РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 70, № 3, 2024

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3
http://journals.rudn.ru/cmfd

Научный журнал
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)
4 выпуска в год
http://journals.rudn.ru/cmfd
Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.
Включен в каталог подписных изданий агентства «Роспечать», индекс 36832.
Индексируется в РИНЦ и международных базах данных *MathSciNet* и *Zentralblatt Math*.
Полный текст журнала размещен в базах данных компании *EBSCO Publishing* на платформе *EBSCOhost*.
Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты.

Правила оформления статей, архив публикаций в открытом доступе и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала: http://journals.rudn.ru/cmfd, http://www.mathnet.ru/cmfd.

Редактор: *Е. М. Варфоломеев*
Компьютерная верстка: *Е. М. Варфоломеев*

Адрес редакции:
115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Подписано в печать 28.06.24. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.
Усл. печ. л. 20,93. Тираж 110 экз. Заказ 1077.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» (РУДН)
117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН
115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 952-04-41; e-mail: publishing@rudn.ru

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 70, No. 3, 2024

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3
http://journals.rudn.ru/cmfd

Founded in 2003

Founder: Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

---

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS
Published by the Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russian Federation

ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)
4 issues per year
http://journals.rudn.ru/cmfd
Indexed by *Russian Index of Science Citation*, *MathSciNet*, *Zentralblatt Math*.
The full texts can be found in the *EBSCOhost* databases by *EBSCO Publishing*.
Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Aims and Scope

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results.

Guidelines for authors, free accessible archive of issues, and other information can be found at the journal's website: http://journals.rudn.ru/cmfd, http://www.mathnet.ru/eng/cmfd.

Editor: ***E. M. Varfolomeev***
Computer design: ***E. M. Varfolomeev***
Address of the Editorial Office:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru
Print run 110 copies.
Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba (RUDN University), Moscow, Russia
6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia
Printed at RUDN Publishing House:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 952-04-41; e-mail: publishing@rudn.ru

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 3 (2024). С. 343–355
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.98
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-343-355
EDN: PFBHQS

О ПОСТАНОВКЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ДВУЧЛЕННЫХ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

А. Б. Антоневич, Д. И. Кравцов

Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь

Аннотация. В ряде предшествующих работ было обнаружено, что для двучленных функциональных уравнений вида

$$a(x)u(\alpha(x)) - \lambda u(x) = v(x), \quad x \in X,$$

где $\alpha : X \to X$ есть обратимое отображение множества X в себя, возможна ситуация, типичная для дифференциальных уравнений — уравнение разрешимо при любой правой части и при этом нет единственности решения. Как и в случае дифференциальных уравнений, возникает вопрос о постановке корректных краевых задач, т. е. о задании дополнительных условий, при которых решение существует и единственно. В работе обсуждается вопрос о том, какого вида дополнительные условия приводят к корректным краевым задачам для рассматриваемых уравнений.

Ключевые слова: двучленное функциональное уравнение, единственность решения, корректная краевая задача.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *А. Б. Антоневич, Д. И. Кравцов.* О постановке краевых задач для двучленных функциональных уравнений// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 3. С. 343–355. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-343-355

1. Введение

Пусть $\alpha : X \to X$ есть обратимое отображение множества X в себя. Объектом исследования являются функциональные уравнения вида

$$a(x)u(\alpha(x)) - \lambda u(x) = v(x), \tag{1.1}$$

где $a(x)$ есть заданная функция. В операторной записи это уравнение вида

$$(B - \lambda I)u = v, \tag{1.2}$$

где B есть оператор взвешенного сдвига, действующий по формуле

$$(Bu)(x) = a(x)u(\alpha(x)).$$

Такие операторы и уравнения рассматривались в различных пространствах $F(X)$ функций на множестве X многими авторами, причем основное внимание уделялось исследованию спектра таких операторов (см, например, [1]). Проводился также анализ свойств операторов $B - \lambda I$ при спектральных значениях λ [2, 5, 11]. При этом были обнаружены примеры отображений α, для которых существуют такие коэффициенты $a(x)$, что операторы $B - \lambda I$ обратимы справа для некоторого множества спектральных значений, В частности, такое свойство было получено для операторов, порожденных т. н. «некарлемановским сдвигом» [7, 9, 12]. Общий результат получен в [4] — показано, что спектральные значения λ, при которых оператор $B - \lambda I$ обратим справа в пространстве скалярных функций $L_2(X, \mu)$, могут существовать только для операторов, порожденных т. н. *отображениями с разделимой динамикой.* Обзор некоторых результатов в этом направлении, включая случай уравнений в пространствах вектор-функций, приведен в [3]. Если оператор $B - \lambda I$ обратим справа, то уравнение (1.2) разрешимо при любой правой части v, но решение не единственно. Отметим, что такая ситуация типична для дифференциальных уравнений, и поэтому при их исследовании задаются дополнительные условия. Как правило, дополнительное условие записывается в виде $Du = 0$, где D — некоторый вспомогательный оператор. Обычно такие условия задаются на границе области или ее части, и их называют *краевыми условиями.* Классические вопросы теории краевых задач для дифференциальных уравнений заключаются в описании тех краевых условий, при которых поставленная задача однозначно и безусловно разрешима либо является фредгольмовой — однородная задача имеет конечное число линейно независимых условий, и для разрешимости достаточно конечного числа условий на правую часть.

Например, к эллиптическому уравнению в заданной области присоединяются краевые условия на границе Γ рассматриваемой области вида $Du|_\Gamma = 0$, где D — дифференциальный оператор. Основной результат в этом направлении формулируется в виде известных условий Шапиро—Лопатинского [8], являющихся необходимыми и достаточными условиями фредгольмовой разрешимости краевой задачи для эллиптических уравнений в соответствующих пространствах Соболева.

В данной работе рассматриваются такие уравнения вида (1.2), для которых имеет место разрешимость при любой правой части, и, аналогично случаю дифференциальных уравнений, возникает вопрос о том, какого вида дополнительные условия нужно присоединить к уравнению, чтобы получить существование и единственность решения для любой правой части. По аналогии со случаем дифференциальных уравнений такие условия будем называть *краевыми* и записывать в виде $Du = 0$, где D — некоторый оператор. Соответствующие задачи

$$(B - \lambda I)u = v, \quad Du = 0 \tag{1.3}$$

также будем называть *краевыми.*

Заметим, что при постановке задачи существенно только подпространство $L = kerD$, и фактически вопрос сводится к описанию подпространств L, при которых задача

$$(B - \lambda I)u = v, \quad u \in L \tag{1.4}$$

корректна.

Таким образом, сформулированный выше вопрос о том, при каких L поставленная краевая задача корректна, можно трактовать как вопрос об аналоге условий Шапиро—Лопатинского для рассматриваемого класса уравнений. Примеры корректных краевых задач для некоторых конкретных уравнений вида (1.4) рассмотрены в [3, 6, 10].

2. Гиперболические и правосторонне гиперболические операторы и краевые задачи для них

Приведем сначала некоторые результаты о рассматриваемых уравнениях и операторах, полученные в процитированных работах.

При рассмотрении уравнений вида (1.2), где B есть заданный линейный оператор в банаховом пространстве и λ — комплексный параметр, обычно в первую очередь изучается спектр $\sigma(B)$ оператора B и резольвентное множество.

Пусть спектр $\sigma(B)$ принадлежит кольцу

$$\{\lambda : 0 < r \leqslant |\lambda| \leqslant R\}.$$

При $|\lambda| < r$ резольвента $R(\lambda, B) := (B - \lambda I)^{-1}$ задается формулой

$$R(\lambda, B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1}, \tag{2.1}$$

а при $|\lambda| > R$ — формулой

$$R(\lambda, B) = -\sum_{-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1}. \tag{2.2}$$

Оператор B называется *гиперболическим*, если его спектр не пересекается с единичной окружностью. Тогда резольвента определена в открытом кольце $K = \{\lambda : r^- < |\lambda| < r^+\}$, где

$$r^+ = \min\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(B), |\lambda| > 1\},$$
$$r^- = \max\{|\lambda| : \lambda \in \sigma(B), |\lambda| < 1\}$$

Для таких операторов применение известной теоремы о проекторе Рисса приводит к следующему утверждению.

Лемма 2.1. *Если обратимый оператор B является гиперболическим, то формула*

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=1} R(\lambda, B) d\lambda \tag{2.3}$$

задает проектор Рисса, перестановочный с B и осуществляющий разложение $F = F^+ \bigoplus F^-$ в прямую сумму замкнутых подпространств, инвариантных относительно оператора B.

Это приводит к разложению $B = B^+ \bigoplus B^-$ в прямую сумму операторов, действующих в соответствующих подпространствах, таких, что спектр оператора B^+ в подпространстве F^+ совпадает с частью спектра $\sigma(B)$, лежащей внутри единичной окружности, а спектр оператора B^- в подпространстве F^- совпадает с частью спектра $\sigma(B)$, лежащей вне единичной окружности.

В кольце K резольвента разлагается в операторный ряд Лорана

$$R(\lambda, B) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1}(I - P) - \sum_{-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P, \tag{2.4}$$

причем первый ряд сходится при $|\lambda| < r^+$, а второй ряд сходится при $|\lambda| > r^-$.

Аналогичные утверждения имеют место, если спектр оператора B не пересекается с окружностью произвольного радиуса $r_0 > 0$.

Правосторонней резольвентой для оператора B называется семейство операторов $R_r(\lambda)$, определенное и аналитически зависящее от λ в некоторой области на комплексной плоскости и состоящее из правых обратных к $B - \lambda I$:

$$(B - \lambda I) R_r(\lambda) = I.$$

Оператор B будем называть *правосторонне гиперболическим*, если у него существует правосторонняя резольвента, определенная в кольце вида $K = \{\lambda : r^- < |\lambda| < r^+\}$, где $r^- < 1 < r^+$.

Лемма 2.2 (см. [11]). *Пусть оператор B является правосторонне гиперболическим. Любая правосторонняя резольвента $R_r(\lambda)$ разлагается в ряд вида* (2.4)*, аналогичный разложению обычной резольвенты* (2.4)*, где оператор P задается той же формулой*

$$P = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|\lambda|=1} R_r(\lambda, B) d\lambda, \tag{2.5}$$

что и проектор Рисса. Отличие заключается в том, что здесь оператор P не перестановочен с оператором B.

Если при некотором операторе P ряд (2.4) *сходится, то сумма ряда есть одна из правосторонних резольвент для оператора B.*

Поясним отличие рассмотренных понятий с геометрической точки зрения.

Операторный ряд (2.1) сходится при $|\lambda| > R$. Но при заданном $u \in F$ ряд

$$-\sum_{-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} u \tag{2.6}$$

может сходиться на большей области значений λ.

Множество тех $u \in F$, для которых ряд (2.6) сходится при $|\lambda| > t$, образует векторное подпространство, которое обозначим $F^+(t)$.

Аналогично, множество $u \in F$, для которых ряд

$$\sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1} u \tag{2.7}$$

сходится при $|\lambda| < t$, есть векторное подпространство, которое обозначим $F^-(t)$.

Гиперболичность оператора B эквивалентна тому, что при некоторых $r^- < 1 < r^+$ проектор P задает разложение $F = F^+(r^-) \oplus F^-(r^+)$ в прямую сумму замкнутых векторных подпространств.

В случае правосторонней гиперболичности для каждого $u \in F$ также имеем разложение $u = u^+ + u^-$, где $u^+ = Pu \in F^+(r^-)$, $u^- = (I-P)u \in F^-(r^+)$. Это означает, что F представляется в виде суммы $F = F^+(r^-) + F^-(r^+)$, но это не прямая сумма подпространств, в частности, подпространства $F^+(r^-)$ и $F^-(r^+)$ пересекаются. Поэтому в этом случае существует много разных операторов P, задающих такие разложения, за счет чего существует много разных правосторонних резольвент.

Пусть у оператора B существует правосторонняя резольвента $R_r(B;\lambda)$, определенная в кольце

$$K = \{\lambda : r^- < |\lambda| < r^+\}.$$

Как было отмечено выше, требуется выяснить, для каких подпространств L краевая задача

$$(B - \lambda I)u = v, \quad u \in L \tag{2.8}$$

корректна — имеет единственное решение при любой правой части.

Требование корректности краевой задачи при заданном λ_0 равносильно выполнению двух условий, которые в общем случае независимы:

1. $L \cap ker(B - \lambda_0) = \{0\}$, что обеспечивает единственность решения;
2. $(B - \lambda_0 I)(L) = F$, что обеспечивает существование решения при любой правой части.

При выполнении этих условий определен оператор $R_L(\lambda_0)$, задающий решение задачи, который биективно отображает F на L, а оператор

$$R_L(\lambda_0)(B - \lambda_0 I)$$

является проектором на L, осуществляющим разложение в прямую сумму $F = L \oplus ker(B - \lambda_0 I)$.

Поскольку верно и обратное, получаем, что задача (2.8) корректна при заданном λ_0 тогда и только тогда, когда L является одним из подпространств, дополнительных к $ker(B - \lambda_0 I)$.

Резольвентным множеством краевой задачи $\rho(B, L)$ будем называть множество чисел λ, при которых задача (2.8) корректна. Заметим, что резольвентное множество краевой задачи принадлежит той части K спектра оператора B, в которой операторы $B - \lambda I$ правосторонне обратимы. На резольвентном множестве определено семейство операторов $R_L(\lambda, B)$, дающих решения краевой задачи, которое будем называть *резольвентой краевой задачи.*

Соответственно, *спектром краевой задачи* будем называть множество $K \setminus \rho(B, L)$.

Если резольвента краевой задачи определена в точке λ_0, то она однозначно определена в достаточно малой окрестности точки λ_0 и представляется в виде ряда

$$R_r(\lambda, B) = \sum_{k=0}^{+\infty} (\lambda - \lambda_0)^k R_r(\lambda_0, B)^{k+1}. \tag{2.9}$$

Из этого следует, что такая резольвента есть аналитическая операторнозначная функция от λ, как и классическая резольвента оператора.

При исследовании краевых задач для конкретных классов уравнений используются, кроме изложенных общих соображений, свои подходы к построения корректных задач, учитывающие специфику рассматриваемых уравнений. Целью данной работы является выяснение того, как могут быть поставлены корректные краевые задачи для функциональных уравнений вида (1.1).

3. Краевые задачи для дискретных разностных уравнений

Наиболее простой пример уравнений вида (1.1) имеем при $X = \mathbb{Z}$ и отображении $\alpha(k) = k + 1$. Соответствующие дискретные операторы взвешенного сдвига действуют в пространствах последовательностей по формуле

$$(Bu)(k) = a(k)u(k+1), \tag{3.1}$$

а уравнения (1.1) суть разностные уравнения вида

$$a(k)u(k+1) - \lambda u(k) = v(k).$$

Для конкретности рассмотрим такие операторы в пространстве последовательностей $l_2(\mathbb{Z})$.

Лемма 3.1. *Пусть B есть оператор вида* (3.1), *у которого существуют конечные пределы*

$$\lim_{k\to\pm\infty} a(k) := a(\pm\infty) \neq 0, \tag{3.2}$$

и при этом $a(k) \neq 0$ для всех k.

Спектром оператора B является кольцо

$$\sigma(B) = \{\lambda : r(a) \leqslant |\lambda| \leqslant R(a)\},$$

где

$$R(a) = \max\{|a(+\infty)|, |a(-\infty)|\}, r(a) = \min\{|a(+\infty)|, |a(-\infty)|\}.$$

Если $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$, то оператор $B - \lambda I$ обратим справа и его ядро одномерно. Решение однородного уравнения, удовлетворяющее условию $\omega_\lambda(0) = 1$, задается формулой

$$\omega_\lambda(k) = \begin{cases} \dfrac{\lambda^k}{\prod\limits_{j=0}^{k-1} a(j)}, & k \geqslant 0; \\ \dfrac{\prod\limits_{j=k}^{-1} a(j)}{\lambda^{-k}}, & k < 0. \end{cases} \tag{3.3}$$

В силу условия

$$|a(+\infty)| < |\lambda| < |a(-\infty)|$$

указанная последовательность $\omega_\lambda(k)$ мажорируется сходящейся геометрической прогрессией, откуда следует, что $\omega_\lambda(\tau)$ принадлежит пространству $l_p(\mathbb{Z})$ при любом $p \geqslant 1$.

Правосторонние резольвенты для рассматриваемого оператора, определенные в открытом кольце $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$, были построены, например, в [11].

Теорема 3.1. *Пусть P_τ, $\tau \in \mathbb{Z}$, есть оператор в $l_2(\mathbb{Z})$, действующий по формуле*

$$(P_\tau u)(k) = \begin{cases} u(k), & k \geqslant \tau \\ 0, & k < \tau. \end{cases} \tag{3.4}$$

Если $|a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|$, то ряд

$$R_\tau(B;\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1}(I - P_\tau) - \sum_{-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P_\tau \tag{3.5}$$

сходится и задает правостороннюю резольвенту для оператора B, определенную в кольце

$$K = \{\lambda : |a(-\infty)| < |\lambda| < |a(+\infty)|\}.$$

При заданном $\tau \in \mathbb{Z}$ образы всех операторов $R_\tau(B;\lambda)$ совпадают с подпространством

$$L_\tau = \{u \in l_2(\mathbb{Z}) : u(\tau) = 0\}.$$

Таким образом, при каждом τ правосторонняя резольвента $R_\tau(B;\lambda)$ задает решение краевой задачи, определяемой условием $u(\tau)=0$, и такая задача корректна при всех $\lambda\in K$.

Вопрос о постановке других корректных задач для таких операторов рассмотрен в [6, 10]. Поскольку в рассматриваемом случае ядро оператора $B-\lambda I$ одномерно, все дополнительные к нему подпространства L имеют простое описание — в качестве L можно взять любое замкнутое подпространство коразмерности 1, не пересекающееся с ядром. Любое подпространство коразмерности 1 задается с помощью линейного ограниченного функционала и имеет вид

$$L=L_\eta:=\{u:<u,\eta>=0\},$$

где $\eta\in l_2(\mathbb{Z})$.

Условие, что L не пересекается с ядром оператора $B-\lambda I$, записывается в явном виде. После подстановки последовательности ω_λ в выражение для функционала получаем функцию от λ:

$$Q_\eta(\lambda)=<\omega_\lambda,\eta>_{l_2}. \tag{3.6}$$

Поскольку ω_λ задается в виде ряда по положительным и отрицательным степеням переменной λ, получаем, что ω_λ есть аналитическая функция переменной λ со значениями в $l_2(\mathbb{Z})$, и что функция $Q_\eta(\lambda)$ задана в виде ряда Лорана переменной λ, который сходится в кольце K и его сумма является аналитической функцией.

Теорема 3.2 (см. [10])**.** *Краевая задача* (1.4) *корректна при тех* λ, *для которых выполнены условия*:

1. $|a(-\infty)|<|\lambda|<|a(+\infty)|$,
2. $Q_\eta(\lambda)\neq 0$.

Резольвента краевой задачи для дискретного уравнения может быть записана в виде

$$R_\eta(B;\lambda)v=R_r(\lambda)v-\frac{\Phi_\lambda(v)}{Q_\eta(\lambda)}\omega_\lambda=\Big[\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^kB^{-k-1}(I-P_0)v-\sum_{-\infty}^{-1}\lambda^kB^{-k-1}P_0v\Big]-\frac{\Phi_\lambda(v)}{Q_\eta(\lambda)}\omega_\lambda, \tag{3.7}$$

где $\Phi_\lambda(v)$ *есть функционал на* $l_2(\mathbb{Z})$, *заданный формулой*

$$\Phi_\lambda(v)=<R_r(\lambda)v,\eta>.$$

Полученное выражение не изменяется при умножении η на скалярный множитель. Поэтому без ограничения общности будем считать, что $\|\eta\|=1$. Аналогично без ограничения общности можем считать, что $\|\omega_\lambda\|=1$ для всех λ.

Таким образом, спектр краевой задачи совпадает с множеством нулей аналитической функции $Q_\eta(\lambda)$, принадлежащих кольцу K. Если эта функция аналитична в более широком кольце, то в K она может иметь только конечное множество нулей в K. В общем случае лежащие в K нули аналитической функции образуют дискретное множество, которое может иметь предельные точки на границе кольца.

Обратим внимание на то, что здесь условие $Q_\eta(\lambda)\neq 0$ возникает как условие единственности решения, и оно же оказывается условием корректности задачи, т. е. в рассматриваемом случае из условия 1 следует 2.

4. Краевые задачи для модельного класса функциональных уравнений

Вопрос о том, как могут быть поставлены корректные краевые задачи для более сложных функциональных уравнений обсудим на модельном примере. По аналогичной схеме можно исследовать функциональные уравнения и в общем случае.

Пусть α есть диффеоморфизм отрезка $[0,1]$ такой, что

$$\alpha(0)=0;\ \alpha(1)=1,\quad \alpha(x)>x,\ \text{если}\ \ 0<x<1.$$

Среди операторов взвешенного сдвига, порожденных α и действующих в $L_p[0,1]$, выделим оператор, заданный формулой

$$(T_\alpha u)(x)=[\alpha'(x)]^{1/p}u(\alpha(x)),$$

поскольку T_α является обратимым изометрическим оператором. Ввиду этого оператор взвешенного сдвига $(Bu)(x) = a(x)u(\alpha(x))$ в $L_p[0,1]$ будем записывать в виде

$$(Bu)(x) = \widetilde{a}(x)(T_\alpha u)(x), \quad \text{где} \quad \widetilde{a}(x) = [\alpha'(x)]^{1/p} a(x).$$

Такая запись удобна потому, что свойства B описываются с помощью функции $\widetilde{a}$, которая называется *приведенным коэффициентом.* Например, $\|B\|_{L_p} = \|\widetilde{a}\|_{L_\infty}$.

Теорема 4.1. *Пусть $a \in C[0,1]$, $a(x) \neq 0$ для всех x и $|\widetilde{a}(0)| < |\widetilde{a}(1)|$. Если $0 < |\widetilde{a}(0)| < |\lambda| < |\widetilde{a}(1)|$, то оператор $B - \lambda I$ обратим справа в пространстве $L_p[0,1]$.*

Пусть $0 < \xi < 1$ и P_ξ есть оператор умножения на функцию

$$p_\xi(x) = \begin{cases} 0, & x < \xi; \\ 1, & x \geqslant \xi. \end{cases}$$

Ряд из операторов

$$R_\tau(B;\lambda) = \sum_{k=0}^{+\infty} \lambda^k B^{-k-1}(I - P_\xi) - \sum_{-\infty}^{-1} \lambda^k B^{-k-1} P_\xi \tag{4.1}$$

сходится по норме при всех λ из кольца $|\widetilde{a}(0)| < |\lambda| < |\widetilde{a}(1)|$ и задает одну из правосторонних резольвент для оператора B, определенную в этом кольце.

Согласно сказанному выше, при выполнении условий теоремы для получения существования и единственности решения соответствующего уравнения при заданном λ_0 нужно задать условие вида $u \in L$, где L есть подпространство, дополнительное к ядру $ker(B - \lambda_0 I)$. Наиболее существенным отличием от случая дискретного оператора является то, что здесь ядро оператора $B - \lambda I$ бесконечномерно и не существует общего метода построения подпространств, дополнительных к бесконечномерному. Покажем, как можно задавать такие подпространства, используя специфику рассматриваемого оператора.

Фундаментальной областью для отображения $\alpha : X \to X$ называется такое измеримое подмножество $\Omega \subset X$, что

1. $\alpha^k(\Omega) \cap \alpha^j(\Omega) = \varnothing$ при $k \neq j$;
2. множество $X_0 = \cup_{k\in\mathbb{Z}} \alpha^k(\Omega)$ плотно в X и $\mu(X \setminus X_0) = 0$.

В рассматриваемом случае отображения $\alpha : [0,1] \to [0,1]$ фундаментальной областью является любой полуинтервал вида $\Omega = [\gamma, \alpha(\gamma))$, где $0 < \gamma < 1$, $\alpha^k(\Omega) = [\alpha^k(\gamma), \alpha^{k+1}(\gamma))$, $X_0 = (0,1)$.

Каждая точка из множества $\alpha^k(\Omega) = [\alpha^k(\gamma), \alpha^{k+1}(\gamma))$ единственным образом представляется в виде $\alpha^k(\tau)$, $\tau \in \Omega$. Поэтому определена биекция $\psi : \Omega \times \mathbb{Z} \to (0,1)$, действующая по формуле

$$\psi(\tau, k) = \alpha^k(\tau). \tag{4.2}$$

Это позволяет поставить в соответствие функции, определенной на $X_0 = (0,1)$, функцию на $\Omega \times \mathbb{Z}$, т. е. функцию двух переменных τ и k. В частности, функции $\widetilde{a}(x)$, определенной на X_0, соответствует функция $\widetilde{a}(\tau, k) = \widetilde{a}(\alpha^k(\tau))$, определенная на $\Omega \times \mathbb{Z}$.

Для конкретности будем рассматривать операторы в пространстве $L_2[0,1]$. На множестве $\Omega \times \mathbb{Z}$ естественным образом определена мера и определено пространство $L_2(\Omega \times \mathbb{Z})$. Поскольку отображение ψ не сохраняет меру, зададим отображение J из $L_2[0,1]$ в $L_2(\Omega \times \mathbb{Z})$ формулой

$$L_2[0,1] \ni u \to \widetilde{u}(\tau, k) = [\alpha'(\alpha^k(\tau))]^{1/2} u(\alpha^k(\tau)),$$

содержащей нормирующий множитель.

Обозначив $u_k(\tau) = \widetilde{u}(\tau, k)$, при отображении J получаем

$$\int\limits_X |u(x)|^2 dx = \sum_k \int\limits_\Omega |u_k(\tau)|^2 d\tau = \int\limits_\Omega \sum_k |u_k(\tau)|^2 d\tau.$$

Здесь, согласно теореме Фубини, при заданном u ряд $\sum\limits_k |u_k(\tau)|^2$ сходится при почти всех τ и выполнено последнее равенство. Отсюда получаем, что J есть изометрический изоморфизм между пространствами $L_2[0,1]$ и $L_2(\Omega \times \mathbb{Z})$.

Возникают два представления пространства $L_2(\Omega\times\mathbb{Z})$. Первое представление есть

$$L_2(\Omega\times\mathbb{Z})\sim l_2(\mathbb{Z},L_2(\Omega)),\tag{4.3}$$

т. е. это пространство двусторонних последовательностей функций $u_k\in L_2(\Omega)$ таких, что ряд $\sum\limits_k ||u_k||^2_{L_2(\Omega)}$ сходится. Заметим, что при таком представлении пространства оператор T_α действует как сдвиг по переменной k: $T_\alpha u_k=u_{k+1}$.

Второе представление есть

$$L_2(\Omega\times\mathbb{Z})\sim L_2(\Omega;l_2(\mathbb{Z})),\tag{4.4}$$

т. е. в виде пространства измеримых функций $U(\tau)$ на Ω со значениями в $l_2(\mathbb{Z})$ таких, что

$$\int\limits_\Omega ||U(\tau)||^2_{l_2}d\tau<+\infty.$$

Лемма 4.1. *При представлении пространства в виде* (4.4) *оператор B действует как умножение на операторнозначную функцию $B(\tau)$, т. е. задается формулой $B: U(\tau)\to B(\tau)U(\tau)$, где значение $B(\tau)$ в точке τ есть оператор взвешенного сдвига в пространстве $l_2(\mathbb{Z})$, заданный формулой*

$$(B(\tau)u)(k)=\widetilde{a}(\tau,k)u(k+1),\ \ u\in l_2(\mathbb{Z}).$$

Доказательство заключается в непосредственной проверке.

При выполнении условий теоремы 4.1 для каждого дискретного оператора $B(\tau)$ выполнены утверждения из раздела 3. В частности, при каждом τ уравнение

$$B(\tau)U(\tau)-\lambda U(\tau)=V(\tau)$$

разрешимо при любом $V(\tau)\in l_2(\mathbb{Z})$, а ядро оператора $B(\tau)-\lambda I$ одномерно и порождено последовательностью $\omega_{\lambda,\tau}\in l_2(\mathbb{Z})$, заданной формулой вида (3.3). Зададим при каждом λ функцию переменных τ и k

$$\omega_{\lambda,\tau}(k)=\begin{cases}\dfrac{\lambda^k}{\prod\limits_{j=0}^{k-1}a(\tau,j)}, & k\geqslant 0;\\[2ex] \dfrac{\prod\limits_{j=k}^{-1}a(\tau,j)}{\lambda^{-k}}, & k<0.\end{cases}$$

Получаем, что ядро $ker(B-\lambda I)$ состоит из функций вида $l(\tau)\omega_{\lambda,\tau}(k)$, где $l(\tau)$ есть произвольная функция из пространства $L_2(\Omega)$, и является бесконечномерным подпространством.

Полученное представление оператора B подсказывает, какой вид могут иметь подпространства L, при которых краевая задача (1.4) корректна. А именно, подходящим может быть подпространство L, которое при представлении (4.4) задается при каждом τ (или почти при всех τ) условиями вида, описанного в разделе 3, а именно

$$L=\{U(\tau):<U(\tau),\eta(\tau)>_{l_2}=0\ \ \forall\ \ \tau\in\Omega\},\tag{4.5}$$

где $\eta(\tau)$ есть некоторое зависящее от τ семейство элементов из $l_2(\mathbb{Z})$.

При каждом τ по формуле (3.6) определена аналитическая функция переменной λ

$$Q_\eta(\tau,\lambda)=<\omega_{\lambda,\tau},\eta(\tau)>_{l_2}.$$

Лемма 4.2. *Пусть подпространство L задано в виде* (4.5). *При заданном λ условие, что*

$$Q_\eta(\tau,\lambda)\neq 0\quad \textit{для почти всех}\ \ \tau,\tag{4.6}$$

является необходимым и достаточным для единственности решения краевой задачи.

Действительно, если краевая задача имеет решение $u\in L_2[0,1]$, то при представлении (4.4) этому решению соответствует однозначно определенная функция $U(\tau)$, являющаяся при почти всех τ решением уравнения

$$B(\tau)U(\tau)-\lambda U(\tau)=V(\tau).\tag{4.7}$$

Поэтому из условия (4.6) следует единственность решения.

Пусть условие (4.6) не выполнено, т. е. $Q_\eta(\tau,\lambda)=0$ при $\tau\in N\subset\Omega$, где $\mu(N)>0$. Тогда

$$U(\tau)=\begin{cases}\omega_{\lambda,\tau}, & \tau\in N;\\ 0, & \tau\notin N\end{cases}$$

является нетривиальным решением однородной краевой задачи, что доказывает необходимость условия для единственности решения задачи.

Пусть при некотором λ выполнено необходимое условие (4.6). Тогда для любого $v\in L_2[0,1]$ согласно формуле (3.7) для почти всех τ однозначно определено решение уравнения (4.7), удовлетворяющее условию

$$< U(\tau),\eta(\tau) >_{l_2}=0.$$

Получаем определенную почти всюду на Ω функцию $U(\tau)$ со значениями в $l_2(\mathbb{Z})$

$$U(\tau)=\Big[\sum_{k=0}^{+\infty}\lambda^k B^{-k-1}(I-P_0)v-\sum_{-\infty}^{-1}\lambda^k B^{-k-1}P_0 v\Big]-\frac{\Phi_{\tau,\lambda}(v)}{Q_{\tau,\eta}(\lambda)}\omega_{\lambda.\tau},\tag{4.8}$$

где

$$\Phi_{\lambda,\tau}(v)=< R_r(\tau,\lambda)v,\eta(\tau) >_{l_2}.$$

Если рассматриваемая краевая задача имеет решение $u\in L_2[0,1]$, то при представлении (4.4) этому решению соответствует построенная по формуле (4.8) функция $U(\tau)$. Однако может оказаться, что $U(\tau)$ не принадлежит $L_2(\Omega;l_2)$, т. е. в общем случае необходимое условие (4.6) не является достаточным для корректности задачи.

Сделаем несколько замечаний, связанных с приведенными рассуждениями. При фиксированном τ выражение $< U(\tau),\eta(\tau) >_{l_2}$ задает ограниченный линейный функционал на $l_2(\mathbb{Z})$, но не задает ограниченный линейный функционал на $L_2[0,1]$. Поэтому приведенное описание подпространства L с помощью неограниченных функционалов требует уточнения, в частности, из этого описания не видна замкнутость такого подпространства.

Семейство $\eta(\tau)$ есть функция на $\Omega\times\mathbb{Z}$, и, переходя к представлению (4.3), получаем, что $\eta(\tau)$ можно рассматривать как последовательность функций $\eta_k(\tau)$, определенных на Ω, и тогда получаем другую запись краевого условия, т. е. другой способ задания подпространства L:

$$L=\{u_k(\tau):\sum_k\eta_k(\tau)u_k(\tau)=0\ \ \forall\ \ \tau\in\Omega\}.\tag{4.9}$$

Полученное условие, задающее подпространство L, можно записать в виде

$$L=\{u:Du(\tau)=0\ \text{ при }\ \tau\in\Omega\},$$

где оператор D задается выражением

$$(Du)(\tau)=\sum_k\eta_k(\tau)(T_\alpha^k u)(\tau).\tag{4.10}$$

Заметим, что каждый оператор из алгебры $\mathcal{B}$, порожденной операторами T_α^k и операторами умножения на функции, представляется в виде

$$\sum_k a_k(x)T_\alpha^k\tag{4.11}$$

с некоторыми коэффициентами $a_k(x)$. Сравнивая (4.10) с (4.11), видим, что здесь оператор D можно записать в виде, аналогичном (4.11), но его коэффициенты определены только в точках фундаментальной области Ω. Поэтому этот оператор действует из $L_2[0,1]$ в пространство функций, определенных на Ω.

Приведенное рассуждение позволяет подчеркнуть аналогию с классическим вопросом о краевых задачах для эллиптических уравнений. Подобно тому, как для эллиптических уравнений рассматривается краевое условие вида $Du|_\Gamma=0$, где D есть некоторый дифференциальный оператор, действующий в пространство функций на границе, полученное краевое условие фактически имеет вид $Du|_\Omega=0$, где D есть оператор из алгебры, порожденной операторами взвешенного сдвига, действующий в пространство функций, определенных на Ω.

Классическое условие Шапиро—Лопатинского для эллиптических уравнений возникает как требование единственности решений семейства некоторых вспомогательных задач. Полученное условие (4.6) также есть условие единственности решений вспомогательных задач, и его можно считать аналогом условия Шапиро—Лопатинского.

Основное утверждение об условиях Шапиро—Лопатинского говорит, что в случае достаточно «хороших» коэффициентов это условие является необходимым и достаточным для фредгольмовости краевой задачи. Покажем, что в общем случае краевых задач для функциональных уравнений необходимое условие (4.6) не является достаточным для корректности задачи, и что в случае краевых задач с достаточно «хорошими» коэффициентами условие (4.6) является и достаточным.

Вопрос сводится к выяснению того, при каких условиях (в зависимости от функций $\eta(\tau)$) функция $U(\tau)$, заданная формулой (4.8), принадлежит пространству $L_2(\Omega; l_2(\mathbb{Z}))$.

Теорема 4.2. *Пусть $a \in C[0,1]$, $a(x) \neq 0$ для всех x и $|\widetilde{a}(0)| < |\widetilde{a}(1)|$. Если $|\widetilde{a}(0)| < |\lambda| < |\widetilde{a}(1)$, то краевая задача*

$$(B - \lambda I)u = v, \quad u \in L,$$

где подпространство L задано с помощью функции $\eta(\tau)$, измеримо зависящей от τ, корректна при заданном λ тогда и только тогда, когда $\left|\dfrac{1}{Q_{\tau,\eta}(\lambda)}\right| \leqslant C(\lambda)$ почти всюду как функция переменной τ.

Доказательство. Утверждение получаем, анализируя формулу (4.8). Здесь первое слагаемое всегда принадлежит L_2, так как есть результат применения одной из правосторонних резольвент к функции v. Поэтому требуется проанализировать только второе слагаемое

$$W(\tau) = \frac{\Phi_{\tau,\lambda}(v)}{Q_{\tau,\eta}(\lambda)}\omega_{\lambda,\tau}.$$

Это функция от τ со значениями в $l_2(\mathbb{Z})$. Прежде всего, эта функция должна быть измеримой. Это выполнено, если семейство $\eta(\tau)$ измеримо зависит от τ.

Далее, должно выполняться условие

$$\int\limits_{\Omega} \|W(\tau)\|^2_{l_2} d\tau < +\infty.$$

Как уже отмечалось, без ограничения общности можно считать, что $\|\omega_{\lambda,\tau}\|_{l_2} = 1$ и $\|\eta(\tau)\|_{l_2} = 1$. Тогда

$$\|W(\tau)\|^2 = |\frac{\Phi_{\tau,\lambda}(v)}{Q_{\tau,\eta}(\lambda)}|^2,$$

и возникает вопрос — при каких $\eta(\tau)$ последнее условие выполнено для всех v?

В случае существования правосторонней резольвенты для оператора B резольвенты дискретных операторов ограничены в совокупности, т. е.

$$\|R_r(\tau, \lambda)\|_{l_2} \leqslant C_1(\lambda).$$

Поэтому

$$|\Phi_{\lambda,\tau}(V(\tau)|^2 = | < R_r(\tau, \lambda)V(\tau), \eta(\tau) >_{l_2} |^2 \leqslant C(\lambda)^2 \|V(\tau)\|^2.$$

Отсюда получаем оценку

$$\|W(\tau)\|^2 = |\frac{\Phi_{\tau,\lambda}(v)}{Q_{\tau,\eta}(\lambda)}|^2 \leqslant C(\lambda)C_1(\lambda)\|V(\tau)\|^2,$$

из которого следует утверждение. □

Рассмотрим геометрический смысл полученного условия. Если $\|\omega_{\lambda,\tau}\|_{l_2} = 1$ и $\|\eta(\tau)\|_{l_2} = 1$, то величина

$$Q_\eta(\tau, \lambda) =< \omega_{\lambda,\tau}, \eta(\tau) >_{l_2}$$

есть косинус угла между векторами $\omega_{\lambda,\tau}$ и $\eta(\tau)$. Поэтому условие $Q_\eta(\tau, \lambda) \neq 0$ означает, что эти вектора не являются ортогональными, т. е. углы между этими векторами меньше, чем $\pi/2$. А требование ограниченности функции $\dfrac{1}{Q_{\tau,\eta}(\lambda)}$ является более сильным условием — при всех τ углы между этими векторами равномерно отделены от $\pi/2$, т. е. меньше, чем $\pi/2 - d$ при некотором положительном d.

Отметим случай, когда необходимое условие корректности задачи является и достаточным.

Теорема 4.3. *Пусть $\eta(\tau)$ есть непрерывная функция от τ со значениями в l_2 на полуинтервале $\Omega = [\gamma, \alpha(\gamma))$, и при $\tau \to \alpha(\gamma)$ существует $\lim \eta(\tau) := \eta(\alpha(\gamma)$. Тогда функция $Q_\eta(\tau, \lambda)$ продолжается до непрерывной функции на отрезке $\overline{\Omega} = [\gamma, \alpha(\gamma)]$, и условие $Q_\eta(\tau, \lambda) \neq 0$ при всех $\tau \in \overline{\Omega}$ является необходимым и достаточным условием корректности краевой задачи. При этих условиях спектр задачи* (1.4) *есть множество*

$$\{\lambda : \exists \tau \in \overline{\Omega},\ \text{что}\ \ Q_{\tau,\eta}(\lambda) = 0\},$$

т. е. объединение нулей функций $Q_{\tau,\eta}(\lambda)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Антоневич А. Б.* Линейные функциональные уравнения: операторный подход. — Минск: Университетское, 1988.
2. *Антоневич А. Б.* Когерентная локальная гиперболичность линейного расширения и существенные спектры оператора взвешенного сдвига на отрезке// Функц. анализ и его прилож. — 2005. — *39*, № 1. — С. 52–69.
3. *Антоневич А. Б.* Правосторонняя обратимость двучленных функциональных операторов и градуированная дихотомия// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2021. — 67, № 2. — С. 208–236.
4. *Антоневич А. Б., Ахматова А. А., Маковска Ю.* Отображения с разделимой динамикой и спектральные свойства порожденных ими операторов// Мат. сб. — 2015. — *206*, № 3. — С. 3–34.
5. *Антоневич А. Б., Пантелеева Е. В.* Корректные краевые задачи, правосторонняя гиперболичность и экспоненциальная дихотомия// Мат. заметки. — 2016. — *100*, № 1. — С. 13–29.
6. *Архипенко О. А.* Краевые задачи для разностных уравнений// Тр. БГТУ. Сер. 3. Физ.-мат. науки и инф. — 2018. — № 1. — С. 12–18.
7. *Карлович Ю. И., Мардиев Р.* Об односторонней обратимости функциональных операторов с некарлемановским сдвигом в пространствах Гельдера// Изв. вузов. Сер. Мат. — 1987. — *3*. — С. 77–80.
8. *Лопатинский Я. Б.* Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям// Укр. мат. ж. — 1953. — *5*. — С. 123–151.
9. *Мардиев Р.* Критерий полунетеровости одного класса сингулярных интегральных операторов с некарлемановским сдвигом// Докл. Акад. наук УзССР. — 1985. — *2*. — С. 5–7.
10. *Шукур Али А., Архипенко О. А.* Резольвента краевой задачи для разностного уравнения// Пробл. физ., мат. и техн. — 2016. — *28*, № 3. — С. 70–75.
11. *Antonevich A., Makowska Yu.* On spectral properties of weighted shift operators generated by mappings with saddle points// Complex Anal. Oper. Theory. — 2008. — *2*. — С. 215–240.
12. *Karlovich A. Yu., Karlovich Yu. I.* One-sided invertibility of binomial functional operators with a shift in rearrangement-invariant spaces// Integral Equ. Oper. Theory. — 2002. — *42*. — С. 201–228.

А. Б. Антоневич
Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
E-mail: aiantonevich@mail.ru

Д. И. Кравцов
Белорусский государственный университет, Минск, Беларусь
E-mail: kravtsov.dmitriy1506@yandex.by

UDC 517.98
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-343-355
EDN: PFBHQS

On the formulation of boundary-value problems for binomial functional equations

A. B. Antonevich and D. I. Kravtsov

Belarusian State University, Minsk, Belarus

Abstract. In a number of previous works it was found that for binomial functional equations of the form

$$a(x)u(\alpha(x)) - \lambda u(x) = v(x), \quad x \in X,$$

where $\alpha : X \to X$ is an invertible mapping of the set X into itself, a situation typical for differential equations is possible: the equation is solvable for any right-hand side and there is no uniqueness of the solution. As in the case of differential equations, the question arises of formulating well-posed boundary value problems, i.e., of specifying additional conditions under which the solution exists and is unique. In this paper, we discuss the question of what kind of additional conditions lead to well-posed boundary-value problems for the equations under consideration.

Keywords: binomial functional equation, uniqueness of solution, well-posed boundary-value problem.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: A. B. Antonevich, D. I. Kravtsov, "On the formulation of boundary-value problems for binomial functional equations," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 3, 343–355. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-343-355`

REFERENCES

1. A. B. Antonevich, *Lineynye funktsional'nye uravneniya: operatornyy podkhod* [Linear Functional Equations: Operator Approach], Universitetskoe, Minsk, 1988 (in Russian).
2. A. B. Antonevich, "Kogerentnaya lokal'naya giperbolichnost' lineynogo rasshireniya i sushchestvennye spektry operatora vzveshennogo sdviga na otrezke" [Coherent local hyperbolicity of a linear extension and essential spectra of the weighted shift operator on a segment], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2005, **39**, No. 1, 52–69 (in Russian).
3. A. B. Antonevich, "Pravostoronnyaya obratimost' dvuchlennykh funktsional'nykh operatorov i graduirovannaya dikhotomiya" [Right-sided invertibility of binomial functional operators and graded dichotomy], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2021, 67, No. 2, 208–236 (in Russian).
4. A. B. Antonevich, A. A. Akhmatova, and Yu. Makovska, "Otobrazheniya s razdelimoy dinamikoy i spektral'nye svoystva porozhdennykh imi operatorov" [Mappings with separable dynamics and spectral properties of the operators generated by them], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2015, **206**, No. 3, 3–34 (in Russian).
5. A. B. Antonevich and E. V. Panteleeva, "Korrektnye kraevye zadachi, pravostoronnyaya giperbolichnost' i eksponentsial'naya dikhotomiya" [Well-posed boundary-value problems, right-sided hyperbolicity and exponential dichotomy], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2016, **100**, No. 1, 13–29 (in Russian).
6. O. A. Arkhipenko, "Kraevye zadachi dlya raznostnykh uravneniy" [Boundary-value problems for difference equations], *Tr. BGTU. Ser. 3. Fiz.-mat. nauki i inf.* [Proc. BGTU. Ser. 3. Phys. Math. Sci. Inf.], 2018, No. 1, 12–18 (in Russian).

7. Yu. I. Karlovich and R. Mardiev, "Ob odnostoronney obratimosti funktsional'nykh operatorov s nekarlemanovskim sdvigom v prostranstvakh Gel'dera" [On one-sided invertibility of functional operators with non-Carleman shift in Hölder spaces], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math., 1987, **3**, 77–80 (in Russian).
8. Ya. B. Lopatinskii, "Ob odnom sposobe privedeniya granichnykh zadach dlya sistemy differentsial'nykh uravneniy ellipticheskogo tipa k regulyarnym integral'nym uravneniyam" [On a method of reducing boundary-value problems for a system of differential equations of elliptic type to regular integral equations], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 1953, **5**, 123–151 (in Russian).
9. R. Mardiev, "Kriteriy poluneterovosti odnogo klassa singulyarnykh integral'nykh operatorov s nekarlemanovskim sdvigom" [A criterion for the semi-Noetherian property of a class of singular integral operators with non-Carleman shift], *Dokl. Akad. nauk UzSSR* [Rep. Acad. Sci. UzSSR], 1985, **2**, 5–7 (in Russian).
10. A. Shukur Ali and O. A. Arkhipenko, "Rezol'venta kraevoy zadachi dlya raznostnogo uravneniya" [Resolvent of a boundary-value problem for a difference equation], *Probl. fiz., mat. i tekhn.* [Probl. Phys. Math. Tech.], 2016, **28**, No. 3, 70–75 (in Russian).
11. A. Antonevich and Yu. Makowska, "On spectral properties of weighted shift operators generated by mappings with saddle points," *Complex Anal. Oper. Theory*, 2008, **2**, 215–240.
12. A. Yu. Karlovich and Yu. I. Karlovich, "One-sided invertibility of binomial functional operators with a shift in rearrangement-invariant spaces," *Integral Equ. Oper. Theory*, 2002, **42**, 201–228.

A. B. Antonevich
Belarusian State University, Minsk, Belarus
E-mail: `aiantonevich@mail.ru`

D. I. Kravtsov
Belarusian State University, Minsk, Belarus
E-mail: `kravtsov.dmitriy1506@yandex.by`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 3 (2024). С. 356–374
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.28+512.552
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-356-374
EDN: PFEHJE

ТРИВИАЛЬНОСТЬ ВНЕШНИХ ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЙ В $\ell_p(G)$ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ГРУПП

А. А. Арутюнов[1], **А. В. Наянзин**[2]

[1]*Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия*
[2]*Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия*

Аннотация. В данной работе изучены дифференцирования в групповых кольцах, пополненных по различным видам норм. Основное внимание уделяется классу групп, в которых сопряжения действуют в некотором смысле контролируемо. С использованием метода отождествления дифференцирований и характеров на некоторой категории получен альтернативный способ доказательства того, что для этого класса групп все дифференцирования являются внутренними.

Ключевые слова: дифференцирование на алгебрах, внутреннее дифференцирование, характер.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. А. А. Арутюнов поддержан грантом РНФ № 22-11-00042 `https://rscf.ru/en/project/22-11-00042/` в ИПУ РАН.

Для цитирования: *А. А. Арутюнов, А. В. Наянзин.* Тривиальность внешних дифференцирований в $\ell_p(G)$ для одного класса групп// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 3. С. 356–374. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-356-374`

1. Введение

Пусть имеется некоторая ассоциативная алгебра. Пока безразлично, имеет ли она топологическое оснащение. Под дифференцированиями на ней понимаются линейные операторы, удовлетворяющие правилу Лейбница. При наличии топологического оснащения к этому определению добавляется требование ограниченности. Хорошо известен класс т. н. внутренних дифференцирований, т. е. задающихся коммутатором.

Широко изучается вопрос о том, при каких условиях на алгебру и топологию все дифференцирования являются внутренними. На языке гомологической алгебры это равносильно вырождению первых когомологий Хохшильда.

Наша цель состоит в том, чтобы продемонстрировать, как метод исследования дифференцирований через характеры, предложенный в работах [2,3], работает для случая дифференцирований на групповых алгебрах со значениями в свободных ℓ_p бимодулях. По сути, содержание настоящей работы состоит в предъявлении геометрических и, как нам кажется, более простых доказательств ранее известных результатов Б. Джонсона и других исследователей, часть из которых мы перечислим ниже.

Такой подход позволяет дать более простое и геометрическое доказательство, а также найти подход к исследованию более общих классов операторов. В частности, фактически без изменений эта техника может быть применена к исследованию (σ, τ)-дифференцирований, как это было сделано, например, в работе [5] (без топологического оснащения).

1.1. Постановка задачи и история вопроса. Перейдём к более строгим формулировкам и начнём с нескольких стандартных определений.

Определение 1.1 (см. [8, Definition 1.8.1])**.** Пусть A — алгебра над $\mathbb{C}$, M — некоторый A-бимодуль. *Дифференцированием* в алгебре A со значениями в M называется линейное отображение
$$d\colon A \to M \tag{1.1}$$
такое, что для каждых a, $b \in A$ выполнена формула Лейбница
$$d(ab) = d(a)b + ad(b). \tag{1.2}$$

Определим внутренние дифференцирования как коммутаторы.

Определение 1.2. Пусть $x \in M$. *Внутренним дифференцированием* D_x называется дифференцирование, которое действует на $a \in A$ следующим образом:
$$D_x(a) = xa - ax. \tag{1.3}$$

В работе [13] Джонсон и Рингроуз показали, что все дифференцирования в алгебре $\ell_1(G)$ для дискретной группы G внутренние.

В [8] сформулирован более общий вопрос (Question 5.6 B). Пусть G — локально компактная группа. Всякое ли дифференцирование из $L^1(G)$ в $M(G)$ является внутренним? Здесь $M(G)$ — пространство комплекснозначных регулярных борелевских мер на G.

Во многих частных случаях ответ получен Джонсоном. Он исследовал этот вопрос как подходящий пример для теории когомологий в банаховых алгебрах. Так, в [12] им было показано, что для связной группы Ли G все дифференцирования из $L_1(G)$ в себя имеют вид
$$Da = a\mu - \mu a, \tag{1.4}$$
где $a \in L_1(G)$, $\mu \in M(G)$. Окончательно поставленная задача была решена Лозером в работе [15].

Отметим, что группа G однозначно восстанавливается по $M(G)$ в том смысле, что из $M(G_1) \cong M(G_2)$ следует, что G_1 и G_2 изоморфны. В случае дискретной группы $M(G) \cong \ell_1(G)$, поэтому аналогичный результат выполняется для алгебр $\ell_1(G)$, см. [21, с. 131–140]. При этом для групповой алгебры соответствующее утверждение неверно. Пример двух неизоморфных групп, имеющих одинаковые групповые алгебры, можно найти в том же источнике на с. 129.

Известно, что существуют банаховы и даже C^*-алгебры, в которых не все дифференцирования являются внутренними. Одним из примеров является алгебра $K(H)$, состоящая из компактных операторов, действующих в гильбертовом пространстве H. Если рассмотреть ограниченный оператор $u \notin K(H) + \mathbb{C}\,\mathrm{id}$, то отображение $D_u(a) = ua - au$ является не внутренним дифференцированием $K(H) \to K(H)$, см. [18]. Однако в 1966 году Сакаи доказал [25], что для каждого дифференцирования в C^*-алгебре A найдется элемент b из слабого замыкания $\overline{A}$ такой, что $d(a) = [b, a]$ для каждого $a \in A$.

Заметим, что случаи C^*-алгебр и случай групповой алгебры $L_1(G)$ «не пересекаются». Имеется в виду, что $L_1(G)$ является C^*-алгеброй тогда и только тогда, когда группа G тривиальна, см [9, Prop. 2.6.2].

Отметим, что в вышеперечисленных результатах от дифференцирований не требовалось непрерывности. Это связано с явлением т. н. автоматической непрерывности. Оно заключается в том, что для ряда банаховых алгебр и бимодулей над ними все дифференцирования являются непрерывными. Для C^*-алгебр этот результат был доказан Сакаи в 1960 году в статье [24].

Определение 1.3 (см. [23, Definition 2.3.1])**.** *Радикалом* R банаховой алгебры A называется пересечение ядер всех неприводимых представлений A. Если $R = \{0\}$, то A называется *полупростой.*

В 1968 году в работе [14] Джонсон показал, что в полупростых банаховых алгебрах все дифференцирования автоматически непрерывны. Более того, если вместо линейности дифференцирования D потребовать только аддитивность, то найдется подпространство конечной коразмерности, ограничение D на которое будет непрерывным. Известно, что для всякой локально компактной группы G алгебра $L_1(G)$ является полупростой, см. [4, с. 440]. Следовательно, все дифференцирования в $L_1(G)$ автоматически непрерывны.

В групповых алгебрах, не оснащенных нормировкой, алгебра внешних дифференцирований часто оказывается нетривиальной. В работах [2, 3] изучена структура данной алгебры и приведено ее описание в терминах исходной группы G. Там же разработана техника исследования дифференцирований с использованием характеров.

Простейшим семейством дифференцирований, которые не являются внутренними, являются центральные дифференцирования, см. [1, определение 3]. Здесь существенную роль играет то, что характер, соответствующий этому классу дифференцирований, нетривиален на некоторой петле (эндоморфизме в группоиде).

В [6] было показано, что необходимым условием для непрерывности дифференцирования является его квазивнутренность, т. е. тривиальность на петлях.

Важным приложением этих вопросов является поиск неподвижных точек действий групп. Поясним связь между ними на примере дискретной группы G. Пусть A — банахов бимодуль над $\ell_1(G)$, $D\colon \ell_1(G) \to A$ — некоторое дифференцирование. Сопоставим ему действие группы G на A по формуле

$$g \circ a = gag^{-1} + D(g)g^{-1}, \quad \text{где } g \in G,\ a \in A. \tag{1.5}$$

Легко видеть, что

$$\forall g \in G \quad g \circ a = a \quad \Leftrightarrow \quad D(g) = ga - ag. \tag{1.6}$$

То есть у действия есть неподвижная точка тогда и только тогда, когда дифференцирование является внутренним. В 2012 году рядом соавторов [7] была доказана теорема о неподвижной точке, применимая для действия локально компактной группы на $M(G)$, и с помощью нее получено альтернативное, более короткое решение проблемы Джонсона.

Также стоит отметить связь алгебры дифференцирований с когомологиями Хохшильда. Пространство, полученное факторизацией всех дифференцирований по внутренним, совпадает с первой группой когомологий Хохшильда, см. [22, Sec. 11.1]. То есть то, что все дифференцирования $A \to M$ внутренние, равносильно тому, что первая группа когомологий $HH^1(G, M)$ тривиальна. В работах [16, 17] дано геометрическое описание когомологий Хохшильда. В работах [19, 26] исследован вопрос нетривиальности когомологий Хохшильда в групповых алгебрах и скрученных групповых алгебрах над полем конечной характеристики.

Помимо вышеперечисленного, методы изучения дифференцирований групповых алгебр имеют приложение к теории кодирования, это показано в работе [10].

1.2. Основной результат. Мы определим класс групп, который мы будем называть BC-группами. Этот класс состоит из групп, в которых для каждого ограниченного множества B выполнено условие

$$\sup_{g \in G} \operatorname{diam}(g^{-1}Bg) < \infty. \tag{1.7}$$

То есть в таких группах сопряжения не слишком сильно меняют расстояния между элементами группы (см. определение 3.1). Основным результатом является следующая теорема.

Теорема 1.1. *Пусть G — BC-группа, размер всех конечных классов сопряженности в которой равномерно ограничен. Тогда каждое непрерывное дифференцирование $d\colon \ell_1(G) \to \ell_p(G)$ является внутренним.*

Этот результат может быть также выведен из более ранних работ. В частности, в [11] показано, что полученный результат верен для всех аменабельных групп (подробнее в приложении, раздел 5). Отметим, что найденные нами примеры BC-групп являются аменабельными. В монографии [8] показано, что при $p \in (1, +\infty)$ результат верен для произвольной локально компактной группы (см. [8, Corollary 5.6.52]).

Однако, повторим, что наше доказательство опирается на совсем иные идеи и является более простым. Кроме того, заметим, что фактически дословное повторение наших рассуждений применимо, например, к случаю (σ, τ)-дифференцирований.

2. Основные определения

Мы будем работать только с дискретными конечно порожденными группами. Всюду ниже, если не оговорено противное, считаем, что группа G задана образующими и соотношениями $G = \langle \mathcal{X} \mid R\rangle$, где $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_n\}$ — конечное множество порождающих, $R = \{r_i \mid i \in I\}$ — множество соотношений.

Определение 2.1. Назовем *ℓ_p-нормой* на групповом кольце $\mathbb{C}[G]$ норму вида

$$\left\| \sum_{g\in G} \alpha(g) g \right\|_{\ell_p} := \sqrt[p]{\sum_{g\in G} |\alpha(g)|^p}. \tag{2.1}$$

Определение 2.2. Через $\left(\widehat{\mathbb{C}}[G], \|\cdot\|\right)$ будем обозначать пополнение группового кольца по обозначенной норме. Как правило, именно это пространство будет играть роль бимодуля. Для пространства $\left(\widehat{\mathbb{C}}[G], \|\cdot\|_{\ell_p}\right)$ будем использовать стандартное обозначение $\ell_p(G)$.

Заметим, что в случае ℓ_p-нормы на $\mathbb{C}[G]$ умножение на элемент группы G является непрерывным оператором из $\mathbb{C}[G] \to \mathbb{C}[G]$ и потому корректно продолжается до оператора $\ell_p(G) \to \ell_p(G)$. Поэтому $\ell_p(G)$ является бимодулем над $\mathbb{C}[G]$. Также отметим, что непрерывное дифференцирование $d\colon (\mathbb{C}[G], \|\cdot\|_1) \to \left(\widehat{\mathbb{C}}[G], \|\cdot\|_2\right)$, как и всякий непрерывный оператор, продолжается до оператора $\hat{d}\colon \left(\widehat{\mathbb{C}}[G], \|\cdot\|_1\right) \to \left(\widehat{\mathbb{C}}[G], \|\cdot\|_2\right)$.

В [2] была развита техника, которая позволяет сопоставить каждому дифференцированию характер, заданный на группоиде Γ действия сопряжениями. Напомним, как это делается. Будем использовать обозначения из статьи [1].

По каждой группе G можно построить следующий группоид.

Определение 2.3. *Группоидом действия сопряжениями* Γ назовем малую категорию, объектами которой являются элементы $g \in G$. Множество морфизмов $\mathrm{Hom}(\Gamma)$ есть множество всевозможных пар элементов $(u, v) \in G \times G$. При этом стрелка $\phi = (u, v)$ ведет из элемента $s(\phi) = v^{-1}u$ в элемент $t(\phi) = uv^{-1}$.

Рассмотрим два морфизма $\phi = (u_1, v_1)$ и $\psi = (u_2, v_2)$ таких, что $t(\phi) = s(\psi)$, т. е. таких, что для них определена композиция $\psi \circ \phi$. Она задается формулой

$$\psi \circ \phi := (v_2u_1, v_2v_1)\,. \tag{2.2}$$

Определение 2.4. *Характером* χ на группоиде Γ будем называть такое отображение χ : $\mathrm{Hom}(\Gamma) \to \mathbb{C}$, что для любых двух морфизмов ϕ и ψ, между которыми определена композиция $\psi \circ \phi$, выполняется соотношение $\chi(\psi \circ \phi) = \chi(\phi) + \chi(\psi)$.

Класс сопряженности элемента u будем обозначать как u^G.

Определение 2.5. Обозначим через $\Gamma_{[u]}$ подгруппоид Γ с объектами

$$\mathrm{Obj}(\Gamma_{[u]}) = \{g \in G : \mathrm{Hom}(u, g) \neq \varnothing\} = u^G \tag{2.3}$$

и всевозможными морфизмами между ними, т. е.

$$\mathrm{Hom}(\Gamma_{[u]}) = \{(u, v) \in \mathrm{Hom}(\Gamma) \mid v^{-1}u, uv^{-1} \in \mathrm{Obj}(\Gamma_{[u]})\}. \tag{2.4}$$

Иногда мы будем называть $\Gamma_{[u]}$ *компонентой связности* элемента u в группоиде Γ.

Обозначим через δ_h отображение $\widehat{\mathbb{C}}[G] \to \mathbb{C}$, действующее по правилу $\delta_h\left(\sum\limits_{g\in G} \alpha(g)g\right) = \alpha(h)$. Теперь мы можем отождествить дифференцирования и характеры на группоиде.

Предложение 2.1. *Отображения*

$$d \mapsto \left((h, g) \overset{\chi}{\longmapsto} \delta_h(d(g))\right), \quad \chi \mapsto \left(g \overset{d}{\longmapsto} \sum_{h\in G} \chi(h, g)h\right) \tag{2.5}$$

задают взаимно обратные изоморфизмы между пространством дифференцирований $\{d \mid \mathbb{C}[G] \to \ell_q(G)\}$ *и пространством «суммируемых» характеров* $\left\{\chi \mid \sum\limits_{h\in G} |\chi(h,g)|^q < \infty \text{ для всех } g \in G\right\}$.

Доказательство. Легко видеть, что если d — отображение из $\mathbb{C}[G]$ в $\ell_q(G)$, тогда соответствующее ему отображение $\chi\colon \mathrm{Hom}(\Gamma) \to \mathbb{C}$ удовлетворяет условию $\sum\limits_{h\in G} |\chi(h,g)|^q < \infty$ для всех $g \in G$. Несложно видеть, что верно и обратное.

Пусть d — дифференцирование. То, что χ является характером, проверяется аналогично доказательству теоремы 1 в [2]. Для ясности, проделаем эту проверку.

Если определена композиция $(h_2, g_2) \circ (h_1, g_1)$ то

$$h_1 g_1^{-1} = g_2^{-1} h_2, \tag{2.6}$$

$$(h_2, g_2) \circ (h_1, g_1) = (g_2 h_1, g_2 g_1). \tag{2.7}$$

С учетом этого получаем

$$\begin{aligned} \chi(g_2h_1, g_2g_1) &= \delta_{g_2h_1}(d(g_2g_1)) = \delta_{g_2h_1}(d(g_2)g_1) + \delta_{g_2h_1}(g_2 d(g_1)) = \\ &= \delta_{g_2h_1g_1^{-1}}(d(g_2)) + \delta_{h_1}(d(g_1)) \overset{(2.6)}{=} \delta_{h_2}(d(g_2)) + \delta_{h_1}(d(g_1)) = \chi(h_2, g_2) + \chi(h_1, g_1). \end{aligned} \tag{2.8}$$

То есть χ действительно характер.

Проверку того, что каждому характеру соответствует дифференцирование и указанные отображения являются взаимно обратными, оставим читателю в качестве легкого упражнения. □

Таким образом, характеры можно отождествить с дифференцированиями, и они связаны формулой

$$d(g) = \sum_{h\in G} \chi(h,g)h = g\left(\sum_{t\in G} \chi(gt, g)t\right), \quad \forall g \in G, \tag{2.9}$$

где последнее равенство получено с помощью замены $h = gt$.

Определение 2.6. Дифференцирование $d\colon \mathbb{C}[G] \to \ell_q(G)$ называется *квазивнутренним*, если соответствующий ему характер тривиален на петлях, т. е. морфизмах вида (h, g) таких, что $g^{-1}h = hg^{-1}$.

Несложно видеть, что все внутренние дифференцирования являются квазивнутренними. В [6] было показано, что для групповых алгебр с нормой, подчиненной супремумной, все дифференцирования обязаны быть квазивнутренними. В случае, когда характер равен нулю на всех петлях, его можно задать через функцию на вершинах.

Определение 2.7. *Потенциалом* характера χ назовем такую функцию $\phi\colon G \to \mathbb{C}$, что

$$\chi(h,g) = \phi(hg^{-1}) - \phi(g^{-1}h). \tag{2.10}$$

Легко видеть, что для каждого тривиального на петлях характера можно найти потенциал ϕ, который его задает. И наоборот, каждая функция $\phi\colon G \to \mathbb{C}$ задает по формуле (2.10) некоторый характер. При этом, изменив ϕ на константу на некотором классе сопряженности u^G, мы не изменим значения характера.

Переписав формулу (2.9) в терминах потенциалов, получим:

$$d(g) = \sum_{h\in G} \left(\phi(hg^{-1}) - \phi(g^{-1}h)\right) h = \sum_{t\in G} \left(\phi(gtg^{-1}) - \phi(t)\right) gt. \tag{2.11}$$

Рассмотрим формальную сумму $a = \sum\limits_{t\in G} \phi(t)t$, тогда формула переписывается как

$$d(g) = \sum_{t\in G} \phi(t)\,(tg - gt) = [a, t]. \tag{2.12}$$

Эта формула объясняет смысл термина «квазивнутреннее дифференцирование». Действительно, мы представили наше дифференцирование в виде коммутатора, но элемент a является произвольной функцией из $G \to \mathbb{C}$. Тем самым дифференцирование $\mathbb{C}[G] \to \ell_q(G)$ является внутренним тогда и только тогда, когда возможно подобрать потенциал ϕ так, чтобы a являлся элементом $\left(\widehat{\mathbb{C}}[G], \|\cdot\|_{\ell_q}\right)$, что равносильно тому, что $\|a\|_{\ell_q} < \infty$.

Определение 2.8. Пусть G — группа, $\mathcal{X}$ — набор ее образующих. *Графом сопряженности* $\mathrm{sk} = \mathrm{sk}(G, \mathcal{X})$ назовем раскрашенный ориентированный граф, построенный по G и $\mathcal{X}$ следующим образом:

- каждый элемент g задает вершину графа, т. е. $V(\mathrm{sk}) = G$;
- из вершины g в вершину h ведет ребро цвета $x \in \mathcal{X} \cup \mathcal{X}^{-1}$, если $h = xgx^{-1}$.

