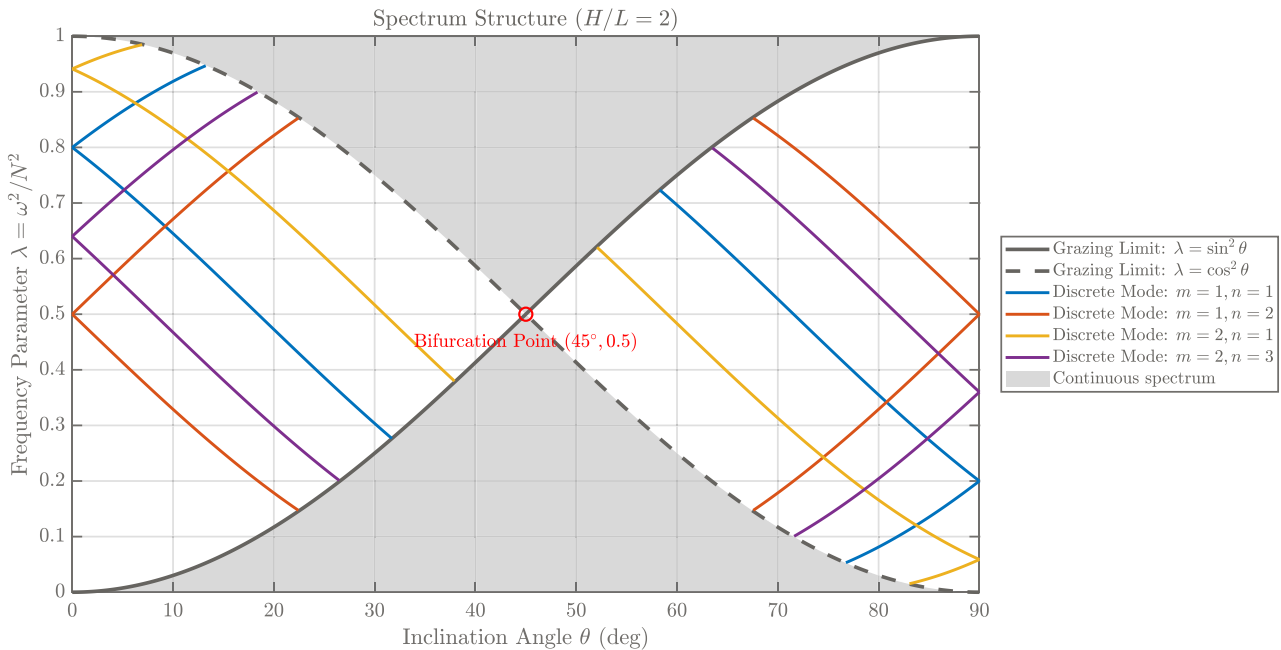


FIG. 2. Bifurcation diagram of the spectrum structure for a rational ratio $\frac{mH}{nL}$

$\alpha_0 \leq \theta$, то $\vartheta_2 = \theta - \alpha_0 < \theta$, что сразу исключает этот корень. Если $\alpha_0 > \theta$, то левое неравенство теоремы 2.1 принимает вид $\alpha_0 - \theta > \theta$, откуда следует $\alpha_0 > 2\theta$. Правое неравенство $\alpha_0 - \theta < 90^\circ - \theta$ сводится к $\alpha_0 < 90^\circ$, что выполняется всегда. Следовательно, вторая ветвь реализуема тогда и только тогда, когда $\alpha_0 > 2\theta$.

Объединяем полученные условия:

1. Область совместной реализуемости (обе ветви — стоячие волны) определяется системой неравенств $2\theta < \alpha_0 < 90^\circ - 2\theta$. Это множество непусто только при $4\theta < 90^\circ$, то есть $\theta < 22,5^\circ$.
2. Область полного вырождения (обе ветви — аттракторы) возникает, когда $\alpha_0 \geq 90^\circ - 2\theta$ и одновременно $\alpha_0 \leq 2\theta$. Эта система имеет решения только при $\theta \geq 22,5^\circ$.
3. В остальных случаях непересекающихся диапазонов реализуется ровно одна физическая ветвь.

Таким образом, алгебраическая формула (2.4) даёт лишь потенциальные решения, которые выступают кандидатами на роль собственных частот и должны быть дополнительно отфильтрованы геометрией сосуда. $\square$

Дополнение к теореме 3.1. Условия реализуемости мод при углах наклона $\theta > 45^\circ$. При $\theta > 45^\circ$ углы наклона перпендикулярных пар стенок меняются местами по величине: угол наклона боковых стенок $90^\circ - \theta$ становится меньше угла наклона дна и крышки θ . При этом интервал возможного существования точечного спектра меняется на $90^\circ - \theta < \vartheta < \theta$, а все сформулированные в теореме 2.3 условия физической реализуемости ветвей спектра сохраняют силу при замене θ на минимальный из углов наклона стенок $\alpha_{\min} = \min(\theta, 90^\circ - \theta)$. Дополнительно, при $\theta > 67,5^\circ$, обе математические ветви тоже формируют регулярные стоячие волны.

3.2. Проверка предельных случаев и асимптотическое поведение точечного спектра. Для подтверждения корректности полученной формулы для собственных частот точечного спектра (2.4) проведём анализ классических предельных случаев при $\theta = 0^\circ$ и $\theta = 90^\circ$, а также исследуем асимптотическое поведение решений при высоких модовых числах $m, n \rightarrow \infty$. Все выводы основаны на тригонометрических тождествах и физических интерпретациях, соответствующих постановке задачи.

3.2.1. Проверка классического предела при $\theta = 0^\circ$ (вертикально расположенный сосуд). При нулевом угле наклона сосуд расположен вертикально, что соответствует классической постановке задачи о колебаниях стратифицированной жидкости в прямоугольной полости.

$$\lambda_{m,n}|_{\theta=0^\circ} = \sin^2 \left[\arctg \left(\frac{mH}{nL} \right) \mp 0^\circ \right] = \sin^2 \left[\arctg \left(\frac{mH}{nL} \right) \right] = \frac{m^2 H^2}{n^2 L^2 + m^2 H^2} = \frac{\frac{m^2}{L^2}}{\frac{n^2}{H^2} + \frac{m^2}{L^2}}. \quad (3.4)$$

Физическое обоснование соответствия модовых чисел. Полученное выражение необходимо сопоставить с классическим точным решением задачи, полученным методом разделения переменных для горизонтального сосуда шириной L и высотой H :

$$\lambda_{\text{analytic}} = \frac{n^2 H^2}{n^2 H^2 + m^2 L^2} = \frac{\frac{n^2}{L^2}}{\frac{n^2}{L^2} + \frac{m^2}{H^2}}, \quad (3.5)$$

где n — число полуволен вдоль горизонтальной оси, m — число полуволен вдоль вертикальной оси.

Легко заметить, что формула (3.4) полностью совпадает с классическим решением (3.5) при условии переобозначения индексов: $m \leftrightarrow n$. Различие в форме выражений обусловлено фундаментальным свойством внутренних гравитационных волн — *ортогональностью групповой и фазовой скоростей*. Однако классическое аналитическое решение строится на основе волнового вектора $\vec{k}$ (фазовой скорости), который перпендикулярен лучу. Из-за такой ортогональности проекции волнового вектора на координатные оси обратно пропорциональны проекциям групповой скорости. Следовательно, классическое волновое число по горизонтали физически определяется числом вертикальных отражений луча, и наоборот. Именно этот эффект «перекрестной» связи между геометрией луча и волновым фронтом математически выражается во взаимной замене индексов m и n при $\theta = 0^\circ$.

3.2.2. *Анализ предельного случая при $\theta = 90^\circ$ (горизонтальный сосуд).* При угле наклона $\theta = 90^\circ$ прямоугольный сосуд поворачивается на бок: его первоначальная высота H становится горизонтальной шириной, а длина L — вертикальной высотой.

Классическое аналитическое решение для такого повернутого сосуда (шириной H и высотой L) принимает вид:

$$\lambda_{\text{analytic}}|_{\theta=90^\circ} = \frac{\frac{n^2}{H^2}}{\frac{n^2}{H^2} + \frac{m^2}{L^2}} = \frac{n^2 L^2}{n^2 L^2 + m^2 H^2} = \frac{\frac{n^2}{H^2}}{\frac{n^2}{H^2} + \frac{m^2}{L^2}}, \quad (3.6)$$

где n — число полуволин вдоль новой горизонтали (вдоль H), а m — число полуволин вдоль новой вертикали (вдоль L).

Проверим, какой результат даёт наша обобщённая формула (2.4) при подстановке $\theta = 90^\circ$. Используя формулу приведения $\sin(\alpha - 90^\circ) = -\cos(\alpha)$, получаем:

$$\lambda_{m,n}|_{\theta=90^\circ} = \sin^2 \left[\arctg \left(\frac{mH}{nL} \right) - 90^\circ \right] = \cos^2 \left[\arctg \left(\frac{mH}{nL} \right) \right] = \frac{n^2 L^2}{n^2 L^2 + m^2 H^2} = \frac{\frac{n^2}{H^2}}{\frac{n^2}{H^2} + \frac{m^2}{L^2}}. \quad (3.7)$$

Формулы (3.6) и (3.7) совпадают абсолютно тождественно, без необходимости менять индексы m и n местами. Это поразительное свойство имеет изящное физико-математическое объяснение, состоящее из двух одновременных преобразований:

1. Геометрический поворот. В нашей лучевой модели индекс m жёстко привязан к стенке H , а n — к стенке L . При повороте сосуда на 90° стенка H ложится горизонтально. Значит, теперь m описывает число отражений луча по горизонтали, а n — по вертикали. Учитывая ортогональность фазовой и групповой скоростей (описанную выше), классическое горизонтальное волновое число должно соответствовать числу вертикальных отражений луча (то есть n), а вертикальное волновое число — числу горизонтальных отражений (то есть m). Таким образом, физический поворот сосуда приводит индексы в естественное соответствие с их классическими аналогами.
2. Математический триггер. Математически этот физический поворот безупречно обрабатывается самой формулой. Подстановка $\theta = 90^\circ$ вызывает смену тригонометрической функции с $\sin^2$ на $\cos^2$, что алгебраически «переворачивает» дробь.

3.2.3. *Асимптотическое поведение спектра: сгущение мод к пределам скольжения.* Представляет интерес исследование асимптотического поведения полученной формулы (2.4) при стремлении модовых чисел m или n к бесконечности. Этот анализ позволяет связать свойства точечного спектра с границами непрерывного спектра, полученными ранее кинематическим методом.

Рассмотрим локальный резонансный угол луча внутри сосуда $\alpha_0 = \arctg \left(\frac{mH}{nL} \right)$.

Случай 1: $n \rightarrow \infty$ при фиксированном m (короткие волны вдоль длины L). В этом пределе локальный угол стремится к нулю: $\alpha_0 \rightarrow 0^\circ$. Геометрически это означает, что характеристические лучи становятся практически параллельными дну и крышке сосуда. Вычислим предел собственной частоты: $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{m,n} = \sin^2(0^\circ \mp \theta) = \sin^2(-\theta) = \sin^2 \theta$.

Полученный предел в точности совпадает со второй критической частотой $\lambda_1 = \sin^2 \theta$ (см. формулу (3.2)), которая соответствует режиму скольжения вдоль продольных стенок. Макроскопически это означает, что волна совершает бесконечное число отражений между боковыми стенками, её траектория вырождается в прямую линию, «прилипающую» к дну или крышке, а само волновое поле становится одномерным.

Случай 2: $m \rightarrow \infty$ при фиксированном n (короткие волны вдоль высоты H). В данном пределе аргумент арктангенса стремится к бесконечности, следовательно, $\alpha_0 \rightarrow 90^\circ$. Характеристики начинают переотражаться между дном и крышкой, вытягиваясь параллельно боковым стенкам сосуда. Асимптотика частоты даёт: $\lim_{m \rightarrow \infty} \lambda_{m,n} = \sin^2(90^\circ \mp \theta) = \cos^2 \theta$.

Этот результат идеально совпадает с первой критической частотой $\lambda_2 = \cos^2 \theta$ (формула (3.3)), соответствующей режиму скольжения лучей вдоль боковых стенок.

Спектральный смысл полученных асимптотик. Выявленное совпадение асимптотических пределов точечных частот с границами непрерывного спектра имеет фундаментальное значение.

Согласно теореме Вейля о существенном спектре, точки сгущения собственных значений всегда принадлежат непрерывному спектру. Наш анализ доказывает этот факт для внутренних волн: при бесконечном дроблении пространственного масштаба волны вдоль одной из осей геометрический резонанс разрушается, вырождаясь в скольжение. Таким образом, точечные моды бесконечно плотно сгущаются к границам интервала $(\sin^2 \theta, \cos^2 \theta)$, тем самым очерчивая «берега» непрерывного спектра, за которыми стоячие волны существовать не могут.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе проведено всестороннее исследование спектральных свойств оператора внутренних волн в неклассической постановке — для идеальной стратифицированной жидкости, находящейся в наклонном прямоугольном сосуде. Переход от классических постановок (где граница параллельна градиенту плотности) к геометриям с нарушенной симметрией потребовал привлечения не только функционально-операторных методов, но и глубокого анализа характеристических многообразий уравнений гиперболического типа.

Основным итогом работы является доказательство того факта, что угол наклона сосуда θ выступает в роли управляющего бифуркационного параметра, качественно меняющего топологию спектра. Выявлены границы фазовых переходов (пределы скольжения $\lambda = \sin^2 \theta$ и $\lambda = \cos^2 \theta$), которые делят спектральный интервал $[0, 1]$ на зоны сплошного и точечного спектра. За этими границами происходит сингулярный рост градиентов скорости и неизбежное разрушение гладких стоячих волн, что математически соответствует возникновению непрерывного спектра.

Показано, что регулярные стоячие волны формируются исключительно при выполнении условий рационального резонанса, когда характеристики образуют инвариантные торы (семейства замкнутых периодических орбит).

Полученные результаты имеют прямое прикладное значение. В частности, они могут быть использованы при проектировании криогенных топливных баков космических аппаратов и анализе волновой динамики в океанологических впадинах со сложным рельефом дна [3, 31, 40], где эффекты несовпадения осей симметрии с вектором силы тяжести играют определяющую роль.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Александрян Р. А.* К вопросу о зависимости качественных свойств решений некоторых смешанных задач от вида области // Дисс. к.ф.-м.н. — М.: МГУ, 1949.
2. *Александрян Р. А.* Спектральные свойства операторов, порождаемых системами дифференциальных уравнений типа С. Л. Соболева // Тр. Моск. мат. об-ва. — 1960. — 9. — С. 455–505.
3. *Булатов В. В., Владимиров Ю. В.* Внутренние гравитационные волны в неоднородных средах. — М.: Наука, 2005.
4. *Булатов В. В., Владимиров Ю. В.* Волновая динамика стратифицированных сред переменной глубины // Вестн. МГТУ им. Н. Э. Баумана. Сер. Естеств. науки. — 2015. — № 3. — С. 58–76. — DOI: [10.18698/1812-3368-2015-3-58-76](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2015-3-58-76).
5. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Задачи динамики стратифицированных жидкостей. — М.: Наука, 1986.
6. *Гончаров В. П.* Гамильтонов формализм в теории волн в нелинейных диспергирующих и стратифицированных средах // Дисс. д.ф.-м.н. — М.: ИФА РАН, 1993.
7. *Григорьев Ю. Н.* Аналитические и численные методы решения краевых задач для некоторых классов уравнений математической физики // Дисс. д.ф.-м.н. — Новосибирск, 1990.
8. *Зеленяк Т. И.* Избранные вопросы качественной теории уравнений с частными производными. — Новосибирск: НГУ, 1970.
9. *Зорич В. А.* Математический анализ. Ч. II. — М.: Наука, 1984.
10. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.
11. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуи Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
12. *Копачевский Н. Д., Темнов А. Н.* Свободные колебания идеальной стратифицированной жидкости в сосуде // Ж. выч. мат. и мат. физ. — 1984. — 24, № 1. — С. 109–123.
13. *Копачевский Н. Д., Темнов А. Н., Царьков М. Ю.* Спектральные проблемы теории колебаний идеальной неоднородной несжимаемой жидкости // В сб.: «Тезисы докл. XII школы по теории операторов в функциональных пространствах. Ч. I». — Тамбов, 1987. — С. 103.

14. *Копачевский Н. Д., Царьков М. Ю.* К вопросу о спектре оператора плавучести // Ж. выч. мат. и мат. физ. — 1987. — 27, № 3. — С. 463–466.
15. *Краусс В.* Внутренние волны: методы и результаты теоретической океанографии. — Л.: Гидрометеопиздат, 1968.
16. *Ладыженская О. А.* Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. — М.: Наука, 1970.
17. *Ляшенко А. А.* О не почти периодичности решений уравнения С. Л. Соболева // Докл. АН СССР. — 1984. — 278, № 4. — С. 803–806.
18. *Сибгатуллин И. Н., Ерманык Е. В.* Аттракторы внутренних и инерционных волн (обзор) // Прикл. мех. и техн. физ. — 2019. — 60, № 2. — С. 113–136. — DOI: [10.15372/PMTF20190210](https://doi.org/10.15372/PMTF20190210).
19. *Темнов А. Н.* О спектре малых колебаний непрерывно стратифицированной жидкости // В сб.: «Нелинейные проблемы аэрогидроупругости: Труды семинара. Вып. 11». — Казань, 1979. — С. 183–193.
20. *Темнов А. Н.* Колебания стратифицированной жидкости в ограниченном объёме // Дисс. к.ф.-м.н. — Москва, 1984.
21. *Троицкая С. Д.* О краевых задачах для уравнений, описывающих колебания вращающейся жидкости // Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1956. — 20, № 1. — С. 27–60.
22. *Фокин М. В.* О характере спектра одного оператора // Динам. сплош. среды. — 1973. — № 15. — С. 170–174.
23. *Фокин М. В.* Существование сингулярного спектра и асимптотика решений задачи Соболева // Тр. Ин-та мат. СО РАН. — 1994. — 26. — С. 107–195.
24. *Цветков Д. О.* Колебания идеальной стратифицированной жидкости с упругой мембраной // Динам. сист. — 2019. — 9. — С. 26–45.
25. *Цветков Д. О.* Начально-краевая задача для уравнений динамики вращающейся вязкой стратифицированной жидкости // Вестн. Удмурт. ун-та. Мат. Мех. Комп. науки. — 2023. — 33, № 4. — С. 625–641. — DOI: [10.35634/vm230406](https://doi.org/10.35634/vm230406).
26. *Bourgain D. G.* The Dirichlet problem for the damped wave equation // Bull. Am. Math. Soc. — 1940. — 46. — С. 1018–1025. — DOI: [10.1215/S0012-7094-40-00706-2](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-40-00706-2).
27. *Bourgain D. G., Duffin R.* The Dirichlet problem for the vibrating string equation // Bull. Am. Math. Soc. — 1939. — 45. — С. 851–858. — DOI: [10.1090/S0002-9904-1939-07103-6](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1939-07103-6).
28. *Greenspan H. P.* The theory of rotating fluids. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1968.
29. *John F.* The Dirichlet problem for a hyperbolic equation // Am. J. Math. — 1941. — 63, № 1. — С. 141–154. — DOI: [10.2307/2371285](https://doi.org/10.2307/2371285).
30. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. — Berlin—Heidelberg: Springer, 1995. — DOI: [10.1007/978-3-642-66282-9](https://doi.org/10.1007/978-3-642-66282-9).
31. *Maas L. R. M., Lam F.-P. A.* Geometric focusing of internal waves // J. Fluid Mech. — 1995. — 300. — С. 1–41. — DOI: [10.1017/S0022112095003582](https://doi.org/10.1017/S0022112095003582).
32. *Maas L. R. M. и др.* Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid // Nature. — 1997. — 388. — С. 557–561. — DOI: [10.1038/41509](https://doi.org/10.1038/41509).
33. *Moser J.* Stable and random motions in dynamical systems: with special emphasis on celestial mechanics. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1973.
34. *Ralston J. V.* On stationary modes in inviscid rotating fluids // J. Math. Anal. Appl. — 1973. — 44, № 2. — С. 366–383. — DOI: [10.1016/0022-247X\(73\)90065-6](https://doi.org/10.1016/0022-247X(73)90065-6).
35. *Reed M., Simon B.* Methods of modern mathematical physics. Vol. I: Functional analysis. — San Diego: Academic Press, 1980.
36. *Rieutord M., Georgeot B., Valdettaro L.* Inertial waves in a rotating spherical shell: attractors and asymptotic spectrum // J. Fluid Mech. — 2001. — 435. — С. 103–144. — DOI: [10.1017/S0022112001003718](https://doi.org/10.1017/S0022112001003718).
37. *Sobolev S. L.* On motion of a symmetric top with a cavity filled with fluid // В сб.: «Selected Works of S. L. Sobolev». — Boston: Springer, 2006. — С. 333–382. — DOI: [10.1007/978-0-387-34149-1_10](https://doi.org/10.1007/978-0-387-34149-1_10).
38. *Sutherland B. R.* Internal gravity waves. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010. — DOI: [10.1017/CBO9780511780318](https://doi.org/10.1017/CBO9780511780318).
39. *Tabachnikov S.* Geometry and billiards. — Providence: Am. Math. Soc., 2005. — DOI: [10.1090/stml/030](https://doi.org/10.1090/stml/030).
40. *Yih C. S.* Stratified flows. — New York: Academic Press, 1980. — DOI: [10.1115/1.3153837](https://doi.org/10.1115/1.3153837).

Ю. Чжан

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия

E-mail: zhangyue_hit-bmstu@qq.com, ResearcherID: [GMW-8995-2022](https://orcid.org/0000-0003-3021-0060), Scopus: [57562234300](https://orcid.org/0000-0003-3021-0060),
ORCID: [0000-0003-3021-0060](https://orcid.org/0000-0003-3021-0060)

А. Н. Темнов

Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия

E-mail: ant45@mail.ru, РИНЦ SPIN-код: 4623-8867, РИНЦ AuthorID: [161087](#), Scopus: [6701486430](#)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-368-387](#)

EDN: [BZHLLF](#)

UDC 517.984

Research article

Spectral properties of the internal wave operator in nonclassical problems

Y. Zhang and A. N. Temnov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

Abstract. This study examines the small oscillations of an ideal stratified fluid within bounded domains. In classical formulations of these problems, the lateral boundaries of the container are typically assumed to align with the gravity vector $\vec{g}$ and the direction of density stratification. This research investigates non-classical cases where the container walls and the stratification direction form a specific angle. This geometric discrepancy results in a qualitative transformation of the internal wave spectrum. Analysis of a tilted rectangular vessel demonstrates that the angle between the domain boundary and the vector $\vec{g}$ significantly affects the spectral formation. Specifically, the spectrum of the small-oscillation operator is no longer purely discrete but includes regions of a continuous spectrum. Identifying the boundaries of the continuous spectrum is essential for the accurate resolution of non-homogeneous evolution problems. The tilt angle and the geometric parameters of the vessel determine both these boundaries and the transition points between the discrete and continuous spectra. The results indicate that the orientation of the cavity relative to the gravitational field is a primary factor determining the properties of internal waves in a bounded volume of stratified fluid.

Keywords: ideal stratified fluid, internal waves, non-classical boundary value problems, operator approach, spectral theory.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

Authors' contribution. *Temnov A. N.* — scientific supervision, conceptualization, approval of the final version of the article; *Zhang Yue* — writing the original text, visualization, editing the manuscript.

For citation: Y. Zhang, A. N. Temnov, “Spectral properties of the internal wave operator in nonclassical problems,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 2, 368–387. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-368-387](#) EDN: [BZHLLF](#)

REFERENCES

1. R. A. Aleksandryan “K voprosu o zavisimosti kachestvennykh svoystv resheniy nekotorykh smeshannykh zadach ot vida oblasti” [On the dependence of the qualitative properties of solutions of some mixed problems on the type of domain], *PhD Thesis*, MSU, Moscow, 1949.
2. R. A. Aleksandryan, “Spektral’nye svoystva operatorov, porozhdaemykh sistemami differentsial’nykh uravneniy tipa S. L. Soboleva” [Spectral properties of operators generated by systems of differential equations of the S. L. Sobolev type], *Tr. Mosk. Mat. Ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1960, **9**, 455–505 (in Russian).

