

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ



СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ
НАПРАВЛЕНИЯ

Том 71, № 4, 2025

Дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-4

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Научный журнал
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.

Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

Главный редактор

А. Л. Скубачевский,
д.ф.-м.н., профессор,
Российский университет
дружбы народов, Москва,
Россия

E-mail: skubachevskii-al@rudn.ru

Зам. главного редактора

А. Ю. Савин,
д.ф.-м.н., профессор,
Российский университет
дружбы народов, Москва,
Россия

E-mail: savin-ayu@rudn.ru

Ответственный секретарь

Е. М. Варфоломеев,
к.ф.-м.н.,
Российский университет
дружбы народов, Москва,
Россия

E-mail: varfolomeev-em@rudn.ru

Члены редакционной коллегии

А. А. Аграчев, д.ф.-м.н., профессор, Международная школа передовых исследований (SISSA), Триест, Италия; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

П. С. Красильников, д.ф.-м.н., профессор, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

А. Б. Муравник, д.ф.-м.н., Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

А. В. Овчинников, к.ф.-м.н., доцент, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва, Россия

В. Л. Попов, д.ф.-м.н., профессор, член-корр. РАН, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

А. В. Сарычев, д.ф.-м.н., профессор, Флорентийский университет, Флоренция, Италия

Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

4 выпуска в год

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Включен в Единый государственный перечень научных изданий («Белый список»)

Индексируется в *РИНЦ*, *DOAJ*, *MathSciNet*, *Zentralblatt Math*.

Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences (New York)*.

Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты.

Правила оформления статей, архив публикаций в открытом доступе и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала: <http://journals.rudn.ru/cmfd>, <http://www.mathnet.ru/cmfd>.

Редактор: Е. М. Варфоломеев

Компьютерная верстка: Е. М. Варфоломеев

Адрес редакции:

115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Подписано в печать 22.12.2025. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.

Усл. печ. л. 18,6. Тираж 110 экз. Заказ 1679.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» (РУДН)

117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН

115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-08-61; e-mail: publishing@rudn.ru

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba



CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 71, No. 4, 2025

Differential and Functional Differential Equations

DOI: 10.22363/2413-3639-2025-71-4

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Founded in 2003

Founder: Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

EDITOR-IN-CHIEF

Alexander Skubachevskii,

RUDN University

Moscow, Russia

E-mail: skubachevskii-al@rudn.ru

DEPUTY EDITOR

Anton Savin,

RUDN University

Moscow, Russia

E-mail: savin-ayu@rudn.ru

EXECUTIVE SECRETARY

Evgeniy Varfolomeev,

RUDN University

Moscow, Russia

E-mail: varfolomeev-em@rudn.ru

EDITORIAL BOARD

Andrei Agrachev, International School for Advanced Studies (SISSA), Trieste, Italy; Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Pavel Krasil'nikov, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

Andrey Muravnik, RUDN University, Moscow, Russia

Alexey Ovchinnikov, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; Russian Institute for Scientific and Technical Information of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Vladimir Popov, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Andrei Sarychev, University of Florence, Florence, Italy

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Published by the Peoples' Friendship University of Russia
named after Patrice Lumumba, Moscow, Russian Federation

ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

4 issues per year

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Indexed by *Russian Index of Science Citation*, *DOAJ*, *MathSciNet*, *Zentralblatt Math*.

Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences* (New York).

Aims and Scope

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results.

Guidelines for authors, free accessible archive of issues, and other information can be found at the journal's website: <http://journals.rudn.ru/cmfd>, <http://www.mathnet.ru/eng/cmfd>.

Editor: *E. M. Varfolomeev*
Computer design: *E. M. Varfolomeev*

Address of the Editorial Office:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Print run 110 copies.

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba (RUDN University), Moscow, Russia
6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia

Printed at RUDN Publishing House:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 955-08-61; e-mail: publishing@rudn.ru

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Ашыралыев А.</i> Разностная схема второго порядка для гиперболических уравнений с неограниченным запаздыванием	547
<i>Веденяпин В. В., Батищева Я. Г., Горюнова М. В., Руссков А. А.</i> Математическая теория ускоренного расширения Вселенной на основе принципа наименьшего действия	562
<i>Гребенников Д. С., Лыфенко А. И., Тимохин А. М., Савинков Р. С., Бочаров Г. А.</i> Параметризация функций управления в задаче моделирования терапии ВИЧ-инфекции	585
<i>Звягин А. В., Толстой Н. В.</i> Исследование разрешимости альфа-модели Бингама	604
<i>Краста Г., Малуса А.</i> О дифференциальной модели роста песчаных насыпей в бункере . .	626
<i>Леднов А. П.</i> Об успокоении системы управления нейтрального типа на временном графе-звезде с запаздыванием, пропорциональным времени	642
<i>Сальникова Т. В., Кугушев Е. И.</i> О геометрических структурах Дирака	655
<i>Хоанг Л., Ибрагимов А. И.</i> Класс анизотропных уравнений диффузии-переноса в недивергентной форме	663
<i>Чупахин А. П., Стецяк Е. С., Чутков Д. С.</i> Динамика тензора конформации в вязкоупругих моделях полимеров FENE	686

CONTENTS

<i>Ashyralyev A.</i> Second-order difference scheme for hyperbolic equations with unbounded delay .	547
<i>Vedenyapin V. V., Batishcheva Ya. G., Goryunova M. V., Russkov A. A.</i> A mathematical theory of the accelerated expansion of the Universe based on the principle of least action	562
<i>Grebennikov D. S., Lyfenko A. I., Timokhin A. M., Savinkov R. S., Bocharov G. A.</i> Parameterization of control functions in the problem of modeling HIV infection therapy	585
<i>Zvyagin A. V., Tolstoy N. V.</i> A study of the solvability of the Bingham alpha model	604
<i>Crasta G., Malusa A.</i> On the differential model of sandpiles growing in a silo	626
<i>Lednov A. P.</i> On the damping of a neutral-type control system on a temporal star graph with time-proportional delay	642
<i>Salnikova T. V., Kugushev E. I.</i> Dirac geometric structures	655
<i>Hoang L., Ibragimov A. I.</i> A class of anisotropic diffusion-transport equations in nondivergent form	663
<i>Chupakhin A. P., Stetsyak E. S., Chutkov D. S.</i> Dynamics of the conformation tensor in viscoelastic FENE polymer models	686

РАЗНОСТНАЯ СХЕМА ВТОРОГО ПОРЯДКА ДЛЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С НЕОГРАНИЧЕННЫМ ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

А. АШЫРАЛЫЕВ

Bahcesehir University, Istanbul, Turkiye

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

Аннотация. Настоящая работа посвящена исследованию начальной задачи для гиперболического уравнения с неограниченным запаздыванием

$$\begin{cases} \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + A^2 v(t) = a \left(\frac{dv(t-\omega)}{dt} + Av(t-\omega) \right) + f(t), & t > 0, \\ v(t) = \varphi(t), & -\omega \leq t \leq 0 \end{cases}$$

в гильбертовом пространстве H с самосопряжённым положительно определённым оператором A . Представлена разностная схема второго порядка точности для численного решения дифференциальной задачи. Установлена теорема об оценках устойчивости решений этой разностной схемы. На практике доказаны оценки устойчивости решений четырех задач для гиперболических разностных уравнений с запаздыванием.

Ключевые слова: гиперболическое уравнение, неограниченное запаздывание, численное решение, разностная схема, второй порядок точности, устойчивость решений.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5–100» и издана в рамках целевой программы BR24993094 Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан. Авторы также выражают благодарность рецензентам за полезные советы по улучшению статьи.

Для цитирования: А. Ашыралыев. Разностная схема второго порядка для гиперболических уравнений с неограниченным запаздыванием // Современная математика. Фундаментальные направления. 2025. Т. 71, № 4. С. 547–561, DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-547-561](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-547-561).

Посвящается памяти академика С. П. Новикова

1. ВВЕДЕНИЕ

Во многих областях современной науки и техники естественным образом возникают системы, содержащие запаздывающие члены. Такие системы часто описывают динамические процессы, управляемые дифференциальными уравнениями с запаздыванием, как обыкновенными, так и в частных производных. Эти запаздывания обычно возникают в сложных системах, включающих логические и вычислительные компоненты, в которых для обработки информации требуется конечный временной интервал. Линейная теория дифференциальных уравнений с запаздыванием привлекла значительное внимание учёных и была всесторонне изучена многими исследователями (см., например, [4, 7, 12, 17, 20, 21, 23–25, 28, 29, 38, 39] и приведённые там ссылки).

С другой стороны, гиперболические уравнения в частных производных, не включающие запаздывания по времени, часто встречаются в широком спектре научных и инженерных приложений. К ним относятся, например, электромагнитная теория, электродинамика, термодинамика, гидродинамика, теория упругости, механика жидкости, распространение волн и материаловедение. При применении численных методов для решения таких уравнений вопрос устойчивости становится критически важным. Особенно эффективная модель для исследования устойчивости предполагает использование безусловно абсолютно устойчивых разностных схем, связанных с неограниченными операторами. Со временем операторный метод получил широкое развитие как ценный аналитический инструмент для исследования решений как локальных, так и нелокальных задач, связанных с гиперболическими дифференциальными уравнениями в гильбертовых и банаховых пространствах (см., например, [2, 11, 26, 27, 30, 36]).

Значительный объём литературы посвящён разработке разностных схем для гиперболических уравнений в частных производных (см., например, [5, 6, 31–33] и приведённые там ссылки). Во многих из этих работ устойчивость демонстрируется при условии, что временной и пространственный шаги сетки, обозначаемые τ и h соответственно, взаимосвязаны. В более абстрактном смысле это означает, что должно выполняться условие $\tau \|A_h\| \rightarrow 0$ при $\tau \rightarrow 0$.

Однако существует значительный интерес к исследованию абсолютно устойчивых разностных схем, достигающих высокого порядка точности для гиперболических уравнений в частных производных, особенно тех, устойчивость которых сохраняется независимо от каких-либо ограничений на размеры сетки τ и h . Примечательно, что впервые такие неравенства безусловной устойчивости для схем первого порядка точности, решающих гиперболические дифференциальные уравнения, были установлены в [9]. Позднее, в [16], были предложены разностные схемы как первого, так и второго порядка, построенные с использованием целых степеней пространственных операторов, в качестве приближений к абстрактной начальной задаче для гиперболических уравнений в гильбертовых пространствах. С использованием операторного подхода были успешно получены оценки устойчивости решений, генерируемых этими схемами.

В обзорной статье [14] представлены последние результаты по локальным и нелокальным корректным задачам для дифференциальных и разностных уравнений второго порядка. Представлены результаты по устойчивости дифференциальных задач для уравнений второго порядка и разностных схем для приближённого решения задач второго порядка.

Однако теория устойчивости задач для гиперболического уравнения с неограниченным запаздыванием изучена недостаточно. Лишь немногие исследователи интересуются подобными задачами. Ограниченные решения нелинейных одномерных гиперболических уравнений с ограниченным запаздыванием исследовались в более ранних работах [22, 34, 35, 37]. В работе [10] были установлены существование и единственность ограниченного решения нелинейных гиперболических дифференциальных уравнений с ограниченным запаздыванием. В общем случае решения гиперболических дифференциальных уравнений с неограниченным запаздыванием не являются ограниченными [3].

В статье [19] мы изучили начальную задачу для гиперболического дифференциального уравнения с неограниченным запаздыванием

$$\begin{cases} \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + A^2 v(t) = a \left(\frac{dv(t-\omega)}{dt} + Av(t-\omega) \right) + f(t), & t > 0, \\ v(t) = \varphi(t), & -\omega \leq t \leq 0 \end{cases} \quad (1.1)$$

в гильбертовом пространстве H с самосопряженным положительно определённым оператором A , $A \geq \delta I$, $\delta > 0$. Здесь $\varphi(t)$ — непрерывно дифференцируемая абстрактная функция, определённая на интервале $[-\omega, 0]$ со значениями в H , а $f(t)$ — непрерывная абстрактная функция, определённая на интервале $[0, \infty)$ со значениями в H .

Функция $v(t)$ называется *решением* задачи (1.1), если выполняются следующие условия:

- i. $v(t)$ дважды непрерывно дифференцируема на интервале $[0, \infty)$;
- ii. элемент $v(t)$ принадлежит $D(A^2)$ при всех $t \in [0, \infty)$, а функция $A^2 v(t)$ непрерывна на интервале $[0, \infty)$;
- iii. $v(t)$ удовлетворяет уравнению и начальным условиям (1.1).

Установлена основная теорема об оценках устойчивости решения задачи (1.1). В качестве приложения получены оценки устойчивости решения четырёх задач для гиперболических уравнений с неограниченным запаздыванием.

В статье [18] мы ввели разностную схему первого порядка точности

$$\begin{cases} \frac{u^{k+1} - 2u^k + u^{k-1}}{\tau^2} + A^2 u^{k+1} = a \left[\frac{u^{k-N} - u^{k-1-N}}{\tau} + Au^{k-N} \right] + f_k, \\ f_k = f(t_k), \quad t_k = k\tau, & 1 \leq k < \infty, \quad N\tau = \omega, \\ (I + \tau^2 A^2) \frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} = \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau}, & k = nN, \quad n = 0, 1, \dots, \\ u^k = \varphi_k, \quad \varphi_k = \varphi(t_k), \quad t_k = k\tau, & -N \leq k \leq 0 \end{cases} \quad (1.2)$$

для приближённого решения задачи (1.1). Установлена теорема об оценках устойчивости решений данной разностной схемы. На практике доказаны оценки устойчивости решения четырёх задач для гиперболических дифференциальных и разностных уравнений с запаздыванием. Приведены численные результаты и пояснительные иллюстрации, подтверждающие обоснованность теоретических результатов.

Мы заинтересованы в исследовании разностных схем высокого порядка точности, равномерно устойчивых относительно шага по времени для приближённых решений этой начальной задачи. Нам не удалось получить результаты такого типа для решения хорошо известной разностной схемы второго порядка точности, генерируемой оператором A^2 :

$$\begin{cases} \frac{u^{k+1} - 2u^k + u^{k-1}}{\tau^2} + A^2 u^k = a \left[\frac{u^{k-N} - u^{k-1-N}}{\tau} + Au^{k-N} \right] + f_k, \\ f_k = f(t_k), \quad t_k = k\tau, & 1 \leq k < \infty, \quad N\tau = \omega, \\ (I + \tau^2 A^2) \frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} = \frac{2u^k - 3u^{k-1} + u^{k-2}}{\tau}, & k = nN, \quad n = 1, 2, \dots, \\ u^k = \varphi(t_k), \quad t_k = k\tau, & -N \leq k \leq 0. \end{cases}$$

В настоящей работе построена разностная схема второго порядка точности для численного решения абстрактной задачи (1.1). Установлена теорема об устойчивости этой разностной схемы. В приложениях получены доказательства устойчивости разностных схем для четырёх линейных уравнений в частных производных с запаздыванием.

2. ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАЗНОСТНОЙ СХЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ

Для приближённого решения (1.1) рассмотрим разностную схему второго порядка точности

$$\begin{cases} \frac{u^{k+1} - 2u^k + u^{k-1}}{\tau^2} + A^2 u^k + \frac{\tau^2}{4} A^4 u^{k+1} = a \left[\frac{u^{k+1-N} - u^{k-1-N}}{2\tau} + Au^{k-N} \right] + f_k, \\ f_k = f(t_k), \quad t_k = k\tau, & 1 \leq k < \infty, \quad N\tau = \omega, \\ (I + \tau^2 A^2) \frac{u^{k+1} - u^k}{\tau} = \frac{3u^k - 4u^{k-1} + u^{k-2}}{\tau} + \\ + \frac{\tau}{2} \left(-A^2 u^k + f_k + a \left(\frac{3u^{k-N} - 4u^{k-1-N} + u^{k-2-N}}{2\tau} \right) + Au^{k-N} \right), & k = nN, \quad n = 0, 1, \dots, \\ u^k = \varphi_k, \quad \varphi_k = \varphi(t_k), \quad t_k = k\tau, & -N \leq k \leq 0. \end{cases} \quad (2.1)$$

Теорема 2.1. Пусть $\varphi_k \in D(A^2)$, $-N \leq k \leq 0$ и $f_k \in D(A)$, $k \geq 1$. Тогда для решения разностной задачи (2.1) справедливы следующие оценки устойчивости при $n = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq nN} \|u^k\|_H + \max_{1 \leq k \leq nN} \left\| A^{-1} \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H \leq \\ & \leq (2b)^n \left[\max_{-N \leq k \leq 0} \|\varphi_k\|_H + \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| A^{-1} \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H \right] + 2 \sum_{i=1}^n (2b)^{n-i} \sum_{j=(i-1)N}^{iN-1} \|A^{-1} f_j\|_H \tau, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \max_{1 \leq k \leq nN} \|Au^k\|_H + \max_{1 \leq k \leq nN} \left\| \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H \leq \\
& \leq (2b)^n \left[\max_{-N \leq k \leq 0} \|A\varphi_k\|_H + \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H \right] + 2 \sum_{i=1}^n (2b)^{n-i} \sum_{j=(i-1)N}^{iN-1} \|f_j\|_H \tau, \\
& \max_{1 \leq k \leq nN} \|A^2 u^k\|_H + \max_{1 \leq k \leq nN} \left\| A \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H \leq \\
& \leq (2b)^n \left[\max_{-N \leq k \leq 0} \|A^2 \varphi_k\|_H + \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| A \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H \right] + 2 \sum_{i=1}^n (2b)^{n-i} \sum_{j=(i-1)N}^{iN-1} \|f_j\|_H \tau + \\
& + \sum_{i=1}^n (2b)^{n-i} \min \left\{ 2 \sum_{j=(i-1)N}^{iN-1} \|Af_j\|_H \tau, 3 \|f_{(i-1)N+1}\|_H + 3 \sum_{j=(i-1)N+2}^{iN-1} \left\| \frac{f_j - f_{j-1}}{\tau} \right\|_H \tau \right\}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно установить следующие оценки при $n = 1, 2, \dots$:

$$\max_{1 \leq k \leq N} \|u^k\|_H \leq b \max_{-N \leq k \leq 0} \|\varphi_k\|_H + b \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| A^{-1} \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H + \sum_{j=1}^{N-1} \|A^{-1} f_j\|_H \tau, \quad (2.2)$$

$$\max_{1 \leq k \leq N} \left\| A^{-1} \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H \leq b \max_{-N \leq k \leq 0} \|\varphi_k\|_H + b \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| A^{-1} \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H + \sum_{j=1}^{N-1} \|A^{-1} f_j\|_H \tau, \quad (2.3)$$

$$\max_{1 \leq k \leq N} \|Au^k\|_H \leq b \max_{-N \leq k \leq 0} \|A\varphi_k\|_H + b \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H + \sum_{j=1}^{N-1} \|f_j\|_H \tau, \quad (2.4)$$

$$\max_{1 \leq k \leq N} \left\| \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H \leq b \max_{-N \leq k \leq 0} \|A\varphi_k\|_H + b \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H + \sum_{j=1}^{N-1} \|f_j\|_H \tau, \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned}
\max_{1 \leq k \leq N} \|A^2 u^k\|_H & \leq b \max_{-N \leq k \leq 0} \|A^2 \varphi_k\|_H + b \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| A \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H + \\
& + \min \left\{ 2 \|f_1\|_H + 2 \sum_{j=2}^{N-1} \left\| \frac{f_j - f_{j-1}}{\tau} \right\|_H \tau, \sum_{j=1}^{N-1} \|Af_j\|_H \tau \right\}, \quad (2.6)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\max_{1 \leq k \leq N} \left\| A \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H & \leq b \max_{-N \leq k \leq 0} \|A^2 \varphi_k\|_H + b \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| A \frac{\varphi_k - \varphi_{k-1}}{\tau} \right\|_H + \\
& + \min \left\{ \|f_1\|_H + \sum_{j=2}^{N-1} \left\| \frac{f_j - f_{j-1}}{\tau} \right\|_H \tau, \sum_{j=1}^{N-1} \|Af_j\|_H \tau \right\}, \quad (2.7)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\max_{nN+1 \leq k \leq (n+1)N} \|u^k\|_H & \leq b \max_{(n-1)N+1 \leq k \leq nN} \|u^k\|_H + \\
& + b \max_{(n-1)N+1 \leq k \leq nN} \left\| A^{-1} \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H + \sum_{j=nN+1}^{(n+1)N-1} \|A^{-1} f_j\|_H \tau, \quad (2.8)
\end{aligned}$$

$$\max_{nN+1 \leq k \leq (n+1)N} \left\| A^{-1} \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H \leq b \max_{(n-1)N+1 \leq k \leq nN} \|u^k\|_H +$$

$$+ b \max_{(n-1)N+1 \leq k \leq nN} \left\| A^{-1} \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H + \sum_{j=nN+1}^{(n+1)N-1} \|A^{-1} f_j\|_H \tau, \quad (2.9)$$

$$\begin{aligned} \max_{nN+1 \leq k \leq (n+1)N} \|Au^k\|_H &\leq b \max_{(n-1)N+1 \leq k \leq nN} \|Au^k\|_H + \\ &+ b \max_{(n-1)N+1 \leq k \leq nN} \left\| \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H + \sum_{j=nN+1}^{(n+1)N-1} \|f_j\|_H \tau, \end{aligned} \quad (2.10)$$

$$\begin{aligned} \max_{nN+1 \leq k \leq (n+1)N} \left\| \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H &\leq b \max_{(n-1)N+1 \leq k \leq nN} \|Au^k\|_H + \\ &+ b \max_{(n-1)N+1 \leq k \leq nN} \left\| \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H + \sum_{j=nN+1}^{(n+1)N-1} \|f_j\|_H \tau, \end{aligned} \quad (2.11)$$

$$\begin{aligned} \max_{nN+1 \leq k \leq (n+1)N} \|A^2 u^k\|_H &\leq b \max_{(n-1)N+1 \leq k \leq nN} \|A^2 u^k\|_H + b \max_{(n-1)N+1 \leq k \leq nN} \left\| A \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H + \\ &+ \min \left\{ 2 \|f_{nN+1}\|_H + 2 \sum_{j=nN+2}^{(n+1)N-1} \left\| \frac{f_j - f_{j-1}}{\tau} \right\|_H \tau, \sum_{j=nN+1}^{(n+1)N-1} \|A f_j\|_H \tau \right\}, \end{aligned} \quad (2.12)$$

$$\begin{aligned} \max_{nN+1 \leq k \leq (n+1)N} \left\| A \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H &\leq b \max_{(n-1)N+1 \leq k \leq nN} \|A^2 u^k\|_H + b \max_{(n-1)N+1 \leq k \leq nN} \left\| A \frac{u^k - u^{k-1}}{\tau} \right\|_H + \\ &+ \min \left\{ \|f_{nN+1}\|_H + \sum_{j=nN+2}^{(n+1)N-1} \left\| \frac{f_j - f_{j-1}}{\tau} \right\|_H \tau, \sum_{j=nN+1}^{(n+1)N-1} \|A f_j\|_H \tau \right\}. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Мы основываем доказательство этих оценок на методах, разработанных в [19], а также на формулах

$$\begin{aligned} u^{nN+1} &= (I + \tau^2 A^2)^{-1} \left(I + \frac{1}{2} \tau^2 A^2 \right) u^{nN} + \tau (I + \tau^2 A^2)^{-1} \left(\frac{3u^{nN} - 4u^{nN-1} + u^{nN-2}}{2\tau} \right) + \\ &+ \frac{\tau}{2} \left(f_{nN} + a \left(\frac{3u^{(n-1)N} - 4u^{(n-1)N-1} + u^{(n-1)N-2}}{2\tau} \right) + Au^{(n-1)N} \right), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} u^k &= \frac{1}{2} \left(R^{k-nN-1} \left(I - \frac{i\tau A}{2} \right) + \tilde{R}^{k-nN-1} \left(I + \frac{i\tau A}{2} \right) \right) u^{nN} + \\ &+ (2iA)^{-1} \left(\tilde{R}^{-1} R^{k-nN-1} - R^{-1} \tilde{R}^{k-nN-1} \right) \frac{u^{nN+1} - u^{nN}}{\tau} + \\ &+ \sum_{j=nN+1}^{k-1} (2iA)^{-1} \left(R^{k-j} - \tilde{R}^{k-j} \right) \left\{ \left(a \left[\frac{u^{j-N+1} - u^{j-1-N}}{2\tau} + Au^{j-N} \right] + f_j \right) \right\} \tau \end{aligned} \quad (2.14)$$

для всех $nN + 2 \leq k \leq (n+1)N$, $n = 0, 1, \dots$, где

$$u^k = \varphi_k, \quad -N \leq k \leq 0,$$

для решения разностной задачи (2.1) и оценок

$$\begin{aligned} \|R\|_{H \rightarrow H} &\leq 1, \quad \|\tau AR\|_{H \rightarrow H} \leq 1, \quad \|\tilde{R}\|_{H \rightarrow H} \leq 1, \quad \|\tau A \tilde{R}\|_{H \rightarrow H} \leq 1, \\ \|\tilde{R} R^{-1}\|_{H \rightarrow H} &\leq 1, \quad \|R \tilde{R}^{-1}\|_{H \rightarrow H} \leq 1, \\ \|(I \pm i\tau A)^{-1}\|_{H \rightarrow H} &\leq 1, \quad \|\tau A(I \pm i\tau A)^{-1}\|_{H \rightarrow H} \leq 1. \end{aligned}$$

Здесь R и \tilde{R} — операторные функции, определяемые формулами

$$Ru = \left(I - i\tau A - \frac{\tau^2}{2} A^2 \right)^{-1} u, \quad \tilde{R}u = \left(I + i\tau A - \frac{\tau^2}{2} A^2 \right)^{-1} u.$$

Теорема 2.1 доказана. \square

Общность данного подхода позволяет рассматривать широкий класс локальных и нелокальных краевых задач для дифференциальных уравнений с неограниченным запаздыванием по времени. В частности, он позволяет установить теоремы об устойчивости для ряда задач с неограниченным запаздыванием.

3. ПРИЛОЖЕНИЯ

Сначала рассмотрим начальную задачу для гиперболического дифференциального уравнения с неограниченным запаздыванием и нелокальными условиями относительно пространственной переменной x :

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) + \left(-\frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial \cdot}{\partial x} \right) + \sigma \cdot \right)^2 u(t, x) = \\ = a \left(u_t(t - \omega, x) - \frac{\partial}{\partial x} \left(a(x) \frac{\partial u(t - \omega, x)}{\partial x} \right) + \sigma \cdot u(t - \omega, x) \right) + f(t, x), & 0 < t < \infty, \quad x \in (0, l), \\ u(t, x) = \varphi(t, x), & -\omega \leq t \leq 0, \quad x \in [0, l], \\ u(t, 0) = u(t, l), \quad u_x(t, 0) = u_x(t, l), & 0 \leq t < \infty, \end{cases} \quad (3.1)$$

где $\sigma > 0$ и $a(x)$, $\varphi(t, x)$ и $f(t, x)$ — заданные гладкие функции, удовлетворяющие всем условиям совместности, гарантирующим гладкое решение задачи (3.1). Будем предполагать, что $a(x) \geq a > 0$ и $a(l) = a(0)$.

Дискретизация задачи (3.1) осуществляется в два этапа. Дифференциальному оператору A , порождённому задачей (3.1), сопоставляем оператор A_h^x , определяемый по формуле

$$A_h^x \varphi_h(x) = \{-(a(x) \varphi_x)_{x,r} + \sigma \varphi_r(x)\}_1^{K-1}$$

и действующий в пространстве сеточных функций $\varphi_h(x) = \{\varphi_r\}_0^K$, удовлетворяющих условиям $\varphi_0 = \varphi_K$, $\varphi_1 - \varphi_0 = \varphi_K - \varphi_{K-1}$. Известно, что A_h^x — самосопряженный положительно определённый оператор в $L_{2h} = L_2([0, l]_h)$. С помощью A_h^x приходим к начальной задаче

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_h(t, x)}{dt^2} + (A_h^x)^2 u_h(t, x) = a \left(\frac{du_h(t - \omega, x)}{dt} + A_h^x u_h(t - \omega, x) \right) + f_h(t, x), & 0 < t < \infty, \quad x \in [0, l]_h, \\ u_h(t, x) = \varphi_h(t, x), & -\omega \leq t \leq 0, \quad x \in [0, l]_h. \end{cases} \quad (3.2)$$

На втором этапе мы заменяем задачу (3.2) разностной схемой второго порядка (2.1)

$$\begin{cases} \frac{u_h^{k+1}(x) - 2u_h^k(x) + u_h^{k-1}(x)}{\tau^2} + (A_h^x)^2 u_h^k(x) + \frac{\tau^2}{4} (A_h^x)^4 u_h^{k+1}(x) = \\ = a \left(\frac{u_h^{k+1-N}(x) - u_h^{k-N-1}(x)}{2\tau} + A_h^x u_h^{k-N}(x) \right) + f_{k,h}(x), \quad f_{k,h}(x) = f_h(t_k, x), \quad t_k = k\tau, \\ 1 \leq k < \infty, \quad N\tau = \omega, \quad x \in [0, l]_h; \\ \left(I + \tau^2 (A_h^x)^2 \right) \frac{u_h^{k+1}(x) - u_h^k(x)}{\tau} = \frac{3u_h^k(x) - 4u_h^{k-1}(x) + u_h^{k-2}(x)}{2\tau} + \\ + \frac{\tau}{2} \left[-(A_h^x)^2 u_h^k(x) + f_{k,h}(x) + a \left(\frac{3u_h^{k-N}(x) - 4u_h^{k-1-N}(x) + u_h^{k-2-N}(x)}{2\tau} + A_h^x u_h^{k-N}(x) \right) \right], \\ k = nN, \quad n = 0, 1, 2, \dots; \\ u_h^k(x) = \varphi_h^k(x), \quad \varphi_h^k(x) = \varphi_h(t_k, x), \quad t_k = k\tau, \quad -N \leq k \leq 0, \quad x \in [0, l]_h. \end{cases} \quad (3.3)$$

Теорема 2.1 даёт следующий результат об устойчивости.

Теорема 3.1. Для решения разностной задачи (3.3) справедливы следующие оценки устойчивости при $n = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq nN} \|u_h^k\|_{L_{2h}} + \max_{1 \leq k \leq nN} \left\| \frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \leq \\ & \leq \widetilde{M} \left\{ (2b)^n \left[\max_{-N \leq k \leq 0} \|\varphi_{k,h}\|_{L_{2h}} + \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| \frac{\varphi_{k,h} - \varphi_{k-1,h}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \right] + 2 \sum_{i=1}^n (2b)^{n-i} \sum_{j=(i-1)N}^{iN-1} \|f_{j,h}\|_{L_{2h}} \tau \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq nN} \|u_h^k\|_{W_{2h}^2} + \max_{1 \leq k \leq nN} \left\| \frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \leq \\ & \leq \widetilde{M} \left\{ (2b)^n \left[\max_{-N \leq k \leq 0} \|\varphi_{k,h}\|_{W_{2h}^2} + \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| \frac{\varphi_{k,h} - \varphi_{k-1,h}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \right] + 2 \sum_{i=1}^n (2b)^{n-i} \sum_{j=(i-1)N}^{iN-1} \|f_{j,h}\|_{L_{2h}} \tau \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq nN} \|u_h^k\|_{W_{2h}^4} + \max_{1 \leq k \leq nN} \left\| \frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\tau} \right\|_{W_{2h}^2} \leq \\ & \leq \widetilde{M} \left\{ (2b)^n \left[\max_{-N \leq k \leq 0} \|\varphi_{k,h}\|_{W_{2h}^4} + \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| \frac{\varphi_{k,h} - \varphi_{k-1,h}}{\tau} \right\|_{W_{2h}^2} \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^n (2b)^{n-i} \min \left\{ 2 \sum_{j=(i-1)N}^{iN-1} \|f_{j,h}\|_{W_{2h}^2} \tau, 3 \|f_{(i-1)N+1,h}\|_{L_{2h}} + 3 \sum_{j=(i-1)N+2}^{iN-1} \left\| \frac{f_{j,h} - f_{j-1,h}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \tau \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Здесь и далее \widetilde{M} не зависит от h и τ .

Во-вторых, мы рассматриваем начально-краевую задачу для гиперболического функционально-дифференциального уравнения с неограниченным запаздыванием и инволюцией

$$\begin{cases} u_{tt}(t, x) - (a(x)u_x(t, x))_x + \sigma u(t, x) - \beta(a(-x)u_x(t, -x))_x = \\ = b(x)u_t(t - \omega, x) + c(x)u_x(t - \omega, x) + f(t, x), & 0 < t < \infty, \quad x \in (-l, l), \\ u(t, x) = \varphi(t, x), & -\omega \leq t \leq 0, \quad x \in [-l, l], \\ u(t, -l) = u(t, l) = 0, & 0 \leq t < \infty, \end{cases} \quad (3.4)$$

где $\delta > 0$ и $a(x)$, $b(x)$, $c(x)$, $\varphi(t, x)$ и $f(t, x)$ — заданные гладкие функции, удовлетворяющие всем условиям совместности, что гарантирует существование гладкого решения $u(t, x)$ для задачи (3.4). Будем считать, что $a \geq a(x) = a(-x) \geq \sigma > 0$ и $\sigma - a|\beta| \geq 0$.

Дискретизация задачи (3.4) осуществляется в два этапа. Дифференциальному оператору A , порождённому задачей (3.4), сопоставляем разностный оператор A_h^x , действующий по формуле

$$A_h^x \varphi_h(x) = \{-(a(x)\varphi_{\bar{x}}(x))_{x,r} - \beta(a(-x)\varphi_{\bar{x}}(-x))_{x,r} + \delta \varphi_r(x)\}_{-K+1}^{K-1} \quad (3.5)$$

в пространстве сеточных функций $\varphi_h(x) = \{\varphi_r\}_{-K}^K$, удовлетворяющих условиям $\varphi_{-K} = \varphi_K = 0$. Известно, что A_h^x — самосопряженный положительно определённый оператор в $L_{2h} = L_2([-l, l]_h)$ (см. [1]). С помощью A_h^x приходим к начальной задаче

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_h(t, x)}{dt^2} + A_h^x u_h(t, x) = b_h(x) \frac{du_h(t - \omega, x)}{dt} + c_h(x) u_{x,h}(t, x) + f_h(t, x), & 0 < t < \infty, \quad x \in [-l, l]_h, \\ u_h(t, x) = \varphi_h(t, x), & -\omega \leq t \leq 0, \quad x \in [-l, l]_h. \end{cases} \quad (3.6)$$

На втором этапе мы заменяем задачу (3.6) разностной схемой второго порядка точности (2.1):

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{u_h^{k+1}(x) - 2u_h^k(x) + u_h^{k-1}(x)}{\tau^2} + (A_h^x)^2 u_h^k(x) + \frac{\tau^2}{4} (A_h^x)^4 u_h^{k+1}(x) = \\ = a \left(\frac{u_h^{k+1-N}(x) - u_h^{k-N-1}(x)}{2\tau} + A_h^x u_h^{k-N}(x) \right) + f_{k,h}(x), \quad f_{k,h}(x) = f_h(t_k, x), \quad t_k = k\tau, \\ 1 \leq k < \infty, \quad N\tau = \omega, \quad x \in [-l, l]_h; \\ \left(I + \tau^2 (A_h^x)^2 \right) \frac{u_h^{k+1}(x) - u_h^k(x)}{\tau} = \frac{3u_h^k(x) - 4u_h^{k-1}(x) + u_h^{k-2}(x)}{2\tau} + \\ + \frac{\tau}{2} \left[-(A_h^x)^2 u_h^k(x) + f_{k,h}(x) + a \left(\frac{3u_h^{k-N}(x) - 4u_h^{k-1-N}(x) + u_h^{k-2-N}(x)}{2\tau} + A_h^x u_h^{k-N}(x) \right) \right], \\ k = nN, \quad n = 0, 1, \dots; \\ u_h^k(x) = \varphi_h^k(x), \quad \varphi_h^k(x) = \varphi_h(t_k, x), \quad t_k = k\tau, \quad -N \leq k \leq 0, \quad x \in [-l, l]_h. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Теорема 2.1 даёт следующий результат об устойчивости.

Теорема 3.2. Для решения разностной задачи (3.7) справедливы следующие оценки устойчивости при $n = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq nN} \|u_h^k\|_{L_{2h}} + \max_{1 \leq k \leq nN} \left\| \frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} &\leq \\ &\leq \widetilde{M} \left((2b)^n \left[\max_{-N \leq k \leq 0} \|\varphi_{k,h}\|_{L_{2h}} + \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| \frac{\varphi_{k,h} - \varphi_{k-1,h}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{i=1}^n (2b)^{n-i} \sum_{j=(i-1)N}^{iN-1} \|f_{j,h}\|_{L_{2h}} \tau \right), \end{aligned} \quad (3.8)$$

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq nN} \|u_h^k\|_{W_{2h}^1} + \max_{1 \leq k \leq nN} \left\| \frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} &\leq \\ &\leq \widetilde{M} \left((2b)^n \left[\max_{-N \leq k \leq 0} \|\varphi_{k,h}\|_{W_{2h}^1} + \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| \frac{\varphi_{k,h} - \varphi_{k-1,h}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \right] + \right. \\ &\quad \left. + 2 \sum_{i=1}^n (2b)^{n-i} \sum_{j=(i-1)N}^{iN-1} \|f_{j,h}\|_{L_{2h}} \tau \right), \end{aligned} \quad (3.9)$$

$$\begin{aligned} \max_{1 \leq k \leq nN} \|u_h^k\|_{W_{2h}^2} + \max_{1 \leq k \leq nN} \left\| \frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\tau} \right\|_{W_{2h}^1} &\leq \\ &\leq \widetilde{M} \left((2b)^n \left[\max_{-N \leq k \leq 0} \|\varphi_{k,h}\|_{W_{2h}^2} + \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| \frac{\varphi_{k,h} - \varphi_{k-1,h}}{\tau} \right\|_{W_{2h}^1} \right] + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{i=1}^n (2b)^{n-i} \min \left\{ 2 \sum_{j=(i-1)N}^{iN-1} \|f_{j,h}\|_{W_{2h}^1} \tau, \quad 3 \|f_{(i-1)N+1,h}\|_{L_{2h}} + 3 \sum_{j=(i-1)N+2}^{iN-1} \left\| \frac{f_{j,h} - f_{j-1,h}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \tau \right\} \right). \end{aligned} \quad (3.10)$$

В-третьих, пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — ограниченная открытая область с гладкой границей S , $\overline{\Omega} = \Omega \cup S$. В $[0, \infty) \times \Omega$ рассматривается начально-краевая задача для многомерного гиперболического

дифференциального уравнения с неограниченным запаздыванием

$$\left\{ \begin{aligned} & u_{tt}(t, x) + \left(\sum_{r=1}^m \left(-\frac{\partial}{\partial x_r} \left(a_r(x) \frac{\partial \cdot}{\partial x_r} \right) + \sigma \cdot \right) \right)^2 u(t, x) = \\ & = a \left[-\frac{\partial}{\partial x_r} \left(a_r(x) \frac{\partial u(t - \omega, x)}{\partial x_r} \right) + \sigma u(t - \omega, x) + u_t(t - \omega, x) \right] = f(t, x), \\ & \quad 0 < t < \infty, \quad x = (x_1, \dots, x_m) \in \Omega, \\ & u(t, x) = \varphi(t, x), \quad -\omega \leq t \leq 0, \quad x \in \bar{\Omega}, \\ & u(t, x) = 0, \quad 0 \leq t < \infty, \quad x \in S, \end{aligned} \right. \quad (3.11)$$

где $\sigma > 0$, а $a_r(x)$, $\varphi(t, x)$ и $f(t, x)$ — заданные гладкие функции, удовлетворяющие всем условиям совместности, гарантирующим, что задача (3.11) имеет гладкое решение $u(t, x)$. Будем полагать, что $a_r(x) \geq a_0 > 0$.

Дискретизация задачи (3.11) проводится в два этапа. На первом этапе, здесь и далее, мы определяем сеточное пространство

$$\bar{\Omega}_h = \{x = x_r = (h_1 j_1, \dots, h_m j_m), \quad j = (j_1, \dots, j_m), \quad 0 \leq j_r \leq N_r, \quad N_r h_r = 1, \quad r = 1, \dots, m\},$$

$$\Omega_h = \bar{\Omega}_h \cap \Omega, \quad S_h = \bar{\Omega}_h \cap S.$$

Введем банаховы пространства $L_{2h} = L_2(\bar{\Omega}_h)$, $W_{2h}^1 = W_2^1(\bar{\Omega}_h)$ и $W_{2h}^2 = W_2^2(\bar{\Omega}_h)$ сеточных функций $\varphi_h(x) = \{\varphi(h_1 r_1, \dots, h_m r_m)\}$, определённых на $\bar{\Omega}_h$, снабжённые нормами

$$\|\varphi_h\|_{L_{2h}} = \left(\sum_{x \in \bar{\Omega}_h} |\varphi_h(x)|^2 h_1 \cdots h_m \right)^{1/2},$$

$$\|\varphi_h\|_{W_{2h}^1} = \|\varphi_h\|_{L_{2h}} + \left(\sum_{x \in \bar{\Omega}_h} \sum_{r=1}^m |\varphi_{h, x_r, j_r}|^2 h_1 \cdots h_m \right)^{1/2}$$

и

$$\|\varphi_h\|_{W_{2h}^2} = \|\varphi_h\|_{L_{2h}} + \left(\sum_{x \in \bar{\Omega}_h} \sum_{r=1}^m \left| (\varphi_h)_{x_r \bar{x}_r, j_r} \right|^2 h_1 \cdots h_m \right)^{1/2},$$

соответственно. Дифференциальному оператору A , порождённому задачей (3.11), сопоставляем разностный оператор A_h^x , действующий по формуле

$$A_h^x u_h(x) = - \sum_{r=1}^m (a_r(x) u_{\bar{x}_r, h})_{x_r, j_r} \quad (3.12)$$

в пространстве сеточных функций $u_h(x)$, удовлетворяющих условиям $u_h(x) = 0$ ($\forall x \in S_h$). Известно, что A_h^x — самосопряженный положительно определённый оператор в L_{2h} . С помощью A_h^x приходим к начальной задаче

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{d^2 u_h(t, x)}{dt^2} + (A_h^x)^2 u_h(t, x) = a \left(\frac{du_h(t - \omega, x)}{dt} + A_h^x u_h(t - \omega, x) \right) + f_h(t, x), \\ & \quad 0 < t < \infty, \quad x \in \Omega_h, \\ & u_h(t, x) = \varphi_h(t, x), \quad -\omega \leq t \leq 0, \quad x \in \bar{\Omega}_h. \end{aligned} \right. \quad (3.13)$$

На втором этапе мы заменяем задачу (3.13) разностной схемой второго порядка точности (2.1)

$$\left\{ \begin{aligned} & \frac{u_h^{k+1}(x) - 2u_h^k(x) + u_h^{k-1}(x)}{\tau^2} + (A_h^x)^2 u_h^k(x) + \frac{\tau^2}{4} (A_h^x)^4 u_h^{k+1}(x) = \\ & = a \left(\frac{u_h^{k+1-N}(x) - u_h^{k-N-1}(x)}{2\tau} + A_h^x u_h^{k-N}(x) \right) + f_{k,h}(x), \quad f_{k,h}(x) = f_h(t_k, x), \quad t_k = k\tau, \\ & \qquad \qquad \qquad 1 \leq k < \infty, N \quad \tau = \omega, \quad x \in \Omega_h, \\ & \left(I + \tau^2 (A_h^x)^2 \right) \frac{u_h^{k+1}(x) - u_h^k(x)}{\tau} = \frac{3u_h^k(x) - 4u_h^{k-1}(x) + u_h^{k-2}(x)}{2\tau} + \\ & + \frac{\tau}{2} \left(- (A_h^x)^2 u_h^k(x) + f_{k,h}(x) + a \left(\frac{3u_h^{k-N}(x) - 4u_h^{k-1-N}(x) + u_h^{k-2-N}(x)}{2\tau} \right) + A_h^x u_h^{k-N}(x) \right), \\ & \qquad \qquad \qquad k = nN, \quad n = 0, 1, \dots, \\ & u_h^k(x) = \varphi_h^k(x), \quad \varphi_h^k(x) = \varphi_h(t_k, x), \quad t_k = k\tau, \qquad -N \leq k \leq 0, \quad x \in \overline{\Omega}_h. \end{aligned} \right. \quad (3.14)$$

Теорема 2.1 даёт следующий результат об устойчивости.

Теорема 3.3. Для решения разностной задачи (3.14) справедливы следующие оценки устойчивости при $n = 1, 2, \dots$:

$$\begin{aligned} & \max_{1 \leq k \leq nN} \|u_h^k\|_{L_{2h}} + \max_{1 \leq k \leq nN} \left\| \frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \leq \\ & \leq \widetilde{M} \left\{ (2b)^n \left[\max_{-N \leq k \leq 0} \|\varphi_{k,h}\|_{L_{2h}} + \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| \frac{\varphi_{k,h} - \varphi_{k-1,h}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \right] + 2 \sum_{i=1}^n (2b)^{n-i} \sum_{j=(i-1)N}^{iN-1} \|f_{j,h}\|_{L_{2h}} \tau \right\}, \\ & \max_{1 \leq k \leq nN} \|u_h^k\|_{W_{2h}^2} + \max_{1 \leq k \leq nN} \left\| \frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \leq \\ & \leq \widetilde{M} \left\{ (2b)^n \left[\max_{-N \leq k \leq 0} \|\varphi_{k,h}\|_{W_{2h}^2} + \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| \frac{\varphi_{k,h} - \varphi_{k-1,h}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \right] + 2 \sum_{i=1}^n (2b)^{n-i} \sum_{j=(i-1)N}^{iN-1} \|f_{j,h}\|_{L_{2h}} \tau \right\}, \\ & \max_{1 \leq k \leq nN} \|u_h^k\|_{W_{2h}^4} + \max_{1 \leq k \leq nN} \left\| \frac{u_h^k - u_h^{k-1}}{\tau} \right\|_{W_{2h}^2} \leq \\ & \leq \widetilde{M} \left\{ (2b)^n \left[\max_{-N \leq k \leq 0} \|\varphi_{k,h}\|_{W_{2h}^4} + \max_{-N \leq k \leq 0} \left\| \frac{\varphi_{k,h} - \varphi_{k-1,h}}{\tau} \right\|_{W_{2h}^2} \right] + \right. \\ & \left. + \sum_{i=1}^n (2b)^{n-i} \min \left\{ 2 \sum_{j=(i-1)N}^{iN-1} \|f_{j,h}\|_{W_{2h}^2} \tau, 3 \|f_{(i-1)N+1,h}\|_{L_{2h}} + 3 \sum_{j=(i-1)N+2}^{iN-1} \left\| \frac{f_{j,h} - f_{j-1,h}}{\tau} \right\|_{L_{2h}} \tau \right\} \right\}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 3.3 основано на абстрактной теореме 2.1 и свойствах симметрии разностного оператора A_h^x , определяемого формулой (3.12), а также на теореме о коэрцитивном неравенстве для решения эллиптической задачи в L_{2h} (см. [8]).

В-четвертых, рассмотрим начально-краевую задачу

$$\left\{ \begin{aligned} & u_{tt}(t, x) + \left(\sum_{r=1}^m \left(-\frac{\partial}{\partial x_r} \left(a_r(x) \frac{\partial \cdot}{\partial x_r} \right) + \sigma \cdot \right) \right)^2 u(t, x) = \\ & = a \left[-\frac{\partial}{\partial x_r} \left(a_r(x) \frac{\partial u(t - \omega, x)}{\partial x_r} \right) + \sigma u(t - \omega, x) + u_t(t - \omega, x) \right] + f(t, x), \\ & \qquad \qquad \qquad 0 < t < \infty, \quad x = (x_1, \dots, x_m) \in \Omega, \\ & u(t, x) = \varphi(t, x), \qquad \qquad \qquad -\omega \leq t \leq 0, \quad x \in \overline{\Omega}, \\ & \frac{\partial}{\partial \vec{p}} u(t, x) = 0, \qquad \qquad \qquad x \in S, \quad 0 \leq t < \infty \end{aligned} \right. \quad (3.15)$$

для многомерных дифференциальных уравнений гиперболического типа с запаздыванием.

Дискретизация задачи (3.15) осуществляется в два этапа. Дифференциальному оператору A , порождённому задачей (3.15), сопоставляем разностный оператор A_h^x , действующий по формуле

$$A_h^x u_h(x) = - \sum_{r=1}^m (a_r(x) u_{h, \bar{x}_r})_{x_r, j_r} + \sigma u_h(x) \quad (3.16)$$

в пространстве сеточных функций $u_h(x)$, удовлетворяющих условиям $D_h u_h(x) = 0$ для всех $x \in S_h$. Здесь D_h — аппроксимация оператора $\frac{\partial}{\partial \vec{p}}$. С помощью A_h^x приходим к начальной задаче (3.13). На втором шаге, заменяя задачу (3.13) разностной схемой второго порядка точности (2.1), получаем разностную схему (3.14). Следовательно, из теоремы 3.3 следует оценка устойчивости решения этой разностной задачи. Доказательство этой оценки основано на абстрактной теореме 2.1 и свойствах симметрии оператора симметрии A_h^x , определяемого формулой (3.12), а также на теореме о коэрцитивном неравенстве для решения эллиптической задачи в L_{2h} (см. [8]).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

1. В настоящей работе установлена основная теорема об устойчивости разностной схемы второго порядка точности для численного решения абстрактной задачи для гиперболического уравнения с неограниченным запаздыванием. В приложениях получена устойчивость разностных схем для четырёх линейных гиперболических дифференциальных уравнений с запаздыванием.

2. Интерес представляет исследование устойчивости высокоточных разностных схем, построенных на основе целочисленной степени пространственного оператора равномерно по размеру шага по времени для приближённых решений этой начальной задачи для гиперболического уравнения с неограниченным запаздыванием, в котором устойчивость установлена без каких-либо предположений относительно шагов сетки τ и h .

3. Требуется исследовать равномерные двухшаговые разностные схемы и асимптотические формулы для решения задачи о возмущении начальных значений

$$\begin{cases} \varepsilon^2 \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + A^2 v(t) = a \left(\frac{dv(t-\omega)}{dt} + Av(t-\omega) \right) + f(t), & t > 0, \\ u(t) = \varphi(t), & -\omega \leq t \leq 0 \end{cases}$$

для линейного гиперболического уравнения с запаздыванием в гильбертовом пространстве H с самосопряжённым положительно определённым оператором A и с параметром $\varepsilon \in (0, \infty)$, умножающим член старшего порядка [13].

4. Требуется исследовать абсолютно устойчивые разностные схемы высокого порядка точности для численного решения начальной задачи

$$\begin{cases} v_{tt}(t)dt + A^2 v(t)dt = a (dv(t-\omega) + Av(t-\omega)dt) + f(t)dw_t, \\ w_t = \sqrt{t}\xi, \\ v(t) = 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} \xi \in N(0, 1), & t > 0, \\ -\omega \leq t \leq 0 \end{matrix} \quad (3.17)$$

для линейного стохастического гиперболического уравнения с запаздыванием по времени в гильбертовом пространстве H с самосопряжённым положительно определённым оператором A . Здесь w_t — стандартный винеровский процесс, заданный на вероятностном пространстве (Q, F, P) (см. [11]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ашыралыев А. Об устойчивости гиперболических уравнений с неограниченным запаздыванием // Докл. РАН. — 2025. — 524. — С. 51–55. — DOI: [10.7868/S3034504925040085](https://doi.org/10.7868/S3034504925040085).
2. Васильев В. В., Крейн С. Г., Пискарев С. И. Полугруппы операторов, косинус оператор-функции и линейные дифференциальные уравнения // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. — 1990. — 28. — С. 87–202.
3. Власов В. В. Research of operator models arising in hereditary mechanics and thermophysics // Тезисы межд. конф. «Математическая физика, динамические системы, бесконечномерный анализ». — Долгопрудный: МФТИ, 2019.

4. Власов В. В., Раутман Н. А. Спектральный анализ функционально-дифференциальных операторов. — М.: МАКС Пресс, 2016.
5. Пискарев С. И. Об устойчивости разностных схем в задачах Коши с почти периодическими решениями // Дифф. уравн. — 1984. — 20, № 4. — С. 689–695.
6. Пискарев С. И. Принципы методов дискретизации, III // Докл. Акуст. ин-та. РАН. — 1986. — 3410. — С. 1–87.
7. Скубачевский А. Л. К задаче об успокоении системы управления с последействием // Докл. РАН. — 1994. — 335, № 2. — С. 157–160.
8. Соболевский П. Е. Разностные методы решения дифференциальных уравнений. — Воронеж: ВГУ, 1975.
9. Соболевский П. Е., Чеботарева Л. М. Приближенное решение методом прямых задачи Коши для абстрактного гиперболического уравнения // Изв. вузов. Сер. Мат. — 1977. — 5. — С. 103–116.
10. Ashyralyev A., Agirseven D. Bounded solutions of nonlinear hyperbolic equations with time delay // Electron. J. Differ. Equ. — 2018. — 2018, № 21. — С. 1–15.
11. Ashyralyev A., Akat M. An approximation of stochastic hyperbolic equations: case with Wiener process // Math. Methods Appl. Sci. — 2013. — 36, № 9. — С. 1095–1106. — DOI: [10.1002/mma.2666](https://doi.org/10.1002/mma.2666).
12. Ashyralyev A., Akca H. Stability estimates of difference schemes for neutral delay differential equations // Nonlinear Anal. — 2001. — 44. — С. 443–452. — DOI: [10.1016/S0362-546X\(99\)00270-9](https://doi.org/10.1016/S0362-546X(99)00270-9).
13. Ashyralyev A., Fattorini H. O. On uniform difference schemes for second order singular perturbation problems in Banach spaces // SIAM J. Math. Anal. — 1992. — 23, № 1. — С. 29–54. — DOI: [10.1137/052300](https://doi.org/10.1137/052300).
14. Ashyralyev A., Pastor J., Piskarev S., Yurtsever H. A. Second order equations in functional spaces: qualitative and discrete well-posedness // Abstr. Appl. Anal. — 2015. — 2015. — 948321. — DOI: [10.1155/2015/948321](https://doi.org/10.1155/2015/948321).
15. Ashyralyev A., Sarsanbi A. Well-posedness of a parabolic equation with involution // Numer. Funct. Anal. Optim. — 2017. — 38, № 10. — С. 1295–1305. — DOI: [10.1080/01630563.2017.1316997](https://doi.org/10.1080/01630563.2017.1316997).
16. Ashyralyev A., Sobolevskii P. E. A note on the difference schemes for hyperbolic equations // Abstr. Appl. Anal. — 2001. — 6, № 2. — С. 63–70. — DOI: [10.1155/S1085337501000501](https://doi.org/10.1155/S1085337501000501).
17. Ashyralyev A., Sobolevskii P. E. New difference schemes for partial differential equations. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2004.
18. Ashyralyev A., Sobolevskii P. E. Two new approaches for construction of the high order of accuracy difference schemes for hyperbolic differential equations // Discrete Dyn. Nat. Soc. — 2005. — 2005, № 2. — С. 183–213. — DOI: [10.1155/DDNS.2005.183](https://doi.org/10.1155/DDNS.2005.183).
19. Ashyralyev A., Vlasov V. V., Ashyralyyev C. On the stability of hyperbolic difference equations with unbounded delay term // Bol. Soc. Mat. Mexicana (3). — 2023. — 29, № 2. — С. 27–38. — DOI: [10.1007/s40590-023-00498-z](https://doi.org/10.1007/s40590-023-00498-z).
20. Bellman R., Cooke K. Differential-difference equations. — New York: Academic Press, 1963.
21. Cahlon B., Schmidt D. Stability criteria for certain second-order delay differential equations with mixed coefficients // J. Comput. Appl. Math. — 2004. — 170. — С. 79–102. — DOI: [10.1016/j.cam.2003.12.043](https://doi.org/10.1016/j.cam.2003.12.043).
22. Chi H., Poorkarimi H., Wiener J., Shah S. M. On the exponential growth of solutions to non-linear hyperbolic equations // Int. J. Math. Sci. — 1989. — 12. — С. 539–546. — DOI: [10.1155/S0161171289000670](https://doi.org/10.1155/S0161171289000670).
23. Driver R. D. Ordinary and delay differential equations. — Berlin: Springer, 1977.
24. Driver R. D. Exponential decay in some linear delay differential equations // Am. Math. Monthly. — 1978. — 85, № 9. — С. 757–760. — DOI: [10.1080/00029890.1978.11994695](https://doi.org/10.1080/00029890.1978.11994695).
25. El'sgol'ts L. E., Norkin S. B. Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments. — New York: Academic Press, 1973.
26. Fattorini H. O. Second order linear differential equations in Banach spaces. — Amsterdam—New York—Oxford: North-Holland, 1985.
27. Goldstein J. A. Semigroups of linear operators and applications. — New York: Oxford University Press, 1985.
28. Hale J. K., Verduyn Lunel S. M. Introduction to functional differential equations. — Berlin: Springer, 1993.
29. Kolmanovski V., Myshkis A. Applied theory of functional differential equations. — Dordrecht: Kluwer Academic, 1992.
30. Krein S. G. Linear differential equations in Banach space. — Providence: Am. Math. Soc., 1971.
31. Mohanty R. K. An operator splitting method for an unconditionally stable difference scheme for a linear hyperbolic equation with variable coefficients in two space dimensions // Appl. Math. Comput. — 2004. — 152, № 3. — С. 799–806. — DOI: [10.1016/S0096-3003\(03\)00595-2](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00595-2).

32. *Mohanty R. K.* An unconditionally stable finite difference formula for a linear second order one space dimensional hyperbolic equation with variable coefficients// Appl. Math. Comput. — 2005. — 165, № 1. — C. 229–236. — DOI: [10.1016/j.amc.2004.07.002](https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.07.002).
33. *Mohanty R. K.* An operator splitting technique for an unconditionally stable difference method for a linear three space dimensional hyperbolic equation with variable coefficients// Appl. Math. Comput. — 2005. — 162, № 2. — C. 549–557. — DOI: [10.1016/j.amc.2003.12.135](https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.12.135).
34. *Poorkarimi H., Wiener J.* Bounded solutions of nonlinear hyperbolic equations with delay// В сб.: «Proc. VII Int. Conf. Nonlinear Analysis and Applications». — New York–Basel: Marcel Dekker, 1987. — C. 471–478.
35. *Shah S. M., Poorkarimi H., Wiener J.* Bounded solutions of retarded nonlinear hyperbolic equations// Bull. Allahabad Math. Soc. — 1986. — 1. — C. 1–14.
36. *Vasil'ev V. V., Krein S. G., Piskarev S.* Operator semigroups, cosine operator functions, and linear differential equations// J. Soviet Math. — 1991. — 54, № 4. — C. 1042–1129.
37. *Wiener J.* Generalized solutions of functional differential equations. — Singapore: World Scientific, 1993.
38. *Yeniçerioglu A. F.* The behavior of solutions of second order delay differential equations// J. Math. Anal. Appl. — 2007. — 332, № 2. — C. 1278–1290. — DOI: [10.1016/j.jmaa.2006.10.069](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.10.069).
39. *Yeniçerioglu A. F., Yalcinbas S.* On the stability of the second-order delay differential equations with variable coefficients// Appl. Math. Comput. — 2004. — 152, № 3. — C. 667–673. — DOI: [10.1016/S0096-3003\(03\)00584-8](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00584-8).

Аллаберен Ашыралыев

Bahcesehir University, Istanbul, Turkiye

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

E-mail: allaberen.ashyralyev@bau.edu.tr, aallaberen@gmail.com, ResearcherID: [K-4377-2017](https://orcid.org/0000-0002-4153-6624),

Scopus: [6602401828](https://orcid.org/0000-0002-4153-6624), ORCID: [0000-0002-4153-6624](https://orcid.org/0000-0002-4153-6624)

DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-547-561](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-547-561)

EDN: [MADFXS](https://edn.ru/MADFXS)

UDC 517.929 + 519.633

Research article

Second-order difference scheme for hyperbolic equations with unbounded delay

A. Ashyralyev

Bahcesehir University, Istanbul, Turkiye

RUDN University, Moscow, Russia

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

Abstract. The present paper is devoted to the study the initial value problem for the hyperbolic equation with unbounded time delay term

$$\begin{cases} \frac{d^2 v(t)}{dt^2} + A^2 v(t) = a \left(\frac{dv(t-\omega)}{dt} + Av(t-\omega) \right) + f(t), & t > 0, \\ v(t) = \varphi(t), & -\omega \leq t \leq 0 \end{cases}$$

in a Hilbert space H with a self-adjoint positive definite operator A . The second order of accuracy difference scheme for the numerical solution of the differential problem is presented. The main theorem on stability estimates for the solutions of this difference scheme is established. In practice, the stability estimates for solutions of four problems for hyperbolic difference equations with time delay are proved.

Keywords: hyperbolic equation, unbounded time delay, numerical solution, difference scheme, second order of accuracy, stability of solutions.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The publication has been prepared with the support of the RUDN University Program “5–100” and published under target program BR24993094 of the Science Committee of the Ministry of Education and Science of the Republic of Kazakhstan. The authors also express their gratitude to the reviewers for their useful advice on improving the article.

For citation: A. Ashyralyev, “Second-order difference scheme for hyperbolic equations with unbounded delay,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2025, Vol. **71**, No. 4, 547–561, DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-547-561](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-547-561).

REFERENCES

1. A. Ashyralyev, “Ob ustoychivosti giperbolicheskikh uravneniy s neogranichennym zapazdyvaniem” [On the stability of hyperbolic equations with unbounded delay], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2025, **524**, 51–55, DOI: [10.7868/S3034504925040085](https://doi.org/10.7868/S3034504925040085) (in Russian).
2. V. V. Vasil’ev, S. G. Kreyn, and S. I. Piskarev, “Polugruppy operatorov, kosinus operator-funktsii i lineynye differentsial’nye uravneniya” [Operator semigroups, cosine operator functions and linear differential equations], *Itogi Nauki i Tekhn. Ser. Mat. Anal.* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Anal.], 1990, **28**, 87–202 (in Russian).
3. V. V. Vlasov, “Research of operator models arising in hereditary mechanics and thermophysics,” *Proc Int. Conf. Math. Phys., Dynam. Syst., Infinitesimal Anal*, MFTI, Dolgoprudnyy, 2019.
4. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, *Spektral’nyy Analiz Funktsional’no-Differentsial’nykh Operatorov* [Spectral analysis of functional differential operators], MAKS Press, Moscow, 2016 (in Russian).
5. S. I. Piskarev, “Ob ustoychivosti raznostnykh skhem v zadachakh Koshi s pochtii periodicheskimi resheniyami” [On the stability of difference schemes for Cauchy problems with almost periodic solutions], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1984, **20**, No. 4, 689–695 (in Russian).
6. S. I. Piskarev, “Printsipy metodov diskretizatsii, III” [Principles of discretization methods, III], *Dokl. Akust. In-ta. RAN* [Rep. Acoust. Inst. RAS], 1986, **3410**, 1–87 (in Russian).
7. A. L. Skubachevskii, “K zadache ob uspokoenii sistemy upravleniya s posledeystviem” [On the problem of damping a control system with aftereffect], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1994, **335**, No. 2, 157–160 (in Russian).
8. P. E. Sobolevskii, *Raznostnye Metody Resheniya Differentsial’nykh Uravneniy* [Difference methods for solving differential equations], VGU, Voronezh, 1975 (in Russian).
9. P. E. Sobolevskii and L. M. Chebotareva, “Priblizhennoe reshenie metodom pryamykh zadachi Koshi dlya abstraktnogo giperbolicheskogo uravneniya” [Approximate solution by the method of lines of the Cauchy problem for an abstract hyperbolic equation], *Izv. Vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1977, **5**, 103–116 (in Russian).
10. A. Ashyralyev and D. Agirseven, “Bounded solutions of nonlinear hyperbolic equations with time delay,” *Electron. J. Differ. Equ.*, 2018, **2018**, No. 21, 1–15.
11. A. Ashyralyev and M. Akat, “An approximation of stochastic hyperbolic equations: case with Wiener process,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2013, **36**, No. 9, 1095–1106, DOI: [10.1002/mma.2666](https://doi.org/10.1002/mma.2666).
12. A. Ashyralyev and H. Akca, “Stability estimates of difference schemes for neutral delay differential equations,” *Nonlinear Anal.*, 2001, **44**, 443–452, DOI: [10.1016/S0362-546X\(99\)00270-9](https://doi.org/10.1016/S0362-546X(99)00270-9).
13. A. Ashyralyev and H. O. Fattorini, “On uniform difference schemes for second order singular perturbation problems in Banach spaces,” *SIAM J. Math. Anal.*, 1992, **23**, No. 1, 29–54, DOI: [10.1137/052300](https://doi.org/10.1137/052300).
14. A. Ashyralyev, J. Pastor, S. Piskarev, and H. A. Yurtsever, “Second order equations in functional spaces: qualitative and discrete well-posedness,” *Abstr. Appl. Anal.*, 2015, **2015**, 948321, DOI: [10.1155/2015/948321](https://doi.org/10.1155/2015/948321).
15. A. Ashyralyev and A. Sarsanbi, “Well-posedness of a parabolic equation with involution,” *Numer. Funct. Anal. Optim.*, 2017, **38**, No. 10, 1295–1305, DOI: [10.1080/01630563.2017.1316997](https://doi.org/10.1080/01630563.2017.1316997).
16. A. Ashyralyev and P. E. Sobolevskii, “A note on the difference schemes for hyperbolic equations,” *Abstr. Appl. Anal.*, 2001, **6**, No. 2, 63–70, DOI: [10.1155/S1085337501000501](https://doi.org/10.1155/S1085337501000501).
17. A. Ashyralyev and P. E. Sobolevskii, *New difference schemes for partial differential equations*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 2004.

18. A. Ashyralyev and P. E. Sobolevskii, “Two new approaches for construction of the high order of accuracy difference schemes for hyperbolic differential equations,” *Discrete Dyn. Nat. Soc.*, 2005, **2005**, No. 2, 183–213, DOI: [10.1155/DDNS.2005.183](https://doi.org/10.1155/DDNS.2005.183).
19. A. Ashyralyev, V. V. Vlasov, and C. Ashyralyev, “On the stability of hyperbolic difference equations with unbounded delay term,” *Bol. Soc. Mat. Mexicana (3)*, 2023, **29**, No. 2, 27–38, DOI: [10.1007/s40590-023-00498-z](https://doi.org/10.1007/s40590-023-00498-z).
20. R. Bellman and K. Cooke, *Differential-difference equations*, Academic Press, New York, 1963.
21. B. Cahlon and D. Schmidt, “Stability criteria for certain second-order delay differential equations with mixed coefficients,” *J. Comput. Appl. Math.*, 2004, **170**, 79–102, DOI: [10.1016/j.cam.2003.12.043](https://doi.org/10.1016/j.cam.2003.12.043).
22. H. Chi, H. Poorkarimi, J. Wiener, and S. M. Shah, “On the exponential growth of solutions to non-linear hyperbolic equations,” *Int. J. Math. Sci.*, 1989, **12**, 539–546, DOI: [10.1155/S0161171289000670](https://doi.org/10.1155/S0161171289000670).
23. R. D. Driver, *Ordinary and delay differential equations*, Springer, Berlin, 1977.
24. R. D. Driver, “Exponential decay in some linear delay differential equations,” *Am. Math. Monthly*, 1978, **85**, No. 9, 757–760, DOI: [10.1080/00029890.1978.11994695](https://doi.org/10.1080/00029890.1978.11994695).
25. L. E. El'sgol'ts and S. B. Norkin, *Introduction to the theory and application of differential equations with deviating arguments*, Academic Press, New York, 1973.
26. H. O. Fattorini, *Second order linear differential equations in Banach spaces*, North-Holland, Amsterdam—New York—Oxford, 1985.
27. J. A. Goldstein, *Semigroups of linear operators and applications*, Oxford University Press, New York, 1985.
28. J. K. Hale and S. M. Verduyn Lunel, *Introduction to functional differential equations*, Springer, Berlin, 1993.
29. V. Kolmanovski and A. Myshkis, *Applied theory of functional differential equations*, Kluwer Academic, Dordrecht, 1992.
30. S. G. Krein, *Linear differential equations in Banach space*, Am. Math. Soc., Providence, 1971.
31. R. K. Mohanty, “An operator splitting method for an unconditionally stable difference scheme for a linear hyperbolic equation with variable coefficients in two space dimensions,” *Appl. Math. Comput.*, 2004, **152**, No. 3, 799–806, DOI: [10.1016/S0096-3003\(03\)00595-2](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00595-2).
32. R. K. Mohanty, “An unconditionally stable finite difference formula for a linear second order one space dimensional hyperbolic equation with variable coefficients,” *Appl. Math. Comput.*, 2005, **165**, No. 1, 229–236, DOI: [10.1016/j.amc.2004.07.002](https://doi.org/10.1016/j.amc.2004.07.002).
33. R. K. Mohanty, “An operator splitting technique for an unconditionally stable difference method for a linear three space dimensional hyperbolic equation with variable coefficients,” *Appl. Math. Comput.*, 2005, **162**, No. 2, 549–557, DOI: [10.1016/j.amc.2003.12.135](https://doi.org/10.1016/j.amc.2003.12.135).
34. H. Poorkarimi and J. Wiener, “Bounded solutions of nonlinear hyperbolic equations with delay,” In: *Proc. VII Int. Conf. Nonlinear Analysis and Applications*, Marcel Dekker, New York–Basel, 1987, pp. 471–478.
35. S. M. Shah, H. Poorkarimi, and J. Wiener, “Bounded solutions of retarded nonlinear hyperbolic equations,” *Bull. Allahabad Math. Soc.*, 1986, **1**, 1–14.
36. V. V. Vasil'ev, S. G. Krein, and S. Piskarev, “Operator semigroups, cosine operator functions, and linear differential equations,” *J. Soviet Math.*, 1991, **54**, No. 4, 1042–1129.
37. J. Wiener, *Generalized solutions of functional differential equations*, World Scientific, Singapore, 1993.
38. A. F. Yenci̇erioğlu, “The behavior of solutions of second order delay differential equations,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2007, **332**, No. 2, 1278–1290, DOI: [10.1016/j.jmaa.2006.10.069](https://doi.org/10.1016/j.jmaa.2006.10.069).
39. A. F. Yenci̇erioğlu and S. Yalcinbas, “On the stability of the second-order delay differential equations with variable coefficients,” *Appl. Math. Comput.*, 2004, **152**, No. 3, 667–673, DOI: [10.1016/S0096-3003\(03\)00584-8](https://doi.org/10.1016/S0096-3003(03)00584-8).

Allaberen Ashyralyev

Bahcesehir University, Istanbul, Turkiye

RUDN University, Moscow, Russia

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

E-mail: allaberen.ashyralyev@bau.edu.tr, aallaberen@gmail.com, ResearcherID: [K-4377-2017](https://orcid.org/0000-0002-4153-6624),

Scopus: [6602401828](https://orcid.org/0000-0002-4153-6624), ORCID: [0000-0002-4153-6624](https://orcid.org/0000-0002-4153-6624)

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ УСКОРЕННОГО РАСШИРЕНИЯ ВСЕЛЕННОЙ НА ОСНОВЕ ПРИНЦИПА НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

В. В. Веденяпин, Я. Г. Батищева, М. В. Горюнова, А. А. Руссков

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

Аннотация. В классических работах уравнения для полей гравитации и электромагнетизма предлагаются без вывода правых частей. Здесь мы даём вывод правых частей и анализ тензора энергии импульса в рамках уравнений Власова—Максвелла—Эйнштейна и рассматриваем космологические модели типа Милна—МакКри и Фридмана. Это позволяет поставить Общую теорию относительности (ОТО) на строгую математическую основу: вывести замкнутую систему уравнений ОТО из принципа наименьшего действия и дать строгое определение космологических решений. На основе этого объясняется ускоренное расширение Вселенной без лямбды Эйнштейна, тёмной энергии и фантастических новых полей, как простой релятивистский эффект.

Ключевые слова: Общая теория относительности, уравнение Власова, уравнение Власова—Эйнштейна, уравнение Власова—Максвелла, уравнение Власова—Пуассона, ускоренное расширение Вселенной, константа Хаббла.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Данная работа выполнена при поддержке текущего институтского финансирования. Дополнительные гранты для проведения или руководства этим конкретным исследованием не привлекались. Выражаем благодарность студентам МФТИ А. А. Ребровой и А. О. Гладкову, студентам МГТУ им. Н. Э. Баумана В. М. Аушеву и Н. И. Измайловой за помощь в работе с системой Гурса [6] и студенту МФТИ А. А. Баю за помощь в работе с релятивистскими уравнениями [7, 57, 58].

Для цитирования: В. В. Веденяпин, Я. Г. Батищева, М. В. Горюнова, А. А. Руссков. Математическая теория ускоренного расширения Вселенной на основе принципа наименьшего действия // Современная математика. Фундаментальные направления. 2025. Т. 71, № 4. С. 562–584, DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-562-584](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-562-584).

1. ВВЕДЕНИЕ

Общая теория относительности (ОТО) является привлекательной и красивейшей физико-математической теорией [2, 18, 22, 28, 41, 47, 65], но новейшее её развитие, связанное с ускоренным расширением Вселенной, поставило новые вопросы как перед физиками, так и перед математиками. Ставки оказались очень высоки: хорошо подтверждённый эксперимент с Нобелевской премией 2011 года показывал ускоренное расширение Вселенной, что противоречило закону всемирного тяготения. Чтобы хоть как-то объяснить это, были предприняты буквально героические усилия: лямбда-член, обеспечивающий слабое отталкивание на коротких расстояниях и основной вклад на далёких. Вводили тёмную энергию, новые поля и новые частицы. Этот вызов всей теоретической физике и математике потребовал пересмотра космологической части ОТО. Мы следуем схеме Милна—МакКри, выводя их результаты, обосновывая и обобщая их с помощью уравнения Власова—Пуассона и перенося на релятивистский случай.

Обзор построен следующим образом. В разделе 2 и 3 даём схему вывода уравнений типа Власова на примере релятивистской гравитации и электродинамики, выводя уравнения Власова—Максвелла—Эйнштейна из принципа наименьшего действия. В разделе 4 предлагается общематематическая конструкция: переход от кинетического описания к гидродинамическому и в смысле Гамильтона—Якоби. В разделе 5 эти идеи разделов 2, 3, 4 применяются к получению космологических решений в нерелятивистском случае, обобщая и проясняя схему Милна—МакКри. Наконец, в разделе 6 перенесение метода Милна—МакКри на релятивистский случай с примерами в разделах 7, 8, 9, 10 показывает принципиальную возможность объяснения ускоренного расширения Вселенной, являясь триумфом ОТО и её подтверждением.

2. Действие в Общей теории относительности и уравнения для полей

Пусть $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)$ — функция распределения частиц по пространству $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, по скоростям $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, массам и заряду $e \in \mathbb{R}$ в момент времени $t \in \mathbb{R}$. Это означает, что число частиц в объёме $d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmde$ равно $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)d\mathbf{x}d\mathbf{v}dmde$. Отметим, что в теории вероятностей для этой величины используется термин плотности распределения, а мы пользуемся терминологией, устоявшейся в кинетической теории и статистической физике. Рассмотрим действие:

$$S[g_{\mu\nu}, A_\mu] = -c \int m f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v} dm de dt - \\ - \frac{1}{c} \int e f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) A_\mu u^\mu d^3\mathbf{x} d^3\mathbf{v} dm de dt + k_1 \int (R + \Lambda) \sqrt{-g} d^4\mathbf{x} + k_2 \int F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \sqrt{-g} d^4\mathbf{x}, \quad (2.1)$$

где c — скорость света. Здесь u — это четырёхмерная скорость, нулевая компонента которой — это скорость света $u^0 = c$, а три другие совпадают с трёхмерной, как это принято в теории относительности [2, 18, 22, 28, 41, 47, 65]: $u^i = v^i$ ($i = 1, 2, 3$) — трёхмерная скорость, $x^0 = ct$ и x^i (латинские индексы $i = 1, 2, 3$) — координаты, $g_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t)$ — метрика (греческие индексы $\mu, \nu = 0, 1, 2, 3$), $A_\mu(\mathbf{x}, t)$ — 4-потенциал электромагнитного поля, $F_{\mu\nu}(\mathbf{x}, t) = \frac{\partial A_\mu(\mathbf{x}, t)}{\partial x^\nu} - \frac{\partial A_\nu(\mathbf{x}, t)}{\partial x^\mu}$ — электромагнитные поля, R — полная кривизна, Λ — лямбда-член Эйнштейна (или просто лямбда) — знаменитая лямбда Эйнштейна¹, $k_1 = -\frac{c^3}{16\pi\gamma}$ и $k_2 = -\frac{1}{4\pi c}$ — константы [2, 18, 22, 28, 41, 47, 65], g — определитель метрики $g_{\mu\nu}$, γ — постоянная тяготения. По повторяющимся индексам, как обычно, идёт суммирование. В действии (2.1) интегрирование ведётся, как обычно, по всей области изменения параметров, т. е. по пространству $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$, по скоростям $\mathbf{v} \in \mathbb{R}^3$, массам $m \in \mathbb{R}$, $m \geq 0$, зарядам $e \in \mathbb{R}$ и времени $t \in \mathbb{R}$. Варьирование ведётся обычным способом [2, 18, 22, 28, 41, 47, 65].

Вид действия (2.1) удобен для получения уравнений Эйнштейна и Максвелла при варьировании по полям $g_{\mu\nu}$ и A_μ . Такой способ вывода уравнений Власова—Максвелла и Власова—Эйнштейна из действия (2.1) использовался в работах [3, 9, 10, 12, 59, 61]. При варьировании (2.1) по $g_{\mu\nu}$ получим уравнение Эйнштейна:

$$k_1 \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R + \Lambda) \right) \sqrt{-g} = \\ = \int m \frac{f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)}{2\sqrt{g_{\alpha\beta} u^\alpha u^\beta}} u^\mu u^\nu v dm + k_2 \left(-2F^{\beta\nu} F^{\alpha\mu} g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta} g^{\mu\nu} \right) \sqrt{-g}. \quad (2.2)$$

Первое слагаемое правой части этого уравнения и является по определению тензором энергии-импульса материи (оно выведено впервые в таком виде, видимо, в работах [3, 9, 12, 61]), второе —

¹Её Эйнштейн считал главной ошибкой своей жизни, но сейчас это пока — основной способ объяснять ускоренное расширение Вселенной (хорошо проверенный эксперимент с Нобелевской премией 2011 года). Против введения, в частности, лямбды и такого объяснения и направлен этот обзор.

электромагнитная составляющая тензора энергии-импульса (известно [2, 18, 22, 28, 41, 47, 65]). Попытки выписать тензор энергии-импульса через функцию распределения предпринимались, насколько нам известно, только в релятивистской кинетической теории для уравнения Власова—Эйнштейна [3, 9, 10, 12, 16, 23, 33, 34, 37, 38, 50, 53, 59, 61]. Уравнение электромагнитных полей получается варьированием (2.1) по A_μ и называется системой уравнений Максвелла:

$$k_2 \frac{\partial \sqrt{-g} F^{\mu\nu}}{\partial x_\nu} = \frac{1}{c^2} \int e u^\mu f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) d^3 \mathbf{v} dm de. \quad (2.3)$$

Мы получили из действия (2.1) уравнения для полей (2.2), (2.3). Чтобы получить замкнутые уравнения, нужно выписать уравнение на функцию распределения, которая появилась в уравнениях (2.2), (2.3) из действия (2.1). Для этого нужно вывести уравнения движения частицы в заданных полях. Соответствующее действие хорошо известно [2, 18, 22, 28, 41, 47, 65]. Отметим, что это действие для частиц можно получить, подставив в первых двух слагаемых действия (2.1) функцию распределения в виде δ -функции:

$$f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}(t)) \delta(\mathbf{v} - \frac{d\mathbf{x}(t)}{dt}) \delta(m - m') \delta(e - e'). \quad (2.4)$$

Получаем, опуская штрихи, стандартное действие для частиц [2, 18, 22, 28, 41, 47, 65]:

$$S[\mathbf{x}(t)] = -cm \int \sqrt{g_{\mu\nu}(\mathbf{x}(t), t) u^\mu u^\nu} dt - \frac{e}{c} \int A_\mu(\mathbf{x}(t), t) u^\mu dt. \quad (2.5)$$

При такой подстановке подразумевается, что трёхмерная скорость входит в четырёхмерную \mathbf{u} , как и раньше, формулой $\mathbf{u} = (c, v^1, v^2, v^3)$, где c — скорость света. Кроме того, предполагается, что трёхмерная скорость есть производная координаты по времени $\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{x}}{dt}$, поэтому в левой части (2.5) стоит только эта координата, по которой и нужно варьировать, как положено, по Лагранжу. Обычное варьирование приводит к уравнениям Эйлера—Лагранжа, а потом к уравнениям для функции распределения.

3. УРАВНЕНИЯ ДВИЖЕНИЯ ЧАСТИЦ В ЗАДАННЫХ ПОЛЯХ, УРАВНЕНИЕ ЛИУВИЛЛЯ И УРАВНЕНИЕ ВЛАСОВА—МАКСВЕЛЛА—ЭЙНШТЕЙНА

Воспользуемся инвариантностью первых двух слагаемых уравнения (2.5) относительно замены $t = \phi(\lambda)$. Здесь λ — произвольный параметр. Такая инвариантность хорошо известна [2, 18, 22, 28, 41, 47, 65], но представляется загадкой (и подарком) природы: самые фундаментальные взаимодействия — гравитационные и электромагнитные — обладают этим свойством, будучи описываемыми лагранжианами (2.5) первой степени по скоростям. Перепишем с помощью этой замены действие частиц (2.5):

$$S = -cm \int \sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu} d\lambda - \frac{e}{c} \int A_\mu u^\mu d\lambda \quad (3.1)$$

и, варьирова по $\mathbf{x}(\lambda)$, получаем уравнение Эйлера—Лагранжа:

$$cm \frac{d}{d\lambda} \left[\frac{g_{\mu\nu} u^\nu}{\sqrt{g_{\eta\xi} u^\eta u^\xi}} + \frac{e}{c} A_\mu \right] = cm \sqrt{g_{\eta\xi} u^\eta u^\xi} \frac{\partial g_{\sigma\nu}}{\partial x^\mu} u^\sigma u^\nu + \frac{e}{c} \frac{\partial A_\nu}{\partial x^\mu} u^\nu. \quad (3.2)$$

Уравнение (3.2) перепишем, обозначив через $I = g_{\eta\xi} \frac{\partial x^\eta}{\partial \lambda} \frac{\partial x^\xi}{\partial \lambda}$ интеграл движения:

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma_{\nu\eta}^\mu \frac{dx^\eta}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda} = \frac{e}{mc^2} \sqrt{I} F_\nu^\mu \frac{dx^\nu}{d\lambda}, \quad (3.3)$$

здесь $\Gamma_{\nu\eta}^\mu$ — символ Кристоффеля:

$$\Gamma_{\nu\eta}^\mu = \frac{1}{2} g^{\mu m} \left(\frac{\partial g_{mk}}{\partial x^\nu} + \frac{\partial g_{m\nu}}{\partial x^k} + \frac{\partial g_{k\nu}}{\partial x^m} \right).$$

Уравнение (3.3) отличается от приведённых в руководствах [2, 18, 22, 28, 41, 47, 65] наличием \sqrt{I} в правой части: в этих руководствах дифференцирование идёт по собственному времени $ds = d\lambda \sqrt{I}$. Это неудобно, так как для каждой частицы это собственное время индивидуально. Далее будет

использована формула (3.3), которая обладает симметрией при замене $\mathbf{x} \rightarrow \alpha\mathbf{x}$, $\lambda \rightarrow \alpha\lambda$, что и позволяет понизить её порядок. Для этого перепишем уравнение (3.3) в виде

$$\begin{cases} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = w^\mu, \\ \frac{dw^\mu}{d\lambda} = -\Gamma_{\nu\eta}^\mu w^\eta w^\nu + \frac{e\sqrt{I}}{mc^2} F_\nu^\mu w^\nu. \end{cases} \quad (3.4)$$

Избавляемся от λ , поделив остальные уравнения на первое из уравнений системы (3.4). Так как $x^0 = ct$ пропорционально времени, обозначим $\frac{w^\mu c}{w^0} = \frac{dx^\mu}{dt} = u^\mu$ — четырёхмерная скорость, где $u^0 = c$. При этом из-за симметрии, описанной выше, можно избавиться от уравнения $\frac{dw^0}{dt}$ и написать уравнения по x^i , u^i ($i = 1, 2, 3$). Такое понижение порядка описано для гравитации в книгах Фока [28, 41] и Вайнберга [2, 65]. Там этот переход в уравнениях приведён для гравитации, где уравнения не отличаются для параметра λ и собственного времени s . Однако если добавляется электромагнетизм, то отличие заключается как раз в появлении корня в правой части (3.3), который обеспечивает необходимую симметрию: вторую степень по скоростям в правой части второго уравнения (3.4). Это понижение переходом к собственному времени нам необходимо, так как наша цель — получить уравнение на функцию распределения $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)$. Тогда

$$\begin{cases} \frac{dx^i}{dt} = v^i, \\ \frac{dv^i}{dt} = G^i, \end{cases} \quad (3.5)$$

где через G^i обозначено следующее выражение:

$$G^i = -\Gamma_{\eta\nu}^i u^\eta u^\nu + \frac{v^i}{c} \Gamma_{\eta\nu}^0 u^\eta u^\nu + \frac{e\sqrt{J}}{mc^2} \left[F_\eta^i u^\eta - \frac{v^i}{c} F_\eta^0 u^\eta \right],$$

$J = g_{\nu\xi} u^\nu u^\xi$, $\mathbf{u} = (c, \mathbf{v})$, $\mathbf{v} = (v^1, v^2, v^3)$ — трёхмерная скорость.