Компоненту связности элемента u в графе сопряженности обозначим как $\mathrm{sk}_u(G, \mathcal{X})$. Если понятно о какой группе и о какой системе образующих идет речь, то будем сокращать обозначение до sk_u. Легко видеть, что множество вершин, принадлежащих компоненте связности $\mathrm{sk}_u(G)$, совпадает с множеством объектов $\mathrm{Obj}(\Gamma_{[u]})$. Оба множества равны классу сопряженности u^G.

Обобщенной метрикой на множестве X будем называть функцию $\rho\colon X \times X \to [0, +\infty]$ такую, что для каждых $x, y, z \in X$ выполняется $\rho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$, $\rho(x, y) = \rho(y, x)$, $\rho(x, z) \leqslant \rho(x, y) + \rho(y, z)$. Отличие от метрики в том, что ρ может принимать бесконечное значение.

Определение 2.9. *Обобщенная метрика* ρ в группе G с системой образующих $\mathcal{X}$ определяется как минимальное количество ребер в графе сопряженности $\mathrm{sk}(G, \mathcal{X})$, по которым от одной вершины можно дойти до другой. Мы считаем расстояние бесконечным, если вершины лежат в различных компонентах связности графа.

Всюду дальше, если не оговорено противное, мы будем работать именно с данной метрикой. Заметим, что все ограниченные множества в $\mathrm{sk}(G)$ содержат конечное число элементов.

Замечание. Граф сопряженности можно вложить в группоид Γ. Действительно, множество вершин и там, и там индексируется группой G. Ребро цвета x, соединяющее g и xgx^{-1}, отобразим в морфизм $(xg, x) \in \mathrm{Hom}(g, xgx^{-1})$.

Для наглядности приведем конкретный пример графа сопряженности.

Определение 2.10. *Группой Гейзенберга* называется группа, элементами которой являются матрицы вида

$$H_3(\mathbb{Z}) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & a & c \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \mid a,\, b,\, c \in \mathbb{Z} \right\}. \tag{2.13}$$

Ее можно задать образующими и соотношениями следующим образом:

$$\begin{gathered} H_3(\mathbb{Z}) = \langle x, y, z \mid [x, y] = z, [x, z] = [y, z] = e \rangle, \quad \text{где} \\ x = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad y = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad z = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{gathered} \tag{2.14}$$

Пример 2.1. На рисунке ниже изображена компонента $\mathrm{sk}_x(H_3(\mathbb{Z}))$ графа сопряженности группы Гейзенберга. Так как $yxz^ky^{-1} = xz^{k-1}$, то ребра цвета y соединяют различные вершины. Ребра с цветами x, z являются петлями. Чтобы не было лишнего нагромождения, ребра с цветами y^{-1}, x^{-1}, z^{-1} не изображены на рисунке. Также, поскольку нас интересуют тривиальные на циклах характеры, петли в дальнейшем изображаться не будут.

Определение 2.11. Будем говорить, что потенциал ϕ *выравнивается к значению* a_0 в компоненте sk_{u_0}, если выполнено следующее условие:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists K : \forall g \in u_0^G \setminus K \hookrightarrow |\phi(g) - a_0| < \varepsilon, \tag{2.15}$$

где $K \subseteq u_0^G$ — некоторое конечное множество. Заметим, что для конечных компонент связности графа сопряженности определение тривиально выполняется, так как в качестве K мы можем взять все вершины компоненты.

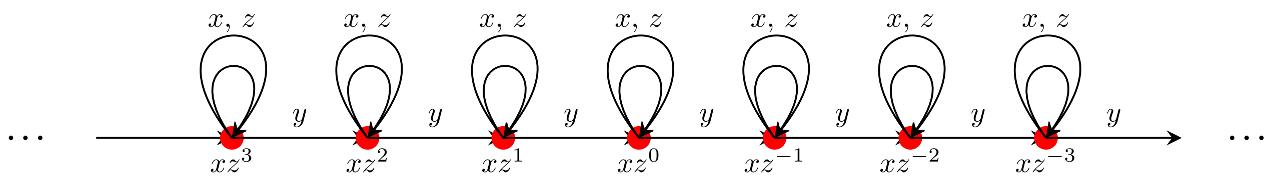


Рис. 1. Граф сопряженности $\mathrm{sk}_x(H_3(\mathbb{Z}))$

Fig. 1. Conjugacy graph $\mathrm{sk}_x(H_3(\mathbb{Z}))$

Мы можем менять значение потенциала на константу, поэтому в тех случаях, когда он выравнивается, будем считать, что он выравнивается к 0. В следующих разделах будет показано, что для определенного класса групп у непрерывных дифференцирований потенциал обязательно выравнивается.

Следующее предложение очевидно.

Предложение 2.2. *Как-нибудь пронумеруем все вершины* sk_{u_0}. *Потенциал* ϕ *выравнивается в* sk_{u_0} *тогда и только тогда, когда последовательность* $\{\phi(g_k)\}_{k=1}^{\infty}$ *имеет конечный предел.*

Прежде всего, покажем, что необходимым условием для того, чтобы образ дифференцирования лежал в $\ell_p(G)$, является отсутствие резких изменений потенциала от точки к точке при стремлении к бесконечности. Более строго это сформулировано в нижестоящем предложении.

Предложение 2.3. *Пусть потенциал* ϕ *задает дифференцирование* $d\colon \mathbb{C}[G] \to \ell_p(G)$, *где* $p \in [1, \infty)$, *по формуле* (2.10). *Тогда для каждого* $\varepsilon > 0$ *найдется конечное множество* $K \subseteq G$ *такое, что для любых* g_1, g_2, *являющихся смежными в графе сопряженности, выполнено неравенство* $|\phi(g_1) - \phi(g_2)| < \varepsilon$. *Здесь не предполагается, что* d *непрерывно.*

Доказательство. В противном случае в $\mathrm{sk}(G)$ найдется бесконечно много ребер, на которых разность потенциала больше ε. Поскольку группа конечно порождена, то для хотя бы одного порождающего элемента $x \in \mathcal{X}$ множество $\{g \in G \mid |\chi(g, x)| > \varepsilon\}$ будет бесконечным. В силу формулы $d(g) = \sum\limits_{g \in G} \chi(h, g) g$ имеем $d(x_i) \notin \ell_p(G)$. $\square$

Изначально стояла задача исследовать дифференцирования $\ell_p(G) \to \ell_q(G)$, т. е. такие линейные операторы между данными пространствами, которые удовлетворяют тождеству Лейбница на элементах группы G. Однако каждое такое дифференцирование можно ограничить на $\ell_1(G) \subset \ell_p(G)$ и снова получить непрерывное дифференцирование. Так как $\ell_1(G)$ всюду плотно в $\ell_p(G)$, то оба дифференцирования одновременно либо являются, либо не являются внутренними. Но исследовать дифференцирования из $\ell_1(G) \to \ell_p(G)$ удобнее по двум причинам. Во-первых, $\ell_p(G)$ является *банаховым* бимодулем над $\ell_1(G)$; во-вторых, для определения нормы в $\ell_1(G)$ достаточно смотреть только на нормы базисных элементов.

Предложение 2.4. *Пусть* X *— банахово пространство,* $\mathcal{A}\colon \ell_1(G) \to X$ *— непрерывное линейное отображение. Тогда* $\|\mathcal{A}\| = \sup\limits_{g \in G} \|\mathcal{A}(g)\|$.

Доказательство. Очевидно, что $\|\mathcal{A}\| \geqslant \sup\limits_{g \in G} \|\mathcal{A}(g)\|$. Покажем, что верно обратное неравенство. Пусть $w = \sum\limits_{g \in G} \alpha(g) g$, тогда

$$\|\mathcal{A}(w)\| = \left\| \sum_{g \in G} \alpha(g) \mathcal{A}(g) \right\| \leqslant \sup_{g \in G} \|\mathcal{A}(g)\| \left(\sum_{g \in G} |\alpha(g)| \right) = \sup_{g \in G} \|\mathcal{A}(g)\| \, \|w\|. \tag{2.16}$$

Значит, $\|\mathcal{A}\| \leqslant \sup\limits_{g \in G} \|\mathcal{A}(g)\|$. $\square$

В силу всего вышесказанного в дальнейшем будем работать с дифференцированиями $\ell_1(G) \to \ell_p(G)$.

3. Условие ограниченности сопряжений

В отличие от действия группы левыми сдвигами на своем графе Кэли, действия сопряжениями на графе сопряженности не являются изометриями и могут довольно сильно изменять расстояния между элементами. Например, в свободной группе $F_2 = \langle a, b \mid \varnothing \rangle$ вершины a и bab^{-1} являются смежными, т. е. находятся на расстоянии 1 друг от друга. При этом расстояние $\rho(a^n a a^{-n}, a^n bab^{-1}a^{-n}) = n+1$, т. е. стремится к бесконечности. Мы будем рассматривать группы, в которых сопряжения действуют в некотором смысле контролируемо, т. е. не слишком сильно меняют расстояния между элементами.

Определение 3.1. Будем говорить, что G удовлетворяет *условию ограниченности сопряжений* (для краткости будем называть такие группы *BC-группами*), если

$$\forall h_1, h_2 : \rho(h_1, h_2) = 1 \ \exists C > 0 : \forall g \in G \hookrightarrow \rho(gh_1g^{-1}, gh_2g^{-1}) < C. \tag{3.1}$$

Несложно видеть, что группа G является BC-группой тогда и только тогда, когда для каждого ограниченного подмножества $K \subset G$ верно, что

$$C(K) = \sup_{g\in G} \operatorname{diam}(g^{-1}Kg) < \infty. \tag{3.2}$$

Теорема 3.1. *Свойство ограниченности сопряжений не зависит от выбора* (*конечной*) *системы образующих.*

Доказательство. Зафиксируем две системы образующих $\mathcal{X} = \{x_1, \ldots, x_n\}$ и $\mathcal{Y} = \{y_1, \ldots, y_m\}$. Будем обозначать метрику в графе сопряженности $(G, \mathcal{X})$ символом ρ, а в графе $(G, \mathcal{Y})$ символом d. Предположим, что условие ограниченности сопряжений выполнено относительно системы образующих $\mathcal{X}$, т. е. для каждого $h \in G$ найдется константа $C = C(B_1(h))$ такая, что для всех $g \in G$ и $x_i \in \mathcal{X}$ выполняется неравенство $\rho(gxhx^{-1}g^{-1}, ghg^{-1}) < C$.

Зафиксируем числа L и M, определенные по формулам

$$L = \max_{y\in\mathcal{Y}} |y|_{\mathcal{X}}, \quad M = \max_{x\in\mathcal{X}} |x|_{\mathcal{Y}}, \tag{3.3}$$

где $|y|_{\mathcal{X}}$ — длина слова y относительно системы образующих $\mathcal{X}$, т. е. минимальный номер n такой, что y может быть представлено в виде $x_{i_1} \ldots x_{i_n}$, где $x_{i_k} \in \mathcal{X}$. Тогда для произвольных $h, g \in G$, $y \in \mathcal{Y}$ получаем

$$d(gyhy^{-1}g^{-1}, ghg^{-1}) \leqslant L\rho(gyhy^{-1}g^{-1}, ghg^{-1}) = L\rho(gw(x)hw(x)^{-1}g^{-1}, ghg^{-1}) \leqslant LC\left(B_M^{\mathcal{X}}(h)\right),$$

где $w(x)$ — кратчайшее слово, выражающее y через образующие $\mathcal{X}$, $C(B_M^{\mathcal{X}})$ — константа из условия ограниченности сопряжений для шара радиуса M относительно метрики ρ. Это завершает доказательство. □

3.1. Примеры.

Приведем примеры групп, для которых выполняется условие ограниченности сопряжений.

Пример 3.1. Любая нильпотентная группа ранга 2 удовлетворяет условию ограниченности сопряжений, поскольку для таких групп граф $\mathrm{sk}_u(G)$ изоморфен графу Кэли $G/Z(u)$, см. [1, лемма 4]. Группа $G/Z(u)$ — абелева, поэтому константу C из условия ограниченности сопряжений можно взять равной единице. В частности, группа Гейзенберга

$$H_3(\mathbb{Z}) = \langle x, y, z \mid [x, y] = z, [x, z] = [y, z] = e \rangle$$

является BC-группой.

Определение 3.2. Группа называется *FC-группой*, если в ней все классы сопряженности конечны. Группа называется *BFC-группой*, если найдется $N \in \mathbb{N}$ такое, что для каждого $g \in G$ выполнено $|g^G| < N$, где $|g^G|$ — количество элементов в классе сопряженности.

Пример 3.2. FC-группы удовлетворяют условию ограниченности сопряжений, поскольку по определению в них все компоненты связности графа сопряженности (т. е. классы сопряженности) конечны. Они же являются BFC-группами, так как мы работаем только с конечно порожденными группами. Они же являются группами с конечным коммутантом, см. [20, Theorem 3.1].

Пример 3.3. Два предыдущих примера можно обобщить следующим образом. Пусть G — группа, удовлетворяющая условию $|G'/(Z(G) \cap G')| < \infty$, тогда G является BC-группой.

Действительно, пусть $\{[a_1], \dots, [a_k]\}$ — элементы $G'/(Z(G) \cap G')$, а $A = \{a_1, \dots, a_k\}$ — множество их представителей. Тогда для каждого $x \in \mathcal{X}$, $g \in G$ верно, что $gx = zaxg$, где $a \in A$, $z \in Z(G)$. Отсюда получаем

$$\rho(gug^{-1}, gxux^{-1}g^{-1}) = \rho(gug^{-1}, axgu(axg)^{-1}) \leqslant |a| + 1 \leqslant \max_{a' \in A} |a'| + 1. \tag{3.4}$$

Здесь $|a|$ — длина элемента $a \in G$ относительно множества образующих $\mathcal{X}$.

Пример 3.4. Рассмотрим бесконечную диэдральную группу $D_\infty = \mathbb{Z}_2 * \mathbb{Z}_2 = \langle a, b | a^2, b^2 \rangle$. В приведенном виде элементы группы — слова, состоящие из букв a, b, в которых все буквы, идущие подряд, различны. Опишем классы сопряженности. Если слово w начинается и заканчивается одной и той же буквой, то оно лежит либо в $[a]$, либо в $[b]$. Если же слово w начинается и кончается различными буквами, то оно имеет вид $(ab)^n$ или $(ba)^n$. Для слов такого вида имеем $[(ab)^n] = [(ba)^n] = \{(ab)^n, (ba)^n\}$. Нас интересуют бесконечные классы сопряженности, для определенности будем работать с $[a]$.

Проверим выполнение условия ограниченности сопряжений. Рассмотрим элемент вида $(ba)^k b$. Соседние с ним элементы — $a(ba)^k ba$ и $a(ba)^{k-1}$. Посмотрим, как изменится расстояние между элементами $h_1 = (ba)^k b$, $h_2 = a(ba)^k ba$ при сопряжении посредством g. Запишем g как приведенное слово и будем по очереди сопрягать на каждую букву. Если a — крайняя справа буква в g, то h_1 сдвинется на 1 вправо (см. рис. 2), а h_2 на 1 влево. Затем при сопряжении на b элемент ah_1a вновь сдвинется вправо, а ah_2a влево, и т. д. до тех пор, пока один из них не достигнет начала луча. Если это случится, то после этого они начнут сдвигаться в одну сторону. То есть $B_1(h_1) = 2\rho(h_1, a) + 1$. Единица появилась потому что, достигнув конца отрезка, т. е. вершины a, нам придется снова сопрягать элементом a, и на этом этапе движения вправо не начнется.

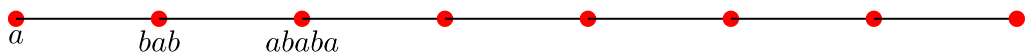


Рис. 2. Граф сопряженности $\mathrm{sk}_a(D_\infty)$

Fig. 2. Conjugacy graph $\mathrm{sk}_a(D_\infty)$

Предложение 3.1.

a) *Пусть G, H — BC-группы, тогда $G \times H$ также является BC-группой.*

b) *Пусть G — BC-группа, $H \subseteq G$ — нормальная подгруппа. Тогда G/H тоже BC-группа.*

Доказательство. a) Пусть G порождается $x_1, \dots, x_n$, группа H порождается $y_1, \dots, y_n$. Тогда $G \times H$ порождается объединением образов этих элементов при канонических вложениях. Условие ограниченности сопряжений сразу же получается из следующего соотношения на метрики:

$$\rho_{G \times H}(a_1, a_2) \leqslant \rho_G(\pi_G(a_1), \pi_G(a_2)) + \rho_H(\pi_H(a_1), \pi_H(a_2)), \text{ где } a_1,\ a_2 \in G \times H.$$

В качестве константы ограниченности можно взять сумму констант.

b) Пусть x_i — порождающие группы G. Возьмем $[x_i]$ в качестве порождающих G/H. Из $\rho([g_1], [g_2]) = 1$ следует, что $\left[xg_1x^{-1}\right] = [g_2]$. В силу ограниченности сопряжений в G имеем

$$\forall g \in G \hookrightarrow \rho\left(gxg_1x^{-1}g^{-1}, gg_1g^{-1}\right) < C.$$

А значит, и

$$\rho\left([g]\,[g_1]\,\left[g^{-1}\right], [g]\,[g_2]\,\left[g^{-1}\right]\right) < C.$$

То есть факторгруппа также является BC-группой. □

Как следствие, получаем, что конечные произведения вышеперечисленных и конечных групп будут удовлетворять условию ограниченности сопряжений. Теперь рассмотрим случай полупрямых произведений.

Пример 3.5. Рассмотрим $G = D_\infty \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_2$, где $\phi\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(D_\infty)$ — гомоморфизм, определенный равенствами $\phi(a) = b$, $\phi(b) = a$. С помощью порождающих и соотношений эту группу можно задать как $G = \langle a, b, c \mid a^2 = b^2 = c^2 = e, cac = b\rangle$.

Любое слово в данной группе представляется в виде $u = w(a, b)c^\varepsilon$, где $\varepsilon \in \{0, 1\}$. Если $\varepsilon = 0$, то u принадлежит либо к классу сопряженности $[a] = [b]$, либо к конечному классу сопряженности вида $[(ab)^n]$.

В случае $\varepsilon = 1$ бесконечным является класс $[c] = \{(ab)^n c : n \in \mathbb{Z}\}$. Конечные классы имеют вид $[(ab)^n ac] = \{(ab)^n ac, (ba)^n bc\}$.

Рассуждениями, аналогичными примеру 3.4, показывается, что на бесконечных классах сопряженности условие ограниченности сопряжений выполнено. Бесконечные классы сопряженности представлены на рисунках ниже.

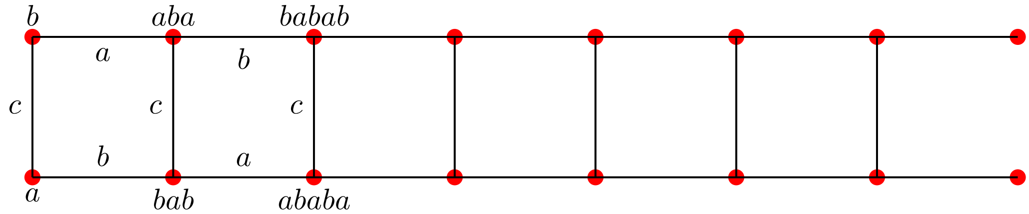


Рис. 3. Компонента связности sk_a .

Fig. 3. Connectivity component sk_a .

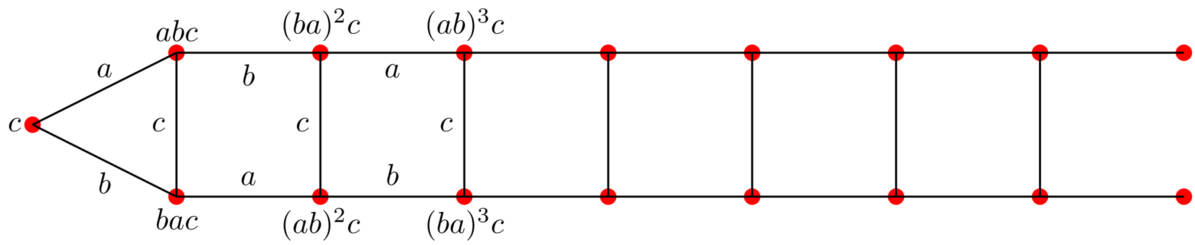


Рис. 4. Компонента связности sk_c .

Fig. 4. Connectivity component sk_c .

Следующий пример показывает, что полупрямое произведение с конечной группой не всегда сохраняет условие ограниченности сопряжений.

Пример 3.6 (не BC-группа)**.** Рассмотрим $G = H_3 \rtimes_\varphi \mathbb{Z}_2$, где $\phi\colon \mathbb{Z}_2 \to \mathrm{Aut}(H_3)$ определен как $\phi(x) = y$, $\phi(y) = x$, $\phi(z) = z^{-1}$. Эти равенства задают гомоморфизм, поскольку соотношения переходят в соотношения. Действительно,

$$[\phi(x), \phi(y)] = [y, x] = [x, y]^{-1} = z^{-1} = \phi(z). \tag{3.5}$$

Два оставшихся соотношения проверяются аналогично.

Рассмотрим класс сопряженности $[y]$. Заметим, что $cyc = x$, при этом $\rho(y^k x y^{-k}, x) \to \infty$, тогда как $\rho(y^k y y^{-k}, y) = 0$. То есть условие ограниченности сопряжений не выполнено.

Этот пример показывает то, что свойство группы быть BC-группой не сохраняется при квазиизометриях, а также что не все графы сопряженности с двумя концами удовлетворяют условию ограниченности сопряжений.

4. Дифференцирования в BC-группах

В данном разделе мы докажем, что в BC-группах с равномерно ограниченными конечными классами сопряженности все непрерывные дифференцирования являются внутренними. Сначала

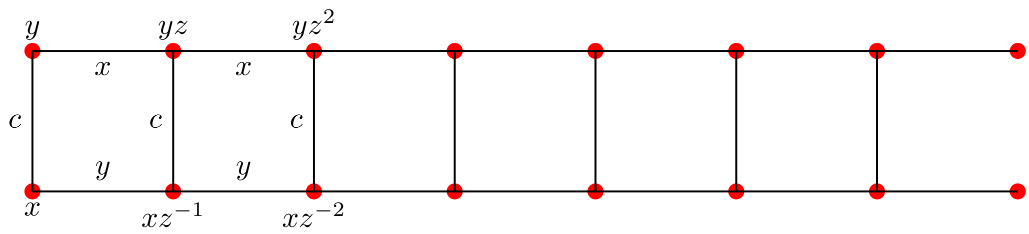


Рис. 5. Компонента связности sk_y.

Fig. 5. Connectivity component sk_y.

мы докажем, что потенциал выравнивается на каждой бесконечной компоненте (см. определение 2.11). Затем мы докажем теорему для дифференцирований с носителем в одной бесконечной компоненте, и, наконец, мы докажем теорему, заявленную во введении.

Определение 4.1. *Носителем* дифференцирования d называется множество

$$\{h \in G \mid \chi(h,g) \neq 0 \text{ для некоторого } g \in G\}, \tag{4.1}$$

где χ — характер, соответствующий дифференцированию d (см. предложение 2.5).

Лемма 4.1. *Пусть $G = \langle \mathcal{X} \mid R \rangle$ — BC-группа, $q \in [1, +\infty)$. Тогда потенциал ϕ, соответствующий непрерывному дифференцированию $d\colon \ell_1(G) \to \ell_q(G)$, выравнивается на каждой компоненте связности.*

Доказательство. Потенциал выравнивается тогда и только тогда, когда выравниваются его вещественная и мнимая части, поэтому, не теряя общности, можно считать, что $\phi\colon G \to \mathbb{R}$. Рассмотрим произвольную бесконечную компоненту связности sk_{g_0}. Введем числа

$$a := \inf_K \left(\sup_{g \in g_0^G \setminus K} \phi(g) \right), \quad b := \sup_K \left(\inf_{g \in g_0^G \setminus K} \phi(g) \right), \quad \delta := a - b, \tag{4.2}$$

где супремум и инфимум берутся по конечным $K \subseteq g_0^G$. Очевидно, что если a или b равняются бесконечности, то дифференцирование не является непрерывным.

Предположим, что потенциал не выравнивается, тогда число δ положительно. Зафиксируем произвольное натуральное число n. Рассмотрим множества $V_a = \{g \mid |\phi(g) - a| < \frac{\delta}{4}\}$, $V_b = \{g \mid |\phi(g) - b| < \frac{\delta}{4}\}$; они не ограничены. Возьмем произвольное n-элементное подмножество $V_n \subset V_a$. Используя условие ограниченности сопряжений, найдем константу C такую, что для всех $h_1, h_2 \in V_n$ и каждого $g \in G$ будет верно, что $\rho(gh_1g^{-1}, gh_2g^{-1}) < C$. По предложению 2.3 найдется $h \in V_b$ такое, что $B_C(h) \subset V_b$. Рассмотрим произвольный $u \in V_n$. Так как u, h лежат в одной компоненте связности, имеем $h = gug^{-1}$. Значит, $gV_ng^{-1} \subset B_C(h) \subset V_b$.

Используя формулу 2.11, получаем

$$\|d(g)\| = \left\| \sum_{t \in G} \left(\phi(gtg^{-1}) - \phi(t) \right) gt \right\| = \sqrt[q]{\sum_{t \in V_n} |\phi(gtg^{-1}) - \phi(t)|^q} \geqslant \sqrt[q]{n \frac{\delta}{2}}. \tag{4.3}$$

В силу произвольности выбранного в начале n получаем неограниченность дифференцирования. $\square$

4.1. Случай одной компоненты.

Лемма 4.2. *Пусть G — BC-группа, $q \in [1, +\infty)$. Тогда каждое непрерывное дифференцирование $d\colon \ell_1(G) \to \ell_q(G)$ с носителем, сосредоточенным в одной компоненте u_0^G, является внутренним.*

Доказательство. В силу уравнения (2.12) достаточно доказать, что для данного дифференцирования можно выбрать потенциал из ℓ_q. Предположим противное:

$$\sum_{g\in u_0^G} |\phi(g)|^q = \infty. \tag{4.4}$$

Для каждого $M > 0$ найдутся $g_1, \ldots, g_n \in u_0^G$ такие, что

$$|\phi(g_1)|^q + \cdots + |\phi(g_n)|^q > M^q,$$

причем каждое слагаемое в сумме ненулевое. Положим $m = \dfrac{1}{2}\min\{|\phi(g_1)|, \ldots, |\phi(g_n)|\}$. Поскольку в силу леммы 4.1 потенциал выравнивается к 0, найдется такое $R > 0$, что $|\phi(g)| < m$ для каждого $g \in u_0^G \setminus B_R(u_0)$. В силу ограниченности сопряжений найдется конечная константа $C = C(B_R(u_0)) > 0$ такая, что

$$\forall g \in G,\ \forall h_1, h_2 \in B_r(u_0) \hookrightarrow \rho(gh_1g^{-1}, gh_2g^{-1}) < C.$$

Рассмотрим элемент $g \in G$ такой, что $\rho(u_0, gu_0g^{-1}) > R + C$. Тогда, поскольку имеет место $\rho(ghg^{-1}, gu_0g^{-1}) < C$, видим, что

$$\forall h \in B_R(u_0) \hookrightarrow |\phi(ghg^{-1})| < m, \tag{4.5}$$

и потому в силу неравенства треугольника $ghg^{-1} \notin B_R(u_0)$.

Теперь, пользуясь формулой (2.11), оценим снизу норму элемента $d(g)$:

$$\begin{gathered}\|d(g)\| = \left\|\sum_{t\in G}\big(\phi(gtg^{-1}) - \phi(t)\big)\,gt\right\| = \sqrt[q]{\sum_{t\in G}|\phi(gtg^{-1}) - \phi(t)|^q} \geqslant \\ \geqslant \sqrt[q]{\sum_{t\in\{g_1,\ldots,g_n\}}|\phi(gtg^{-1}) - \phi(t)|^q} = \sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n}|\phi(g_i) - \phi(gg_ig^{-1})|^q} \geqslant \\ \geqslant \sqrt[q]{\sum_{i=1}^{m}\big||\phi(g_i)| - m\big|} \geqslant \frac{1}{2}\sqrt[q]{\sum_{i=1}^{n}|\phi(g_i)|^q} = \frac{M}{2}.\end{gathered}$$

Таким образом, для произвольно выбранного M мы нашли элемент $g \in G$, для которого выполнено $\|d(g)\| \geqslant \dfrac{M}{2}$. Значит, d не является ограниченным. □

Тем самым для групп, удовлетворяющих условию ограниченности сопряжений, показано, что дифференцированию с носителем в одной компоненте можно сопоставить потенциал из ℓ_q.

4.2. Случай нескольких компонент. Посмотрим, как связаны между собой расстояния $\rho(h, ghg^{-1})$ и $\rho(h, g^{-1}hg)$. Рассмотрим $g = x^k y$, $h = x \in F_2 = \langle x, y \mid \varnothing\rangle$. Тогда

$$\rho(h, ghg^{-1}) = \rho(x, x^k yxy^{-1}x^{-k}) = k + 1,$$

$$\rho(h, g^{-1}hg) = \rho(x, y^{-1}xy) = 1.$$

Таким образом, одно из расстояний может неограниченно возрастать, в то время как второе будет оставаться конечным. Однако, как показывает следующее предложение, в BC-группах такого происходить не может.

Предложение 4.1. *Пусть G — BC-группа, $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ — такая последовательность элементов группы, что $\rho(u, a_k u a_k^{-1}) \to \infty$. Тогда $\rho(u, a_k^{-1} u a_k) \to \infty$.*

Доказательство. В противном случае найдется константа L и подпоследовательность a_{n_k} такие, что $\rho(u, a_{n_k}^{-1} u a_{n_k}) \leqslant L$, т. е. $a_{n_k}^{-1} u a_{n_k} \in B_L(u)$. Сопрягая на a_{n_k} и используя ограниченность сопряжений, получим $\rho(a_{n_k} u a_{n_k}^{-1}, u) < C(B_L(u))$, что противоречит условию. □

Доказательство леммы 4.2 было основано на том, что сопряжением мы «выкидывали» некоторые элементы группы достаточно далеко. Чтобы проделать то же самое сразу для нескольких компонент, понадобится следующая лемма.

Лемма 4.3. *Пусть G — BC-группа, тогда найдется последовательность элементов $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$, $a_k \in G$, такая, что для каждого h из какой-либо бесконечной компоненты связности будет верно $\rho(h, a_k h a_k^{-1}) \to \infty$.*

Доказательство. Пронумеруем все бесконечные компоненты и будем вести индукцию по числу компонент. В каждой компоненте произвольным образом выберем начало u_i.

Сначала докажем, что утверждение верно для u_i из первых k компонент. Будем вести индукцию по k.

База индукции очевидна, существование такой последовательности для одной компоненты следует из того, что мы работаем с бесконечными компонентами.

Пусть a_n — такая последовательность, что $\rho(u_i, a_n u_i a_n^{-1}) \to \infty$ для $i \leqslant k$. Рассмотрим компоненту $\Gamma_{[u_{k+1}]}$. Если из последовательности $\rho(u_{k+1}, a_n u_{k+1} a_n^{-1})$ можно выделить подпоследовательность, стремящуюся к бесконечности, то это завершит шаг индукции.

Иначе $\{a_n h a_n^{-1} | n \in \mathbb{Z}\}$ будет ограниченным для каждого $h \in u_{k+1}^G$. Возьмем произвольную последовательность $b_n : \rho(u_{k+1}, b_n u_{k+1} b_n^{-1}) \to \infty$. Выделим подпоследовательность a'_n последовательности a_n такую, что $\min\limits_{i \leqslant k} \rho(u_i, a'_n u_i {a'_n}^{-1}) > 2|b_n|$. Рассмотрим последовательность $c_n = b_n a'_n$. Тогда для каждого $i \leqslant k+1$ верно, что $\rho(u_i, c_n u_i c_n^{-1}) \to \infty$. При $i \leqslant k$ это верно в силу неравенства треугольника. При $i = k+1$ это следует из того, что $\{a_n u_{k+1} a_n^{-1} \mid n \in \mathbb{N}\}$ — ограниченное множество, группа удовлетворяет условию ограниченности сопряжений и того, что $\rho(u_{k+1}, b_n u_{k+1} b_n^{-1}) \to \infty$.

В случае произвольного числа компонент по доказанному выше найдется элемент $a_k \in G$ такой, что

$$\min_{i \leqslant k} \rho(u_i, a_k u_i a_k^{-1}) > k.$$

Тогда для каждого $i \in \mathbb{N}$ верно, что $\rho(u_i, a_k u_i a_k^{-1}) \to \infty$, а потому для каждого $h \in u_i^G$ выполняется $\rho(h, a_k h a_k^{-1}) \to \infty$. $\square$

Результат леммы 4.2 допускает некоторое обобщение. Определим ℓ_q-норму потенциала ϕ по формуле $\|\phi\|_{\ell_q} = \sqrt[q]{\sum\limits_{g \in G} |\phi(g)|^q}$. Объединение всех бесконечных и всех конечных компонент обозначим как Γ_{inf} и Γ_{f}, соответственно.

Лемма 4.4. *Пусть носитель дифференцирования d с потенциалом ϕ сосредоточен в Γ_{inf}. Будем предполагать, что потенциал ϕ выбран выравнивающимся к нулю. Пусть последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ такая, что для каждого $u \in \mathrm{Obj}(\Gamma_{\mathrm{inf}})$ верно, что $\rho(u_i, a_k u_i a_k^{-1}) \to \infty$. Тогда $\lim\limits_{k \to \infty} \|d(a_k)\| = \sqrt[q]{2}\, \|\phi\|_{\ell_q}$.*

Доказательство. В каждой бесконечной компоненте связности зафиксируем вершину u_i. Выберем $0 < \varepsilon < 1$.

Случай 1: $0 < \|\phi\|_{\ell_q} < \infty$ (в случае нулевой нормы все очевидно).

В этом случае найдется конечное множество $\mathcal{S} = \{g_1, \dots, g_n\} \subset \mathrm{Obj}(\Gamma_{\mathrm{inf}})$ такое, что

$$\sum_{g \in \mathcal{S}} |\phi(g)|^q > \left(\|\phi\|_{\ell_q}\right)^q - \frac{\varepsilon}{2}, \quad \sum_{g \notin \mathcal{S}} |\phi(g)|^q < \min\left(\frac{\varepsilon}{2},\ 2^{-q}\varepsilon \left(\|\phi\|_{\ell_q}\right)^q\right), \tag{4.6}$$

и $\phi(g) \neq 0$ для каждого $g \in \mathcal{S}$. Первая часть минимума нам понадобится для того, чтобы сделать оценку снизу, а вторая для того, чтобы оценить $\|d(a_k)\|$ сверху.

Так как множество $\mathcal{S}$ конечно, оно содержится в конечном числе бесконечных компонент связности, т. е. $\mathcal{S} \subset \bigcup\limits_{i \in I} u_i^G$, $|I| < \infty$. Поэтому найдется $r > 0$ такое, что $\{g_1, \dots, g_n\} \subset \bigcup\limits_{i \in I} B_r(u_i)$.

По предположению, на каждой компоненте потенциал выравнивается. Значит, для каждого $m > 0$ можно найти число $R > r > 0$ такое, что для каждого $g \in \bigcup\limits_{i \in I} \left(u_i^G \setminus B_R(u_i)\right)$ будет выполняться неравенство $|\phi(g)| < m$. Положим

$$m = \frac{\varepsilon}{2} \min\{|\phi(g_1)|, \dots |\phi(g_n)|\}.$$

Так как G — BC-группа, числа $C_i = \sup_{g\in G} \operatorname{diam}(gB_r(u_i)g^{-1})$ являются конечными. Поэтому константа $C = \max_{i\in I} C_i$ конечна и удовлетворяет условию

$$\forall g \in G,\ \forall i \in I, \forall h_1, h_2 \in B_r(u_i) \hookrightarrow \rho(gh_1g^{-1}, gh_2g^{-1}) < C. \tag{4.7}$$

По предположению леммы и предложению 4.1, найдется номер N такой, что для каждого $k \geqslant N$, для каждого $i \in I$ будут верны неравенства $\rho(u_i, a_k u_i a_k^{-1}) > R+C$ и $\rho(u_i, a_k^{-1} u_i a_k) > R+C$ (помним, что I конечно). Тогда для всех $h \in B_r(u_i)$, $k \geqslant N$, верно, что

$$|\phi(a_k h a_k^{-1})| < m, \quad |\phi(a_k^{-1} h a_k)| < m. \tag{4.8}$$

Заметим, что по неравенству треугольника $\mathcal{S} \cap \left(a_k^{-1}\mathcal{S}a_k\right) = \varnothing$. Теперь, используя уравнение (2.11), мы можем получить нижнюю оценку:

$$\begin{aligned}
&(\|d(a_k)\|)^q = \left\|\sum_{t\in G} \left(\phi(a_k t a_k^{-1}) - \phi(t)\right) a_k t\right\|^q = \sum_{t\in G} \left|\phi(a_k t a_k^{-1}) - \phi(t)\right|^q \geqslant \\
&\geqslant \sum_{t\in\mathcal{S}} \left|\phi(a_k t a_k^{-1}) - \phi(t)\right|^q + \sum_{t\in a_k^{-1}\mathcal{S}a_k} \left|\phi(a_k t a_k^{-1}) - \phi(t)\right|^q = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \left|\phi(a_k g_i a_k^{-1}) - \phi(g_i)\right|^q + \sum_{i=1}^{n} \left|\phi(g_i) - \phi(a_k^{-1} g_i a_k)\right|^q \geqslant \\
&\geqslant 2\sum_{i=1}^{m} ||\phi(g_i)| - m|^q \geqslant 2(1-\frac{\varepsilon}{2})^q \sum_{i=1}^{n} |\phi(g_i)|^q \geqslant 2\left(\|\phi\|_{\ell_q}\right)^q \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right)^q \left(1-\frac{\varepsilon}{2}\right).
\end{aligned} \tag{4.9}$$

Таким образом, получаем

$$\|d(a_k)\| \geqslant \sqrt[q]{2}\, \|\phi\|_{\ell_q} (1-\frac{\varepsilon}{2}) \sqrt[q]{1-\frac{\varepsilon}{2}} \geqslant (1-\varepsilon)\sqrt[q]{2}\, \|\phi\|_{\ell_q}. \tag{4.10}$$

Теперь оценим сверху:

$$\begin{aligned}
&(\|d(a_k)\|)^q = \sum_{t\in G} \left|\phi(a_k t a_k^{-1}) - \phi(t)\right|^q \leqslant \\
&\leqslant \sum_{t\in\mathcal{S}} \left|\phi(a_k t a_k^{-1}) - \phi(t)\right|^q + \sum_{t\in a_k^{-1}\mathcal{S}a_k} \left|\phi(a_k t a_k^{-1}) - \phi(t)\right|^q + \sum_{t\notin \mathcal{S}\cup a_k^{-1}\mathcal{S}a_k} \left|\phi(a_k t a_k^{-1}) - \phi(t)\right|^q \leqslant \\
&\leqslant 2\left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)^q \left(\|\phi\|_{\ell_q}\right)^q + \sum_{t\notin \mathcal{S}\cup a_k^{-1}\mathcal{S}a_k} 2^{q-1}\left(\left|\phi(a_k t a_k^{-1})\right|^q + |\phi(t)|^q\right) \leqslant 2(1+\frac{\varepsilon}{2})^q \|\phi\|_{\ell_q}^q + \frac{\varepsilon}{2}\|\phi\|_{\ell_q}^q.
\end{aligned} \tag{4.11}$$

Для оценки члена $\sum\limits_{t\notin \mathcal{S}\cup a_k^{-1}\mathcal{S}a_k} \left|\phi(a_k t a_k^{-1}) - \phi(t)\right|^q$ было использовано неравенство

$$(|a| + |b|)^q \leqslant 2^{q-1}(|a|^q + |b|^q), \tag{4.12}$$

потом воспользовались тем, что $\sum\limits_{g\notin\mathcal{S}} |\phi(g)|^q < 2^{-q}\varepsilon\left(\|\phi\|_{\ell_q}\right)^q$.

Таким образом,

$$\|d(a_k)\| \leqslant \left(1+\frac{\varepsilon}{2}\right)\sqrt[q]{2}\, \|\phi\|_{\ell_q} \sqrt[q]{1+\frac{\varepsilon}{4}} \leqslant (1+\varepsilon)\sqrt[q]{2}\, \|\phi\|_{\ell_q}. \tag{4.13}$$

Тем самым получен желаемый результат: $\lim\limits_{k\to\infty} \|d(a_k)\| = \sqrt[q]{2}\, \|\phi\|_{\ell_q}$.

Случай 2: $\|\phi\|_{\ell_q} = \infty$.

Выберем произвольное $M > 0$. Тогда найдутся $g_1, \dots, g_n \in \bigcup\limits_{i\in I} \operatorname{Obj}(\Gamma_{[u_i]})$, такие, что

$$|\phi(g_1)|^q + \dots + |\phi(g_n)|^q > M^q.$$

Аналогично тому, как мы выводили оценку снизу в прошлом пункте, для достаточно больших k получаем

$$(\|d(a_k)\|)^q \geqslant 2\sum_{i=1}^{m} ||\phi(g_i)| - m|^q \geqslant 2\left(1 - \frac{\varepsilon}{2}\right) M. \tag{4.14}$$

В силу произвольности M заключаем, что последовательность стремится к бесконечности. □

Следствие 4.1. *Пусть группа G — BC-группа, $d\colon \ell_1(G) \to \ell_q(G)$ — ограниченное дифференцирование с носителем в Γ_{inf}. Тогда его можно задать с помощью потенциала из ℓ_q.*

Доказательство. В силу леммы 4.1 потенциал ϕ выравнивается к некоторому значению. Выберем такой ϕ, который выравнивается к 0. Рассмотрим последовательность $\{a_k\}_{k=1}^{\infty}$ из леммы 4.3. Для нее по лемме 4.4 получаем, что

$$\|\phi\|_{\ell_q} \leqslant \varliminf_{i\to\infty} \left(\sum_{m=1}^{n} \|d(a_i)\|\right) \leqslant \|d\| < \infty.$$

Таким образом, ϕ задается потенциалом из ℓ_q. □

Полученные выше результаты позволяют понять, что происходит на бесконечных компонентах. Оказывается, что если размер конечных компонент равномерно ограничен, то аналогичный результат верен и для них.

Предложение 4.2. *Пусть диаметры всех конечных компонент связности группы G равномерно ограничены некоторой константой N. Тогда для непрерывного дифференцирования $d\colon \ell_1(G) \to \ell_q(G)$, носитель характера которого сосредоточен в Γ_{f}, можно выбрать потенциал так, чтобы он был из ℓ_q.*

Доказательство. В каждой конечной компоненте выберем вершину u_i, в которой положим потенциал равным нулю. Рассмотрим новую систему образующих группы G, в которую включим все слова длины не более N. Обозначим ее как $\mathcal{A}$.

Тогда для каждого $g \in \Gamma_f$ найдется вершина u_i (вершина компоненты, в которой лежит g) и порождающий элемент a такие, что $g = a^{-1}u_i a$. Тогда

$$\sum_{g\in\Gamma_f} |\phi(g)|^q \leqslant \sum_{a\in\mathcal{A}} \sum_{u_i\in\Gamma_f} |\phi(a^{-1}u_i a)|^q \leqslant \sum_{a\in\mathcal{A}} \|d(a)\| \leqslant |\mathcal{A}|\,\|d\|\,.$$

Тем самым потенциал будет из ℓ_q. □

Теперь соберем воедино полученные выше результаты и докажем основную теорему.

Теорема 4.1. *Пусть G — BC-группа, в которой конечные компоненты связности G равномерно ограничены. Тогда каждое ограниченное дифференцирование $d\colon \ell_1(G) \to \ell_q(G)$ является внутренним.*

Доказательство. Покажем, что для d можно найти потенциал из ℓ_q. Дифференцирование d представляется в виде суммы $d = d_{\text{inf}} + d_{\text{f}}$. Носитель d_{inf} содержится в бесконечных компонентах связности, носитель d_{f} — в конечных. Заметим, что для каждого $g \in G$ верно $\|d_{\text{inf}}(g)\| \leqslant \|d(g)\| \leqslant \|d\|$, аналогично для второго слагаемого. Значит, d_{f}, d_{inf} ограничены, а потому у них найдутся потенциалы из ℓ_q. Тогда, выбирая ϕ как в предложениях 4.1, 4.2, получим

$$\sum_{g\in G} |\phi(g)|^q = \sum_{g\in\Gamma_{\text{inf}}} |\phi(g)|^q + \sum_{g\in\Gamma_{\text{f}}} |\phi(g)|^q = \sum_{g\in G} |\phi_{\text{inf}}(g)|^q + \sum_{g\in G} |\phi_{\text{f}}(g)|^q < \infty. \tag{4.15}$$

Тем самым получаем, что потенциал дифференцирования принадлежит ℓ_q, т. е. дифференцирование является внутренним. □

Пример 4.1. Нильпотентные группы ранга 2 удовлетворяют условиям ограниченности сопряжений и равномерной ограниченности конечных компонент.

Напомним, что группа G называется *нильпотентной группой ранга* 2, если ее факторгруппа по центру Z коммутативна.

Будем считать, что группа задана как $\langle a_1, a_2, \dots a_m, b_{ij} \dots | R\rangle$, где $b_{ij} = [a_i^{-1}, a_j^{-1}]$. Также будем считать, что если a_i — порождающий, то a_i^{-1} — тоже, т. е. найдется j такое, что $a_j = {a_i}^{-1}$. Как и ранее, считаем, что G конечно порождена. Обозначим через Z центр группы. Подгруппу, порожденную коммутаторами образующих, обозначим как $B = \langle b_{ij}\rangle \subset Z$.

Предложение 4.3. *У нильпотентной группы ранга* 2 *ограниченные компоненты связности равномерно ограничены некоторой константой* N.

Доказательство. Группа $G' = [G, G]$ является конечно порожденной. Действительно, в случае нильпотентной группы ранга 2 верно, что $a_i a_j = a_j a_i a_i^{-1} a_j^{-1} a_i a_j = a_j a_i [a_i^{-1}, a_j^{-1}] = a_j a_i b_{ij}$, где $b_{ij} \in Z$. В силу этого коммутатор любых двух элементов равен произведению элементов b_{ij}, а их конечное количество.

У конечно порожденной абелевой группы подгруппа кручения конечна. Рассмотрим конечную компоненту $\Gamma_{[u_0]}$. Заметим, что $g u_0 g^{-1} = u_0 b$, где $b \in \mathrm{Tor}(G')$. Отсюда получаем, что количество элементов в каждой компоненте ограничено числом $N = |\operatorname{Tor}(G')|$. □

Следствие 4.2. *В нильпотентной группе ранга* 2 *для произвольного ограниченного дифференцирования* $d\colon \ell_1(G) \to \ell_q(G)$ *можно найти потенциал из* ℓ_q, *и тем самым оно является внутренним.*

5. Приложение. Аменабельность и доказательство Джонсона

Для полноты картины приведем доказательство Джонсона, см. [11, Theorem 2.5]. Ради краткости изложения мы ограничимся случаем дискретной групповой алгебры и бимодулями вида $\ell_p(G)$.

Мы будем доказывать следующую теорему:

Теорема 5.1. *Пусть G — аменабельная дискретная конечно порожденная группа. Тогда любое дифференцирование* $D\colon \ell_1(G) \to \ell_q(G)$ *является внутренним.*

Существует много определений аменабельности, приведем два наиболее часто встречающихся.

Определение 5.1. Конечно порожденная группа G называется *аменабельной*, если выполнено одно из следующих эквивалентных условий:

1. Существует непрерывный левоинвариантный функционал $\Lambda\colon \ell^\infty(G) \to \mathbb{C}$ такой, что $\Lambda(\mathbf{1}) = 1$.
2. Существует последовательность конечных множеств F_n таких, что $|g \cdot F_n \Delta F_n|/|F_n| \to 0$ для каждого $g \in G$.

Структура банахова бимодуля на сопряженном пространстве. Зафиксируем такое число p, что $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$. Тогда $\ell_p(G)^* \cong \ell_q(G)$. Определим на $\ell_p(G)^*$ структуру модуля над $\ell_1(G)$. Пусть $f \in \ell_p(G)^*$, $g \in G$ тогда

$$(gf)[u] := f[g^{-1}u], \quad (fg)[u] = f[ug^{-1}], \quad \forall u \in \ell_p(G).$$

Проверим, что определенное таким образом действие совпадает с обычным умножением элементов $\ell_q(G)$ на элементы $\ell_1(G)$. Действительно, $(g\delta_h)[u] = \delta_h[g^{-1}u] = \delta_{gh}[u]$, здесь $\delta_h\colon G \to \mathbb{C}$ — функция, равняющаяся 1 на h и нулю на всех остальных элементах.

Теперь мы можем смотреть на D, как на дифференцирование $\ell_1(G) \to \ell_p(G)^*$.

Замечание. Каждому ограниченному линейному отображению $\Phi\colon \ell_1[G] \to \ell_p(G)^*$ можно сопоставить элемент $f \in \ell_p(G)^*$ по правилу

$$f[u] = \Lambda(h \mapsto \Phi(h)[u]). \tag{5.1}$$

Здесь мы имеем в виду, что мы взяли среднее от функции $G \to \mathbb{C}$, определенной по правилу $h \mapsto \Phi(h)[u]$. Построенная функция f является непрерывной, так как $|f[u]| \leqslant \|\Phi\|\,\|u\|$.

Можно надеяться, что с помощью данного соответствия по дифференцированию D мы сможем построить $f_0 \in \ell_p(G)^*$ такое, что $D(g) = gf_0 - f_0g$.

Доказательство теоремы 5.1. Так как G аменабельна, на ней есть левоинвариантное среднее $\Lambda\colon \ell^\infty(G) \to \mathbb{C}$. Рассмотрим $\Phi(g) = D(g)g^{-1}$. Ясно, что $\Phi\colon \ell_1(G) \to \ell_p(G)^*$ ограниченное, причем его норма равняется норме D.

Для f_0, полученной по формуле (5.1), имеем

$$(gf_0 - f_0g)[u] = f_0[g^{-1}u - ug^{-1}] = \Lambda(h \mapsto \Phi(h)[g^{-1}u - ug^{-1}]) = \Lambda\left(h \mapsto (g\Phi(h) - \Phi(h)g)[u]\right). \quad (5.2)$$

В первом и третьем равенстве было использовано определение структуры бимодуля на сопряженном пространстве, во втором определение f_0. Немного преобразуем полученное выражение:

$$g\Phi(h) - \Phi(h)g = gD(h)h^{-1} - D(h)h^{-1}g = D(gh)h^{-1} - D(h)h^{-1}g - D(g) = (\Phi(gh) - \Phi(h) - \Phi(g))g. \quad (5.3)$$

Теперь можем продолжить цепочку равенств:

$$\begin{aligned} \Lambda\left(h \mapsto (g\Phi(h) - \Phi(h)g)[u]\right) &= \Lambda\left(h \mapsto (\Phi(gh) - \Phi(h) - \Phi(g))[ug^{-1}]\right) = \\ &= \Lambda\left(h \mapsto \Phi(g)[ug^{-1}]\right) = \Lambda\left(h \mapsto (\Phi(g)g)[u]\right) = (\Phi(g)g)[u] = D(g)[u]. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Во втором равенстве мы воспользовались тем, что из левоинвариантности

$$\Lambda\left(h \mapsto (\Phi(gh)[ug^{-1}]\right) = \Lambda\left(h \mapsto (\Phi(h)[ug^{-1}]\right). \quad (5.5)$$

В четвертом равенстве использовали то, что мы вычисляем Λ на постоянной функции.

Тем самым $D(g) = gf_0 - f_0g$, т. е. дифференцирование D является внутренним. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арутюнов А. А.* Алгебра дифференцирований в некоммутативных групповых алгебрах// Тр. МИАН. — 2020. — *308*. — С. 28–41. — DOI: 10.4213/tm4048.
2. *Арутюнов А. А., Мищенко А. С., Штерн А. И.* Деривации групповых алгебр// Фундам. и прикл. мат. — 2016. — *21*, № 6. — С. 65–78.
3. *Арутюнов А. А., Мищенко А. С.* Гладкая версия проблемы Джонсона о деривациях групповых алгебр// Мат. сб. — 2019. — *210*, № 6. — С. 3–29. — DOI: 10.4213/sm9119.
4. *Наймарк М. А.* Нормированные кольца. — М.: Физматлит, 2010.
5. *Alekseev A., Arutyunov A., Silvestrov S.* On (σ, τ)-derivations of group algebra as category characters// В сб.: «Non-Commutative and Non-Associative Algebra and Analysis Structures». — Cham: Springer, 2023. — С. 81–99. — DOI: 10.1007/978-3-031-32009-5_5.
6. *Arutyunov A.* A combinatorial view on derivations in bimodules// Adv. Syst. Sci. Appl. — 2023. — *23*, № 2. — С. 178–183. — DOI: 10.25728/assa.2023.23.2.1408.
7. *Bader U., Gelander T., Monod N.* A fixed point theorem for L1 spaces// Invent. Math. — 2010. — *189*. — С. 143–148.
8. *Dales H. G.* Banach Algebras and Automatic Continuity. — Oxford: Oxford Univ. Press, 2001.
9. *Deitmar A., Echterhoff S.* Principles of Harmonic Analysis. — Cham, etc.: Springer, 2014.
10. *Hurley P., Hurley T.* Codes from zero-divisors and units in group rings// Int. J. Inform. Coding Theory. — 2009. — *1*, № 1. — С. 57–87. — DOI: 10.1504/IJICOT.2009.024047.
11. *Johnson B. E.* Cohomology in Banach Algebras. — Providence: Am. Math. Soc., 1972.
12. *Johnson B. E.* The derivation problem for group algebras of connected locally compact groups// J. London Math. Soc. — 2001. — *63*, № 2. — С. 441–452. — DOI: 10.1112/S002461070000185X.
13. *Johnson B. E., Ringrose J. R.* Derivations of operator algebras and discrete group algebras// Bull. London Math. Soc. — 1969. — *1*, № 1. — С. 70–74. — DOI: 10.1112/blms/1.1.70.
14. *Johnson B. E., Sinclair A. M.* Continuity of derivations and a problem of Kaplansky// Am. J. Math. — 1968. — *90*, № 4. — С. 1067–1073. — DOI: 10.2307/2373290.
15. *Losert V.* The derivation problem for group algebras// Ann. Math. — 2008. — *168*, № 1. — С. 221–246. — DOI: 10.4007/annals.2008.168.221.
16. *Mishchenko A. S.* Derivations of group algebras and Hochschild cohomology// В сб.: «Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics: Dedicated to the Memory of Boris Sternin». — Cham: Birkhäuser, 2021. — С. 263–272. — DOI: 10.1007/978-3-030-37326-9_16.
17. *Mishchenko A. S.* Geometric description of the Hochschild cohomology of group algebras// В сб.: «Topology, Geometry, and Dynamics: V. A. Rokhlin-Memorial». — Providence: Am. Math. Soc., 2021. — С. 267–280.
18. *Murphy G.* Aspects of the theory of derivations// Banach Center Publ. — 1994. — *30*, № 1. — С. 267–275.

19. *Murphy W.* The nonvanishing first Hochschild cohomology of twisted finite simple group algebras// ArXiv. — 2022. — 2207.03698 [math.GR].
20. *Neumann B. H.* Groups covered By permutable subsets// J. London Math. Soc. — 1954. — *s1-29*, № 2. — C. 236–248. — DOI: 10.1112/jlms/s1-29.2.236.
21. *Palmer Th. W.* Banach Algebras and the General Theory of *-Algebras: Volume 1: Algebras and Banach Algebras. — Cambridge: Cambridge University Press, 1994.
22. *Pierce R. S.* Associative Algebras. — New York—Heidelberg—Berlin: Springer, 1982.
23. *Rickart C. E.* General Theory of Banach Algebras. — Princeton: Van Nostrand, 1960.
24. *Sakai Sh.* On a conjecture of Kaplansky// Tohoku Math. J. — 1960. — *12*. — C. 31–33.
25. *Sakai Sh.* Derivations of W*-algebras// Ann. Math. — 1966. — *83*, № 2. — C. 273–279. — DOI: 10.2307/1970432.
26. *Todea C.-C.* Nontriviality of the first Hochschild cohomology of some block algebras of finite groups// ArXiv. — 2022. — 2206.09108 [math.KT].

А. А. Арутюнов
Институт проблем управления им. В. А. Трапезникова РАН, Москва, Россия
E-mail: andronick.arutyunov@gmail.com

А. В. Наянзин
Московский физико-технический институт (национальный исследовательский университет), Долгопрудный, Россия
E-mail: naianzin.av@phystech.edu

UDC 517.28+512.552
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-356-374
EDN: PFEHJE

Triviality of outer derivations in $\ell_p(G)$ for one class of groups

A. A. Arutyunov[1] and A. V. Naianzin[2]

[1] *V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*
[2] *Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russia*

Abstract. In this paper, we study derivations in group rings completed by various types of norms. The main attention is paid to the class of groups in which conjugations act in a controlled manner in some sense. Using the method of identifying derivations and characters on some category, we obtain an alternative way of proving that for this class of groups all derivations are inner.

Keywords: derivation on algebras, outer derivation, inner derivation, character.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. A. A. Arutyunov is supported by a grant from the Russian Science Foundation № 22-11-00042 https://rscf.ru/en/project/22-11-00042/ in the V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences.

For citation: A. A. Arutyunov, A. V. Naianzin, “Triviality of outer derivations in $\ell_p(G)$ for one class of groups,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 3, 356–374. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-356-374

REFERENCES

1. A. A. Arutyunov, “Algebra differentsirovaniy v nekommutativnykh gruppovykh algebrakh” [Derivation algebra in noncommutative group algebras], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2020, **308**, 28–41, DOI: 10.4213/tm4048 (in Russian).
2. A. A. Arutyunov, A. S. Mishchenko, and A. I. Shtern, “Derivatsii gruppovykh algebr” [Derivations of group algebras], *Fundam. i prikl. mat.* [Fundam. Appl. Math.], 2016, **21**, No. 6, 65–78 (in Russian).
3. A. A. Arutyunov and A. S. Mishchenko, “Gladkaya versiya problemy Dzhonsona o derivatsiyakh gruppovykh algebr” [A smooth version of Johnson’s problem on derivations of group algebras], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2019, **210**, No. 6, 3–29, DOI: 10.4213/sm9119 (in Russian).
4. M. A. Naimark, *Normirovannye kol’tsa* [Normed Rings], Fizmatlit, Moscow, 2010 (in Russian).
5. A. Alekseev, A. Arutyunov, and S. Silvestrov, “On (σ, τ)-derivations of group algebra as category characters,” In: *Non-Commutative and Non-Associative Algebra and Analysis Structures*, Springer, Cham, 2023, pp. 81–99, DOI: 10.1007/978-3-031-32009-5_5.
6. A. Arutyunov, “A combinatorial view on derivations in bimodules,” *Adv. Syst. Sci. Appl.*, 2023, **23**, No. 2, 178–183, DOI: 10.25728/assa.2023.23.2.1408.
7. U. Bader, T. Gelander, and N. Monod, “A fixed point theorem for L1 spaces,” *Invent. Math.*, 2010, **189**, 143–148.
8. H. G. Dales, *Banach Algebras and Automatic Continuity* [Banach Algebras and Automatic Continuity], Oxford Univ. Press, Oxford, 2001.
9. A. Deitmar and S. Echterhoff, *Principles of Harmonic Analysis*, Springer, Cham, etc., 2014.
10. P. Hurley and T. Hurley, “Codes from zero-divisors and units in group rings,” *Int. J. Inform. Coding Theory*, 2009, **1**, No. 1, 57–87, DOI: 10.1504/IJICOT.2009.024047.
11. B. E. Johnson, *Cohomology in Banach Algebras*, Am. Math. Soc., Providence, 1972.
12. B. E. Johnson, “The derivation problem for group algebras of connected locally compact groups,” *J. London Math. Soc.*, 2001, **63**, No. 2, 441–452, DOI: 10.1112/S002461070000185X.
13. B. E. Johnson and J. R. Ringrose, “Derivations of operator algebras and discrete group algebras,” *Bull. London Math. Soc.*, 1969, **1**, No. 1, 70–74, DOI: 10.1112/blms/1.1.70.
14. B. E. Johnson and A. M. Sinclair, “Continuity of derivations and a problem of Kaplansky,” *Am. J. Math.*, 1968, **90**, No. 4, 1067–1073, DOI: 10.2307/2373290.
15. V. Losert, “The derivation problem for group algebras,” *Ann. Math.*, 2008, **168**, No. 1, 221–246, DOI: 10.4007/annals.2008.168.221.
16. A. S. Mishchenko, “Derivations of group algebras and Hochschild cohomology,” In: *Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics: Dedicated to the Memory of Boris Sternin*, Birkhäuser, Cham, 2021, pp. 263–272, DOI: 10.1007/978-3-030-37326-9_16.
17. A. S. Mishchenko, “Geometric description of the Hochschild cohomology of group algebras,” In: *Topology, Geometry, and Dynamics: V. A. Rokhlin-Memorial*, Am. Math. Soc., Providence, 2021, pp. 267–280.
18. G. Murphy, “Aspects of the theory of derivations,” *Banach Center Publ.*, 1994, **30**, No. 1, 267–275.
19. W. Murphy, “The nonvanishing first Hochschild cohomology of twisted finite simple group algebras,” *ArXiv*, 2022, 2207.03698 [math.GR].
20. B. H. Neumann, “Groups covered By permutable subsets,” *J. London Math. Soc.*, 1954, **s1-29**, No. 2, 236–248, DOI: 10.1112/jlms/s1-29.2.236.
21. Th. W. Palmer, *Banach Algebras and the General Theory of *-Algebras: Volume 1: Algebras and Banach Algebras*, Cambridge University Press, Cambridge, 1994.
22. R. S. Pierce, *Associative Algebras*, Springer, New York—Heidelberg—Berlin, 1982.
23. C. E. Rickart, *General Theory of Banach Algebras*, Van Nostrand, Princeton, 1960.
24. Sh. Sakai, “On a conjecture of Kaplansky,” *Tohoku Math. J.*, 1960, **12**, 31–33.
25. Sh. Sakai, “Derivations of W*-algebras,” *Ann. Math.*, 1966, **83**, No. 2, 273–279, DOI: 10.2307/1970432.
26. C.-C. Todea, “Nontriviality of the first Hochschild cohomology of some block algebras of finite groups,” *ArXiv*, 2022, 2206.09108 [math.KT].

A. A. Arutyunov
V. A. Trapeznikov Institute of Control Sciences of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
E-mail: `andronick.arutyunov@gmail.com`

A. V. Naianzin
Moscow Institute of Physics and Technology (National Research University), Dolgoprudny, Russia
E-mail: `naianzin.av@phystech.edu`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 3 (2024). С. 375–388
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.925; 517.93; 531.13
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-375-388
EDN: PONQIR

ПОСТРОЕНИЕ МНОГОМЕРНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ, ПРОЕКЦИИ КОТОРЫХ НА КООРДИНАТНЫЕ ПЛОСКОСТИ ИМЕЮТ ЗАДАННЫЕ ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

С. В. Волков

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. Цель работы — построение многомерных векторных полей, которые представляются автономными системами обыкновенных дифференциальных уравнений и имеют заданные топологические структуры в заданных ограниченных односвязных областях фазового пространства при условии, что эти структуры могут быть заданы топологическими структурами проекций искомых векторных полей на координатные плоскости. Эта задача является обратной задачей качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Результаты работы могут быть использованы для построения математических моделей динамических систем в разных областях науки и техники. В частности, для механических систем с произвольным конечным числом степеней свободы такие векторные поля могут представлять собой кинематические уравнения программных движений и быть использованы для получения управляющих сил и моментов, реализующих эти движения.

Ключевые слова: векторное поле, система ОДУ, качественная теория ОДУ, фазовый портрет, топологическая структура, динамическая система, обратная задача.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *С. В. Волков.* Построение многомерных векторных полей, проекции которых на координатные плоскости имеют заданные топологические структуры// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 3. С. 375–388. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-375-388

1. Введение

Построение многомерных векторных полей, описываемых автономными системами обыкновенных дифференциальных уравнений и имеющих заданные топологические структуры в заданных ограниченных областях фазового пространства, является в общем случае трудноразрешимой задачей. Эта задача упрощается, если топологическая структура многомерного векторного поля может быть задана топологическими структурами его проекций на координатные плоскости фазового пространства. В этом случае построение искомого векторного поля $\vec{v} = \{\dot{x}_1, \dot{x}_2, \dots, \dot{x}_n\}$ сводится сначала к построению $(n-1)$-го вспомогательного плоского векторного поля вида $\vec{v}_k = \{\dot{x}_i, \dot{x}_j\}$, $i, j \in 1, 2, \dots, n$, $k = 1, 2, \dots, n-1$, каждое из которых имеет заданную топологическую структуру в некоторой ограниченной области соответствующей координатной плоскости Ox_ix_j, а затем — к согласованию изменений во времени компонент этих плоских векторных полей и составлению из них искомого векторного поля.

В данной статье даны общее описание такого подхода к построению многомерных векторных полей указанного выше типа и пример его применения.

Результаты работы могут быть использованы для построения математических моделей динамических систем, если их поведение описывается системами обыкновенных дифференциальных уравнений указанного выше типа. В частности, построенные описанным выше способом векторные поля обобщённых скоростей механических систем могут представлять кинематические уравнения их программных движений и быть использованы для нахождения управляющих сил и моментов, обеспечивающих реализацию этих движений, их устойчивость и другие свойства (как это указано, например, в [3]).