3. V. V. Bulatov and Yu. V. Vladimirov, *Vnutrennie Gravitatsionnye Volny v Neodnorodnykh Sredakh* [Internal Gravity Waves in Nonhomogeneous Media], Nauka, Moscow, 2005 (in Russian).
4. V. V. Bulatov and Yu. V. Vladimirov, “Volnovaya dinamika stratifitsirovannykh sred peremennoy glubiny” [Wave dynamics of stratified media of variable depth], *Vestn. MGTU Im. N. E. Baumana. Ser. Estestv. Nauki* [Bull. Bauman Moscow State Tech. Univ. Ser. Nat. Sci.], 2015, No. 3, 58–76 (in Russian), DOI: [10.18698/1812-3368-2015-3-58-76](https://doi.org/10.18698/1812-3368-2015-3-58-76).
5. S. A. Gabov and A. G. Sveshnikov, *Zadachi Dinamiki Stratifitsirovannykh Zhidkostey* [Problems of Stratified Fluid Dynamics], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
6. V. P. Goncharov “Gamil’tonov formalizm v teorii voln v nelineynykh dispergiruyushchikh i stratifitsirovannykh sredakh” [Hamiltonian formalism in the theory of waves in nonlinear dispersive and stratified media], *Doctoral Thesis*, IFA RAN, Moscow, 1993.
7. Yu. N. Grigor’ev “Analiticheskie i chislennye metody resheniya kraevykh zadach dlya nekotorykh klassov uravneniy matematicheskoy fiziki” [Analytical and numerical methods for solving boundary-value problems for some classes of equations of mathematical physics], *Doctoral Thesis*, Novosibirsk, 1990.
8. T. I. Zelenyak, *Izbrannye Voprosy Kachestvennoy Teorii Uravneniy s Chastnymi Proizvodnymi* [Selected Topics in the Qualitative Theory of Partial Differential Equations], NGU, Novosibirsk, 1970 (in Russian).
9. V. A. Zorich, *Matematicheskiiy Analiz. Ch. II* [Mathematical Analysis. Vol. II], Nauka, Moscow, 1984 (in Russian).
10. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elementy Teorii Funktsiy i Funktsional’nogo Analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
11. N. D. Kopachevskii, S. G. Kreyn, and Ngo Zuy Kan, *Operatornye Metody v Lineynoy Gidrodinamike: Evolyutsionnye i Spektral’nye Zadachi* [Operator Methods in Linear Hydrodynamics: Evolution and Spectral Problems], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
12. N. D. Kopachevskii and A. N. Temnov, “Svobodnye kolebaniya ideal’noy stratifitsirovannoy zhidkosti v sosude” [Free oscillations of an ideal stratified fluid in a vessel], *Zh. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 1984, **24**, No. 1, 109–123 (in Russian).
13. N. D. Kopachevskii, A. N. Temnov, and M. Yu. Tsar’kov, “Spektral’nye problemy teorii kolebaniy ideal’noy neodnorodnoy neszhimaemoy zhidkosti” [Spectral problems of the theory of oscillations of an ideal nonhomogeneous incompressible fluid], In: *Tezisy Dokl. XII Shkoly po Teorii Operatorov v Funktsional’nykh Prostranstvakh. Ch. I* [Abstracts of XII-th School on Operator Theory in Functional Spaces. Vol. I], Tambov, 1987, p. 103 (in Russian).
14. N. D. Kopachevskii and M. Yu. Tsar’kov, “K voprosu o spektre operatora plavuchesti” [On the spectrum of the buoyancy operator], *Zh. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 1987, **27**, No. 3, 463–466 (in Russian).
15. V. Krauss, *Vnutrennie Volny: Metody i Rezul’taty Teoreticheskoy Okeanografii* [Internal Waves: Methods and Results of Theoretical Oceanography], Gidrometeoizdat, Leningrad, 1968 (in Russian).
16. O. A. Ladyzhenskaya, *Matematicheskie Voprosy Dinamiki Vyazkoy Neszhimaemoy Zhidkosti* [Mathematical Issues of the Dynamics of Viscous Incompressible Fluid], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
17. A. A. Lyashenko, “O ne pochtii periodichnosti resheniy uravneniya S. L. Soboleva” [On the non-almost periodicity of solutions of the S. L. Sobolev equation], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1984, **278**, No. 4, 803–806 (in Russian).
18. I. N. Sibgatullin and E. V. Ermanyuk, “Attraktory vnutrennikh i inertsiionnykh voln (obzor)” [Attractors of internal and inertial waves: A review], *Prikl. Mekh. i Tekhn. Fiz.* [Appl. Mech. Tech. Phys.], 2019, **60**, No. 2, 113–136 (in Russian), DOI: [10.15372/PMTF20190210](https://doi.org/10.15372/PMTF20190210).
19. A. N. Temnov, “O spektre malykh kolebaniy nepreryvno stratifitsirovannoy zhidkosti” [On the spectrum of small oscillations of a continuously stratified fluid], In: *Nelineynye Problemy Aerogidrouprugosti: Tr. sem. Vyp. 11* [Nonlinear Problems of Aeroelasticity: Seminar Proc. Iss. 11], Kazan’, 1979, pp. 183–193 (in Russian).
20. A. N. Temnov “Kolebaniya stratifitsirovannoy zhidkosti v ogranichenom ob’eme” [Oscillations of a stratified fluid in a limited volume], *PhD Thesis*, Moskva, 1984.
21. S. D. Troitskaya, “O kraevykh zadachakh dlya uravneniy, opisyyayushchikh kolebaniya vrashchayushchey zhidkosti” [O boundary value problems for equations describing oscillations of a rotating fluid], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1956, **20**, No. 1, 27–60 (in Russian).
22. M. V. Fokin, “O kharaktere spektra odnogo operatora” [On the nature of the spectrum of one operator], *Dinam. Splosh. Sredy* [Dynam. Contin. Medium], 1973, No. 15, 170–174 (in Russian).

23. M. V. Fokin, “Sushchestvovanie singulyarnogo spektra i asimptotika resheniy zadachi Soboleva” [Existence of a singular spectrum and asymptotic behavior of solutions of the Sobolev problem], *Tr. In-ta Mat. SO RAN* [Proc. Math. Inst. Siberian Branch Russ. Acad. Sci.], 1994, **26**, 107–195 (in Russian).
24. D. O. Tsvetkov, “Kolebaniya ideal’noy stratifitsirovannoy zhidkosti s uprugoy membranoy” [Oscillations of an ideal stratified fluid with an elastic membrane], *Dinam. Sist.* [Dynam. Syst.], 2019, **9**, 26–45 (in Russian).
25. D. O. Tsvetkov, “Nachal’no-kraevaya zadacha dlya uravneniy dinamiki vrashchayushcheyasya vyazkoy stratifitsirovannoy zhidkosti” [Initial-boundary value problem for the equations of dynamics of a rotating viscous stratified fluid], *Vestn. Udmurt. Univ. Mat. Mekh. Komp. Nauki* [Bull. Udmurt. Univ. Math. Mech. Comp. Sci.], 2023, **33**, No. 4, 625–641 (in Russian), DOI: [10.35634/vm230406](https://doi.org/10.35634/vm230406).
26. D. G. Bourgin, “The Dirichlet problem for the damped wave equation,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1940, **46**, 1018–1025, DOI: [10.1215/S0012-7094-40-00706-2](https://doi.org/10.1215/S0012-7094-40-00706-2).
27. D. G. Bourgin and R. Duffin, “The Dirichlet problem for the vibrating string equation,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1939, **45**, 851–858, DOI: [10.1090/S0002-9904-1939-07103-6](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1939-07103-6).
28. H. P. Greenspan, *The Theory of Rotating Fluids*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1968.
29. F. John, “The Dirichlet problem for a hyperbolic equation,” *Am. J. Math.*, 1941, **63**, No. 1, 141–154, DOI: [10.2307/2371285](https://doi.org/10.2307/2371285).
30. T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, Berlin–Heidelberg, 1995, DOI: [10.1007/978-3-642-66282-9](https://doi.org/10.1007/978-3-642-66282-9).
31. L. R. M. Maas and F.-P. A. Lam, “Geometric focusing of internal waves,” *J. Fluid Mech.*, 1995, **300**, 1–41, DOI: [10.1017/S0022112095003582](https://doi.org/10.1017/S0022112095003582).
32. L. R. M. Maas et al., “Observation of an internal wave attractor in a confined, stably stratified fluid,” *Nature*, 1997, **388**, 557–561, DOI: [10.1038/41509](https://doi.org/10.1038/41509).
33. J. Moser, *Stable and Random Motions in Dynamical Systems: with Special Emphasis on Celestial Mechanics*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1973.
34. J. V. Ralston, “On stationary modes in inviscid rotating fluids,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1973, **44**, No. 2, 366–383, DOI: [10.1016/0022-247X\(73\)90065-6](https://doi.org/10.1016/0022-247X(73)90065-6).
35. M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. I: Functional Analysis*, Academic Press, San Diego, 1980.
36. M. Rieutord, B. Georgeot, and L. Valdettaro, “Inertial waves in a rotating spherical shell: attractors and asymptotic spectrum,” *J. Fluid Mech.*, 2001, **435**, 103–144, DOI: [10.1017/S0022112001003718](https://doi.org/10.1017/S0022112001003718).
37. S. L. Sobolev, “On motion of a symmetric top with a cavity filled with fluid,” In: *Selected Works of S. L. Sobolev*, Springer, Boston, 2006, pp. 333–382, DOI: [10.1007/978-0-387-34149-1_10](https://doi.org/10.1007/978-0-387-34149-1_10).
38. B. R. Sutherland, *Internal gravity waves*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2010, DOI: [10.1017/CBO9780511780318](https://doi.org/10.1017/CBO9780511780318).
39. S. Tabachnikov, *Geometry and billiards*, Am. Math. Soc., Providence, 2005, DOI: [10.1090/stml/030](https://doi.org/10.1090/stml/030).
40. C. S. Yih, *Stratified flows*, Academic Press, New York, 1980, DOI: [10.1115/1.3153837](https://doi.org/10.1115/1.3153837).

Y. Zhang

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

E-mail: zhangyue_hit-bmstu@qq.com, ResearcherID: [GMW-8995-2022](https://orcid.org/0000-0003-3021-0060), Scopus: [57562234300](https://orcid.org/0000-0003-3021-0060),
ORCID: [0000-0003-3021-0060](https://orcid.org/0000-0003-3021-0060)

A. N. Temnov

Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia

E-mail: antt45@mail.ru, eLIBRARY SPIN-code: 4623-8867, eLIBRARY AuthorID: [161087](https://orcid.org/0000-0003-3021-0060),
Scopus: [6701486430](https://orcid.org/0000-0003-3021-0060)

СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ И МОДЕЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ УНИТАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВАХ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

В. А. ШТРАУС

*Южно-Уральский государственный университет (Национальный исследовательский университет),
Челябинск, Россия*

Аннотация. Рассмотрен унитарный оператор, действующий в пространстве Крейна и обладающий инвариантным подпространством, которое является максимальным неотрицательным и распадается в прямую сумму равномерно положительного (т. е. эквивалентного гильбертову пространству по отношению к внутреннему псевдоскалярному произведению) и конечномерного нейтрального подпространств. Доказано существование для такого оператора спектральной функции с конечным числом спектральных особенностей и разностного выражения, преобразующего порождённую этим оператором бесконечную в обе стороны последовательность моментов в последовательность, представимую как разность позитивных последовательностей моментов. В частном случае циклического унитарного оператора в пространстве Понтрягина построено функциональное пространство, в котором исследуемый оператор моделируется как оператор умножения на экспоненту с мнимым аргументом.

Ключевые слова: унитарный оператор, пространство Крейна, пространство Понтрягина, инвариантное подпространство, спектральное разложение.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор глубоко признателен доценту Д. А. Закоре, по инициативе которого настоящая работа была написана. Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашение № 075-02-2025-1543.

Для цитирования: Штраус В. А. Спектральное разложение и модельное представление унитарных операторов в пространствах с индефинитной метрикой // Современная математика. Фундаментальные направления. 2026. Т. 72, № 2. С. 388–418. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-388-418](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-388-418) EDN: [CBFSCHM](https://www.edn.ru/CBFSCHM)

1. ВВЕДЕНИЕ

Как хорошо известно (см. [35, гл. 5, следствие 5.7]), унитарные операторы в пространствах Понтрягина являются обобщёнными спектральными операторами. В случае пространства Крейна тот же тип операторов такое свойство, вообще говоря, теряет. Вместе с тем для некоторых более узких классов унитарных операторов удаётся доказать их обобщённую спектральность и получить соответствующее спектральное разложение. Одному из таких классов посвящена настоящая работа. Кроме того, в ней сделана попытка построить модельное пространство для унитарных операторов в пространстве Понтрягина на базе регуляризованного интегрального представления соответствующей последовательности моментов.

2. НЕКОТОРЫЕ КЛЮЧЕВЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В наиболее общей постановке (см. [2, 6]) *пространство с индефинитной метрикой* определяется как (комплексное) линейное пространство $\mathcal{L}$ с заданной на нём эрмитовой полуторалинейной формой (внутренним эрмитовым произведением) $Q(x, y)$, причём такой, что соответствующая квадратичная форма $q(x) := Q(x, x)$ является знаконеопределённой (т. е. $Q(x, x)$ принимает положительные, отрицательные и нулевые значения). В случае конечномерного пространства $\mathcal{L}$ используется также (см. [22]) термин *псевдоунитарное пространство*.

В качестве промежуточных шагов нам потребуются, включительно, более общие конструкции. Символами $\mathbb{C}$, $\mathbb{R}$ и $\mathbb{T}$ обозначаются, соответственно, комплексная плоскость, вещественная прямая и единичная окружность с центром в нуле.

Итак, пусть $\mathcal{L}$ — комплексное линейное (вообще говоря, бесконечномерное) пространство и на $\mathcal{L} \times \mathcal{L}$ задана полуторалинейная (вообще говоря, неэрмитова) форма $B(x, y)$, т. е. комплекснозначная функция, удовлетворяющая следующим условиям (здесь $\alpha, \beta \in \mathbb{C}$)

$$\left. \begin{array}{l} \text{a. } B(\alpha x + \beta z, y) = \alpha B(x, y) + \beta B(z, y), \\ \text{b. } B(x, \alpha y + \beta z) = \overline{\alpha} B(x, y) + \overline{\beta} B(x, z). \end{array} \right\}$$

С полуторалинейной формой $B(x, y)$ ассоциируется квадратичная форма $q_B(x, x) = B(x, x)$. Отметим, что для квадратичной формы выполняется тождество параллелограмма (условие $B(x, x) \in \mathbb{R}$ не предполагается) $q_B(x + y) + q_B(x - y) = 2(q_B(x) + q_B(y))$, а полуторалинейная форма восстанавливается по квадратичной форме с помощью поляризационного тождества¹ $4B(x, y) = \sum_{j=0}^3 i^j Q_B(x + i^j y)$. Для дальнейшего нам нужно уметь проверить, является ли некоторая функция квадратичной формой.

Теорема 2.1. Пусть $q(x)$ — комплекснозначная функция, заданная на линейном пространстве $\mathcal{L}$. Функция $q(x)$ тогда и только тогда ассоциируется с некоторой квадратичной формой, когда $q(x)$ удовлетворяет условиям

$$\left. \begin{array}{l} \text{a. } q(\alpha x) = |\alpha|^2 q(x), \quad x \in \mathcal{L}, \quad \alpha \in \mathbb{C}, \\ \text{b. для любых } x, y \in \mathcal{L} \text{ и } \lambda \in \mathbb{C} \text{ верно } \sum_{j=0}^3 i^j q(\lambda x + i^j y) = \lambda \sum_{j=0}^3 i^j q(x + i^j y), \\ \text{c. для } q(\cdot) \text{ верно тождество параллелограмма.} \end{array} \right\}$$

Замечание 2.1. Перед нами не стоит задача минимизации условий теоремы 2.1, которые, в частности, допускают ослабление в пункте b.

Всюду ниже предполагается, что полуторалинейная форма $Q(x, y)$ является эрмитовой, т. е. $Q(y, x) = \overline{Q(x, y)}$ для любых x и y . Ниже мы будем, как это принято в теории пространств с индефинитной метрикой, вместо $Q(x, y)$ писать $[x, y]$. Если подмножество заданного линейного пространства замкнуто относительно линейных операций, то здесь оно будет называться линеалом. Линейная оболочка множества X обозначается $\text{Lin } X$. Вектор $0 \neq x \in \mathcal{L}$ называется положительным, неотрицательным или нейтральным, если, соответственно, $[x, x] > 0$, $[x, x] \geq 0$ или $[x, x] = 0$. Аналогично определяются отрицательные и неположительные векторы. Два вектора $x, y \in \mathcal{L}$ называются Q -ортогональными ($x \perp y$), если $[x, y] = 0$, аналогично вводятся определения Q -ортогональных множеств, Q -ортогонального дополнения и т. п. Q -ортогональное дополнение к множеству $X \subset \mathcal{L}$ обозначается $X^{[\perp]}$. Линеал называется положительным, если все его ненулевые векторы положительны, аналогично определяются отрицательные, неотрицательные и т. п. линеалы. Положительный линеал называется максимальным положительным, если он не является собственным линеалом другого положительного линеала. Аналогично определяются максимальные отрицательные, максимальные неположительные и т. п. линеалы. Далее, линеал $\mathcal{M} \subset \mathcal{L}$ называется невырожденным, если $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{[\perp]} = \{0\}$, в противном случае линеал $\mathcal{M}$ называется вырожденным. Если $\mathcal{M}$ является вырожденным линеалом, то линеал $\mathcal{M} \cap \mathcal{M}^{[\perp]}$ называется изотропной частью $\mathcal{M}$. Если $\mathcal{M}$ — невырожденный линеал, то можно образовать Q -ортогональную прямую сумму $\mathcal{M}[\dot{+}] \mathcal{M}^{[\perp]}$. В общем случае эта сумма не совпадает со всем пространством.

¹См. [10, § XIV.8]; отметим, что в этой книге в качестве основного термина используется билинейная, а не полуторалинейная форма.

Обычно пространство с индефинитной метрикой снабжается той или иной топологией. В этом случае термин «подпространство» у нас всегда обозначает замкнутый в топологическом смысле линеал, а замкнутая линейная оболочка множества X — $\text{CLin } X$. Заметим, что Q -ортогональное дополнение к любому множеству в линейном топологическом пространстве с индефинитной метрикой всегда является подпространством.

Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$. Пространство $\mathcal{H}$ называется *гильбертовым пространством с индефинитной метрикой*, если оно дополнительно оснащено непрерывной эрмитовой полуторалинейной формой $[\cdot, \cdot]$, такой что соответствующая квадратичная форма знакопеременна. Заметим, что именно внутреннее произведение $[\cdot, \cdot]$ является для нас основным, а вот гильбертово скалярное произведение играет вспомогательную роль и может меняться на топологически ему эквивалентное. В силу непрерывности внутреннее произведение может быть представлено в форме $[\cdot, \cdot] = (G\cdot, \cdot)_{\mathcal{H}}$, где G — так называемый оператор Грама, который необходимо является ограниченным. Кроме того, эрмитовость внутреннего произведения влечёт за собой самосопряжённость G как оператора в гильбертовом пространстве. Такие пространства с индефинитной метрикой обычно называют гильбертовыми пространствами с G -метрикой (см. [1]). Наличие в таком пространстве нормы позволяет ввести дополнительные понятия. В частности, положительный линеал $\mathcal{M}$ называется *равномерно положительным*, если найдётся такая константа $c > 0$, что $[x, x] \geq c\|x\|^2$ для любого $x \in \mathcal{M}$, аналогично определяются равномерно отрицательные подпространства.

Теория операторов в гильбертовых G -пространствах сравнительно бедна результатами и, возможно, ещё ждёт своих исследователей. Намного более развитой является теория операторов в гильбертовых пространствах с G -метрикой в случае ограниченно обратимого оператора Грама (т. е. в регулярных гильбертовых пространствах с G -метрикой [1]).

Предложение 2.1. *Гильбертово пространство $\mathcal{H}$ с G -метрикой будет регулярным тогда и только тогда, когда для любого действующего на всём $\mathcal{H}$ непрерывного линейного функционала f найдётся такой вектор y_f , что $fx = [x, y_f]$, $x \in \mathcal{H}$.*

Гильбертово скалярное произведение в регулярном гильбертовом пространстве с G -метрикой может быть заменено топологически эквивалентным ему произведением так, что $[\cdot, \cdot] = (J\cdot, \cdot)$, где $J = P_+ - P_-$, P_+ и P_- — (гильбертовы) ортопроекторы, $P_+ + P_- = I$. Последнее равенство влечёт равенство $P_+(P_+ + P_-) = P_+$, откуда следует

$$P_+P_- = 0 \text{ и } P_-P_+ = 0. \quad (2.1)$$

Положим $\mathcal{H}_+ = P_+\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_- = P_-\mathcal{H}$. В силу (2.1) подпространства $\mathcal{H}_+$ и $\mathcal{H}_-$ образуют прямую сумму и, кроме того, ортогональны в смысле внутреннего произведения $[\cdot, \cdot]$. Разложение $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+[\dot{+}]\mathcal{H}_-$ называется каноническим разложением, а оператор J — канонической симметрией. Пространства с индефинитной метрикой, в которых оператор Грама является канонической симметрией, называется J -пространством или пространством Крейна. В этих заметках мы будем предполагать, что $\mathcal{H}$ является пространством Крейна или его частным случаем — пространством Понтрягина: J -пространство называется пространством Понтрягина, или пространством Π_κ , если $\dim \mathcal{H}_- = \kappa < \infty$. В случае J -пространства такие термины, как Q -ортогональность, заменяется J -ортогональностью и т. п. Иногда пространство Крейна трактуют в более узком смысле как такое J -пространство, у которого в каноническом разложении обе компоненты бесконечномерны.

Если $\mathcal{L}$ — невырожденное подпространство J -пространства, то корректно определена J -ортогональная прямая сумма $\mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{L}^{[\perp]}$. В общем случае эта сумма плотна в J -пространстве, но не совпадает с ним, если же $\mathcal{L}[\dot{+}]\mathcal{L}^{[\perp]} = \mathcal{H}$, то подпространство $\mathcal{L}$ называется проекционно полным.

Предложение 2.2. *Положительное подпространство $\mathcal{L}$ является проекционно полным тогда и только тогда, когда оно является регулярным гильбертовым G -пространством, на котором внутреннее произведение — это $[\cdot, \cdot]_{\mathcal{L}}$.*

Заметим, что в пространстве Π_κ подпространство является проекционно полным тогда и только тогда, когда оно невырождено. Вместе с тем невырожденный положительный линеал как в общем J -пространстве, так и в пространстве Понтрягина при замыкании может превратиться в вырожденное подпространство.

Предложение 2.3. Пусть $\mathcal{H}$ — пространство Понтрягина, $\mathcal{L}_+$ — некоторый положительный идеал. Для того, чтобы замыкание этого идеала было положительным, необходимо и достаточно, чтобы для любого вектора $x \in \mathcal{H}$ и любой последовательности $\{y_n\} \subset \mathcal{L}_+$, такой что $\lim_{n \rightarrow \infty} [y_n, y_n] = 0$, было бы верно $\lim_{n \rightarrow \infty} [x, y_n] = 0$.

Доказательство. Пусть в рамках сделанных допущений верно $\lim_{n \rightarrow \infty} [y_n, y_n] = 0 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} [x, y_n] = 0$ и необходимо доказать, что замыкание $\overline{\mathcal{L}_+}$ положительно. Допустим противное. Тогда найдётся такая сходящаяся последовательность $\{y_n\} \subset \mathcal{L}_+$, что $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y \neq 0$, $[y, y] = 0$. Поскольку квадратичная форма $[\cdot, \cdot]$ непрерывна, то $\lim_{n \rightarrow \infty} [y_n, y_n] = 0$, но для $x = Ju$ верно $\lim_{n \rightarrow \infty} [x, y_n] = \|y\|^2 \neq 0$. Противоречие. Обратно, пусть подпространство $\overline{\mathcal{L}_+}$ положительно. В пространстве Понтрягина всякое положительное подпространство равномерно положительно, поэтому на $\overline{\mathcal{L}_+}$ выражение $\sqrt{[\cdot, \cdot]}$ эквивалентно гильбертовой норме. Дальнейшее очевидно. $\square$

Все определения, равно как и большинство упомянутых результатов и их доказательства, а также дальнейшее описание геометрии J -пространств можно найти в монографии [3] и лекциях [4, 5]. Мы будем придерживаться стандартных обозначений в случае понятий, связанных с гильбертовой структурой на $\mathcal{H}$ (ортогональность, ортогональное дополнение, ортогональная сумма и т. п.).