Мы получили уравнения движения заряженных частиц в электромагнитных и гравитационных полях в релятивистской форме из принципа наименьшего действия.

В заключение выпишем уравнение Лиувилля для функции распределения $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e)$ и системы (3.5):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v^i \frac{\partial f}{\partial x^i} + \frac{\partial (G^i f)}{\partial v^i} = 0. \quad (3.6)$$

Уравнения (3.6), (2.2) и (2.3) образуют систему уравнений Власова—Максвелла—Эйнштейна. Это замкнутая система уравнений релятивистской электродинамики и гравитации. Общий смысл уравнений типа Власова именно таков: они позволяют замкнуть систему электродинамики (уравнение Власова—Максвелла) и гравитации (уравнение Власова—Эйнштейна) и вывести их из принципа наименьшего действия.

4. ОБЩИЙ ПЕРЕХОД К ГИДРОДИНАМИКЕ

Общий переход рассмотрен в [9, 10, 59]. Рассмотрим произвольную систему нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений: $\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{v}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$, $\mathbf{v}(\mathbf{x}) \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Перепишем её в виде $x = (q, p)$, $q \in \mathbb{R}^m$, $p \in \mathbb{R}^{n-m}$:

$$\frac{dq}{dt} = w(q, p), \quad \frac{dp}{dt} = g(q, p)$$

Выпишем уравнение Лиувилля для функции распределения $f(t, q, p)$:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial (w_i f)}{\partial q_i} + \frac{\partial (g_j f)}{\partial p_j} = 0.$$

Выполним гидродинамическую подстановку

$$f(t, q, p) = \rho(q, t) \delta(p - Q(q, t)). \quad (4.1)$$

Получаем:

$$\begin{aligned}\frac{\partial f}{\partial t} &= \frac{\partial \rho(q, t)}{\partial t} \delta(p - Q(q, t)) - \rho(q, t) \frac{\partial \delta(p - Q(q, t))}{\partial p_i} \frac{\partial Q_i(q, t)}{\partial t}, \\ \frac{\partial (w_i(q, p) f)}{\partial q_i} &= \frac{\partial (w_i(q, Q) \rho(q, t))}{\partial q_i} \delta(p - Q(q, t)) - \rho(q, t) w_i(q, Q(q, t)) \frac{\partial \delta(p - Q(q, t))}{\partial p_k} \frac{\partial Q_k(q, t)}{\partial q_i}, \\ \frac{\partial g_j(q, p) f}{\partial p_j} &= \rho(q, t) g_j(q, Q(q, t)) \frac{\partial \delta(p - Q(q, t))}{\partial p_j}.\end{aligned}$$

При дифференцировании мы воспользовались правилами дифференцирования обобщённых функций [15]. Собирая множители при дельта-функции и её производных, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho w_i(q, Q))}{\partial q_i} = 0, \\ \rho(q, t) \left(\frac{\partial Q_j(q, t)}{\partial t} + w_i(q, Q(q, t)) \frac{\partial Q_j(q, t)}{\partial q_i} - g_j(q, Q(q, t)) \right) = 0. \end{cases} \quad (4.2)$$

Гидродинамическая подстановка была изобретена в рамках уравнений Власова [16], а для произвольных систем обыкновенных дифференциальных уравнений введена в [9, 10, 59]. Для гамильтоновых систем из неё получается уравнение Гамильтона—Якоби естественным способом: проходит подстановка для скоростей в виде градиента функции, которая оказывается действием [3, 12, 19, 20, 23, 48, 61].

А именно, уравнение Лиувилля в гамильтоновом случае имеет вид:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\partial H}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right) - \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial f}{\partial p} \right) = 0.$$

Гидродинамическая подстановка (4.1) даёт систему (4.2), где $w_i(q, p) = \frac{\partial H(q, p)}{\partial p_i}$, $g_j(q, p) = -\frac{\partial H(q, p)}{\partial q_j}$. Полагая $Q(t, \mathbf{x}) = \nabla W(t, \mathbf{x})$, получаем уравнения неразрывности и Гамильтона—Якоби

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \nabla W) = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + H(\nabla W, \mathbf{x}) = 0. \end{cases}$$

Уравнения (4.2) были названы В. В. Козловым в гамильтоновом случае уравнениями Лэмба [19, 20], из них и были получены уравнения Гамильтона—Якоби Маделунгом [48] в частном случае нерелятивистского гамильтониана и В. В. Козловым [19, 20] в общем случае гамильтоновых систем. Общая подстановка (4.1) с разными размерностями и отождествление системы (4.2) с уравнениями с одинаковой главной частью в терминах Куранта [39] — видимо, недавняя история [3, 12, 61]. Подстановка (4.1) и уравнения (4.2) имеют яркий геометрический смысл: это движение m -мерных поверхностей в n -мерном пространстве в силу исходной динамической системы в эйлеровых координатах. Так механика помогает геометрии, проясняется и общая теория УрЧП: полностью описан класс уравнений, где работает метод характеристик — это уравнения с одинаковой главной частью. Получен и простейший вывод уравнений Гамильтона—Якоби, который мы используем для прояснения и обоснования метода Милна—МакКри в разделе 5 в нерелятивистском случае, а в релятивистском случае в разделе 6. Это позволит обосновать ускоренное расширение Вселенной.

5. УРАВНЕНИЕ ВЛАСОВА—ПУАССОНА, КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ И НЕРЕЛЯТИВИСТСКАЯ ГИДРОДИНАМИКА С ЛЯМБДА-ЧЛЕНОМ

Воспроизведём простейшее нерелятивистское космологическое решение Милна—МакКри с добавкой лямбда-члена в форме уравнения Власова—Пуассона. Нерелятивистский случай для тяготения соответствует действию [22, 47]

$$S[U] = \int \left[\frac{mv^2}{2} - mU \right] f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m) d\mathbf{x} d\mathbf{v} dm dt - \frac{1}{8\pi\gamma} \int ((\nabla U)^2 - 2\lambda U) d\mathbf{x} dt. \quad (5.1)$$

Варьируя по U , получаем уравнения Пуассона с лямбда-членом:

$$\Delta U = 4\pi\gamma \int m f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m) d\mathbf{v} dm - \lambda. \quad (5.2)$$

Мы видим, что для получения замкнутой системы уравнений нужно получить уравнение для функции распределения, появившейся в уравнении Пуассона (5.2). Действие для одной частицы получается из первого слагаемого в (5.1) при выборе $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m, e) = \delta(m - M)\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}(t))\delta\left(\mathbf{v} - \frac{d\mathbf{y}}{dt}\right)$. Эта формальная подстановка — правило для получения правильных лагранжианов из действия (5.1), работает для вывода любых систем типа Власова, и мы широко пользовались этим [3, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 57–63] и будем пользоваться в дальнейшем. Получаем стандартное действие:

$$S_1[\mathbf{y}] = \int \left[\frac{My'^2}{2} - MU(\mathbf{y}) \right] dt.$$

Варьируем, как обычно в механике, и получаем уравнение Ньютона:

$$\mathbf{y}'' - \frac{\partial U}{\partial \mathbf{y}} = 0.$$

Переходим к уравнению Лиувилля для соответствующей системы обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{v}, \\ \dot{\mathbf{v}} = -\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}, \end{cases}$$

и тогда получаем уравнение на функцию распределения, дополняя уравнение (5.2):

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\mathbf{v}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right) - \left(\frac{\partial U}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{v}} \right) = 0. \quad (5.3)$$

Система (5.2), (5.3) и есть система уравнений Власова—Пуассона для гравитации с лямбда-членом, который и призван описать ускоренное расширение.

Мы провели подробный вывод уравнения Власова—Пуассона в простейшем случае, который иллюстрирует правильность вывода уравнений типа Власова и в более сложных релятивистских и слабoreлятивистских случаях. Этот способ вывода уравнений типа Власова отработывался в статьях [3, 6, 7, 9, 10, 12, 14, 57–63] и является пока единственным способом получать в замкнутой форме уравнения электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия. По сути он следует всем учебникам по теории поля (см., например, [2, 18, 22, 28, 41, 47, 65]), где вводятся два действия: для полей и для частиц. Наша небольшая добавка с уравнениями типа Власова [9, 10, 59] связала эти два действия подстановкой дельта-функции в одну сторону и переходом к интегрированию с помощью функции распределения в обратную.

Этот переход аналогичен связи лагранжевых и эйлеровых координат в кинетической теории. Это позволило заодно получать правые части в уравнениях для полей (тензор энергии-импульса в уравнениях Эйнштейна). Это поставило на математическую платформу ОТО, упрощая её и давая замкнутую систему уравнений из принципа наименьшего действия (2.1), (2.3). Это упростило и сделало математически строгой и всю гравитацию и электродинамику именно с помощью уравнения Власова.

Правильность такой схемы вывода уравнений типа Власова была сначала проверена на уравнениях Власова—Пуассона и уравнениях Власова—Максвелла, где ответ был известен, хотя правые части уравнений для полей не были выведены, и только после этого схема вывода была перенесена на уравнение Власова—Эйнштейна. Это важно, потому что как зарубежные так, и наши исследователи брали тензор энергии-импульса необоснованно, что приводило к заведомо неправильным уравнениям для полей. Более того, сравнение релятивистских действий с нерелятивистскими и слабoreлятивистскими позволило твёрдо установить все коэффициенты действия (2.1), а потому и уравнения для полей.

Дальнейшая наша цель — получение космологических решений, и сейчас мы выведем уравнения Милна—МакКри [49] из уравнения Власова. Система (5.2), (5.3) имеет точное гидродинамическое следствие, т. к. допускается (согласно более общей теории раздела 4) гидродинамический вид функции распределения как точное следствие (5.2), (5.3). Пусть $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m) =$

$\rho(t, \mathbf{x}, m)\delta(\mathbf{v} - \mathbf{w}(t, \mathbf{x}, m))$. Тогда

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \mathbf{w}) = 0, \\ \frac{\partial w_k}{\partial t} + w_i \frac{\partial w_k}{\partial x_i} + \frac{\partial U}{\partial x_k} = 0, \\ \Delta U = 4\pi\gamma \int m \rho dm - \lambda. \end{cases}$$

Это означает, что если $\rho(t, \mathbf{x}, m)$, $\mathbf{w}(t, \mathbf{x}, m)$ и $U(t, \mathbf{x})$ удовлетворяют этой системе уравнений, то $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m) = \rho(t, \mathbf{x}, m)\delta(\mathbf{v} - \mathbf{w}(t, \mathbf{x}, m))$ и $U(t, \mathbf{x})$ удовлетворяют системе уравнений Власова—Пуассона (5.2), (5.3).

Пусть $w_k(t, \mathbf{x}, m) = \frac{\partial W}{\partial x^k}$. Такая подстановка проходит, также согласно общей теории из раздела 3, и получается точное следствие Гамильтона—Якоби системы Власова—Пуассона (5.2), (5.3) с лямбда-членом:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \nabla W) = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{(\nabla W)^2}{2} + U = 0, \\ \Delta U = 4\pi\gamma \int m \rho dm - \lambda. \end{cases} \quad (5.4)$$

Эта система уравнений обобщает систему Милна—МакКри [49], где она приведена сразу в изотропном случае с функциями, зависящими только от радиуса, но и с зависимостью плотности и константы Хаббла от массы. Мы вывели эту систему из системы Власова—Пуассона, которую мы получили из принципа наименьшего действия: таким образом, мы обосновали и обобщили систему Милна—МакКри [49], которая признанным образом даёт космологические решения в нерелятивистском случае. Этим мы подготовили почву для перехода к релятивизму ОТО.

Отметим, что если W есть функция только радиуса, то скорость даёт как раз обобщенный разлёт Хаббла: $w = \nabla W = W'(r) \frac{x}{r}$. Скорость разбегания $\frac{W'(r)}{r}$ называется постоянной Хаббла. Обратное тоже верно: любой разлёт по Хабблу, если скорость пропорциональна расстоянию, означает, что скорость есть градиент некоторой функции. Этим космологическое расширение связывается с гидродинамическим и даже следствием Гамильтона—Якоби уравнения Власова—Пуассона. В космологических решениях плотность не зависит от пространственной координаты. Тогда в первом уравнении неразрывности переменные разделяются, и из него получаем $\frac{1}{\rho} \frac{\partial \rho}{\partial t} = -3H(m, t)$,

а также $\Delta W = 3H(m, t)$. Мы покажем ниже, что $H(m, t) = \frac{W'(r)}{r}$ совпадает с постоянной Хаббла. Из третьего уравнения имеем уравнение: $\Delta U = 4\pi\gamma \int m \rho(m, t) dm - \lambda$. Решая два последних уравнения в случае, когда U и W зависят только от радиуса, имеем

$$\begin{aligned} W(r, m, t) &= \frac{H(m, t)}{2} r^2 + \frac{A(m, t)}{r} + B(m, t), \\ U(r, t) &= \frac{4\pi\gamma \int m \rho(m, t) dm - \lambda}{6} r^2 + \frac{C(t)}{r} + D(t). \end{aligned}$$

Мы видим, дифференцируя $W(r, m, t)$, что $H(m, t) = \frac{W'(r)}{r}$, т. е. что это действительно постоянная Хаббла. Здесь $A(m, t)$, $B(m, t)$, $C(t)$, $D(t)$ — произвольные функции. Получаем, подставляя эти выражения во второе уравнение системы (5.4):

$$\frac{1}{2} \frac{\partial H}{\partial t} r^2 + \frac{1}{r} \frac{\partial A}{\partial t} + \frac{\partial B}{\partial t} + \frac{H^2}{2} r^2 - \frac{AH}{r} + \frac{A^2}{2r^4} + \frac{4\pi\gamma \int m \rho(m, t) dm - \lambda}{6} r^2 + \frac{C}{r} + D = 0$$

Приравнявая коэффициенты при степенях радиуса (как это делали Милн и МакКри [49]), получаем $A(m, t) = 0$, $C(t) = 0$, $\frac{\partial B}{\partial t} + D(t) = 0$. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho(m, t)}{\partial t} + 3H(m, t)\rho(m, t) = 0, \\ \frac{\partial H(m, t)}{\partial t} + H^2 + \frac{4\pi\gamma}{3} \int m\rho(m, t)dm - \frac{\lambda}{3} = 0. \end{cases} \quad (5.5)$$

Так как скорость разбегания $\vec{w} = \nabla W = H\vec{r}$, имеем:

- 1) условие расширения Вселенной: $H \geq 0$;
- 2) условие ускоренного расширения: $\frac{\partial H(m, t)}{\partial t} \geq 0$, т. е. $H^2 + \frac{4\pi\gamma}{3} \int m\rho(m, t)dm - \frac{\lambda}{3}$.

Из второго условия видим определяющую роль лямбды для ускоренного расширения. Мы также видим: так как $\rho(m, t)$ обязано, вообще говоря, зависеть от массы, то и «постоянная» Хаббла $H(m, t)$, вообще говоря, зависит от массы.

Мы получили систему уравнений (5.5), которая в принципе объясняет как изменение постоянной Хаббла, так и её «напряжения» («*Constant Hubble Tension*» [36]) именно зависимостью от времени и от массы: уравнения (5.5) можно считать точным уравнением константы Хаббла с лямбда-членом в не релятивистском случае.

Если, однако, H не зависит от массы (что второе из уравнений (5.5) допускает, как это и предполагали Милн и МакКри в [49]), мы можем свести систему (5.5) к системе двух обыкновенных уравнений. Обозначим $K(t) = \frac{4\pi\gamma}{3} \int m\rho(m, t)dm$ и получим:

$$\begin{cases} \frac{dK}{dt} + 3HK = 0, \\ \frac{dH}{dt} + H^2 + K - \frac{\lambda}{3} = 0. \end{cases} \quad (5.6)$$

Первое из уравнений (5.6) есть в точности уравнение (2.4) Милна—МакКри [49], а второе из уравнений (5.6) — это их уравнение (3.2) (с лямбда-членом), но полученное без всяких предположений из принципа наименьшего действия как его точное следствие. Система (5.6) решается точно (делением и исключением времени оно сводится к уравнению Бернулли), но нам достаточно и фазового портрета, который исследовался в [61, 63]. Условия ускоренного расширения — это узкая область под параболой $H \geq 0$, $K \geq 0$, $H^2 + K - \frac{\lambda}{6} \leq 0$.

Система (5.5) сводится к системе обыкновенных дифференциальных уравнений и в более общем случае, когда $H(m, t)$ кусочно-постоянна на конечном числе интервалов I_i . Пусть значение $H(m, t)$ на этом интервале равно $H(i, t)$, $i = 1 \dots r$. Обозначая $m(i, t) = \frac{4\pi\gamma}{3} \int_{I_i} m\rho(m, t)dm$, получаем систему $2r$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{dm(i, t)}{dt} + 3H(i, t)m(i, t) = 0, i = 1 \dots r, \\ \frac{dH(i, t)}{dt} + H(i, t)^2 + \Sigma_{k=1 \dots r} m(k, t) - \frac{\lambda}{3} = 0. \end{cases}$$

В литературе широко обсуждается напряжение константы Хаббла («*Constant Hubble Tension*», см. [36]), оно выражает несоответствие постоянной Хаббла наблюдениям и вопросам, от чего она вообще может зависеть. Получение точного решения следствия действия (2.1) для постоянной Хаббла в принципе может убрать это несоответствие. Наша цель — аналог теории Милна—МакКри для динамики в релятивистском случае: этот метод приведёт к построению космологических решений и объяснит ускоренное расширение Вселенной без введения лямбды и тёмной энергии.

6. ОБЩАЯ ТЕОРИЯ КОСМОЛОГИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ: ВМЕСТО ТЁМНОЙ ЭНЕРГИИ
И ЛЯМБДА-ЧЛЕНА ЯСНАЯ КЛАССИЧЕСКАЯ МАТЕМАТИКА
И ПРОСТАЯ ГАМИЛЬТОНОВА МЕХАНИКА

Перенесём теорию Милна—МакКри из предыдущего раздела на случай общего гамильтониана $H(p, x)$. Выпишем уравнение Лиувилля:

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \left(\frac{\partial H}{\partial p}, \frac{\partial f}{\partial \mathbf{x}} \right) - \left(\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}, \frac{\partial f}{\partial p} \right) = 0.$$

Сделаем гидродинамическую подстановку сразу в градиентной форме $f(t, \mathbf{x}, p) = \rho(t, \mathbf{x})\delta(\mathbf{v} - \nabla W(t, \mathbf{x}))$. Отметим, что именно в такой форме её отметил В. П. Маслов (см. [23, с. 29]). Получаем при этом уравнения неразрывности и Гамильтона—Якоби

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho \nabla W) = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + H(\nabla W, x) = 0. \end{cases}$$

Если плотность не зависит от времени (общепринятое космологическое предположение), то переменные в уравнении неразрывности разделяются, и появляется постоянная Хаббла:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho(t)}{\partial t} + 3h(t)\rho(t) = 0, \\ \Delta W = 3h(t), \\ \frac{\partial W}{\partial t} + H(\nabla W, x) = 0. \end{cases}$$

Последние два уравнения — обобщенная система Гурса. Для них можно выписать условия совместности: $3\frac{\partial h(t)}{\partial t} + \Delta H(\nabla W, x) = 0$.

Пусть гамильтониан $H(p, x)$ зависит от этих аргументов через изотропные переменные p^2 и (p, x) : $H(p, x) = H((p, x), p^2)$ (это инвариантность относительно вращений). Тогда при подстановке Гамильтона—Якоби $p = \nabla W$, $W = W(r)$ гамильтониан приобретает вид $H(p, x) = H((p, x), p^2) = H(rW_r, W_r^2)$. Скорости имеют вид $v^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial W_r} \frac{x^i}{r}$. Это хаббловское расширение. Вывод: это — весьма общий и при этом общематематический факт, который справедлив даже без «космологического» предположения об однородности пространства (когда плотность не зависит от пространственной переменной): тогда константа Хаббла тоже зависит от пространственной координаты и имеет явный вид $h(r, t) = \frac{\partial H}{\partial W_r} \frac{1}{r}$. Это обобщение может быть полезно, так как иногда наблюдают константу Хаббла, зависящую от радиуса.

1. Уравнение неразрывности принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\rho \frac{\partial H}{\partial p_i} \right) = 0 \quad \text{или} \quad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\rho \frac{\partial H}{\partial W_r} \frac{x^i}{r} \right) = 0.$$

2. В космологическом случае, когда плотность $\rho = \rho(m, t)$ не зависит от пространственной координаты, переменные разделяются, и появляется «постоянная» интегрирования $h(t)$, которая называется постоянной Хаббла и совпадает с появившейся выше:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\rho h = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial H}{\partial W_r} \frac{x^i}{r} \right) = 3h.$$

3. Уравнение $\frac{\partial}{\partial x^i} \left(\frac{\partial H}{\partial W_r} \frac{x^i}{r} \right) = 3h$ имеет общее решение $\frac{\partial H}{\partial W_r} = hr + \frac{A(t)}{r^2}$.

4. В космологических моделях «постоянную» $A(t)$ можно положить равной нулю, исключая особенность в нуле. При этом, подставляя это выражение для скоростей $v^i = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \frac{\partial H}{\partial W_r} \frac{x^i}{r}$ из раздела 3, получаем $v^i = h(t)x^i$, что полностью соответствует общепризнанному представлению о «постоянной Хаббла» h : чем дальше галактика, тем быстрее она убегает. Мы видим, что такое

разбегание — общематематический факт из гамильтоновой динамики инвариантных гамильтонианов.

5. Решая уравнение разделов 5, 6 $\frac{\partial H}{\partial W_r} = hr$ относительно W_r , получаем $W_r = F(hr)$, где F — это функция, обратная к $\frac{\partial H}{\partial W_r}$ (теорема об обратной функции).

6. Получаем следующую систему уравнений (задача Гурса):

$$\begin{cases} W_r = F(hr), \\ -\frac{\partial W}{\partial t} = H(P, x) = H((p, x), p^2) = H(rW_r, W_r^2) = H(rF(hr), F(hr)^2). \end{cases}$$

7. Переписывая все уравнения вместе, получаем следующую систему уравнений:

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + 3\rho h = 0, \\ \frac{\partial W}{\partial r} = F(hr), \\ \frac{\partial W}{\partial t} + H(rF(hr), F(hr)^2) = 0. \end{cases} \quad (6.1)$$

8. Выпишем условие совместности последних двух уравнений (это обычный ход в системе Гурса). Это условие совместности имеет вид

$$\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial r}, \quad -\frac{\partial}{\partial t} F(hr) = \frac{\partial}{\partial r} H(rF(hr), F(hr)^2).$$

Мы должны применить эти выкладки в случае ОТО для изотропной метрики

$$g^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} e(r, t) & a(r, t)x & a(r, t)y & a(r, t)z \\ a(r, t)x & b(r, t) + d(r, t)x^2 & d(r, t)xy & d(r, t)xz \\ a(r, t)y & d(r, t)xy & b(r, t) + d(r, t)y^2 & d(r, t)yz \\ a(r, t)z & d(r, t)xz & d(r, t)yz & b(r, t) + d(r, t)z^2 \end{pmatrix}.$$

Нам потребуется и обратная матрица: частицы в импульсах описываются метрикой с верхними индексами, а поля — нижними:

$$g_{\alpha\beta} = K \cdot \begin{pmatrix} b + d(x^2 + y^2 + z^2) & -ax & -ay & -az \\ -ax & g_{11} & \frac{a^2xy - edxy}{b} & \frac{a^2xz - edxz}{b} \\ -ay & \frac{a^2xy - edxy}{b} & g_{22} & \frac{a^2yz - edyz}{b} \\ -az & \frac{a^2xz - edxz}{b} & \frac{a^2yz - edyz}{b} & g_{33} \end{pmatrix}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{be - (a^2 - ed)(x^2 + y^2 + z^2)}, \\ g_{11} &= \frac{1}{b}(-a^2y^2 - a^2z^2 + eb + edy^2 + edz^2), \\ g_{22} &= \frac{1}{b}(-a^2x^2 - a^2z^2 + eb + edx^2 + edz^2), \\ g_{33} &= \frac{1}{b}(-a^2x^2 - a^2y^2 + eb + edx^2 + edy^2). \end{aligned}$$

Как известно в ОТО, гамильтониан вычисляется по массовому соотношению $g^{\alpha\beta}p_\alpha p_\beta = (mc)^2$ по формуле $-H(x, p) = cp_0$. Поэтому решим квадратное уравнение относительно p_0 :

$$g^{00}p_0^2 + 2g^{i0}p_i p_0 + g^{ij}p_i p_j = (mc)^2.$$

Физический смысл имеет корень, взятый с минусом [2, 18, 22, 28, 41, 47, 65]:

$$p_0 = \frac{1}{e} \left(-2a(p_1x + p_2y + p_3z) - \sqrt{(a^2 - ed)(p_1x + p_2y + p_3z)^2 + e((mc)^2 - bp^2)} \right).$$

Здесь использовано обозначение $p^2 = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2$. Сделаем подстановку $p = \nabla W(r, t)$, $W_t = \frac{\partial W}{\partial t} = -H(x, p) = cp_0$ и выпишем уравнение Гамильтона—Якоби:

$$W_t = -H = \frac{c}{e} \left(-arW_r - \sqrt{W_r^2(a^2r^2 - eb - dr^2e) + e(mc)^2} \right).$$

Получаем следующую систему уравнений для этого известного [2, 18, 22, 28, 41, 47, 65] гамильтониана ОТО — частный случай системы (6.1):

$$\begin{cases} \frac{\partial \rho}{\partial t} + 3h\rho = 0, \\ \frac{\mu \frac{\partial W}{\partial r}}{\sqrt{e(mc)^2 + \mu \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2}} = K, \\ \frac{\partial W}{\partial t} + \frac{c}{e} \frac{\partial W}{\partial r} ar + \frac{c}{e} \sqrt{e(mc)^2 + \mu \left(\frac{\partial W}{\partial r} \right)^2} = 0, \end{cases} \quad (6.2)$$

где $\mu(r, t) = r^2(a^2 - de) - be$, $K(m, r, t) = \left(\frac{e}{c}h - a \right) r$ — безразмерный радиус-вектор r .

Эту систему уравнений следует дополнить уравнениями Эйнштейна для полей в изотропном случае, т. е. на метрические коэффициенты a, b, d, e . Но выведем следствия уравнений (6.2). Решаем среднее уравнение системы (6.2) относительно W_r , получаем

$$W_r = \frac{K\epsilon mc}{\sqrt{e(\mu^2 - K^2\mu)}}.$$

Подставляя это выражение в нижнее уравнение (Гамильтона—Якоби), получаем

$$W_t = -\frac{mc^2(arK + \mu)}{\sqrt{e(\mu^2 - K^2\mu)}}.$$

Тогда, приравнявая вторые частные производные (условие совместности): $\frac{\partial^2 W}{\partial r \partial t} = \frac{\partial^2 W}{\partial t \partial r}$. Перепишем выражения в удобном виде: $t = \frac{mcT}{Z}$, $W_r = \frac{mcQ}{Z}$, где $Z = e(\mu^2 - K^2\mu)$, $T = -c(arK + \mu)$, $Q = eK$, $K = \left(\frac{e}{c}h - a \right) r$, $\mu(r, t) = r^2(a^2 - de) - be$. Упростим T :

$$T = e(cd - ah)r^2 + ebc. \quad (6.3)$$

Здесь все компоненты метрики суть функции (r, t) радиус-вектора и времени, а постоянная Хаббла есть, вообще говоря, функция (m, t) времени и массы. Получаем уравнение

$$2ZQ_t - QZ_t = 2ZT_r - TZ_r. \quad (6.4)$$

Это и есть общее соотношение на коэффициенты метрики в изотропном случае, которое дают космологические решения.

Все три функции этого уравнения суть полиномы по r , если коэффициенты метрики — сами полиномы по r . Тогда можно приравнять коэффициенты при степенях r , что и будет обобщением метода Милна—МакКри.

7. ПРИМЕР. КОЭФФИЦИЕНТЫ МЕТРИКИ — ФУНКЦИИ ТОЛЬКО ВРЕМЕНИ

Рассмотрим случай, когда коэффициенты метрики есть функции только от времени: $Z = z_4r^4 + z_2r^2 + z_0$, $T = t_2r^2 + t_0$, $Q = q_1r$. Получаем три уравнения при пятой, третьей и первой степенях:

$$\begin{aligned} 2z_4q_{1t} - z_{4t}q_1 &= 0, \\ 2z_2q_{1t} - z_{2t}q_1 &= 2z_2t_2 - 4z_4t_0, \\ 2z_0q_{1t} - z_{0t}q_1 &= 4z_0t_2 - 2z_2t_0. \end{aligned} \quad (7.1)$$

Первое уравнение интегрируется:

$$\frac{q_1}{\sqrt{z_4}} = \text{const} = I(m), \quad (7.2)$$

где $I(m)$ — безразмерный интеграл, причём $q_1 = \frac{e^2}{c}h - ae$, $z_4 = e(a^2 - de)^2 - e(a^2 - de)\left(\frac{e}{c}h - a\right)^2$.
Остальные коэффициенты в (7.1): $z_2 = -2be^2(a^2 - de) + be^2\left(\frac{e}{c}h - a\right)^2$, $z_0 = e(be)^2$, $t_2 = -c(a^2 - de) - ca\left(\frac{e}{c}h - a\right) = cde - ca^2 - aeh + ca^2 = e(cd - ah)$, $t_0 = cbe$.

Особый интерес представляет последнее из уравнений (7.1), т. к. оно содержит уравнение на постоянную Хаббла, имеющее вид

$$\frac{\partial h}{\partial t} + h^2 = \lambda(a, b, d, e, h).$$

Отклонение от свободного движения (метрики Минковского и модели Фридмана) $\lambda(a, b, d, e, h)$ должно дать ускоренное расширение в терминах метрики, если оно положительно. Для следующего примера метрики, обобщающей модель Фридмана—Леметра—Робертсона—Уокера (ФЛРУ), $\lambda(a, b, d, e, h) = \frac{hb_t}{b}$.

Итак, мы построили общую теорию движения материи в космологических решениях в изотропной метрике. Для окончания нужны ещё движения полей в заданной метрике по уравнениям Эйнштейна.

Рассмотрение частных случаев представляет значительный интерес: мы свели задачу к исследованию знака $\lambda(a, b, d, e, h)$. Это и есть общее соотношение на коэффициенты метрики в изотропном случае, которые дают космологические решения. Если коэффициенты метрики — полиномы по r , то все коэффициенты уравнения (3.3) тоже полиномы, и можно приравнять коэффициенты при степенях r , что и будет обобщением метода Милна—МакКри.

В работе [4, 56] рассмотрен случай, когда метрика есть функция только от времени. Здесь ограничимся случаем, когда $b(t)$ и $d(t)$ — произвольные функции времени, но $a = 0$, $e = 1$. Отсылаем за подробностями в общем случае к работе [4, 56].

8. ПРИМЕР. ОБОБЩЁННАЯ МОДЕЛЬ ФРИДМАНА—ЛЕМЕТРА—РОБЕРТСОНА—УОКЕРА (ФЛРУ)

Найдём обратную матрицу, обозначая её соответствующие компоненты большими буквами, получим $E = 1$, $A = 0$, $D = -\frac{d}{b(b + dr^2)}$, $B = \frac{1}{b}$. Это обобщает случай ФЛРУ [2, 18, 22, 28, 41, 47, 65].

Мы видим, что если уравнения для полей описываются метрическим тензором с нижними индексами, которые входят в действие (2.1) (здесь это соответствует коэффициентам с большими буквами), то необходимые уравнения для материи — с метрикой с верхними индексами. Получим для движения материи уравнения (7.1) (см. [4, 56]):

$$\begin{aligned} 2d^2h_t - h(d^2)_t - d_t\left(\frac{h}{c}\right)^2h &= 0, \\ 4bdh_t - 2(bd)_th - b_t\frac{h^3}{c^2} + 2bdh^2 &= 0, \\ bh_t - b_th + bh^2 &= 0. \end{aligned} \tag{8.1}$$

9. ПРИМЕР. ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ ФЛРУ

Приводя систему к диагональному виду относительно производных, получаем простую систему, эквивалентную системе (8.1) (см. [8]):

$$\begin{aligned} d_t &= 2\frac{d^2c^2}{h}, \\ h_t &= -(2dc^2 + h^2), \\ b_t &= -(2dc^2)\frac{b}{h}. \end{aligned} \tag{9.1}$$

Из первого и третьего уравнения следует, что $bd_t - db_t = 0$, $\frac{d}{b} = -k$ — интеграл кривизны ($b = -a^2$ в обычных обозначениях для модели Фридмана). Мы автоматически оказались в случае

постоянной кривизны k -модели Фридмана. При ускоренном расширении вселенной из второго уравнения следует $d < 0$. Так как $b < 0$, имеем следствие $k < 0$. Это пространство Лобачевского.

Итак, мы получили, что знак кривизны определяется из эксперимента и точного следствия уравнений, получающихся из принципа наименьшего действия. Мы не только получили простое объяснение ускоренного расширения Вселенной на основе системы (3.5) без введения лямбды Эйнштейна, полей, темной энергии, но и впервые получили возможность надежно говорить о знаке кривизны на основе хорошо проверенного эксперимента об ускоренном расширении Вселенной.

Удобно переписать систему (9.1), используя соотношение $\frac{d}{b} = -k$ и обозначая $b = -a^2$, где a — параметр Фридмана:

$$\begin{aligned} h_t + h^2 &= -2a^2 k c^2, \\ a_t &= -k c^2 \frac{a^3}{h}. \end{aligned} \quad (9.2)$$

В таком виде явно входит кривизна $k = -\frac{d}{b}$ — откуда из первого уравнения хорошо видно, что кривизна должна быть отрицательна для ускоренного расширения Вселенной. Можно искать частное решение системы (9.1) в виде $d = Ah^2$, откуда находим из условия совпадения двух первых уравнений (9.1) $A = -\frac{1}{c^2}$. Это решение является сепаратрисой двух режимов: под этой параболой решения стартуют из начала координат, над ней решения начинаются вблизи вертикальной оси на плюс бесконечности и около. Уравнение на константу Хаббла принимает особенно простой вид $h_t = h^2$. Уход на бесконечность за конечное время. Тот же ответ получается и из уравнения (9.2), где подстановка уже должна выглядеть по-другому: $a = Ah$.

Где живёт наша Вселенная? Представляет значительный интерес изучить этот вопрос, а также последовательно обобщать эти уравнения, добавляя оставшиеся коэффициенты и обобщая модель Фридмана, сравнивая его и эти обобщения с экспериментальными данными. Первые прикидки показывают хорошие результаты, устраняя проблему «*Constant Hubble Tension*» [36].

Подчеркнём, что (9.2) — это точное следствие уравнений Эйнштейна для космологического движения релятивистских частиц в заданных полях, поэтому (9.2) является триумфальным обоснованием ОТО и объяснением ускоренного расширения Вселенной одновременно. Уместно процитировать В. Л. Гинзбурга (его известный обзор 1999 года [17, 43]): «*Эйнштейн счёл введение лямбда-члена «неудовлетворительным с теоретической точки зрения» и отбросил его. Паули, в примечании к своей известной книге, изданной по-английски в 1958 г., «целиком присоединился к точке зрения Эйнштейна». Л. Д. Ландау даже слышать не хотел о лямбда-члене, но добиться от него причины такой позиции мне не удалось*».

Интуиция не подвела великих физиков, как видно из этой статьи. Дело в том, что (9.2) является одновременно продвижением и 21-й проблемы Гинзбурга (экспериментальное подтверждение ОТО: эксперимент здесь — как раз ускоренное расширение), и 23-й проблемы (космологическая проблема, лямбда-член). Можно сказать, глядя на первое из уравнений (9.2), что в качестве лямбда-члена выступает метрика, умноженная на кривизну и квадрат скорости света, а отрицательная кривизна обеспечивает отталкивание, как бы растягивая, расталкивая частицы: геодезические в пространствах отрицательной кривизны, как известно, разбегаются. Можно назвать (9.2)) геометрическим объяснением отталкивания и ускоренного расширения.

Сразу возникают новые вопросы: как сопрячь ньютоново притяжение с геометрическим отталкиванием? Ясно, что здесь нужно расширять систему уравнений, включая уравнения для полей по аналогии с нерелятивистским решением Милна—МакКри.

Ещё один интересный и актуальный вопрос: какова наша Вселенная с глобальной точки зрения? Ибо известны многочисленные пространства отрицательной кривизны (в частности, геодезические на пространствах отрицательной кривизны называются системами Д. В. Аносова и обладают свойствами разбегания и перемешивания). Это позволило объяснить результаты по ускоренному расширению Вселенной [52, 54], за которые и была присуждена нобелевская премия

в 2011 году. Результаты позволили завершить попытки вывода уравнений гравитации и электродинамики из принципа наименьшего действия [2, 16, 18, 22, 28, 37, 38, 41, 47, 65]. В работах [4, 8, 56] были получены уравнения, позволившие уверенно говорить о возможности объяснения ускоренного расширения без лямбды, тёмной энергии, дополнительных полей на основе классической ОТО.

10. ПРИМЕР. ДИАГОНАЛИЗАЦИЯ ФЛРУ С НЕ РАВНЫМИ НУЛЮ ДРУГИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Система принимает вид:

$$\begin{aligned} d_t &= -2\frac{d^2c^2}{he} + \frac{4a^2c^2d}{he^2} - \frac{a^4c^2}{he^3} + \frac{2aa_t}{e} - \frac{a^2e_t}{e^2}, \\ h_t + h^2 &= -2dc^2 + 2a^2\frac{c^2}{e^2} - \frac{he_t}{2e}, \\ b_t &= -\frac{2dc^2b}{eh} + \frac{2ba^2c^2}{he^2} + \frac{2bac}{e}. \end{aligned} \quad (10.1)$$

Отметим, что если $a = 0$, то кривизна по-прежнему — интеграл. Нужно дополнить эту систему уравнениями Эйнштейна (2.2), но для импульсов: тогда мы сможем использовать и там форму Гамильтона—Якоби, приведшую к (8.1), (9.1), (9.2), (10.1). Мы получаем выражение для импульсов:

$$p_\mu = \frac{\partial L}{\partial u^\mu} = -mc \frac{g_{\mu\alpha} u^\alpha}{\sqrt{g_{\eta\xi} u^\eta u^\xi}}. \quad (10.2)$$

Переходя к верхним индексам умножением на обратную матрицу $g^{\mu\beta}$, получаем $p^\beta = -mc \frac{u^\beta}{\sqrt{g_{\eta\xi} u^\eta u^\xi}}$. Теперь требуется обратить эту формулу, выразив скорости через импульсы, чтобы написать действие через импульсы. Для этого в последней формуле поделим β -ю компоненту на нулевую $\frac{p^\beta}{p^0} = \frac{u^\beta}{c}$. В последней формуле необходимо исключить импульс с нулевой компонентой через массовое уравнение $p_\alpha p_\beta g^{\alpha\beta} = (mc)^2$ и его решение относительно p_0 : $p_0 = (-b \pm \sqrt{b^2 - 4aC})/(2a)$, где $a = g^{00}$, $b = 2p_i g^{0i}$, $C = p_i p_j g^{ij} - (mc)^2$. При этом для согласования с нерелятивистской динамикой берётся знак минус. Массовое уравнение получается подстановкой тех же соотношений для исключения скоростей с учетом $u^0 = c p^\beta/p^0 = u^\beta/c$ в формулу (10.2) при $\mu = 0$ (ср. [2, 18, 22, 28, 41, 47, 65]).

Уравнение для полей останется тем же самым (2.2) с заменой на интегрирование по импульсам с использованием формул $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{v}, m) d\mathbf{v} dm = f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, m) d\mathbf{p} dm$. Каждая из двух этих величин — это число частиц в элементе объёма, что является инвариантом при замене переменных. Уравнение Эйнштейна (2.2) упрощается и переписывается:

$$k_1 \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R + \Lambda) \right) \sqrt{-g} = c \int m \frac{f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, m)}{2\sqrt{g_{\mu\nu} u^\mu u^\nu}} u^\mu u^\nu d\mathbf{p} dm. \quad (10.3)$$

Выражение в импульсах:

$$k_1 \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} (R + \Lambda) \right) \sqrt{-g} = \frac{c}{2} \int f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, m) \frac{p^\mu p^\nu}{\sqrt{(p^0)^2}} d\mathbf{p} dm. \quad (10.4)$$

Выражение в нижних индексах, имея в виду связь с функцией Гамильтона—Якоби:

$$k_1 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R + \Lambda) \right) \sqrt{-g} = \frac{c}{2} \int f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, m) \frac{p_\mu p_\nu}{\sqrt{(p^0)^2}} d\mathbf{p} dm. \quad (10.5)$$

Получается следующий план действий. Написать систему уравнений Власова—Эйнштейна в импульсах, рассмотреть её изотропную форму и постараться решить эту систему. Сделаем гидродинамическую подстановку $f(t, \mathbf{x}, \mathbf{p}, m) = \rho(m, t) \delta(\mathbf{p} - \mathbf{P}(t, \mathbf{x}, m))$. Получаем из (10.5)

$$k_1 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R + \Lambda) \right) \sqrt{-g} = \frac{c}{2} \int \rho(m, t) \frac{P_\mu P_\nu}{\sqrt{(P^0)^2}} dm. \quad (10.6)$$

Теперь полагаем $P_\mu = \frac{\partial W}{\partial x^\mu}$, $W = W(t, r)$. Получаем

$$k_1 \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} (R + \Lambda) \right) \sqrt{-g} = \frac{c}{2} \int \frac{\partial W}{\partial x^\mu} \frac{\partial W}{\partial x^\nu} \frac{\rho(m, t)}{\sqrt{(P^0)^2}} dm. \quad (10.7)$$

Здесь $\frac{\partial W}{\partial x^i} = W_r \frac{x^i}{r}$, $i = 1, 2, 3$. Из (10.7) следует, что нужно аккуратно посчитать P^0 с учётом (6.3) и вообще учесть (6.3), переходя от изотропного случая (10.7) к космологическому изотропному случаю уравнений Эйнштейна:

$$\begin{aligned} P^0 = P_\mu g^{\mu 0} &= \frac{\partial W}{\partial x^\mu} g^{\mu 0} = \frac{\partial W}{\partial x^0} e + \frac{\partial W}{\partial x^k} a x^k = m c T \frac{e}{c \sqrt{Z}} + \frac{\partial W}{\partial r} a x^k \frac{x_k}{r} = m c T \frac{e}{c \sqrt{Z}} + m c Q \frac{a r}{\sqrt{Z}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{Z}} (m e T + m c Q a r) = \frac{1}{\sqrt{Z}} (-m e c (a K + \mu) + m c e K a r) = -\frac{1}{\sqrt{Z}} m e c \mu, \\ \frac{\partial W}{\partial x^0} &= \frac{1}{\sqrt{Z}} m e T, \quad \frac{\partial W}{\partial x^k} = \frac{\partial W}{\partial r} \frac{x_k}{r} = m c e K \frac{1}{\sqrt{Z}} \frac{x_k}{r}. \end{aligned} \quad (10.8)$$

Мы получаем вместо (10.7) в изотропном случае следующий вариант уравнений Эйнштейна в космологическом изотропном случае:

$$\begin{aligned} k_1 \left(R_{00} - \frac{1}{2} g_{00} (R + \Lambda) \right) \sqrt{-g} &= \frac{c}{2} \int \frac{\partial W}{\partial x^0} \frac{\partial W}{\partial x^0} \frac{\rho(m, t)}{\sqrt{(P^0)^2}} dm = \frac{c}{2} \int \frac{1}{\sqrt{Z}} (m e T)^2 \frac{\rho(m, t)}{\sqrt{(m e c \mu)^2}} dm = \\ &= \frac{1}{2} \int \frac{1}{\sqrt{Z}} (c(a K + \mu))^2 e \frac{m \rho(m, t)}{\sqrt{(\mu)^2}} dm = \frac{c^2 e}{2 \sqrt{(\mu)^2}} \int \frac{1}{\sqrt{Z}} (a K + \mu)^2 m \rho(m, t) dm = \\ &= \frac{c^2}{2 \sqrt{(e(c d - a h) r^2 + e b c)^2}} \int (e(c d - a h) r^2 + e b c)^2 e \frac{m \rho(m, t)}{\sqrt{Z}} dm = \\ &= \frac{c^2}{2 \sqrt{(e(c d - a h) r^2 + e b c)^2}} \int (e(c d - a h) r^2 + e b c)^2 e \frac{m \rho(m, t)}{\sqrt{\mu^2 e - \mu K^2 e}} dm, \\ k_1 \left(R_{0k} - \frac{1}{2} g_{0k} (R + \Lambda) \right) \sqrt{-g} &= \frac{c}{2} \int \frac{\partial W}{\partial x^0} \frac{\partial W}{\partial x^k} \frac{\rho(m, t)}{\sqrt{(P^0)^2}} dm = \\ &= \frac{c}{2} \int \frac{1}{\sqrt{Z}} (m e T) \left(m c e K \frac{x_k}{r} \right) \frac{\rho(m, t)}{\sqrt{(m e c \mu)^2}} dm = \frac{c^2 e x_k}{2 r \sqrt{(\mu)^2}} \int \frac{1}{\sqrt{Z}} (a K + \mu) K m \rho(m, t) dm, \\ k_1 \left(R_{mk} - \frac{1}{2} g_{mk} (R + \Lambda) \right) \sqrt{-g} &= \frac{c}{2} \int \frac{\partial W}{\partial x^m} \frac{\partial W}{\partial x^k} \frac{\rho(m, t)}{\sqrt{(P^0)^2}} dm = \\ &= \frac{c}{2} \int \frac{1}{\sqrt{Z}} \left(m c e K \frac{x_m}{r} \right) \left(m c e K \frac{x_k}{r} \right) \frac{\rho(m, t)}{\sqrt{(m e c \mu)^2}} dm = \frac{c^2 e x_k}{2 r \sqrt{(\mu)^2}} \int \frac{1}{\sqrt{Z}} K^2 m \rho(m, t) dm. \end{aligned} \quad (10.9)$$

У нас уже есть выражения (6.3) для W_r и W_t через метрику. Осталось написать левую часть.

Мы получили выражение для правой части уравнений Эйнштейна, из которых видно, что удобно всё делать в сферических координатах. При этом независимых уравнений оказывается как раз два, причём справа стоят полиномы четвёртой степени по r . Поэтому способ решения этих уравнений — разложение по r в квадрате должно оборваться и дать замкнутую систему уравнений. Такой же метод применим и к уравнениям (6.4) для частиц. Такова программа дальнейших исследований.

11. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Уравнения (8.1), (9.1), (9.2) убедительно показывают, что ускоренное расширение — это простой релятивистский эффект, так как они являются точными космологическими следствиями классического лагранжиана Эйнштейна ОТО для движения частиц в заданных полях.

Кроме того, ускоренное расширение даёт однозначно, что наша Вселенная — это пространство Лобачевского. Это завершает усилия многих поколений учёных [2, 17, 18, 22, 28–30, 32, 40–43, 47, 65] и ставит новые задачи.

Возникают вопросы и теоретические по уточнению модели Фридмана, и вопросы сравнения с экспериментом [2–18, 22, 23, 28–34, 36–43, 47, 49–54, 56–65]. В частности, в этих работах напряженно обсуждаются вопросы о несоответствии константы Хаббла экспериментам («*Constant Hubble Tension*»), которые предлагаемыми результатами выводятся на новый уровень.

Но мы решили и ещё несколько задач «по дороге». ОТО поставлено на твердую математическую основу: уравнения ОТО в форме уравнений Власова—Эйнштейна выведены из принципа наименьшего действия и имеют замкнутую форму. Строго определены космологические решения метода Милна—МакКри и получены общематематические гидродинамические следствия и следствия Гамильтона—Якоби уравнений как Лиувилля, так и типа Власова.

Предъявленное обоснование ускоренного расширения Вселенной требует дальнейших как теоретических и чисто математических исследований, связанных с изотропной версией уравнений Эйнштейна, так и тщательного сравнения с экспериментами, обещая стать самым точным подтверждением классической Общей теории относительности.

Мы по сути сделали только первые шаги: в рамках модели Фридмана способ Милна—МакКри дал замкнутую систему обыкновенных дифференциальных уравнений, но как это согласуется с уравнениями для полей? Требуется в идеале получить решения полной системы уравнений Власова—Эйнштейна в изотропном случае, как это удалось Милну и МакКри в ньютоновом случае (уравнение Власова—Пуассона для тяготения). Но даже если бы концы с концами сошлись в случае метрики, зависящей от времени (полной или даже с $a = 0$), это было бы хорошим продвижением.

Предложенное приложение уравнения Власова к гравитации и космологии с объяснением ускоренного расширения Вселенной и выводом уравнения Власова—Максвелла—Эйнштейна и Власова—Пуассона из принципа наименьшего действия показывает его повышенную фундаментальность. Но уравнение Власова является также основой теории плазмы, где имеются уже как признанные успехи типа затухания Ландау, расчётов плазменных приборов типа диода Ленгмюра и плазменных двигателей, так и приложения к исследованиям токамаков [1, 21, 24–27, 35, 44–46, 55].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Беляева Ю. О. Стационарные решения уравнений Власова для высокотемпературной двухкомпонентной плазмы // Современ. мат. Фундам. направл. — 2016. — 62. — С. 19–31.
2. Вайнберг С. Гравитация и космология. — М.: Платон, 2000.
3. Веденяпин В. В. О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия, методе Гамильтона—Якоби и космологических решениях // Докл. РАН. Сер. Мат. Инф. Проц. упр. — 2022. — 504. — С. 51–55. — DOI: [10.31857/S2686954322330013](https://doi.org/10.31857/S2686954322330013).
4. Веденяпин В. В. Математическая теория расширения Вселенной на основе принципа наименьшего действия // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2024. — 64, № 11. — С. 2110–2127. — DOI: [10.31857/S0044466924110076](https://doi.org/10.31857/S0044466924110076).
5. Веденяпин В. В. Математика ускоренного расширения Вселенной и пространство Лобачевского // Докл. РАН. Сер. Мат. Инф. Проц. упр. — 2025. — 522. — С. 11–18. — DOI: [10.31857/S2686954325020038](https://doi.org/10.31857/S2686954325020038).
6. Веденяпин В. В., Аушев В. М., Гладков А. О., Измайлова Ю. А., Реброва А. А. Математическая теория ускоренного расширения Вселенной на основе принципа наименьшего действия и модели Фридмана и Милна—МакКри // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2024. — № 3. — DOI: [10.20948/prepr-2024-3](https://doi.org/10.20948/prepr-2024-3).
7. Веденяпин В. В., Бай А. А., Петров А. Г. О выводе уравнений гравитации из принципа наименьшего действия, релятивистских решениях Милна—МакКри и о точках Лагранжа // Докл. РАН. Сер. Мат. Инф. Проц. упр. — 2023. — 514, № 1. — С. 69–73. — DOI: [10.31857/S2686954323600532](https://doi.org/10.31857/S2686954323600532).
8. Веденяпин В. В., Батищев Я. Г., Сафронов Ю. А., Богданов Д. И. Расширение Вселенной в случае обобщённой метрики Фридмана—Леметра—Робертсона—Уокера // Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2025. — 14.
9. Веденяпин В. В., Воронина М. Ю., Руссков А. А. О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия // Докл. РАН. — 2020. — 495. — С. 9–139. — DOI: [10.31857/S268674002006019X](https://doi.org/10.31857/S268674002006019X).

10. Веденяпин В. В., Негматов М. А. О топологии стационарных решений гидродинамических и вихревых следствий уравнения Власова и метод Гамильтона—Якоби // Докл. РАН. — 2013. — 449, № 5. — С. 521–526. — DOI: [10.7868/S086956521311008X](https://doi.org/10.7868/S086956521311008X).
11. Веденяпин В. В., Негматов М. А. О выводе и классификации уравнений типа Власова и магнитной гидродинамики. Тождество Лагранжа, форма Годунова и критическая масса // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2013. — 47. — С. 5–17.
12. Веденяпин В. В., Парёнкина В. И., Свищевский С. Р. О выводе уравнений электродинамики и гравитации из принципа наименьшего действия // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2022. — 62, № 6. — С. 1016–1029. — DOI: [10.31857/S0044466922060163](https://doi.org/10.31857/S0044466922060163).
13. Веденяпин В. В., Фимин Н. Н. Метод Гамильтона—Якоби в негамильтоновой ситуации и гидродинамическая подстановка // Докл. РАН. — 2015. — 461, № 2. — С. 136–139. — DOI: [10.7868/S0869565215080083](https://doi.org/10.7868/S0869565215080083).
14. Веденяпин В. В., Фимин Н. Н., Четкин В. М. Уравнения типа Власова—Максвелла—Эйнштейна и их следствия. Приложения к астрофизическим задачам // Теор. мат. физ. — 2024. — 218, № 2. — С. 258–279. — DOI: [10.4213/tmf10551](https://doi.org/10.4213/tmf10551).
15. Владимиров В. С., Жаринов В. В. Уравнения математической физики: Учебник для вузов. — М.: Физматлит, 2004.
16. Власов А. А. Статистические функции распределения. — М.: Наука, 1966.
17. Гинзбург В. Л. Какие проблемы физики и астрофизики представляются сейчас особенно важными и интересными (тридцать лет спустя, причем уже на пороге XXI века)? // Усп. физ. наук. — 1999. — 169. — С. 419–441. — DOI: [10.3367/UFNr.0169.199904d.0419](https://doi.org/10.3367/UFNr.0169.199904d.0419).
18. Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т. Современная геометрия. Методы и приложения. — М.: Наука, 1986.
19. Козлов В. В. Гидродинамика гамильтоновых систем // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 1983. — № 6. — С. 10–22.
20. Козлов В. В. Общая теория вихрей. — Ижевск: Изд-во Удмуртского ун-та, 1998.
21. Козлов В. В. Обобщенное кинетическое уравнение Власова // Усп. мат. наук. — 2008. — 63, № 4. — С. 93–130. — DOI: [10.4213/rm9216](https://doi.org/10.4213/rm9216).
22. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. — М.: Наука, 1988.
23. Маслов В. П. Комплексные марковские цепи и интеграл Фейнмана. — М.: Наука, 1976.
24. Сидоров Н. А., Синицын А. В. Исследование точек бифуркации и нетривиальных ветвей решений стационарной системы Власова—Максвелла // Мат. заметки. — 1997. — 62, № 2. — С. 268–292.
25. Скубачевский А. Л. Уравнения Власова—Пуассона для двухкомпонентной плазмы в однородном магнитном поле // Усп. мат. наук. — 2014. — 69, № 2. — С. 107–148. — DOI: [10.4213/rm9579](https://doi.org/10.4213/rm9579).
26. Степин С. А., Тарасов А. Г. Дисперсионное соотношение в кинетической модели бесстолкновительной плазмы // Теор. мат. физ. — 2022. — 210, № 3. — С. 442–454. — DOI: [10.4213/tmf10175](https://doi.org/10.4213/tmf10175).
27. Сулейманова С. Ш., Юшканов А. А. Электрическое поле вблизи поверхности плазмы с произвольной степенью вырождения как отклик на внешнее переменное электрическое поле // Теор. мат. физ. — 2020. — 204, № 1. — С. 76–94. — DOI: [10.4213/tmf9827](https://doi.org/10.4213/tmf9827).
28. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. — М.: ЛКИ, 2007.
29. Фридман А. А. О кривизне пространства // Журн. Русск. физ.-хим. о-ва. — 1924. — 56, № 1. — С. 59.
30. Фридман А. А. О кривизне пространства // Усп. физ. наук. — 1963. — 80, № 3. — С. 439–446.
31. Чернин А. Д. Тёмная энергия и всемирное антитяготение // Усп. физ. наук. — 2008. — 178, № 3. — С. 267–300. — DOI: [10.3367/UFNr.0178.200803c.0267](https://doi.org/10.3367/UFNr.0178.200803c.0267).
32. Эйнштейн А. Замечание к работе А. Фридмана «О кривизне пространства» // Усп. физ. наук. — 1963. — 80, № 3. — С. 453–453. — DOI: [10.3367/UFNr.0080.196307g.0453](https://doi.org/10.3367/UFNr.0080.196307g.0453).
33. Andersson L., Korzyński M. Variational principle for the Einstein–Vlasov equations // ArXiv. — 2019. — 1910.12152.
34. Andréasson H. The Einstein–Vlasov System/Kinetic Theory // Living Rev. Rel. — 2002. — 5. — 7. — DOI: [10.12942/lrr-2002-7](https://doi.org/10.12942/lrr-2002-7).
35. Belyaeva Yu. O., Gebhard B., Skubachevskii A. L. A general way to confined stationary Vlasov–Poisson plasma configurations // Kinet. Relat. Mod. — 2021. — 14, № 2. — С. 257–282. — DOI: [10.3934/krm.2021004](https://doi.org/10.3934/krm.2021004).
36. Capozziello S., Gurzadyan V. G. Focus point on tensions in cosmology from early to late universe: the value of the Hubble constant and the question of dark energy // Eur. Phys. J. Plus. — 2023. — 138. — 184. — DOI: [10.1140/epjp/s13360-023-03763-2](https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-023-03763-2).
37. Cercignani C., Kremer G. M. The relativistic Boltzmann equation: theory and applications. — Berlin: Birkhäuser, 2002.

38. *Choquet-Bruhat Y.* Introduction to general relativity, black holes and cosmology. — New York: Oxford Univ. Press, 2015.
39. *Courant R., Hilbert D.* Methods of mathematical physics. Vol. II: Partial differential equations. — New York–London: Interscience Publ., 1962.
40. *Einstein A.* Bemerkung zu der Arbeit von A. Friedman «Über die Krümmung des Raumes»// Z. Physik. — 1922. — 11. — С. 326–326. — DOI: [10.1007/BF01328424](https://doi.org/10.1007/BF01328424).
41. *Fock V. A.* The theory of space, time and gravitation. — Oxford: Pergamon Press, 1964.
42. *Friedmann A. A.* Über die Krümmung des Raumes// Z. Physik. — 1922. — 11. — С. 377–386.
43. *Ginzburg V. L.* What problems of physics and astrophysics seem now to be especially important and interesting (thirty years later, already on the verge of XXI century)?// Phys. Usp. — 1999. — 42. — С. 353–373. — DOI: [10.1070/PU1999v042n04ABEH000562](https://doi.org/10.1070/PU1999v042n04ABEH000562).
44. *Kessler T., Rjasanow S.* Limit model for the Vlasov–Maxwell system with strong magnetic fields via gyroaveraging// Алгебра и анализ. — 2020. — 32, № 4. — С. 200–216.
45. *Kessler T., Rjasanow S.* Limit model for the Vlasov–Maxwell system with strong magnetic fields via gyroaveraging// St. Petersburg Math. J. — 2021. — 32, № 4. — С. 753–765. — DOI: [10.1090/spmj/1668](https://doi.org/10.1090/spmj/1668).
46. *Kozlov V. V.* The generalized Vlasov kinetic equation// Russ. Math. Surv. — 2008. — 63, № 4. — С. 691–726. — DOI: [10.1070/RM2008v063n04ABEH004549](https://doi.org/10.1070/RM2008v063n04ABEH004549).
47. *Landau L. D., Lifshitz E. M.* The classical theory of fields. — Oxford: Pergamon Press, 1983.
48. *Madelung E.* Quantentheorie in hydrodynamischer form (Quantum theory in hydrodynamic form)// Z. Physik. — 1926. — 40. — С. 322–326.
49. *McCrea W. H., Milne E. A.* Newtonian universes and the curvature of space// Quart. J. Math. — 1934. — os-5, № 1. — С. 73–80. — DOI: [10.1093/qmath/os-5.1.73](https://doi.org/10.1093/qmath/os-5.1.73).
50. *Okabe T., Morrison P. J., Friedrichsen J. E. III, Shepley L. C.* Hamiltonian dynamics of spatially-homogeneous Vlasov–Einstein systems// Phys. Rev. D. — 2011. — 84. — 024011. — DOI: [10.1103/PhysRevD.84.024011](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.84.024011).
51. *Orlov Yu. N., Pavlotsky I. P.* BBGKY-hierarchies and Vlasov’s equations in postgalilean approximation// Phys. A. Stat. Mech. Appl. — 1988. — 151, № 2. — С. 318–340. — DOI: [10.1016/0378-4371\(88\)90019-2](https://doi.org/10.1016/0378-4371(88)90019-2).
52. *Perlmutter S. u dp.* Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae// Astrophys. J. — 1999. — 517. — С. 565–586. — DOI: [10.1086/307221](https://doi.org/10.1086/307221).
53. *Rein G.* Stability and instability results for equilibria of a (relativistic) self-gravitating collisionless gas — a review// Class. Quantum Grav. — 2023. — 40, № 19. — 193001. — DOI: [10.1088/1361-6382/acf436](https://doi.org/10.1088/1361-6382/acf436).
54. *Riess A. G. u dp.* Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant// Astron. J. — 1998. — 116. — 1009. — DOI: [10.1086/300499](https://doi.org/10.1086/300499).
55. *Skubachevskii A. L.* Vlasov–Poisson equations for a two-component plasma in a homogeneous magnetic field// Russ. Math. Surv. — 2014. — 69, № 2. — С. 291–330. — DOI: [10.1070/RM2014v069n02ABEH004889](https://doi.org/10.1070/RM2014v069n02ABEH004889).
56. *Vedenyapin V. V.* Mathematical theory of the expanding universe based on the principle of least action// Comput. Math. Math. Phys. — 2024. — 64, № 11. — С. 2624–2642. — DOI: [10.1134/S0965542524701471](https://doi.org/10.1134/S0965542524701471).
57. *Vedenyapin V. V., Bay A. A.* Least action principle for gravity and electrodynamics, the Lambda-term and the analog of Milne–McCrea solution for Lorentzian metric// Eur. Phys. J. Plus. — 2024. — 139. — 111. — DOI: [10.1140/epjp/s13360-024-04885-x](https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-024-04885-x).
58. *Vedenyapin V. V., Bay A. A., Parenkina V. I., Petrov A. G.* Minimal action principle for gravity and electrodynamics, Einstein lambda, and Lagrange points// Markov Proc. Relat. Fields. — 2023. — 29. — С. 515–532. — DOI: [10.61102/1024-2953-mpf.2023.29.4.005](https://doi.org/10.61102/1024-2953-mpf.2023.29.4.005).
59. *Vedenyapin V., Fimin N., Chechetkin V.* The properties of Vlasov–Maxwell–Einstein equations and its applications to cosmological models// Eur. Phys. J. Plus. — 2020. — 135, № 5. — 400. — DOI: [10.1140/epjp/s13360-020-00412-w](https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-020-00412-w).
60. *Vedenyapin V. V., Fimin N. N., Chechetkin V. M.* Properties of the Vlasov–Maxwell–Einstein equations and their application to the problems of general relativity// Gravit. Cosmol. — 2020. — 26, № 2. — С. 173–183. — DOI: [10.1134/S0202289320020115](https://doi.org/10.1134/S0202289320020115).
61. *Vedenyapin V. V., Fimin N. N., Chechetkin V. M.* The generalized Friedmann model as a self-similar solution of Vlasov–Poisson equation system// Eur. Phys. J. Plus. — 2021. — 136. — 670. — DOI: [10.1140/epjp/s13360-021-01659-7](https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-01659-7).
62. *Vedenyapin V. V., Fimin N. N., Chechetkin V. M.* Cosmological aspects of hydrodynamic treatment of the Einstein–Vlasov equations// Eur. Phys. J. Plus. — 2022. — 137, № 9. — 1022. — DOI: [10.1140/epjp/s13360-022-03257-7](https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-022-03257-7).
63. *Vedenyapin V. V., Fimin N. N., Chechetkin V. M.* Hydrodynamic consequences of Vlasov–Maxwell–Einstein equations and their cosmological applications// Gravit. Cosmol. — 2023. — 29, № 1. — С. 1–9. — DOI: [10.1134/S0202289323010115](https://doi.org/10.1134/S0202289323010115).

64. *Vedenyapin V. V., Negmatov M. A.* On derivation and classification of Vlasov type equations and equations of magnetohydrodynamics. The Lagrange identity, the Godunov form, and critical mass// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2014. — 202, № 5. — С. 769–782. — DOI: [10.1007/s10958-014-2075-9](https://doi.org/10.1007/s10958-014-2075-9).
65. *Weinberg S.* Gravitation and cosmology. — New York: Wiley, 1972.

В. В. Веденяпин

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

E-mail: vicveden@yahoo.com, РИНЦ SPIN-код: 5002-2872, РИНЦ AuthorID: [137846](#), ResearcherID: [H-2128-2016](#), Scopus: [6603544194](#)

Я. Г. Батищева

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

E-mail: jbat@kiam.ru, РИНЦ SPIN-код: 2666-6763, РИНЦ AuthorID: [112950](#)

М. В. Горюнова

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

E-mail: margoryunova2112@gmail.com, РИНЦ SPIN-код: 1235-9978, РИНЦ AuthorID: [655159](#)

А. А. Руссков

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия

E-mail: russkov@inbox.ru, РИНЦ SPIN-код: 1069-6323, РИНЦ AuthorID: [177619](#), ORCID: [0000-0002-2950-2165](#)

DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-562-584](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-562-584)

EDN: [MAUNPV](#)

UDC 517.958

Research article

A mathematical theory of the accelerated expansion of the Universe based on the principle of least action

V. V. Vedenyapin, Ya. G. Batishcheva, M. V. Goryunova, and A. A. Russkov

Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. In classical works, the equations for gravitational and electromagnetism fields are proposed without deriving the right-hand sides. Here, we derive the right-hand sides and analyze the energy–momentum tensor within the framework of the Vlasov–Maxwell–Einstein equations and consider cosmological models such as Milne–McCrea and Friedmann. This allows us to place General Relativity (GR) on a rigorous mathematical foundation: to derive a closed system of GR equations from the principle of least action and provide a rigorous definition of cosmological solutions. This explains the accelerated expansion of the Universe without Einstein’s λ , dark energy, or fantastic new fields, but as a simple relativistic effect.

Keywords: general theory of relativity, Vlasov equation, Vlasov–Einstein equation, Vlasov–Maxwell equation, Vlasov–Poisson equation, accelerated expansion of the Universe, Hubble constant.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. This work was supported by ongoing institutional funding. No additional grants to carry out or direct this particular research were obtained. We would like to thank MIPT students A. A. Rebrova and A. O. Gladkov, Bauman Moscow State Technical University students V. M. Aushev and N. I. Izmailova for their help in working with the Goursat system [6], and MIPT student A. A. Bay for their help in working with relativistic equations [7, 57, 58].



For citation: V. V. Vedenyapin, Ya. G. Batishcheva, M. V. Goryunova, A. A. Russkov, “A mathematical theory of the accelerated expansion of the Universe based on the principle of least action,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2025, Vol. **71**, No. 4, 562–584, DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-562-584](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-562-584).

REFERENCES

1. Yu. O. Belyaeva, “Statsionarnye resheniya uravneniy Vlasova dlya vysokotemperaturnoy dvukomponentnoy plazmy” [Stationary solutions of Vlasov equations for high-temperature three-component plasma], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **62**, 19–31 (in Russian).
2. S. Weinberg, *Gravitatsiya i Kosmologiya* [Gravitation and cosmology], Platon, Moscow, 2000 (Russian translation).
3. V. V. Vedenyapin, “O vyvode uravneniy elektrodinamiki i gravitatsii iz printsipa naimen'shego deystviya, metode Gamil'tona—Yakobi i kosmologicheskikh resheniyakh” [On derivation of equations of electrodynamics and gravitation from the principle of least action, the Hamilton–Jacobi method, and cosmological solutions], *Dokl. RAN. Ser. Mat. Inf. Prots. Upr.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math. Inf. Control Proc.], 2022, **504**, 51–55, DOI: [10.31857/S2686954322330013](https://doi.org/10.31857/S2686954322330013) (in Russian).
4. V. V. Vedenyapin, “Matematicheskaya teoriya rasshireniya Vselennoy na osnove printsipa naimen'shego deystviya” [Mathematical theory of the expanding Universe based on the principle of least action], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2024, **64**, No. 11, 2110–2127, DOI: [10.31857/S0044466924110076](https://doi.org/10.31857/S0044466924110076) (in Russian).
5. V. V. Vedenyapin, “Matematika uskorenogo rasshireniya Vselennoy i prostranstvo Lobachevskogo” [Mathematics of accelerated expansion of the Universe and Lobachevsky space], *Dokl. RAN. Ser. Mat. Inf. Prots. Upr.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math. Inf. Control Proc.], 2025, **522**, 11–18, DOI: [10.31857/S2686954325020038](https://doi.org/10.31857/S2686954325020038) (in Russian).
6. V. V. Vedenyapin, V. M. Aushev, A. O. Gladkov, Yu. A. Izmaylova, and A. A. Rebrova, “Matematicheskaya teoriya uskorenogo rasshireniya Vselennoy na osnove printsipa naimen'shego deystviya i modeli Fridmana i Milna—Makkri” [Mathematical theory of the accelerated expansion of the Universe based on the principle of least action and the Friedman and Milne–McCrea model], *Preprinty IPM im. M. V. Keldysha* [Preprints Keldysh Inst. Appl. Math.], 2024, No. 3, DOI: [10.20948/prepr-2024-3](https://doi.org/10.20948/prepr-2024-3) (in Russian).
7. V. V. Vedenyapin, A. A. Bay, and A. G. Petrov, “O vyvode uravneniy gravitatsii iz printsipa naimen'shego deystviya, relyativistskikh resheniyakh Milna—Makkri i o tochkakh Lagranzha” [On derivation of equations of gravitation from the principle of least action, relativistic Milne–McCrea solutions and Lagrange points], *Dokl. RAN. Ser. Mat. Inf. Prots. Upr.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math. Inf. Control Proc.], 2023, **514**, No. 1, 69–73, DOI: [10.31857/S2686954323600532](https://doi.org/10.31857/S2686954323600532) (in Russian).
8. V. V. Vedenyapin, Ya. G. Batishcheva, Yu. A. Safronov, and D. I. Bogdanov, “Rasshirenie Vselennoy v sluchae obobshchennoy metriki Fridmana—Lemetra—Robertsona—Uokera” [Expansion of the Universe in the case of the generalized Friedmann–Lemaître–Robertson–Walker metric], *Preprinty IPM im. M. V. Keldysha* [Preprints Keldysh Inst. Appl. Math.], 2025, **14** (in Russian).
9. V. V. Vedenyapin, M. Yu. Voronina, and A. A. Russkov, “O vyvode uravneniy elektrodinamiki i gravitatsii iz printsipa naimen'shego deystviya” [Derivation of the equations of electrodynamics and gravitation from the principle of least action], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2020, **495**, 9–139, DOI: [10.31857/S268674002006019X](https://doi.org/10.31857/S268674002006019X) (in Russian).
10. V. V. Vedenyapin and M. A. Negmatov, “O topologii statsionarnykh resheniy gidrodinamicheskikh i vikhrevykh sledstviy uravneniya Vlasova i metod Gamil'tona—Yakobi” [On the topology of stationary solutions of hydrodynamic and vortex consequences of the Vlasov equation and the Hamilton–Jacobi method], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2013, **449**, No. 5, 521–526, DOI: [10.7868/S086956521311008X](https://doi.org/10.7868/S086956521311008X) (in Russian).
11. V. V. Vedenyapin and M. A. Negmatov, “O vyvode i klassifikatsii uravneniy tipa Vlasova i magnitnoy gidrodinamiki. Tozhdestvo Lagranzha, forma Godunova i kriticheskaya massa” [On the derivation and classification of Vlasov-type equations and magnetohydrodynamics. Lagrange's identity, Godunov's form, and critical mass], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2013, **47**, 5–17 (in Russian).
12. V. V. Vedenyapin, V. I. Parenkina, and S. R. Svirshchevskii, “O vyvode uravneniy elektrodinamiki i gravitatsii iz printsipa naimen'shego deystviya” [Derivation of the equations of electrodynamics and gravity from the principle of least action], *Zhurn. Vych. Mat. i Mat. Fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2022, **62**, No. 6, 1016–1029, DOI: [10.31857/S0044466922060163](https://doi.org/10.31857/S0044466922060163) (in Russian).

13. V. V. Vedenyapin and N. N. Fimin, “Metod Gamil’tona—Yakobi v negamil’tonovoy situatsii i gidrodinamicheskaya podstanovka” [The Hamilton–Jacobi method in the non-Hamiltonian situation and the hydrodynamic substitution], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2015, **461**, No. 2, 136–139, DOI: [10.7868/S0869565215080083](https://doi.org/10.7868/S0869565215080083) (in Russian).
14. V. V. Vedenyapin, N. N. Fimin, and V. M. Chechetkin, “Uravneniya tipa Vlasova—Maksvela—Eynshteyna i ikh sledstviya. Prilozheniya k astrofizicheskim zadacham” [Vlasov–Maxwell–Einstein-type equations and their consequences. Applications to astrophysical problems], *Teor. Mat. Fiz.* [Theor. Math. Phys.], 2024, **218**, No. 2, 258–279, DOI: [10.4213/tmf10551](https://doi.org/10.4213/tmf10551) (in Russian).
15. V. S. Vladimirov and V. V. Zharinov, *Uravneniya Matematicheskoy Fiziki: Uchebnik dlya Vuzov* [Equations of Mathematical Physics: Textbook for Universities], Fizmatlit, Moscow, 2004 (in Russian).
16. A. A. Vlasov, *Statisticheskie Funktsii Raspredeleniya* [Statistical Distribution Functions], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
17. V. L. Ginzburg, “Kakie problemy fiziki i astrofiziki predstavlyayutsya seychas osobenno vazhnymi i interesnymi (tridsat’ let spustya, prichem uzhe na poroge KhKhI veka)?” [What problems of physics and astrophysics seem now to be especially important and interesting (thirty years later, already on the verge of XXI century)?], *Usp. Fiz. Nauk* [Progr. Phys. Sci.], 1999, **169**, 419–441, DOI: [10.3367/UFNr.0169.199904d.0419](https://doi.org/10.3367/UFNr.0169.199904d.0419) (in Russian).
18. B. A. Dubrovin, S. P. Novikov, and A. T. Fomenko, *Sovremennaya Geometriya. Metody i Prilozheniya* [Contemporary Geometry: Methods and Applications], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
19. V. V. Kozlov, “Gidrodinamika Gamil’tonovykh Sistem” [Hydrodynamics of Hamiltonian systems], *Vestn. Mosk. Un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 1983, No. 6, 10–22 (in Russian).
20. V. V. Kozlov, *Obshchaya Teoriya Vikhrey* [General Theory of Vortices], Izd-vo Udmurtskogo un-ta, Izhevsk, 1998 (in Russian).
21. V. V. Kozlov, “Obobshchennoe kineticheskoe uravnenie Vlasova” [The generalized Vlasov kinetic equation], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 2008, **63**, No. 4, 93–130, DOI: [10.4213/rm9216](https://doi.org/10.4213/rm9216) (in Russian).
22. L. D. Landau and E. M. Lifshits, *Teoriya Polya* [Field Theory], Nauka, Moscow, 1988 (in Russian).
23. V. P. Maslov, *Kompleksnyye Markovskie Tsepi i Integral Feynmana* [Complex Markov Chains and the Feynman Integral], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
24. N. A. Sidorov and A. V. Sinitsyn, “Issledovanie toчек bifurkatsii i netrivial’nykh vetvey resheniy statsionarnoy sistemy Vlasova—Maksvela” [Study of bifurcation points and nontrivial branches of solutions of the stationary Vlasov–Maxwell system], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 1997, **62**, No. 2, 268–292 (in Russian).
25. A. L. Skubachevskii, “Uravneniya Vlasova—Puassona dlya dvukomponentnoy plazmy v odnorodnom magnitnom pole” [Vlasov–Poisson equations for a two-component plasma in a homogeneous magnetic field], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 2014, **69**, No. 2, 107–148, DOI: [10.4213/rm9579](https://doi.org/10.4213/rm9579) (in Russian).
26. S. A. Stepin and A. G. Tarasov, “Dispersionnoe sootnoshenie v kineticheskoy modeli besstolknovitel’noy plazmy” [Dispersion relation in the kinetic model of collisionless plasma], *Teor. Mat. Fiz.* [Theor. Math. Phys.], 2022, **210**, No. 3, 442–454, DOI: [10.4213/tmf10175](https://doi.org/10.4213/tmf10175) (in Russian).
27. S. Sh. Suleymanova and A. A. Yushmanov, “Elektricheskoe pole vblizi poverkhnosti plazmy s proizvol’noy stepen’yu vyrozhdeniya kak otklik na vneshnee peremennoe elektricheskoe pole” [Electric field near the surface of a plasma with an arbitrary degree of degeneracy as a response to an external alternating electric field], *Teor. Mat. Fiz.* [Theor. Math. Phys.], 2020, **204**, No. 1, 76–94, DOI: [10.4213/tmf9827](https://doi.org/10.4213/tmf9827) (in Russian).
28. V. A. Fok, *Teoriya Prostranstva, Vremeni i Tyagoteniya* [Theory of Space, Time and Gravity], LKI, Moscow, 2007 (in Russian).
29. A. A. Friedmann, “O krivizne prostranstva” [On the curvature of space], *Zhurn. Russk. Fiz.-Khim. O-va* [J. Russ. Phys.-Chem. Soc.], 1924, **56**, No. 1, 59 (in Russian).
30. A. A. Friedmann, “O krivizne prostranstva” [On the curvature of space], *Usp. Fiz. Nauk* [Progr. Phys. Sci.], 1963, **80**, No. 3, 439–446 (in Russian).
31. A. D. Chernin, “Temnaya energiya i vseмирnoe antityagotenie” [Dark energy and universal antigravitation], *Usp. Fiz. Nauk* [Progr. Phys. Sci.], 2008, **178**, No. 3, 267–300, DOI: [10.3367/UFNr.0178.200803c.0267](https://doi.org/10.3367/UFNr.0178.200803c.0267) (in Russian).
32. A. Einstein, “Zamechanie k rabote A. Fridmana «O krivizne prostranstva»” [Note on A. Friedmann’s work «On the curvature of space»], *Usp. Fiz. Nauk* [Progr. Phys. Sci.], 1963, **80**, No. 3, 453–453, DOI: [10.3367/UFNr.0080.196307g.0453](https://doi.org/10.3367/UFNr.0080.196307g.0453) (in Russian).
33. L. Andersson and M. Korzyński, “Variational principle for the Einstein–Vlasov equations,” *ArXiv*, 2019. — 1910.12152.
34. H. Andréasson, “The Einstein–Vlasov System/Kinetic Theory,” *Living Rev. Rel.*, 2002, **5**, 7, DOI: [10.12942/lrr-2002-7](https://doi.org/10.12942/lrr-2002-7).

35. Yu. O. Belyaeva, B. Gebhard, and A. L. Skubachevskii, “A general way to confined stationary Vlasov–Poisson plasma configurations,” *Kinet. Relat. Mod.*, 2021, **14**, No. 2, 257–282, DOI: [10.3934/krm.2021004](https://doi.org/10.3934/krm.2021004).
36. S. Capozziello and V. G. Gurzadyan, “Focus point on tensions in cosmology from early to late universe: the value of the Hubble constant and the question of dark energy,” *Eur. Phys. J. Plus*, 2023, **138**, 184, DOI: [10.1140/epjp/s13360-023-03763-2](https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-023-03763-2).
37. C. Cercigniani and G. M. Kremer, *The relativistic Boltzmann equation: theory and applications*, Birkhäuser, Berlin, 2002.
38. Y. Choquet-Bruhat, *Introduction to general relativity, black holes and cosmology*, Oxford Univ. Press, New York, 2015.
39. R. Courant, D. Hilbert, *Methods of mathematical physics. Vol. II: Partial differential equations*, Interscience Publ., New York–London, 1962.
40. A. Einstein, “Bemerkung zu der Arbeit von A. Friedman «Über die Krümmung des Raumes»,” *Z. Physik*, 1922, **11**, 326–326, DOI: [10.1007/BF01328424](https://doi.org/10.1007/BF01328424).
41. V. A. Fock, *The theory of space, time and gravitation*, Pergamon Press, Oxford, 1964.
42. A. A. Friedmann, “Über die Krümmung des Raumes,” *Z. Physik*, 1922, **11**, 377–386.
43. V. L. Ginzburg, “What problems of physics and astrophysics seem now to be especially important and interesting (thirty years later, already on the verge of XXI century)?,” *Phys. Usp.*, 1999, **42**, 353–373, DOI: [10.1070/PU1999v042n04ABEH000562](https://doi.org/10.1070/PU1999v042n04ABEH000562).
44. T. Kessler and S. Rjasanow, “Limit model for the Vlasov–Maxwell system with strong magnetic fields via gyroaveraging,” *Algebra i Analiz [Algebra Anal.]*, 2020, **32**, No. 4, 200–216.
45. T. Kessler and S. Rjasanow, “Limit model for the Vlasov–Maxwell system with strong magnetic fields via gyroaveraging,” *St. Petersburg Math. J.*, 2021, **32**, No. 4, 753–765, DOI: [10.1090/spmj/1668](https://doi.org/10.1090/spmj/1668).
46. V. V. Kozlov, “The generalized Vlasov kinetic equation,” *Russ. Math. Surv.*, 2008, **63**, No. 4, 691–726, DOI: [10.1070/RM2008v063n04ABEH004549](https://doi.org/10.1070/RM2008v063n04ABEH004549).
47. L. D. Landau and E. M. Lifshitz, *The classical theory of fields*, Pergamon Press, Oxford, 1983.
48. E. Madelung, “Quantentheorie in hydrodynamischer form (Quantum theory in hydrodynamic form),” *Z. Physik*, 1926, **40**, 322–326.
49. W. H. McCrea and E. A. Milne, “Newtonian universes and the curvature of space,” *Quart. J. Math.*, 1934, **os-5**, No. 1, 73–80, DOI: [10.1093/qmath/os-5.1.73](https://doi.org/10.1093/qmath/os-5.1.73).
50. T. Okabe, P. J. Morrison, J. E. Friedrichsen III, and L. C. Shepley, “Hamiltonian dynamics of spatially-homogeneous Vlasov–Einstein systems,” *Phys. Rev. D*, 2011, **84**, 024011, DOI: [10.1103/PhysRevD.84.024011](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.84.024011).
51. Yu. N. Orlov and I. P. Pavlotsky, “BBGKY-hierarchies and Vlasov’s equations in postgalilean approximation,” *Phys. A. Stat. Mech. Appl.*, 1988, **151**, No. 2, 318–340, DOI: [10.1016/0378-4371\(88\)90019-2](https://doi.org/10.1016/0378-4371(88)90019-2).
52. S. Perlmutter et al., “Measurements of Ω and Λ from 42 High-Redshift Supernovae,” *Astrophys. J.*, 1999, **517**, 565–586, DOI: [10.1086/307221](https://doi.org/10.1086/307221).
53. G. Rein, “Stability and instability results for equilibria of a (relativistic) self-gravitating collisionless gas — a review,” *Class. Quantum Grav.*, 2023, **40**, No. 19, 193001, DOI: [10.1088/1361-6382/acf436](https://doi.org/10.1088/1361-6382/acf436).
54. A. G. Riess et al., “Observational evidence from supernovae for an accelerating universe and a cosmological constant,” *Astron. J.*, 1998, **116**, 1009, DOI: [10.1086/300499](https://doi.org/10.1086/300499).
55. A. L. Skubachevskii, “Vlasov–Poisson equations for a two-component plasma in a homogeneous magnetic field,” *Russ. Math. Surv.*, 2014, **69**, No. 2, 291–330, DOI: [10.1070/RM2014v069n02ABEH004889](https://doi.org/10.1070/RM2014v069n02ABEH004889).
56. V. V. Vedenyapin, “Mathematical theory of the expanding universe based on the principle of least action,” *Comput. Math. Math. Phys.*, 2024, **64**, No. 11, 2624–2642, DOI: [10.1134/S0965542524701471](https://doi.org/10.1134/S0965542524701471).
57. V. V. Vedenyapin and A. A. Bay, “Least action principle for gravity and electrodynamics, the Lambda-term and the analog of Milne–McCrea solution for Lorentzian metric,” *Eur. Phys. J. Plus*, 2024, **139**, 111, DOI: [10.1140/epjp/s13360-024-04885-x](https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-024-04885-x).
58. V. V. Vedenyapin, A. A. Bay, V. I. Parenkina, and A. G. Petrov, “Minimal action principle for gravity and electrodynamics, Einstein lambda, and Lagrange points,” *Markov Proc. Relat. Fields*, 2023, **29**, 515–532, DOI: [10.61102/1024-2953-mpmf.2023.29.4.005](https://doi.org/10.61102/1024-2953-mpmf.2023.29.4.005).
59. V. Vedenyapin, N. Fimin, and V. Chechetkin, “The properties of Vlasov–Maxwell–Einstein equations and its applications to cosmological models,” *Eur. Phys. J. Plus*, 2020, **135**, No. 5, 400, DOI: [10.1140/epjp/s13360-020-00412-w](https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-020-00412-w).
60. V. V. Vedenyapin, N. N. Fimin, and V. M. Chechetkin, “Properties of the Vlasov–Maxwell–Einstein equations and their application to the problems of general relativity,” *Gravit. Cosmol.*, 2020, **26**, No. 2, 173–183, DOI: [10.1134/S0202289320020115](https://doi.org/10.1134/S0202289320020115).