2. Обозначения

- $\vec{v} = \{\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n\}$ — векторное поле, описываемое системой обыкновенных дифференциальных уравнений вида
$$\begin{cases} \dot{x}_1 = X_1(x_1, \ldots, x_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \dot{x}_n = X_n(x_1, \ldots, x_n), \end{cases} \tag{2.1}$$
где $X_i \in C(\mathbb{R}^n)$ для $i = 1, 2, \ldots, n$;
- $P_1(p_{1,1}, \ldots, p_{1,n})$ и $P_2(p_{2,1}, \ldots, p_{2,n})$ — изолированные особые точки системы уравнений (2.1), соответствующие начальному и конечному положениям соответствующей динамической системы;
- $P_{1,ij}$ и $P_{2,ij}$ — проекции точек P_1 и P_2 на координатную плоскость Ox_ix_j;
- $I_r = \{(i,j) : \ i,j = 1,2,\ldots,n, \ i \neq j\}$ — множество пар индексов, соответствующих некоторой выборке $(n-1)$-ой координатной плоскости системы координат $Ox_1, x_2, \ldots, x_n$. Например, для системы координат $Ox_1x_2x_3$ таковыми являются множество $\{(1,2),(1,3)\}$, соответствующее координатным плоскостям Ox_1x_2 и Ox_1x_3, или множество $\{(1,2),(2,3)\}$, соответствующее координатным плоскостям Ox_1x_2 и Ox_2x_3;
- D — область пространства $\mathbb{R}^n$, ограниченная поверхностями $S_{m,ij} : \omega_{m,ij}(x_i, x_j) = 0$, $(i,j) \in I_r$, $m \in I_{ij}$, где I_{ij} — множество индексов;
- D_{ij} — проекция области D на соответствующую координатную плоскость Ox_ix_j, $(i,j) \in I_r$, граница которой содержит точки $P_{1,ij}$ и $P_{2,ij}$;
- $L_{m,ij} : \omega_{m,ij}(x_i, x_j) = 0$, $(i,j) \in I_r$, $m \in I_{ij}$, — кривые, ограничивающие область D_{ij} в координатной плоскости Ox_ix_j;
- L — интегральная кривая векторного поля (2.1), которая является линией пересечения $(n-1)$-ой поверхности $f_{ij}(x_i, x_j) = 0$, $(i,j) \in I_r$, проходящей через точки P_1 и P_2, а её дуга, заключённая между этими точками, находится внутри области D;
- L_{ij} — проекция кривой L на соответствующую координатную плоскость Ox_ix_j.

Далее будем полагать, что для всех $(i,j) \in I_r$ и $m \in I_{ij}$ указанные выше функции $\omega_{m,ij}(x_i, x_j)$ и $f_{ij}(x_i, x_j)$ являются непрерывно дифференцируемыми, а их градиенты отличны от нуля.

3. Постановка задачи

Построить векторное поле $\vec{v} = \{\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n\}$, соответствующее системе уравнений вида (2.1), у которой:

- все фазовые траектории, расположенные внутри области D, выходят из точки P_1 и стремятся при $t \to +\infty$ к особой точке P_2, касаясь в ней фазовой кривой L;
- топологическая структура разбиения на траектории области D задаётся топологическими структурами плоских векторных полей вида
$$\vec{v}_k = \{\dot{x}_i, \dot{x}_j\} : \quad \begin{cases} \dot{x}_i = X_{ki}(x_i, x_j), \\ \dot{x}_j = X_{kj}(x_i, x_j), \end{cases} \tag{3.1}$$
в соответствующих областях D_{ij} для всех $(i,j) \in I_r$;

при этом:

- $P_{\alpha,ij}$, где $(i,j) \in I_r$ и $\alpha \in \{1,2\}$, являются изолированными особыми точками соответствующих векторных полей (3.1), а дуги кривых $L_{m,ij}$ и L_{ij}, проходящие через эти точки, являются их сепаратрисами;
- все траектории векторного поля (3.1), расположенные внутри области D_{ij}, исходят из малой окрестности точки $P_{1,ij}$ и стремятся при $t \to +\infty$ к особой точке $P_{2,ij}$, касаясь в ней интегральной кривой L_{ij}.
- по крайней мере одна из компонент векторного поля (3.1) не имеет нулевых значений в области D_{ij} и её неособых граничных точках.

4. Решение задачи

Поставленную задачу решим последовательным построением вспомогательных плоских векторных полей $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{n-1}$, определяемых системами уравнений вида (3.1), и согласованием изменений их компонент во времени при составлении искомого n-мерного векторного поля $\vec{v}$.

1-*ый шаг.* Выберем любые две координаты, которые обозначим x_{i_1} и x_{i_2}:

$$i_1, i_2 \in \{1, 2, \dots, n\}, \text{ где } i_1 \neq i_2,$$

и построим плоское векторное поле

$$\vec{v}_1 = \{\dot{x}_{i_1}, \dot{x}_{i_2}\}: \quad \begin{cases} \dot{x}_{i_1} = X_{1,i_1}(x_{i_1}, x_{i_2}), \\ \dot{x}_{i_2} = X_{1,i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}), \end{cases} \tag{4.1}$$

которое имеет требуемую топологическую структуру в области $D_{i_1 i_2}$ соответствующей координатной плоскости $Ox_{i_1}x_{i_2}$ и одна из компонент которого не имеет нулевых значений в области $D_{i_1 i_2}$ и её неособых граничных точках.

2-*ой шаг.* Выберем любые две координаты, которые обозначим x_{j_2} и x_{i_3}:

$$j_2 \in \{i_1, i_2\}, \quad i_3 \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2\}, \quad X_{1,j_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \neq 0 \ \text{ внутри } \ D_{i_1 i_2},$$

и построим плоское векторное поле

$$\vec{v}_2 = \{\dot{x}_{j_2}, \dot{x}_{i_3}\}: \quad \begin{cases} \dot{x}_{j_2} = \tilde{X}_{2,j_2}(x_{j_2}, x_{i_3}), \\ \dot{x}_{i_3} = \tilde{X}_{2,i_3}(x_{j_2}, x_{i_3}) \end{cases} \tag{4.2}$$

с заданной топологической структурой в области D_{j_2,i_3} соответствующей плоскости $Ox_{j_2}x_{i_3}$ и компонентой $\tilde{X}_{2,j_2}(x_{j_2}, x_{i_3}) \neq 0$ внутри этой области и в её неособых граничных точках.

Так как $j_2 \in \{i_1, i_2\}$, то следует выполнить согласование изменений одноименных координат векторных полей (4.1) и (4.2). В связи с этим заметим, что система уравнений в (4.2) имеет такой же фазовый портрет, что и дифференциальное уравнение

$$\frac{dx_{i_3}}{dx_{j_2}} = \frac{\tilde{X}_{2,i_3}(x_{j_2}, x_{i_3})}{\tilde{X}_{2,j_2}(x_{j_2}, x_{i_3})}, \tag{4.3}$$

где в соответствии с (4.1)

$$dx_{j_2} = X_{1,j_2}(x_{i_1}, x_{i_2})dt. \tag{4.4}$$

После подстановки (4.4) в (4.3) получим

$$\dot{x}_{i_3} = \frac{\tilde{X}_{2,i_3}(x_{j_2}, x_{i_3})}{\tilde{X}_{2,j_2}(x_{j_2}, x_{i_3})} \cdot X_{1,j_2}(x_{i_1}, x_{i_2}). \tag{4.5}$$

Согласование координат векторного поля (4.1) с полученной координатой (4.5) завершим умножением их на знаменатель последней $\tilde{X}_{2,j_2}(x_{j_2}, x_{i_3})$. В результате получим трёхмерное векторное поле

$$\vec{V}_2 = \{\dot{x}_{i_1}, \dot{x}_{i_2}, \dot{x}_{i_3}\}: \quad \begin{cases} \dot{x}_{i_1} = X_{1,i_1}(x_{i_1}, x_{i_2}) \cdot \tilde{X}_{2,j_2}(x_{j_2}, x_{i_3}), \\ \dot{x}_{i_2} = X_{1,i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \cdot \tilde{X}_{2,j_2}(x_{j_2}, x_{i_3}), \\ \dot{x}_{i_3} = X_{1,j_2}(x_{i_1}, x_{i_2}) \cdot \tilde{X}_{2,i_3}(x_{j_2}, x_{i_3}). \end{cases} \tag{4.6}$$

Так как функции $X_{1,j_2}(x_{i_1}, x_{i_2})$ и $\tilde{X}_{2,j_2}(x_{j_2}, x_{i_3})$ отличны от нуля в соответствующих им областях $D_{i_1 i_2}$ и $D_{j_2 i_3}$ и их неособых граничных точках, то:

(a) проекциями векторного поля (4.6) на плоскости $Ox_{i_1}x_{i_2}$ и $Ox_{j_2}x_{i_3}$ являются векторные поля, которые имеют с векторными полями (4.1) и (4.2) в соответствующих им областях $D_{i_1i_2}$ и $D_{j_2i_3}$ «*одни и те же траектории, но с различными параметризациями на них*» (см. [1, гл. I, § 1, с. 33]);

(b) по крайней мере одна из компонент векторного поля (4.6) не имеет нулевых значений в области $D_{i_1i_2} \times D_{j_2i_3}$ пространства $Ox_{i_1}x_{i_2}x_{i_3}$ по построению.

Из сказанного в пункте (a) следует, что векторные поля, которые являются проекциями векторного поля (4.6) на области $D_{i_1i_2}$ и $D_{j_2i_3}$, и соответствующие им векторные поля (4.1) и (4.2) имеют в этих областях эквивалентные топологические структуры.

Для удобства дальнейшего изложения перепишем (4.6) следующим образом:

$$\vec{V}_2 = \{\dot{x}_{i_1}, \dot{x}_{i_2}, \dot{x}_{i_3}\}: \begin{cases} \dot{x}_{i_1} = X_{2,i_1}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}), \text{ где } X_{2,i_1} = X_{1,i_1} \cdot \tilde{X}_{2,j_2}, \\ \dot{x}_{i_2} = X_{2,i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}), \text{ где } X_{2,i_2} = X_{1,i_2} \cdot \tilde{X}_{2,j_2}, \\ \dot{x}_{i_3} = X_{2,j_3}(x_{i_1}, x_{i_2}, x_{i_3}), \text{ где } X_{2,i_3} = X_{1,j_2} \cdot \tilde{X}_{2,i_3}. \end{cases}$$

Предположим, что на $(k-1)$-ом шаге описанного выше процесса получено k-мерное векторное поле вида

$$\vec{V}_{k-1} = \{\dot{x}_{i_1}, \dot{x}_{i_2}, \dots, \dot{x}_{i_k}\}: \begin{cases} \dot{x}_{i_1} = X_{k-1,i_1}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}), \\ \dot{x}_{i_2} = X_{k-1,i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{i_k} = X_{k-1,i_k}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}), \end{cases} \tag{4.7}$$

где по построению:

- $i_1, i_2, \dots, i_k \in \{1, 2, \dots, n\}: \ i_s \neq i_r$ при любых $s, r \in \{1, 2, \dots, k\}$ и $s \neq r$;
- по крайней мере одна из компонент (4.7) не имеет нулевых значений внутри области $D_{i_1i_2} \times D_{j_2i_3} \times \ldots \times D_{j_{k-1}i_k}$ пространства $Ox_{i_1}x_{i_2}\ldots x_{i_k}$;
- проекции векторного поля $\vec{V}_{k-1}$ на координатные плоскости, в которых были построены вспомогательные плоские векторные поля $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_{k-1}$, имеют в соответствующих им областях D_{ij} топологические структуры, эквивалентные структурам соответствующих вспомогательных векторных полей.

k-ый шаг. Для выполнения этого шага выберем индекс j_k, координату $x_{i_{k+1}}$:

$$j_k \in \{i_1, i_2, \dots, i_k\}, \quad i_{k+1} \in \{1, 2, \dots, n\} \setminus \{i_1, i_2, \dots, i_k\}, \ X_{k-1,j_k}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}) \neq 0$$

в области $D_{i_1i_2} \times D_{j_2i_3} \times \ldots \times D_{j_{k-1}i_k}$ и построим вспомогательное плоское векторное поле

$$\vec{v}_k = \{\dot{x}_{j_k}, \dot{x}_{i_{k+1}}\}: \quad \begin{cases} \dot{x}_{j_k} = \tilde{X}_{k,j_k}(x_{j_k}, x_{i_{k+1}}), \\ \dot{x}_{i_{k+1}} = \tilde{X}_{k,i_{k+1}}(x_{j_k}, x_{i_{k+1}}), \end{cases} \tag{4.8}$$

которое имеет требуемую топологическую структуру в области $D_{j_k,i_{k+1}}$ плоскости $Ox_{j_k}x_{i_{k+1}}$.

Для согласования компонент векторных полей (4.7) и (4.8) заметим, что последнему соответствует дифференциальное уравнение

$$\frac{dx_{i_{k+1}}}{dx_{j_k}} = \frac{\tilde{X}_{k,i_{k+1}}(x_{j_k}, x_{i_{k+1}})}{\tilde{X}_{k,j_k}(x_{j_k}, x_{i_{k+1}})}, \tag{4.9}$$

где согласно (4.7)

$$dx_{j_k} = X_{k-1,j_k}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k})dt. \tag{4.10}$$

После подстановки (4.10) в (4.9) получим

$$\dot{x}_{i_{k+1}} = \frac{\tilde{X}_{k,i_{k+1}}(x_{j_k}, x_{i_{k+1}})}{\tilde{X}_{k,j_k}(x_{j_k}, x_{i_{k+1}})} \cdot X_{k-1,j_k}(x_{i_i}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}). \tag{4.11}$$

Добавим уравнение (4.11) к уравнениям (4.7). После умножения всех уравнений вновь полученной системы на $\tilde{X}_{k,j_k}(x_{j_k}, x_{i_{k+1}})$ получим компоненты $(k+1)$-мерного векторного поля

$$\vec{V}_k = \{\dot{x}_{i_1}, \dot{x}_{i_2}, \dots, \dot{x}_{i_{k+1}}\}: \quad \begin{cases} \dot{x}_{i_1} = X_{k,i_1}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{k+1}}), \\ \dot{x}_{i_2} = X_{k,i_2}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{k+1}}), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \dot{x}_{i_{k+1}} = X_{k,i_{k+1}}(x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_{k+1}}), \end{cases} \tag{4.12}$$

проекции которого на координатные плоскости, в которых были построены вспомогательные плоские векторные поля $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_k$, имеют в соответствующих им областях D_{ij} топологические структуры соответствующих вспомогательных векторных полей, и по крайней мере одна из компонент $X_{k,i}(x_{i_1}, x_{i_2}, \ldots, x_{i_{k+1}})$, $i = 1, 2, \ldots, k+1$, не имеет нулевых значений в области $D_{i_1 i_2} \times D_{j_2 i_3} \times \ldots \times D_{j_k i_{k+1}}$ пространства $Ox_{i_1} x_{i_2} \ldots x_{i_{k+1}}$.

Из сказанного выше следует, что на последнем $(n-1)$-ом шаге этого процесса получим искомое n-мерное векторное поле $\vec{v} = (\dot{x}_1, \dot{x}_2, \ldots, \dot{x}_n)$, определяемое системой дифференциальных уравнений вида

$$\dot{x}_i = X_i(x_1, x_2, \ldots, x_n) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{4.13}$$

5. О критических направлениях и типах сепаратрис особых точек плоских векторных полей

Изложенное в разделе 4 решение задачи раздела 3 предполагает построение последовательности плоских векторных полей, которые имеют заданные сепаратрисы и заданные топологические структуры в ограниченных областях соответствующих координатных плоскостей. Вопрос существования у таких векторных полей заданных сепаратрис решается методом Еругина [4], после чего требуемые свойства топологических структур этих векторных полей определяются типами критических направлений и сепаратрис их особых точек. Построение плоских векторных полей с заданными критическими направлениями особых точек и заданными типами касающихся их сепаратрис можно выполнить, используя результаты Фроммера (в [5, § 5]) в исследовании особых точек дифференциального уравнения вида

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x,y)}{P(x,y)} \tag{5.1}$$

с дробно-рациональной правой частью и простыми обыкновенными критическими направлениями этих точек.

В соответствии с этими результатами тип критического направления $y = u_i x$ ($u_i \neq \pm\infty$) особой точки $O(0;0)$ уравнения (5.1) и, следовательно, типы сепаратрис, касающихся этого направления в этой точке, определяются знаком производной $\psi'(0; u_i)$ функции

$$\psi(x,u) = \left[\frac{xQ(x,y) - yP(x,y)}{xP(x,y)}\right]\Bigg|_{y=ux}, \tag{5.2}$$

где u_i — угловой коэффициент критического направления.

Заметим, что в (5.2)

$$xQ(x,y) - yP(x,y) = (\vec{r} \times \vec{v})_z, \tag{5.3}$$

где $\vec{r} = \{x; y\}$, $\vec{v} = \{P(x,y); Q(x,y)\}$, $(\vec{r} \times \vec{v})_z$ — проекция векторного произведения $\vec{r} \times \vec{v}$ на ось Oz правой системы координат $Oxyz$, и

$$\operatorname{sign}[x \cdot P(x,y)] = \operatorname{sign}[\vec{r} \cdot \vec{v}] \tag{5.4}$$

в достаточно малом секторе $S_O(i, \varepsilon, \delta) = \{(x,y) : \ x^2 + y^2 < \varepsilon\}, \ |y/x - u_i| < \delta\}$.

Предположим, что: точка $O(0;0)$ имеет $n+1$ простое обыкновенное критическое направление и других критических направлений не имеет; каждого из этих направлений в точке O касается одна из интегральных кривых $L_i : \omega_i(x,y) = 0$ $(i = 1, \ldots, n+1)$, содержащих сепаратрисы этой точки; и

$$P(x,y) = P_n(x,y) + \varphi(x,y) \text{ и } Q(x,y) = Q_n(x,y) + \psi(x,y),$$

где $P_n(x,y)$ и $Q_n(x,y)$ — однородные многочлены степени n, а многочлены $\varphi(x,y)$ и $\psi(x,y)$ состоят из членов более высоких порядков. Тогда в точках сектора $S_O(i, \varepsilon, \delta)$

$$xQ(x,y) - yP(x,y) = \mu x^{n+1} \prod_{j=1, j\neq i}^{n} (u - u_j)(1 + \alpha x^k)(u - u_i), \tag{5.5}$$

$$xP(x,y) = x^{n+1}[P_n(1,u) + \beta x^m], \tag{5.6}$$

где α, β, μ — постоянные, $\mu \neq 0$, k, m — натуральные числа, и

$$\psi(x,u) = \frac{\mu \prod\limits_{j=1, j\neq i}^{n} (u-u_j)\cdot(1+\alpha\cdot x^k)}{P_n(1,u)+\beta\cdot x^m}\cdot(u-u_i). \tag{5.7}$$

Дифференцируя (5.7) по переменной u, получим

$$\psi'(0,u_i) = \frac{\mu \prod\limits_{j=1, j\neq i}^{n} (u_i-u_j)}{P_n(1,u_i)}. \tag{5.8}$$

Пусть $S_O^-(i,\varepsilon,\delta)$ и $S_O^+(i,\varepsilon,\delta)$ — части сектора $S_O(i,\varepsilon,\delta)$, на которые он разбивается прямой $y = u_i x$ так, что из точки O сектор $S_O^-(i,\varepsilon,\delta)$ видится справа от этой прямой, а сектор $S_O^+(i,\varepsilon,\delta)$ — слева. Из (5.4)–(5.8) следует зависимость знака производной $\psi'(0,u_i)$ от комбинации знаков скалярного произведения $(\vec r\cdot\vec v)$ и проекции векторного произведения $(\vec r\times\vec v)_z$ внутри соответствующих достаточно малых секторов $S_O^-(i,\varepsilon,\delta)$ и $S_O^+(i,\varepsilon,\delta)$. А именно:

(a) $\psi'(0,u_i) > 0$, если $(\vec r\cdot\vec v)\cdot(\vec r\times\vec v)_z \begin{cases} < 0 \text{ внутри } S_O^-(i,\varepsilon,\delta),\\ > 0 \text{ внутри } S_O^+(i,\varepsilon,\delta);\end{cases}$

(b) $\psi'(0,u_i) < 0$, если $(\vec r\cdot\vec v)\cdot(\vec r\times\vec v)_z \begin{cases} > 0 \text{ внутри } S_O^-(i,\varepsilon,\delta),\\ < 0 \text{ внутри } S_O^+(i,\varepsilon,\delta).\end{cases}$

Замечание 5.1. Согласно [5, § 5] сепаратриса особой точки $O(0;0)$ уравнения (5.1), которая расположена на его интегральной кривой L_i и касается в этой точке критического направления $y = u_i x$, имеет параболический тип в случае (a) и гиперболический тип в случае (b).

Замечание 5.2. Если критическое направление особой точки $O(0;0)$ уравнения (5.1) параллельно оси Oy, то его изучение можно свести к исследованию методом Фроммера [5] знака функции

$$\varphi(y,v) = \left.\left[\frac{P(x,y)}{Q(x,y)} - \frac{x}{y}\right]\right|_{x=vy}$$

в достаточно малой окрестности точки $O(0;0)$ плоскости Oyv.

Таким образом, использованный в [5] алгебраический подход к исследованию топологической структуры особой точки, имеющей только простые обыкновенные критические направления, сводится к изучению знаков скалярного произведения $\vec r\cdot\vec v$ и проекции векторного произведения $(\vec r\times\vec v)_z$ во внутренних точках секторов $S_O^-(i,\varepsilon,\delta)$ и $S_O^+(i,\varepsilon,\delta)$, соответствующих этим направлениям.

С геометрической точки зрения эти произведения характеризуют радиальные и трансверсальные составляющие плоского векторного поля относительно особой точки. Поэтому использование этих произведений упрощает решение задач на построение уравнений вида (5.1) и соответствующих им плоских векторных полей с особыми точками заданной локальной топологической структуры.

Изложенный выше метод построения многомерных векторных полей иллюстрируется следующим примером.

6. Пример построения векторного поля в $\mathbb{R}^3$

Построить векторное поле $\vec v = \{X, Y, Z\}$, соответствующее системе обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot x = X(x,y,z), \quad \dot y = Y(x,y,z), \quad \dot z = Z(x,y,z), \tag{6.1}$$

для которой

(i) интегральные поверхности, ограничивающие область D в $\mathbb{R}^3$, заданы уравнениями

$$\begin{gathered}\omega_1 \equiv -x^2-(y-1)^2+1=0,\ \omega_2 \equiv (x-1)^2+y-1=0,\\ \omega_4 \equiv z=0,\ \omega_5 \equiv 1-y=0,\ \omega_6 \equiv -y=0,\ \omega_7 \equiv z-1=0;\end{gathered} \tag{6.2}$$

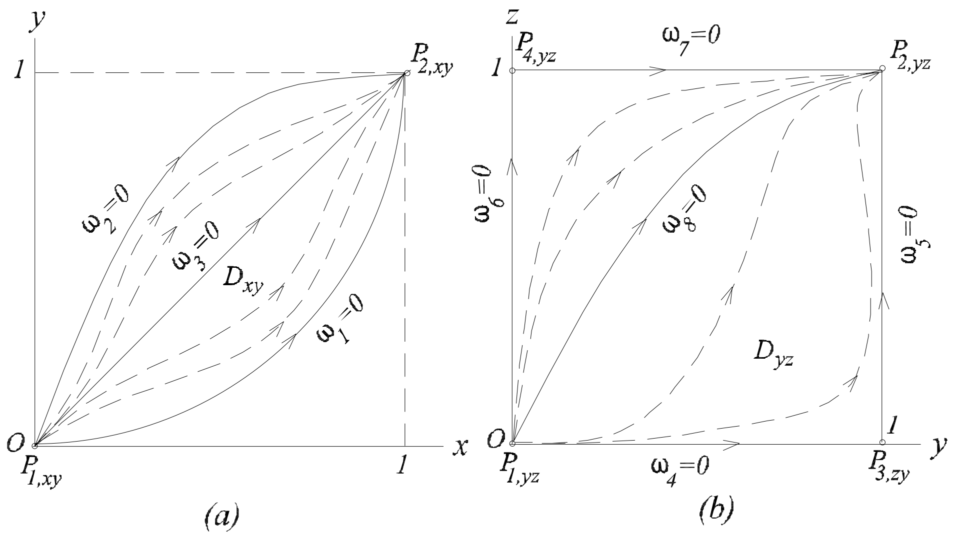


Рис. 1: Схемы топологических структур векторных полей $\vec{v}_{xy}$ и $\vec{v}_{yz}$: (a) разбиение области D_{xy} на траектории векторного поля $\vec{v}_{xy}$; (b) разбиение области D_{yz} на траектории векторного поля $\vec{v}_{yz}$.

Fig. 1: Schemes of topological structures of vector fields $\vec{v}_{xy}$ and $\vec{v}_{yz}$: (a) partition of the domain D_{xy} into trajectories of the vector field $\vec{v}_{xy}$; (b) partition of the domain D_{yz} into trajectories of the vector field $\vec{v}_{yz}$.

(ii) $P_1(0,0,0)$, $P_2(1,1,1)$ являются особыми точками, предельными при $t \to -\infty$ и $t \to +\infty$, соответственно, для расположенных в области D траекторий, которые касаются или не касаются в этих точках поверхностей

$$\omega_3 \equiv y - x = 0, \quad \omega_8 \equiv -3y + y^2 + 2z = 0 \tag{6.3}$$

указанным на рис. 1.a и 1.b образом;

(iii) проекции векторного поля $\vec{v}$ на координатные плоскости Oxy и Oyz определяют плоские векторные поля $\vec{v}_{xy}$ и $\vec{v}_{yz}$, имеющие в областях

$$D_{xy} = \{(x,y):\ \omega_1(x,y) \geqslant 0,\ \omega_2(x,y) \leqslant 0\},$$
$$D_{yz} = \{(y,z):\ \omega_i(y,z) \geqslant 0\ (i=4,5),\ \omega_i(y,z) \leqslant 0\ (i=6,7)\}$$

топологические структуры, представленные на рис. 1.a и 1.b соответственно;

(iv) все критические направления особых точек векторных полей $\vec{v}_{xy}$ и $\vec{v}_{yz}$ будем полагать *простыми обыкновенными* в смысле определения из [5, § 4].

Замечание 6.1. Из ограничения пункта (iv) следует, что все сепаратрисы особых точек векторных полей $\vec{v}_{xy}$ и $\vec{v}_{yz}$ являются только несмешанного типа: параболического или гиперболического (определения см. в [2]).

Решение задачи начнём с построения вспомогательных плоских векторных полей $\vec{v}_{xy}$ и $\vec{v}_{yz}$, имеющих в областях D_{xy} и D_{yz} топологические структуры, представленные схемами на рис. 1.a и 1.b, соответственно.

1. В соответствии с [4] положим:

$$\vec{v}_{xy} = \lambda_1 \vec{\tau}_1 \omega_2 \omega_3 + \lambda_2 \vec{\tau}_2 \omega_1 \omega_3 - \lambda_3 \vec{\tau}_3 \omega_1 \omega_2, \tag{6.4}$$

где λ_i $(i = 1,2,3)$ — неопределённые положительные множители, а векторы

$$\vec{\tau}_1 = \{-(y-1); x\}, \quad \vec{\tau}_2 = \{1; -2(x-1)\},\ \vec{\tau}_3 = \{1; 1\} \tag{6.5}$$

являются касательными к соответствующим кривым $L_{i,xy} : \omega_i(x,y) = 0$ $(i = 1,2,3)$;

$$\vec{v}_{yz} = -\lambda_4 \vec{\tau}_4 \omega_5 \omega_6 \omega_7 \omega_8 - \lambda_5 \vec{\tau}_5 \omega_4 \omega_6 \omega_7 \omega_8 - \lambda_6 \vec{\tau}_6 \omega_4 \omega_5 \omega_7 \omega_8 - \lambda_7 \vec{\tau}_7 \omega_4 \omega_5 \omega_6 \omega_8 + \lambda_8 \vec{\tau}_8 \omega_4 \omega_5 \omega_6 \omega_7, \tag{6.6}$$

где λ_i $(i = 4, 5, \ldots, 8)$ — неопределённые положительные множители, а векторы

$$\vec{\tau}_4 = \{1; 0\}, \quad \vec{\tau}_5 = \{0; 1\}, \quad \vec{\tau}_6 = \{0; 1\}, \quad \vec{\tau}_7 = \{1; 0\}, \quad \vec{\tau}_8 = \{2; 3 - 2y\} \tag{6.7}$$

являются касательными к соответствующим кривым $L_{yz,i} : \omega_i(y, z) = 0$ $(i = 4 \ldots, 8)$.

В этом случае $L_{i,xy}$ $(i = 1, 2, 3)$ являются интегральными кривыми векторного поля $\vec{v}_{xy}$, а $L_{i,yz}$ $(i = 4, \ldots, 8)$ — интегральными кривыми векторного поля $\vec{v}_{yz}$.

Проецируя (6.4) и (6.6) на координатные оси, получим, с учётом (6.5) и (6.7), компоненты вспомогательных векторных полей:

$$v_{xy,x} = -\lambda_1(y - 1)\omega_2\omega_3 + \lambda_2\omega_1\omega_3 - \lambda_3\omega_1\omega_2, \tag{6.8}$$

$$v_{xy,y} = \lambda_1 x\omega_2\omega_3 - 2\lambda_2(x - 1)\omega_1\omega_3 - \lambda_3\omega_1\omega_2, \tag{6.9}$$

$$v_{yz,y} = -\lambda_4\omega_5\omega_6\omega_7\omega_8 - \lambda_7\omega_4\omega_5\omega_6\omega_8 + 2\lambda_8\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7, \tag{6.10}$$

$$v_{yz,z} = -\lambda_5\omega_4\omega_6\omega_7\omega_8 - \lambda_6\omega_4\omega_5\omega_7\omega_8 + \lambda_8(3 - 2y)\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7. \tag{6.11}$$

2. Для векторных полей (6.4) и (6.6) найдём значения коэффициентов λ_i $(i = 1, 2, \ldots, 8)$, при которых угловые особые точки областей D_{xy} и D_{yz}, а следовательно, и сами эти области будут иметь заданные топологические структуры. Эти значения найдём, используя замечание 5.1.

2.1. Для векторного поля $\vec{v}_{xy}$.

2.1.а. В окрестности точки $P_{1,xy}(0; 0)$, полагая $\vec{r}_{1,xy} = \{x, y\}$, рассмотрим векторное произведение

$$\vec{r}_{1,xy} \times \vec{v}_{xy} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & 0 \\ v_{xy,x} & v_{xy,y} & 0 \end{vmatrix} = (xv_{xy,y} - yv_{xy,x})\vec{k},$$

где согласно (6.2), (6.3), (6.8) и (6.9)

$$xv_{xy,y} - yv_{xy,x} = (-0.5\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)\omega_1\omega_2\omega_3 + o(r_{1,xy}^3), \quad r_{1,xy} = \sqrt{x^2 + y^2}. \tag{6.12}$$

Согласно рис. 1.а в точках подмножества $\bar{D}_{xy} \bigcap \mathring{U}(P_{1,xy}, \varepsilon)$ достаточно малой проколотой ε-окрестности $\mathring{U}(P_{1,xy}, \varepsilon)$ точки $P_{1,xy}$ скалярное произведение $\vec{r}_{1,xy} \cdot \vec{v}_{xy} > 0$ и

$$(\vec{r}_{1,xy} \times \vec{v}_{xy})_z \begin{cases} < 0, & \text{если } \omega_1\omega_2\omega_3 > 0; \\ > 0, & \text{если } \omega_1\omega_2\omega_3 < 0. \end{cases}$$

Из (6.12) следует, что эти неравенства для проекции $(\vec{r}_{1,xy} \times \vec{v}_{xy})_z$ выполняются, если

$$-\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 < 0. \tag{6.13}$$

В этом случае согласно замечанию 5.1 сепаратрисы точки $P_{1,xy}$, расположенные на кривых $L_{1,xy}$ и $L_{2,xy}$, являются гиперболическими, а сепаратрисы, расположенные на прямой $L_{3,xy}$ — параболическими.

2.1.б. В окрестности точки $P_{2,xy}(1; 1)$ при $\vec{r}_{2,xy} = \{x - 1, y - 1\}$

$$\vec{r}_{2,xy} \times \vec{v}_{xy} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x - 1 & y - 1 & 0 \\ v_{xy,x} & v_{xy,y} & 0 \end{vmatrix} = [(x - 1)v_{xy,y} - (y - 1)v_{xy,x})]\vec{k},$$

где согласно (6.2), (6.3), (6.8) и (6.9)

$$(x - 1)v_{xy,y} - (y - 1)v_{xy,x} = (-0.5\lambda_1 - \lambda_2 + \lambda_3)\omega_1\omega_2\omega_3 + o(r_{2,xy}^3), \tag{6.14}$$
$$r_{2,xy} = \sqrt{(x - 1)^2 + (y - 1)^2}.$$

В соответствии с рис. 1.а в точках подмножества $\bar{D}_{xy} \bigcap \mathring{U}(P_{2,xy}, \varepsilon)$ достаточно малой проколотой ε-окрестности $\mathring{U}(P_{2,xy}, \varepsilon)$ точки $P_{2,xy}$ скалярное произведение $\vec{r}_{1,xy} \cdot \vec{v}_{xy} < 0$ и

$$(\vec{r}_{2,xy} \times \vec{v}_{xy})_z \begin{cases} < 0, & \text{если } \omega_1\omega_3 < 0; \\ > 0, & \text{если } \omega_1\omega_3 > 0. \end{cases}$$

Из (6.14) следует, что эти неравенства для проекции $(\vec{r}_{1,xy} \times \vec{v}_{xy})_z$ выполняются, если

$$-\lambda_1 - 2\lambda_2 + 2\lambda_3 < 0. \tag{6.15}$$

В этом случае согласно замечанию 5.1 сепаратрисы точки $P_{2,xy}$, расположенные на кривых $L_{1,xy}$ и $L_{2,xy}$, являются гиперболическими, а сепаратрисы, расположенные на прямой $L_{3,xy}$, являются параболическими.

При $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$ неравенства (6.13), (6.15) выполняются и компонентами векторного поля $\vec{v}_{xy}$ являются

$$v_{xy,x} = -(y-1)\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_3 - \omega_1\omega_2, \tag{6.16}$$

$$v_{xy,y} = x\omega_2\omega_3 - 2(x-1)\omega_1\omega_3 - \omega_1\omega_2. \tag{6.17}$$

Покажем, что в (6.16) компонента $v_{xy,y} > 0$ внутри области D_{xy}.

Внутри той части области D_{xy}, где $\omega_3 < 0$, слагаемое $x\omega_2\omega_3 > 0$, как и сумма остальных слагаемых:

$$\begin{aligned}&-2(x-1)\omega_1\omega_3 - \omega_1\omega_2 = \omega_1[-2(x-1)\omega_3 + \omega_2] =\\ &\quad = -\omega_1[2(x-1)(y-x) + (x-1)^2 + y - 1] = \omega_1[x^2 - 2xy + y) = \omega_1[(x-y)^2 + y(1-y)] > 0.\end{aligned}$$

Последнее неравенство следует из того, что в этой части области D_{xy} выполняются неравенства $\omega_1 > 0$ и $1 - y > 0$.

Внутри части области D_{xy}, где $\omega_3 > 0$, в компоненте (6.17) слагаемое $-2(x-1)\omega_1\omega_3 > 0$, как и сумма остальных слагаемых

$$x\omega_2\omega_3 - \omega_1\omega_2 = \omega_2[x\omega_3 + \omega_1] = \omega_2(xy + y^2 - 2y) = \omega_2 y(y + x - 2) > 0,$$

так как в этой части области D_{xy} справедливы неравенства $\omega_2 < 0$, $y > 0$ и $y + x - 2 < 0$.

Из неравенства $v_{xy,y} > 0$ в области D_{xy} и её граничных точках, отличных от $P_{1,xy}$ и $P_{2,xy}$, следует, что векторное поле $\vec{v}_{xy}$ не имеет особых точек внутри этой области. В этом случае векторное поле $\vec{v}_{xy}$ имеет в D_{xy} топологическую структуру, которая задана схемой на рис. 1.a и определяется установленными выше типами сепаратрис особых точек $P_{1,xy}$ и $P_{2,xy}$.

2.2. Для векторного поля $\vec{v}_{yz}$.

2.2.a. В окрестности точки $P_{1,yz}(0;0)$, полагая $\vec{r}_{1,yz} = \{y, z\}$, рассмотрим векторное произведение

$$\vec{r}_{1,yz} \times \vec{v}_{yz} = \begin{vmatrix} \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} \\ y & z & 0 \\ v_{yz,y} & v_{yz,z} & 0 \end{vmatrix} = (yv_{yz,z} - zv_{yz,y})\vec{i},$$

где согласно (6.2), (6.3), (6.10) и (6.11)

$$yv_{yz,z} - zv_{yz,y} = (\lambda_4 + \lambda_6 - \lambda_8)\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7\omega_8 + o(r_{1,yz}^3). \tag{6.18}$$

В соответствии с рис. 1.b в точках подмножества $\bar{D}_{yz} \bigcap \mathring{U}(P_{1,yz}, \varepsilon)$ достаточно малой проколотой ε-окрестности $\mathring{U}(P_{1,yz}, \varepsilon)$ точки $P_{1,yz}$ скалярное произведение $\vec{r}_{1,yz} \cdot \vec{v}_{yz} > 0$ и

$$(\vec{r}_{1,yz} \times \vec{v}_{yz})_x \begin{cases} > 0, \text{ если } \omega_4\omega_8 < 0; \\ < 0, \text{ если } \omega_4\omega_8 > 0. \end{cases}$$

Из (6.18) и замечания 5.1 следует, что при

$$\lambda_4 + \lambda_6 - \lambda_8 < 0 \tag{6.19}$$

сепаратрисы особой точки $P_{1,yz}$ векторного поля $\vec{v}_{yz}$, расположенные на прямых $L_{4,yz}$ и $L_{6,xy}$, являются параболическими, а расположенные на кривой $L_{8,xy}$ — гиперболическими (см. рис. 1.b).

2.2.б. В окрестности точки $P_{2,yz}(1;1)$, полагая $\vec{r}_{2,yz} = \{y-1, z-1\}$, рассмотрим векторное произведение

$$\vec{r}_{2,yz} \times \vec{v}_{yz} = \begin{vmatrix} \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} \\ y-1 & z-1 & 0 \\ v_{yz,y} & v_{yz,z} & 0 \end{vmatrix} = [(y-1)v_{yz,z} - (z-1)v_{yz,y})]\vec{i},$$

где согласно (6.2), (6.3), (6.10) и (6.11)

$$(y-1)v_{yz,z} - (z-1)v_{yz,y} = (\lambda_5 + \lambda_7 - \lambda_8)\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7\omega_8 + o(r_{2,yz}^3). \tag{6.20}$$

В соответствии с рис. 1.b в точках подмножества $\bar{D}_{yz} \bigcap \mathring{U}(P_{2,yz},\varepsilon)$ достаточно малой проколотой ε-окрестности $\mathring{U}(P_{2,yz},\varepsilon)$ точки $P_{2,yz}$ скалярное произведение $\vec{r}_{2,yz}\cdot\vec{v}_{yz}<0$ и

$$(\vec{r}_{2,yz}\times\vec{v}_{yz})_x \begin{cases} <0, \text{ если } \omega_5\omega_8<0; \\ >0, \text{ если } \omega_5\omega_8>0. \end{cases}$$

Из (6.20) и замечания 5.1 следует, что при

$$\lambda_5+\lambda_7-\lambda_8>0 \tag{6.21}$$

сепаратрисы точки $P_{2,yz}$, лежащие на прямых $L_{5,yz}$ и $L_{7,yz}$, имеют гиперболический тип, а сепаратрисы, расположенные на кривой $L_{8,yz}$ — параболический тип (см. рис. 1.b).

2.2.в. В окрестности точки $P_{3,yz}(1;0)$, полагая $\vec{r}_{3,yz}=\{y-1,z\}$, найдём

$$\vec{r}_{3,yz}\times\vec{v}_{yz}=\begin{vmatrix} \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} \\ y-1 & z & 0 \\ v_{yz,y} & v_{yz,z} & 0 \end{vmatrix}=[(y-1)v_{yz,z}-zv_{yz,y})]\vec{i},$$

где согласно (6.2), (6.3), (6.10) и (6.11)

$$(y-1)v_{yz,z}-zv_{yz,y}=(\lambda_4+\lambda_5)\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7\omega_8+o(r^2_{3,yz}). \tag{6.22}$$

В соответствии с рис. 1.b в точках подмножества $\bar{D}_{yz} \bigcap \mathring{U}(P_{3,yz},\varepsilon)$ малой проколотой окрестности $\mathring{U}(P_{3,yz},\varepsilon)$ точки $P_{3,yz}$ проекция $(\vec{r}_{3,yz}\times\vec{v}_{yz})_x<0$ и при достаточно малых δ скалярное произведение

$$\vec{r}_{3,yz}\cdot\vec{v}_{yz} \begin{cases} <0, \text{ в секторе } S^-_{P_{3,yz}}(4,\varepsilon,\delta); \\ >0, \text{ в секторе } S^+_{P_{3,yz}}(5,\varepsilon,\delta). \end{cases}$$

Из (6.22) и замечания 5.1 следует, что при

$$\lambda_4+\lambda_5>0 \tag{6.23}$$

сепаратрисы точки $P_{3,yz}$, лежащие на прямых $L_{4,yz}$ и $L_{5,yz}$, имеют гиперболический тип, как и заключённый между ними сектор малой окрестности $\mathring{U}(P_{3,yz},\varepsilon)$ (см. рис. 1.b).

2.2.г. В окрестности точки $P_{4,yz}(0;1)$. Пусть $\vec{r}_{4,yz}=\{y,z-1\}$. Тогда векторное произведение

$$\vec{r}_{4,yz}\times\vec{v}_{yz}=\begin{vmatrix} \vec{j} & \vec{k} & \vec{i} \\ y & z-1 & 0 \\ v_{yz,y} & v_{yz,z} & 0 \end{vmatrix}=[yv_{yz,z}-(z-1)v_{yz,y})]\vec{i},$$

где согласно (6.2), (6.3), (6.10) и (6.11)

$$yv_{yz,z}-(z-1)v_{yz,y}=(\lambda_6+\lambda_7)\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7\omega_8+o(r^2_{4,yz}). \tag{6.24}$$

В соответствии с рис. 1.b в точках подмножества $\bar{D}_{yz} \bigcap \mathring{U}(P_{4,yz},\varepsilon)$ малой проколотой окрестности $\mathring{U}(P_{4,yz},\varepsilon)$ точки $P_{4,yz}$ проекция $(\vec{r}_{4,yz}\times\vec{v}_{yz})_x>0$ и при достаточно малых δ скалярное произведение

$$\vec{r}_{4,yz}\cdot\vec{v}_{yz} \begin{cases} <0, \text{ в секторе } S^+_{P_{4,yz}}(6,\varepsilon,\delta); \\ >0, \text{ в секторе } S^-_{P_{4,yz}}(7,\varepsilon,\delta). \end{cases}$$

Из (6.24) и замечания 5.1 следует, что при

$$\lambda_6+\lambda_7>0 \tag{6.25}$$

сепаратрисы точки $P_{4,yz}$, лежащие на прямых $L_{6,yz}$ и $L_{7,yz}$, имеют гиперболический тип, как и заключённый между ними сектор малой окрестности $\mathring{U}(P_{4,yz},\varepsilon)$ (см. рис. 1.b).

Неравенствам (6.19), (6.21), (6.23) и (6.25) удовлетворяют, в частности,

$$\lambda_4=\lambda_6=1, \quad \lambda_5=\lambda_7=2, \quad \lambda_8=3. \tag{6.26}$$

После подстановки (6.26) в (6.10) и (6.11) получим компоненты векторного поля $\vec{v}_{yz}$:

$$v_{yz,y}=-\omega_5\omega_6\omega_7\omega_8-2\omega_4\omega_5\omega_6\omega_8+6\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7, \tag{6.27}$$

$$v_{yz,z}=-2\omega_4\omega_6\omega_7\omega_8-\omega_4\omega_5\omega_7\omega_8+3(3-2y)\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7. \tag{6.28}$$

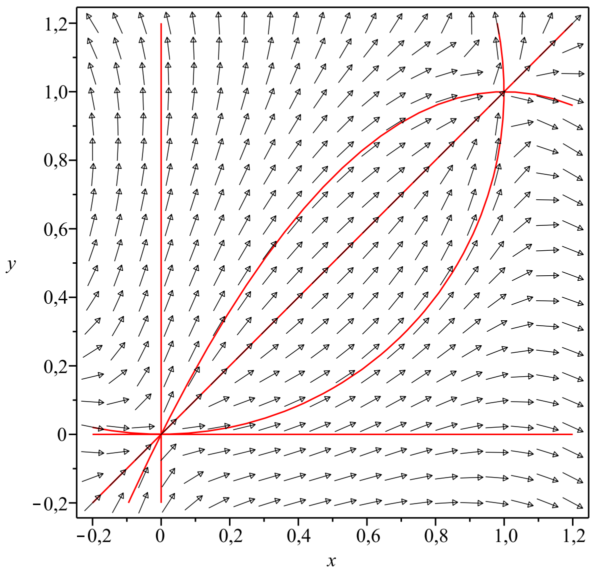


Рис. 2: Векторное поле $\vec{v}_{xy}$

Fig. 2: Vector field $\vec{v}_{xy}$

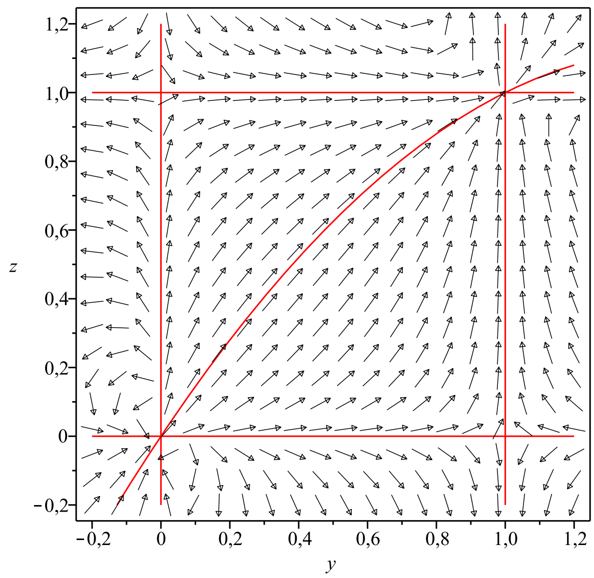


Рис. 3: Векторное поле $\vec{v}_{yz}$

Fig. 3: Vector field $\vec{v}_{yz}$

Докажем, что компонента $v_{yz,y}$, определяемая равенством (6.21), положительна в области D_{yz}.

В той части этой области, где $\omega_8 < 0$, первое слагаемое в правой части (6.21) $-\omega_5\omega_6\omega_7\omega_8 > 0$, а сумма второго и третьего слагаемых

$$-2\omega_4\omega_5\omega_6\omega_8 + 6\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7 = 2(3\omega_7 - \omega_8)\omega_4\omega_5\omega_6, \tag{6.29}$$

где

$$3\omega_7 - \omega_8 = z - 1 - (y-1)(y-2) < 0 \tag{6.30}$$

в рассматриваемой части области D_{yz}. Из (6.29), (6.30) следует, что $v_{yz,y} > 0$ в тех точках области D_{yz}, где $\omega_8 < 0$.

В другой части этой области D_{yz}, где $\omega_8 > 0$, вторoе слагаемое в правой части равенства (6.21) $-2\omega_4\omega_5\omega_6\omega_8 > 0$, а сумма первого и третьего слагаемых

$$-\omega_5\omega_6\omega_7\omega_8 + 6\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7 = (6\omega_4 - \omega_8)\omega_5\omega_6\omega_7, \tag{6.31}$$

где

$$6\omega_4 - \omega_8 = 4(z-1) - (y+4)(y-1) < 0 \tag{6.32}$$

в рассматриваемой части области D_{yz}. Из (6.31), (6.32) следует, что $v_{yz,y} > 0$ в тех точках области D_{yz}, где $\omega_8 > 0$.

Таким образом, в (6.27) компонента $v_{yz,y} > 0$ в области D_{yz} и векторное поле $\vec{v}_{yz}$ с компонентами (6.27), (6.28) не имеет особых точек в этой области и на её границе, кроме особых точек $P_{i,yz}$ $(i = 1, 2, 3, 4)$. В этом случае векторное поле $\vec{v}_{yz}$ имеет в D_{yz} заданную топологическую структуру, которая представлена схемой на рис. 1.b и определяется установленными выше типами сепаратрис особых граничных точек этой области.

Графики векторных полей $\vec{v}_{xy}$ с компонентами (6.16), (6.17) и $\vec{v}_{yz}$ с компонентами (6.27), (6.28), построенные с помощью функции *fieldplot* пакета *Maple*, представлены на рис. 2 и 3 соответственно.

Замечание 6.2. В рассмотренном выше примере построение плоских векторных полей $\vec{v}_{xy}$ и $\vec{v}_{yz}$ начиналось с их представления в виде (6.4) и (6.6) соответственно. Другой метод построения таких векторных полей представлен в статье [2]. Этот метод основан на составлении вспомогательной дробно-рациональной функции двух переменных, свойства нулей числителя и знаменателя которой соответствуют заданной топологической структуре искомого векторного поля

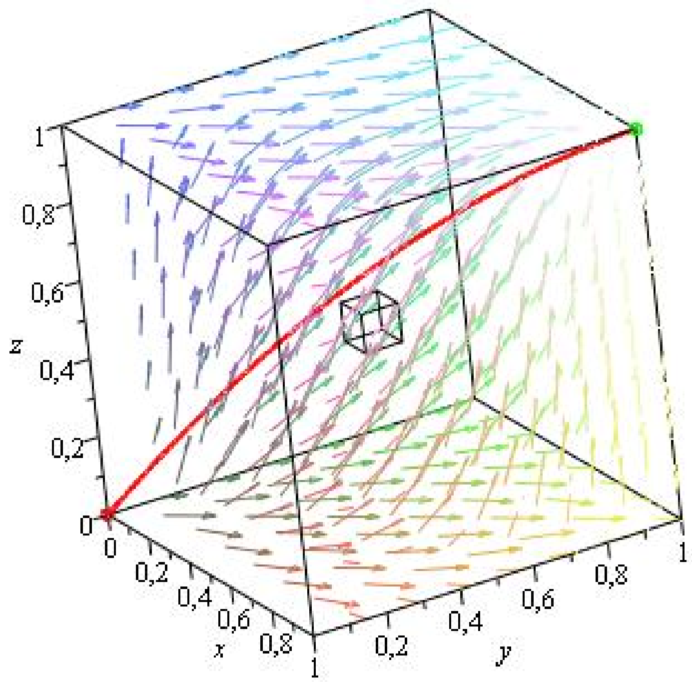


Рис. 4: График векторного поля $\vec{v}(6.34)$, построенный функцией *fieldplot3d* пакета *Maple*.

Fig. 4: Plot of the vector field $\vec{v}(6.34)$ plotted by the *fieldplot3d* function of the *Maple* package.

вида (3.1) в заданной области фазовой плоскости. Затем поля касательных и нормальных направлений к линиям уровней этой функции используются в качестве полей направлений сравнения для искомого векторного поля в процессе его построения.

3. Искомое трёхмерное векторное поле $\vec{v}$ получим, выполнив согласование изменения во времени компонент (6.16), (6.17) и (6.27), (6.28) векторных полей $\vec{v}_{xy}$ и $\vec{v}_{yz}$. В связи с этим заметим, что для векторного поля $\vec{v}_{yz}$

$$\frac{dz}{dy} = \frac{v_{yz,z}}{v_{yz,y}}.$$

Полагая в соответствии с (6.17) в этом равенстве $dy = v_{xy,y} \cdot dt$, получим

$$\dot{z} = v_{yz,z} \cdot \frac{v_{xy,y}}{v_{yz,y}}. \tag{6.33}$$

Процесс согласования можно завершить умножением $v_{xy,x}$, $v_{xy,y}$, $\dot{z}$ из (6.16), (6.17), (6.33) на $v_{yz,y}$ из (6.27). В результате компоненты искомого трёхмерного векторного поля $\vec{v} = (\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$ принимают вид произведений $\dot{x} = v_{xy,x} \cdot v_{yz,y}$, $\dot{y} = v_{xy,y} \cdot v_{yz,y}$, $\dot{z} = v_{yz,z} \cdot v_{xy,y}$. Заменив в правых частях этих равенств множители их выражениями из (6.16), (6.17), (6.27), (6.28), получим искомое векторное поле

$$\vec{v} : \begin{cases} \dot{x} = [-(y-1)\omega_2\omega_3 + \omega_1\omega_3 - \omega_1\omega_2] \cdot (-\omega_5\omega_6\omega_7\omega_8 - 2\omega_4\omega_5\omega_6\omega_8 + 6\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7), \\ \dot{y} = [x\omega_2\omega_3 - 2(x-1)\omega_1\omega_3 - \omega_1\omega_2] \cdot (-\omega_5\omega_6\omega_7\omega_8 - 2\omega_4\omega_5\omega_6\omega_8 + 6\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7), \\ \dot{z} = [x\omega_2\omega_3 - 2(x-1)\omega_1\omega_3 - \omega_1\omega_2] \cdot [-2\omega_4\omega_6\omega_7\omega_8 - \omega_4\omega_5\omega_7\omega_8 + 3(3-2y)\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7]. \end{cases} \tag{6.34}$$

График этого векторного поля, построенный с использованием функции *fieldplot3d* пакета *Maple*, представлен на рис. 4. На этом рисунке жирной линией изображена сепаратриса, расположенная на линии L пересечения цилиндрических поверхностей, заданных уравнениями (6.3).

7. Заключение

В статье изложен метод построения многомерных векторных полей, имеющих заданные особые траектории и заданную топологическую структуру в ограниченной области D соответствующего пространства $\mathbb{R}^n$. При этом предполагается, что:

(а) эта область ограничена совокупностью заданных цилиндрических поверхностей, уравнения которых имеют вид $f(x_i, x_j) = 0$;

(б) топологическая структура искомого векторного поля в области D задаётся топологическими структурами плоских векторных полей в областях D_{ij}, которые являются проекциями области D на соответствующие $n-1$ координатные плоскости системы координат $Ox_1 \dots x_n$.

Результаты статьи могут быть использованы для построения математических моделей динамических систем, поведение которых описываются системами с конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений указанного типа. Таковыми являются, в частности, механические системы с конечным числом степеней свободы (например, манипуляционные роботы). Векторные поля обобщённых скоростей таких систем в сочетании с уравнениями Лагранжа 2-го рода могут быть использованы для нахождения управляющих сил, обеспечивающих осуществление требуемых движений этих механических систем, их устойчивость, оптимальность и другие свойства.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. — М.: Наука, 1966.
2. *Волков С. В.* Построение плоских векторных полей с заданными глобальнвми топологическими структурами// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2024. — *70*, № 2. — С. 237–252.
3. *Галиуллин А. С.* Методы решения обратных задач динамики. — М.: Наука, 1986.
4. *Еругин Н. П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую// Прикл. мат. мех. — 1952. — *16*, № 6. — С. 659–670.
5. *Фроммер М.* Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер// Усп. мат. наук. — 1941. — № 9. — С. 212–253.

С. В. Волков
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: volkov-sv@rudn.ru

UDC 517.925; 517.93; 531.13
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-375-388
EDN: PONQIR

Construction of multidimensional vector fields whose projections onto coordinate planes have given topological structures

S. V. Volkov

RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. The aim of the work is to construct multidimensional vector fields that are represented by autonomous systems of ordinary differential equations and have specified topological structures in specified limited simply connected domains of the phase space, provided that these structures can be specified by topological structures of projections of the sought vector fields onto coordinate planes. This problem is an inverse problem of the qualitative theory of ordinary differential equations. The results of this work can be used to construct mathematical models of dynamic systems in various fields of science and technology. In particular, for mechanical systems with an arbitrary finite number of degrees of freedom, such vector fields can represent kinematic equations of program motions and be used to obtain control forces and moments implementing these motions.

Keywords: vector field, ODE system, qualitative theory of ODE, phase portrait, topological structure, dynamic system, inverse problem.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: S. V. Volkov, "Construction of multidimensional vector fields whose projections onto coordinate planes have given topological structures," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 3, 375–388. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-375-388

REFERENCES

1. A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon, and A. G. Mayer, *Kachestvennaya teoriya dinamicheskikh sistem vtorogo poryadka* [Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
2. S. V. Volkov, "Postroenie ploskikh vektornykh poley s zadannymi global'nvmi topologicheskimi strukturami" [Construction of flat vector fields with prescribed global topological structures], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2024, **70**, No. 2, 237–252 (in Russian).
3. A. S. Galiullin, *Metody resheniya obratnykh zadach dinamiki* [Methods for Solving Inverse Problems of Dynamics], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
4. N. P. Erugin, "Postroenie vsego mnozhestva sistem differentsial'nykh uravneniy, imeyushchikh zadannuyu integral'nuyu krivuyu" [Construction of the entire set of systems of differential equations having a given integral curve], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1952, **16**, No. 6, 659–670 (in Russian).
5. M. Frommer, "Integral'nye krivye obyknovennogo differentsial'nogo uravneniya pervogo poryadka v okrestnosti osoboy tochki, imeyushchey ratsional'nyy kharakter" [Integral curves of a first-order ordinary differential equation in the neighborhood of a singular point of rational character], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1941, No. 9, 212–253 (in Russian).

S. V. Volkov
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: volkov-sv@rudn.ru

УДК 517.9+513.8
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-389-402
EDN: PPXEPN

О РАСТЯГИВАЮЩИХСЯ АТТРАКТОРАХ ПРОИЗВОЛЬНОЙ КОРАЗМЕРНОСТИ

Е. В. Жужома, В. С. Медведев

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия

Аннотация. Благодаря работам Р.В. Плыкина и В.З. Гринеса, наиболее изученными растягивающимися аттракторами являются ориентируемые аттракторы коразмерности один A-диффеоморфизмов многомерных замкнутых многообразий и одномерные аттракторы на замкнутых поверхностях. В статье доказывается, что существуют замкнутые многообразия любой размерности, начиная с трех, допускающие структурно устойчивые диффеоморфизмы и диффеоморфизмы, удовлетворяющие аксиоме A Смейла, с растягивающимися аттракторами произвольной коразмерности. Для некоторых коразмерностей уточняется вид многообразий.

Ключевые слова: растягивающийся аттрактор, A-диффеоморфизм, замкнутое многообразие, притягивающая окрестность.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Статья подготовлена в результате проведения исследования в рамках проекта «Международное академическое сотрудничество» Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики», кроме доказательства теоремы 4, поддержанного Российским научным фондом (грант 22-11-00027). Авторы благодарят рецензента за полезные замечания, которые способствовали улучшению текста.

Для цитирования: *Е. В. Жужома, В. С. Медведев.* О растягивающихся аттракторах произвольной коразмерности// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 3. С. 389–402. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-389-402`

1. Введение

Наиболее интересными инвариантными множествами динамических систем с точки зрения приложений являются аттракторы и репеллеры [12]. Среди нетривиальных аттракторов в гиперболической теории динамических систем наиболее известными являются соленоид Смейла, $ДА$-аттрактор и аттрактор Плыкина. Все эти аттракторы являются растягивающимися аттракторами. Мы будем рассматривать растягивающиеся аттракторы (для репеллеров все утверждения аналогичны) диффеоморфизмов, удовлетворяющих аксиоме A Смейла, на замкнутых многообразиях. Напомним, что согласно аксиоме A Смейла, неблуждающее множество диффеоморфизма является замыканием множества периодических орбит и имеет гиперболическую структуру (основные определения даны в разделе 2). Для краткости диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме A Смейла, мы будем называть A-диффеоморфизмом. Класс A-диффеоморфизмов представляет собой довольно широкий класс, содержащий все Ω-устойчивые и структурно устойчивые диффеоморфизмы, включая диффеоморфизмы Аносова и диффеоморфизмы Морса—Смейла (основные понятия и определения теории динамических систем см. в книгах [8, 17, 24, 35]).

Везде далее через M^n обозначается n-мерное гладкое связное замкнутое многообразие. *Аттрактором* A-диффеоморфизма $f : M^n \to M^n$ называется базисное множество Λ такое, что существует окрестность $U(\Lambda) = U$ множества Λ, удовлетворяющая условиям

$$\overline{f(U)} \subset U, \quad \bigcap_{i\geqslant 0} f^i(U) = \Lambda,$$

где через $\overline{N}$ обозначается топологическое замыкание множества N. *Репеллером* называется аттрактор диффеоморфизма f^{-1}. Обычно свойства и понятия, связанные с аттрактором, легко переносятся для репеллера. Поэтому мы в основном будем рассматривать только аттракторы.

В 1967 году Смейл [37] ввел топологический соленоид в гиперболическую теорию динамических систем, построив диффеоморфизм, у которого соленоид был аттрактором. Схематично пример Смейла можно представить сначала как растяжение полнотория вдоль его оси и сжатие в направлении, перпендикулярном оси. Затем полученный полноторий вкладывается в исходный так, чтобы ось полнотория прокручивалась не менее двух раз вдоль оси исходного полнотория и при этом сохранялась дисковая структура, см. рис. 1. Специфика этого соленоидального аттрактора состояла в том, что его топологическая размерность совпадала с размерностью неустойчивого многообразия любой его точки. Поскольку такой аттрактор представлял собой объединение неустойчивых многообразий своих точек, то Вильямс [38] предложил называть их *растягивающимися аттракторами*. Для изучения внутренней динамики растягивающихся аттракторов (т. е. динамики ограничений диффеоморфизмов на растягивающихся аттракторах) Вильямс ввел понятие обобщенного соленоида (см. обзор [23]). Подход Вильямса был развит в работах [20, 21, 27, 28], однако этот подход не учитывает вложение аттракторов в многообразие. Робинсон и Вильямс [36] привели пример диффеоморфизмов с растягивающимися аттракторами, которые не имели даже гомеоморфных окрестностей, но ограничения этих диффеоморфизмов на растягивающиеся аттракторы были сопряжены. В работах Гринеса [4–7, 22] (с соавторами) и Плыкина [13–15] были проклассифицированы растягивающиеся аттракторы коразмерности один относительно сопрягающих гомеоморфизмов, определенных на несущих многообразиях, т. е. была получена классификация, учитывающая вложение растягивающихся аттракторов в многообразие. Что касается растягивающихся аттракторов коразмерности два и больше, то авторам известны работы о классификации только одномерных растягивающихся аттракторов в трехмерных многообразиях, т. е. аттракторов коразмерности два [18, 26, 29, 30]. Классификация аттракторов коразмерности один существенно опиралась на описание окрестностей этих аттракторов и их вложений в несущее многообразие. Например, Плыкин [15] показал, что ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один в n-мерном многообразии, $n \geqslant 3$, имеет захватывающую окрестность, гомеоморфную n-мерному тору с конечным числом удаленных n-мерных шаров. Для растягивающегося аттрактора коразмерности два на трехмерном многообразии было показано существование захватывающей окрестности, гомеоморфной внутренности шара с конечным числом приклеенных ручек индекса один [18].

В данной работе мы рассматриваем вопросы существования A-диффеоморфизмов (в том числе структурно устойчивых диффеоморфизмов) замкнутых многообразий с растягивающимися аттракторами. Основной упор делается на вопросы существования растягивающихся аттракторов произвольной коразмерности. Из приведенных конструкций легко извлекаются топологическая структура возможных притягивающих окрестностей. Решение вопроса в полной общности о топологической структуре притягивающих окрестностей позволит начать рассматривать проблему классификации растягивающихся аттракторов коразмерности, отличной от единицы.

Основные результаты содержатся в следующих утверждениях.

Теорема 1. *Для любых $1 \leqslant q \leqslant n-1$, $n \geqslant 2$, существуют n-мерное замкнутое многообразие M^n и структурно устойчивый диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$ такие, что f имеет ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности q. Кроме этого, существуют M^n и Ω-устойчивый диффеоморфизм $M^n \to M^n$ с неориентируемым растягивающимся аттрактором коразмерности q.*

Следующие два результата относятся к одномерным растягивающимся аттракторам.

Теорема 2. *На n-мерной сфере $\mathbb{S}^n$, $n \geqslant 3$, существует структурно устойчивый диффеоморфизм с одномерным растягивающимся аттрактором.*

Теорема 3. *На любом замкнутом n-мерном ориентируемом многообразии существует A-диффеоморфизм с одномерным растягивающимся аттрактором, т. е. с растягивающимся аттрактором коразмерности $(n-1)$.*

Следующий результат показывает, что одномерный растягивающийся аттрактор диффеоморфизма 4-мерной сферы может лежать на вложенной инвариантной 2-мерной сфере, образующей нетривиальный 2-узел.

Теорема 4. *Для любого нетривиального гладкого узла S^2 в 4-мерной сфере $\mathbb{S}^4$ существует A-диффеоморфизм $f : \mathbb{S}^4 \to \mathbb{S}^4$ с одномерным растягивающимся аттрактором на S^2.*

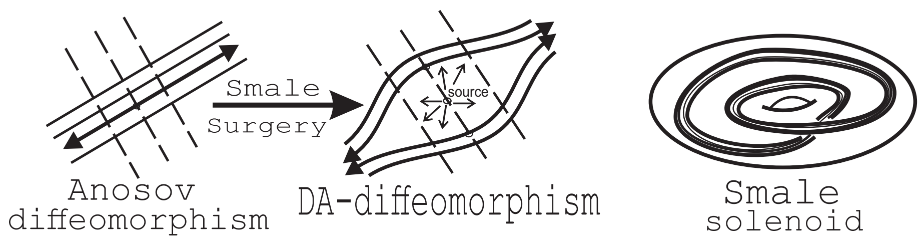


Рис. 1. *ДА*-диффеоморфизм и соленоид Смейла

Fig. 1. *DA*-diffeomorphism and Smale solenoid

В конце статьи формулируются и обсуждаются несколько гипотез, связанных с вопросами существования растягивающихся аттракторов.

Структура статьи следующая. В разделе 2 приводятся необходимые для дальнейшего определения и предварительные результаты. В разделе 3 доказываются основные утверждения.

2. Основные определения и предварительные сведения

В этом разделе даются основные определения и вводятся необходимые понятия.