Все операторы, упомянутые в этой работе, полагаются, если только прямо не оговорено противное, линейными и ограниченными, символами $\sigma(A)$ и $\rho(A)$ обозначаются, соответственно, спектр и множество регулярных точек (в другой терминологии — резольвентное множество) оператора A . Итак, пусть $A: \mathcal{H} \rightarrow \mathcal{H}$ — некоторый оператор. Оператор A^c называется J -сопряжённым (J -с.) к оператору A , если $[Ax, y] = [x, A^c y]$ для всех $x, y \in \mathcal{H}$. Отметим, что спектры операторов A и A^c расположены симметрично относительно вещественной оси (т. е. $\lambda \in \sigma(A) \Rightarrow \bar{\lambda} \in \sigma(A^c)$). Оператор A называется J -самосопряжённым (J -с.с.) если $A = A^c$. Заметим, что часть спектра J -с.с. оператора может быть невещественной, а собственным значениям оператора могут соответствовать нетривиальные жордановы цепочки из собственных и присоединённых векторов, причём это верно не только для операторов в пространстве Крейна, но и в псевдоунитарном пространстве (см. [3, 4, 5, 22]).

Замечание 2.2. Структура пространства Крейна позволяет переформулировать в терминах внутреннего произведения $[\cdot, \cdot]$ многие результаты, обычно формулируемые в терминах гильбертова скалярного произведения. Приведем три примера.

1. Пусть $\langle x, y \rangle$ — дополнительная непрерывная полуторалинейная форма, заданная в пространстве Крейна $\mathcal{H}$. Тогда найдётся такой оператор D , что $\langle x, y \rangle = [Dx, y]$, причём если форма $\langle x, y \rangle$ — эрмитова, то D — J -с.с. оператор, а если соответствующая квадратичная форма $\langle x, x \rangle$ неотрицательна, то D — J -неотрицательный оператор.
2. Если C — J -неотрицательный оператор, то $\|C\| = \sup_{x: \|x\|=1} \{[Cx, x]\}$.
3. Аналог теоремы Вижье—Надя о монотонной последовательности самосопряжённых операторов (см. [26, гл. VII, п. 104]): всякая J -монотонная ограниченная последовательность J -с.с. операторов сходится в сильной операторной топологии к J -с.с. оператору.

3. БАЗОВЫЕ СВОЙСТВА J -ИЗОМЕТРИЧЕСКИХ И J -УНИТАРНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ПРОСТРАНСТВЕ КРЕЙНА

В этом разделе напоминаются некоторые свойства изометрических операторов в пространстве Крейна, которые делают изучение этих операторов заметно более сложной задачей по сравнению с той, которая имеет место в случае пространства Гильберта. Здесь мы допускаем неограниченность рассматриваемых операторов. Итак, пусть U — действующий в пространстве Крейна $\mathcal{H}$ оператор с областью определения $\mathfrak{D}(U)$, при этом выполнение равенства $\mathfrak{D}(U) = \mathcal{H}$ не предполагается.

Определение 3.1. Оператор U называется J -изометрическим, если равенство $[Ux, Ux] = [x, x]$ верно для любого $x \in \mathfrak{D}(U)$.

Может ли J -изометрический оператор быть неограниченным? Продемонстрируем, что да.

Пример 3.1. Пусть $g, h, e_1, e_2, \dots$ — ортонормированный базис в гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$, операторы J и U заданы соотношениями $J: J e_j = e_j, j = 1, 2, \dots, Jg = h, Jh = g, \mathfrak{D}(U) = \text{Lin}\{e_j\}_1^\infty, U e_j = e_j + h$. Тогда для вектора $y_n = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n e_j$ при $n \rightarrow \infty$ мы имеем $\|y_n\| = (\sqrt{n})^{-1} \rightarrow 0, U y_n = h + y_n, \|U y_n\| = \sqrt{1 + n^{-1}} \rightarrow 1$. Отметим, что U обратим, U^{-1} очевидным образом J -изометричен, но, в отличие от U , ограничен, а его замыкание имеет нетривиальное ядро, натянутое на вектор h .

В приведённом примере пространство с индефинитной метрикой — это пространство Понтрягина, а оператор U не допускает замыкания. Покажем, что это не является случайным.

Предложение 3.1. Пусть заданный в пространстве Понтрягина $\mathcal{H}$ оператор U является J -изометрическим и допускает замыкание. Тогда он ограничен.

Доказательство. Замыкание J -изометричного оператора, очевидно, тоже будет J -изометричным, поэтому мы сразу предполагаем, что U замкнут. Область определения $\mathfrak{D}(U)$ оператора U — это линеал из пространства Понтрягина, поэтому он либо положителен, либо содержит максимальный (как подмножество $\mathfrak{D}(U)$) неположительный конечномерный линеал $\mathfrak{D}_-(U)$. Предположим, что имеет место второй случай, т. е. $\mathfrak{D}_-(U) \neq \{0\}$. Пусть

$$\mathfrak{D}(U) = \mathfrak{D}_-(U) \oplus \mathfrak{D}_+(U), \quad (3.1)$$

где $\oplus$ — символ ортогональной (в гильбертовом смысле!) суммы двух линеалов. Поскольку линеал $\mathfrak{D}_-(U)$ конечномерен, то $\mathfrak{D}_+(U) \subset \mathfrak{D}(U)$ — положительный, но, возможно, незамкнутый линеал. Оператор $U|_{\mathfrak{D}_-(U)}$ заведомо ограничен, поскольку действует на конечномерном пространстве, поэтому вопрос об ограниченности U сводится к проблеме ограниченности $U|_{\mathfrak{D}_+(U)}$ и, тем самым, к первому случаю.

Покажем замкнутость множества $\mathfrak{D}(U)$. Пусть последовательность $\{x_n\}_1^\infty$ такова, что $x_n \in \mathfrak{D}(U), x_n \rightarrow x_0$. Поскольку $[x, x] > 0$ для любого $x \in \mathfrak{D}(U), x \neq 0$, последовательность $\{x_n\}_1^\infty$ является последовательностью Коши по отношению к локальной норме $\|x\|_+ = [x, x]^{1/2}$. Перейдём теперь к линеалу $\mathfrak{R}(U) = U\mathfrak{D}(U)$ и его замыканию $\overline{\mathfrak{R}(U)}$. Последнее множество является, вообще говоря, неотрицательным подпространством. Выделим его изотропную часть $M_0 = \overline{\mathfrak{R}(U)} \cap \overline{\mathfrak{R}(U)}^{[1]}$ и представим то же пространство в виде ортогональной суммы $\overline{\mathfrak{R}(U)} = M_0 \oplus M_+$. Подпространство M_+ будет равномерно положительным, поэтому найдётся такая константа $c > 0$, что $c[y, y] \geq \|y\|^2$ для любого $y \in M_+$. Далее, пусть Q_0 и Q_+ — гильбертовы ортопроекторы на подпространства M_0 и M_+ соответственно. Рассмотрим поведение последовательностей $\{y_n = U x_n\}_1^\infty, \{Q_0 y_n\}_1^\infty$ и $\{Q_+ y_n\}_1^\infty$. Имеем $[x_n - x_m, x_n - x_m] = [y_n - y_m, y_n - y_m] = [Q_+ y_n - Q_+ y_m, Q_+ y_n - Q_+ y_m] \geq c^{-1} \|Q_+ y_n - Q_+ y_m\|^2$, так что последовательность $\{Q_+ y_n\}_1^\infty$ является последовательностью Коши и поэтому сходится к некоторому элементу $y_0^+ \in M_+$. Перейдём теперь к последовательности $\{Q_0 y_n\}_1^\infty$ и покажем, что она ограничена. Действительно, предположим противное. Тогда у этой последовательности найдётся такая подпоследовательность, что соответствующая последовательность норм стремится к бесконечности. Без ограничения общности можно допустить, что этим свойством обладает сама последовательность, т. е. $\lim_{n \rightarrow \infty} \|Q_0 y_n\| = \infty$.

Положим $s_n = \frac{1}{\|Q_0 y_n\|} x_n$. Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0, \quad (3.2)$$

$\lim_{n \rightarrow \infty} Q_+ U s_n = 0, \|Q_0 U s_n\| = 1$ для любого n . Поскольку подпространство M_0 конечномерно, у последовательности $\{Q_0 U s_n\}_1^\infty$ есть сходящаяся подпоследовательность. Чтобы не загромождать обозначения без потери общности можно предположить, что $\lim_{n \rightarrow \infty} Q_0 U s_n = z_0, \|z_0\| = 1$. Итак,

$\lim_{n \rightarrow \infty} U s_n = z_0 \neq 0$, что невозможно в силу (3.2). Поскольку последовательность $\{Q_0 y_n\}_1^\infty$ ограничена, а подпространство M_0 конечномерно, у этой последовательности найдётся сходящаяся подпоследовательность. Опять-таки без ограничения общности можно считать, что предел имеет сама последовательность и, как результат, существует $\lim_{n \rightarrow \infty} y_n = y_0$. Поскольку оператор U замкнут, то $x_0 \in \mathfrak{D}(U)$ и $U x_0 = y_0$. Итак, область определения оператора U является подпространством и он в силу теоремы о замкнутом графике ограничен. $\square$

Замечание 3.1. В условии (3.1) мы не можем заменить символ $\oplus$ ортогональной суммы на символ $[\dot{+}]$ J -ортогональной суммы, написав $\mathfrak{D}(U) = \mathfrak{D}_-(U)[\dot{+}]\mathfrak{D}_+(U)$, поскольку, во-первых, в последнем разложении линейал $\mathfrak{D}_+(U)$ определяется неоднозначно и, во-вторых (в данном случае это более важно), мы не можем гарантировать равномерную дефинитность этого линейала.

Пример 3.2. Пусть пространство Понтрягина $\mathcal{H}$ то же, что и в примере 3.1, с тем же базисом $g, h, e_1, e_2, \dots$, а $\mathcal{L}$ — подпространство, определяемое частью этого базиса $h, e_1, e_2, \dots$, которое, очевидно, будет J -неотрицательным. Пусть $\{s_\nu\}_{\nu \in \mathfrak{N}}$ — какой-нибудь базис Гамеля (см. [11]) подпространства $\mathcal{L}$, содержащий систему $h, e_1, e_2, \dots$, первым элементом которого будет вектор h , $\mathfrak{N}$ — (несчётное) вполне упорядоченное множество, включающее в себя натуральные числа в их естественном порядке. Обозначим f заданный всюду на $\mathcal{L}$ линейный функционал, определяемый условиями $fh = 1$, $fe_1 = 2$, $fe_2 = 3$, $\dots$, $fs_\nu = 0$ при $\nu \neq 1, 2, \dots$ (ср. с [11, пример 6.1.4]). Этот функционал будет неограничен, а его ядро $\text{Ker } f$ всюду плотно в $\mathcal{L}$. Пусть $\mathcal{L}_0$ — одномерное подпространство, натянутое на вектор h . Тогда $\mathcal{L} = \mathcal{L}_0[\dot{+}]\text{Ker } f$.

В отличие от рассмотренной выше ситуации заданный на пространстве Крейна замкнутый J -изометрический оператор может оказаться неограниченным.

Пример 3.3. Пусть $\mathcal{M}$ — гильбертово пространство, A — действующий в этом пространстве самосопряжённый оператор с неограниченным обратным оператором. Возьмём в качестве пространства Крейна сумму $\mathcal{L} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}$, а в качестве канонической симметрии J и оператора U матрицы $J = \begin{pmatrix} 0 & I \\ I & 0 \end{pmatrix}$, $U = \begin{pmatrix} 0 & A^{-1} \\ A & 0 \end{pmatrix}$. Непосредственно проверяется, что U является оператором с искомыми свойствами.

Предложение 3.2. Пусть заданный в пространстве Крейна $\mathcal{H}$ оператор U является J -изометрическим и имеет всюду плотные область определения и область значений. Тогда он допускает замыкание.

Доказательство. Для доказательства этого предложения достаточно показать, что у U имеется плотно заданный J -сопряжённый оператор U^c . Пусть $x \in \mathfrak{D}(U)$, $y \in \mathfrak{R}(U)$. Тогда $[Ux, y] = [Ux, UU^{-1}y] = [x, U^{-1}y]$ $\square$

Замечание 3.2. Из приведённого доказательства следует, что если U — J -изометрический оператор, $\overline{\mathfrak{D}(U)} = \mathcal{H}$, $\overline{\mathfrak{R}(U)} = \mathcal{H}$, то $U^c = U^{-1}$.

Отметим, что условие $\overline{\mathfrak{R}(U)} = \mathcal{H}$ в 3.2 является существенным.

Пример 3.4. Пусть $\mathcal{M}$ — гильбертово пространство, $\{e_j\}_0^\infty$ — фиксированный ортонормированный базис в этом пространстве, S — действующий там же оператор сдвига, т. е. $Se_j = e_{j+1}$, f — всюду определённый на $\mathcal{M}$ неограниченный линейный функционал. Возьмём в качестве пространства Крейна сумму $\mathcal{L} = \mathcal{M} \oplus \mathcal{M}$, а в качестве канонической симметрии J и оператора U матрицы $J = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & -I \end{pmatrix}$, $U \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (fx)e_0 + Sx & (fy)e_0 \\ (fx)e_0 & (fy)e_0 + Sy \end{pmatrix}$. Непосредственно проверяется, что U является оператором с искомыми свойствами, его график, в частности, не будет замкнутым.

Отметим, в частности, что подобный пример невозможен в пространстве Понтрягина.

Предложение 3.3. Пусть заданный в пространстве Понтрягина $\mathcal{H}$ оператор U является J -изометрическим и имеет всюду плотную область определения. Тогда он ограничен и, следовательно, допускает замыкание.

Доказательство. Пусть κ — это размерность максимального отрицательного подпространства пространства $\mathcal{H}$. Область определения $\mathfrak{D}(U)$ оператора U — это всюду плотный линейал из пространства Понтрягина, поэтому он представим в виде J -ортогональной суммы

$$\mathfrak{D}(U) = \mathfrak{D}_-(U)[\dot{+}]\mathfrak{D}_+(U), \quad (3.3)$$

где $\mathfrak{D}_-(U)$ — отрицательный κ -мерный (и потому максимальный как в $\mathfrak{D}(U)$, так и во всём пространстве) линеал. Знакоопределённость обеих компонент отличает это разложение от разложения (3.1). Благодаря указанной знакоопределённости разложение (3.3) определяется однозначно, конечномерность линеала $\mathfrak{D}_-(U)$ означает, что он является равномерно отрицательным подпространством, поэтому $\mathfrak{D}_+(U)$ — равномерно положительный линеал. Далее, $U\mathfrak{D}_-(U)$ — κ -мерное отрицательное подпространство, поэтому замыкание $\overline{\mathfrak{R}_+(U)}$ положительного линеала $\mathfrak{R}_+(U) = U\mathfrak{D}_+(U)$ тоже положительно, поскольку, если допустить противное, т. е. что существует ненулевой вектор $y_0 \in \overline{\mathfrak{R}_+(U)}$, $[y_0, y_0] = 0$, то линейная оболочка $U\mathfrak{D}_-(U)$ и y_0 будет $1 + \kappa$ -мерным неположительным линеалом, что невозможно. Итак, на $\mathfrak{R}_+(U)$ и $\mathfrak{D}_+(U)$ внутренние нормы $[\cdot, \cdot]^{1/2}$ будут эквивалентны исходной гильбертовой норме, так что оператор $U|_{\mathfrak{D}_+(U)}$ будет ограничен. Дальнейшее очевидно. $\square$

Определение 3.2. J -изометрический оператор U называется J -унитарным, если $\mathfrak{D}(U) = \mathcal{H}$, $\mathfrak{R}(U) = \mathcal{H}$.

В силу предложения 3.2 и замечания 3.2 J -унитарный оператор U является ограниченным и $U^c = U^{-1}$.

Рассмотрим J -унитарный оператор U , такой что для него найдётся неотрицательное инвариантное подпространство $\mathcal{L}_+$. Как хорошо известно, сужение унитарного оператора (как в гильбертовом, так и в случае пространства с индефинитной метрикой) на своё инвариантное подпространство может оказаться не унитарным, а изометрическим оператором, поэтому структура оператора $U|_{\mathcal{L}_+}$ требует отдельного рассмотрения.

Предложение 3.4. Пусть J -унитарный оператор U обладает инвариантным подпространством $\mathcal{L}_+$, которое является максимальным неотрицательным подпространством. Тогда его J -ортогональное дополнение, т. е. подпространство $\mathcal{L}_- = \mathcal{L}_+^{[\perp]}$ также будет инвариантным подпространством для U .

Доказательство. В силу замечания 3.2 достаточно показать, что подпространство $\mathcal{L}_+$ является инвариантным для оператора U^{-1} . Допустим противное. В данном случае это означает, что $U\mathcal{L}_+ \neq \mathcal{L}_+$, т. е. найдётся такой вектор $x_+ \in \mathcal{L}_+$, что $x_+ \notin U\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_+$. Оператор U^{-1} J -унитарен, поэтому подпространство $U^{-1}\mathcal{L}_+$ будет неотрицательным, но $U^{-1}x_+ \notin \mathcal{L}_+$, поэтому $\mathcal{L}_+ \subset U\mathcal{L}_+$ и, одновременно, $\mathcal{L}_+ \neq U\mathcal{L}_+$. Противоречие. $\square$

Легко видеть, что « J -унитарность» оператора $U|_{\mathcal{L}_+}$ в условиях предложения 3.4 была обеспечена максимальностью неотрицательного подпространства $\mathcal{L}_+$.

Предложение 3.5. Пусть $0 < \alpha < \beta < 2\pi$, $\delta > 0$, $T_{ext} = \{(1 + \delta)e^{it}\}_{t \in [\alpha, \beta]}$ и $T_{int} = \{(1 + \delta)^{-1}e^{it}\}_{t \in [\alpha, \beta]}$ — две дуги на комплексной плоскости со стандартной ориентацией, а U — такой J -унитарный оператор, что некоторая окрестность дуг T_{ext} и T_{int} (состоящая, возможно, из двух несвязных открытых множеств) принадлежит к его области регулярности. Тогда

оператор $i \left(\int_{T_{ext}} R_\xi(U) d\xi - \int_{T_{int}} R_\xi(U) d\xi \right)$ является J -с.с.

Доказательство. Утверждение, содержащееся в данном предложении, не вполне тривиально, поскольку операторы $\int_{T_{ext}} R_\xi(U) d\xi$ и $\int_{T_{int}} R_\xi(U) d\xi$ не J -сопряжены. Имеем $\int_{T_{ext}} R_\xi(U) d\xi = i(1 + \delta) \int_{\alpha}^{\beta} R_{(1+\delta)e^{it}}(U) e^{it} dt$, откуда

$\left(\int_{T_{ext}} R_\xi(U) d\xi \right)^c = -i(1 + \delta) \int_{\alpha}^{\beta} (R_{(1+\delta)e^{it}}(U))^c e^{-it} dt$. С другой стороны $(R_{(1+\delta)e^{it}}(U))^c = -\frac{e^{it}}{1 + \delta} U R_{\frac{e^{it}}{1+\delta}}(U)$, поэтому

$$\left(\int_{T_{ext}} R_\xi(U) d\xi \right)^c = i \int_{\alpha}^{\beta} U R_{\frac{e^{it}}{1+\delta}}(U) dt, \quad \left(\int_{T_{ext}} R_\xi(U) d\xi \right)^c - \int_{T_{int}} R_\xi(U) d\xi = i(\beta - \alpha)I.$$

Дальнейшее очевидно. $\square$

Замечание 3.3. Предложение 3.5 применимо к гильбертову пространству.

4. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ J -УНИТАРНОГО ОПЕРАТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ ПОНТЯГИНА

В этом разделе пространство с индефинитной метрикой — это пространство Понтрягина и указанное условие дальше оговариваться не будет, размерность максимального неотрицательного подпространства будем полагать равной $\varkappa$ (в этом случае пространство Понтрягина часто называют пространством $\Pi_\varkappa$). Если J -унитарный оператор U имеет только унитарный спектр, то у него есть собственная спектральная функция (с.с.ф.) E_λ с конечным множеством критических точек Λ . Точные формулировки будут приведены ниже. Поскольку некоторые формулы, полученные в процессе доказательства существования с.с.ф., используются для построения модельного пространства по схеме, аналогичной [36], то мы приведём его набросок по пути, предложенному в [15, 38] (класс операторов, охваченный в [38], шире, чем рассматриваемый нами). На первом этапе унитарность спектра оператора U предполагаться не будет. Итак, по известной теореме Понтрягина найдётся такое максимальное неположительное подпространство $\mathcal{L}_-$, что $U\mathcal{L}_- \subset \mathcal{L}_-$. В силу определения пространства Понтрягина размерность подпространства $\mathcal{L}_-$ равна $\varkappa$, поэтому оператор $U|_{\mathcal{L}_-}$ действует в конечномерном пространстве и его спектр — конечное множество. Пусть $N(\xi)$ — минимальный аннулирующий многочлен для $U|_{\mathcal{L}_-}$ (т. е. $N(U|_{\mathcal{L}_-}) = 0$ и $N(\xi)$ имеет минимальную степень среди всех многочленов с таким свойством), коэффициент которого при старшей степени для определённости равен единице, степень $N(\xi)$ равна n , $n \leq \varkappa$. Далее, пусть $\overline{N}(\xi)$ — многочлен, коэффициенты которого сопряжены к коэффициентам многочлена $N(\xi)$. Тогда

$$0 = [N(U)x, y] = [x, \overline{N}(U^{-1})y], \quad \text{где } x \in \mathcal{L}_-, y \in \mathcal{H} \quad (4.1)$$

и $\overline{N}(U^{-1})\mathcal{H} \subset \mathcal{L}_+$, где $\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_-^{\perp}$ — максимальное неотрицательное подпространство. Введём на $\mathcal{H}$ новую полуторалинейную форму $\langle x, y \rangle := [N(U)x, N(U)y]$. Тогда

$$\langle x, x \rangle = [\overline{N}(U^{-1})N(A)x, x] = [N(U)\overline{N}(U^{-1})x, x] = [\overline{N}(U^{-1})x, \overline{N}(U^{-1})x] \geq 0 \quad \forall x \in \mathcal{H}. \quad (4.2)$$

Отметим, что свойство (4.2) называется дефинизируемостью оператора U , а рациональная функция $N(\xi) \cdot \overline{N}(\xi^{-1})$ — дефинизирующей. Для дальнейшего полезно отметить, что пространство $\mathcal{H}$, рассматриваемое как линеал, оснащённый полуторалинейной формой $\langle x, y \rangle$, превращается после факторизации по нейтральному подмножеству в предгильбертово пространство, а оператор U — в унитарный оператор в этом пространстве.

Рассмотрим двустороннюю последовательность моментов

$$\{d_l = \langle U^l x, x \rangle\}_{l=-\infty}^{+\infty}, \quad (4.3)$$

которая, очевидно, удовлетворяет следующему условию сопряжённости $d_{-l} = \bar{d}_l$, $l = 0, \pm 1, \dots$. Так как квадратичная форма $\langle \cdot, \cdot \rangle$ неотрицательна, то по теореме Рисса—Херглотца (см., например, [7, теорема 5.1.2]) последовательность $\{d_l\}_{l=-\infty}^{+\infty}$ допускает представление

$$d_l = \int_0^{2\pi} e^{ilt} d\sigma^{(x)}(t), \quad (4.4)$$

где $\sigma^{(x)}(t)$ — неубывающая функция, $\sigma^{(x)}(0) = 0$, $\sigma^{(x)}(t - 0) = \sigma^{(x)}(t) \quad \forall t \in [0, 2\pi]$. Причём функция $\sigma^{(x)}(t)$ перечисленными условиями определяется единственным образом (тригонометрическая проблема моментов является определённой), в частности, $\sigma^{(x)}(2\pi) = \langle x, x \rangle$. Укажем также, что $\sigma^{(x)}(t)$ может быть восстановлена по $\{d_l\}_{l=-\infty}^{+\infty}$ с помощью порождаемой резольвентой оператора U аналитической функции $f(\xi)$, первоначально заданной в окрестности бесконечно удалённой точки рядом $f(\xi) = -\sum_{l=0}^{\infty} d_l \xi^{-(l+1)}$, а в окрестности нуля — рядом $f(\xi) = \sum_{l=0}^{\infty} d_{-(l+1)} \xi^l$. Использование представления (4.4) приводит к представлению

$$f(\xi) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it} - \xi} d\sigma^{(x)}(t). \quad (4.5)$$

верному как в окрестности нуля, так и бесконечно удалённой точки. Последняя формула позволяет полагать функцию $f(\xi)$ аналитически продолженной на область $\mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$.