61. V. V. Vedenyapin, N. N. Fimin, and V. M. Chechetkin, “The generalized Friedmann model as a self-similar solution of Vlasov–Poisson equation system,” *Eur. Phys. J. Plus*, 2021, **136**, 670, DOI: [10.1140/epjp/s13360-021-01659-7](https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-021-01659-7).
62. V. V. Vedenyapin, N. N. Fimin, and V. M. Chechetkin, “Cosmological aspects of hydrodynamic treatment of the Einstein–Vlasov equations,” *Eur. Phys. J. Plus*, 2022, **137**, No. 9, 1022, DOI: [10.1140/epjp/s13360-022-03257-7](https://doi.org/10.1140/epjp/s13360-022-03257-7).
63. V. V. Vedenyapin, N. N. Fimin, and V. M. Chechetkin, “Hydrodynamic consequences of Vlasov–Maxwell–Einstein equations and their cosmological applications,” *Gravit. Cosmol.*, 2023, **29**, No. 1, 1–9, DOI: [10.1134/S0202289323010115](https://doi.org/10.1134/S0202289323010115).
64. V. V. Vedenyapin and M. A. Negmatov, “On derivation and classification of Vlasov type equations and equations of magnetohydrodynamics. The Lagrange identity, the Godunov form, and critical mass,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2014, **202**, No. 5, 769–782, DOI: [10.1007/s10958-014-2075-9](https://doi.org/10.1007/s10958-014-2075-9).
65. S. Weinberg, *Gravitation and cosmology*, Wiley, New York, 1972.

V. V. Vedenyapin

Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

E-mail: vicveden@yahoo.com, eLIBRARY SPIN-code: 5002-2872, eLIBRARY AuthorID: [137846](#),

ResearcherID: [H-2128-2016](#), Scopus: [6603544194](#)

Ya. G. Batishcheva

Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

E-mail: jbat@kiam.ru, eLIBRARY SPIN-code: 2666-6763, eLIBRARY AuthorID: [112950](#)

M. V. Goryunova

Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

E-mail: margoryunova2112@gmail.com, eLIBRARY SPIN-code: 1235-9978, engPIHII AuthorID: [655159](#)

A. A. Russkov

Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

E-mail: russkov@inbox.ru, eLIBRARY SPIN-code: 1069-6323, eLIBRARY AuthorID: [177619](#),
ORCID: [0000-0002-2950-2165](#)

ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ФУНКЦИЙ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ МОДЕЛИРОВАНИЯ ТЕРАПИИ ВИЧ-ИНФЕКЦИИ

Д. С. ГРЕБЕННИКОВ^{1,2,3}, А. И. ЛЫФЕНКО⁴, А. М. ТИМОХИН³, Р. С. САВИНКОВ^{1,2,3},
Г. А. БОЧАРОВ^{1,2,3}

¹Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН, Москва, Россия

²Отделение Московского центра фундаментальной и прикладной математики в ИВМ РАН, Москва,
Россия

³Первый Московский государственный медицинский университет им. И. М. Сеченова, Москва, Россия

⁴Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Аннотация. Математическое моделирование активно используется для исследования механизмов развития инфекции вирусами иммунодефицита человека первого типа (ВИЧ-1). Современная терапия ВИЧ-1 инфекции состоит в регулярном использовании на протяжении всей жизни нескольких противовирусных препаратов, однако её применение сопряжено с побочными эффектами разной степени выраженности вследствие токсичности, взаимодействия препаратов, формирования резистентности, а также высокой стоимости. Математические модели ВИЧ-1 инфекции и методы оптимального управления могут быть использованы для построения эффективных режимов применения нескольких антиретровирусных препаратов с учетом иммунного статуса пациентов, инфицированных ВИЧ-1. В данной работе выполнена идентификация параметров фармакодинамики препаратов на основе построенной нами ранее стохастической модели процессов, определяющих размножение вирусов в зараженной клетке, и изучена с помощью модели системной динамики ВИЧ-1 инфекции эффективность стандартной терапии для различных режимов течения ВИЧ-1 инфекции. Результаты исследования указывают на необходимость учета различий в отклике организма на терапию по критерию эффективности, что актуализирует задачу подбора индивидуальных схем терапии с помощью методов оптимального управления на основе физиологически обоснованных моделей ВИЧ-1 инфекции.

Ключевые слова: математическое моделирование, ВИЧ, идентификация параметров, фармакодинамика, стохастическая модель, оптимальное управление.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Данная работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 23-11-00116, «Моделирование внутриклеточной репликации ВИЧ и стандартной терапии» — секции 2, 3, 5) и частично поддержана Отделением Московского центра фундаментальной и прикладной математики в ИВМ РАН (соглашение с Минобрнауки России № 075-15-2025-347, «Идентификация параметров фармакодинамики антиретровирусных препаратов» — секция 4).

Для цитирования: Д. С. Гребенников, А. И. Лыфенко, А. М. Тимохин, Р. С. Савинков, Г. А. Бочаров. Параметризация функций управления в задаче моделирования терапии ВИЧ-инфекции // Современная математика. Фундаментальные направления. 2025. Т. 71, № 4. С. 585–603, DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-585-603](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-585-603).

1. ВВЕДЕНИЕ

Математические модели и методы активно используются для исследования механизмов развития инфекции вирусами иммунодефицита человека первого типа (ВИЧ-1) [5, 16]. Современная терапия ВИЧ-1 инфекции состоит в регулярном использовании на протяжении всей жизни нескольких противовирусных препаратов. Это позволяет снизить вирусную нагрузку, частично восстановить иммунный статус (уровень $CD4^+$ Т-лимфоцитов). Препараты, специфически действующие на стадии размножения ВИЧ-1, называются антиретровирусными, а терапия на их основе — антиретровирусной. Под стандартной терапией понимается стандарт лечения ВИЧ-инфекции на основе комбинации не менее трех действующих веществ, минимум два из которых отличаются своим механизмом. Соответствующая терапия называется антиретровирусной (АРТ). Однако применение АРТ сопряжено с побочными эффектами разной степени выраженности вследствие токсичности, взаимодействия препаратов, формирования резистентности, а также высокой стоимости [10]. Эти факторы определяют сложность задачи разработки универсальных схем терапии, особенно в рамках режима временно (структурно или аналитически) прерываемой терапии [8].

Математические модели ВИЧ-1 инфекции и методы оптимального управления могут быть использованы для построения эффективных режимов применения нескольких антиретровирусных препаратов с учетом иммунного статуса ВИЧ-1 инфицированных пациентов [4, 12]. Для решения соответствующих задач в основном применяются классические методы на основе принципа максимума Понтрягина [2], а также подходы к управлению ВИЧ-процессом формализуемым в виде антагонистической дифференциальной игры двух лиц (теория управления Красовского) [1, 6].

Общей особенностью постановок соответствующих задач является рассмотрение управляющих функций без прямой связи с фармакокинетикой антивирусных препаратов. Важный шаг в развитии фармакокинетически обоснованного определения функций управления является работа [7], в которой предложены параметризации функций управления через концентрации антивирусных препаратов. Исследование задачи стабилизации вирусной нагрузки для ВИЧ-1 инфекции с учетом фармакокинетики препаратов было выполнено в работе [15]. Однако фармакодинамика, т. е. внутриклеточное действие препаратов, лишь феноменологически связана с процессами влияния на жизненный цикл ВИЧ-1. Целью нашей работы является:

- идентификация по экспериментальным данным параметров фармакодинамики препаратов на основе построенной нами ранее модели процессов, определяющих размножение вирусов в зараженной клетке;
- исследование с помощью уточненной модели эффективности стандартной терапии в случае различных по кинетике режимов течения ВИЧ-1 инфекции.

В следующем разделе 2 нами описана постановка задачи управления ВИЧ-1 инфекцией для данной модели. В разделе 3 рассмотрена модель размножения ВИЧ-1 в клетке, на основе которой в разделе 4 проводится идентификация параметров фармакодинамики для трех антивирусных препаратов. В разделе 5 проведено исследование эффективности стандартной терапии для различных вариантов динамики ВИЧ-1 инфекции.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ УПРАВЛЕНИЯ В ЗАДАЧЕ АНТИРЕТРОВИРУСНОЙ ТЕРАПИИ ВИЧ-ИНФЕКЦИИ

Модель ВИЧ-инфекции, рассматривая в данной работе, описывает популяционную динамику вирусов (дикого типа и мутантов) и клеточных компонент иммунной системы (макрофагов и $CD4^+$ Т-клеток, незараженных и зараженных, а также $CD8^+$ Т-клеток эффекторов, уничтожающих зараженные клетки). Вектор-функция переменных модели \mathbf{Y} описывает концентрацию вирусов дикого типа V_1 , мутировавших вирусов V_2 , резистентных к противовирусным препаратам, неинфицированных $CD4^+$ Т-лимфоцитов T , продуктивно инфицированных $CD4^+$ Т-лимфоцитов вирусами дикого типа T_1 , латентно-инфицированных $CD4^+$ Т-лимфоцитов вирусами дикого типа

$a_{1,1}$	$-k_{10}Y_3 - (k_{11} + k_{12})Y_8 - \delta_7$	$a_{1,4}$	$(1 - \mu)k_8$
$a_{1,6}$	$\mu\varphi k_8$	$a_{1,9}$	$(1 - \mu)k_9$
$a_{1,10}$	$\mu\varphi k_9$	$a_{2,2}$	$-k_{10}Y_3 - (k_{11} + k_{12})Y_8 - \delta_7$
$a_{2,4}$	μk_8	$a_{2,6}$	$(1 - \mu)\varphi k_8$
$a_{2,9}$	μk_9	$a_{2,10}$	$(1 - \mu)\varphi k_9$
$a_{3,3}$	$\frac{p_1(Y_1 + Y_2)}{Y_1 + Y_2 + S_1} - k_1(Y_1 + \varphi Y_2) - k_2(Y_9 + \varphi Y_{10}) + r\left(1 - \frac{Y_3 + Y_4 + Y_5 + Y_6 + Y_7}{T_{max}}\right) - \delta_1$		
$a_{4,3}$	$\psi(k_1Y_1 + k_2Y_9)$	$a_{4,4}$	$-\delta_2 - k_3Y_{11}$
$a_{4,5}$	α_1	$a_{5,3}$	$(1 - \psi)(k_1Y_1 + k_2Y_9)$
$a_{5,5}$	$-\alpha_1 - \delta_3$	$a_{6,3}$	$\varphi\psi(k_1Y_2 + k_2Y_{10})$
$a_{6,6}$	$-\delta_2 - k_3Y_{11}$	$a_{6,7}$	α_1
$a_{7,3}$	$(1 - \psi)\varphi(k_1Y_1 + k_2Y_{10})$	$a_{7,7}$	$-\alpha_1 - \delta_3$
$a_{8,8}$	$\frac{p_2(Y_1 + Y_2)}{Y_1 + Y_2 + S_2} - k_4Y_1 - \varphi k_4Y_2 - \delta_4$	$a_{9,8}$	k_4Y_1
$a_{9,9}$	$-\delta_5 - k_5Y_{11}$	$a_{10,8}$	φk_4Y_2
$a_{10,10}$	$-\delta_5 - k_5Y_{11}$	$a_{11,11}$	$k_6(Y_4 + Y_6) + k_7(Y_9 + Y_{10}) - \delta_6$

ТАБ. 1. Ненулевые элементы матрицы $\mathbf{A}(\mathbf{Y}(t))$.ТАБ. 1. Nonzero elements of the matrix $\mathbf{A}(\mathbf{Y}(t))$.

T_{L1} , продуктивно инфицированных CD4+ Т-лимфоцитов мутировавшими вирусами T_2 , латентно-инфицированных CD4+ Т-лимфоцитов мутировавшими вирусами T_{L2} , неинфицированных макрофагов M , продуктивно инфицированных макрофагов вирусами дикого типа M_1 , продуктивно инфицированных макрофагов мутировавшими вирусами M_2 , и цитотоксических CD8+ Т-лимфоцитов E :

$$\mathbf{Y}(t) = [V_1(t), V_2(t), T(t), T_1(t), T_{L1}(t), T_2(t), T_{L2}(t), M(t), M_1(t), M_2(t), E(t)]^T.$$

Математическая модель динамики ВИЧ-инфекции под действием терапии на основе антиретровирусных препаратов имеет вид:

$$\frac{d}{dt}\mathbf{Y}(t) = \mathbf{S}(t) + \mathbf{A}(\mathbf{Y}(t)) \cdot \mathbf{Y}(t) + \mathbf{B}(\mathbf{Y}(t)) \cdot \mathbf{U}(t),$$

$$\mathbf{S}(t) = [0, 0, s_1, 0, 0, 0, 0, s_2, 0, 0, s_3]^T,$$

$$\mathbf{A}(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,11} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,11} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{11,1} & a_{11,2} & \dots & a_{11,11} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}(\mathbf{Y}) = \begin{bmatrix} 0 & -(1 - \mu)k_8Y_4 - f_2(1 - \mu)k_9Y_9 \\ 0 & -\mu k_8Y_4 - f_2\mu k_9Y_9 \\ (k_1Y_1 + k_2Y_9)Y_3 & 0 \\ -\psi(k_1Y_1 + k_2Y_9)Y_3 & 0 \\ -(1 - \psi)(k_1Y_1 + k_2Y_9)Y_3 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ f_1k_4Y_1Y_8 & 0 \\ -f_1k_4Y_1Y_8 & 0 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Уравнения, задаваемые матрицей $\mathbf{A}(\mathbf{Y})$ с элементами, зависящими от переменных состояния, описывают процессы взаимодействия между популяцией вирусов и компонентами иммунной системы, а задаваемые матрицей $\mathbf{B}(\mathbf{Y})$ — содержат описание механизмов влияния антиретровирусных препаратов.

Динамика заболевания реализуется под влиянием антиретровирусной терапии, которая действует на процессы заражения клетки и созревания вирусов и параметризуется введением 2-х компонентной управляющей функции

$$\mathbf{U}(t) = [u_1(t), u_2(t)]^T.$$

Функции управления u_1, u_2 зависят от концентраций ингибиторов обратной транскриптазы ЗТС и AZT: $u_1(t) = u_1(C_{ЗТС}(t), C_{AZT}(t))$, а также ингибитора протеазы RTV: $u_2(t) = u_2(C_{ЗТС}(t), C_{AZT}(t), C_{RTV}(t))$.

На основе данной модели ставится задача оптимального управления, т. е. режима прерываемого введения трех антивирусных препаратов на отрезке времени $[t_0, t_f]$, разбитом на подмножества $[t_k, t_{k+1}]$, $k = 0, 1, \dots, K-1$, $t_K = t_f$, для функционала

$$J(\mathbf{Y}(\cdot), \mathbf{U}(\cdot)) = \int_{t_0}^{t_f} (w_T Y_3(t) - w_{SE} S_E(t)) dt.$$

Целью построения оптимального управления является максимизация данного функционала, что связано с ростом числа CD4+ Т-клеток иммунной системы $Y_3(t)$ и снижением уровня побочных эффектов $S_E(t)$ в моменты времени t . Управляющие функции $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{C}(t))$ зависят от количества антивирусных препаратов $\mathbf{C}(t)$ на основе некоторых параметризаций. Искомое управление ищется в рамках принципа максимума Понтрягина:

$$J(\mathbf{Y}(\cdot), \mathbf{U}(\cdot)) \Rightarrow \max \quad s.t. \quad d\mathbf{Y}/dt = \mathbf{S} + \mathbf{A}(\mathbf{Y})\mathbf{Y} + \mathbf{B}(\mathbf{Y})\mathbf{U}(t), \quad \mathbf{Y}(t) \in \mathbb{R}_+^{11}, \quad \mathbf{U}(t) \in \mathbb{R}_+^2,$$

который сводится к задаче конечномерной оптимизации в многомерном пространстве моментов введения препаратов t_k и их начальных доз $c_l^k, l \in \{1, 2, 3\}, k = 0, 1, \dots, K-1$:

$$\max_{\substack{c_1^k, c_2^k, c_3^k \\ t \in [t_k, t_{k+1}]}} J(t_f, \mathbf{C}), \quad \mathbf{C}(t) = [c_1(t), c_2(t), c_3(t)].$$

Центральным элементом в переходе от задачи оптимального управления к задаче выбора доз и моментов введения препаратов является определение параметризаций, задающих зависимость функций управления от этих параметров $\mathbf{U} = \mathbf{U}(\mathbf{C}(t))$. Для этого нами используется детальная биохимическая модель размножения ВИЧ-1 в инфицированной клетке.

3. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ВНУТРИКЛЕТОЧНОЙ РЕПЛИКАЦИИ ВИЧ

Моделирование действия антиретровирусных препаратов основано на модификации модели внутриклеточной репликации ВИЧ [13, 14]. Схема процессов модели, на которые воздействуют лекарственные препараты, рассматриваемые в данной работе, представлена на рис. 1. Цикл внутриклеточной репликации состоит из ранних стадий инфицирования клетки, приводящих к встраиванию вирусной ДНК в хромосому клетки, и поздних стадий репликации вируса, приводящих к появлению и созреванию новых вирусных частиц. К ранним стадиям относятся: заражение свободными вирусными частицами $[V_{free}]$, которые переходят в связанное с рецепторами на мембране клетки состояние $[V_{bound}]$, распаковка из них молекул вирусной РНК $[RNA_{cor}]$, которая превращается в вирусную ДНК $[DNA_{cor}]$ (процесс обратной транскрипции), которая затем проникает в ядро клетки $[DNA_{nuc}]$ и интегрируется в хромосому $[DNA_{int}]$. К финальным процессам относятся: созревание отпочковавшихся новых вирусных частиц $[V_{bud}]$ в полноценные вирусные частицы $[V_{mat}]$, которые способны инфицировать другие клетки. Действие первого типа препаратов (ингибиторы обратной транскрипции, RTIs) заключается в уменьшении скорости обратной транскрипции k_{RT} , второго типа препаратов (ингибиторы протеазы, PIs) — в уменьшении скорости созревания k_{mat} . В работе рассматриваются три препарата: два ингибитора обратной транскрипции (ЗТС, AZT), один ингибитор протеазы (RTV). Детерминистическая версия модели состоит из 24 обыкновенных дифференциальных уравнений с 51 параметром (постоянными коэффициентами), стохастическая — в виде марковской цепи из 51 процесса (событий, приводящих к изменению значений переменных модели). Переменные внутриклеточной модели, используемые в дальнейшем для моделирования фармакодинамики лекарств:

$$\mathbf{X}(t) = [[V_{free}](t), \dots, [DNA_{int}](t), \dots, [V_{bud}](t), [V_{mat}](t)]^T.$$

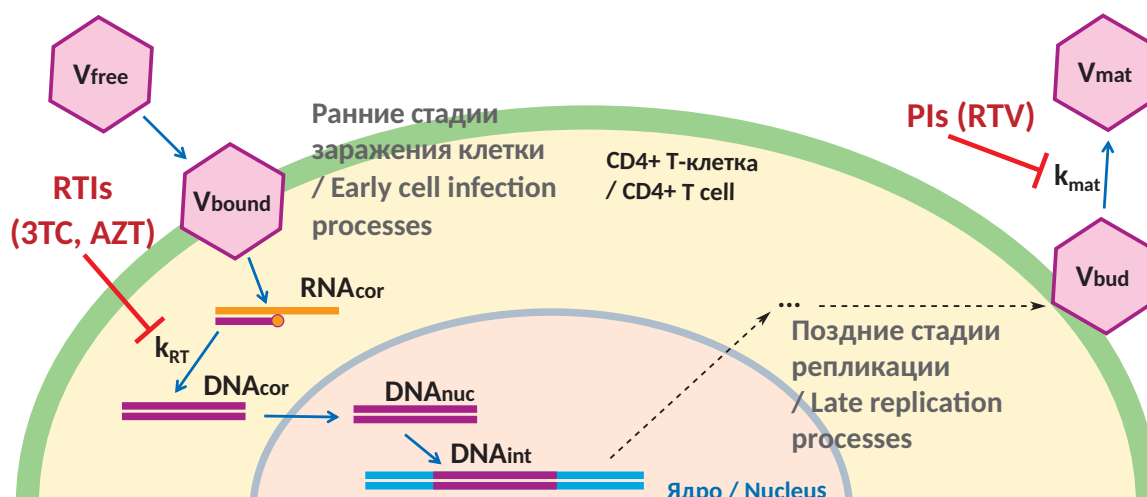


Рис. 1. Схема процессов модели внутриклеточной репликации ВИЧ. На схеме представлены переменные модели и процессы, относящиеся к ранним стадиям инфицирования клетки, а также созреванию новых вирусных частиц. Т-образными стрелками обозначено действие двух типов лекарств: ингибиторы обратной транскрипции (RTIs) уменьшают скорость обратной транскрипции k_{RT} , ингибиторы протеазы (PIs) уменьшают скорость созревания вирусных частиц k_{mat} . Адаптировано из [13].

FIG. 1. Schematic diagram of the processes in the HIV intracellular replication model. The diagram shows the model variables and processes related to the early stages of cell infection, as well as the maturation of new viral particles. The T-shaped arrows indicate the action of two types of drugs: reverse transcription inhibitors (RTIs) reduce the rate of reverse transcription k_{RT} and protease inhibitors (PIs) reduce the rate of viral particle maturation k_{mat} . Adapted from [13].

В дальнейшем для расчета эффективности лекарств потребуется вычисление распределений вероятности переменных в определенный момент времени. Для аппроксимации распределений можно использовать ансамбль большого числа реализаций марковской цепи, который можно получить численно с помощью методов Монте-Карло [13]. С другой стороны, эволюция совместного распределения вероятностей состояния переменных модели на основе марковской цепи с дискретным пространством состояний и непрерывным временем определяется основным кинетическим уравнением (уравнениями Колмогорова):

$$\frac{d\mathbf{P}(\mathbf{x}, t)}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{P}(\mathbf{x}, t),$$

где $\mathbf{P}(\mathbf{x}, t) = P(\mathbf{X}(t) = \mathbf{x})$ — вероятность того, что переменные модели $\mathbf{X}(t)$ принимают значения \mathbf{x} в момент времени t , \mathbf{A} — матрица переходов, связанная с интенсивностями процессов марковской цепи. Если число состояний, которые могут принимать m переменных модели, ограничено (целые значения от 0 до $n - 1$), то задача сводится к решению n^m обыкновенных дифференциальных уравнений. Для дальнейших расчетов ранних стадий заражения клетки малым числом вирусных частиц система составляет 6^6 уравнений. Использование основного кинетического уравнения по сравнению с расчетом ансамбля реализаций марковской цепи предпочтительно с точки зрения скорости вычислений и гладкости функционала невязки между решением модели и экспериментальными данными для надежного решения задачи идентификации параметров.

Для программной реализации численных расчетов использовались пакеты на языке *Julia*. Для решения детерминистических моделей ВИЧ-инфекции и внутриклеточной репликации ВИЧ использовался пакет *DifferentialEquations*. Для численного решения стохастической версии модели на основе марковской цепи методами Монте-Карло использовался пакет *JumpProcesses*. Для расчета эволюции распределения вероятностей состояния переменных стохастической версии модели

с помощью основного кинетического уравнения использовался пакет *FiniteStateProjection*. Для решения задачи идентификации параметров внутриклеточной фармакодинамики по экспериментальным данным использовались алгоритмы нелинейной оптимизации, реализованные в пакете *OptimizationNLopt*.

4. ПАРАМЕТРИЗАЦИЯ ФАРМАКОДИНАМИКИ ИНГИБИТОРОВ ВИРУСНОГО РАЗМНОЖЕНИЯ

4.1. Ингибиторы обратной транскрипции. Для описания действия ингибиторов обратной транскрипции (ЗТС, АЗТ) на скорость обратной транскрипции k_{RT} использовалась следующая параметризация:

$$k_{RT}^*(C_{ЗТС}, C_{АЗТ}) = k_{RT} \frac{1}{1 + \left(\frac{C_{ЗТС}}{[IC50_{ЗТС}]}\right)^{m_{ЗТС}}} \frac{1}{1 + \left(\frac{C_{АЗТ}}{[IC50_{АЗТ}]}\right)^{m_{АЗТ}}}, \quad (4.1)$$

где C_i — внутриклеточные концентрации i -го препарата, $[IC50_i]$ — значение концентрации i -го препарата, при которой исходная скорость k_{RT} снижается на 50% (при применении только одного препарата), m_i — значение параметра функции Хилла для i -го препарата; $i \in \{ЗТС, АЗТ\}$.

Для идентификации значений параметров в уравнении (4.1) использовались экспериментальные данные по эффективности препаратов из статьи [9]. Данные представляют собой кривые эффективности, то есть зависимости эффективности лекарства в подавлении вирусного размножения от концентрации используемого препарата (при монотерапии). Под эффективностью ингибитора обратной транскриптазы i с концентрацией C_i понимается величина

$$\Phi_{eff}(C_i) = 1 - \frac{\Phi_{inf}(C_i)}{\Phi_{inf}(0)}, \quad \Phi_{inf} = P([DNA_{int}](t = T) > 0), \quad (4.2)$$

выражающаяся через функционал от решения модели $\Phi_{inf} = \Phi_{inf}(C_i)$, равный вероятности инфицирования клетки, то есть доле инфицированных клеток в культуре. Вероятность инфицирования клетки оценивается с помощью стохастической версии модели на основе марковской цепи как вероятность интеграции в хромосому клетки как минимум одной вирусной ДНК за цикл репликации длительностью $T = 36$ ч.

В культуре клеток отдельная клетка может быть инфицирована разным числом вирусных частиц $[V_{free}](t = 0)$, которое может быть описано распределением Пуассона:

$$[V_{free}](0) \sim Poisson(a). \quad (4.3)$$

При значении параметра распределения Пуассона $a = 0,8$, вероятность продуктивного инфицирования клеток $\Phi_{inf}(0) \approx 0,3$, что соответствует условиям экспериментального метода, детали которого приводятся в статье [18] (без добавления лекарственных препаратов используемое в эксперименте количество вирусных частиц приводило к заражению приблизительно 30% клеток-мишеней в культуре клеток).

В работе [9] показано, что совместное действие препаратов ЗТС и АЗТ осуществляется независимо, что позволяет параметризовать их совместное действие в виде произведения функций Хилла, как это сделано в уравнении (4.1).

4.2. Ингибитор протеаз. Для описания действия ингибитора протеазы (RTV) на скорость созревания k_{mat} использовалась следующая параметризация:

$$k_{mat}^*(C_{RTV}) = k_{mat} \frac{1}{1 + \left(\frac{C_{RTV}}{[IC50_{RTV_1}]}\right)^{m_{RTV_1}}} \frac{1}{1 + \left(\frac{C_{RTV}}{[IC50_{RTV_2}]}\right)^{m_{RTV_2}}}, \quad (4.4)$$

где C_{RTV} — внутриклеточная концентрация RTV, $[IC50_{RTV_1}]$, $[IC50_{RTV_2}]$, m_{RTV_1} , m_{RTV_2} — значения параметров произведения двух функций Хилла, подходящего для описания кривой эффективности препарата RTV, характеризующейся наличием двух фаз [17].

Для идентификации значений параметров в уравнении (4.4) использовались экспериментальные данные по эффективности RTV из статьи [9]. Для оценки эффективности ингибитора протеазы использовалась процедура, состоящая из двух стадий: первый этап (трансфекции), на котором добавлялось лекарство, в результате чего часть произведенных клетками вирусных частиц

оказывалась не созревшей, и второй этап инфицирования этими вирусами культуры клеток-мишеней для оценки доли инфицированных клеток.

Таким образом, на первом этапе оценивалась доля полноценных созревших вирусных частиц $\varepsilon(C_{RTV})$, которые были сгенерированы при концентрации лекарства C_{RTV} :

$$\varepsilon(C_{RTV}) = \frac{\Phi_{total}(C_{RTV})}{\Phi_{total}(0)}, \quad \Phi_{total} = \int_0^T k_{mat}[V_{bud}](t)dt, \quad (4.5)$$

где используется функционал $\Phi_{total} = \Phi_{total}(C_{RTV})$, означающий суммарное количество произведенных за цикл репликации полноценных вирусных частиц, оцениваемый по решению детерминистической версии модели с фиксированным референсным начальным условием $[V_{free}(0)] = 4$.

На втором этапе оценивалась эффективность препарата через долю инфицированных клеток-мишеней, так же как и для ингибиторов обратной транскриптазы, по формуле (4.2), однако с другим начальным условием стохастической версии модели:

$$[V_{free}](0) \sim Poisson(a \cdot \varepsilon(C_{RTV})), \quad (4.6)$$

где $a = 0,8$, а $\varepsilon(C_{RTV})$ определяется уравнением (4.5), что позволяет учесть то, что только полноценные созревшие вирусные частицы способны инфицировать клетки-мишени.

4.3. Параметризация функций управления. Задача идентификации параметров внутриклеточной фармакодинамики i -го препарата \mathbf{p}_i по экспериментальным кривым эффективности монотерапии ставилась как задача минимизации функционала квадратичных отклонений $\Phi_{LS}^{(i)}$:

$$\hat{\mathbf{p}}_i = \arg \max_{\substack{\mathbf{p}_i \\ p_{ij} > 0}} \Phi_{LS}^{(i)}(\mathbf{p}_i) = \sum_{k=1}^{n_{obs}^{(i)}} \left(\Phi_{eff}(C_{i,k}) - \Phi_{eff}^{exp}(C_{i,k}) \right)^2,$$

где $\hat{\mathbf{p}}_i$ — точечная оценка параметров, $\Phi_{eff}(C_{i,k})$ и $\Phi_{eff}^{exp}(C_{i,k})$ — предсказанное моделью и наблюдаемое в экспериментах (медианное) значение эффективности препарата i с концентрацией $C_{i,k}$, соответственно.

Результаты идентификации параметров модели эффективности монотерапии для каждого из трех препаратов представлены в таб. 2 и на рис. 2. Оценка неопределенности значений параметров, связанной с уровнем изменчивости экспериментальных данных, была выполнена методом параметрического бутстрепа. Анализ ансамбля кривых эффективности различных препаратов в клетках разных пациентов из статьи [9] позволяет предположить, что величины $\ln \left(\Phi_{eff}^{exp}(C_{i,k}) \right)^{-1}$ имеют нормальное распределение с дисперсией 0,085² для фиксированной $C_{i,k}$. Задача оптимизации решалась повторно для различных кривых эффективности, сэмплированных из указанного распределения. В качестве интервальной оценки параметров приводятся 95%-е доверительные интервалы, рассчитанные как 2,5% и 97,5% перцентили полученных в рамках бутстрепа значений параметров. Полученные распределения параметров фармакодинамики ЗТС и AZT близки к нормальным и симметричным относительно точечной оценки, а распределения и интервальные оценки параметров препарата RTV — менее симметричны. Кривая эффективности ЗТС приближается не очень точно в области высоких концентраций препарата, что, при необходимости, можно устранить с помощью перехода к бифазовой параметризации в виде произведения двух функций Хилла с четырьмя параметрами, как это сделано для препарата RTV. Относительная неопределенность (отношение ширины доверительных интервалов к точечной оценке) значений параметров $[IC50_i]$ (связанных с расположением центра кривой эффективности), в основном, меньше, чем для параметров m_i (связанных с формой кривой), за исключением параметров $[IC50_{RTV_1}]$ и m_{RTV_1} , связанных с параметризацией формы кривой в области высоких концентраций препарата.

На основе идентифицированной по экспериментальным данным модели внутриклеточной фармакодинамики препаратов можно получить функции управления u_1, u_2 , использующиеся в модели системной динамики ВИЧ-инфекции, представленной в разделе 2. Функция u_1 описывает влияние совместного действия препаратов на вероятность инфицирования клеток вирусными

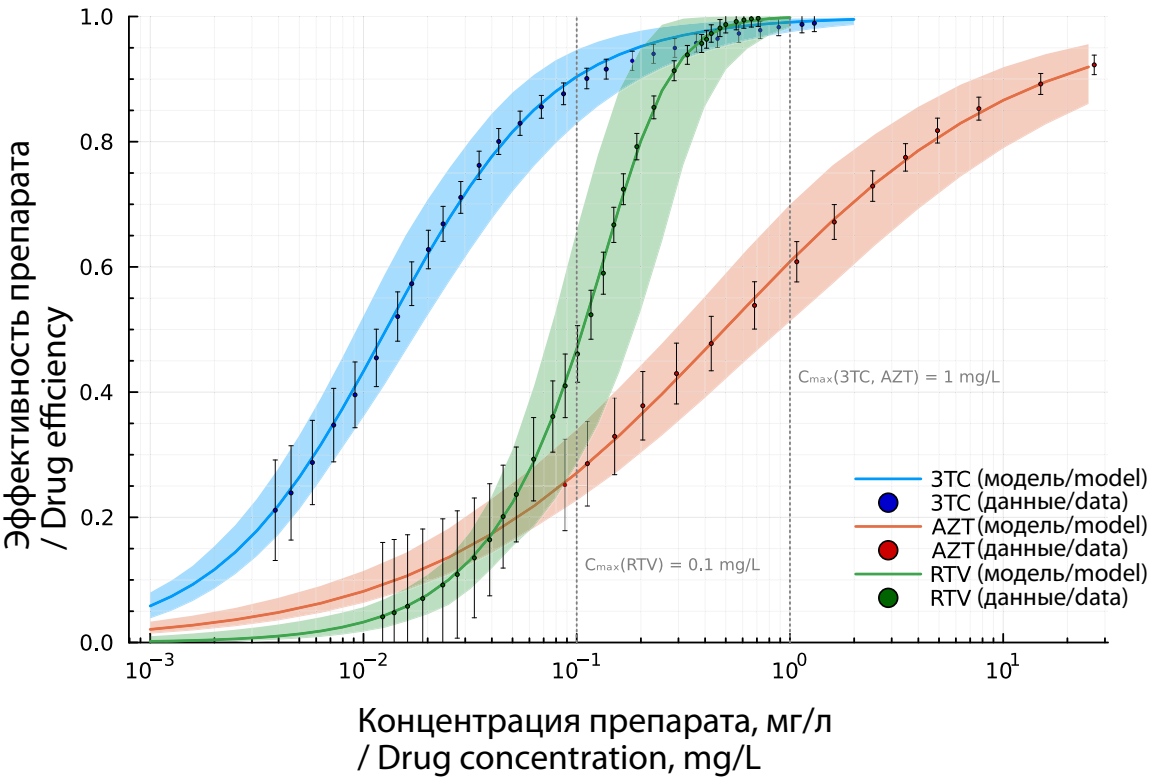


Рис. 2. Результат идентификации параметров модели внутриклеточной фармакодинамики по кривым эффективности монотерапии для трех препаратов (ЗТС, АЗТ, РТВ). Предсказания модели представлены значениями функционала $\Phi_{eff}(C_i)$, соответствующими точечным оценкам параметров (сплошные линии) и 95%-м доверительным интервалам (полупрозрачные области). Для экспериментальных данных приведены медианные значения и оценка их неопределенности (стандартное отклонение), рассчитанные по оцифрованным данным из статьи [9]. Вертикальными линиями обозначены максимальные значения концентрации препаратов в крови согласно данным фармакокинетики из статьи [7]. Точечные и интервальные оценки параметров представлены в таб. 2.

FIG. 2. Result of identifying the parameters of the intracellular pharmacodynamics model based on the monotherapy efficiency curves for three drugs (3TC, AZT, RTV). The model predictions are represented by the values of the $\Phi_{eff}(C_i)$ functional corresponding to the point estimates of the parameters (solid lines) and 95% confidence intervals (translucent areas). For the experimental data, the median values and their uncertainty estimate (standard deviation) are presented, calculated using the digitized data from [9]. The vertical lines indicate the maximum values of drug concentrations in the blood according to the pharmacokinetic data from [7]. Point and interval estimates of the parameters are presented in Tab. 2.

Параметр / Parameter	$[IC50_{3TC}]$	$[IC50_{AZT}]$	$[IC50_{RTV_1}]$	$[IC50_{RTV_2}]$
Точечная оценка / Point estimate	0,004	0,064	0,17	0,029
95%-й д. интервал / 95% c. interval	(0,003, 0,005)	(0,035, 0,093)	(0,09, 0,3)	(0,023, 0,043)
Параметр / Parameter	m_{3TC}	m_{AZT}	m_{RTV_1}	m_{RTV_2}
Точечная оценка / Point estimate	1,09	0,62	2,17	1,27
95%-й д. интервал / 95% c. interval	(0,92, 1,28)	(0,52, 0,7)	(1,2, 5,4)	(0,73, 1,65)

ТАБ. 2. Точечные и интервальные оценки параметров внутриклеточной фармакодинамики.
TAB. 2. Point and interval estimates of intracellular pharmacodynamic parameters.

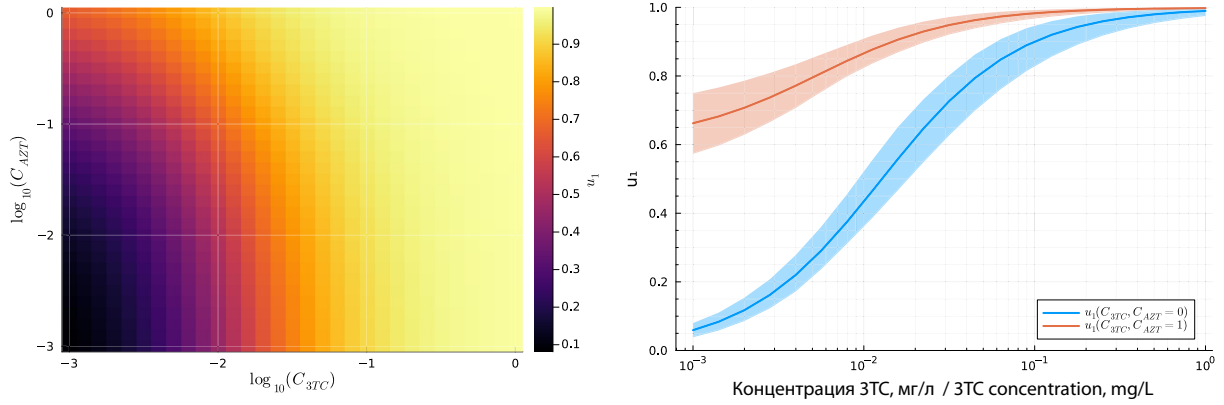


Рис. 3. Иллюстрация предсказанных значений управляющей функции u_1 для разных концентраций препаратов ЗТС и АЗТ, варьируемых в пределах наблюдаемых в крови концентраций при стандартном приеме лекарств. Справа приводится диапазон неопределенности (95%-е доверительные области) для отдельных кривых, связанный с бутстреп-распределением фармакодинамических параметров.

FIG. 3. Illustration of predicted values of the control function u_1 for different concentrations of 3TC and AZT, varying within the range of observed blood concentrations during standard drug therapy. The uncertainty range (95% confidence intervals) for individual curves, associated with the bootstrap distribution of the pharmacodynamic parameters, is shown on the right.

частицами, а функция u_2 — влияние на количество произведенной инфицированной клеткой новых полноценных вирусных частиц. Функция u_1 , таким образом, зависит от концентраций ингибиторов обратной транскриптазы ЗТС и АЗТ: $u_1 = u_1(C_{3TC}, C_{AZT})$. В исходной работе [7] предполагалось, что функция u_2 зависит только от концентрации ингибитора протеазы РТВ, однако, как видно из схемы процессов внутриклеточной репликации (рис. 1), на количество созревших вирусных частиц должны влиять оба типа препаратов. Таким образом, в данной работе $u_2 = u_2(C_{3TC}, C_{AZT}, C_{RTV})$. Значения u_1, u_2 рассчитываются следующим образом:

$$u_1(C_{3TC}, C_{AZT}) = 1 - \frac{\Phi_{inf}(C_{3TC}, C_{AZT})}{\Phi_{inf}(0, 0)}, \quad u_2(C_{3TC}, C_{AZT}, C_{RTV}) = 1 - \frac{\Phi_{total}(C_{3TC}, C_{AZT}, C_{RTV})}{\Phi_{total}(0, 0, 0)}, \quad (4.7)$$

где, как и ранее, функционал $\Phi_{inf} = \Phi_{inf}(C_{3TC}, C_{AZT})$, означающий вероятность инфицирования клетки под действием лекарств, рассчитывается с помощью стохастической версии модели, а функционал $\Phi_{total} = \Phi_{total}(C_{3TC}, C_{AZT}, C_{RTV})$, означающий суммарное число созревших за цикл репликации вирусных частиц под действием лекарств, рассчитывается на основе детерминистической версии модели.

Иллюстрация предсказанных моделью значений управляющих функций u_1, u_2 от концентраций трех лекарственных препаратов представлена на рис. 3-4. Совместная терапия ингибиторами обратной транскриптазы приводит к эффективному снижению вероятности инфицирования клеток вирусными частицами (рис. 3). На рис. 4 показаны зависимости u_2 для нескольких случаев: монотерапия препаратом РТВ (слева) и препаратом ЗТС (справа), а также добавление по одному других препаратов или добавление одновременно двух других препаратов в концентрации, равной $C_{max}/2$ для данного лекарства. Комбинация нескольких препаратов позволяет достичь полного подавления размножения вирусных частиц в инфицированной клетке.

5. Модельная оценка эффективности стандартной терапии

Для оценки эффективности стандартной терапии были использованы уравнения фармакокинетики $C_i(t)$ рассматриваемых препаратов $i \in \{3TC, AZT, RTV\}$ из работы [7], описывающие

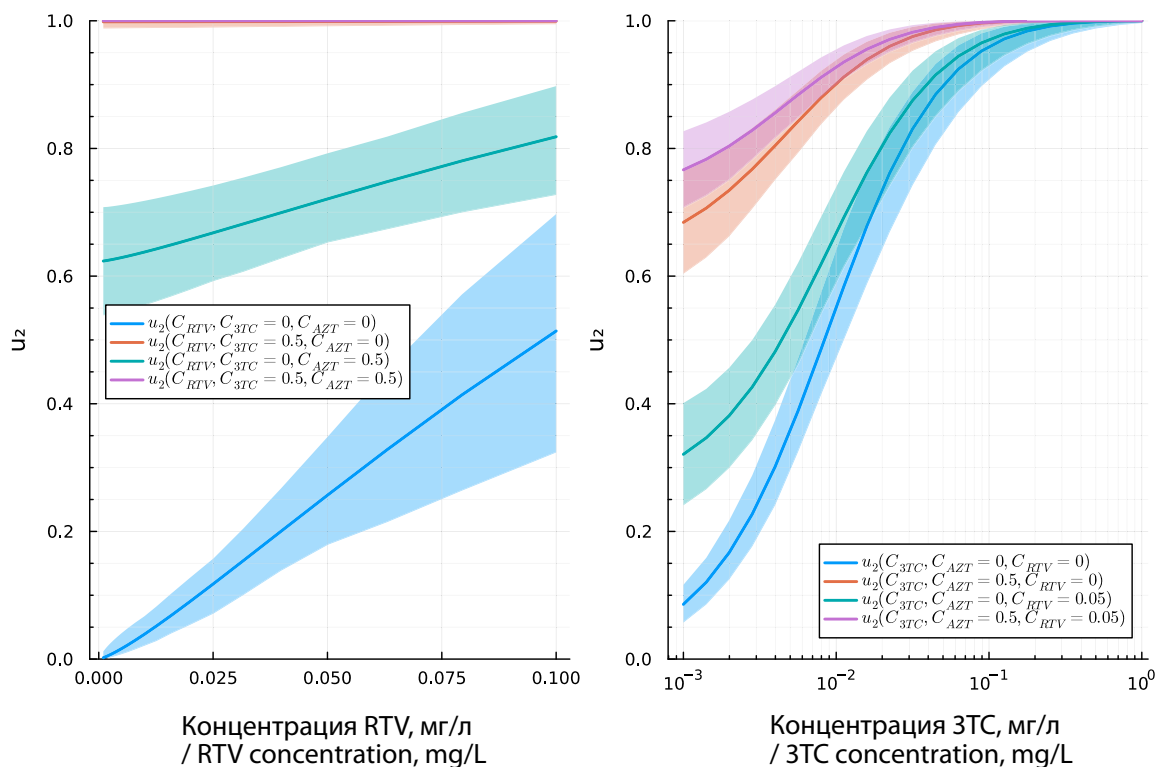


Рис. 4. Иллюстрация предсказанных значений управляющей функции u_2 для разных концентраций трех лекарственных препаратов, варьируемых в пределах наблюдаемых в крови концентраций при стандартном приеме лекарств. Полупрозрачные диапазоны соответствуют 95%-м доверительным областям значений u_2 , связанным с бутстреп-распределением фармакодинамических параметров.

FIG. 4. Illustration of predicted values of the control function u_2 for different concentrations of three drugs, varying within the range of observed blood concentrations during standard drug therapy. The translucent ranges correspond to the 95% confidence intervals of the u_2 values associated with the bootstrap distribution of the pharmacodynamic parameters.

концентрацию препаратов в крови на интервале $t_l < t < t_{l+1}$ между их приемом:

$$C_i(t) = C_i(t_l)e^{-k_e^i(t-t_l)} + \frac{F_i D_i}{V_c^i} \frac{k_a^i}{k_a^i - k_e^i} \left(e^{-k_e^i(t-t_l)} - e^{-k_a^i(t-t_l)} \right), \quad (5.1)$$

где t_l — время l -го по счету приема i -го препарата с дозой D_i , F_i — абсолютная биодоступность, k_a^i — скорость абсорбции, $k_e^i = Cl_i/V_c^i$ — константа скорости выведения i -го препарата, выражающаяся через клиренс Cl_i и объем распределения V_c^i , $C_i(t_0) = 0$. Параметры модели для трех лекарств приведены в работе [7] и соответствуют рекомендациям по приему этих лекарств, препараты принимаются дважды в день со стандартными дозами D_i . Кинетика концентраций препаратов в крови $C_i(t)$ в течение первых суток приема вместе с соответствующими значениями эффективности препаратов (управляющих функций $u_1(t)$, $u_2(t)$), предсказанными внутриклеточной фармакодинамической моделью, показана на рис. 5.

Течение ВИЧ-1 инфекции отличается разнообразием вариантов динамики (фенотипов инфекции), которые отражают отличия в иммунном статусе пациентов, эффективности контроля вирусной нагрузки, и скорости развития иммунодефицита. Эти различия проявляются и в отклике на лечебные воздействия, однако количественные характеристики и их связь с различиями в параметрах взаимодействия системы «ВИЧ — организм хозяина» могут быть изучены только с помощью математических моделей [19].

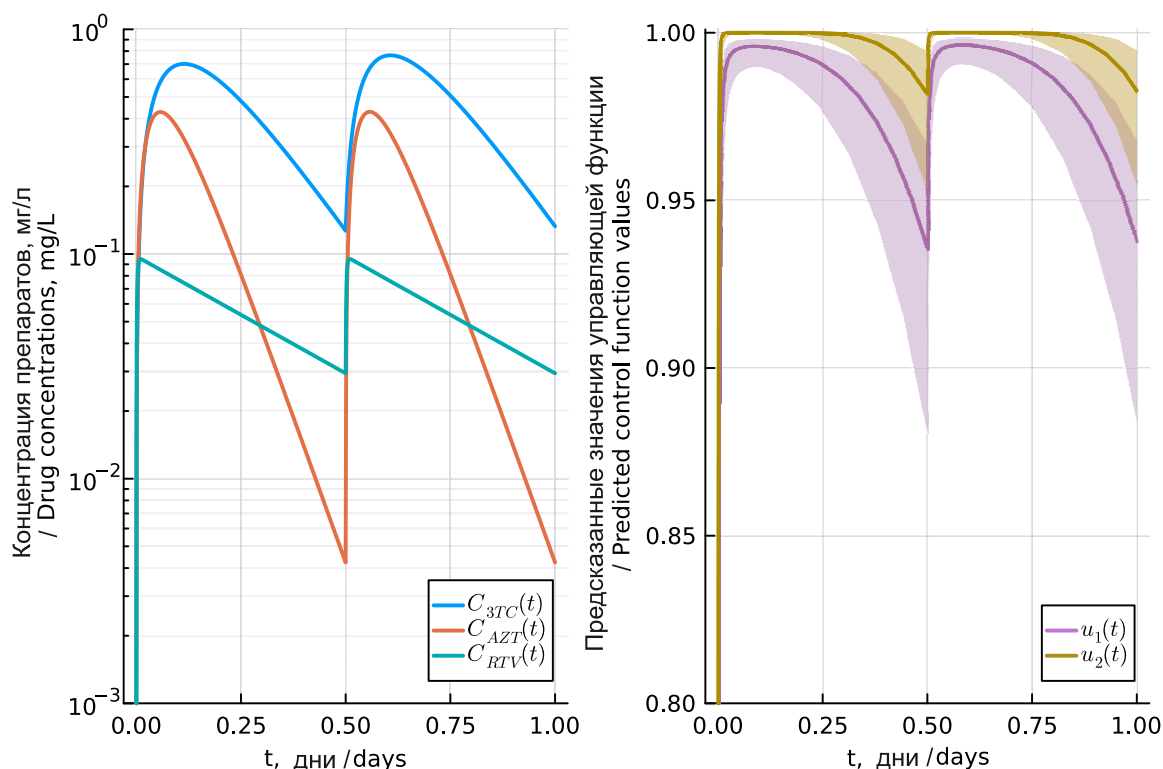


РИС. 5. Слева: кинетика концентраций препаратов в крови $C_i(t)$ в течение первых суток приема. Справа: соответствующие значения эффективности препаратов (управляющих функций $u_1(t), u_2(t)$), предсказанные внутриклеточной фармакодинамической моделью. Для значений управляющих функций указаны 95%-е доверительные области, связанные со степенью неопределенности фармакодинамических параметров.

FIG. 5. Left: kinetics of drug concentrations in the blood $C_i(t)$ during the first day of therapy. Right: corresponding values of drug efficiency (control functions $u_1(t), u_2(t)$), predicted by the intracellular pharmacodynamic model. 95% confidence intervals associated with the degree of uncertainty of the pharmacodynamic parameters are shown for the control function values.

Стандартный режим применения антиретровирусных препаратов не учитывает индивидуальных различий в течении инфекции у ВИЧ-инфицированных, которое может отклоняться от стандартного в сторону быстрого (категория быстрых прогрессоров) до медленного (категория непрогрессоров). С использованием модели системной динамики ВИЧ-1 инфекции нами исследованы характеристики эффективности по критериям снижения вирусной нагрузки ($Y_1 + Y_2$), повышения уровня Т-клеток (Y_3) и выраженности побочных эффектов S_E для данных трех вариантов динамики инфекции. Данным трем вариантам (фенотипам) течения инфекции соответствуют различающиеся наборы параметров модели [7]. В численных расчетах, представленных ниже, терапия начинается на стадии хронической инфекции при снижении уровня Т-клеток ниже 350 клеток на мм^3 (момент времени t_{start}). Считаем, что продолжение терапии целесообразно, пока уровень Т-клеток поддерживается выше критического порога — 200 клеток на мм^3 (момент времени t_{end}). Для оценки меры снижения вирусной нагрузки на протяжении применения терапии $T_{exp} = t_{end} - t_{start}$ используется функционал интегральной вирусной нагрузки $V_{AUC}(\mathbf{Y}(\mathbf{C})) = \int_{t_{start}}^{t_{end}} (Y_1(t) + Y_2(t)) dt$. Интегральная выраженность побочных эффектов при неизменном (стандартном) режиме применения препаратов пропорциональна длительности терапии T_{exp} .

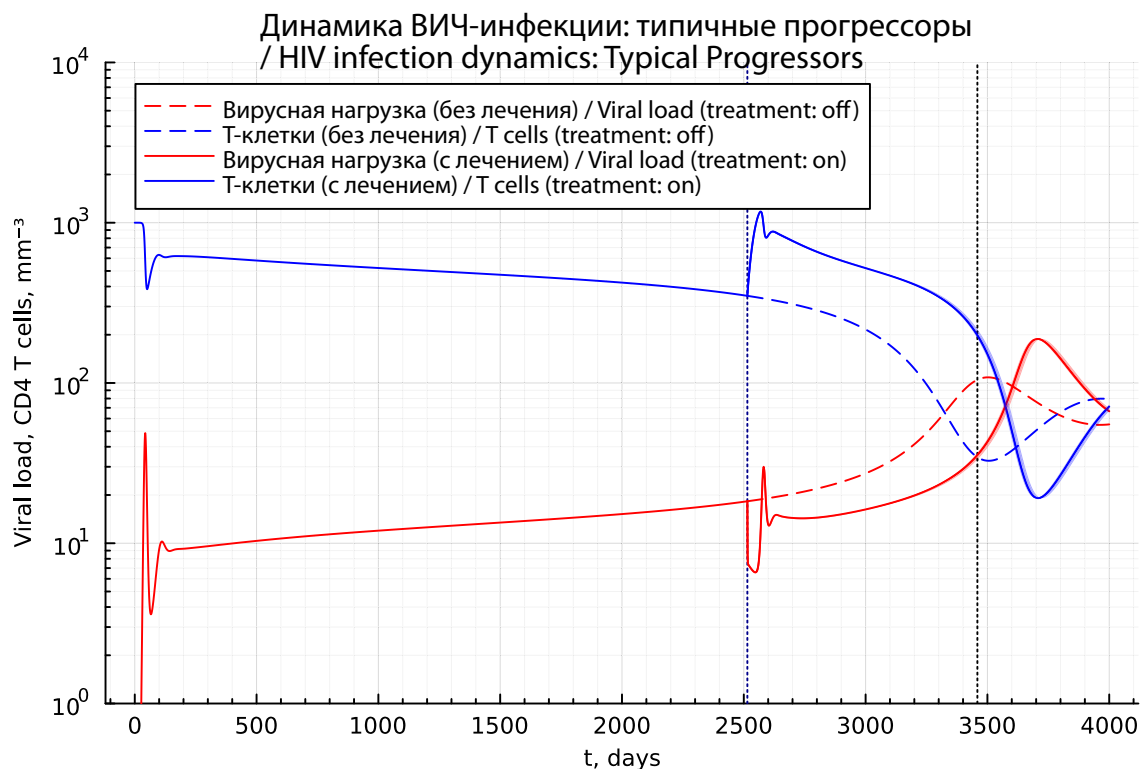


Рис. 6. Динамика ВИЧ-инфекции у типичных прогрессоров (уровень Т-клеток и вирусной нагрузки). Начало терапии t_{start} обозначено темно-синей пунктирной линией. Момент времени t_{end} , когда терапия перестает быть целесообразной, показан черной пунктирной линией. Доверительные области, связанные с неопределенностью параметров фармакодинамики, представлены полупрозрачными трубками.

FIG. 6. HIV infection dynamics for typical progressors (T-cell and viral load levels). The start of therapy, t_{start} , is indicated by the dark blue dotted line. The point in time, t_{end} , when therapy is no longer feasible, is shown by the black dotted line. Confidence regions associated with the uncertainty of the pharmacodynamic parameters are represented by translucent tubes.

5.1. Динамика инфекции у типичных прогрессоров. Динамика ВИЧ-инфекции у типичных прогрессоров показана на рис. 6. Стандартный режим терапии позволяет поддерживать уровень Т-клеток выше необходимого уровня со сниженной вирусной нагрузки в течение $T_{exp} = 944$ суток. Интегральная вирусная нагрузка за период T_{exp} составляет $17,1 \cdot 10^3$ частиц·сутки/мм³, без терапии она составляла бы $35,1 \cdot 10^3$ частиц·сутки/мм³.

5.2. Динамика инфекции у быстрых прогрессоров. Динамика ВИЧ-инфекции у быстрых прогрессоров показана на рис. 7. Стандартный режим терапии позволяет поддерживать уровень Т-клеток выше необходимого уровня со сниженной вирусной нагрузки в течение $T_{exp} = 922$ суток. Интегральная вирусная нагрузка за период T_{exp} составляет $15,8 \cdot 10^3$ частиц·сутки/мм³, без терапии она составляла бы $24,9 \cdot 10^3$ частиц·сутки/мм³.

5.3. Динамика инфекции у непрогрессоров. Динамика ВИЧ-инфекции у непрогрессоров показана на рис. 8. Стандартный режим терапии позволяет поддерживать уровень Т-клеток выше необходимого уровня со сниженной вирусной нагрузки в течение $T_{exp} = 158$ суток. Интегральная вирусная нагрузка за период T_{exp} составляет $6,7 \cdot 10^3$ частиц·сутки/мм³, без терапии она составляла бы $14,3 \cdot 10^3$ частиц·сутки/мм³.

В таб. 3 представлена сравнительная таблица характеристик эффективности терапии для трех фенотипов инфекции. Видно, что наибольшее снижение интегральной вирусной нагрузки реализуется у непрогрессоров, однако период стандартной терапии, позволяющий поддерживать

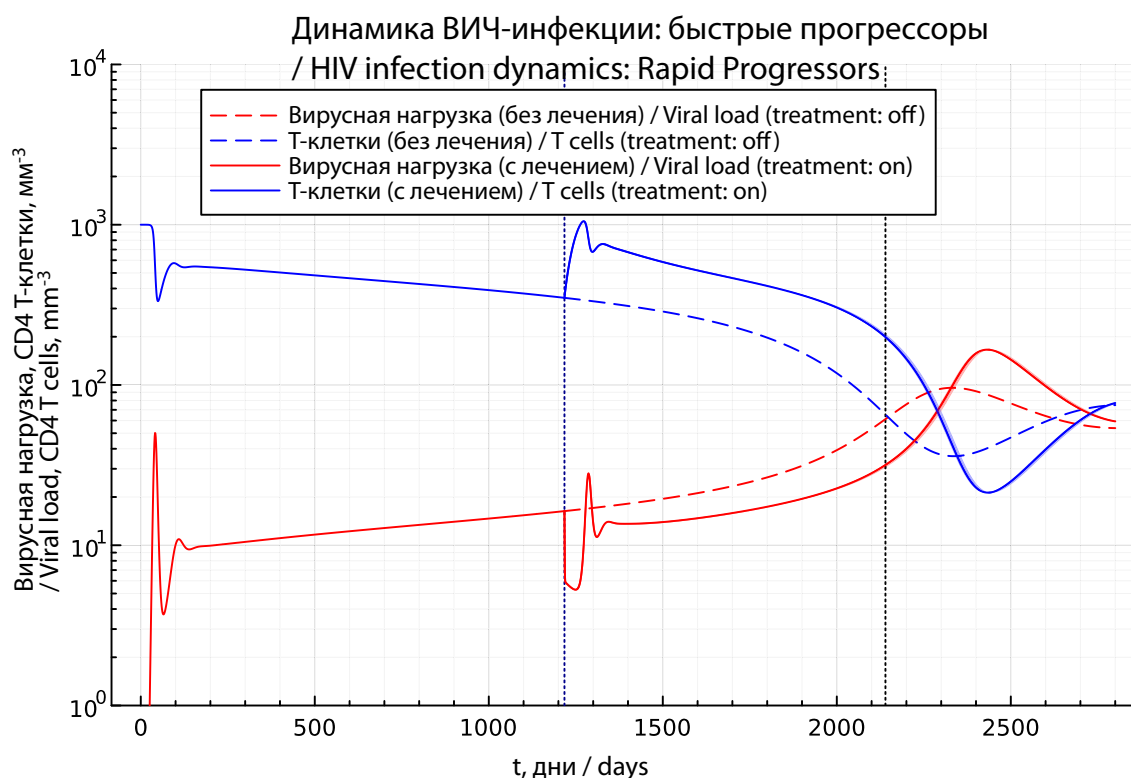


Рис. 7. Динамика ВИЧ-инфекции у быстрых прогрессоров (уровень Т-клеток и вирусной нагрузки). Начало терапии t_{start} обозначено темно-синей пунктирной линией. Момент времени t_{end} , когда терапия перестает быть целесообразной, показан черной пунктирной линией. Доверительные области, связанные с неопределенностью параметров фармакодинамики, представлены полупрозрачными трубками.

FIG. 7. HIV infection dynamics for rapid progressors (T-cell and viral load levels). The start of therapy, t_{start} , is indicated by the dark blue dotted line. The point in time, t_{end} , when therapy is no longer feasible, is shown by the black dotted line. Confidence regions associated with the uncertainty of the pharmacodynamic parameters are represented by translucent tubes.

	Типичные прогрессоры / Typical progressors	Быстрые прогрессоры / Rapid progressor	Непрогрессоры / Nonprogressors
T_{exp} , сутки (days)	944 (935, 959)	922 (916, 932)	158 (157, 160)
$V_{AUC}(C)/V_{AUC}(0)$	0,49 (0,48, 0,49)	0,63 (0,626, 0,639)	0,47 (0,46, 0,48)

ТАБ. 3. Характеристики эффективности стандартной терапии для трех фенотипов инфекции. В скобках указаны 95%-е доверительные интервалы.

ТАБ. 3. Efficiency characteristics of standard therapy for three infection phenotypes. 95% confidence intervals are shown in parentheses.

концентрацию Т-клеток выше критического уровня, составляет всего 5 месяцев. Для быстрых прогрессоров, напротив, стандартный режим терапии приводит к наименьшему снижению интегральной вирусной нагрузки, однако позволяет поддерживать уровень Т-клеток выше необходимого 2,5 года. Более эффективное воздействие стандартного режима терапии наблюдается у типичных прогрессоров, с большим снижением вирусной нагрузки и более долгим поддержанием концентрации Т-клеток выше критического уровня.

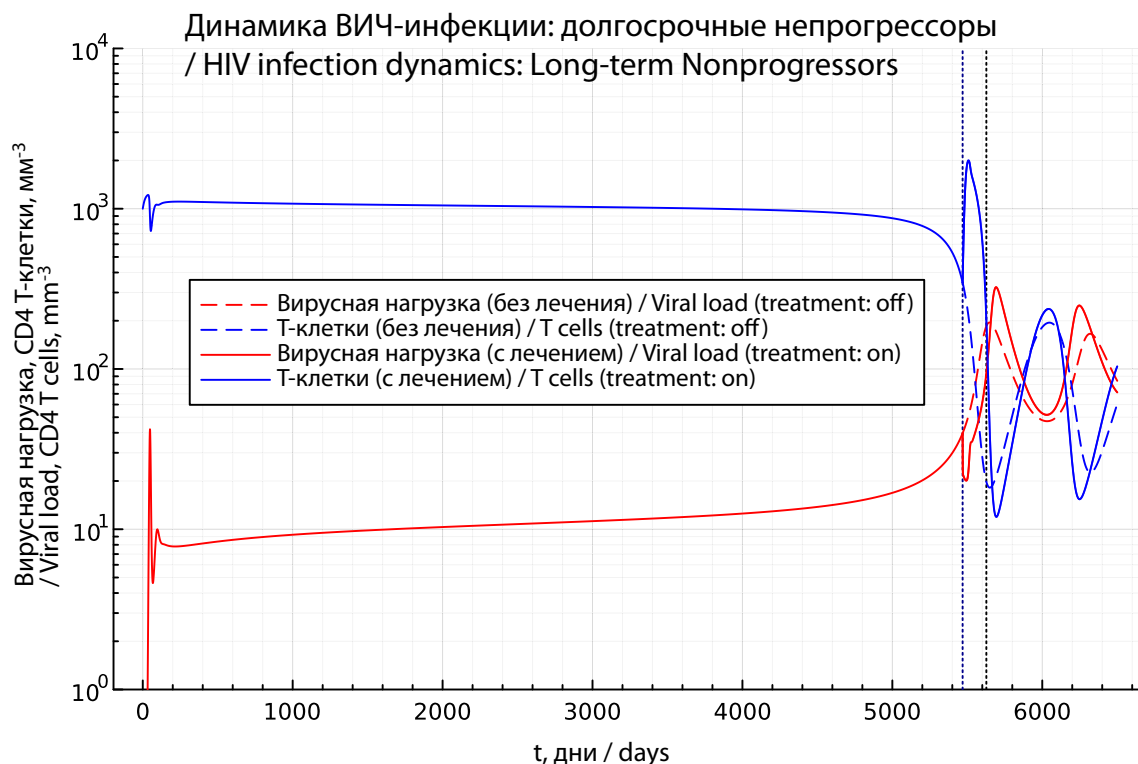


Рис. 8. Динамика ВИЧ-инфекции у непрогрессоров (уровень Т-клеток и вирусной нагрузки). Начало терапии t_{start} обозначено темно-синей пунктирной линией. Момент времени t_{end} , когда терапия перестает быть целесообразной, показан черной пунктирной линией. Доверительные области, связанные с неопределенностью параметров фармакодинамики, малы и визуально не различимы.

FIG. 8. HIV infection dynamics for nonprogressors (T-cell and viral load levels). The start of therapy, t_{start} , is indicated by the dark blue dotted line. The point in time, t_{end} , when therapy is no longer feasible, is shown by the black dotted line. Confidence regions associated with the uncertainty of the pharmacodynamic parameters are small and not visually distinguishable.

6. ВЫВОДЫ

Актуальной задачей для лечения ВИЧ-1 инфекции является разработка персонализированных подходов к схемам применения антиретровирусных и иммуномодулирующих препаратов [11, 16]. В силу сложности и нелинейности процессов взаимодействия ВИЧ-1 и организма человека, необходимо построение механизменных моделей, учитывающих физические, химические и биологические процессы, опосредующие данное взаимодействие.

В представленной работе впервые была выполнена идентификация параметров для функций, описывающих действие антиретровирусных препаратов внутри клетки. Для этого использовалась разработанная нами модель внутриклеточного размножения ВИЧ-1. Применение полученных параметризаций в модели системной динамики ВИЧ-1 инфекции позволило определить целесообразность использования стандартного режима антиретровирусной терапии в случае, когда динамика инфекционного заболевания качественно отличается от стандартной.

Для типичных прогрессоров стандартный режим терапии на основе трех рассмотренных противовирусных препаратов (ЗТС, AZT, RTV) с использованием идентифицированных параметров фармакодинамики позволяет поддерживать уровень CD4⁺ Т-клеток выше критического, равного 200 клеток/мм³, в течение 944 суток, таким образом отодвигая время наступления фазы СПИД на 2,7 два года с начала терапии, одновременно снижая при этом уровень интегральной вирусной нагрузки в 2 раза.

Для быстрых прогрессоров стандартный режим терапии на основе трех рассмотренных противовирусных препаратов (ЗТС, AZT, RTV) с использованием идентифицированных параметров фармакодинамики позволяет поддерживать уровень CD4+ Т-клеток выше критического в течение 922 суток, таким образом отдаляя время наступления фазы СПИД на 2,6 года, одновременно снижая при этом уровень интегральной вирусной нагрузки в 1,6 раза.

Для непрогрессоров стандартный режим терапии на основе трех рассмотренных противовирусных препаратов (ЗТС, AZT, RTV) с использованием идентифицированных параметров фармакодинамики позволяет поддерживать уровень CD4+ Т-клеток выше критического в течение 158 суток, таким образом отдаляя время наступления фазы СПИД почти на полгода, одновременно снижая при этом уровень интегральной вирусной нагрузки в более чем в два раза.

Таким образом, результаты моделирования позволяют сделать вывод о том, что рассмотренный режим терапии оказывается наиболее эффективным для пациентов с неблагоприятным фенотипом динамики ВИЧ-инфекции. Анализ чувствительности модели ВИЧ-инфекции показал, что возможная вариабельность величин параметров фармакодинамики рассмотренных препаратов слабо влияет на изменчивость траекторий модели, т. е. динамику течения инфекции. Это свидетельствует о том, что используемая в стандартной терапии дозировка препаратов выбрана таким образом, чтобы их действие было в области максимальной эффективности процесса подавления соответствующих стадий размножения вируса. Можно предположить, что следствием этого могут быть побочные эффекты, уровень которых может быть снижен путем разработки персонализированных режимов терапии с другими концентрациями антиретровирусных препаратов.

Результаты исследования указывают на необходимость учета различий в отклике организма на терапию по критерию эффективности и выраженности побочных эффектов. В целом, это актуализирует задачу подбора индивидуальных схем терапии с помощью методов оптимального управления на основе физиологически обоснованных моделей ВИЧ-1 инфекции в сочетании с корректным описанием фармакокинетики и фармакодинамики антивирусных препаратов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ким А. В., Иванов А. В. Об управлении математической моделью динамики ВИЧ на основе субоптимальных игровых сценариев прерывистой антиретровирусной терапии // Аграр. вестн. Урала. — 2018. — 171, № 4. — С. 17–24.
2. Adams B. M., Banks H. T., Kwon H. D., Tran H. T. Dynamic multidrug therapies for hiv: optimal and sti control approaches // Math. Biosci. Eng. — 2004. — 1, № 2. — С. 223–241. — DOI: [10.3934/mbe.2004.1.223](https://doi.org/10.3934/mbe.2004.1.223).
3. Ali N., Chohan M. I., Ali S. u dp. Analysis of optimal control problem of HIV-1 model of engineered virus // Int. J. Adv. Appl. Sci. — 2019. — 6, № 5. — С. 44–49. — DOI: [10.21833/ijaas.2019.05.008](https://doi.org/10.21833/ijaas.2019.05.008).
4. Attarian A., Tran H. An optimal control approach to structured treatment interruptions for HIV patients: a personalized medicine perspective // Appl. Math. — 2017. — 8. — С. 934–955. — DOI: [10.4236/am.2017.87074](https://doi.org/10.4236/am.2017.87074).
5. Bocharov G., Chereshev V., Gainova I., Bazhan S., Bachmetyev B., Argilaguet J., Martinez J., Meyerhans A. Human immunodeficiency virus infection: from biological observations to mechanistic mathematical modelling // Math. Model. Nat. Phenom. — 2012. — 7, № 5. — С. 78–104. — DOI: [10.1051/mmnp/20127507](https://doi.org/10.1051/mmnp/20127507).
6. Bocharov G., Kim A. V., Krasovskii A., Chereshev V. A., Glushenkova V., Ivanov A. An extremal shift method for control of HIV infection dynamics // Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 2015. — 30, № 1. — С. 11–25. — DOI: [10.1515/rnam-2015-0002](https://doi.org/10.1515/rnam-2015-0002).
7. Hadjiandreou M., Conejeros R., Wilson I. HIV treatment planning on a case-by-case basis // Int. J. Bioeng. Life Sci. — 2009. — 3, № 8. — С. 387–396. — DOI: [10.5281/zenodo.1071055](https://doi.org/10.5281/zenodo.1071055).
8. Jain A., Canepa G. E., Liou M. L., Fledderman E. L., Chapoval A. I., Xiao L., Mukherjee I., Balogun B. M., Huaman-Vergara H., Galvin J. A., Kumar P. N., Bordon J., Conant M. A., Boyle J. S. Multiple treatment interruptions and protecting HIV-specific CD4 T cells enable durable CD8 T cell response and viral control // Front. Med. (Lausanne). — 2024. — 11. — 1342476. — DOI: [10.3389/fmed.2024.1342476](https://doi.org/10.3389/fmed.2024.1342476).
9. Jilek B. L., Zarr M., Sampah M. E., Rabi S. A., Bullen C. K., Lai J., Shen L., Siliciano R. F. A quantitative basis for antiretroviral therapy for HIV-1 infection // Nat. Med. — 2012. — 18. — С. 446–451. — DOI: [10.1038/nm.2649](https://doi.org/10.1038/nm.2649).
10. Nuwagaba J., Li J. A., Ngo B., Sutton R. E. 30 years of HIV therapy: current and future antiviral drug targets // Virology. — 2025. — 603. — 110362. — DOI: [10.1016/j.virol.2024.110362](https://doi.org/10.1016/j.virol.2024.110362).

11. *Rasi G., Emili E., Conway J. M., Cotugno N., Palma P.* Mathematical modeling and mechanisms of HIV latency for personalized anti latency therapies// NPJ Syst Biol Appl. — 2025. — 11, № 1. — 64. — DOI: [10.1038/s41540-025-00538-6](https://doi.org/10.1038/s41540-025-00538-6).
12. *Rosenberg E. S., Davidian M., Banks H. T.* Using mathematical modeling and control to develop structured treatment interruption strategies for HIV infection// Drug Alcohol Depend. — 2007. — 88, Suppl. 2. — C. S41–51. — DOI: [10.1016/j.drugalcdep.2006.12.024](https://doi.org/10.1016/j.drugalcdep.2006.12.024).
13. *Sazonov I., Grebennikov D., Meyerhans A., Bocharov G.* Markov chain-based stochastic modelling of HIV-1 life cycle in a CD4 T Cell// Mathematics. — 2021. — 9. — 2025. — DOI: [10.3390/math9172025](https://doi.org/10.3390/math9172025).
14. *Shcherbatova O., Grebennikov D., Sazonov I., Meyerhans A., Bocharov G.* Modeling of the HIV-1 life cycle in productively infected cells to predict novel therapeutic targets// Pathogens. — 2020. — 9. — 255. — DOI: [10.3390/pathogens9040255](https://doi.org/10.3390/pathogens9040255).
15. *Tretyakova R. M., Meyerhans A., Bocharov G. A.* A drug pharmacodynamics and pharmacokinetics based approach towards stabilization of HIV infection dynamics// Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 2015. — 30, № 5. — C. 299–310. — DOI: [10.1515/rnam-2015-0027](https://doi.org/10.1515/rnam-2015-0027).
16. *Vemparala B., Chowdhury S., Guedj J., Dixit N. M.* Modelling HIV-1 control and remission// NPJ Syst. Biol Appl. — 2024. — 10, № 1. — 84. — DOI: [10.1038/s41540-024-00407-8](https://doi.org/10.1038/s41540-024-00407-8).
17. *Di Veroli G. Y., Fornari C., Goldlust I., Mills G., Koh S. B., Bramhall J. L., Richards F. M., Jodrell D. I.* An automated fitting procedure and software for dose-response curves with multiphasic features// Sci. Rep. — 2015. — 5. — 14701. — DOI: [10.1038/srep14701](https://doi.org/10.1038/srep14701).
18. *Zhang H., Zhou Y., Alcock C., Kiefer T., Monie D., Siliciano J., Li Q., Pham P., Cofrancesco J., Persaud D. u dp.* Novel single-cell-level phenotypic assay for residual drug susceptibility and reduced replication capacity of drug-resistant human immunodeficiency virus type 1// J. Virology. — 2004. — 78. — C. 1718–1729. — DOI: [10.1128/jvi.78.4.1718-1729.2004](https://doi.org/10.1128/jvi.78.4.1718-1729.2004).
19. *Zheltkova V., Argilaquet J., Peligero C., Bocharov G., Meyerhans A.* Prediction of PDL1 inhibition effects for HIV-infected individuals// PLoS Comput. Biol. — 2019. — 15, № 11. — e1007401. — DOI: [10.1371/journal.pcbi.1007401](https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1007401).

Д. С. Гребенников

Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН, Москва, Россия

Отделение Московского центра фундаментальной и прикладной математики в ИВМ РАН, Москва, Россия

Первый Московский государственный медицинский университет им. И. М. Сеченова, Москва, Россия

E-mail: dmitry.ew@gmail.com, ПИНЦ SPIN-код: 2896-3314, ПИНЦ AuthorID: [982157](https://orcid.org/0000-0002-7315-193X), ResearcherID: [I-4310-2018](https://orcid.org/0000-0002-7315-193X), Scopus: [56841562500](https://orcid.org/0000-0002-7315-193X), ORCID: [0000-0002-7315-193X](https://orcid.org/0000-0002-7315-193X)

А. И. Лыфенко

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: lyfenko2006@mail.ru, ResearcherID: [JMQ-0460-2023](https://orcid.org/0000-0002-8042-9389), ORCID: [0000-0002-8042-9389](https://orcid.org/0000-0002-8042-9389)

А. М. Тимохин

Первый Московский государственный медицинский университет им. И. М. Сеченова, Москва, Россия

E-mail: data.sup@yandex.ru

Р. С. Савинков

Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН, Москва, Россия

Отделение Московского центра фундаментальной и прикладной математики в ИВМ РАН, Москва, Россия

Первый Московский государственный медицинский университет им. И. М. Сеченова, Москва, Россия

E-mail: dr.savinkov@yandex.ru, ПИНЦ SPIN-код: 4812-4638, ПИНЦ AuthorID: [1071800](https://orcid.org/0000-0002-7404-8766), ResearcherID: [N-5539-2018](https://orcid.org/0000-0002-7404-8766), Scopus: [57189699479](https://orcid.org/0000-0002-7404-8766), ORCID: [0000-0002-7404-8766](https://orcid.org/0000-0002-7404-8766)

Г. А. Бочаров

Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН, Москва, Россия

Отделение Московского центра фундаментальной и прикладной математики в ИВМ РАН, Москва, Россия

Первый Московский государственный медицинский университет им. И. М. Сеченова, Москва, Россия

E-mail: g.bocharov@inm.ras.ru, ПИИЦ SPIN-код: 8503-1588, ПИИЦ AuthorID: [5118](#), ResearcherID: [T-1322-2017](#), Scopus: [6701431415](#), ORCID: [0000-0002-5049-0656](#)

DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-585-603](#)

UDC 517.929, 517.958

EDN: [MBJBVA](#)

Research article

Parameterization of control functions in the problem of modeling HIV infection therapy

D. S. Grebennikov^{1,2,3}, A. I. Lyfenko⁴, A. M. Timokhin³, R. S. Savinkov^{1,2,3},
and G. A. Bocharov^{1,2,3}

¹*Marchuk Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

²*Branch of Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics at INM RAS, Moscow, Russia*

³*I. M. Sechenov First Moscow State Medical University of the Ministry of Health of the Russian Federation
(Sechenov University), Moscow, Russia*

⁴*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

Abstract. Mathematical modeling is actively used to study the mechanisms of human immunodeficiency virus of type 1 (HIV-1) infection. Current HIV-1 therapy involves the regular, lifelong use of multiple antiviral drugs. However, this therapy is associated with varying degrees of side effects due to toxicity, drug interactions, resistance development, and high cost. Mathematical models of HIV-1 infection and optimal control methods can be used to develop effective regimens for applying multiple antiretroviral drugs, taking into account the immune status of HIV-1-infected patients. In this study, we identify the pharmacodynamic parameters of drugs based on a previously constructed stochastic model of the processes that determine viral replication in infected cells. We also study the efficiency of standard therapy for various HIV-1 infection regimens using a system dynamics model. The results of the study indicate the need to take into account differences in the body's response to therapy based on the criterion of efficiency, which actualizes the task of selecting individual therapy regimens using optimal control methods based on physiologically approved models of HIV-1 infection.

Keywords: mathematical modeling, HIV, parameter identification, pharmacodynamics, stochastic model, optimal control.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. This work was supported by the Russian Science Foundation (project No. 23-11-00116, “Modeling of intracellular HIV replication and standard therapy” — sections 2, 3, 5) and was partially supported by the Moscow Center for Fundamental and Applied Mathematics at the Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences (agreement No. 075-15-2025-347 with the Ministry of Education and Science of the Russian Federation, “Identification of pharmacodynamic parameters of antiretroviral drugs” — section 4).

For citation: D. S. Grebennikov, A. I. Lyfenko, A. M. Timokhin, R. S. Savinkov, G. A. Bocharov, “Parameterization of control functions in the problem of modeling HIV infection therapy,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2025, Vol. 71, No. 4, 585–603, DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-585-603](#).