***A*-диффеоморфизмы.** Пусть f — диффеоморфизм замкнутого n-мерного ($n \geqslant 2$) многообразия $M = M^n$, снабженного некоторой римановой метрикой d. Множество $\Lambda \subset M$, инвариантное относительно f, называется *гиперболическим*, если ограничение $T_\Lambda M$ касательного расслоения TM многообразия M на Λ можно представить в виде суммы Уитни $E^s_\Lambda \oplus E^u_\Lambda$ df-инвариантных подрасслоений E^s_Λ, E^u_Λ, $\dim E^s_x + \dim E^u_x = n$ $(x \in \Lambda)$, и существуют константы $C_s > 0$, $C_u > 0$, $0 < \lambda < 1$ такие, что

$$\|df^n(v)\| \leqslant C_s \lambda^n \|v\|, \quad v \in E^s_\Lambda, \qquad \|df^{-n}(v)\| \leqslant C_u \lambda^n \|v\|, \quad v \in E^u_\Lambda, \qquad n > 0.$$

Точка $x \in M$ называется *неблуждающей*, если для любой ее окрестности $U(x)$ и любого натурального числа N найдется $n_0 \in \mathbb{Z}$, $|n_0| \geqslant N$, такое, что $f^{n_0}(x) \in U(x)$. Множество неблуждающих точек диффеоморфизма f будем обозначать через $NW(f)$. Диффеоморфизм f *удовлетворяет аксиоме A* (или, что то же самое, является *A-диффеоморфизмом*), если множество $NW(f)$ гиперболическое и периодические точки всюду плотны в $NW(f)$.

Гиперболическая структура на неблуждающем множестве влечет существование т. н. устойчивых и неустойчивых многообразий. Их существование и свойства исследовались во многих работах (см. напр. [1, 2, 25]). Пусть Λ — компактное гиперболическое множество диффеоморфизма $f : M \to M$. Тогда для любого $x \in \Lambda$ существует инъективная C^∞ иммерсия $J^s_x : \mathbb{R}^s \to M$, образ которой $J^s_x(\mathbb{R}^s) \stackrel{\mathrm{def}}{=} W^s(x)$ называется *устойчивым многообразием точки* x, такая, что выполняются следующие свойства:

1. Точки $x, y \in M$ принадлежат одному многообразию $W^s(x)$ тогда и только тогда, когда $d(f^n(x), f^n(y)) \to 0$ при $n \to +\infty$.
2. $f(W^s(x)) = W^s(f(x))$, $T_x W^s(x) = E^s_\Lambda$.
3. Если $x, y \in \Lambda$, то либо $W^s(x) = W^s(y)$, либо $W^s(x) \cap W^s(y) = \varnothing$.
4. Если точки $x, y \in \Lambda$ близки на M, то $W^s(x)$, $W^s(y)$ близки на компактных множествах.

Неустойчивое многообразие $W^u(x)$ точки $x \in \Lambda$ определяется как устойчивое многообразие относительно диффеоморфизма f^{-1}. Неустойчивые многообразия обладают аналогичными свойствами. Учитывая свойство 2, устойчивые и неустойчивые многообразия называются *инвариантными многообразиями*. Отметим, что с точки зрения дифференциальной топологии инвариантные многообразия не являются «настоящими» подмногообразиями. Однако они являются иммерсированными подмногообразиями, см. например, [35].

Обозначим через $W^{s(u)}_\varepsilon(x)$ ε-окрестность точки x в многообразии $W^{s(u)}(x)$ (в его внутренней топологии). Следующее утверждение, доказанное Смейлом [37], часто называют *теоремой о локальной структуре произведения*. Пусть диффеоморфизм f удовлетворяет аксиоме A. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любых ε-близких точек $x_1, x_2 \in NW(f)$ пересечение $W^s_\varepsilon(x_1) \cap W^u_\varepsilon(x_2)$ состоит из единственной точки, принадлежащей $NW(f)$.

Смейл [37] доказал следующее утверждение, известное как *теорема о спектральном разложении*. Пусть диффеоморфизм f компактного многообразия M удовлетворяет аксиоме A (коротко, является A-диффеоморфизмом). Тогда множество неблуждающих точек $NW(f)$ представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных множеств $\Omega_1, \ldots, \Omega_k$, называемых *базисными множествами*, каждое из которых содержит всюду плотную орбиту. При этом многообразие M можно представить в виде

$$M = \bigcup_{i=1}^{k} W^s(\Omega_i) = \bigcup_{i=1}^{k} W^u(\Omega_i), \text{ где } W^{s(u)}(\Omega_i) = \bigcup_{x \in \Omega_i} W^{s(u)}(x).$$

Базисное множество называется *нетривиальным*, если оно не является изолированной периодической орбитой (в частности, не является неподвижной изолированной точкой).

Под размерностью $\dim \Omega$ базисного множества Ω мы понимаем топологическую размерность в смысле теории Урысона—Менгера [9]. Именно, топологическая размерность $\dim F$ компакта F определяется как наименьшее число k такое, что для любого сколь угодно малого $\epsilon > 0$ данный F имеет замкнутое ϵ-покрытие кратности $k+1$. Эта же размерность может быть определена индуктивно следующим образом. Размерность пустого множества считается равной -1. Для непустого множества F размерность есть наименьшее целое k такое, что каждая точка из F имеет сколь угодно малую окрестность, граница которой имеет размерность, меньшую, чем k. Отметим, что топологическая размерность является инвариантом относительно гомеоморфных преобразований.

Аттрактор Ω называется *растягивающимся*, если размерность Ω совпадает с размерностью неустойчивого многообразия любой его точки. Базисное множество А-диффеоморфизма f называется *сжимающимся репеллером*, если оно является растягивающимся аттрактором диффеоморфизма f^{-1} [38].

Если $\dim \Omega = n - q$, $1 \leqslant q \leqslant n-1$, то Ω называется *базисным множеством коразмерности* q. Согласно [13, теорема 1], базисное множество Ω коразмерности один является либо аттрактором, либо репеллером. В этом случае неустойчивое (если Ω — аттрактор), либо устойчивое (если Ω — репеллер) многообразие любой точки $x \in \Omega$ принадлежит Ω. Согласно [13, теорема 2], растягивающийся аттрактор или сжимающийся репеллер коразмерности один имеет локальную структуру прямого произведения $(n-1)$-мерного евклидова пространства и канторова множества. В этом случае Ω состоит либо из неустойчивых (если Ω — аттрактор), либо из устойчивых (если Ω — репеллер) $(n-1)$-мерных многообразий своих точек. Обратное также справедливо, т. е. если базисное множество Ω состоит либо из неустойчивых (если Ω — аттрактор), либо из устойчивых (если Ω — репеллер) $(n-1)$-мерных многообразий своих точек и имеет вышеуказанную локальную структуру прямого произведения, то Ω есть либо растягивающийся аттрактор, либо сжимающийся репеллер коразмерности один.

Каждое инвариантное многообразие $W^s(x)$, $W^u(x)$ есть образ евклидового пространства относительно гладкой иммерсии (т. е. $W^s(x)$, $W^u(x)$ являются иммерсированными подмногообразиями). Поэтому открытые диски $W^s_\alpha(x)$, $W^u_\beta(x)$ являются ориентируемыми и нормально ориентируемыми иммерсированными подмногообразиями дополнительной размерности, $\dim W^s_\alpha(x) + \dim W^u_\beta(x) = n$, для любых $\alpha > 0$, $\beta > 0$. Следовательно, корректно следующее определение ориентируемости базисного множества. Будем говорить, что базисное множество Ω *ориентируемо*, если для любой точки $x \in \Omega$ и любых фиксированных чисел $\alpha > 0$, $\beta > 0$ индекс пересечения $W^s_\alpha(x) \cap W^u_\beta(x)$ во всех точках пересечения один и тот же ($+1$ либо -1) [4,5]. В противном случае базисное множество Ω называется *неориентируемым*. Отметим, что в вышеприведенном определении ориентируемости базисного множества несущее многообразие может быть как ориентируемым, так и неориентируемым (об индексе пересечения подмногообразий в неориентируемом многообразии см. [16, с. 175]).

Структурная устойчивость. Обозначим через $\mathit{Diff}^1(M)$ пространство C^1-диффеоморфизмов многообразия M, наделенное равномерной C^1-топологией. Два диффеоморфизма $f, g \in \mathit{Diff}^1(M)$ называются (топологически) *сопряженными*, если существует гомеоморфизм

$$\varphi : M \to M \quad \text{такой, что} \quad \varphi \circ f = g \circ \varphi.$$

Диффеоморфизм $f \in \mathit{Diff}^1(M)$ называется *структурно устойчивым*, если существует его окрестность $U(f) \subset \mathit{Diff}^1(M)$ такая, что любой диффеоморфизм $g \in U(f)$ сопряжен f.

При формулировке условий структурной устойчивости большую роль играет условие, которое называют сильным условием трансверсальности. Пусть W_1, $W_2 \subset M$ — два иммерсированных подмногообразия (иногда вместо иммерсии используют термин погружение), имеющие непустое пересечение. По определению, W_1, W_2 *пересекаются трансверсально*, если для любой точки $x \in W_1 \cap W_2$ касательное пространство T_xM порождается касательными подпространствами T_xW_1 и T_xW_2. В частности, если W_1, W_2 пересекаются трансверсально, то

$$\dim T_xW_1 + \dim T_xW_2 \geqslant \dim T_xM.$$

Говорят, что A-диффеоморфизм удовлетворяет *сильному условию трансверсальности*, если для любых точек x, $y \in NW(f)$ многообразия $W^s(x)$, $W^u(y)$ имеют только трансверсальные пересечения. Известно [31, 34], что диффеоморфизм структурно устойчив тогда и только тогда, когда он является A-диффеоморфизмом и удовлетворяет сильному условию трансверсальности.

2-узлы в 4-мерной сфере $\mathbb{S}^4$. Под топологическим (гладким) вложением понимается гомеоморфизм (гладкая взаимно однозначная иммерсия) на образ, на котором топология (гладкая структура) индуцируется топологией (гладкой структурой) объемлющего пространства. Под топологическим (гладким) 2-узлом s^2 в 4-мерной сфере $\mathbb{S}^4$ понимается образ топологического (гладкого) вложения

$$f : \mathbb{S}^2 \to f(\mathbb{S}^2) = s^2 \subset \mathbb{S}^4,$$

где $\mathbb{S}^k$ есть стандартная k-мерная сфера, которая задается равенством $x_1^1 + \dots + x_{k+1}^2 = 1$ в $(k+1)$-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^{k+1}$, $k \geqslant 1$. Говорят, что 2-узел s^2 в точке $x \in s^2$ *локально плоско вложен*, если существует окрестность $U(x) \subset \mathbb{S}^4$ и гомеоморфизм $h : U(x) \to \mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2$ такие, что $h(s^2 \cap U(x)) = \{0\} \times \mathbb{R}^2$. Точка 2-узла s^2, в которой s^2 не является локально плоско вложенным, называется *точкой дикости*. Узел s называется *локально плоско вложенным*, если он локально плоско вложен в каждой своей точке. Топологически вложенный узел может, вообще говоря, иметь точки дикости. Ясно, что гладко вложенный узел локально плоско вложен.

3. Доказательство основных утверждений

Сперва докажем несколько вспомогательных утверждений. Для отображений $f_i : M_i \to M_i$, $i = 1, 2$, через $F_{12} = (f_1, f_2) : M_1 \times M_2 \to M_1 \times M_2$ обозначается отображение вида

$$F_{12}(x, y) = (f_1, f_2)(x, y) = (f_1(x), f_2(y)), \quad x \in M_1, y \in M_2.$$

Лемма 1. *Пусть $f_i : M_i^{k_i} \to M_i^{k_i}$ — A-диффеоморфизм (структурно устойчивый диффеоморфизм) замкнутого k_i-мерного ($k_i \geqslant 1$) многообразия с неблуждающим множеством $NW(f_i)$, $i = 1, 2$. Тогда*

$$(f_1, f_2) : M_1^{k_1} \times M_2^{k_2} \to M_1^{k_1} \times M_2^{k_2}$$

является A-диффеоморфизмом (структурно устойчивым диффеоморфизмом) с неблуждающим множеством $NW(f_1) \times NW(f_2)$. Более того, если базисные множества $\Omega_1^{(i)}, \ldots, \Omega_{l_i}^{(i)}$ составляют спектральное разложение диффеоморфизма f_i, $i = 1, 2$, то спектральное разложение диффеоморфизма (f_1, f_2) состоит из базисных множеств $\Omega_\alpha^{(1)} \times \Omega_\beta^{(2)}$, где $1 \leqslant \alpha \leqslant l_1$, $1 \leqslant \beta \leqslant l_2$.

Доказательство. Напомним, что в неблуждающем множестве $NW(f_i)$ всюду плотны периодические точки диффеоморфизма f_i, $i = 1, 2$. Поэтому сколь угодно близко к любой точке $(x, y) \in NW(f_1) \times NW(f_2)$ найдется точка (p_1, p_2), где p_i — периодическая точка диффеоморфизма f_i, $i = 1, 2$. Ясно, что $F^m(x, y) = (f_1^m(x), f_2^m(y))$, $m \in \mathbb{Z}$. Следовательно, (p_1, p_2) — периодическая точка диффеоморфизма F_{12}. Таким образом, периодические точки F_{12} всюду плотны в $NW(f_1) \times NW(f_2)$.

Любая окрестность точки (x, y) содержит окрестность, равную произведению окрестностей точек x и y в M_1 и M_2, соответственно. Тогда если точка x или y является блуждающей, то (x, y) также будет блуждающей. Отсюда вытекает требуемое равенство $NW(F_{12}) = NW(f_1) \times NW(f_2)$.

Так как матрица Якоби $J(F_{12})$ в каждой точке $(x, y) \in NW(f_1) \times NW(f_2)$ имеет блочный вид $(J(f_1), J(f_2))$, то множество $NW(f_1) \times NW(f_2)$ имеет гиперболическую структуру, причем расслоение $\mathbb{E}^s_{F_{12}} \oplus \mathbb{E}^u_{F_{12}}$ имеет вид $\mathbb{E}^s_{F_{12}} = \mathbb{E}^s_{f_1} \oplus \mathbb{E}^s_{f_2}$, $\mathbb{E}^u_{F_{12}} = \mathbb{E}^u_{f_1} \oplus \mathbb{E}^u_{f_2}$, и дифференциал DF_{12} сохраняет структуру расслоения.

Пусть Ω_i — базисное множество диффеоморфизма f_i, $i = 1, 2$. Очевидно, $\Omega_1 \times \Omega_2 = \Omega_{12}$ является замкнутым инвариантным множеством. Для доказательства того, что оно является базисным множеством, осталось доказать наличие транзитивности ограничения F_{12} на Ω_{12}. Предположим сперва, что базисные множества Ω_1, Ω_2 — тривиальные, т. е. являются периодическими орбитами. Тогда Ω_{12} также является периодической орбитой, период которой есть наименьшее общее кратное периодов Ω_1 и Ω_2. Теперь предположим, что базисные множества Ω_1, Ω_2 — нетривиальные. Воспользуемся критерием Биркгофа. Пусть V_1, V_2 — произвольные относительно открытые множества в Ω_{12}. Не уменьшая общности, можно считать, что эти множества имеют вид $V_1 = V_{1x} \times V_{1y}$, $V_2 = V_{2x} \times V_{2y}$, где V_{1x}, V_{2x} — открытые множества в $M_1^{k_1}$, а V_{1y}, V_{2y} — открытые множества в $M_2^{k_2}$. Известно [3,19], что ограничение некоторой итерации A-диффеоморфизма на базисное множество является топологически перемешивающим преобразованием. Очевидно, достаточно доказать транзитивность относительно некоторой итерации. Поэтому будем считать, что ограничение f_i на Ω_i является топологически перемешивающим преобразованием, $i = 1, 2$. Так как f_1 является A-диффеоморфизмом, то существует n_1 такое, что $f_1^m(V_{1x}) \cap V_{2x} \neq \varnothing$ при всех $m \geqslant n_1$. Аналогично, $f_2^m(V_{1y}) \cap V_{2y} \neq \varnothing$ при всех $m \geqslant n_2$. Отсюда вытекает, что $F_{12}^{m_0}(V_1) \cap V_2 \neq \varnothing$ для $m_0 = \max\{n_1, n_2\}$. Согласно критерию Биркгофа, ограничение F_{12} на Ω_{12} является транзитивным отображением (на самом деле, из приведенного рассуждения фактически следует перемешиваемость отображения). Таким образом, (f_1, f_2) является A-диффеоморфизмом, и спектральное разложение диффеоморфизма (f_1, f_2) состоит из базисных множеств $\Omega_\alpha^{(1)} \times \Omega_\beta^{(2)}$, где $1 \leqslant \alpha \leqslant l_1$, $1 \leqslant \beta \leqslant l_2$. Для случая, когда одно базисное множество — допустим, Ω_1 — тривиальное, а Ω_2 — нетривиальное, рассуждение аналогично вышеприведенному.

Осталось рассмотреть случай, когда $f_i : M_i \to M_i$ является структурно устойчивым диффеоморфизмом, $i = 1, 2$. Для доказательства структурной устойчивости (f_1, f_2) достаточно проверить условие сильной трансверсальности. Предположим, что неустойчивое многообразие $W^u_{F_{12}}(p_1, q_1)$ пересекается с устойчивым многообразием $W^s_{F_{12}}(p_2, q_2)$ в некоторой точке $(x, y) \in M_1 \times M_2$. В силу структурной устойчивости $f_i : M_i \to M_i$, $i = 1, 2$, неустойчивое многообразие $W^u_{f_1}(p_1)$ пересекает трансверсально устойчивое многообразие $W^s_{f_1}(p_2)$ в точке x, а неустойчивое многообразие $W^u_{f_2}(q_1)$ пересекает трансверсально устойчивое многообразие $W^s_{f_2}(q_2)$ в точке y. Отсюда, а также из равенств

$$W^u_{F_{12}}(p_1, q_1) = W^u_{f_1}(p_1) \times W^u_{f_2}(q_1), \quad W^s_{F_{12}}(p_2, q_2) = W^s_{f_1}(p_2) \times W^s_{f_2}(q_2) \tag{3.1}$$

вытекает требуемое утверждение. □

Лемма 2. *Пусть* $f_i : M_i^{k_i} \to M_i^{k_i}$ *— A-диффеоморфизм замкнутого* k_i*-мерного* ($k_i \geqslant 2$) *многообразия с растягивающимся аттрактором* Λ_i *коразмерности* $m_i \geqslant 1$, $i = 1, 2$. *Тогда*

$$F_{12} = (f_1, f_2) : M_1^{k_1} \times M_2^{k_2} \to M_1^{k_1} \times M_2^{k_2}$$

является A-диффеоморфизмом с растягивающимся аттрактором $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ *коразмерности* $m_1 + m_2$.

Доказательство. В силу леммы 1 $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ является аттрактором диффеоморфизма F_{12}. Согласно определению растягивающегося аттрактора $\dim \Lambda_i = \dim W^u_{f_i}(x_i)$ для любой точки $x_i \in \Lambda_i$, $i = 1, 2$. Положим $k_i = \dim \Lambda_i$, $i = 1, 2$. Согласно [38, теорема C и лемма 4.3] растягивающийся аттрактор Λ_i локально гомеоморфен прямому произведению $\mathbb{R}^{k_i} \times K_i$, где K_i — канторовское множество нулевой топологической размерности. Тогда $K_1 \times K_2$ является канторовым множеством нулевой топологической размерности, поскольку $\dim(K_1 \times K_2) \leqslant \dim K_1 + \dim K_2$. Поэтому аттрактор $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ локально гомеоморфен прямому произведению $\mathbb{R}^{k_1} \times \mathbb{R}^{k_2} \times K = \mathbb{R}^{k_1+k_2} \times K$, где K — канторовское множество нулевой топологической размерности. Следовательно,

$$\dim(\Lambda_1 \times \Lambda_2) = k_1 + k_2 = \dim \Lambda_1 + \dim \Lambda_2.$$

Напомним, что неустойчивое многообразие $W^u_{f_i}(x_i)$ гомеоморфно во внутренней топологии $\mathbb{R}^{k_i}$. Поэтому $W^u_{f_1}(x_1) \times W^u_{f_2}(x_2)$ гомеоморфно во внутренней топологии $\mathbb{R}^{k_1+k_2}$. Согласно (3.1) неустойчивое многообразие $W^u_{F_{12}}(x_1, x_2)$ есть $W^u_{f_1}(x_1) \times W^u_{f_2}(x_2)$. Отсюда получаем

$$\dim(\Lambda_1 \times \Lambda_2) = \dim \Lambda_1 + \dim \Lambda_2 = \dim W^u_{f_1}(x_1) + \dim W^u_{f_2}(x_2) = \dim \left(W^u_{f_1}(x_1) \times W^u_{f_2}(x_2)\right).$$

Следовательно, $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ является растягивающимся аттрактором диффеоморфизма F_{12}. Его коразмерность определяется прямым вычислением. □

Следствие 1. *Пусть* $f_i : M_i^n \to M_i^n$ *— A-диффеоморфизм замкнутого* n*-мерного* ($n \geqslant 2$) *многообразия с растягивающимся аттрактором* Λ_i *коразмерности один,* $i = 1, 2$. *Тогда*

$$(f_1, f_2) : M_1^n \times M_2^n \to M_1^n \times M_2^n$$

является A-диффеоморфизмом с растягивающимся аттрактором $\Lambda_1 \times \Lambda_2$ *коразмерности два.*

Следствие 2. *Пусть* $M^2_{p_i}$ *— замкнутая поверхность рода* p_i, $i = 1, 2$. *Тогда на* $M^2_{p_1} \times M^2_{p_2}$ *существует структурно устойчивый диффеоморфизм* (*следовательно, A-диффеоморфизм*)

$$f : M^2_{p_1} \times M^2_{p_2} \to M^2_{p_1} \times M^2_{p_2}$$

с растягивающимся аттрактором коразмерности два.

Замечание. Ясно, что аналогичные вышеприведенным леммам утверждения имеют место для произвольного конечного числа соответствующих множителей диффеоморфизмов.

При доказательстве основных результатов мы будем использовать известные примеры диффеоморфизмов с растягивающимися аттракторами коразмерности один. На рис. 1 (левая часть) приводится сценарий построения *ДА*-диффеоморфизма двумерного тора с одномерным ориентируемым растягивающимся аттрактором из диффеоморфизма Аносова. Аналогичным образом может быть построен A-диффеоморфизм многомерного тора с ориентируемым растягивающимся аттрактором коразмерности один аттрактором из диффеоморфизма Аносова коразмерности один. Фазовый портрет A-диффеоморфизма неориентируемой поверхности с изолированным седлом и неориентируемым одномерным растягивающимся аттрактором представлен на рис. 2 (a). На рис. 2 (b) представлен фазовый портрет A-диффеоморфизма с изолированным седлом и двумя (неориентируемыми) аттракторами Плыкина.

Доказательство теоремы 1. Для $n = 2$ утверждение верно, поскольку имеются замечательные примеры структурно устойчивого *ДА*-диффеоморфизма с ориентируемым растягивающимся аттрактором на торе $\mathbb{T}^2$ (см. например, [35,37]), и структурно устойчивый диффеоморфизм с неориентируемым растягивающимся аттрактором Плыкина на сфере $\mathbb{S}^2$ [14]. Поэтому далее считаем $n \geqslant 3$. Согласно [6, 7, 15, 22], на n-мерном торе $\mathbb{T}^n$ существует структурно устойчивый диффеоморфизм с растягивающимся аттрактором коразмерности один для любого $n \geqslant 3$. Поэтому для структурно устойчивых диффеоморфизмов далее будем считать $q \geqslant 2$.

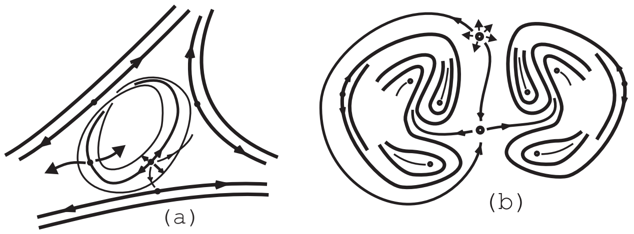


Рис. 2. (a) Изолированное седло и неориентируемый растягивающийся аттрактор на поверхности; (b) изолированное седло и два аттрактора Плыкина.

Fig. 2. (a) Isolated saddle and nonorientable stretching attractor on the surface; (b) isolated saddle and two Plykin attractors.

Пусть $f_1 : \mathbb{T}^{n-q+1} \to \mathbb{T}^{n-q+1}$ — структурно устойчивый диффеоморфизм с ориентируемым растягивающимся аттрактором Λ коразмерности один, т. е. размерность аттрактора Λ равна $(n-q)$. На сфере $\mathbb{S}^{q-1}$ размерности $(q-1)$ существует структурно устойчивый диффеоморфизм $f_2 : \mathbb{S}^{q-1} \to \mathbb{S}^{q-1}$, неблуждающее множество которого состоит из изолированного источника α и изолированного стока ω. В силу леммы 2 структурно устойчивый диффеоморфизм

$$(f_1, f_2) : M^n = \mathbb{T}^{n-q+1} \times \mathbb{S}^{q-1} \to \mathbb{T}^{n-q+1} \times \mathbb{S}^{q-1}$$

имеет ориентируемый растягивающийся аттрактор $\Lambda \times \{\omega\}$ размерности $(n-q)$, т. е. коразмерности q.

В работах [10, 32] было доказано существование замкнутого n-мерного многообразия N^n и Ω-устойчивого диффеоморфизма $g : N^n \to N^n$ с неориентируемым растягивающимся аттрактором коразмерности один для любого $n \geqslant 3$. Дальнейшее рассуждение для доказательства существования неориентируемого растягивающегося аттрактора коразмерности q полностью аналогично случаю ориентируемого аттрактора. □

Непосредственно из анализа доказательства теоремы 1 вытекает следствие.

Следствие 3. *Для любых* $2 \leqslant q \leqslant n-1$, $n \geqslant 3$ *многообразие* $\mathbb{T}^{n-q+1} \times \mathbb{S}^{q-1}$ *допускает структурно устойчивый диффеоморфизм с ориентируемым растягивающимся аттрактором коразмерности* q.

Доказательство теоремы 2. Сперва докажем утверждение для 3-мерной сферы $\mathbb{S}^3$. Пусть $f : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2$ — структурно устойчивый диффеоморфизм с аттрактором Плыкина [14], который мы обозначим через Λ_a. Напомним, что Λ_a является одномерным растягивающимся аттрактором. Будем рассматривать $\mathbb{S}^2$ как экватор сферы $\mathbb{S}^3$. Тогда $\mathbb{S}^2$ разделяет $\mathbb{S}^3$ два замкнутых диска D_1, D_2, пересекающихся вдоль экватора $\mathbb{S}^2$. Каждый диск D_1, D_2 удобно рассматривать как единичный диск в пространстве с центром в начале координат. На каждом луче зададим поток g^t вида $\dot\rho = \rho(1-\rho)$, где точки с координатами $\rho = 1$ лежат на $\mathbb{S}^2$. Сдвиг на единицу времени вдоль траекторий потока g^t определяет диффеоморфизм $g : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$, множество неподвижных точек которого состоит из двух гиперболических источников $\alpha_1 \in D_1$, $\alpha_2 \in D_2$ и сферы $\mathbb{S}^2$. Существует трубчатая окрестность $T(\mathbb{S}^2)$ сферы $\mathbb{S}^2$, которая представляет собой тривиальное расслоение $\mathbb{S}^2 \times [-1; 1]$ с базой $\mathbb{S}^2 \times \{0\} = \mathbb{S}^2 \subset \mathbb{S}^3$ и слоями, состоящими из дуг траекторий потока g^t. Диффеоморфизм f сохраняет ориентацию, и поэтому существует диффеотопия

$$f_\beta : \mathbb{S}^2 \to \mathbb{S}^2, \quad 0 \leqslant \beta \leqslant 1, \quad \text{такая, что} \ \ f_0 = f,\ f_1 = id.$$

Обозначим через $\theta : \mathbb{R} \to [0; 1]$ гладкую четную функцию, монотонно возрастающую на отрезке $[0; 1]$, и такую, что $\theta(0) = 0$, $\theta(x) = 1$ при $x \geqslant 1$. Диффеотопия позволяет определить диффеоморфизм

$$\hat f : T(\mathbb{S}^2) = \mathbb{S}^2 \times [-1; 1] \to \mathbb{S}^2 \times [-1; 1]$$

по правилу $\hat f|_{\mathbb{S}^2 \times \{\beta\}} = f_{\theta(\beta)}$. Поскольку $f_{\theta(\pm 1)} = id$, то $\hat f$ продолжается на $\mathbb{S}^3 \setminus T(\mathbb{S}^2)$ как тождественный диффеоморфизм. Зададим теперь диффеоморфизм $F : \mathbb{S}^3 \to \mathbb{S}^3$ следующим образом:

$F = g$ на $\mathbb{S}^3 \setminus T(\mathbb{S}^2)$ и $F = (f_{\theta(\beta)}, g)$ на $T(\mathbb{S}^2) = \mathbb{S}^2 \times [-1; 1]$. Из построения вытекает, что F является структурно устойчивым диффеоморфизмом с растягивающимся аттрактором Λ_a.

Далее, вложив $\mathbb{S}^3$ в $\mathbb{S}^4$ как экватор, аналогичным образом можно построить структурно устойчивым диффеоморфизмом с растягивающимся аттрактором Λ_a на $\mathbb{S}^4$. Продолжая этот процесс, можно построить требуемый диффеоморфизм на n-мерной сфере $\mathbb{S}^n$ для любого $n \geqslant 3$. □

Доказательство теоремы 3. Покажем, что на любом замкнутом n-мерном многообразии ($n \geqslant 3$) существует A-диффеоморфизм с одномерным растягивающимся аттрактором. Пусть M^n — произвольное n-мерное замкнутое многообразие. Известно что на M^n существует градиентно-подобный диффеоморфизм Морса—Смейла $g_0 : M^n \to M^n$, у которого имеется стоковая неподвижная точка ω_0. Согласно теореме 2, на n-мерной сфере $\mathbb{S}^n$ существует структурно устойчивый диффеоморфизм $f_0 : \mathbb{S}^n \to \mathbb{S}^n$, у которого имеется одномерный растягивающийся аттрактор Λ_a. Из построения f_0 следует, что f_0 имеет источниковую неподвижную точку α_0. Удалим шаровые окрестности точек ω_0, α_0 из M^n и $\mathbb{S}^n$, соответственно, и отождествим границы шаровых окрестностей с помощью обращающего ориентацию диффеоморфизма. Тогда получим многообразие $M^n \sharp \mathbb{S}^n$, диффеоморфное M^n. Так как ω_0 — сток, а α_0 — источник, то диффеоморфизмы g_0, f_0 можно согласовать на $M^n \sharp \mathbb{S}^n$ так, чтобы получить требуемый A-диффеоморфизм $f : M^n \to M^n$ с одномерным растягивающимся аттрактором Λ_a. □

Доказательство теоремы 4. Пусть $S^2 \subset \mathbb{S}^4$ — гладкий нетривиальный 2-узел в 4-мерной сфере $\mathbb{S}^4$. Тогда существует трубчатая окрестность $U(S^2)$ 2-узла S^2, которая является локально тривиальным расслоением $p : U(S^2) \to S^2$ над S^2 с двумерным диском в качестве слоя [16]. Более того, можно считать, что граница $\partial U(S^2)$ окрестности $U(S^2)$ является гладко вложенным 3-многообразием. Зададим на S^2 структурно устойчивый диффеоморфизм $f_0 : S^2 \to S^2$ с аттрактором Плыкина Λ_a. В силу построения f_0 диффеоморфизм f_0 сохраняет ориентацию сферы. Поскольку f_0 диффеотопен тождественному диффеоморфизму, а слой расслоения p есть двумерный диск, то f_0 можно продолжить до диффеоморфизма

$$f_1 : U(S^2) \to p(U(S^2)) \subset U(S^2),$$

у которого S^2 является притягивающим множеством. Многообразие $\mathbb{S}^4 \setminus U(S^2) = M^4$ допускает градиентно подобный поток Морса—Смейла, трансверсальный границе $\partial U(S^2)$ и направленный на этой границе наружу (т. е. внутрь трубчатой окрестности $U(S^2)$). Сдвиг на единицу времени вдоль траекторий потока Морса—Смейла определяет диффеоморфизм $f_2 : M^4 \to \mathbb{S}^4$. Согласовав диффеоморфизмы f_1, f_2 на границе $\partial U(S^2)$, получим требуемый A-диффеоморфизм $f : \mathbb{S}^4 \to \mathbb{S}^4$ с одномерным растягивающимся аттрактором Λ_a на S^2. □

Обсуждение и формулировки гипотез. В силу конструкций примеров, применяемых в доказательствах основных утверждений, растягивающиеся аттракторы произвольной коразмерности строятся на многообразиях, которые представляются в виде произведений других многообразий (в основном тор $\mathbb{T}^n$ или сфера $\mathbb{S}^n$). Отметим, что из результатов работы [10] следует, что на $\mathbb{S}^n$ не существует A-диффеоморфизма с растягивающимся аттрактором коразмерности один. В связи с этим можно сформулировать следующую гипотезу.

Гипотеза 1. *Для любых $n \geqslant 4$, $2 \leqslant q \leqslant n-2$, на $\mathbb{S}^n$ не существует A-диффеоморфизма с растягивающимся аттрактором коразмерности q.*

Относительно ориентируемых аттракторов интересно было бы рассмотреть следующую гипотезу.

Гипотеза 2. *На $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$ не существует A-диффеоморфизма с ориентируемым растягивающимся аттрактором коразмерности $q = 2$.*

Отметим, что на $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{S}^2$, в силу следствия 2, существует структурно устойчивый диффеоморфизм с неориентируемым растягивающимся аттрактором коразмерности $q = 2$.

Интересно было бы рассмотреть следующую более общую гипотезу, из которой следовали бы две предыдущие.

Гипотеза 3. *Пусть A-диффеоморфизм замкнутого n-мерного многообразия M^n, $n \geqslant 4$, имеет растягивающийся аттрактор коразмерности $2 \leqslant q \leqslant n-2$. Тогда гомотопическая группа $\pi_{n-q}(M^n)$ нетривиальна.*

Эта гипотеза верна для $n \geqslant 3$, $q = 1$ (см. [10]), но неверна для $n = 3$, $q = 2$, поскольку на $\mathbb{S}^3$ существуют A-диффеоморфизмы с соленоидом Смейла в качестве растягивающегося аттрактора [26].

Очевидно, что если узел S^2 в теореме 4 тривиальный, то можно построить структурно устойчивый диффеоморфизм $f : \mathbb{S}^4 \to \mathbb{S}^4$. В связи с теоремой 4 можно сформулировать следующую проблему.

Проблема. Классифицировать одномерные заузленные (поверхностные) растягивающиеся аттракторы в $\mathbb{S}^4$ (решение должно включать инварианты вложения и инвариант Плыкина—Гринеса).

Мы рассматривали в данной работе аттракторы диффеоморфизмов. Разумеется, аналогичное рассмотрение можно провести для растягивающихся аттракторов A-потоков (т. е. потоков, удовлетворяющих аксиоме A Смейла). Однако для потоков, видимо, труднее найти содержательные результаты о связи между коразмерностью аттракторов и топологической структурой несущего многообразия. Наш пессимизм основан на примере авторов A-потока на 3-мерной сфере с неблуждающим множеством, состоящим из изолированной периодической отталкивающей траектории и растягивающимся аттрактором коразмерности один [11] (на 3-мерных многообразиях растягивающихся аттракторов коразмерности два A-потоков не бывает). Отметим, что в этом примере аттрактор может быть как перемешивающим, так и неперемешивающим [33].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны. — М.: Наука, 1967.
2. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны// Тр. МИАН. — 1967. — *90*. — С. 3–210.
3. *Аносов Д. В.* Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем// В сб.: «Труды пятой международной конференции по нелинейным колебаниям. Т. 2. Качественные методы». — Киев: Инст. мат. АН УССР, 1970. — С. 39–44.
4. *Гринес В. З.* О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных базисных множествах// Усп. мат. наук. — 1974. — *29*, № 6. — С. 163-164.
5. *Гринес В. З.* О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах, 1// Тр. ММО. — 1975. — *32*. — С. 35–60.
6. *Гринес В. З., Жужома Е. В.* О грубых диффеоморфизмах с растягивающимися аттракторами и сжимающимися репеллерами коразмерности один// Докл. РАН. — 2000. — *374*. — С. 274–276.
7. *Гринес В. З., Жужома Е. В.* Структурно устойчивые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2002. — *66*, № 2. — С. 3–66.
8. *Гринес В. З., Починка О. В.* Введение в топологическую классификацию диффеоморфизмов на многообразиях размерности два и три. — М.—Ижевск: РХД, 2011.
9. *Гуревич В., Волмэн Г.* Теория размерности. — М.: ГИИЛ, 1948.
10. *Жужома Е. В., Медведев В. С.* О неориентируемых двумерных базисных множествах на 3-многообразиях// Мат. сб. — 2002. — *193*, № 6. — С. 83–104.
11. *Жужома Е. В., Медведев В. С.* О двумерных растягивающихся аттракторах A-потоков// Мат. заметки. — 2020. — *107*, № 5. — С. 787–790.
12. *Кузнецов С. П.* Динамический хаос и гиперболические аттракторы. От математики к физике. — М.—Ижевск: Инст. комп. иссл., 2013.
13. *Плыкин Р. В.* О топологии базисных множеств диффеоморфизмов Смейла// Мат. сб. — 1971. — *84*. — С. 301–312.
14. *Плыкин Р. В.* Источники и стоки A-диффеоморфизмов поверхностей// Мат. сб. — 1974. — *94*. — С. 243–264.
15. *Плыкин Р. В.* О геометрии гиперболических аттракторов гладких каскадов// Усп. мат. наук. — 1984. — *39*, № 6. — С. 75–113.
16. *Хирш М.* Дифференциальная топология. — М.: Мир, 1979.

17. *Aranson S., Belitsky G., Zhuzhoma E.* Introduction to the Qualitative Theory of Dynamical Systems on Surfaces. — Providence: Am. Math. Soc., 1996.
18. *Bothe H.* The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds// Math. Nachr. — 1983. — *112*. — C. 69–102.
19. *Bowen R.* Periodic points and measures for axiom A diffeomorphisms// Trans. Am. Math. Soc. — 1971. — *154*. — C. 337–397.
20. *Farrel F. T., Jones L. E.* New attractors in hyperbolic dynamics// Diff. Geom. — 1980. — *15*. — C. 107–133.
21. *Farrel F. T., Jones L. E.* Expanding immesions on branched manifolds// Am. J. Math. — 1981. — *103*, № 1. — C. 41–101.
22. *Grines V., Zhuzhoma E.* On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors// Trans. Am. Math. Soc. — 2005. — *357*. — C. 617–667.
23. *Grines V., Zhuzhoma E.* Expanding attractors// Regul. Chaotic Dyn. — 2006. — *11*, № 2. — C. 225–246.
24. *Grines V., Zhuzhoma E.* Surface Laminaions and Chaotic Dynamical Systems. — Izhevsk: R&C Dynam., Inst. Comp. Sci., 2021.
25. *Hirsch M., Pugh C., Shub M.* Invariant manifolds. — Berlin—Heidelberg: Springer, 1977.
26. *Jiang B., Ni Y., Wang Sh.* 3-manifolds that admit knotted solenoids as attractors// Trans. Am. Math. Soc. — 2004. — *356*. — C. 335–346.
27. *Jones L. E.* Locally strange hyperbolic sets// Trans. Am. Math. Soc. — 1983. — *275*, № 1. — C. 153–162.
28. *Jones L. E.* Anosov diffeomorphisms and expanding immersions. II// Trans. Am. Math. Soc. — 1986. — *294*, № 1. — C. 197–216.
29. *Ma J., Bin Yu.* The realization of Smale solenoid type attractors in 3-manifolds// Topology Appl. — 2007. — *154*. — C. 3021–3031.
30. *Ma J., Bin Yu.* Genus two Smale—Williams solenoid attractors in 3-manifolds// J. Knot Theory Ramifications. — 2011. — *20*, № 6. — C. 909–926.
31. *Mañé R.* A proof of C^1 stability conjecture// Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. — 1988. — *66*. — C. 161–210.
32. *Medvedev V., Zhuzhoma E.* On the existence of codimension one non-orientable expanding attractors// J. Dyn. Contr. Syst. — 2005. — *11*, № 3. — C. 405–411.
33. *Medvedev V., Zhuzhoma E.* Two-dimensional attractors of A-flows and fibered links on three-manifolds// Nonlinearity. — 2022. — *35*. — C. 2192–2205.
34. *Robinson C.* Structural stability of C^1 diffeomorphisms// J. Differ. Equ. — 1976. — *22*, № 1. — C. 28–73.
35. *Robinson C.* Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos. — Boca Raton: CRC Press, 1999.
36. *Robinson C., Williams R.* Classification of expanding attractors: an example// Topology. — 1976. — *15*. — C. 321–323.
37. *Smale S.* Differentiable dynamical systems// Bull. Am. Math. Soc. — 1967. — *73*. — C. 741–817.
38. *Williams R.* Expanding attractors// Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. — 1974. — *43*. — C. 169–203.

Е. В. Жужома

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия

E-mail: zhuzhoma@mail.ru

В. С. Медведев

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Нижний Новгород, Россия

E-mail: medvedev-1942@mail.ru

UDC 517.9+513.8
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-389-402
EDN: PPXEPN

On expanding attractors of arbitrary codimension

E. V. Zhuzhoma and V. S. Medvedev

National Research University "Higher School of Economics," Nizhniy Novgorod, Russia

Abstract. Thanks to the works by R. V. Plykin and V. Z. Grines, the most studied expanding attractors are orientable attractors of codimension one of A-diffeomorphisms of multidimensional closed manifolds and one-dimensional attractors on closed surfaces. In this paper, we prove that there exist closed manifolds of any dimension, starting with three, admitting structurally stable diffeomorphisms and diffeomorphisms satisfying Smale's axiom A, with expanding attractors of arbitrary codimension. For some codimensions the type of manifolds is obtained.

Keywords: expanding attractor, A-diffeomorphism, closed manifold, attracting neighborhood.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The article was prepared as a result of the research conducted within the framework of the project "International Academic Cooperation" of the National Research University "Higher School of Economics," except for the proof of the theorem 4, which was supported by the Russian Science Foundation (grant 22-11-00027). The authors thank the reviewer for useful comments that contributed to improving the text.

For citation: E. V. Zhuzhoma, V. S. Medvedev, "On expanding attractors of arbitrary codimension," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 3, 389–402. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-389-402`

REFERENCES

1. D. V. Anosov, *Geodezicheskie potoki na zamknutykh rimanovykh mnogoobraziyakh otritsatel'noy krivizny* [Geodesic Flows on Closed Riemannian Manifolds of Negative Curvature], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
2. D. V. Anosov, "Geodezicheskie potoki na zamknutykh rimanovykh mnogoobraziyakh otritsatel'noy krivizny" [Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1967, **90**, 3–210 (in Russian).
3. D. V. Anosov, "Ob odnom klasse invariantnykh mnozhestv gladkikh dinamicheskikh sistem" [On a class of invariant sets of smooth dynamic systems], In: *Tpudy pyatoy mezhdunapodnoy konfepentsii po nelineynym kolebaniyam. T. 2. Kachestvennye metody* [Proc. of the Fifth Int. Conf. on Nonlinear Oscillations. V. 2. Qualitative Methods], Inct. mat. AN USSP, Kiev, 1970, pp. 39–44 (in Russian).
4. V. Z. Grines, "O topologicheskoy soppyazhennosti diffeomopfizmov dvumepnogo mnogoobpaziya na odnomernykh bazisnykh mnozhestvakh" [On topological conjugacy of diffeomorphisms of a two-dimensional manifold on one-dimensional basis sets], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1974, **29**, No. 6, 163-164 (in Russian).
5. V. Z. Grines, "O topologicheskoy sopryazhennosti diffeomorfizmov dvumernogo mnogoobraziya na odnomernykh orientiruemykh bazisnykh mnozhestvakh, 1" [On topological conjugacy of diffeomorphisms of a two-dimensional manifold on one-dimensional orientable basis sets. 1], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1975, **32**, 35–60 (in Russian).
6. V. Z. Grines and E. V. Zhuzhoma, "O grubykh diffeomorfizmakh s rastyagivayushchimisya attraktorami i szhimayushchimisya repellerami korazmernosti odin" [On structurally stable diffeomorphisms with

expanding attractors and contracting repellers of codimension one], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2000, **374**, 274–276 (in Russian).

7. V. Z. Grines and E. V. Zhuzhoma, "Strukturno ustoychivye diffeomorfizmy s bazisnymi mnozhestvami korazmernosti odin" [Structurally stable diffeomorphisms with basis sets of codimension one], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2002, **66**, No. 2, 3–66 (in Russian).
8. V. Z. Grines and O. V. Pochinka, *Vvedenie v topologicheskuyu klassifikatsiyu diffeomorfizmov na mnogoobraziyakh razmernosti dva i tri* [Introduction to the Topological Classification of Diffeomorphisms on Manifolds of Dimensions Two and Three], RKhD, Moscow–Izhevsk, 2011 (in Russian).
9. W. Hurewicz and H. Wallman, *Teoriya razmernosti* [Dimension Theory], GIIL, Moscow, 1948 (Russian translation).
10. E. V. Zhuzhoma and V. S. Medvedev, "O neorientiruemykh dvumernykh bazisnykh mnozhestvakh na 3-mnogoobraziyakh" [On nonorientable two-dimensional basis sets on 3-manifolds], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2002, **193**, No. 6, 83–104 (in Russian).
11. E. V. Zhuzhoma and V. S. Medvedev, "O dvumernykh rastyagivayushchikhsya attraktorakh A-potokov" [On two-dimensional stretching attractors of A-flows], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2020, **107**, No. 5, 787–790 (in Russian).
12. S. P. Kuznetsov, *Dinamicheskiy khaos i giperbolicheskie attraktory. Ot matematiki k fizike* [Dynamic Chaos and Hyperbolic Attractors. From Mathematics to Physics], Inst. Komp. Issl., Moscow—Izhevsk, 2013 (in Russian).
13. R. V. Plykin, "O topologii bazisnykh mnozhestv diffeomorfizmov Smeyla" [On the topology of basis sets of Smale diffeomorphisms], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1971, **84**, 301–312 (in Russian).
14. R. V. Plykin, "Istochniki i stoki A-diffeomorfizmov poverkhnostey" [Sources and sinks of A-diffeomorphisms of surfaces], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1974, **94**, 243–264 (in Russian).
15. R. V. Plykin, "O geometrii giperbolicheskikh attraktorov gladkikh kaskadov" [On the geometry of hyperbolic attractors of smooth cascades], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1984, **39**, No. 6, 75–113 (in Russian).
16. M. Hirsch, *Differentsial'naya topologiya* [Differential Topology], Mir, Moscow, 1979 (Russian translation).
17. S. Aranson, G. Belitsky, and E. Zhuzhoma, *Introduction to the Qualitative Theory of Dynamical Systems on Surfaces*, Am. Math. Soc., Providence, 1996.
18. H. Bothe, "The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds," *Math. Nachr.*, 1983, **112**, 69–102.
19. R. Bowen, "Periodic points and measures for axiom A diffeomorphisms," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1971, **154**, 337–397.
20. F. T. Farrel and L. E. Jones, "New attractors in hyperbolic dynamics," *Diff. Geom.*, 1980, **15**, 107–133.
21. F. T. Farrel and L. E. Jones, "Expanding immesions on branched manifolds," *Am. J. Math.*, 1981, **103**, No. 1, 41–101.
22. V. Grines and E. Zhuzhoma, "On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors," *Trans. Am. Math. Soc.*, 2005, **357**, 617–667.
23. V. Grines and E. Zhuzhoma, "Expanding attractors," *Regul. Chaotic Dyn.*, 2006, **11**, No. 2, 225–246.
24. V. Grines and E. Zhuzhoma, *Surface Laminaions and Chaotic Dynamical Systems*, R&C Dynam., Inst. Comp. Sci., Izhevsk, 2021.
25. M. Hirsch, C. Pugh, and M. Shub, *Invariant manifolds*, Springer, Berlin—Heidelberg, 1977.
26. B. Jiang, Y. Ni, and Sh. Wang, "3-manifolds that admit knotted solenoids as attractors," *Trans. Am. Math. Soc.*, 2004, **356**, 335–346.
27. L. E. Jones, "Locally strange hyperbolic sets," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1983, **275**, No. 1, 153–162.
28. L. E. Jones, "Anosov diffeomorphisms and expanding immersions. II," *Trans. Am. Math. Soc.*, 1986, **294**, No. 1, 197–216.
29. J. Ma and Yu. Bin, "The realization of Smale solenoid type attractors in 3-manifolds," *Topology Appl.*, 2007, **154**, 3021–3031.
30. J. Ma and Yu. Bin, "Genus two Smale—Williams solenoid attractors in 3-manifolds," *J. Knot Theory Ramifications*, 2011, **20**, No. 6, 909–926.
31. R. Mañé, "A proof of C^1 stability conjecture," *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 1988, **66**, 161–210.
32. V. Medvedev and E. Zhuzhoma, "On the existence of codimension one non-orientable expanding attractors," *J. Dyn. Contr. Syst.*, 2005, **11**, No. 3, 405–411.
33. V. Medvedev and E. Zhuzhoma, "Two-dimensional attractors of A-flows and fibered links on three-manifolds," *Nonlinearity*, 2022, **35**, 2192–2205.
34. C. Robinson, "Structural stability of C^1 diffeomorphisms," *J. Differ. Equ.*, 1976, **22**, No. 1, 28–73.
35. C. Robinson, *Dynamical Systems: Stability, Symbolic Dynamics, and Chaos*, CRC Press, Boca Raton, 1999.

36. C. Robinson and R. Williams, “Classification of expanding attractors: an example,” *Topology*, 1976, **15**, 321–323.
37. S. Smale, “Differentiable dynamical systems,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1967, **73**, 741–817.
38. R. Williams, “Expanding attractors,” *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, 1974, **43**, 169–203.

E. V. Zhuzhoma
National Research University “Higher School of Economics,” Nizhniy Novgorod, Russia
E-mail: zhuzhoma@mail.ru

V. S. Medvedev
National Research University “Higher School of Economics,” Nizhniy Novgorod, Russia
E-mail: medvedev-1942@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 3 (2024). С. 403–416
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.954
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-403-416
EDN: PSBLYU

О ДВУХ СПОСОБАХ ОПРЕДЕЛЕНИЯ η-ИНВАРИАНТОВ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

К. Н. Жуйков, А. Ю. Савин

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. Для класса краевых задач с параметром, эллиптических в смысле Аграновича—Вишика, установлено равенство η-инварианта, определяемого в терминах регуляризации Мельроуза, и спектрального η-инварианта типа Атьи—Патоди—Зингера, определяемого при помощи аналитического продолжения спектральной η-функции оператора.

Ключевые слова: эллиптические краевые задачи с параметром, η-инварианты, спектральные инварианты, регуляризованные следы.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Первый автор является победителем конкурса «Молодая математика России» и выражает благодарность его спонсорам и жюри. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-21-00336.

Для цитирования: *К. Н. Жуйков, А. Ю. Савин.* О двух способах определения η-инвариантов эллиптических краевых задач// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 3. С. 403–416. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-403-416

Введение

Атья, Патоди и Зингер в своем знаменитом цикле работ [5–7] определили понятие η-инварианта эллиптического самосопряженного псевдодифференциального оператора A положительного порядка на гладком замкнутом многообразии. η-Инвариант является спектральным инвариантом и определяется формулой (будем считать, что оператор является обратимым)

$$\eta_{APS}(A) = \frac{1}{2}\left(\sum_j (\operatorname{sgn}\lambda_j)|\lambda_j|^{-s}\right)\Bigg|_{s=0},$$

где $\{\lambda_j\}$ — набор всех собственных значений оператора A с учетом их кратностей. Ряд сходится абсолютно при достаточно больших $\operatorname{Re} s$ и определяет голоморфную функцию, которая допускает мероморфное продолжение на комплексную плоскость, причем функция является голоморфной при $s = 0$, и поэтому определено ее значение в нуле. η-Инварианты Атьи—Патоди—Зингера операторов на замкнутом многообразии имеют многочисленные приложения в анализе, геометрии, топологии.

Отметим, что в случае, когда многообразие — это точка и оператор A — просто симметрическая матрица, то удвоенный η-инвариант равен сигнатуре квадратичной формы, определяемой матрицей A, и равен т. н. спектральной асимметрии, т. е. разности между числами положительных и отрицательных собственных значений матрицы. В случае многообразий положительной размерности эти числа, как правило, оба бесконечны, и поэтому η-инвариант можно рассматривать как регуляризацию этой спектральной асимметрии.

В работах Гилки и Смита [10,11] были определены η-инварианты типа Атьи—Патоди—Зингера и изучены их свойства для класса эллиптических краевых задач на многообразии с краем. В цитированных работах рассматриваются не обязательно самосопряженные задачи, поэтому формула для η-инварианта подходящим образом модифицируется. При этом оказывается, что соответствующая мероморфная функция может иметь полюс при $s = 0$, и поэтому η-инвариант определяется как постоянный член ряда Лорана в этой точке.

Другой подход к определению η-инвариантов дал Мельроуз [15], который рассматривал семейства $D(p)$ псевдодифференциальных операторов с параметром $p \in \mathbb{R}$ (такие семейства естественно возникают при рассмотрении эллиптических уравнений на многообразиях с цилиндрическими концами или с коническими точками, см. [1, 4]). В предположении, что семейство является эллиптическим с параметром и обратимым при всех $p \in \mathbb{R}$, η-инвариант Мельроуза определялся формулой

$$\eta(D(p)) = \frac{1}{2\pi i} \fint_{\mathbb{R}} \mathrm{TR}\left(D(p)^{-1}\frac{dD(p)}{dp}\right) dp,$$

где TR — специальный регуляризованный след семейства с параметром, а $\fint_{\mathbb{R}}$ — специальный регуляризованный интеграл. η-Инвариант Мельроуза использовался в формулах индекса на многообразиях с коническими точками, см. [8, 9].

Отметим, что в случае, когда многообразие — это точка и семейство $D(p)$ — просто семейство обратимых матриц, которое имеет равные пределы при $p \to \pm\infty$, η-инвариант равен числу вращения определителя этого семейства вокруг нуля. В случае многообразий положительной размерности число вращения, как правило, бесконечно, и поэтому η-инвариант Мельроуза можно рассматривать как регуляризацию этого числа вращения.

В недавней работе авторов [3] было дано определение η-инварианта типа Мельроуза для семейств псевдодифференциальных задач с параметром на многообразии с краем.

Мельроузом [15], а также Лешем и Пфлаумом [13] была установлена следующая связь между η-инвариантами Атьи—Патоди—Зингера и Мельроуза. А именно, для обратимого эллиптического самосопряженного дифференциального оператора A первого порядка на гладком замкнутом многообразии было определено семейство $p - iA$, которое является эллиптическим с параметром $p \in \mathbb{R}$, и обратимо при всех таких значений параметра, и было доказано равенство:

$$\eta_{APS}(A) = \eta(p - iA). \tag{1}$$

Цель данной работы состоит в получении формулы типа (1), в которой в левой части равенства стоит η-инвариант Гилки—Смита эллиптической краевой задачи на многообразии с краем, а в правой части равенства стоит η-инвариант из работы [3] семейства краевых задач с параметром. Нам удалось получить такое равенство для краевых задач любого нечетного порядка.

Остановимся кратко на содержании работы. В разделе 1 определяются эллиптические краевые задачи с параметром, в разделе 2 приведен краткий обзор результатов работы [10], в которой был определен η-инвариант типа Атьи—Патоди—Зингера для краевых задач как спектральный инвариант. В разделе 3 представлен иной подход к построению η-инварианта как некоторой регуляризации числа вращения, восходящий к работе Мельроуза [15]. Наконец, раздел 4 содержит основной результат работы — теорему о равенстве построенных в разделах 2 и 3 η-инвариантов.

1. Эллиптические задачи с параметром

1.1. Краевые задачи с параметром. Напомним понятие эллиптической краевой задачи с параметром из работы [1]. Пусть M — гладкое компактное многообразие размерности n с краем ∂M. Введем такие локальные координаты $x = (x_1, \ldots, x_n) = (x', x_n)$ в окрестности края, что многообразие локально определяется условием $M = \{x_n \geqslant 0\}$, а его край — условием $\partial M = \{x_n = 0\}$, т. е. x_n — определяющая функция края, а x' — координаты на крае. Двойственные координаты обозначаются $\xi = (\xi', \xi_n)$. Семейство операторов вида

$$D(p) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant m} D_k p^k \colon C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M), \tag{1.2}$$

где $D_k = D_k(x, -i\partial_x)$ — дифференциальные операторы на M порядка $\leqslant m - k$ и $p \in \mathbb{R}$, будем называть *оператором порядка m с параметром на многообразии M*. Здесь и всюду далее используется обозначение $\partial_x = \partial/\partial x$.

Определение 1.1. *Краевой задачей порядка (m, b) с параметром* называется оператор вида

$$\mathcal{D}(p) = \begin{pmatrix} D(p) \\ \\ i^* B(p) \end{pmatrix} \colon C^\infty(M, E) \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(M, F) \\ \oplus \\ C^\infty(\partial M, G) \end{matrix}, \tag{1.3}$$

где E и F — комплексные векторные расслоения на M, G — комплексное векторное расслоение на ∂M, $D(p)$ и $B(p)$ — семейства с параметром порядков m и b соответственно, а

$$i^* \colon C^\infty(M, E) \to C^\infty(\partial M, E|_{\partial M})$$

— оператор сужения сечений на край, индуцированный вложением $i \colon \partial M \hookrightarrow M$.

В локальных координатах граничный оператор $i^* B(p)$ может быть записан в виде

$$C^\infty(M, E) \ni u \overset{i^* B(p)}{\longmapsto} \sum_{0 \leqslant k \leqslant b} B_k(p)(-i\partial_{x_n})^k \Big|_{x_n = 0} u \in C^\infty(\partial M, G),$$

где $B_k(p)$ — операторы с параметром порядка $\leqslant b - k$ на границе. Будем говорить, что краевая задача (1.3) имеет *тип* $d \in \mathbb{Z}_+$, если $B_k(p) = 0$ при всех $k \geqslant d$, т. е. тип равен максимальному порядку нормальной производной в краевых условиях плюс один. В частности, тип задачи Дирихле равен 1, а задачи Неймана — 2. Будем предполагать, что тип $d \leqslant \operatorname{ord} D(p)$.

1.2. Эллиптичность с параметром. Для $s \in \mathbb{Z}_+$ через $H^s(M)$ обозначим пространство Соболева функций на M с нормой, обозначаемой $\|\cdot\|_s$. Введем семейство норм в $H^s(M)$, зависящих от параметра $p \in \mathbb{R}$:

$$|\!|\!| u |\!|\!|_s^2 = \|u\|_s^2 + |p|^{2s} \|u\|_0^2. \tag{1.4}$$

Аналогично определяются нормы с параметром в пространствах Соболева на границе. Известно, что краевая задача (1.3) определяет ограниченный оператор в пространствах Соболева

$$\mathcal{D}(p) \colon H^s(M, E) \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-m}(M, F) \\ \oplus \\ H^{s-b-1/2}(\partial M, G) \end{matrix} \tag{1.5}$$

при условии $s - d + 1/2 > 0$, где d — тип граничного оператора. При этом нормы операторов (1.5), отвечающие нормам (1.4) в пространствах $H^s(M)$, ограничены равномерно по $p \in \mathbb{R}$.

Перейдем к условиям эллиптичности задачи (1.3). Через T^*M и $T^*\partial M$ обозначим кокасательные расслоения многообразий M и ∂M, соответственно. Для оператора с параметром (1.2) гладкая функция

$$\sigma(D)(x, \xi, p) = \sum_{0 \leqslant k \leqslant m} \sigma(D_k)(x, \xi) p^k \in C^\infty\big(T^*M \times \mathbb{R}, \operatorname{Hom}(E, F)\big),$$

где $\sigma(D_k)(x, \xi)$ — главные символы дифференциальных операторов D_k, называется *внутренним символом* краевой задачи с параметром. Фиксируем точку $(x', \xi') \in T^*\partial M$. Заморозим коэффициенты операторов $D(p)$ и $B(p)$ в точке x', отбросим младшие члены (т. е. в дифференциальных операторах D_k и B_k оставим только производные старших порядков $m-k$ и $b-k$, соответственно) и выполним преобразование Фурье по касательной переменной x'. Получим семейство краевых задач

$$\begin{cases} \sigma(D)\left(x', 0, \xi', -i\partial_{x_n}, p\right) u(x_n) = 0, \quad x_n \geqslant 0, \\ \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant d-1} \sigma(B_k)(x', \xi', p) \left(-i\partial_{x_n}\right)^k u \Big|_{x_n = 0} = g \end{cases} \tag{1.6}$$

для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами на полупрямой $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{x_n \geqslant 0\}$. Через

$$L_+(x', \xi', p) \subset C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+, E_{x'}) \tag{1.7}$$

обозначим пространство решений первого уравнения задачи (1.6), которые стремятся к нулю при $x_n \to +\infty$. Говорят, что краевая задача с параметром (1.5) удовлетворяет *условию Шапиро—Лопатинского*, если задача (1.6) имеет единственное решение $u \in L_+(x', \xi', p)$ для любой правой части $g \in G_{x'}$.

Предложение 1.1 (см. [1, теорема 4.1])**.** *Пусть для задачи* (1.5) *выполнены условия эллиптичности с параметром* (*в смысле Аграновича—Вишика*):

1. *внутренний символ* $\sigma(D)(x, \xi, p)$ *обратим при всех* $(x, \xi, p) \in T^*M \setminus \{|\xi| + |p| = 0\}$;
2. *выполнено условие Шапиро—Лопатинского.*

Тогда оператор (1.5) *фредгольмов при всех* $p \in \mathbb{R}$ *и обратим при всех достаточно больших* p. *При этом норма обратного оператора* $\mathcal{D}(p)^{-1}$, *отвечающая семействам норм* (1.4) *в пространствах Соболева, равномерно ограничена по* p, *т. е. выполнена оценка*

$$\left|\!\left|\!\left|\mathcal{D}(p)^{-1}(f, g)\right|\!\right|\!\right|_s \leqslant C_1 |\!|\!| f |\!|\!|_{s-m} + C_2 |\!|\!| g |\!|\!|_{s-b-1/2}, \quad \text{где} \quad s - (d-1) > \frac{1}{2},$$

а константы C_1 *и* C_2 *не зависят от* f, g *и* p.

1.3. Пример. В данной работе будут рассматриваться задачи с параметром, которые определяются следующим образом. Рассмотрим краевую задачу

$$\begin{pmatrix} A \\ \\ i^*B \end{pmatrix} : C^\infty(M, E) \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(M, E) \\ \oplus \\ C^\infty(\partial M, G), \end{matrix} \tag{1.8}$$

где

$$A = A(x, -i\partial_x) \colon C^\infty(M, E) \to C^\infty(M, E) \tag{1.9}$$

— дифференциальный оператор порядка m, $B = B(x, -i\partial_x)$ — дифференциальный оператор порядка $b < m$, а E и G — комплексные векторные расслоения на M и ∂M, соответственно.

Следуя [10], будем говорить, что краевая задача (A, B) является *эллиптической по отношению к конусу*

$$\mathcal{C} = \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\operatorname{Im} \lambda| \leqslant |\operatorname{Re} \lambda|\},$$

если $\det(\sigma(A)(x, \xi) - \lambda) \neq 0$ для всех $(x, \xi, \lambda) \in T^*M \times \mathcal{C}$ и $|\xi| + |\lambda| \neq 0$, и задача на полупрямой (ср. (1.6))

$$\begin{cases} \big(\lambda - \sigma(A)(x', 0, \xi', -i\partial_{x_n})\big) u(x_n) = 0, \quad x_n \geqslant 0, \\ \displaystyle\sum_{0 \leqslant k \leqslant d-1} \sigma(B_k)(x', \xi')(-i\partial_{x_n})^k u\Big|_{x_n = 0} = g \end{cases} \tag{1.10}$$

имеет единственное решение u, стремящееся к нулю при $x_n \to +\infty$, для любой правой части g для всех $(x', \xi', \lambda) \in T^*\partial M \times \mathcal{C}$ и $|\xi'| + |\lambda| \neq 0$.

Задаче (1.8) сопоставим краевую задачу

$$\mathcal{D}(\mu) = \begin{pmatrix} \mu^m - iA \\ \\ i^*B \end{pmatrix} : C^\infty(M, E) \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(M, E) \\ \oplus \\ C^\infty(\partial M, G) \end{matrix} \tag{1.11}$$

с параметром $\mu \in \mathbb{R}$. Ясно, что задача (1.11) является задачей типа (1.5). Пусть задача (1.8) является эллиптической по отношению к конусу $\mathcal{C}$. Тогда нетрудно видеть, что внутренний символ $\sigma(D)(x, \xi, \mu) = \mu^m - \sigma(A)(x, \xi)$ задачи (1.11) обратим при всех $(x, \xi, \mu) \in T^*M \setminus \{|\xi| + |\mu| = 0\}$, а задача (1.10) однозначно разрешима, т. е. задача (1.11) эллиптична с параметром.

Через A_B обозначим неограниченный оператор, равный оператору A с областью определения

$$\mathcal{D}(A_B) = \{u \in C^\infty(M, E) \mid i^*Bu = 0\}. \tag{1.12}$$

Предложение 1.2 (см. [10, Lemma 2.1, Theorem 2.2])**.**

1. *Пусть краевая задача* (A, B) *эллиптична по отношению к конусу* $\mathcal{C}$. *Тогда оператор* $\mu^m - iA_B$ *обратим при больших значениях* μ.

2. *Пусть краевая задача (A, B) является эллиптической по отношению к конусу $\mathcal{C}$. Тогда оператор A_B имеет дискретный спектр и каждому собственному значению соответствует конечномерное корневое подпространство. При этом не более чем конечное число собственных значений лежит внутри конуса $\mathcal{C}$.*

Наша цель — построить η-инварианты для однозначно разрешимой краевой задачи $D(\mu)$ и обратимого неограниченного оператора A_B, пользуясь подходами Мельроуза и Атьи—Патоди—Зингера, соответственно, и затем указать связь между построенными η-инвариантами.