Пусть $\Delta = [\alpha, \beta]$, $0 < \alpha < \beta < 2\pi$, $0 < r < 1$, $\Gamma^{(\Delta)}$ — положительно ориентированный замкнутый контур, образованный двумя дугами $\left\{\frac{1}{r}e^{i\tau}\right\}_{\tau \in \Delta}$ и $\{re^{i\tau}\}_{\tau \in \Delta}$, а также двумя отрезками $\{\rho e^{i\alpha}\}_{\rho \in [r, \frac{1}{r}]}$ и $\{\rho e^{i\beta}\}_{\rho \in [r, \frac{1}{r}]}$. Наша цель — подсчитать интеграл

$$-\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma^{(\Delta)}} f(\xi) d\xi, \quad (4.6)$$

который, однако, может не существовать в стандартном смысле, поскольку, вообще говоря, точки $e^{i\alpha}$ и $e^{i\beta}$ являются особыми для данной подынтегральной функции. В силу сказанного указанный интеграл заменяется интегралом в смысле главного значения

$$-\frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(\Delta)}} f(\xi) d\xi, \quad (4.7)$$

где $\Gamma_\delta^{(\Delta)}$ — часть контура $\Gamma^{(\Delta)}$: $\Gamma_\delta^{(\Delta)} = \Gamma^{(\Delta)} \setminus \left(\{\rho e^{i\alpha}\}_{\rho \in (\frac{1}{1+\delta}, 1+\delta)} \cup \{\rho e^{i\beta}\}_{\rho \in (\frac{1}{1+\delta}, 1+\delta)} \right)$.

Итак, нам надо найти предел $\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(\Delta)}} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it} - \xi} d\sigma^{(x)}(t) \right) d\xi$, или, после смены порядка интегрирования, $\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_0^{2\pi} \left(\int_{\Gamma_\delta^{(\Delta)}} \frac{1}{e^{it} - \xi} d\xi \right) d\sigma^{(x)}(t)$. Нахождение этого предела сводится к оценке интеграла

$$K_\delta^{(\Delta)} = \int_{\Gamma_\delta^{(\Delta)}} \frac{1}{e^{it} - \xi} d\xi, \quad (4.8)$$

что, в свою очередь, требует определённости в выборе ветви многозначной логарифмической функции $\text{Ln } z = \ln |z| + i \text{Arg } z$. Ниже мы будем использовать стандартно определяемое (см, скажем, [23]) главное значение логарифмической функции $\ln z = \ln |z| + i \arg z$, а также дополнительную функцию $\widetilde{\ln} z = i\pi + \ln(-z)$. Для дальнейших ссылок отметим, что если ненулевые комплексные числа ξ и ζ принадлежат, соответственно, второй и третьей четвертям комплексной плоскости $\mathbb{C}$, то

$$\ln \xi - \ln \zeta = \ln \frac{\xi}{\zeta} - 2i\pi, \quad \widetilde{\ln} \xi = \ln \xi, \quad \widetilde{\ln} \zeta = 2i\pi + \ln \zeta. \quad (4.9)$$

Пусть $\eta = \frac{\xi}{e^{it}} - 1$, $\widetilde{\Gamma}_\delta^{(\Delta)}$ — кривая, являющаяся образом кривой $\Gamma_\delta^{(\Delta)}$ при переходе от ξ к η . Тогда (см. (4.8)) $K_\delta^{(\Delta)} = \widetilde{K}_\delta^{(\Delta)} \stackrel{\text{def}}{=} \int_{\widetilde{\Gamma}_\delta^{(\Delta)}} \frac{1}{1 - \eta} d\eta$. Пусть

$$\alpha < t < \beta, \quad \beta - \alpha < \pi. \quad (4.10)$$

Прямой подсчёт даёт

$$\begin{aligned} \widetilde{K}_\delta^{(\Delta)} &= -\left(\ln \frac{(1+\delta)e^{i(\beta-t)} - 1}{(1+\delta)e^{i(\alpha-t)} - 1} + \ln \frac{(1+\delta)^{-1}e^{i(\alpha-t)} - 1}{(1+\delta)^{-1}e^{i(\beta-t)} - 1} \right) = \\ &= -\left(\ln \frac{(1+\delta)e^{i(\beta-t)} - 1}{(1+\delta)e^{i(\alpha-t)} - 1} + 2i\pi + \ln \frac{(1+\delta)^{-1}e^{i(\alpha-t)} - 1}{(1+\delta)^{-1}e^{i(\beta-t)} - 1} \right) = \\ &= -(2i\pi + \ln \frac{(1+\delta)e^{i(\beta-t)} - 1}{(1+\delta)^{-1}e^{i(\beta-t)} - 1} + \ln \frac{(1+\delta)^{-1}e^{i(\alpha-t)} - 1}{(1+\delta)e^{i(\alpha-t)} - 1}). \end{aligned}$$

При выводе последних равенств были учтены отношения (4.9) и (4.10), а также то, что при достаточно малом δ точки $((1+\delta)e^{i(\beta-t)} - 1)$ и $((1+\delta)^{-1}e^{i(\beta-t)} - 1)$ попадают во вторую, в то время как точки $((1+\delta)e^{i(\alpha-t)} - 1)$ и $((1+\delta)^{-1}e^{i(\alpha-t)} - 1)$ — в третью четверть комплексной плоскости.

Рассмотрим выражение $\ln \frac{(1+\delta)e^{i(\beta-t)} - 1}{(1+\delta)^{-1}e^{i(\beta-t)} - 1}$. То, что оно в рамках наложенных ограничений стремится к нулю, вполне очевидно, но нам для дальнейшего нужен точный результат. Итак, $\left| \frac{(1+\delta)e^{i(\beta-t)} - 1}{(1+\delta)^{-1}e^{i(\beta-t)} - 1} \right| = (1+\delta) \left| \frac{(1+\delta)e^{i(\beta-t)} - 1}{(1+\delta)e^{-i(\beta-t)} - 1} \right| = (1+\delta)$, так что вещественная часть выражения $\ln \frac{(1+\delta)e^{i(\beta-t)} - 1}{(1+\delta)^{-1}e^{i(\beta-t)} - 1}$ не зависит от β и t . Далее, $\arg \frac{(1+\delta)e^{i(\beta-t)} - 1}{(1+\delta)^{-1}e^{i(\beta-t)} - 1} = \arg \frac{(1+\delta)e^{i(\beta-t)} - 1}{e^{i(\beta-t)} - (1+\delta)} = -2 \arctan \left(\frac{\delta \cos(\frac{\beta-t}{2})}{(2+\delta) \sin(\frac{\beta-t}{2})} \right)$. Последнее выражение отрицательно и монотонно стремится к нулю при фиксированных t и β , удовлетворяющих условиям $0 < \beta - t < \pi$. Аналогичным образом оценивается выражение $\ln \frac{(1+\delta)^{-1}e^{i(\alpha-t)} - 1}{(1+\delta)e^{i(\alpha-t)} - 1}$. Прямой подсчёт даёт $\left| \frac{(1+\delta)^{-1}e^{i(\alpha-t)} - 1}{(1+\delta)e^{i(\alpha-t)} - 1} \right| = \frac{1}{1+\delta}$, $\arg \frac{(1+\delta)^{-1}e^{i(\alpha-t)} - 1}{(1+\delta)e^{i(\alpha-t)} - 1} = 2 \arctan \left(\frac{\delta \cos(\frac{\alpha-t}{2})}{(2+\delta) \sin(\frac{\alpha-t}{2})} \right)$, так что (с учётом условия $\alpha - t < 0$) выражение

$$i^{-1} \left(\ln \frac{((1+\delta)e^{i(\beta-t)} - 1)}{((1+\delta)^{-1}e^{i(\beta-t)} - 1)} + \ln \frac{((1+\delta)^{-1}e^{i(\alpha-t)} - 1)}{((1+\delta)e^{i(\alpha-t)} - 1)} \right) \quad (4.11)$$

является отрицательным и монотонно стремится к нулю при $\delta \rightarrow 0$.

Пусть теперь $t = \beta$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{K}_\delta^{(\Delta)} &= - \left(\ln \frac{\delta}{((1+\delta)e^{i(\alpha-\beta)} - 1)} + \ln \frac{(1+\delta)^{-1}e^{i(\alpha-\beta)} - 1}{(1+\delta)^{-1} - 1} \right) = \\ &= - \left(-i\pi + \ln(\delta + 1) + 2i\pi + \ln \frac{(1+\delta)^{-1}e^{i(\alpha-\beta)} - 1}{(1+\delta)e^{i(\alpha-\beta)} - 1} \right) = -i \left(\pi + 2 \arctan \left(\frac{\delta \cos(\frac{\alpha-\beta}{2})}{(2+\delta) \sin(\frac{\alpha-\beta}{2})} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.12)$$

так что коэффициент при $-i$ монотонно стремится к π при $\delta \rightarrow 0$. Рассмотрим $t = \alpha$. Тогда

$$\begin{aligned} \tilde{K}_\delta^{(\Delta)} &= - \left(\ln \frac{((1+\delta)e^{i(\beta-\alpha)} - 1)}{\delta} + \ln \frac{(1+\delta)^{-1} - 1}{(1+\delta)^{-1}e^{i(\beta-\alpha)} - 1} \right) = \\ &= - \left(-\ln(\delta) + \widetilde{\ln}(-\delta) + \ln \frac{(1+\delta)e^{i(\beta-\alpha)} - 1}{e^{i(\beta-\alpha)} - (1+\delta)} \right) = -i \left(\pi - 2 \arctan \left(\frac{\delta \cos(\frac{\beta-\alpha}{2})}{(2+\delta) \sin(\frac{\beta-\alpha}{2})} \right) \right), \end{aligned} \quad (4.13)$$

так что коэффициент при $-i$ в (4.13) ведёт себя аналогично соответствующему коэффициенту в (4.12).

Пусть $t \notin [\alpha, \beta]$. Тогда при достаточно малом δ все граничные точки кривой $\Gamma_\delta^{(\Delta)}$, состоящей из двух связных частей, лежат в открытой левой полуплоскости, поэтому $-\tilde{K}_\delta^{(\Delta)} = \widetilde{\ln}((1+\delta)e^{i(\beta-t)} - 1) - \widetilde{\ln}((1+\delta)e^{i(\alpha-t)} - 1) - \widetilde{\ln}((1+\delta)^{-1}e^{i(\beta-t)} - 1) + \widetilde{\ln}((1+\delta)^{-1}e^{i(\alpha-t)} - 1)$, или, после очевидных преобразований, $\tilde{K}_\delta^{(\Delta)} = - \left(\ln \frac{(1+\delta)e^{i(\beta-t)} - 1}{e^{i(\beta-t)} - (1+\delta)} + \ln \frac{e^{i(\alpha-t)} - (1+\delta)}{(1+\delta)e^{i(\alpha-t)} - 1} \right)$.

После подсчёта мнимой части соответствующих логарифмов получаем выражение

$$\tilde{K}_\delta^{(\Delta)} = -2i \left(-\arctan \left(\frac{\delta \cos(\frac{\beta-t}{2})}{(2+\delta) \sin(\frac{\beta-t}{2})} \right) + \arctan \left(\frac{\delta \cos(\frac{\alpha-t}{2})}{(2+\delta) \sin(\frac{\alpha-t}{2})} \right) \right). \quad (4.14)$$

В отличие от (4.11) выражение в круглых скобках в (4.14) не имеет определённого знака, однако каждое из составляющих его двух слагаемых монотонно стремится к нулю, причём тип их монотонности сохраняется на интервалах знакопостоянства, соответственно, функций $\operatorname{ctg} \left(\frac{\beta-t}{2} \right)$ и $\operatorname{ctg} \left(\frac{\alpha-t}{2} \right)$. Итак, по теоремам о предельном переходе под знаком интеграла Лебега—Стилтьеса

(см., скажем, [27, гл. 7, §30, теоремы 2 и 3]) предел (4.7) принимает вид

$$\frac{-1}{2\pi i} \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(t)}} f(\xi) d\xi = \frac{\sigma^{(x)}(\beta) + \sigma^{(x)}(\beta + 0)}{2} - \frac{\sigma^{(x)}(\alpha) + \sigma^{(x)}(\alpha + 0)}{2}. \quad (4.15)$$

В нашем случае упомянутая теорема 2 играет ключевую роль при переходе в дальнейшем к операторным пределам. Полученное представление (4.15) позволяет (см. (4.4)) полностью восстановить функцию $\sigma^{(x)}(t)$.

Далее, для фиксированного t функция $\sigma^{(x)}(t)$ определяет по отношению к x неотрицательную числовую функцию. Эта функция получена предельным переходом, применённым к интегралам (4.7) и (4.8). Подынтегральная функция $f(\xi)$ из (4.7) и (4.15), в свою очередь, является, в силу (4.3), квадратичной формой, для которой, очевидно, выполняются условия (2.1). В силу единственности представления (4.4) и формулы восстановления (4.15), условия (2.1) выполнены и для $\sigma^{(x)}(t)$. Кроме того, $\sigma^{(x)}(t) \leq [N(A)x, N(A)x]$, поэтому функция $\sigma^{(x)}(t)$ непрерывна по x в нормированной топологии. Итак, для $\sigma^{(x)}(t)$ выполнены условия теоремы 2.1. Последнее обстоятельство открывает возможность ввести эрмитову полуторалинейную форму

$\prec x, y \succ^{(t)} := \frac{1}{4} \sum_{m=0}^3 i^m \cdot \sigma^{(x+i^m y)}(t)$. Поскольку квадратичная форма $\sigma^{(x)}(t)$ непрерывна по x , введённая полуторалинейная форма $\prec x, y \succ^{(t)}$ непрерывна в гильбертовой нормированной топологии.

В силу сказанного (см. также замечание 2.2) найдётся операторнозначная функция G_t , такая что $(s - \lim - \text{предел в сильной операторной топологии, существование этого предела следует из теоремы о существовании сильного предела у } J\text{-монотонной ограниченной последовательности операторов в } J\text{-пространстве (см. 2.2, а также [37, 38] или [30])})$.

- $G_0 = 0$, $G_t = s - \lim_{\tau \rightarrow t-0} G_\tau$ для любого $t \in [0, 2\pi]$;
- для любого $t \in [0, 2\pi]$ и $\tau \in (0, t)$ оператор $(G_t - G_\tau)$ является J -неотрицательным;
- $N(U)\overline{N}(U^{-1})U^k x = \int_0^{2\pi} e^{ikt} dG_t x$, $x \in \mathcal{H}$, $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$.

Указанное интегральное представление степеней оператора U и стандартное разложение его резольвенты $R_\xi(U)$ в окрестностях нуля и бесконечно удалённой точки (см. [26, гл. IV, §1, п. 67, формула 15 и гл. XI, §1, п. 148, формула 5], а также (4.5)) приводит к представлению

$N(U)\overline{N}(U^{-1})R_\xi(U) = \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{it} - \xi} dG_t$, где $\xi \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$. Если $N(1) \neq 0$ и функция G_t непрерывна в нуле, то оставляем полученное представление в неизменном виде, в противном случае воспользуемся 2π -периодичностью функции $\frac{1}{e^{it} - \xi}$ по t , продолжим G_t так, чтобы соответствующая операторная мера стала 2π -периодичной и положим

$$N(U)\overline{N}(U^{-1})R_\xi(U) = \int_\gamma^{2\pi+\gamma} \frac{1}{e^{it} - \xi} dG_t, \quad (4.16)$$

где $N(e^{i\gamma}) \neq 0$ и G_t непрерывна в точке $t = \gamma$. Если $\gamma = 0$, то мы получаем первоначальную версию представления (4.16). Преобразуем (4.16):

$$N(\xi)\overline{N}(\xi^{-1})R_\xi(U) = (N(\xi)\overline{N}(\xi^{-1})I - N(U)\overline{N}(U^{-1}))R_\xi(U) + \int_\gamma^{2\pi+\gamma} \frac{1}{e^{it} - \xi} dG_t, \quad (4.17)$$

Далее, выражение $M(\zeta, \xi) = \frac{N(\xi)\overline{N}(\xi^{-1}) - N(\zeta)\overline{N}(\zeta^{-1})}{\zeta - \xi}$ превращается после его очевидного доопределения в исключительной подобласти $\zeta = \xi$ в дробно-рациональную функцию от двух переменных, причём ряд Лорана с центром в нуле по каждой из этих переменных будет содержать лишь конечное число членов, т. е. выражению $M(U, \xi) = R_\xi(U)(N(\xi)\overline{N}(\xi^{-1})I - N(U)\overline{N}(U^{-1}))$ можно придать корректный смысл $\xi \neq 0$. Последняя формула и представление (4.17) приводят

к новому представлению

$$R_\xi(U) = \frac{1}{N(\xi)\overline{N}(\xi^{-1})} \left(M(U, \xi) + \int_{\gamma}^{\gamma+2\pi} \frac{1}{e^{it} - \xi} dG_t \right), \quad (4.18)$$

где сходимость интеграла можно понимать как в сильной, так и в равномерной операторной топологиях. Непосредственно из этого представления следует, что вне $\mathbb{T}$ функция $R_\xi(A)$ аналитична всюду за исключением, быть может, конечного числа полюсов, причём ноль полюсом быть не может. В силу сказанного неунитарный спектр оператора U состоит из конечного числа собственных значений с конечной длиной жордановых цепочек. Несложно показать, что инвариантное подпространство оператора U , состоящее из всех его собственных и присоединённых векторов, отвечающих ровно одному собственному значению из неунитарной части спектра, нейтрально и поэтому в случае пространства Понтрягина конечномерно. Кроме того, спектр любого J -унитарного оператора (как в случае пространства Понтрягина, так и пространства Крейна) симметричен относительно $\mathbb{T}$. Всё сказанное позволяет отделить инвариантное подпространство оператора U , отвечающее его неунитарному спектру, от инвариантного подпространства, отвечающего его унитарному спектру. Эти подпространства оказываются J -ортогональными и проекционно полными, а первое подпространство — ещё и конечномерным. Соответствующие J -ортогональные проекторы могут быть построены как проекторы Рисса (по поводу последних см., например, [12, гл. I, §1, п. 3], [26, гл. XI, §1, п. 148, теорема о разложении]). J -унитарные и J -унитарные операторы в конечномерных J -пространствах полностью описываются методами линейной алгебры [22], поэтому в дальнейшем, если прямо не оговорено противное, мы будем предполагать, что

$$\sigma(U) \subset \mathbb{T}. \quad (4.19)$$

При условии (4.19) $\overline{N}(\xi^{-1}) = \frac{(-1)^n}{\xi^n \prod_{k=1}^n e^{it_k}} N(\xi)$ и формула (4.18) может быть заменена на формулу

$$R_\xi(U) = \frac{(-\xi)^n \prod_{k=1}^n e^{it_k}}{N^2(\xi)} \left(M(A, \xi) + \int_{\gamma}^{\gamma+2\pi} \frac{1}{e^{it} - \xi} dG_t \right), \quad (4.20)$$

где n — степень многочлена $N(\xi)$, а e^{it_k} — его корни с учётом кратности $t_k \in (\gamma, \gamma + 2\pi)$. Обозначим

$$\Lambda := \{\lambda : N(e^{i\lambda}) = 0, \lambda \in (\gamma, \gamma + 2\pi)\}. \quad (4.21)$$

Множество Λ вводится так, что в нём нет повторяющихся точек, и называется в дальнейшем множеством *критических точек* оператора U и его спектральной функции, к определению которой мы переходим. Укажем также, что при $\xi = e^{it}$ верно $N(\xi)\overline{N}(\frac{1}{\xi}) = |N(e^{it})|^2$.

Обозначим $[\gamma, \gamma + 2\pi]_G$ множество тех $t \in [\gamma, \gamma + 2\pi]$, для которых G_t непрерывна в сильной операторной топологии. Пусть интервал $\Delta = [\alpha, \beta]$ тот же, что и в (4.6) с дополнительным условием

$$\alpha, \beta \in [\gamma, \gamma + 2\pi]_G, \quad \gamma < \alpha < \beta < \gamma + 2\pi, \quad [\alpha, \beta] \cap \Lambda = \emptyset. \quad (4.22)$$

Действуя так же, как и в (4.7), положим

$$E(\Delta) = \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) s\text{-}\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(\Delta)}} R_\xi(U) d\xi. \quad (4.23)$$

Существование предела в (4.23) сводится к исследованию предела

$$\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(\Delta)}} \frac{1}{N(\xi)\overline{N}(\xi^{-1})(e^{it} - \xi)} d\xi. \quad (4.24)$$

Для анализа этого предела, который зависит от t , рассмотрим два случая. Возьмём какое-нибудь $\epsilon > 0$, такое что $[\alpha - \epsilon, \beta + \epsilon] \subset [\gamma, \gamma + 2\pi] \setminus \Lambda$. Пусть $t \notin [\alpha - \epsilon, \beta + \epsilon]$. Тогда дробно-рациональная

функция $\frac{1}{N(\xi)N(\xi^{-1})(e^{it}-\xi)}$ равномерно непрерывна на контуре $\Gamma^{(\Delta)}$ и все её полюса находятся вне указанного контура, поэтому рассматриваемый предел равен нулю, причём сходимость в (4.24) будет равномерной по t . Пусть теперь $t \in [\alpha - \epsilon, \beta + \epsilon]$. Преобразуем

$$\frac{1}{N(\xi)\overline{N}(\xi^{-1})(e^{it}-\xi)} = -\frac{M(\xi, e^{-it})}{(N(\xi)\overline{N}(\xi^{-1})(N(e^{it})\overline{N}(e^{-it})))} + \frac{1}{(N(e^{it})\overline{N}(e^{-it})(e^{it}-\xi))}.$$

Поскольку $\Lambda \cap [\alpha - \epsilon, \beta + \epsilon] = \emptyset$, то $N(e^{it})\overline{N}(e^{-it}) > 0$ и

$$\int_{\Gamma_{\delta}^{(\Delta)}} \frac{d\xi}{N(\xi)\overline{N}(\xi^{-1})(e^{it}-\xi)} = \frac{1}{(N(e^{it})\overline{N}(e^{-it}))} \left(- \int_{\Gamma_{\delta}^{(\Delta)}} \frac{M(\xi, e^{-it})d\xi}{(N(\xi)\overline{N}(\xi^{-1}))} + \int_{\Gamma_{\delta}^{(\Delta)}} \frac{d\xi}{(e^{it}-\xi)} \right). \quad (4.25)$$

Первый интеграл в (4.25) стремится к нулю равномерно по t , а поведение второго уже было описано при выводе представления (4.15). Итак, существование предела (4.23) следует, грубо говоря, из упомянутой в замечании 2.2 теоремы о существовании сильного предела у J -монотонной ограниченной последовательности операторов в гильбертовом J -пространстве, а из предложения 3.5 вытекает, что этот предел J -с.с. Прямой подсчёт (4.22) даёт

$$E(\Delta) = \int_{\Delta} \frac{1}{|N(e^{it})|^2} dG_t. \quad (4.26)$$

То, что построенный оператор является проектором, доказывается с использованием тождества Гильберта для резольвент по той же схеме (см. [12, гл. I, §1, п. 3] или [26, гл. XI п. 148]), что и для обычного проектора Рисса, но с некоторой модификацией, поскольку в данном случае соответствующая Δ часть спектра, вообще говоря, изолированной не является. Итак, пусть $\Omega = [\alpha + \epsilon, \beta - \epsilon]$, $\alpha + \epsilon < \beta - \epsilon$, $r < d < 1$, $\Upsilon^{(\Omega)}$ — положительно ориентированный замкнутый контур, образованный двумя дугами $\left\{\frac{1}{d}e^{i\tau}\right\}_{\tau \in \Omega}$ и $\{de^{i\tau}\}_{\tau \in \Omega}$, а также двумя отрезками $\{\rho e^{i(\alpha+\epsilon)}\}_{\rho \in [d, \frac{1}{d}]}$ и $\{\rho e^{i(\beta-\epsilon)}\}_{\rho \in [d, \frac{1}{d}]}$, $\Upsilon_{\delta}^{(\Omega)}$ образуется из $\Upsilon^{(\Omega)}$ так же, как и выше. Чтобы избежать дополнительных сложностей допустим, что $\alpha + \epsilon, \beta - \epsilon \in [0, 2\pi i]_G$. В силу поставленных корректно определён оператор $E(\Omega) = -\frac{1}{2\pi i} \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Upsilon_{\delta}^{(\Omega)}} R_{\zeta}(U) d\zeta = \int_{\Omega} \frac{1}{|N(e^{it})|^2} dG_t$. Наша цель — найти произведение $E(\Delta)E(\Omega)$. Итак, $E(\Delta)E(\Omega) = -\frac{1}{4\pi^2} \lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_{\delta}^{(\Delta)}} \int_{\Upsilon_{\delta}^{(\Omega)}} R_{\xi}(U) R_{\zeta}(U) d\zeta d\xi$, но

$$R_{\xi}(U) R_{\zeta}(U) = \frac{R_{\xi}(U) - R_{\zeta}(U)}{\xi - \zeta}, \text{ поэтому}$$

$$\int_{\Gamma_{\delta}^{(\Delta)}} \int_{\Upsilon_{\delta}^{(\Omega)}} R_{\xi}(U) R_{\zeta}(U) d\zeta d\xi = \int_{\Gamma_{\delta}^{(\Delta)}} R_{\xi}(U) \left(\int_{\Upsilon_{\delta}^{(\Omega)}} \frac{d\zeta}{\xi - \zeta} \right) d\xi - \int_{\Upsilon_{\delta}^{(\Omega)}} R_{\zeta}(U) \left(\int_{\Gamma_{\delta}^{(\Delta)}} \frac{d\xi}{\xi - \zeta} \right) d\zeta,$$

т. е. $E(\Delta)E(\Omega) = E(\Omega)$. Поскольку $\lim_{\epsilon \rightarrow +0} E(\Omega) = E(\Delta)$, то $E^2(\Delta) = E(\Delta)$, следовательно, $E(\Delta)$ — оператор проектирования (не обязательно ортогонального). Поскольку одновременно $E(\Delta)$ — J -с.с. оператор, то $E(\Delta)$ — J -ортогональный проектор. Из формулы (4.23) следует, что $E(\Delta)$ перестановочен с U , поэтому $E(\Delta)\mathcal{H}$ и $(I - E(\Delta))\mathcal{H}$ — инвариантные подпространства оператора U . Для дальнейшего нам надо определить локализацию спектров операторов $U|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ и $U|_{(I-E(\Delta))\mathcal{H}}$. Рассмотрим произведение

$$(U - \zeta I) \frac{R_{\xi}(U)}{\xi - \zeta} = \frac{(U - \xi I) + (\xi - \zeta)I}{\xi - \zeta} R_{\xi}(U) = \frac{I}{\xi - \zeta} + R_{\xi}(U).$$

Пусть ζ находится в открытой области вне контура $\Gamma^{(\Delta)}$. Тогда

$$(U - \zeta I) \operatorname{s-lim}_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(\Delta)}} \frac{R_\xi(U) d\xi}{\xi - \zeta} = -2\pi i E(\Delta).$$

Последнее равенство означает, что вне контура $\Gamma^{(\Delta)}$ у оператора $U|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ нет спектра, что с учётом условия (4.19) даёт $\sigma(U|_{E(\Delta)\mathcal{H}}) \subset \{e^{it}\}_{t \in \Delta}$. Более того, подпространство $E(\Delta)\mathcal{H}$ с внутренним произведением $[\cdot, \cdot]$ является гильбертовым пространством, поэтому $U|_{E(\Delta)\mathcal{H}} = \int_{\Delta} e^{it} dE_t|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$, где

$$dE_t = \frac{1}{|N(e^{it})|^2} dG_t.$$

Пусть теперь ζ находится в открытой области ограниченной контуром $\Gamma^{(\Delta)}$. Тогда

$$(U - \zeta I) \operatorname{s-lim}_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(\Delta)}} \frac{R_\xi(U) d\xi}{\xi - \zeta} = 2\pi i (I - E(\Delta)).$$

Последнее равенство означает, что в открытой области, ограниченной контуром $\Gamma^{(\Delta)}$ у оператора $U|_{(I-E(\Delta))\mathcal{H}}$ нет спектра, что с учётом условия (4.19) даёт $\sigma(U|_{(I-E(\Delta))\mathcal{H}}) \subset (\mathbb{T} \setminus \{e^{it}\}_{t \in (\alpha, \beta)})$.