REFERENCES

1. A. V. Kim and A. V. Ivanov, “Ob upravlenii matematicheskoy model’yu dinamiki VICH na osnove suboptimal’nykh igrovyykh stsensariy preryvisty antiretrovirusnoy terapii” [On the control of a mathematical model of HIV dynamics based on suboptimal game scenarios of intermittent antiretroviral therapy], *Agrar. Vestn. Urala* [Agrar. Ural Bull.], 2018, **171**, No. 4, 17–24 (in Russian).
2. B. M. Adams, H. T. Banks, H. D. Kwon, and H. T. Tran, “Dynamic multidrug therapies for hiv: optimal and sti control approaches,” *Math. Biosci. Eng.*, 2004, **1**, No. 2, 223–241, DOI: [10.3934/mbe.2004.1.223](https://doi.org/10.3934/mbe.2004.1.223).
3. N. Ali, M. I. Chohan, S. Ali et al., “Analysis of optimal control problem of HIV-1 model of engineered virus,” *Int. J. Adv. Appl. Sci.*, 2019, **6**, No. 5, 44–49, DOI: [10.21833/ijaas.2019.05.008](https://doi.org/10.21833/ijaas.2019.05.008).
4. A. Attarian and H. Tran, “An optimal control approach to structured treatment interruptions for HIV patients: a personalized medicine perspective,” *Appl. Math.*, 2017, **8**, 934–955, DOI: [10.4236/am.2017.87074](https://doi.org/10.4236/am.2017.87074).
5. G. Bocharov, V. Chereshev, I. Gainova, S. Bazhan, B. Bachmetyev, J. Argilaguet, J. Martinez, and A. Meyerhans, “Human immunodeficiency virus infection: from biological observations to mechanistic mathematical modelling,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2012, **7**, No. 5, 78–104, DOI: [10.1051/mmnp/20127507](https://doi.org/10.1051/mmnp/20127507).
6. G. Bocharov, A. V. Kim, A. Krasovskii, V. A. Chereshev, V. Glushenkova, and A. Ivanov, “An extremal shift method for control of HIV infection dynamics,” *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.*, 2015, **30**, No. 1, 11–25, DOI: [10.1515/rnam-2015-0002](https://doi.org/10.1515/rnam-2015-0002).
7. M. Hadjiandreou, R. Conejeros, and I. Wilson, “HIV treatment planning on a case-by-case basis,” *Int. J. Bioeng. Life Sci.*, 2009, **3**, No. 8, 387–396, DOI: [10.5281/zenodo.1071055](https://doi.org/10.5281/zenodo.1071055).
8. A. Jain, G. E. Canepa, M. L. Liou, E. L. Fledderman, A. I. Chapoval, L. Xiao, I. Mukherjee, B. M. Balogun, H. Huaman-Vergara, J. A. Galvin, P. N. Kumar, J. Bordon, M. A. Conant, and J. S. Boyle, “Multiple treatment interruptions and protecting HIV-specific CD4 T cells enable durable CD8 T cell response and viral control,” *Front. Med. (Lausanne)*, 2024, **11**, 1342476, DOI: [10.3389/fmed.2024.1342476](https://doi.org/10.3389/fmed.2024.1342476).
9. B. L. Jilek, M. Zarr, M. E. Sampah, S. A. Rabi, C. K. Bullen, J. Lai, L. Shen, and R. F. Siliciano, “A quantitative basis for antiretroviral therapy for HIV-1 infection,” *Nat. Med.*, 2012, **18**, 446–451, DOI: [10.1038/nm.2649](https://doi.org/10.1038/nm.2649).
10. J. Nuwagaba, J. A. Li, B. Ngo, and R. E. Sutton, “30 years of HIV therapy: current and future antiviral drug targets,” *Virology*, 2025, **603**, 110362, DOI: [10.1016/j.virol.2024.110362](https://doi.org/10.1016/j.virol.2024.110362).
11. G. Rasi, E. Emili, J. M. Conway, N. Cotugno, and P. Palma, “Mathematical modeling and mechanisms of HIV latency for personalized anti latency therapies,” *NPJ Syst Biol Appl.*, 2025, **11**, No. 1, 64, DOI: [10.1038/s41540-025-00538-6](https://doi.org/10.1038/s41540-025-00538-6).
12. E. S. Rosenberg, M. Davidian, and H. T. Banks, “Using mathematical modeling and control to develop structured treatment interruption strategies for HIV infection,” *Drug Alcohol Depend.*, 2007, **88**, Suppl. 2, S41–51, DOI: [10.1016/j.drugalcdep.2006.12.024](https://doi.org/10.1016/j.drugalcdep.2006.12.024).
13. I. Sazonov, D. Grebennikov, A. Meyerhans, and G. Bocharov, “Markov chain-based stochastic modelling of HIV-1 life cycle in a CD4 T Cell,” *Mathematics*, 2021, **9**, 2025, DOI: [10.3390/math9172025](https://doi.org/10.3390/math9172025).
14. O. Shcherbatova, D. Grebennikov, I. Sazonov, A. Meyerhans, and G. Bocharov, “Modeling of the HIV-1 life cycle in productively infected cells to predict novel therapeutic targets,” *Pathogens*, 2020, **9**, 255, DOI: [10.3390/pathogens9040255](https://doi.org/10.3390/pathogens9040255).
15. R. M. Tretyakova, A. Meyerhans, and G. A. Bocharov, “A drug pharmacodynamics and pharmacokinetics based approach towards stabilization of HIV infection dynamics,” *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.*, 2015, **30**, No. 5, 299–310, DOI: [10.1515/rnam-2015-0027](https://doi.org/10.1515/rnam-2015-0027).
16. B. Vemparala, S. Chowdhury, J. Guedj, and N. M. Dixit, “Modelling HIV-1 control and remission,” *NPJ Syst. Biol. Appl.*, 2024, **10**, No. 1, 84, DOI: [10.1038/s41540-024-00407-8](https://doi.org/10.1038/s41540-024-00407-8).
17. G. Y. Di Veroli, C. Fornari, I. Goldlust, G. Mills, S. B. Koh, J. L. Bramhall, F. M. Richards, and D. I. Jodrell, “An automated fitting procedure and software for dose-response curves with multiphasic features,” *Sci. Rep.*, 2015, **5**, 14701, DOI: [10.1038/srep14701](https://doi.org/10.1038/srep14701).
18. H. Zhang, Y. Zhou, C. Alcock, T. Kiefer, D. Monie, J. Siliciano, Q. Li, P. Pham, J. Cofrancesco, D. Persaud et al., “Novel single-cell-level phenotypic assay for residual drug susceptibility and reduced replication capacity of drug-resistant human immunodeficiency virus type 1,” *J. Virology*, 2004, **78**, 1718–1729, DOI: [10.1128/jvi.78.4.1718-1729.2004](https://doi.org/10.1128/jvi.78.4.1718-1729.2004).
19. V. Zheltkova, J. Argilaguet, C. Peligero, G. Bocharov, and A. Meyerhans, “Prediction of PDL1 inhibition effects for HIV-infected individuals,” *PLoS Comput. Biol.*, 2019, **15**, No. 11, e1007401, DOI: [10.1371/journal.pcbi.1007401](https://doi.org/10.1371/journal.pcbi.1007401).

D.S. Grebennikov

Marchuk Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
Branch of Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics at INM RAS, Moscow, Russia

I.M. Sechenov First Moscow State Medical University of the Ministry of Health of the Russian Federation (Sechenov University), Moscow, Russia

E-mail: dmitry.ew@gmail.com, eLIBRARY SPIN-code: 2896-3314, eLIBRARY AuthorID: [982157](#),
ResearcherID: [I-4310-2018](#), Scopus: [56841562500](#), ORCID: [0000-0002-7315-193X](#)

A.I. Lyfenko

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E-mail: lyfenko2006@mail.ru, ResearcherID: [JMQ-0460-2023](#), ORCID: [0000-0002-8042-9389](#)

A.M. Timokhin

I.M. Sechenov First Moscow State Medical University of the Ministry of Health of the Russian Federation (Sechenov University), Moscow, Russia

E-mail: data.sup@yandex.ru

R.S. Savinkov

Marchuk Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
Branch of Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics at INM RAS, Moscow, Russia

I.M. Sechenov First Moscow State Medical University of the Ministry of Health of the Russian Federation (Sechenov University), Moscow, Russia

E-mail: dr.savinkov@yandex.ru, eLIBRARY SPIN-code: 4812-4638, eLIBRARY AuthorID: [1071800](#),
ResearcherID: [N-5539-2018](#), Scopus: [57189699479](#), ORCID: [0000-0002-7404-8766](#)

G.A. Bocharov

Marchuk Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
Branch of Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics at INM RAS, Moscow, Russia

I.M. Sechenov First Moscow State Medical University of the Ministry of Health of the Russian Federation (Sechenov University), Moscow, Russia

E-mail: g.bocharov@inm.ras.ru, eLIBRARY SPIN-code: 8503-1588, eLIBRARY AuthorID: [5118](#),
ResearcherID: [T-1322-2017](#), Scopus: [6701431415](#), ORCID: [0000-0002-5049-0656](#)

ИССЛЕДОВАНИЕ РАЗРЕШИМОСТИ АЛЬФА-МОДЕЛИ БИНГАМА

А. В. Звягин, Н. В. Толстой

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. В статье исследуется разрешимость начально-краевой задачи для альфа-модели вязкопластичной жидкости типа Бингама с периодическими условиями по пространственным переменным. На основе аппроксимационно-топологического подхода доказывается существование слабых решений изучаемой альфа-модели, а также устанавливается сходимость решений альфа-модели к решениям исходной модели при стремлении параметра альфа к нулю.

Ключевые слова: альфа-модель Бингама, вязкопластичная жидкость, начально-краевая задача, аппроксимационно-топологический подход, существование слабых решений, сходимость решений.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 25-11-00056.

Для цитирования: А. В. Звягин, Н. В. Толстой. Исследование разрешимости альфа-модели Бингама // Современная математика. Фундаментальные направления. 2025. Т. 71, № 4. С. 604–625, DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-604-625](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-604-625).

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Движение однородной несжимаемой жидкости с постоянной плотностью в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, на отрезке времени $[0, T]$, $T > 0$, определяется системой дифференциальных уравнений в форме Коши (см., например, [2]):

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \operatorname{Div} \sigma + \nabla p = f, \quad \operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad t \in [0, T], \quad x \in \Omega, \quad (1.1)$$

где $v(t, x)$ — неизвестная вектор-функция скорости движения частицы жидкости, $p(t, x)$ — неизвестная функция давления, $f(t, x)$ — заданная плотность внешних сил, $\sigma = (\sigma_{ij})_{i,j=1,n}^{i=1,n}$ — неизвестный девиатор тензора напряжений.

Для корректной постановки эту систему дополняют реологическим (определяющим) соотношением, которое указывает тип изучаемой жидкости. В данной работе рассматриваются вязкопластические жидкости. Главная особенность вязкопластических жидкостей проявляется в задержке начала течения до тех пор, пока действующие напряжения τ не превысят некоторую величину τ^* , называемую пределом текучести, или начальным напряжением сдвига. При $\tau > \tau^*$ структура жидкости разрушается, а при обратном снижении напряжения $\tau \leq \tau^*$ — восстанавливается. Этот процесс происходит достаточно быстро. Примером вязкопластических жидкостей служат концентрированные суспензии [25]. Наличие у вязкопластических жидкостей предела текучести дало им второе название, широко используемое в английской литературе, — *yield-stress liquids* [28].

Заметим, что в 1890 г. профессор Новороссийского университета Федор Никифорович Шведов первым обнаружил отклонение свойств растворов желатина от теории Ньютона и для объяснения полученных результатов ввел понятие пластичности [24]. За рубежом этот тип жидкостей ассоциируется с именем Бингама, предложившим в 1922 г. для описания течения красок понятие предела текучести [16]. Реологическое соотношение для таких моделей имеет следующий вид:

$$\sigma = \begin{cases} 2\mu\mathcal{E}(v) + \tau^* \frac{\mathcal{E}(v)}{|\mathcal{E}(v)|}, & \text{если } |\mathcal{E}(v)| \neq 0, \\ |\sigma| \leq \tau^*, & \text{если } |\mathcal{E}(v)| = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

где $\mathcal{E} = (\mathcal{E}_{ij})_{j=1,n}^{i=1,n}$ — тензор скорости деформации, $\mathcal{E}_{ij}(v) = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right)$, $\mu > 0$ — коэффициент вязкости среды. Изучение таких математических моделей было начато достаточно давно (см., например, [10, 12, 19, 27]).

В данной работе для системы уравнений (1.1), (1.2) изучается альфа-модель. Альфа-модели представляют собой своего рода регуляризованные приближенные системы, которые зависят от некоторого положительного параметра α , причем регуляризация осуществляется путем некоторой фильтрации вектора скорости, который стоит в аргументе нелинейного члена (см. [8, 20]).

Интерес к изучению альфа-моделей в первую очередь связан с их применением к исследованию эффектов турбулентности для потоков жидкости, а также с лучшими по сравнению с исходными моделями численными результатами. Отметим, что при изучении турбулентного потока жидкости одной из определяющих характеристик является большой диапазон пространственных и временных масштабов. Это характерное свойство является источником затруднений, как в теоретических исследованиях, так и в вычислениях на практике. Более того, во многих практических приложениях физически значимые характеристики потока часто сосредоточены на больших масштабах по пространству, как это видно, например, при численном гидродинамическом прогнозировании погоды. В связи с этим было приложено немало усилий для моделирования крупномасштабной динамики турбулентного течения путем фильтрации более мелких масштабов.

Как правило, такая фильтрация происходит за счет применения обратного оператора Гельмгольца к первому или второму аргументу билинейного оператора системы уравнений движения среды (или ко всему оператору). Параметр альфа имеет размерность квадрата длины и определяет масштаб, при котором высокочастотные (по пространству) моды будут отфильтровываться. Соответствующие регуляризованные системы принято называть *альфа-моделями*.

При этом в теоретических исследованиях идея использования такого рода аппроксимаций впервые возникла в работе Ж. Лере [21] (в данной работе Ж. Лере использовал общий вид ядра фильтрации) для доказательства существования слабого решения системы уравнений Навье—Стокса. Позднее на этой идее были построены различные альфа-модели для уравнений Эйлера [17, 18], Навье—Стокса [6, 15], Лере [3, 4], Джеффриса—Олдройда [23], дробного Фойгта [5, 7] и др. Данная работа продолжает изучение альфа-моделей и рассматривает разрешимость следующей начально-краевой задачи для альфа-модели движения жидкости Бингама:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n u_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \operatorname{Div} \sigma + \nabla p = f, \quad (1.3)$$

$$\sigma = \begin{cases} 2\mu\mathcal{E}(v) + \tau^* \frac{\mathcal{E}(v)}{|\mathcal{E}(v)|}, & \text{если } |\mathcal{E}(v)| \neq 0, \\ |\sigma| \leq \tau^*, & \text{если } |\mathcal{E}(v)| = 0, \end{cases} \quad (1.4)$$

$$u = (I - \alpha^2 \Delta)^{-1} v, \quad (1.5)$$

$$\operatorname{div} v = 0, \quad (1.6)$$

$$v|_{\partial\Omega} = 0, \quad v|_{t=0} = v_0. \quad (1.7)$$

В работе рассматривается задача (1.3)–(1.7) с периодическим условием по пространственной переменной, которую в дальнейшем будем называть периодической (по пространственной переменной) начально-краевой задачей для альфа-модели Бингама. Для формулировки основного

результата сначала введем необходимые функциональные пространства и дадим определение слабого решения изучаемой начально-краевой задачи (1.3)–(1.7).

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ СЛАБОГО РЕШЕНИЯ

Введем необходимые обозначения. Пусть $\Omega = \prod_{i=1}^n (0, l_i) \subset \mathbb{R}^n$. Через $(C_{per}^\infty)^n$ обозначим пространство периодических вектор-функций со значениями в \mathbb{R}^n и с периодами $l_i = 1, \dots, n$. Введем множество

$$\Phi = \left\{ \phi \in (C_{per}^\infty)^n : \int_{\Omega} \phi \, dx = 0, \operatorname{div} \phi = 0 \right\}.$$

Через V^1 обозначим замыкание Φ по норме $W_2^1(\Omega)$, V^2 — замыкание Φ по норме $W_2^2(\Omega)$. Через V^0 обозначим замыкание Φ по норме $L_2(\Omega)$. Через V^{-1} обозначим сопряженное к V^1 пространство.

Обозначим через $D(A) = V^2$ и рассмотрим на $D(A)$ оператор $A : Av = -\pi \Delta v$, где π — проектор Лере, $\pi : L_2(\Omega) \rightarrow V^0$, $v \in D(A)$. Оператор A — монотонный линейный самосопряженный оператор, и для каждого $\beta \in \mathbb{R}$ можно определить A^β с областью определения $D(A^\beta) \subset V^0$ (см. [11]). Обозначим $V^\beta = D(A^{\beta/2})$. Можно показать, что оператор A является изоморфизмом из $V^{\beta+2}$ в V^β . Подробное определение пространств, а также их свойства можно найти в [11].

Одним из основных функциональных пространств является пространство

$$W_1 = \{v \in L_2(0, T; V^1) \cap L_\infty(0, T; V^0), \quad v' \in L_{4/3}(0, T; V^{-1})\}$$

с нормой $\|v\|_{W_1} = \|v\|_{L_2(0, T; V^1)} + \|v\|_{L_\infty(0, T; V^0)} + \|v'\|_{L_{4/3}(0, T; V^{-1})}$.

Обозначим через $\Delta_\alpha : V^{\beta+2} \rightarrow V^\beta$, $\beta \geq 0$, оператор $\Delta_\alpha = (J + \alpha^2 A)$, где $J = \pi I$, I — тождественный оператор. В силу [11, лемма 4.4.4] оператор Δ_α обратим. Применим проектор Лере $\pi : L_2(\Omega) \rightarrow V^0$ к обеим частям равенства $v = (I - \alpha^2 \Delta)u$ для $\beta = 3$ и выразим из последнего равенства u : $u = (J + \alpha^2 A)^{-1}v = \Delta_\alpha^{-1}v$. Так как $v(t) \in V^1$, получим, что $u(t) \in V^3$ при п.в. $t \in [0, T]$.

Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$ и $v_0 \in V^1$. Дадим определение слабого решения рассматриваемой задачи.

Определение 2.1. Пара функций $(v, \sigma) \in W_1 \times L_2(0, T; L_2(\Omega))$ называется *слабым решением* начально-краевой задачи (1.3)–(1.7) для альфа-модели Бингама, если для всех $\varphi \in V^1$ и почти всех $t \in (0, T)$ она удовлетворяет равенству

$$\langle v', \varphi \rangle - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_\alpha^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \, dx + \int_{\Omega} \sigma : \mathcal{E}(\varphi) \, dx = \int_{\Omega} f \varphi \, dx, \quad (2.1)$$

а также реологическому соотношению (1.4) и начальному условию $v|_{t=0} = v_0$.

Здесь символ «:» для двух матриц $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ обозначает $A : B = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} b_{ij}$.

Основным результатом работы являются следующие теоремы:

Теорема 2.1. Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$ и $v_0 \in V^1$. Тогда начально-краевая задача (1.3)–(1.7) имеет хотя бы одно слабое решение $(v, \sigma) \in W_1 \times L_2(0, T; L_2(\Omega))$.

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия теоремы 2.1. Кроме того, если рассмотреть семейство альфа-моделей (1.3)–(1.7), зависящих от параметра α_m , то существует последовательность решений v_m этого семейства, которая при стремлении α_m к нулю сходится к слабому решению исходной начально-краевой задачи (см. определение (7.1)).

Для доказательства разрешимости рассматриваемой начально-краевой задачи (1.3)–(1.7) будет использоваться аппроксимационно-топологический метод исследования задач гидродинамики (см. [9]). Для этого вводится семейство вспомогательных задач (раздел 3), зависящих от малого

параметра, доказываются априорные оценки решений (раздел 4) и на основе теории топологической степени Лере—Шаудера для вполне непрерывных векторных полей доказывается существование слабых решений вспомогательной задачи (раздел 5). Далее, для доказательства разрешимости исследуемой альфа-модели на основе необходимых оценок устанавливается предельный переход (раздел 6). В заключение показывается, что последовательность решений исследуемой альфа-модели сходится к решению исходной модели (раздел 7).

3. АППРОКСИМАЦИОННАЯ ЗАДАЧА

«Приблизим» реологическое соотношение модели Бингама (1.4) следующим неньютоновским соотношением:

$$\sigma = 2\mu\mathcal{E}(v) + \tau^* \frac{\mathcal{E}(v)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}}, \quad \delta > 0.$$

При такой аппроксимации реологического соотношения (1.4) мы можем исключить в постановке задачи неизвестную σ и рассматривать задачу только о нахождении скорости v . При этом также аппроксимируем интегральное равенство (2.1), добавив в него слагаемое

$$\delta \int_{\Omega} A^2 v A \varphi dx.$$

Таким образом, для доказательства разрешимости исходной начально-краевой задачи исследуется следующая аппроксимационная задача (для фиксированного $\delta > 0$):

Задача 3.1. Найти функцию $v \in W_2 = \{v : v \in L_2(0, T; V^4), v' \in L_2(0, T; V^{-2})\}$, удовлетворяющую для любого $\varphi \in V^2$ и почти всех $t \in (0, T)$ соотношению

$$\begin{aligned} \langle v', \varphi \rangle - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \mu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx + \\ + \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v) \mathcal{E}_{ij}(\varphi)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}} dx + \delta \int_{\Omega} A^2 v A \varphi dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \end{aligned}$$

и начальному условию $v(0) = v_0$.

Перепишем аппроксимационную задачу в операторном виде. Для этого введем следующие операторы:

$$\begin{aligned} A : L_2(0, T; V^1) &\rightarrow L_2(0, T; V^{-2}), & \langle Av(t), \varphi \rangle &= \int_{\Omega} \nabla v(t) : \nabla \varphi dx; \\ A^3 : L_2(0, T; V^4) &\rightarrow L_2(0, T; V^{-2}), & \langle A^3 v(t), \varphi \rangle &= \int_{\Omega} A^2 v A \varphi dx; \\ K : L_4(0, T; V^1) &\rightarrow L_2(0, T; V^{-2}), & \langle K(v(t)), \varphi \rangle &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx; \\ B_{\delta} : L_2(0, T; V^1) &\rightarrow L_2(0, T; V^{-2}), & \langle B_{\delta}(v)(t), \varphi \rangle &= \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)(t)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)(t)|\}} \mathcal{E}_{ij}(\varphi) dx. \end{aligned}$$

Заметим, что аппроксимационную задачу 3.1 можно записать в виде операторного уравнения:

$$v' + \mu Av + B_{\delta}(v) - K(v) + \delta A^3 v = f, \quad (3.1)$$

решение которого должно удовлетворять начальному условию $v(0) = v_0$.

Рассмотрим свойства операторов из уравнения (3.1). Отметим, что для исследуемых операторов можно доказать и более сильные результаты, чем приведенные ниже, но мы приводим только те, которые будут в дальнейшем использоваться. Для удобства через C мы будем обозначать константы, конкретное значение которых для нас не важно. Если важен точный вид константы, то она будет выписываться в явном виде.

Лемма 3.1. Для оператора A имеют место следующие свойства:

1. Для любой функции $v \in L_2(0, T; V^1)$ функция Av принадлежит $L_2(0, T; V^{-1})$, оператор $A : L_2(0, T; V^1) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ непрерывен и имеет место оценка

$$\|Av\|_{L_2(0, T; V^{-1})} \leq \|v\|_{L_2(0, T; V^1)}. \quad (3.2)$$

2. Для любой функции $v \in W_2$ функция Av принадлежит $L_2(0, T; V^{-1})$, кроме того, оператор $A : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-2})$ вполне непрерывен.

Доказательство данной леммы см. в [11].

Лемма 3.2. Для оператора K имеют место следующие свойства:

1. Отображение $K : L_4(\Omega) \rightarrow V^{-1}$ непрерывно, и для него имеет место оценка

$$\|K(v)\|_{V^{-1}} \leq C\|v\|_{L_4(\Omega)}^2. \quad (3.3)$$

2. Для любого $v \in L_4(0, T; L_4(\Omega))$ функция $K(v)$ принадлежит $L_2(0, T; V^{-1})$, и отображение $K : L_4(0, T; L_4(\Omega)) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ непрерывно.
3. Для любой функции $v \in W_2$ функция $K(v)$ принадлежит $L_2(0, T; V^{-2})$, отображение $K : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-2})$ является вполне непрерывным, и для него имеет место оценка

$$\|K(v)\|_{L_2(0, T; V^{-2})} \leq C\|v\|_{L_2(0, T; V^1)}\|v\|_{L_\infty(0, T; V^0)}. \quad (3.4)$$

Доказательство.

1. Для любых $v \in L_4(\Omega)$, $\varphi \in V^1$, используя неравенство Гельдера, мы получим

$$\begin{aligned} |\langle K(v), \varphi \rangle| &= \left| \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1}v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| \leq \sum_{i,j=1}^n \left(\int_{\Omega} |((I - \alpha^2 \Delta)^{-1}v)_i v_j|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \left(\int_{\Omega} |((I - \alpha^2 \Delta)^{-1}v)_i|^4 dx \right)^{1/4} \left(\int_{\Omega} |v_j|^4 dx \right)^{1/4} \|\varphi\|_{V^1} \leq C\|(I - \alpha^2 \Delta)^{-1}v\|_{L_4(\Omega)}\|v\|_{L_4(\Omega)}\|\varphi\|_{V^1} \leq \\ &\leq C\|v\|_{L_4(\Omega)}^2\|\varphi\|_{V^1}, \end{aligned}$$

откуда следует неравенство (3.3). Отметим, что здесь мы воспользовались следующей известной оценкой (см. [1, 14]):

$$\|(I - \alpha^2 \Delta)^{-1}v\|_{L_p(\Omega)} \leq \|v\|_{L_p(\Omega)}, \quad p > 1. \quad (3.5)$$

Покажем непрерывность отображения $K : L_4(\Omega) \rightarrow V^{-1}$. Для произвольных $v^m, v^0 \in L_4(\Omega)$ имеем:

$$\begin{aligned} |\langle K(v^m), \varphi \rangle - \langle K(v^0), \varphi \rangle| &= \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n ((\Delta_{\alpha}^{-1}v^m)_i v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} - (\Delta_{\alpha}^{-1}v^0)_i v_j^0 \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i}) dx \right| \leq \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \|(\Delta_{\alpha}^{-1}v^m)_i v_j^m - (\Delta_{\alpha}^{-1}v^0)_i v_j^0\|_{L_2(\Omega)}\|\varphi\|_{V^1}, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\|K(v^m) - K(v^0)\|_{V^{-1}} \leq \sum_{i,j=1}^n \|(\Delta_{\alpha}^{-1}v^m)_i v_j^m - (\Delta_{\alpha}^{-1}v^0)_i v_j^0\|_{L_2(\Omega)}.$$

Вновь используя неравенство (3.5), преобразуем правую часть последнего неравенства:

$$\begin{aligned} &\sum_{i,j=1}^n \|(\Delta_{\alpha}^{-1}v^m)_i v_j^m - (\Delta_{\alpha}^{-1}v^0)_i v_j^0\|_{L_2(\Omega)} = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \|(\Delta_{\alpha}^{-1}v^m)_i v_j^m - (\Delta_{\alpha}^{-1}v^m)_i v_j^0 + (\Delta_{\alpha}^{-1}v^m)_i v_j^0 - (\Delta_{\alpha}^{-1}v^0)_i v_j^0\|_{L_2(\Omega)} \leq \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\leq C \left(\|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)} \|\Delta_\alpha^{-1} v^m\|_{L_4(\Omega)} + \|\Delta_\alpha^{-1} v^m - \Delta_\alpha^{-1} v^0\|_{L_4(\Omega)} \|v^0\|_{L_4(\Omega)} \right) \leq \\
&\leq C \left(\|v^m\|_{L_4(\Omega)} \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)} + \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)} \|v^0\|_{L_4(\Omega)} \right) = \\
&= C \left(\|v^m\|_{L_4(\Omega)} + \|v^0\|_{L_4(\Omega)} \right) \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\|K(v^m) - K(v^0)\|_{V^{-1}} \leq C \left(\|v^m\|_{L_4(\Omega)} + \|v^0\|_{L_4(\Omega)} \right) \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)}. \quad (3.6)$$

Полагая $v^m \rightarrow v^0$ в $L_4(\Omega)$, получаем непрерывность отображения $K : L_4(\Omega) \rightarrow V^{-1}$.

2. Пусть $v \in L_4(0, T; L_4(\Omega))$. В силу оценки (3.3) при почти всех $t \in (0, T)$ имеем

$$\|K(v)(t)\|_{V^{-1}} \leq C \|v(t)\|_{L_4(\Omega)}^2.$$

Возведем это неравенство в квадрат, проинтегрируем по t от 0 до T и оценим правую часть сверху:

$$\int_0^T \|K(v)(t)\|_{V^{-1}}^2 dt \leq C^2 \int_0^T \|v(t)\|_{L_4(\Omega)}^4 dt = C^2 \|v\|_{L_4(0, T; L_4(\Omega))}^2 < \infty.$$

Поскольку правая часть последнего неравенства конечна, то конечна и левая часть. Таким образом, для $v \in L_4(0, T; L_4(\Omega))$ мы имеем, что $K(v) \in L_2(0, T; V^{-1})$. Переходим теперь к доказательству непрерывности отображения $K : L_4(0, T; L_4(\Omega)) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$.

Пусть последовательность $\{v^m\} \subset L_4(0, T; L_4(\Omega))$ сходится к некоторому пределу $v^0 \in L_4(0, T; L_4(\Omega))$. Из неравенства (3.6) получим, что при почти всех $t \in (0, T)$ имеет место оценка

$$\|K(v^m)(t) - K(v^0)(t)\|_{V^{-1}} \leq C \left(\|v^m(t)\|_{L_4(\Omega)} + \|v^0(t)\|_{L_4(\Omega)} \right) \|v^m - v^0\|_{L_4(\Omega)}.$$

Возведем последнее неравенство в квадрат и проинтегрируем по t от 0 до T . Воспользовавшись неравенством Гельдера, получим:

$$\begin{aligned}
&\int_0^T \|K(v^m)(t) - K(v^0)(t)\|_{V^{-1}}^2 dt \leq \\
&\leq C^2 \left(\int_0^T (\|v^m(t)\|_{L_4(\Omega)} + \|v^0(t)\|_{L_4(\Omega)})^4 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|v^m(t) - v^0(t)\|_{L_4(\Omega)}^4 dt \right)^{1/2}.
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
&\int_0^T (\|v^m(t)\|_{L_4(\Omega)} + \|v^0(t)\|_{L_4(\Omega)})^4 dt \leq 8 \int_0^T (\|v^m(t)\|_{L_4(\Omega)}^4 + \|v^0(t)\|_{L_4(\Omega)}^4) dt = \\
&= 8 \left(\|v^m\|_{L_4(0, T; L_4(\Omega))}^4 + \|v^0\|_{L_4(0, T; L_4(\Omega))}^4 \right).
\end{aligned}$$

Имеем в итоге

$$\begin{aligned}
\|K(v^m) - K(v^0)\|_{L_2(0, T; V^{-1})}^2 &\leq 2\sqrt{2}C^2 \|v^m - v^0\|_{L_4(0, T; L_4(\Omega))}^2 \left(\|v^m\|_{L_4(0, T; L_4(\Omega))}^4 + \|v^0\|_{L_4(0, T; L_4(\Omega))}^4 \right)^{1/2} \leq \\
&\leq 2\sqrt{2}C^2 \|v^m - v^0\|_{L_4(0, T; L_4(\Omega))}^2 \left(\|v^m\|_{L_4(0, T; L_4(\Omega))}^2 + \|v^0\|_{L_4(0, T; L_4(\Omega))}^2 \right).
\end{aligned}$$

Так как правая часть неравенства стремится к нулю при $m \rightarrow +\infty$, то стремится к нулю и левая часть. А это и значит, что отображение $K : L_4(0, T; L_4(\Omega)) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ непрерывно.

3. Для доказательства нам потребуется следующий результат (см. [13]):

Теорема 3.1. Пусть V, H, V^* — тройка гильбертовых пространств, таких что $V \subset H \equiv H^* \subset V^*$. Здесь вложения непрерывны, H^* и V^* — сопряженные пространства, пространства H и H^* отождествлены по теореме Рисса. Если функция v принадлежит пространству

$L_2(0, T; V)$, а ее производная v' принадлежит $L_2(0, T; V^*)$, то функция v почти всюду равна некоторой непрерывной функции из $[0, T]$ в H (то есть функции из $C([0, T], H)$).

В силу данной леммы каждая функция $v \in W_2$ принадлежит $C([0, T]; V^0)$. Поэтому каждая функция из W_2 принадлежит не только $L_2(0, T; V^2)$, но и $L_2(0, T; V^2) \cap L_\infty(0, T; V^0)$. Далее заметим, что имеет место вложение (см., например, [22]): $L_2(0, T; V^2) \cap L_\infty(0, T; V^0) \subset L_4(0, T; V^1)$. Таким образом, для пространства W_2 имеет место вложение:

$$W_2 \subset Y = \{v : v \in L_4(0, T; V^1), v' \in L_2(0, T; V^{-1})\}.$$

Опять воспользуемся следующим результатом из [13]:

Теорема 3.2. Пусть X_0, F, X_1 — тройка банаховых пространств, удовлетворяющих условию $X_0 \subset F \subset X_1$. Здесь вложения непрерывны, пространства X_0, X_1 — рефлексивны, вложение $X_0 \rightarrow F$ — компактно. Пусть $T > 0$ — фиксированное число и α_0, α_1 — два конечных числа, таких что $\alpha_i > 1$, $i = 0, 1$. Предположим, что $\mathcal{Y} = \{v : v \in L_{\alpha_0}(0, T; X_0); v' \in L_{\alpha_1}(0, T; X_1)\}$ — пространство с нормой $\|v\|_{\mathcal{Y}} = \|v\|_{L_{\alpha_0}(0, T; X_0)} + \|v'\|_{L_{\alpha_1}(0, T; X_1)}$. Тогда вложение пространства \mathcal{Y} в пространство $L_{\alpha_0}(0, T; X_0)$ компактно.

В силу последней теоремы имеет место компактное вложение: $Y \rightarrow L_4(0, T; L_4(\Omega))$. Таким образом, действие отображения K можно представить следующим образом:

$$W_2 \subset Y \rightarrow L_4(0, T; L_4(\Omega)) \xrightarrow{K} L_2(0, T; V^{-1}) \subset L_2(0, T; V^{-2}).$$

Здесь первое и последнее вложения непрерывны, второе вложение вполне непрерывно, и отображение $K : L_4(0, T; L_4(\Omega)) \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ непрерывно в силу пункта 2 леммы 3.2. Таким образом, отображение $K : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-1})$ вполне непрерывно.

Оценим теперь $\|K(v)\|_{L_2(0, T; V^{-2})}$. Имеем:

$$\begin{aligned} |\langle K(v), \varphi \rangle| &= \left| \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| \leq \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} |(\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i| |v_j| \left| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right| dx \leq \\ &\leq \sum_{i,j=1}^n \|v_i\|_{L_4(\Omega)} \|v_j\|_{L_4(\Omega)} \left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right\|_{L_4(\Omega)} \leq C \|v\|_{L_4(\Omega)} \|v\|_{V^0} \|\varphi\|_{V^2}, \end{aligned}$$

откуда для любой функции $v \in W_2$ при почти всех $t \in (0, T)$ имеет место оценка:

$$\|K(v)(t)\|_{V^{-2}} \leq C \|v(t)\|_{L_4(\Omega)} \|v(t)\|_{V^0}.$$

Возводя это неравенство в квадрат и интегрируя полученное неравенство по отрезку $[0, T]$, получим:

$$\begin{aligned} \int_0^T \|K(v)(t)\|_{V^{-2}}^2 dt &\leq C^2 \int_0^T \|v(t)\|_{L_4(\Omega)}^2 \|v(t)\|_{V^0}^2 dt \leq \\ &\leq C^2 \|v\|_{L_\infty(0, T; V^0)}^2 \int_0^T \|v(t)\|_{L_4(\Omega)}^2 dt \leq C \|v\|_{L_\infty(0, T; V^0)}^2 \|v\|_{L_2(0, T; V^1)}^2, \end{aligned}$$

откуда следует требуемое неравенство (3.4). \square

Лемма 3.3. Для оператора B_δ имеют место следующие свойства:

1. Для любой функции $v \in L_2(0, T; V^1)$ функция $B_\delta(v)$ принадлежит $L_2(0, T; V^{-2})$, оператор $B_\delta : L_2(0, T; V^1) \rightarrow L_2(0, T; V^{-2})$ непрерывен, и имеет место оценка

$$\|B_\delta(v)(t)\|_{L_2(0, T; V^{-2})} \leq C, \quad (3.7)$$

где C — константа, не зависящая от функции v и δ .

2. Для любой функции $v \in W_2$ функция $B_\delta(v)$ принадлежит $L_2(0, T; V^{-2})$, и оператор $B_\delta : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-2})$ вполне непрерывен.

Доказательство.

1. Для любой функции $v \in L_2(0, T; V^1)$ при любом $\varphi \in V^2$ при почти всех $t \in (0, T)$ имеем

$$\begin{aligned} |\langle B_\delta(v)(t), \varphi \rangle| &= \left| \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)(t)}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v)(t)|)} \mathcal{E}_{ij}(\varphi) dx \right| \leq \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{|\mathcal{E}_{ij}(v)(t)|}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v)(t)|)} |\mathcal{E}_{ij}(\varphi)| dx \leq \\ &\leq \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{|\mathcal{E}(v)(t)|}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v)(t)|)} |\mathcal{E}(\varphi)| dx \leq \tau^* C \|\varphi\|_{V^2}. \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались неравенством $\frac{|b|}{\max(\delta, |b|)} \leq 1$. Следовательно, при почти всех $t \in (0, T)$ имеет место неравенство

$$\|B_\delta(v)(t)\|_{V^{-2}} \leq \tau^* C.$$

Возводя последнее неравенство в квадрат и интегрируя по t от 0 до T , мы и получим, что $B(v) \in L_2(0, T; V^{-2})$ и имеет место требуемая оценка (3.7). Докажем непрерывность оператора $B_\delta : L_2(0, T; V^1) \rightarrow L_2(0, T; V^{-2})$.

Пусть последовательность v_n сходится к некоторой функции v_0 в $L_2(0, T; V^1)$. Тогда при почти всех $t \in (0, T)$ для произвольного $\varphi \in V^2$ получим:

$$\begin{aligned} &|\langle B_\delta(v_n)(t) - B_\delta(v_0)(t), \varphi \rangle| = \\ &= \left| \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v_n)(t)}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v_n)(t)|)} \mathcal{E}_{ij}(\varphi) dx - \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v_0)(t)}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v_0)(t)|)} \mathcal{E}_{ij}(\varphi) dx \right| \leq \\ &\leq \tau^* \sum_{i,j=1}^n \left| \int_{\Omega} \left(\frac{\mathcal{E}_{ij}(v_n)(t)}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v_n)(t)|)} - \frac{\mathcal{E}_{ij}(v_0)(t)}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v_0)(t)|)} \right) \mathcal{E}_{ij}(\varphi) dx \right| + \\ &+ \tau^* \sum_{i,j=1}^n \left| \int_{\Omega} \left(\frac{\mathcal{E}_{ij}(v_0)(t)}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v_n)(t)|)} - \frac{\mathcal{E}_{ij}(v_0)(t)}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v_0)(t)|)} \right) \mathcal{E}_{ij}(\varphi) dx \right| \leq \\ &\leq \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{|\mathcal{E}_{ij}(v_n)(t) - \mathcal{E}_{ij}(v_0)(t)|}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v_n)(t)|)} |\mathcal{E}_{ij}(\varphi)| dx + \\ &+ \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} |\mathcal{E}_{ij}(v_0)(t)| \left| \frac{1}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v_n)(t)|)} - \frac{1}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v_0)(t)|)} \right| |\mathcal{E}_{ij}(\varphi)| dx \leq \\ &\leq \frac{\tau^*}{\delta} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} |\mathcal{E}(v_n - v_0)(t)| |\mathcal{E}(\varphi)| dx + \frac{\tau^*}{\delta} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} | |\mathcal{E}(v_0)(t)| - |\mathcal{E}(v_n)(t)| | |\mathcal{E}(\varphi)| dx \leq \\ &\leq \frac{2\tau^*}{\delta} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} |\mathcal{E}(v_n - v_0)(t)| |\mathcal{E}(\varphi)| dx \leq \frac{2\tau^* C}{\delta} \|v_n(t) - v_0(t)\|_{V^1} \|\varphi\|_{V^2}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу произвольности φ получаем, что

$$\|B_\delta(v_n)(t) - B_\delta(v_0)(t)\|_{V^{-2}} \leq \frac{2\tau^* C}{\delta} \|v_n(t) - v_0(t)\|_{V^1}.$$

Возведя в квадрат и проинтегрировав, получим:

$$\|B_\delta(v_n) - B_\delta(v_0)\|_{L_2(0, T; V^{-2})} \leq \frac{2\tau^* C}{\delta} \|v_n - v_0\|_{L_2(0, T; V^1)}.$$

То есть $B_\delta(v_n) \rightarrow B_\delta(v_0)$ в $L_2(0, T; V^{-2})$.

2. Аналогично доказательству пункта 3 леммы 3.2 имеем компактное вложение $W_2 \subset Y \subset L_2(0, T; V^1)$. Тогда действие оператора $B_\delta : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-2})$ можно представить в виде следующей композиции: $W_2 \subset Y \subset L_2(0, T; V^1) \xrightarrow{B_\delta} L_2(0, T; V^{-2})$. Здесь первое вложение непрерывно,

второе вложение компактно, а отображение B_δ в силу первого пункта теоремы непрерывно. Таким образом, отображение $B_\delta : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-2})$ непрерывно как суперпозиция непрерывного и вполне непрерывного отображения. \square

Введем также операторы L и N с помощью равенств

$$\begin{aligned} L : W_2 &\rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^1, & L(u) &= (v' + \delta A^3 + \mu Av, v|_{t=0}), \\ N : W_2 &\rightarrow L_2(0, T; V^{-1}) \times V^1, & N(v) &= (B_\delta(v) - K(v), 0). \end{aligned}$$

Лемма 3.4. *Операторы L и N имеют следующие свойства:*

1. оператор $L : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-2}) \times V^1$ непрерывно обратим;
2. оператор $N : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-2}) \times V^1$ компактен.

Доказательство.

1. Непрерывная обратимость оператора следует из приведенной ниже теоремы о разрешимости абстрактной параболической задачи.

Теорема 3.3. *Для любой правой части $f \in L_2(0, T; V^{-1})$ и начального условия $v_0 \in V^1$ задача*

$$\begin{cases} v' + \delta A^3 v + \mu Av = f, \\ v(0) = v_0 \end{cases}$$

имеет единственное решение v в пространстве

$$W_3 = \{v : v \in L_2(0, T; V^4), v' \in L_2(0, T; V^{-2})\},$$

непрерывно зависящее от f и v_0 . Для решения также имеет место оценка

$$\delta \|v\|_{L_2(0, T; V^4)} \leq \sqrt{2\delta + 1} (\|v_0\|_{V^1} + \|f\|_{L_2(0, T; V^{-1})}). \quad (3.8)$$

Доказательство этой теоремы проводится на основе аппроксимационно-топологического подхода к исследованию задач гидродинамики (см. [9]). Сначала рассматриваемая задача аппроксимируется (в уравнение добавляется член $\varepsilon A^3 v'$) и доказывается существование решения приближенного уравнения в пространстве $\{v : v \in C([0, T]; V^4), v' \in L_2(0, T; V^4)\}$. Затем на основе априорных оценок решений, не зависящих от ε , показывается, что из последовательности решений можно извлечь подпоследовательность, сходящуюся слабо к решению исходной задачи при $\varepsilon \rightarrow 0$. Единственность решения получается на основе неравенства Гронуола—Беллмана.

Полное изложение доказательства здесь не приводится в силу своего объема.

2. Компактность оператора $N : W_2 \rightarrow L_2(0, T; V^{-2}) \times V^1$ непосредственно вытекает из компактности его первой компоненты (каждое слагаемое компактно). \square

4. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ

Помимо вспомогательной задачи 3.1, рассмотрим семейство операторных уравнений

$$v' + \delta A^3 v + \mu Av + \lambda B_\delta(v) - \lambda K(v) = \lambda f, \quad \forall \lambda \in [0, 1], \quad (4.1)$$

решение которых удовлетворяет начальному условию $v(0) = \lambda v_0$. Заметим, что при $\lambda = 1$ задача (4.1) совпадает с (3.1). Тогда задача (4.1) с начальным условием $v(0) = \lambda v_0$ может быть переписана в виде

$$v = \lambda L^{-1}((f, v_0) - N(v)), \quad \text{где } \lambda \in [0, 1]. \quad (4.2)$$

Теорема 4.1. *Для решения $v \in W_2$ семейства (4.2) имеют место следующие оценки:*

$$\|v\|_{L_\infty(0, T; V^0)}^2 \leq \frac{C}{\mu} \|f\|_{L_2(0, T; V^{-1})}^2 + \|v_0\|_{V^0}^2, \quad (4.3)$$

$$\mu \|v\|_{L_2(0, T; V^1)}^2 \leq \frac{C}{\mu} \|f\|_{L_2(0, T; V^{-1})}^2 + \|v_0\|_{V^0}^2, \quad (4.4)$$

$$\|v\|_{L_r(0, T; W_2^{1+q}(\Omega))} \leq C, \quad (4.5)$$

$$\delta \|v\|_{L_2(0, T; V^4)} \leq C, \quad (4.6)$$

$$\|v'\|_{L_2(0, T; V^{-2})} \leq C. \quad (4.7)$$

Доказательство. Пусть $v \in W_2$ — решение (4.2). Тогда в силу приведенных выше рассуждений v является решением (4.1) и удовлетворяет начальному условию $v(0) = \lambda v_0$.

Применим обе части (4.1) к функции $v \in W_2$. Имеем

$$\langle v' + \delta A^3 v + \mu A v - \lambda K(v) + \lambda B_\delta(v), v \rangle = \langle \lambda f, v \rangle.$$

Вспоминая определения операторов, получаем следующее равенство:

$$\begin{aligned} \langle v', v \rangle + \delta \int_{\Omega} A^2 v A v \, dx + \mu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla v \, dx - \lambda \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \, dx + \\ + \lambda \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v) \mathcal{E}_{ij}(v)}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v)|)} \, dx = \lambda \langle f, v \rangle. \end{aligned}$$

Преобразуем слагаемые в последнем равенстве:

$$\begin{aligned} \langle v', v \rangle &= \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{V^0}^2; \quad \mu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla v \, dx = \mu \|v\|_{V^1}^2; \\ \delta \int_{\Omega} A^2 v A v \, dx &= -\delta \int_{\Omega} \Delta(Av) Av \, dx = \delta \int_{\Omega} \nabla(Av) : \nabla(Av) \, dx = \delta \|v\|_{V^3}^2; \\ - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i v_j \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \, dx &= -\frac{\lambda}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i \frac{\partial(v_j v_j)}{\partial x_i} \, dx = \\ &= \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial(\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i}{\partial x_i} v_j v_j \, dx = \frac{\lambda}{2} \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} \operatorname{div} u v_j v_j \, dx = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, получим:

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{V^0}^2 + \delta \|v\|_{V^3}^2 + \mu \|v\|_{V^1}^2 + \lambda \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}^2(v)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}} \, dx = \lambda \langle f, v \rangle.$$

Воспользуемся в правой части неравенствами Юнга и Коши:

$$\lambda \langle f, v \rangle = \lambda \|f\|_{V^{-1}} \|v\|_{V^1} \leq \lambda \frac{\|f\|_{V^{-1}}^2}{2\mu} + \frac{\lambda\mu}{2} \|v\|_{V^1}^2 \leq \frac{1}{2\mu} \|f\|_{V^{-1}}^2 + \frac{\mu}{2} \|v\|_{V^1}^2.$$

Заметим, что

$$\lambda \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}^2(v)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}} \, dx \geq 0.$$

Тогда получаем оценку

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{V^0}^2 + \delta \|v\|_{V^3}^2 + \frac{\mu}{2} \|v\|_{V^1}^2 \leq \frac{1}{2\mu} \|f\|_{V^{-1}}^2.$$

Проинтегрировав последнее неравенство от 0 до $t \in [0, T]$, получим следующую оценку:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|v(t)\|_{V^0}^2 - \frac{1}{2} \|v(0)\|_{V^0}^2 + \delta \int_0^t \|v(s)\|_{V^3}^2 \, ds + \frac{\mu}{2} \int_0^t \|v(s)\|_{V^1}^2 \, ds \leq \\ \leq \frac{1}{2\mu} \int_0^t \|f(s)\|_{V^{-1}}^2 \, ds \leq \frac{1}{2\mu} \int_0^T \|f(s)\|_{V^{-1}}^2 \, ds = \frac{1}{2\mu} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2, \end{aligned}$$

которую можно переписать в виде:

$$\frac{1}{2}\|v(t)\|_{V^0}^2 + \delta \int_0^t \|v(s)\|_{V^3}^2 ds + \frac{\mu}{2} \int_0^t \|v(s)\|_{V^1}^2 ds \leq \frac{1}{2\mu} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \frac{1}{2} \|v_0\|_{V^0}^2.$$

Так как каждое слагаемое в левой части последнего неравенства неотрицательно, то получаем следующие оценки:

$$\begin{aligned} \|v(t)\|_{V^0}^2 &\leq \frac{1}{\mu} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \|v_0\|_{V^0}^2 \leq \frac{C}{\mu} \|f\|_{L_2(0,T;V^0)}^2 + \|v_0\|_{V^0}^2 \leq \frac{C\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2}{\mu} + \|v_0\|_{V^0}^2; \\ \mu \int_0^t \|v(s)\|_{V^1}^2 ds &\leq \frac{1}{\mu} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \|v_0\|_{V^0}^2 \leq \frac{C\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2}{\mu} + \|v_0\|_{V^0}^2. \end{aligned}$$

Правые части этих неравенств не зависят от t , поэтому можно перейти к \max по $t \in [0, T]$ в левой части:

$$\begin{aligned} \operatorname{ess\,sup}_{t \in [0,T]} \|v(t)\|_{V^0}^2 &\leq \frac{C\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2}{\mu} + \|v_0\|_{V^0}^2; \\ \mu \int_0^T \|v(s)\|_{V^1}^2 ds &\leq \frac{C\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2}{\mu} + \|v_0\|_{V^0}^2. \end{aligned}$$

Отсюда следуют требуемые неравенства (4.3) и (4.4).

Теперь применим к уравнению (4.1) пробную функцию Av . Получим:

$$\begin{aligned} \langle v', Av \rangle + \delta \int_{\Omega} A^2 v A^2 v dx + \mu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla Av dx - \lambda \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \Delta v_j}{\partial x_i} dx + \\ + \lambda \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max(\delta, |\mathcal{E}(v)|)} \mathcal{E}_{ij}(\Delta v) dx = \lambda \langle f, Av \rangle. \end{aligned}$$

Преобразуем и оценим слагаемые в последнем равенстве:

$$\begin{aligned} \langle v', Av \rangle &= \langle A^{1/2} v', A^{1/2} v \rangle = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{V^1}^2; \quad \delta \int_{\Omega} A^2 v A^2 v dx = \delta \|v\|_{V^4}^2; \\ \mu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla Av dx &= \mu \int_{\Omega} \nabla v \nabla v dx = \mu \|v\|_{V^2}^2; \\ \lambda \langle f, Av \rangle &= \lambda \|f\|_{V^0} \|Av\|_{V^0} \leq \|f\|_{V^0} \|v\|_{V^2} \leq \frac{\mu}{2} \|v\|_{V^2}^2 + \frac{\|f\|_{V^0}^2}{2\mu}; \\ - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \Delta v_j}{\partial x_i} dx &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i}{\partial x_i} v_j \Delta v_j dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \Delta v_j dx = \\ &= \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\operatorname{div} u) v_j \Delta v_j dx - \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} dx - \sum_{j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i \frac{\partial^2 v_j}{\partial x_i \partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} dx = \\ &= - \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} dx - \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \right) dx = \\ &= - \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} dx + \frac{1}{2} \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} (\operatorname{div} u) \frac{\partial v_j}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} dx = - \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_j}{\partial x_k} dx. \end{aligned}$$

Отсюда в силу непрерывности вложения $W_1^1(\Omega) \subset L_{3/2}(\Omega)$ получаем:

$$\begin{aligned} & \lambda \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \Delta v_j}{\partial x_i} dx = \lambda \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i}{\partial x_k} \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \frac{\partial v_i}{\partial x_k} dx \leq \\ & \leq \sum_{i,j,k=1}^n \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i}{\partial x_k} \right|^3 dx \right)^{1/3} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_j}{\partial x_i} \right|^3 dx \right)^{1/3} \left(\int_{\Omega} \left| \frac{\partial v_i}{\partial x_k} \right|^3 dx \right)^{1/3} \leq \|\nabla v\|_{L_3(\Omega)}^3 = \\ & = \|\nabla v\|_{L_{3/2}(\Omega)}^{3/2} \leq C \|\nabla |\nabla v|^2\|_{L_1(\Omega)}^{3/2} \leq C \|\nabla^2 v\|_{L_2(\Omega)}^{3/2} \cdot \|\nabla v\|_{L_2(\Omega)}^{3/2} \leq \frac{3\mu}{4} \|v\|_{V^2}^2 + \frac{C^4}{4\mu^3} \|v\|_{V^1}^6. \end{aligned}$$

Далее рассмотрим следующее слагаемое:

$$\begin{aligned} -\lambda \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}} \mathcal{E}_{ij}(\Delta v) dx &= -\lambda \tau^* \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}} \frac{\partial^2}{\partial x_k^2} \mathcal{E}_{ij}(v) dx = \\ &= \lambda \tau^* \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}} \frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ij}(v) dx. \end{aligned}$$

Дифференцируя функцию $\frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}}$ как сложную функцию от $\mathcal{E}(v)$ (суперпозицию функции $f(x) = \frac{x}{\max\{\delta, x\}}$ и функции $g(v) = \mathcal{E}(v)$), получим:

$$\lambda \tau^* \sum_{i,j,k=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial x_k} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}} \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} dx = \lambda \tau^* \sum_{i,j,k,p,q=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{pq}} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}} \frac{\partial \mathcal{E}_{pq}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} dx.$$

Рассмотрим два случая. Первый случай $\delta \geq |\mathcal{E}(v)|$:

$$\begin{aligned} \lambda \tau^* \sum_{i,j,k,p,q=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{pq}} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}} \frac{\partial \mathcal{E}_{pq}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} dx &= \frac{\lambda \tau^*}{\delta} \sum_{i,j,k,p,q=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial \mathcal{E}_{pq}} \frac{\partial \mathcal{E}_{pq}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} dx = \\ &= \frac{\lambda \tau^*}{\delta} \sum_{i,j,k,p,q=1}^n \int_{\Omega} \delta_{pq}^{ij} \frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{E}_{pq}(v) \frac{\partial}{\partial x_k} \mathcal{E}_{ij}(v) dx = \frac{\lambda \tau^*}{\delta} \|\nabla \mathcal{E}(v)\|_{L_2(\Omega)}^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Второй случай $\delta \leq |\mathcal{E}(v)|$:

$$\begin{aligned} \lambda \tau^* \sum_{i,j,k,p,q=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{pq}} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}} \frac{\partial \mathcal{E}_{pq}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} dx &= \\ &= \lambda \tau^* \sum_{i,j,k,p,q=1}^n \int_{\Omega} \frac{\partial}{\partial \mathcal{E}_{pq}} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{|\mathcal{E}(v)|} \frac{\partial \mathcal{E}_{pq}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} dx = \\ &= \lambda \tau^* \sum_{i,j,k,p,q=1}^n \int_{\Omega} \frac{1}{|\mathcal{E}(v)|} \left(\delta_{pq}^{ij} - \frac{\mathcal{E}_{ij} \mathcal{E}_{pq}}{|\mathcal{E}(v)|^2} \right) \frac{\partial \mathcal{E}_{pq}(v)}{\partial x_k} \frac{\partial \mathcal{E}_{ij}(v)}{\partial x_k} dx \geq 0. \end{aligned}$$

В итоге получим:

$$\lambda \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v)|\}} \mathcal{E}_{ij}(\Delta v) dx \geq 0.$$

Таким образом, получаем оценку

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{V^1}^2 + \mu \|v\|_{V^2}^2 + \delta \|v\|_{V^4}^2 &\leq \frac{3\mu}{4} \|v\|_{V^2}^2 + \frac{C^4}{4\mu^3} \|v\|_{V^1}^6 + \frac{\mu}{8} \|v\|_{V^2}^2 + \frac{2\|f\|_{V^0}^2}{\mu}; \\ \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|v\|_{V^1}^2 + \frac{\mu}{8} \|v\|_{V^2}^2 &\leq \frac{2}{\mu} \|f\|_{V^0}^2 + \frac{C^4}{4\mu^3} \|v\|_{V^1}^6. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Разделим это неравенство на $(1 + \|v\|_{V_1}^2)^2$. Получим:

$$\frac{1}{2} \frac{\frac{d}{dt} \|v\|_{V_1}^2}{(1 + \|v\|_{V_1}^2)^2} + \frac{\mu}{8} \frac{\|v\|_{V_2}^2}{(1 + \|v\|_{V_1}^2)^2} \leq \frac{2}{\mu} \frac{\|f\|_{V_0}^2}{(1 + \|v\|_{V_1}^2)^2} + \frac{C^4}{4\mu^3} \frac{\|v\|_{V_1}^6}{(1 + \|v\|_{V_1}^2)^2}.$$

Так как $\frac{\|f\|_{V_0}^2}{(1 + \|v\|_{V_1}^2)^2} \leq \|f\|_{V_0}^2$ и $\frac{\|v\|_{V_1}^6}{(1 + \|v\|_{V_1}^2)^2} \leq \frac{\|v\|_{V_1}^2 \|v\|_{V_1}^4}{(1 + \|v\|_{V_1}^2)^2} \leq \|v\|_{V_1}^2$, то полученное неравенство можно переписать в виде:

$$\frac{1}{2} \frac{\frac{d}{dt} \|v(t)\|_{V_1}^2}{(1 + \|v(t)\|_{V_1}^2)^2} + \frac{\mu}{8} \frac{\|v(t)\|_{V_2}^2}{(1 + \|v(t)\|_{V_1}^2)^2} \leq \frac{2}{\mu} \|f\|_{V_0}^2 + \frac{C^4}{4\mu^3} \|v\|_{V_1}^2.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по t от 0 до T :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\frac{d}{dt} \|v(t)\|_{V_1}^2}{(1 + \|v(t)\|_{V_1}^2)^2} dt + \frac{\mu}{8} \int_0^T \frac{\|v(t)\|_{V_2}^2}{(1 + \|v(t)\|_{V_1}^2)^2} dt &\leq \frac{2}{\mu} \int_0^T \|f(t)\|_{V_0}^2 dt + \frac{C^4}{4\mu^3} \int_0^T \|v(t)\|_{V_1}^2 dt \leq \\ &\leq \frac{2}{\mu} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \frac{C^4}{4\mu^2} \left(\frac{1}{\mu^2} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \frac{1}{\mu} \|v(t)\|_{V_0}^2 \right). \end{aligned}$$

Воспользуемся тем, что $\frac{1}{2} \frac{1}{(1 + \|v(T)\|_{V_1}^2)^2} \leq \frac{1}{2}$ и

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \int_0^T \frac{\frac{d}{dt} \|v(t)\|_{V_1}^2}{(1 + \|v(t)\|_{V_1}^2)^2} dt &= -\frac{1}{2} \left(\frac{1}{(1 + \|v(T)\|_{V_1}^2)^2} - \frac{1}{(1 + \|v(0)\|_{V_1}^2)^2} \right) = \\ &= \frac{1}{2} \frac{1}{(1 + \|v(0)\|_{V_1}^2)^2} - \frac{1}{2} \frac{1}{(1 + \|v(T)\|_{V_1}^2)^2}. \end{aligned}$$

Получим неравенство

$$\int_0^T \frac{\|v(t)\|_{V_2}^2}{(1 + \|v(t)\|_{V_1}^2)^2} dt \leq C, \quad (4.9)$$

где $C = \frac{8}{\mu} \left(\frac{2}{\mu} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \frac{C^4}{4\mu^2} \left(\frac{1}{\mu} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \|v_0\|_{V_0}^2 \right) + 1 \right)$.

Теперь выберем r, p, q так, чтобы: $q \in (0, \frac{1}{2})$, $r = \frac{2}{1+2q}$, а $p = \frac{2}{r(1-q)}$, $1 = \frac{1}{p} + \frac{1}{p'}$. По интерполяционному неравенству и неравенству Гельдера получаем:

$$\int_0^T \|v\|_{W_2^{1+q}}^r dx \leq \int_0^T \|v\|_{W_2^2}^{qr} \|v\|_{W_2^2}^{r(1-q)} dx \leq \left(\int_0^T \|v\|_{W_2^2}^{rp(1-q)} dx \right)^{1/p} \left(\int_0^T \|v\|_{W_2^2}^{qr'r} dx \right)^{1/p'}.$$

Рассмотрев коэффициенты так, что $rp(1-q) = 2$ и $rqp' = \frac{2}{3}$, получим:

$$\int_0^T \|v\|_{W_2^2}^{\frac{2}{3}} dx \leq C \left(\int_0^T \frac{\|v\|_{V_2}^2}{(1 + \|v(s)\|_{V_1}^2)^2} ds \right)^{1/3} \left(\int_0^T (1 + \|v\|_{V_2}^2) ds \right)^{2/3}.$$

Первый множитель ограничен вследствие (4.9), второй из-за (4.8). Отсюда получаем оценку:

$$\|v\|_{L_r(0,T;W_2^{1+q})} \leq C.$$

Для получения оценок (4.6) и (4.7) заметим, что если v является решением операторного уравнения (3.1), то имеет место равенство:

$$v' + \delta A^3 v + \mu A v = -\lambda B_\delta(v) + \lambda K(v) + \lambda f.$$

Следовательно:

$$\|v' + \delta A^3 v + \mu A v\|_{L_2(0,T;V^{-2})} = \|-\lambda B_\delta(v) + \lambda K(v) + \lambda f\|_{L_2(0,T;V^{-2})}. \quad (4.10)$$

В силу неравенства (3.8), левую часть можно оценить следующим образом:

$$\delta \|v\|_{L_2(0,T;V^4)} \leq \sqrt{2\delta+1} (\|v_0\|_{V^1} + \|v' + \delta A^3 v + \mu A\|_{L_2(0,T;V^2)}),$$

откуда

$$\|v' + \delta A^3 v + \mu A\|_{L_2(0,T;V^{-2})} \geq \frac{\delta}{\sqrt{2\delta+1}} \|v\|_{L_2(0,T;V^4)} - \|v_0\|_{V^1}.$$

Правую часть (4.10) в силу неравенств (3.3), (3.7) можно оценить следующим образом:

$$\begin{aligned} & \| -\lambda B_\delta(v) + \lambda K(v) + \lambda f \|_{L_2(0,T;V^{-2})} \leq \lambda \|B_\delta(v)\|_{L_2(0,T;V^{-2})} + \lambda \|K(v)\|_{L_2(0,T;V^{-2})} + \\ & + \lambda \|f\|_{L_2(0,T;V^{-2})} \leq \|B_\delta(v)\|_{L_2(0,T;V^{-2})} + \|K(v)\|_{L_2(0,T;V^{-2})} + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-2})} \leq C + C\|v\|_{L_\infty(0,T;V^0)} + \\ & + \|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + C\|f\|_{L_2(0,T;V^0)} \leq C + \frac{C}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{C\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2}{\mu} + \|v_0\|_{V^0}^2 \right) + C\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\frac{\delta}{\sqrt{2\delta+1}} \|v\|_{L_2(0,T;V^4)} \leq C + \frac{C}{\sqrt{\mu}} \left(C \frac{\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2}{\mu} + \|v_0\|_{V^0}^2 \right) + C\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v_0\|_{V^1}.$$

Умножая последнее неравенство на $\sqrt{2\delta+1}$, получим

$$\begin{aligned} \delta \|v\|_{L_2(0,T;V^4)} & \leq \sqrt{2\delta+1} \left(C + \frac{C}{\sqrt{\mu}} \left(C \frac{\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2}{\mu} + \|v_0\|_{V^0}^2 \right) + C\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v_0\|_{V^1} \right) \leq \\ & \leq \sqrt{3} \left(C + \frac{C}{\sqrt{\mu}} \left(C \frac{\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2}{\mu} + \|v_0\|_{V^0}^2 \right) + C\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v_0\|_{V^1} \right). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\delta \leq 1$. Обозначив последнюю часть неравенства через C , мы получаем требуемое неравенство (4.6).

Аналогично $v' = -\delta A^3 v - \mu A v - \lambda B_\delta(v) + \lambda K(v) + \lambda f$. Отсюда

$$\begin{aligned} \|v'\|_{L_2(0,T;V^{-2})} & = \| -\delta A^3 v - \mu A v - \lambda B_\delta(v) + \lambda K(v) + \lambda f \|_{L_2(0,T;V^{-2})} \leq \delta \|v\|_{L_2(0,T;V^4)} + \\ & + \mu C \|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + C + \frac{C}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{C\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2}{\mu} + \|v_0\|_{V^0}^2 \right) + C\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leq \\ & \leq C + \mu C \sqrt{\frac{C}{\mu} \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + \|v_0\|_{V^0}^2} + \frac{C}{\sqrt{\mu}} \left(\frac{C\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2}{\mu} + \|v_0\|_{V^0}^2 \right). \end{aligned}$$

Обозначив правую часть последнего неравенства через C , мы получим требуемую оценку на (4.7). Отметим, что константа C в этой оценке не зависит от δ . \square

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ АППРОКСИМАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ

Теперь мы готовы сформулировать теорему о существовании решений операторного уравнения (3.1). Для ее доказательства будет использоваться теория топологической степени Лере—Шаудера для вполне непрерывных векторных полей.

Теорема 5.1. *Для операторного уравнения (3.1) существует хотя бы одно решение $v \in W_2$.*

Доказательство. По теореме 4.1 все решения семейства операторных уравнений (4.2) удовлетворяют априорным оценкам (4.6) и (4.7). Из оценок (4.6) и (4.7) следует, что $\|v\|_{W_2} \leq C$, где $C > 0$ — некоторая постоянная. Тогда все решения операторного уравнения лежат в шаре $B_R \subset W_2$ с центром в нуле и радиусом $R = C + 1$.

По лемме 3.4 оператор $L : W_2 \rightarrow L_2(0,T;V^{-2}) \times V^1$ непрерывно обратим, тогда ни одно решение семейства уравнений (4.2) не принадлежит границе того же шара B_R .

В силу лемм 3.2, 3.3, 3.4 и доказанных свойств операторов $K(v)$, B_δ , $N(v)$, оператор $I - \lambda L^{-1}((f, v_0) - N(v)) : L_2(0,T;V^{-2}) \times V^1 \rightarrow W_2$ является вполне непрерывным.

Таким образом, вполне непрерывное векторное поле $v - \lambda L^{-1}((f, v_0) - N(v))$ не вырождено на границе шара B_R , а значит, для этого векторного поля определена степень Лере—Шаудера

$$\deg_{LS}(I - \lambda L^{-1}((f, v_0) - N(v)), B_R, 0).$$

По свойствам гомотопической инвариантности и нормировки степени получаем, что

$$\deg_{LS}(I - L^{-1}((f, v_0) - N(v)), B_R, 0) = \deg_{LS}(I, B_R, 0) = 1.$$

Так как эта степень отлична от нуля, то существует хотя бы одно решение $v \in W_2$ операторного уравнения (3.1). Таким образом, из вышеприведенных рассуждений следует, что аппроксимационная задача 3.1 имеет хотя бы одно решение $v \in W_2$. \square

6. ПРЕДЕЛЬНЫЙ ПЕРЕХОД

В этом разделе мы перейдем в аппроксимационной задаче 3.1 к пределу при $\delta \rightarrow 0$. Тем самым будет доказана теорема 2.1.

В силу теоремы 5.1 для каждого $\delta > 0$ существует решение аппроксимационной задачи 3.1. То есть существует $v \in W_2$, которая для любого $\varphi \in V^2$ удовлетворяет интегральному равенству

$$\begin{aligned} \langle v'_\delta, \varphi \rangle - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v_\delta)_i (v_\delta)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \mu \int_{\Omega} \nabla v_\delta : \nabla \varphi dx + \tau^* \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v_\delta) \mathcal{E}_{ij}(\varphi)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v_\delta)|\}} dx + \\ + \delta \int_{\Omega} A^2 v_\delta A \varphi dx = \int_{\Omega} f_\delta \varphi dx \end{aligned}$$

и начальному условию $v_\delta(0) = v_0$.

В силу априорных оценок (4.3)–(4.7) имеют место следующие сходимости:

$$\begin{aligned} v_\delta \rightarrow v \text{ слабо в } L_2(0, T; V^1); \quad v_\delta \rightarrow v \text{ сильно в } L_2(0, T; L_4(\Omega)); \\ v_\delta \rightarrow v \text{ сильно в } L_r(0, T; V^1); \quad v'_\delta \rightarrow v' \text{ слабо в } L_2(0, T; V^{-2}); \\ \delta v_\delta \rightarrow u \text{ слабо в } L_2(0, T; V^4). \end{aligned}$$

Из указанных сходимостей и в силу непрерывности оператора $\Delta_{\alpha}^{-1} : L_2(0, T; V^1) \rightarrow L_2(0, T; V^3)$ получим, что:

$$\begin{aligned} \langle v'_\delta, \varphi \rangle &\rightarrow \langle v, \varphi \rangle \text{ при } \delta \rightarrow 0; \\ \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v_\delta)_i (v_\delta)_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx &\rightarrow \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \text{ при } \delta \rightarrow 0; \\ \mu \int_{\Omega} \nabla v_\delta : \nabla \varphi dx &\rightarrow \mu \int_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi dx \text{ при } \delta \rightarrow 0; \\ \delta \int_{\Omega} A^2 v_\delta A \varphi dx &\rightarrow \int_{\Omega} A^2 w A \varphi dx \text{ при } \delta \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Однако в смысле распределений $\delta A^2 v$ сходится к нулю. Отсюда, в силу единственности предела, $w = 0$.

Далее, так как $\frac{\mathcal{E}_{ij}(v_\delta)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v_\delta)|\}}$ ограничено сверху константой, не зависящей от δ , то это выражение сходится к некоторой функции w слабо, например, в $L_p(0, T; L_p(\Omega))$ для любого $1 < p < \infty$.

Покажем теперь, что на самом деле

$$\mu \int_{\Omega} \nabla v_\delta : \nabla \varphi dx + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} \frac{\mathcal{E}_{ij}(v_\delta) \mathcal{E}_{ij}(\varphi)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v_\delta)|\}} dx \rightarrow \int_{\Omega} \sigma : \mathcal{E}(\varphi) dx$$

при $\delta \rightarrow 0$ для функции $\sigma \in L_2(0, T; L_2(\Omega))$, удовлетворяющей при почти всех $(t, x) \in [0, T] \times \Omega$ реологическому соотношению (1.4).

Для этого введем последовательность функций

$$\sigma^\delta = 2\mu\mathcal{E}(v_\delta) + \frac{\tau^*\mathcal{E}(v_\delta)}{\max\{\delta, |\mathcal{E}(v_\delta)|\}}$$

и покажем, что она сходится в некотором смысле к функции $\sigma = 2\mu\mathcal{E}(v) + \frac{\tau^*}{|\mathcal{E}(v)|}\mathcal{E}(v)$.

В силу поточечной сходимости имеем, что при $\mathcal{E}(v_\delta) \neq 0$ последовательность $\sigma^\delta \rightarrow \sigma$.

Рассмотрим множество $A = \{[0, T] \times \Omega\} \cap \{|\mathcal{E}(v)| = 0\} \cap \{|\sigma| > \tau^*\}$ и предположим, что $\text{mes } A = m > 0$. Определим $Q_T = [0, T] \times \Omega$:

$$\chi_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{|\sigma|} 1_A \in L_\infty(Q_T), \quad I^\delta = \int_{Q_T} \sigma_{ij}^\delta \chi_{ij} dx dt, \quad I = \int_{Q_T} \sigma_{ij} \chi_{ij} dx dt.$$

Обозначим $v_0 = I - m\tau^*$ и заметим, что $v_0 > 0$. Так как $I^\delta \rightarrow I$ (в силу слабой сходимости $\sigma^\delta \rightarrow \sigma$), то существует такое δ_0 , что для любого $\delta < \delta_0$ выполнено $I^\delta > \frac{v_0}{2} + m\tau^*$. Обозначим $\delta_1 = \min\left\{\delta_0, \frac{v_0}{24\mu|Q|}\right\}$. Разделим A на три подобласти:

$$A_1 = Q \cap \{|\mathcal{E}(v_\delta)| \leq \delta\}, \quad A_2 = Q \cap \{\delta < |\mathcal{E}(v_\delta)| \leq \delta_1\}, \quad A_3 = Q \cap \{|\mathcal{E}(v_\delta)| > \delta_1\}.$$

Разобьем интеграл I_δ на три части $I_\delta = \sum_{k=1}^3 \int \sigma : \chi dx = \sum_{k=1}^3 I_k$ и рассмотрим их по отдельности:

$$I_1 = \int_{A_1} \left(2\mu + \frac{\tau^*}{\delta}\right) \mathcal{E}(v_\delta) : \chi dx dt, \quad |I_1| \leq 2\mu\delta_1 \text{mes } Q + \tau^* \text{mes } A_1 \cap A,$$

$$I_2 = \int_{A_2} \left(2\mu + \frac{\tau^*}{|\mathcal{E}(v)|}\right) \mathcal{E}(v_\delta) : \chi dx dt, \quad |I_2| \leq 2\mu\delta_1 \text{mes } Q + \tau^* \text{mes } A_2 \cap A,$$

$$I_3 = \int_{A_3} \sigma^\delta : \chi dx dt, \quad |I_3| \leq C(1 + \|v_\delta\|_{V^1})I(\delta_1, \delta),$$

где $I(\delta_1, \delta) = (\text{mes}(A \cap A_3))^{1/2}$.

Заметим, что $I_\delta > \frac{v_0}{2} + \mu\tau^*$ и $|I_\delta| \leq \sum_k |I_k|$, получим

$$\frac{v_0}{2} + \mu\tau^* < |I_\delta| \leq 4\mu\delta_1 \text{mes } Q + CI(\delta_1, \delta) + m\tau^* \leq CI(\delta_1, \delta) + m\tau^* + \frac{v_0}{6}.$$

Получили противоречие с тем, что $I(\delta_1, \delta) \rightarrow 0$ при $\delta \rightarrow 0$, что следует из того, что $|\mathcal{E}(v_\delta)| \rightarrow 0$ почти всюду на A , следовательно, $|\mathcal{E}(v_\delta)| \rightarrow 0$ по мере. Итак, $|\sigma| \leq \tau^*$ при $|\mathcal{E}(v)| = 0$.

Положим $B = Q_T \cap \{\mathcal{E}(v) \neq 0\}$. В силу выбора σ^δ имеем, что $\sigma^\delta \rightarrow \sigma$ почти всюду на B . Для любого измеримого множества $Q' \subset Q_T$ и $\chi_{ij} \in L_\infty(Q_T)$ такого, что $\chi_{ij}|_{Q_T \setminus B} = 0$, имеем

$$\left| \int_{Q'} \sigma^\delta : \chi dx dt \right| \leq \|\chi\|_{L_\infty(Q_T)} (\text{mes}(Q'))^{1/2} (1 + \|v_\delta\|_{L_2(0, T; V^1)}).$$

Следовательно, по теореме Витали

$$\int_B \sigma^\delta : \chi dx dt \rightarrow \int_B \sigma : \chi dx dt.$$

С другой стороны, $\sigma^\delta \rightarrow \sigma$ слабо в $L_2(Q_T)$. Отсюда и следует выполнение реологического соотношения при $|\mathcal{E}(v)| \neq 0$.

Таким образом, переходя к пределу при $\delta \rightarrow 0$ в каждом из интегралов, получим, что пара (v, σ) удовлетворяет при почти всех $t \in (0, T)$ для любого $\varphi \in V^2$ равенству

$$\langle v', \varphi \rangle - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} \sigma : \mathcal{E}(\varphi) dx = \int_{\Omega} f \varphi dx,$$

и реологическому соотношению

$$\sigma = \begin{cases} 2\mu \mathcal{E}(v) + \tau^* \frac{\mathcal{E}(v)}{|\mathcal{E}(v)|}, & \text{если } |\mathcal{E}(v)| \neq 0, \\ |\sigma| \leq \tau^*, & \text{если } |\mathcal{E}(v)| = 0. \end{cases}$$

Это и завершает доказательство теоремы 2.1.

7. СХОДИМОСТЬ РЕШЕНИЙ ПРИ $\alpha \rightarrow 0$

В данном разделе рассмотрим вопрос сходимости решений альфа-модели Бингама. Поскольку при $\alpha = 0$ рассматриваемая модель должна совпадать с исходной моделью Бингама, естественно ожидать и сходимости решений альфа-модели к решениям исходной модели при $\alpha \rightarrow 0$. Прежде чем непосредственно перейти к исследованию данного вопроса, мы введем необходимые понятия. Рассмотрим следующую начально-краевую задачу, соответствующую исходной модели Бингама:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^n v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} + \nabla p - \operatorname{Div} \sigma = f, \quad (7.1)$$

$$\sigma = \begin{cases} 2\mu \mathcal{E}(v) + \tau^* \frac{\mathcal{E}(v)}{|\mathcal{E}(v)|}, & \text{если } |\mathcal{E}(v)| \neq 0, \\ |\sigma| \leq \tau^*, & \text{если } |\mathcal{E}(v)| = 0, \end{cases} \quad (7.2)$$

$$\operatorname{div} v(t, x) = 0, \quad v|_{\partial\Omega} = 0, \quad v|_{t=0} = v_0. \quad (7.3)$$

Пусть $f \in L_2(0, T; V^{-1})$ и $v_0 \in V^1$. Сформулируем определение слабого решения для начально-краевой задачи (7.1)–(7.3).

Определение 7.1. Пара функций $(v, \sigma) \in W_1 \times L_2(0, T; L_2(\Omega))$ называется *слабым решением* начально-краевой задачи (7.1)–(7.3) для альфа-модели Бингама, если для всех $\varphi \in V^1$ и почти всех $t \in (0, T)$ она удовлетворяет равенству

$$\langle v', \varphi \rangle - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} \sigma : \mathcal{E}(\varphi) dx = \int_{\Omega} f \varphi dx,$$

а также реологическому соотношению (7.2) и начальному условию $v|_{t=0} = v_0$.

Таким образом, в силу теоремы 2.1 при каждом фиксированном α задача (1.3)–(1.7) имеет слабое решение. Основная цель данного раздела — изучить сходимость слабых решений задачи (1.3)–(1.7) к слабым решениям задачи (7.1)–(7.3) при $\alpha \rightarrow 0$. Для этого рассмотрим последовательность чисел α_m таких, что $\alpha_m \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$, и еще одно семейство вспомогательных задач, зависящих от параметра α_m :

$$\frac{\partial v^m}{\partial t} + \sum_{i=1}^n u_i^m \frac{\partial v^m}{\partial x_i} + \nabla p - \operatorname{Div} \sigma^m = f, \quad (7.4)$$

$$\sigma^m = \begin{cases} 2\mu \mathcal{E}(v^m) + \tau^* \frac{\mathcal{E}(v^m)}{|\mathcal{E}(v^m)|}, & \text{если } |\mathcal{E}(v^m)| \neq 0, \\ |\sigma^m| \leq \tau^*, & \text{если } |\mathcal{E}(v^m)| = 0, \end{cases} \quad (7.5)$$

$$u^m = (I - \alpha_m^2 \Delta)^{-1} v^m, \quad (7.6)$$

$$\operatorname{div} v^m = 0, \quad v^m|_{\partial\Omega} = 0, \quad v^m|_{t=0} = v_0. \quad (7.7)$$

По доказанной теореме 2.1 при каждом α_m существует слабое решение (v^m, σ^m) вспомогательной задачи (7.4)–(7.7). Тогда для всех $\varphi \in V^2$ при почти всех $t \in (0, T)$ имеет место равенство

$$\langle (v^m)', \varphi \rangle - \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (\Delta_{\alpha}^{-1} v)_i^m v_j^m \frac{\partial \varphi_i}{\partial x_j} dx + \int_{\Omega} \sigma^m : \mathcal{E}(\varphi) dx = \int_{\Omega} f \varphi dx. \quad (7.8)$$

В предельном переходе (пункт 6) при доказательстве теоремы 2.1 получаем, что полученное решение v задачи (1.3)–(1.7) удовлетворяет оценкам (4.3), (4.4), (4.7), из которых следует, что при $m \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} v^m &\rightharpoonup v^* \quad \text{слабо в } L_2(0, T; V^1), & v^m &\rightharpoonup v^* \quad \text{слабо в } L_{\infty}(0, T; V^0), \\ (v^m)' &\rightharpoonup (v^*)' \quad \text{слабо в } L_{4/3}(0, T; V^{-1}). \end{aligned}$$

Используя эти сходимости, перейдем к пределу в равенстве (7.8). Рассмотрим отдельно слагаемое с оператором K .

$$\begin{aligned} |\langle K(v^m), \varphi \rangle - \langle K(v^*), \varphi \rangle| &= \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n u_i^m v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i^* v_j^* \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| = \\ &= \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \left((u_i^m - v_i^m) v_j^m + (v_i^m - v_i^*) v_j^m + (v_j^m - v_j^*) v_i^* \right) \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (u_i^m - v_i^m + \alpha_m^2 \Delta u_i^m) v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| + \\ &+ \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (v_i^m - v_i^*) v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| + \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (v_j^m - v_j^*) v_i^* \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right|. \end{aligned}$$

Отдельно оценим каждое слагаемое. Используя неравенство Гельдера, а также непрерывность вложения $V^1 \subset L_4(\Omega)$, для всех $\varphi \in V^2$ получим

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n \alpha_m^2 \Delta u_i^m v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx \right| &\leq \alpha_m \sum_{i,j=1}^n \left(\int_{\Omega} |\alpha_m \Delta u_i^m|^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} \left| v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right|^2 dx \right)^{1/2} \leq \\ &\leq \alpha_m \sum_{i,j=1}^n \|\alpha_m \Delta u_i^m\|_{L_2(\Omega)} \|v_j^m\|_{L_4(\Omega)} \left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right\|_{L_4(\Omega)} \leq C \alpha_m \sum_{i,j=1}^n \|\alpha_m \Delta u_i^m\|_{L_2(\Omega)} \|v_j^m\|_{V^1} \left\| \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} \right\|_{V^1} \leq \\ &\leq C \alpha_m \|\alpha_m \Delta u^m\|_{L_2(\Omega)} \|v^m\|_{V^1} \|\varphi\|_{V^2}. \end{aligned}$$

Остальные слагаемые оцениваются аналогичным образом. Таким образом,

$$\begin{aligned} |\langle K(v^m), \varphi \rangle - \langle K(v^*), \varphi \rangle| &\leq C (\alpha_m \|\alpha_m \Delta u^m\|_{L_2(\Omega)} \|v^m\|_{V^1} \|\varphi\|_{V^2} + \|v^m - v^*\|_{L_4(\Omega)} \|v^m\|_{L_4(\Omega)} \|\varphi\|_{V^1} + \\ &+ \|v^m - v^*\|_{L_4(\Omega)} \|v^*\|_{L_4(\Omega)} \|\varphi\|_{V^1}) \leq C (\alpha_m \|\alpha_m \Delta u^m\|_{L_2(\Omega)} \|v^m\|_{V^1} + \|v^m - v^*\|_{L_4(\Omega)} \|v^m\|_{V^1} + \\ &+ \|v^m - v^*\|_{L_4(\Omega)} \|v^*\|_{V^1}) \|\varphi\|_{V^2}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \|K(v^m) - K(v^*)\|_{V^{-2}} &\leq C (\alpha_m \|\alpha_m \Delta u^m\|_{L_2(\Omega)} \|v^m\|_{V^1} + \\ &+ \|v^m - v^*\|_{L_4(\Omega)} \|v^m\|_{V^1} + \|v^m - v^*\|_{L_4(\Omega)} \|v^*\|_{V^1}). \end{aligned}$$

Проинтегрируем обе части последнего неравенства по t в пределах от 0 до T . Применив неравенство Гельдера, заключаем, что

$$\int_0^T \|K(v^m) - K(v^*)\|_{V^{-2}} dt \leq \alpha_m C \int_0^T \|\alpha_m \Delta u^m\|_{L_2(\Omega)} \|v^m\|_{V^1} dt + C \int_0^T \|v^m - v^*\|_{L_4(\Omega)} \|v^m\|_{V^2} dt +$$

$$\begin{aligned}
& + C \int_0^T \|v^m - v^*\|_{L_4(\Omega)} \|v^*\|_{V^1} dt \leq \alpha_m C \left(\int_0^T \|\alpha_m \Delta u^m\|_{L_2(\Omega)}^2 dt \right)^{1/2} \left(\int_0^T \|v^m\|_{V^1}^2 dt \right)^{1/2} + \\
& + C \|v^m - v^*\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} \|v^m\|_{L_2(0,T;V^1)} + C \|v^m - v^*\|_{L_2(0,T;L_4(\Omega))} \|v^*\|_{L_2(0,T;V^1)}. \quad (7.9)
\end{aligned}$$

Так как $v^m \rightarrow v^*$ слабо в $L_2(0, T; V^1)$ и $(v^m)' \rightarrow (v^*)'$ слабо в $L_{4/3}(0, T; V^{-1})$, то в силу теоремы Обена—Симона [26] $v^m \rightarrow v^*$ сильно в $L_2(0, T; L_4(\Omega))$. Таким образом, получаем, что два слагаемых в неравенстве (7.9) стремятся к нулю. Напомним, что

$$\|v\|_{V^1}^2 = \|u - \alpha^2 \Delta u\|_{V^1}^2 = \|u\|_{V^1}^2 + 2\|\alpha \nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \alpha^4 \|\Delta u\|_{L_2(\Omega)}^2.$$

Поэтому

$$\int_0^T \|\alpha \Delta u\|_{L_2(\Omega)}^2 dt \leq \frac{1}{2} \int_0^T \|v\|_{V^1}^2 dt \leq \frac{C}{2} (\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + 1). \quad (7.10)$$

Таким образом, в силу неравенств (7.9) и (7.10), а также указанных сходимостей, получим

$$\int_0^T \|K(v^m) - K(v^*)\|_{V^{-2}} dt \leq \alpha_m \frac{C}{2} (\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + 1) \rightarrow 0$$

при $\alpha_m \rightarrow 0$. Следовательно, $K(v^m) \rightarrow K(v^*)$ сильно в $L_1(0, T; V^{-2})$, а значит, и в пространстве $\mathcal{D}'(0, T; V^{-2})$.