2. Первый подход. η-Инвариант типа Атьи—Патоди—Зингера

В этом разделе напомним определение η-инварианта неограниченного оператора A_B, построенного в предыдущем разделе, в терминах его спектра. Подробности см. в [10].

Определение 2.1. *Спектральная η-функция* оператора A_B определяется формулой

$$\eta_{A_B}(s) = \sum_{\operatorname{Re}\mu>0} \mu^{-s} - \sum_{\operatorname{Re}\mu<0} (-\mu)^{-s}, \tag{2.1}$$

где числа $\mu \in \mathbb{C}$ пробегают все собственные значения оператора A_B, взятые с учетом кратности. Здесь и ниже $\mu^{-s} \overset{\text{def}}{=} e^{-s\ln\mu}$, и ветвь логарифма выбирается таким образом, что $\ln\mu \in \mathbb{R}$ при $\mu > 0$.

Предложение 2.1 (см. [10, Theorem 2.7])**.** *Пусть краевая задача (A, B) является эллиптической по отношению к конусу $\mathcal{C}$. Тогда ряд* (2.1) *абсолютно сходится при* $\operatorname{Re} s > n/m$ *и определяет в этой области аналитическую функцию, которая имеет мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость с изолированными простыми полюсами в точках $s = (n-k)/m$, где $k = 0, 1, 2, \dots$. Вычеты в этих точках можно явно вычислить.*

Этот результат позволяет определить η-инвариант краевой задачи (A, B) (точнее, неограниченного оператора A_B).

Определение 2.2. *η-Инвариантом Гилки—Смита* краевой задачи (A, B) называется число

$$\eta_{GS}(A_B) = \frac{\operatorname{Reg}(\eta_{A_B})(0)}{2} \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{2}\left(\eta_{A_B}(s) - \frac{1}{s}\operatorname{Res}_0(\eta_{A_B})(s)\right)\bigg|_{s=0}, \tag{2.2}$$

где Reg обозначает постоянный член в ряде Лорана.

3. Второй подход. η-Инвариант типа Мельроуза

Напомним определение η-инварианта типа Мельроуза эллиптической краевой задачи $\mathcal{D}(\mu)$ с вещественным параметром из работы [3].

3.1. Алгебра задач с параметром. Фиксируем числа m_0, b_0 и d_0. Через $\Psi_p(M)$ обозначим алгебру операторов с параметром

$$\mathcal{D}(p)\colon \begin{matrix} C^\infty(M, F) \\ \oplus \\ C^\infty(\partial M, G) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(M, F) \\ \oplus \\ C^\infty(\partial M, G), \end{matrix}$$

мультипликативно порожденную композициями вида $\mathcal{D}_1(p)\mathcal{D}_0(p)^{-1}$, где множители — краевые задачи с параметром

$$\mathcal{D}_0(p), \mathcal{D}_1(p)\colon C^\infty(M, E) \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(M, F) \\ \oplus \\ C^\infty(\partial M, G), \end{matrix}$$

причем задача $\mathcal{D}_0(p)$ имеет порядки (m_0, b_0) и тип d_0 и является эллиптической и однозначно разрешимой при всех $p \in \mathbb{R}$, а задача $\mathcal{D}_1(p)$ имеет порядки (m_1, b_1) и тип d_1, подчиненные неравенствам

$$m_1 \leqslant m_0, \quad b_1 \leqslant b_0, \quad d_1 \leqslant d_0.$$

Из этого определения следует, что алгебра $\Psi_p(M)$ состоит из линейных комбинаций произведений вида

$$\prod_{j=1}^{N} \mathcal{D}_j \mathcal{D}_{0j}^{-1}, \tag{3.1}$$

где порядки и тип операторов с параметром $\mathcal{D}_j$ удовлетворяют неравенствам

$$m_j \leqslant m_0, \quad b_j \leqslant b_0, \quad d_j \leqslant d_0 \qquad \forall j \geqslant 1, \tag{3.2}$$

а задачи $\mathcal{D}_{0j}$ являются эллиптическими с параметром и имеют порядки (m_0, b_0) и тип d_0.

Предложение 3.1 (см. [3, теорема 2.1])**.** *Пусть для произведения*

$$\mathcal{D}(p) = \prod_{j=1}^{N} \mathcal{D}_j(p)\mathcal{D}_{0j}(p)^{-1}$$

выполнены неравенства (3.2) *и неравенства*

$$m_1 - m_0 + k < -\dim M, \quad b_1 - b_0 + k < -\dim M + 1, \quad \textit{где} \quad k = \sum_{j=2}^{N} \max(m_j - m_0, b_j - b_0). \tag{3.3}$$

Тогда семейство $\mathcal{D}(p)$ состоит из ядерных операторов (т. е. операторов, для которых существует след) и для следа семейства существует асимптотическое разложение при $p \to \pm\infty$ вида

$$\operatorname{tr} \mathcal{D}(p) \sim p^\ell \sum_{j \leqslant 0} c_j^{\pm} p^j, \quad \textit{где} \quad \ell = \max(m_1 - m_0 + k + \dim M,\ b_1 - b_0 + k + \dim M - 1),$$

причем разложение можно дифференцировать по параметру любое число раз.

3.2. Регуляризованный след и регуляризованный интеграл. Введем пространство $S_{as}(\mathbb{R})$, состоящее из функций $f(p) \in C^\infty(\mathbb{R})$, имеющих асимптотическое разложение

$$f(p) \sim \sum_{i \leqslant N} c_i^{\pm} p^i + \sum_{0 \leqslant j \leqslant N} d_j^{\pm} p^j \ln|p| \quad \text{при } p \to \pm\infty,$$

где $N > 0$ — некоторое целое число, а $c_j^{\pm}, d_j^{\pm} \in \mathbb{C}$. Причем это разложение можно дифференцировать произвольное число раз. Через $\mathcal{P} \subset S_{as}(\mathbb{R})$ обозначим подпространство многочленов.

Рассмотрим семейство $\mathcal{D} \in \Psi_p(M)$. Оно является линейной комбинацией произведений вида (3.1). Для краткости будем считать, что

$$\mathcal{D} = \prod_{j=1}^{N} \mathcal{D}_j \mathcal{D}_{0j}^{-1}. \tag{3.4}$$

Это произведение, вообще говоря, не имеет следа, поскольку для него неравенства (3.3) могут быть не выполнены. При дифференцировании порядок семейства (3.4) будет падать, как минимум, на единицу. Отсюда и из предложения 3.1 следует, что при

$$\ell \geqslant \max(m_1 - m_0 + k + \dim M + 1,\ b_1 - b_0 + k + \dim M) \tag{3.5}$$

семейство $\partial_p^\ell \mathcal{D}(p)$ будет иметь след. Теперь можно дать определение регуляризованного следа.

Определение 3.1. *Регуляризованным следом* будем называть функционал

$$\mathrm{TR}\colon \Psi_p(M) \longrightarrow S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P},$$

$$(\mathrm{TR}\, \mathcal{D})(p) = \int_0^p \int_0^{q_{\ell-1}} \cdots \int_0^{q_1} \operatorname{tr}\bigl(\partial_q^\ell \mathcal{D}(q)\bigr) dq dq_1 \dots dq_{\ell-1},$$

где ℓ определяется из (3.5).

Из предложения 3.1 следует, что это определение корректно, т. е. регуляризованный след действительно попадает в пространство $S_{as}(\mathbb{R})$, а выбор другого числа ℓ меняет регуляризованный след на многочлен. Регуляризованный след является следом, т. е. выполнено равенство

$$\mathrm{TR}\big(\mathcal{D}_1(p)\mathcal{D}_2(p)\big) = \mathrm{TR}\big(\mathcal{D}_2(p)\mathcal{D}_1(p)\big) \quad \forall\, \mathcal{D}_1(p), \mathcal{D}_2(p) \in \Psi_p(M).$$

Определим *регуляризованный интеграл*

$$⨍_{\mathbb{R}} : S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad ⨍_{\mathbb{R}} f(p)dp \stackrel{\text{def}}{=} c_0, \tag{3.6}$$

где c_0 — постоянный член в асимптотическом разложении интеграла

$$\int_{-T}^{T} f(p)dp \sim \sum_{j\leqslant N} c_j T^j + \sum_{0\leqslant j\leqslant N} d_j T^j \ln T \quad \text{при} \quad T \to +\infty,$$

где $N > 0$ — некоторое целое число, а $c_j, d_j \in \mathbb{C}$. Отметим, что регуляризованный интеграл нечетных функций равен нулю.

Для краткости введем следующее обозначение для композиции регуляризованных следа и интеграла:

$$\mathrm{Tr} \stackrel{\text{def}}{=} ⨍_{\mathbb{R}} \circ \mathrm{TR}\,.$$

3.3. Определение η-инварианта краевой задачи. Пусть $\mathcal{D}(p)$ — однозначно разрешимая эллиптическая краевая задача с параметром вида (1.5), которая является эллиптической и однозначно разрешимой при всех $p \in \mathbb{R}$.

Определение 3.2. *η-Инвариантом* задачи $\mathcal{D}(p)$ с параметром называется число

$$\eta\big(\mathcal{D}(p)\big) = \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{Tr}\big(\partial_p \mathcal{D}(p)\mathcal{D}(p)^{-1}\big) \in \mathbb{C}. \tag{3.7}$$

4. Связь η-инвариантов

4.1. Основной результат. Рассмотрим краевую задачу (A, B) (см. (1.8)), эллиптическую по отношению к конусу $\mathcal{C}$. С одной стороны, этой краевой задаче сопоставим неограниченный оператор A_B, равный оператору A с областью определения (1.12). С другой стороны, этой задаче сопоставим эллиптическую краевую задачу с параметром $\mathcal{D}(\mu)$, см. (1.11). Будем предполагать, что оператор A_B имеет тривиальное ядро. Тогда задача с параметром $D(\mu)$ будет однозначно разрешимой при всех $\mu \in \mathbb{R}$, и будут определены η-инвариантны и для оператора A_B, и для задачи $D(\mu)$. Следующая теорема устанавливает связь между этими η-инвариантами, построенными в разделе 2 (см. (2.2)) и разделе 3 (см. (3.7)).

Теорема 4.1. *Пусть оператор A имеет нечетный порядок. Тогда имеет место равенство*

$$\eta_{GS}(A_B) = \eta\big(\mathcal{D}(\mu)\big). \tag{4.1}$$

Следствие 4.1. *η-Инвариант $\eta\big(\mathcal{D}(\mu)\big)$ является спектральным инвариантом операторного пучка $\mathcal{D}(\mu)$.*

Замечание 4.1. В случае оператора A четного порядка равенство (4.1), вообще говоря, не имеет места, поскольку правая часть равна нулю. Действительно, семейство $D(\mu)$ является четной функцией параметра μ. Поэтому функционал Tr от нечетной функции $\partial_p \mathcal{D}(p)\mathcal{D}(p)^{-1}$ равен нулю.

4.2. Вспомогательные результаты из [12, § 2.1]. В цитируемой работе построено обобщение регуляризованного интеграла (3.6) на следующий класс функций.

Определение 4.1. Говорят, что функция $f(x) \in C^\infty(\mathbb{R}_+)$ является log-*однородной*, если она имеет асимптотическое разложение

$$f(x) \sim \sum_{j\geqslant 0} \sum_{l=0}^{k_j} c_{jl} x^{m_j} \ln^l |x| \quad \text{при} \quad x \to +\infty,$$

где $m > m_j \searrow -\infty$, и аналогичное разложение при $x \to 0$ (в этом случае показатели m_j в формуле монотонно стремятся к $+\infty$).

Определение 4.2. *Регуляризованным интегралом* log-однородной функции на положительной полупрямой называется число

$$\fint_{\mathbb{R}_+} f(x)dx \stackrel{\text{def}}{=} \operatorname{Reg-}\lim_{a\to 0}\int_a^1 f(x)dx + \operatorname{Reg-}\lim_{b\to\infty}\int_1^b f(x)dx,$$

где $\operatorname{Reg-}\lim\limits_{\alpha\to\beta}$ — постоянный член в log-однородном разложении при $\alpha \to \beta$ (т. е. c_{j0} при $m_j = 0$).

При этом для гладкой четной log-однородной функции f на $\mathbb{R}$ имеем

$$2\fint_{\mathbb{R}_+} f(x)dx = \fint_{\mathbb{R}} f(x)dx, \tag{4.2}$$

где в правой части стоит регуляризованный интеграл (3.6).

Определение 4.3. Пусть f — log-однородная функция на $\mathbb{R}_+$. *Регуляризованное преобразование Меллина* функции f при всех $s \in \mathbb{C}$ определяется формулой

$$(\widetilde{\mathcal{M}}f)(s) \stackrel{\text{def}}{=} \fint_{\mathbb{R}_+} x^{s-1}f(x)dx. \tag{4.3}$$

Далее, существует такое дискретное подмножество $\Sigma \subset \mathbb{C}$, что функция $(\widetilde{\mathcal{M}}f)|_{\mathbb{C}\setminus\Sigma}$ продолжается до мероморфной функции $\mathcal{M}f$ на $\mathbb{C}$. При этом для каждого $s \in \mathbb{C}$ имеем

$$(\widetilde{\mathcal{M}}f)(s) = \operatorname{Reg}(\mathcal{M}f)(s), \tag{4.4}$$

где Reg обозначает постоянный член в ряде Лорана. В частности, для регулярной точки s справедливо равенство $(\widetilde{\mathcal{M}}f)(s) = (\mathcal{M}f)(s)$.

4.3. Доказательство основного результата. Вернемся к доказательству теоремы 4.1. Преобразуем правую часть формулы (4.1). Имеем соотношения

$$\operatorname{TR}\bigl(\partial_\mu\mathcal{D}(\mu)\mathcal{D}(\mu)^{-1}\bigr) = \operatorname{TR}\left(\begin{pmatrix} m\mu^{m-1} \\ 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} R & C\end{pmatrix}\right) = \operatorname{TR}(m\mu^{m-1}R),$$

где Rf — решение u задачи $\mathcal{D}(\mu)u = (f,0)^t$, а Ch — решение u задачи $\mathcal{D}(\mu)u = (0,h)^t$. Ясно, что $R = (\mu^m - iA_B)^{-1}$. Отсюда, пользуясь определением η-инварианта (3.7), получаем

$$\eta\bigl(\mathcal{D}(\mu)\bigr) = \frac{1}{2\pi i}\fint_{\mathbb{R}} \operatorname{TR}(\mu^m - iA_B)^{-1}d\mu^m. \tag{4.5}$$

Далее воспользуемся следующей леммой.

Лемма 4.1. *Краевая задача*

$$\begin{cases} (A^2+\mu^{2m})u = f, \\ i^*Bu = g_1, \quad i^*BAu = g_2, \quad g_1, g_2 \in C^\infty(\partial M, G), \end{cases} \tag{4.6}$$

является эллиптической с параметром и однозначно разрешимой для всех $\mu \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Для краткости будем обозначать главный символ $\sigma(A)(x,\xi)$ оператора $A(x,-i\partial_x)$ в точке x через $a(\xi)$.

1. Сначала докажем эллиптичность с параметром задачи (4.6). Эллиптичность оператора A по отношению к конусу $\mathcal{C} = \{|\operatorname{Im}\lambda| \leqslant |\operatorname{Re}\lambda|\}$ эквивалентна обратимости матрицы $\mu^m - ia(\xi)$ в конусе

$$i\mathcal{C} = \{|\operatorname{Im}\lambda| \geqslant |\operatorname{Re}\lambda|\}.$$

Следовательно, собственные значения символа $a^2(\xi)$ лежат в правой полуплоскости $\{\operatorname{Re}\lambda > 0\}$. Отсюда и из равенства $a^2(\xi)u = -\mu^{2m}u$ получаем, что $u = 0$, откуда следует эллиптичность с параметром оператора $A^2+\mu^{2m}$ для $\mu \in \mathbb{R}$.

Проверим выполнение условия Шапиро—Лопатинского для задачи (4.6). Исходная задача $\mathcal{D}(\mu)$ удовлетворяет условию Шапиро—Лопатинского по условию теоремы. Соответствующая задача на полупрямой имеет вид

$$\begin{cases} \big(\mu^m - ia(\xi', -i\partial_{x_n})\big)u(x_n) = 0, \\ \qquad j^*bu(x_n) = h_1 \in G_{x'}, \end{cases} \tag{4.7}$$

где оператор b отвечает оператору B после замораживания коэффициентов, а $j\colon \{0\} \to \overline{\mathbb{R}}_+$ — вложение.

Введем подпространство $L^+_{\mu^m - ia}(x', \xi', \mu)$ решений первого уравнения системы (4.7) (см. (1.7)), которые стремятся к нулю при $x_n \to +\infty$. Выполнение условия Шапиро—Лопатинского задачи (1.11) означает, что отображение

$$j^*b\colon L^+_{\mu^m - ia}(x', \xi', \mu) \longrightarrow G_{x'}$$

осуществляет изоморфизм.

Теперь рассмотрим оператор $A^2 + \mu^{2m} = (\mu^m - iA)(\mu^m + iA)$. Соответствующая задача на полупрямой имеет вид

$$\begin{cases} \big(\mu^m - ia(\xi', -i\partial_{x_n})\big)\big(\mu^m + ia(\xi', -i\partial_{x_n})\big)u(x_n) = 0, \\ \qquad j^*bu(x_n) = h_1, \quad j^*ba(\xi', -i\partial_{x_n})u(x_n) = h_2. \end{cases}$$

Введем соответствующее подпространство $L^+_{\mu^{2m}+a^2}(x', \xi', \mu)$. Требуется доказать, что отображение

$$j^*(b, ba(\xi', -i\partial_{x_n}))\colon L^+_{\mu^{2m}+a^2}(x', \xi', \mu) \longrightarrow G_{x'} \oplus G_{x'}$$

осуществляет изоморфизм. Достаточно доказать тривиальность ядра последнего отображения. Пусть

$$u \in L^+_{\mu^{2m}+a^2}(x', \xi', \mu), \quad j^*bu = 0 \quad \text{и} \quad j^*ba(\xi', -i\partial_{x_n})u = 0.$$

Обозначим $v = (\mu^m + ia(\xi', -i\partial_{x_n}))u$. Функция v стремится к нулю при $x_n \to +\infty$ и удовлетворяет уравнению

$$(\mu^m - ia(\xi', -i\partial_{x_n}))v = 0, \quad \text{т. е.} \quad v \in L^+_{\mu^m - ia}(x', \xi', \mu).$$

Кроме того, имеем

$$j^*bv = j^*b(\mu^m + ia(\xi', -i\partial_{x_n}))u = \mu^n j^*bu + ij^*ba(\xi', -i\partial_{x_n}))u = 0.$$

Таким образом, с учетом однозначной разрешимости задачи (4.7) из вышеописанного следует, что $v = 0$. Получаем краевую задачу

$$\begin{cases} v = (\mu^m + ia(-i\partial_{x_n}))u = 0, \\ \qquad j^*bu = 0, \end{cases}$$

которая, очевидно, также однозначно разрешима (см. (4.7)). Следовательно, $u = 0$. Выполнение условия Шапиро—Лопатинского для задачи (4.6) доказано.

2. Однозначная разрешимость задачи (4.6) эквивалентна тривиальности ее ядра, поскольку ее индекс равен нулю. Пусть функция u лежит в ядре. Тогда

$$\begin{cases} (\mu^m - iA)(\mu^m + iA)u = 0, \\ i^*Bu = 0, \quad i^*BAu = 0. \end{cases}$$

Обозначим $v = (\mu^m + iA)u$. Тогда получаем, что эта функция является решением краевой задачи

$$\begin{cases} (\mu^m - iA)v = 0, \\ \quad i^*Bv = 0, \end{cases} \tag{4.8}$$

которая по условию теоремы 4.1 имеет только тривиальное решение. Следовательно, функция u является решением задачи

$$\begin{cases} \quad v = (\mu^m + iA)u = 0, \\ i^*Bu = 0, \quad i^*BAu = 0. \end{cases}$$

Данная задача имеет единственное решение $u = 0$ (она сводится к задаче (4.8) заменой $\mu \mapsto -\mu$). Лемма 4.1 доказана. □

Вернемся к доказательству теоремы. Ниже через A_B^2 обозначим неограниченный оператор A^2 с областью определения

$$\mathcal{D}(A_B^2) = \{u \in H^{2m}(M, E) \mid i^*Bu = 0,\ i^*BAu = 0\}.$$

В силу леммы 4.1 оператор $(A_B^2 + \mu^{2n})^{-1}$ существует и является ограниченным. Ясно, что имеет место разложение

$$(\mu^m - iA_B)^{-1} = (\mu^m + iA_B)(A_B^2 + \mu^{2m})^{-1}.$$

Преобразуем интеграл в (4.5):

$$\begin{aligned}\fint_{\mathbb{R}} \operatorname{TR}(\mu^m - iA_B)^{-1} d\mu^m &= m \fint_{\mathbb{R}} \mu^{m-1} \operatorname{TR}\big((\mu^m + iA_B)(A_B^2 + \mu^{2m})^{-1}\big) d\mu = \\ &= im \fint_{\mathbb{R}} \mu^{m-1} \operatorname{TR}\big(A_B(A_B^2 + \mu^{2m})^{-1}\big) d\mu + m \fint_{\mathbb{R}} \mu^{2m-1} \operatorname{TR}\big((A_B^2 + \mu^{2m})^{-1}\big) d\mu = \\ &= im \fint_{\mathbb{R}} \mu^{m-1} \operatorname{TR}\big(A_B(A_B^2 + \mu^{2m})^{-1}\big) d\mu. \qquad (4.9)\end{aligned}$$

Здесь подынтегральное выражение $\mu^{2m-1} \operatorname{TR}\big(A_B(A_B^2 + \mu^{2m})^{-1}\big)$ является нечетной функцией, и ее регуляризованный интеграл равен нулю.

2. Теперь покажем, что правая часть в (4.9) совпадает с η-инвариантом Гилки—Смита (2.2). Воспользуемся следующими леммами.

Лемма 4.2 (см. [10, Corollary 1.10]). *Пусть число $\lambda \in \mathcal{C}$ достаточно большое. Тогда при $k > (n+1)/m$ оператор $R(\lambda)^k = (\lambda - iA_B)^{-k}$ имеет след и справедлива оценка $|\operatorname{tr}(R(\lambda)^k)| < C_k|\lambda|^{-k+(n+1)/m}$.*

Лемма 4.3. *При $k > (n+1)/m$ имеет место равенство*

$$\operatorname{tr}\big(A_B(A_B^2 + x^{2m})^{-k}\big) = \sum_n \mu_n(\mu_n^2 + x^{2m})^{-k}, \qquad (4.10)$$

где $x \in \mathbb{R}$, а числа μ_n пробегают спектр оператора A_B с учетом кратностей.

Доказательство.

1. Покажем, что оператор $A_B(A_B^2 + x^{2m})^{-k}$ имеет след. Воспользуемся разложением

$$A_B(A_B^2 + x^{2m})^{-k} = A_B(iA_B + x^m)^{-1}(iA_B + x^m)^{-(k-1)}(-iA_B + x^m)^{-k}. \qquad (4.11)$$

Поскольку операторы

$$A_B(iA_B + x^m)^{-1}, \qquad (iA_B + x^m)^{-(k-1)}$$

ограничены, а оператор $(-iA_B + x^m)^{-k}$ имеет след в силу леммы 4.2, то отсюда следует, что оператор (4.11) имеет след.

2. Формула (4.10) следует из теоремы Лидского [14]. □

Лемма 4.4.

1. *При достаточно больших $\operatorname{Re} s$ η-функция оператора A_B может быть записана в виде*

$$\frac{1}{m}\eta_{A_B}\left(\frac{s}{m}\right) = \frac{2}{\pi} \sin \pi \frac{s+m}{2m} \fint_{\mathbb{R}_+} x^{m-s-1} \operatorname{TR}\big(A_B(A_B^2 + x^{2m})^{-1}\big) dx. \qquad (4.12)$$

2. *Справедливо равенство*

$$\eta_{GS}(A_B) = \frac{1}{2\pi} \fint_{\mathbb{R}} \operatorname{TR}\big(A_B(A_B^2 + x^{2m})^{-1}\big) dx^m. \qquad (4.13)$$

Доказательство.

1. Докажем равенство (4.12). Правая часть в (4.12) корректно определена, поскольку регуляризованный интеграл $⨍_{\mathbb{R}_+}$ от степенной функции равен нулю. Рассмотрим функции

$$\Psi_k(x) \overset{\mathrm{def}}{=} x^{m-1}\,\mathrm{TR}\big(A_B(A_B^2+x^{2m})^{-k}\big). \tag{4.14}$$

Нетрудно проверить справедливость соотношений

$$(x^{-m}\partial_x x^{1-m})^\ell \Psi_1 = (-2m)^\ell \ell! \Psi_{\ell+1},$$

$$(x^{1-m}\partial_x x^{-m})^\ell x^{-s+2m\ell} = (x^{1-m}\partial_x x^{-m})^{\ell-1}(-s+(2m-1)\ell)x^{-s+2(m-1)\ell} = \cdots$$
$$\cdots = \prod_{j=1}^{\ell}(-s+(2j-1)m)x^{-s},$$

где $\ell \geqslant 1$, с учетом которых интегрированием по частям ℓ раз при $s\notin\mathbb{Z}$ получаем равенство

$$⨍_{\mathbb{R}_+} x^{-s}\Psi_1(x)dx = \frac{(2m)^\ell \ell!}{\prod\limits_{j=1}^{\ell}\big(-s+(2j-1)m\big)} ⨍_{\mathbb{R}_+} x^{-s+2\ell m}\Psi_{\ell+1}(x)dx. \tag{4.15}$$

Внеинтегральные слагаемые при интегрировании по частям отсутствуют, поскольку эти слагаемые имеют асимптотическое разложение по дробным степеням, что не дает вклада в значение регуляризованного интеграла.

Для краткости обозначим правую часть в (4.12) через $I(s)$. Утверждается, что при $n<\operatorname{Re} s< m(2\ell+1)$, где число ℓ выбирается достаточно большим, имеет место равенство

$$I(s) = C_\ell(s)\int_{\mathbb{R}_+} x^{-s+m(2\ell+1)-1}\,\mathrm{tr}\big(A_B(A_B^2+x^{2m})^{-(\ell+1)}\big)dx. \tag{4.16}$$

В самом деле, пользуясь равенством (4.15), из (4.12) получаем

$$I(s) = \frac{2}{\pi}\sin\pi\frac{s+m}{2m} ⨍_{\mathbb{R}_+} x^{-s}\Psi_1(x)dx = C_\ell(s) ⨍_{\mathbb{R}_+} x^{-s+2\ell m}\Psi_{\ell+1}(x)dx =$$
$$= C_\ell(s) ⨍_{\mathbb{R}_+} x^{-s+(2\ell+1)m-1}\,\mathrm{TR}\big(A_B(A_B^2+x^{2m})^{-(\ell+1)}\big)dx. \tag{4.17}$$

Здесь и ниже

$$C_\ell(s) = \frac{2(2m)^\ell \ell! \sin\pi\frac{s+m}{2m}}{\pi\prod\limits_{j=1}^{\ell}\big(-s+(2j-1)m\big)}.$$

Преобразуем правую часть в (4.17). Из леммы 4.3 следует, что след $\mathrm{tr}\big(A_B(A_B^2+x^2)^{-(\ell+1)}\big)$ существует при $\ell+1>(n+1)/m$, поэтому при этом условии можно заменить TR на tr. Далее, поскольку $\operatorname{ord}\big(A_B(A_B^2+x^{2m})^{-(\ell+1)}\big) = -m(2\ell+1)$, то получаем оценки

$$\begin{gathered}\mathrm{tr}\big(A_B(A_B^2+x^{2m})^{-(\ell+1)}\big) = \begin{cases} O(1) & \text{при } x\to 0,\\ O\big(x^{n-m(2\ell+1)}\big) & \text{при } x\to+\infty,\end{cases}\\ x^{-s+m(2\ell+1)-1}\,\mathrm{tr}\big(A_B(A_B^2+x^{2m})\big) = \begin{cases} O(x^{-\operatorname{Re} s+m(2\ell+1)-1}) & \text{при } x\to 0,\\ O(x^{-\operatorname{Re} s+n-1}) & \text{при } x\to+\infty.\end{cases}\end{gathered} \tag{4.18}$$

В силу оценок (4.18) интеграл в правой части в (4.17) существует как несобственный интеграл, который абсолютно сходится при $n<\operatorname{Re} s<m(2\ell+1)$, и поэтому он равен регуляризованному интегралу по полупрямой, откуда следует искомое равенство (4.16).

Теперь из (4.16) имеем

$$
\begin{aligned}
I(s) = C_\ell(s)\sum_k \mu_k \int\limits_{\mathbb{R}_+} x^{-s+(2\ell+1)m-1}(\mu_k^2+x^{2m})^{-(\ell+1)}dx = \frac{C_\ell(s)}{2m}\sum_k \mu_k \int\limits_0^\infty \frac{y^{\ell-(s+m)/2m}}{(\mu_k^2+y)^{\ell+1}}dy = \\
= \frac{C_\ell(s)}{2m}\frac{\pi\prod\limits_{j=1}^{\ell}\bigl(-s+(2j-1)m\bigr)}{(2m)^\ell \ell!\sin\pi\frac{s+m}{2m}}\sum_k \mu_k(\mu_k^2)^{-(s+m)/2m} = \frac{1}{m}\eta_{A_B}\left(\frac{s}{m}\right),
\end{aligned}
\tag{4.19}
$$

где первое равенство получено разложением по собственным функциям оператора A_B (см. лемму 4.3), второе равенство отвечает замене переменной $y = x^{2m}$, а третье — следует из равенств

$$
\begin{aligned}
\int\limits_0^\infty \frac{y^{\ell-(s+m)/2m}}{(\lambda+y)^{\ell+1}}dy = \lambda^{-(s+m)/2m}B\left(\ell-\frac{s-m}{2m},\frac{s+m}{2m}\right) = \lambda^{-(s+m)/2m}\frac{\Gamma\left(\ell+1-\frac{s+m}{2m}\right)\Gamma\left(\frac{s+m}{2m}\right)}{\Gamma(\ell+1)} = \\
= \lambda^{-(s+m)/2m}\frac{\prod\limits_{j=1}^{\ell}\bigl(-s+(2j-1)m\bigr)\pi}{(2m)^\ell\ell!\sin\pi\frac{s+m}{2m}}, \quad 0<\operatorname{Re}s<(2\ell+1)m,
\end{aligned}
\tag{4.20}
$$

где $\arg\lambda \in (-\pi,\pi)$, а B и Γ — бета- и гамма-функции, соответственно (см., например, [2, гл. 1]). При этом первое равенство в (4.20) справедливо при $\lambda > 0$, но остается верным и при $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\overline{\mathbb{R}}_-$ в силу единственности аналитического продолжения. Наконец, последнее равенство в (4.19) следует из формулы

$$
\mu_k(\mu_k^2)^{-(s+m)/2m} = \begin{cases} \mu_k^{-s/m} & \text{при} \quad \operatorname{Re}\mu_k>0,\\ -(-\mu_k)^{-s/m} & \text{при} \quad \operatorname{Re}\mu_k<0. \end{cases}
$$

Итак, равенство (4.19) дает равенство функций (4.12) в полосе $n<\operatorname{Re}s<2\ell+1$. Но поскольку ℓ можно выбрать сколь угодно большим, то равенство (4.12) выполнено в полуплоскости $n<\operatorname{Re}s$.

2. Докажем равенство (4.13), пользуясь регуляризацией значения η-функции в нуле. Правая часть в (4.12) может быть записана в виде (см. (4.3))

$$
I(s) = \frac{2}{\pi}\sin\pi\frac{s+m}{2m}(\widetilde{\mathcal{M}}\Psi_1)(1-s). \tag{4.21}
$$

Поскольку функция $(\mathcal{M}\Psi_1)(1-s)$ мероморфна (см. (4.4)), а η-функция $\eta_{A_B}(s)$ имеет мероморфное продолжение на всю комплексную плоскость с простым полюсом при $s=0$ (см. предложение 2.1), то мы получаем

$$
\begin{aligned}
\eta_{GS}(A_B) = \frac{1}{2}\operatorname{Reg}(\eta_{A_B})(0) = \frac{m}{2}\operatorname{Reg}\left(\frac{2}{\pi}\sin\pi\frac{m(s+1)}{2m}(\mathcal{M}\Psi_1)(1-ms)\right)(0) = \\
= \frac{m}{\pi}(\widetilde{\mathcal{M}}\Psi_1)(1) = \frac{1}{2\pi}⨍\limits_{\mathbb{R}} \operatorname{TR}\bigl(A_B(A_B^2+x^{2m})^{-1}\bigr)dx^m.
\end{aligned}
$$

Здесь первое равенство есть определение η-инварианта (2.2), второе равенство следует из (4.19) и (4.21), третье равенство получено прямым вычислением с учетом (4.4), а последнее — следует из (4.14), (4.3) и (4.2). Лемма 4.4 доказана. □

Теперь искомое равенство (4.1) следует из (4.13), (4.9) и (4.5). Теорема 4.1 доказана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида// Усп. мат. наук. — 1964. — *19*, № 3. — С. 53–161.
2. *Бейтмен Г., Эрдейи А.* Высшие трансцендентные функции, Т. 1. — М.: Наука, 1973.
3. *Жуйков К. Н., Савин А. Ю.* Эта-инвариант эллиптических краевых задач с параметром// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2023. — *69*, № 4. — С. 599–620.
4. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1967. — *16*. — С. 209–292.

5. *Atiyah M., Patodi V., Singer I.* Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1975. — *77*. — C. 43–69.
6. *Atiyah M., Patodi V., Singer I.* Spectral asymmetry and Riemannian geometry. II// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1976. — *78*. — C. 405–432.
7. *Atiyah M., Patodi V., Singer I.* Spectral asymmetry and Riemannian geometry. III// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1976. — *79*. — C. 71–99.
8. *Fedosov B., Schulze B.-W., Tarkhanov N.* The index of elliptic operators on manifolds with conical points// Selecta Math. (N. S.). — 1999. — *5*, № 4. — C. 467–506.
9. *Fedosov B., Schulze B.-W., Tarkhanov N.* A general index formula on toric manifolds with conical points// В сб.: «Approaches to singular analysis». — Basel: Birkhäuser, 2001. — C. 234–256.
10. *Gilkey P. B., Smith L.* The eta invariant for a class of elliptic boundary value problems// Commun. Pure Appl. Math. — 1983. — *36*. — C. 85–132.
11. *Gilkey P. B., Smith L.* The twisted index problem for manifolds with boundary// J. Differ. Geom. — 1983. — *18*, № 3. — C. 393–444.
12. *Lesch M.* Differential Operators of Fuchs Type, Conical Singularities, and Asymptotic Methods. — Stuttgart—Leipzig: B. G. Teubner Verlag, 1997.
13. *Lesch M., Pflaum M.* Traces on algebras of parameter dependent pseudodifferential operators and the eta-invariant// Trans. Am. Math. Soc. — 2000. — *352*, № 11. — C. 4911–4936.
14. *Lidskii V. B.* Non-selfadjoint operators with a trace// Dokl. Akad. Nauk SSSR. — 1959. — *125*. — C. 485–487.
15. *Melrose R.* The eta invariant and families of pseudodifferential operators// Math. Research Lett. — 1995. — *2*, № 5. — C. 541–561.

К. Н. Жуйков
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: `zhuykovcon@gmail.com`

А. Ю. Савин
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: `a.yu.savin@gmail.com`

UDC 517.954
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-403-416
EDN: PSBLYU

On two methods of determining η-invariants of elliptic boundary-value problems

K. N. Zhuikov and A. Yu. Savin

RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. For a class of boundary-value problems with a parameter that are elliptic in the sense of Agranovich–Vishik, we establish the equality of the η-invariant defined in terms of the Melrose regularization and the spectral η-invariant of the Atiyah–Patodi–Singer type defined using the analytic continuation of the spectral η-function of the operator.

Keywords: elliptic boundary-value problems with a parameter, η-invariants, spectral invariants, regularized traces.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The first author is a winner of the "Young Mathematics of Russia" contest and expresses gratitude to its sponsors and jury. The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation No. 24-21-00336.

For citation: K. N. Zhuikov, A. Yu. Savin, "On two methods of determining η-invariants of elliptic boundary-value problems," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 3, 403–416. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-403-416`

REFERENCES

1. M. S. Agranovich and M. I. Vishik, "Ellipticheskie zadachi s parametrom i parabolicheskie zadachi obshchego vida" [Elliptic problems with a parameter and parabolic problems of general form], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1964, **19**, No. 3, 53–161 (in Russian).
2. H. Bateman and A. Erdélyi, *Vysshie transtsendentnye funktsii, T. 1* [Higher Transcendental Functions. V. 1], Nauka, Moscow, 1973 (Russian translation).
3. K. N. Zhuykov and A. Yu. Savin, "Eta-invariant ellipticheskikh kraevykh zadach s parametrom" [Eta-invariant of elliptic parameter-dependent boundary-value problems], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2023, **69**, No. 4, 599–620 (in Russian).
4. V. A. Kondrat'ev, "Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy v oblastyakh s konicheskimi i uglovymi tochkami" [Boundary-value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1967, **16**, 209–292 (in Russian).
5. M. Atiyah, V. Patodi, and I. Singer, "Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I," *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1975, **77**, 43–69.
6. M. Atiyah, V. Patodi, and I. Singer, "Spectral asymmetry and Riemannian geometry. II," *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1976, **78**, 405–432.
7. M. Atiyah, V. Patodi, and I. Singer, "Spectral asymmetry and Riemannian geometry. III," *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1976, **79**, 71–99.
8. B. Fedosov, B.-W. Schulze, and N. Tarkhanov, "The index of elliptic operators on manifolds with conical points," *Selecta Math. (N. S.)*, 1999, **5**, No. 4, 467–506.
9. B. Fedosov, B.-W. Schulze, and N. Tarkhanov, "A general index formula on toric manifolds with conical points," In: *Approaches to singular analysis*, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 234–256.
10. P. B. Gilkey and L. Smith, "The eta invariant for a class of elliptic boundary value problems," *Commun. Pure Appl. Math.*, 1983, **36**, 85–132.
11. P. B. Gilkey and L. Smith, "The twisted index problem for manifolds with boundary," *J. Differ. Geom.*, 1983, **18**, No. 3, 393–444.
12. M. Lesch, *Differential Operators of Fuchs Type, Conical Singularities, and Asymptotic Methods*, B. G. Teubner Verlag, Stuttgart–Leipzig, 1997.
13. M. Lesch and M. Pflaum, "Traces on algebras of parameter dependent pseudodifferential operators and the eta-invariant," *Trans. Am. Math. Soc.*, 2000, **352**, No. 11, 4911–4936.
14. V. B. Lidskii, "Non-selfadjoint operators with a trace," *Dokl. Akad. Nauk SSSR*, 1959, **125**, 485–487.
15. R. Melrose, "The eta invariant and families of pseudodifferential operators," *Math. Research Lett.*, 1995, **2**, No. 5, 541–561.

K. N. Zhuikov
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: `zhuykovcon@gmail.com`

A. Yu. Savin
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: `a.yu.savin@gmail.com`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 3 (2024). С. 417–427
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 51-73
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-417-427
EDN: PWKTOB

ИНДЕКС МАСЛОВА НА СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ МНОГООБРАЗИЯХ И ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫЕ ЛАГРАНЖЕВЫ МНОГООБРАЗИЯ

А. С. Мищенко[1,2]

[1] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*

Посвящается памяти
Виктора Павловича Маслова,
моего учителя и друга.

Аннотация. Настоящая работа является изложением доклада на конференции «Semiclassical analysis and nonlocal elliptic problems-2023». Определение индекса Маслова лагранжева многообразия в виде класса одномерных когомологий на нем породило многочисленные работы, обобщающие понятия индекса Маслова. В работах В. И. Арнольда, В. А. Васильева и их последователей была разработана теория лагранжевых бордизмов и на ее основании построены характеристические классы лагранжевых подмногообразий. Но имеется и другой подход описания классов Маслова лагранжевых подмногообразий, изложенный в работах В. В. Трофимова и А. Т. Фоменко с категорной точки зрения, который послужил источником настоящего доклада. Вдохновленные работами В. В. Трофимова и А. Т. Фоменко, мы вводим понятие т. н. инфинитезимальных лагранжевых многообразий, которые позволяют, по нашему мнению, с максимальной полнотой охарактеризовать характеристические классы лагранжевых многообразий и вычислять индекс Маслова практически для любых лагранжевых многообразий. Вопрос, который нас интересует, заключается в следующем: когда индекс Маслова, заданный на индивидуальном лагранжевом многообразии как одномерный класс когомологий, является образом некоторого одномерного класса когомологий тотального пространства расслоения лагранжевых грассманианов? Дается ответ для различных классов расслоений лагранжевых грассманианов.

Ключевые слова: индекс Маслова, инфинитезимальное лагранжево многообразие, лагранжев грассманиан.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *А. С. Мищенко.* Индекс Маслова на симплектических многообразиях и инфинитезимальные лагранжевы многообразия// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 3. С. 417–427. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-417-427

1. Введение

Определение индекса Маслова лагранжева многообразия в виде класса одномерных когомологий на нем породило многочисленные работы, обобщающие понятия индекса Маслова. В работах В. И. Арнольда [1, 2, 10, 11] (1980), В. А. Васильева [3, 16] (1981) и их последователей была разработана теория лагранжевых бордизмов и на ее основании построены характеристические классы лагранжевых подмногообразий.

Но имеется и другой подход описания классов Маслова лагранжевых подмногообразий, изложенный в работах В. В. Трофимова и А. Т. Фоменко [7,9] (1991, 1995) с категорной точки зрения, который послужил источником настоящего доклада.

Вдохновленные работами В. В. Трофимова и А. Т. Фоменко, мы вводим понятие т. н. инфинитезимальных лагранжевых многообразий, которые позволяют, по нашему мнению, с максимальной полнотой охарактеризовать характеристические классы лагранжевых многообразий и вычислять индекс Маслова практически для любых лагранжевых многообразий.

Сам индекс Маслова строится как гомологический инвариант на лагранжевом подмногообразии некоторого симплектического многообразия. В простейшем случае лагранжево многообразие Λ — это n-мерное подмногообразие в симплектическом пространстве $\mathbb{R}^n \oplus \mathbb{R}^n$, на котором симплектическая форма ω тривиальна.

В общем случае рассматривается произвольное симплектическое многообразие (W,ω) и расслоение лагранжевых грассманианов $LG(\mathbb{T}W)$, параметризованных точками симплектического многообразия W.

Вопрос, который нас интересует, заключается в следующем: когда индекс Маслова, заданный на индивидуальном лагранжевом многообразии как одномерный класс когомологий, является образом некоторого одномерного класса когомологий тотального пространства расслоения лагранжевых грассманианов? Дается ответ для различных классов расслоений лагранжевых грассманианов.

В частности, находятся гомологические условия для симплектических многообразий, при выполнении которых строятся явные формулы для вычисления индекса Маслова лагранжевых подмногообразий.

В заключение мы рассматриваем т. н. инфинитезимальные лагранжевы многообразия, которые не предполагают вложения лагранжевого многообразия в объемлющее симплектическое многообразие.

Понятие инфинитезимальных лагранжевых многообразий предполагает только наличие пары векторных расслоений: касательного расслоения $\mathbb{T}\Lambda$ лагранжевого многообразия Λ, послойно вложенного в комплексное векторное расслоение $\mathbb{T}^{\mathbb{U}(n)}\Lambda$ таким образом, что слой расслоения $\mathbb{T}\Lambda$ является лагранжевым подпространством в слое расслоения $\mathbb{T}^{\mathbb{U}(n)}\Lambda$.

Таким образом, векторное расслоение $\mathbb{T}^{\mathbb{U}(n)}\Lambda$ играет роль симплектического многообразия W, в которое вкладывается лагранжево многообразие Λ. Это упрощает в определенной степени задачу построения индекса Маслова.

Проблема применения инфинитезимальных лагранжевых многообразий к асимптотическим методам в уравнениях математической физики ожидает своего решения и может быть основана на работе М. В. Карасева и В. П. Маслова [4,13] (1983) в которой канонический оператор строится для общих симплектических многообразий при помощи покрытий симплектического многообразия картами, которые диффеоморфны простейшим симплектическим многообразиям.

2. Согласованные структуры

С каждым симплектическим многообразием W, задаваемым симплектической замкнутой (невырожденной) формой ω, можно связать дополнительные согласованные структуры:

- почти комплексную структуру J: $J : TW \longrightarrow TW$, $J^2 = -1$;
- евклидову структуру $E(u,v)$, $u,v \in \Gamma(TW)$, $E(u,u) > 0$;
- эрмитову структуру $H(u,v) = \mathbf{Re}H(u,v) + i\mathbf{Im}H(u,v) = E(u,v) + i\omega(u,v)$, которая является полуторалинейной формой.

Все эти структуры можно построить, стартуя от заданной симплектической формы ω; см., например, работу Ana Cannas da Silva [12] (2008).

3. Расслоение лагранжевых грассманианов

Расслоение лагранжевых грассманианов согласно определению строится в виде тотального пространства $LG(\mathbb{T}W)$ расслоения

$$\begin{tikzcd} LG(\mathbb{T}W) \arrow[d, "\pi_{LG}"] \\ W \end{tikzcd}$$

со слоями $\pi_{LG}^{-1}(x) = LG(\mathbb{T}W)_x$ над точками $x \in W$.

Слой $LG(\mathbb{T}W)_x$ является лагранжевыми грассманианом

$$\pi_{LG}^{-1}(x) = LG(\mathbb{T}W)_x = LG(\mathbb{T}_x W)$$

симплектического пространства $\mathbb{T}_x W$, который является многообразием, состоящим из всех лагранжевых плоскостей в касательном пространстве $\mathbb{T}_x W$:

$$LG(\mathbb{T}_x W) = \{L \subset \mathbb{T}_x W : \dim_{\mathbb{R}} L = n,\ \omega_{|L} = 0\}.$$

4. Категорное определение

Рассмотрим вложение $\Lambda \overset{h}{\hookrightarrow} W$ лагранжевого многообразия Λ в симплектическое многообразие W. Дифференциал $\mathbb{T}h$ вложения h порождает коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}\Lambda \arrow[r, "\mathbb{T}h"] \arrow[d, "\pi_{\mathbb{T}\Lambda}"'] & \mathbb{T}W \arrow[d, "\pi_{\mathbb{T}W}"] \\ \Lambda \arrow[r, hook, "h"] & W. \end{tikzcd}$$

Лагранжево подмногообразие $h : \Lambda \longrightarrow W$ — это такое подмногообразие, для которого в каждой точке $x \in \Lambda$ подпространство $\mathbb{T}h\,(\mathbb{T}_x\Lambda) \subset \mathbb{T}_{h(x)}W$ является лагранжевым подпространством. Дифференциал $\mathbb{T}h$ порождает отображение Lh лагранжева многообразия в тотальное пространство $LG(\mathbb{T}W)$ расслоения лагранжевых грассманианов:

$$\begin{tikzcd} & LG(\mathbb{T}W) \arrow[d, "\pi_{LG}"] \\ \Lambda \arrow[ur, bend left, "Lh"] \arrow[r, hook, "h"'] & W. \end{tikzcd}$$

Получаем отображение в когомологиях:

$$H^*(LG(\mathbb{T}W)) \xrightarrow{(Lh)^*} H^*(\Lambda).$$

Категорное определение характеристических классов лагранжевого многообразия. Отображение $(Lh)^*$ задает универсальное категорное определение характеристических классов лагранжевого многообразия. А именно, если $\alpha \in H^*(LG(\mathbb{T}W))$ — класс когомологий пространства $LG(\mathbb{T}W)$, то класс когомологий

$$\alpha(\Lambda) = (Lh)^*(\alpha) \in H^*(\Lambda)$$

будем называть *характеристическим классом* лагранжева подмногообразия $\Lambda \underset{h}{\hookrightarrow} W$, порождаемым универсальным характеристическим классом $\alpha \in H^*(LG(\mathbb{T}W)$.

5. Классы Маслова

Имеется по крайней мере три примера характеристических классов лагранжевых многообразий.

5.1. Класс Маслова для простейшего случая $W = \mathbb{T}^*(\mathbb{C}^n)$. Один из них, простейший, это одномерный характеристический класс Маслова, значение которого на замкнутой кривой $\gamma \subset \Lambda$ совпадает с индексом Маслова кривой γ; см. книгу Трофимова и Фоменко [9].

Пусть $\Lambda \subset \mathbb{R}^{2n}$ — лагранжево подмногообразие, $h : \Lambda \subset \mathbb{R}^{2n}$ — вложение, $Lh : \Lambda \longrightarrow LG(\mathbb{R}^{2n})$ сопоставляет каждой точке $x \in \Lambda$ касательное (лагранжево) подпространство $Lh(x) = \mathbb{T}_x(\Lambda) \in LG(\mathbb{R}^{2n})$ как точку в лагранжевом грассманиане $LG(\mathbb{R}^{2n})$ всех лагранжевых подпространств. Получаем отображение в когомологиях:

$$H^*(LG(\mathbb{R}^{2n})) \xrightarrow{(Lh)^*} H^*(\Lambda).$$

Если $\alpha \in H^*(LG(\mathbb{R}^{2n}))$ — класс когомологий пространства $LG(\mathbb{R}^{2n})$, то класс когомологий

$$\alpha(\Lambda) = (Lh)^*(\alpha) \in H^*(\Lambda)$$

— характеристический класс.

Пример универсального характеристического класса, класса Маслова, — это образующий класс когомологий $\mathbf{mas} \in H^1(LG(\mathbb{R}^{2n})) \approx \mathbb{Z}$, т. е. $\mathbf{mas}(\Lambda) \in H^1(\Lambda)$.

Вычисление класса Маслова $\mathbf{mas} \in H^1(LG(\mathbb{R}^{2n})) \approx \mathbb{Z}$ задается при помощи дифференциальной формы на многообразии $LG(\mathbb{R}^{2n})$. Многообразие $LG(\mathbb{R}^{2n})$ диффеоморфно однородному пространству $\mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n)$ при помощи диффеоморфизма

$$u : LG(\mathbb{R}^{2n}) \longrightarrow \mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n),$$

который сопоставляет каждой лагранжевой плоскости $L \subset \mathbb{R}^{2n} = \mathbb{C}^n$, $\dim_R L = n$, ортонормированный вещественный базис $(e_1, \dots, e_n) \subset L$.

Этим корректно определен класс смежности $u(L) \in \mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n)$. В самом деле, поскольку базисные вектора $(e_1, \dots, e_n)$ лежат в лагранжевой плоскости L, то они образуют ортонормированный комплексный базис в объемлющем пространстве $\mathbb{C}^n$, который задается унитарной матрицей. Эта матрица задается однозначно с точностью до выбора ортонормированного вещественного базиса $(e_1, \dots, e_n) \subset L$, т. е. до умножения на ортогональную матрицу.

Композиция f отображений

$$f : LG(\mathbb{R}^{2n}) \xrightarrow{u} \mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n) \xrightarrow{\det^2} \mathbb{S}^1$$

корректно задает одномерный класс когомологий, класс Маслова

$$\mathbf{mas} \in H^1(LG(\mathbb{R}^{2n})), \quad \mathbf{mas} = f^*\left(\frac{dz}{2\pi i z}\right) \in H^1(LG(\mathbb{R}^{2n})).$$

5.2. Обобщенный класс Маслова для случая $W = \mathbb{T}^*(M)$. Конструкция обобщенного класса Маслова изложена в книге Трофимова и Фоменко [9] (1995): пусть M — гладкое многообразие, а ω — каноническая симплектическая структура на тотальном пространстве $\mathbb{T}^*M$.

Выбор римановой метрики на M индуцирует положительно определенное скалярное произведение на $\mathbb{T}_z(\mathbb{T}^*M)$, позволяющее отождествить $LG(\mathbb{T}_z(\mathbb{T}^*M))$ с $\mathbb{U}(n)/\mathbb{O}(n)$. Это отождествление неоднозначно, но позволяет корректно определить дифференциальную форму $(\det^2)^*(dz/2\pi i z)$ на тотальном пространстве расслоения $LG(\mathbb{T}^*M)$ над $\mathbb{T}^*M$, у которого слой над точкой $z \in \mathbb{T}^*M$ состоит из всех лагранжевых подпространств в $\mathbb{T}_z(\mathbb{T}^*M)$.

Аккуратное доказательства корректности определения обобщенного класса Маслова для тотального пространства кокасательного расслоения произвольного многообразия было дополнительно любезно предоставлено А. Т. Фоменко (см. в работе Мищенко [5, 14] (2022)).

5.3. Класс Маслова—Трофимова. Теорема 1. Наиболее общая конструкция категорных характеристических классов лагранжевых подмногообразий была представлена В. В. Трофимовым [8] (1994).

Если линейная связность ∇ на многообразии W согласована с симплектической формой ω, то операция параллельного перенесения задает действие группы голономии $\pi^h_\nabla(x_0, W)$ на лагранжевом грассманиане в отмеченной точке x_0.

Это действие позволяет определить т. н. приведенный лагранжев грассманиан

$$\pi LG(\mathbb{T}_{x_0}W) = LG(\mathbb{T}_{x_0}W)/\pi^h_\nabla(x_0, W),$$

а значит, и отображение лагранжева подмногообразия $N^n \subset W^{2n}$

$$par : N^n \longrightarrow \pi LG(\mathbb{T}_{x_0}W),$$

которое задает гомоморфизм в когомологиях

$$(par)^* : H^*(\pi LG(\mathbb{T}_{x_0}W)) \longrightarrow H^*(N^n),$$

т. е. характеристический класс Маслова—Трофимова

$$\alpha(N^n) = (par)^*(\alpha) \in H^*(N^n), \quad \alpha \in H^*(\pi LG(\mathbb{T}_{x_0}W)).$$

Теорема 1. *Класс Маслова—Трофимова является частным случаем категорного характеристического класса лагранжева многообразия.*

6. Построение индекса Маслова

Задача заключается в том, чтобы найти условия на симплектическое многообразие W, при которых индекс Маслова можно построить на всем симплектическом многообразии W, т. е. когда функция $\det^2_\alpha$ не зависит от выбора карты U_α.

Если функции склейки касательного расслоения $\mathbb{T}W$ принимают значения в ортогональной подгруппе, $\varphi^{\mathbb{T}}_{\alpha\beta}(w) \in \mathbb{O}(n)$, то в каждом слое расслоения $LG(\mathbb{T}^*M)$ функция $\det^2_\alpha$ не зависит от выбора тривиализации:

$$\det\nolimits^2_\beta(\varphi^{\mathbb{T}}_{\alpha\beta}(x) \cdot A) = \det\nolimits^2(\varphi^{\mathbb{T}}_{\alpha\beta}(x)) \cdot \det\nolimits^2(A) = \det\nolimits^2_\alpha(A).$$

На самом деле для того, чтобы определение $\det^2_\alpha$ не зависело от тривиализации, требование $\varphi^{\mathbb{T}}_{\alpha\beta}(w) \in \mathbb{O}(n)$ является слишком обременительным. Достаточно предполагать, что структурная группа $\mathbb{U}(n)$ редуцируется к подгруппе $\mathbb{SU}(n) \subset \mathbb{U}(n)$. Конечно, подгруппа $\mathbb{O}(n) \not\subset \mathbb{SU}(n)$ немного выползает из подгруппы $\mathbb{SU}(n)$. Но это легко поправить: рассмотрев гомоморфизм групп

$$\det : \mathbb{U}(n) \longrightarrow \mathbb{S}^1 \approx \mathbb{U}(1)$$

и конечную подгруппу $\mathbb{H} \subset \mathbb{S}^1$, задающую точную последовательность

$$\mathbf{1} \longrightarrow \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{S}^1 \longrightarrow \mathbb{S}^{\mathbb{H}} \longrightarrow \mathbf{1}.$$

Положим

$$\mathbb{S}^{\mathbb{H}}\mathbb{U}(n) = \det^{-1}(\mathbb{H}) \subset \mathbb{U}(n).$$

В случае $\mathbb{H} = \mathbf{1}$ получаем $\mathbb{S}^{\mathbb{H}} = \mathbb{S}^1$. В случае $\mathbb{H} = \{0, 1\} = \mathbb{Z}_2$ получаем подгруппу $\mathbb{S}^{Z_2}\mathbb{U}(n) \supset \mathbb{O}(n)$. Поэтому задача о построении функции $\det^2_\alpha$, не зависящей от выбора тривиализации, сводится к следующей теореме.

Теорема 2. *Функция $\det^{2k}_\alpha$ корректно определена на тотальном пространстве расслоения лагранжевых грассманианов, т. е. не зависит от выбора карты U_α, когда структурная группа комплексного касательного расслоения $\mathbb{T}W$ редуцируется к подгруппе $\mathbb{S}^{\mathbb{H}}\mathbb{U}(n) \subset \mathbb{U}(n)$, где $\mathbb{H} \subset \mathbb{U}(1)$ — конечная подгруппа порядка k.*

Когда структурная группа $\mathbb{U}(n)$ редуцируется к подгруппе $\mathbb{S}^{\mathbb{H}}\mathbb{U}(n) = \det^{-1}(\mathbb{H}) \subset \mathbb{U}(n)$? Ответ на этот вопрос звучит следующим образом.

Теорема 3. *Структурная группа $\mathbb{U}(n)$ комплексного касательного расслоения $\mathbb{T}W$ редуцируется к подгруппе $\mathbb{S}^{\mathbb{H}}\mathbb{U}(n) = \det^{-1}(\mathbb{H}) \subset \mathbb{U}(n)$, когда первый класс Чженя $c_1(TW) \in H^2(W, \mathbb{Z})$ имеет конечный порядок $k = \#(\mathbb{H})$.*

7. Инфинитезимальный подход

Замена симплектического многообразия на меньшее симплектическое многообразие. Рассмотрим вложение $h : \Lambda \longrightarrow W$ многообразия Λ в симплектическое многообразие W как лагранжево подмногообразие. Такое вложение будем называть *лагранжевым вложением.* Напомним, что дифференциал $\mathbb{T}h$ порождает коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \mathbb{T}\Lambda \arrow[r, "\mathbb{T}h"] \arrow[d, "\pi_{\mathbb{T}\Lambda}"'] & \mathbb{T}W \arrow[d, "\pi_{\mathbb{T}W}"] \\ \Lambda \arrow[r, hook, "h"] & W, \end{tikzcd}$$

которая, в свою очередь, порождает послойное отображение Lh лагранжева многообразия Λ в тотальное пространство $LG(\mathbb{T}W)$ расслоения лагранжевых грассманианов:

$$\begin{tikzcd} & LG(\mathbb{T}W) \arrow[d, "\pi_{LG}"] \\ \Lambda \arrow[ur, bend left, "Lh"] \arrow[r, hook, "h"'] & W. \end{tikzcd}$$

Получаем морфизм когомологий:

$$H^*(LG(\mathbb{T}W)) \xrightarrow{(Lh)^*} H^*(\Lambda).$$

Этот категорный подход позволяет использовать метод В. В. Трофимова еще раз; см. [6, 15] (2023). Судя по своей работе [8] (1994), В. В. Трофимов не был удовлетворен своим обобщением классов Маслова, поскольку при большой группе голономии теряются классы Маслова. Мы предлагаем и здесь сформулировать задачу на категорном языке. Объектом служит пара $h : \Lambda \subset W$, лагранжево подмногообразие Λ в симплектическом многообразии W.

Предлагается заменить симплектическое многообразие W на меньшее симплектическое подмногообразие W', которое содержит лагранжево подмногообразие Λ: $h' : \Lambda \subset W'$, $i : W' \subset W$, $h = i \circ h'$. Получим более широкое множество характеристических классов, к которому старые классы сводятся.

В самом деле, послойные отображения Lh и Lh' лагранжева многообразия Λ в тотальные пространства $LG(\mathbb{T}W)$ и $LG(\mathbb{T}W')$ расслоений лагранжевых грассманианов образуют коммутативную диаграмму:

$$\begin{tikzcd} & LG(\mathbb{T}W') \arrow[r, "(\mathbb{T}i)_{LG}"] \arrow[d, "\pi'_{LG}"] & LG(\mathbb{T}W) \arrow[d, "\pi_{LG}"] \\ \Lambda \arrow[ur, bend left, "Lh'"] \arrow[urr, bend left=50, "Lh"] \arrow[r, hook, "h'"'] \arrow[rr, hook, bend right, "h=i\circ h'"'] & W' \arrow[r, "i"'] & W. \end{tikzcd}$$

Эта коммутативная диаграмма продолжается до предельного пространства

$$\Lambda = \bigcap_{W \supset \Lambda} W,$$

которое имеет следующий вид:

$$\begin{tikzcd}
 & LG(T^{U(n)}\Lambda) \arrow[r, "(\mathbb{T}h')_{LG}"] \arrow[d] & LG(\mathbb{T}W') \arrow[r, "(\mathbb{T}i)_{LG}"] \arrow[d, "\pi'_{LG}"] & LG(\mathbb{T}W) \arrow[d, "\pi_{LG}"] \\
\Lambda \arrow[r, equal] \arrow[ur, "L"'] \arrow[urr, bend left, "Lh'"] \arrow[urrr, bend left, "Lh"] & \Lambda \arrow[r, hook, "h'"'] \arrow[rr, hook, bend right, "h=i\circ h'"'] & W' \arrow[r, "i"'] & W,
\end{tikzcd}$$

где $\mathbb{T}^{U(n)}\Lambda = \bigcap\limits_{W\supset\Lambda} \mathbb{T}W$. Отображение L строится как предельное отображение, поскольку тотальные пространства $LG(\mathbb{T}W)$ расслоений лагранжевых многообразий вкладываются друг в друга:

$$\begin{tikzcd}
LG(\mathbb{T}W') \arrow[r, hook, "(\mathbb{T}i)_{LG}"] \arrow[d, "\pi'_{LG}"] & LG(\mathbb{T}W) \arrow[d, "\pi_{LG}"] \\
W' \arrow[r, hook, "i"'] & W.
\end{tikzcd}$$

Значит,

$$LG(\mathbb{T}^{U(n)}\Lambda) = \bigcap_{W\supset\Lambda} LG(\mathbb{T}W),$$

и поскольку отображение $(\mathbb{T}h)_{LG}$ является мономорфизмом, то отображение L однозначно определяется условием:

$$(\mathbb{T}h)_{LG} \circ L = (\mathbb{T}i)_{LG} \circ (\mathbb{T}h')_{LG} \circ L = Lh.$$

Эта неявная конструкция отображения L лагранжева многообразия Λ в тотальное пространство $LG(\mathbb{T}^{U(n)}\Lambda)$ расслоения лагранжевых грассманианов над базой Λ не зависит от выбора достаточно малой окрестности лагранжевого многообразия Λ в симплектическом многообразии W, но существенно зависит от выбора двух локальных инвариантов лагранжева многообразия Λ:

1. касательного расслоения $\mathbb{T}\Lambda$ лагранжева многообразия Λ (со структурной группой $\mathbb{O}(n)$);
2. ограничения $\mathbb{T}^{\mathbb{U}(n)}(\Lambda)$ касательного расслоения $\mathbb{T}^{\mathbb{U}(n)}(W)$ над симплектическим многообразием W, на котором индуцирована комплексная структура со структурной группой $\mathbb{U}(n)$, порожденная симплектической структурой симплектического многообразия W;
3. и, наконец, послойного вложения расслоений $\varphi : \mathbb{T}(\Lambda) \to \mathbb{T}^{\mathbb{U}(n)}(\Lambda)$, линейного относительно поля вещественных чисел.

Скажем, что многообразие с оснащением $\{\Lambda, \varphi : \mathbb{T}(\Lambda) \to \mathbb{T}^{\mathbb{U}(n)}(\Lambda)\}$ является *инфинитезимальным лагранжевым многообразием*, если в каждой точке $x \in \Lambda$ слой $\mathbb{T}_x(\Lambda) \subset \mathbb{T}_x^{\mathbb{U}(n)}(\Lambda)$ является лагранжевым подпространством в симплектическом пространстве $\mathbb{T}_x^{\mathbb{U}(n)}(\Lambda)$.

Это оснащение называется *лагранжевым оснащением*. Таким образом, получаем теорему.

Теорема 4. *Любое лагранжево подмногообразие в симплектическом многообразии $\Lambda \subset W$ наделяется лагранжевым оснащением, т. е. структурой инфинитезимального лагранжева многообразия. Верно и обратное: всякое инфинитезимальное лагранжево многообразие, т. е. многообразие Λ с лагранжевым оснащением $\{\Lambda, \varphi : \mathbb{T}(\Lambda) \to \mathbb{T}^{\mathbb{U}(n)}(\Lambda)\}$, реализуется как лагранжево подмногообразие в некотором многообразии W, допускающем почти симплектическую структуру.*

Иными словами, существуют почти симплектическое многообразие W и лагранжево вложение $h : \Lambda \longrightarrow W$, для которого лагранжево оснащение $\{\Lambda, \varphi : \mathbb{T}(\Lambda) \to \mathbb{T}^{\mathbb{U}(n)}(\Lambda)\}$ строится как обратный образ $\mathbb{T}^{\mathbb{U}(n)}(\Lambda) = h^*(\mathbb{T}W)$ комплексного расслоения $\mathbb{T}W$, причем дифференциал $\mathbb{T}h : \mathbb{T}\Lambda \longrightarrow \mathbb{T}W$ отображения h разлагается в композицию

$$\mathbb{T}h : \mathbb{T}\Lambda \xrightarrow{\varphi} \mathbb{T}^{\mathbb{U}(n)}(\Lambda) = h^*(\mathbb{T}W) \xrightarrow{h^*} \mathbb{T}W.$$

Заметим, что если почти симплектическое многообразие существует, то достаточно малая трубчатая окрестность лагранжева подмногообразия $\Lambda \subset W'$ диффеоморфна тотальному пространству нормального расслоения ν с базой Λ, а ограничение касательного расслоения $(\mathbb{T}W)_{|\Lambda} = h^*(\mathbb{T}W) = \mathbb{T}^{\mathbb{U}(n)}(\Lambda)$ разлагается в прямую сумму двух расслоений $\mathbb{T}\Lambda$ и ν:

$$\mathbb{T}^{\mathbb{U}(n)}(\Lambda) = \mathbb{T}\Lambda \oplus \nu.$$

Поэтому нормальное расслоение можно построить при помощи послойного оператора I в расслоении $\mathbb{T}^{\mathbb{U}(n)}(\Lambda)$:

$$\nu = I(\mathbb{T}\Lambda).$$

Значит, построение нормального расслоения ν не требует информации о вложении h лагранжева многообразия Λ в окрестность W'. $\square$

Таким образом, каждой точке $x \in \Lambda$ сопоставим касательное пространство $\mathbb{T}_x\Lambda$ как подпространство $\mathbb{T}_x\Lambda \subset \mathbb{T}_x(W')$, как лагранжеву плоскость в $\mathbb{T}_x(W')$, т. е. точку $L(x)$ в слое $LG_x(\mathbb{T}^{U(n)}\Lambda)$.