Окончательно результатом всех последних вычислений является следующая теорема.

Теорема 4.1. *В пространстве Понтрягина J -унитарный оператор U с унитарным спектром обладает спектральной функцией E_t , такой что (здесь $\Delta = [\alpha, \beta]$, $\alpha, \beta \notin \Lambda$, γ — некоторая константа)*

$$\left. \begin{aligned} \text{a.} \quad & \text{для любого } t \in [\gamma, 2\pi + \gamma] \setminus \Lambda \text{ верно } \operatorname{s-lim}_{\tau \rightarrow t-0} E_\tau = E_t, E_\gamma = \operatorname{s-lim}_{\tau \rightarrow \gamma+0} E_\tau = 0, E_{2\pi+\gamma} = I; \\ \text{b.} \quad & \text{для любого } t \in [\gamma, 2\pi + \gamma] \setminus \Lambda \text{ верно } UE_t = E_t U; \\ \text{c.} \quad & \text{если } E(\Delta)\mathcal{H} \neq \{0\}, \text{ то } \sigma(U|_{E(\Delta)\mathcal{H}}) \subset \{e^{it}\}_{t \in \Delta}; \\ \text{d.} \quad & \text{если } \Delta \cap \Lambda = \emptyset \text{ и } E(\Delta)\mathcal{H} \neq \{0\}, \text{ то подпространство } E(\Delta)\mathcal{H} \text{ положительно и} \\ & UE(\Delta) = \int_{\Delta} e^{it} dE_t; \\ \text{e.} \quad & \text{если } \Delta \cap \Lambda \neq \emptyset, \text{ то подпространство } E(\Delta)\mathcal{H} \text{ либо отрицательно, либо инде-} \\ & \text{финитно.} \end{aligned} \right\} \quad (4.27)$$

Доказательство. Зафиксируем γ на тех же условиях, что и в (4.16). Далее, упорядочим точки из Λ в порядке возрастания: $\gamma < \lambda_1 < \lambda_2 < \dots < \lambda_k < 2\pi + \gamma$ и выберем интервалы $E(\Delta_j) = [\alpha_j, \beta_j]$ $j = 0, 1, 2, \dots, k$ удовлетворяющие условиям (4.22) и

$$\beta_0 < \lambda_1 < \alpha_1, \beta_1 < \lambda_2 < \alpha_2, \dots, \beta_{k-1} < \lambda_k < \alpha_k. \quad (4.28)$$

Положим $\mathcal{H}_{reg} = E(\Delta_0)\mathcal{H}[\dot{+}]E(\Delta_1)\mathcal{H}[\dot{+}] \dots [\dot{+}]E(\Delta_k)\mathcal{H}$, $\mathcal{H}_{sing} = \mathcal{H}_{reg}^{[\perp]}$.

Спектр оператора $U|_{\mathcal{H}_{sing}}$ состоит из k изолированных дуг $Ark_j = \{e^{it}\}_{t \in [\beta_{j-1}, \alpha_j]}$, каждая из которых содержит ровно одну точку из Λ , и (напомним условие (4.19)) дуги $Ark_+ = \{e^{it}\}_{t \in [\beta_k, \gamma+2\pi] \cup [\gamma, \alpha_0]}$. Дуга Ark_+ соответствует положительному инвариантному подпространству (обозначим его $\dot{\mathcal{L}}$) оператора U , поскольку в противном случае у оператора U нашёлся бы неположительный собственный вектор g , отвечающий собственному числу $\nu \notin \sigma_p(U|_{\mathcal{L}_-})$. Но тогда (см. [14, теорема 2.3]) $g[\perp]\mathcal{L}_-$, что противоречит максимальности $\mathcal{L}_-$ как неположительного подпространства. Оператор $\dot{U} = U|_{\dot{\mathcal{L}}}$ — это унитарный оператор в гильбертовом пространстве $\dot{\mathcal{L}}$ со скалярным произведением $[\cdot, \cdot]$ причём $\sigma(\dot{U}) \subset Ark_+$, поэтому для $\dot{U}$ существует спектральная функция $\dot{E}$ и соответствующее интегральное представление. Если при интегральном представлении в качестве пределов интегрирования взяты точки γ и $2\pi + \gamma$, то носитель спектральной меры имеет вид $[\beta_k, 2\pi + \gamma] \cup [\gamma, \alpha_0]$, так что проекторы $\dot{E}([\beta_k, 2\pi + \gamma])$ и $\dot{E}([\gamma, \alpha_0])$ будут корректно определены. Доопределим $\dot{E}([\beta_k, 2\pi + \gamma])$ и $\dot{E}([\gamma, \alpha_0])$ до проекторов $E([\beta_k, 2\pi + \gamma])$ и $E([\gamma, \alpha_0])$, заданных на всём пространстве $\mathcal{H}$, полагая $E([\beta_k, 2\pi + \gamma])|_{\dot{\mathcal{L}}^{[\perp]}} = E([\gamma, \alpha_0])|_{\dot{\mathcal{L}}^{[\perp]}} = 0$. Ясно, что $E([\beta_k, 2\pi + \gamma])U = UE([\beta_k, 2\pi + \gamma])$ и $E([\gamma, \alpha_0])U = UE([\gamma, \alpha_0])$. Разумеется, эти же проекторы

можно было построить просто изменив пределы интегрирования в (4.20). Далее, поступим сходным образом для построения проекторов $E([\beta_{j-1}, \alpha_j])$ $j = 1, 2, \dots, k$: сначала возьмём сужение оператора $U|_{\mathcal{H}_{sing}}$, построив проектор Рисса для изолированной части Ark_j его спектра. Предложение 3.5 гарантирует, что полученный при этом проектор будет J -ортогональным, следующий шаг — доопределение нулём этого проектора на $\mathcal{H}_{reg}$. Итак, $E_\gamma = 0$, $E_{\alpha_0} = E([\gamma, \alpha_0])$,

$$E_{\beta_0} = E_{\alpha_0} + E([\alpha_0, \beta_0]), \quad E_{\alpha_1} = E_{\beta_0} + E([\beta_0, \alpha_1]), \dots, \quad E_{2\pi+\gamma} = I. \quad (4.29)$$

В силу (4.28) набор $\{\alpha_j, \beta_j\}_{j=0}^k$ легко меняется, причём согласованность разных вариантов при этом обеспечена формулой (4.26), так что проектор E_t по схеме (4.29) можно определить для любого $t \in [\gamma, 2\pi+\gamma]_G \setminus \Lambda$. Осталось определить E_t в точках разрыва функции G_t : $E_t = s - \lim_{\tau \rightarrow t-0} E_\tau$ для любого $t \notin \Lambda$. В заключение отметим, что выполнение условий (4.27) гарантировано алгоритмом построения E_t . $\square$

Обратимся к последнему пункту в (4.27). В его условиях проекционно полное подпространство $E(\Delta)\mathcal{H}$ содержит либо отрицательный, либо нейтральный собственный вектор оператора U . Проекционно полное подпространство не может быть семидефинитным (в данном случае — неположительным), поэтому оно либо отрицательно, либо (если найдется нейтральный собственный вектор) индефинитно. Итак, пусть $\lambda_0 \in \Lambda$. Тогда возможны три взаимоисключающих варианта:

- для некоторого интервала $\Delta = [a, b)$, такого что $(a, b) \cap \Lambda = \{\lambda_0\}$ и $a, b \notin \Lambda$, спектральная функция $E_t|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ ограничена и после доопределения $E_{\lambda_0} = s - \lim_{t \rightarrow \lambda_0-0} E_t$ справедливо $UE(\Delta) = \int_{\Delta} e^{it} dE_t$;
- для некоторого интервала $\Delta = [a, b)$, такого что $(a, b) \cap \Lambda = \{\lambda_0\}$ и $a, b \notin \Lambda$, спектральная функция $E_t|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ ограничена, но после доопределения $E_{\lambda_0} = s - \lim_{t \rightarrow \lambda_0-0} E_t$ имеем $UE(\Delta) \neq \int_{\Delta} e^{it} dE_t$;
- для некоторого интервала $\Delta = [a, b)$, такого что $(a, b) \cap \Lambda = \{\lambda_0\}$ и $a, b \notin \Lambda$, спектральная функция $E_t|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ неограничена.

Отметим, что ограниченность спектральной функции $E_t|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ имеет (или не имеет) место одновременно для всех интервалов $\Delta = [a, b)$, подчинённых условиям $(a, b) \cap \Lambda = \{\lambda_0\}$ и $a, b \notin \Lambda$ с фиксированным λ_0 , а наличие предела $s - \lim_{t \rightarrow \lambda_0-0} E_t$ следует из теоремы о существовании сильного

предела у J -монотонной последовательности операторов (аналог теоремы Вижье—С.-Надя [26, гл. VII, §1, п. 104]). Рассмотрим теперь каждую из этих опций в терминах теории спектральных операторов (см. [13]). Первый вариант означает, что оператор $U|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ подобен унитарному оператору, т. е. является скалярным спектральным оператором с унитарным спектром. Второй вариант соответствует случаю, когда оператор $U|_{E(\Delta)\mathcal{H}}$ является спектральным оператором, состоящим из суммы скалярного спектрального оператора и нетривиального конечномерного нильпотентного оператора. Итак, только третий вариант отвечает случаю обобщённых спектральных операторов.

Замечание 4.1. При выводе (4.27) предполагалось, что $N(\xi)$ — минимальный аннулирующий многочлен для $U|_{\mathcal{L}_-}$, но реально важным для него является выполнение (4.1) и отсутствие нулей вне множества $\sigma(U|_{\mathcal{L}_-})$, т. е. степень $N(\xi)$ принципиального значения не имеет и при необходимости может быть увеличена.

5. МОДЕЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ ЦИКЛИЧЕСКОГО J -УНИТАРНОГО ОПЕРАТОРА В ПРОСТРАНСТВЕ ПОНТЯГИНА

Для начала напомним формулу, по которой вычисляется значение функции от оператора, голоморфной на спектре этого оператора (см. [26, гл. XI, п. 151]): $f(C) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathcal{D}} f(\xi) R_\xi(C) d\xi$, где C — заданный оператор, $\mathcal{D}$ — открытая область комплексной области, содержащая спектр указанного оператора, граница $\partial \mathcal{D}$ которой положительно ориентирована и состоит из конечного числа замкнутых кривых.

В нашем случае роль C будет играть действующий в пространстве Понтрягина J -унитарный оператор U , а $\mathcal{D}$ — это кольцо $\mathcal{Z} = \{\xi : r < |\xi| < R\}$, $r < 1 < R$. Воспользуемся представлением (4.18). Временно допустим, что функция $\frac{f(\xi)}{N(\xi)\overline{N}(\xi^{-1})}$ имеет устранимые особенности в нулях дробно-рациональной функции $N(\xi)\overline{N}(\xi^{-1})$. Тогда

$$f(U) = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\partial \mathcal{Z}} \frac{f(\xi)}{N(\xi)\overline{N}(\xi^{-1})} \left(\int_{\gamma}^{\frac{2\pi+\gamma}{\xi}} \frac{1}{e^{it} - \xi} dG_t \right) d\xi,$$

откуда

$$f(U) = \int_{\gamma}^{\frac{2\pi+\gamma}{\xi}} \frac{f(e^{it})}{N(e^{it})\overline{N}(e^{-it})} dG_t. \quad (5.1)$$

Пусть теперь $f(\xi)$ — произвольная функция, голоморфная в области $\mathcal{A}$ и на её границе, $P_f(\xi)$ — интерполяционный полином для функции $f(\xi)$ с узлами интерполяции, совпадающие с нулями функции $N(\xi)\overline{N}(\xi^{-1})$ с учётом их кратности. Заменяя $f(\xi)$ на $f(\xi) - P_f(\xi)$ в (5.1), получим

$$f(U) = P_f(U) + \int_{\gamma}^{\frac{2\pi+\gamma}{\xi}} \frac{f(e^{it}) - P_f(e^{it})}{N(e^{it})\overline{N}(e^{-it})} dG_t. \quad (5.2)$$

При построении модельного пространства роль функции $f(\xi)$ будут играть произведения тригонометрических полиномов или, точнее, соответствующих дробно-рациональных аналитических функций, а именно, пусть

$$u(e^{it}) = \sum_{j=-\nu}^{\nu} \alpha_j e^{ijt} \quad \text{и} \quad v(e^{it}) = \sum_{j=-\nu}^{\nu} \beta_j e^{ijt} \quad (5.3)$$

— два тригонометрических полинома. Формально они записаны как полиномы одного порядка, но реально благодаря равенству нулю некоторых коэффициентов их степени могут различаться. Итак, с полиномом $u(e^{it})$ мы свяжем функцию

$$u(\xi) = \sum_{j=-\nu}^{\nu} \alpha_j \xi^j, \quad (5.4)$$

с полиномом $v(e^{it})$ — функцию $v(\xi) = \sum_{j=-\nu}^{\nu} \beta_j \xi^j$, при этом полиному $\overline{v(e^{it})} = \sum_{j=-\nu}^{\nu} \overline{\beta_j} e^{-ijt}$ соответ-

ствует функция $\overline{v\left(\frac{1}{\xi}\right)}$, произведению полиномов, очевидно, отвечает произведение соответствующих дробно-рациональных функций. Отметим для дальнейшего формулу дифференцирования $\left(\overline{v\left(\frac{1}{\xi}\right)}\right)'_{\xi} = -\frac{1}{\xi^2} \overline{v'\left(\frac{1}{\xi}\right)}$.

Предположим теперь дополнительно, что U — циклический оператор в следующей версии: найдётся такой вектор $h \in \mathcal{H}$, что система $h_l = U^l h$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ является полной в $\mathcal{H}$. Положим $c_l = [U^l h, h] = [h_l, h_0]$, где $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Полагая $f(\xi) = \xi^l$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, из (5.2) получаем (ср. с [39])

$$c_l = \sum_{j=0}^{2n} \alpha_j^{(l)} c_j + \int_{\gamma}^{\frac{2\pi+\gamma}{\xi}} \frac{e^{itl} - \sum_{j=0}^{2n} \alpha_j^{(l)} e^{itj}}{N(e^{it})\overline{N}(e^{-it})} d[G_t h, h], \quad (5.5)$$

где $\sum_{j=0}^{2n} \alpha_j^{(l)} \xi^j$ — интерполяционный многочлен для ξ^l , $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, n$ $Q(\xi)$. Поясним, что для $0 \leq l < 2n$ представление (5.5) сводится к тривиальному равенству $c_l = c_l$.

Перейдём теперь к формированию модельного пространства Понтрягина как некоторого пространства функций. отождествим (циклический) вектор h с тождественной единицей, вектор

$Uh - c e^{it}$, $U^2h - c e^{2it}$, $U^{-1}h - c e^{-it}$ и т. д. Итак, стартовым линейным многообразием функций у нас будет множество тригонометрических полиномов $\mathfrak{T}$, записанных в комплексной форме. Превратим множество $\mathfrak{T}$ в линейное пространство с внутренним скалярным произведением $[\cdot, \cdot]_{\mathfrak{T}}$ полагая $[e^{ijt}, e^{ilt}]_{\mathfrak{T}} = c_{j-l}$, $j, l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, где величины c_{j-l} заданы в (5.5). По построению линеал $\mathfrak{T}$ изометричен плотному подмножеству пространства Понтрягина $\mathcal{H}$, поэтому он после пополнения превращается в пространство Понтрягина, которое мы обозначим $\Pi(\Phi)$, а исходный оператор будет подобен действующему в $\Pi(\Phi)$ оператору умножения U_{Θ} на функцию e^{it} . Указанное пополнение можно реализовать разными способами, но все эти способы топологически эквивалентны. Один из вариантов — выделить в $\mathfrak{T}$ максимальное отрицательное подпространство $\mathcal{L}_-$ и найти в $\mathfrak{P}$ J -ортогональное дополнение $\mathcal{L}_+ = \mathcal{L}_-^{\perp}$. Линеал $\mathcal{L}_+$ с внутренним эрмитовым произведением $[\cdot, \cdot]$ — это предгильбертово пространство, пополнив которое мы и получим (в прямой сумме с $\mathcal{L}_-$) пространство Понтрягина $\Pi(\Phi)$. Формулы (5.5) показывают, что, вообще говоря, как гильбертова структура, так и структура пространства Понтрягина на функциональном пространстве $\Pi(\Phi)$ может задаваться не обычной мерой Лебега—Стилтьеса, а некоторым распределением (обобщённой функцией) Φ . Причину этого явления легко понять, если обратиться к представлению (5.2). Действительно, в этой формуле важную роль играет интерполяционный многочлен $P_f(\xi)$ для функции $f(\xi)$, причём с кратными узлами интерполяции, поэтому нахождение такого многочлена требует вычисления в узлах интерполяции не только значения функции $f(\xi)$, но и её производных. Если вычисление значения функции в точке может быть реализовано через дискретную меру, то вычисление производной — задача, к теории меры не сводящаяся. Разбор конкретного примера, связанного не с J -унитарным, а с J -с.с. оператором, можно найти в [30], здесь же мы рассмотрим примеры, непосредственно иллюстрирующие классификацию особенностей для J -унитарного оператора.

Пример 5.1. Пусть $\mathcal{H} = L^2(0, 2\pi) \dot{+} \mathbb{C}^2$, где $\mathbb{C}^2$ — двумерное унитарное пространство. Зафиксируем в $\mathbb{C}^2$ ортонормированный базис $\{s, z\}$ и положим

- $Jf(t) = f(t)$, $Uf(t) = e^{it}f(t)$, $f(t) \in L^2(0, 2\pi)$;
- $Js = z$, $Jz = s$, $Us = -s + iz$, $Uz = -z$;
- $[f(t), g(t)] = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(t)\overline{g(t)}dt$, $[f(t), s] = [f(t), z] = [s, s] = [z, z] = 0$, $[s, z] = 1$,
- $h = 1 + s$.

Непосредственно проверяется, что U — циклический J -унитарный оператор, а h — соответствующий циклический вектор. Далее, $U^l h = (-1)^l s + (-1)^{l-1} l i z + e^{it}$, где $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$, откуда $c_0 = 1$, $c_l = (-1)^{(l-1)} l i$, $l = \pm 1, \pm 2, \dots$, а для $d_l = c_{l-1} + c_l + c_{l+1}$ $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ верно $d_{-1} = d_1 = 1$, $d_0 = 2$, $d_l = 0$ $l = \pm 2, \pm 3, \dots$ и $d_l = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{itl} d\sigma(t)$, $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$,

$\sigma(t) = \int_0^t |e^{i\tau} + 1|^2 d\tau$. Последнее представление — это представление вида (4.3), поэтому

$$c_l = (-1)^{l-1} ((l-1)c_0 + l c_1) + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{e^{itl} - (-1)^{l-1} ((l-1) + l e^{it})}{|e^{it} + 1|^2} d\sigma(t),$$

где c_0 и c_1 те же, что и выше, $(-1)^l + l(-1)^{l-1}(\xi + 1)$ — интерполяционный многочлен для ξ^l , $l = -1, \pm 2, \pm 3, \dots$. Последняя формула с учетом (5.2), (5.3) и (5.4) даёт представление

$$[u(e^{it}, 1)]_{\mathfrak{T}} = [u(U)h, h] = u(-1)c_0 + u'(-1)(c_1 + c_0) + \int_0^{2\pi} \frac{u(e^{it}) - u(-1) - u'(-1)(e^{it} + 1)}{|e^{it} + 1|^2} d\sigma(t). \quad (5.6)$$

Вывод представления (5.6) носил в целом общий характер, специфическим было только условие $N(e^{it}) = e^{it} + 1$. С учётом конкретного вида функции $\sigma(t)$, а также значений c_0 и c_1 представление (5.6) сильно упрощается:

$$[u(e^{it}, 1)]_{\mathfrak{T}} = u'(-1)i + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) dt. \quad (5.7)$$

Представление (5.7) можно использовать для непосредственного построения модельного пространства Понтрягина и анализа полученного результата. Заменим в (5.7) функцию $u(\xi)$ на произведение $u(\xi)\overline{v(\frac{1}{\xi})}$

$$[u(e^{it}), v(e^{it})]_{\mathfrak{T}} = [u(e^{it})\overline{v(e^{it})}, 1]_{\mathfrak{T}} = (u'(-1)\overline{v(-1)} - u(-1)\overline{v'(-1)})i + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it})\overline{v(e^{it})} dt. \quad (5.8)$$

Рассмотрим линеал $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{T}$, состоящий из тригонометрических полиномов вида $\tilde{u}(e^{it}) = (e^{it} + 1)u(e^{it})$, где $u(e^{it}) \in \mathfrak{T}$. Для $\tilde{u}, \tilde{v} \in \mathfrak{M}$ имеем $[\tilde{u}(e^{it}), \tilde{v}(e^{it})]_{\mathfrak{T}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \tilde{u}(e^{it})\overline{\tilde{v}(e^{it})} dt$.