Для установления сходимостей в остальных слагаемых равенства (7.8) мы полностью повторим рассуждения, которые были проведены при доказательстве предельного перехода в предыдущем разделе. Все эти слагаемые сходятся в пространстве $L_{4/3}(0, T; V^{-1})$, а значит, и в пространстве $\mathcal{D}'(0, T; V^{-2})$.

Таким образом, переходя в равенстве (7.8) к пределу при $m \rightarrow \infty$ получим, что предельные функции v^* и σ^* удовлетворяют равенству

$$\langle (v^*)', \varphi \rangle - \int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n v_i^* v_j^* \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \int_{\Omega} \sigma^* : \mathcal{E}(\varphi) dx = \langle f, \varphi \rangle.$$

Следовательно, пара (v^*, σ^*) согласно определению 7.1 является слабым решением начально-краевой задачи (7.1)–(7.3) для пробной функции $\varphi \in V^2$. Однако, заметим, что функция v^* в силу полученных сходимостей удовлетворяет оценкам (4.3), (4.4), (4.7). Следовательно, каждое слагаемое последнего равенства выполнено и для произвольной пробной функции $\varphi \in V^1$. Таким образом, доказана сходимость слабых решений альфа-модели (7.4)–(7.7) к слабым решениям начально-краевой задачи (7.1)–(7.3). Теорема 2.2 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Агранович М. С., Вишик М. И. Эллиптические граничные задачи с параметром и параболические задачи общего вида // Усп. мат. наук. — 1964. — 19, № 3. — С. 53–161.
2. Гольдштейн Р. В., Городцов В. А. Механика сплошных сред. Ч. 1. — М.: Наука, Физматлит, 2000.
3. Звягин А. В. Разрешимость задачи термовязкоупругости для альфа-модели Лере // Изв. ВУЗов. Сер. Мат. — 2016. — № 10. — С. 70–75.
4. Звягин А. В. Оптимальное управление с обратной связью для альфа-модели Лере и альфа-модели Навье—Стокса // Докл. РАН. — 2019. — 486, № 5. — С. 527–530. — DOI: [10.31857/S0869-56524865527-530](https://doi.org/10.31857/S0869-56524865527-530).
5. Звягин А. В. О слабой разрешимости и сходимости решений дробной альфа-модели Фойгта движения вязкоупругой среды // Усп. мат. наук. — 2019. — 74, № 3. — С. 189–190. — DOI: [10.4213/rm9880](https://doi.org/10.4213/rm9880).
6. Звягин А. В. Альфа-модель Навье—Стокса с вязкостью, зависящей от температуры // Докл. РАН. — 2020. — 491, № 1. — С. 53–56. — DOI: [10.31857/S2686954320020265](https://doi.org/10.31857/S2686954320020265).
7. Звягин А. В. Исследование слабой разрешимости дробной альфа-модели Фойгта // Изв. РАН. Сер. Мат. — 2021. — 85, № 1. — С. 66–97. — DOI: [10.4213/im9020](https://doi.org/10.4213/im9020).
8. Звягин А. В., Звягин В. Г., Поляков Д. М. Разрешимость альфа-моделей гидродинамики // Вестн. ВГУ. Сер. Физ. Мат. — 2016. — № 2. — С. 72–93.

9. Звягин В. Г. Аппроксимационно-топологический подход к исследованию математических задач гидродинамики// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2012. — 46. — С. 92–119.
10. Звягин В. Г., Звягин А. В., Турбин М. В. Оптимальное управление с обратной связью для модели Бингама с периодическими условиями по пространственным переменным// Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2018. — 477. — С. 54–86.
11. Звягин В. Г., Турбин М. В. Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. — М.: Кранд, 2012.
12. Серегин Г. А. О динамической системе, порожденной двумерными уравнениями движения среды Бингама// Зап. науч. сем. ЛОМИ. — 1991. — 188. — С. 128–142.
13. Темам Р. Уравнения Навье—Стокса. Теория и численный анализ. — М.: Мир, 1987.
14. Agmon S. On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems// Commun. Pure Appl. Math. — 1962. — 15. — С. 119–147.
15. Chen S., Foias C., Holm D. D., Olson E., Titi E. S., Wynne S. Camassa–Holm equations as a closure model for turbulent channel and pipe flow// Phys. Rev. Lett. — 1998. — 81, № 24. — С. 5338–5341. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.81.5338](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.81.5338).
16. Doraiswamy D. The origin of rheology: a short historical excursion// Rheol. Bull. — 2002. — 71, № 1. — С. 7–17.
17. Holm D. D., Marsden J. E., Ratiu T. S. The Euler–Poincaré models of ideal fluids with nonlinear dispersion// Phys. Rev. Lett. — 1998. — 80, № 19. — С. 4173–4177. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.80.4173](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.4173).
18. Holm D. D., Marsden J. E., Ratiu T. S. The Euler–Poincaré equations and semidirect products with applications to continuum theories// Adv. Math. — 1998. — 137, № 1. — С. 1–81. — DOI: [10.1006/aima.1998.1721](https://doi.org/10.1006/aima.1998.1721).
19. Kim J. U. On the initial-boundary value problem for a Bingham fluid in a three dimensional domain// Trans. Am. Math. Soc. — 1987. — 304, № 2. — С. 751–770. — DOI: [10.2307/2000740](https://doi.org/10.2307/2000740).
20. Lemarie-Rieusset P. G. The Navier–Stokes problem in the 21st century. — Boca Raton: CRC Press, 2016.
21. Leray J. Sur le mouvement d'un liquide visqueux emplissant l'espace// Acta Math. — 1934. — 63, № 1. — С. 193–248. — DOI: [10.1007/BF02547354](https://doi.org/10.1007/BF02547354).
22. Lions J. L., Magenes E. Problemes aux limites non homogenes et applications. — Paris: Dunod, 1968.
23. Polyakov D. M., Zvyagin A. Dissipative solvability of Jeffreys–Oldroyd α -model// Topol. Methods Nonlinear Anal. — 2021. — 57, № 2. — С. 465–488. — DOI: [10.12775/TMNA.2020.044](https://doi.org/10.12775/TMNA.2020.044).
24. Schwedoff Th. Recherches experimentales sur la cohesion des liquides// J. Phys. Theor. Appl. — 1890. — 9, № 1. — С. 34–46. — DOI: [10.1051/jphysap:01890009003401](https://doi.org/10.1051/jphysap:01890009003401).
25. Shamlou P. Fine solid suspension and rheology// Chem. Eng. (London). — 1984. — 403. — С. 31–34.
26. Simon J. Compact sets in the space $L_p(0, T; B)$ // Ann. Mat. Pura Appl. (4). — 1987. — 146. — С. 65–96.
27. Shelukhin V. V. Bingham viscoplastic as a limit of non-Newtonian fluids// J. Math. Fluid Mech. — 2002. — 4, № 2. — С. 109–127. — DOI: [10.1007/s00021-002-8538-7](https://doi.org/10.1007/s00021-002-8538-7).
28. Souza Mendes P. R., Dutra E. S. S. Viscosity function for yield-stress liquids// Appl. Rheol. — 2004. — 14, № 6. — С. 296–302. — DOI: [10.1515/arh-2004-0016](https://doi.org/10.1515/arh-2004-0016).

А. В. Звягин

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: zvyagin.a@mail.ru, РИНЦ SPIN-код: 1346-5864, РИНЦ AuthorID: [641070](https://elibrary.ru/author_index.action?id=641070), ResearcherID: [M-7279-2016](https://orcid.org/0000-0002-3858-0827), Scopus: [55656343100](https://orcid.org/55656343100), ORCID: [0000-0002-3858-0827](https://orcid.org/0000-0002-3858-0827)

Н. В. Толстой

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: nikolaitolstoi@vk.com

DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-604-625](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-604-625)EDN: [MBVBCB](https://www.edn.ru/mbvbc3b)

UDC 517.957

Research article

A study of the solvability of the Bingham alpha model

A. V. Zvyagin and N. V. Tolstoy

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. This article studies the solvability of the initial-boundary value problem for the alpha model of a Bingham-type viscoplastic fluid with periodic conditions on the spatial variables. Using an approximation-topological approach, we prove the existence of weak solutions to the alpha model under study and establish the convergence of the alpha model solutions to the solutions of the original model as the alpha parameter tends to zero.

Keywords: Bingham alpha model, viscoplastic fluid, initial-boundary value problem, approximation-topological approach, existence of weak solutions, convergence of solutions.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. This study was supported by the grant from the Russian Science Foundation (No. 25-11-00056).

For citation: A. V. Zvyagin, N. V. Tolstoy, “A study of the solvability of the Bingham alpha model,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2025, Vol. **71**, No. 4, 604–625, DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-604-625](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-604-625).

REFERENCES

1. M. S. Agranovich and M. I. Vishik, “Ellipticheskie granichnye zadachi s parametrom i parabolicheskie zadachi obshchego vida” [Elliptic boundary-value problems with a parameter and parabolic problems of general type], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 1964, **19**, No. 3, 53–161 (in Russian).
2. R. V. Goldstein and V. A. Gorodtsov, *Mekhanika Sploshnykh Sred. Ch. 1* [Continuum Mechanics. Pt. 1], Nauka, Moscow, 2000 (in Russian).
3. A. V. Zvyagin, “Razreshimost’ zadachi termovyazkouprugosti dlya al’fa-modeli Lere” [Solvability of the thermoviscoelasticity problem for the Leray alpha model], *Izv. VUZov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2016, No. 10, 70–75 (in Russian).
4. A. V. Zvyagin, “Optimal’noe upravlenie s obratnoy svyaz’yu dlya al’fa-modeli Lere i al’fa-modeli Nav’e—Stoksa” [Optimal feedback control for alpha Leray model and for alpha Navier–Stokes model], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2019, **486**, No. 5, 527–530, DOI: [10.31857/S0869-56524865527-530](https://doi.org/10.31857/S0869-56524865527-530) (in Russian).
5. A. V. Zvyagin, “O slaboy razreshimosti i skhodimosti resheniy drobnoy al’fa-modeli Foygta dvizheniya vyazkouprugoy sredy” [Weak solvability and convergence of solutions for the fractional Voigt-alpha model of a viscoelastic medium], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 2019, **74**, No. 3, 189–190, DOI: [10.4213/rm9880](https://doi.org/10.4213/rm9880) (in Russian).
6. A. V. Zvyagin, “Al’fa-model’ Nav’e—Stoksa s vyazkost’yu, zavisyashchey ot temperatury” [Navier–Stokes-alpha model with temperature-dependent viscosity], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2020, **491**, No. 1, 53–56, DOI: [10.31857/S2686954320020265](https://doi.org/10.31857/S2686954320020265) (in Russian).
7. A. V. Zvyagin, “Issledovanie slaboy razreshimosti drobnoy al’fa-modeli Foygta” [Investigation of the weak solubility of the fractional Voigt alpha-model], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2021, **85**, No. 1, 66–97, DOI: [10.4213/im9020](https://doi.org/10.4213/im9020) (in Russian).



8. A. V. Zvyagin, V. G. Zvyagin, and D. M. Polyakov, “Razreshimost’ al’fa-modeley gidrodinamiki” [Solvability of alpha models of hydrodynamics], *Vestn. VGU. Ser. Fiz. Mat.* [Bull. Voronezh State Univ. Ser. Phys. Math.], 2016, No. 2, 72–93 (in Russian).
9. V. G. Zvyagin, “Approksimatsionno-topologicheskiiy podkhod k issledovaniyu matematicheskikh zadach gidrodinamiki” [Topological approximation approach to study of mathematical problems of hydrodynamics], *Sovrem. Mat. Fundam. Naprav.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2012, **46**, 92–119 (in Russian).
10. V. G. Zvyagin, A. V. Zvyagin, and M. V. Turbin, “Optimal’noe upravlenie s obratnoy svyaz’yu dlya modeli Bingama s periodicheskimi usloviyami po prostranstvennym peremennym” [Optimal feedback control for the Bingham model with periodic conditions on spatial variables], *Zap. Nauch. Sem. POMI* [Notes Sci. Semin. St. Petersburg Dept. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2018, **477**, 54–86 (in Russian).
11. V. G. Zvyagin and M. V. Turbin, *Matematicheskie Voprosy Gidrodinamiki Vyazkouprugikh Sred* [Mathematical Issues of Hydrodynamics of Viscoelastic Media], Krasand, Moscow, 2012 (in Russian).
12. G. A. Seregin, “O dinamicheskoy sisteme, porozhdennoy dvumernymi uravneniyami dvizheniya sredy Bingama” [On a dynamic system generated by two-dimensional equations of motion of the Bingham medium], *Zap. Nauch. Sem. LOMI* [Notes Sci. Semin. Leningrad Dept. Math. Inst. Acad. Sci.], 1991, **188**, 128–142 (in Russian).
13. R. Temam, *Uravneniya Nav’e—Stoksa. Teoriya i Chislennyy Analiz* [Navier–Stokes Equations: Theory and Numerical Analysis], Mir, Moscow, 1987 (Russian translation).
14. S. Agmon, “On the eigenfunctions and on the eigenvalues of general elliptic boundary value problems,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1962, **15**, 119–147.
15. S. Chen, C. Foias, D. D. Holm, E. Olson, E. S. Titi, and S. Wynne, “Camassa–Holm equations as a closure model for turbulent channel and pipe flow,” *Phys. Rev. Lett.*, 1998, **81**, No. 24, 5338–5341, DOI: [10.1103/PhysRevLett.81.5338](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.81.5338).
16. D. Doraiswamy, “The origin of rheology: a short historical excursion,” *Rheol. Bull.*, 2002, **71**, No. 1, 7–17.
17. D. D. Holm, J. E. Marsden, and T. S. Ratiu, “The Euler–Poincaré models of ideal fluids with nonlinear dispersion,” *Phys. Rev. Lett.*, 1998, **80**, No. 19, 4173–4177, DOI: [10.1103/PhysRevLett.80.4173](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.80.4173).
18. D. D. Holm, J. E. Marsden, and T. S. Ratiu, “The Euler–Poincaré equations and semidirect products with applications to continuum theories,” *Adv. Math.*, 1998, **137**, No. 1, 1–81, DOI: [10.1006/aima.1998.1721](https://doi.org/10.1006/aima.1998.1721).
19. J. U. Kim, “On the initial-boundary value problem for a Bingham fluid in a three dimensional domain,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1987, **304**, No. 2, 751–770, DOI: [10.2307/2000740](https://doi.org/10.2307/2000740).
20. P. G. Lemarie-Rieusset, *The Navier–Stokes problem in the 21st century*, CRC Press, Boca Raton, 2016.
21. J. Leray, “Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace,” *Acta Math.*, 1934, **63**, No. 1, 193–248, DOI: [10.1007/BF02547354](https://doi.org/10.1007/BF02547354).
22. J. L. Lions and E. Magenes, *Problemes aux limites non homogenes et applications*, Dunod, Paris, 1968.
23. D. M. Polyakov and A. Zvyagin, “Dissipative solvability of Jeffreys–Oldroyd α -model,” *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 2021, **57**, No. 2, 465–488, DOI: [10.12775/TMNA.2020.044](https://doi.org/10.12775/TMNA.2020.044).
24. Th. Schwedoff, “Recherches experimentales sur la cohesion des liquides,” *J. Phys. Theor. Appl.*, 1890, **9**, No. 1, 34–46, DOI: [10.1051/jphysap:01890009003401](https://doi.org/10.1051/jphysap:01890009003401).
25. P. Shamlou, “Fine solid suspension and rheology,” *Chem. Eng. (London)*, 1984, **403**, 31–34.
26. J. Simon, “Compact sets in the space $L_p(0, T; B)$,” *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 1987, **146**, 65–96.
27. V. V. Shelukhin, “Bingham viscoplastic as a limit of non-Newtonian fluids,” *J. Math. Fluid Mech.*, 2002, **4**, No. 2, 109–127, DOI: [10.1007/s00021-002-8538-7](https://doi.org/10.1007/s00021-002-8538-7).
28. P. R. Souza Mendes and E. S. S. Dutra, “Viscosity function for yield–stress liquids,” *Appl. Rheol.*, 2004, **14**, No. 6, 296–302, DOI: [10.1515/arh-2004-0016](https://doi.org/10.1515/arh-2004-0016).

A. V. Zvyagin

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: zvyagin.a@mail.ru, eLIBRARY SPIN-code: 1346-5864, eLIBRARY AuthorID: [641070](https://elibrary.ru/641070),

ResearcherID: [M-7279-2016](https://orcid.org/0000-0002-3858-0827), Scopus: [55656343100](https://orcid.org/55656343100), ORCID: [0000-0002-3858-0827](https://orcid.org/0000-0002-3858-0827)

N. V. Tolstoy

Voronezh State University, Voronezh, Russia

E-mail: nikolaitolstoi@vk.com

О ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЙ МОДЕЛИ РОСТА ПЕСЧАНЫХ НАСЫПЕЙ В БУНКЕРЕ

Г. КРАСТА, А. МАЛУСА

Sapienza Università di Roma, Рим, Италия

Аннотация. В данной работе обсуждаются некоторые особенности краевой задачи для системы уравнений в частных производных, описывающей рост насыпи песка в контейнере под действием вертикального источника. В частности, характеризуется долговременное поведение профилей поверхности и приводится достаточное условие на вертикальный источник, гарантирующее сходимость к равновесию за конечное время. На контрпримерах показано, что устойчивая конфигурация может не достигаться за конечное время, вообще говоря, даже если источник не зависит от времени. Наконец, дается полная характеристика равновесных профилей поверхности.

Ключевые слова: система уравнений в частных производных, эволюционная задача, песчаная насыпь, профиль поверхности, стационарное решение, сходимость за конечное время.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы были частично поддержаны Gruppo Nazionale per l'Analisi Matematica, la Probabilità e le loro Applicazioni (GNAMPA) Национального института высшей математики (INDAM). Г. Краста частично поддержан проектом Sapienza—Ateneo 2023 «Долговременная динамика нелинейных систем в неоднородных средах».

Для цитирования: Г. Краста, А. Малуса. О дифференциальной модели роста песчаных насыпей в бункере // Современная математика. Фундаментальные направления. 2025. Т. 71, № 4. С. 626–641, DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-626-641](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-626-641).

1. ВВЕДЕНИЕ

Со времени работы [12] вариационный подход к изучению растущих песчаных насыпей рекомендовал себя как эффективный способ описания макроскопического поведения сыпучих материалов. В этих моделях сложная динамика течения сыпучих материалов упрощается путём разделения материала на статический нижний слой (стоящий слой), содержащий большую часть насыпи, и текучий, динамичный верхний слой (скользящий слой). Этот подход особенно эффективен для моделирования эволюции песчаной насыпи по мере добавления нового материала (см. [3, 10]).

Нас интересует эволюция песчаной насыпи, растущей в ограниченном контейнере (бункере) под действием вертикального источника. Контейнер имеет плоское основание $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ и вертикальные стенки, высота которых задаётся функцией $\phi: \partial\Omega \rightarrow [0, +\infty[$. Вертикальный источник, который предполагается не зависящим от времени, моделируется функцией $f: \Omega \rightarrow [0, +\infty[$. В каждый момент времени $t \geq 0$ форма песчаной насыпи (т. е. профиль стоящего слоя) описывается графиком функции $u(t, \cdot)$, где $u: \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Обозначим через u_0 начальный профиль насыпи. Ключевой особенностью сыпучего материала является существование критического угла наклона, который не может быть превышен стоящим слоем. Далее мы нормализуем критический уклон к единице

и, следовательно, накладываем ограничение $|\nabla u| \leq 1$ на пространственный градиент u . Толщина слоя скатывания определяется выражением $v: \mathbb{R}^+ \times \Omega \rightarrow [0, +\infty[$, и предполагается, что материал, выбрасываемый источником, скатывается вниз только при попадании в точки с критическим уклоном, т. е. $(1 - |\nabla u|)v = 0$ в $\mathbb{R}^+ \times \Omega$. Когда профиль достигает вершины стенки (т. е. в тех точках $\partial\Omega$, где $u = \phi$), песок, скользящий из слоя скатывания, стекает вниз. Поэтому мы вводим третью переменную в нашей задаче: неотрицательную меру ν на $\partial\Omega$, описывающую количество песка, стекающего в каждой точке границы. Предполагая, что материал катится вдоль направлений наискорейшего спуска, закон сохранения массы можно записать как $\partial_t u - \operatorname{div}(v \nabla u) = f - \nu$.

Подводя итог, можно сказать, что для заданного бункера (Ω, ϕ) и вертикального источника f динамика соответствующей растущей насыпи песка описывается триплетом (u, v, ν) , удовлетворяющим следующей системе уравнений в частных производных с ограничениями:

$$\begin{cases} \partial_t u - \operatorname{div}(v \nabla u) = f - \nu & \text{в } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, \\ |\nabla u| \leq 1, v \geq 0, (1 - |\nabla u|)v = 0 & \text{в } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ 0 \leq u(t, x) \leq \phi(x) & \forall t \geq 0, x \in \partial\Omega, \\ u(t, x) = \phi(x) & \text{для } \nu\text{-п.в. } (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) = u_0. \end{cases} \quad (1.1)$$

Точное определение решения задачи (1.1) будет дано в начале раздела 2. Поскольку анализ можно провести в пространстве любой размерности $N \geq 1$, в приведенной выше задаче и далее мы будем предполагать, что Ω — открытое ограниченное выпуклое подмножество \mathbb{R}^N . Более того, для упрощения изложения мы будем предполагать, что $u_0 = 0$, т. е. эволюция начинается с пустого бункера. Тем не менее, мы будем рассматривать возможно ненулевые начальные данные при анализе связанного вариационного неравенства для компоненты u (см. предложение 2.1), что, в свою очередь, будет полезно для изучения стационарных решений задачи (2.2), т. е. решений (u, v, ν) задачи

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(v \nabla u) = f - \nu & \text{в } \mathbb{R}^N, \\ |\nabla u| \leq 1, v \geq 0, (1 - |\nabla u|)v = 0 & \text{п.в. в } \Omega, \\ 0 \leq u \leq \phi & \text{на } \partial\Omega, \\ u(x) = \phi(x) & \text{для } \nu\text{-п.в. } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Как мы покажем в разделе 4, указанную выше задачу можно сформулировать и без явного указания граничной меры ν , а только в терминах её носителя Γ_f , который можно явно построить (см. (2.4)). В этом контексте мы можем опираться на хорошо известные результаты, касающиеся явной характеристики решений (см. [2, 4–9]). Более точно, в [2] был рассмотрен случай задачи открытого стола (т. е. $\phi = 0$) с регулярной границей, который впоследствии был обобщён на анизотропный случай в [5, 6] (см. также [7] о применении той же вариационной задачи к макроскопической электродинамике анизотропных жёстких сверхпроводников). В [4] был исследован случай частично открытого контейнера, т. е. $\phi = 0$ на части границы и $\phi = +\infty$ на оставшейся части. В [8] нами была исследована задача о подносе, соответствующая граничным данным ϕ , достигнутым профилем на всей границе. Наконец, общая задача о бункере, рассмотренная в разделе 4, была изучена в [9].

Статья устроенная следующим образом.

В разделе 2 мы формулируем предположения относительно Ω , ϕ и f , которые гарантируют существование решения задачи (1.1) (его N -мерной слабой формулировки), как доказано в [10].

Раздел 3 посвящен асимптотическому поведению формы насыпи. Мы показываем, что решение $u(t, \cdot)$ сходится при $t \rightarrow +\infty$ к пределу u_∞ (см. теорему 3.2). После явных вычислений примеров 3.1 и 3.2 мы обсуждаем условия его сходимости за конечное время, формулируя предположение и доказывая результат в этом направлении (см. предположение 3.1 и теорему 3.3).

В разделе 4 мы показываем, что u_∞ является компонентой u стационарного решения задачи (1.1) (см. теорему 4.3). Этот результат, по сути, основан на тщательном анализе стационарной задачи, проведённом в [9].

Обозначения.

- Евклидова норма вектора $\xi \in \mathbb{R}^N$ обозначается как $|\xi|$.
- Для множества $E \subseteq \mathbb{R}^N$ через χ_E обозначим характеристическую функцию E , т. е.

$$\chi_E(x) = \begin{cases} 1, & \text{если } x \in E, \\ 0, & \text{если } x \notin E. \end{cases}$$

- Для любого $E \subset \mathbb{R}^N$ мы обозначим через $\mathcal{M}(E)$ множество ограниченных борелевских мер, сосредоточенных на E , а через $\mathcal{M}^+(E)$ — множество неотрицательных мер в $\mathcal{M}(E)$.
- Для $\mu \in L^\infty(0, T; \mathcal{M}(E))$ положим $\mu_t = \mu(t, \cdot)$.
- Для функции $u = u(t, x)$ через $\partial_t u$ и ∇u обозначим соответственно производную по времени и пространственную часть градиента.
- Для любого открытого множества A через $C_c^\infty(A)$ обозначим множество гладких функций с компактным носителем в A , а через $\mathcal{D}'(A)$ — его топологически двойственное, т. е. множество распределений на A .
- $\text{Lip}_1(A)$ — множество липшицевых функций в \bar{A} с константой Липшица 1, т. е.

$$\text{Lip}_1(A) = \{u: \bar{A} \rightarrow \mathbb{R}: u(x) - u(y) \leq |x - y|, \forall x, y \in \bar{A}\}.$$

- $L_+^1(A)$ — множество неотрицательных функций из $L^1(A)$.
- Для $f \in L_+^1(A)$ под $\text{supp}(f) \subseteq \bar{A}$ будем понимать существенный носитель f как функции, расширенной в \mathbb{R}^N путём продолжения нулём на $\mathbb{R}^N \setminus A$.

2. ЭВОЛЮЦИОННАЯ ЗАДАЧА

Зафиксируем целое число $N \geq 1$, а также:

- (D1) непустое открытое выпуклое ограниченное множество $\Omega \subset \mathbb{R}^N$;
- (D2) полунепрерывную снизу функцию $\phi: \partial\Omega \rightarrow [0, +\infty[$;
- (D3) неотрицательную интегрируемую функцию $f \in L_+^1(\Omega)$.

Введём выпуклое множество допустимых профилей

$$\mathbb{X}_\phi := \{u \in \text{Lip}_1(\Omega): u \geq 0 \text{ в } \bar{\Omega}, u \leq \phi \text{ на } \partial\Omega\}, \quad (2.1)$$

и рассмотрим эволюционную задачу (1.1) с предыдущими данными и начальным профилем $u_0 = 0$. Точнее, будем говорить, что (u, v, ν) является решением системы

$$\begin{cases} \partial_t u - \text{div}(v \nabla u) = f - \nu & \text{в } \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^N, \\ |\nabla u| \leq 1, v \geq 0, (1 - |\nabla u|)v = 0 & \text{в } \mathbb{R}^+ \times \Omega, \\ 0 \leq u \leq \phi & \text{в } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ u = \phi & \nu\text{-п.в. в } \mathbb{R}^+ \times \partial\Omega, \\ u(0, \cdot) = 0, & \end{cases} \quad (2.2)$$

если для каждого $T > 0$

- (S1) $u \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\Omega))$, $\partial_t u \in L^2(]0, T[\times \Omega)$, $u(t, \cdot) \in \mathbb{X}_\phi$ для п.в. $t \in [0, T]$;
- (S2) $v \in L^\infty(0, T; L_+^1(\Omega))$, $\nu \in L^\infty(0, T; \mathcal{M}^+(\partial\Omega))$;
- (S3) $(1 - |\nabla u(t, x)|)v(t, x) = 0$ для \mathcal{L}^{N+1} -п.в. $(t, x) \in]0, T[\times \Omega$;
- (S4) $u(0, \cdot) = 0$ в Ω ;
- (S5) $u(t, x) = \phi(x)$ ν_t -п.в. на $\partial\Omega$, для п.в. $t \in]0, T[$;
- (S6) для каждой пробной функции $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ справедливо

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(t, x) \varphi(x) dx + \int_{\Omega} v(t, x) \nabla u(t, x) \cdot \nabla \varphi(x) dx = \int_{\Omega} f(x) \varphi(x) dx - \int_{\partial\Omega} \varphi(x) d\nu_t(x) \quad \text{в } \mathcal{D}'(0, T).$$

Замечание 2.1. Заметим, что каждая функция $u \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\Omega))$ принадлежит также $C([0, T]; L^2(\Omega))$ (см. [13, Theorem 7.104]), так что начальное условие $u(0, \cdot) = 0$ (или даже $u(0, \cdot) = u_0 \in \mathbb{X}_\phi$) имеет смысл. Более того, это также означает, что условие $u(t, \cdot) \in \mathbb{X}_\phi$ в (S1) выполняется для всех $t \in [0, T]$.

Решающую роль в описании решения задачи (2.2) играет функция Лакса—Хопфа, связанная с граничными данными ϕ :

$$u_\phi(x) := \min\{\phi(y) + |x - y| : y \in \partial\Omega\}, \quad x \in \overline{\Omega}.$$

Напомним, что u_ϕ — липшицева функция в $\overline{\Omega}$, $|\nabla u_\phi| = 1$ п.в. в Ω , и эта функция является максимальной во множестве \mathbb{X}_ϕ , определённом в (2.1), т. е.

$$u \leq u_\phi \text{ в } \overline{\Omega}, \quad \forall u \in \mathbb{X}_\phi. \quad (2.3)$$

Замечание 2.2. Если $\phi = 0$ (задача открытого стола в вариационных моделях для растущих песчаных насыпей), то функция Лакса—Хопфа является функцией расстояния от границы Ω .

Для $x \in \Omega$ введём множество $\Pi(x)$ всех проекций x на $\partial\Omega$, т. е.

$$\Pi(x) := \{y \in \partial\Omega : u_\phi(x) = \phi(y) + |x - y|\},$$

и границу стока

$$\Gamma_f := \{y \in \partial\Omega : \exists x \in \text{supp}(f) \text{ такой, что } y \in \Pi(x)\} = \bigcup_{x \in \text{supp}(f)} \Pi(x). \quad (2.4)$$

Поскольку ϕ — полунепрерывная снизу функция, а носитель $\text{supp}(f)$ компактен, то легко видеть, что Γ_f замкнута.

Следующий результат существования для задачи (2.2) и свойства решений, необходимые в остальной части статьи, были доказаны в [10, Theorem 6.5] (см. также [12]).

Теорема 2.1. При условиях (D1)–(D3) существует решение (u, v, ν) уравнения (2.2). Более того,

- (i) u -компонента решения единственна, а $t \mapsto u(t, \cdot)$ — неубывающая функция в \mathbb{R}^+ ;
- (ii) мера ν_t сосредоточена на Γ_f для п.в. $t \geq 0$, и каждому ν соответствует единственная v .

Замечание 2.3. Фактически, результат в [10] получен в более общей постановке: предполагается, что источник f является неотрицательной ограниченной мерой в Ω , а компонента v , в свою очередь, является неотрицательной ограниченной мерой в Ω . Тем не менее, компоненты (v, ν) получены с помощью двойственности и оптимального переноса, и следовательно, мы можем применить результаты о регулярности для плотностей потока (см. [11, Theorem 4.13] или [14, Theorem 2]) и восстановить абсолютную непрерывность компоненты v относительно меры Лебега в Ω .

Следующий результат, впервые доказанный в [12], а затем подробно описанный в [10, Theorem 4.3] (см. также [1]), показывает, что система уравнений в частных производных (2.2) может рассматриваться как эквивалентное условие первого порядка для задачи ограниченной оптимизации, решаемой относительно компоненты u , таким образом, другие компоненты (v, ν) решения могут пониматься как множители Лагранжа.

Теорема 2.2. Следующие утверждения эквивалентны:

- (i) Если (u, v, ν) является решением (2.2), то для любого $T > 0$ справедливо неравенство

$$\int_{\Omega} (f(x) - \partial_t u(t, x)) (w(x) - u(t, x)) \, dx \leq 0 \quad \forall w \in \mathbb{X}_\phi \quad (2.5)$$

для п.в. $t \in]0, T[$.

- (ii) Пусть $u \in L^\infty(0, T; W^{1,\infty}(\Omega))$ удовлетворяет условию (S1), начальному условию (S4) и условию максимальнойности (2.5). Тогда существует (v, ν) такое, что (u, v, ν) является решением уравнения (2.2).

Замечание 2.4. Используя терминологию выпуклого анализа, при $f \in L^2(\Omega)$ условие максимальнойности (2.5) можно перефразировать как дифференциальное включение.

В частности, пусть $I : L^2(\Omega) \rightarrow [0, +\infty]$ обозначает индикаторную функцию выпуклого множества \mathbb{X}_ϕ , определяемую как

$$I(w) := \begin{cases} 0, & \text{если } w \in \mathbb{X}_\phi, \\ +\infty & \text{иначе,} \end{cases}$$

и обозначим через $\partial I(w)$ его субдифференциал в $w \in L^2(\Omega)$.

Тогда вариационное неравенство (2.5) эквивалентно дифференциальному включению

$$f - \partial_t u(t, \cdot) \in \partial I(u(t, \cdot)), \quad t \geq 0.$$

В дальнейшем мы будем говорить, что u удовлетворяет $f - \partial_t u \in \partial I(u(t, \cdot))$, если выполняется условие максимизации (2.5).

Вариационное неравенство (2.5) даёт обширную информацию о свойствах компоненты u решения (например, в теореме 2.1 (i)). Чтобы получить эту информацию, полезно вспомнить следующее правило вывода, доказанное в более общей постановке в [10, Lemma 4.2].

Лемма 2.1. Пусть $w \in L^1(0, T; W^{1,\infty}(\Omega))$ и $\partial_t w \in L^2(]0, T[\times \Omega)$. Тогда

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |w(t, x)|^2 dx = \int_{\Omega} w(t, x) \partial_t w(t, x) dx \quad \text{для п.в. } t \in]0, T[.$$

Единственность решения задачи (2.5) с начальными данными $u(0, \cdot) = u_0 \in \mathbb{X}_{\phi}$ и его монотонность по t являются следствиями следующего принципа сравнения, доказанного в [3, Lemma 3.1] или [10, Proposition 4.1] и справедливого также для источников, зависящих от времени. Поскольку этот результат важен для наших целей, мы приводим набросок его доказательства для полноты изложения.

Предложение 2.1 (принцип сравнения). Пусть $f_1, f_2 \in L^{\infty}(0, T; L^1_+(\Omega))$, $u_0^1, u_0^2 \in \mathbb{X}_{\phi}$, при этом $f_1 \geq f_2$ и $u_0^1 \geq u_0^2$. Пусть также u_i , $i = 1, 2$, являются решениями задач

$$\begin{cases} f_i(t, \cdot) - \partial_t u_i(t, \cdot) \in \partial I(u_i(t, \cdot)) & \text{для п.в. } t \in]0, T[, \\ u_i(0, \cdot) = u_0^i. \end{cases}$$

Тогда $u_1 \geq u_2$ в $]0, T[\times \Omega$.

Доказательство. Пусть $u^+(t, x) := \max\{u_1(t, x), u_2(t, x)\}$ и $u^-(t, x) := \min\{u_1(t, x), u_2(t, x)\}$.

Заметим, что $u^+, u^- \in \mathbb{X}_{\phi}$. В силу оптимальности u_1 и u_2 , используя соответственно u^+ и u^- в (2.5), получаем, что для п.в. $t \geq 0$

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (f_1(t, x) - \partial_t u_1(t, x))(u^+(t, x) - u_1(t, x)) dx &\leq 0, \\ \int_{\Omega} (f_2(t, x) - \partial_t u_2(t, x))(u^-(t, x) - u_2(t, x)) dx &\leq 0. \end{aligned}$$

Так как $u^+ - u_1 = (u_2 - u_1)\chi_{\{u_1 < u_2\}} = u_2 - u^-$ и $\chi_{\{u_1 < u_2\}} \partial_t u_2 = \chi_{\{u_1 < u_2\}} \partial_t u^+$, получаем, что

$$\int_{\Omega} (f_2(t, x) - \partial_t u^+(t, x))(u_1(t, x) - u^+(t, x)) dx = \int_{\Omega} (f_2(t, x) - \partial_t u_2(t, x))(u^-(t, x) - u_2(t, x)) dx \leq 0,$$

так что ввиду $f_2 \geq f_1$ по лемме 2.1 имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u^+(t, x) - u_1(t, x)|^2 dx &= \int_{\Omega} (\partial_t u^+(t, x) - \partial_t u_1(t, x))(u^+(t, x) - u_1(t, x)) dx \leq \\ &\leq \int_{\Omega} f_2(t, x)(u^+(t, x) - u_1(t, x)) dx - \int_{\Omega} f_1(t, x)(u^+(t, x) - u_1(t, x)) dx \leq 0 \end{aligned}$$

для п.в. $t \geq 0$. По замечанию 2.1, $\psi(t) := \|u^+(t) - u_1(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$ — непрерывная функция с $\psi(0) = 0$, следовательно, из приведённого выше неравенства следует, что $\psi \equiv 0$, т. е. $u^+(t, \cdot) = u_1(t, \cdot)$ для любого $t \geq 0$. \square

Теорема 2.3. Если $f \in L^{\infty}(0, T; L^1_+(\Omega))$ и $u_0 \in \mathbb{X}_{\phi}$, то решение задачи

$$\begin{cases} f(t, \cdot) - \partial_t u(t, \cdot) \in \partial I(u(t, \cdot)) & \text{для п.в. } t \in]0, T[, \\ u(0, \cdot) = u_0 \end{cases}$$

единственно, а $t \mapsto u(t, \cdot)$ — монотонная неубывающая функция в \mathbb{R}^+ .

Доказательство. Единственность решения является прямым следствием принципа сравнения.

Более того, фиксируя $t_0 > 0$ и применяя принцип сравнения к $f_1 = f$, $f_2 \equiv 0$ и $u_0^1 = u_0^2 = u(t_0, x)$, получаем $u(t, x) \geq u(t_0, x)$ для $t \geq t_0$. \square

3. АСИМПТОТИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПРОФИЛЕЙ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть (u, v, ν) — решение уравнения (2.2). Поскольку по теореме 2.2 (i), теореме 2.3 и (2.3) функция $t \mapsto u(t, \cdot)$ монотонно не убывает в \mathbb{R}^+ и $0 \leq u(t, \cdot) \leq u_\phi$ для любого t , то существует предел

$$u_\infty(x) := \lim_{t \rightarrow +\infty} u(t, x), \quad x \in \overline{\Omega}. \quad (3.1)$$

Более того, $u_\infty \in \mathbb{X}_\phi$, ввиду того, что $u(t, \cdot)$ принадлежит \mathbb{X}_ϕ для любого $t \geq 0$, а сходимости в (3.1) равномерна в $\overline{\Omega}$.

Наша цель — дать явное представление u_∞ . В качестве первого шага покажем, что асимптотический профиль максимален там, где источник активен.

Лемма 3.1. *Равенство $u_\infty(x) = u_\phi(x)$ справедливо для всех $x \in \text{supp}(f)$.*

Доказательство. Предположим от противного, что существует $x_0 \in \text{supp}(f) \subset \overline{\Omega}$ такое, что $u_\infty(x_0) < u_\phi(x_0)$. Пусть $\delta := (u_\phi(x_0) - u_\infty(x_0))/2$, и пусть $r > 0$ таково, что $u_\phi(x) - u_\infty(x) \geq \delta$ для любого $x \in B_r(x_0) \cap \Omega$. Поскольку $f \in L_+^1(\Omega)$ и $x_0 \in \text{supp}(f)$, мы также имеем $\int_{B_r(x_0) \cap \Omega} f \, dx > 0$.

Следовательно, для любого $t \geq 0$ имеем

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} f(x) (u_\phi(x) - u(t, x)) \, dx &\geq \int_{\Omega} f (u_\phi(x) - u_\infty(x)) \, dx \geq \\ &\geq \int_{B_r(x_0) \cap \Omega} f(x) (u_\phi(x) - u_\infty(x)) \, dx \geq \delta \int_{B_r(x_0) \cap \Omega} f(x) \, dx =: \rho > 0, \quad \forall t \geq 0. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Учитывая $u_\phi \in \mathbb{X}_\phi$ в (2.5), получаем, что

$$\int_{\Omega} (f(x) - \partial_t u(t, x)) (u_\phi(x) - u(t, x)) \, dx \leq 0.$$

Следовательно, по лемме 2.1 указанное выше неравенство и (3.2) дают

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_{\Omega} |u_\phi(x) - u(t, x)|^2 \, dx &= - \int_{\Omega} \partial_t u(t, x) (u_\phi(x) - u(t, x)) \, dx \leq \\ &\leq - \int_{\Omega} f(x) (u_\phi(x) - u(t, x)) \, dx \leq -\rho, \quad \forall t \geq 0, \end{aligned}$$

что противоречит тому факту, что $t \mapsto \|u_\phi - u(t)\|_{L^2(\Omega)}^2$ — неотрицательная непрерывная функция. \square

Чтобы продолжить исследование u_∞ , которое окажется стационарным решением задачи (см. раздел 4), нам понадобятся некоторые определения.

Определение 3.1. Отрезок $\llbracket y, x \rrbracket$ называется *транспортным лучом*, если $y \in \partial\Omega$, $x \in \overline{\Omega}$, $u_\phi(x) = u_\phi(y) + |x - y|$ (т. е. $y \in \Pi(x)$), и $\llbracket y, x \rrbracket$ не является собственным подмножеством другого отрезка, удовлетворяющего тем же свойствам. Точки y и x называются соответственно *начальной* и *конечной* точками транспортного луча.

Обозначим через $J \subset \overline{\Omega}$ множество конечных точек транспортных лучей, определяемое соотношением

$$J := \{x \in \overline{\Omega} : \exists y \in \partial\Omega \text{ такое, что } \llbracket y, x \rrbracket \text{ является транспортным лучом}\}. \quad (3.3)$$

При заданной $f \in L^1_+(\Omega)$ определим функцию

$$u_f(x) := 0 \vee \sup\{u_\phi(x) - |x - z| : z \in \text{supp}(f)\}.$$

Наконец, вспоминая определение Γ_f в (2.4), введём множество допустимых профилей, достигающих граничного значения ϕ на Γ_f

$$\mathbb{X}_f := \{u \in \mathbb{X}_\phi : u = \phi \text{ на } \Gamma_f\}. \quad (3.4)$$

Основные особенности функции u_f , доказанные в [9, Proposition 5.3 и Theorem 5.5], заключаются в следующем.

Теорема 3.1. *Предположим, что $f \in L^1_+(\Omega)$, $f \not\equiv 0$. Тогда справедливы утверждения:*

- (i) $u_f \in \mathbb{X}_f$, $u_f = u_\phi$ на $\text{supp}(f)$;
- (ii) каждая функция $u \in \mathbb{X}_f$ такая, что $u = u_f$ на $\text{supp}(f)$, удовлетворяет условию $u_f \leq u \leq u_\phi$ на $\overline{\Omega}$;
- (iii) $u_f = u_\phi$ в $\overline{\Omega}$ тогда и только тогда, когда $J \subseteq \text{supp}(f)$.

Теперь мы готовы доказать, что асимптотический профиль u_∞ на самом деле является u_f .

Теорема 3.2. *При предположениях (D1)–(D3) (единственная) компонента u решения (2.2) сходится монотонно и равномерно к функции u_f при $t \rightarrow +\infty$.*

Доказательство. По лемме 3.1 и теореме 3.1 (i) получаем, что $u_\infty = u_\phi = u_f$ на $\text{supp}(f)$. Следовательно, по теореме 3.1 (ii) также имеем, что

$$u_f \leq u_\infty \leq u_\phi \text{ в } \Omega. \quad (3.5)$$

Заметим, что u_f является (стационарным) решением (2.5). В частности, поскольку $u_f = u_\phi$ на $\text{supp}(f)$, имеем, что

$$\int_{\Omega} f(w - u_f) dx = \int_{\text{supp}(f)} f(w - u_\phi) dx \leq 0 \quad \forall w \in \mathbb{X}_\phi.$$

Следовательно, по принципу сравнения с $f_1 = f_2 = f$, $u_0^1 = u_f$, $u_0^2 = 0$, мы заключаем, что $u(t, x) \leq u_f(x)$, $x \in \Omega$, для любого $t \geq 0$, так что $u_\infty \leq u_f$, что вместе с (3.5) завершает доказательство. \square

Замечание 3.1. Внося небольшие изменения в доказательство, мы можем доказать, что единственное решение $u(t, \cdot)$ для (2.5) с начальными данными $u_0 \in \mathbb{X}_\phi$ сходится монотонно и равномерно к $u_\infty = u_0 \vee u_f$ при $t \rightarrow +\infty$.

Поскольку здесь рассматривается источник f , постоянный во времени, можно было бы предположить, что эволюция $u(t, \cdot)$ сходится к u_f за конечное время. Тем не менее, в следующих примерах мы покажем, что в общем случае это неверно.

Пример 3.1. Пусть $\Omega = B_1$ — единичный шар в \mathbb{R}^N с центром в начале координат, $\phi \equiv 0$ и $f(x) = (N + \alpha)|x|^\alpha$, $\alpha > 0$. Поскольку $\text{supp}(f) = \overline{\Omega}$, по теореме 3.1 (iii) и теореме 3.2 (см. также замечание 2.2), предельная функция u_∞ совпадает с функцией расстояния до границы B_1 , т. е.

$$u_\infty(x) = u_\phi(x) = 1 - |x|, \quad x \in B_1.$$

Начиная с $u_0 = 0$, за конечное время $t_\alpha = \frac{2^\alpha - 1}{(N + 1)\alpha}$ достигаем профиля $u_1(x) = \overline{u}_1(|x|)$, при этом

$$\overline{u}_1(r) := \frac{1}{2} - \left| r - \frac{1}{2} \right|, \quad r \in [0, 1]. \quad (3.6)$$

Поскольку эволюция при $t \in [0, t_\alpha]$ не существенна для нашего примера, мы опускаем соответствующие вычисления и предполагаем, что начинаем в момент времени $t = 0$ с этого начального профиля u_1 . Пусть $\rho: [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$ — единственное неотрицательное решение задачи Коши

$$\begin{cases} \dot{\rho} = -\frac{N}{2} \rho^\alpha, \\ \rho(0) = \frac{1}{2}. \end{cases} \quad (3.7)$$

Для любого $\alpha > 0$ решение является монотонной невозрастающей функцией и сходится к 0 при $t \rightarrow +\infty$. Если $\alpha \geq 1$, решение строго положительно и строго убывает, а для любого $\alpha \in]0, 1[$ существует $\tau_\alpha > 0$ такое, что $\rho(t) > 0$ для $t \in [0, \tau_\alpha[$ и $\rho(t) = 0$ для любого $t \geq \tau_\alpha$.

Мы утверждаем, что функция

$$u(t, x) := \begin{cases} 1 - 2\rho(t) + |x|, & \text{если } |x| < \rho(t), \\ 1 - |x|, & \text{если } \rho(t) \leq |x| \leq 1, \end{cases} \quad (3.8)$$

является решением (2.5) при $u(0, \cdot) = u_1$, и, следовательно, по теореме 2.2 (ii), $u(t, x)$ — это эволюция профиля стоящего слоя при $\phi \equiv 0$ и $f(x) = (N + \alpha)|x|^\alpha$. Очевидно, что $u(t, \cdot)$ сходится к u_ϕ за конечное время τ тогда и только тогда, когда $\rho(t) = 0$ для всех $t \geq \tau$. Следовательно, если $\alpha \geq 1$, то $u(t, 0) < 1 = u_\phi(0)$ для всех $t \geq 0$, так что сходимости к u_ϕ за конечное время не наблюдается. Если же $\alpha \in]0, 1[$, то источник имеет достаточно массы на каждом малом шаре с центром в начале координат, чтобы заставить решение сходиться к u_ϕ за конечное время τ_α .

Осталось доказать, что для каждого $t \geq 0$ и каждого $w \in \mathbb{X}_\phi$ справедливо неравенство

$$K(t) := \int_{B_1} (f(x) - \partial_t u(t, x)) \cdot (w(x) - u(t, x)) dx \leq 0 \quad \forall t \geq 0.$$

Вычисляя

$$\partial_t u(t, x) = \begin{cases} -2\dot{\rho}(t) = N \rho(t)^\alpha, & \text{если } |x| < \rho(t), \\ 0, & \text{если } \rho(t) < |x| < 1, \end{cases}$$

получаем, что

$$K(t) = \int_{B_{\rho(t)}} ((N + \alpha)|x|^\alpha - N \rho(t)^\alpha) \cdot (w(x) - 1 + 2\rho(t) - |x|) dx + \int_{B_1 \setminus B_{\rho(t)}} f(x)(w(x) - u_\phi(x)) dx.$$

Так как $w \leq u_\phi$, интеграл в $B_1 \setminus B_{\rho(t)}$ неположителен. Для оценки первого интеграла можно воспользоваться следующим неравенством, учитывающим, что $|\nabla w| \leq 1$: положив $\hat{x} := x/|x|$ для каждого $x \neq 0$, для каждого $\rho_0 \in [0, 1]$ имеем неравенство

$$\begin{cases} w(x) \geq \tilde{w}(x) := w(\rho_0 \hat{x}) + |x| - \rho_0, & \text{если } 0 < |x| \leq \rho_0, \\ w(x) \leq \tilde{w}(x), & \text{если } \rho_0 \leq |x| \leq 1. \end{cases} \quad (3.9)$$

Пусть $\rho_0(t) \in [0, \rho(t)]$ определяется как

$$\rho_0(t) := \left(\frac{N}{N + \alpha} \right)^{1/\alpha} \rho(t),$$

так что $(N + \alpha)|x|^\alpha - N \rho(t)^\alpha$ отрицательно, если $|x| < \rho_0(t)$, и положительно, если $|x| > \rho_0(t)$. Следовательно, из (3.9) мы заключаем, что

$$[(N + \alpha)|x|^\alpha - N \rho(t)^\alpha] w(x) \leq [(N + \alpha)|x|^\alpha - N \rho(t)^\alpha] \tilde{w}(x) \quad \forall |x| < \rho(t),$$

так что

$$\begin{aligned} K(t) &\leq \int_{B_{\rho(t)}} [(N + \alpha)|x|^\alpha - N \rho(t)^\alpha] \cdot [\tilde{w}(x) - 1 + 2\rho(t) - |x|] dx = \\ &= \int_{B_{\rho(t)}} [(N + \alpha)|x|^\alpha - N \rho(t)^\alpha] \cdot [w(\rho_0(t) \hat{x}) - \rho_0(t) - 1 + 2\rho(t)] dx = \\ &= N \omega_N [\bar{w}(\rho_0(t)) - \rho_0(t) - 1 + 2\rho(t)] \int_0^{\rho(t)} [(N + \alpha)r^\alpha - N \rho(t)^\alpha] r^{N-1} dr = 0, \end{aligned}$$

где $\bar{w}(\rho_0) := \frac{1}{N \omega_N} \int_{S^{N-1}} w(\rho_0 \sigma) d\sigma$, что завершает доказательство нашего утверждения.

Построение эволюции, представленное в примере 3.1 выше, может показаться несколько неясным. В частности, следует прояснить роль обыкновенного дифференциального уравнения (3.7). Для этого может быть полезен следующий пример, рассматривающий более общий источник.

Пример 3.2. Рассмотрим ситуацию, аналогичную описанной в примере 3.1, т. е. $\Omega = B_1 \subseteq \mathbb{R}^N$ и $\phi \equiv 0$, но для

$$f(x) = \tilde{f}(|x|), \quad \tilde{f}: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ непрерывна, возрастает, и } \tilde{f}(0) = 0.$$

Предположим, что в момент времени $t = 0$ мы начинаем с профиля u_1 , определённого в (3.6).

Мы хотим доказать, что функция $u(t, x)$, определённая в (3.8), является решением (2.5) при подходящем выборе функции $\rho: [0, +\infty[\rightarrow [0, +\infty[$.

Для определения $\rho(t)$ (в частности, для получения обыкновенного дифференциального уравнения, заменяющего (3.7)), проведём следующее рассмотрение, основанное на феноменологии растущих песчаных насыпей: только масса, засыпанная в $B_{\rho(t)}$, будет включена в насыпь, в то время как масса, засыпанная в $B_1 \setminus B_{\rho(t)}$, свободно скатывается вниз, поскольку профиль максимален. Это приводит к дополнительному условию

$$\int_{B_{\rho(t)}} \partial_t u(t, x) dx = \int_{B_{\rho(t)}} f(x) dx, \quad t \geq 0.$$

Поскольку $\partial_t u(t, x) = -2\dot{\rho}(t)$, это условие даёт

$$-2\dot{\rho}(t) = \frac{1}{|B_{\rho(t)}|} \int_{B_{\rho(t)}} f(x) dx, \quad t \geq 0. \quad (3.10)$$

При этом предполагается, что среднее значение источника f на шаре $B_{\rho(t)}$, стоящем справа, равно 0, если $\rho(t) = 0$. С учётом начального условия $\rho(0) = 1/2$ соответствующая задача Коши имеет единственное неотрицательное решение $\rho(t)$. Имеются две возможности: либо $\rho(t) > 0$ для всех $t \geq 0$, либо существует $\tau > 0$ такое, что $\rho(t) = 0$ для всех $t \geq \tau$. Второй случай, соответствующий сходимости за конечное время, имеет место тогда и только тогда, когда

$$\tau := \int_0^{1/2} \frac{|B_\rho|}{\int_{B_\rho} f(x) dx} d\rho < +\infty. \quad (3.11)$$

Теперь выберем $\rho(t)$, удовлетворяющее (3.10) и такое, что $\rho(0) = 1/2$, и покажем, как в примере 3.1, что функция u , определённая в (3.8), является решением вариационного неравенства (2.5) такого, что $u(0, \cdot) = u_1$, так что u — это профиль растущей песчаной насыпи.

Прежде всего, поскольку f является непрерывной функцией, для каждого $t \geq 0$ существует $\rho_0(t) \in [0, \rho(t)]$ такое, что

$$\tilde{f}(\rho_0(t)) = \frac{1}{|B_{\rho(t)}|} \int_{B_{\rho(t)}} f(x) dx. \quad (3.12)$$

Вследствие этого, учитывая (3.10), справедливо равенство

$$\partial_t u(t, x) = -2\dot{\rho}(t) = \tilde{f}(\rho_0(t)) \quad \forall t \geq 0.$$

На этом этапе мы можем завершить доказательство, как в примере 3.1: поскольку \tilde{f} возрастает, то имеем, что

$$\tilde{f}(r) \leq \tilde{f}(\rho_0(t)), \quad \forall r \in [0, \rho_0(t)], \quad \tilde{f}(r) \geq \tilde{f}(\rho_0(t)), \quad \forall r \in [\rho_0(t), \rho(t)],$$

так что для каждого $w \in \mathbb{X}_0$ выполняется

$$\begin{aligned} \int_{B_1} (f(x) - \partial_t u(t, x))(w(x) - u(t, x)) dx &\leq \int_{B_{\rho(t)}} (\tilde{f}(|x|) - \tilde{f}(\rho_0(t)))(\tilde{w}(x) - 1 + 2\rho(t) - |x|) dx = \\ &= N\omega_N[\bar{w}(\rho_0(t)) - \rho_0(t) - 1 + 2\rho(t)] \int_0^{\rho(t)} (\tilde{f}(r) - \tilde{f}(\rho_0(t))) r^{N-1} dr = 0, \end{aligned}$$

где \tilde{w} определено в (3.9), а последнее равенство следует из (3.12).

Подводя итог, можно сказать, что эволюция $u(t, \cdot)$ в (3.8) при ρ , удовлетворяющем (3.10), и $\rho(0) = 1/2$ сходится к $u_\infty = u_\phi$ за конечное время тогда и только тогда, когда выполняется (3.11).

Главное в примерах 3.1 и 3.2 заключается в том, что за единичный промежуток времени к насыпи добавляется лишь стремящаяся к нулю доля (при $t \rightarrow +\infty$) массы из источника f , а остальная часть сбрасывается на границе стола. В примере 3.1, когда $\alpha \geq 1$, эта бесконечно малая доля не может заполнить максимальный профиль u_ϕ за конечное время. Это происходит из-за того, что источник слишком слаб вблизи множества конечных точек транспортных лучей $J = \{0\}$, что означает, что условие (3.11) не выполняется. В частности,

$$\int_0^{1/2} \frac{|B_\rho|}{\int_{B_\rho} f(x) dx} d\rho = \int_0^{1/2} \rho^{-\alpha} d\rho = +\infty \quad \forall \alpha \geq 1.$$

Эти соображения приводят нас к следующему утверждению.

Предположение 3.1. Пусть $f \in L_+^1(\Omega)$ удовлетворяет условию

$$\sup_{y \in J} \int_0^1 \frac{|B_\rho|}{\int_{B_\rho(y) \cap \Omega} f(x) dx} d\rho < +\infty. \quad (3.13)$$

Тогда $u(t, \cdot)$ сходится к u_ϕ за конечное время.

Условие сильнее, чем (3.13), но, возможно, проще на практике: существуют $\alpha \in [0, 1[$ и константа $c > 0$ такие, что

$$\liminf_{r \searrow 0} \frac{1}{r^{N+\alpha}} \int_{B_r(y) \cap \Omega} f(x) dx \geq c \quad \forall y \in J. \quad (3.14)$$

Очевидно, оба условия можно сформулировать и в случае $f \in \mathcal{M}^+(\Omega)$. Например, (3.14) требует, чтобы нижняя $(N + \alpha)$ -мерная плотность меры f , ограниченной на J , была ограничена снизу положительной константой.

Заметим, что если $y \in J$ не принадлежит носителю f , то подынтегральное выражение в (3.13) стремится к $+\infty$ при достаточно малых ρ , следовательно, из (3.13) следует, в частности, что $J \subset \text{supp}(f)$. Согласно теоремам 3.2 и 3.1 (iii), это вложение необходимо и достаточно для сходимости $u(t, \cdot)$ к u_ϕ при $t \rightarrow +\infty$.

В следующей теореме мы доказываем достаточное условие сходимости к u_ϕ за конечное время (см. также в [3, Theorem 3.3] аналогичное условие в случае $\phi \equiv 0$). Отметим, что в условиях теоремы 3.3 ниже, условие (3.14) выполняется при $\alpha = 0$ и $c = \varepsilon$.

Теорема 3.3 (сходимость за конечное время). Пусть $J \subset \overline{\Omega}$ — множество конечных точек транспортных лучей, определённых в (3.3). Предположим, что существуют $r > 0$ и $\varepsilon \in]0, r]$ такие, что

$$f(x) \geq \varepsilon \quad \forall x \in \Omega \cap \bigcup_{y \in J} B_r(y).$$

Тогда $u(t, \cdot)$ сходится к u_ϕ за конечное время.

Доказательство. Пусть $y \in J \cap \Omega$ и $B_r(y) \subset \Omega$. Рассмотрим зависящий от времени источник

$$f_2(t, x) = \begin{cases} \varepsilon(0 \vee (r - |x - y|)), & \text{если } t \in [0, r/\varepsilon], \\ \varepsilon \chi_{B_r(y)}, & \text{если } t > r/\varepsilon, \end{cases}$$

а u_2 — решение (2.5), где $f = f_2$ и $u_2(0, \cdot) = 0$. Определим

$$\alpha(t) := u_2(t, y), \quad \underline{u}(t, x) := 0 \vee (\alpha(t) - |x - y|), \quad x \in \Omega, \quad t \geq 0.$$

По теореме 2.3, α — непрерывная и неубывающая функция. Пусть $\bar{t} \geq r/\varepsilon$ — первый момент времени, такой что $\overline{B}_{\alpha(t)}(y) \cap \partial\Omega \neq \emptyset$. Для $t \in [0, \bar{t}]$ можно проверить, что $u_2(t, x) = \underline{u}(t, x)$ и

$$\alpha(t) = \begin{cases} \varepsilon t, & \text{если } t \in [0, r/\varepsilon], \\ \overline{\alpha}(t), & \text{если } t \in [r/\varepsilon, \bar{t}], \end{cases} \quad (3.15)$$

при этом

$$\overline{\alpha}(t) := \left[r^{N+1} + (N+1)\varepsilon r^N \left(t - \frac{r}{\varepsilon} \right) \right]^{\frac{1}{N+1}}, \quad t \geq 0 \quad (3.16)$$

(см. подробное доказательство теоремы 3.3 в [3]). В частности, представление (3.16), если принять как данность, что $u_2 = \underline{u}$ при $t \in [0, \bar{t}]$, можно получить следующим образом. Высоту $\alpha(t)$ конуса можно вычислить, учитывая, что ни одна песчинка не может упасть со стола до момента времени \bar{t} , так что должен выполняться следующий баланс масс:

$$\int_{\Omega} f_2(t, x) dx = \int_{\Omega} \partial_t u_2(t, x) dx. \quad (3.17)$$

Простой расчёт даёт

$$\int_{\Omega} f_2(t, x) dx = \begin{cases} \frac{\omega_N \varepsilon r^N}{N+1}, & \text{если } t \in [0, r/\varepsilon], \\ \omega_N \varepsilon r^N & \text{если } t \in [r/\varepsilon, \bar{t}], \end{cases} \quad \int_{\Omega} \partial_t u_2(t, x) dx = \begin{cases} \frac{\omega_N r^N \dot{\alpha}(t)}{N+1}, & \text{если } t \in [0, r/\varepsilon], \\ \omega_N \alpha(t)^N \dot{\alpha}(t), & \text{если } t \in [r/\varepsilon, \bar{t}], \end{cases}$$

так что (3.15) следует из того, что функция $\overline{\alpha}$, определённая в (3.16), является решением задачи Коши

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \overline{\alpha}(t) = \frac{\varepsilon r^N}{\alpha(t)^N}, & t \geq 0, \\ \overline{\alpha}(r/\varepsilon) = r. \end{cases} \quad (3.18)$$

Для достаточно большого $T > \bar{t}$ пусть $\nu \in L^\infty(0, T; \mathcal{M}^+(\partial\Omega))$ будет мерой, связанной с u_2 посредством теоремы 2.2 (ii), и пусть

$$T(y) := \sup\{t \geq \bar{t} : \nu_t = 0\}.$$

В силу [10, Theorem 5.4] имеем, что $u_2(t, x) = \underline{u}(t, x)$ при $t \in [0, T(y)]$. (Точнее, теорема 5.4 в [10] была доказана для случая источника f_2 , являющегося δ -функцией Дирака относительно y , но при $t \leq T(y)$ это решение совпадает с u_2 .) В частности, существует $z \in \partial\Omega$ такое, что $\alpha(T(y)) - |z - y| = \phi(z)$. Определим

$$A(t) := \{x \in \Omega : \alpha(t) - |x - y| > 0\} \subseteq B_{\alpha(t)}(y), \quad t \geq 0.$$

Поскольку баланс масс (3.17) сохраняется также для $t \in [\bar{t}, T(y)]$, мы заключаем, что

$$\dot{\alpha}(t) = \frac{\omega_N \varepsilon r^N}{|A(t)|}, \quad t \in [r/\varepsilon, T(y)].$$

Заметив, что $|A(t)| \leq |B_{\alpha(t)}| = \omega_N \alpha(t)^N$, путём сравнения с решением $\overline{\alpha}$ уравнения (3.18) заключаем, что

$$\alpha(t) \geq \overline{\alpha}(t), \quad \forall t \in [r/\varepsilon, T(y)].$$

Мы утверждаем, что $u_2(T(y), y) = u_\phi(y)$. А именно,

$$u_2(T(y), y) = \alpha(T(y)) = \phi(z) + |z - y| \geq u_\phi(y),$$

так что утверждение следует из максимальнойности u_ϕ .

Из соотношения

$$u_\phi(y) = \alpha(T(y)) \geq \bar{\alpha}(T(y))$$

мы приходим к выводу, что

$$T(y) \leq \frac{u_\phi(y)^{N+1} + N r^{N+1}}{(N+1)\varepsilon r^N} \leq \tau := \frac{[\min_{\partial\Omega} \phi + \text{diam}(\Omega)]^{N+1} + N r^{N+1}}{(N+1)\varepsilon r^N}.$$

Наконец, поскольку $f \geq \varepsilon$ в трубчатой окрестности J , то $f \geq f_2$ и, следовательно, по принципу сравнения и тому факту, что $u(T(y), y) = u_\phi(y)$, получаем, что $u(t, y) = u_\phi(y)$ для любого $t \geq \tau$.

Если $y \in J$, но $B_r(y)$ не содержится в Ω , то можно модифицировать приведенное выше доказательство, учитывая, что Ω удовлетворяет равномерному внутреннему условию конуса. Это означает, что существует положительная константа γ такая, что $|B_r(y) \cap \Omega| \geq \gamma |B_r(y)|$ для любого $y \in \bar{\Omega}$, и можно доказать, что $\alpha(t) := u_2(t, y) \geq \gamma \bar{\alpha}(t)$ для $t \in [r/\varepsilon, T(y)]$, так что мы можем получить равномерную оценку сверху для времени $T(y)$, определённого выше.

Следовательно, существует время $\tau' \geq \tau$ такое, что $u(t, y) = u_\phi(y)$ для любого $t \geq \tau'$ и для любого $y \in J$, так что заключение следует из [9, Theorem 5.5]. \square

4. СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ

В этом разделе мы изучаем стационарные решения (2.2), т. е. решения задачи

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(v \nabla u) = f - \nu & \text{в } \mathbb{R}^N, \\ |\nabla u| \leq 1, v \geq 0, (1 - |\nabla u|)v = 0 & \text{п.в. в } \Omega, \\ 0 \leq u \leq \phi & \text{на } \partial\Omega, \\ u(x) = \phi(x) & \text{для } \nu\text{-п.в. } x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (4.1)$$

где $f \in L^1_+(\Omega)$ и $\phi: \partial\Omega \rightarrow [0, +\infty[$ — такие же, как и в предыдущих разделах. Точнее, (u, v, ν) называется *стационарным решением* (4.1), если $u \in \mathbb{X}_\phi$, $v \in L^1_+(\Omega)$, $\nu \in \mathcal{M}^+(\partial\Omega)$ удовлетворяют условиям $(1 - |\nabla u|)v = 0$ п.в. в Ω , $u = \phi$ ν -п.в. на $\partial\Omega$, и

$$\int_{\Omega} v \nabla u \cdot \nabla \psi \, dx = \int_{\Omega} f \psi \, dx - \int_{\partial\Omega} \psi \, d\nu, \quad \forall \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N). \quad (4.2)$$

Сначала напомним стационарную версию теоремы 2.2, доказанную в [10, Theorem 3.2].

Теорема 4.1. *Следующие утверждения эквивалентны:*

(i) Если $(u, v, \nu) \in \mathbb{X}_\phi \times L^1_+(\Omega) \times \mathcal{M}^+(\partial\Omega)$ является решением задачи (4.1), то

$$\int_{\Omega} f(x) (w(x) - u(x)) \, dx \leq 0 \quad \forall w \in \mathbb{X}_\phi. \quad (4.3)$$

(ii) Если $u \in \mathbb{X}_\phi$ удовлетворяет условию максимальнойности (4.3), то существует $(v, \nu) \in L^1_+(\Omega) \times \mathcal{M}^+(\partial\Omega)$ такое, что (u, v, ν) является решением задачи (4.1).

Теперь докажем, что задачу (4.1) можно переформулировать без какой-либо ссылки на меру $\nu \in \mathcal{M}^+(\partial\Omega)$.

Теорема 4.2 (эквивалентная формулировка для стационарных решений). Пусть Ω, ϕ, f удовлетворяют условиям (D1), (D2), (D3), пусть $\Gamma_f \subset \partial\Omega$ — множество, определённое в (2.4), и пусть $\mathbb{X}_f \subset W^{1,\infty}(\Omega)$ — множество, определённое в (3.4). Тогда эквивалентны следующие утверждения:

(i) Если $(u, v, \nu) \in \mathbb{X}_\phi \times L^1_+(\Omega) \times \mathcal{M}^+(\partial\Omega)$ является решением задачи (4.1), то (u, v) является решением задачи

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(v \nabla u) = f & \text{в } \Omega, \\ |\nabla u| \leq 1, v \geq 0, (1 - |\nabla u|)v = 0 & \text{п.в. в } \Omega, \\ 0 \leq u \leq \phi & \text{на } \partial\Omega, \\ u(x) = \phi(x) & \text{на } \Gamma_f, \end{cases} \quad (4.4)$$

т. е. $(u, v) \in \mathbb{X}_f \times L_+^1(\Omega)$ удовлетворяет $(1 - |\nabla u|)v = 0$ п.в. в Ω и

$$\int_{\Omega} v \nabla u \cdot \nabla \psi \, dx = \int_{\Omega} f \psi \, dx \quad \forall \psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \Gamma_f). \quad (4.5)$$

- (ii) Если $(u, v) \in \mathbb{X}_f \times L_+^1(\Omega)$ является решением задачи (4.4), то существует мера $\nu \in \mathcal{M}^+(\partial\Omega)$ такая, что (u, v, ν) является решением задачи (4.1).

Прежде чем доказывать теорему 4.2, напомним, что задача существования и единственности решений уравнения (4.4) была подробно проанализирована в [9] в более общем случае выпуклого ограничения на ∇u и для невыпуклой области Ω .

Основные результаты [9], относящиеся к нашей задаче, можно сформулировать в следующей теореме.

Теорема 4.3. В условиях теоремы 4.2 справедливы утверждения:

- (i) [существование] Существует единственная $v_f \in L_+^1(\Omega)$ такая, что (u_ϕ, v_f) является решением задачи (4.4);
- (ii) [единственность v и характеристика u] Пара $(u, v) \in \mathbb{X}_f \times L_+^1(\Omega)$ является решением задачи (4.4) тогда и только тогда, когда $v = v_f$ и $u_f \leq u \leq u_\phi$;
- (iii) [единственность] (u_ϕ, v_f) является единственным решением задачи (4.4) тогда и только тогда, когда $J \subseteq \text{supp}(f)$, где $J \subset \overline{\Omega}$ — множество конечных точек транспортных лучей, определённых в (3.3).

Доказательство теоремы 4.2.

(i) По теореме 2.1 мы уже знаем, что $\text{supp}(\nu) \subseteq \Gamma_f$, следовательно, $\int_{\partial\Omega} \psi \, d\nu = 0$ для любого $\psi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \Gamma_f)$, так что (4.5) легко следует из (4.2). Осталось доказать, что $u = \phi$ на Γ_f . Поскольку (u, v, ν) является решением (4.1), функция u удовлетворяет условию $\int_{\Omega} f(w - u) \, dx \leq 0$

для любого $w \in \mathbb{X}_\phi$. Выбрав $w = u_\phi$, мы заключаем, что $u = u_\phi$ на $\text{supp}(f)$. Пусть $y \in \Gamma_f$. По определению (2.4) функции Γ_f , существует $x \in \text{supp}(f)$ такой, что $u_\phi(x) = u(x) = \phi(y) + |x - y|$, следовательно, $u(y) \geq u(x) - |x - y| \geq \phi(y)$. Поскольку $u \leq \phi$ на $\partial\Omega$, мы заключаем, что $u(y) = \phi(y)$.

(ii) Пусть $(u, v) \in \mathbb{X}_f \times L_+^1(\Omega)$ удовлетворяет (4.5) и $(1 - |\nabla u|)v = 0$ п.в. в Ω . По теореме 4.3 (ii) получаем, что $v = v_f$ и $u_f \leq u \leq u_\phi$. По теореме 3.1 (i) мы также знаем, что $u = u_\phi$ на $\text{supp}(f)$, следовательно,

$$\int_{\Omega} f(w - u) \, dx = \int_{\text{supp}(f)} f(w - u_\phi) \, dx \leq 0 \quad \forall w \in \mathbb{X}_\phi,$$

так что (4.3) выполняется, и заключение следует из теоремы 4.1 (ii). \square

Сравнивая информацию об эволюции, предоставленную теоремой 2.1, с информацией о стационарных решениях, предоставленной теоремой 4.3, можно заметить, что в процессе эволюции динамика стоящего слоя единственна, в то время как скатывающийся слой может принимать различные конфигурации. Для стационарных конфигураций стоящий слой может меняться (сохраняя память об исходной конфигурации насыпи), в то время как скатывающийся слой остается фиксированным.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Мы рассмотрели систему (2.2), описывающую эволюцию насыпи песка в вертикальном бункере под действием внешнего вертикального источника песка, постоянного во времени. В теореме 3.2 мы доказали, что профиль насыпи песка сходится к стационарному решению задачи. В примерах 3.1 и 3.2 мы показали, что, вообще говоря, сходимости за конечное время ожидать не следует. Тем не менее, на основе анализа этих примеров мы сформулировали предположение 3.1 и доказали в теореме 3.3 достаточное условие на источник, гарантирующее сходимость профиля за конечное время. Наконец, в теореме 4.2 мы установили эквивалентную формулировку для стационарных решений, не зависящую от граничной меры ν , встречающейся в исходной формулировке, а в теореме 4.3 мы охарактеризовали все возможные стационарные конфигурации задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bouchitté G., Buttazzo G.* Characterization of optimal shapes and masses through Monge–Kantorovich equation// J. Eur. Math. Soc. — 2001. — 3. — С. 139–168. — DOI: [10.1007/s100970000027](https://doi.org/10.1007/s100970000027).
2. *Cannarsa P., Cardaliaguet P., Crasta G., Giorgieri E.* A boundary value problem for a PDE model in mass transfer theory: representation of solutions and applications// Calc. Var. Part. Differ. Equ. — 2005. — 24, № 4. — С. 431–457. — DOI: [10.1007/s00526-005-0328-7](https://doi.org/10.1007/s00526-005-0328-7).
3. *Cannarsa P., Cardaliaguet P., Sinestrari C.* On a differential model for growing sandpiles with non-regular sources// Commun. Part. Differ. Equ. — 2009. — 34, № 7–9. — С. 656–675. — DOI: [10.1080/03605300902909966](https://doi.org/10.1080/03605300902909966).
4. *Crasta G., Finzi Vita S.* An existence result for the sandpile problem on flat tables with walls// Netw. Heterog. Media. — 2008. — 3, № 4. — С. 815–830. — DOI: [10.3934/nhm.2008.3.815](https://doi.org/10.3934/nhm.2008.3.815).
5. *Crasta G., Malusa A.* The distance function from the boundary in a Minkowski space// Trans. Am. Math. Soc. — 2007. — 359, № 12. — С. 5725–5759. — DOI: [10.2307/20161843](https://doi.org/10.2307/20161843).
6. *Crasta G., Malusa A.* On a system of partial differential equations of Monge–Kantorovich type// J. Differ. Equ. — 2007. — 235, № 2. — С. 484–509. — DOI: [10.1016/j.jde.2007.01.010](https://doi.org/10.1016/j.jde.2007.01.010).
7. *Crasta G., Malusa A.* A variational approach to the macroscopic electrodynamics of anisotropic hard superconductors// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2009. — 192, № 1. — С. 87–115. — DOI: [10.1007/s00205-008-0125-5](https://doi.org/10.1007/s00205-008-0125-5).
8. *Crasta G., Malusa A.* A nonhomogeneous boundary value problem in mass transfer theory// Calc. Var. Part. Differ. Equ. — 2012. — 44, № 1–2. — С. 61–80. — DOI: [10.1007/s00526-011-0426-7](https://doi.org/10.1007/s00526-011-0426-7).
9. *Crasta G., Malusa A.* Existence and uniqueness of solutions for a boundary value problem arising from granular matter theory// J. Differ. Equ. — 2015. — 259, № 8. — С. 3656–3682. — DOI: [10.1016/j.jde.2015.04.032](https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.04.032).
10. *De Pascale L., Jimenez C.* Duality theory and optimal transport for sand piles growing in a silos// Adv. Differ. Equ. — 2015. — 20, № 9–10. — С. 859–886. — DOI: [10.57262/ade/1435064516](https://doi.org/10.57262/ade/1435064516).
11. *De Pascale L., Pratelli A.* Regularity properties for Monge transport density and for solutions of some shape optimization problem// Calc. Var. Part. Differ. Equ. — 2002. — 14, № 3. — С. 249–274. — DOI: [10.1007/s005260100086](https://doi.org/10.1007/s005260100086).
12. *Prigozhin L.* Variational model of sandpile growth// Eur. J. Appl. Math. — 1996. — 7. — С. 225–235. — DOI: [10.1017/S0956792500002321](https://doi.org/10.1017/S0956792500002321).
13. *Salsa S.* Partial differential equations in action. — Milano: Springer, 2009.
14. *Santambrogio F.* Absolute continuity and summability of transport densities: simpler proofs and new estimates// Calc. Var. Part. Differ. Equ. — 2009. — 36, № 3. — С. 343–354. — DOI: [10.1007/s00526-009-0231-8](https://doi.org/10.1007/s00526-009-0231-8).

Грациано Краста

Sapienza Università di Roma, Рим, Италия

E-mail: graziano.crasta@uniroma1.it, ResearcherID: [B-4831-2008](https://orcid.org/0000-0003-3673-6549), Scopus: [6701399771](https://orcid.org/6701399771), ORCID: [0000-0003-3673-6549](https://orcid.org/0000-0003-3673-6549)

Аннализа Малуса

Sapienza Università di Roma, Рим, Италия

E-mail: annalisa.malusa@uniroma1.it, ResearcherID: [G-8227-2012](https://orcid.org/0000-0002-5692-1904), Scopus: [8931165700](https://orcid.org/8931165700), ORCID: [0000-0002-5692-1904](https://orcid.org/0000-0002-5692-1904)

DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-626-641](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-626-641)
 EDN: [MEOFVV](#)

UDC 517.9
Research article

On the differential model of sandpiles growing in a silo

G. Crasta and A. Malusa

Sapienza Università di Roma, Roma, Italy

Abstract. We discuss some features of a boundary value problem for a system of PDEs that describes the growth of a sandpile in a container under the action of a vertical source. In particular, we characterize the long-term behavior of the profiles, and we provide a sufficient condition on the vertical source that guarantees the convergence to the equilibrium in a finite time. We show by counterexamples that a stable configuration may not be reached in a finite time, in general, even if the source is time-independent. Finally, we provide a complete characterization of the equilibrium profiles.

Keywords: system of partial differential equations, evolutionary problem, sandpile, surface profile, stationary solution, convergence in a finite time.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors have been partially supported by the Gruppo Nazionale per l'Analisi Matematica, la Probabilità e le loro Applicazioni (GNAMPA) of the Istituto Nazionale di Alta Matematica (INdAM). G. C. has been partially supported by Sapienza–Ateneo 2023 Project “Long time dynamics of nonlinear systems in non uniform environments”.

For citation: G. Crasta, A. Malusa, “On the differential model of sandpiles growing in a silo,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2025, Vol. **71**, No. 4, 626–641, DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-626-641](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-626-641).

REFERENCES

1. G. Bouchitté and G. Buttazzo, “Characterization of optimal shapes and masses through Monge–Kantorovich equation,” *J. Eur. Math. Soc.*, 2001, **3**, 139–168, DOI: [10.1007/s100970000027](https://doi.org/10.1007/s100970000027).
2. P. Cannarsa, P. Cardaliaguet, G. Crasta, and E. Giorgieri, “A boundary value problem for a PDE model in mass transfer theory: representation of solutions and applications,” *Calc. Var. Part. Differ. Equ.*, 2005, **24**, No. 4, 431–457, DOI: [10.1007/s00526-005-0328-7](https://doi.org/10.1007/s00526-005-0328-7).
3. P. Cannarsa, P. Cardaliaguet, and C. Sinestrari, “On a differential model for growing sandpiles with non-regular sources,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 2009, **34**, No. 7–9, 656–675, DOI: [10.1080/03605300902909966](https://doi.org/10.1080/03605300902909966).
4. G. Crasta and S. Finzi Vita, “An existence result for the sandpile problem on flat tables with walls,” *Netw. Heterog. Media*, 2008, **3**, No. 4, 815–830, DOI: [10.3934/nhm.2008.3.815](https://doi.org/10.3934/nhm.2008.3.815).
5. G. Crasta and A. Malusa, “The distance function from the boundary in a Minkowski space,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 2007, **359**, No. 12, 5725–5759, DOI: [10.2307/20161843](https://doi.org/10.2307/20161843).
6. G. Crasta and A. Malusa, “On a system of partial differential equations of Monge–Kantorovich type,” *J. Differ. Equ.*, 2007, **235**, No. 2, 484–509, DOI: [10.1016/j.jde.2007.01.010](https://doi.org/10.1016/j.jde.2007.01.010).
7. G. Crasta and A. Malusa, “A variational approach to the macroscopic electrodynamics of anisotropic hard superconductors,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2009, **192**, No. 1, 87–115, DOI: [10.1007/s00205-008-0125-5](https://doi.org/10.1007/s00205-008-0125-5).
8. G. Crasta and A. Malusa, “A nonhomogeneous boundary value problem in mass transfer theory,” *Calc. Var. Part. Differ. Equ.*, 2012, **44**, No. 1–2, 61–80, DOI: [10.1007/s00526-011-0426-7](https://doi.org/10.1007/s00526-011-0426-7).
9. G. Crasta and A. Malusa, “Existence and uniqueness of solutions for a boundary value problem arising from granular matter theory,” *J. Differ. Equ.*, 2015, **259**, No. 8, 3656–3682, DOI: [10.1016/j.jde.2015.04.032](https://doi.org/10.1016/j.jde.2015.04.032).



10. L. De Pascale and C. Jimenez, “Duality theory and optimal transport for sand piles growing in a silos,” *Adv. Differ. Equ.*, 2015, **20**, No. 9-10, 859–886, DOI: [10.57262/ade/1435064516](https://doi.org/10.57262/ade/1435064516).
11. L. De Pascale and A. Pratelli, “Regularity properties for Monge transport density and for solutions of some shape optimization problem,” *Calc. Var. Part. Differ. Equ.*, 2002, **14**, No. 3, 249–274, DOI: [10.1007/s005260100086](https://doi.org/10.1007/s005260100086).
12. L. Prigozhin, “Variational model of sandpile growth,” *Eur. J. Appl. Math.*, 1996, **7**, 225–235, DOI: [10.1017/S0956792500002321](https://doi.org/10.1017/S0956792500002321).
13. S. Salsa, *Partial differential equations in action*, Springer, Milano, 2009.
14. F. Santambrogio, “Absolute continuity and summability of transport densities: simpler proofs and new estimates,” *Calc. Var. Part. Differ. Equ.*, 2009, **36**, No. 3, 343–354, DOI: [10.1007/s00526-009-0231-8](https://doi.org/10.1007/s00526-009-0231-8).

Graziano Crasta

Sapienza Università di Roma, Roma, Italy

E-mail: graziano.crasta@uniroma1.it, ResearcherID: [B-4831-2008](https://orcid.org/0000-0003-3673-6549), Scopus: [6701399771](https://orcid.org/6701399771), ORCID: [0000-0003-3673-6549](https://orcid.org/0000-0003-3673-6549)

Annalisa Malusa

Sapienza Università di Roma, Roma, Italy

E-mail: annalisa.malusa@uniroma1.it, ResearcherID: [G-8227-2012](https://orcid.org/0000-0002-5692-1904), Scopus: [8931165700](https://orcid.org/8931165700), ORCID: [0000-0002-5692-1904](https://orcid.org/0000-0002-5692-1904)

ОБ УСПОКОЕНИИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА НА ВРЕМЕННОМ ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ, ПРОПОРЦИОНАЛЬНЫМ ВРЕМЕНИ

А. П. ЛЕДНОВ

*Саратовский национальный исследовательский государственный университет
им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия*

*Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

Аннотация. На временном графе-звезде рассматривается задача об оптимальном успокоении системы управления для обобщенного уравнения пантографа, представляющего собой уравнение нейтрального типа с запаздыванием, пропорциональным времени. Запаздывание в системе распространяется через внутреннюю вершину графа. Исследуется вариационная задача минимизации функционала энергии с учетом вероятностей сценариев, соответствующих различным ребрам. Установлено, что оптимальная траектория удовлетворяет условиям типа Кирхгофа во внутренней вершине. Доказана эквивалентность вариационной задачи некоторой краевой задаче для функционально-дифференциальных уравнений второго порядка на графе и установлена однозначная разрешимость обеих задач.

Ключевые слова: уравнение нейтрального типа с запаздыванием, уравнение пантографа, граф-звезда, оптимальное успокоение системы, задача Красовского, вариационная задача, однозначная разрешимость.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект № 24-71-10003.