В когомологиях получаем отображение:

$$H^*(\Lambda) \xleftarrow{H(L)} H^*(LG(\mathbb{T}^{U(n)}\Lambda)) \xleftarrow{H((\mathbb{T}h)_{LG})} H^*(LG(\mathbb{T}W)).$$

Это значит, что категорные характеристические классы на лагранжевом многообразии Λ, вложенном в любое симплектическое многообразие, можно построить при помощи оснащения комплексным векторным расслоением $\mathbb{T}^{U(n)}$ и задать посредством универсального характеристического класса из когомологий $H^*(LG(\mathbb{T}^{U(n)}\Lambda))$ тотального пространства расслоения $LG(\mathbb{T}^{U(n)}\Lambda)$.

Заметим, что при определении характеристических классов мы используем только структуру касательного расслоения $\mathbb{T}(W)$ к симплектическому многообразию W. Возникает естественная идея заменить пару $h : \Lambda \subset W$ на само лагранжево многообразие Λ, которое оснащено структурой лагранжевости при помощи лагранжева оснащения.

8. Заключительные замечания

1. Каждое инфинитезимальное лагранжево многообразие может быть реализовано как лагранжево подмногообразие некоторого почти симплектического многообразия, структурная группа которого редуцируется к подгруппе $\mathbb{O}(n)$. Этого достаточно, чтобы описать одномерные классы Маслова для инфинитезимального лагранжева многообразия.
2. В частности, на инфинитезимальном лагранжевом многообразии справедливы теоремы 2 и 3 о редукции структурной группы $\mathbb{U}(n)$.
3. Почти симплектическое многообразие из первого пункта можно выбрать как тотальное пространство кокасательного расслоения некоторого n-мерного многообразия. Однако неясно, можно ли вложить инфинитезимальное лагранжево многообразие в компактное симплектическое многообразие.
4. Проблема применения инфинитезимальных лагранжевых многообразий к асимптотическим методам в уравнениях математической физики ожидает своего решения. Мы предполагаем, что при помощи инфинитезимальных лагранжевых многообразий можно обобщить методы работы М. И. Карасева и В. П. Маслова [4] (1983) на более широкий класс канонических операторов в асимптотических методах.
5. Представляет также интерес описать группу голономий в смысле работы В. В. Трофимова [8] (1994).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И.* Лагранжевы и лежандровы кобордизмы. I// Функц. анализ и его прилож. — 1980. — *14*, № 3. — С. 1–13.
2. *Арнольд В. И.* Лагранжевы и лежандровы кобордизмы. II// Функц. анализ и его прилож. — 1980. — *14*, № 4. — С. 8–17.
3. *Васильев В. А.* Характеристические классы лагранжевых и лежандровых многообразий, двойственные к особенностям каустик и волновых фронтов// Функц. анализ и его прилож. — 1981. — *15*, № 3. — С. 10–22.
4. *Карасёв М. В., Маслов В. П.* Псевдодифференциальные операторы и канонический оператор в общих симплектических многообразиях// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1983. — *47*, № 5. — С. 999–1029.

5. *Мищенко А. С.* Индекс Маслова на симплектических многообразиях. С дополнением А. Т. Фоменко «Построение обобщенного класса Маслова для тотального пространства $W = T^*(M)$ кокасательного расслоения»// Мат. заметки. — 2022. — *112*, № 5. — С. 718–732.
6. *Мищенко А. С.* Заметки о категорном определении классов Маслова лагранжева многообразия// Мат. заметки. — 2023. — *114*, № 3. — С. 474–476.
7. *Трофимов В. В.* Группа голономии и обобщенные классы Маслова подмногообразий в пространствах аффинной связности// Мат. заметки. — 1991. — *49*, № 2. — С. 113–123.
8. *Трофимов В. В.* Обобщенные классы Маслова на пространстве путей симплектического многообразия// Тр. МИАН. — 1994. — *205*. — С. 172–199.
9. *Трофимов В. В., Фоменко А. Т.* Алгебра и геометрия интегрируемых гамильтоновых дифференциальных уравнений. — М.: Факториал, 1995.
10. *Arnol'd V. I.* Lagrange and Legendre cobordisms. I// Funct. Anal. Appl. — 1980. — *14*, № 3. — C. 167–177.
11. *Arnol'd V. I.* Lagrange and Legendre cobordisms. II// Funct. Anal. Appl. — 1980. — *14*, № 4. — C. 252–260.
12. *Cannas da Silva A.* Lectures on Symplectic Geometry. — Berlin—Heidelberg: Springer, 2008.
13. *Karasev M. V., Maslov V. P.* Pseudodifferential operators and a canonical operator in general symplectic manifolds// Izv. Math. — 1984. — *23*, № 2. — C. 277–305.
14. *Mishchenko A. S.* Maslov index on symplectic manifolds. With supplement by A. T. Fomenko "Constructing the generalized Maslov class for the total space $W = T^*(M)$ of the cotangent bundle"// Math. Notes. — 2022. — *112*, № 5. — C. 697–708.
15. *Mishchenko A. S.* Notes on a Category-theoretic definition of Maslov classes of a Lagrangian manifold// Math. Notes. — 2023. — *114*, № 3. — C. 412–414.
16. *Vassiliev V. A.* Characteristic classes of Lagrangian and Legendre manifolds dual to singularities of caustics and wave fronts// Funct. Anal. Appl. — 1981. — *15*, № 3. — C. 164–173.

А. С. Мищенко

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Московский Центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия

E-mail: `asmish-prof@yandex.ru`

UDC 51-73
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-417-427
EDN: PWKTOB

Maslov index on symplectic manifolds infinitesimal Lagrangian manifolds

A. S. Mishchenko[1,2]

[1]*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
[2]*Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Dedicated to the memory
of Viktor Pavlovich Maslov,
my teacher and friend.

Abstract. This paper is a summary of the report at the conference "Semiclassical analysis and nonlocal elliptic problems-2023". The definition of the Maslov index of a Lagrangian manifold as a class of one-dimensional cohomologies on it gave rise to numerous works generalizing the concepts of the Maslov index. In the works by V. I. Arnold, V. A. Vassiliev and their followers, the theory of Lagrangian bordisms was developed and characteristic classes of Lagrangian submanifolds were constructed on its basis. But there is another approach to describing the Maslov classes of Lagrangian submanifolds, presented in the works by V. V. Trofimov and A. T. Fomenko from a categorical point of view, which served as the source of this report. Inspired by the works by V. V. Trofimov and A. T. Fomenko, we introduce the concept of the so-called infinitesimal Lagrangian manifolds, which, in our opinion, allow us to describe the characteristic classes of Lagrangian manifolds with maximum completeness and calculate the Maslov index for almost any Lagrangian manifold. The question that interests us is the following: when does the Maslov index defined on an individual Lagrangian manifold as a one-dimensional cohomology class become the image of some one-dimensional cohomology class of the total space of the bundle of Lagrangian Grassmannians? An answer is given for various classes of bundles of Lagrangian Grassmannians.

Keywords: Maslov index, infinitesimal Lagrangian manifold, Lagrangian Grassmannian.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: A. S. Mishchenko, "Maslov index on symplectic manifolds infinitesimal Lagrangian manifolds," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 3, 417–427. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-417-427

REFERENCES

1. V. I. Arnol'd, "Lagranzhevy i lezhandrovy kobordizmy. I" [Lagrange and Legendre cobordisms. I], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1980, **14**, No. 3, 1–13 (in Russian).
2. V. I. Arnol'd, "Lagranzhevy i lezhandrovy kobordizmy. II" [Lagrange and Legendre cobordisms. II], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1980, **14**, No. 4, 8–17 (in Russian).
3. V. A. Vassiliev, "Kharakteristicheskie klassy lagranzhevykh i lezhandrovykh mnogoobraziy, dvoystvennye k osobennostyam kaustik i volnovykh frontov" [Characteristic classes of Lagrange and Legendre manifolds, that are dual to singularities of caustics and wave fronts], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1981, **15**, No. 3, 10–22 (in Russian).
4. M. V. Karasev and V. P. Maslov, "Psevdodifferentsial'nye operatory i kanonicheskiy operator v obshchikh simplekticheskikh mnogoobraziyakh" [Pseudodifferential operators and the canonical operator in general

symplectic manifolds], *Izv. AN SSSR. Ser. Mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1983, **47**, No. 5, 999–1029 (in Russian).

5. A. S. Mishchenko, "Indeks Maslova na simplekticheskikh mnogoobraziyakh. S dopolneniem A. T. Fomenko «Postroenie obobshchennogo klassa Maslova dlya total'nogo prostranstva $W = T^*(M)$ kokasatel'nogo rassloeniya»" [Maslov index on symplectic manifolds. With supplement by A. T. Fomenko "Constructing the generalized Maslov class for the total space $W = T^*(M)$ of the cotangent bundle"], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2022, **112**, No. 5, 718–732 (in Russian).
6. A. S. Mishchenko, "Zametki o kategornom opredelenii klassov Maslova lagranzheva mnogoobraziya" [Notes on a category-theoretic definition of Maslov classes of a Lagrangian manifold], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2023, **114**, No. 3, 474–476 (in Russian).
7. V. V. Trofimov, "Gruppa golonomii i obobshchennye klassy Maslova podmnogoobraziy v prostranstvakh affinnoy svyaznosti" [Holonomy group and generalized Maslov classes of submanifolds in spaces with affine connection], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1991, **49**, No. 2, 113–123 (in Russian).
8. V. V. Trofimov, "Obobshchennye klassy Maslova na prostranstve putey simplekticheskogo mnogoobraziya" [Generalized Maslov classes on the path space of a symplectic manifold], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1994, **205**, 172–199 (in Russian).
9. V. V. Trofimov and A. T. Fomenko, *Algebra i geometriya integriruemykh gamil'tonovykh differentsial'nykh uravneniy* [Algebra and Geometry of Integrable Hamiltonian Differential Equations], Faktorial, Moscow, 1995 (in Russian).
10. V. I. Arnol'd, "Lagrange and Legendre cobordisms. I," *Funct. Anal. Appl.*, 1980, **14**, No. 3, 167–177.
11. V. I. Arnol'd, "Lagrange and Legendre cobordisms. II," *Funct. Anal. Appl.*, 1980, **14**, No. 4, 252–260.
12. A. Cannas da Silva, *Lectures on Symplectic Geometry*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2008.
13. M. V. Karasev and V. P. Maslov, "Pseudodifferential operators and a canonical operator in general symplectic manifolds," *Izv. Math.*, 1984, **23**, No. 2, 277–305.
14. A. S. Mishchenko, "Maslov index on symplectic manifolds. With supplement by A. T. Fomenko "Constructing the generalized Maslov class for the total space $W = T^*(M)$ of the cotangent bundle"," *Math. Notes*, 2022, **112**, No. 5, 697–708.
15. A. S. Mishchenko, "Notes on a Category-theoretic definition of Maslov classes of a Lagrangian manifold," *Math. Notes*, 2023, **114**, No. 3, 412–414.
16. V. A. Vassiliev, "Characteristic classes of Lagrangian and Legendre manifolds dual to singularities of caustics and wave fronts," *Funct. Anal. Appl.*, 1981, **15**, No. 3, 164–173.

A. S. Mishchenko
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia
E-mail: `asmish-prof@yandex.ru`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 3 (2024). С. 428–440
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 519.6
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-428-440
EDN: PZWBRR

ПОСТРОЕНИЕ УРАВНЕНИЙ ДИНАМИКИ ЗАДАННОЙ СТРУКТУРЫ ПО УРАВНЕНИЯМ ПРОГРАММНЫХ СВЯЗЕЙ

Р. Г. Мухарлямов

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. Рассматривается задача построения системы дифференциальных уравнений по заданному набору уравнений связей и приведения к форме уравнений Лагранжа с диссипативными силами, обеспечивающими стабилизацию связей. Диссипативная функция определяется по уравнениям возмущений связей. Для представления дифференциальных уравнений в форме уравнений Лагранжа используются модифицированные условия Гельмгольца. Приводится решение задачи Бертрана об определении центральной силы, под действием которой материальная точка совершает устойчивое движение по коническому сечению.

Ключевые слова: уравнения связи, уравнение Лагранжа, диссипативная функция, условия Гельмгольца, задача Бертрана.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда и г. Москва № 23-21-10065, https://rscf.ru/project/23-21-10065/.

Для цитирования: *Р. Г. Мухарлямов.* Построение уравнений динамики заданной структуры по уравнениям программных связей// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 3. С. 428–440. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-428-440

1. Введение

В классической механике обычно используются контактные связи, представленные уравнениями, связывающими координаты и скорости системы. При этом предполагается, что уравнения связей обязательно выполняются в начальный момент времени и в последующем движении. Соответствующие реакции связей представляют дополнительные силы, призванные обеспечить выполнение уравнений связей, и могут быть рассмотрены как управляющие воздействия. Если уравнения связей выполняются вдоль решений уравнений динамики при всех значениях времени, то их производные, используемые для определения выражений сил реакций, должны оставаться равными нулю. Обычно связи предполагаются идеальными и для вычисления сил реакций используются множители Лагранжа. При этом уравнения связей оказываются первыми интегралами уравнений динамики замкнутой системы.

В случае, когда начальные условия не соответствуют уравнениям связей вместе с их производными, дальнейшие отклонения могут возрастать с течением времени. Аналогичная проблема возникает при численном решении уравнений динамики замкнутой системы вследствие неизбежного отклонения от уравнений связей на каждом шаге численного интегрирования. Для ограничения отклонений, вызванных погрешностями задания начальных условий и численного решения уравнений динамики замкнутой системы, необходимо включение в правые части уравнений динамики дополнительных сил, относящихся к реакциям связей, что приводит к т. н. проблеме *стабилизации связей* [18].

Необходимым условием стабилизации связей является обеспечение должного поведения решений уравнений динамики по отношению к уравнениям связей при отклонении начальных условий от уравнений связей или их производных. Это возможно только тогда, когда силы реакций определяются так, чтобы уравнения связей составляли частные интегралы уравнений динамики замкнутой системы, и отклонения от уравнений связей не возрастают с течением времени. Частные интегралы системы дифференциальных уравнений, в отличие от первых интегралов, представляют такую зависимость между переменными, которая справедлива только при фиксированном значении постоянных интегрирования [3].

Так как уравнения связей соответствуют частным интегралам замкнутой системы уравнений динамики, то реакции связей должны быть определены так, чтобы возможные отклонения от уравнений связей также не возрастали с течением времени вследствие погрешности приближенного решения. Необходимым условием ограничения отклонений от уравнений связей является асимптотическая устойчивость множества траекторий, удовлетворяющих уравнениям связей [7, 11]. По существу, задача сводится к достраиванию уравнений динамики или построению уравнений динамики механической системы, решения которой обладают заданными свойствами [2]. Методы построения систем дифференциальных уравнений по известным частным интегралам изложены в [3, 4, 8].

В работе J. Baumgarte [18] для обеспечения устойчивости множества траекторий, удовлетворяющих уравнениям связей, было предложено использовать линейные комбинации уравнений связей с их производными, составляющие однородные дифференциальные уравнения относительно отклонений от уравнений связей и представляющие уравнения возмущений связей. Если уравнения возмущений связей имеют асимптотически устойчивое тривиальное решение, то могут быть использованы для определения множителей Лагранжа, соответствующих модифицированным реакциям связей.

Различные модификации метода J. Baumgarte сводились в основном к его применениям [1, 14, 21] и рекомендациям по выбору коэффициентов линейных комбинаций, обеспечивающих асимптотическую устойчивость тривиального решения уравнений возмущений связей [15–17]. На самом деле этого недостаточно для ограничения отклонений от уравнений связей при численном решении уравнений динамики замкнутой системы. Так, например, при равных корнях характеристического уравнения, соответствующего линейным уравнениям возмущений связей с постоянными коэффициентами, тривиальное решение может оказаться неустойчивым. Если изменения отклонений $y = f(x,t)$ от уравнения связи $f(x,t) = 0$ описываются линейной системой дифференциальных уравнений возмущений связей с постоянными коэффициентами

$$\frac{dy}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = -\omega^2 y - 2\mu v, \quad \mu > 0,$$

то при $\omega = \nu$ общее решение $y = (A_0 + A_1 t)e^{-\mu t}$ удовлетворяет условию $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$ и в зависимости от коэффициентов A_{k0}, A_{k1}, определяемых по начальным значениям, может иметь значительные скачки (рис. 1), приводящие к неустойчивости численного решения замкнутой системы уравнений динамики.

В [17] предлагается использовать метод J. Baumgarte для решения задачи стабилизации связи, представленной уравнением $f(x,t) = 0$, выполнение которой обеспечивается управляющим воздействием u, приложенным к системе управления

$$\frac{d^m x}{dt^m} = X\left(x, \frac{dx}{dt}, \cdots, \frac{d^{m-1}x}{dt^{m-1}}\right) + B(x,t)u = 0, \quad m > 2.$$

Для решения задачи стабилизации предлагается использовать линейное уравнение возмущений связи порядка m с постоянными коэффициентами, характеристическое уравнение которого имеет корень кратности m. Такой подход с ростом m может привести к более резкому отклонению решения уравнений динамики управляемой системы от уравнения связи.

Задача построения уравнений динамики с учетом стабилизации связей может быть рассмотрена как обратная задача динамики [2]. Это позволяет определить реакции связей по системе

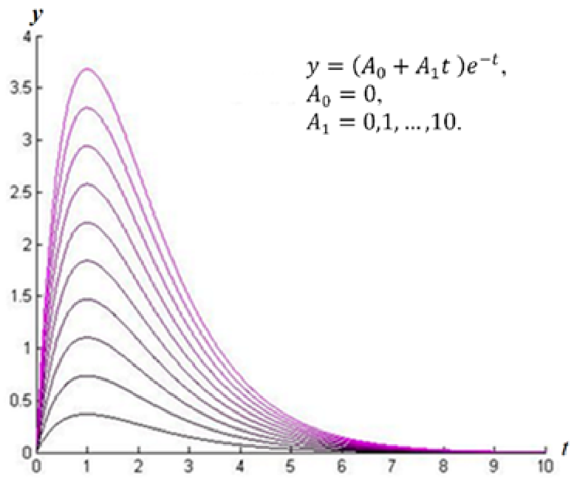


Рис. 1. Графики изменения величины отклонения от уравнения связи
Fig. 1. Graphs of changes of the deviation from the constraint equation

уравнений возмущений связей произвольного вида, имеющей асимптотически устойчивое тривиальное решение. В [6] был предложен метод непосредственного построения дифференциальных уравнений второго порядка, для которых уравнения дифференциальных связей составляют частные интегралы, и последующего приведения их к форме уравнений Лагранжа с диссипативными силами, основанного на использовании модифицированных условий Гельмгольца [22]. Было установлено, что использование линейной формы уравнений возмущений связей приводит к уравнениям Лагранжа с диссипативной функцией, представленной квадратичной формой относительно скоростей. Использование обобщенных условий Гельмгольца для приведения системы дифференциальных уравнений к форме уравнений Лагранжа со стабилизацией связей предъявляет дополнительные требования к выражению диссипативной функции.

В нелинейных системах управления актуальной представляется задача аналитического построения линейного регулятора. Вопрос об условиях использования линейных относительно скоростей диссипативных сил для стабилизации дифференциальных связей в случае нелинейных уравнений возмущений связей требует дополнительного исследования. Использование линейной системы уравнений возмущений связей с коэффициентами, зависящими от фазовых координат исследуемой системы, или нелинейной системы уравнений возмущений связей открывает большие перспективы влияния на параметры замкнутой системы и создания эффективных алгоритмов численного решения. Методы непосредственного построения систем дифференциальных уравнений и приведения их к форме уравнений Лагранжа и уравнений систем Гельмгольца оказались эффективными также для решения задач построения стохастических дифференциальных уравнений [24–26].

Уравнения связей, дополненные соответствующими уравнениями возмущений связей, составляют уравнения программных связей [9]. В [11] установлена возможность стабилизации связей модификацией динамических показателей системы.

2. Построение системы дифференциальных уравнений, допускающей заданные частные интегралы

Пусть вектор $\mathbf{q} = (q^1, \dots, q^n)$ определяет состояние механической системы с сосредоточенными массами и динамика системы описывается дифференциальными уравнениями

$$\tfrac{dq^i}{dt} = \dot q^i, \quad \frac{d\dot q^i}{dt} = Q^i(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t), \quad \dot{\mathbf{q}} = (\dot q^1, \dots, \dot q^n), \tag{2.1}$$

$$q^i(t_0) = q^i_0, \quad \dot q^i(t_0) = \dot q^i_0, \quad i = 1, \dots, n. \tag{2.2}$$

Связи, которым должны удовлетворять координаты и скорости механической системы, обычно предполагают контактное взаимодействие тел и описываются уравнениями

$$g^{\alpha}(\mathbf{q},t)=0,\quad \alpha=1,\ldots,a, \tag{2.3}$$

$$g_i^{\beta}(\mathbf{q},t)\dot q^i+g^{\beta}(\mathbf{q},t)=0,\quad \beta=\alpha+1,\ldots,m,\quad m\leqslant n. \tag{2.4}$$

Здесь и в дальнейшем по повторяющимся индексам предполагается суммирование. Заметим, что уравнения голономных связей (2.3) предполагают также выполнение уравнений дифференциальных связей

$$g_i^{\alpha}(\mathbf{q},t)\dot q^i+g_0^{\alpha}(\mathbf{q},t)=0,\quad g_i^{\alpha}=\frac{\partial g^{\alpha}}{\partial q^i},\quad g_0^{\alpha}=\frac{\partial g^{\alpha}}{\partial t}. \tag{2.5}$$

Поэтому равенства (2.4), (2.5) следует рассматривать совместно как систему m линейных алгебраических уравнений относительно n переменных $\dot q^i$:

$$g_i^{\mu}(\mathbf{q},t)\,\dot q^i+g_0^{\mu}(\mathbf{q},t)=0,\quad \mu=1,\ldots,m,\quad m\leqslant n. \tag{2.6}$$

Ставится задача построения множества систем дифференциальных уравнений второго порядка (2.1), (2.2) или

$$\frac{dq^i}{dt}=\dot q^i,\quad f^i(\ddot{\mathbf{q}},\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q},t)=0,\quad \ddot q^i=\frac{d\dot q^i}{dt}, \tag{2.7}$$

$$q^i(t_0)=q_0^i,\quad \dot q^i(t_0)=\dot q_0^i, \tag{2.8}$$

решения которых при соответствующих начальных условиях

$$g^{\alpha}(\mathbf{q}_0,t_0)=0,\quad g_i^{\mu}(\mathbf{q}_0,t_0)\,\dot q_0^i+g_0^{\mu}(\mathbf{q}_0,t_0)=0$$

допускали бы в качестве частных интегралов уравнения связей (2.3), (2.6). Для построения уравнений динамики со стабилизацией связей следует ввести уравнения программных связей [9].

Определение 2.1. Связи, заданные уравнениями

$$y^{\alpha}=g^{\alpha}(\mathbf{q},t), \tag{2.9}$$

$$\dot y^{\mu}=g_i^{\mu}(\mathbf{q},t)\,\dot q^i+g_0^{\mu}(\mathbf{q},t),\quad g_i^{\alpha}=\frac{\partial g^{\alpha}}{\partial q^i},\quad g_0^{\alpha}=\frac{\partial g^{\alpha}}{\partial t}, \tag{2.10}$$

будем называть *программными связями*, если величины y^{α}, $\dot y^{\mu}$ определяются решением системы дифференциальных уравнений возмущений связей

$$\frac{dy^{\alpha}}{dt}=\dot y^{\alpha},\quad \frac{d\dot y^{\mu}}{dt}=Y^{\mu}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q},t),\quad Y^{\mu}(\mathbf{0},\mathbf{0},\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q},t)=0, \tag{2.11}$$

$$\mathbf{y}=\left(y^1,\ldots,y^a\right),\quad \dot{\mathbf{y}}=\left(\dot y^1,\ldots,\dot y^m\right),\quad y_0^{\alpha}=g^{\alpha}(\mathbf{q}_0,t_0),\quad \dot y_0^{\mu}=g_i^{\mu}(\mathbf{q}_0,t_0)\,\dot q_0^i+g_0^{\mu}(\mathbf{q}_0,t_0), \tag{2.12}$$

рассматриваемых совместно с уравнениями системы (2.7).

Определение 2.2. Уравнения (2.11), (2.12) составляют *систему уравнений возмущений связей.*

Определение 2.3. Программные связи называются *устойчивыми программными связями*, если для любого ε существует такое δ, что при всех $y^{\alpha},\dot y^{\mu}$, удовлетворяющих неравенствам $\sup(\|\mathbf{y}_0\|,\|\dot{\mathbf{y}}_0\|)\leqslant\delta$, для любого $t\geqslant t_0$ будут выполняться неравенства $\sup(\|\mathbf{y}\|,\|\dot{\mathbf{y}}\|)\leqslant\varepsilon$.

Определение 2.4. Программные связи называются *асимптотически устойчивыми программными связями*, если они устойчивы и справедливы равенства

$$\lim_{t\to\infty}\mathbf{y}(t)=0,\quad \lim_{t\to\infty}\dot{\mathbf{y}}(t)=0.$$

Для построения системы дифференциальных уравнений (2.7), допускающей частные интегралы (2.3), (2.6), используются условия (2.11):

$$\frac{dy^{\alpha}}{dt}=\dot y^{\alpha},\quad g_i^{\mu}(\mathbf{q},t)\,\ddot q^i=Y^{\mu}(\mathbf{y},\dot{\mathbf{y}},\dot{\mathbf{q}},\mathbf{q},t)-\left(\frac{\partial g_i^{\mu}}{\partial q^s}\dot q^i\dot q^s+\frac{\partial g_i^{\mu}}{\partial t}\dot q^i+\frac{\partial g_0^{\mu}}{\partial q^i}\dot q^i+\frac{\partial g_0^{\mu}}{\partial t}\right),\quad i,s=1,\ldots,n. \tag{2.13}$$

Уравнения (2.13) представляют систему m линейных алгебраических уравнений относительно $n \geqslant m$ величин $\ddot{q}^l$. Если строки матрицы (g_i^μ) линейно независимы при всех значениях переменных $\mathbf{q}, t$, то общее решение системы (2.13) складывается из двух слагаемых [11]:

$$\ddot{q}^i = c_0 w_\tau^i + w_\nu^i,$$

где c_0 — произвольная величина, $w_\tau^i = \mathbf{e}^i \mathbf{g}^1 \ldots \mathbf{g}^m \mathbf{c}^{m+1} \ldots \mathbf{c}^{n-1}$ представляет скалярное произведение единичного вектора $\mathbf{e}^l$ с результатом векторного произведения $\mathbf{w}^\tau = \left[\mathbf{g}^1 \ldots \mathbf{g}^m \mathbf{c}^{m+1} \ldots \mathbf{c}^{n-1}\right]$ и вычисляется как определитель, строки которого заполнены координатами векторов $\mathbf{e}^i = \left(\delta_1^i, \ldots, \delta_n^i\right)$, $\mathbf{g}^\mu = \left(g_1^\mu(\mathbf{q}, t), \ldots, g_n^\mu(\mathbf{q}, t)\right)$ и произвольных векторов $\mathbf{c}^{m+1}(\mathbf{q}, t), \ldots, \mathbf{c}^{n-1}(\mathbf{q}, t)$ (см. [13]),

$$w_\nu^i = \delta^{ij} g_j^\kappa \omega_{\kappa\mu} \left(Y^\mu(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) - \left(\frac{\partial g_i^\mu}{\partial q^s} \dot{q}^i \dot{q}^s + \frac{\partial g_i^\mu}{\partial t} \dot{q}^i + \frac{\partial g_0^\mu}{\partial q^i} \dot{q}^i + \frac{\partial g_0^\mu}{\partial t} \right) \right),$$

$$\delta^{ij} = 0, \quad i \neq j, \quad \delta^{ii} = 1, \quad \omega^{\mu\kappa} = g_j^\mu \delta^{ji} g_i^\kappa, \quad \omega^{\kappa\mu} \omega_{\mu\sigma} = \delta_\sigma^\kappa,$$

$$\delta_\sigma^\kappa = 0, \quad \kappa \neq \sigma, \quad \delta_\sigma^\sigma = 1, \quad \kappa, \mu, \sigma = 1, \ldots, m, \quad i, j, s = 1, \ldots, n.$$

В итоге получается система дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \dfrac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i, \quad \dfrac{d\dot{q}^i}{dt} = Q^i(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) + k_\mu^i(\mathbf{q}, t) Y^\mu(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t), \\ Q^i = c_0 \{\mathbf{e}^i \mathbf{g}^1 \ldots \mathbf{g}^m \mathbf{c}^{m+1} \ldots \mathbf{c}^{n-1}\} - k_\mu^i \left(\dfrac{\partial g_l^\mu}{\partial q^s} \dot{q}^l \dot{q}^s + \dfrac{\partial g_l^\mu}{\partial t} \dot{q}^l + \dfrac{\partial g_0^\mu}{\partial q^l} \dot{q}^l + \dfrac{\partial g_0^\mu}{\partial t} \right), \\ k_\mu^i = \delta^{ij} g_j^\kappa \omega_{\kappa\mu}, \quad i, j, l, s = 1, \ldots, n, \end{cases} \tag{2.14}$$

соответствующая уравнениям программных связей (2.9), (2.10). Система (2.14) содержит произвольный множитель c_0, произвольные векторы $\mathbf{c}^{m+1}, \ldots, \mathbf{c}^{n-1}$ и функции $Y^\mu = Y^\mu(\mathbf{y}, \dot{\mathbf{y}}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t)$, удовлетворяющие условиям $Y^\mu(\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t) = 0$.

3. Устойчивость программных связей

Необходимым условием стабилизации связей является асимптотическая устойчивость программных связей, которая определяется поведением решения системы уравнений возмущений связей (2.11). Для суждения об устойчивости представим уравнения (2.11), (2.14), в сокращенном виде:

$$\frac{dz^\gamma}{dt} = Z^\gamma(\mathbf{z}, \mathbf{x}, t), \quad Z^\gamma(\mathbf{0}, \mathbf{x}, t) = 0, \tag{3.1}$$

$$\begin{aligned} &\frac{dx^I}{dt} = X^I(\mathbf{z}, \mathbf{x}, t), \\ &z^\gamma(t_0) = z_0^\gamma, \quad x^I(t_0) = x_0^l, \\ &\gamma = 1, \ldots, a+m, \quad I = 1, \ldots, 2n, \\ &\mathbf{z} = \left(z^1, \ldots, z^{a+m}\right), \quad z^\alpha = y^\alpha, \quad z^{a+\mu} = \dot{y}^\mu, \\ &\mathbf{x} = \left(x^1, \ldots, x^{2n}\right), \quad x^i = q^i, \quad x^{n+i} = \dot{q}^i. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Условия устойчивости тривиального решения $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ системы (3.1) устанавливаются методом функций Ляпунова [7, 11]. На основании теоремы об асимптотической устойчивости интегрального многообразия можно утверждать, что если для системы уравнений (3.1), (3.2) существует положительно определенная функция $V = V(\mathbf{z}, \mathbf{x}, t)$, которая допускает бесконечно малый высший предел, а ее производная

$$\dot{V}(\mathbf{z}, \mathbf{x}, t) = \frac{\partial V}{\partial z^\gamma} Z^\gamma(\mathbf{z}, \mathbf{x}, t) + \frac{\partial V}{\partial x^I} X^I(\mathbf{z}, \mathbf{x}, t) + \frac{\partial V}{\partial t},$$

составленная в силу уравнений (3.1), (3.2), является отрицательно определенной, то тривиальное решение $\mathbf{z} = \mathbf{0}$ системы (3.1) устойчиво асимптотически. Так, например, функции Ляпунова V

в виде положительно определенной квадратичной формы с постоянными коэффициентами $2V = c_{\gamma\eta} z^\gamma z^\eta$, $\gamma, \eta = 1, \ldots, a+m$, и линейным уравнениям возмущений связей

$$\frac{dz^\gamma}{dt} = p^\gamma_\eta \left(\mathbf{x}, t\right) z^\eta \tag{3.3}$$

соответствует производная функции Ляпунова

$$\dot{V} = p_{\gamma\eta}(\mathbf{x}, t)\, z^\gamma z^\eta, p_{\gamma\eta} = c_{\gamma\rho} p^\rho_\eta, \quad \gamma, \rho, \eta = 1, \ldots, a+m \tag{3.4}$$

Если квадратичная форма (3.4) является отрицательно определенной, то тривиальное решение системы (3.1) устойчиво асимптотически, что может быть достигнуто выбором коэффициентов уравнений системы (3.3).

4. Условия приводимости системы уравнений с программными связями к форме уравнений Лагранжа

Произвольные функции, содержащиеся в правых частях уравнений (2.14), можно использовать также для приведения системы к требуемой структуре. Задача представления системы дифференциальных уравнений второго порядка в форме уравнений Лагранжа со стабилизацией связей с использованием условий Гельмгольца [23] исследована в [10]. В [6] определены условия приведения системы (2.7) к форме уравнений Лагранжа с предварительным решением уравнений дифференциальных связей (2.6) относительно обобщенных скоростей и представлением уравнения возмущений связей линейной системой. Решение задачи получено с использованием модифицированных условий Гельмгольца [22]:

$$\frac{\partial f^i}{\partial \ddot{q}^k} = \frac{\partial f^k}{\partial \ddot{q}^i}, \tag{4.1}$$

$$\left(\frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^k} + \frac{\partial f^k}{\partial \dot{q}^i}\right) = 2\frac{d}{dt}\frac{\partial f^i}{\partial \ddot{q}^k} + 2s^i_k \left(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t\right), \tag{4.2}$$

$$\frac{\partial f^i}{\partial q^k} - \frac{\partial f^k}{\partial q^i} - \frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{\partial f^i}{\partial \dot{q}^k} - \frac{\partial f^k}{\partial \dot{q}^i}\right) = r^i_k \left(\dot{\mathbf{q}}, \mathbf{q}, t\right), \tag{4.3}$$

$$\frac{\partial^2 f^i}{\partial \ddot{q}^j \partial \ddot{q}^k} = 0, \tag{4.4}$$

$$\frac{\partial s^i_j}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial s^i_k}{\partial \dot{q}^j}, \tag{4.5}$$

$$\frac{\partial r^i_j}{\partial \dot{q}^k} = \frac{\partial s^i_k}{\partial q^j} - \frac{\partial s^j_k}{\partial q^i}, \tag{4.6}$$

$$\frac{\partial r^i_j}{\partial q^k} + \frac{\partial r^j_k}{\partial q^i} + \frac{\partial r^k_i}{\partial q^j} = 0, \tag{4.7}$$

$$s^i_j = \frac{\partial^2 D}{\partial \dot{q}^i \partial \dot{q}^j}, \quad r^i_j = \frac{\partial^2 D}{\partial \dot{q}^i \partial q^j} - \frac{\partial^2 D}{\partial \dot{q}^j \partial q^i}, \quad i, j, k = 1, \ldots, n. \tag{4.8}$$

Произвольные функции, содержащиеся в правых частях уравнений системы общего вида (2.14), позволяют выделить уравнения, которые могут быть представлены в форме уравнений Лагранжа с лагранжианом L и диссипативной функцией D. Учитывая выражения дифференциальных связей (2.10) и структуру уравнений системы (2.14), представим правые части уравнений возмущений связей (2.11) многочленами не выше второй степени относительно $\dot{y}^\mu$:

$$Y^\mu = -a^\mu_{0\alpha}\left(\mathbf{q}, t\right) y^\alpha - a^\mu_{1\kappa}\left(\mathbf{q}, t\right) \dot{y}^\kappa - a^\mu_{2\kappa\sigma}\left(\mathbf{q}, t\right) \dot{y}^\kappa \dot{y}^\sigma, \tag{4.9}$$

$$a^\mu_{2\kappa\sigma} = a^\mu_{2\sigma\kappa}, \quad \mu, \kappa, \sigma = 1, \ldots, m.$$

В результате система дифференциальных уравнений (2.7) записывается в следующем виде:

$$\frac{dq^i}{dt} = \dot{q}^i, \quad f^i \equiv \ddot{q}^i + \frac{1}{2} b^i_{jl}\left(\mathbf{q}, t\right) \dot{q}^j \dot{q}^l + b^i_j(\mathbf{q}, t)\, \dot{q}^j + b^i_0\left(\mathbf{q}, t\right) = 0, \tag{4.10}$$

$$b^i_{jl} = b^i_{lj} = k^i_\mu h^\mu_{jl},$$

$$
\begin{gathered}
b^i_j = k^i_\mu h^\mu_j, \\
b^i_0 = k^i_\mu h^\mu_0 - c_0\{\mathbf{e}^l, \mathbf{g}^1, \dots, \mathbf{g}^m, \mathbf{c}^{m+1}, \dots, \mathbf{c}^{n-1}\}, \\
h^\mu_{jl} = h^\mu_{lj} = \frac{\partial g^\mu_j}{\partial q^l} + \frac{\partial g^\mu_l}{\partial q^j} + a^\mu_{2\kappa\sigma}\left(g^\kappa_j g^\sigma_l + g^\kappa_l g^\sigma_j\right), \\
h^\mu_j = \frac{\partial g^\mu_j}{\partial t} + \frac{\partial g^\mu_0}{\partial q^j} + a^\mu_{1\kappa} g^\kappa_j + a^\mu_{2\kappa\sigma}\left(g^\kappa_j g^\sigma_0 + g^\sigma_j g^\kappa_0\right), \\
h^\mu_0 = \frac{\partial g^\mu_0}{\partial t} + a^\mu_{0\alpha} g^\alpha + a^\mu_{1\kappa} g^\kappa_0 + a^\mu_{2\kappa\sigma} g^\kappa_0 g^\sigma_0, \\
i, j, k, l = 1, \dots, n, \quad \kappa, \mu, \sigma = 1, \dots, m.
\end{gathered}
$$

Очевидно, что уравнения (4.10) удовлетворяют условиям (4.1), (4.4):

$$
\frac{\partial f^i}{\partial \ddot{q}^k} = \frac{\partial f^k}{\partial \ddot{q}^i} = \delta^{ik}, \quad \frac{\partial^2 f^i}{\partial \ddot{q}^j \partial \ddot{q}^k} = 0.
$$

Условия (4.8) означают, что должны выполняться равенства

$$
s^i_j = s^j_i, \quad r^i_j = -r^j_i, \quad i, j = 1, \dots, n. \tag{4.11}
$$

Остается проверить выполнение условий (4.2), (4.3), (4.5)–(4.7). Для проверки соответствия уравнений (4.10) условиям (4.2) достаточно определить выражения левых частей, что приводит к равенству

$$
2s^i_k = \left(b^i_{kj} + b^k_{ij}\right)\dot{q}^j + \left(b^i_k + b^k_i\right).
$$

Далее, из условия (4.2) следуют равенства

$$
b^k_{ij} = b^j_{ik} = b^j_{ki} = b^i_{kj}, \quad s^i_k = b^i_{kj}\dot{q}^j + \frac{1}{2}\left(b^i_k + b^k_i\right). \tag{4.12}
$$

Условие (4.3) приводит к выражению

$$
r^i_j = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b^i_{sp}}{\partial q^j} - \frac{\partial b^j_{sp}}{\partial q^i}\right)\dot{q}^p\dot{q}^s + \left(\frac{\partial b^i_s}{\partial q^j} - \frac{\partial b^j_s}{\partial q^i}\right)\dot{q}^s + \frac{\partial b^i_0}{\partial q^j} - \frac{\partial b^j_0}{\partial q^i} - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b^i_j}{\partial q^s} - \frac{\partial b^j_i}{\partial q^s}\right)\dot{q}^s - \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b^i_j}{\partial t} - \frac{\partial b^j_i}{\partial t}\right),
$$

из которого определяется левая часть равенства (4.6):

$$
\frac{\partial r^i_j}{\partial \dot{q}^k} = \left(\frac{\partial b^i_{kp}}{\partial q^j} - \frac{\partial b^j_{kp}}{\partial q^i}\right)\dot{q}^p + \left(\frac{\partial b^i_k}{\partial q^j} - \frac{\partial b^j_k}{\partial q^i} + \frac{\partial b^j_i}{\partial q^k} - \frac{\partial b^i_j}{\partial q^k}\right). \tag{4.13}
$$

Значение правой части равенства (4.6) получается с учетом выражения (4.12):

$$
\frac{\partial s^i_k}{\partial q^j} - \frac{\partial s^j_k}{\partial q^i} = \left(\frac{\partial b^i_{kp}}{\partial q^j} - \frac{\partial b^j_{kp}}{\partial q^i}\right)\dot{q}^p + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial b^i_k}{\partial q^j} + \frac{\partial b^k_i}{\partial q^j} - \frac{\partial b^j_k}{\partial q^i} - \frac{\partial b^k_j}{\partial q^i}\right). \tag{4.14}
$$

Сравнение правых частей выражений (4.12), (4.13) приводит к заключению о выполнении условия (4.6) при выполнении равенства

$$
\frac{\partial}{\partial q^k}\left(b^i_j - b^j_i\right) + \frac{\partial}{\partial q^i}\left(b^j_k - b^k_j\right) + \frac{\partial}{\partial q^i}\left(b^k_j - b^j_k\right) = 0. \tag{4.15}
$$

Легко видеть, что

$$
\frac{\partial r^i_j}{\partial q^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 b^i_{ps}}{\partial q^j \partial q^k} - \frac{\partial^2 b^j_{ps}}{\partial q^k \partial q^i}\right)\dot{q}^p\dot{q}^s + \left(\frac{\partial^2 b^i_p}{\partial q^j \partial q^k} - \frac{\partial^2 b^j_p}{\partial q^k \partial q^i}\right)\dot{q}^p + \left(\frac{\partial^2 b^i_0}{\partial q^j \partial q^k} - \frac{\partial^2 b^j_0}{\partial q^k \partial q^i}\right),
$$

и условие (4.7) также выполняется.

5. О задаче Бертрана

Задача М. Ж. Бертрана состоит в определении силы, зависящей от положения точки при её движении по коническому сечению [19]. Постановка задачи относится к обратным задачам динамики и начинается от работы И. Ньютона [12] об определении сил, под действием которых небесные тела совершают движения в соответствии с законами Кеплера. В работах М. Ж. Дарбу [20] и В. Г. Имшенецкого [5] было установлено, что действующая на точку сила является центральной и представляет силу тяготения. Необходимым условием численной реализации решения задачи Бертрана является асимптотическая устойчивость траектории. Можно показать, что используя уравнения программных связей, при постоянной секторной скорости асимптотическую устойчивость траектории точки можно обеспечить центральной силой.

Полагая, что начало координат прямоугольной системы совпадает с одним из фокусов конического сечения, а ось абсцисс направлена по оси симметрии, запишем уравнение траектории точки

$$r - ex - p = 0, \quad r^2 = x^2 + y^2. \tag{5.1}$$

Здесь e — эксцентриситет конического сечения (фокальный параметр). Задача состоит в определении правых частей системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = \dot{x}, \quad \frac{d\dot{x}}{dt} = X\left(x, y, \dot{x}, \dot{y}\right), \quad \frac{dy}{dt} = \dot{y}, \quad \frac{d\dot{y}}{dt} = Y\left(x, y, \dot{x}, \dot{y}\right), \tag{5.2}$$

решение которой при начальных условиях

$$x\left(t_0\right) = x_0, \quad y\left(t_0\right) = y_0, \quad \dot{x}\left(t_0\right) = \dot{x}_0, \quad \dot{y}\left(t_0\right) = \dot{y}_0, \tag{5.3}$$

соответствующих равенствам

$$r_0 - ex_0 - p = 0, \quad \left(x_0 - er_0\right)\dot{x}_0 + y_0\dot{y}_0 = 0, \tag{5.4}$$

описывает движение точки по кривой (5.1) с секторной скоростью

$$x\dot{y} - y\dot{x} - c_0 = 0, \quad c_0 = x_0\dot{y}_0 - y_0\dot{x}_0. \tag{5.5}$$

Введем уравнения программных связей

$$r - ex - p = \alpha, \quad x\dot{y} - y\dot{x} - c = \dot{\beta}, \tag{5.6}$$

где отклонения от (5.4), (5.5) удовлетворяют уравнениям возмущений связей:

$$\begin{aligned} &\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}, \\ &\frac{d\dot{\alpha}}{dt} = A\left(\alpha, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, x, y, \dot{x}, \dot{y}\right), \quad \frac{d\dot{\beta}}{dt} = B\left(\alpha, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, x, y, \dot{x}, \dot{y}\right), \\ &A\left(0,0,0,x,y,\dot{x},\dot{y}\right) = 0, \quad B\left(0,0,0,x,y,\dot{x},\dot{y}\right) = 0. \end{aligned} \tag{5.7}$$

Из равенств (5.6) следуют кинематические соотношения, учитывающие отклонения начальных условий (5.3) от значений, соответствующих равенствам (5.4), (5.5):

$$\dot{r} - e\dot{x} = \dot{\alpha}, \quad x\dot{y} - y\dot{x} - c_0 = \dot{\beta}. \tag{5.8}$$

Дифференцирование выражений (5.8) с учетом равенств (5.7) приводит к системе дифференциальных уравнений второго порядка

$$\ddot{r} - e\ddot{x} = A, \quad x\ddot{y} - y\ddot{x} = B, \quad \ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt}. \tag{5.9}$$

Учитывая равенства (5.6) и выражения

$$r\dot{r} = x\dot{x} + y\dot{y}, \quad r\ddot{r} + \dot{r}^2 = x\ddot{x} + y\ddot{y} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2,$$

представим систему уравнений (5.9) в виде, разрешенном относительно старших производных:

$$\ddot{x} = \frac{x}{p+\alpha}\left(A - \frac{c^2}{r^3}\right) - \frac{y}{(p+\alpha)\,r}B, \quad \ddot{y} = \frac{y}{p+\alpha}\left(A - \frac{c^2}{r^3}\right) + \frac{(x-er)}{(p+\alpha)\,r}B, \quad c = c_0 + \dot{\beta}. \tag{5.10}$$

При $\alpha = \dot{\alpha} = 0$, $\dot{\beta} = \text{const}$ из (5.10) следуют известные уравнения движения точки под действием центральной силы:

$$\ddot{x} = -\frac{c^2 x}{pr^3}, \quad \ddot{y} = -\frac{c^2 y}{pr^3}.$$

Пусть $B \equiv 0$ и величины отклонений α, $\dot{\alpha}$ от траектории малы. Представим функцию A и величину $(p+\alpha)^{-1}$ разложениями в степенные ряды

$$A = -a_0\alpha - a_1\dot{\alpha} + A^{(2)}, \quad a_0 = \text{const}, \quad a_1 = \text{const}, \quad \frac{1}{p+\alpha} = \frac{1}{p}\left(1 - \frac{\alpha}{p} + P^{(2)}\right)$$

с ограниченными остаточными членами $A^{(2)}, P^{(2)}$: $\left|A^{(2)}\right| < L, \left|P^{(2)}\right| < M$, и перепишем уравнения системы (5.10):

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{x}{p} Q\left(\alpha, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, x, y, \dot{x}, \dot{y}\right), \quad \ddot{y} = -\dfrac{y}{p} Q\left(\alpha, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, x, y, \dot{x}, \dot{y}\right), \\ Q\left(\alpha, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, x, y, \dot{x}, \dot{y}\right) = \dfrac{c^2}{r^3}\left(1 - \dfrac{\alpha}{p}\right) - a_0\alpha - a_1\dot{\alpha} + Q^{(2)}, \\ Q^{(2)} = \dfrac{c^2}{r^3} P^{(2)} - A^{(2)} - \left(\dfrac{\alpha}{p} + P^{(2)}\right) A. \end{cases} \tag{5.11}$$

Если остаточный член $Q^{(2)}$ в разложении функции $Q\left(\alpha, \dot{\alpha}, \dot{\beta}, x, y, \dot{x}, \dot{y}\right)$ по степеням $\alpha, \dot{\alpha}$ ограничен, то асимптотическая устойчивость тривиального решения $\alpha = 0$, $\dot{\alpha} = 0$ уравнений возмущений связей (5.7) обеспечивается соответствующими ограничениями $a_0 > 0$, $a_1 > 0$ величин коэффициентов уравнений первого приближения

$$\frac{d\alpha}{dt} = \dot{\alpha}, \quad \frac{d\dot{\alpha}}{dt} = -a_0\alpha - a_1\dot{\alpha}.$$

Поэтому, полагая $Q^{(2)} = 0$, с учетом равенств

$$\alpha = r - ex - p, \quad r\dot{\alpha} = (x - er)\,\dot{x} + y\dot{y}$$

можно ограничиться уравнениями движения точки, составленных с учетом линейных уравнений возмущений связей. В этом случае система уравнений (5.11) записывается в следующем виде:

$$\begin{aligned} &f^x \equiv\ p\ddot{x} + xR\,(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = 0, \\ &f^y \equiv\ p\ddot{y} + yR\,(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = 0, \\ &R = R_0 + a_1\left(\left(\frac{x}{r} - e\right)\dot{x} + \left(\frac{y}{r}\right)\dot{y}\right), \quad R_0 = \frac{c^2}{r^3} + \left(a_0 - \frac{c^2}{pr^3}\right)(r - ex - p)\,. \end{aligned} \tag{5.12}$$

Полагая $q^1 = x$, $q^2 = y$, нетрудно проверить соответствие уравнений (5.12) модифицированным условиям Гельмгольца (2.4), (2.10). Условия (4.2), (4.3) приводят к следующим выражениям:

$$\begin{aligned} &s_x^x = a_1 x\left(\frac{x}{r} - e\right), \quad s_y^y = a_1 y\left(\frac{y}{r}\right), \\ &s_y^x = a_1 y\left(\frac{x}{r} - \frac{1}{2}e\right), \\ &r_x^x = r_y^y = 0, \quad r_y^x = x\frac{\partial R_0}{\partial y} - y\frac{\partial R_0}{\partial x} + a_1\frac{1}{r}\left(-y\dot{x} + x\dot{y}\right) - \frac{1}{2}a_1 e\dot{y}. \end{aligned}$$

Вычислив значения производных функции $R_0 = R_0\,(x, y)\,$, легко убедиться в выполнении равенства

$$x\frac{\partial R_0}{\partial y} - y\frac{\partial R_0}{\partial x} = -a_0 e y.$$

Условиям (4.6) соответствуют равенства:

$$\frac{\partial r_x^x}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial r_x^x}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial r_y^y}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial r_y^y}{\partial \dot{y}} = 0,$$

$$\frac{\partial r_y^x}{\partial \dot{x}} = \frac{\partial s_x^x}{\partial y} - \frac{\partial s_y^x}{\partial x} = -a_1\frac{y}{r},$$

$$\frac{\partial r_y^x}{\partial \dot{y}} = \frac{\partial s_y^x}{\partial y} - \frac{\partial s_y^y}{\partial x} = a_1 \left(\frac{x}{r} - \frac{1}{2} e \right).$$

Из равенств

$$r_x^x = r_y^y = 0, \quad r_y^x = -r_x^y$$

следует выполнение условий (4.7). С учетом проведенных вычислений из условий (4.8) следует выражение функции

$$2D = a_1 x \left(\frac{x}{r} - e \right) \dot{x}^2 + 2a_1 y \left(\frac{x}{r} - \frac{1}{2} e \right) \dot{x}\dot{y} + a_1 y \left(\frac{y}{r} \right) \dot{y}^2 + h\,(x, y)\,,$$

определяемой с точностью до произвольной функции $h\,(x, y)\,.$

6. Заключение

Введение уравнений программных связей позволило решить задачу непосредственного построения множества систем дифференциальных уравнений второго порядка, допускающих заданные частные интегралы, и выделить системы, решения которых обладают заданными свойствами. Определены условия асимптотической устойчивости интегрального многообразия, заданного уравнениями связей. Произвольные функции, содержащиеся в дифференциальных уравнениях, используются для приведения уравнений системы к форме уравнений Лагранжа. Предложено решение задачи определения центральной силы, обеспечивающей устойчивость движения материальной точки по коническому сечению. Установлена возможность представления уравнений движения точки в форме уравнений Лагранжа в соответствии с модифицированными условиями Гельмгольца.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Витенбург Й.* Динамика систем твердых тел. — М.: Мир, 1980.
2. *Галиуллин А. С.* Методы решения обратных задач динамики. — М.: Наука, 1986.
3. *Еругин Н. П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую// Прикл. мат. мех. — 1952. — *21*, № 6. — С. 659–670.
4. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. — Минск: Наука и техника, 1979.
5. *Имшенецкий В. Г.* Определение силы, движущей по коническому сечению материальную точку, в функции ее координат// Сообщ. Харьков. мат. об-ва. — 1879. — № 1. — С. 5–15.
6. *Каспирович И. Е., Мухарлямов Р. Г.* О методах построения уравнений динамики с учетом стабилизации связей// Изв. РАН. Мех. тв. тела. — 2019. — № 3. — С. 124–135.
7. *Мухарлямов Р. Г.* О построении множества систем дифференциальных уравнений устойчивого движения по интегральному многообразию// Дифф. уравн. — 1969. — *5*, № 4. — С. 688–699.
8. *Мухарлямов Р. Г.* О построении дифференциальных уравнений оптимального движения по заданному многообразию// Дифф. уравн. — 1971. — *7*, № 10. — С. 1825–1834.
9. *Мухарлямов Р. Г.* Управление программным движением адаптивной оптической системы// Вестн. РУДН. Сер. Прикладн. мат. и инф. — 1994. — № 1. — С. 22–40.
10. *Мухарлямов Р. Г.* Приведение к заданной структуре уравнений динамики систем со связями// Изв. РАН. Прикл. мат. мех. — 2007. — *71*, № 3. — С. 401–410.
11. *Мухарлямов Р. Г.* Моделирование процессов управления, устойчивость и стабилизация систем с программными связями// Изв. РАН. Теор. и сист. управл. — 2015. — № 1. — С. 15–28.
12. *Ньютон И.* Математические начала натуральной философии. — М.: Наука, 1989.
13. *Розенфельд Б. А.* Многомерные пространства. — М.: Наука, 1966.
14. *Amirouche F.* Fundamentals of Multibody Dynamics: Theory and Applications. — Boston: Birkhäuser, 2006.
15. *Ascher U.* Stabilization of invariant of discretized differential systems// Numer. Algorithms.— 1997. — *14*, № 1. — С. 1–24.
16. *Ascher U. M., Chin H., Petzold L. R., Reich S.* Stabilization of constrained mechanical systems with DAEs and invariant manifolds// Mech. Struct. Machines. — 1995. — *23*, № 2. — С. 135–158.
17. *Ascher U. M., Chin H., Reich S.* Stabilization of DAEs and invariant manifolds// Numer. Math. — 1994. — *67*. — С. 131–149.
18. *Baumgarte J.* Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems// Comput. Methods Appl. Mech. Engrg. — 1972. — *1*, № 1. — С. 1–16. — Doi: 10.1016/0045-7825(72)90018-7.

19. *Bertrand M. G.* Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe// Comp. Rend. — 1873.— *77*, № 16. — С. 849–853.
20. *Darboux M. G.* Recherche de la loi que dois suivre une force centrale pour que la trajectoire quellle determine soit toujour une conique// Comp. Rend. — 1877. — *76*, № 16. — С. 760–762.
21. *Gonzales F., Kovecses J.* Use of penalty formulation in dynamic simulation and analysis of redundantly constrained multibody systems// Mult. Sys. Dyn. — 2012. — *29*. — С. 57–76.
22. *Kielau G., Maisser P.* A generalization of the Helmholtz conditions for the existence of a first-order Lagrangian// Z. Angew. Math. Mech. — 2006. — *86*. — С. 722–735.
23. *Santilli R. M.* Foundations of Theoretical Mechanics I. The Inverse Problem in Newtonian Mechanics. — New York, etc.: Springer, 1978.
24. *Tleubergenov M. I., Ibraeva G. T.* On the closure of stochastic differential equations of motion// Eurasian Math. J. — 2021. — *12*, № 2. — С. 82–89.
25. *Tleubergenov M. I., Vassilina G. K., Abdrakhmanova A. A.* Representing a second-order Ito equation as an equation with a given force structure// Bull. Karaganda Univ. Math. Ser. — 2023. — № 4. — С. 119–129.
26. *Tleubergenov M. I., Vassilina G. K., Azhymbaev D. T.* Construction of the differential equations system of the program motion in Lagrangian variables in the presence of random perturbations// Bull. Karaganda Univ. Math. Ser. — 2022. — № 1. — С. 118–126.

Р. Г. Мухарлямов
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: robgar@mail.ru

UDC 519.6
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-428-440
EDN: PZWBRR

Construction of equations of dynamics of a given structure based on equations of program constraints

R. G. Mukharlyamov

RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. We consider the problem of constructing a system of differential equations from a given set of constraint equations and reducing them to the form of Lagrange equations with dissipative forces that ensure stabilization of the constraints. We determine the dissipative function from the equations of constraint disturbances. We use modified Helmholtz conditions to represent differential equations in the form of Lagrange equations. We give the solution of the Bertrand problem of determining the central force under the action of which a material point performs stable motion along a conic section.

Keywords: constraint equations, Lagrange equation, dissipative function, Helmholtz conditions, Bertrand problem.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation and the city of Moscow No. 23-21-10065, https://rscf.ru/project/23-21-10065/.

For citation: R. G. Mukharlyamov, "Construction of equations of dynamics of a given structure based on equations of program constraints," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 3, 428–440. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-428-440

REFERENCES

1. Y. Vitenburg, *Dinamika sistem tverdykh tel* [Dinamika sistem tverdykh tel], Mir, M., 1980 (in Russian).
2. A. S. Galiullin, *Metody resheniya obratnykh zadach dinamiki* [Metody resheniya obratnykh zadach dinamiki], Nauka, M., 1986 (in Russian).
3. N. P. Erugin, "Postroenie vsego mnozhestva sistem differentsial'nykh uravneniy, imeyushchikh zadannuyu integral'nuyu krivuyu" [Construction of the entire set of systems of differential equations having a given integral curve], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1952, **21**, No. 6, 659–670 (in Russian).
4. N. P. Erugin, *Kniga dlya chteniya po obshchemu kursu differentsial'nykh uravneniy* [Reading book for the general course of differential equations], Nauka i Tekhnika, Minsk, 1979 (in Russian).
5. V. G. Imshenetskiy, "Opredelenie sily, dvizhushchey po konicheskomu secheniyu material'nuyu tochku, v funktsii ee koordinat" [Determination of the force moving a material point along a conic section as a function of its coordinates], *Soobshch. Khar'kov. mat. ob-va* [Messages Kharkov Math. Soc.], 1879, No. 1, 5–15 (in Russian).
6. I. E. Kaspirovich and R. G. Mukharlyamov, "O metodakh postroeniya uravneniy dinamiki s uchetom stabilizatsii svyazey" [On methods of constructing dynamic equations taking into account the stabilization of constraints], *Izv. RAN. Mekh. tv. tela* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Solid Mech.], 2019, No. 3, 124–135 (in Russian).
7. R. G. Mukharlyamov, "O postroenii mnozhestva sistem differentsial'nykh uravneniy ustoychivogo dvizheniya po integral'nomu mnogoobraziyu" [On the construction of a set of systems of differential equations of stable motion on an integral manifold], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1969, **5**, No. 4, 688–699 (in Russian).
8. R. G. Mukharlyamov, "O postroenii differentsial'nykh uravneniy optimal'nogo dvizheniya po zadannomu mnogoobraziyu" [On the construction of differential equations of optimal motion along a given manifold], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1971, **7**, No. 10, 1825–1834 (in Russian).
9. R. G. Mukharlyamov, "Upravlenie programmnym dvizheniem adaptivnoy opticheskoy sistemy" [Programmed motion control of adaptive optical system], *Vestn. RUDN. Ser. Prikladn. mat. i inf.* [Bull. PFUR. Ser. Appl. Math. Inf.], 1994, No. 1, 22–40 (in Russian).
10. R. G. Mukharlyamov, "Privedenie k zadannoy strukture uravneniy dinamiki sistem so svyazyami" [Reduction to a given structure of the equations of dynamics of systems with constraints], *Izv. RAN. Prikl. mat. mekh.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Appl. Math. Mech.], 2007, **71**, No. 3, 401–410 (in Russian).
11. R. G. Mukharlyamov, "Modelirovanie protsessov upravleniya, ustoychivost' i stabilizatsiya sistem s programmnymi svyazyami" [Modeling of control processes, stability and stabilization of systems with program constraints], *Izv. RAN. Teor. i sist. upravl.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Theor. Control Sys.], 2015, No. 1, 15–28 (in Russian).
12. I. Newton, *Matematicheskie nachala natural'noy filosofii* [Philosophiae Naturalis Principia Mathematica], Nauka, Moscow, 1989 (Russian translation).
13. B. A. Rosenfeld, *Mnogomernye prostranstva* [Multidimensional Spaces], Nauka, Moscow, 1966 (Russian translation).
14. F. Amirouche, *Fundamentals of Multibody Dynamics: Theory and Applications*, Birkhäuser, Boston, 2006.
15. U. Ascher, "Stabilization of invariant of discretized differential systems," *Numer. Algorithms*, 1997, **14**, No. 1, 1–24.
16. U. M. Ascher, H. Chin, L. R. Petzold, and S. Reich, "Stabilization of constrained mechanical systems with DAEs and invariant manifolds," *Mech. Struct. Machines*, 1995, **23**, No. 2, 135–158.
17. U. M. Ascher, H. Chin, and S. Reich, "Stabilization of DAEs and invariant manifolds," *Numer. Math.*, 1994, **67**, 131–149.
18. J. Baumgarte, "Stabilization of constraints and integrals of motion in dynamical systems," *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1972, **1**, No. 1, 1–16. — Doi: 10.1016/0045-7825(72)90018-7.
19. M. G. Bertrand, "Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe," *Comp. Rend.*, 1873, **77**, No. 16, 849–853.
20. M. G. Darboux, "Recherche de la loi que dois suivre une force centrale pour que la trajectoire quellle determine soit toujour une conique," *Comp. Rend.*, 1877, **76**, No. 16, 760–762.
21. F. Gonzales and J. Kovecses, "Use of penalty formulation in dynamic simulation and analysis of redundantly constrained multibody systems," *Mult. Sys. Dyn.*, 2012, **29**, 57–76.
22. G. Kielau and P. Maisser, "A generalization of the Helmholtz conditions for the existence of a first-order Lagrangian," *Z. Angew. Math. Mech.*, 2006, **86**, 722–735.
23. R. M. Santilli, *Foundations of Theoretical Mechanics I. The Inverse Problem in Newtonian Mechanics*, Springer, New York, etc., 1978.
24. M. I. Tleubergenov and G. T. Ibraeva, "On the closure of stochastic differential equations of motion," *Eurasian Math. J.*, 2021, **12**, No. 2, 82–89.

25. M. I. Tleubergenov, G. K. Vassilina, and A. A. Abdrakhmanova, “Representing a second-order Ito equation as an equation with a given force structure,” *Bull. Karaganda Univ. Math. Ser.*, 2023, No. 4, 119–129.
26. M. I. Tleubergenov, G. K. Vassilina, and D. T. Azhymbaev, “Construction of the differential equations system of the program motion in Lagrangian variables in the presence of random perturbations,” *Bull. Karaganda Univ. Math. Ser.*, 2022, No. 1, 118–126.

R. G. Mukharlyamov
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: robgar@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 3 (2024). С. 441–450
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.957
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-441-450
EDN: NGIESD

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ МНОГОФАЗНОЙ ЗАДАЧИ СТЕФАНА НА ПОЛУПРЯМОЙ

Е. Ю. Панов

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. В статье исследуются автомодельные решения многофазной задачи Стефана для уравнения теплопроводности на полупрямой $x > 0$ с постоянными начальными данными и граничными условиями Дирихле или Неймана. В случае граничного условия Дирихле мы доказываем, что нелинейная алгебраическая система для определения свободных границ является градиентной, а соответствующий потенциал является явно записанной строго выпуклой и коэрцитивной функцией. Следовательно, существует единственная точка минимума потенциала, координаты этой точки определяют свободные границы и дают искомое решение. В случае граничного условия Неймана мы показываем, что задача может иметь решения с различным числом (типом) фазовых переходов. Для каждого фиксированного типа n система для определения свободных границ снова является градиентной, а соответствующий потенциал оказывается строго выпуклым и коэрцитивным, но в некоторой более широкой нефизической области. В частности, решение типа n единственно и может существовать только в том случае, если точка минимума потенциала принадлежит физической области. Мы приводим явный критерий существования решений любого типа n. Из-за довольно сложной структуры множества решений ни существование, ни единственность решения задачи Стефана—Неймана не гарантируются.