Если рассмотреть (5.8) как линеал в $L^2(0, 2\pi)$, то, как легко проверить, замыкание $\mathfrak{M}$ по норме совпадает с $L^2(0, 2\pi)$, но, тем не менее, замыкание $\mathfrak{M}$ как подмножества в $\Pi(\Phi)$, будет вырождено. Действительно, пусть $\tilde{v}_j(\xi) = \frac{1}{2^{2j+1}}(\xi - 1)^{2j}(\xi^2 - 1)$, $j = 1, 2, \dots$, $u(e^{it})$ — произвольный элемент из $\mathfrak{T}$. Тогда $\tilde{v}_j(-1) = 0$, $\tilde{v}'_j(-1) = 1$,

$$[\tilde{v}_l(e^{it}), \tilde{v}_l(e^{it})]_{\mathfrak{T}} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \sin^2(t) \left(\sin\left(\frac{t}{2}\right)\right)^{2l} dt \rightarrow 0 \quad \text{при } l \rightarrow \infty.$$

Тогда

$$\lim_{l \rightarrow \infty} [u(e^{it}), \tilde{v}(e^{it})] = -iu(-1) \quad (5.9)$$

и согласно предложению 2.3 замыкание $\mathfrak{M}$ является вырожденным неотрицательным подпространством. При доказательстве предложения 2.3 использовалась последовательность из $\mathfrak{M}$, сходящаяся к вектору (функции) из изотропной части замыкания, который в силу (5.9) можно отождествить с обобщённой функцией $i\delta(t + \pi)$. Поскольку в роли пространства пробных функций у нас выступают тригонометрические многочлены или, в более общей постановке, представители некоторого класса 2π -периодических функций, поясним исходные позиции.

Пространство пробных функций здесь — это множество 2π -периодических функций вида $f(e^{it})$, где $f(\xi)$ — произвольная функция, заданная и аналитическая на множестве $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. В силу теоремы Вейерштрасса о равномерно сходящихся рядах аналитических функций (см. [24, гл. 3, §4, с. 265] или [21, гл. I, §5, п. 19, с. 68-69]) такое пространство аналитических функций является счётно-нормированным пространством с системой норм $\{\|f(\xi)\|_k = \max_{\frac{1}{k+1} \leq |\xi| \leq k+1} \{|f(\xi)|\}\}_{k=1}^{\infty}$.

Обозначим это пространство символом $\mathcal{A}$, а соответствующее пространство пробных функций — $\mathcal{A}(\mathcal{T})$, при этом указанные пространства гомеоморфны как линейные топологические пространства, но, тем не менее, оператор дифференцирования в $\mathcal{A}$ и $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ — это разные (в том числе и с точки зрения спектральных свойств) операторы.

Действительно, $\frac{df(z)}{dz} = f'(z)$, $\frac{dg(t)}{dt} = \frac{df(e^{it})}{dt} = f'(e^{it}) \cdot i \cdot e^{it}$, т. е. действующему в $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ оператору $g(t) \mapsto g'(t)$ соответствует действующий в $\mathcal{A}$ оператор $f(z) \mapsto izf'(z)$. Добавим, что структурой, альтернативной $\mathcal{A}$ или $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ является пространство $\mathfrak{s}_{(sc)}$ двусторонних последовательностей со сверхлинейной сходимостью (об этом понятии см., напр., [9]), в нашем случае удобнее определять это пространство, как пространство таких последовательностей $\{c_k\}_{k=-\infty}^{\infty}$, что $\sum_{k=1}^{\infty} (|c_k| + |c_{-k}|)\rho^k < \infty$ для любого $\rho > 1$. Последнее пространство удобно для описания $\mathfrak{s}_{(sc)}^*$, но нам достаточно иметь конкретную функциональную реализацию некоторых (а не всех) функционалов из $\mathcal{A}(\mathcal{T})^*$.

Итак, далее обобщённые функции — это непрерывные линейные функционалы на пространстве $\mathcal{A}(\mathcal{T})$. Опишем некоторые из них. Как и обычно, функцию Дирака определим равенством $\ll f(t), \delta(t - t_0) \gg = f(t - t_0)$. Эту обобщённую функцию, разумеется, можно определить и как предел обычных 2π -периодических функций. Возьмём, скажем, ядро Фейера $F_k(\tau - t_0) = \frac{\sin^2(\frac{k+1}{2}(\tau - t_0))}{2(k+1)\sin^2(\frac{\tau - t_0}{2})}$. О ядре Фейера и его свойствах упоминается в некоторых книгах по математическому анализу (см., напр., [19, гл. 7, §55.5]) из специализированных монографий укажем

на [8, §47]. Тогда для любой функции $f(t) \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$ верно $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} f(t) F_k(t - t_0) dt = \pi f(t_0)$, т. е. $\lim_{\rightarrow \infty} F_k(t - t_0) = \pi \delta(t - t_0)$.

Далее, для двух 2π -периодических непрерывно дифференцируемых функций $\omega(\tau)$ и $\eta(\tau)$ верно

$$\int_0^{2\pi} (\omega'(\tau)\eta(\tau) + \omega(\tau)\eta'(\tau)) d\tau = (\omega(2\pi)\eta(2\pi))' - (\omega(0)\eta(0))' = 0,$$

откуда

$$\int_0^{2\pi} \omega'(\tau)\eta(\tau) d\tau = - \int_0^{2\pi} \omega(\tau)\eta'(\tau) d\tau, \quad (5.10)$$

т. е. в рамках описываемого подхода действует та же формула, что и при традиционном подходе к дифференцированию обобщённых функций.

Потребуем также, чтобы $\omega(\tau) \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$. Оператор дифференцирования непрерывен в $\mathcal{A}(\mathcal{T})$, поэтому из (5.10) следует $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^{2\pi} \omega(\tau) F'_k(\tau - t_0) d\tau = -\pi \omega'(t_0)$. Последняя формула, очевидно, определяет $\delta'(t - t_0)$ как непрерывный линейный функционал на $\mathcal{A}(\mathcal{T})$.

Перейдём теперь непосредственно к пространству $\Pi(\Phi)$ и действию на нём оператора умножения на e^{it} . Индефинитная полуторалинейная форма задана на $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ формулой (ср. с (5.8)) $[u(e^{it}), v(e^{it})]_{\mathcal{A}(\mathcal{T})} = \ll u(e^{it}) \overline{v(e^{it})}, \Phi \gg$, где Φ — линейный функционал (распределение), $\ll \cdot, \cdot \gg$ — «билинейная» форма, связывающая между собой элементы из $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ и соответствующие непрерывные функционалы: $\ll \cdot, \Phi \gg = \ll \cdot, \delta'(t + \pi) \gg + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \cdot dt$ на $\mathcal{A}(\mathcal{T})$.

Пополнение $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ как пространства Понтрягина порождает не только пространство $L(0, 2\pi)$, но и два дополнительных элемента — «локализатора» распределений $\ll \cdot, \delta(t + \pi) \gg$ и $\ll \cdot, \delta'(t + \pi) \gg$, которые мы обозначим $\mathcal{L}_\pi$ и $\mathcal{L}'_\pi$ соответственно:

$$[u(e^{it}), \mathcal{L}_\pi]_{\Pi(\Phi)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \overline{\delta(t + \pi)} dt, \quad [u(e^{it}), \mathcal{L}'_\pi]_{\Pi(\Phi)} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \overline{\delta'(t + \pi)} dt.$$

Из предыдущего $\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \overline{\delta'(t + \pi)} dt = -\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (u(e^{it}))'_t \overline{\delta(t + \pi)} dt = iu'(-1)$. В качестве следующего шага положим $v(\xi) = -\frac{(\xi - 1)^2}{4\xi}$. Тогда $v'(\xi) = \frac{1 - \xi^2}{4\xi^2}$, $v(e^{it}) = \sin^2(t/2)$. Вычислим $\lim_{l \rightarrow \infty} [u(e^{it}), v_l(e^{it})]_{\Pi(\Phi)}$, где $u(e^{it}) \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$, $v_l(\xi) = (v(\xi))^l$. Тогда в силу (5.8) $\lim_{l \rightarrow \infty} [u(e^{it}), v_l(e^{it})]_{\Pi(\Phi)} = iu(u'(t + 1))$, так что значение $\lim_{l \rightarrow \infty} v_l(e^{it})$ можно трактовать как $-\mathcal{L}'_\pi$.

В качестве очередного шага найдём величину $[\mathcal{L}'_\pi, \mathcal{L}_\pi]_{\Pi(\Phi)} = \lim_{l \rightarrow \infty} [-v(e^{it}), -i\tilde{v}(e^{it})]_{\Pi(\Phi)} = -1$. Аналогично показывается, что $[\mathcal{L}_\pi, \mathcal{L}_\pi]_{\Pi(\Phi)} = 0$ и $[\mathcal{L}'_\pi, \mathcal{L}'_\pi]_{\Pi(\Phi)} = 0$.

Далее,

$$\begin{aligned} 2\pi \cdot [u(e^{it}), e^{it} \mathcal{L}'_\pi]_{\Pi(\Phi)} &= \int_0^{2\pi} u(e^{it}) \overline{(e^{it} \delta'(t + \pi))} dt = - \int_0^{2\pi} (u(e^{it}) e^{-it})'_t \overline{\delta(t + \pi)} dt = \\ &= - \int_0^{2\pi} (i \cdot u'(e^{it}) - iu(e^{it}) e^{-it}) \overline{\delta(t + \pi)} dt = -2\pi i(u'(-1) + u(-1)) = -2\pi [u(e^{it}), (\mathcal{L}'_\pi - i\mathcal{L}_\pi)]_{\Pi(\Phi)}. \end{aligned}$$

Для завершения всей конструкции определим на $\Pi(\Phi)$ каноническую норму, соответствующую индефинитному скалярному произведению: $\|u(e^{it})\|^2 = |u'(-1)|^2 + |u(-1)|^2 + \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |u(e^{it})|^2 dt$.

Наметим теперь несколько иной, но тоже функциональный подход, построенный непосредственно в терминах пространстве $\mathcal{A}$. Пусть $\phi(\xi)$ — аналитическая на $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{T} \cup \{0\})$ функция, $\mathbb{T}(r)$ — положительно ориентированный контур $\{\xi : |\xi| = r\}$, $r > 0$, $r \neq 1$. Тогда интеграл $\frac{1}{2\pi i} \oint_{\mathbb{T}(r)} f(\xi) \phi(\xi) d\xi$ определяет на $\mathcal{A}(\mathcal{T})$ ($f(e^{it}) \in \mathcal{A}(\mathcal{T})$) непрерывный линейный функционал, причём он имеет одно и то же значение для любого $r < 1$, а при любом $r > 1$ это, вообще говоря, будет другой не зависящий от r функционал. Введём теперь функционал

$$\Phi(f(e^{it})) = \frac{1}{2\pi i} \left(\oint_{\mathbb{T}(1/r)} f(\xi) \phi(\xi) d\xi - \oint_{\mathbb{T}(r)} f(\xi) \phi(\xi) d\xi \right), \quad (5.11)$$

где $f(\xi)$ и $\phi(\xi)$ те же, что и выше, $r < 1$. Возьмём $\phi(\xi) = (\xi - \xi_0)^{-1}$, $|\xi_0| = 1$. Тогда $\Phi(f(e^{it})) = f(\xi_0) = f(e^{it_0})$. Если в (5.11) при выбранном $\phi(\xi)$ взять $r \rightarrow 1$, то

$$f(e^{it_0}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(f\left(\frac{e^{it}}{r}\right) \frac{1}{(e^{it} - re^{it_0})} - f(re^{it}) \frac{r}{re^{it} - e^{it_0}} \right) e^{it} dt. \quad (5.12)$$

Без ограничения общности можно предположить, что $t_0 \in (0, 2\pi)$, т. к. в противном случае достаточно сменить пределы интегрирования. Пусть $\epsilon > 0$ таково, что $(t_0 - \epsilon, t_0 + \epsilon) \subset (0, 2\pi)$. Тогда подынтегральное выражение в (5.12) равномерно стремится к нулю при $r \rightarrow 1 - 0$, т. е. выражение (5.12) определяет, как обычно, δ -функцию, сосредоточенную в точке t_0 для $\mathcal{A}(\mathcal{T})$.

Разумеется, список подобных реализаций может быть продолжен, в частности, если взять $\phi(\xi) = (\xi - \xi_0)^{-2}$, то $\Phi(f(e^{it})) = f'(\xi_0) = f'(e^{it_0})$. Далее, если $f(\xi), g(\xi) \in \mathcal{A}$, то $f(\xi) \overline{g(1/\bar{\xi})} \in \mathcal{A}$. Пусть $\phi(\xi) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{dt}{e^{it} - \xi}$. Тогда (см. (5.11)) $\Phi(f(\xi) \overline{g(1/\bar{\xi})}) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(e^{it}) \overline{g(e^{it})} dt$. Подводя итог, можно констатировать, что выражения вида (5.8) реализуемы с помощью функций $\phi(\xi)$, аналитических на $\mathbb{C} \setminus (\mathbb{T} \cup \{0\})$. Такой подход выглядит более громоздким, чем изложенный выше, но зато он не требует прямого привлечения обобщённых функций.

6. СПЕКТРАЛЬНОЕ РАЗЛОЖЕНИЕ J -УНИТАРНОГО ОПЕРАТОРА КЛАССА D_κ^+

В этом разделе пространство с индефинитной метрикой — это сепарабельное гильбертово пространство $\mathcal{H}$, а операторы, если не оговорено противное, ограничены и действуют в $\mathcal{H}$ (см. [2]).

Вначале отметим следующий геометрический факт.

Предложение 6.1. *Если $\mathcal{L}$ — максимальное семидефинитное подпространство из $\mathcal{H}$, P — J -ортотпроектор и $P\mathcal{L} \subseteq \mathcal{L}$, то линеал $P\mathcal{L}$ является максимальным семидефинитным подпространством относительно $P\mathcal{H}$.*

Пусть $\mathcal{L}$ — некоторое подпространство пространства Крейна. Обозначим символом $\mathcal{L}^0 = \mathcal{L} \cap \mathcal{L}^{[\perp]}$ его изотропную часть. Говорят, что подпространство $\mathcal{L}_+$ ($\mathcal{L}_-$) принадлежит классу $\mathbf{h}^+$ ($\mathbf{h}^-$), если $\mathcal{L}_+^0$ ($\mathcal{L}_-^0$) конечномерно, а фактор-пространство $\widehat{\mathcal{L}}_+ = \mathcal{L}_+ / \mathcal{L}_+^0$ ($\widehat{\mathcal{L}}_- = \mathcal{L}_- / \mathcal{L}_-^0$) является гильбертовым (анти-гильбертовым) относительно индуцированной индефинитной метрики, или, что эквивалентно, $\mathcal{L}_+ \in \mathbf{h}^+$ ($\mathcal{L}_- \in \mathbf{h}^-$), если оно разлагается в сумму конечномерного изотропного и равномерно положительного (равномерно отрицательного) подпространств.

Множество максимальных неотрицательных и максимальных неположительных подпространств будем обозначать через $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^-$, соответственно. Во избежание недоразумений подчеркнём, что при определении $\mathbf{h}^+$, $\mathbf{h}^-$, $\mathfrak{M}^+$ и $\mathfrak{M}^-$ речь шла именно о подпространствах, а не о линеалах (см. Замечание 3.1).

Будем говорить, что оператор T принадлежит классу $\mathbf{H}$ и писать $T \in \mathbf{H}$, если у него существуют инвариантные подпространства $\mathcal{L}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm$ и все такие подпространства принадлежат классу $\mathbf{h}^\pm$, соответственно.

Определение 6.1. Множество $\mathfrak{A} = \{A\}$ самосопряженных линейных операторов, действующих в пространстве Крейна, принадлежит классу $\mathbf{K}(\mathbf{H})$, $\mathfrak{A} \in \mathbf{K}(\mathbf{H})$, если существует такой самосопряженный оператор $B \in \mathbf{H}$ в этом пространстве, что $BA = AB$ при всех $A \in \mathfrak{A}$. Если $\mathfrak{A}$ состоит из одного оператора A , то будем говорить, что A принадлежит классу $\mathbf{K}(\mathbf{H})$ и писать $A \in \mathbf{K}(\mathbf{H})$.

Определение 6.2. Скажем, что семейство $\mathfrak{A} = \{A\}$ самосопряженных линейных операторов, действующих в пространстве Крейна, принадлежит классу $\mathbf{D}_\kappa^+$, $\mathfrak{A} \in \mathbf{D}_\kappa^+$, если для него найдется пара инвариантных подпространств $\mathcal{L}_\pm \in \mathfrak{M}^\pm \cap \mathbf{h}^\pm$, $\mathcal{L}_+[\perp]\mathcal{L}_-$ с размерностью подпространства $\mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_-$, равной κ , $\kappa < \infty$. Если семейство $\mathfrak{A} = \{A\}$ состоит из единственного оператора A , то мы будем также писать $A \in \mathbf{D}_\kappa^+$.

Определение операторов класса $\mathbf{D}_\kappa^+$ можно распространить и на операторы, которые не являются J -с.с.

Определение 6.3. Скажем, что оператор D принадлежит к классу $\mathbf{D}_\kappa^+$, если $\{D, D^c\} \in \mathbf{D}_\kappa^+$.

Именно так в [32] были введены J -нормальные операторы класса $\mathbf{D}_\kappa^+$.

Рассмотрим J -унитарный оператор U , такой что для него найдётся инвариантное подпространство $\mathcal{L}_+ \in \mathfrak{M}^+ \cap \mathbf{h}^+$. В силу предложения 3.4 подпространство $\mathcal{L}_- = \mathcal{L}_+^{[1]}$ также будет инвариантным подпространством для U , т. е. $U \in \mathbf{D}_\kappa^+$. Положим

$$\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_+ \cap \mathcal{L}_-, \quad \mathcal{L}_2 = \mathcal{L}_+ \ominus \mathcal{L}_1, \quad \mathcal{L}_3 = \mathcal{L}_- \ominus \mathcal{L}_1, \quad \mathcal{L}_0 = J\mathcal{L}_1. \quad (6.1)$$

Поскольку по условию подпространства $\mathcal{L}_2$ и $\mathcal{L}_3$ являются равномерно дефинитными, то без ограничения общности можно считать, что относительно разложения

$$\mathcal{H} = \mathcal{L}_0 \oplus \mathcal{L}_1 \oplus \mathcal{L}_2 \oplus \mathcal{L}_3, \quad \dim \mathcal{L}_0 = \dim \mathcal{L}_1 = \kappa, \quad (6.2)$$

оператор J имеет матричное представление

$$J = \begin{pmatrix} 0 & V^{-1} & 0 & 0 \\ V & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -I_3 \end{pmatrix}, \quad (6.3)$$

где $V: \mathcal{L}_0 \rightarrow \mathcal{L}_1$ — изометрический оператор, а I_2 и I_3 — тождественные операторы в соответствующих подпространствах.

Поскольку оператор U является J -унитарным, то он обратим и $U^{-1} = U^c$. Рассмотрим подпространство $U\mathcal{L}_1$. Поскольку $\mathcal{L}_1$ нейтрально, то нейтральным будет и $U\mathcal{L}_1$, более того, совпадают (в силу обратимости U) их размерности. Поскольку изотропная часть подпространства $\mathcal{L}_+$ определяется однозначно, то $U\mathcal{L}_1 = \mathcal{L}_1$. Итак, подпространство $\mathcal{L}_1$ является инвариантным подпространством оператора U , который имеет относительно разложения (6.3) матричное представление

$$U = \begin{pmatrix} U_{00} & 0 & 0 & 0 \\ U_{10} & U_{11} & U_{12} & U_{13} \\ U_{20} & 0 & U_{22} & 0 \\ U_{30} & 0 & 0 & U_{33} \end{pmatrix}. \quad (6.4)$$

Прямой подсчёт даёт

$$U^c = JU^*J = \begin{pmatrix} V^{-1}U_{11}^*V & 0 & 0 & 0 \\ VU_{10}^*V & VU_{00}^*V^{-1} & VU_{20}^* & -VU_{30}^* \\ U_{12}^*V & 0 & U_{22}^* & 0 \\ -U_{13}^*V & 0 & 0 & U_{33}^* \end{pmatrix}. \quad (6.5)$$

Поскольку $U^cU = UU^c = I$, то

$$\left. \begin{aligned} \text{а. } & VU_{00}^*V^{-1}U_{11} = I_1, \quad U_{22}^*U_{22} = U_{22}U_{22}^* = I_2, \quad U_{33}^*U_{33} = U_{33}U_{33}^* = I_3, \\ \text{б. } & U_{00}^*V^{-1}U_{12} + U_{20}^*U_{22} = 0, \quad U_{00}^*V^{-1}U_{13} - U_{30}^*U_{33} = 0, \\ \text{с. } & U_{10}^*VU_{00} + U_{00}^*V^{-1}U_{10} + U_{20}^*U_{20} - U_{30}^*U_{30} = 0. \end{aligned} \right\} \quad (6.6)$$

В равенства (6.6) включены не все соотношения, возникающие при вычислении произведения U^cU , а только их минимальное подмножество, из которого прочие соотношения следуют автоматически. Далее, посмотрим на (6.6) как на достаточные условия, при которых оператор, задаваемый матричным представлением (6.4), становится J -унитарным. Действительно, матричные элементы U_{11} , U_{12} и U_{13} однозначно определяются по (6.6), если известны элементы U_{00} , U_{20} , U_{30} , U_{22} и U_{33} , а вот с элементом U_{10} картина оказывается более сложной. Равенство (6.6)с), рассмотренное как уравнение относительно U_{10} , похоже на линейное матричное уравнение, которое иногда называют матричным уравнением Сильвестра (см. [29], и может быть к нему сведено, однако

конкретный вид (6.6с) позволяет найти соответствующие решения непосредственно. Представим оператор $U_{00}^* V^{-1} U_{10}$ в виде $X + iY$, где X и Y — самосопряжённые операторы в (конечномерном) гильбертовом пространстве $\mathcal{L}_0$. Тогда $U_{10}^* V U_{00} = X - iY$ и уравнение (6.6с) приобретает вид $2X = -U_{20}^* U_{20} + U_{30}^* U_{30}$. Оператор $-U_{20}^* U_{20} + U_{30}^* U_{30}$, очевидно, самосопряжён, поэтому

$$U_{10} = V(U_{00}^*)^{-1} \left(\frac{1}{2} (-U_{20}^* U_{20} + U_{30}^* U_{30}) + iY \right), \quad (6.7)$$

где Y — произвольный самосопряжённый оператор в пространстве $\mathcal{L}_0$. Итак, доказано следующее предложение:

Предложение 6.2. *Если в J -пространстве $\mathcal{H}$, представленном в виде (6.2), фундаментальная симметрия задана операторной матрицей (6.3), то оператор U , заданный матрицей (6.4), будет J -унитарным тогда и только тогда, когда выполняются условия (6.6).*

Замечание 6.1. Если в J -пространстве фундаментальная симметрия J задаётся формулой (6.3), а для J -унитарного оператора U известны только его значения на инвариантных (для него) подпространствах $\mathcal{L}_+$ и $\mathcal{L}_-$ (см. (6.1), то, согласно (6.7), U восстанавливается на всём пространстве $\mathcal{H}$ неоднозначно, а с точностью до играющего роль параметра восстановления оператора Y

Предложение 6.3. *Если J -унитарный оператор U принадлежит к классу D_κ^+ , $\mathcal{L}_+$ — соответствующее инвариантное подпространство из определения 6.2, то его неунитарный спектр либо пуст, либо состоит из конечного числа собственных значений, симметричных относительно единичной окружности. При этом максимальная длина присоединенной цепочки векторов, отвечающих такому собственному значению, не превосходит размерности изотропной части подпространства $\mathcal{L}_+$.*

Доказательство. Непосредственные вычисления показывают, что резольвента $R_\xi(U)$ определена для тех значений $\xi \in \mathbb{C}$, для которых одновременно имеют смысл операторы $R_\xi(U_{00})$, $R_\xi(U_{11})$, $R_\xi(U_{22})$, $R_\xi(U_{33})$ и

$$R_\xi(U) = \begin{pmatrix} R_\xi(U_{00}) & 0 & 0 & 0 \\ R_{10} & R_\xi(U_{11}) & R_{12} & R_{13} \\ R_{20} & 0 & R_\xi(U_{22}) & 0 \\ R_{30} & 0 & 0 & R_\xi(U_{33}) \end{pmatrix}, \quad (6.8)$$

где $R_{30} = -R_\xi(U_{33})U_{30}R_\xi(U_{00})$, $R_{20} = -R_\xi(U_{22})U_{20}R_\xi(U_{00})$, $R_{12} = -R_\xi(U_{11})U_{12}R_\xi(U_{22})$, $R_{13} = -R_\xi(U_{11})U_{13}R_\xi(U_{33})$, $R_{10} = \{R_\xi(U_{11})U_{10} + R_{12}U_{20} + R_{13}U_{30}\}R_\xi(U_{00})$.