Для цитирования: А. П. Леднов. Об успокоении системы управления нейтрального типа на временном графе-звезде с запаздыванием, пропорциональным времени // Современная математика. Фундаментальные направления. 2025. Т. 71, № 4. С. 642–654, DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-642-654](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-642-654).

1. ВВЕДЕНИЕ

Дифференциальные операторы на графах, часто называемые квантовыми графами, активно изучаются с прошлого века в связи с моделированием различных процессов, протекающих в сложных системах, представимых в виде пространственных сетей [7, 10, 17, 20, 21]. Для таких моделей помимо условий непрерывности в вершинах характерны также условия Кирхгофа.

Для задания на графах функционально-дифференциальных операторов с запаздыванием, С. А. Бутериным в работе [11] была предложена концепция глобального запаздывания. Последнее означает, что запаздывание распространяется через внутренние вершины графа. Другими словами, решение уравнения на входящем ребре служит начальной функцией для уравнений на

исходящих ребрах. Глобальное запаздывание стало альтернативой локально нелокальному случаю, рассмотренному в [24], когда уравнение на каждом ребре имеет свой собственный параметр запаздывания и может быть решено отдельно от уравнений на остальных ребрах.

Использование концепции глобального запаздывания позволило перенести на графы класс задач об успокоении управляемых систем с последствием. Впервые задача этого типа была поставлена и исследована на интервале Н. Н. Красовским [6] для системы управления с постоянным запаздыванием, описываемой уравнением запаздывающего типа. Эта задача получила дальнейшее развитие в работах А. Л. Скубачевского [9, 23] и позже в работах других авторов (см. [1] и литературу там), где рассматриваемая система управления имеет нейтральный тип, т. е. содержит запаздывание и в главных членах. Это существенно усложняет задачу и, в частности, приводит к понятию обобщенного решения соответствующей краевой задачи для оптимальной траектории. С. А. Бутерин в работах [3, 12] распространил на графы задачу об успокоении систем управления с постоянным запаздыванием. В [12] рассмотрен случай уравнения первого порядка запаздывающего типа, а в [3] — общий случай нестационарной управляемой системы, уравнения которой относятся к нейтральному типу и имеют произвольный порядок.

Рассмотрение указанной задачи на графах, в свою очередь, привело к концепции временного графа, ребра которого, в отличие от пространственной сети, отождествляются с промежутками времени, а каждая внутренняя вершина понимается как точка разветвления процесса, дающая несколько различных сценариев дальнейшего его протекания. В [3–5, 12] показано, что на временных графах также могут возникать условия Кирхгофа. А именно, им будет удовлетворять траектория течения процесса, являющаяся оптимальной с учетом сразу всех сценариев. Кроме того, в [5, 12] была предложена стохастическая интерпретация системы управления на временном дереве. В частности, к системе на дереве приведет замена коэффициентов в уравнении на интервале дискретными случайными процессами с дискретным временем.

В работах [18, 19] на графы была перенесена задача об успокоении системы управления, описываемой так называемым уравнением пантографа [16]. В данном случае запаздывание не постоянно, а является пропорциональным времени сжатием. Рассматривалась система управления, задаваемая классическим уравнением пантографа

$$y'(t) + by(t) + cy(q^{-1}t) = 0, \quad t > 0, \quad y(0) = y_0, \quad (1.1)$$

где $b, c \in \mathbb{R}$, $q > 1$. Уравнение вида (1.1) широко применяется в прикладных задачах. Так, например, это уравнение используется при моделировании динамики контактного провода электропоезда подвижного состава [22]. Для $q \in (0, 1)$ оно возникает в астрофизике при описании поглощения света межзвездной материей [2], а также в биологии при моделировании процесса роста клеток [13].

В данной работе мы переходим к рассмотрению системы управления для обобщенного уравнения пантографа

$$y'(t) + ay'(q^{-1}t) + by(t) + cy(q^{-1}t) = 0, \quad t > 0, \quad y(0) = y_0, \quad (1.2)$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $q > 1$. Уравнение вида (1.2) изучалось в [14, 15] и ряде других работ. Были получены различные представления решения и показано, что разрешимость задачи (1.2) зависит от коэффициента a и от класса гладкости решений. В частности, при $a \neq -q^k$, $k \geq 0$, существует единственное решение в $C^\infty[0, +\infty)$; при этом в зависимости от значения a могут существовать и другие C^1 -решения, не принадлежащие $C^\infty[0, +\infty)$.

На интервале задача об успокоении системы управления для обобщенного уравнения пантографа была рассмотрена Л. Е. Россовским в работе [8], где исследовалась следующая система управления нейтрального типа:

$$y'(t) + ay'(q^{-1}t) + by(t) + cy(q^{-1}t) = u(t), \quad t > 0, \quad (1.3)$$

$$y(0) = y_0 \in \mathbb{R}, \quad (1.4)$$

где $a, b, c \in \mathbb{R}$, $q > 1$, а $u(t)$ — управляющее воздействие, которое является вещественнозначной функцией; состояние системы в начальный момент времени задается условием (1.4).

Задача управления формулируется следующим образом: требуется найти $u(t)$, приводящее систему (1.3), (1.4) в равновесие $y(t) = 0$ при $t \geq T$ для некоторого $T > 0$.

Для этого достаточно найти $u(t) \in L_2(0, T)$, приводящее систему в состояние

$$y(t) = 0, \quad q^{-1}T \leq t \leq T, \quad (1.5)$$

а затем сбросить управление, положив $u(t) \equiv 0$ при $t > T$. При этом из всех возможных управлений ищется управление, обладающее минимальной энергией $\|u\|_{L_2(0, T)}^2$.

В результате получается вариационная задача о минимизации квадратичного функционала

$$\mathcal{J}(y) = \int_0^T (y'(t) + ay'(q^{-1}t) + by(t) + cy(q^{-1}t))^2 dt \rightarrow \min \quad (1.6)$$

на множестве функций $y(t) \in W_2^1[0, T]$, удовлетворяющих краевым условиям (1.4), (1.5).

Исследование вариационной задачи (1.4)–(1.6) включает сведение ее к эквивалентной краевой задаче для функционально-дифференциального уравнения второго порядка с растяжением и сжатием аргумента.

В частности, установлено, что если функция $y(t) \in W_2^1[0, T]$, удовлетворяющая условиям (1.4), (1.5), минимизирует функционал (1.6), то она является решением краевой задачи для уравнения

$$\begin{aligned} & -((1 + a^2q)y'(t) + ay'(q^{-1}t) + aqy'(qt))' + (ab - cq^{-1})y'(q^{-1}t) + \\ & + (cq - abq^2)y'(qt) + (b^2 + c^2q)y(t) + bcy(q^{-1}t) + bcqy(qt) = 0, \quad 0 < t < q^{-1}T, \end{aligned} \quad (1.7)$$

при краевых условиях (1.4) и (1.5). При этом, поскольку задача (1.4), (1.5), (1.7) может не иметь решения в $W_2^2[0, q^{-1}T]$, ее решение является обобщенным в смысле выполнения условия

$$(1 + a^2q)y'(t) + ay'(q^{-1}t) + aqy'(qt) \in W_2^1[0, q^{-1}T].$$

Обратное утверждение также верно: если $y(t) \in W_2^1[0, T]$ является обобщенным решением задачи (1.4), (1.5), (1.7), то y доставляет минимум функционалу (1.6).

Следующая теорема при предположении $|a| \neq q^{-\frac{1}{2}}$, обеспечивающем коэрцитивность функционала $\mathcal{J}(y)$, устанавливает существование и единственность обобщенного решения краевой задачи (1.4), (1.5), (1.7) и, стало быть, однозначную разрешимость вариационной задачи (1.4)–(1.6).

Теорема 1.1 (см. [8]). Пусть $|a| \neq q^{-\frac{1}{2}}$. Тогда задача (1.4), (1.5), (1.7), имеет единственное обобщенное решение $y \in W_2^1[0, T]$.

В следующем разделе дается постановка вариационной задачи на графе-звезде. Далее, в третьем разделе, следуя общей стратегии для интервала, устанавливается эквивалентность вариационной задачи некоторой краевой задаче для функционально-дифференциальных уравнений второго порядка на графе. В заключительном разделе доказывается однозначная разрешимость обеих задач.

2. ПОСТАНОВКА ВАРИАЦИОННОЙ ЗАДАЧИ НА ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ

Рассмотрим изображенный на рис. 1 граф типа звезды Γ_m , состоящий из m ребер. Как обычно, под функцией y на графе Γ_m будем понимать кортеж $y = [y_1, \dots, y_m]$, в котором компонента y_j определена на ребре e_j , т. е. $y_j = y_j(t)$, $t \in [0, T_j]$.

Пусть до момента времени $t = T_1 > 0$, ассоциированного с единственной внутренней вершиной v_1 графа Γ_m , наша система управления с запаздыванием, пропорциональным времени, на Γ_m описывается уравнением

$$\ell_1 y(t) := y_1'(t) + a_1 y_1'(q^{-1}t) + b_1 y_1(t) + c_1 y_1(q^{-1}t) = u_1(t), \quad 0 < t < T_1, \quad (2.1)$$

заданным на ребре e_1 графа Γ_m , с начальным условием

$$y_1(0) = y_0. \quad (2.2)$$

При $t = T_1$, т. е. в вершине v_1 , система разветвляется на $m - 1$ независимых параллельных процессов, описываемых уравнениями

$$\begin{aligned} \ell_j y(t) := y_j'(t) + a_j y_j'(q^{-1}(t - (q - 1)T_1)) + b_j y_j(t) + c_j y_j(q^{-1}(t - (q - 1)T_1)) = u_j(t), \\ t > 0, \quad j = \overline{2, m}, \end{aligned} \quad (2.3)$$

но имеющих общую историю, определяемую уравнением (2.1) с начальным условием (2.2) и условиями

$$y_j(t) = y_1(t + T_1), \quad (q^{-1} - 1)T_1 < t < 0, \quad j = \overline{2, m}, \quad (2.4)$$

а также условиями непрерывности в вершине v_1 , которые в данном случае согласуются с (2.4) при $t \rightarrow -0$:

$$y_j(0) = y_1(T_1), \quad j = \overline{2, m}. \quad (2.5)$$

Как и в случае интервала, мы предполагаем, что $q > 1$, $y_0 \in \mathbb{R}$ и все $a_j, b_j, c_j \in \mathbb{R}$.

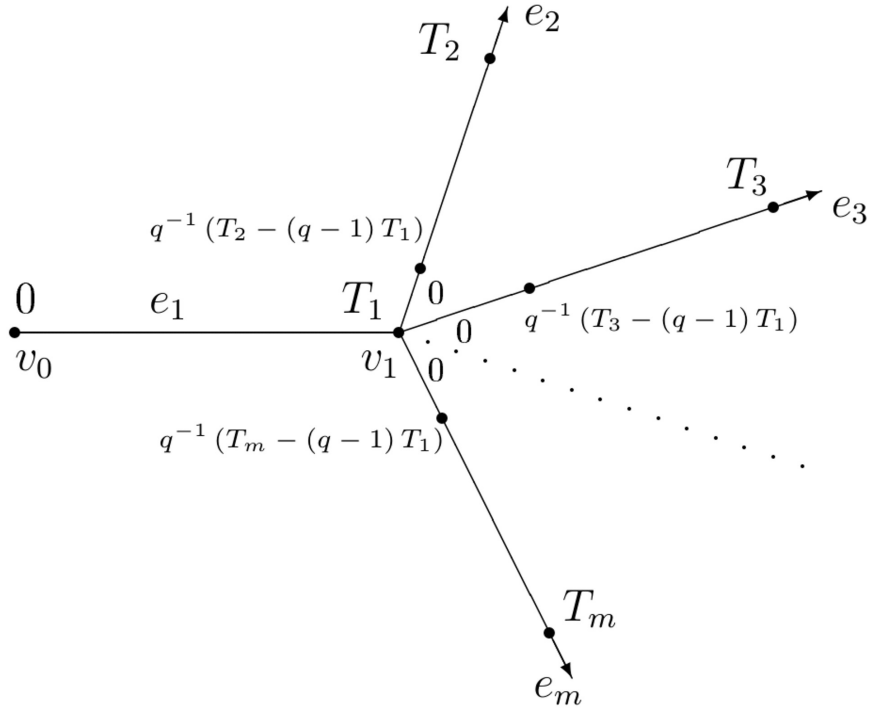


Рис. 1. Граф Γ_m

FIG. 1. Graph Γ_m

В (2.3) j -ое уравнение задано на ребре e_j графа Γ_m , представляющем собой, вообще говоря, бесконечный луч, выходящий из вершины v_1 . Условия (2.4) означают, что запаздывание распространяется через вершину v_1 .

Пример 2.1. Пусть $m = 2$, $a := a_1 = a_2$, $b := b_1 = b_2$, $c := c_1 = c_2$, и

$$y(t) := \begin{cases} y_1(t), & 0 \leq t \leq T_1, \\ y_2(t - T_1), & t > T_1, \end{cases} \quad u(t) := \begin{cases} u_1(t), & 0 < t < T_1, \\ u_2(t - T_1), & t > T_1. \end{cases}$$

Тогда система управления (2.1)–(2.5) принимает вид (1.3), (1.4).

Предположим для определенности, что $T_j > (q - 1)T_1$ при всех $j = \overline{2, m}$. Для успокоения системы (2.1)–(2.5) сразу при всех сценариях нужно привести ее в состояние

$$y_j(t) = 0, \quad q^{-1}(T_j - (q - 1)T_1) \leq t \leq T_j, \quad j = \overline{2, m}, \quad (2.6)$$

выбрав подходящие управления $u_j(t)$, $j = \overline{1, m}$. Тогда, положив $u_j(t) \equiv 0$ при $t > T_j$, $j = \overline{2, m}$, будем иметь $y_j(t) = 0$ при тех же t и j . Другими словами, система будет приведена в равновесие на каждом ребре, выходящем из вершины v_1 . Поскольку такие $u_j(t)$ не единственны, будем искать их, минимизируя усилия $\|u_j\|_{L_2(0, T_j)}^2$. Кроме того, аналогично тому, как это было сделано в [12] для случая постоянного запаздывания, мы можем регулировать степень участия каждого $\|u_j\|_{L_2(0, T_j)}^2$ в соответствующем функционале энергии, выбирая определенный положительный вес α_j .

Таким образом, приходим к вариационной задаче

$$\mathcal{J}(y) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \int_0^{T_j} (\ell_j y(t))^2 dt \rightarrow \min \quad (2.7)$$

при условиях (2.2), (2.4)–(2.6), где $\alpha_j > 0$, $j = \overline{1, m}$, фиксированы.

Для выбора весов α_j , $j = \overline{1, m}$, можно применить вероятностный подход в соответствии с интерпретацией системы управления на временном графе, предложенной в [12]. А именно, для этого нужно положить $\alpha_1 = 1$, а в качестве α_j , $j = \overline{2, m}$, взять вероятности сценариев, задаваемых соответствующими уравнениями в (2.3). Тогда $\alpha_2 + \dots + \alpha_m = 1$. Последнее тождество также обеспечивает соответствие случаю интервала, если уравнения в (2.3) не зависят от j , т. е. являются искусственными копиями единственного возможного сценария (см. [12, пример 2]).

Заметим, что условия (2.4) никаких ограничений на функцию $y = [y_1, \dots, y_m]$ не накладывают. Поэтому условимся, что взятие $\mathcal{J}(y)$, равно как и $\ell_j y$ при $j = \overline{2, m}$, от какой бы то ни было функции y на Γ_m автоматически подразумевает применение условий (2.4). Для краткости также введем обозначение $\ell y := [\ell_1 y, \dots, \ell_m y]$.

3. СВЕДЕНИЕ К КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ

Рассмотрим вещественное гильбертово пространство $W_2^k(\Gamma_m) = \bigoplus_{j=1}^m W_2^k[0, T_j]$ со скалярным произведением

$$(y, z)_{W_2^k(\Gamma_m)} = \sum_{j=1}^m (y_j, z_j)_{W_2^k[0, T_j]},$$

где $y = [y_1, \dots, y_m]$, $z = [z_1, \dots, z_m]$, $(f, g)_{W_2^k[a, b]} = \sum_{\nu=0}^k (f^{(\nu)}, g^{(\nu)})_{L_2(a, b)}$ — скалярное произведение в $W_2^k[a, b]$, а $(\cdot, \cdot)_{L_2(a, b)}$ — скалярное произведение в $L_2(a, b)$.

Обозначим через \mathcal{W} замкнутое подпространство $W_2^1(\Gamma_m)$, состоящее из всех наборов $[y_1, \dots, y_m]$, удовлетворяющих условиям (2.5), (2.6) и $y_1(0) = 0$.

Также введем пространство $W_2^k(\tilde{\Gamma}_m) = W_2^k[0, T_1] \oplus \bigoplus_{j=2}^m W_2^k[0, q^{-1}(T_j - (q-1)T_1)]$.

Лемма 3.1. Если $y \in W_2^1(\Gamma_m)$ является решением вариационной задачи (2.2), (2.4)–(2.7), то

$$B(y, w) := \sum_{j=1}^m \alpha_j \int_0^{T_j} \ell_j y(t) \ell_j w(t) dt = 0 \quad \forall w \in \mathcal{W}. \quad (3.1)$$

Обратно, если для некоторого $y \in W_2^1(\Gamma_m)$ выполняется (2.2), (2.5), (2.6) и (3.1), то y является решением задачи (2.2), (2.4)–(2.7).

Доказательство. Пусть $y \in W_2^1(\Gamma_m)$ — решение задачи (2.2), (2.4)–(2.7). Тогда для произвольной фиксированной функции $w \in \mathcal{W}$ сумма $y + sw$ принадлежит $W_2^1(\Gamma_m)$ при любом $s \in \mathbb{R}$ и удовлетворяет условиям (2.2), (2.5), (2.6). Нетрудно видеть, что

$$\mathcal{J}(y + sw) = \mathcal{J}(y) + 2sB(y, w) + s^2\mathcal{J}(w).$$

Так как $\mathcal{J}(y + sw) \geq \mathcal{J}(y)$ для всех $s \in \mathbb{R}$, то выполняется (3.1).

Обратно, пусть $y \in W_2^1(\Gamma_m)$ удовлетворяет условиям (2.2), (2.5) и (2.6). Тогда (3.1) влечет

$$\mathcal{J}(y + w) = \mathcal{J}(y) + 2B(y, w) + \mathcal{J}(w) \geq \mathcal{J}(y) \quad \forall w \in \mathcal{W}.$$

Таким образом, y доставляет минимум функционалу (2.7) при условиях (2.2), (2.5) и (2.6). \square

Преобразуем (3.1), сделав замену переменных в членах, содержащих $w_j(q^{-1}(t - (q-1)T_1))$ и $w_1(q^{-1}t)$. В результате выражение для $B(y, w)$ примет вид

$$B(y, w) = \sum_{j=1}^m \alpha_j \int_0^{T_j} \ell_j y(t) (w'_j(t) + b_j w_j(t)) dt + \\ + q \left(\alpha_1 \int_0^{q^{-1}T_1} \ell_1 y(qt) (a_1 w'_1(t) + c_1 w_1(t)) dt + \right. \\ \left. + \sum_{j=2}^m \alpha_j \int_{(q^{-1}-1)T_1}^{q^{-1}(T_j-(q-1)T_1)} \ell_j y(qt + (q-1)T_1) (a_j w'_j(t) + c_j w_j(t)) dt \right).$$

Применяя (2.4) к $w = [w_1, \dots, w_m] \in \mathcal{W}$, можно представить

$$\int_{(q^{-1}-1)T_1}^{q^{-1}(T_j-(q-1)T_1)} \ell_j y(qt + (q-1)T_1) (a_j w'_j(t) + b_j w_j(t)) dt = \\ = \int_0^{q^{-1}(T_j-(q-1)T_1)} \ell_j y(qt + (q-1)T_1) (a_j w'_j(t) + c_j w_j(t)) dt + \\ + \int_{q^{-1}T_1}^{T_1} \ell_j y(qt - T_1) (a_j w'_1(t) + c_j w_1(t)) dt, \quad j = \overline{2, m}.$$

Тогда перепишем (3.1) в эквивалентном виде

$$B(y, w) = \sum_{j=1}^m \left(\int_0^{T_j} (\alpha_j \ell_j y(t) + \tilde{\ell}_{1,j} y(t)) w'_j(t) dt + \right. \\ \left. + \int_0^{T_j} (\alpha_j b_j \ell_j y(t) + \tilde{\ell}_{0,j} y(t)) w_j(t) dt \right) = 0 \quad \forall w \in \mathcal{W}, \quad (3.2)$$

где

$$\tilde{\ell}_{\nu,1} y(t) = \begin{cases} q\alpha_1 \theta_{\nu,1} \ell_1 y(qt), & 0 < t < q^{-1}T_1, \\ q \sum_{k=2}^m \alpha_k \theta_{\nu,k} \ell_k y(qt - T_1), & q^{-1}T_1 < t < T_1, \end{cases} \quad (3.3) \\ \tilde{\ell}_{\nu,j} y(t) = \begin{cases} q\alpha_j \theta_{\nu,j} \ell_j y(qt + (q-1)T_1), & 0 < t < l_j, \\ 0, & l_j < t < T_j, \end{cases} \quad j = \overline{2, m},$$

при $\nu \in \{0, 1\}$ и

$$\theta_{\nu,j} = \begin{cases} a_j, & \nu = 1, \\ c_j, & \nu = 0, \end{cases} \quad j = \overline{1, m}.$$

Обозначим через \mathcal{B} краевую задачу для функционально-дифференциальных уравнений второго порядка

$$\mathcal{L}_j y(t) := -(\hat{\ell}_j y(t))' + \alpha_j b_j \ell_j y(t) + \tilde{\ell}_{0,j} y(t) = 0, \quad 0 < t < l_j, \quad j = \overline{1, m}, \quad (3.4)$$

при условиях (2.2), (2.4)–(2.6) и условии типа Кирхгофа

$$\hat{\ell}_1 y(T_1) = \sum_{j=2}^m \hat{\ell}_j y(0), \quad (3.5)$$

где $\tilde{\ell}_{\nu,j}$, $\nu \in \{0, 1\}$, определены в (3.3), а выражения $\widehat{\ell}_j y(t)$ имеют вид

$$\widehat{\ell}_j y(t) := \alpha_j \ell_j y(t) + \tilde{\ell}_{1,j} y(t), \quad j = \overline{1, m}, \quad (3.6)$$

тогда как

$$l_1 := T_1, \quad l_j := q^{-1}(T_j - (q-1)T_1), \quad j = \overline{2, m}. \quad (3.7)$$

Определение 3.1. Функцию $y = [y_1, \dots, y_m] \in W_2^1(\Gamma_m)$ назовем *обобщенным решением* краевой задачи \mathcal{B} , если $\widehat{\ell}_j y(t) \in W_2^1[0, l_j]$, $j = \overline{1, m}$, а функции y_j , $j = \overline{1, m}$, удовлетворяют уравнениям (3.4) и условиям (2.2), (2.4)–(2.6), (3.5).

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 3.2. Если $y \in W_2^1(\Gamma_m)$ удовлетворяет условиям (2.2), (2.5), (2.6) и (3.1), то y является обобщенным решением краевой задачи \mathcal{B} . Обратно, любое обобщенное решение краевой задачи \mathcal{B} подчиняется условию (3.1).

Доказательство. Пусть $y \in W_2^1(\Gamma_m)$ и удовлетворяет условиям (2.2), (2.5), (2.6) и (3.1). Учитывая, что (3.1) эквивалентно (3.2) и применяя лемму 2 из [12] к (3.2) вместе с (3.7), получаем, что $\widehat{\ell}_j y(t) \in W_2^1[0, l_j]$, $j = \overline{1, m}$, и выполняется (3.5). Кроме того, интегрируя по частям в (3.2) и используя (2.5), (2.6), будем иметь

$$B(y, w) = w_1(T_1) \left(\widehat{\ell}_1 y(T_1) - \sum_{j=2}^m \widehat{\ell}_j y(0) \right) + \sum_{j=1}^m \int_0^{l_j} \mathcal{L}_j y(t) w_j(t) dt = 0. \quad (3.8)$$

В силу (3.5), а также произвольности w_j , из (3.8) получаем (3.4).

Обратно, пусть y — обобщенное решение задачи \mathcal{B} . Тогда левое равенство в (3.8) дает (3.1). \square

Объединив леммы 3.1 и 3.2, получаем следующий результат.

Теорема 3.1. Функция $y \in W_2^1(\Gamma_m)$ является решением вариационной задачи (2.2), (2.4)–(2.7) тогда и только тогда, когда y является обобщенным решением краевой задачи \mathcal{B} .

4. ОДНОЗНАЧНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ

В данном разделе устанавливается однозначная разрешимость краевой задачи \mathcal{B} , а согласно теореме 3.1 — и вариационной задачи (2.2), (2.4)–(2.7).

Введем обозначения

$$\ell_1^0 y(t) = y_1'(t) + a_1 y_1'(q^{-1}t), \quad \ell_j^0 y(t) = y_j'(t) + a_j y_j'(q^{-1}(t - (q-1)T_1)), \quad j = \overline{2, m}, \quad (4.1)$$

$$\ell_1^1 y(t) = b_1 y_1(t) + c_1 y_1(q^{-1}t), \quad \ell_j^1 y(t) = b_j y_j(t) + c_j y_j(q^{-1}(t - (q-1)T_1)), \quad j = \overline{2, m}, \quad (4.2)$$

$$\mathcal{J}_\nu(y) = \sum_{j=1}^m \int_0^{T_j} |\ell_j^\nu y(t)|^2 dt, \quad \nu = 0, 1,$$

где автоматически предполагается (2.4).

Лемма 4.1. Существуют C_0 и C_1 такие, что

$$\mathcal{J}(w) \leq C_0 \|w\|_{W_2^1(\tilde{\Gamma}_m)}^2, \quad \mathcal{J}_1(w) \leq C_1 \|w\|_{L_2(\tilde{\Gamma}_m)}^2 \quad \forall w \in \mathcal{W}. \quad (4.3)$$

Доказательство. Пусть $w \in \mathcal{W}$. Используя (4.1), (4.2) и неравенство

$$(\gamma_1 + \dots + \gamma_n)^2 \leq n(\gamma_1^2 + \dots + \gamma_n^2), \quad \gamma_1, \dots, \gamma_n \in \mathbb{R}, \quad (4.4)$$

для $n = 2$, получаем

$$\mathcal{J}_0(w) \leq 2 \sum_{j=1}^m \|w_j'\|_{L_2(0, T)}^2 + 2 \left(a_1^2 \int_0^{T_1} (w_1'(q^{-1}t))^2 dt + \sum_{j=2}^m a_j^2 \int_0^{T_j} (w_j'(q^{-1}(t - (q-1)T_1)))^2 dt \right),$$

$$\mathcal{J}_1(w) \leq 2 \sum_{j=1}^m b_j^2 \|w_j\|_{L_2(0,T)}^2 + 2 \left(c_1^2 \int_0^{T_1} w_1^2(q^{-1}t) dt + \sum_{j=2}^m c_j^2 \int_0^{T_j} w_j^2(q^{-1}(t - (q-1)T_1)) dt \right).$$

Учитывая (2.4) применительно к w , для $\nu = 0, 1$ вычисляем

$$\int_0^{T_1} \left(w_1^{(\nu)}(q^{-1}t) \right)^2 dt = q \|w_1^{(\nu)}\|_{L_2(0,q^{-1}T_1)}^2,$$

$$\int_0^{T_j} \left(w_j^{(\nu)}(q^{-1}(t - (q-1)T_1)) \right)^2 dt = q \|w_1^{(\nu)}\|_{L_2(q^{-1}T_1, T_1)}^2 + q \|w_j^{(\nu)}\|_{L_2(0, q^{-1}(T_j - (q-1)T_1))}^2, \quad j = \overline{2, m}.$$

В частности, это дает вторую оценку в (4.3). Наконец, аналогично лемме 5 в [12] нетрудно показать, что $\|w'\|_{L_2(\Gamma_m)}$ порождает норму в \mathcal{W} , эквивалентную норме $\|w\|_{W_2^1(\tilde{\Gamma}_m)}$. Таким образом, используя оценку

$$\mathcal{J}(w) \leq 2\tilde{\alpha}_1 (\mathcal{J}_0(w) + \mathcal{J}_1(w)), \quad \tilde{\alpha}_1 = \max\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\},$$

получаем первое неравенство в (4.3). \square

Лемма 4.2. Пусть $|a_1| \neq q^{-\frac{1}{2}}$ и $|a_2| + \dots + |a_m| > 0$. Тогда существует $C_2 > 0$ такое, что

$$\mathcal{J}_0(w) \geq C_2 \|w\|_{W_2^1(\tilde{\Gamma}_m)}^2 \quad \forall w \in \mathcal{W}. \quad (4.5)$$

Доказательство. Предположим от противного, что найдутся $w_{(s)} = [w_{(s),1}, \dots, w_{(s),m}] \in \mathcal{W}$ при $s \in \mathbb{N}$, такие что $\|w_{(s)}\|_{W_2^1(\tilde{\Gamma}_m)} = 1$ и

$$\mathcal{J}_0(w_{(s)}) \leq \frac{1}{s}, \quad s \in \mathbb{N}. \quad (4.6)$$

Используя первое выражение в (4.1) и (4.6), для всех $s \in \mathbb{N}$ получаем

$$\int_0^{T_1} \left(w'_{(s),1}(t) \right)^2 dt + 2a_1 \int_0^{T_1} w'_{(s),1}(t) w'_{(s),1}(q^{-1}t) dt + a_1^2 \int_0^{T_1} \left(w'_{(s),1}(q^{-1}t) \right)^2 dt \leq \frac{1}{s}. \quad (4.7)$$

Применим неравенство Коши—Буняковского к среднему интегралу:

$$a_1 \int_0^{T_1} w'_{(s),1}(t) w'_{(s),1}(q^{-1}t) dt \geq -|a_1| \sqrt{q} \|w'_{(s),1}\|_{L_2(0,T_1)}^2.$$

Подставляя эту оценку в (4.7), имеем

$$(1 - |a_1| \sqrt{q})^2 \|w'_{(s),1}\|_{L_2(0,T_1)}^2 \leq \frac{1}{s} + a_1^2 q \|w'_{(s),1}\|_{L_2(q^{-1}T_1, T_1)}^2. \quad (4.8)$$

С другой стороны, согласно (4.1), для всех $j \in \overline{2, m}$, таких что $a_j \neq 0$, почти всюду на $(0, T_j)$ справедливы оценки

$$|w'_j(q^{-1}(t - (q-1)T_1))| \leq |a_j|^{-1} |\ell_j^0 w(t)| + |a_j|^{-1} |w'_j(t)|. \quad (4.9)$$

Используя (4.1), (4.4), (4.6) и (4.9), при всех $s \in \mathbb{N}$ и $j \in \overline{2, m}$ получаем оценки

$$\begin{cases} \|w'_{(s),j}\|_{L_2(0,T_j)}^2 \leq \frac{1}{s}, & \text{если } a_j = 0, \\ \|w'_{(s),j}\|_{L_2((q^{-1}-1)T_1, 0)}^2 \leq \frac{2}{qa_j^2 s} + \frac{2}{qa_j^2} \|w'_{(s),j}\|_{L_2(0, (q-1)T_1)}^2, & \text{если } a_j \neq 0, \\ \|w'_{(s),j}\|_{L_2(T_{j,k+1}, T_{j,k})}^2 \leq \frac{2}{qa_j^2 s} + \frac{2}{qa_j^2} \|w'_{(s),j}\|_{L_2(T_{j,k}, T_{j,k-1})}^2, \end{cases}$$

где $k \in \{n \in \mathbb{N} : T_j > (q^n - 1)T_1\}$ и $T_{j,k} := q^{-k}(T_j - (q^k - 1)T_1)$. Учитывая, что

$$\|w'_{(s),j}\|_{L_2(q^{-1}(T_j - (q-1)T_1), T_j)} = 0, \quad j = \overline{2, m},$$

из полученных неравенств следует $\|w'_{(s),j}\|_{L_2(0,T_j)} \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$ для $j = \overline{2, m}$. Более того, если $a_j \neq 0$, то для таких j дополнительно имеем $\|w'_{(s),j}\|_{L_2((q^{-1}-1)T_1,0)} \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Последнее, вместе с тождествами

$$\|w'_{(s),j}\|_{L_2((q^{-1}-1)T_1,0)}^2 = \|w'_{(s),1}\|_{L_2(q^{-1}T_1,T_1)}^2, \quad j = \overline{2, m},$$

и оценками (4.8), позволяет заключить, что $\|w'_{(s),1}\|_{L_2(0,T_1)} \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$.

В итоге имеем $\|w'_{(s)}\|_{L_2(\Gamma_m)} \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, где $w' = [w'_1, \dots, w'_m]$. Поскольку $\|w'\|_{L_2(\Gamma_m)}$ порождает норму в \mathcal{W} , эквивалентную норме $\|w\|_{W_2^1(\tilde{\Gamma}_m)}$, то и $\|w_{(s)}\|_{W_2^1(\tilde{\Gamma}_m)} \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$. Последнее противоречит $\|w_{(s)}\|_{W_2^1(\tilde{\Gamma}_m)} = 1$. \square

Лемма 4.3. Пусть $|a_1| \neq q^{-\frac{1}{2}}$ и $|a_2| + \dots + |a_m| > 0$. Тогда существует $C_3 > 0$ такое, что

$$\mathcal{J}(w) \geq C_3 \|w\|_{W_2^1(\tilde{\Gamma}_m)}^2 \quad \forall w \in \mathcal{W}.$$

Доказательство. Снова предположим от противного, что найдутся $w_{(s)} \in \mathcal{W}$, $s \in \mathbb{N}$, такие, что $\|w_{(s)}\|_{W_2^1(\tilde{\Gamma}_m)} = 1$, но теперь

$$\mathcal{J}(w_{(s)}) \leq \frac{1}{s}, \quad s \in \mathbb{N}. \quad (4.10)$$

Из неравенства

$$\tilde{\alpha}_2 \mathcal{J}_0(w) \leq 2\mathcal{J}(w) + 2\tilde{\alpha}_1 \mathcal{J}_1(w), \quad \tilde{\alpha}_1 = \max\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\}, \quad \tilde{\alpha}_2 = \min\{\alpha_1, \dots, \alpha_m\},$$

совместно с оценками (4.3) и (4.5) получаем

$$\frac{\tilde{\alpha}_2 C_2}{2} \|w\|_{W_2^1(\tilde{\Gamma}_m)}^2 \leq \mathcal{J}(w) + \tilde{\alpha}_1 C_1 \|w\|_{L_2(\Gamma_m)}^2. \quad (4.11)$$

В силу компактности вложения $W_2^1(\Gamma_m)$ в $L_2(\Gamma_m)$ найдется подпоследовательность $\{w_{(n_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$, фундаментальная в $L_2(\Gamma_m)$. Тогда неравенство (4.11) дает

$$\frac{\tilde{\alpha}_2 C_2}{2} \|w_{(s_k)} - w_{(s_l)}\|_{W_2^1(\tilde{\Gamma}_m)}^2 \leq \mathcal{J}(w_{(s_k)} - w_{(s_l)}) + \tilde{\alpha}_1 C_1 \|w_{(s_k)} - w_{(s_l)}\|_{L_2(\Gamma_m)}^2.$$

Кроме того, используя (4.4) при $n = 2$ и (4.10), имеем

$$\mathcal{J}(w_{(s_k)} - w_{(s_l)}) \leq \frac{2}{s_k} + \frac{2}{s_l}.$$

Таким образом, последовательность $\{w_{(s_k)}\}_{k \in \mathbb{N}}$ является фундаментальной в \mathcal{W} и сходится к некоторой функции $w_{(0)} \in \mathcal{W}$.

В силу леммы 4.1 сходимость $w_{(s_k)}$ к $w_{(0)}$ в \mathcal{W} влечет сходимость $\ell w_{(s_k)}$ к $\ell w_{(0)}$ в $L_2(\Gamma_m)$. Следовательно, в силу (4.10) будем иметь

$$\|\ell w_{(0)}\|_{L_2(\Gamma_m)}^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \|\ell w_{(s_k)}\|_{L_2(\Gamma_m)}^2 = \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{J}(w_{(s_k)}) = 0,$$

т. е. $w_{(0)} \in \mathcal{W}$ удовлетворяет уравнениям

$$w'_{(0),1}(t) + a_1 w'_{(0),1}(q^{-1}t) + b_1 w_{(0),1}(t) + c_1 w_{(0),1}(q^{-1}t) = 0,$$

$$w'_{(0),j}(t) + a_j w'_{(0),j}(q^{-1}(t - (q-1)T_1)) + b_j w_{(0),j}(t) + c_j w_{(0),j}(q^{-1}(t - (q-1)T_1)) = 0, \quad j = \overline{2, m}.$$

Если для некоторого $j \in \overline{1, m}$ выполняется $a_j = c_j = 0$, то уравнение для $w_{(0),j}$ сводится к обычному дифференциальному уравнению, решение которого, с учетом принадлежности $w_{(0)}$ классу \mathcal{W} , дает $w_{(0),j}(t) = 0$ при $0 < t < T_j$.

Рассмотрим $j \in \overline{1, m}$, при которых $a_j^2 + c_j^2 \neq 0$. Поскольку $w_{(0),j}(t) = 0$, $j = \overline{2, m}$, при $t \geq q^{-1}(T_j - (q-1)T_1)$ соответствующие уравнения на интервале $(q^{-1}(T_j - (q-1)T_1), T_j)$ принимают вид

$$a_j w'_{(0),j}(q^{-1}(t - (q-1)T_1)) + c_j w_{(0),j}(q^{-1}(t - (q-1)T_1)) = 0, \quad j = \overline{2, m},$$

или

$$a_j w'_{(0),j}(t) + c_j w_{(0),j}(t) = 0, \quad q^{-2}(T_j - (q^2 - 1)T_1) < t < q^{-1}(T_j - (q-1)T_1), \quad j = \overline{2, m}.$$

Отсюда с учетом $w_{(0),j}(q^{-1}(T_j - (q-1)T_1)) = 0$ следует, что $w_{(0),j}(t) = 0$, $j = \overline{2, m}$, при $t \geq q^{-2}(T_j - (q^2 - 1)T_1)$. Продолжая дальше влево аналогичным образом, получаем $w_{(0),j}(t) = 0$ при $(q^{-1} - 1) < t < T_j$, $j = \overline{2, m}$. Учитывая, что $w_{(0),j}(t) = w_{(0),1}(t + T_1)$ при $(q^{-1} - 1)T_1 < t < 0$, из чего следует $w_{(0),1}(t) = 0$ для $q^{-1}T_1 < t < T_1$, аналогичными рассуждениями можем получить $w_{(0),1}(t) = 0$ для $0 < t < T_1$.

В итоге имеем $w_{(0)}(t) = 0$, что противоречит $\|w_{(0)}\|_{W_2^1(\tilde{\Gamma}_m)} = 1$. \square

Следующая теорема является основным результатом данного раздела.

Теорема 4.1. Пусть $|a_1| \neq q^{-\frac{1}{2}}$ и $|a_2| + \dots + |a_m| > 0$. Тогда краевая задача \mathcal{B} имеет единственное обобщенное решение $y \in W_2^1(\Gamma_m)$. Кроме того, существует C такое, что

$$\|y\|_{W_2^1(\Gamma_m)} \leq C|y_0|. \quad (4.12)$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $\Phi = [\Phi_1, \dots, \Phi_m] \in W_2^1(\Gamma_m)$ такую, что

$$\Phi_1(t) = \begin{cases} y_0 \left(1 - \frac{qt}{T_1}\right), & 0 \leq t < q^{-1}T_1, \\ 0, & q^{-1}T_1 \leq t \leq T_1, \end{cases} \quad \Phi_j(t) \equiv 0, \quad j = 2, \dots, m.$$

В силу леммы 3.2, для того чтобы функция $y \in W_2^1(\Gamma_m)$, удовлетворяющая условиям (2.2), (2.5), (2.6), была решением краевой задачи \mathcal{B} , необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие (3.1). Другими словами, y является решением краевой задачи \mathcal{B} , если и только если $x := y - \Phi \in \mathcal{W}$ и

$$B(\Phi, w) + B(x, w) = 0 \quad \forall w \in \mathcal{W}. \quad (4.13)$$

Так как $B(w, w) = \mathcal{J}(w)$, то в силу леммы 4.3 билинейная форма $(\cdot, \cdot)_{\mathcal{W}} := B(\cdot, \cdot)$ является скалярным произведением в \mathcal{W} . Кроме того, справедлива оценка

$$|B(\Phi, w)| = \alpha_1 \left| \int_0^{T_1} \ell_1 \Phi(t) \ell_1 w(t) dt \right| \leq M|y_0| \|w\|_{\mathcal{W}}, \quad (4.14)$$

где $\|w\|_{\mathcal{W}} = \sqrt{(w, w)_{\mathcal{W}}}$. Таким образом, по теореме Рисса об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве существует единственная функция $x \in \mathcal{W}$ такая, что выполняется (4.13). Следовательно, краевая задача \mathcal{B} имеет единственное решение $y = \Phi + x$. Кроме того, согласно (4.13) и (4.14) имеем

$$\|x\|_{\mathcal{W}} \leq M|y_0|,$$

что позволяет получить оценку (4.12). \square

Замечание 4.1. Утверждение теоремы 4.1 может быть дополнено следующим результатом из [18]. А именно: в случае, когда система (2.1)–(2.5) имеет запаздывающий тип (т. е. $a_j = 0$ для всех $j = \overline{1, m}$), краевая задача \mathcal{B} имеет единственное решение; при этом $y \in W_2^1(\Gamma_m) \cap W_2^2(\tilde{\Gamma}_m)$ и также справедлива априорная оценка (4.12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л. Задача об успокоении системы управления с последствием с различным числом входов и выходов // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2024. — 70, № 2. — С. 189–200. — DOI: [10.22363/2413-3639-2024-70-2-189-200](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-189-200).
2. Амбарцумян В. А. К теории флуктуаций яркости в Млечном пути // Докл. АН СССР. — 1944. — 44. — С. 244–247.
3. Бутерин С. А. Об успокоении системы управления произвольного порядка с глобальным последствием на дереве // Мат. заметки. — 2024. — 115, № 6. — С. 825–848. — DOI: [10.4213/mzm14223](https://doi.org/10.4213/mzm14223).
4. Бутерин С. А. Интегро-дифференциальная система управления на временном графе // Материалы Межд. конф. «Динамические системы: устойчивость, управление, дифференциальные игры». — Екатеринбург: ИММ УрО РАН, 2024. — С. 71–75.
5. Бутерин С. А. Об управляемой системе на бесконечном временном дереве // Мат. заметки. — 2025. — 117, № 3. — С. 462–467. — DOI: [10.4213/mzm14540](https://doi.org/10.4213/mzm14540).
6. Красовский Н. Н. Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.

7. Покорный В. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. — М.: Физматлит, 2005.
8. Россовский Л. Е. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — 54. — С. 3–138.
9. Скубачевский А. Л. К задаче об успокоении системы управления с последствием// Докл. РАН. — 1994. — 335, № 2. — С. 157–160.
10. Berkolaiko G., Kuchment P. Introduction to Quantum Graphs. — Providence: Am. Math. Soc., 2013.
11. Buterin S. Functional-differential operators on geometrical graphs with global delay and inverse spectral problems// Result. Math. — 2023. — 78. — 79. — DOI: [10.1007/s00025-023-01850-5](https://doi.org/10.1007/s00025-023-01850-5).
12. Buterin S. On damping a control system with global aftereffect on quantum graphs: Stochastic interpretation// Math. Methods Appl. Sci. — 2025. — 48. — С. 4310–4331. — DOI: [10.1002/mma.10549](https://doi.org/10.1002/mma.10549).
13. Hall A., Wake G. A functional differential equation arising in modelling of cell growth// J. Aust. Math. Soc. Ser. B. Appl. Math. — 1989. — 30. — С. 424–435. — DOI: [10.1017/S0334270000006366](https://doi.org/10.1017/S0334270000006366).
14. Iserles A. On the generalized pantograph functional-differential equation// Eur. J. Appl. Math. — 1993. — 4. — С. 1–38. — DOI: [10.1017/S0956792500000966](https://doi.org/10.1017/S0956792500000966).
15. Iserles A., Liu Y. On neutral functional-differential equations with proportional delays// J. Math. Anal. Appl. — 1997. — 207, № 1. — С. 73–95. — DOI: [10.1006/jmaa.1997.5262](https://doi.org/10.1006/jmaa.1997.5262).
16. Kato T., McLeod J. Functional-differential equation $\dot{y} = ay(\lambda t) + by(t)$ // Bull. Am. Math. Soc. — 1971. — 77, № 6. — С. 891–937. — DOI: [10.1090/S0002-9904-1971-12805-7](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1971-12805-7).
17. Langese J., Leugering G., Schmidt J. Modelling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures. — Boston: Birkhäuser, 1994.
18. Lednov A. P. On damping a control system on a star graph with global time-proportional delay// ArXiv. — 2025. — 2503.02522.
19. Lednov A. P. On damping a delay control system with global contraction on a temporal tree// ArXiv. — 2025. — 2509.02608.
20. Montrol E. Quantum theory on a network// J. Math. Phys. — 1970. — 11, № 2. — С. 635–648. — DOI: [10.1063/1.1665178](https://doi.org/10.1063/1.1665178).
21. Nicaise S. Some results on spectral theory over networks, applied to nerve impulse transmission// Math. Model. — 1987. — 9, № 6. — С. 437–449.
22. Ockendon J., Tayler A. The dynamics of a current collection system for an electric locomotive// Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci. — 1971. — 322. — С. 447–468. — DOI: [10.1098/rspa.1971.0078](https://doi.org/10.1098/rspa.1971.0078).
23. Skubachevskii A. Elliptic functional differential equations and applications. — Basel: Birkhäuser, 1997.
24. Wang F., Yang C.-F. Traces for Sturm–Liouville operators with constant delays on a star graph// Results Math. — 2021. — 76. — 220. — DOI: [10.1007/s00025-021-01529-9](https://doi.org/10.1007/s00025-021-01529-9).

А. П. Леднов

Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия

Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: lednovalexsandr@gmail.com, ORCID: [0009-0002-7088-8693](https://orcid.org/0009-0002-7088-8693)

DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-642-654](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-642-654)
 EDN: [MGDOHS](#)

UDC 517.9
Research article

On the damping of a neutral-type control system on a temporal star graph with time-proportional delay

A. P. Lednov

Saratov National Research State University named after N. G. Chernyshevsky, Saratov, Russia
Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Abstract. On a temporal star graph, we consider the problem of optimally damping a control system for a generalized pantograph equation, which is a neutral-type equation with time-proportional delay. The delay in the system propagates through an internal vertex of the graph. We study the variational problem of minimizing the energy functional, taking into account the probabilities of scenarios corresponding to different edges. We establish that the optimal trajectory satisfies Kirchhoff-type conditions at the internal vertex. We prove the equivalence of the variational problem to a certain boundary-value problem for second-order functional differential equations on the graph, and establish the unique solvability of both problems.

Keywords: neutral-type equation with delay, pantograph equation, star graph, optimal system damping, Krasovskii problem, variational problem, unique solvability.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was supported by the Russian Science Foundation, project No. 24-71-10003.

For citation: A. P. Lednov, “On the damping of a neutral-type control system on a temporal star graph with time-proportional delay,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2025, Vol. 71, No. 4, 642–654, DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-642-654](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-642-654).

REFERENCES

1. A. Sh. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, “Zadacha ob uspokoении sistemy upravleniya s posledeystviem s razlichnym chislom vkhodov i vykhodov” [Damping problem for control system with delay with different number of inputs and outputs], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2024, **70**, No. 2, 189–200, DOI: [10.22363/2413-3639-2024-70-2-189-200](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-189-200) (in Russian).
2. V. A. Ambartsumyan, “K teorii fluktuatsiy yarkosti v Mlechnom puti” [To the theory of brightness fluctuations in the Milky Way], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1944, **44**, 244–247 (in Russian).
3. S. A. Buterin, “Ob uspokoении sistemy upravleniya proizvol’nogo poryadka s global’nym posledeystviem na dereve” [On damping a control system of arbitrary order with global aftereffect on a tree], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2024, **115**, No. 6, 825–848, DOI: [10.4213/mzm14223](https://doi.org/10.4213/mzm14223) (in Russian).
4. S. A. Buterin, “Integro-differentsial’naya sistema upravleniya na vremennom grafe” [Integro-differential control system on a time graph], *Proc. Int. Conf. Dynamic Systems: Stability, Control, Differential Games*, IMM UrO RAN, Ekaterinburg, 2024, pp. 71–75 (in Russian).
5. S. A. Buterin, “Ob upravlyaemoy sisteme na beskonechnom vremennom dereve” [Control system on an infinite temporal tree], *Mat. Zametki* [Math. Notes], 2025, **117**, No. 3, 462–467, DOI: [10.4213/mzm14540](https://doi.org/10.4213/mzm14540) (in Russian).
6. N. N. Krasovskii, *Teoriya Upravleniya Dvizheniem* [Motion Control Theory], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).



7. V. V. Pokornyy, O. M. Penkin, V. L. Pryadiev, A. V. Borovskikh, K. P. Lazarev, and S. A. Shabrov, *Differentsial'nye Uravneniya na Geometricheskikh Grafakh* [Differential Equations on Geometric Graphs], Fizmatlit, Moscow, 2005 (in Russian).
8. L. E. Rossovskii, "Ellipticheskie funktsional'no-differentsial'nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii" [Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, 3–138 (in Russian).
9. A. L. Skubachevskii, "K zadache ob uspokoenii sistemy upravleniya s posledeystviem" [On the problem of damping a control system with aftereffect], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1994, **335**, No. 2, 157–160 (in Russian).
10. G. Berkolaiko and P. Kuchment, *Introduction to Quantum Graphs*, Am. Math. Soc., Providence, 2013.
11. S. Buterin, "Functional-differential operators on geometrical graphs with global delay and inverse spectral problems," *Result. Math.*, 2023, **78**, 79, DOI: [10.1007/s00025-023-01850-5](https://doi.org/10.1007/s00025-023-01850-5).
12. S. Buterin, "On damping a control system with global aftereffect on quantum graphs: Stochastic interpretation," *Math. Methods Appl. Sci.*, 2025, **48**, 4310–4331, DOI: [10.1002/mma.10549](https://doi.org/10.1002/mma.10549).
13. A. Hall and G. Wake, "A functional differential equation arising in modelling of cell growth," *J. Aust. Math. Soc. Ser. B. Appl. Math.*, 1989, **30**, 424–435, DOI: [10.1017/S0334270000006366](https://doi.org/10.1017/S0334270000006366).
14. A. Iserles, "On the generalized pantograph functional-differential equation," *Eur. J. Appl. Math.*, 1993, **4**, 1–38, DOI: [10.1017/S0956792500000966](https://doi.org/10.1017/S0956792500000966).
15. A. Iserles and Y. Liu, "On neutral functional-differential equations with proportional delays," *J. Math. Anal. Appl.*, 1997, **207**, No. 1, 73–95, DOI: [10.1006/jmaa.1997.5262](https://doi.org/10.1006/jmaa.1997.5262).
16. T. Kato and J. McLeod, "Functional-differential equation $\dot{y} = ay(\lambda t) + by(t)$," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1971, **77**, No. 6, 891–937, DOI: [10.1090/S0002-9904-1971-12805-7](https://doi.org/10.1090/S0002-9904-1971-12805-7).
17. J. Langese, G. Leugering, and J. Schmidt, *Modelling, analysis and control of dynamic elastic multi-link structures*, Birkhäuser, Boston, 1994.
18. A. P. Lednov, "On damping a control system on a star graph with global time-proportional delay," *ArXiv*, 2025, 2503.02522.
19. A. P. Lednov, "On damping a delay control system with global contraction on a temporal tree," *ArXiv*, 2025, 2509.02608.
20. E. Montrol, "Quantum theory on a network," *J. Math. Phys.*, 1970, **11**, No. 2, 635–648, DOI: [10.1063/1.1665178](https://doi.org/10.1063/1.1665178).
21. S. Nicaise, "Some results on spectral theory over networks, applied to nerve impulse transmission," *Math. Model.*, 1987, **9**, No. 6, 437–449.
22. J. Ockendon and A. Tayler, "The dynamics of a current collection system for an electric locomotive," *Proc. R. Soc. Lond. Ser. A Math. Phys. Eng. Sci.*, 1971, **322**, 447–468, DOI: [10.1098/rspa.1971.0078](https://doi.org/10.1098/rspa.1971.0078).
23. A. Skubachevskii, *Elliptic functional differential equations and applications*, Birkhäuser, Basel, 1997.
24. F. Wang and C.-F. Yang, "Traces for Sturm–Liouville operators with constant delays on a star graph," *Results Math.*, 2021, **76**, 220, DOI: [10.1007/s00025-021-01529-9](https://doi.org/10.1007/s00025-021-01529-9).

A. P. Lednov

Saratov National Research State University named after N. G. Chernyshevsky, Saratov, Russia

Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E-mail: lednovalexsandr@gmail.com, ORCID: [0009-0002-7088-8693](https://orcid.org/0009-0002-7088-8693)

О ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ ДИРАКА

Т. В. Сальникова, Е. И. Кугушев

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Аннотация. Для гамильтоновых систем на симплектических многообразиях со связями в модели обобщенной гамильтоновой динамики Дирака В. В. Козлов рассмотрел операцию симплектического проектирования гамильтонова векторного поля для случая обобщенных неинтегрируемых дифференциальных связей. В данной работе рассматривается метод регуляризации связей, позволяющий обойти вырождение операции симплектического проектирования в случае нечетного количества связей. Он основан на вложении исходной системы в расширенную систему большей размерности с увеличенным количеством связей.

Ключевые слова: уравнения Гамильтона, дифференциальные связи, симплектическое проектирование.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Т. В. Сальникова, Е. И. Кугушев. О геометрических структурах Дирака // Современная математика. Фундаментальные направления. 2025. Т. 71, № 4. С. 655–662, DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-655-662](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-655-662).

1. ВВЕДЕНИЕ

Основными геометрическими объектами лагранжевой и гамильтоновой механики являются расслоения касательных TQ и кокасательных T^*Q гладких конфигурационных многообразий Q . В динамике Дирака [6] связи механических систем описываются как *интегрируемые дифференциальные распределения* в этих пространствах. Вариационный подход к описанию динамики таких систем, в частности, позволяет рассматривать задачи с лагранжианами, вырожденными по скоростям, что важно в релятивистской механике. Динамика Дирака также описывается в рамках так называемой обобщенной геометрии [4, 7, 8]. Основным геометрическим объектом такого рассмотрения является двойное расслоение $TT^*Q \oplus T^*T^*Q$, иногда его называют обобщенным касательным расслоением или расслоением Понтрягина. Геометрические структуры, основанные на этом объекте, корректно описывают механические системы. Такие структуры, получившие название *структуры Дирака*, были введены Т. Курантом [5] с некоторой мотивацией из механики: систему можно рассматривать в терминах координат и скоростей или координат и импульсов, геометрическое описание тогда происходит на TQ или T^*Q , соответственно. Структуры Дирака вводятся для обеспечения связи этих двух способов описания.

В работе [2] динамика Дирака распространена на гамильтоновы системы на симплектических многообразиях, частным случаем которых являются кокасательные расслоения гладких многообразий с естественной симплектической структурой. Связи в динамических системах описываются в общем случае как *неинтегрируемые дифференциальные распределения* в этих пространствах.

Введена операция симплектической проекции гамильтонова векторного поля, позволяющая строить уравнения движения с учетом связей. В случае интегрируемости дифференциальных распределений, описывающих связи, получается гамильтонова динамика Дирака. Для формулировки уравнений, описывающих динамику таких систем, необходимо спроектировать гамильтоновы и лагранжевы векторные поля, описывающие динамику системы без связей, на эти распределения, описывающие связи. Для этого рассматриваются различные операторы проекции (см. [2]). В частности, предлагается метод симплектической проекции гамильтоновых потоков, позволяющий сохранить гамильтонову структуру. Этот метод неявно предложен в [6] для применения в теории относительности и квантовой механике, как способ описания решений задач с вырожденными лагранжианами, приводящий к системам уравнений в гамильтоновой форме с конечными связями. Такая техника также может быть использована и в задачах неголономной механики. В невырожденном случае, когда ограничение симплектической структуры на дифференциальное распределение является невырожденной симплектической структурой, в работе [2] доказана единственность такой проекции. В работе [3] дано описание симплектического проектирования в рамках обобщенной геометрии.

В настоящем исследовании рассматривается возможность реализации симплектической проекции в некоторых вырожденных случаях. Предлагается метод регуляризации связей, позволяющий обойти вырождение операции симплектического проектирования в случае нечетного количества связей. Он основан на вложении исходной системы в расширенную систему большей размерности с увеличенным количеством связей. В качестве важного приложения это позволяет изучать системы с *одной дифференциальной связью*.

2. СИМПЛЕКТИЧЕСКОЕ ПРОЕКТИРОВАНИЕ

Пусть на симплектическом многообразии M^{2n} с канонической формой ω_2 имеется гамильтоново векторное поле с функцией Гамильтона $H : M^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$, и определено дифференциальное распределение, задающееся в локальных канонических координатах $x = (p, q)$, $\xi = (\dot{p}, \dot{q})$ системой дифференциальных 1-форм

$$\alpha_i(x, \xi) = 0, \quad i = 1, \dots, k, \quad (x, \xi) \in TM^{2n}. \quad (2.1)$$

Это распределение рассматривается как связи, наложенные на движение гамильтоновой системы. Проектирование осуществляется с помощью симплектической геометрии касательных плоскостей, которая индуцируется симплектической структурой фазового пространства. Используя эту структуру, можно задающие связи дифференциальные формы преобразовать в векторные поля.

Определение 2.1. *Симплектическое проектирование* гамильтонова векторного поля — это сдвиг этого поля в касательном пространстве вдоль векторных полей, определяемых связями, таким образом, чтобы преобразованное векторное поле удовлетворяло связям, т. е. лежало на дифференциальном распределении.

В [2] доказано, что если ограничение симплектической формы ω^2 на дифференциальное распределение (2.1) является невырожденной 2-формой, то симплектическое проектирование однозначно определено. В случае нечетного количества дифференциальных связей такое ограничение всегда будет вырожденным.

Цель настоящей работы — показать возможность реализации симплектического проектирования в вырожденных случаях. Важным приложением является возможность исследования систем с одной дифференциальной связью — в этом случае симплектическое проектирование всегда невозможно. Для того, чтобы обойти такую ситуацию, мы введем систему с большим числом степеней свободы, решения которой будут включать в себя все решения исходной системы.

3. О РИМАНОВЫХ СТРУКТУРАХ НА КАСАТЕЛЬНЫХ И КОКАСАТЕЛЬНЫХ РАССЛОЕНИЯХ

Мы будем рассматривать симплектические многообразия, снабженные некоторой произвольной римановой метрикой. Примером такого объекта является кокасательное расслоение конфигурационного многообразия механической системы. Помимо естественной симплектической структуры на нем существует естественная риманова метрика — метрика Вейля. Опишем ее.

Пусть Q^n — конфигурационное многообразие механической системы с n степенями свободы. На нем существует естественная кинетическая метрика, в которой квадрат нормы касательного вектора равен соответствующей кинетической энергии системы. На касательном расслоении TQ^n вводим метрику Сасаки [1], являющуюся расширением кинетической метрики. Фазовым пространством соответствующей гамильтоновой системы является кокасательное расслоение $M^{2n} = T^*Q^n$, на котором задана естественная симплектическая структура. Эта структура позволяет установить следующее изоморфное соответствие f между ковекторами и касательными векторами. Если $\alpha \in T_x^*Q^n$ — ковектор в точке $x \in Q^n$, то ему соответствует касательный вектор $f(\alpha) = \xi \in T_xQ^n$ в точке $x \in Q^n$ такой, что для любого касательного вектора $\eta \in T_xQ^n$ значение на нем ковектора α определяется соотношением $\alpha(\eta) = \omega_2(\eta, \xi)$, т. е. $\alpha(\eta) = \omega_2(\eta, f(\alpha))$. Соответствие f можно рассматривать как диффеоморфизм $f : (x, \alpha) \rightarrow (x, f(\alpha))$ между T^*Q^n и TQ^n . Дифференциал этого отображения позволяет переносить векторы, касательные к T^*Q^n , на векторы, касательные к TQ^n , и является диффеоморфизмом $df : TT^*Q^n \rightarrow TTQ^n$. Этот диффеоморфизм естественным образом переносит риманову метрику Сасаки, определенную на TQ^n , в метрику G , определенную на $M^{2n} = T^*Q^n$, — метрику Вейля. Для пары векторов μ, ν , касательных к T^*Q^n , скалярное произведение $\langle \cdot, \cdot \rangle$ в метрике Вейля определяется следующим образом: $\langle \mu, \nu \rangle = (df(\mu), df(\nu))$, где (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в метрике Сасаки на TQ^n .

В общем случае, пусть на многообразии M^{2n} с симплектической структурой, заданной канонической 2-формой ω_2 , задана также произвольная риманова метрика, и $\langle \xi, \eta \rangle$ обозначает скалярное произведение касательных векторов ξ, η .

Эти структуры порождают два естественных изоморфизма между линейными пространствами $\Omega^1(M^{2n})$ — C^∞ -гладких дифференциальных 1-форм на M^{2n} и $\mathbb{V}(M^{2n})$ — C^∞ -гладких векторных полей на M^{2n} :

$$g : \mathbb{V}(M^{2n}) \rightarrow \Omega^1(M^{2n}), \quad h : \Omega^1(M^{2n}) \rightarrow \mathbb{V}(M^{2n}). \quad (3.1)$$

Определим эти изоморфизмы. Пусть α — это 1-форма на M^{2n} , тогда $X = h(\alpha)$ — это векторное поле, такое, что $\alpha(\cdot) = \omega_2(\cdot, X)$. Пусть Y — векторное поле на M^{2n} , тогда $\beta = g(Y)$ — это 1-форма, такая, что $\beta(\cdot) = \langle \cdot, X \rangle$.

Композиция $f = g \circ h$ этих отображений является автоморфизмом линейного пространства $\Omega^1(M^{2n})$.

Рассмотрим на M^{2n} гамильтонову систему с функцией Гамильтона $H(r), r \in M^{2n}$. Считаем, что на систему наложена одна связь $\gamma = 0, \gamma \in \Omega^1(M^{2n})$.

4. РАСШИРЕННАЯ СИСТЕМА И РЕГУЛЯРИЗАЦИЯ

Построим расширенную систему. Объекты расширенной системы будем отмечать волной $\widetilde{(\cdot)}$. Фазовое пространство расширенной системы — это многообразие $\widetilde{M}^{2n+2} = M^{2n} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Точка s этого многообразия представляет собой тройку $s = (r, x, y), r \in M^{2n}, x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R}$. Введем естественную проекцию $\pi : \widetilde{M}^{2n+2} \rightarrow M^{2n}$ так, что $\pi(r, x, y) = r$.

При помощи дифференциала этого отображения касательные векторы переносятся слева направо, а пространство $\Omega^1(M^{2n})$ C^∞ -дифференциальных форм на M^{2n} переносится справа налево и естественным образом вкладывается в пространство $\Omega^1(\widetilde{M}^{2n+2})$ C^∞ -дифференциальных форм на \widetilde{M}^{2n+2} . Результат такого вложения будем также обозначать тильдой $\widetilde{(\cdot)}$.

Симплектическая форма на расширенном фазовом пространстве $\widetilde{\omega}_2 = \omega_2 + dy \wedge dx$. Функция Гамильтона расширенной системы

$$\widetilde{H}(s) = \widetilde{H}(r, x, y) = H(r) + H_1(x, y),$$

где $H_1(x, y)$ — произвольная функция на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Для сокращения выкладок мы полагаем зависимость H_1 только от новых переменных, поскольку на условие невырожденности симплектического проектирования выбор функции H_1 не влияет.

На систему наложены две связи: $\widetilde{\alpha}_i = 0, \widetilde{\alpha}_i \in \Omega^1(\widetilde{M}^{2n+2}), i = 1, 2$:

$$\widetilde{\alpha}_1 = \widetilde{\gamma} = 0,$$

$$\widetilde{\alpha}_2 = \widetilde{g}(\widetilde{h}(\widetilde{\gamma})) + \mu dy + \nu dx = 0,$$

где $\mu(r, x, y), \nu(r, x, y)$ — произвольные функции на расширенном пространстве.

Пусть всюду $\mu \neq 0$.

Отметим следующую взаимную однозначность. Если $(r(t), x(t), y(t))$ — гладкая кривая на \widetilde{M}^{2n+2} , удовлетворяющая связям $\tilde{\alpha}_i = 0$, $i = 1, 2$, расширенной системы, то $r(t)$ — кривая, удовлетворяющая связи $\gamma = 0$ исходной системы. Обратно, если $r(t)$ — кривая, удовлетворяющая связи $\gamma = 0$ исходной системы, то для произвольной зависимости $x(t)$, найдется такая единственная зависимость $x(t)$, $y(t)$, что кривая $(r(t), x(t), y(t))$ удовлетворяет связям $\tilde{\alpha}_i = 0$, $i = 1, 2$, расширенной системы.

Можно использовать и более общее условие $\mu^2 + \nu^2 \neq 0$, но оно требует более громоздких выкладок.

Пусть $\tilde{v}_H = \tilde{h}(d\tilde{H})$ — гамильтоново векторное поле расширенной системы. Тогда результат операции симплектического проектирования (векторное поле \tilde{X} , удовлетворяющее связям) определяется следующими соотношениями

$$\begin{aligned}\tilde{X} &= \tilde{v}_H + \lambda_1 \tilde{h}(\tilde{\alpha}_1) + \lambda_2 \tilde{h}(\tilde{\alpha}_2), \\ \tilde{\alpha}_1 &= 0, \\ \tilde{\alpha}_2 &= 0.\end{aligned}$$

Теорема 4.1. *Если форма γ невырождена, то симплектическое проектирование в расширенной системе невырождено, то есть осуществимо.*

Доказательство. Условие невырожденности симплектического проектирования локально, поэтому достаточно доказать это утверждение в локальных координатах.

Пусть в некоторых локальных канонических координатах $x = (x_1, \dots, x_{2n})$ матрицы симплектической формы и метрического тензора имеют вид $S(x) = \|s_{ij}\|$, $G(x) = \|g_{ij}\|$.

Будем рассматривать 1-формы на M и на \widetilde{M} так же, как и ковекторные поля.

Опишем отображения g и h (3.1).

Пусть $Y = (Y_1(q, p), \dots, Y_{2n}(q, p))$ — векторное поле на M^{2n} . Тогда $g(Y) = \beta = GY$ — это ковекторное поле. Пусть $\beta = (\beta_1, \dots, \beta_{2n})$ — ковекторное поле на M^{2n} . Тогда $h(\beta) = Y = S^{-1}\beta$ — это векторное поле.

Пусть H — функция Гамильтона исходной системы. Для расширенной системы к функции Гамильтона добавим новое слагаемое H_1 :

$$\tilde{H} = H + H_1.$$

Пусть на систему наложена одна связь $\alpha_1 = 0$, где α_1 — ковекторное поле. В расширенной системе добавим связь следующего вида:

$$\alpha_2 + \mu dp_{n+1} + \nu dq_{n+1} = 0,$$

где $\alpha_2 = g(h(\alpha_1)) = GS^{-1}\alpha_1$.

При симплектическом проектировании уравнения движения расширенной системы примут вид

$$\dot{x} = S^{-1}dH + \lambda_1 S^{-1}\alpha_1 + \lambda_2 S^{-1}\alpha_2. \quad (4.1)$$

В канонических координатах (q, p) эти уравнения выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}\dot{q}_{n+1} &= \frac{\partial H_1}{\partial p_{n+1}} - \lambda_2 \mu, \\ \dot{p}_{n+1} &= -\frac{\partial H_1}{\partial q_{n+1}} + \lambda_2 \nu.\end{aligned} \quad (4.2)$$

Условия выполнения связей выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \dot{x}) &= 0, \\ (\alpha_2, \dot{x}) + \mu \dot{p}_{n+1} + \nu \dot{q}_{n+1} &= 0.\end{aligned}$$

Подставив в эти выражения (4.1) и $\alpha_2 = GS^{-1}\alpha_1$, находим

$$(\alpha_1, S^{-1}dH + \lambda_1 S^{-1}\alpha_1 + \lambda_2 S^{-1}GS^{-1}\alpha_1) = 0,$$

$$(GS^{-1}\alpha_1, S^{-1}dH + \lambda_1 S^{-1}\alpha_1 + \lambda_2 S^{-1}GS^{-1}\alpha_1) + \mu \left(-\frac{\partial H_1}{\partial q_{n+1}} + \lambda_2 \nu \right) + \nu \left(\frac{\partial H_1}{\partial p_{n+1}} - \lambda_2 \mu \right) = 0.$$

Отсюда получаем систему линейных уравнений относительно λ_1, λ_2 :

$$\begin{aligned}(\alpha_1, \lambda_1 S^{-1} \alpha_1 + \lambda_2 S^{-1} G S^{-1} \alpha_1) &= -(\alpha_1, S^{-1} dH), \\(GS^{-1} \alpha_1, \lambda_1 S^{-1} \alpha_1 + \lambda_2 S^{-1} G S^{-1} \alpha_1) &= (GS^{-1} \alpha_1, S^{-1} dH) + \mu \frac{\partial H_1}{\partial q_{n+1}} - \nu \frac{\partial H_1}{\partial p_{n+1}}.\end{aligned}$$

Поскольку матрицы S и S^{-1} кососимметрические, то

$$\begin{aligned}(\alpha_1, S^{-1} \alpha_1) &= 0, \\(GS^{-1} \alpha_1, S^{-1} G S^{-1} \alpha_1) &= 0.\end{aligned}\tag{4.3}$$

Таким образом,

$$\lambda_2 (\alpha_1, S^{-1} G S^{-1} \alpha_1) = -(\alpha_1, S^{-1} dH),\tag{4.4}$$

$$\lambda_1 (GS^{-1} \alpha_1, S^{-1} \alpha_1) = (GS^{-1} \alpha_1, S^{-1} dH) + \mu \frac{\partial H_1}{\partial q_{n+1}} - \nu \frac{\partial H_1}{\partial p_{n+1}}.\tag{4.5}$$

Матрицы G и S^{-1} невырождены, и, по предположению, ковектор $\alpha_1 \neq 0$, поэтому

$$\begin{aligned}(\alpha_1, S^{-1} G S^{-1} \alpha_1) &= -(S^{-1} \alpha_1, G S^{-1} \alpha_1) \neq 0, \\(GS^{-1} \alpha_1, S^{-1} \alpha_1) &\neq 0.\end{aligned}$$

Тогда множители λ_1, λ_2 определяются однозначно.

Теорема доказана. \square

По всей видимости, рассмотренный случай одной связи можно распространить на случай k связей и получить следующее утверждение:

Теорема 4.2. *Систему с n степенями свободы и произвольным количеством k связей можно вложить в систему с числом степеней свободы $n + k$, с добавлением k новых связей, при условии независимости всей системы $2k$ связей, так, что в новой системе симплектическое проектирование будет невырожденным, то есть осуществимым.*

В качестве примера для изложенного метода возможности осуществления симплектического проектирования рассмотрим задачу о неголономной точке.

5. НЕГОЛОНОМНАЯ ТОЧКА

Пусть механическая система состоит из одной материальной точки массы m , с координатами x, y, z в некоторой абсолютной системе координат. Считается, что на точку действуют силы с потенциальной энергией $V(x, y, z)$. Введем канонические импульсы (p_x, p_y, p_z) и запишем функцию Гамильтона

$$H = \kappa(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + V(x, y, z), \quad \kappa = (2m)^{-1}.$$

Пусть на движение точки наложена неголономная связь $\dot{x} - y\dot{z} = 0$, которая в дифференциальной форме имеет вид $\alpha_1 = dx - ydz = 0$.

Конфигурационное пространство $Q = \mathbb{R}^3$. Риманова (кинетическая) метрика на нем имеет постоянную матрицу $G_3 = \text{diag}\{\kappa m^2, \kappa m^2, \kappa m^2\}$. Касательное расслоение $TQ = \mathbb{R}^6$. Метрика Сасаки на нем имеет постоянную матрицу $G = \text{diag}\{\kappa m^2, \kappa m^2, \kappa m^2, \kappa m^2, \kappa m^2, \kappa m^2\}$. В этом случае квадрат нормы вектора, касательного к TQ , равен сумме кинетической энергии точки и ее энергии ускорений. Фазовое пространство гамильтоновой системы $T^*Q = \mathbb{R}^6$. Дуальная метрика Вейля на нем имеет ту же постоянную матрицу G . Вложим эту систему в расширенную систему, число степеней свободы которой на единицу больше, а фазовое пространство представляет собой \mathbb{R}^8 . При этом считаем, что симплектическая форма в расширенной системе получается добавлением слагаемого $dp_w \wedge dw$ к симплектической форме исходной системы: $\tilde{\omega}_2 = dp_x \wedge dx + dp_y \wedge dy + dp_z \wedge dz + dp_w \wedge dw$. К исходной функции Гамильтона добавим слагаемое κp_w^2 , так что новая функция Гамильтона

$$\tilde{H} = \kappa(p_x^2 + p_y^2 + p_z^2 + p_w^2) + V(x, y, z).$$

Форма исходной связи в расширенном пространстве

$$\alpha_1 = dx - ydz = 0$$

как ковектор имеет координаты

$$\alpha_1 = (0, 0, 0, 0, 1, 0, -y, 0).$$

Тогда

$$\begin{aligned} g(\alpha_1) &= G\alpha_1 = (0, 0, 0, 0, \kappa m^2, 0, -\kappa m^2 y, 0), \\ h(g(\alpha_1)) &= (\kappa m^2, 0, -\kappa m^2 y, 0, 0, 0, 0, 0). \end{aligned}$$

Форма добавленной связи

$$\alpha_2 = \kappa m^2 dp_x - \kappa m^2 y dp_z + dp_w = 0$$

как ковектор имеет координаты

$$\alpha_2 = (\kappa m^2, 0, -\kappa m^2 y, 1, 0, 0, 0, 0).$$

При симплектическом проектировании, в соответствии с (4.1), получаем уравнения с множителями:

$$\begin{aligned} \dot{p}_x &= -V_x + \lambda_1, & \dot{p}_y &= -V_y, & \dot{p}_z &= -V_z - y\lambda_1, \\ \dot{x} &= 2\kappa p_x - \kappa m^2 \lambda_2, & \dot{y} &= 2\kappa p_y, & \dot{z} &= 2\kappa p_z + \kappa m^2 y \lambda_2, \\ \dot{w} &= 2\kappa p_w, -\lambda_2 & \dot{p}_w &= 0, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где $V_x = \frac{\partial V}{\partial x}$, $V_y = \frac{\partial V}{\partial y}$, $V_z = \frac{\partial V}{\partial z}$.

Для определения множителей λ_1, λ_2 используем соотношения

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= \dot{x} - y\dot{z} = 0, \\ \alpha_2 &= \kappa m^2 \dot{p}_x - \kappa m^2 y \dot{p}_z + \dot{p}_w = 0. \end{aligned}$$

Подставив в эти равенства выражения скоростей канонических координат из (5.1), получим систему линейных уравнений относительно λ_1, λ_2 :

$$\begin{aligned} \alpha_1 &= (2\kappa p_x - \kappa m^2 \lambda_2) - y(2\kappa p_z + \kappa m^2 y \lambda_2) = 0, \\ \alpha_2 &= \kappa m^2 (-V_x + \lambda_1) - \kappa m^2 y (-V_z - y\lambda_1). \end{aligned}$$

Откуда

$$\lambda_2 = \frac{2p_x - 2yp_z}{m^2(1 + y^2)}, \quad \lambda_1 = \frac{V_x - yV_z}{(1 + y^2)}.$$

Замечание 5.1. Отметим, что в полученной системе уравнений отделяются уравнения для исходной системы. В результате мы имеем замкнутую систему уравнений в исходном фазовом пространстве, что является общим фактом для такого способа регуляризации симплектического проектирования.

Теорема 5.1. В системе уравнений движения расширенной системы (4.1) уравнения для исходных фазовых координат отделяются и представляют собой замкнутую систему уравнений в исходном фазовом пространстве, зависящую от параметров исходной системы тогда и только тогда, когда

$$\mu \frac{\partial H_1}{\partial q_{n+1}} - \nu \frac{\partial H_1}{\partial p_{n+1}} \equiv 0.$$

Доказательство. В системе уравнений движения расширенной системы (4.1) исходные фазовые координаты задаются вектором x . В уравнениях для них (для \dot{x}) добавочные координаты (q_{n+1}, p_{n+1}) могут содержаться только в выражениях для множителей λ_1, λ_2 . Из (4.4)-(4.5) находим

$$\lambda_2 = -\frac{(\alpha_1, S^{-1}dH)}{(\alpha_1, S^{-1}GS^{-1}\alpha_1)}, \quad \lambda_1 = \frac{(GS^{-1}\alpha_1, S^{-1}dH)}{(GS^{-1}\alpha_1, S^{-1}\alpha_1)}.$$

Утверждение теоремы следует из того, что в этих выражениях участвуют функции только от исходных фазовых координат, и добавочные координаты отсутствуют. \square

Замечание 5.2. Отметим, что предлагаемая регуляризация корректна в том смысле, что вне зависимости от выбора регуляризации, если она проведена таким образом, что уравнения для исходных координат полностью отделились, то они всегда одни и те же.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Борисенко А. А., Ямпольский Л. Я. Риманова геометрия расслоений// Усп. мат. наук. — 1991. — 46, № 6. — С. 51–95.
2. Козлов В. В. К обобщенной гамильтоновой динамике Дирака// Усп. мат. наук. — 2024. — 29, № 4. — С. 95–130. — DOI: [10.4213/rm10183](https://doi.org/10.4213/rm10183).
3. Сальникова Т. В., Кугушев Е. И. Геометрические структуры для дифференциальных связей в лагранжевом и гамильтоновом формализме// Усп. мат. наук. — 2025. — 80, № 3. — С. 183–184. — DOI: [10.4213/rm10243](https://doi.org/10.4213/rm10243).
4. Cosserat O., Laurent-Gengoux C., Kotov A., Ryvkin L., Salnikov V. On Dirac structures admitting a variational approach// Math. Mech. Complex Syst. — 2023. — 11, № 1. — hal-03445074v2. — DOI: [10.2140/memocs.2023.11.1](https://doi.org/10.2140/memocs.2023.11.1).
5. Courant T. Dirac manifolds// Trans. Am. Math. Soc. — 1990. — 319. — С. 631–661. — DOI: [10.1090/S0002-9947-1990-0998124-1](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1990-0998124-1).
6. Dirac P. A. M. Generalized Hamiltonian dynamics// Canad. J. Math. — 1950. — 2, № 2. — С. 129–148. — DOI: [10.4153/CJM-1950-012-1](https://doi.org/10.4153/CJM-1950-012-1).
7. Tulczyjew W. M. The Legendre transformation// Ann. Inst. H. Poincaré. — 1977. — 27, № 1. — С. 101–114.
8. Yoshimura H., Marsden J. E. Dirac structures in Lagrangian mechanics. I. Implicit Lagrangian systems// J. Geom. Phys. — 2006. — 57, № 1. — С. 133–156. — DOI: [10.1016/j.geomphys.2006.02.009](https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2006.02.009).

Т. В. Сальникова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: tatiana.salnikova@gmail.com, РИНЦ SPIN-код: 8362-5455, РИНЦ AuthorID: [1153857](https://elibrary.ru/author_index.aspx?id=1153857),
ResearcherID: [AAB-1148-2019](https://orcid.org/0000-0001-7039-6977), Scopus: [36890776900](https://orcid.org/0000-0001-7039-6977), ORCID: [0000-0001-7039-6977](https://orcid.org/0000-0001-7039-6977)

Е. И. Кугушев

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: kugushevei@yandex.ru, РИНЦ AuthorID: [4491](https://elibrary.ru/author_index.aspx?id=4491), ResearcherID: [Q-5737-2018](https://orcid.org/0000-0003-0066-4168), Scopus: [6603260594](https://orcid.org/0000-0003-0066-4168), ORCID: [0000-0003-0066-4168](https://orcid.org/0000-0003-0066-4168)

DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-655-662](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-655-662)

EDN: [MIQJVQ](https://elibrary.ru/MIQJVQ)

UDC 514.8

Research article

Dirac geometric structures

T. V. Salnikova and E. I. Kugushev

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Abstract. For Hamiltonian systems on symplectic manifolds with constraints in the Dirac model of generalized Hamiltonian dynamics, V. V. Kozlov considered the operation of symplectic projection of a Hamiltonian vector field for the case of generalized nonintegrable differential constraints. This paper considers a constraint regularization method that circumvents the degeneracy of the symplectic projection operation in the case of an odd number of constraints. The method is based on embedding of the original system into an extended system of higher dimension with an increased number of constraints.

Keywords: Hamilton's equations, differential constraints, symplectic projection.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: T. V. Salnikova, E. I. Kugushev, “Dirac geometric structures,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2025, Vol. **71**, No. 4, 655–662, DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-655-662](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-655-662).

REFERENCES

1. A. A. Borisenko and L. Ya. Yampol'skii, “Rimanova geometriya rassloeniy” [Riemannian geometry of fibre bundles], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 1991, **46**, No. 6, 51–95 (in Russian).
2. V. V. Kozlov, “K obobshchennoy gamiltonovoy dinamike Diraka” [On Dirac's generalized Hamiltonian dynamics], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 2024, **29**, No. 4, 95–130, DOI: [10.4213/rm10183](https://doi.org/10.4213/rm10183) (in Russian).
3. T. V. Sal'nikova and E. I. Kugushev, “Geometricheskie struktury dlya differentsial'nykh svyazey v lagranzhevom i gamiltonovom formalizme” [Geometric structures for differential constraints in Lagrangian and Hamiltonian formalism], *Usp. Mat. Nauk* [Progr. Math. Sci.], 2025, **80**, No. 3, 183–184, DOI: [10.4213/rm10243](https://doi.org/10.4213/rm10243) (in Russian).
4. O. Cosserat, C. Laurent-Gengoux, A. Kotov, L. Ryvkin, and V. Salnikov, “On Dirac structures admitting a variational approach,” *Math. Mech. Complex Syst.*, 2023, **11**, No. 1, hal-03445074v2, DOI: [10.2140/memocs.2023.11.1](https://doi.org/10.2140/memocs.2023.11.1).
5. T. Courant, “Dirac manifolds,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1990, **319**, 631–661, DOI: [10.1090/S0002-9947-1990-0998124-1](https://doi.org/10.1090/S0002-9947-1990-0998124-1).
6. P. A. M. Dirac, “Generalized Hamiltonian dynamics,” *Canad. J. Math.*, 1950, **2**, No. 2, 129–148, DOI: [10.4153/CJM-1950-012-1](https://doi.org/10.4153/CJM-1950-012-1).
7. W. M. Tulczyjew, “The Legendre transformation,” *Ann. Inst. H. Poincaré*, 1977, **27**, No. 1, 101–114.
8. H. Yoshimura and J. E. Marsden, “Dirac structures in Lagrangian mechanics. I. Implicit Lagrangian systems,” *J. Geom. Phys.*, 2006, **57**, No. 1, 133–156, DOI: [10.1016/j.geomphys.2006.02.009](https://doi.org/10.1016/j.geomphys.2006.02.009).