Ключевые слова: задача Стефана, уравнение теплопроводности, свободная граница.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *Е. Ю. Панов.* Автомодельные решения многофазной задачи Стефана на полупрямой// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 3. С. 441–450. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-441-450

1. Задача Стефана с граничным условием Дирихле

В четверти плоскости $\Pi_+ = \{ \ (t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t,x > 0 \ \}$ рассматривается многофазная задача Стефана для уравнения теплопроводности

$$u_t = a_i^2 u_{xx}, \quad u_i < u < u_{i+1}, \ i = 0, \dots, m, \tag{1.1}$$

где $u_0 \leqslant u_1 < \dots < u_m < u_{m+1} = u_D$, u_i, $i = 1, \dots, m$ — температуры фазовых переходов, $a_i > 0$, $i = 0, \dots, m$ — константы диффузии. Будем изучать непрерывные кусочно-гладкие решения $u = u(t,x)$ в Π_+, удовлетворяющие (1.1) в классическом смысле в областях $u_i < u(t,x) < u_{i+1}$, $i = 0, \dots, m$, заполненных фазами. На неизвестных линиях $x = x_i(t)$ фазовых переходов, где

$u = u_i$, выполняется условие Стефана

$$d_i x_i'(t) + k_i u_x(t, x_i(t)+) - k_{i-1} u_x(t, x_i(t)-) = 0, \tag{1.2}$$

где $k_i > 0$ — теплопроводность i-й фазы, а $d_i \geqslant 0$ — число Стефана (скрытая теплоемкость) для i-го фазового перехода. В (1.2) односторонние пределы $u_x(t, x_i(t)+)$, $u_x(t, x_i(t)-)$ на прямой $x = x_i(t)$ берутся из области, соответствующей более теплой/холодной фазе, соответственно. Числа Стефана d_i должны быть положительными по физическим причинам. Мы рассмотрим еще более общий случай $d_i \geqslant 0$, полагая, что $d_1 > 0$, если $u_0 = u_1$.

В этом случае задача (1.1), (1.2) корректно поставлена для $u_0 \leqslant u \leqslant u_D$ и сводится к вырожденному нелинейному уравнению диффузии (см. [1] и [2, гл. 5])

$$\beta(u)_t - \alpha(u)_{xx} = 0, \tag{1.3}$$

где $\alpha(u)$, $\beta(u)$ — строго возрастающие функции на $[u_0, u_D]$, линейные на каждом интервале (u_i, u_{i+1}), $i = 0, \ldots, m$, с наклонами $\alpha'(u) = k_i$, $\beta'(u) = k_i/a_i^2$ и такие, что

$$\alpha(u_i+) - \alpha(u_i-) = 0, \quad \beta(u_i+) - \beta(u_i-) = d_i, \ i = 1, \ldots, m$$

(здесь полагаем $\alpha(u_1-) = \alpha(u_0)$, $\beta(u_1-) = \beta(u_0)$ в случае $u_1 = u_0$).

Будем рассматривать начально-краевую задачу с постоянными начальными и граничными условиями Дирихле

$$u(0, x) = u_0 \ \forall x > 0, \quad u(t, 0) = u_D \ \forall t > 0. \tag{1.4}$$

В силу инвариантности нашей задачи относительно группы преобразований $(t, x) \to (\lambda^2 t, \lambda x)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, естественно искать автомодельное решение задачи (1.1), (1.2), (1.4), которое имеет вид $u(t, x) = u(\xi)$, $\xi = x/\sqrt{t}$. В силу (1.4)

$$u(0) = u_D, \quad u(+\infty) \doteq \lim_{\xi \to +\infty} u(\xi) = u_0 < u_D.$$

Таким образом, естественно предположить, что функция $u(\xi)$ убывает. Случай, когда $u_D \leqslant u_0$, рассматривается аналогично. Конечно, в этом случае функция $u(\xi)$ должна возрастать.

Для уравнения теплопроводности $u_t = a^2 u_{xx}$ автомодельное решение должно удовлетворять линейному ОДУ $a^2 u'' = -\xi u'/2$, общее решение которого выражается как

$$u = C_1 F(\xi/a) + C_2, \ C_1, C_2 = \mathrm{const}, \ \text{где } F(\xi) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\xi e^{-s^2/4} ds.$$

Это позволяет записать наше убывающее решение в виде

$$u(\xi) = u_i + \frac{u_{i+1} - u_i}{F(\xi_{i+1}/a_i) - F(\xi_i/a_i)} (F(\xi/a_i) - F(\xi_i/a_i)), \quad \xi_{i+1} < \xi < \xi_i, \quad i = 0, \ldots, m, \tag{1.5}$$

где $+\infty = \xi_0 > \xi_1 > \cdots > \xi_m > \xi_{m+1} = 0$. Считаем, что $F(+\infty) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-s^2/4} ds = 1$. Отметим, что функция $u(\xi)$ может быть постоянной на интервале $(\xi_1, +\infty)$, если $u_0 = u_1$. Параболы $\xi = \xi_i$, $i = 1, \ldots, m$, где $u = u_i$, являются свободными границами, которые определяются условиями (1.2). По переменной ξ эти условия имеют вид (см. [4, гл. XI])

$$d_i \xi_i/2 + \frac{k_i (u_{i+1} - u_i) F'(\xi_i/a_i)}{a_i (F(\xi_{i+1}/a_i) - F(\xi_i/a_i))} - \frac{k_{i-1}(u_i - u_{i-1}) F'(\xi_i/a_{i-1})}{a_{i-1}(F(\xi_i/a_{i-1}) - F(\xi_{i-1}/a_{i-1}))} = 0, \tag{1.6}$$

$i = 1, \ldots, m$. Формально можно рассматривать решение (1.5) также в случае $u_m = u_{m+1}$, когда $u(\xi) \equiv u_D$ для $0 < \xi < \xi_m$, но в этом случае условие (1.6) при $i = m$ сводится к соотношению

$$d_m \xi_m/2 - \frac{k_{m-1}(u_m - u_{m-1}) F'(\xi_m/a_{m-1})}{a_{m-1}(F(\xi_m/a_{m-1}) - F(\xi_{m-1}/a_{m-1}))} = 0,$$

что невозможно, поскольку левая часть этого отношения строго положительна. Потому исключим случай $u_m = u_{m+1}$ из нашей постановки. Если $d_1 > 0$, случай $u_1 = u_0$ является корректным и не вызывает никаких проблем, поскольку в этом случае (1.6) при $i = 0$ обеспечивает соотношение

$$d_1 \xi_1/2 + \frac{k_1(u_2 - u_1) F'(\xi_1/a_1)}{a_1(F(\xi_2/a_1) - F(\xi_1/a_1))} = 0,$$

содержащее члены противоположного знака.

Для исследования нелинейной системы (1.6) заметим, что она является градиентной и отвечает равенству $\nabla E(\bar{\xi}) = 0$ с функцией

$$E(\bar{\xi}) = -\sum_{i=0}^{m} k_i(u_{i+1} - u_i) \ln(F(\xi_i/a_i) - F(\xi_{i+1}/a_i)) + \sum_{i=1}^{m} d_i \xi_i^2/4, \qquad (1.7)$$
$$\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \Omega,$$

где открытая выпуклая область $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ задается неравенствами $\xi_1 > \dots > \xi_m > 0$. Заметим, что $E(\bar{\xi}) \in C^\infty(\Omega)$. Поскольку функция $F(\xi)$ принимает значения в интервале $(0, 1)$, все члены в выражении (1.7) неотрицательны, а некоторые из них строго положительны. Следовательно, $E(\bar{\xi}) > 0$.

1.1. Коэрцитивность функции E и существование решения. Введем множества подуровня

$$\Omega_c = \{\ \bar{\xi} \in \Omega \mid E(\bar{\xi}) \leqslant c\ \}, \quad c > 0.$$

Предложение 1.1 (коэрцитивность). *Множество Ω_c компактно для каждого $c > 0$. В частности, функция $E(\bar{\xi})$ достигает своего минимального значения.*

Доказательство. Если $\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \Omega_c$, тогда

$$-k_i(u_{i+1} - u_i) \ln(F(\xi_i/a_i) - F(\xi_{i+1}/a_i)) \leqslant E(\bar{\xi}) \leqslant c, \quad i = 0, \dots, m; \qquad (1.8)$$
$$d_i \xi_i^2/4 \leqslant E(\bar{\xi}) \leqslant c, \quad i = 1, \dots, m. \qquad (1.9)$$

Из (1.8) при $i = m$ следует, что $F(\xi_m/a_m) \geqslant e^{-c/(k_m(u_{m+1}-u_m))}$, что даёт нижнюю границу

$$\xi_m \geqslant r_1 = a_m F^{-1}(e^{-c/(k_m(u_{m+1}-u_m))}).$$

Аналогично, из (1.8) при $i = 0$ выводим, что в случае $u_1 > u_0$

$$1 - F(\xi_1/a_0) \geqslant e^{-c/(k_0(u_1-u_0))}$$

(отметим, что $F(\xi_0/a_0) = F(+\infty) = 1$). Следовательно, $F(\xi_1/a_0) \leqslant 1 - e^{-c/(k_0(u_1-u_0))}$. Это даёт верхнюю границу $\xi_1 \leqslant a_0 F^{-1}(1 - e^{-c/(k_0(u_1-u_0))})$. С другой стороны, если $u_0 = u_1$, то $d_1 > 0$, и из (1.9) при $i = 1$ следует, что $\xi_1 \leqslant (4c/d_1)^{1/2}$. Итак, в любом случае имеем

$$\xi_1 \leqslant r_2 = \begin{cases} a_0 F^{-1}(1 - e^{-c/(k_0(u_1-u_0))}), & u_0 < u_1, \\ (4c/d_1)^{1/2}, & u_0 = u_1. \end{cases}$$

Далее, из (1.8) следует, что для всех $i = 1, \dots, m-1$

$$F(\xi_i/a_i) - F(\xi_{i+1}/a_i) \geqslant \delta_1 \doteq \exp(-c/\alpha) > 0, \qquad (1.10)$$

где $\alpha = \min\limits_{i=1,\dots,m-1} k_i(u_{i+1} - u_i) > 0$. Поскольку $F'(\xi) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\xi^2/4} < 1$, функция $F(\xi)$ является липшицевой с константой 1, и из (1.10) следует, что

$$(\xi_i - \xi_{i+1})/a_i \geqslant F(\xi_i/a_i) - F(\xi_{i+1}/a_i) \geqslant \delta_1, \quad i = 1, \dots, m-1.$$

Следовательно, получаем оценки $\xi_i - \xi_{i+1} \geqslant \delta = \delta_1 \min a_i$. Таким образом, множество Ω_c содержится в компакте

$$K = \{\ \bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^m \mid r_2 \geqslant \xi_1 \geqslant \dots \geqslant \xi_m \geqslant r_1,\ \xi_i - \xi_{i+1} \geqslant \delta\ \forall i = 1, \dots, m-1\ \}.$$

Поскольку $E(\bar{\xi})$ непрерывна на K, множество Ω_c является замкнутым подмножеством K и, следовательно, компактно. При $c > N \doteq \inf E(\bar{\xi})$ это множество не пусто и функция $E(\bar{\xi})$ достигает на нем минимального значения, которое, очевидно, равно N. □

Мы установили существование минимального значения $E(\bar{\xi}_0) = \min E(\bar{\xi})$. В точке $\bar{\xi}_0$ выполняется требуемое условие $\nabla E(\bar{\xi}_0) = 0$, и $\bar{\xi}_0$ является решением системы (1.6). Координаты $\bar{\xi}_0$ определяют решение (1.5) рассматриваемой задачи Стефана. Таким образом, устанавливаем следующий результат существования.

Теорема 1.1. *Существует автомодельное решение* (1.5) *задачи* (1.1), (1.2), (1.4).

1.2. Выпуклость функции E и единственность решения. В этом разделе мы докажем, что функция $E(\bar{\xi})$ строго выпукла. Поскольку строго выпуклая функция может иметь не более одной критической точки (и это обязательно глобальный минимум), система (1.6) имеет не более одного решения, т. е. автомодельное решение (1.5) задачи (1.1), (1.2), (1.4) единственно. Нам понадобится следующая простая лемма, доказанная в [5] (см. также [3]). Для полноты мы приводим её с доказательством.

Лемма 1.1. *Функция $P(x,y) = -\ln(F(x) - F(y))$ строго выпукла в полуплоскости $x > y$.*

Доказательство. Функция $P(x,y)$ бесконечно дифференцируема в области $x > y$. Для доказательства леммы нам нужно установить, что гессиан D^2P положительно определен в каждой точке. Прямым вычислением находим

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}P(x,y) = \frac{(F'(x))^2 - F''(x)(F(x)-F(y))}{(F(x)-F(y))^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}P(x,y) = \frac{(F'(y))^2 - F''(y)(F(y)-F(x))}{(F(x)-F(y))^2}, \quad \frac{\partial^2}{\partial x \partial y}P(x,y) = -\frac{F'(x)F'(y)}{(F(x)-F(y))^2}.$$

Нам нужно доказать положительную определенность матрицы $Q = (F(x) - F(y))^2 D^2P(x,y)$ с компонентами

$$Q_{11} = (F'(x))^2 - F''(x)(F(x) - F(y)),$$

$$Q_{22} = (F'(y))^2 - F''(y)(F(y) - F(x)), \quad Q_{12} = Q_{21} = -F'(x)F'(y).$$

Так как $F'(x) = \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}e^{-x^2/4}$, то $F''(x) = -\dfrac{x}{2}F'(x)$, и диагональные элементы этой матрицы можно записать в виде

$$Q_{11} = F'(x)\Big(\frac{x}{2}(F(x)-F(y)) + F'(x)\Big) = F'(x)\Big(\frac{x}{2}(F(x)-F(y)) + (F'(x)-F'(y))\Big) + F'(x)F'(y),$$

$$Q_{22} = F'(y)\left(\frac{y}{2}(F(y)-F(x)) + (F'(y)-F'(x))\right) + F'(x)F'(y).$$

По теореме Коши о среднем значении существует такое значение $z \in (y,x)$, что

$$\frac{F'(x)-F'(y)}{F(x)-F(y)} = \frac{F''(z)}{F'(z)} = -z/2.$$

Следовательно,

$$Q_{11} = F'(x)(F(x)-F(y))(x-z)/2 + F'(x)F'(y),$$

$$Q_{22} = F'(y)(F(x)-F(y))(z-y)/2 + F'(x)F'(y),$$

откуда $Q = R_1 + F'(x)F'(y)R_2$, где R_1 — диагональная матрица с положительными диагональными элементами $F'(x)(F(x)-F(y))(x-z)/2$, $F'(y)(F(x)-F(y))(z-y)/2$, а $R_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Поскольку $R_1 > 0$, $R_2 \geqslant 0$, имеем, что матрица $Q > 0$, что и требовалось доказать. $\square$

Замечание 1.1. В дополнение к лемме 1.1 заметим, что функции

$$P(x,0) = -\ln F(x), \quad P(+\infty, x) = -\ln(1 - F(x))$$

одной переменной x строго выпуклы на $(0,+\infty)$. Фактически, из леммы 1.1 в пределе при $y \to 0$ следует, что функция $P(x,0)$ выпукла на $(0,+\infty)$. Более того,

$$(F(x))^2\frac{d^2}{dx^2}P(x,0) = F'(x)\Big(\frac{x}{2}F(x) + F'(x)\Big) = \lim_{y\to 0} Q_{11} \geqslant 0.$$

Так как $F'(x) > 0$, находим, что, в частности, $\dfrac{x}{2}F(x) + F'(x) \geqslant 0$. Если $\dfrac{d^2}{dx^2}P(x,0) = 0$ в некоторой точке $x = x_0$, то $0 = \dfrac{x_0}{2}F(x_0) + F'(x_0)$ является минимумом неотрицательной функции $\dfrac{x}{2}F(x) + F'(x)$. Следовательно, её производная $\Big(\dfrac{x}{2}F + F'\Big)'(x_0) = 0$. Так как $F''(x) = -\dfrac{x}{2}F'(x)$, то эта производная

$$\Big(\frac{x}{2}F + F'\Big)'(x_0) = F(x_0)/2 + \frac{x_0}{2}F'(x_0) + F''(x_0) = F(x_0)/2 > 0.$$

Но это противоречит нашему предположению. Мы заключаем, что $\dfrac{d^2}{dx^2}P(x,0) > 0$ и функция $P(x,0)$ строго выпукла.

Аналогично доказывается сильная выпуклость функции $P(+\infty,x) = -\ln(1-F(x))$. Для полноты изложения рассмотрим доказательство подробно. В пределе при $x < y \to +\infty$ из леммы 1.1 следует, что функция $P(+\infty,x) = \lim\limits_{y\to+\infty} P(y,x)$ выпукла на $\mathbb{R}$ и

$$(1-F(x))^2\frac{d^2}{dx^2}P(+\infty,x) = F'(x)\Big(\frac{x}{2}(F(x)-1)+F'(x)\Big) \geqslant 0.$$

Если $\dfrac{d^2}{dx^2}P(+\infty,x) = 0$ в некоторой точке $x = x_0 \in \mathbb{R}$, то x_0 является точкой минимума неотрицательной функции $\dfrac{x}{2}(F(x)-1)+F'(x)$. Следовательно,

$$0 = \Big(\frac{x}{2}(F(x)-1)+F'(x)\Big)'(x_0) = (F(x_0)-1)/2 + F''(x_0) + F'(x_0)x_0/2 = (F(x_0)-1)/2 < 0.$$

Из этого противоречия следует, что $\dfrac{d^2}{dx^2}P(+\infty,x) > 0$ для всех $x \in \mathbb{R}$ и, следовательно, функция $P(+\infty,x)$ строго выпукла (даже на всей прямой $\mathbb{R}$).

Теперь мы готовы доказать ожидаемую выпуклость $E(\bar\xi)$.

Предложение 1.2. *Функция $E(\bar\xi)$ строго выпукла на Ω.*

Доказательство. Введём функции

$$E_i(\bar\xi) = -k_i(u_{i+1}-u_i)\ln(F(\xi_i/a_i) - F(\xi_{i+1}/a_i)), \quad i = 0,\dots,m.$$

По лемме 1.1 и замечанию 1.1 все эти функции выпуклые. Так как

$$E(\bar\xi) = \sum_{i=1}^m E_i(\bar\xi) + E_0(\bar\xi) + \sum_{i=1}^m d_i\xi_i^2/4$$

и все функции в этой сумме выпуклы, достаточно доказать сильную выпуклость суммы

$$\tilde E(\bar\xi) = \sum_{i=1}^m E_i(\bar\xi).$$

По лемме 1.1 и замечанию 1.1 все члены этой суммы являются выпуклыми функциями. Следовательно, функция $\tilde E$ также выпукла. Для доказательства строгой выпуклости предположим, что для некоторого вектора $\zeta = (\zeta_1,\dots,\zeta_m) \in \mathbb{R}^m$

$$D^2\tilde E(\bar\xi)\zeta\cdot\zeta = \sum_{i,j=1}^m \frac{\partial^2\tilde E(\bar\xi)}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\zeta_i\zeta_j = 0. \tag{1.11}$$

Так как

$$0 = D^2\tilde E(\bar\xi)\zeta\cdot\zeta = \sum_{i=1}^m D^2E_i(\bar\xi)\zeta\cdot\zeta,$$

но все члены неотрицательны, заключаем, что

$$D^2E_i(\bar\xi)\zeta\cdot\zeta = 0, \quad i = 1,\dots,m. \tag{1.12}$$

По лемме 1.1 для $i = 1,\dots,m-1$ функция $E_i(\bar\xi)$ строго выпукла как функция двух переменных ξ_i, ξ_{i+1}, и из (1.12) следует, что $\zeta_i = \zeta_{i+1} = 0$, $i = 1,\dots,m-1$. Заметим, что в случае $m = 1$ таких i нет. В этом случае применяем (1.12) при $i = m$. Учитывая замечание 1.1, получаем, что $E_m(\bar\xi)$ является строго выпуклой функцией одной переменной ξ_m, и из (1.12) следует, что $\zeta_m = 0$. В любом случае получаем, что вектор $\zeta = 0$. Таким образом, соотношение (1.11) может иметь место только при нулевом ζ, т. е. матрица $D^2\tilde E(\bar\xi)$ является (строго) положительно определенной, а функция $\tilde E(\bar\xi)$ является строго выпуклой. Это завершает доказательство. ☐

Предложения 1.1, 1.2 обеспечивают основной результат этого раздела.

Теорема 1.2. *Существует единственное автомодельное решение* (1.5) *задачи* (1.1), (1.2), (1.4), *и оно соответствует минимуму строго выпуклой и коэрцитивной функции* (1.7).

Замечание 1.2. В статье [3] задача Стефана (1.1), (1.2) изучалась в полуплоскости $t > 0$, $x \in \mathbb{R}$ с начальным условием Римана

$$u(0,x) = \begin{cases} u_+, & x > 0, \\ u_-, & x < 0. \end{cases} \tag{1.13}$$

Решения этой задачи имеют ту же структуру, что и (1.5), и соответствуют единственной точке минимума функции, аналогичной (1.7), с той лишь разницей, что параметры ξ_i не обязательно положительны и могут принимать произвольные действительные значения. В этом разделе мы в основном следуем схеме статьи [3].

Отметим также, что в работе [5] задача Стефана—Римана (1.1), (1.2), (1.13) изучалась в случае произвольных (возможно, отрицательных) скрытых удельных теплоемкостей d_i. Найдено необходимое и достаточное условие коэрцитивности $E(\bar{\xi})$, а также более сильное достаточное условие её строгой выпуклости. Аналогичные результаты можно получить для задачи Стефана—Дирихле (1.1), (1.2), (1.4).

2. Задача Стефана с граничным условием Неймана

Теперь рассмотрим задачу Стефана (1.1), (1.2) с постоянным начальным значением u_0 и граничным условием Неймана:

$$u(0,x) = u_0 \quad \forall x > 0, \quad u_x(t,0) = t^{-1/2} b_N \quad \forall t > 0, \tag{2.1}$$

где $b_N < 0$ — константа. Конкретный вид граничных условий Неймана связан с требованием инвариантности нашей задачи относительно растяжений $(t,x) \to (\lambda^2 t, \lambda x)$, $\lambda > 0$. Это позволяет сосредоточиться на изучении автомодельных решений $u = u(x/\sqrt{t})$ задачи (1.1), (1.2), (2.1). Для таких решений условия (2.1) сводятся к требованиям

$$u'(0) = b_N, \quad u(+\infty) = u_0. \tag{2.2}$$

Так как $b_N < 0$, будем считать, что функция $u(\xi)$ убывает. Случай $b_N > 0$ соответствует возрастанию $u(\xi)$ и может рассматриваться аналогично. Для однородной задачи Неймана $b_N = 0$ существует только постоянное решение $u \equiv u_0$. Пусть u_i, $i = 1, \dots, m$ — температурные фазовые переходы в интервале $[u_0, +\infty)$ такие, что $u_0 \leqslant u_1 < \dots < u_m < u_{m+1} = +\infty$. Как и в разделе 1, полагаем, что скрытая удельная теплоемкость $d_1 > 0$, если $u_1 = u_0$. Предположим, что $u = u(\xi)$ является убывающим автомодельным решением (1.1), (1.2), (2.1). Тогда $u(0) > u_0$, и существует целое число n, $0 \leqslant n \leqslant m$, такое, что $u_n < u(0) \leqslant u_{n+1}$. Назовем это число n (т. е. число фазовых переходов) типом решения u. Решение типа 0 не содержит свободных границ и может быть найдено по формуле

$$u(\xi) = u_0 + a_0 b_N \sqrt{\pi}(F(\xi/a_0) - 1). \tag{2.3}$$

Как легко проверить, $u'(0) = b_N$, $u(+\infty) = u_0$, и требование (2.2) выполнено. Несложным вычислением находим $u(0) = u_0 - a_0 b_N \sqrt{\pi}$, следовательно, необходимым и достаточным условием существования решения (2.3) является выполнение неравенства $u_0 - a_0 b_N \sqrt{\pi} \leqslant u_1$, которое можно записать в виде

$$-b_N \sqrt{\pi} \leqslant (u_1 - u_0)/a_0. \tag{2.4}$$

В частности, решение типа 0 не существует, если $u_1 = u_0$. Решение типа $n > 0$ имеет структуру, похожую на (1.5) (при $m = n$)

$$u(\xi) = u_i + \frac{u_{i+1} - u_i}{F(\xi_{i+1}/a_i) - F(\xi_i/a_i)}(F(\xi/a_i) - F(\xi_i/a_i)), \quad \xi_{i+1} < \xi < \xi_i, \ i = 0, \dots, n-1, \tag{2.5}$$

$$u(\xi) = u_n + a_n b_N \sqrt{\pi}(F(\xi/a_n) - F(\xi_n/a_n)), \quad 0 < \xi < \xi_n. \tag{2.6}$$

Необходимое (но не достаточное, как мы вскоре поймем) условие $u(0) \leqslant u_{n+1}$ имеет вид

$$-b_N \sqrt{\pi} F(\xi_n/a_n) \leqslant (u_{n+1} - u_n)/a_n \tag{2.7}$$

(если $n = m$, то оно всегда выполняется, так как $u_{m+1} = +\infty$). На линиях фазового перехода $\xi = \xi_i$ условие Стефана имеет вид

$$d_i\xi_i/2 + k_i\frac{(u_{i+1}-u_i)F'(\xi_i/a_i)}{a_i(F(\xi_{i+1}/a_i)-F(\xi_i/a_i))} - k_{i-1}\frac{(u_i-u_{i-1})F'(\xi_i/a_{i-1})}{a_{i-1}(F(\xi_i/a_{i-1})-F(\xi_{i-1}/a_{i-1}))} = 0, \quad i = 1,\dots,n-1, \tag{2.8}$$

$$d_n\xi_n/2 + k_n b_N\sqrt{\pi}F'(\xi_n/a_n) - k_{n-1}\frac{(u_n-u_{n-1})F'(\xi_n/a_{n-1})}{a_{n-1}(F(\xi_n/a_{n-1})-F(\xi_{n-1}/a_{n-1}))} = 0, \quad i = n. \tag{2.9}$$

Как и в случае граничного условия Дирихле, эта система оказывается градиентной, она совпадает с равенством $\nabla E = 0$ с функцией

$$E(\bar\xi) = -\sum_{i=0}^{n-1} k_i(u_{i+1}-u_i)\ln(F(\xi_i/a_i)-F(\xi_{i+1}/a_i)) + \\ + k_n a_n b_N\sqrt{\pi}F(\xi_n/a_n) + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} d_i\xi_i^2, \quad \bar\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)\in\Omega, \tag{2.10}$$

где Ω — открытый выпуклый конус в $\mathbb{R}^n$, состоящий из векторов со строго убывающими положительными координатами. Заметим, что $F''(s) = -s/2F'(s) < 0$ для всех $s > 0$. Поскольку $b_N < 0$, это означает, что член $k_n a_n b_N\sqrt{\pi}F(\xi_n/a_n)$ — строго выпуклая функция одной переменной ξ_n на интервале $[0,+\infty)$. Как и в доказательстве предложения 1.2, мы находим, что функция

$$\tilde E(\bar\xi) = -\sum_{i=0}^{n-1} k_i(u_{i+1}-u_i)\ln(F(\xi_i/a_i)-F(\xi_{i+1}/a_i)) + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} d_i\xi_i^2$$

строго выпукла на конусе

$$\bar\Omega = \{\ \bar\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n \mid \xi_1 > \dots > \xi_n \geqslant 0\ \} \supset \Omega,$$

состоящем из точек со строго убывающими неотрицательными координатами. Так как

$$E(\bar\xi) = \tilde E(\bar\xi) + k_n a_n b_N\sqrt{\pi}F(\xi_n/a_n),$$

функция $E(\bar\xi)$ также строго выпукла на $\bar\Omega$. Покажем, что эта функция коэрцитивна на $\bar\Omega$.

Предложение 2.1. *Для всех $c\in\mathbb{R}$ множество $\bar\Omega_c = \{\ \bar\xi\in\bar\Omega \mid E(\bar\xi)\leqslant c\ \}$ является компактным.*

Доказательство. Пусть $\bar\xi\in\bar\Omega$, $E(\bar\xi)\leqslant c$. Тогда

$$\tilde E(\bar\xi) \doteq -\sum_{i=0}^{n-1} k_i(u_{i+1}-u_i)\ln(F(\xi_i/a_i)-F(\xi_{i+1}/a_i)) + \\ + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} d_i\xi_i^2 = E(\bar\xi) - k_n a_n b_N\sqrt{\pi}F(\xi_n/a_n) \leqslant c_1 \doteq c - k_n a_n b_N\sqrt{\pi}.$$

Поскольку все члены левой части этого неравенства неотрицательны, получаем соотношения

$$-k_i(u_{i+1}-u_i)\ln(F(\xi_i/a_i)-F(\xi_{i+1}/a_i)) \leqslant c_1,\ i = 0,\dots,n-1, \tag{2.11}$$

$$d_i\xi_i^2/4 \leqslant c_1,\ i = 1,\dots,n, \tag{2.12}$$

подобные неравенствам (1.8), (1.9). Как следует из (2.11), (2.12), множество $\bar\Omega_c = \varnothing$, если $c_1 < 0$. Потому мы можем (и будем) предполагать, что $c_1 \geqslant 0$. Рассуждая так же, как в доказательстве предложения 1.1, выводим из (2.11), (2.12) границы

$$\xi_1 \leqslant r_2 = \begin{cases} a_0F^{-1}(1-e^{-c_1/(k_0(u_1-u_0))}), & u_0 < u_1, \\ (4c_1/d_1)^{1/2}, & u_0 = u_1, \end{cases}$$

$$(\xi_i - \xi_{i+1})/a_i \geqslant \delta = \exp(-c_1/\alpha) > 0, \quad i = 1,\dots,n-1,$$

где $\alpha = \min\limits_{i=1,\dots,n-1} k_i(u_{i+1}-u_i) > 0$. Таким образом, множество $\bar\Omega_c$ содержится в компакте

$$K = \{\ \bar\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n)\in\mathbb{R}^n \mid r_2 \geqslant \xi_1 \geqslant \dots \geqslant \xi_n \geqslant 0,\ \xi_i - \xi_{i+1} \geqslant \delta a_i\ \forall i = 1,\dots,n-1\ \}.$$

Поскольку $E(\bar\xi)$ непрерывно на K, множество $\bar\Omega_c$ является замкнутым подмножеством K и, следовательно, компактно. Это завершает доказательство. $\square$

Из предложения 2.1 и строгой выпуклости функции E следует, что существует точка $\bar\xi^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_n^0) \in \bar\Omega$ глобального минимума E, и она является единственным локальным минимумом этой функции. Возможны два случая:

A) $\bar\xi^0 \in \Omega$, т. е. $\xi_n^0 > 0$. Если, кроме того, выполняется условие (2.7), то существует единственное решение (2.5), (2.6) типа n с $\xi_i = \xi_i^0$, $i = 1, \dots, n$.

B) $\bar\xi^0 \notin \Omega$, т. е. $\xi_n^0 = 0$. Тогда решения типа n не существует.

Разберем последний случай более подробно. Необходимые и достаточные условия для того, чтобы точка $\bar\xi^0 = (\xi_1^0, \dots, \xi_{n-1}^0, 0)$ была точкой минимума $E(\bar\xi)$, имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial\xi_i}E(\bar\xi^0) = 0,\ i = 1, \dots, n-1, \tag{2.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial\xi_n}E(\bar\xi^0) \geqslant 0, \tag{2.14}$$

где условие (2.13) появляется только при $n > 1$. Отметим, что для таких n

$$E(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 0) = -\sum_{i=0}^{n-1} k_i(u_{i+1} - u_i)\ln(F(\xi_i/a_i) - F(\xi_{i+1}/a_i)) + \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n-1} d_i\xi_i^2,$$
$$\xi_n = 0,\ (\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) \in \Omega',$$

где $\Omega' \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — конус, состоящий из точек со строго убывающими положительными координатами. Заметим, что $E(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 0)$ совпадает с функцией (1.7) при $m = n-1$, соответствующей задаче Стефана—Дирихле (1.1), (1.2), (1.4) при $u_D = u_n$. Соотношение (2.13) означает, что $\nabla E(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 0) = 0$, т. е. $(\xi_1^0, \dots, \xi_{n-1}^0) \in \Omega'$ — единственная точка минимума $E(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}, 0)$. Согласно теореме 1.2, координаты ξ_i^0, $i = 1, \dots, n-1$, совпадают с параметрами фазового перехода ξ_i единственного решения (1.5) задачи (1.1), (1.2), (1.4) при $u_D = u_n$ (в частности, они не зависят от условий Неймана b_N и от параметров a_i, k_i, d_i при $i \geqslant n$). Нетрудно заметить, что условие (2.14) имеет вид

$$\frac{k_{n-1}(u_n - u_{n-1})}{\sqrt{\pi}a_{n-1}F(\xi_{n-1}^0/a_{n-1})} + k_nb_N \geqslant 0. \tag{2.15}$$

Эта формула остается справедливой и для $n = 1$. В этом случае положим $\xi_{n-1}^0 = \xi_0 = +\infty$ таким, что $F(\xi_{n-1}^0/a_{n-1}) = F(+\infty) = 1$. При требовании (2.15) реализуется случай B), так что решение типа n не существует. Заметим, что ξ_{n-1}^0 не зависит от параметров k_i, $i \geqslant n$. Это наблюдение позволяет контролировать существование решения типа n выбором параметра k_n. Точнее, справедливы следующие утверждения.

Лемма 2.1.

(i) *Если* $n \geqslant 1$ *и* $0 < k_n \leqslant \bar k_n = -\dfrac{k_{n-1}(u_n - u_{n-1})}{\sqrt{\pi}a_{n-1}b_NF(\xi_{n-1}^0/a_{n-1})}$, *то решение* (2.5), (2.6) *типа* n *задачи* (1.1), (1.2), (2.1) *не существует.*

(ii) *Если* $k_n > \bar k_n$ *и* $k_n - \bar k_n$ *достаточно мало, то решение* (2.5), (2.6) *типа* n *задачи* (1.1), (1.2), (2.1) *существует.*

Доказательство. Если $k_n \leqslant \bar k_n$, то выполняется соотношение (2.15), и следует первое утверждение. Для доказательства (ii) заметим, что в силу строгой выпуклости функции (2.10) точка её минимума $\bar\xi^0$ непрерывно зависит от параметра k_n. В частности, последняя координата $\xi_n^0 = \xi_n^0(k_n)$ является непрерывной функцией от k_n. Поскольку $\xi_n^0(\bar k_n) = 0$, то при достаточно малых $k_n - \bar k_n > 0$, левую часть соотношения (2.7) можно сделать настолько малой, что это соотношение будет выполняться, а условие (2.15) будет нарушено. Мы приходим к выводу, что существует единственное решение (2.5), (2.6) типа n с $\xi_i = \xi_i^0(k_n)$, $i = 1, \dots, n$. $\square$

Теперь мы готовы доказать следующий окончательный результат.

Теорема 2.1. *Пусть $I \subset \{0, 1, \dots, m\}$ — произвольный набор типов, и $0 \notin I$, если $u_0 = u_1$. Тогда можно выбрать такие значения параметров a_0, $k_1, \dots, k_m$, что набор типов n решений* (2.5), (2.6) *задачи Стефана—Неймана* (1.1), (1.2), (2.1) *совпадет с I.*

Доказательство. Во-первых, заметим, что решение типа 0 не существует, если $u_1 = u_0$. В противном случае всегда можно выбрать такое значение параметра a_0, что условие (2.4) выполняется, если $0 \in I$, и нарушается, если $0 \notin I$. Далее, применяя лемму 2.1, мы можем последовательно выбрать параметры k_n, $n = 1, \dots, m$, таким образом, что решение типа n существует тогда и только тогда, когда $n \in I$. □

Пусть $I = \varnothing$. Тогда теорема 2.1 дает задачу Стефана—Неймана (1.1), (1.2), (2.1), которая не имеет решения. В случае, когда множество допустимых типов I содержит более одного элемента, мы получаем задачу, которая имеет много различных решений. Очевидно, что максимальное число таких решений совпадает с числом $m + 1$ (m, если $u_1 = u_0$) всех возможных типов.

В случае $m = 1$, $u_1 > u_0$, критерии существования решений типов $n = 0, 1$ особенно просты и совпадают с соответствующими неравенствами

$$-\sqrt{\pi} a_0 b_N \leqslant u_1 - u_0, \quad -\sqrt{\pi} a_0 b_N > k_0(u_1 - u_0)/k_1.$$

В частности, если

$$k_0(u_1 - u_0)/k_1 < -\sqrt{\pi} a_0 b_N \leqslant u_1 - u_0,$$

то существует два решения типов $0, 1$, а если

$$u_1 - u_0 < -\sqrt{\pi} a_0 b_N \leqslant k_0(u_1 - u_0)/k_1,$$

то решений нет.

Замечание 2.1. Ввиду теоремы 2.1, условие Неймана (2.1) не является «хорошим» и требует пересмотра. Как было недавно установлено в [6], корректное условие Неймана

$$\alpha(u)_x(t, 0) = t^{-1/2} b_N, \tag{2.16}$$

где $\alpha(u)$ — функция диффузии в уравнении (1.3). Поскольку $\alpha'(u)$ — теплопроводность соответствующей фазы u, то $\alpha(u)_x$ — это в точности поток тепла через границу $x = 0$, и условие (2.16) кажется более подходящим, чем (2.1) с физической точки зрения. В [6] было показано, что задача (1.1), (1.2), (2.16) имеет единственное решение (т. е. реализуется ровно один тип n).

В заключение подчеркнем, что аналогичное исследование может быть проведено и для автомодельных слабых решений нелинейного и, возможно, вырожденного уравнения диффузии с кусочно-постоянным коэффициентом диффузии. Случай задачи Римана был рассмотрен ранее в [3].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Каменомостская С. Л.* О задаче Стефана// Мат. сб. — 1961. — *53*, № 4. — С. 489–514.
2. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1962.
3. *Панов Е. Ю.* О структуре слабых решений задачи Римана для вырождающегося нелинейного уравнения диффузии// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2023. — *69*, № 4. — С. 676–684.
4. *Carslaw H. S., Jaeger J. C.* Conduction of heat in solids. — Oxford: Oxford University Press, 1959.
5. *Panov E. Yu.* Solutions of an ill-posed Stefan problem// J. Math. Sci. (N. Y.) — 2023. — *274*, № 4. — С. 534–543.
6. *Panov E. Yu.* On self-similar solutions of a multi-phase Stefan problem in the half-line// ArXiv. — 2024. — 2404.03672v2 [Math.AP].

Евгений Юрьевич Панов

Санкт-Петербургское отделение Математического института им. В. А. Стеклова РАН, Санкт-Петербург, Россия

E-mail: `evpanov@yandex.ru`

UDC 517.957
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-441-450
EDN: NGIESD

Self-similar solutions of a multi-phase Stefan problem on the half-line

E. Yu. Panov

St. Petersburg Department of V. A. Steklov Institute of Mathematics of the RAS, St. Petersburg, Russia

Abstract. In this paper, we study self-similar solutions of the multiphase Stefan problem for the heat equation on the half-line $x > 0$ with constant initial data and Dirichlet or Neumann boundary conditions. In the case of the Dirichlet boundary condition, we prove that the nonlinear algebraic system for determining the free boundaries is a gradient system, and the corresponding potential is an explicitly written strictly convex and coercive function. Consequently, there exists a unique minimum point of the potential, the coordinates of which determine the free boundaries and give the desired solution. In the case of the Neumann boundary condition, we show that the problem can have solutions with different numbers (types) of phase transitions. For each fixed type n, the system for determining the free boundaries is again a gradient system, and the corresponding potential turns out to be strictly convex and coercive, but in some wider nonphysical domain. In particular, a solution of type n is unique and can exist only if the minimum point of the potential belongs to the physical domain. We give an explicit criterion for the existence of solutions of any type n. Due to the rather complicated structure of the set of solutions, neither the existence nor the uniqueness of a solution to the Stefan–Neumann problem is guaranteed.

Keywords: Stefan problem, heat equation, free boundary.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: E. Yu. Panov, "Self-similar solutions of a multi-phase Stefan problem on the half-line," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 3, 441–450. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-441-450`

REFERENCES

1. S. L. Kamenomostskaya, "O zadache Stefana" [On the Stefan problem], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1961, **53**, No. 4, 489–514 (in Russian).
2. O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'tseva, *Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type], Nauka, Moscow, 1962 (in Russian).
3. E. Yu. Panov, "O strukture slabykh resheniy zadachi Rimana dlya vyrozhdayushchegosya nelineynogo uravneniya diffuzii" [On the structure of weak solutions of the Riemann problem for a degenerate nonlinear diffusion equation], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2023, **69**, No. 4, 676–684 (in Russian).
4. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Conduction of heat in solids*, Oxford University Press, Oxford, 1959.
5. E. Yu. Panov, "Solutions of an ill-posed Stefan problem," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2023, **274**, No. 4, 534–543.
6. E. Yu. Panov, "On self-similar solutions of a multi-phase Stefan problem in the half-line," *ArXiv*, 2024, 2404.03672v2 [Math.AP].

Evgeniy Yurievich Panov
St. Petersburg Department of V. A. Steklov Institute of Mathematics of the RAS, St. Petersburg, Russia
E-mail: `evpanov@yandex.ru`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 3 (2024). С. 451–486
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.958, 517.956.32
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-451-486
EDN: NKBXUW

КЛАССИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

В. С. Рыхлов

Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия

Аннотация. Исследуется начально-граничная задача для неоднородного гиперболического уравнения второго порядка в полуполосе плоскости с постоянными коэффициентами, содержащего смешанную производную, с нулевым и ненулевым потенциалами. Данное уравнение является уравнением поперечных колебаний движущейся конечной струны. Рассматривается случай закрепленных концов (условия Дирихле). Предполагается, что корни характеристического уравнения простые и лежат на вещественной оси по разные стороны от начала координат. Формулируются доказанные ранее автором теоремы о конечных формулах для обобщённого решения в случае однородной и неоднородной задач. Затем на основе этих формул доказываются теоремы о конечных формулах для классического решения или, по-другому, решения почти всюду. Во второй части статьи формулируются доказанные ранее автором теоремы об обобщённом решении начально-граничной задачи с обычным потенциалом и потенциалом общего вида. В основе этих результатов лежит идея трактовать уравнение с потенциалом, как неоднородность в уравнении без потенциала. Эта идея ранее использовалась А. П. Хромовым и В. В. Корневым в случае уравнения без смешанной производной. И, далее, на основе формул для обобщённого решения задачи с потенциалами доказываются теоремы о соответствующих формулах для классических решений для этих двух видов потенциалов.

Ключевые слова: неоднородное гиперболическое уравнение, начально-граничная задача, смешанная производная, обобщённое решение, классическое решение.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *В. С. Рыхлов.* Классическое решение начально-граничной задачи для волнового уравнения со смешанной производной// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 3. С. 451–486. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-451-486

1. Постановка задачи, история вопроса, основные обозначения и определения

Рассмотрим начально-граничную задачу

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = f(x,t), \tag{1.1}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{1.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \tag{1.3}$$

где $(x,t) \in Q = [0,1] \times [0,+\infty)$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$; все функции, входящие в (1.1)–(1.3), предполагаются комплекснозначными.

Далее будут также использоваться обозначения для частных производных вида

$$u_x := \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_t := \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{xx} := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xt} := \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \quad \ldots$$

Рассматривается случай волнового или гиперболического уравнения (1.1), т. е. предполагается выполнение условия

$$p_1^2 - 4p_2 > 0.$$

В этом случае корни ω_1, ω_2 характеристического уравнения

$$\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$$

вещественны и различны.

Требуется найти решение начально-граничной задачи (1.1)–(1.3) в области Q при как можно более слабых условиях на параметры задачи, т. е. на функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $f(x,t)$.

Уравнение (1.1) является уравнением поперечных колебаний продольно движущейся конечной струны. Такие уравнения актуальны для производственных процессов, связанных с продольным движением материалов (например, бумажного полотна). Исследование таких колебаний началось около 60 лет назад [49–51].

Излагаемые в статье результаты получены с использованием резольвентного и аксиоматического методов решения начально-граничных задач для волнового уравнения в полуполосе плоскости, предложенных А. П. Хромовым и наиболее просто описанных в [43, 44]. Такой подход к решению задачи сформировался не сразу. Историю формирования и развития этого подхода, а также полученные с помощью него результаты можно найти в [1, 2, 5–7, 9, 27, 28, 30, 33, 37–42, 45–47]. Этот подход использует идеи А. Н. Крылова [8] об ускорении сходимости тригонометрического ряда, а также идеи Л. Эйлера [48] и Г. Харди [35] о расходящихся рядах.

Аналогичный подход решения начально-граничных задач в полуполосе плоскости для телеграфного уравнения при других краевых условиях используется в [10–14].

Другой подход, отличный от используемого в данной и вышеупомянутых статьях и при других постановках начально-граничных задач, в частности, в первой четверти плоскости, получил развитие в [15–20].

Рассматриваются и другие задачи для уравнения (1.1), например, задача гашения поперечных колебаний продольно движущейся струны [21, 22].

В зависимости от того, как будет пониматься решение задачи (1.1)–(1.3), будут накладываться различные требования на функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,t)$.

Считаем далее, что функция $f(x,t)$ переменных $(x,t) \in Q$ есть функция класса $\mathcal{Q}$, если $f(x,t) \in L_1(Q_T)$ при любом $T > 0$, где $Q_T = [0,1] \times [0,T]$. Будем кратко записывать этот факт как $f(x,t) \in \mathcal{Q}$.

Определение 1.1. Задачу (1.1)–(1.3), в которой $f(x,t)$ есть функция класса $\mathcal{Q}$, $\varphi(x) \in W_1^2[0,1]$, $\psi(x) \in W_1^1[0,1]$, будем называть *классической начально-граничной задачей.*

Определение 1.2. Под *классическим решением* понимается функция $u(x,t)$ переменных $(x,t) \in Q$, которая:

а) непрерывна вместе с $u_x(x,t)$ и $u_t(x,t)$, при этом $u_x(x,t)$ и $u_t(x,t)$ абсолютно непрерывны и по x, и по t, и почти всюду (п.в.) в Q выполняется равенство

$$u_{x,t}(x,t) = u_{tx}(x,t); \tag{1.4}$$

б) удовлетворяет условиям (1.2)–(1.3) на границе множества Q и уравнению (1.1) п.в. в Q.

Отметим, что необходимость в условии (1.4) обусловлена тем, что в случае, когда $u_{xt}(x,t)$ и $u_{tx}(x,t)$ не являются непрерывными функциями, это равенство может не выполняться на множестве положительной меры [36].

Для классического решения задачи (1.1)–(1.3) по необходимости должны выполняться условия (далее ссылаемся на них, как на условия (N)):

(N_1) гладкости: $\varphi(x)$, $\varphi'(x)$, $\psi(x)$ абсолютно непрерывны на отрезке $[0,1]$;

(N_2) согласования: $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ и $\psi(0) = \psi(1) = 0$.

Определение 1.3. Задачу (1.1)–(1.3), в которой $f(x,t) \in \mathcal{Q}$, а $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0,1]$, будем называть *обобщённой начально-граничной задачей.*

Возможны только две принципиально разные ситуации:

$$\omega_1 < 0 < \omega_2, \tag{1.5}$$

$$0 < \omega_1 < \omega_2. \tag{1.6}$$

В случае (1.5) соответствующая спектральная задача является регулярной по Биркгофу [23, с. 66-67], а в случае (1.6) — нерегулярной. Далее будем рассматривать только случай (1.5). Нерегулярный случай другим методом рассмотрен в [26].

В случае $\omega_1 = -1$, $\omega_2 = 1$ имеем $p_1 = 0$, $p_2 = -1$, и уравнение (1.1) является классическим уравнением колебания струны

$$u_{xx} - u_{tt} = 0.$$

В [44] и предыдущих работах А. П. Хромова (ссылки приведены в [44]) рассматривался именно такой случай. Как следствие, из результатов настоящей статьи вытекает полученный в [44] результат об обобщённом решении, но представленный в другом виде, не использующем продолжений функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,t)$ на всю вещественную ось. Результаты, излагаемые в настоящей статье, относятся к общему случаю $p_1 \in \mathbb{R}$.

Обобщённое решение задачи (1.1)–(1.3) понимается аналогично соответствующему определению из [30, 33] и основывается на теореме единственности классического решения и представлении этого решения в виде ряда из контурных интегралов [29]. Для того, чтобы дать определение обобщённого решения задачи (1.1)–(1.3), сформулируем эту теорему.

Предварительно введем спектральную задачу

$$L(\lambda)y = 0,$$

порожденную оператор-функцией $L(\lambda)$, определяемой дифференциальным выражением с параметром λ

$$\ell(y,\lambda) := y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y$$

и краевыми условиями типа Дирихле

$$U_1(y) := y(0) = 0, \quad U_2(y) := y(1) = 0.$$

Пусть R_λ есть резольвента оператор-функции $L(\lambda)$, а $G(x,\xi,\lambda)$ её функция Грина. Обозначим через $R_{1\lambda}$ интегральный оператор с ядром $G_\xi(x,\xi,\lambda)$.

Теорема 1.1. *Если $u(x,t)$ есть классическое решение задачи* (1.1)–(1.3), *выполняются условия* (N), (1.5) *и условие, что $u_{tt}(x,t)$ есть функция класса $\mathcal{Q}$, то это решение единственно и находится по формуле*

$$u(x,t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \left(-p_1 e^{\lambda t} R_{1\lambda}\varphi + p_2 e^{\lambda t} \lambda R_\lambda \varphi + p_2 e^{\lambda t} R_\lambda \psi + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_\lambda f(\cdot,\tau)\, d\tau \right) d\lambda, \tag{1.7}$$

в которой ряд справа сходится абсолютно и равномерно по $x \in [0,1]$ при любом фиксированном $t > 0$.

Отметим, что формулы, аналогичные формуле (1.7), уже встречались ранее (например, в работах [1, 3, 25] и многих других).

Из теоремы 1.1 следует, что задача (1.1)–(1.3) и ряд справа в (1.7) тесно связаны, а именно, если эта задача имеет классическое решение, то для него справедлива формула (1.7). При этом функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$ должны удовлетворять условиям (N). Следуя методу, используемому в [43, 44], расширим понятие этой связи.

Ряд справа в (1.7) имеет смысл для любых функций $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0,1]$ и $f(x,t) \in \mathcal{Q}$, хотя теперь он может и не быть сходящимся, т. е., вообще говоря, расходящимся. Будем считать, что он является формальным решением задачи (1.1)–(1.3), но понимаемой теперь чисто формально. Эта задача (1.1)–(1.3) в случае $f(x,t) \in \mathcal{Q}$ и $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0,1]$ в определении 1.3 была названа обобщённой начально-граничной задачей.

Определение 1.4. В случае $f(x,t) \in \mathcal{Q}$ и $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0,1]$ будем называть ряд справа в (1.7) *обобщённым решением* задачи (1.1)–(1.3).

Найти обобщённое решение задачи (1.1)–(1.3) — значит найти «сумму» ряда справа в (1.7) («сумма» в кавычках означает, что это сумма понимается именно как сумма расходящегося ряда).

Трактуя ряд справа в формуле (1.7) изначально как расходящийся [35, 48] и соответствующим образом определяя (или, другими словами, назначая) «сумму» этого ряда, можно, как и в [43, 44], значительно сократить выкладки при получении конечных формул для обобщённого решения и при этом не накладывать никаких дополнительных ограничений на функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$ и $f(x,t)$, предполагая лишь, что $\varphi(x), \psi(x) \in L_1[0,1]$, а $f(x,t) \in \mathcal{Q}$.

В последующих разделах будут сформулированы полученные автором ранее теоремы о формулах для обобщённых решений частных задач вида (1.1)–(1.3) и итоговая теорема о формуле для обобщённого решения задачи (1.1)–(1.3).

Далее, на основе этих формул будут получены соответствующие формулы для классических решений частных задач вида (1.1)–(1.3) и итоговая теорема о формуле для классического решения задачи (1.1)–(1.3).

Затем, как приложение результатов об обобщённом решении неоднородной задачи, будут сформулированы ранее полученные автором результаты об обобщённом решении двух начально-граничных задач с потенциалом q. Первая задача с потенциалом $q = q(x)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = q(x)u(x,t), \tag{1.8}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{1.9}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \tag{1.10}$$

где $(x,t) \in Q = [0,1] \times [0,+\infty)$, $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, функции, входящие в (1.8)–(1.10), комплекснозначные, $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0,1]$, $q(x) \in L_1[0,1]$. Вторая задача с потенциалом $q = q(x,t)$ имеет вид

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + p_1 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x \partial t} + p_2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = q(x,t)u(x,t), \tag{1.11}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{1.12}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad \frac{\partial u(x,0)}{\partial t} = \psi(x), \tag{1.13}$$

где $(x,t) \in Q = [0,1] \times [0,+\infty)$, $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$, функции, входящие в (1.11)–(1.13), комплекснозначные, $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0,1]$, $q(x,t) \in \mathcal{Q}$.

Как понимается обобщённое решение задач (1.8)–(1.10) и (1.11)–(1.13), будет пояснено далее.

2. Конечные формулы для обобщённого решения в случае нулевого потенциала

Решение задачи (1.1)–(1.3) ищется как суперпозиция решений трех более простых задач

$$u(x,t) = u_1(x,t) + u_2(x,t) + u_3(x,t), \tag{2.1}$$

где $u_1(x,t)$ есть решение однородной задачи

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = 0, \tag{2.2}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{2.3}$$

$$u(x,0) = \varphi(x), \quad u_t(x,0) = 0, \tag{2.4}$$

$u_2(x,t)$ есть решение однородной задачи

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = 0, \tag{2.5}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{2.6}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = \psi(x), \tag{2.7}$$

а $u_3(x,t)$ есть решение неоднородной задачи

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = f(x,t), \tag{2.8}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{2.9}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0. \tag{2.10}$$

В случае обобщённой задачи (1.1)–(1.3) конечные формулы для решения получены в [30, 33]. Для дальнейшего изложения эти результаты удобнее представить в несколько другом виде.

Будем использовать следующие обозначения:

$$\alpha(x,t) := \frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}, \quad \beta(x,t) := \frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1}, \quad a := \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}. \tag{2.11}$$

Кроме того, полагаем:

$$\Psi(x) = \int\limits_0^x \psi(\xi)\,d\xi, \quad F(x,t) = \int\limits_0^x f(\xi,t)\,d\xi, \tag{2.12}$$

а $[x]$ и $\{x\}$ будет обозначать, соответственно, целую и дробную части числа $x \in \mathbb{R}$.

Для обобщённого решения $u_1(x,t)$ задачи (2.2)–(2.4) справедлива следующая теорема.

Теорема 2.1. *Пусть* $\varphi(x) \in L_1[0,1]$ *и выполняется условие* (1.5). *Тогда обобщённым решением задачи* (2.2)–(2.4) *является функция* $u_1(x,t) \in \mathcal{Q}$, *определённая для п.в.* $(x,t) \in Q$ *формулой*

$$u_1(x,t) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1}\Big(\widehat{\varphi}\big(\{\alpha(x,t)\}\big) - \widehat{\varphi}\big(\{\beta(x,t)\}\big)\Big), \tag{2.13}$$

где

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} \omega_2 \varphi\Big(\dfrac{\xi}{a}\Big), & \xi \in [0,a); \\ \omega_1 \varphi\Big(\dfrac{1-\xi}{1-a}\Big), & \xi \in [a,1). \end{cases} \tag{2.14}$$

Для обобщённого решения $u_2(x,t)$ задачи (2.5)–(2.7) справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. *Пусть* $\psi(x) \in L_1[0,1]$ *и выполняется условие* (1.5). *Тогда обобщённым решением задачи* (2.5)–(2.7) *является функция* $u_2(x,t) \in \mathcal{Q}$, *определённая для п.в.* $(x,t) \in Q$ *формулой*

$$u_2(x,t) = -\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}\Big(\widetilde{\Psi}\big(\{\alpha(x,t)\}\big) - \widetilde{\Psi}\big(\{\beta(x,t)\}\big)\Big), \tag{2.15}$$

где

$$\widetilde{\Psi}(\xi) = \begin{cases} \Psi\Big(\dfrac{\xi}{a}\Big), & \xi \in [0,a); \\ \Psi\Big(\dfrac{1-\xi}{1-a}\Big), & \xi \in [a,1). \end{cases} \tag{2.16}$$

Для обобщённого решения $u_3(x,t)$ задачи (2.8)–(2.10) справедлива следующая теорема.

Теорема 2.3. *Пусть* $f(x,t) \in \mathcal{Q}$ *и выполняется условие* (1.5). *Тогда обобщённым решением задачи* (2.8)–(2.10) *является функция* $u_3(x,t) \in \mathcal{Q}$, *определённая для п.в.* $(x,t) \in Q$ *формулой*

$$u_3(x,t) = -\frac{1}{\omega_2 - \omega_1}\int\limits_0^t \Big(\widetilde{F}\big(\{\alpha(x,t-\tau)\},\tau\big) - \widetilde{F}\big(\{\beta(x,t-\tau)\},\tau\big)\Big)\,d\tau, \tag{2.17}$$

где

$$\widetilde{F}(\xi,\tau) = \begin{cases} F\Big(\dfrac{\xi}{a},\tau\Big), & \xi \in [0,a); \\ F\Big(\dfrac{1-\xi}{1-a},\tau\Big), & \xi \in [a,1]. \end{cases} \tag{2.18}$$

Формулу (2.17) можно записать в другом виде, а именно, справедлива следующая теорема.

Теорема 2.4. *Пусть* $f(x,t) \in \mathcal{Q}$ *и выполняется условие* (1.5). *Тогда обобщённым решением задачи* (2.8)–(2.10) *является функция* $u_3(x,t) \in \mathcal{Q}$, *определённая для п.в.* $(x,t) \in Q$ *формулой*

$$u_3(x,t) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta\left(\alpha(x,t-\tau)\right)}^{\eta\left(\beta(x,t-\tau)\right)} f(\xi,\tau)\, d\xi, \tag{2.19}$$

где

$$\eta(s) = \frac{\{s\}}{a}\chi\big(a - \{s\}\big) + \frac{1-\{s\}}{1-a}\chi\big(\{s\} - a\big)$$

является непрерывной кусочно-линейной функцией при $s \in (-\infty, +\infty)$ *и удовлетворяет неравенству*

$$0 \leqslant \eta(s) \leqslant 1.$$

На основе формулы (2.1) и теорем 2.1–2.3 можно сформулировать общую теорему о конечной формуле для обобщённого решения задачи (1.1)–(1.3).

Теорема 2.5. *Пусть* $\varphi(x),\ \psi(x) \in L_1[0,1]$, $f(x,t) \in \mathcal{Q}$ *и выполняется условие* (1.5). *Тогда функция* $u(x,t)$, *определённая для п.в.* $(x,t) \in Q$ *формулой*

$$u(x,t) = \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\Big(\widehat{\varphi}\big(\{\alpha(x,t)\}\big) - \widehat{\varphi}\big(\{\beta(x,t)\}\big)\Big) - \frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\Big(\widetilde{\Psi}\big(\{\alpha(x,t)\}\big) - \widetilde{\Psi}\big(\{\beta(x,t)\}\big)\Big) -$$
$$- \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t \Big(\widetilde{F}\big(\{\alpha(x,t-\tau)\},\tau\big) - \widetilde{F}\big(\{\beta(x,t-\tau)\},\tau\big)\Big)\, d\tau,$$

является обобщённым решением задачи (1.1)–(1.3), *где* $\widehat{\varphi}(x)$ *определяется формулой* (2.14), $\widetilde{\Psi}(x)$ *— формулой* (2.16), $\widetilde{F}(x,t)$ *— формулой* (2.18).

Обозначим

$$v(x,t) := \zeta\big(\{\alpha(x,t)\}\big) - \zeta\big(\{\beta(x,t)\}\big), \quad \zeta(x) := \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\Big(\widehat{\varphi}(x) - \omega_1\omega_2\widetilde{\Psi}(x)\Big), \tag{2.20}$$

где функции $\widehat{\varphi}(x)$ и $\widetilde{\Psi}(x)$ определяются формулами (2.14) и (2.16), соответственно.

Используя эти обозначения и пользуясь теоремой 2.4 вместо 2.3 в теореме 2.5, совершенно аналогично можно сформулировать теорему об обобщённом решении задачи (1.1)–(1.3) с итоговой формулой в другом виде.

Теорема 2.6. *Пусть выполняются условия теоремы* 2.5. *Тогда функция* $u(x,t)$, *определённая для п.в.* $(x,t) \in Q$ *формулой*

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta\left(\alpha(x,t-\tau)\right)}^{\eta\left(\beta(x,t-\tau)\right)} f(\xi,\tau)\, d\xi,$$

является обобщённым решением задачи (1.1)–(1.3).

Естественно возникает вопрос, а будут ли формулы для обобщённых решений, приведенные в этом разделе, давать классические решения при соответствующих условиях на параметры задач? В следующем разделах будет получен утвердительный ответ на этот вопрос, что будет являться обоснованием полученных формул для обобщённого решения.

3. Классическое решение на основе формул для обобщённого решения в случае нулевого потенциала

Рассмотрим классическую задачу (1.1)–(1.3). Для получения конечных формул для решения $u(x,t)$ этой задачи, как и в предыдущем разделе, воспользуемся представлением (2.1), где функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ и $u_3(x,t)$ являются решениями классических задач (2.2)–(2.4), (2.5)–(2.7) и (2.8)–(2.10), соответственно. Рассмотрим последовательно эти три задачи.

3.1. Классическое решение в случае $\psi = 0$ и $f = 0$. Рассмотрим задачу (2.2)–(2.4) нахождения классического решения $u_1(x,t)$. В теореме 2.1 для обобщённого решения $u_1(x,t)$ получена формула (2.13). Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.1. *Если $u_1(x,t)$ есть классическое решение задачи* (2.2)–(2.4) *при условии* (1.5), *для которого $u_{1,tt}(x,t) \in \mathcal{Q}$, то это решение единственно и даётся формулой* (2.13).

Доказательство. Справедливость теоремы вытекает из теоремы 2 в [29] о единственности классического решения и формулы для него в виде ряда из контурных интегралов, определения обобщённого решения в [33, с. 101] и теоремы 2.1 о формуле (2.13) для обобщённого решения. □

Оказывается, справедливо и обратное утверждение. А именно, следующее достаточное условие для того, чтобы формула (2.13) давала классическое решение задачи (2.2)–(2.4).

Теорема 3.2. *Если $\varphi(x) \in W_1^2[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$ и выполняется условие* (1.5), *то функция $u_1(x,t)$, определённая для всех $(x,t) \in Q$ формулой* (2.13), *является единственным классическим решением задачи* (2.2)–(2.4), *для которого выполняется условие $u_{1,tt}(x,t) \in \mathcal{Q}$.*

Доказательство. Разобьём доказательство теоремы на несколько пунктов.

1. Покажем, что функция $u_1(x,t)$, определяемая формулой (2.13), при предположениях теоремы удовлетворяет пункту а) определения 1.2 классического решения и, кроме того, является решением уравнения (2.2) в области Q. Для этого сначала установим, что $\breve{\varphi}(\xi) := \widehat{\varphi}(\{\xi\})$ есть абсолютно непрерывная функция на любом отрезке $[A,B] \subset \mathbb{R}$. Пусть $m < \xi < m + a$, где $m \in \mathbb{Z}$. Тогда, так как $\xi - m \in (0,a)$, будем иметь по определению функции $\widehat{\varphi}(x)$

$$\breve{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\{\xi\}) = \widehat{\varphi}(\xi - m) = \omega_2\varphi\left(\frac{\xi - m}{a}\right) = \omega_2\varphi\left(\frac{\{\xi\}}{a}\right). \tag{3.1}$$

То есть $\breve{\varphi}(\xi)$ — абсолютно непрерывная функция на каждом промежутке $(m, m+a)$ при любых $m \in \mathbb{Z}$, или, записывая кратко, $\breve{\varphi}(\xi) \in AC(m, m+a)$ $\forall m \in \mathbb{Z}$. Пусть $m + a < \xi < m + 1$, где $m \in \mathbb{Z}$, тогда, так как $\xi - m \in (a,1)$, аналогично получим из определения функции $\widehat{\varphi}(x)$

$$\breve{\varphi}(\xi) = \widehat{\varphi}(\{\xi\}) = \widehat{\varphi}(\xi - m) = \omega_1\varphi\left(\frac{m + 1 - \xi}{1 - a}\right) = \omega_1\varphi\left(\frac{1 - \{\xi\}}{1 - a}\right), \tag{3.2}$$

а это означает, что $\breve{\varphi}(\xi) \in AC(m + a, m)$ $\forall m \in \mathbb{Z}$. Покажем теперь, что $\breve{\varphi}(\xi)$ непрерывна в точках $\xi = m$ и $\xi = m + a$. На основании формул (3.1), (3.2), непрерывности функции $\varphi(x)$ и предположения теоремы, что $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, получим

1) в точках $\xi = m$

$$\breve{\varphi}(m + 0) = \omega_2\varphi\left(\frac{+0}{a}\right) = \omega_2\varphi(0) = 0,$$

$$\breve{\varphi}(m - 0) = \breve{\varphi}(m + 1 - 0) = \omega_1\varphi\left(\frac{+0}{1 - a}\right) = \omega_1\varphi(0) = 0,$$

а это означает, что $\breve{\varphi}(\xi)$ непрерывна в точках $\xi = m$;

2) в точках $\xi = m + a$

$$\breve{\varphi}(m + a + 0) = \omega_1\varphi\left(\frac{1 - a - 0}{1 - a}\right) = \omega_1\varphi(1) = 0,$$

$$\breve{\varphi}(m + a - 0) = \omega_2\varphi\left(\frac{a - 0}{a}\right) = \omega_2\varphi(1) = 0,$$

а это означает, что $\breve{\varphi}(\xi)$ непрерывна и в точках $\xi = m + a$.

Таким образом, установлено, что $\breve{\varphi}(\xi)$ есть непрерывная кусочно-абсолютно непрерывная функция на любом отрезке $[A,B]$. Но тогда из определения абсолютно непрерывной функции получим, что $\breve{\varphi}(\xi)$ является абсолютно непрерывной функцией и на отрезке $[A,B]$. Этот факт удобно для дальнейшего оформить в виде леммы.