Так как операторы U_{22} и U_{33} унитарны, неунитарный спектр оператора U совпадает с объединением неунитарных спектров конечномерных операторов U_{00} и U_{11} и поэтому он конечен. Кроме того, из представления (6.8) следует, что при $\xi \rightarrow \xi_0 \in \sigma(U)$, $\xi \neq \xi_0$, $\xi_0 \neq \frac{1}{\xi_0}$ резольвента $R_\xi(U)$ имеет степенной рост, не превосходящий сумму показателей роста резольвент $R_\xi(U_{00})$ и $R_\xi(U_{11})$. Если одновременно $\xi_0 \in \sigma(U_{00})$, $\xi_0 \in \sigma(U_{11})$, то и $\frac{1}{\xi_0} \in \sigma(U_{00})$, $\frac{1}{\xi_0} \in \sigma(U_{11})$, причем $\dim RS_{\xi_0}(U_{00}) = \dim RS_{1/\bar{\xi}_0}(U_{11})$ и $\dim RS_{1/\bar{\xi}_0}(U_{00}) = \dim RS_{\xi_0}(U_{11})$. Так как $\xi_0 \neq \frac{1}{\bar{\xi}_0}$, то $\dim RS_{1/\bar{\xi}_0}(U_{00}) + \dim RS_{\xi_0}(U_{00})$ не может быть больше, чем $\dim \mathcal{L}_0$. Итак, показатель роста резольвенты $R_\xi(U)$ при $\xi \rightarrow \xi_0$ не превосходит суммы $\dim RS_{\xi_0}(U_{00}) + \dim RS_{\xi_0}(U_{11})$, которая, в свою очередь, не больше $\dim \mathcal{L}_0$. $\square$

Предложение 6.4. *Пусть J -унитарный оператор U принадлежит к классу D_κ^+ , $\mathcal{L}_+$ — соответствующее инвариантное подпространство из определения 6.3, и $\sigma(U) \setminus \mathbb{T} \neq \emptyset$. Тогда пространство $\mathcal{H}$ однозначно представимо в виде $\mathcal{H} = \mathcal{H}'[+] \mathcal{H}''$, где $\mathcal{H}'$ и $\mathcal{H}''$ — инвариантные подпространства оператора U , $\sigma(U|_{\mathcal{H}'}) \subset \mathbb{T}$, $\sigma(U|_{\mathcal{H}''}) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$, $\dim \mathcal{H}'' < \infty$ и оператор $U|_{\mathcal{H}'}$ принадлежит к классу $D_{\kappa'}$, $\kappa' < \kappa$ (возможно, $\kappa' = 0$).*

Доказательство. Существование разложения $\mathcal{H} = \mathcal{H}'[+] \mathcal{H}''$ со свойствами $\sigma(U|_{\mathcal{H}'}) \subset \mathbb{T}$, $\sigma(U|_{\mathcal{H}''}) \subset \mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$ и его единственность тривиально следуют из предложения 6.3, поскольку в силу этого предложения неунитарная часть $\sigma(U)$ является изолированным подмножеством множества

$\sigma(U)$ и проектор Рисса $P'' = -\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} R_{\xi}(U) d\xi$, где Γ — объединение двух простых положительно ориентированных контуров, принадлежащих к области $\mathbb{C} \setminus \mathbb{T}$ и симметричных относительно единичной окружности, один из которых охватывает ту часть $\sigma(U)$, которая находится строго внутри единичного круга, в второй — соответствующую часть вне единичного круга, будет J -ортогональным. Проектор P'' определяет подпространство $\mathcal{H}''$: $\mathcal{H}'' = P''\mathcal{H}$, а двойственный ему проектор $P' = I - P''$ — подпространство $\mathcal{H}'$.

Из вида оператора P' следует, что подпространство $\mathcal{L}_+$ будет для него инвариантным, поэтому из предложения 6.1 вытекает, что подпространство $P'\mathcal{L}_+$ является искомым инвариантным подпространством оператора $U|_{\mathcal{H}'}$ и, таким образом, нам осталось лишь проверить конечномерность подпространства $\mathcal{H}''$. Итак, подпространство $P''\mathcal{L}_+$ является для оператора $U|_{\mathcal{H}''}$ максимальным неотрицательным инвариантным подпространством, которое к тому же псевдорегулярно, а его изотропная часть конечномерна. Покажем, что в действительности $P''\mathcal{L}_+$ нейтрально. В самом деле, если мы допустим противное, т. е. что в $P''\mathcal{L}_+$ есть хоть один положительный вектор, то получим, что $\sigma(U|_{\mathcal{H}''}) \cap \mathbb{T} \neq \emptyset$, однако это невозможно в силу выбора $\mathcal{H}''$. Итак, подпространство $P''\mathcal{L}_+$ нейтрально и, следовательно (см. 6.1), $P''\mathcal{L}_+ \subset \mathcal{L}_1$, поэтому $\dim P''\mathcal{L}_+ = \kappa'' \leq \kappa$. Наконец, аналогично показывается, что $P''\mathcal{L}_- \subset \mathcal{L}_1$ — максимальное неположительное подпространство относительно $\mathcal{H}''$, поэтому $\dim \mathcal{H}'' = 2\kappa''$. $\square$

Замечание 6.2. В условиях предложения 6.4 справедливо $\mathcal{H}'' \cap \mathcal{L}_1 \neq \emptyset$.

Представление (6.8) даёт возможность локализовать спектр оператора $U \in D_{\kappa}^+$, но непосредственно с его помощью непросто доказать наличие у U спектрального разложения того же типа, что у J -унитарного оператора в пространстве Понтрягина. Наша ближайшая цель — построить аналитическое представление резольвенты оператора U , аналогичное представлению, изложенному в работах [37, 38, 30]. Оно будет похоже на представление (4.18), для чего также, как в разделе 4, будут рассмотрены последовательности вида $\{[N(U)\overline{N(U)}U^k x, x]\}_{-\infty}^{\infty}$, где $x \in \mathcal{H}$, а $N(\xi)$ некоторый фиксированный полином. В разделе 4 оператор $N(U)\overline{N(U)}$ был J -неотрицательным, но в условиях этого раздела полинома с таким свойством, вообще говоря, не существует. Тем не менее оператор U обладает свойством, позволяющим применять технику, аналогичную той, которая применяется к дефинизируемым операторам.

Теорема 6.1. Для оператора U (напомним, что $U \in D_{\kappa}^+$) найдётся такая рациональная функция $f(\xi)$ вида $f(\xi) = N(\xi)\overline{N(1/\bar{\xi})}$, где $N(\xi)$ — некоторый отличный от тождественного нуля полином, что $f(U) = C_+ - C_-$, операторы C_+ и C_- J -неотрицательны и перестановочны с U .

Доказательство. Пусть $N(\xi)$ — какой-либо (не обязательно минимальный) аннулирующий многочлен для U_{11} со старшим коэффициентом, равным нулю, $\overline{N}(\xi)$ — многочлен с коэффициентами, сопряжёнными к $N(\xi)$. С учётом (6.6) имеем

$$N(U) = \begin{pmatrix} N(U_{00}) & 0 & 0 & 0 \\ N_{10} & 0 & N_{12} & N_{13} \\ N_{20} & 0 & N(U_{22}) & 0 \\ N_{30} & 0 & 0 & N(U_{33}) \end{pmatrix}, \quad \overline{N}(U^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ \tilde{N}_{10} & \overline{N}(U_{11}^{-1}) & \tilde{N}_{12} & \tilde{N}_{13} \\ \tilde{N}_{20} & 0 & \overline{N}(U_{22}^{-1}) & 0 \\ \tilde{N}_{30} & 0 & 0 & \overline{N}(U_{33}^{-1}) \end{pmatrix}, \quad (6.9)$$

откуда

$$\begin{aligned} N(U)\overline{N}(U^{-1}) &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{12}\tilde{N}_{20} + N_{13}\tilde{N}_{30} & 0 & N_{12}\overline{N}(U_{22}^{-1}) & N_{13}\overline{N}(U_{33}^{-1}) \\ N(U_{22})\tilde{N}_{20} & 0 & N(U_{22})\overline{N}(U_{22}^{-1}) & 0 \\ N(U_{33})\tilde{N}_{30} & 0 & 0 & N(U_{33})\overline{N}(U_{33}^{-1}) \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{12}\tilde{N}_{20} & 0 & N_{12}\overline{N}(U_{22}^{-1}) & 0 \\ N(U_{22})\tilde{N}_{20} & 0 & N(U_{22})\overline{N}(U_{22}^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{13}\tilde{N}_{30} & 0 & 0 & N_{13}\overline{N}(U_{33}^{-1}) \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ N(U_{33})\tilde{N}_{30} & 0 & 0 & N(U_{33})\overline{N}(U_{33}^{-1}) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Проанализируем первое слагаемое:

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ N_{12}\tilde{N}_{20} & 0 & N_{12}\overline{N}(U_{22}^{-1}) & 0 \\ N(U_{22})\tilde{N}_{20} & 0 & N(U_{22})\overline{N}(U_{22}^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = N_+(U)\overline{N}_+(U^{-1}), \quad (6.10)$$

где

$$N_+(U) = \begin{pmatrix} N(U_{00}) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & N_{12} & 0 \\ N_{20} & 0 & N(U_{22}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \overline{N}_+(U^{-1}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \overline{N}(U_{11}^{-1}) & \tilde{N}_{12} & 0 \\ \tilde{N}_{20} & 0 & \overline{N}(U_{22}^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Отметим, что операторы $N(U)$ и $\overline{N}(U^{-1})$ J -сопряжены, поэтому J -сопряжены операторы $N_+(U)$ и $\overline{N}_+(U^{-1})$. Далее, оператор $N_+(U)\overline{N}_+(U^{-1})$ является J -неотрицательным, поскольку $\overline{N}(U^{-1})\mathcal{H} \subset \mathcal{L}_+$ и

$$[N_+(U)\overline{N}_+(U^{-1})x, x] = [\overline{N}_+(U^{-1})x, \overline{N}_+(U^{-1})x] \geq 0, \quad x \in \mathcal{H}, \quad (6.11)$$

однако из полученных соотношений прямо не следует, что операторы $N_+(U)\overline{N}_+(U^{-1})$ и U коммутируют. Поскольку в работе [31] существование полинома $N(\xi)$ с нужными свойствами было доказано для J -с.с. оператора и само доказательство в нашем случае может быть проведено по сходной схеме, то мы его только наметим с указанием на необходимые модификации, связанные с заменой J -с.с. оператора на J -унитарный. Положим $U^+ = U|_{\mathcal{L}_+}$ и рассмотрим матричное представление оператора U^+ и его резольвенты:

$$U^+ = \begin{pmatrix} U_{11} & U_{12} \\ 0 & U_{22} \end{pmatrix}, \quad R_\xi(U^+) = \begin{pmatrix} R_\xi(U_{11}) & -R_\xi(U_{11})U_{12}R_\xi(U_{22}) \\ 0 & R_\xi(U_{22}) \end{pmatrix}.$$

Рассмотрим структуру операторов U_{12} и $R_\xi(U_{11})U_{12}R_\xi(U_{22})$. Для упрощения предположим, что оператор U_{11} представляет из себя одну жорданову клетку с собственным числом μ и базисом $\{e_j\}_1^k$, т. е.

$$U_{11}e_j = \mu e_j + e_{j+1}, \quad j = 1, 2, \dots, k-1, \quad U_{11}e_k = \mu e_k, \quad \text{Lin}\{e_j\}_1^k = \mathcal{L}_1. \quad (6.12)$$

Далее, найдётся такая система $\{y_j\}_1^k \subset \mathcal{L}_1$, что $U_{12}x = \sum_{j=1}^k (x, y_j)e_j$. Поскольку образ оператора

U_{12} может быть, вообще говоря, подпространством пространства $\mathcal{L}_1$, система $\{y_j\}_1^k$ может быть линейно зависимой. Более того, благодаря предложению 6.4 гильбертова структура пространства $\mathcal{H}$ может быть выбрана так, что в случае $|\mu| \neq 1$ все $y_j = 0$, поэтому в дальнейшем предполагается, что $|\mu| = 1$. Наконец, пусть $E_\lambda^{(22)}$ непрерывная слева спектральная функция оператора U_{22} , т. е.

$$U_{22} = \int_0^{2\pi} e^{i\lambda} dE_\lambda^{(22)}. \quad \text{Тогда}$$

$$\begin{aligned} R_\xi(U_{22}) &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\lambda} - \xi} dE_\lambda^{(22)}, \quad R_\xi(U_{11})e_l = \sum_{j=l}^k (-1)^{j-l} \frac{1}{(\mu - \xi)^{j-l+1}} e_j, \quad l = 1, 2, \dots, k, \\ R_\xi(U_{11})U_{12}R_\xi(U_{22})x &= \sum_{l=1}^k \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\lambda} - \xi} dE_\lambda^{(22)} x, y_l \right) \sum_{j=l}^k (-1)^{j-l} \frac{1}{(\mu - \xi)^{j-l+1}} e_j = \\ &= \sum_{j=1}^k \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\lambda} - \xi} \left(\sum_{l=1}^j (-1)^{j-l} \frac{1}{(\mu - \xi)^{j-l+1}} \right) d(E_\lambda^{(22)} x, y_l) \right) e_j. \end{aligned}$$

Интегральное представление оператора $R_\xi(U_{11})U_{12}R_\xi(U_{22})$ получено нами в предположении (6.12), но от этого частного случая достаточно легко перейти к общей ситуации: если жордановых клеток несколько, то надо взять сумму по всем этим клеткам. Итак, пусть оператор

U_{11} состоит из p клеток и соответствующий базис пространства $\mathcal{L}_1$ разбит на p групп: $\{e_j^{(m)}\}_{j=1}^{k_m}$, $m = 1, 2, \dots, p$, $k_1 + k_2 + \dots + k_p = \kappa$. Тогда

$$R_\xi(U_{11})U_{12}R_\xi(U_{22})x = \sum_{m=1}^p \sum_{j=1}^{k_m} \left(\int_0^{2\pi} \frac{1}{e^{i\lambda} - \xi} \left(\sum_{l=1}^j (-1)^{j-l} \frac{1}{(\mu_m - \xi)^{j-l+1}} \right) d(E_\lambda^{(22)} x, y_l^{(m)}) \right) e_j^{(m)}.$$

Последнее представление доказывает существование проектора $E^+(\Delta)$, вычисляемого по формуле $E^+(\Delta) = \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) s\text{-}\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(\Delta)}} R_\xi(U^+) d\xi$, где $\Delta = [\alpha, \beta] \subset (0, 2\pi)$ — замкнутый промежуток,

удовлетворяющий условиям (4.22), а кривая $\Gamma_\delta^{(\Delta)}$ та же, что и в интеграле (4.23), причём неунитарный спектр оператора лежит вне контура $\Gamma^{(\Delta)}$. Непосредственный подсчёт даёт следующий результат: $E^+(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & E^{(12)}(\Delta) \\ 0 & E^{(22)}(\Delta) \end{pmatrix}$, где

$$E^{(12)}(\Delta) = - \sum_{m=1}^p \sum_{j=1}^{k_m} \left(\int_{\Delta} \left(\sum_{l=1}^j (-1)^{j-l} \frac{1}{(\mu_m - e^{i\lambda})^{j-l+1}} \right) d(E_\lambda^{(22)} x, y_l^{(m)}) \right) e_j^{(m)}. \quad (6.13)$$

Представление (6.13) показывает, что условие $\alpha, \beta \notin \sigma_p(A_{22})$ не является существенным и от него можно отказаться, но, вообще говоря, связанный с J -унитарным оператором J -ортогональный проектор $E^+(\Delta)$ является неограниченной функцией от α и β .

Перейдём к представлению оператора $U^+ E^+(\Delta)$. Равенство $U^+ R_\xi(U^+) = I + \xi R_\xi(U^+)$ позволяет представить этот оператор в виде $U^+ E^+(\Delta) = \left(-\frac{1}{2\pi i} \right) s\text{-}\lim_{\delta \rightarrow +0} \int_{\Gamma_\delta^{(\Delta)}} \xi R_\xi(U^+) d\xi$, от-

куда рассуждениями, подобными приведённым выше, получаем представление $U^+ E^+(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & U_{12}(\Delta) \\ 0 & U_{22}(\Delta) \end{pmatrix}$, где

$$U_{12}(\Delta) = - \sum_{m=1}^p \sum_{j=1}^{k_m} \left(\int_{\Delta} \left(\sum_{l=1}^j (-1)^{j-l} \frac{e^{i\lambda}}{(\mu_m - e^{i\lambda})^{j-l+1}} \right) d(E_\lambda^{(22)} x, y_l^{(m)}) \right) e_j^{(m)}.$$

Аналогичным образом выглядит оператор $(U^+)^n E^+(\Delta)$ для любого целого n . Для упрощения записи можно учесть что операторы A^+ и $E^+(\Delta)$ коммутируют, а к тому же $E^+(\Delta)$ идемпотентен, поэтому $N(U^+) E^+(\Delta) = N(U^+ E^+(\Delta)) = \begin{pmatrix} 0 & E_{12}(\Delta) N(U_{22}(\Delta)) \\ 0 & N(U_{22}(\Delta)) \end{pmatrix}$, где

$$E_{12}(\Delta) N(U_{22}(\Delta)) = - \sum_{m=1}^p \sum_{j=1}^{k_m} \left(\int_{\Delta} \left(\sum_{l=1}^j (-1)^{j-l} \frac{N(e^{i\lambda})}{(\mu_m - e^{i\lambda})^{j-l+1}} \right) d(E_\lambda^{(22)} x, y_l^{(m)}) \right) e_j^{(m)}.$$

Замечание 6.3. Выражение $E_{12}(\Delta) N(U_{22}(\Delta))$ как функция параметров α и β ограничена и имеет односторонние пределы.

Доопределим теперь оператор $E^+(\Delta)$ на всём пространстве $\mathcal{H}$ как J -ортогональный проектор с помощью матричного представления (сопоставьте с (6.5)):

$$E_+(\Delta) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ E^{(12)}(\Delta) (E^{(12)}(\Delta))^* V & 0 & E^{(12)}(\Delta) & 0 \\ (E^{(12)}(\Delta))^* V & 0 & E^{(22)}(\Delta) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Подпространство $E_+(\Delta)\mathcal{H}$ инвариантно относительно U и $U^{-1} = U^c$, поэтому $UE_+(\Delta) = E_+(\Delta)UE_+(\Delta) U^c E_+(\Delta) = E_+(\Delta)U^c E_+(\Delta)$. Применив к последнему равенству операцию сопряжения получим $E_+(\Delta)U = E_+(\Delta)UE_+(\Delta)$, поэтому $UE_+(\Delta) = U_+(\Delta)U$ и $U^{-1}E_+(\Delta) = U_+(\Delta)U^{-1}$.

Определим Λ как и выше (см. (4.21)), при этом для простоты предположим, что $0, 2\pi \neq \Lambda$. Пусть $\{\mu_j\}_{j=1}^k = \Lambda$. Временно допустим, что $N(\xi)$ — это минимальный аннулирующий многочлен

для оператора U_{11} . Напомним, что, вообще говоря, множество $\{e^{i\mu_j}\}_1^k$ — это только часть спектра оператора U_{11} , а именно та его часть, которая лежит на $\mathbb{T}$. Рассмотрим $|N(e^{it})|^2$. Это — неотрицательная функция на $[0, 2\pi]$, а Λ множество её нулей. Найдётся такое $\epsilon > 0$, что множество $X_1 = \{t : t \in [0, 2\pi], |N(e^{it})|^2 < \epsilon\}$ распадается на k непересекающихся отрезков $[\alpha_j, \beta_j]$, причём $\mu_j \in [\alpha_j, \beta_j]$. Положим $X_l = \{t : t \in [0, 2\pi], |N(e^{it})|^2 < \frac{\epsilon}{l}\}$, $Y_l = [0, 2\pi] \setminus X_l$, $l = 1, 2, \dots$. Тогда $\bigcap_{l=1}^{\infty} X_l = \Lambda$, $\bigcup_{l=1}^{\infty} Y_l = [0, 2\pi] \setminus \Lambda$.

Поскольку Y_ϵ — это объединение непересекающихся отрезков, то операторы $E_+(Y_\epsilon)$ и $E^+(Y_\epsilon)$ корректно определяются по принципу аддитивности.

Вернёмся теперь к рассмотрению оператора $\hat{C}_+ = N_+(U)\bar{N}_+(U^{-1})$. В силу (6.11) он не только J -неотрицателен, но и имеет неотрицательный спектр (для произвольного J -неотрицательного оператора в пространстве Крейна это, вообще говоря неверно), так что его квадрат тоже J -неотрицателен. Тогда (см. [3, гл. IV, теорема 1.5] или [18]) оператор $\hat{E}_\lambda$ допускает представление

$$\hat{C}_+ = \hat{S} + \int_0^{\|\hat{C}_+\|+0} \lambda d\hat{E}_\lambda, \text{ где } \hat{S} \text{ — } J\text{-неотрицательный нильпотентный оператор, } \hat{E}_\lambda \text{ — спектральная}$$

функция оператора $\hat{E}_\lambda$, $\hat{S}^2 = 0$, $(I - \hat{E}_\lambda)\hat{S} = 0$ для любого $\lambda > 0$. Спектральная функция $\hat{E}_\lambda$ может оказаться неограниченной в окрестности нуля, в этом случае интеграл трактуется как несобственный со сходимостью в сильной операторной топологии. С другой стороны

$$\begin{aligned} E_+(Y_l)N(U)\bar{N}(U^{-1}) &= \\ &= \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ E^{(12)}(Y_l)N(U_{22})\tilde{N}_{20} & 0 & E^{(12)}(Y_l)N(U_{22})\bar{N}(U_{22}^{-1}) & 0 \\ E^{(22)}(Y_l)N(U_{22})\tilde{N}_{20} & 0 & E^{(22)}(Y_l)N(U_{22})\bar{N}(U_{22}^{-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = E_+(Y_l)N_+(U)\bar{N}_+(U^{-1}). \end{aligned}$$

Т.к. проектор $E_+(Y_l)$ коммутирует с $N(U)\bar{N}(U^{-1})$, то он коммутирует и с $N_+(U)\bar{N}_+(U^{-1})$, поэтому подпространства $E_+(Y_l)\mathcal{H}$ и $(I - E_+(Y_l))\mathcal{H}$ инвариантны относительно оператора $\hat{C}_+$. Т.к. проектор $E_+(Y_l)$ коммутирует с оператором U , то $E_+(Y_l)N_+(U)\bar{N}_+(U^{-1}) = N_+(E_+(Y_l)U)\bar{N}_+(E_+(Y_l)U^{-1})$, поэтому оператор $\hat{C}_+|_{E_+(Y_l)\mathcal{H}}$ — функция оператора $U|_{E_+(Y_l)\mathcal{H}}$. В силу выбора множества и теоремы об отображении спектра (см., напр., [10, гл. X, §4, теорема 4.2], [26, гл. XI, п. 151, формула (28)]) $\sigma(\hat{C}_+|_{E_+(Y_l)\mathcal{H}}) \subset \{t : t \geq \frac{\epsilon}{l}\}$. Этот же результат следует непосредственно из представления (6.10) и условия коммутирования проектора $E_+(Y_l)$ и оператора $\hat{C}_+$.

Поясним эту аргументацию анализируя спектр сужения $\hat{C}_+|_{(I-E_+(Y_l))\mathcal{H}}$. Ненулевой спектр этого сужения определяется диагональным элементом $(I_2 - E^{22}(Y_l))N(U_{22})\bar{N}(U^{-1})$. U_{22} — это унитарный оператор, поэтому $\sigma(\hat{C}_+|_{(I-E_+(Y_l))\mathcal{H}}) \subset [0, \frac{\epsilon}{l}]$, причём, если оператор $\hat{C}_+$ обладает собственным числом, то соответствующее собственное подпространство включено в $E_+(Y_l)\mathcal{H}$. Суммируя

$$\text{сказанное получаем } E_+(Y_l)\hat{C}_+ = \int_{\frac{\epsilon}{l}}^{\|\hat{C}_+\|^2+0} \lambda d\hat{E}_\lambda. \text{ Отсюда}$$

$$\begin{aligned} UE_+(Y_l)N_+(U)\bar{N}_+(U^{-1}) &= \\ &= UE_+(Y_l)N(U)\bar{N}(U^{-1}) = E_+(Y_l)N(U)\bar{N}(U^{-1})U = E_+(Y_l)N_+(U)\bar{N}_+(U^{-1})U, \end{aligned}$$

$$\text{т. е. } U \int_{\frac{\epsilon}{l}}^{\|\hat{C}_+\|^2+0} \lambda d\hat{E}_\lambda = \int_{\frac{\epsilon}{l}}^{\|\hat{C}_+\|^2+0} \lambda d\hat{E}_\lambda U, \text{ откуда } U \int_0^{\|\hat{C}_+\|^2+0} \lambda d\hat{E}_\lambda = \int_0^{\|\hat{C}_+\|^2+0} \lambda d\hat{E}_\lambda U. \text{ Осталось заметить,}$$

$$\text{что } (N_+(U)\bar{N}_+(U^{-1}))^2 = \int_0^{\|\hat{C}_+\|^2+0} \lambda^2 d\hat{E}_\lambda. \quad \square$$

Замечание 6.4. Как показывает доказательство теоремы 6.1, в качестве искомого многочлена можно взять $N(\xi) = (N_{\min}(\xi))^2$, где $N_{\min}(\xi)$ — минимальный аннулирующий многочлен для U_{11} .