T. V. Salnikova

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E-mail: tatiana.salnikova@gmail.com, eLIBRARY SPIN-code: 8362-5455, eLIBRARY AuthorID: [1153857](https://elibrary.ru/1153857), ResearcherID: [AAB-1148-2019](https://orcid.org/0000-0001-7039-6977), Scopus: [36890776900](https://orcid.org/0000-0001-7039-6977), ORCID: [0000-0001-7039-6977](https://orcid.org/0000-0001-7039-6977)

E. I. Kugushev

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E-mail: kugushevei@yandex.ru, eLIBRARY AuthorID: [4491](https://elibrary.ru/4491), ResearcherID: [Q-5737-2018](https://orcid.org/0000-0003-0066-4168), Scopus: [6603260594](https://orcid.org/0000-0003-0066-4168), ORCID: [0000-0003-0066-4168](https://orcid.org/0000-0003-0066-4168)

КЛАСС АНИЗОТРОПНЫХ УРАВНЕНИЙ ДИФФУЗИИ-ПЕРЕНОСА В НЕДИВЕРГЕНТНОЙ ФОРМЕ

Л. Хоанг¹, А. И. Ибрагимов²

¹*Texas Tech University, Lubbock, USA*

²*Институт проблем нефти и газа РАН, Москва, Россия*

Аннотация. В работе обобщается вероятностный метод Эйнштейна для броуновского движения на случай сжимаемых жидкостей в пористых средах. Рассматривается многомерный случай с произвольными функциями распределения вероятностей. Связывая ожидаемое смещение за единицу времени со скоростью жидкости, мы выводим анизотропное уравнение диффузии-переноса в недивергентной форме, содержащее член переноса. В предположении закона Дарси получено соответствующее нелинейное уравнение в частных производных для функции плотности. Исследованы классические решения этого уравнения, доказаны принцип максимума и сильный принцип максимума. Кроме того, получены оценки экспоненциального убывания решений при всех временах, в частности, доказана их экспоненциальная сходимость при $t \rightarrow \infty$. В основе анализа лежат явно построенные преобразования типа Бернштейна—Коула—Хопфа, которые удаётся сконструировать даже для весьма общих уравнений состояния. Доказана и использована лемма о росте во времени, позволившая получить указанные оценки убывания.

Ключевые слова: парадигма Эйнштейна, уравнение диффузии-переноса, фильтрация жидкости в пористых средах, нелинейность, уравнения в частных производных в недивергентной форме, качественный анализ, преобразование Бернштейна—Коула—Хопфа, асимптотический анализ.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. А. И. Ибрагимов выполнил работу при финансовой поддержке в рамках государственного задания Института проблем нефти и газа Российской академии наук (проект № 122022800272-4).

Для цитирования: Л. Хоанг, А. И. Ибрагимов. Класс анизотропных уравнений диффузии-переноса в недивергентной форме // Современная математика. Фундаментальные направления. 2025. Т. 71, № 4. С. 663–685, DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-663-685](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-663-685).

1. ВВЕДЕНИЕ

Цель этой статьи состоит в следующем:

- (1) разработка новой модели процессов диффузии и переноса жидкостей в пористых средах с использованием парадигмы Эйнштейна для броуновского движения [14];
- (2) строгий анализ этой модели для получения конкретных результатов по устойчивости.

Что касается первой цели, напомним, что моделирование фильтрации в пористых средах традиционно базируется на следующих трёх компонентах [4, 23, 27]:

- (a) уравнение непрерывности (материальный баланс/сохранение массы);
- (b) уравнение движения, которое обычно представляет собой закон Дарси или одно из его обобщений;
- (c) уравнение состояния, описывающее связь между давлением и плотностью.

Это приводит к уравнениям в частных производных (УрЧП) параболического типа (линейным, квазилинейным, вырожденным и т. д.) для функции давления или плотности (см. [1, 3, 7]). Благодаря (а), все они естественным образом возникают в дивергентной форме. Эти уравнения изучаются уже давно, и существует обширная литература, см., например, [1, 29] для течений Дарси, [2, 6–10, 15, 17–19, 24, 25, 28] для течений Форхгеймера и ссылки в этих работах. Они относятся к более широкому классу нелинейных параболических уравнений, см. книги [13, 21].

Хотя три уравнения (а), (б), (с), упомянутые выше, являются детерминированными, они, по сути, могут быть подвержены стохастическим возмущениям [26, 30]. Принимая во внимание эту стохастическую точку зрения, мы предлагаем альтернативный подход к первой составляющей (а) — сохранению массы — пересматривая и используя вероятностное уравнение материального баланса Эйнштейна [14]. Более конкретно, мы применяем парадигму Эйнштейна [14] и рассматриваем движение жидкости в пористой среде как случайные перемещения частиц из точки x в точку $x + \zeta$ в течение малого интервала времени τ , где ζ — случайное смещение. Обобщая рассуждения из [14] на многомерное пространство, мы приходим к следующему уравнению в частных производных для функции плотности ρ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{E}{\tau} \cdot \nabla \rho, \quad (1.1)$$

где $a_{ij}(x, t)$ — коэффициенты диффузии, а $E(x, t) = \int \zeta \phi(x, t, \zeta) d\zeta$, где $\phi(x, t, \zeta)$ обозначает распределение вероятностей этих событий (более подробно см. в разделе 2 ниже). Здесь E/τ — это новый член переноса, поскольку $\phi(x, t, \zeta)$ не предполагается чётной функцией по ζ . Обратим внимание, что E — это ожидаемое значение смещения частицы в течение времени от t до $t + \tau$. Поэтому мы постулируем (см. гипотезу 2.1), что средняя скорость E/τ пропорциональна скорости жидкости v , или, в более общем случае,

$$M_0 v = \frac{1}{\tau} E, \quad (1.2)$$

где M_0 — матрица, гарантирующая определённый уровень «соответствия» v и E/τ , см. (2.14). Предположение (1.2) связывает микроскопический перенос с макроскопическим. Это важно для понимания и развития нашей модели.

После (1.1) и (1.2) мы рассматриваем анизотропный закон Дарси для (б) и изоэнтропические течения газа, а также течения слабосжимаемой жидкости для (с). В результате получается квазилинейное параболическое уравнение второго порядка в недивергентной форме относительно ρ , содержащее квадратичный член по $\nabla \rho$ и другие нелинейности по ρ , см. (2.18)–(2.22) ниже.

Перейдём ко второй цели статьи — математическому анализу полученных моделей. Мы докажем принцип максимума и сильный принцип максимума для решений. Для начальной задачи с постоянными граничными данными мы получаем оценки экспоненциального убывания решения в пространственной C^0 -норме. Следовательно, решение экспоненциально сходится в C^0 -норме к своему постоянному граничному значению при стремлении времени к бесконечности. Для доказательства мы явно строим *отдельные* преобразования типа Бернштейна–Коула–Хопфа [5, 11, 20], чтобы преобразовать *то же самое* решение в необходимое суб- или суперрешение соответствующего усеченного линейного оператора. Более того, лемма о росте во времени устанавливается с помощью метода Ландиса. Затем она применяется на последовательных временных интервалах для получения оценок экспоненциального убывания.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 мы выводим модели в несколько этапов. Во-первых, обобщая вероятностный метод Эйнштейна [14] на многомерное пространство, мы выводим общее уравнение диффузии (2.8) в недивергентной форме. Без предположения о чётности функции распределения вероятностей, это уравнение содержит отношение $E(x, t)/\tau$ — среднее смещение за единицу времени. Во-вторых, связывая это отношение $E(x, t)/\tau$ со скоростью $v(x, t)$ жидкости, мы получаем уравнение (2.22). Основным предположением является гипотеза 2.1, которая обобщает основную идею (2.11). Эта гипотеза связывает микроскопические понятия, такие как движение частиц с вероятностями, со скоростью, которая является макроскопической характеристикой жидкости. В-третьих, используя закон Дарси, мы находим уравнение (2.17) для давления p и плотности ρ . Наконец, уравнение состояния используется для получения нелинейного

уравнения в частных производных (2.22) для плотности. Особыми случаями являются уравнения (2.18), (2.19) и (2.20).

Раздел 3 посвящен изучению уравнения (2.22) в его общем виде (3.3) с точки зрения принципа максимума и сильного принципа максимума для нелинейного оператора L , см. (3.7). Принцип максимума доказан в теореме 3.1, а сильный принцип максимума — в теореме 3.2. Для последней теоремы в лемме 3.1 построены преобразования типа Бернштейна—Коула—Хопфа, преобразующие решение оператора L в субрешения и суперрешения усеченного линейного оператора \mathcal{L} . Эти преобразования явно записываются в терминах уравнения состояния.

В последнем разделе 4 мы изучаем поведение решения начально-краевой задачи (4.36) при больших временах. Основным инструментом служит лемма Ландиса о росте для линейного оператора \tilde{L} , представляющего собой общую форму \mathcal{L} , из леммы 4.1. Это приводит к оценкам суб- и суперрешений \tilde{L} в предложении 4.1. С помощью преобразований типа Бернштейна—Коула—Хопфа из раздела 3 для связи L , \mathcal{L} и \tilde{L} мы получаем основные результаты теоремы 4.1. Они заключаются в оценках экспоненциального убывания для всех времён и, как следствие, экспоненциальной сходимости решений при стремлении времени к бесконечности. Фактически, экспоненциальная скорость может не зависеть от начальных данных, как показано в следствии 4.1. Приложения к различным типам течений жидкости приведены в примерах 4.1 и 4.2. Стоит отметить, что лемма о росте демонстрирует устойчивость исходной нелинейной задачи, что частично оправдывает предлагаемую нами модель динамики течений жидкости в пористых средах.

Авторы осознают, что разработанные в данной работе модели существенно отличаются от стандартных. Очевидно, что для их подтверждения необходимы дополнительные данные и эксперименты. Тем не менее, поскольку вывод настолько прост, их идеи, методы и математический анализ представлены здесь в надежде на дальнейшее обсуждение и развитие. В конечном итоге они могут оказаться полезными для разработки альтернативной методологии описания и понимания сложных процессов диффузии и переноса в пористых средах.

2. ВЫВОД МОДЕЛЕЙ

Обозначения. На протяжении всей статьи пространственная размерность $n \geq 1$ фиксирована. Для вектора $x \in \mathbb{R}^n$ его евклидова норма обозначается через $|x|$. Пусть $\mathcal{M}^{n \times n}$ обозначает множество матриц действительных чисел размера $n \times n$, а $\mathcal{M}_{\text{sym}}^{n \times n}$ — множество симметричных матриц в $\mathcal{M}^{n \times n}$. Для пары матриц $A, B \in \mathcal{M}^{n \times n}$ их скалярное произведение $\langle A, B \rangle$ равно следу $\text{Tr}(A^T B)$. Для действительной функции $f(x)$, где $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, обозначим через $D^2 f$ матрицу Гессе вторых частных производных $(\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j)_{i,j=1,\dots,n}$.

2.1. Общие уравнения. Пусть $\rho(x, t)$ — функция плотности жидкости в точке $x \in \mathbb{R}^n$ в момент времени $t \in \mathbb{R}$. Пусть $\tau > 0$ — небольшой временной интервал в качестве входного параметра в момент наблюдения. Пусть $\zeta \in \mathbb{R}^n$ — случайное смещение частиц жидкости. Предположим, что вероятность перемещения частиц из точки x в момент времени t в точку $x + \zeta$ в момент времени $t + \tau$, где $\zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$, может быть охарактеризована функцией распределения вероятностей $\phi(x, t, \zeta) \geq 0$, так что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi(x, t, \zeta) d\zeta = 1.$$

Уравнение материального баланса Эйнштейна [14] записывается в виде

$$\rho(x, t + \tau) = \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x + \zeta, t) \phi(x, t, \zeta) d\zeta. \quad (2.1)$$

При малом τ мы аппроксимируем производную по времени от ρ следующим образом:

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} \approx \frac{1}{\tau} (\rho(x, t + \tau) - \rho(x, t)). \quad (2.2)$$

Вычислим $\rho(x, t + \tau)$ в правой части (2.2) по материальному балансу (2.1). Предположим, что функция $\zeta \mapsto \phi(x, t, \zeta)$ сосредоточена в малом шаре с центром в начале координат. Согласно

разложению Тейлора функции $\zeta \mapsto \rho(x + \zeta, t)$ при малых $|\zeta|$ с точностью до квадратичных членов имеем приближение

$$\rho(x + \zeta, t) \approx \rho(x, t) + \zeta \cdot \nabla \rho(x, t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \zeta_i \zeta_j \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x_i \partial x_j}.$$

Затем, используя (2.1), мы можем записать аппроксимацию

$$\begin{aligned} \rho(x, t + \tau) &= \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x + \zeta, t) \phi(x, t, \zeta) d\zeta \approx \int_{\mathbb{R}^n} \rho(x, t) \phi(x, t, \zeta) d\zeta + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \zeta \cdot \nabla \rho(x, t) \phi(x, t, \zeta) d\zeta + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \int_{\mathbb{R}^n} \zeta_i \zeta_j \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} \phi(x, t, \zeta) d\zeta. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\rho(x, t + \tau) \approx \rho(x, t) + E(x, t) \cdot \nabla \rho(x, t) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \bar{a}_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad (2.3)$$

где вектор

$$E(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \phi(x, t, \zeta) \zeta d\zeta, \quad (2.4)$$

а коэффициенты

$$\bar{a}_{ij}(x, t) = \int_{\mathbb{R}^n} \zeta_i \zeta_j \phi(x, t, \zeta) d\zeta \quad \text{при } i, j = 1, \dots, n. \quad (2.5)$$

Объединяя (2.3) с (2.2) и заменяя приближение равенством, получаем

$$\frac{\partial \rho(x, t)}{\partial t} = \frac{1}{2\tau} \sum_{i,j=1}^n \bar{a}_{ij}(x, t) \frac{\partial^2 \rho(x, t)}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{\tau} E(x, t) \cdot \nabla \rho(x, t). \quad (2.6)$$

Определим матрицы размера $n \times n$

$$\bar{A}(x, t) = (\bar{a}_{ij}(x, t))_{i,j=1,\dots,n} \quad \text{и} \quad A(x, t) = (a_{ij}(x, t))_{i,j=1,\dots,n} \stackrel{\text{def}}{=} \frac{1}{2\tau} \bar{A}(x, t). \quad (2.7)$$

Тогда уравнение (2.6) можно переписать в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{1}{\tau} E \cdot \nabla \rho = \langle A, D^2 \rho \rangle + \frac{1}{\tau} E \cdot \nabla \rho. \quad (2.8)$$

Замечание 2.1. Следует сделать следующие замечания.

- (а) Ввиду (2.5), матрица $\bar{A}(x, t)$ симметрична, а значит, и $A(x, t)$ тоже. Кроме того, для $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$\xi^T \bar{A}(x, t) \xi = \sum_{i,j=1}^n \xi_i \bar{a}_{ij}(x, t) \xi_j = \int_{\mathbb{R}^n} |\xi \cdot \zeta|^2 \phi(x, t, \zeta) d\zeta \geq 0.$$

Следовательно, $\bar{A}(x, t)$ положительно полуопределена. Поскольку $\tau > 0$, то из (2.7) вытекает, что матрица $A(x, t)$ также положительно полуопределена.

- (б) Если $\zeta \mapsto \phi(x, t, \zeta)$ — четная функция, то, согласно (2.4), $E(x, t) = 0$, и мы имеем

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i \partial x_j}. \quad (2.9)$$

- (с) Рассмотрим случай взаимно независимых событий относительно координат смещения ζ , т. е.

$$\phi(x, t, \zeta) = \phi_1(x, t, \zeta_1) \cdots \phi_n(x, t, \zeta_n), \quad \text{при } \zeta = (\zeta_1, \zeta_2, \dots, \zeta_n),$$

где каждая $\phi_i(x, t, \zeta_i)$ — это функция распределения вероятностей по переменной $\zeta_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, 2, \dots, n$. Тогда имеем

$$\bar{a}_{ij} = \begin{cases} \bar{\sigma}_i \bar{\sigma}_j & \text{при } i \neq j, \\ \bar{\sigma}_{i,i}^2 & \text{при } i = j, \end{cases}$$

где

$$\bar{\sigma}_i(x, t) = \int_{\mathbb{R}} s \phi_i(x, t, s) ds, \quad \bar{\sigma}_{i,i}(x, t) = \left(\int_{\mathbb{R}} s^2 \phi_i(x, t, s) ds \right)^{1/2}.$$

- (d) Предположим, в дополнение к (c), что каждая функция $\phi_i(x, t, s)$ при $1 \leq i \leq n$ чётна по $s \in \mathbb{R}$. Тогда каждое $\sigma_i = 0$, и, следовательно, $\bar{A}(x, t)$ — диагональная матрица $\text{diag}[\bar{\sigma}_{1,1}^2, \bar{\sigma}_{2,2}^2, \dots, \bar{\sigma}_{n,n}^2]$. Поскольку каждое $\bar{\sigma}_{i,i}$ положительно, то в этом случае матрица $\bar{A}(x, t)$ положительно определена. Более того, функция $\zeta \mapsto \phi(x, t, \zeta)$ — четная, следовательно, согласно пункту (b), уравнение (2.8) принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \sum_{i=1}^n \frac{\bar{\sigma}_{i,i}^2}{2\tau} \cdot \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2}. \quad (2.10)$$

Это многомерная версия уравнения, полученного Эйнштейном в [14].

Мы сосредоточимся на изучении общего уравнения (2.8), а не (2.9) или (2.10).

2.2. Основное предположение. Заметим, что $E(x, t)$ — это ожидаемое смещение из точки x между моментами времени t и $t + \tau$. Таким образом, $E(x, t)/\tau$ — это частное

$$\frac{\text{среднее смещение}}{\text{время}},$$

что можно рассматривать как среднюю скорость. Следовательно, при малых τ мы можем аппроксимировать это отношение $E(x, t)/\tau$ скоростью $v(x, t)$ жидкости, т. е.

$$\frac{E(x, t)}{\tau} \approx v(x, t). \quad (2.11)$$

Однако мы предположим гораздо более общее отношение, чем (2.11).

Гипотеза 2.1. Существует безразмерная матрица $M_0(x, t)$ размера $n \times n$ такая, что

$$M_0(x, t)v(x, t) = \frac{E(x, t)}{\tau}, \quad (2.12)$$

$$\xi^T M_0(x, t) \xi \geq 0 \quad \text{для всех } \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (2.13)$$

Условие (2.13) указывает, что скорость жидкости $v(x, t)$ и отношение $E(x, t)/\tau$ имеют некоторое «соответствие», т. е.

$$v(x, t) \cdot \frac{E(x, t)}{\tau} \geq 0. \quad (2.14)$$

Гипотеза 2.1 — наше фундаментальное предположение. Она связывает микроскопические особенности движения частиц в среде с макроскопическими свойствами потока жидкости, а именно со скоростью жидкости в данном случае.

Объединение (2.8) с (2.12) даёт

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \langle A(x, t), D^2 \rho \rangle + (M_0(x, t)v(x, t)) \cdot \nabla \rho. \quad (2.15)$$

В этом уравнении член $\langle A(x, t), D^2 \rho \rangle$ представляет диффузию в недивергентной форме, а член $(M_0(x, t)v(x, t)) \cdot \nabla \rho$ представляет перенос/конвекцию.

2.3. Движение жидкости в пористых средах. Пусть $p(x, t)$ — давление жидкости. Предположим, что закон Дарси — анизотропный [4, 12],

$$v = -\bar{K}(x, t)(\nabla p - \rho \vec{g}), \quad (2.16)$$

где $\bar{K}(x, t)$ — матрица размера $n \times n$, а \vec{g} — ускорение свободного падения при $n = 1, 2, 3$, и может быть любым постоянным вектором для $n \geq 4$.

Объединение (2.15) с (2.16) даёт

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \langle A(x, t), D^2 \rho \rangle - (K_0(x, t) \nabla p) \cdot \nabla \rho + \rho B_0(x, t) \cdot \nabla \rho, \quad (2.17)$$

где

$$K_0(x, t) = M_0(x, t) \bar{K}(x, t), \quad B_0(x, t) = M_0(x, t) \bar{K}(x, t) \vec{g}.$$

Далее мы используем уравнения состояния, чтобы связать давление p и плотность ρ в (2.17).

Случай изотропических течений газа. Имеем $p = c\rho^\gamma$ с константой $c > 0$ и показателем адиабаты $\gamma \geq 1$. Тогда (2.17) принимает вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \langle A(x, t), D^2 \rho \rangle - c\gamma\rho^{\gamma-1}(K_0(x, t) \nabla \rho) \cdot \nabla \rho + \rho B_0(x, t) \cdot \nabla \rho. \quad (2.18)$$

В частности, для идеальных газов $\gamma = 1$, и уравнение (2.18) имеет вид

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \langle A(x, t), D^2 \rho \rangle - c(K_0(x, t) \nabla \rho) \cdot \nabla \rho + \rho B_0(x, t) \cdot \nabla \rho. \quad (2.19)$$

Случай слабосжимаемых жидкостей. Имеем

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\rho}{dp} = \kappa, \quad \text{где } \kappa \text{ — малая положительная постоянная сжимаемость.}$$

Заметив, что $\nabla \rho = \kappa \rho \nabla p$, перепишем (2.17) в виде

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \langle A(x, t), D^2 \rho \rangle - \frac{1}{\kappa \rho} (K_0(x, t) \nabla \rho) \cdot \nabla \rho + \rho B_0(x, t) \cdot \nabla \rho. \quad (2.20)$$

В общем случае предположим справедливость уравнения состояния

$$p = P_0(\rho), \quad \text{где } P_0 \text{ — известная возрастающая функция.} \quad (2.21)$$

Тогда уравнение (2.17) становится уравнением в частных производных на ρ :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} = \langle A(x, t), D^2 \rho \rangle - P'_0(\rho)(K_0(x, t) \nabla \rho) \cdot \nabla \rho + \rho B_0(x, t) \cdot \nabla \rho. \quad (2.22)$$

В следующих двух разделах мы сосредоточимся исключительно на математическом аспекте уравнения (2.22).

3. ПРИНЦИП МАКСИМУМА И СИЛЬНЫЙ ПРИНЦИП МАКСИМУМА

Пусть U — непустое, открытое, ограниченное подмножество \mathbb{R}^n с границей Γ и замыканием \bar{U} . Пусть $T > 0$. Обозначим $U_T = U \times (0, T]$ и введём параболическую границу $\Gamma_T = \bar{U}_T \setminus U_T$, где $\bar{U}_T = \bar{U} \times [0, T]$ — замыкание U_T (в \mathbb{R}^{n+1}).

Пусть $A : U_T \rightarrow \mathcal{M}_{\text{sym}}^{n \times n}$, где $A(x, t) = (a_{ij}(x, t))_{i,j=1,\dots,n}$, $K : U_T \rightarrow \mathcal{M}^{n \times n}$ и $B : U_T \rightarrow \mathbb{R}^n$ — заданные функции. В данном разделе мы предполагаем, что существует константа $c_0 > 0$ такая, что

$$\xi^T A(x, t) \xi \geq c_0 |\xi|^2 \quad \text{для всех } (x, t) \in U_T \text{ и всех } \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (3.1)$$

Здесь и далее J — интервал с непустой внутренностью в \mathbb{R} , а P — функция из $C^1(J, \mathbb{R})$ с производной

$$P' \in C(J, [0, \infty)). \quad (3.2)$$

Для течений жидкости в пористых средах P связано с уравнением состояния (2.21). Однако мы будем рассматривать общие функции P . Из (3.2) ясно, что P — возрастающая функция от J .

Для любого интервала I из \mathbb{R} обозначим через $C_{x,t}^{2,1}(U \times I)$ класс непрерывных функций $u(x, t)$ с непрерывными частными производными $\partial u / \partial t$, $\partial u / \partial x_i$, $\partial^2 u / \partial x_i \partial x_j$ для $i, j = 1, \dots, n$.

Рассмотрим нелинейное уравнение (2.22) в форме

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \langle A(x, t), D^2 u \rangle + uB(x, t) \cdot \nabla u + P'(u)(K(x, t)\nabla u) \cdot \nabla u = 0. \quad (3.3)$$

Для изэнтропических неидеальных потоков газа в случае уравнения (2.18) с $\gamma > 1$ можно использовать

$$J = [0, \infty), \quad P(s) = s^\gamma, \quad K = cK_0, \quad B = -B_0. \quad (3.4)$$

Для потоков идеального газа в случае уравнения (2.19) также можно использовать (3.4) с $\gamma = 1$ для физического $u = \rho$ (плотности), но также можно заменить $J = \mathbb{R}$ на (3.4) для математического u . Таким образом,

$$J = [0, \infty) \text{ или } J = \mathbb{R}, \quad P(s) = s, \quad K = cK_0, \quad B = -B_0. \quad (3.5)$$

Например, для слабосжимаемых жидкостей и уравнения (2.20) мы можем использовать

$$J = (0, \infty), \quad P(s) = \ln s, \quad K = \kappa^{-1}K_0, \quad B = -B_0. \quad (3.6)$$

Явно определим нелинейный оператор L , связанный с левой частью (3.3):

$$Lu = \frac{\partial u}{\partial t} - \langle A(x, t), D^2 u \rangle + uB(x, t) \cdot \nabla u + P'(u)(K(x, t)\nabla u) \cdot \nabla u \quad (3.7)$$

для любой функции $u \in C_{x,t}^{2,1}(U_T)$ с областью значений $u(U_T)$, являющейся подмножеством J .

Ниже мы рассматриваем принципы максимума и сильного максимума, связанные с этим нелинейным оператором L .

3.1. Принцип максимума.

Теорема 3.1 (принцип максимума). Пусть

$$u \in C(\overline{U_T}) \cap C_{x,t}^{2,1}(U_T), \quad u(U_T) \subset J. \quad (3.8)$$

(i) Если $Lu \leq 0$ на U_T , тогда

$$\max_{\overline{U_T}} u = \max_{\Gamma_T} u. \quad (3.9)$$

(ii) Если $Lu \geq 0$ на U_T , тогда

$$\min_{\overline{U_T}} u = \min_{\Gamma_T} u. \quad (3.10)$$

Доказательство. Определим $\tilde{b}(x, t) = u(x, t)B(x, t) + P'(u(x, t))K(x, t)\nabla u(x, t)$ и оператор для функции v :

$$\hat{L}v = \frac{\partial v}{\partial t} - \langle A(x, t), D^2 v \rangle + \tilde{b}(x, t) \cdot \nabla v.$$

Заметим, что $\hat{L}u = Lu$.

В случае (i) имеем $\hat{L}u \leq 0$, следовательно, по стандартному принципу максимума для линейного оператора \hat{L} и функции u получаем (3.9).

В случае (ii) имеем $\hat{L}u \geq 0$, следовательно, по стандартному принципу максимума для линейного оператора \hat{L} и функции u получаем (3.10). \square

Пусть $S \subset \mathbb{R}^{n+1}$ и u — ограниченная функция на S . Обозначим

$$\text{osc}_S u = \sup_S u - \inf_S u.$$

Следствие 3.1 (осцилляция). Пусть функция u удовлетворяет условию (3.8). Если $Lu = 0$ на U_T , то

$$\text{osc}_{\overline{U_T}} u = \text{osc}_{\Gamma_T} u. \quad (3.11)$$

Доказательство. Поскольку $Lu = 0$, мы можем применить как (i), так и (ii) в теореме 3.1. Следовательно, из (3.9) и (3.10) получаем (3.11). \square

3.2. Преобразования типа Бернштейна—Коула—Хопфа. Для устранения квадратичных членов градиента введём следующее преобразование типа Бернштейна—Коула—Хопфа.

Для заданной функции u мы определяем оператор \mathcal{L} следующим образом:

$$\mathcal{L}w = \frac{\partial w}{\partial t} - \langle A(x, t), D^2 w \rangle + u(x, t)B(x, t) \cdot \nabla w. \quad (3.12)$$

Заметим, что \mathcal{L} является линейным оператором по w для каждой заданной функции u .

Лемма 3.1. Пусть u — функция такая, что

$$u \in C_{x,t}^{2,1}(U_T), \quad u(U_T) \subset J. \quad (3.13)$$

Определим линейный оператор \mathcal{L} с помощью (3.12). Пусть $s_0 \in J$. Для $\lambda \in \mathbb{R}$, $C > 0$, $C' \in \mathbb{R}$, определим

$$F_\lambda(s) = C \int_{s_0}^s e^{\lambda P(z)} dz + C', \quad s \in J. \quad (3.14)$$

(i) Тогда $F_\lambda \in C^2(J)$, $F'_\lambda > 0$ и $\lambda F''_\lambda \geq 0$ на J .

(ii) Предположим, что существует константа $c_1 \geq 0$ такая, что

$$\xi^T K(x, t) \xi \geq -c_1 |\xi|^2 \quad \text{для всех } (x, t) \in U_T \text{ и всех } \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (3.15)$$

Если $Lu \leq 0$ на U_T , то для любых чисел $\lambda \geq c_1/c_0$, $C > 0$, $C' \in \mathbb{R}$, функция $w = F_\lambda(u)$ удовлетворяет $\mathcal{L}w \leq 0$ на U_T .

(iii) Предположим, что существует константа $c_2 \geq 0$ такая, что

$$\xi^T K(x, t) \xi \leq c_2 |\xi|^2 \quad \text{для всех } (x, t) \in U_T \text{ и всех } \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (3.16)$$

Если $Lu \geq 0$ на U_T , то для любых чисел $\lambda \leq -c_2/c_0$, $C > 0$, $C' \in \mathbb{R}$, функция $w = F_\lambda(u)$ удовлетворяет $\mathcal{L}w \geq 0$ на U_T .

Доказательство.

(i) Эти факты очевидно следуют из (3.14) и условия (3.2).

Для пунктов (ii) и (iii) находим $w = F(u)$ для функции $F \in C^2(J)$ такой, что

$$F' > 0 \text{ на } J. \quad (3.17)$$

Имеем

$$\frac{\partial w}{\partial x_i} = F'(u) \frac{\partial u}{\partial x_i}, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial x_i \partial x_j} = F'(u) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + F''(u) \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j}.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mathcal{L}w &= F'(u) \left[\frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + uB \cdot \nabla u \right] - F''(u) \sum_{i,j=1}^n a_{ij} \frac{\partial u}{\partial x_i} \frac{\partial u}{\partial x_j} = \\ &= F'(u) \mathcal{L}u - F''(u) (\nabla u)^T A(x, t) \nabla u. \end{aligned}$$

Заметим, что $Lu = \mathcal{L}u + P'(u) (\nabla u)^T K(x, t) \nabla u$. Таким образом,

$$\mathcal{L}w = F'(u) \{ Lu - P'(u) (\nabla u)^T K(x, t) \nabla u \} - F''(u) (\nabla u)^T A(x, t) \nabla u. \quad (3.18)$$

(ii) Рассмотрим $Lu \leq 0$ на U_T . Тогда из (3.18) следует, что

$$\mathcal{L}w \leq -P'(u) F'(u) (\nabla u)^T K(x, t) \nabla u - F''(u) (\nabla u)^T A(x, t) \nabla u.$$

Для $\mathcal{L}w \leq 0$ на U_T мы накладываем условие

$$F''(u) \xi^T A(x, t) \xi \geq -P'(u) F'(u) \xi^T K(x, t) \xi \quad \forall (x, t) \in U_T, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (3.19)$$

Найдём F такое, что

$$F'' \geq 0 \text{ на } J. \quad (3.20)$$

Это свойство и (3.1), (3.15) влекут для всех $(x, t) \in U_T$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ неравенства

$$F''(u) \xi^T A(x, t) \xi \geq c_0 F''(u) |\xi|^2, \quad -P'(u) F'(u) \xi^T K(x, t) \xi \leq c_1 P'(u) F'(u) |\xi|^2.$$

Благодаря этим неравенствам и (3.19) достаточным условием для $\mathcal{L}w \leq 0$ на U_T является

$$c_0 F''(s) \geq c_1 P'(s) F'(s).$$

Для $\lambda \geq c_1/c_0$ указанное выше неравенство будет следовать из уравнения

$$F''(s) = \lambda P'(s) F'(s), \quad (3.21)$$

что даёт решение

$$F'(s) = e^{\lambda \int P'(s) ds} = C e^{\lambda P(s)}. \quad (3.22)$$

Здесь мы выбираем $C > 0$ так, чтобы выполнялось условие (3.17). Затем выбираем решение $F = F_\lambda$, как в (3.14). Поскольку (3.17) уже выполнено, уравнение (3.21) и свойство (3.2) влекут за собой второе требование (3.20).

(iii) Рассмотрим $Lu \geq 0$ на U_T . Тогда из (3.18) следует, что

$$\mathcal{L}w \geq -P'(u)F'(u)(\nabla u)^T K(x, t) \nabla u - F''(u)(\nabla u)^T A(x, t) \nabla u.$$

Благодаря этому неравенству, достаточным условием для $\mathcal{L}w \geq 0$ на U_T является

$$F''(u) \xi^T A(x, t) \xi \leq -P'(u)F'(u) \xi^T K(x, t) \xi \quad \forall (x, t) \in U_T, \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (3.23)$$

В этом случае мы найдём F такую, что

$$F'' \leq 0 \text{ на } J. \quad (3.24)$$

Это, а также (3.1) и (3.16) влекут для всех $(x, t) \in U_T$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ неравенства

$$F''(u) \xi^T A(x, t) \xi \leq c_0 F''(u) |\xi|^2, \quad -P'(u)F'(u) \xi^T K(x, t) \xi \geq -c_2 P'(u)F'(u) |\xi|^2.$$

Используя эти неравенства и (3.23), запишем достаточное условие для $\mathcal{L}w \geq 0$ на U_T :

$$c_0 F''(s) \leq -c_2 P'(s) F'(s).$$

При $\lambda \leq -c_2/c_0 \leq 0$ мы снова решаем уравнение (3.21). Как и в пункте (ii), мы выбираем решение $F = F_\lambda$ в (3.14). Требования (3.17) и (3.24) снова выполняются благодаря (3.22) и (3.21). \square

Заметим, что функция F_λ в лемме 3.1 непрерывна и строго возрастает на J .

Пример 3.1. Имеем следующие примеры потоков жидкости.

(а) *Случай изэнтропических неидеальных потоков газа.* Используя (3.4), мы можем выбрать

$$F_\lambda(s) = \int_0^s e^{\lambda z^\gamma} dz, \quad s \geq 0. \quad (3.25)$$

(б) *Случай идеального газа.* Мы используем (3.5) и выберем $s_0 = 0$ в (3.14) для обоих случаев J . При $\lambda = 0$ мы, очевидно, можем выбрать

$$F_\lambda(s) = s, \quad s \in J. \quad (3.26)$$

Для $\lambda \neq 0$ можно выбрать

$$F_\lambda(s) = \frac{1}{\lambda} e^{\lambda s} \text{ для всех } s \in J \quad \text{или} \quad F_\lambda(s) = \text{sign}(\lambda) e^{\lambda s} \text{ для всех } s \in J. \quad (3.27)$$

(с) *Случай слабосжимаемых жидкостей.* Используем (3.6). При $\lambda \neq -1$ в общем случае из (3.14) получаем, что

$$F_\lambda(s) = C \int_{s_0}^s z^\lambda dz + C' = \frac{C}{\lambda + 1} (s^{\lambda+1} - s_0^{\lambda+1}) + C',$$

и, следовательно, можно выбрать

$$F_\lambda(s) = \frac{s^{\lambda+1}}{\lambda + 1} \text{ для всех } s > 0 \quad \text{или} \quad F_\lambda(s) = \text{sign}(\lambda + 1) s^{\lambda+1} \text{ для всех } s > 0. \quad (3.28)$$

Для $\lambda = -1$ можно аналогично выбрать

$$F_\lambda(s) = \ln s, \quad s > 0.$$

3.3. Строгий принцип максимума. Предположим дополнительно в этом пункте 3.3, что U связно.

Теорема 3.2. *Предположим, что $A(x, t)$ и $B(x, t)$ ограничены на U_T , а $K(x, t)$ удовлетворяет условию (3.15) (соответственно, (3.16)). Предположим, что u — функция, удовлетворяющая (3.13), ограниченная на U_T и такая, что $Lu \leq 0$ (соответственно, $Lu \geq 0$) на U_T . Пусть*

$$M = \sup_{U_T} u(x, t) \quad (\text{соответственно, } m = \inf_{U_T} u(x, t)).$$

Предположим, что существует пара $(x_0, t_0) \in U_T$ такая, что

$$u(x_0, t_0) = M \quad (\text{соответственно, } u(x_0, t_0) = m). \quad (3.29)$$

Тогда

$$u(x, t) = M \quad (\text{соответственно, } u(x, t) = m) \quad \text{для всех } (x, t) \in U_{t_0} = U \times (0, t_0]. \quad (3.30)$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}w$ определено по формуле (3.12). Перепишем $\mathcal{L}w$ в виде

$$\mathcal{L}w = w_t - \langle A(x, t), D^2 w \rangle + \tilde{B}(x, t) \cdot \nabla w, \quad \text{где} \quad \tilde{B}(x, t) = u(x, t)B(x, t). \quad (3.31)$$

Поскольку $u(x, t)$ и $B(x, t)$ ограничены на U_T , то $\tilde{B}(x, t)$ также ограничено на U_T . Обратим внимание, что оператор \mathcal{L} не содержит члена $c(x, t)w$. Ниже мы будем использовать сильный принцип максимума в частной форме [22, гл. 3, теорема 2.3], см. также [22, гл. 3, теорема 2.4].

Часть 1. Рассмотрим $Lu \leq 0$ в U_T и соответствующие условия. Из (3.29) следует, что $u(x_0, t_0) = \max_{U_T} u(x, t)$.

Случай $c_1 = 0$. В этом случае $\mathcal{L}u \leq Lu \leq 0$ на U_T . Можно применить сильный принцип максимума к оператору \mathcal{L} в форме (3.31) и функции $u + |M| + 1$, тогда получим $u = M$ на U_{t_0} . Таким образом, мы получаем первое утверждение из (3.30).

Случай $c_1 > 0$. Пусть $\lambda_1 = c_1/c_0$ и $w = F_{\lambda_1}(u)$ на U_T . По лемме 3.1 (ii), имеем $\mathcal{L}w \leq 0$ на U_T и, ввиду роста F_{λ_1} ,

$$w(x_0, t_0) = F_{\lambda_1}(M) = \max_{U_T} w.$$

Применим сильный принцип максимума к оператору \mathcal{L} и функции $w + |F_{\lambda_1}(M)| + 1$, тогда получим $w = F_{\lambda_1}(M)$ на U_{t_0} . Таким образом, $u = F_{\lambda_1}^{-1}(w) = M$ на U_{t_0} .

Часть 2. Рассмотрим $Lu \geq 0$ в U_T и соответствующие условия. Заметим, что $u(x_0, t_0) = \min_{U_T} u(x, t)$.

Случай $c_2 = 0$. Имеем $\mathcal{L}u \geq Lu \geq 0$ на U_T . Применим сильный принцип максимума к оператору \mathcal{L} и функции $u - |m| - 1$, тогда получим $u = m$ на U_{t_0} . Таким образом, получаем второе утверждение из (3.30).

Случай $c_2 > 0$. Пусть $\lambda_2 = -c_2/c_0$ и $w = F_{\lambda_2}(u)$ на U_T . Доказательство второго утверждения в (3.30) аналогично доказательству случаю $c_1 > 0$ в части 1 выше, с использованием леммы 3.1 (iii) вместо леммы 3.1 (ii) и сильного принципа максимума, применённого к оператору \mathcal{L} и функции $w - |F_{\lambda_2}(m)| - 1$. Опустим подробности. \square

4. НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Пусть U и Γ — такие же, как в разделе 3. Зафиксируем точку $x_0 \notin \bar{U}$ и положим

$$r_0 = \min\{|x - x_0| : x \in \bar{U}\}, \quad R = \max\{|x - x_0| : x \in \bar{U}\}.$$

Тогда $R > r_0 > 0$.

4.1. Результаты для линейных операторов. Как показано в разделе 3, исследование нелинейной задачи можно свести к исследованию некоторого линейного оператора. Поэтому сначала мы установим некоторые существенные результаты для общего линейного случая.

При условии $T > 0$ пусть U_T и Γ_T будут такими, как в разделе 3.

Предположение 4.1. Пусть $A : U_T \rightarrow \mathcal{M}_{\text{sym}}^{n \times n}$ и $b : U_T \rightarrow \mathbb{R}^n$ таковы, что

- (i) A удовлетворяет условию (3.1) для некоторой константы $c_0 > 0$;
- (ii) существуют константы $M_1 > 0$ и $M_2 \geq 0$ такие, что

$$\text{Tr}(A(x, t)) \leq M_1, \quad |b(x, t)| \leq M_2 \quad \text{для всех } (x, t) \in U_T. \quad (4.1)$$

Определим линейный оператор \tilde{L} следующим образом:

$$\tilde{L}w = w_t - \langle A(x, t), D^2w \rangle + b(x, t) \cdot \nabla w, \quad w \in C_{x,t}^{2,1}(U_T). \quad (4.2)$$

Лемма 4.1 (лемма о росте). В условиях предположения 4.1 положим

$$\beta = \frac{1}{4c_0} \max \left\{ 2(M_1 + M_2 R), \frac{R^2}{T} \right\}, \quad T_* = \frac{R^2}{4c_0\beta}, \quad \eta_* = 1 - (r_0/R)^{2\beta}. \quad (4.3)$$

Если $w \in C(\bar{U}_T) \cap C_{x,t}^{2,1}(U_T)$ удовлетворяет $\tilde{L}w \leq 0$ на U_T и $w \leq 0$ на $\Gamma \times [0, T]$, то имеем

$$\max \left\{ 0, \max_{x \in \bar{U}} w(x, T_*) \right\} \leq \eta_* \max \left\{ 0, \max_{x \in \bar{U}} w(x, 0) \right\}. \quad (4.4)$$

Доказательство. Мы следуем [22, гл. 3, лемма 6.1], а также [16, лемма IV.3]. Значения в (4.3) временно игнорируем.

Шаг 1. Пусть функция $\varphi \in C(\bar{U}) \cap C^2(U)$ такова, что

$$\begin{aligned} 0 < d_0 \leq \varphi \leq d_1 \quad \text{на } \bar{U}, \\ |\nabla \varphi| \leq d_2, \quad \varphi \leq c_0 |\nabla \varphi|^2, \quad |\langle A, D^2 \varphi \rangle| \leq d_3 \quad \text{на } U \end{aligned} \quad (4.5)$$

для некоторых положительных чисел d_0, d_1, d_2, d_3 . Заметим, что последнее условие в (4.5) выполняется в U_T (из-за свойств матрицы $A(x, t)$). Конкретная функция φ будет построена на 3-м шаге ниже. Определим барьерную функцию W на $\bar{U} \times \mathbb{R}$ следующим образом:

$$W(x, t) = \begin{cases} t^{-\beta} e^{-\frac{\varphi(x)}{t}}, & \text{если } (x, t) \in \bar{U} \times (0, \infty), \\ 0, & \text{если } (x, t) \in \bar{U} \times (-\infty, 0], \end{cases}$$

где β — положительное число. В силу оценки снизу на $\varphi(x)$ в (4.5) мы имеем $W \in C(\bar{U} \times \mathbb{R})$. При $t > 0$ получим

$$W_t = -\frac{\beta}{t} W + \frac{\varphi}{t^2} W, \quad W_{x_i} = -\frac{\varphi_{x_i}}{t} W, \quad W_{x_i x_j} = -\frac{\varphi_{x_i x_j}}{t} W + \frac{\varphi_{x_i} \varphi_{x_j}}{t^2} W$$

и будем иметь на U_T

$$\tilde{L}W = \frac{W}{t^2} \{ t(-\beta + \langle A, D^2 \varphi \rangle - b \cdot \nabla \varphi) + \varphi - (A \nabla \varphi) \cdot \nabla \varphi \}.$$

Нам требуется $\tilde{L}W \leq 0$ на $U \times (0, \infty)$, поэтому накладываем условия

$$\varphi \leq (A \nabla \varphi) \cdot \nabla \varphi, \quad \beta \geq \langle A, D^2 \varphi \rangle - b \cdot \nabla \varphi \quad \text{на } U_T. \quad (4.6)$$

По (3.1), достаточным условием для первого условия в (4.6) является $\varphi \leq c_0 |\nabla \varphi|^2$ на U_T , что, по сути, выполняется в соответствии с нашим предположением (4.5). Достаточным условием для второго условия в (4.6) является

$$\beta \geq |\langle A, D^2 \varphi \rangle| + |b| |\nabla \varphi| \quad \text{на } U_T. \quad (4.7)$$

Основываясь на (4.1) и (4.5), выберем

$$\beta \geq d_3 + M_2 d_2, \quad (4.8)$$

чтобы удовлетворялось (4.7). Итак, для β в (4.8) имеем $\tilde{L}W \leq 0$ на $U \times (0, \infty)$.

Шаг 2. Пусть β удовлетворяет условию (4.8). Положим $M = \max\{0, \max_{\bar{U}} w(x, 0)\}$ и определим $\widetilde{W} = M(1 - \eta W)$ на $\bar{U} \times \mathbb{R}$, где $\eta = (d_0 e / \beta)^\beta > 0$. Тогда $\widetilde{L}\widetilde{W} \geq 0$ на $U \times (0, \infty)$. На $\bar{U} \times \{0\}$ имеем $W(x, 0) = 0$ и, следовательно,

$$\widetilde{W}(x, 0) = M \geq w(x, 0) \quad \text{для всех } x \in \bar{U}. \quad (4.9)$$

Заметим, что при $t > 0$

$$\widetilde{W}(x, t) = M \left(1 - \eta t^{-\beta} e^{-\varphi(x)/t}\right) \geq M \left(1 - \eta t^{-\beta} e^{-d_0/t}\right).$$

Элементарные вычисления показывают, что функция $h_0(t) = t^{-\beta} e^{-d_0/t}$ на $(0, \infty)$ достигает максимума при $t_0 = d_0/\beta$ со значением $h_0(t_0) = \eta^{-1}$. Таким образом, на $\bar{U} \times (0, \infty)$ имеем:

$$\widetilde{W}(x, t) \geq M(1 - \eta h_0(t_0)) = 0.$$

В частности,

$$\widetilde{W} \geq w \quad \text{на } \Gamma \times (0, \infty). \quad (4.10)$$

Наложим ещё одно условие:

$$\beta \geq d_1/T, \quad T_* = d_1/\beta. \quad (4.11)$$

Тогда $T_* \leq T$, имеем $\widetilde{L}(w - \widetilde{W}) \leq 0$ на $U \times (0, T_*]$ и, ввиду (4.9), (4.10), $w - \widetilde{W} \leq 0$ на параболической границе $U \times (0, T_*]$. Применяя принцип максимума к оператору \widetilde{L} и функции $(w - \widetilde{W})$ на множестве $\bar{U} \times [0, T_*]$, получаем

$$w \leq \widetilde{W} \quad \text{на } \bar{U} \times [0, T_*]. \quad (4.12)$$

Заметим, что

$$\widetilde{W}(x, t) \leq M \left(1 - \eta t^{-\beta} e^{-d_1/t}\right). \quad (4.13)$$

При $t = T_*$, из (4.12) и (4.13) для всех $x \in \bar{U}$ следует, что

$$w(x, T_*) \leq \widetilde{W}(x, T_*) \leq M \left[1 - \left(\frac{d_0 e}{\beta}\right)^\beta \left(\frac{d_1}{\beta}\right)^{-\beta} e^{-d_1(\beta/d_1)}\right] = M \left[1 - \left(\frac{d_0}{d_1}\right)^\beta\right] = \eta_* M,$$

где

$$\eta_* = 1 - (d_0/d_1)^\beta \in (0, 1). \quad (4.14)$$

Таким образом, мы получаем неравенство (4.4) для T_* , η_* при β , удовлетворяющем условиям (4.8), (4.11), (4.14).

Шаг 3. Выберем функцию $\varphi(x) = \mu|x - x_0|^2$ с числом $\mu > 0$, которое определим позже. Тогда $\mu r_0^2 \leq \varphi \leq \mu R^2$ на \bar{U} , следовательно, мы выбираем $d_0 = \mu r_0^2$ и $d_1 = \mu R^2$ в (4.5).

Для второго условия в (4.5), поскольку $|\nabla \varphi| = 2\mu|x - x_0| \leq 2\mu R$, выберем $d_2 = 2\mu R$.

Третье условие в (4.5) трансформируется в $\mu|x - x_0|^2 \leq 4c_0\mu^2|x - x_0|^2$, потому выберем

$$\mu = \frac{1}{4c_0}.$$

Для последнего условия в (4.5) заметим, что $\langle A, D^2 \varphi \rangle = 2\mu \text{Tr}(A(x, t))$, и, таким образом, выберем $d_3 = 2\mu M_1$.

При указанных выше значениях μ , d_0 , d_1 , d_2 , d_3 отношения (4.8) и (4.11) трансформируются в

$$\beta \geq 2\mu(M_1 + M_2 R) = \frac{2(M_1 + M_2 R)}{4c_0}, \quad \beta \geq \frac{\mu R^2}{T} = \frac{R^2}{4c_0 T}, \quad T_* = \frac{\mu R^2}{\beta} = \frac{R^2}{4c_0 \beta}. \quad (4.15)$$

Выбранное β в (4.3) удовлетворяет первым двум условиям в (4.15). Кроме того, T_* в (4.15) в точности соответствует заданному в (4.3). Более того, из (4.14) следует, что

$$\eta_* = 1 - (\mu r_0^2 / (\mu R^2))^\beta = 1 - (r_0/R)^{2\beta},$$

что является тем же числом, что и в (4.3). Доказательство завершено. \square

Ключевым улучшением оценки (4.4) по сравнению с принципом максимума является множитель η_* , принадлежащий интервалу $(0, 1)$. Из приведённой выше леммы о росте выведем более конкретные оценки для суб- и суперрешений, а также сами решения для всех времён. Основное внимание уделим убывающим решениям для больших времён, хотя также получим некоторые «оптимальные» оценки для малых времён.

Предположение 4.2. Пусть $A : U \times (0, \infty) \rightarrow \mathcal{M}_{\text{sym}}^{n \times n}$ и $b : U \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ удовлетворяют следующим условиям:

(i) существует положительная константа c_0 такая, что

$$\xi^T A(x, t) \xi \geq c_0 |\xi|^2 \quad \text{для всех } (x, t) \in U \times (0, \infty) \text{ и всех } \xi \in \mathbb{R}^n; \quad (4.16)$$

(ii) $A(x, t)$ и $b(x, t)$ ограничены на $U \times (0, \infty)$.

В предположении 4.2 определим линейный оператор \tilde{L} формулой (4.2) для $w \in C_{x,t}^{2,1}(U \times (0, \infty))$. По условию (ii) в предположении 4.2, существуют константы $M_1 > 0$ и $M_2 > 0$ такие, что

$$\text{Tr}(A(x, t)) \leq M_1, \quad |b(x, t)| \leq M_2 \quad \text{для всех } (x, t) \in U \times (0, \infty). \quad (4.17)$$

Предложение 4.1. Пусть предположение 4.2 справедливо, а положительные числа M_1, M_2 заданы как в (4.17). Положим

$$\begin{aligned} \beta &= \frac{1}{2c_0}(M_1 + M_2 R), \quad T_* = \frac{R^2}{4c_0\beta}, \quad \eta_* = 1 - (r_0/R)^{2\beta}, \\ \nu &= T_*^{-1} \ln(1/\eta_*), \quad \nu_0 = \frac{R^2}{2c_0} \ln(R/r_0). \end{aligned} \quad (4.18)$$

Пусть $w \in C(\bar{U} \times [0, \infty)) \cap C_{x,t}^{2,1}(U \times (0, \infty))$.

(i) Если $\tilde{L}w \leq 0$ на $U \times (0, \infty)$ и $w \leq 0$ на $\Gamma \times (0, \infty)$, тогда

$$\max_{x \in \bar{U}} w(x, t) \leq (1 - e^{-\nu_0/t}) \max\{0, \max_{x \in \bar{U}} w(x, 0)\} \quad \text{при } 0 < t \leq T_*, \quad (4.19)$$

$$\max_{x \in \bar{U}} w(x, t) \leq \eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max\{0, \max_{x \in \bar{U}} w(x, 0)\} \quad \text{при } t \geq 0, \quad (4.20)$$

и, следовательно,

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{x \in \bar{U}} w(x, t) \leq 0. \quad (4.21)$$

(ii) Если $\tilde{L}w \geq 0$ на $U \times (0, \infty)$ и $w \geq 0$ на $\Gamma \times (0, \infty)$, тогда

$$\min_{x \in \bar{U}} w(x, t) \geq (1 - e^{-\nu_0/t}) \min\{0, \min_{x \in \bar{U}} w(x, 0)\} \quad \text{при } 0 < t \leq T_*, \quad (4.22)$$

$$\min_{x \in \bar{U}} w(x, t) \geq \eta_*^{-1} e^{-\nu t} \min\{0, \min_{x \in \bar{U}} w(x, 0)\} \quad \text{при } t \geq 0, \quad (4.23)$$

и, следовательно,

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{x \in \bar{U}} w(x, t) \geq 0. \quad (4.24)$$

(iii) Если $\tilde{L}w = 0$ на $U \times (0, \infty)$ и $w = 0$ на $\Gamma \times (0, \infty)$, тогда

$$\max_{x \in \bar{U}} |w(x, t)| \leq (1 - e^{-\nu_0/t}) \max_{x \in \bar{U}} |w(x, 0)| \quad \text{при } 0 < t \leq T_*, \quad (4.25)$$

$$\max_{x \in \bar{U}} |w(x, t)| \leq \eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max_{x \in \bar{U}} |w(x, 0)| \quad \text{при } t \geq 0, \quad (4.26)$$

и, следовательно,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_{x \in \bar{U}} |w(x, t)| = 0. \quad (4.27)$$

Доказательство. Для любого целого числа $k \geq 0$ положим

$$T_k = kT_*, \quad J_k = \max\{0, \max_{x \in \bar{U}} w(x, T_k)\} \geq 0.$$

(i) В этом случае $\tilde{L}w \leq 0$ на $U \times (0, \infty)$ и $w \leq 0$ на $\Gamma \times [0, \infty)$.

Сначала докажем (4.19). Полагая $t \in (0, T_*]$, применим лемму 4.1 к $T = t$. Переобозначим β , T_* , η_* через β' , T'_* , η'_* в (4.3) и, заметив, что

$$t \leq T_* = \frac{R^2}{4c_0\beta} = \frac{R^2}{2(M_1 + M_2R)},$$

получим

$$\begin{aligned}\beta' &= \frac{1}{4c_0} \max \left\{ 2(M_1 + M_2R), \frac{R^2}{t} \right\} = \frac{R^2}{4c_0t}, \\ T'_* &= R^2/(4c_0\beta') = t, \\ \eta'_* &= 1 - (r_0/R)^{R^2/(2c_0t)} = 1 - e^{-\nu_0/t}.\end{aligned}$$

Из (4.4) получаем, что

$$\max_{\bar{U}} w(x, t) \leq \eta'_* \max\{0, \max_{\bar{U}} w(x, 0)\} = (1 - e^{-\nu_0/t}) \max\{0, \max_{\bar{U}} w(x, 0)\},$$

что доказывает (4.19).

Далее докажем (4.20). При $k \geq 1$ применяем лемму 4.1 к цилиндру $\bar{U} \times [T_{k-1}, T_k]$, т. е. при $T = T_k - T_{k-1} = T_*$. Снова, используя β' , T'_* , η'_* для обозначения β , T_* , η_* в (4.3), получаем

$$\begin{aligned}\beta' &= \max \left\{ \frac{M_1 + M_2R}{2c_0}, \frac{R^2}{4c_0T} \right\} = \beta, \\ T'_* &= \frac{R^2}{4c_0\beta'} = \frac{R^2}{4c_0\beta} = T_*, \\ \eta'_* &= 1 - (r_0/R)^{2\beta'} = 1 - (r_0/R)^{2\beta} = \eta_*.\end{aligned}$$

Таким образом, из оценки (4.4) следует, что $J_k \leq \eta_* J_{k-1}$. Итерируя это неравенство по k , получаем

$$J_k \leq \eta_*^k J_0 \quad \text{для любого } k \geq 0. \quad (4.28)$$

Для каждого $t > 0$ пусть $k \geq 0$ и $t \in (T_k, T_{k+1}]$. Заметим, что $k+1 \geq t/T_*$. Из принципа максимума, неравенства $w \leq 0$ на $\Gamma \times (T_{k-1}, T_k]$ и неравенства (4.28) имеем

$$w(x, t) \leq J_k \leq \eta_*^k J_0 = \eta_*^{-1} \eta_*^{k+1} J_0 \leq \eta_*^{-1} \eta_*^{t/T_*} J_0 = \eta_*^{-1} e^{-tT_*^{-1} \ln(1/\eta_*)} J_0.$$

Таким образом,

$$\max_{x \in \bar{U}} w(x, t) \leq \eta_*^{-1} e^{-\nu t} J_0 \quad \text{для любого } t \geq 0,$$

что доказывает (4.20). Устремляя t к бесконечности в (4.20), получаем (4.21).

(ii) В этом случае мы можем применить результаты пункта (i), заменив w на $-w$. Тогда из (4.19) и (4.20) следует, что

$$\max_{x \in \bar{U}} (-w(x, t)) \leq (1 - e^{-\nu_0/t}) \max\{0, \max_{\bar{U}} (-w(x, 0))\} \quad \text{при } 0 < t \leq T_*, \quad (4.29)$$

$$\max_{x \in \bar{U}} (-w(x, t)) \leq \eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max\{0, \max_{\bar{U}} (-w(x, 0))\} \quad \text{при } t \geq 0, \quad (4.30)$$

что влечёт (4.22) и (4.23) соответственно. Устремляя t к бесконечности в (4.23), получим (4.24).

(iii) Поскольку $\tilde{L}w = 0$ на $U \times (0, \infty)$ и $w = 0$ на $\Gamma \times (0, \infty)$, мы можем применить результаты обоих пунктов (i) и (ii) выше. Заметим, что

$$|w(x, t)| = \max\{w(x, t), -w(x, t)\} \leq \max\{\max_{x \in \bar{U}} w(x, t), \max_{x \in \bar{U}} (-w(x, t))\}. \quad (4.31)$$

При $0 < t \leq T_*$, объединяя (4.31) с (4.19) и (4.29), и используя тот факт, что

$$\max_{\bar{U}} w(x, 0), \max_{\bar{U}} (-w(x, 0)) \leq \max_{\bar{U}} |w(x, 0)|, \quad (4.32)$$

получаем (4.25).

При $t \geq 0$ объединение (4.31) с (4.20), (4.30) и (4.32) даёт (4.26). Наконец, из (4.26) следует (4.27). \square

Замечание 4.1. Заметим, что оценки (4.19), (4.22) и (4.21) для малых времён при $t \rightarrow 0^+$ более оптимальны, чем их аналоги для больших времён (4.20), (4.23) и (4.27). Это связано с тем, что множители перед исходными данными сходятся к 1 при $t \rightarrow 0^+$, а не к $\eta_*^{-1} > 1$.

4.2. Результаты для нелинейной задачи. Вернёмся к нелинейной задаче.

Предположение 4.3. Пусть $A : U \times (0, \infty) \rightarrow \mathcal{M}_{\text{sym}}^{n \times n}$, $K : U \times (0, \infty) \rightarrow \mathcal{M}^{n \times n}$ и $B : U \times (0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^n$ таковы, что

- (i) $A(x, t)$ удовлетворяет условию (4.16);
- (ii) $A(x, t)$ и $B(x, t)$ ограничены на $U \times (0, \infty)$;
- (iii) существуют константы $c_1 \geq 0$ и $c_2 \geq 0$ такие, что

$$-c_1|\xi|^2 \leq \xi^T K(x, t)\xi \leq c_2|\xi|^2 \text{ для всех } (x, t) \in U \times (0, \infty), \text{ всех } \xi \in \mathbb{R}^n. \quad (4.33)$$

Будем считать предположение 4.3 выполненным до конца этого раздела. Условие (4.33) в предположении 4.3 означает, что K удовлетворяет условиям (3.15) и (3.16) для всех $T > 0$. (В частности, если K ограничено на $U \times (0, \infty)$, то (4.33) заведомо выполняется.) В силу ограниченности B и A на $U \times (0, \infty)$ существуют положительные числа M_0 и M_1 такие, что

$$|B(x, t)| \leq M_0 \text{ для всех } (x, t) \in U \times (0, \infty), \quad (4.34)$$

$$\text{Tr}(A(x, t)) \leq M_1 \text{ для всех } (x, t) \in U \times (0, \infty). \quad (4.35)$$

Рассмотрим начально-краевую задачу

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} - \langle A, D^2 u \rangle + uB \cdot \nabla u + P'(u)(K \nabla u) \cdot \nabla u = 0 & \text{на } U \times (0, \infty), \\ u(x, t) = u_* & \text{на } \Gamma \times (0, \infty), \\ u(x, 0) = u_0(x) & \text{на } U, \end{cases} \quad (4.36)$$

где u_* — константа, а $u_0(x)$ — заданная функция.

Определим нелинейный оператор L с помощью (3.7) для любой функции $u \in C_{x,t}^{2,1}(U \times (0, \infty))$, причём область значений u является подмножеством J .

Предположим, что $u \in C(\bar{U} \times [0, \infty)) \cap C_{x,t}^{2,1}(U \times (0, \infty))$ является решением (4.36) и удовлетворяет условию

$$u(x, t) \in J \text{ для всех } (x, t) \in U \times (0, \infty), \quad (4.37)$$

Как и в (3.31), мы определяем линейный оператор \mathcal{L} по формуле

$$\mathcal{L}w = w_t - \langle A(x, t), D^2 w \rangle + \tilde{B}(x, t) \cdot \nabla w, \text{ где } \tilde{B}(x, t) = u(x, t)B(x, t)$$

для любой функции $w \in C_{x,t}^{2,1}(U \times (0, \infty))$.

В силу непрерывности $u(x, t)$ на $\bar{U} \times [0, \infty)$ мы должны иметь

$$u(x, 0) = u_* \text{ при } x \in \Gamma \quad (4.38)$$

и, вместе с требованием (4.37), $u_* \in \bar{J}$. Кроме того, функция $u_0(x)$ непрерывна при $x \in U$, а $u(x, 0)$ является её единственным продолжением до непрерывной функции на \bar{U} . Следовательно, можно сказать, что $u(x, 0) = u_0(x)$ на \bar{U} и $u = u_*$ на $\Gamma \times [0, \infty)$. Обозначим

$$m_* = \min_{x \in \bar{U}} u(x, 0), \quad M_* = \max_{x \in \bar{U}} u(x, 0).$$

Тогда в силу (4.38) имеем $m_* \leq u_* \leq M_*$. Поскольку $u(U \times (0, \infty)) \subset J$, то $m_*, M_* \in \bar{J}$ и, следовательно, отрезок $[m_*, M_*] \subset \bar{J}$.

Из принципа максимума — теоремы 3.1 — следует, что для всех $T > 0$

$$m_* \leq u(x, t) \leq M_* \text{ на } \bar{U} \times [0, \infty). \quad (4.39)$$

Если $m_* = M_*$, то, очевидно,

$$u = m_* = u_* = M_* \text{ на } \bar{U} \times [0, \infty). \quad (4.40)$$

По этой причине сейчас мы сосредоточимся на случае $m_* < M_*$. Выберем любую точку $(x_0, t_0) \in U \times (0, \infty)$. Тогда $u(x_0, t_0) \in J \cap [m_*, M_*]$.

Рассмотрим случай $m_* \notin J$. Поскольку m_*, M_* находятся в интервале \bar{J} и $m_* < M_*$, можно сделать вывод, что m_* не может быть правой конечной точкой J , следовательно, m_* должна быть

левой конечной точкой J и \bar{J} . Аналогично, если $M_* \notin J$, то M_* должна быть правой конечной точкой J и \bar{J} .

Из этих рассуждений получим следующие условия для $m_* < M_*$:

- (E1) $M_* \in J$, $m_* \notin J$, правый предел $\lim_{z \rightarrow m_*^+} P(z)$ существует и принадлежит $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$,
 (E2) $m_* \in J$, $M_* \notin J$, левосторонний предел $\lim_{z \rightarrow M_*^-} P(z)$ существует и принадлежит $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$.

Рассмотрим случай (E1) и $\lambda > 0$. Функцию $e^{\lambda P(z)}$, $z \in J$, можно продолжить до непрерывной функции $E_\lambda : J \cup \{m_*\} \rightarrow [0, \infty)$. Любую функцию F_λ из (3.14) можно продолжить до C^1 -функции с $J \cup \{m_*\}$ в \mathbb{R} , по-прежнему обозначая её F_λ , следующим образом:

$$F_\lambda(s) = C \int_{s_0}^s E_\lambda(z) dz + C', \quad s \in J \cup \{m_*\}. \quad (4.41)$$

Рассмотрим случай (E2) и $\lambda < 0$. Аналогичным образом, любую функцию F_λ из (3.14) можно продолжить до C^1 -функции с $J \cup \{M_*\}$ в \mathbb{R} , по-прежнему обозначая её F_λ :

$$F_\lambda(s) = C \int_{s_0}^s E_\lambda(z) dz + C', \quad s \in J \cup \{M_*\}. \quad (4.42)$$

Теорема 4.1. Пусть $m_* < M_*$.

- (i) Если $m_*, M_* \in J$, то существуют число $C_0 > 0$, зависящее от $c_0, c_1, c_2, M_0, M_1, m_*, M_*$, и число $\nu > 0$, зависящее от c_0, M_0, M_1, m_*, M_* , такие, что

$$\max_{x \in \bar{U}} |u(x, t) - u_*| \leq C_0 e^{-\nu t} \max_{x \in \bar{U}} |u_0(x) - u_*| \quad \text{при } t \geq 0. \quad (4.43)$$

- (ii) Предположим, что выполняется либо $c_1 = 0$, либо условие (E1). Тогда

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{x \in \bar{U}} u(x, t) \leq u_*. \quad (4.44)$$

Если, кроме того, $u_* = m_*$, то

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_{x \in \bar{U}} |u(x, t) - u_*| = 0. \quad (4.45)$$

- (iii) Предположим, что выполняется либо $c_2 = 0$, либо условие (E2). Тогда

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{x \in \bar{U}} u(x, t) \geq u_*. \quad (4.46)$$

Если, кроме того, $u_* = M_*$, то имеем (4.45).

- (iv) Следовательно, если либо

(a) $c_1 = 0$ и (E2), либо

(b) $c_2 = 0$ и (E1),

то имеет место (4.45).

Доказательство. Из (4.39) получаем $|u(x, t)| \leq \max\{|m_*|, |M_*|\}$ для всех $(x, t) \in \bar{U} \times [0, \infty)$. Объединяя это с (4.34), получаем

$$|\tilde{B}(x, t)| \leq M_2 \quad \text{для всех } (x, t) \in U \times (0, \infty), \quad \text{где } M_2 = M_0 \max\{|m_*|, |M_*|\}. \quad (4.47)$$

Пусть M_1 и M_2 определены как в (4.35) и (4.47), а s, η_* и ν определены, как в (4.18). Заметим, что последние три числа зависят только от c_0, M_0, M_1, m_*, M_* .

Пусть

$$\lambda_1 > 0 \text{ и } \lambda_2 < 0 \quad \text{таковы, что} \quad \lambda_1 \geq c_1/c_0 \text{ и } \lambda_2 \leq -c_2/c_0. \quad (4.48)$$

Пусть функции F_{λ_j} , $j = 1, 2$, заданы формулой (3.14) при $C = 1$, $C' = 0$ и $\lambda = \lambda_j$. Определим

$$w_j = F_{\lambda_j}(u) \quad \text{на } U \times (0, \infty). \quad (4.49)$$

По лемме 3.1 (ii) и (iii) имеем

$$\mathcal{L}w_1 \leq 0, \quad \mathcal{L}w_2 \geq 0 \quad \text{на } U \times (0, \infty). \quad (4.50)$$

Ниже, всякий раз, когда мы применяем предложение 4.1 к оператору \mathcal{L} , это подразумевает, что $\tilde{L} = \mathcal{L}$, где $b(x, t) = \tilde{B}(x, t)$.

(i) Доказательство (4.43) разделим на три шага.

Шаг 1. Поскольку $m_*, M_* \in J$, имеем

$$u(\bar{U} \times [0, \infty)) \subset [m_*, M_*] \subset J. \quad (4.51)$$

Выберем два числа λ_1 и λ_2 , удовлетворяющие условию (4.48). В этом случае в силу (4.51) можно продолжить функцию (4.49) до $w_j = F_{\lambda_j}(u)$ на $\bar{U} \times [0, \infty)$, $j = 1, 2$. Тогда мы по-прежнему имеем (4.50).

Определим $w_{*,j} = F_{\lambda_j}(u_*)$ и $\bar{w}_j = w_j - w_{*,j}$, $j = 1, 2$, на $\bar{U} \times [0, \infty)$. Очевидно, $\bar{w}_j = 0$ на $\Gamma \times [0, \infty)$, $j = 1, 2$. Применяя предложение 4.1 (i) к оператору \mathcal{L} и функции $w := \bar{w}_1$, из (4.20) при $t \geq 0$ получаем, что

$$\max_{x \in \bar{U}} \bar{w}_1(x, t) \leq \eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max\{0, \max_{\bar{U}} \bar{w}_1(x, 0)\} \leq \eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max_{\bar{U}} |\bar{w}_1(x, 0)|. \quad (4.52)$$

Аналогично, применяя предложение 4.1 (ii) к оператору \mathcal{L} и функции $w := \bar{w}_2$, из (4.23) для всех $t \geq 0$ следует, что

$$\min_{x \in \bar{U}} \bar{w}_2(x, t) \geq \eta_*^{-1} e^{-\nu t} \min\{0, \min_{\bar{U}} \bar{w}_2(x, 0)\} \geq -\eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max_{\bar{U}} |\bar{w}_2(x, 0)| \text{ при } t \geq 0. \quad (4.53)$$

Шаг 2. Следующий шаг состоит в том, чтобы связать неравенства (4.52) и (4.53) при $u(x, t) - u_*$. Для этого обозначим

$$C_1 = \min\{e^{\lambda_1 P(m_*)}, e^{\lambda_2 P(M_*)}\}, \quad C_2 = \max\{e^{\lambda_1 P(M_*)}, e^{\lambda_2 P(m_*)}\}.$$

Для $j = 1, 2$ имеем

$$0 < C_1 \leq F'_{\lambda_j}(z) = e^{\lambda_j P(z)} \leq C_2 \quad \text{при } z \in [m_*, M_*].$$

Выше мы использовали свойство возрастания P , см. (3.2). Следовательно, для $j = 1, 2$

$$C_1 |s - u_*| \leq |F_{\lambda_j}(s) - F_{\lambda_j}(u_*)| \leq C_2 |s - u_*| \quad \text{при } s \in [m_*, M_*]. \quad (4.54)$$

Более конкретно, по теореме о среднем значении для $j = 1, 2$ имеем:

$$\begin{aligned} C_1(s - u_*) &\leq F_{\lambda_j}(s) - F_{\lambda_j}(u_*) \leq C_2(s - u_*) \quad \text{при } s \in [u_*, M_*], \\ C_2(s - u_*) &\leq F_{\lambda_j}(s) - F_{\lambda_j}(u_*) \leq C_1(s - u_*) \quad \text{при } s \in [m_*, u_*]. \end{aligned} \quad (4.55)$$

Следовательно, при $j = 1$ из (4.55) для $s \in [m_*, M_*]$ имеем, что

$$s - u_* \leq \max\{C_1^{-1}(F_{\lambda_1}(s) - F_{\lambda_1}(u_*)), C_2^{-1}(F_{\lambda_1}(s) - F_{\lambda_1}(u_*))\}. \quad (4.56)$$

При $j = 2$, для $s \in [m_*, M_*]$ имеем:

$$s - u_* \geq \min\{C_2^{-1}(F_{\lambda_2}(s) - F_{\lambda_2}(u_*)), C_1^{-1}(F_{\lambda_2}(s) - F_{\lambda_2}(u_*))\}. \quad (4.57)$$

Шаг 3. Теперь, объединяя неравенство (4.56) с оценкой (4.52), получаем для любого $t \geq 0$, что

$$\begin{aligned} u(x, t) - u_* &\leq \max\{C_1^{-1}(w_1(x, t) - w_{*,1}), C_2^{-1}(w_1(x, t) - w_{*,1})\} \leq \\ &\leq \max\{C_1^{-1} \eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max_{\bar{U}} |w_1(x, 0) - w_{*,1}|, C_2^{-1} \eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max_{\bar{U}} |w_1(x, 0) - w_{*,1}|\} \leq \\ &\leq C_1^{-1} \eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max_{\bar{U}} |w_1(x, 0) - w_{*,1}|. \end{aligned}$$

Вместе с (4.54) для оценки последнего максимума это даёт

$$u(x, t) - u_* \leq C_1^{-1} C_2 \eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max_{\bar{U}} |u(x, 0) - u_*|. \quad (4.58)$$

Далее, объединяя неравенство (4.57) с оценкой (4.53), получаем

$$\begin{aligned} u(x, t) - u_* &\geq \min\{C_2^{-1}(w_2(x, t) - w_{*,2}), C_1^{-1}(w_2(x, t) - w_{*,2})\} \geq \\ &\geq \min\{-C_2^{-1} \eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max_{\bar{U}} |w_2(x, 0) - w_{*,2}|, -C_1^{-1} \eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max_{\bar{U}} |w_2(x, 0) - w_{*,2}|\} \geq \\ &\geq -C_1^{-1} \eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max_{\bar{U}} |w_2(x, 0) - w_{*,2}|. \end{aligned}$$

Опять же, отсюда с учётом (4.54) получим

$$u(x, t) - u_* \geq -C_1^{-1} C_2 \eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max_{\bar{U}} |u(x, 0) - u_*|. \quad (4.59)$$

Наконец, объединение оценок (4.58) и (4.59) даёт

$$|u(x, t) - u_*| \leq C_1^{-1} C_2 \eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max_{\bar{U}} |u(x, 0) - u_*|,$$

что доказывает искомую оценку (4.43).

(ii) Сначала докажем (4.44).

Случай 1: $c_1 = 0$. В этом случае $\mathcal{L}u \leq Lu = 0$. Тогда, применяя предложение 4.1 (ii) к оператору \mathcal{L} и функции $w := u - u_*$, получаем (4.44) из (4.21).

Случай 2: $c_1 > 0$ и выполнено (E1). Имеем диапазон $u(\bar{U} \times [0, \infty))$, являющийся подмножеством $J \cup \{m_*\}$. Пусть $\lambda_1 = c_1/c_0 > 0$. Используем расширенное определение функции F_{λ_j} на $J \cup \{m_*\}$, заданное формулой (4.41) с $C = 1$, $C' = 0$ и $\lambda = \lambda_1$. Тогда мы можем определить $w_{*,1} = F_{\lambda_1}(u_*)$ и $w_1 = F_{\lambda_1}(u)$, $\bar{w}_1 = w_j - w_{*,1}$ на $\bar{U} \times [0, \infty)$.

Согласно (4.50), имеем $\mathcal{L}\bar{w}_1 \leq 0$ на $U \times (0, \infty)$. Согласно предложению 4.1 (i), применённому к оператору \mathcal{L} и функции \bar{w}_1 , из (4.21) следует, что

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{x \in \bar{U}} w_1(x, t) \leq w_{*,1}. \quad (4.60)$$

Из возрастания и непрерывности F_{λ_1} по (4.60) следует, что

$$F_{\lambda_1}(u_*) = w_{*,1} \geq \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{x \in \bar{U}} F_{\lambda_1}(u(x, t)) = \limsup_{t \rightarrow \infty} F_{\lambda_1}(\max_{x \in \bar{U}} u(x, t)) = F_{\lambda_1}(\limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{x \in \bar{U}} u(x, t)).$$

Поэтому благодаря строгому возрастанию F_{λ_1} имеем

$$u_* \geq \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{x \in \bar{U}} u(x, t), \quad (4.61)$$

что доказывает (4.44). Это завершает доказательство (4.44).

Теперь рассмотрим $u_* = m_*$. Имеем $u(x, t) \geq u_*$, откуда по (4.44) следует, что

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{x \in \bar{U}} |u(x, t) - u_*| = \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{x \in \bar{U}} (u(x, t) - u_*) \leq 0.$$

Таким образом, получаем (4.45).

(iii) Сначала докажем (4.46).

Случай 1: $c_2 = 0$. В этом случае $\mathcal{L}u \geq Lu = 0$. Тогда из (4.24) следует (4.46) после применения предложения 4.1 (iii) к оператору \mathcal{L} и функции $w := u - u_*$.

Случай 2: $c_2 > 0$ и выполнено (E2). Доказательство такое же, как в части (ii), случай 2. Действительно, имеем $u(\bar{U} \times [0, \infty)) \subset J \cup \{M_*\}$. Пусть $\lambda_2 = -c_2/c_0 < 0$, а F_{λ_2} — расширенная функция на $J \cup \{M_*\}$, определяемая формулой (4.42) с $C = 1$, $C' = 0$ и $\lambda = \lambda_2$. Определим $w_{*,2} = F_{\lambda_2}(u_*)$ и $w_2 = F_{\lambda_2}(u)$, $\bar{w}_2 = w_j - w_{*,2}$ на $\bar{U} \times [0, \infty)$.

Согласно (4.50), имеем $\mathcal{L}\bar{w}_2 \geq 0$ на $U \times (0, \infty)$. Тогда, применяя предложение 4.1 (ii) к оператору \mathcal{L} и функции \bar{w}_2 , из (4.24) получаем, что

$$\liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{x \in \bar{U}} w_2(x, t) \geq w_{*,2}. \quad (4.62)$$

Так же, как и в (4.61), из (4.62) имеем, что

$$u_* \leq \liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{x \in \bar{U}} u(x, t),$$

что доказывает (4.46).

Теперь, когда (4.46) уже установлено, рассмотрим $u_* = M_*$. Из (4.46) следует, что

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{x \in \bar{U}} |u(x, t) - u_*| = -\liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{x \in \bar{U}} (-|u(x, t) - u_*|) = -\liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{x \in \bar{U}} (u(x, t) - u_*) \leq 0,$$

следовательно, мы снова получаем (4.45).

(iv) С одной стороны, с учётом (4.31) имеем

$$\begin{aligned}
 \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{x \in \bar{U}} |u(x, t) - u_*| &\leq \\
 &\leq \max\{\limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{x \in \bar{U}} (u(x, t) - u_*), \limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{x \in \bar{U}} (-(u(x, t) - u_*))\} = \\
 &= \max\{\limsup_{t \rightarrow \infty} \max_{x \in \bar{U}} (u(x, t) - u_*), -\liminf_{t \rightarrow \infty} \min_{x \in \bar{U}} (u(x, t) - u_*)\}. \quad (4.63)
 \end{aligned}$$

С другой стороны, в обоих случаях (а) и (б) имеем (4.44) и (4.46). Тогда, объединяя (4.63) с (4.44) и (4.46), получаем (4.45). \square

В качестве следствия покажем, что экспоненциальная скорость убывания $|u(x, t) - u_*|$ при $t \rightarrow \infty$ зависит только от асимптотического поведения $A(x, t)$ и $B(x, t)$ при $t \rightarrow \infty$, но не от начальных данных $u_0(x)$ и матрицы $K(x, t)$.

Следствие 4.1. В предположении 4.3 положим

$$c'_0 = \liminf_{t \rightarrow \infty} \inf_{x \in U} \min_{\xi \in \mathbb{R}^n, |\xi|=1} \xi^T A(x, t) \xi, \quad (4.64)$$

и пусть M'_0, M'_1 будут двумя положительными числами такими, что

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in U} |B(x, t)| < M'_0, \quad (4.65)$$

$$\limsup_{t \rightarrow \infty} \sup_{x \in U} \text{Tr}(A(x, t)) < M'_1. \quad (4.66)$$

Если $m_*, M_* \in J$, то существует число $\nu_* > 0$, зависящее от u_*, c'_0, M'_0, M'_1 , но не от начальных данных $u_0(x)$, такое, что

$$\max_{x \in \bar{U}} |u(x, t) - u_*| = \mathcal{O}(e^{-\nu_* t}) \quad \text{при } t \rightarrow \infty. \quad (4.67)$$

Доказательство. Из (4.43) ясно, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_{x \in \bar{U}} |u(x, t) - u_*| = 0. \quad (4.68)$$

Также заметим, что $u_* \in J$. Согласно (4.64), (4.66), (4.65), (4.68), существуют $T > 0$ и $m', M' \in J$, достаточно близкие к u_* , при этом $m' < u_* < M'$, такие, что

$$u(x, t) \in [m', M'] \quad \text{для всех } (x, t) \in \bar{U} \times [T, \infty),$$

$$|B(x, t)| \leq M'_0, \quad \text{Tr}(A(x, t)) \leq M'_1 \quad \text{для всех } (x, t) \in U \times [T, \infty),$$

$$\xi^T A(x, t) \xi \geq \frac{c'_0}{2} |\xi|^2 \quad \text{для всех } (x, t) \in U \times [T, \infty), \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Повторим доказательство теоремы 4.1 (i) при

$$u := u(x, t + T), \quad A := A(x, t + T), \quad B := B(x, t + T), \quad K := K(x, t + T),$$

$$c_0 := c'_0/2, \quad M_0 := M'_0, \quad M_1 := M'_1, \quad m_* := m', \quad M_* := M'$$

и теми же числами c_1, c_2 . Заметим, что доказательство работает с заменами $m_* := m'$ и $M_* := M'$, как указано выше, хотя m' и M' могут не быть минимальным и максимальным значениями $u(x, T)$ в \bar{U} . Пусть $\nu_* = \nu$ задано формулой 4.18, где M_2 заменено на $M'_2 = M'_0 \max\{|m'|, |M'|\}$, см. (4.47). Тогда ν_* зависит только от чисел $c'_0/2, M'_0, M'_1, m', M'$, и, следовательно, не зависит от $u_0(x)$. Из (4.43) получаем, что

$$|u(x, t + T) - u_*| \leq C_* e^{-\nu_* t} \max_{\bar{U}} |u(x, T) - u_*| \quad \text{для некоторого числа } C_* > 0.$$

Таким образом, получаем оценку (4.67). \square

Пример 4.1. Используя пример 3.1, рассмотрим случаи (а) с (3.25) и (б) с (3.26), (3.27). Как при $J = [0, \infty)$, так и при $J = \mathbb{R}$ всегда имеем $m_*, M_* \in J$. Следовательно, для любого $u_* \in J = \bar{J}$ и любого соответствующего решения u из теоремы 4.1 (i) следует оценка (4.43) для всех $t \geq 0$.

Пример 4.2. Рассмотрим слабосжимаемые жидкости, как в случае (с) из примера 3.1. Имеем $J = (0, \infty)$, $u \geq 0$ на $\bar{U} \times [0, \infty)$ и $M_* \geq u_* \geq m_* \geq 0$. Учитывая (4.39) и $u > 0$ на $U \times (0, \infty)$, имеем $M_* > 0$, т. е. $M_* \in J$. Учитывая (4.40), ниже рассмотрим только $m_* < M_*$.

Случай 1: $u_* > 0$. Рассмотрим два подслучая.

Случай 1а: $m_* > 0$. Тогда $m_*, M_* \in J$ и из теоремы 4.1 (i) следует оценка (4.43) для всех $t \geq 0$.

Случай 1б: $m_* = 0$. Тогда выполняется условие (E1). С использованием (4.44) из теоремы 4.1 (ii) следует оценка u для больших времён, которая не зависит от $u_0(x)$. Если, кроме того, $c_2 = 0$, то из теоремы 4.1 (iv)(b) следует предел (4.45).

Случай 2: $u_* = 0$. Тогда $m_* = 0 \notin J$ и выполняется условие (E1). Из теоремы 4.1 (ii) получаем предел (4.45), который запишем как

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \max_{x \in \bar{U}} u(x, t) = 0. \quad (4.69)$$

Более того, мы можем даже получить оценки убывания для всего времени. Действительно, можно взять $c_1 > 0$, $\lambda_1 = c_1/c_0$ и следовать случаю 2 доказательства теоремы 4.1 (ii). Можно проверить, что $e^{\lambda_1 P(z)}$ при $z > 0$ имеет продолжение $E_{\lambda_1}(z) = z^{\lambda_1}$ при $z \geq 0$. Аналогично полученному нами результату (3.28), положив $m = \lambda_1 + 1 = c_1/c_0 + 1$ и выбрав $\lambda = \lambda_1$, $C = m$, $C' = s_0^m$ в формуле (4.41), мы можем использовать явную функцию $F_{\lambda_1}(s) = s^m$ при $s \geq 0$. Затем на шаге (4.60) мы используем оценку (4.20) вместо предельного значения (4.21). Получаем при $t \geq 0$:

$$\max_{x \in \bar{U}} w_1(x, t) \leq \eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max_{x \in \bar{U}} w_1(x, 0)$$

что влечёт

$$\max_{x \in \bar{U}} u^m(x, t) \leq \eta_*^{-1} e^{-\nu t} \max_{x \in \bar{U}} u^m(x, 0).$$

Поэтому вместо предела (4.69) мы имеем

$$\max_{x \in \bar{U}} u(x, t) \leq \eta_*^{-1/m} e^{-\nu t/m} \max_{x \in \bar{U}} u(x, 0) \quad \text{для всех } t \geq 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Aronson D. G. The porous medium equation // В сб.: «Nonlinear diffusion problems». — Berlin—Heidelberg: Springer, 1986. — С. 1–46. — DOI: [10.1007/BFb0072687](https://doi.org/10.1007/BFb0072687).
2. Aulisa E., Bloshanskaya L., Hoang L., Ibragimov A. Analysis of generalized Forchheimer flows of compressible fluids in porous media // J. Math. Phys. — 2009. — 50, № 10. — 103102. — DOI: [10.1063/1.3204977](https://doi.org/10.1063/1.3204977).
3. Barletta A. Thermal instability in a horizontal porous channel with horizontal through flow and symmetric wall heat fluxes // Transp. Porous Media. — 2012. — 92, № 2. — С. 419–437. — DOI: [10.1007/s11242-011-9910-y](https://doi.org/10.1007/s11242-011-9910-y).
4. Bear J. Dynamics of fluids in porous media. — New York: Dover Publications, 1988.
5. Bernstein S. Sur les équations du calcul des variations // Ann. Sci. Éc. Norm. Supér. — 1912. — 29. — С. 431–485.
6. Celik E., Hoang L. Maximum estimates for generalized Forchheimer flows in heterogeneous porous media // J. Differ. Equ. — 2017. — 262, № 3. — С. 2158–2195. — DOI: [10.1016/j.jde.2016.10.043](https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.10.043).
7. Celik E., Hoang L., Ibragimov A., Kieu T. Fluid flows of mixed regimes in porous media // J. Math. Phys. — 2017. — 58, № 2. — 023102. — DOI: [10.1063/1.4976195](https://doi.org/10.1063/1.4976195).
8. Celik E., Hoang L., Kieu T. Doubly nonlinear parabolic equations for a general class of Forchheimer gas flows in porous media // Nonlinearity. — 2018. — 31, № 8. — С. 3617–3650. — DOI: [10.1088/1361-6544/aabf05](https://doi.org/10.1088/1361-6544/aabf05).
9. Celik E., Hoang L., Kieu T. Studying a doubly nonlinear model of slightly compressible Forchheimer flows in rotating porous media // Turkish J. Math. — 2023. — 47, № 3. — С. 949–987. — DOI: [10.55730/1300-0098.340510.55730/1300-0098.3405](https://doi.org/10.55730/1300-0098.340510.55730/1300-0098.3405).
10. Chadam J., Qin Y. Spatial decay estimates for flow in a porous medium // SIAM J. Math. Anal. — 1997. — 28, № 4. — С. 808–830. — DOI: [10.1137/S0036141095290562](https://doi.org/10.1137/S0036141095290562).
11. Cole J. D. On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics // Quart. Appl. Math. — 1951. — 9. — С. 225–236. — DOI: [10.1090/qam/42889](https://doi.org/10.1090/qam/42889).
12. Darcy H. Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon. — Paris: Dalmont, 1856.
13. DiBenedetto E. Degenerate parabolic equations. — New York: Springer, 1993.

14. *Einstein A.* Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen// *Ann. Physik.* — 1905. — 322, № 8. — С. 549–560. — DOI: [10.1002/andp.19053220806](https://doi.org/10.1002/andp.19053220806).
15. *Hoang L., Ibragimov A.* Structural stability of generalized Forchheimer equations for compressible fluids in porous media// *Nonlinearity.* — 2011. — 24, № 1. — С. 1–41. — DOI: [10.1088/0951-7715/24/1/001](https://doi.org/10.1088/0951-7715/24/1/001).
16. *Hoang L. T., Ibragimov A., Kieu T. T.* A family of steady two-phase generalized Forchheimer flows and their linear stability analysis// *J. Math. Phys.* — 2014. — 55, № 12. — 123101. — DOI: [10.1063/1.4903002](https://doi.org/10.1063/1.4903002).
17. *Hoang L., Ibragimov A., Kieu T., Sobol Z.* Stability of solutions to generalized Forchheimer equations of any degree// *J. Math. Sci. (N. Y.).* — 2015. — 210, № 4. — С. 476–544. — DOI: [10.1007/s10958-015-2576-1](https://doi.org/10.1007/s10958-015-2576-1).
18. *Hoang L., Kieu T.* Global estimates for generalized Forchheimer flows of slightly compressible fluids// *J. Anal. Math.* — 2019. — 137, № 1. — С. 1–55. — DOI: [10.1007/s11854-018-0064-5](https://doi.org/10.1007/s11854-018-0064-5).
19. *Hoang L., Kieu T.* Anisotropic flows of Forchheimer-type in porous media and their steady states// *Nonlinear Anal. Real World Appl.* — 2025. — 84. — 104269. — DOI: [10.1016/j.nonrwa.2024.104269](https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2024.104269).
20. *Hopf E.* The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu_{xx}$ // *Commun. Pure Appl. Math.* — 1950. — 3, № 3. — С. 201–230. — DOI: [10.1002/cpa.3160030302](https://doi.org/10.1002/cpa.3160030302).
21. *Ladyženskaja O. A., Solonnikov V. A., Ural'ceva N. N.* Linear and quasilinear equations of parabolic type. — Providence: Am. Math. Soc., 1968.
22. *Landis E. M.* Second-order equations of elliptic and parabolic type. — Providence: Am. Math. Soc., 1998.
23. *Muskat M.* The flow of homogeneous fluids through porous media. — New York: McGraw–Hill, 1937.
24. *Payne L. E., Song J. C., Straughan B.* Continuous dependence and convergence results for Brinkman and Forchheimer models with variable viscosity// *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A. Math. Phys. Eng. Sci.* — 1999. — 455, № 1986. — С. 2173–2190. — DOI: [10.1098/rspa.1999.0398](https://doi.org/10.1098/rspa.1999.0398).
25. *Payne L. E., Straughan B.* Convergence and continuous dependence for the Brinkman–Forchheimer equations// *Stud. Appl. Math.* — 1999. — 102, № 4. — С. 419–439. — DOI: [10.1111/1467-9590.00116](https://doi.org/10.1111/1467-9590.00116).
26. *Rubin Y.* Transport in heterogeneous porous media: Prediction and uncertainty// *Water Resour. Res.* — 1991. — 27, № 7. — С. 1723–1738. — DOI: [10.1029/91WR00589](https://doi.org/10.1029/91WR00589).
27. *Scheidegger A. E.* The physics of flow through porous media. — Toronto: University of Toronto Press, 1974.
28. *Straughan B.* Stability and wave motion in porous media. — New York: Springer, 2008.
29. *Vázquez J. L.* The porous medium equation. — Oxford: Clarendon Press, 2007.
30. *Wang F., Landau D. P.* Efficient, multiple-range random walk algorithm to calculate the density of states// *Phys. Rev. Lett.* — 2001. — 86. — С. 2050–2053. — DOI: [10.1103/PhysRevLett.86.2050](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.2050).

Л. Хоанг

Texas Tech University, Lubbock, USA

E-mail: luan.hoang@ttu.edu, Scopus: [13905538000](https://orcid.org/13905538000), ORCID: [0000-0002-8008-4915](https://orcid.org/0000-0002-8008-4915)

А. И. Ибрагимов

Институт проблем нефти и газа РАН, Москва, Россия

E-mail: ilya1sergey@gmail.com, ПИНЦ SPIN-код: 3162-9406, ПИНЦ AuthorID: [10270](https://orcid.org/10270), Reser-
archerID: [AFZ-8749-2022](https://orcid.org/AFZ-8749-2022), Scopus: [23968895600](https://orcid.org/23968895600), ORCID: [0000-0001-6827-8007](https://orcid.org/0000-0001-6827-8007)

DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-663-685](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-663-685)
 EDN: MJECGF

UDC 517.958, 517.97
Research article

A class of anisotropic diffusion-transport equations in nondivergent form

L. Hoang¹ and A. I. Ibragimov²

¹*Texas Tech University, Lubbock, USA*

²*Oil and Gas Research Institute of the RAS, Moscow, Russia*

Abstract. We generalize Einstein's probabilistic method for the Brownian motion to study compressible fluids in porous media. The multi-dimensional case is considered with general probability distribution functions. By relating the expected displacement per unit time with the velocity of the fluid, we derive an anisotropic diffusion equation in non-divergence form that contains a transport term. Under the Darcy law assumption, a corresponding nonlinear partial differential equations for the density function is obtained. The classical solutions of this equation are studied, and the maximum and strong maximum principles are established. We also obtain exponential decay estimates for the solutions for all time, and particularly, their exponential convergence as time tends to infinity. Our analysis uses some transformations of the Bernstein–Cole–Hopf type which are explicitly constructed even for very general equation of state. Moreover, the Lemma of Growth in time is proved and utilized in order to achieve the above decaying estimates.

Keywords: Einstein paradigm, diffusion-transport, fluids in porous media, nonlinearity, partial differential equations non-divergence form, qualitative study, Bernstein–Cole–Hopf, asymptotic analysis

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. A. I. Ibragimov was financially supported within the framework of the state assignment of Oil and Gas Research Institute of the Russian Academy of Sciences (project 122022800272-4).

For citation: L. Hoang, A. I. Ibragimov, “A class of anisotropic diffusion-transport equations in non-divergent form,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2025, Vol. **71**, No. 4, 663–685, DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-663-685](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-663-685).

REFERENCES

1. D. G. Aronson, “The porous medium equation,” In: *Nonlinear diffusion problems*, Springer, Berlin—Heidelberg, 1986, pp. 1–46, DOI: [10.1007/BFb0072687](https://doi.org/10.1007/BFb0072687).
2. E. Aulisa, L. Blosanskaya, L. Hoang, and A. Ibragimov, “Analysis of generalized Forchheimer flows of compressible fluids in porous media,” *J. Math. Phys.*, 2009, **50**, No. 10, 103102, DOI: [10.1063/1.3204977](https://doi.org/10.1063/1.3204977).
3. A. Barletta, “Thermal instability in a horizontal porous channel with horizontal through flow and symmetric wall heat fluxes,” *Transp. Porous Media*, 2012, **92**, No. 2, 419–437, DOI: [10.1007/s11242-011-9910-y](https://doi.org/10.1007/s11242-011-9910-y).
4. J. Bear, *Dynamics of fluids in porous media*, Dover Publications, New York, 1988.
5. S. Bernstein, “Sur les équations du calcul des variations,” *Ann. Sci. Éc. Norm. Supér.*, 1912, **29**, 431–485.
6. E. Celik and L. Hoang, “Maximum estimates for generalized Forchheimer flows in heterogeneous porous media,” *J. Differ. Equ.*, 2017, **262**, No. 3, 2158–2195, DOI: [10.1016/j.jde.2016.10.043](https://doi.org/10.1016/j.jde.2016.10.043).
7. E. Celik, L. Hoang, A. Ibragimov, and T. Kieu, “Fluid flows of mixed regimes in porous media,” *J. Math. Phys.*, 2017, **58**, No. 2, 023102, DOI: [10.1063/1.4976195](https://doi.org/10.1063/1.4976195).
8. E. Celik, L. Hoang, and T. Kieu, “Doubly nonlinear parabolic equations for a general class of Forchheimer gas flows in porous media,” *Nonlinearity*, 2018, **31**, No. 8, 3617–3650, DOI: [10.1088/1361-6544/aabf05](https://doi.org/10.1088/1361-6544/aabf05).

9. E. Celik, L. Hoang, and T. Kieu, “Studying a doubly nonlinear model of slightly compressible Forchheimer flows in rotating porous media,” *Turkish J. Math.*, 2023, **47**, No. 3, 949–987, DOI: [10.55730/1300-0098.3405](https://doi.org/10.55730/1300-0098.3405).
10. J. Chadam and Y. Qin, “Spatial decay estimates for flow in a porous medium,” *SIAM J. Math. Anal.*, 1997, **28**, No. 4, 808–830, DOI: [10.1137/S0036141095290562](https://doi.org/10.1137/S0036141095290562).
11. J. D. Cole, “On a quasi-linear parabolic equation occurring in aerodynamics,” *Quart. Appl. Math.*, 1951, **9**, 225–236, DOI: [10.1090/qam/42889](https://doi.org/10.1090/qam/42889).
12. H. Darcy, *Les Fontaines Publiques de la Ville de Dijon*, Dalmont, Paris, 1856.
13. E. DiBenedetto, *Degenerate parabolic equations*, Springer, New York, 1993.
14. A. Einstein, “Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen,” *Ann. Physik*, 1905, **322**, No. 8, 549–560, DOI: [10.1002/andp.19053220806](https://doi.org/10.1002/andp.19053220806).
15. L. Hoang and A. Ibragimov, “Structural stability of generalized Forchheimer equations for compressible fluids in porous media,” *Nonlinearity*, 2011, **24**, No. 1, 1–41, DOI: [10.1088/0951-7715/24/1/001](https://doi.org/10.1088/0951-7715/24/1/001).
16. L. T. Hoang, A. Ibragimov, and T. T. Kieu, “A family of steady two-phase generalized Forchheimer flows and their linear stability analysis,” *J. Math. Phys.*, 2014, **55**, No. 12, 123101, DOI: [10.1063/1.4903002](https://doi.org/10.1063/1.4903002).
17. L. Hoang, A. Ibragimov, T. Kieu, and Z. Sobol, “Stability of solutions to generalized Forchheimer equations of any degree,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2015, **210**, No. 4, 476–544, DOI: [10.1007/s10958-015-2576-1](https://doi.org/10.1007/s10958-015-2576-1).
18. L. Hoang and T. Kieu, “Global estimates for generalized Forchheimer flows of slightly compressible fluids,” *J. Anal. Math.*, 2019, **137**, No. 1, 1–55, DOI: [10.1007/s11854-018-0064-5](https://doi.org/10.1007/s11854-018-0064-5).
19. L. Hoang and T. Kieu, “Anisotropic flows of Forchheimer-type in porous media and their steady states,” *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2025, **84**, 104269, DOI: [10.1016/j.nonrwa.2024.104269](https://doi.org/10.1016/j.nonrwa.2024.104269).
20. E. Hopf, “The partial differential equation $u_t + uu_x = \mu_{xx}$,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1950, **3**, No. 3, 201–230, DOI: [10.1002/cpa.3160030302](https://doi.org/10.1002/cpa.3160030302).
21. O. A. Ladyženskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural’ceva, *Linear and quasilinear equations of parabolic type*, Am. Math. Soc., Providence, 1968.
22. E. M. Landis, *Second-order equations of elliptic and parabolic type*, Am. Math. Soc., Providence, 1998.
23. M. Muskat, *The flow of homogeneous fluids through porous media*, McGraw–Hill, New York, 1937.
24. L. E. Payne, J. C. Song, and B. Straughan, “Continuous dependence and convergence results for Brinkman and Forchheimer models with variable viscosity,” *R. Soc. Lond. Proc. Ser. A. Math. Phys. Eng. Sci.*, 1999, **455**, No. 1986, 2173–2190, DOI: [10.1098/rspa.1999.0398](https://doi.org/10.1098/rspa.1999.0398).
25. L. E. Payne and B. Straughan, “Convergence and continuous dependence for the Brinkman–Forchheimer equations,” *Stud. Appl. Math.*, 1999, **102**, No. 4, 419–439, DOI: [10.1111/1467-9590.00116](https://doi.org/10.1111/1467-9590.00116).
26. Y. Rubin, “Transport in heterogeneous porous media: Prediction and uncertainty,” *Water Resour. Res.*, 1991, **27**, No. 7, 1723–1738, DOI: [10.1029/91WR00589](https://doi.org/10.1029/91WR00589).
27. A. E. Scheidegger, *The physics of flow through porous media*, University of Toronto Press, Toronto, 1974.
28. B. Straughan, *Stability and wave motion in porous media*, Springer, New York, 2008.
29. J. L. Vázquez, *The porous medium equation*, Clarendon Press, Oxford, 2007.
30. F. Wang and D. P. Landau, “Efficient, multiple-range random walk algorithm to calculate the density of states,” *Phys. Rev. Lett.*, 2001, **86**, 2050–2053, DOI: [10.1103/PhysRevLett.86.2050](https://doi.org/10.1103/PhysRevLett.86.2050).

Luan Hoang

Texas Tech University, Lubbock, USA

E-mail: luan.hoang@ttu.edu, Scopus: [13905538000](https://orcid.org/13905538000), ORCID: [0000-0002-8008-4915](https://orcid.org/0000-0002-8008-4915)

Akif Ibragimov

Oil and Gas Research Institute of the RAS, Moscow, Russia

E-mail: ilya1sergey@gmail.com, eLIBRARY SPIN-code: 3162-9406, eLIBRARY AuthorID: [10270](https://orcid.org/10270), ResearcherID: [AFZ-8749-2022](https://orcid.org/AFZ-8749-2022), Scopus: [23968895600](https://orcid.org/23968895600), ORCID: [0000-0001-6827-8007](https://orcid.org/0000-0001-6827-8007)

ДИНАМИКА ТЕНЗОРА КОНФОРМАЦИИ В ВЯЗКОУПРУГИХ МОДЕЛЯХ ПОЛИМЕРОВ FENE

А. П. ЧУПАХИН^{1,2}, Е. С. СТЕЦЯК^{1,2,3}, Д. С. ЧУТКОВ²

¹Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

²Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

³Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия

Аннотация. В настоящей работе получены и проинтегрированы уравнения, описывающие эволюцию инвариантов тензора конформации для модели FENE вязкоупругого полимерного раствора. Найдены явные выражения инвариантов в зависимости от времени вдоль траекторий частиц жидкости. Указанные инварианты представлены в виде функций от функции Ламберта. Проведён анализ качественного поведения инвариантов в различных режимах деформирования.

Ключевые слова: уравнения полимеров FENE, производная Ли, инварианты тензора конформации, интегрирование уравнений.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: А. П. Чупахин, Е. С. Стецяк, Д. С. Чутков. Динамика тензора конформации в вязкоупругих моделях полимеров FENE // Современная математика. Фундаментальные направления. 2025. Т. 71, № 4. С. 686–700, DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-686-700](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-686-700).

1. ВВЕДЕНИЕ

Многие среды, встречающиеся в природе, особенно растворы полимеров, обладают сложной реологией, проявляя вязкоупругие свойства. Следовательно, при взаимодействии они проявляют свойства как жидкостей, так и твёрдых (упругих) тел. К числу важнейших сред с такими свойствами относятся кровь, а также пасты, гели и различные природные жидкости, такие как лава и лавинный материал. Математическое описание таких сред значительно сложнее ньютоновской гидродинамики. Математическая гидродинамика неньютоновских сред — интенсивно развивающееся научное направление в наши дни [13, 15, 19, 26].

Чтобы проиллюстрировать сложности изучения моделей вязкоупругих сред, кратко опишем основные возникающие особенности. В гидродинамике ньютоновские жидкости характеризуются линейной зависимостью между напряжениями $\boldsymbol{\tau}$ и скоростью деформации \mathbf{E} : $\boldsymbol{\tau}_s = 2\eta_s \mathbf{E}$, где $\mathbf{E} = \frac{1}{2}(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T)$ — тензор скорости деформации в жидкости, а $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, \mathbf{x})$ — скорость жидкости. Постоянный коэффициент η_s называется вязкостью.

Вязкоупругие жидкости реагируют на очень быструю сдвиговую нагрузку как упругое твёрдое тело, а на медленную — как вязкая жидкость. Реологическое поведение также зависит от скорости нагружения $\dot{\boldsymbol{\tau}}_p$. Характеристическое реологическое соотношение имеет вид

$$\lambda_1 \dot{\boldsymbol{\tau}}_p + \boldsymbol{\tau}_p = 2\eta_p(\mathbf{E} + \lambda_2 \dot{\mathbf{E}}), \quad (1.1)$$

где величины λ_1 и λ_2 называются временами релаксации напряжений $\boldsymbol{\tau}_p$ и скоростей деформаций \mathbf{E} , а точка обозначает изменение величины во времени. К этому типу моделей относятся классические модели Фрёлиха—Сака и Максвелла [13, 15, 19, 26]. Дальнейшее развитие реологии сложных сред, основанное на статистической механике, привело к построению макроскопических уравнений, основанных на принципах статистической механики. В их основе лежит модель, описывающая движение малых частиц, размеры которых достаточно велики по сравнению с молекулярными, но достаточно малы, чтобы участвовать в тепловом движении, т. е. они совершают как макро-, так и микроброуновское движение.

Это модели движения суспензий и полимеров [7, 8, 15]. В растворах полимеров присутствуют протяжённые полимерные цепи с изменяющейся во времени геометрией, обладающие также вязкоупругими свойствами. Адекватное описание таких реологически сложных сред предполагает использование принципа материальной объективности, согласно которому математические модели должны быть инвариантны относительно ортогональных преобразований координат $\boldsymbol{\Omega}$ и сдвигов \mathbf{a} , являющихся функциями от времени [13, 28].

Это требование привело к необходимости замены частных производных в моделях реологически сложных сред на более сложный объект — производную Ли векторного поля \mathbf{v} [22, 28, 30, 32]. В физике полимеров сегодня существует большое количество моделей, использующих производные Ли по различным векторным полям и различающихся моделями полимерных цепей и механизмами их взаимодействия с потоком несущей жидкости [22, 28]. Исследованию математических моделей вязкоупругих сред в целом и полимерных растворов посвящено множество работ. Не претендуя на полноту обзора, упомянем работы последних лет, посвящённые исследованию начально-краевых задач [33], поиску точных решений [6] и изучению качественных свойств решений, в частности, устойчивости [1, 4, 9].

Настоящая работа оригинальна по своему подходу. В ней исследуется свойство тензора конформации \mathbf{C} , характеризующего динамику и геометрию полимерной фазы в течении. Изучение тензора \mathbf{C} потребовало использования алгебраических и геометрических методов тензорной алгебры [13] и аппарата производной Ли [32].

Взаимодействие гибких и растяжимых полимерных цепей с потоком несущей жидкости приводит к ряду экспериментально наблюдаемых явлений: снижению сопротивления, упругой турбулентности и изменению теплопередачи в конвективных процессах [14]. Тензор конформации \mathbf{C} связывает элементы микро- и макроскопического моделирования. Кратко объясним его происхождение. Полимер в потоке жидкости определяется совокупностью полимерных цепей, состоящих из упругих связей (нитей), соединяющих шарики (молекулы). Геометрия цепи описывается вектором $\mathbf{r} = (r^i)$, соединяющим концы полимерной конфигурации. Микроскопическая модель динамики вектора \mathbf{r} описывается уравнением Ланжевена

$$\mathbf{r}_t = -\frac{1}{2\lambda}f(\mathbf{r})\mathbf{r} + \nabla\mathbf{u} \cdot \mathbf{r} + \sqrt{\frac{L^2}{\lambda}}\mathbf{W}(t), \quad (1.2)$$

где \mathbf{u} — векторное поле скорости, λ — время релаксации полимера, L^2 — параметр, характеризующий флуктуации, а $\mathbf{W}(t)$ — независимый винеровский процесс (белый шум, характерный для броуновского движения). Функция $f(\mathbf{r})$ характеризует растяжимость полимера, причём максимальному значению этой величины соответствует $L^2 = |\mathbf{r}_{max}|^2$. После усреднения уравнения (1.1) методами статистической механики по всему ансамблю с использованием исчисления Ито выводится макроскопическое уравнение для тензора конформации $\mathbf{C} = \langle \mathbf{r} \otimes \mathbf{r} \rangle_{\mathbf{W}(t)}$, имеющее вид

$$\mathbf{C}_t + (\mathbf{u} \cdot \nabla)\mathbf{C} - (\nabla\mathbf{u})^T \cdot \mathbf{C} - \mathbf{C} \cdot (\nabla\mathbf{u}) + \mathcal{E}(c_1)(\mathbf{E} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{E}) = -\frac{1}{\lambda\mathcal{Z}(c_1)}[\mathcal{F}(c_1)\mathbf{C} - \mathcal{G}(c_1)\mathbf{I}], \quad (1.3)$$

где \mathbf{I} — единичный тензор 3×3 .

Тензор \mathbf{C} в силу своего построения дважды контравариантен: $\mathbf{C} = (c^{ij})$ ($i, j < 1, 2, 3$), симметричен: $\mathbf{C}^T = \mathbf{C}$, дифференцируем и положительно определён.

Обсудим отдельные члены уравнения (1.3). Первые четыре члена представляют собой производную Ли $L_v\mathbf{C} = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$ вдоль траектории движения жидкой частицы тензора \mathbf{C} . Положительные безразмерные функции $\mathcal{F}, \mathcal{G}, \mathcal{Z}$, зависящие от первого инварианта $c_1 = \text{tr}\mathbf{C} = \sum C^{ii}$ тензора конформации, определяются параметрами и структурой индивидуальной полимерной

модели. Величина c_1 в физике полимеров также интерпретируется как квадрат расстояния (вытянутости цепи) между концами (бусинами) полимерной цепи, усреднённый по всем состояниям (конформациям) и нормированный на равновесное состояние.

Модель (1.3) известна в современной литературе как *конечно растяжимая нелинейно упругая модель* (*finite extensible nonlinear elastic, FENE*) [17, 21]. Член $\mathcal{E}(c_1)(\mathbf{E} \cdot \mathbf{C} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{E})$ в формуле (1.3) характеризует сопротивление вращению полимерной молекулы в потоке. Функция $\mathcal{Z}(c_1)$ учитывает зависящее от конформации сопротивление изменению геометрии полимерной структуры. Наконец, функции \mathcal{F}, \mathcal{G} определяют конечную растяжимость полимерной молекулы и её упругие свойства. В работе [16] представлена таблица значений этих функций для восьми распространённых моделей вязкоупругих полимеров. В данной работе мы подробно рассмотрим две из них: FENE-CR [21] и FENE-CD [18].

Как уже отмечалось, влияние полимерных молекул и полимерных цепей на течение раствора определяется тензором напряжений $\boldsymbol{\tau}_p$, который связан с деформацией микроструктуры полимерной фазы. Деформация микроструктуры характеризуется тензором конформации \mathbf{C} , а их связь задаётся уравнением состояния

$$\boldsymbol{\tau}_p = \frac{\eta_p}{\lambda} [\mathcal{F}(c_1)\mathbf{C} - \mathcal{G}(c_1)\mathbf{I}]. \quad (1.4)$$

Тензор напряжений реологической модели раствора полимера в потоке вязкой жидкости представляется в виде суммы двух компонент: $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}_s + \boldsymbol{\tau}_p$, где $\boldsymbol{\tau}_s$ — тензор напряжений, соответствующий растворителю, а $\boldsymbol{\tau}_p$ — тензор напряжений полимера. Растворитель обычно предполагается ньютоновской жидкостью с постоянной вязкостью, $\boldsymbol{\tau}_s = 2\eta_s \mathbf{E}$. В формуле (1.4) постоянный коэффициент η_p характеризует вклад полимера в сдвиговую вязкость при нулевой скорости сдвига, λ — время релаксации, а функции \mathcal{F} и \mathcal{G} описаны выше.

В данной работе описывается динамика инвариантов тензора конформации \mathbf{C} для моделей FENE-CR и FENE-CD, а также интегрируются уравнения динамики (1.3) тензора \mathbf{C} для сдвиговых течений в квадратуре. Исследовано поведение инвариантов и показано существование двух режимов поведения. Представленная работа является расширенной и дополненной версией заметки [10].

2. Производная Ли

В связи с важной ролью производной Ли и её спецификой в механике сплошных сред, мы приводим описание конструкции этого понятия, следуя [20, 27]. Производная Ли возникает в реологических задачах в [28], её применение — в численном моделировании задач механики полимеров [12]. Приложения производных Ли различных векторных полей в механике твёрдого тела рассматриваются в [24].

Движение континуума описывается \mathbb{C}^2 -диффеоморфизмами $\boldsymbol{\varphi}_t$, зависящими от времени как от параметра: $\mathbf{X} \in D_0 \rightarrow \mathbf{x} \in D_t$, отображающими референтную область D_0 лагранжеских переменных $\mathbf{X} = (X^1, X^2, X^3)^T$ в область D_t эйлеровых переменных $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)^T$, занимаемую континуумом в момент времени t . Линейное касательное отображение \mathbf{F} , индуцированное $\boldsymbol{\varphi}_t$, определяется как

$$\mathbf{F} = \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{X}))}{\partial \mathbf{X}}.$$

Скорость среды \mathbf{u} в D_t получается путём дифференцирования этого соотношения по времени.

$$\left[\frac{d}{dt}, \frac{\partial}{\partial \mathbf{X}} \right] = 0, \quad \mathbf{u}(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{X})) = \frac{d(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{X}))}{dt}, \quad \frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{X}))}{\partial \mathbf{X}} \right) = \frac{\partial}{\partial \mathbf{x}} \left(\frac{d(\boldsymbol{\varphi}_t(\mathbf{X}))}{dt} \right) \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{X}} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F},$$

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}} \mathbf{F}, \quad \frac{d\mathbf{F}^{-1}}{dt} = -\mathbf{F}^{-1} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial \mathbf{x}}.$$

Движение континуума можно также описать обратимым дифференцируемым отображением Φ в четырёхмерном пространстве-времени \mathbf{W} следующим образом:

$$\mathbf{z} = \Phi(\mathbf{Z}), \quad \text{где} \quad \mathbf{z} = \begin{pmatrix} t \\ \mathbf{x} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ \boldsymbol{\varphi}_t \end{pmatrix} \in \mathbf{W}.$$

Пространство $W_0 \ni z = (t, \mathbf{X})^T$ является соответствующим референтным пространством. В дифференцируемом многообразии пространства-времени \mathbf{W} скорость среды задаётся 4-векторами $\mathbf{V} = (1, \mathbf{u})^T$, где $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)^T$.

В каждой точке \mathbf{W} 4-вектор скорости \mathbf{V} порождает локальную однопараметрическую группу преобразований Ли, определяемую отображением

$$(h, z) \in (-\epsilon, \epsilon) \times \mathcal{O} \rightarrow \Theta(h, z) \in \mathbf{W},$$

где $\Theta(h, z) = \begin{pmatrix} h+t \\ \varphi_{h+t}(\varphi_t^{-1}(x)) \end{pmatrix}$ и \mathcal{O} — открытое множество в \mathbf{W} , а ϵ — положительное действительное число. Поле скорости \mathbf{V} — инфинитезимальный оператор однопараметрической группы преобразований Ли с порождающим отображением Φ . Обозначим $\Theta_h(z) = \Theta(h, z)$ как отображение, действующее по формуле

$$\Theta_h(z) = \begin{pmatrix} h+t \\ \varphi_{h+t}(\mathbf{X}) \end{pmatrix}.$$

Образ множества \mathcal{O} при отображении Θ_h обозначается как $\mathcal{O}_h = \Theta_h(\mathcal{O})$. Рассмотрим тензорное поле $\mathbf{T}^{p,q}$, p раз контравариантное и q раз ковариантное, заданное на векторах касательного пространства к \mathbf{W} и формах кокасательного пространства соответственно (на векторах и ковекторах). Это тензор в векторном пространстве $\mathbf{T}_z^{p,q}(\mathbf{W})$. Каждое тензорное поле \mathbf{u} , определённое на \mathbf{W}

$$z \in \mathbf{W} \rightarrow \mathbf{T}(z) \in \mathbf{T}_z^{p,q}(\mathbf{W})$$

связано с локально определённым тензорным полем $\mathbf{T}_h(z) = \Theta_h(\mathbf{T}(z))$. Обозначим $\mathbf{T}_h = \Theta_h(\mathbf{T})$.

Определение 2.1. Производная Ли тензорного поля \mathbf{T} по векторному полю, определяемому оператором \mathbf{v} , задаётся как

$$L_v \mathbf{T} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Theta_h(\mathbf{T}(z)) - \mathbf{T}(z)}{h}. \quad (2.1)$$

В механике сплошных сред производную Ли удобно вычислять в четырёхмерном пространстве \mathbf{W}_0 . Пусть Ψ обозначает отображение, обратное к Φ , т. е. $\Psi = \Phi^{-1}$. Пусть $\mathbf{T}_0(\mathbf{Z})$ — образ $\mathbf{T}(z)$ при отображении Ψ , что соответствует преобразованию Φ . Тогда формула (2.1), определяющая $L_v \mathbf{T}$, примет вид

$$L_v \mathbf{T}(z) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\Phi(\Psi(\Theta_h(\mathbf{T}(z))) - \Psi(\mathbf{T}(z)))}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \Phi \left(\frac{\mathbf{T}_0(t+h, \mathbf{X}) - \mathbf{T}_0(t, \mathbf{X})}{h} \right).$$

Тогда получаем $L_v \mathbf{T} = \Phi \left(\frac{d\mathbf{T}_0(t, \mathbf{X})}{dt} \right)$.

Следовательно, имеет место следующая коммутативная диаграмма:

$$\begin{array}{ccc} \mathbf{T}(z) \in \mathbf{T}_z^{p,q}(\mathbf{W}) & \xrightarrow{\Psi} & \mathbf{v}_0 \in \mathbf{T}_z^{p,q}(\mathbf{W}_0) \\ \downarrow L_v & & \downarrow \frac{d}{dt} \\ L_v \mathbf{T}(z) & \xleftarrow{\Phi} & \frac{d\mathbf{T}_0(t, \mathbf{X})}{dt} \end{array}$$

Важным свойством производной Ли, используемой в данной работе, является то, что она сохраняет тип тензора: $L_v : \mathbf{T}_z^{p,q}(\mathbf{W}) \rightarrow \mathbf{T}_z^{p,q}(\mathbf{W})$.

В механике сплошной среды важными объектами, связанными с производной Ли, являются тензоры, которые движутся вместе с потоком [3, 11].

Определение 2.2. Тензорное поле \mathbf{T} в \mathbf{W} движется вместе с потоком тогда и только тогда, когда его образ в пространстве отсчета $\mathbf{T}_0 \in \mathbf{W}_0$ не зависит от времени.

Классическое утверждение связывает такие тензоры с тензорами, постоянными относительно производной Ли.

Теорема 2.1 (см. [20]). Тензорное поле движется вместе с потоком (т. е. поле переносится потоком без деформации) тогда и только тогда, когда производная Ли этого тензорного поля равна нулю.

Приведём также формулу в координатах для действия в $\mathbb{R}^n(\mathbf{x})$ производной Ли $L_{\mathbf{v}}$ вдоль векторного поля $\mathbf{v} = \xi^k(x)\partial_k$ ($k = \overline{1, \dots, n}$) на тензорном поле $T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}$, которое контравариантно p раз и ковариантно q раз [32]:

$$L_{\mathbf{v}} T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = \xi^k \partial_k T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} + \sum_{k=1}^p T^{i_1 \dots \hat{i}_k \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} \frac{\partial \xi^{i_k}}{\partial x^{i_k}} - \sum_{k=1}^q T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots \hat{j}_k \dots j_q} \frac{\partial \xi^{j_k}}{\partial x^{j_k}}, \quad (2.2)$$

где «крышка» над индексом обозначает фиктивный индекс, изменяющийся от 1 до n .

В теории непрерывных групп преобразований важную роль играет процедура выпрямления векторного поля $\partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$, порождающего производную Ли $L_{\mathbf{v}}$. Пусть τ — параметр вдоль траектории векторного поля \mathbf{v} , выбранный в качестве канонического параметра группы Ли непрерывных преобразований [5, 23, 29]. Такое преобразование, т. е. замена параметра, всегда может быть выполнено локально для области $(-\epsilon, \epsilon) \times \mathcal{O}$. Здесь интервал $(-\epsilon, \epsilon)$ содержит значение параметра, соответствующего тождественному преобразованию группы, т. е. начальные данные для соответствующего уравнения Ли, связывающего инфинитезимальный оператор \mathbf{v} и порождающее отображение Φ , приведённые в разделе 2.

3. ОБЩИЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ТЕНЗОРА КОНФОРМАЦИИ

Вернемся теперь к реологическому уравнению (1.3) для тензора конформации $\mathbf{C}(t, \mathbf{x}) = (C^{ij}(t, \mathbf{x}))_{i,j=\overline{1, \dots, n}}$, где $C^{ij} = C^{ji}$. Заметим, что первые четыре члена в левой части этого уравнения представляют собой производную Ли $L_{\mathbf{v}}$ тензора \mathbf{C} по векторному полю $\mathbf{v} = \partial_t + \mathbf{u} \cdot \nabla$, где $\mathbf{u} = (u^1, u^2, u^3)^T$ — скорость жидкости, которая является функцией времени t и пространственных координат $\mathbf{x} = (x^1, x^2, x^3)^T$. Согласно (2.2), имеем

$$L_{\mathbf{v}} C^{ij} = \partial_t C^{ij} + u^k \frac{\partial C^{ij}}{\partial x^k} - C^{kj} \frac{\partial u^i}{\partial x^k} - C^{ik} \frac{\partial u^j}{\partial x^k} \quad (i, j, k = 1, 2, 3).$$

Выведем выражения для инвариантов c_i ($i = 1, 2, 3$) тензора конформации \mathbf{C} как функций параметра времени t вдоль траектории производного векторного поля Ли $\mathbf{v} = L_{\mathbf{v}}$.

Матрица, полученная из тензора \mathbf{C} понижением одного индекса, $C_j^i = g_{ik} C^{kj}$, удовлетворяет уравнению Гамильтона—Кэли [2]. Поскольку в данном случае метрика предполагается равной единице, подробности перехода от дважды контравариантного тензора конформации к матрице при выводе следующих уравнений будут опущены. Имеем

$$\mathbf{C}^3 - c_1 \mathbf{C}^2 + c_2 \mathbf{C} - c_3 \mathbf{I} = 0, \quad (3.1)$$

где $c_1 = \text{tr} \mathbf{C}$, $c_2 = \frac{1}{2}[(\text{tr} \mathbf{C})^2 - \text{tr} \mathbf{C}^2]$, $c_3 = \det \mathbf{C}$ обозначают инварианты тензора \mathbf{C} . В этом уравнении степени $\mathbf{C}^2, \mathbf{C}^3$ представляют собой соответствующие свертки тензоров $\mathbf{C}^2 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}$, $\mathbf{C}^3 = \mathbf{C} \cdot \mathbf{C}^2$.

Уравнения (1.3) и (3.1) дают систему

$$\begin{cases} L_{\mathbf{v}} \mathbf{C} = -\frac{1}{\lambda \mathcal{Z}(c_1)} [\mathcal{F}(c_1) \mathbf{C} - \mathcal{G}(c_1) \mathbf{I}], \\ \mathbf{C}^3 - c_1 \mathbf{C}^2 + c_2 \mathbf{C} - c_3 \mathbf{I} = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Условия совместности системы (3.2) порождают уравнения для инвариантов c_i ($i = 1, 2, 3$) как функций параметра времени t вдоль траектории движения частиц жидкости. Выведем эти уравнения для некоторых реологических моделей полимеров на основе общих формул.

4. РЕШЕНИЯ В МОДЕЛЯХ FENE-CR И FENE-CD

Рассмотрим модели полимеров FENE-CR [21] и FENE-CD [18], которые соответствуют определённым наборам функций.

Для модели полимера FENE-CR [21] имеем

$$\mathcal{Z} = 1, \quad \mathcal{F}(c_1) = \mathcal{G}(c_1) = \frac{1}{1 - c_1/L^2}, \quad (4.1)$$

где $L^2 \gg 1$ — максимальная длина цепи, так что $c_1/L^2 < 1$. Обозначим

$$g(c_1) = \frac{-1}{\lambda} \mathcal{F}(c_1) = \frac{-1}{\lambda(1 - c_1/L^2)}. \quad (4.2)$$

Для модели полимера FENE-CD [18] имеем

$$\mathcal{Z} = 1 - \kappa + \kappa\sqrt{c_1/3}, \quad \mathcal{F}(c_1) = \mathcal{G}(c_1) = \frac{1}{1 - c_1/L^2}, \quad (4.3)$$

Соответствующая функция выглядит следующим образом:

$$g(c_1) = \frac{-\mathcal{F}(c_1)}{\lambda \mathcal{Z}(c_1)} = \frac{-1}{\lambda(1 - c_1/L^2)(1 - \kappa + \kappa\sqrt{c_1/3})}, \quad (4.4)$$

где, как и прежде, $c_1/L^2 < 1$, а κ — положительный параметр.

Переопределённая система уравнений (3.2) принимает единообразный вид для обеих моделей FENE:

$$\begin{cases} L_v \mathbf{C} = g(c_1)(\mathbf{C} - \mathbf{I}), \\ \mathbf{C}^3 - c_1 \mathbf{C}^2 + c_2 \mathbf{C} - c_3 \mathbf{I} = 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Применим производную Ли L_v к уравнению Гамильтона—Кэли, второму уравнению системы (4.5). Подставим значение производной Ли L_v из первого уравнения системы (4.5) в полученное дифференциальное уравнение. Фундаментальным аспектом этого алгоритма является то, что производная Ли $L_v \mathbf{C}$ является тензором того же типа, что и сам тензор \mathbf{C} . Это отличает производную Ли как от частных, так и от ковариантных производных, которые не сохраняют тип тензора при действии на него. Для краткости обозначим $\mathbf{C}' = L_v \mathbf{C}$. Применение производной Ли к уравнению Гамильтона—Кэли даёт дифференциальное уравнение:

$$3\mathbf{C}^2 \mathbf{C}' - c_1 \mathbf{C} \mathbf{C}' + c_2 \mathbf{C}' - c_1 \mathbf{C}^2 + c_2' \mathbf{C} - c_3' \mathbf{I} = 0. \quad (4.6)$$

При выводе уравнения (4.6) учтено, что \mathbf{C}' коммутирует со степенями \mathbf{C} , поскольку \mathbf{C}' выражается полиномом от \mathbf{C} (см. [2]). Мы предполагаем, что параметр группы, соответствующий производной Ли, каноничен, так что $L_v \mathbf{I} = 0$ (см. [5]).

Подставляя выражение $\mathbf{C}' = L_v \mathbf{C}$ из (4.5) в уравнение (4.6), получаем алгебраическое уравнение третьей степени для тензора \mathbf{C} :

$$3g\mathbf{C}^3 - (c_1' + 3g + 2gc_1)\mathbf{C}^2 + (c_2' + 2gc_1 + gc_2)\mathbf{C} - (c_3' + gc_2)\mathbf{I} = 0. \quad (4.7)$$

Предположим, что тензор \mathbf{C} является тензором общего положения, т. е. единственным алгебраическим уравнением третьей степени для \mathbf{C} является уравнение Гамильтона—Кэли. Полагая $g \neq 0$, получаем, что уравнение (4.7) совпадает с уравнением Гамильтона—Кэли для тензора \mathbf{C} с точностью до мультипликативного множителя. Записывая условия пропорциональности соответствующих коэффициентов, приходим к следующей системе дифференциальных уравнений для инвариантов:

$$\begin{cases} c_1' = g(c_1 - 3), \\ c_2' = 2g(c_2 - c_1), \\ c_3' = g(3c_3 - c_2), \end{cases} \quad (4.8)$$

где $g = g(c_1)$ имеет вид (4.2) или (4.4). Система (4.8) представляет собой условия совместности переопределённой системы (4.5). Действительно, из системы (4.8) все функции c_i ($i = 1, 2, 3$) однозначно определяются по заданным начальным условиям. Более того, для них будут получены явные формулы. Таким образом, определяются значения функций, при которых переопределённая система (4.5) совместна. Дифференциальные следствия более высокого порядка не порождают новых условий совместности, поскольку объединение систем (4.5) и (4.8) совместно.

Теорема 4.1. Система уравнений (4.8) представляет собой условия совместности переопределённой системы (4.5). Система (4.5), (4.8) находится в инволюции, то есть не порождает новых условий совместности.

После выбора канонического параметра, описанного в разделе 2, система (4.8) преобразуется в систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно функций $c_i = c_i(\tau, \mathbf{X})$ ($i = 1, 2, 3$) в референтном пространстве W_0 : $L_v = \partial_\tau$

Система (4.8) интегрируется в квадратурах. В первом уравнении системы (4.8) переменные разделяются, и решение имеет вид

$$\int \frac{(c_1 - L^2)}{c_1 - 3} dc_1 = \frac{L^2}{\lambda}(\tau - \tau_0),$$

где τ_0 — константа интегрирования. Предположим, что начальные условия при $\tau = \tau_0$ соответствуют значению $\mathbf{C} = \mathbf{I}$, так что $c_1 - 3 \neq 0$ при $\tau > \tau_0$. Интеграл в левой части этого уравнения вычисляется в элементарных функциях. Для модели FENE-CR решение определяется по формуле

$$(3 - L^2) \ln |c_1 - 3| + c_1 = \frac{L^2}{\lambda}(\tau - \tau_0), \quad (4.9)$$

где c_1 определяется как неявная функция переменной τ . Функция $c_1 = c_1(\tau)$ называется *функцией Ламберта* [31].

Для модели FENE-CD решение дается более громоздкой формулой:

$$(1 - \varkappa) [c_1 + (3 - L^2) \ln |c_1 - 3|] + \frac{\varkappa}{\sqrt{3}} \left[\frac{2c_1 \sqrt{c_1}}{3} + 2(3 - L^2) \sqrt{c_1} + (3 - L^2) \ln \left| \frac{\sqrt{c_1} - \sqrt{3}}{\sqrt{c_1} + \sqrt{3}} \right| \right] = \frac{L^2}{\lambda}(\tau - \tau_0). \quad (4.10)$$

Поскольку переменная c_1 не может быть явно выражена как функция τ из уравнений (4.9) и (4.10), оставшиеся два уравнения системы (4.8) интегрируются путём нахождения инвариантов c_2 и c_3 как функций инварианта c_1 .

Разделив второе и третье уравнения системы (4.8) на первое, получим линейную систему относительно функций c_α ($\alpha = 2, 3$):

$$\begin{cases} \frac{dc_2}{dc_1} = \frac{2(c_2 - c_1)}{c_1 - 3}, \\ \frac{dc_3}{dc_1} = \frac{3c_3 - c_2}{c_1 - 3}. \end{cases} \quad (4.11)$$

Система (4.11) интегрируема в элементарных функциях.

Теорема 4.2. *Инварианты тензора конформации \mathbf{C} в модели FENE-CR (4.1), (4.2) как функции параметра τ вдоль траектории жидкой частицы определяются следующей системой неявных уравнений для $c_1 = c_1(\tau)$, $c_2 = c_2(c_1)$, $c_3 = c_3(c_1)$:*

$$\begin{cases} (3 - L^2) \ln |c_1 - 3| + c_1 = \frac{L^2}{\lambda}(\tau - \tau_0), \\ c_2 = \alpha_1(c_1 - 3)^2 + 2c_1 - 3, \\ c_3 = \alpha_2(c_1 - 3)^3 + \alpha_1(c_1 - 3)^2 + c_1 - 2, \end{cases} \quad (4.12)$$

где $\tau_0, \alpha_1, \alpha_2$ — произвольные константы относительно параметра τ . При этом инварианты, определяемые формулами (4.12), зависят от координат \mathbf{X} референтного пространства W_0 как от параметров.

Инварианты тензора конформации \mathbf{C} в модели FENE-CD (4.3), (4.4) как функции параметра τ вдоль траектории жидкой частицы определяются следующей системой неявных уравнений $c_1 = c_1(\tau)$, $c_2 = c_2(c_1)$, $c_3 = c_3(c_1)$:

$$\begin{cases} (1 - \varkappa) [c_1 + (3 - L^2) \ln |c_1 - 3|] + \frac{\varkappa}{\sqrt{3}} \left[\frac{2c_1 \sqrt{c_1}}{3} + 2(3 - L^2) \sqrt{c_1} + (3 - L^2) \ln \left| \frac{\sqrt{c_1} - \sqrt{3}}{\sqrt{c_1} + \sqrt{3}} \right| \right] = \frac{L^2}{\lambda}(\tau - \tau_0), \\ c_2 = \alpha_1(c_1 - 3)^2 + 2c_1 - 3, \\ c_3 = \alpha_2(c_1 - 3)^3 + \alpha_1(c_1 - 3)^2 + c_1 - 2, \end{cases} \quad (4.13)$$

где $\tau_0, \alpha_1, \alpha_2$ — произвольные константы. При этом инварианты, определяемые формулами (4.13), зависят от координат \mathbf{X} референтного пространства \mathbf{W}_0 как от параметров.

Формулы (4.12), (4.13) для инвариантов тензора конформации \mathbf{C} дают важную информацию о поведении полимерных структур в растворе. Они характеризуют динамику этих структур вдоль траектории движения частиц жидкости. В физике полимеров инварианты c_i интерпретируются как геометрические параметры полимерной структуры: инвариант c_1 характеризует её растяжимость, c_2 — площадь, а c_3 — объём. Качественное поведение этих функций в клинически важной задаче эмболизации патологических сосудистых образований [2] характеризует эффективность герметизации и окклюзии дефектного сосудистого узла. Отметим, что формулы, выражающие инварианты $c_\alpha = c_\alpha(c_1)$, $\alpha = 2, 3$ для моделей (4.1), (4.3), совпадают. Модели различаются зависимостью $c_1 = c_1(\tau)$. В следующем разделе работы исследуется качественное поведение динамики инвариантов c_i ($i = 1, 2, 3$) для модели FENE-CR.

5. КАЧЕСТВЕННОЕ ПОВЕДЕНИЕ ИНВАРИАНТОВ ТЕНЗОРА КОНФОРМАЦИИ В МОДЕЛИ FENE-CR

Многозначная функция $c_1 = c_1(\tau)$ имеет три ветви (рис. 1), которые можно выразить через главную ветвь и ветвь -1 функции Ламберта $W: z = W(ze^z)$. Термины, характеризующие ветви функции, взяты из [31].

$$c_1(\tau) = \begin{cases} (3 - L^2) W_0 \left(-\frac{\exp\left(\frac{-l(\tau-\tau_0)+3}{L^2-3}\right)}{L^2-3} \right) + 3, \\ (3 - L^2) W_0 \left(\frac{\exp\left(\frac{-l(\tau-\tau_0)+3}{L^2-3}\right)}{L^2-3} \right) + 3, \\ (3 - L^2) W_{-1} \left(\frac{\exp\left(\frac{-l(\tau-\tau_0)+3}{L^2-3}\right)}{L^2-3} \right) + 3, \quad L^2 > 3, \\ (3 - L^2) W_{-1} \left(-\frac{\exp\left(\frac{-l(\tau-\tau_0)+3}{L^2-3}\right)}{L^2-3} \right) + 3, \quad L^2 < 3, \end{cases} \quad (5.1)$$

где $l = \frac{L^2}{\lambda}$. Эти ветви обозначены римскими цифрами I, II, III на рис. 1.

При $L^2 < 3$ ветвь I является ветвью -1 функции Ламберта, её значения лежат в интервале $(0; L^2)$, она монотонно возрастает и имеет асимптоту при $t \rightarrow -\infty$ с наклоном $\arctg(l)$.

Ветвь II является главной ветвью функции Ламберта, её значения лежат в интервале $(L^2; 3)$, она монотонно убывает и $\lim_{\tau \rightarrow -\infty} c_1(\tau) = 3$.

Ветвь III — главная ветвь функции Ламберта, соответствующая выражению под модулем с обратным знаком. Её значения лежат на луче $(3; +\infty)$, функция монотонно возрастает и имеет асимптоту при $t \rightarrow +\infty$ с наклоном, равным $\arctg(l)$.

При $L^2 > 3$ ветвь I является главной ветвью функции Ламберта, её значения лежат в интервале $(0; 3)$, она монотонно возрастает, $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} c_1(\tau) = 3$, и имеет асимптоту при $t \rightarrow -\infty$ с углом наклона, равным $\arctg(l)$.

Ветвь II также является главной ветвью функции Ламберта и отличается от ветви I выбором знака в выражении под модулем. Её значения лежат в интервале $(3; L^2)$, она монотонно убывает и $\lim_{\tau \rightarrow +\infty} c_1(\tau) = 3$.

Ветвь III является ветвью -1 функции Ламберта, и её значения лежат на луче $(L^2; +\infty)$, она монотонно возрастает и имеет асимптоту при $t \rightarrow +\infty$ с наклоном $\arctg(l)$.

Таким образом, функция Ламберта (5.1) имеет два определяющих параметра. Параметр L^2 определяет границу между главной ветвью и ветвью -1 W -функции Ламберта, а параметр l определяет тангенс угла наклона асимптот ветвей I и III. При L^2 , близких к 3, ветви приближаются к прямым $c_1 = 3$ и $c_1 = l(\tau - \tau_0)$. Функция (5.1) многозначна в соответствующей области.

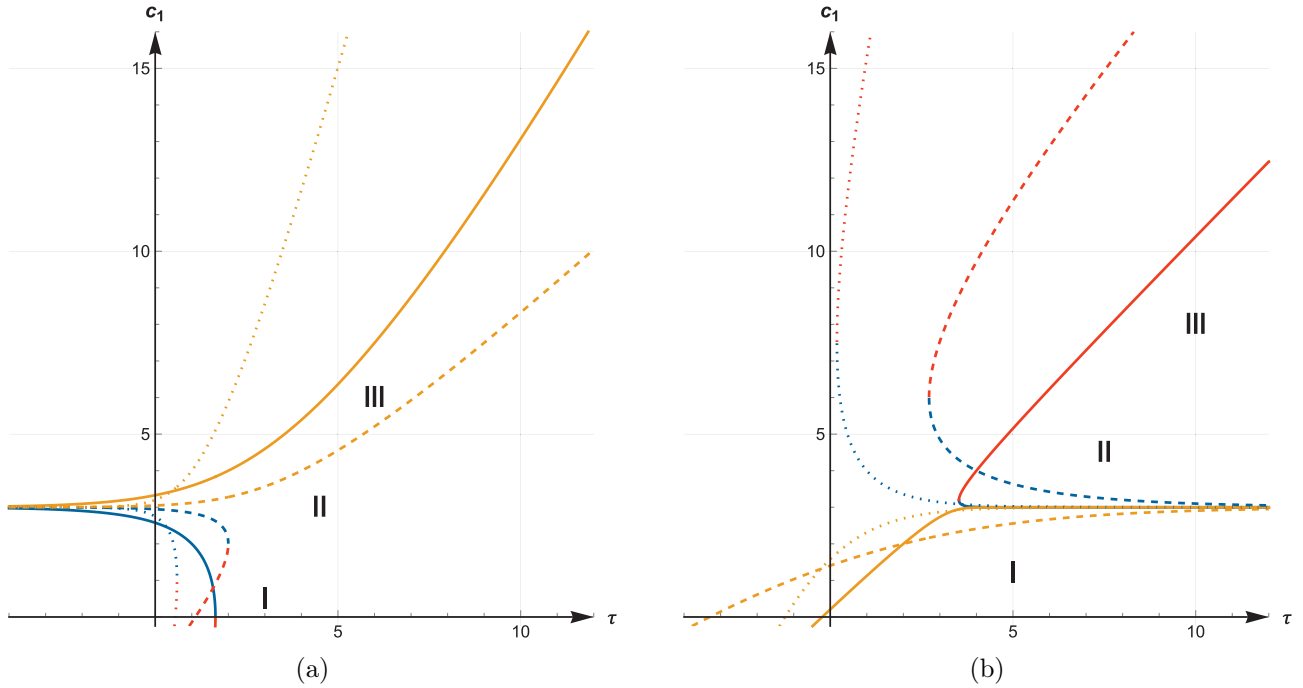


Рис. 1. График функции $c_1(\tau)$: (a) для $L^2 < 3$, (b) для $L^2 > 3$. Разные ветви обозначены разными цветами, кривые для разных параметров l и L^2 показаны разной штриховкой.

FIG. 1. Graph of the function $c_1(\tau)$: (a) for $L^2 < 3$, (b) for $L^2 > 3$. Different branches are marked with different colors, curves for different parameters l and L^2 are separated by different shading.

6. ДИНАМИКА ИНВАРИАНТОВ В ФАЗОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{R}^3(c_1, c_2, c_3)$

Динамическая система (4.8) в терминах переменных (c_i) принимает вид

$$\begin{cases} (c_1 - L^2) \frac{dc_1}{d\tau} = l(c_1 - 3), \\ (c_1 - L^2) \frac{dc_2}{d\tau} = 2l(c_2 - c_1), \\ (c_1 - L^2) \frac{dc_3}{d\tau} = l(3c_3 - c_2), \end{cases} \quad (6.1)$$

где явно выделены определяющие параметры L^2 и l .

Система (6.1) имеет две особые точки, лежащие на плоскостях $c_1 = 3$ и $c_1 = L^2$. Первая из них — регулярная особая точка. Плоскость $c_1 = L^2$ является особым многообразием для системы (6.1), поскольку производные всех инвариантов $\frac{dc_i}{d\tau} \rightarrow \infty$ при $c_1 \rightarrow L^2$.

Исследуем поведение решений $c_i = c_i(\tau)$ системы (6.1) вблизи этих особенностей.

Особая точка на плоскости $c_1 = 3$ имеет координаты $c_1 = 3, c_2 = 3, c_3 = 1$. Она является узлом, отталкивающим при $L^2 < 3$ и притягивающим при $L^2 > 3$.

Плоскость $c_1 = L^2$ является особым многообразием всей системы. Поведение траекторий динамической системы (6.1) на плоскости $c_1 = L^2$ удобно понять, перейдя к новым переменным: $(c_1, c_2, c_3) \rightarrow (y_1, y_2, y_3)$, по формулам

$$\begin{cases} y_1 = c_1 - 3, \\ y_2 = c_2 - 2c_1 + 3, \\ y_3 = c_3 - c_2 + c_1 - 1. \end{cases} \quad (6.2)$$

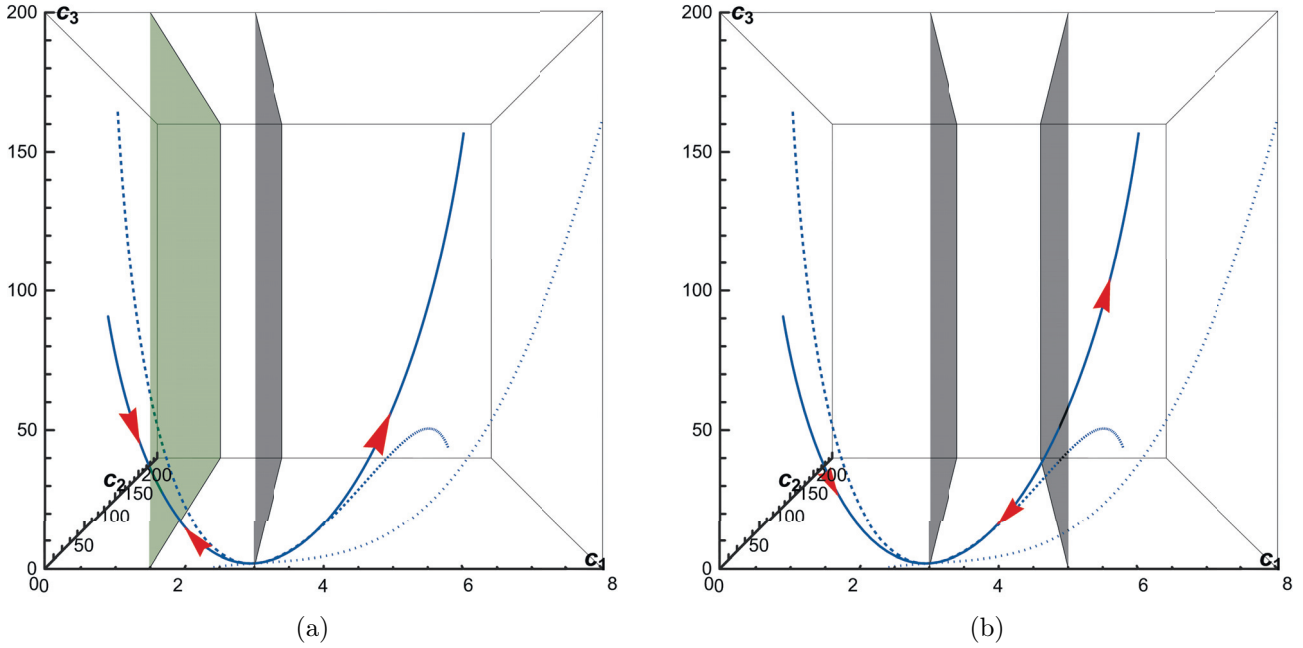


Рис. 2. Поведение траекторий динамической системы: (a) при $L^2 < 3$, (b) при $L^2 > 3$, плоскости $c_1 = 3$ и $c_1 = L^2$. Кривые для разных начальных данных показаны разной штриховкой.

FIG. 2. Behavior of the trajectories of the dynamic system: (a) for $L^2 < 3$, (b) for $L^2 > 3$, planes $c_1 = 3$ and $c_1 = L^2$. Curves for different initial data are separated by different shading.

Это соответствует переходу от тензора \mathbf{C} к тензору $\mathbf{Y} = \mathbf{C} - \mathbf{I}$. В этих переменных y_1 по-прежнему определяет W -функцию Ламберта, а формулы для c_2 и c_3 принимают особенно простой вид:

$$y_2 = \alpha_1(y_1)^2, \quad y_3 = \alpha_2(y_1)^3, \quad (6.3)$$

где α_1 и α_2 — функции переменных X . Следовательно, уравнение

$$y_2^3 = \frac{\alpha_1^3}{\alpha_2^2} y_3^2 \quad (6.4)$$

определяет полукубическую параболу Нейла, особенность типа «клюв», в плоскости $y_1 = \text{const}$, т. е. при фиксированном значении независимой переменной. Траектории приближаются к плоскости $c_1 = L^2$, «протыкая» её в точке, в которой они имеют бесконечные производные разных знаков по обе стороны от плоскости.

Поведение траекторий системы (6.1) при различных значениях параметра L^2 показано на рис. 2. Отметим, что уравнение (6.4) определяет интеграл динамической системы (6.1).

Функции $y_i = y_i(\tau)$ ($i = 1, 2, 3$) (6.1), (6.2) определяют кривую Σ в пространстве $\mathbb{R}^3(\mathbf{y})$, кривизна k и кручение κ которой задаются формулами

$$k = 2\sqrt{\frac{9\alpha_2^2 y_1^2 + \alpha_1^2(1 + 9\alpha_2^2 y_1^4)}{(1 + 4\alpha_1^2 y_1^2 + 9\alpha_2^2 y_1^4)^3}}, \quad (6.5)$$

$$\kappa = \frac{3\alpha_1\alpha_2}{\alpha_1^2 + 9\alpha_2^2 y_1^2 + 9\alpha_1^2 \alpha_2^2 y_1^4}. \quad (6.6)$$

Приведём расчёты, подтверждающие то, что точка $c_1 = 3$, $c_2 = 3$, $c_3 = 1$ является особой точкой типа «узел» для системы (6.1). Линеаризуем систему, обозначив правые части через F_i :

$$\begin{cases} \frac{dc_1}{d\tau} = \frac{l(c_1 - 3)}{(c_1 - L^2)} = F_1, \\ \frac{dc_2}{d\tau} = \frac{2l(c_2 - c_1)}{(c_1 - L^2)} = F_2, \\ \frac{dc_3}{d\tau} = \frac{l(3c_3 - c_2)}{(c_1 - L^2)} = F_3. \end{cases} \quad (6.7)$$

Вычислим частные производные $\frac{\partial F_i}{\partial c_j}$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_1}{\partial c_1} &= \frac{l(3 - L^2)}{(c_1 - L^2)^2}, & \frac{\partial F_1}{\partial c_2} &= \frac{\partial F_1}{\partial c_3} = 0, \\ \frac{\partial F_2}{\partial c_1} &= \frac{2l(L^2 - c_2)}{(c_1 - L^2)^2}, & \frac{\partial F_2}{\partial c_2} &= \frac{2l}{c_1 - L^2}, & \frac{\partial F_2}{\partial c_3} &= 0, \\ \frac{\partial F_3}{\partial c_1} &= \frac{l(c_2 - 3c_3)}{(c_1 - L^2)^2}, & \frac{\partial F_3}{\partial c_2} &= \frac{-l}{c_1 - L^2}, & \frac{\partial F_3}{\partial c_3} &= \frac{3l}{c_1 - L^2}. \end{aligned} \quad (6.8)$$

Тогда линеаризация имеет вид:

$$dF = l \begin{pmatrix} \frac{3 - L^2}{(c_1 - L^2)^2} & 0 & 0 \\ \frac{2(L^2 - c_2)}{(c_1 - L^2)^2} & \frac{2}{c_1 - L^2} & 0 \\ \frac{(c_2 - 3c_3)}{(c_1 - L^2)^2} & \frac{-1}{c_1 - L^2} & \frac{3}{c_1 - L^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dc_1 \\ dc_2 \\ dc_3 \end{pmatrix}. \quad (6.9)$$

В особой точке $(3, 3, 1)$ собственные значения являются диагональными элементами матрицы (6.9):

$$dF|_{(3,3,1)} = l \begin{pmatrix} \frac{1}{3 - L^2} & 0 & 0 \\ \frac{-2}{3 - L^2} & \frac{2}{3 - L^2} & 0 \\ 0 & \frac{-1}{3 - L^2} & \frac{3}{3 - L^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} dc_1 \\ dc_2 \\ dc_3 \end{pmatrix}, \quad (6.10)$$

$$\mu_1 = \frac{l}{3/L^2 - 1}, \quad \mu_2 = \frac{2l}{3/L^2 - 1}, \quad \mu_3 = \frac{3l}{3/L^2 - 1}. \quad (6.11)$$

Поскольку $l > 0$, то особая точка $c_1 = 3$, $c_2 = 3$, $c_3 = 1$ является притягивающим узлом при $L^2 > 3$ и отталкивающим узлом при $L^2 < 3$.

Проведённый в разделах 5 и 6 анализ показывает, что формулы (4.12), определяющие решение задачи динамики конформационных тензорных инвариантов, обуславливают их содержательное поведение, не противоречащее их физическому смыслу.

Физическая интерпретация полученных решений предполагается предметом отдельной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Блохин А. М., Ткачёв Д. Л. Неустойчивость по Ляпунову стационарных течений полимерной жидкости в канале с перфорированными стенками // Мат. сб. — 2022. — 213, № 3. — С. 3–20. — DOI: [10.4213/sm9507](https://doi.org/10.4213/sm9507).
2. Гантмахер Ф. Р. Теория матриц. — М.: Наука, 1986.
3. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теоретическая физика. Т. 6. Гидродинамика. — М.: Наука, 2010.
4. Ляпидевский В. Ю., Неверов В. В., Кармушин С. Р. Гиперболические модели нестационарных течений вязкоупругой среды // Прикл. мех. техн. физ. — 2024. — 65, № 5. — С. 117–129. — DOI: [10.15372/PMTF202415483](https://doi.org/10.15372/PMTF202415483).
5. Овсянников Л. В. Аналитические группы. — Новосибирск: НГУ, 1972.
6. Петрова А. Г., Пухначёв В. В., Фроловская О. А. Точные решения уравнений жидкости второго порядка // Тр. МИАН. — 2023. — 322. — С. 180–194. — DOI: [10.4213/tm4336](https://doi.org/10.4213/tm4336).

7. Покровский В. Н. Статистическая механика разбавленных суспензий. — М.: Наука, 1978.
8. Покровский В. Н. Динамика слабо связанных линейных макромолекул// Усп. физ. наук. — 1992. — 162, № 5. — С. 87–121. — DOI: [10.3367/UFNr.0162.199205b.0087](https://doi.org/10.3367/UFNr.0162.199205b.0087).
9. Семисалов Б. В. О точных решениях пуазейлевского типа для течений вязкоупругой полимерной жидкости в цилиндрическом канале// Прикл. мех. техн. физ. — 2023. — 64, № 4. — С. 139–151. — DOI: [10.15372/PMTF202315255](https://doi.org/10.15372/PMTF202315255).
10. Чупахин А. П. Интегрирование уравнений для инвариантов тензора конформации в моделях полимеров FENE// Тез. конф. «Уравнения с частными производными и их приложения», Новосибирск, Инст. мат. им. С. Л. Соболева СО РАН, 13–15 октября 2025.
11. Arnold V. I., Khesin B. A. Topological methods in hydrodynamics. — New York: Springer, 1998.
12. Ashley B. S., Rryer T. Discretisation of an Oldroyd-B viscoelastic fluid flow using a Lie derivative formulation// Adv. Comp. Math. — 2025. — 51. — 1. — DOI: [10.1007/s10444-024-10211-x](https://doi.org/10.1007/s10444-024-10211-x).
13. Astarita G., Marrucci G. Principles of non-Newtonian fluid mechanics. — New York: McGraw-Hill, 1974.
14. Benzi R., Ching E. S. C. Polymers in fluid flows// Ann. Rev. Condens. Matter Phys. — 2018. — 9. — С. 163–181. — DOI: [10.1146/annurev-conmatphys-033117-053913](https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-033117-053913).
15. Bird R. B., Armstrong R. C., Hassager O. Dynamics of polymeric liquids. Vol. 1: Fluid mechanics. — New York: John Wiley & Sons, 1977.
16. Boyko E., Stone H. A. Perspective on the description of viscoelastic flows via continuum elastic dumbbell models// J. Eng. Math. — 2024. — 147. — 5. — DOI: [10.1007/s10665-024-10374-y](https://doi.org/10.1007/s10665-024-10374-y).
17. De Gennes P. G. Coil-stretch transition of dilute flexible polymers under ultrahigh velocity gradients// J. Chem. Phys. — 1974. — 60. — С. 5030–5042. — DOI: [10.1063/1.1681018](https://doi.org/10.1063/1.1681018).
18. Fuller G. G., Leal L. G. The effects of conformation-dependent friction and internal viscosity on the dynamics of the nonlinear dumbbell model for a dilute polymer solution// J. Non-Newtonian Fluid Mech. — 1981. — 8, № 3-4. — С. 271–310. — DOI: [10.1016/0377-0257\(81\)80026-2](https://doi.org/10.1016/0377-0257(81)80026-2).
19. Godunov S. K., Romenskii E. Elements of continuum mechanics and conservation laws. — New York: Springer, 2003.
20. Gouin H. Remarks on the Lie derivative in fluid mechanics// J. Non-Newtonian Fluid Mech. — 2023. — 150. — 104347. — DOI: [10.1016/j.jnnfm.2022.104347](https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2022.104347).
21. Hinch E. J. Mechanical models of dilute polymer solutions in strong flows// Phys. Fluids. — 1997. — 20. — С. S22–S30. — DOI: [10.1063/1.861735](https://doi.org/10.1063/1.861735).
22. Hinch J., Harlen O. Oldroyd B, and not A?// J. Non-Newtonian Fluid Mech. — 2021. — 298. — 104668. — DOI: [10.1016/j.jnnfm.2021.104668](https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2021.104668).
23. Khesin B., Wendt R. The geometry of infinite-dimensional groups. — Berlin—Heidelberg: Springer, 2009.
24. Korobeinikov S. N. Family of continuous strain-consistent convective tensor rates and its application in Hooke-like isotropic hyperelasticity// J. Elasticity. — 2021. — 143, № 1. — С. 147–185. — DOI: [10.1007/s10659-020-09808-2](https://doi.org/10.1007/s10659-020-09808-2).
25. Kuianova I., Chupakhin A., Besov A., Gorbatykh A., Kislitsin D., Orlov K., Parshin D. Rheological properties of non-adhesive embolizing compounds — the key to fine-tuning embolization process-modeling in endovascular surgery// Polymers. — 2023. — 15, № 4. — 1060. — DOI: [10.3390/polym15041060](https://doi.org/10.3390/polym15041060).
26. Larson R. G. Constitutive equations for polymer melts and solutions. — Guilford: Butterworths, 1988.
27. Marsden J. F., Hughes T. J. R. Mathematical foundations of elasticity. — New York: Dover Publ., 1983.
28. Oldroyd J. G. On the formulation of rheological equations of state// Proc. Roy. Soc. London Ser. A. — 1950. — 200. — С. 523–541. — DOI: [10.1098/rspa.1950.0035](https://doi.org/10.1098/rspa.1950.0035).
29. Singer I. M., Standberg J. A. The infinite groups of Lie and Cartan. Part I (The transitive groups)// J. Anal. Math. — 1965. — 15. — С. 1–114. — DOI: [10.1007/bf02787690](https://doi.org/10.1007/bf02787690).
30. Stone H. A., Shelley M. J., Rigo P. A note about convected time derivatives for flows of complex fluids// Soft Matter. — 2023. — 19, № 28. — С. 5353–5359. — DOI: [10.1039/d3sm00497j](https://doi.org/10.1039/d3sm00497j).
31. Wolfram Research, Inc. Mathematica. Version 13.1. — Champaign: Wolfram Research, Inc., 2022.
32. Yano K. The theory of Lie derivatives and its applications. — Amsterdam: North-Holland, 1957.
33. Zvyagin V. G., Zvyagin A. V., Orlov V. P., Turbin M. V. Weak solvability of the initial boundary value problem for the Voigt model with a smoothed Jaumann time derivative taking into account the memory of fluid motion// Lobachevskii J. Math. — 2025. — 46, № 3. — С. 1183–1206. — DOI: [10.1134/S1995080225605168](https://doi.org/10.1134/S1995080225605168).

А. П. Чупахин

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
 E-mail: chupakhin@hydro.nsc.ru, РИНЦ SPIN-код: 7023-4994, РИНЦ AuthorID: 6500, ResearcherID: AIA-3732-2022, Scopus: 55910100800, ORCID: 0000-0002-9492-5527

Е. С. Стецяк

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, Новосибирск, Россия
 Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
 Сколковский институт науки и технологий, Москва, Россия
 E-mail: stetsyak.e.s@hydro.nsc.ru

Д. С. Чутков

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия
 E-mail: d.chutkov@g.nsu.ru

DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-686-700](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-686-700)
 EDN: [MKADHS](#)

UDC 514.8 + 532.5.01
Research article

Dynamics of the conformation tensor in viscoelastic FENE polymer models

A. P. Chupakhin^{1,2}, E. S. Stetsyak^{1,2,3}, and D. S. Chutkov²

¹*Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia*

²*Novosibirsk National Research State University, Novosibirsk, Russia*

³*Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, Russia*

Abstract. In this work, the equations for the dynamics of the invariants of the conformational tensor for FENE polymer solution models are derived and integrated. Explicit formulas for the invariants as functions of the time parameter along the trajectory of fluid particles are obtained. The invariants are represented as functions of the Lambert function. A description of the qualitative behavior of the invariants under different regimes is given.

Keywords: FENE polymer equations, Lie derivative, invariants of the conformational tensor, integration of equations.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: A. P. Chupakhin, E. S. Stetsyak, D. S. Chutkov, “Dynamics of the conformation tensor in viscoelastic FENE polymer models,” *Contemporary Mathematics. Fundamental Directions*, 2025, Vol. 71, No. 4, 686–700, DOI: [10.22363/2413-3639-2025-71-4-686-700](https://doi.org/10.22363/2413-3639-2025-71-4-686-700).

REFERENCES

1. A. M. Blokhin and D. L. Tkachev, “Neustoychivost’ po Lyapunovu statsionarnykh techeniy polimernoy zhidkosti v kanale s perforirovannymi stenkami” [Lyapunov instability of steady flows of a polymer fluid in a channel with perforated walls], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2022, **213**, No. 3, 3–20, DOI: [10.4213/sm9507](https://doi.org/10.4213/sm9507) (in Russian).
2. F. R. Gantmakher, *Teoriya Matrits* [Matrix Theory], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
3. L. D. Landau and E. M. Lifshits, *Teoreticheskaya Fizika. T. 6. Gidrodinamika* [Theoretical Physics. Vol. 6. Hydrodynamics], Nauka, Moscow, 2010 (in Russian).

4. V. Yu. Lyapidevskiy, V. V. Neverov, and S. R. Karmushin, “Giperbolicheskie modeli nestatsionarnykh techeniy vyazkouprugoy sredy” [Hyperbolic models of unsteady flows of viscoelastic media], *Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.* [Appl. Mech. Tech. Phys.], 2024, **65**, No. 5, 117–129, DOI: [10.15372/PMTF202415483](https://doi.org/10.15372/PMTF202415483) (in Russian).
5. L. V. Ovsyannikov, *Analiticheskie Gruppy* [Analytical Groups], NGU, Novosibirsk, 1972 (in Russian).
6. A. G. Petrova, V. V. Pukhnachev, and O. A. Frolovskaya, “Tochnye resheniya uravneniy zhidkosti vtorogo poryadka” [Exact solutions of second-order fluid equations], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2023, **322**, 180–194, DOI: [10.4213/tm4336](https://doi.org/10.4213/tm4336) (in Russian).
7. V. N. Pokrovskiy, *Statisticheskaya Mekhanika Razbavlennykh Suspenziy* [Statistical Mechanics of Dilute Suspensions], Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).
8. V. N. Pokrovskiy, “Dinamika slabo svyazannykh lineynykh makromolekul” [Dynamics of weakly bound linear macromolecules], *Usp. Fiz. Nauk* [Progr. Phys. Sci.], 1992, **162**, No. 5, 87–121, DOI: [10.3367/UFNr.0162.199205b.0087](https://doi.org/10.3367/UFNr.0162.199205b.0087) (in Russian).
9. B. V. Semisalov, “O tochnykh resheniyakh puazeylevskogo tipa dlya techeniy vyazkouprugoy polimernoy zhidkosti v tsilindricheskom kanale” [On exact Poiseuille-type solutions for viscoelastic polymer fluid flows in a cylindrical channel], *Prikl. Mekh. Tekhn. Fiz.* [Appl. Mech. Tech. Phys.], 2023, **64**, No. 4, 139–151, DOI: [10.15372/PMTF202315255](https://doi.org/10.15372/PMTF202315255) (in Russian).
10. A. P. Chupakhin, “Integrirovaniye uravneniy dlya invariantov tenzora konformatsii v modelyakh polimerov FENE” [Integration of equations for invariants of the conformation tensor in FENE polymer models], *Abstr. Conf. Partial Differential Equations and Their Applications*, Novosibirsk, Sobolev Inst. Math. SB RAS, Oct. 13–15, 2025.
11. V. I. Arnold and B. A. Khesin, *Topological methods in hydrodynamics*, Springer, New York, 1998.
12. B. S. Ashley and T. Rryer, “Discretisation of an Oldroyd-B viscoelastic fluid flow using a Lie derivative formulation,” *Adv. Comp. Math.*, 2025, **51**, 1, DOI: [10.1007/s10444-024-10211-x](https://doi.org/10.1007/s10444-024-10211-x).
13. G. Astarita and G. Marrucci, *Principles of non-Newtonian fluid mechanics*, McGraw–Hill, New York, 1974.
14. R. Benzi and E. S. C. Ching, “Polymers in fluid flows,” *Ann. Rev. Condens. Matter Phys.*, 2018, **9**, 163–181, DOI: [10.1146/annurev-conmatphys-033117-053913](https://doi.org/10.1146/annurev-conmatphys-033117-053913).
15. R. B. Bird, R. C. Armstrong, and O. Hassager, *Dynamics of polymeric liquids. Vol. 1: Fluid mechanics*, John Wiley & Sons, New York, 1977.
16. E. Boyko and H. A. Stone, “Perspective on the description of viscoelastic flows via continuum elastic dumbbell models,” *J. Eng. Math.*, 2024, **147**, 5, DOI: [10.1007/s10665-024-10374-y](https://doi.org/10.1007/s10665-024-10374-y).
17. P. G. De Gennes, “Coil–stretch transition of dilute flexible polymers under ultrahigh velocity gradients,” *J. Chem. Phys.*, 1974, **60**, 5030–5042, DOI: [10.1063/1.1681018](https://doi.org/10.1063/1.1681018).
18. G. G. Fuller and L. G. Leal, “The effects of conformation-dependent friction and internal viscosity on the dynamics of the nonlinear dumbbell model for a dilute polymer solution,” *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 1981, **8**, No. 3-4, 271–310, DOI: [10.1016/0377-0257\(81\)80026-2](https://doi.org/10.1016/0377-0257(81)80026-2).
19. S. K. Godunov and E. Romenskii, *Elements of continuum mechanics and conservation laws*, Springer, New York, 2003.
20. H. Gouin, “Remarks on the Lie derivative in fluid mechanics,” *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 2023, **150**, 104347, DOI: [10.1016/j.jnonlinmec.2022.104347](https://doi.org/10.1016/j.jnonlinmec.2022.104347).
21. E. J. Hinch, “Mechanical models of dilute polymer solutions in strong flows,” *Phys. Fluids*, 1997, **20**, S22–S30, DOI: [10.1063/1.861735](https://doi.org/10.1063/1.861735).
22. J. Hinch and O. Harlen, “Oldroyd B, and not A?,” *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 2021, **298**, 104668, DOI: [10.1016/j.jnnfm.2021.104668](https://doi.org/10.1016/j.jnnfm.2021.104668).
23. B. Khesin and R. Wendt, *The geometry of infinite-dimensional groups*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2009.
24. S. N. Korobeinikov, “Family of continuous strain-consistent convective tensor rates and its application in Hooke-like isotropic hyperelasticity,” *J. Elasticity*, 2021, **143**, No. 1, 147–185, DOI: [10.1007/s10659-020-09808-2](https://doi.org/10.1007/s10659-020-09808-2).
25. I. Kuianova, A. Chupakhin, A. Besov, A. Gorbatykh, D. Kislitsin, K. Orlov, and D. Parshin, “Rheological properties of non-adhesive embolizing compounds — the key to fine-tuning embolization process-modeling in endovascular surgery,” *Polymers*, 2023, **15**, No. 4, 1060, DOI: [10.3390/polym15041060](https://doi.org/10.3390/polym15041060).
26. R. G. Larson, *Constitutive equations for polymer melts and solutions*, Butterworths, Guilford, 1988.
27. J. F. Marsden and T. J. R. Hughes, *Mathematical foundations of elasticity*, Dover Publ., New York, 1983.
28. J. G. Oldroyd, “On the formulation of rheological equations of state,” *Proc. Roy. Soc. London Ser. A*, 1950, **200**, 523–541, DOI: [10.1098/rspa.1950.0035](https://doi.org/10.1098/rspa.1950.0035).
29. I. M. Singer and J. A. Standberg, “The infinite groups of Lie and Cartan. Part I (The transitive groups),” *J. Anal. Math.*, 1965, **15**, 1–114, DOI: [10.1007/bf02787690](https://doi.org/10.1007/bf02787690).

30. H. A. Stone, M. J. Shelley, and P. Rigo, “A note about convected time derivatives for flows of complex fluids,” *Soft Matter*, 2023, **19**, No. 28, 5353–5359, DOI: [10.1039/d3sm00497j](https://doi.org/10.1039/d3sm00497j).
31. Wolfram Research, Inc., *Mathematica. Version 13.1*, Wolfram Research, Inc., Champaign, 2022.
32. K. Yano, *The theory of Lie derivatives and its applications*, North-Holland, Amsterdam, 1957.
33. V. G. Zvyagin, A. V. Zvyagin, V. P. Orlov, and M. V. Turbin, “Weak solvability of the initial boundary value problem for the Voigt model with a smoothed Jaumann time derivative taking into account the memory of fluid motion,” *Lobachevskii J. Math.*, 2025, **46**, No. 3, 1183–1206, DOI: [10.1134/S1995080225605168](https://doi.org/10.1134/S1995080225605168).

A. P. Chupakhin

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia

Novosibirsk National Research State University, Novosibirsk, Russia

E-mail: chupakhin@hydro.nsc.ru, eLIBRARY SPIN-code: 7023-4994, eLIBRARY AuthorID: 6500, ResearcherID: [AIA-3732-2022](https://orcid.org/0000-0002-9492-5527), Scopus: [55910100800](https://orcid.org/0000-0002-9492-5527), ORCID: [0000-0002-9492-5527](https://orcid.org/0000-0002-9492-5527)

E. S. Stetsyak

Lavrentyev Institute of Hydrodynamics SB RAS, Novosibirsk, Russia

Novosibirsk National Research State University, Novosibirsk, Russia

Skolkovo Institute of Science and Technology, Moscow, Russia

E-mail: stetsyak.e.s@hydro.nsc.ru

D. S. Chutkov

Novosibirsk National Research State University, Novosibirsk, Russia

E-mail: d.chutkov@ng.su.ru