Ниже символом $\text{Alg}\{U, U^{-1}\}$ обозначается замкнутая в слабой операторной топологии алгебра, порождённая операторами U и U^{-1} .

Теорема 6.2. Пусть спектр J -унитарного оператора $U \in D_{\kappa}^{+}$ унитарен, $\mathcal{L}_{+}$ — отвечающее определению 6.2 подпространство, инвариантное относительно U . Тогда оператор U обладает заданной на отрезке $[\gamma, 2\pi + \gamma]$ ($\gamma \in [0, 2\pi)$ — некоторая константа) собственной спектральной функцией E_{λ} с конечным множеством спектральных особенностей $\Lambda \subset (\gamma, 2\pi + \gamma)$ ($\mathfrak{R}_{\Lambda}$ — множество промежутков $\Delta = [a, b] \subset [\gamma, 2\pi + \gamma]$ $a, b \notin \Lambda$), причем

- $$\left. \begin{array}{l} \text{а) для любого } \lambda \in \mathbb{R} \setminus \Lambda \text{ верно } E_{\lambda} \in \text{Alg}\{U, U^{-1}\} \text{ и } s\text{-}\lim_{\mu \rightarrow \lambda-0} E_{\mu} = E_{\lambda}; \\ \text{б) если } \Delta \in \mathfrak{R}_{\Lambda} \text{ и } \Delta \cap \Lambda = \emptyset, \text{ то } E(\Delta)\mathcal{H} = \mathcal{H}_{\Delta}^{+}[+]\mathcal{H}_{\Delta}^{-}, U\mathcal{H}_{\Delta}^{+} \subset \mathcal{H}_{\Delta}^{+}, \\ U\mathcal{H}_{\Delta}^{-} \subset \mathcal{H}_{\Delta}^{-}, \mathcal{H}_{\Delta}^{+} \text{ — равномерно положительное, а } \mathcal{H}_{\Delta}^{-} \text{ — равномерно отрицательное подпространство (каждое из подпространств } \mathcal{H}_{\Delta}^{+} \text{ и } \mathcal{H}_{\Delta}^{-} \\ \text{может вырождаться в } \{0\}), U E(\Delta) = \int_{\Delta} e^{i\lambda} dE_{\lambda}; \\ \text{в) если } \Delta \in \mathfrak{R}_{\Lambda} \text{ и } \Delta \cap \Lambda \neq \emptyset, \text{ то } E(\Delta)\mathcal{L}_{+} \cap \mathcal{L}_1 \neq \{0\} \text{ и оператор } U|_{E(\Delta)\mathcal{H}} \\ \text{не является скалярным спектральным оператором.} \end{array} \right\}$$

Доказательство. Демонстрация справедливости этого предложения может быть реализована по той же схеме, что и доказательство теоремы 4.1, которая посвящена аналогичному результату для пространства Понтрягина, поэтому мы покажем только путь, приводящий к этой схеме. Итак, пусть $N(\xi)$ — тот же многочлен, что и в (6.9), но с учётом замечания 6.4, операторы C_{+} и C_{-} определены соответственно. Для произвольного $x \in \mathcal{H}$ рассмотрим три последовательности: $d_l = [N(U)\overline{N}(U^{-1})U^l x, x]$, $d_l^{+} = [C_{+}U^l x, x]$, $d_l^{-} = [C_{-}U^l x, x]$ $l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. В силу теоремы 6.1 последовательность $\{d_l^{+}\}_{l=-\infty}^{\infty}$ позитивна. По аналогичной причине последовательность $\{d_l^{-}\}_{l=-\infty}^{\infty}$ негативна. Как хорошо известно (см., напр, [7]) найдутся такие неубывающие непрерывные слева функции $\sigma_{+}^{(x)}(t)$ и $\sigma_{-}^{(x)}(t)$, что

$$d_l^{+} = \int_0^{2\pi} e^{il} d\sigma_{+}^{(x)}(t), \quad d_l^{-} = - \int_0^{2\pi} e^{il} d\sigma_{-}^{(x)}(t), \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (6.14)$$

причём эти функции определяются с точностью до константы. Из приведённых формул следует, что

$$d_l = \int_0^{2\pi} e^{il} d\eta^{(x)}(t), \quad \eta^{(x)}(t) = \sigma_{+}^{(x)}(t) - \sigma_{-}^{(x)}(t), \quad l = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (6.15)$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны тем, которые привели к представлению (4.16). Актуализируя их, из формул (6.14) и (6.15) получаем, что найдутся J -неотрицательные функции G_t^{+} и G_t^{-} , порождающие представления

$$C_{+}R_{\xi}(U) = \int_{\gamma}^{2\pi+\gamma} \frac{1}{e^{it} - \xi} dG_t^{+}, \quad C_{-}R_{\xi}(U) = \int_{\gamma}^{2\pi+\gamma} \frac{1}{e^{it} - \xi} dG_t^{-},$$

$$N(U)\overline{N}(U^{-1})R_{\xi}(U) = \int_{\gamma}^{2\pi+\gamma} \frac{1}{e^{it} - \xi} d(G_t^{+} - G_t^{-}).$$

Дальнейшие шаги просто повторяют соответствующие этапы доказательства теоремы 4.1. $\square$

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Унитарные операторы в пространствах Крейна — это, в целом, слишком широкий класс операторов для того, чтобы его представители обладали таким набором свойств, которые были бы полезны при их использовании в смежных разделах теории операторов. Операторы, которые, наряду с унитарностью, обладают инвариантным подпространством специального вида, имеют

свойства, близкие к свойствам унитарных операторов в пространстве Понтрягина. Хотя рассматриваемые операторы не являются дефинизируемыми, они, условно говоря, допускают представление в виде разности дефинизируемых операторов (теорема 6.1) Для последних операторов при дополнительном условии их цикличности в работе построено модельное представление функционального типа.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Линейные операторы в гильбертовых с G -метрикой // Усп. мат. наук. — 1971. — 26, № 4. — С. 43–92.
2. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Линейные операторы в пространствах с индефинитной метрикой и их приложения // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. — 1979. — 17. — С. 113–205.
3. Азизов Т. Я., Иохвидов И. С. Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986.
4. Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д. Введение в теорию пространств Понтрягина: Спец. курс лекций. — Симферополь: ТНУ, 2008.
5. Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д. Введение в теорию пространств Крейна: Спец. курс лекций. — Симферополь: ФОРМА, 2010.
6. Ароншайн Н. Квадратичные формы на векторных пространствах // Математика. — 1964. — 8, № 5. — С. 102–155.
7. Ахиезер Н. И. Классическая проблема моментов и некоторые вопросы анализа, связанные с нею. — М.: Физматгиз, 1961.
8. Бари Н. К. Тригонометрические ряды. — М.: Физматгиз, 1961.
9. Бегуни А. В., Лыткин С. М. О скорости сходимости последовательностей и рядов // Мат. в выс. обр. — 2020. — № 18. — С. 7–26.
10. Березанский Ю. М., Ус Г. Ф., Шефтель З. Г. Функциональный анализ. Курс лекций. — Киев: Выща школа, 1990. — DOI: [10.1134/S0012266114010042](https://doi.org/10.1134/S0012266114010042).
11. Богачёв В. И., Смолянов О. Г. Действительный и функциональный анализ. Унив. курс. — М.—Ижевск: Регуляр. и хаот. динам., 2020.
12. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. — М.: Наука, 1965.
13. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Т. 3. Спектральные операторы. — М.: Мир, 1974.
14. Иохвидов И. С., Крейн М. Г. Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой. I // Тр. Моск. мат. об-ва. — 1956. — 5. — С. 367–432.
15. Иохвидов И. С., Крейн М. Г. Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой. II // Тр. Моск. мат. об-ва. — 1959. — 8. — С. 413–496.
16. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: ФИЗМАТЛИТ, 2009.
17. Крейн М. Г., Лангер Г. К. О спектральной функции самосопряжённого оператора в пространстве с индефинитной метрикой // Докл. АН СССР. — 1963. — 152, № 1. — С. 39–42.
18. Крейн М. Г., Шмудьян Ю. Л. J -полярное представление плюс-операторов // В сб.: «Математические исследования. I, вып. 2». — Кишинёв: Инст. мат. МССР, 1966. — С. 131–161.
19. Кудрявцев Л. Д. Математический анализ. Т. II. — М.: Высшая школа, 1970.
20. Кук Р. Бесконечные матрицы и пространства последовательностей. — М.: ФМЛ, 1960.
21. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. Учеб. пособие для вузов. — М.: ГИТТЛ, 1951.
22. Мальцев А. И. Основы линейной алгебры. — СПб.: Лань, 2009.
23. Маркушевич А. И. Краткий курс теории аналитических функций. — М.: Наука, 1978.
24. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Начала теории. Т. I. — СПб.: Лань, 2009.
25. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. — М.: Мир, 1977.
26. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б. Лекции по функциональному анализу. — М.: Мир, 1979.
27. Севастьянов В. А. Курс теории вероятностей и математической статистики. — М.: Наука, 1982.
28. Халмош П. Гильбертово пространство в задачах. — М.: Мир, 1970.
29. Чуйко С. М. О решении обобщённого матричного уравнения Сильвестра // Чебышев. сб. — 2015. — 16, № 1. — С. 52–66. — DOI: [10.22405/2226-8383-2015-16-1-52-66](https://doi.org/10.22405/2226-8383-2015-16-1-52-66).
30. Штраус В. А. Модели унитарных и самосопряжённых операторов в пространствах Понтрягина // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2022. — 68, № 3. — С. 522–552. — DOI: [10.22363/2413-3639-2022-68-3-522-552](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-3-522-552).

31. Штраус В. А. Спектральное разложение самосопряжённых операторов в пространствах Понтрягина и Крейна // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2025. — 71, № 3. — С. 524–546. — DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-3-524-546](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-524-546).
32. Azizov T. Ya., Strauss V. A. Spectral decompositions for special classes of self-adjoint and normal operators on Krein spaces. Spectral Theory and its Applications // В сб.: «Proceedings dedicated to the 70-th birthday of Prof. I. Colojoară». — Bucharest: Theta, 2003. — С. 45–67.
33. Azizov T. Ya., Strauss V. A. On a spectral decomposition of a commutative operator family in spaces with indefinite metric // Methods Funct. Anal. Topol. — 2005. — 11, № 1. — С. 10–20.
34. Boas R. P. The Stieltjes moment problem for functions of bounded variation // Bull. Am. Math. Soc. — 1939. — 45. — С. 399–404. — DOI: [10.1090/S0002-9904-1939-06992-9](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1939-06992-9).
35. Colojoară I., Foiaş C. Theory of generalized spectral operators. — N.Y.: Gordon and Breach, 1968.
36. Jonas P., Langer H., Textorius B. Models and unitary equivalence of cyclic selfadjoint operators in Pontrjagin spaces // В сб.: «Operator theory and complex analysis». — Basel: Birkhauser, 1992. — С. 252–284. — DOI: [10.1007/978-3-0348-8606-2_13](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8606-2_13).
37. Langer H. Spectraltheorie linearer Operatoren in J -räumen und einige Anwendungen auf die Shar $L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + C$ // Дисс. д.ф.-м.н. — Dresden: Tech. Univ. Dresden, 1965.
38. Langer H. Spectral functions of definitizable operators in Krein space // В сб.: «Functional Analysis». — Berlin–Heidelberg: Springer, 1982. — С. 1–46. — DOI: [10.1007/BFb0069840](https://doi.org/10.1007/BFb0069840).
39. Navarro L. J., Strauss V. On a definitizable analog of the trigonometric moment problem generating an indefinite Toeplitz form // Monatsh. Math. — 2004. — 143, № 4. — С. 333–347. — DOI: [10.1007/s00605-004-0272-1](https://doi.org/10.1007/s00605-004-0272-1).
40. Navarro L. J., Strauss V. Some class of real sequences having indefinite Hankel forms // Methods Funct. Anal. Topol. — 2011. — 17, № 1. — С. 65–74.

В. А. Штраус

Южно-Уральский государственный университет (Национальный исследовательский университет), Челябинск, Россия

E-mail: vstrauss@mail.ru, ПИИЦ SPIN-код: 4224-4149, ПИИЦ AuthorID: [3047](https://orcid.org/0000-0002-2083-2563), ResearcherID: [AAS-3748-2020](https://orcid.org/0000-0002-2083-2563), Scopus: [6701847905](https://orcid.org/0000-0002-2083-2563), ORCID: [0000-0002-2083-2563](https://orcid.org/0000-0002-2083-2563)

DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-388-418](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-388-418)
EDN: [CBFCHM](https://edn.ru/CBFCHM)

UDC 517.982:517.984.48
Research article

Spectral decomposition and model representation of unitary operators in spaces with indefinite metric

V. A. Straus

South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russia

Abstract. A unitary operator acting in the Krein space and possessing an invariant subspace that is maximal nonnegative and decomposes into a direct sum of a uniformly positive (i.e., equivalent to a Hilbert space with respect to the inner pseudoscalar product) and a finite-dimensional neutral subspace is considered. The existence of a spectral function with a finite number of spectral singularities and a difference expression for this operator transforming the infinite-in-both-sides sequence of momenta generated by this operator into a sequence representable as the difference of positive sequences of momenta is proven. In the special case of a cyclic unitary operator in a Pontryagin space, a function space is constructed in which the operator under study is modelled as the operator of multiplication by an exponential with an imaginary argument.



Keywords: unitary operator, Krein space, Pontryagin space, invariant subspace, spectral decomposition.

Conflict-of-interest. The author declares no conflict of interest.

Acknowledgments and funding. The author is deeply grateful to Prof. D. A. Zakora, on whose initiative this work was written. This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, agreement No. 075-02-2025-1543.

For citation: V. A. Straus, “Spectral decomposition and model representation of unitary operators in spaces with indefinite metric,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2026, Vol. **72**, No. 2, 388–418. DOI: [10.22363/2413-3639-2026-72-2-388-418](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2026-72-2-388-418) EDN: [CBFCHM](https://edn.org/CBFCHM)

REFERENCES

1. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, “Lineynye operatory v gil’bertovykh s G -metrikoy” [Linear operators in Hilbert spaces with G -metric], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 1971, **26**, No. 4, 43–92 (in Russian).
2. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, “Lineynye operatory v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy i ikh prilozheniya” [Linear operators in spaces with indefinite metric and their applications], *Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Mat. Anal.* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Anal.], 1979, **17**, 113–205 (in Russian).
3. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, *Osnovy Teorii Lineynykh Operatorov v Prostranstvakh s Indefinitnoy Metrikoy* [Fundamentals of the Theory of Linear Operators in Spaces with Indefinite Metric], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
4. T. Ya. Azizov and N. D. Kopachevskiy, *Vvedenie v teoriyu Prostranstv Pontryagina: Spets. Kurs Lektsiy* [Introduction to the Theory of Pontryagin Spaces: A Special Lecture Course], TNU, Simferopol’, 2008 (in Russian).
5. T. Ya. Azizov and N. D. Kopachevskiy, *Vvedenie v Teoriyu Prostranstv Kreyna: Spets. Kurs Lektsiy* [Introduction to the Theory of Kreyn Spaces: A Special Lecture Course], FORMA, Simferopol’, 2010 (in Russian).
6. N. Aronshayn, “Kvadratichnye formy na vektornykh prostranstvakh” [Quadratic forms on vector spaces], *Matematika* [Mathematics], 1964, **8**, No. 5, 102–155 (in Russian).
7. N. I. Akhiezer, *Klassicheskaya Problema Momentov i Nekotorye Voprosy Analiza, Svyazannye s Neyu* [The Classical Problem of Moments and Some Related Analytical Questions], Fizmatgiz, Moscow, 1961 (in Russian).
8. N. K. Bari, *Trigonometricheskie Ryady* [Trigonometric Series], Fizmatgiz, Moscow, 1961 (in Russian).
9. A. V. Begunts and S. M. Lytkin, “O skorosti skhodimosti posledovatel’nostey i ryadov” [On the rate of convergence of sequences and series], *Mat. v Vys. Obr.* [Math. Higher Edu.], 2020, No. 18, 7–26 (in Russian).
10. Yu. M. Berezanskiy, G. F. Us, and Z. G. Sheftel’, *Funktsional’nyy Analiz. Kurs Lektsiy* [Functional Analysis. Lecture Course], Vyshcha Shkola, Kiev, 1990 (in Russian), DOI: [10.1134/S0012266114010042](https://doi.org/10.1134/S0012266114010042).
11. Bogachev V. I and O. G. Smolyanov, *Deystvitel’nyy i Funktsional’nyy Analiz. Univ. Kurs* [Real and Functional Analysis. University Course], Regul’yar. i Khaot. Dinam., Moscow–Izhevsk, 2020 (in Russian).
12. I. Ts. Gokhberg and M. G. Kreyn, *Vvedenie v Teoriyu Lineynykh Nesamosopryazhennykh Operatorov v Gil’bertovom Prostranstve* [Introduction to the Theory of Linear Non-Self-Adjoint Operators in Hilbert Space], Nauka, Moscow, 1965 (in Russian).
13. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Lineynye Operatory. T. 3. Spektral’nye Operatory* [Linear Operators, Pt. 3: Spectral Operators], Mir, Moscow, 1974 (Russian translation).
14. I. S. Iokhvidov and M. G. Kreyn, “Spektral’naya teoriya operatorov v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy. I” [Spectral theory of operators in spaces with indefinite metric. I], *Tr. Mosk. Mat. Ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1956, **5**, 367–432 (in Russian).
15. I. S. Iokhvidov and M. G. Kreyn, “Spektral’naya teoriya operatorov v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy. II” [Spectral theory of operators in spaces with indefinite metric. II], *Tr. Mosk. Mat. Ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1959, **8**, 413–496 (in Russian).
16. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elementy Teorii Funktsiy i Funktsional’nogo Analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis], Fizmatlit, Moscow, 2009 (in Russian).
17. M. G. Kreyn and G. K. Langer, “O spektral’noy funktsii samosopryazhennogo operatora v prostranstve s indefinitnoy metrikoy” [On the spectral function of a self-adjoint operator in a space with an indefinite metric], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1963, **152**, No. 1, 39–42 (in Russian).
18. M. G. Kreyn and Yu. L. Shmul’yan, “ J -polarnoye predstavlenie plus-operatorov” [J -polar representation of plus-operators], In: *Matematicheskie Issledovaniya. I, vyp. 2* [Mathematical Research. I, Iss. 2], Inst. Mat. MSSR, Kishinev, 1966, pp. 131–161 (in Russian).

19. L. D. Kudryavtsev, *Matematicheskiiy Analiz. T. II* [Mathematical Analysis. Vol. II], Vysshaya Shkola, Moscow, 1970 (in Russian).
20. R. Cooke, *Beskonechnye Matritsy i Prostranstva Posledovatel'nostey* [Infinite Matrices and Sequence Spaces], FML, Moscow, 1960 (Russian translation).
21. M. A. Lavrent'ev and B. V. Shabat, *Metody Teorii Funktsiy Kompleksnogo Peremennogo. Ucheb. Posobie dlya Vuzov* [Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable. A Textbook for Universities], GITTL, Moscow, 1951 (in Russian).
22. A. I. Mal'tsev, *Osnovy Lineynoy Algebry* [Fundamentals of Linear Algebra], Lan', SPb., 2009 (in Russian).
23. A. I. Markushevich, *Kratkiy Kurs Teorii Analiticheskikh Funktsiy* [A Brief Course in the Theory of Analytic Functions], Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).
24. A. I. Markushevich, *Teoriya Analiticheskikh Funktsiy. Nachala Teorii. T. I* [Theory of Analytic Functions. Principles of the Theory. Vol. I], Lan', SPb., 2009 (in Russian).
25. M. Reed and B. Simon, *Metody Sovremennoy Matematicheskoy Fiziki. T. 1. Funktsional'nyy Analiz* [Methods of Modern Mathematical Physics. Vol. 1. Functional analysis], Mir, Moscow, 1977 (Russian translation).
26. F. Riesz and B. Szőkefalvi-Nagy, *Leksii po Funktsional'nomu Analizu* [Functional Analysis], Mir, Moscow, 1979 (Russian translation).
27. V. A. Sevast'yanov, *Kurs Teorii Veroyatnostey i Matematicheskoy Statistiki* [Course in Probability Theory and Mathematical Statistics], Nauka, Moscow, 1982 (in Russian).
28. P. R. Halmos, *Gil'bertovo Prostranstvo v Zadachakh* [A Hilbert Space Problem Book], Mir, Moscow, 1970 (Russian translation).
29. S. M. Chuyko, "O reshenii obobshchennogo matrichnogo uravneniya Sil'vestra" [On the solution of the generalized matrix Sylvester equation], *Chebyshev. sb.* [Chebyshev Coll.], 2015, **16**, No. 1, 52–66 (in Russian), DOI: [10.22405/2226-8383-2015-16-1-52-66](https://doi.org/10.22405/2226-8383-2015-16-1-52-66).
30. V. A. Shtraus, "Modeli unitarnykh i samosopryazhennykh operatorov v prostranstvakh Pontryagina" [Models of self-adjoint and unitary operators in Pontryagin spaces], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2022, **68**, No. 3, 522–552 (in Russian), DOI: [10.22363/2413-3639-2022-68-3-522-552](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-3-522-552).
31. V. A. Shtraus, "Spektral'noe razlozhenie samosopryazhennykh operatorov v prostranstvakh Pontryagina i Kreyna" [Spectral decomposition of self-adjoint operators in Pontryagin and Krein spaces], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2025, **71**, No. 3, 524–546 (in Russian), DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-3-524-546](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-3-524-546).
32. T. Ya. Azizov and V. A. Strauss, "Spectral decompositions for special classes of self-adjoint and normal operators on Krein spaces. Spectral Theory and its Applications," In: *Proceedings dedicated to the 70-th birthday of Prof. I. Colojoară*, Theta, Bucharest, 2003, pp. 45–67.
33. T. Ya. Azizov and V. A. Strauss, "On a spectral decomposition of a commutative operator family in spaces with indefinite metric," *Methods Funct. Anal. Topol.*, 2005, **11**, No. 1, 10–20.
34. R. P. Boas, "The Stieltjes moment problem for functions of bounded variation," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1939, **45**, 399–404, DOI: [10.1090/S0002-9904-1939-06992-9](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1939-06992-9).
35. I. Colojoară, C. Foiaş, *Theory of generalized spectral operators*, Gordon and Breach, N.Y., 1968.
36. P. Jonas, H. Langer, and B. Textorius, "Models and unitary equivalence of cyclic selfadjoint operators in Pontrjagin spaces," In: *Operator theory and complex analysis*, Birkhauser, Basel, 1992, pp. 252–284, DOI: [10.1007/978-3-0348-8606-2_13](https://doi.org/10.1007/978-3-0348-8606-2_13).
37. H. Langer "Spectraltheorie linearer Operatoren in J -räumen und einige Anwendungen auf die Shar $L(\lambda) = \lambda^2 I + \lambda B + C$," *Habilitationsschrift*, Tech. Univ. Dresden, Dresden, 1965.
38. H. Langer, "Spectral functions of definitizable operators in Krein space," In: *Functional Analysis*, Springer, Berlin–Heidelberg, 1982, pp. 1–46, DOI: [10.1007/BFb0069840](https://doi.org/10.1007/BFb0069840).
39. L. J. Navarro and V. Strauss, "On a definitizable analog of the trigonometric moment problem generating an indefinite Toeplitz form," *Monatsh. Math.*, 2004, **143**, No. 4, 333–347, DOI: [10.1007/s00605-004-0272-1](https://doi.org/10.1007/s00605-004-0272-1).
40. L. J. Navarro and V. Strauss, "Some class of real sequences having indefinite Hankel forms," *Methods Funct. Anal. Topol.*, 2011, **17**, No. 1, 65–74.

V. A. Straus

South Ural State University (National Research University), Chelyabinsk, Russia

E-mail: vstrauss@mail.ru, eLIBRARY SPIN-code: 4224-4149, eLIBRARY AuthorID: [3047](#), ResearcherID: [AAS-3748-2020](#), Scopus: [6701847905](#), ORCID: [0000-0002-2083-2563](#)