Лемма 3.1. *Непрерывная кусочно-абсолютно непрерывная функция на ограниченном отрезке $[A,B] \subset \mathbb{R}$ является абсолютно непрерывной функцией на этом отрезке.*

Далее, из формул (3.1) и (3.2) следует, что производная функции $\breve{\varphi}(\xi)$ существует на каждом интервале $(m, m+a)$ и $(m+a, m+1)$ при $m \in \mathbb{Z}$, и по условию является абсолютно непрерывной функцией на этих интервалах. На интервале $(m, m+a)$ из формулы (3.1) получим

$$\breve{\varphi}'(\xi) = \frac{\omega_2}{a}\varphi'\left(\frac{\xi - m}{a}\right) = (\omega_2 - \omega_1)\varphi'\left(\frac{\xi - m}{a}\right) = (\omega_2 - \omega_1)\varphi'\left(\frac{\{\xi\}}{a}\right), \tag{3.3}$$

а на интервале $(m+a, m+1)$ на основании формулы (3.2) будем иметь

$$\breve{\varphi}'(\xi) = -\frac{\omega_1}{1-a}\varphi'\left(\frac{m+1-\xi}{1-a}\right) = (\omega_2 - \omega_1)\varphi'\left(\frac{m+1-\xi}{1-a}\right) = (\omega_2 - \omega_1)\varphi'\left(\frac{1-\{\xi\}}{1-a}\right). \tag{3.4}$$

Покажем, что $\breve{\varphi}'(\xi)$ есть абсолютно непрерывная функция на любом отрезке $[A, B]$. Для этого достаточно показать непрерывность $\breve{\varphi}'(\xi)$ в точках $\xi = m$ и $\xi = m+a$. В точке $\xi = m$ на основании формулы (3.3) имеем

$$\breve{\varphi}'(m+0) = (\omega_2 - \omega_1)\varphi'\left(\frac{+0}{a}\right) = (\omega_2 - \omega_1)\varphi'(0),$$

$$\breve{\varphi}'(m-0) = (\omega_2 - \omega_1)\varphi'\left(\frac{+0}{1-a}\right) = (\omega_2 - \omega_1)\varphi'(0),$$

а это и означает, что $\breve{\varphi}'(\xi)$ непрерывна в точках $\xi = m$.

В точке $\xi = m + a$ на основании формулы (3.4) имеем

$$\breve{\varphi}'(m+a+0) = (\omega_2 - \omega_1)\varphi'\left(\frac{1-a-0}{1-a}\right) = (\omega_2 - \omega_1)\varphi'(1),$$

$$\breve{\varphi}'(m+a-0) = (\omega_2 - \omega_1)\varphi'\left(\frac{a-0}{a}\right) = (\omega_2 - \omega_1)\varphi'(1),$$

а это и означает, что $\breve{\varphi}'(\xi)$ непрерывна и в точках $\xi = m + a$. Следовательно, функция $\breve{\varphi}'(\xi)$ есть непрерывная кусочно-абсолютно непрерывная функция на любом отрезке $[A, B]$. Но тогда по лемме 3.1 функция $\breve{\varphi}'(\xi)$ есть абсолютно непрерывная функция на любом отрезке $[A, B]$. А отсюда следует, на основании [24, теорема 3, с. 228], что на любом отрезке $[A, B]$ производная $\breve{\varphi}''(\xi)$ существует для п.в. $\xi \in [A, B]$ и является суммируемой функцией на этом отрезке.

Далее потребуется следующая лемма.

Лемма 3.2. *Если $g(\xi)$ и $g'(\xi)$ есть абсолютно непрерывные функции на любом отрезке $[A, B] \subset \mathbb{R}$, то функции $g(\alpha(x,t))$ и $g(\beta(x,t))$ для п.в. $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ являются решениями уравнения* (2.2). *При этом для п.в. $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ имеют место равенства*

$$\frac{\partial^2 g(\alpha(x,t))}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 g(\alpha(x,t))}{\partial t \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 g(\beta(x,t))}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 g(\beta(x,t))}{\partial t \partial x}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Докажем, например, что функция $g(\alpha(x,t))$ есть решение уравнения (2.2) для п.в. $(x,t) \in \mathbb{R}^2$. Так как $g'(\xi)$ есть абсолютно непрерывная функция на $[A, B]$, а функция $\alpha(x,t)$ есть монотонная функция и по x и по t, то на основании [24, теорема 3, с. 228] функция $g(\alpha(x,t)$ является абсолютно непрерывной и по x и по t для всех (x,t) из области $\{(x,t) : A \leqslant \alpha(x,t) \leqslant B\} =: \Omega_\alpha(A, B)$. Следовательно, для п.в. $(x,t) \in \Omega_\alpha(A, B)$ существуют производные

$$\frac{\partial g(\alpha(x,t))}{\partial x} = g'(\alpha(x,t))\alpha'_x(x,t), \quad \frac{\partial g(\alpha(x,t))}{\partial t} = g'(\alpha(x,t))\alpha'_t(x,t). \tag{3.6}$$

Но так как по той же теореме из [24] $g'(\alpha(x,t))$ есть абсолютно непрерывная функция и по x и по t в области $\Omega_\alpha(A, B)$, то для п.в. $(x,t) \in \Omega_\alpha(A, B)$ существуют производные, определяемые на основании (3.6) следующими формулами:

$$\frac{\partial^2 g(\alpha(x,t))}{\partial x^2} = g''(\alpha(x,t))\left(\alpha'_x(x,t)\right)^2 \qquad (\text{так как } \alpha''_{xx}(x,t) \equiv 0), \tag{3.7}$$

$$\frac{\partial^2 g(\alpha(x,t))}{\partial x \partial t} = g''(\alpha(x,t))\alpha'_x(x,t)\alpha'_t(x,t) \qquad (\text{так как } \alpha''_{tx}(x,t) \equiv 0), \tag{3.8}$$

$$\frac{\partial^2 g(\alpha(x,t))}{\partial t \partial x} = g''(\alpha(x,t))\alpha'_t(x,t)\alpha'_x(x,t) \qquad (\text{так как } \alpha''_{xt}(x,t) \equiv 0), \tag{3.9}$$

$$\frac{\partial^2 g(\alpha(x,t))}{\partial t^2} = g''(\alpha(x,t))\big(\alpha'_t(x,t)\big)^2 \qquad (\text{так как } \alpha''_{tt}(x,t)\equiv 0). \tag{3.10}$$

Из формул (3.8) и (3.9) следует левое равенство в (3.5). Далее, подставим полученные выражения (3.7), (3.8) и (3.10) в левую часть уравнения (2.2). В результате для п.в. $(x,t)\in\Omega_\alpha(A,B)$ получим следующую цепочку равенств с учетом того, что по теореме Виета $p_1 = -(\omega_1+\omega_2)$ и $p_2=\omega_1\omega_2$:

$$\frac{\partial^2 g\big(\alpha(x,t)\big)}{\partial x^2} + p_1\frac{\partial^2 g\big(\alpha(x,t)\big)}{\partial x\partial t} + p_2\frac{\partial^2 g\big(\alpha(x,t)\big)}{\partial t^2} =$$
$$= g''\big(\alpha(x,t)\big)\Big(\big(\alpha'_x(x,t)\big)^2 + p_1\alpha'_x(x,t)\alpha'_t(x,t) + p_2\big(\alpha'_t(x,t)\big)^2\Big) =$$
$$= g''\big(\alpha(x,t)\big)\left(\frac{\omega_2^2}{(\omega_2-\omega_1)^2} - \frac{(\omega_1+\omega_2)\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{1}{\omega_2-\omega_1} + \frac{\omega_1\omega_2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\right) =$$
$$= g''\big(\alpha(x,t)\big)\cdot\frac{1}{(\omega_2-\omega_1)^2}\cdot\big(\omega_2^2-\omega_1\omega_2-\omega_2^2+\omega_1\omega_2\big) = 0.$$

Так как A и B — произвольные числа, то функция $g(\alpha(x,t))$ будет удовлетворять уравнению (2.2) для п.в. $(x,t)\in\mathbb{R}^2$. Тем самым утверждение леммы доказано для $g(\alpha(x,t))$. Для $g(\beta(x,t))$ утверждение леммы доказывается аналогично. Таким образом, лемма 3.2 доказана. □

Так как функция $\breve{\varphi}(\xi)$ удовлетворяет предположениям леммы 3.2, то для п.в. $(x,t)\in\mathbb{R}^2$ функции $\breve{\varphi}(\alpha(x,t))$ и $\breve{\varphi}(\beta(x,t))$ для п.в. $(x,t)\in\mathbb{R}^2$ являются решениями уравнения (2.2), для которых при п.в. $(x,t)\in\mathbb{R}^2$ выполняются равенства

$$\frac{\partial^2\breve{\varphi}(\alpha(x,t))}{\partial x\partial t} = \frac{\partial^2\breve{\varphi}(\alpha(x,t))}{\partial t\partial x}, \qquad \frac{\partial^2\breve{\varphi}(\beta(x,t))}{\partial x\partial t} = \frac{\partial^2\breve{\varphi}(\beta(x,t))}{\partial t\partial x}.$$

Следовательно, в силу определения $\breve{\varphi}(\xi)$ из предыдущего заключаем, что функция $u_1(x,t)$, выражающаяся формулой (2.13), при предположениях теоремы удовлетворяет пункту а) определения 1.2 классического решения и, кроме того, для п.в. $(x,t)\in\mathbb{R}^2$ (а, значит, и в Q) удовлетворяет уравнению (2.2).

2. Далее будем рассматривать $(x,t)\in Q$. Проверим выполнение для $u_1(x,t)$ граничных условий (2.3). Из формулы (2.13) следует при всех $t\geqslant 0$

$$u_1(0,t) = \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\Big(\widehat{\varphi}\big(\{\alpha(0,t)\}\big) - \widehat{\varphi}\big(\{\beta(0,t)\}\big)\Big) =$$
$$= \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\widehat{\varphi}\left(\left\{\frac{t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right) - \widehat{\varphi}\left(\left\{\frac{t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right) = 0,$$

$$u_1(1,t) = \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\Big(\widehat{\varphi}\big(\{\alpha(1,t)\}\big) - \widehat{\varphi}\big(\{\beta(1,t)\}\big)\Big) =$$
$$= \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\widehat{\varphi}\left(\left\{\frac{\omega_2+t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right) - \widehat{\varphi}\left(\left\{\frac{\omega_1+t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\widehat{\varphi}\left(\left\{\frac{\omega_2+t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right) - \widehat{\varphi}\left(\left\{1+\frac{\omega_1+t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right) =$$
$$= \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\widehat{\varphi}\left(\left\{\frac{\omega_2+t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right) - \widehat{\varphi}\left(\left\{\frac{\omega_2+t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right) = 0.$$

Таким образом, функция $u_1(x,t)$, определяемая формулой (2.13), удовлетворяет граничным условиям (2.3) в области Q.

3. Проверим для функции $u_1(x,t)$, определяемой формулой (2.13), выполнение начальных условий (2.4). В силу определения функции $\widehat{\varphi}(\xi)$ из формулы (2.13) следует при всех $x\in[0,1]$

$$u_1(x,0)=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\widehat{\varphi}\left(\left\{\frac{\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)-\widehat{\varphi}\left(\left\{\frac{\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\omega_2\widehat{\varphi}\left(\frac{\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\right)-\widehat{\varphi}\left(\left\{1+\frac{\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\omega_2\varphi(x)-\widehat{\varphi}\left(\left\{\frac{\omega_2-\omega_1(1-x)}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\omega_2\varphi(x)-\omega_1\varphi\left(\frac{1}{1-a}\left(1-\frac{(\omega_2-\omega_1)+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right)\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\omega_2\varphi(x)-\omega_1\varphi\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{-\omega_1}\cdot\frac{-\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right)\right)=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\big(\omega_2\varphi(x)-\omega_1\varphi(x)\big)=\varphi(x),$$

т. е. первое начальное условие (2.4) для функции $u_1(x,t)$ выполняется. Для проверки второго начального условия (2.4) нужно найти производную $u'_{1t}(x,t)$ в достаточно узкой полосе в множестве Q

$$\Pi_\delta=\big\{(x,t)\in Q: x\in[\delta,\,1-\delta],\ t\in\big[0,\,\varepsilon(\delta)\big],\ \varepsilon(\delta)=\min\{-\omega_1\delta,\omega_2\delta\}\big\}, \tag{3.11}$$

примыкающей к отрезку $x\in[\delta,1-\delta]$ ($\delta>0$ и достаточно мало).

Если $(x,t)\in\Pi_\delta$, то

$$\alpha(x,t)=\frac{\omega_2 x+t}{\omega_2-\omega_1}<\frac{\omega_2(1-\delta)+\omega_2\delta}{\omega_2-\omega_1}=\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}=a;$$

$$\alpha(x,t)=\frac{\omega_2 x+t}{\omega_2-\omega_1}>\frac{\omega_2\delta}{\omega_2-\omega_1}>0;$$

$$1+\beta(x,t)=1+\frac{\omega_1 x+t}{\omega_2-\omega_1}<1+\frac{\omega_1\delta-\omega_1\delta}{\omega_2-\omega_1}=1;$$

$$1+\beta(x,t)=1+\frac{\omega_1 x+t}{\omega_2-\omega_1}>1+\frac{\omega_1(1-\delta)}{\omega_2-\omega_1}=a-\frac{\omega_1\delta}{\omega_2-\omega_1}>a.$$

Следовательно, при $(x,t)\in\Pi_\delta$

$$u_1(x,t)=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\big(\widehat{\varphi}(\alpha(x,t))-\widehat{\varphi}(1+\beta(x,t))\big)=$$

$$=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\omega_2\varphi\left(\frac{\omega_2 x+t}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2}\right)-\omega_1\varphi\left(\frac{-\omega_1 x-t}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{\omega_2-\omega_1}{-\omega_1}\right)\right)=$$

$$=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\omega_2\varphi\left(x+\frac{t}{\omega_2}\right)-\omega_1\varphi\left(x+\frac{t}{\omega_1}\right)\right),$$

откуда получаем формулу для производной при $(x,t)\in\Pi_\delta$ вида

$$u'_{1,t}(x,t)=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\varphi'\left(x+\frac{t}{\omega_2}\right)-\varphi'\left(x+\frac{t}{\omega_1}\right)\right).$$

В результате будем иметь при $x\in[\delta,1-\delta]$ и $t=0$

$$u'_{1,t}(x,0)=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}(\varphi'(x)-\varphi'(x))=0,$$

а в силу непрерывности $u'_{1,t}(x,0)$ и произвольности $\delta>0$ получим

$$u'_{1,t}(0,0)=u'_{1,t}(1,0)=0.$$

Следовательно,

$$u'_{1,t}(x,0)\equiv 0\quad\forall x\in[0,1],$$

т. е. и второе начальное условие (2.4) для функции $u_1(x,t)$ выполнятся. Тем самым, на основании пунктов 1–3 можно заключить, что функция $u_1(x,t)$, определяемая формулой (2.13), при выполнении предположений теоремы является классическим решением задачи (2.2)–(2.4).

4. Покажем теперь, что функция $u_{1,tt}(x,t)$, где $u_1(x,t)$ определяется формулой (2.13), при выполнении предположений теоремы есть функция класса $\mathcal{Q}$.

Из определения функции $u_1(x,t)$ получим

$$u_{1,tt}(x,t) = \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\frac{\partial^2\breve{\varphi}(\alpha(x,t))}{\partial t^2} - \frac{\partial^2\breve{\varphi}(\beta(x,t))}{\partial t^2}\right).$$

Отсюда, используя формулу (3.10) для второй производной, найдём

$$u_{1,tt}(x,t) = \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\breve{\varphi}''(\alpha(x,t))(\alpha'_t(x,t))^2 - \breve{\varphi}''(\beta(x,t))(\beta'_t(x,t))^2\right). \tag{3.12}$$

В пункте 1 доказательства было установлено, что при предположениях теоремы функция $\breve{\varphi}_{tt}(x)$ является суммируемой на любом конечном отрезке $[A,B]\subset\mathbb{R}^2$, а значит, и измеримой на любом таком отрезке. Ввиду линейности функций $\alpha(x,t)$ и $\beta(x,t)$ отсюда следует, что функции $\breve{\varphi}''(\alpha(x,t))$ и $\breve{\varphi}''(\beta(x,t))$ измеримы в области Q_T при любом $T>0$. Покажем, что эти функции суммируемы в любой такой области. Рассмотрим для примера функцию $\breve{\varphi}''(\alpha(x,t))$. Из вышеизложенного следует, что эта функция суммируема по $x\in[0,1]$ для п.в. $t\in[0,T]$ и по $t\in[0,T]$ для п.в. $x\in[0,1]$. На основании теоремы 2 из [24, с. 335] и следствия из неё [24, с. 336] можно заключить, что для суммируемости $\breve{\varphi}''(\alpha(x,t))$ в Q_T при любом $T>0$ достаточно установить неравенство

$$\int\limits_0^T dt\int\limits_0^1 \left|\breve{\varphi}''(\alpha(x,t))\right| dx < +\infty. \tag{3.13}$$

Делая внутри интеграла в (3.13) замену $\alpha(x,t)=s$ и вводя число $k\in\mathbb{N}$ такое, что

$$k = \Big[(\omega_2+T)/(\omega_2\omega_1)\Big]$$

(напомним, что здесь $[x]$ обозначает целую часть числа x), получим

$$\int\limits_0^T dt\int\limits_0^1 \left|\breve{\varphi}''(\alpha(x,t))\right| dx = \frac{1}{a}\int\limits_0^T dt\int\limits_{\frac{t}{\omega_2-\omega_1}}^{\frac{\omega_2+t}{\omega_2-\omega_1}} \left|\breve{\varphi}''(s)\right| ds \leqslant \frac{1}{a}\int\limits_0^T dt\int\limits_0^{\frac{\omega_2+T}{\omega_2-\omega_1}} \left|\breve{\varphi}''(s)\right| ds \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{a}\int\limits_0^T d\tau\int\limits_0^{k+1} \left|\widehat{\varphi}''(\{s\})\right| ds = \frac{T}{a}\sum_{j=0}^{k}\int\limits_0^1 \left|\widehat{\varphi}''(s)\right| ds =$$

$$= \frac{T(k+1)}{a}\left(\omega_2\int\limits_0^a \frac{1}{a^2}\left|\varphi''\left(\frac{s}{a}\right)\right| ds + |\omega_1|\int\limits_a^1 \frac{1}{(1-a)^2}\left|\varphi''\left(\frac{1-s}{1-a}\right)\right| ds\right) =$$

$$= \frac{T(k+1)}{a}\left(\frac{\omega_2}{a}\int\limits_0^1 \left|\varphi''(x)\right| dx + \frac{|\omega_1|}{1-a}\int\limits_0^1 \left|\varphi''(x)\right| d\xi\right) = \frac{2T(\omega_2-\omega_1)^2(k+1)}{\omega_2}\times$$

$$\times\|\varphi''(x)\|_{L_1[0,1]} \leqslant \frac{2T(\omega_2-\omega_1)^2}{\omega_2}\left(\left[\frac{\omega_2+T}{\omega_2-\omega_1}\right]+1\right)\|\varphi''(x)\|_{L_1[0,1]} = C(T)\|\varphi''(x)\|_{L_1[0,1]} < +\infty,$$

т. е. неравенство (3.13) установлено. Следовательно, $\breve{\varphi}''(\alpha(x,t))\in\mathcal{Q}$. Совершенно аналогично доказывается, что и $\breve{\varphi}''(\beta(x,t))\in\mathcal{Q}$. Таким образом, на основании (3.12) приходим к выводу, что $u_{1,tt}(x,t)\in\mathcal{Q}$, а это доказывает единственность классического решения $u_1(x,t)$, если воспользоваться теоремой 2 из [29]. Тем самым, теорема 3.2 полностью доказана. $\square$

Из теорем 3.1 и 3.2 вытекает следующая теорема о необходимых и достаточных условиях классического решения задачи (2.2)–(2.4).

Теорема 3.3. *Для того, чтобы функция* $u_1(x,t)$, *определённая формулой* (2.13), *была единственным классическим решением задачи* (2.2)–(2.4) *при условии* (1.5), *необходимо и достаточно, чтобы* $\varphi(x) \in W_1^2[0,1]$, $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

3.2. Классическое решение в случае $\varphi = 0$ **и** $f = 0$. Рассмотрим задачу (2.5)–(2.7) нахождения классического решения $u_2(x,t)$. В теореме 2.2 для обобщённого решения $u_2(x,t)$ получена формула (2.15). Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.4. *Если* $u_2(x,t)$ *есть классическое решение задачи* (2.5)–(2.7) *при условии* (1.5), *для которого* $u_{2,tt}(x,t) \in \mathcal{Q}$, *то это решение единственно и даётся формулой* (2.15).

Доказательство. Справедливость теоремы вытекает из теоремы 2 в [29] о единственности классического решения и формулы для него в виде ряда из контурных интегралов, определения обобщённого решения в [33, с. 101] и теоремы 2.2 о формуле (2.15) для обобщённого решения. $\square$

Оказывается справедливо и обратное утверждение, а именно, следующее достаточное условие для того, чтобы формула (2.15) давала классическое решение задачи (2.5)–(2.7).

Теорема 3.5. *Если* $\psi(x) \in W_1^1[0,1]$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$ *и выполняется условие* (1.5), *то функция* $u_2(x,t)$, *определённая для всех* $(x,t) \in Q$ *формулой* (2.15), *является единственным классическим решением задачи* (2.5)–(2.7), *для которого выполняется условие* $u_{2,tt}(x,t) \in \mathcal{Q}$.

Доказательство. Разобьём доказательство теоремы на несколько пунктов.

1. Покажем, что $u_2(x,t)$, определяемая формулой (2.15), при предположениях теоремы удовлетворяет пункту a) определения 1.2 классического решения и, кроме того, является решением уравнения (2.5) в области Q.

Для этого сначала установим, что $\breve{\Psi}(\xi) := \widetilde{\Psi}(\{\xi\})$ есть абсолютно непрерывная функция на любом отрезке $[A,B] \subset \mathbb{R}$.

Пусть $m < \xi < m + a$, где $m \in \mathbb{Z}$. Тогда, так как $\xi - m \in (0,a)$, будем иметь по определению функции $\widetilde{\Psi}(x)$ (см. формулу (2.16))

$$\breve{\Psi}(\xi) = \widetilde{\Psi}(\{\xi\}) = \widetilde{\Psi}(\xi - m) = \Psi\left(\frac{\xi - m}{a}\right) = \Psi\left(\frac{\{\xi\}}{a}\right). \tag{3.14}$$

То есть $\breve{\Psi}(\xi) \in AC(m, m+a)\ \forall m \in \mathbb{Z}$.

Пусть $m + a < \xi < m + 1$, где $m \in \mathbb{Z}$, тогда, так как $\xi - m \in (a,1)$, аналогично получим из определения функции $\widetilde{\Psi}(x)$

$$\breve{\Psi}(\xi) = \widetilde{\Psi}(\{\xi\}) = \widetilde{\Psi}(\xi - m) = \Psi\left(\frac{m + 1 - \xi}{1 - a}\right) = \Psi\left(\frac{1 - \{\xi\}}{1 - a}\right), \tag{3.15}$$

а это означает, что $\breve{\Psi}(\xi) \in AC(m+a, m)\ \forall m \in \mathbb{Z}$. Покажем теперь, что $\breve{\Psi}(\xi)$ непрерывна в точках $\xi = m$ и $\xi = m + a$. На основании формул (3.14), (3.15) и в силу непрерывности функции $\Psi(x)$ на отрезке $[0,1]$ (см. формулу (2.12)), получим:

$$\breve{\Psi}(m+0) = \Psi\left(\frac{+0}{a}\right) = \Psi(0), \quad \breve{\Psi}(m-0) = \breve{\Psi}(m+1-0) = \Psi\left(\frac{+0}{1-a}\right) = \Psi(0),$$

а это означает, что $\breve{\Psi}(\xi)$ непрерывна в точках $\xi = m$;

$$\breve{\Psi}(m+a+0) = \Psi\left(\frac{1-a-0}{1-a}\right) = \Psi(1), \quad \breve{\Psi}(m+a-0) = \Psi\left(\frac{a-0}{a}\right) = \Psi(1),$$

а это означает, что $\breve{\Psi}(\xi)$ непрерывна и в точках $\xi = m + a$.

Таким образом, установлено, что $\breve{\Psi}(\xi)$ есть непрерывная кусочно-абсолютно непрерывная функция на любом отрезке $[A,B]$. Но тогда по лемме 3.1 функция $\breve{\Psi}(\xi)$ является абсолютно непрерывной функцией на отрезке $[A,B]$.

Далее, из формул (3.14) и (3.15) следует, что производная функции $\breve{\Psi}(\xi)$ существует на каждом интервале $(m, m+a)$ и $(m+a, m+1)$ при $m \in \mathbb{Z}$ и по условию является абсолютно непрерывной функцией на этих интервалах.

На интервале $(m, m+a)$ из формулы (3.14) и определения функции $\Psi(x)$ получим

$$\breve{\Psi}'(\xi) = \frac{1}{a} \cdot \psi\left(\frac{\xi - m}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \psi\left(\frac{\{\xi\}}{a}\right), \tag{3.16}$$

а на интервале $(m+a, m+1)$ на основании формулы (3.15) аналогично будем иметь

$$\breve{\Psi}'(\xi) = -\frac{1}{1-a} \cdot \psi\left(\frac{m+1-\xi}{1-a}\right) = -\frac{1}{1-a} \cdot \psi\left(\frac{1-\{\xi\}}{1-a}\right). \tag{3.17}$$

Покажем, что $\breve{\Psi}'(\xi)$ есть абсолютно непрерывная функция на любом отрезке $[A, B]$. Так как функция $\psi(x)$ по предположению теоремы непрерывна на $[0,1]$, то для этого достаточно показать непрерывность $\breve{\Psi}'(\xi)$ в точках $\xi = m$ и $\xi = m+a$. В точке $\xi = m$ на основании формул (3.16), (3.17) и предположений теоремы, что $\psi(0) = \psi(1) = 0$, имеем

$$\breve{\Psi}'(m+0) = \frac{1}{a} \cdot \psi\left(\frac{+0}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \psi(0) = 0,$$

$$\breve{\Psi}'(m-0) = \breve{\Psi}'(m+1-0) = -\frac{1}{1-a} \cdot \psi\left(\frac{+0}{1-a}\right) = -\frac{1}{1-a} \cdot \psi(0) = 0,$$

а это и означает, что $\breve{\Psi}'(\xi)$ непрерывна в точках $\xi = m$.

В точке $\xi = m + a$ на основании формул (3.16) и (3.17) аналогично имеем

$$\breve{\Psi}'(m+a+0) = -\frac{1}{1-a} \cdot \psi\left(\frac{1-a-0}{1-a}\right) = -\frac{1}{1-a} \cdot \psi(1) = 0,$$

$$\breve{\Psi}'(m+a-0) = \frac{1}{a} \cdot \varphi'\left(\frac{a-0}{a}\right) = \frac{1}{a} \cdot \psi(1) = 0,$$

а это и означает, что $\breve{\Psi}'(\xi)$ непрерывна и в точках $\xi = m + a$. Следовательно, функция $\breve{\Psi}'(\xi)$ есть непрерывная кусочно-абсолютно непрерывная функция на любом отрезке $[A, B]$. Но тогда по лемме 3.1 функция $\breve{\Psi}'(\xi)$ есть абсолютно непрерывная функция на любом отрезке $[A, B]$. Из формул (3.16) и (3.17) следует, на основании [24, теорема 3, с. 228], что на любом отрезке $[A, B]$ производная $\breve{\Psi}''(\xi)$ существует для п.в. $\xi \in [A, B]$ и является суммируемой функцией на этом отрезке. Так как функция $\breve{\Psi}(\xi)$ удовлетворяет предположениям леммы 3.2, то для п.в. $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ функции $\breve{\Psi}(\alpha(x,t))$ и $\breve{\Psi}(\beta(x,t))$ для п.в. $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ являются решениями уравнения (2.5), для которых при п.в. $(x,t) \in \mathbb{R}^2$ выполняются равенства

$$\frac{\partial^2 \breve{\Psi}(\alpha(x,t))}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \breve{\Psi}(\alpha(x,t))}{\partial t \partial x}, \qquad \frac{\partial^2 \breve{\Psi}(\beta(x,t))}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 \breve{\Psi}(\beta(x,t))}{\partial t \partial x}.$$

Следовательно, на основании определения функции $\breve{\Psi}(\xi)$ из предыдущего заключаем, что функция $u_2(x,t)$, выражающаяся формулой (2.15), при предположениях теоремы удовлетворяет пункту а) определения 1.2 классического решения и, кроме того, для п.в. $(x,t) \in \mathbb{R}^2$, а значит, и в области Q, удовлетворяет уравнению (2.5).

2. Далее будем рассматривать $(x,t) \in Q$. Проверим выполнение для $u_2(x,t)$ граничных условий (2.6). Из формулы (2.15) для $u_2(x,t)$ следует при всех $t \geqslant 0$

$$u_2(0,t) = -\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\Big(\widetilde{\Psi}\big(\{\alpha(0,t)\}\big) - \widetilde{\Psi}\big(\{\beta(0,t)\}\big)\Big) =$$
$$= -\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\left(\widetilde{\Psi}\left(\left\{\frac{t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right) - \widetilde{\Psi}\left(\left\{\frac{t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right) = 0,$$

$$u_2(1,t) = -\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\Big(\widetilde{\Psi}\big(\{\alpha(1,t)\}\big) - \widetilde{\Psi}\big(\{\beta(1,t)\}\big)\Big) =$$
$$= -\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\left(\widetilde{\Psi}\left(\left\{\frac{\omega_2+t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right) - \widehat{\varphi}\left(\left\{\frac{\omega_1+t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right) =$$

$$= -\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\left(\widetilde{\Psi}\left(\left\{\frac{\omega_2+t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right) - \widetilde{\Psi}\left(\left\{1+\frac{\omega_1+t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right) =$$

$$= -\frac{\omega_1\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\left(\widetilde{\Psi}\left(\left\{\frac{\omega_2+t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right) - \widetilde{\Psi}\left(\left\{\frac{\omega_2+t}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right) = 0.$$

Таким образом, функция $u_2(x,t)$, определяемая формулой (2.15), удовлетворяет граничным условиям (2.6) в области Q.

3. Проверим теперь для функции $u_2(x,t)$, определяемой формулой (2.15), выполнение начальных условий (2.7). Из формулы (2.15) для $u_2(x,t)$ следует в силу определения $\widetilde{\Psi}(\xi)$ (см. формулу (2.15)) при всех $x \in [0,1]$

$$u_2(x,0) = \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\widetilde{\Psi}\left(\left\{\frac{\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right) - \widetilde{\Psi}\left(\left\{\frac{\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right) =$$

$$= -\frac{\omega_1\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\left(\widetilde{\Psi}\left(\frac{\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\right) - \widetilde{\Psi}\left(\left\{1+\frac{\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right\}\right)\right) =$$

$$= -\frac{\omega_1\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\left(\Psi(x) - \widetilde{\Psi}\left(1+\frac{\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right)\right) = -\frac{\omega_1\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\left(\Psi(x) - \Psi\left(\frac{1}{1-a}\left(\frac{-\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right)\right)\right) =$$

$$= -\frac{\omega_1\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\left(\Psi(x) - \Psi\left(\frac{\omega_2-\omega_1}{-\omega_1}\cdot\frac{-\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right)\right) = -\frac{\omega_1\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\big(\Psi(x)-\Psi(x)\big) = 0,$$

т. е. первое начальное условие (2.7) для функции $u_2(x,t)$ выполнятся.

Для проверки второго начального условия (2.7) нужно найти производную $u'_{2t}(x,t)$ в полосе Π_δ отрезка $x \in [\delta, 1-\delta]$, определённой в предыдущем подразделе формулой (3.11) ($\delta > 0$ и достаточно мало). Тогда, как и в предыдущем случае, получим при $(x,t) \in \Pi_\delta$

$$\alpha(x,t) \in (0,a), \qquad 1+\beta(x,t) \in (a,1).$$

Следовательно, при $(x,t) \in \Pi_\delta$ получим формулу

$$u_2(x,t) = -\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\left(\widetilde{\Psi}\big(\{\alpha(x,t)\}\big) - \widetilde{\Psi}\big(\{\beta(x,t)\}\big)\right) =$$

$$= -\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\left(\Psi\left(\frac{\omega_2 x+t}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2}\right) - \Psi\left(\frac{-\omega_1 x - t}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{\omega_2-\omega_1}{-\omega_1}\right)\right) =$$

$$= -\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\left(\Psi\left(x+\frac{t}{\omega_2}\right) - \Psi\left(x+\frac{t}{\omega_1}\right)\right),$$

откуда при $(x,t) \in \Pi_\delta$ найдём следующую формулу для производной:

$$u'_{2,t}(x,t) = -\frac{\omega_1\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\left(\psi\left(x+\frac{t}{\omega_2}\right)\frac{1}{\omega_2} - \psi\left(x+\frac{t}{\omega_1}\right)\frac{1}{\omega_1}\right).$$

В результате будем иметь при $x \in [\delta, 1-\delta]$ и $t = 0$

$$u'_{2,t}(x,0) = -\frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\psi(x) + \frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\psi(x) = \psi(x),$$

а в силу непрерывности $u_{2,t}(x,0)$ и произвольности $\delta > 0$ получим

$$u'_{2,t}(0,0) = \psi(0), \qquad u'_{2,0}(1,0) = \psi(1).$$

Следовательно,

$$u'_{2,t}(x,0) \equiv \psi(x) \qquad \forall x \in [0,1],$$

т. е. и второе начальное условие (2.7) для функции $u_2(x,t)$ выполняется. Тем самым на основании пунктов 1–3 доказано, что функция $u_2(x,t)$, определяемая формулой (2.15), при выполнении предположений теоремы является классическим решением начально-краевой задачи (2.5)–(2.7). То, что $u_{2,tt}(x,t)$ есть функция класса $\mathcal{Q}$, показывается совершенно аналогично тому, как это было сделано для $u_{1,tt}(x,t)$ в предыдущем подразделе. На основании теоремы 2 из [29] это доказывает единственность классического решения $u_2(x,t)$. Тем самым теорема 3.5 полностью доказана. □

Из теорем 3.4 и 3.5, а также теоремы 2 из [29] о единственности классического решения вытекает следующая теорема о необходимых и достаточных условиях классического решения задачи (2.5)–(2.7).

Теорема 3.6. *Для того, чтобы функция* $u_2(x,t)$, *определённая формулой* (2.15), *была единственным классическим решением задачи* (2.5)–(2.7) *при условии* (1.5), *необходимо и достаточно, чтобы* $\psi(x) \in W_1^1[0,1]$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$.

3.3. Классическое решение в случае $\varphi = 0$ и $\psi = 0$. Рассмотрим задачу (2.8)–(2.10). В разделе 2 в теореме 2.3 для обобщённого решения $u_3(x,t)$ получена формула (2.17). Справедлива следующая теорема.

Теорема 3.7. *Если* $u_3(x,t)$ *есть классическое решение задачи* (2.8)–(2.10) *при условии* (1.5), *для которого* $u_{3,tt}(x,t) \in \mathcal{Q}$, *то это решение единственно и даётся формулой* (2.17).

Доказательство. Справедливость теоремы вытекает из теоремы 2 в [29] о единственности классического решения и формулы для него в виде ряда из контурных интегралов, определения обобщённого решения в [33, с. 101] и теоремы 2.3 о формуле (2.17) для обобщённого решения. □

Оказывается справедливо и обратное утверждение, а именно, следующее достаточное условие для того, чтобы формула (2.17) давала классическое решение задачи (2.8)–(2.10).

Теорема 3.8. *Если* $f(x,t)$ *абсолютно непрерывна по* t *при п.в.* $x \in [0,1]$, $f_t'(x,t) \in \mathcal{Q}$ *и выполняется условие* (1.5), *то функция* $u_3(x,t)$, *определённая для всех* $(x,t) \in Q$ *формулой* (2.17), *является единственным классическим решением задачи* (2.8)–(2.10), *для которого выполняется условие* $u_{3,tt}(x,t) \in \mathcal{Q}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию $\breve{F}(\xi,\tau) = \widetilde{F}(\{\xi\},\tau)$. Аналогичная функция $\breve{\Psi}(\xi)$, но одной переменной, уже рассматривалась в доказательстве теоремы 3.5 (волна над функцией $\Psi(\xi)$ и функцией $F(\xi,\tau)$ по переменной ξ имеет одинаковый смысл). Используя те же рассуждения, что и для функции $\breve{\Psi}(\xi)$, можно аналогично установить, что $\breve{F}(\xi,\tau)$ есть абсолютно непрерывная функция по ξ на любом отрезке $[A,B] \subset \mathbb{R}$. Из условия теоремы следует, что и по τ эта функция абсолютно непрерывна на любом отрезке $[0,T]$, где $T > 0$. При этом для $\xi \in (m, m+a)$, где $m \in \mathbb{Z}$, имеем по определению функции $\widetilde{F}(\xi,\tau)$ (см. (2.18))

$$\breve{F}(\xi,\tau) = \widetilde{F}(\{\xi\},\tau) = \widetilde{F}(\xi - m,\tau) = F\left(\frac{\xi - m}{a},\tau\right),$$

т. е. на основании формулы (2.12) для функции $F(\xi,\tau)$ при п.в. $\xi \in (m, m+a)$ получим выражение

$$\breve{F}_\xi(\xi,\tau) = \frac{\partial}{\partial \xi} F\left(\frac{\xi - m}{a},\tau\right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \int\limits_0^{\frac{\xi - m}{a}} f(\xi_1,\tau)\,d\xi_1 = \frac{1}{a} \cdot f\left(\frac{\xi - m}{a},\tau\right) = \frac{1}{a} \cdot f\left(\frac{\{\xi\}}{a},\tau\right). \quad (3.18)$$

В случае $\xi \in (m+a, m+1)$ аналогично получим

$$\breve{F}(\xi,\tau) = \tilde{F}(\{\xi\},\tau) = \tilde{F}(\xi - m,\tau) = F\left(\frac{m+1-\xi}{1-a},\tau\right),$$

т. е. при п.в. $\xi \in (m+a, m+1)$ будем иметь представление

$$\breve{F}_\xi(\xi,\tau) = \frac{\partial}{\partial \xi} F\left(\frac{m+1-\xi}{1-a},\tau\right) = \frac{\partial}{\partial \xi} \int\limits_0^{\frac{m+1-\xi}{1-a}} f(\xi_1,\tau)\,d\xi_1 =$$
$$= \frac{1}{a-1} \cdot f\left(\frac{m+1-\xi}{1-a},\tau\right) = \frac{1}{a-1} \cdot f\left(\frac{1-\{\xi\}}{1-a},\tau\right). \quad (3.19)$$

Так как $\alpha(x,t-\tau)$ и $\beta(x,t-\tau)$ суть линейные функции и по x, и по t (см. определение этих функций в (2.11)), то функции $\breve{F}(\alpha(x,t-\tau),\tau)$ и $\breve{F}(\beta(x,t-\tau),\tau)$ суть абсолютно непрерывные функции и по x, и по t в Q_T для всех $T>0$. С использованием функции $\breve{F}(\xi,\tau)$ формулу (2.17) можно записать в виде

$$u_3(x,t) = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t \Big(\breve{F}\big(\alpha(x,t-\tau),\tau\big) - \breve{F}\big(\beta(x,t-\tau),\tau\big)\Big)\,d\tau = v_1(x,t) - v_2(x,t). \tag{3.20}$$

Покажем, что функция $u_3(x,t)$, определяемая этой формулой, при условиях теоремы будет классическим решением задачи (2.8)–(2.10). Это требует достаточно длинных рассуждений, но с идейной точки зрения эти рассуждения мало отличаются от соответствующих рассуждений из [45, с. 289–293] в случае, когда $p_1=0$, т. е. когда $\omega_1=-1$ и $\omega_2=1$. Поэтому эти рассуждения проведем без излишних подробностей. Найдём первые частные производные от $v_1(x,t)$. Для производной по x будем иметь для всех $(x,t)\in Q$

$$\frac{\partial v_1(x,t)}{\partial x} = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_0^t \breve{F}\big(\alpha(x,t-\tau),\tau\big)\,d\tau = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t \breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t-\tau),\tau\big)\alpha'_x(x,t-\tau)\,d\tau, \tag{3.21}$$

где $\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t-\tau),\tau\big)$ понимается следующим образом:

$$\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t-\tau),\tau\big) = \breve{F}_\xi(\xi,\tau)\big|_{\xi=\alpha(x,t-\tau)}.$$

Если $\breve{F}_\xi(\xi,\tau)$ — непрерывная функция по ξ и τ, то формула (3.21) получается обычным дифференцированием интеграла $v_1(x,t)$ по формуле Ньютона—Лейбница. Если же функция $\breve{F}_\xi(\xi,\tau)$ не является непрерывной (а в нашем случае она, вообще говоря, суммируема по ξ), то, тем не менее, эта формула также верна (обоснование формулы (3.21) и аналогичных формул, как уже было указано выше, можно найти в [45, с. 289–293]). Из вида $\alpha(x,t-\tau)$ и формулы (3.21) получим выражение для производной по x для всех $(x,t)\in Q$

$$\frac{\partial v_1(x,t)}{\partial x} = -\frac{\omega_2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\int\limits_0^t \breve{F}_\xi\Big(\alpha(x,t-\tau),\tau\Big)\,d\tau. \tag{3.22}$$

Совершенно аналогично получаем выражение для производной по t для всех $(x,t)\in Q$

$$\frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_0^t \breve{F}\big(\alpha(x,t-\tau),\tau\big)\,d\tau =$$

$$= -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}\big(\alpha(x,0),t\big) - \frac{1}{(\omega_2-\omega_1)^2}\int\limits_0^t \breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t-\tau),\tau\big)\,d\tau =$$

$$= -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}F\left(\frac{\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2},t\right) - \frac{1}{(\omega_2-\omega_1)^2}\int\limits_0^t \breve{F}_\xi(\alpha(x,t-\tau),\tau)\,d\tau =$$

$$= -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^x f(\xi,t)\,d\xi - \frac{1}{(\omega_2-\omega_1)^2}\int\limits_0^t \breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t-\tau),\tau\big)\,d\tau. \tag{3.23}$$

Найдём теперь вторые частные производные от функции $v_1(x,t)$. Для этого в интегралах по переменной τ в (3.22) и (3.23) сделаем замену переменной $\alpha(x,t-\tau)=\xi$. В результате эти формулы будут иметь вид

$$\frac{\partial v_1(x,t)}{\partial x} = -\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{F}_\xi\big(\xi,\omega_2 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi, \tag{3.24}$$

$$\frac{\partial v_1(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^x f(\xi,t)\,d\xi - \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{F}_\xi\big(\xi,\omega_2 x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi. \tag{3.25}$$

Так как $\breve{F}_\xi(\xi,\tau)$ есть абсолютно непрерывная функция по τ, то для п.в. $(x,t)\in Q$ справедливы следующие формулы для вторых производных от функции $v_1(x,t)$:

$$\frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{F}_\xi\big(\xi,\,\omega_2 x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi =$$

$$= -\frac{\omega_2^2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\left(\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t),0\big) - \breve{F}_\xi\big(\alpha(x,0),t\big) + (\omega_2-\omega_1)\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\,\omega_2 x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi\right); \tag{3.26}$$

$$\frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial x\partial t} = -\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{F}_\xi\big(\xi,\omega_2 x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi =$$

$$= -\frac{\omega_2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\left(\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t),0\big) + (\omega_2-\omega_1)\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\,\omega_2 x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi\right); \tag{3.27}$$

$$\frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial t\partial x} = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\cdot f(x,t) - \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{F}_\xi\big(\xi,\omega_2 x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi =$$

$$= -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\cdot f(x,t) - \frac{\omega_2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\Bigg(\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t),0\big) - \breve{F}_\xi\big(\alpha(x,0),t\big) +$$

$$+ (\omega_2-\omega_1)\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\,\omega_2 x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi\Bigg); \tag{3.28}$$

$$\frac{\partial^2 v_1(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^x f_t(\xi,t)\,d\xi - \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{F}_\xi\big(\xi,\omega_2 x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi =$$

$$= -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^x f_t(\xi,t)\,d\xi - \frac{1}{(\omega_2-\omega_1)^2}\left(\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t),0\big) + (\omega_2-\omega_1)\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\,\omega_2 x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi\right). \tag{3.29}$$

Совершенно ясно, что для производных от функции $v_2(x,t)$ будут иметь место аналогичные формулы (первые производные определены для всех $(x,t)\in Q$, а вторые производные — для п.в. $(x,t)\in Q$)

$$\frac{\partial v_2(x,t)}{\partial x} = -\frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,t)} \breve{F}_\xi\big(\xi,\omega_1 x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi; \tag{3.30}$$

$$\frac{\partial v_2(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^x f(\xi,t)\,d\xi - \frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,t)} \breve{F}_\xi\big(\xi,\omega_1 x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi; \tag{3.31}$$

$$\frac{\partial^2 v_2(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{\omega_1^2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\Bigg(\breve{F}_\xi\big(\beta(x,t),0\big) - \breve{F}_\xi\big(\beta(x,0),t\big) + \\ + (\omega_2-\omega_1)\int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,t)} \breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\, \omega_1 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi\Bigg); \quad (3.32)$$

$$\frac{\partial^2 v_2(x,t)}{\partial x\partial t} = -\frac{\omega_1}{(\omega_2-\omega_1)^2}\Bigg(\breve{F}_\xi\big(\beta(x,t),0\big) + (\omega_2-\omega_1)\int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,t)} \breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\, \omega_1 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi\Bigg); \quad (3.33)$$

$$\frac{\partial^2 v_2(x,t)}{\partial t\partial x} = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\cdot f(x,t) - \frac{\omega_1}{(\omega_2-\omega_1)^2}\Bigg(\breve{F}_\xi\big(\beta(x,t),0\big) - \breve{F}_\xi\big(\beta(x,0),t\big) + \\ + (\omega_2-\omega_1)\int\limits_{\beta(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi, \omega_1 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi\Bigg); \quad (3.34)$$

$$\frac{\partial^2 v_2(x,t)}{\partial t^2} = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^x f_t(\xi,t)\,d\xi - \frac{1}{(\omega_2-\omega_1)^2}\Bigg(\breve{F}_\xi\big(\beta(x,t),0\big) + \\ + (\omega_2-\omega_1)\int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,t)} \breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\, \omega_1 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi\Bigg). \quad (3.35)$$

Учитывая представление (3.20) для функции $u_3(x,t)$ и формулы (3.24)–(3.35), получим следующие формулы для производных от функции $u_3(x,t)$ (первые производные определены для всех $(x,t)\in Q$, а вторые производные — для п.в. $(x,t)\in Q$):

$$\frac{\partial u_3(x,t)}{\partial x} = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\Bigg(\omega_2\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{F}_\xi\big(\xi, \omega_2 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi - \\ - \omega_1\int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,t)} \breve{F}_\xi\big(\xi, \omega_1 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi\Bigg);$$

$$\frac{\partial u_3(x,t)}{\partial t} = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\Bigg(\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{F}_\xi\big(\xi, \omega_2 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi - \\ - \int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,t)} \breve{F}_\xi\big(\xi, \omega_1 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi\Bigg); \quad (3.36)$$

$$\frac{\partial^2 u_3(x,t)}{\partial x^2} = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\Bigg(\frac{\omega_2^2}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t),0\big) - \frac{\omega_2^2}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,0),t\big) + \\ + \omega_2^2\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi, \omega_2 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi - \frac{\omega_1^2}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\beta(x,t),0\big) +$$

$$+\frac{\omega_1^2}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\beta(x,0),t\big)-\omega_1^2\int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,t)}\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_1x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi\Bigg); \quad (3.37)$$

$$\frac{\partial^2u_3(x,t)}{\partial x\partial t}=-\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\Bigg(\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t),0\big)+ +\omega_2\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)}\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_2x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi-\frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\beta(x,t),0\big)- -\omega_1\int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,t)}\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_1x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi\Bigg); \quad (3.38)$$

$$\frac{\partial^2u_3(x,t)}{\partial t\partial x}=-\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\Bigg(\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t),0\big)-\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,0),t\big)+ +\omega_2\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)}\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_2x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi-\frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\beta(x,t),0\big)+ +\frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi(\beta(x,0),t)-\omega_1\int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,t)}\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_1x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi\Bigg); \quad (3.39)$$

$$\frac{\partial^2u_3(x,t)}{\partial t^2}=-\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\Bigg(\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t),0\big)+ +\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)}\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_2x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi-\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\beta(x,t),0\big)- -\int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,t)}\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_1x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi\Bigg). \quad (3.40)$$

Так как на основании формулы (3.18)

$$\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,0),t\big)=a\breve{F}_\xi(ax,t)=a\cdot\frac{1}{a}\cdot f(x,t)=f(x,t), \quad (3.41)$$

а на основании формулы (3.19)

$$\frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\beta(x,0),t\big)=(a-1)\breve{F}_\xi\left(\frac{\omega_1x}{\omega_2-\omega_1},t\right)=(a-1)\breve{F}_\xi\left(1+\frac{\omega_1x}{\omega_2-\omega_1},t\right)= =(a-1)\breve{F}_\xi\left(\frac{1}{1-a}\cdot\frac{-\omega_1x}{\omega_2-\omega_1},t\right)=f\left(\frac{(1-a)x}{1-a},t\right)=f(x,t), \quad (3.42)$$

то формулу (3.39) можно записать короче:

$$\frac{\partial^2u_3(x,t)}{\partial t\partial x}=-\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\Bigg(\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t),0\big)+ +\omega_2\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)}\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_2x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi-\frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\breve{F}_\xi\big(\beta(x,t),0\big)-$$

$$-\,\omega_1\int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,t)}\breve{F}_{\xi\tau}\bigl(\xi,\omega_1 x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\bigr)\,d\xi\biggr). \quad (3.43)$$

Сравнивая (3.38) и (3.43), получаем для п.в. $(x,t)\in Q_T$ равенство $u_{3,xt}(x,t)=u_{3,tx}(x,t)$.

Следовательно, функция $u_3(x,t)$, определённая для всех $(x,t)\in Q$ формулой (2.17), удовлетворяет пункту а) определения 1.2 классического решения. Покажем, что $u_3(x,t)$ удовлетворяет и пункту б) определения классического решения. Для этого нужно проверить выполнение условий (2.9) и (2.10) всюду на границе области Q, а также то, что функция $u_3(x,t)$ удовлетворяет уравнению (2.8) п.в. в Q. Из формулы (2.17) следует для всех $t\geqslant 0$

$$u_3(0,t)=-\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t\Bigl(\widetilde{F}\bigl(\{\alpha(0,t-\tau)\},\tau\bigr)-\widetilde{F}\bigl(\{\beta(0,t-\tau)\},\tau\bigr)\Bigr)\,d\tau=$$

$$-\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t\left(\widetilde{F}\left(\left\{\frac{t-\tau}{\omega_2-\omega_1}\right\},\tau\right)-\widetilde{F}\left(\left\{\frac{t-\tau}{\omega_2-\omega_1}\right\},\tau\right)\right)d\tau=0,$$

$$u_3(1,t)=-\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t\Bigl(\widetilde{F}\bigl(\{\alpha(1,t-\tau)\},\tau\bigr)-\widetilde{F}\bigl(\{\beta(1,t-\tau)\},\tau\bigr)\Bigr)\,d\tau=$$

$$=-\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t\left(\tilde{F}\left(\left\{\frac{\omega_2+t-\tau}{\omega_2-\omega_1}\right\},\tau\right)-\tilde{F}\left(\left\{1+\frac{\omega_1+t-\tau}{\omega_2-\omega_1}\right\},\tau\right)\right)d\tau=$$

$$=-\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t\left(\tilde{F}\left(\left\{\frac{\omega_2+t-\tau}{\omega_2-\omega_1}\right\},\tau\right)-\tilde{F}\left(\left\{\frac{\omega_2+t-\tau}{\omega_2-\omega_1}\right\},\tau\right)\right)d\tau=0$$

ввиду 1-периодичности функции $\widetilde{F}\bigl(\{x\}\},\tau\bigr)$ по x, т. е. краевые условия (2.9) для функции $u_3(x,t)$ выполняются. Далее, в соответствии с формулой (2.17) получим

$$u_3(x,0)=-\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^0\Bigl(\widetilde{F}\bigl(\{\alpha(x,0)\},\tau\bigr)-\widetilde{F}\bigl(\{\beta(x,0)\},\tau\bigr)\Bigr)\,d\tau=0\quad\forall x\in[0,1],$$

а на основании формулы (3.36) будем иметь

$$u_{3,t}(x,0)=-\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,0)}\breve{F}_\xi\bigl(\xi,\omega_2x-(\omega_2-\omega_1)\xi\bigr)\,d\xi-\right.$$

$$\left.-\int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,0)}\breve{F}_\xi\bigl(\xi,\omega_1x-(\omega_2-\omega_1)\xi\bigr)\,d\xi\right)=0\quad\forall x\in[0,1],$$

т. е. функция $u_3(x,t)$ удовлетворяет также и начальным условиям (2.10). Покажем теперь, что рассматриваемая функция $u_3(x,t)$ при предположениях теоремы для п.в. $(x,t)\in Q$ удовлетворяет уравнению (2.8). Используя формулы (3.37), (3.38) и (3.40) в левой части уравнения (2.8), получим для п.в. $(x,t)\in Q$

$$u_{3,xx}(x,t)+p_1u_{3,xt}(x,t)+p_2u_{3,tt}(x,t)=\frac{\omega_2^2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\breve{F}_\xi\bigl(\alpha(x,0),t\bigr)-\frac{\omega_1^2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\breve{F}_\xi\bigl(\beta(x,0),t\bigr). \quad (3.44)$$

Принимая во внимание формулы (3.41)-(3.42), для правой части (3.44) получим представление

$$\frac{\omega_2^2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,0),t\big)-\frac{\omega_1^2}{(\omega_2-\omega_1)^2}\breve{F}_\xi\big(\beta(x,0),t\big)=\frac{\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\cdot f(x,t)-\frac{\omega_1}{\omega_2-\omega_1}\cdot f(x,t)=f(x,t). \tag{3.45}$$

Из (3.44)–(3.45) видно, что функция $u_3(x,t)$, которая определена при всех $(x,t)\in Q$ формулой (2.17), является решением уравнения (2.8) для п.в. $(x,t)\in Q$. Таким образом, доказано, что функция $u_3(x,t)$ является классическим решением неоднородной начально-граничной задачи (2.8)–(2.10) в случае (1.5). Осталось доказать единственность этого решения. Для доказательства единственности решения $u_3(x,t)$ в соответствии с [29, теорема 2] нужно установить, что $u_{3,tt}(x,t)\in\mathcal{Q}$. Из формулы (3.40) видно, что для этого достаточно установить

$$\breve{F}_\xi\big(\alpha(x,t),0\big),\ \breve{F}_\xi\big(\beta(x,t),0\big)\in\mathcal{Q}; \tag{3.46}$$

$$\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)}\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_2x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi,\quad \int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,t)}\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_1x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi\in\mathcal{Q}. \tag{3.47}$$

Справедливость (3.46) устанавливается совершенно аналогично тому, как это было сделано для $u_{1,tt}(x,t)$ в подразделе 3.1. Покажем, что справедливо и (3.47). Так как доказательства этого свойства для первого и второго интегралов идентичны, то установим это свойство, например, для первого интеграла. Нужно доказать, что при любом $T>0$

$$\iint\limits_{Q_T}\left|\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)}\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_2x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi\right|dx\,dt<+\infty.$$

А для этого на основании теоремы 2 из [24, с. 335] и следствия из неё [24, с. 336] достаточно показать

$$\iint\limits_{Q_T}\left(\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)}\left|\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_2x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\right|d\xi\right)dx\,dt<+\infty. \tag{3.48}$$

В силу того, что функция $\left|\breve{F}_{\xi\tau}(\xi,\tau)\right|$ измерима в Q_T при любом $T>0$, будет измерима и функция $\left|\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_2x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\right|$ и по ξ, и по x, и по t в силу линейности второго аргумента по этим переменным. Поэтому будет измеримой в Q_T и функция

$$A(x,t):=\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)}\left|\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_2x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\right|d\xi.$$

С учетом этого обозначения, чтобы установить (3.48), достаточно получить при любом фиксированном $T>0$ оценку

$$\int\limits_0^T dt\int\limits_0^1 A(x,t)\,dx<+\infty. \tag{3.49}$$

Рассмотрим внутренний интеграл

$$I(t):=\int\limits_0^1 A(x,t)\,dx=\int\limits_0^1\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)}\left|\breve{F}_{\xi\tau}\big(\xi,\omega_2x+t-(\omega_2-\omega_1)\xi\big)\right|d\xi\,dx. \tag{3.50}$$

В этом интеграле интегрирование проводится по параллелограмму

$$R_t=\left\{(x,\xi):0\leqslant x\leqslant 1,\ \frac{\omega_2x}{\omega_2-\omega_1}\leqslant\xi\leqslant\frac{\omega_2x+1}{\omega_2-\omega_1}\right\}.$$

Сделаем в интеграле (3.50) замену переменных

$$\xi=\xi_1,\quad x=\frac{x_1-t+(\omega_2-\omega_1)\xi_1}{\omega_2}. \tag{3.51}$$

Для якобиана выполняется условие

$$\frac{D(\xi,x)}{D(\xi_1,x_1)}=\begin{vmatrix} \dfrac{\partial\xi}{\partial\xi_1} & \dfrac{\partial x}{\partial\xi_1} \\ \dfrac{\partial\xi}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x}{\partial x_1} \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} 1 & \dfrac{\omega_2-\omega_1}{\omega_2} \\ 0 & \dfrac{1}{\omega_2} \end{vmatrix}=\frac{1}{\omega_2}\neq 0,$$

т. е. замена переменных (3.51) является гомеоморфизмом.

В результате этой замены для $I(t)$ получим представление

$$I(t):=\frac{1}{\omega_2}\iint\limits_{S_t}\left|\breve{F}_{\xi\tau}(\xi_1,x_1)\right|d\xi_1\,dx_1,$$

где область интегрирования S_t есть параллелограмм

$$S_t=\left\{(x_1,\xi_1):0\leqslant x_1\leqslant t,\frac{-x_1+t}{\omega_2-\omega_1}\leqslant\xi_1\leqslant\frac{-x_1+t+\omega_2}{\omega_2-\omega_1}\right\}.$$

Так как функция $\breve{F}_{\xi\tau}(\xi_1,x_1)$ измерима на множестве S_t при любом $t>0$ и справедливы неравенства

$$I(t)=\frac{1}{\omega_2}\int\limits_0^t dx_1\int\limits_{\frac{-x_1}{\omega_2-\omega_1}}^{\frac{-x_1+t+\omega_2}{\omega_2-\omega_1}}\left|\breve{F}_{\xi\tau}(\xi_1,x_1)\right|d\xi_1\leqslant\frac{1}{\omega_2}\int\limits_0^T dx_1\int\limits_0^{\frac{T+\omega_2}{\omega_2-\omega_1}}\left|\breve{F}_{\xi\tau}(\xi_1,x_1)\right|d\xi_1<C_T<+\infty,$$

то по теореме 2 из [24, с. 335] и следствия из неё [24, с. 336] получим, что $I(t)$ есть суммируемая функция на $[0,T]$, а следовательно, выполняется (3.49). Таким образом, неравенство (3.48) установлено и, тем самым, доказано первое свойство в (3.47). Как уже отмечалось, второе свойство в (3.47) доказывается аналогично. Тем самым установлено, что $u_{3,tt}(x,t)\in\mathcal{Q}$, откуда на основании [29, теоремы 2] следует единственность классического решения $u_3(x,t)$. Следовательно, теорема 3.8 полностью доказана. □

На основании теоремы 2.4 для обобщённого решения $u_3(x,t)$, а следовательно, и для классического решения $u_3(x,t)$ на самом деле справедлива и другая эквивалентная формула, а именно, формула (2.19). Учитывая это, теорему 3.8 можно переформулировать в следующем виде.

Теорема 3.9. *Если $f(x,t)$ абсолютно непрерывна по t при п.в. $x\in[0,1]$, $f'_t(x,t)\in\mathcal{Q}$ и выполняется условие* (1.5)*, то функция $u_3(x,t)$, определённая для всех $(x,t)\in Q$ формулой* (2.19)*, является единственным классическим решением задачи* (2.8)–(2.10)*, для которого выполняется условие $u_{3,tt}(x,t)\in\mathcal{Q}$.*

Возвращаясь теперь к представлению (2.1) классического решения задачи (1.1)–(1.3), и учитывая уже доказанные теоремы 3.3, 3.6, 3.9 о классических решениях $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, $u_3(x,t)$ на основе формул для обобщённых решений, пользуясь обозначением (2.20), получаем следующий итоговый результат о классическом решении задачи (1.1)–(1.3).

Теорема 3.10. *Если $\varphi(x)\in W_1^2[0,1]$, $\psi(x)\in W_1^1[0,1]$, выполняются условия $\varphi(0)=\varphi(1)=\psi(0)=\psi(1)=0$, $f(x,t)$ абсолютно непрерывна по t при п.в. $x\in[0,1]$, $f'_t(x,t)\in\mathcal{Q}$ и выполняется условие* (1.5)*, то функция*

$$u(x,t)=v(x,t)+\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\eta\left(\alpha(x,t-\tau)\right)}^{\eta\left(\beta(x,t-\tau)\right)}f(\xi,\tau)\,d\xi,$$

где функция $v(x,t)$ определяется формулой (2.20)*, является единственным классическим решением задачи* (1.1)–(1.3)*.*

Отметим, что функция $v(x,t)$ является классическим решением задачи (1.1)–(1.3) в случае однородного уравнения (1.1) ($f=0$). Чтобы подчеркнуть, что это именно классическое решение, далее для краткости будем обозначать его как $v^\circ(x,t)$.

4. Обобщённое решение начально-граничной задачи в случае ненулевого потенциала

4.1. Обобщённое решение в случае ненулевого потенциала $q(x)$. Рассмотрим начально-граничную задачу (1.8)–(1.10). Применим к решению этой задачи подход, предложенный для потенциала $q = q(x)$ в [43, 44] (в случае $p_1 = 0$) и в [30, 31] (в случае $p_1 \neq 0$). Так же, как и в [30,31,43,44], будем считать правую часть $q(x)u(x,t)$ в уравнении (1.8) как возмущение в уравнении (1.1) задачи (1.1)–(1.3). Тогда по теореме 2.6 от задачи (1.8)–(1.10) приходим к интегральному уравнению:

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta\bigl(\alpha(x,t-\tau)\bigr)}^{\eta\bigl(\beta(x,t-\tau)\bigr)} q(\xi)u(\xi,\tau)\, d\xi. \tag{4.1}$$

Таким образом, задача (1.8)–(1.10) и интегральное уравнение (4.1) тесно связаны. Но в интегральном уравнении (4.1) функции $v(x,t)$ и $q(x)$ могут быть самого общего вида. А именно, $v(x,t)$ может быть функцией класса $\mathcal{Q}$, что верно при самых общих предположениях на функции $\varphi(x)$ и $\psi(x)$, а именно: $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0,1]$, а функция $q(x)$ также может быть самого общего вида, т. е. $q(x) \in L_1[0,1]$, но при условии, что произведение $q(x)u(x,t)) \in \mathcal{Q}$. Естественно дать следующее определение.

Определение 4.1. Будем называть решение $u(x,t)$ интегрального уравнения (4.1), в котором $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $q(x) \in L_1[0,1]$, но при этом $q(x)u(x,t) \in \mathcal{Q}$, *обобщённым решением* начально-граничной задачи (1.8)–(1.10), а саму задачу — *обобщённой начально-граничной задачей.*

Введем оператор

$$(\mathcal{B}f)(x,t) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta\bigl(\alpha(x,t-\tau)\bigr)}^{\eta\bigl(\beta(x,t-\tau)\bigr)} q(\xi)f(\xi,\tau)\, d\xi,$$

отображающий свою область определения $D(\mathcal{B}) \subset L_1(Q_T)$ в $C(Q_T)$.

Очевидно, оператор $\mathcal{B}$ есть линейный оператор. Сужение этого оператора на пространство $C(Q_T)$ обозначим как оператор B.

С использованием этого оператора уравнение (4.1) кратко можно записать в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + (\mathcal{B}u)(x,t).$$

Введем чисто формально функцию

$$w(x,t) := \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta(\alpha(x,t-\tau))}^{\eta(\beta(x,t-\tau))} q(\xi)v(\xi,\tau)\, d\xi \ \bigl(=: (\mathcal{B}v)(x,t)\bigr). \tag{4.2}$$

Ввиду специальной структуры функции $w(x,t)$ аналогично [30, лемма 4.2] можно утверждать, что если $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $q(x) \in L_1[0,1]$, то $w(x,t)$ является функцией из пространства $C(Q_T)$ при любом $T > 0$, т. е. на самом деле уже не формально $w(x,t) = \bigl(Bv\bigr)(x,t)$. Следовательно, можно образовать ряд

$$W(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (B^n w)(x,t). \tag{4.3}$$

.

Определение 4.2. Будем говорить, что числовой ряд $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n$ *сходится не медленнее γ-экспоненциального ряда* ($\gamma > 0$), если при некоторой константе $C > 0$ и при всех n будет $|a_n| \leqslant C^n/(n!)^\gamma$. 1-Экспоненциальный ряд — это обычный экспоненциальный ряд.

Справедлива следующая теорема из [30].

Теорема 4.1. *Если* $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $q(x) \in L_1[0,1]$ *и выполняется условие* (1.5), *то ряд* (4.3) *сходится абсолютно и равномерно в пространстве* $C(Q_T)$ *к непрерывной функции* $W(x,t)$, *при этом сходимость ряда не медленнее экспоненциального, и функция*

$$u(x,t) = v(x,t) + W(x,t) \tag{4.4}$$

является единственным обобщённым решением задачи (1.8)–(1.10).

4.2. Обобщённое решение в случае ненулевого потенциала $q(x,t)$**.** Рассмотрим начально-граничную задачу (1.11)–(1.13). Применим к решению этой задачи подход, предложенный для потенциала $q = q(x,t)$ в [7] (в случае $p_1 = 0$) и в [32,34] (в случае $p_1 \neq 0$). Так же, как и в [7], будем рассматривать правую часть $q(x,t)u(x,t)$ в уравнении (1.11) как возмущение в уравнении (1.1) задачи (1.1)–(1.3). Тогда по теореме 2.6 от задачи (1.11)–(1.13) приходим к интегральному уравнению

$$u(x,t) = v(x,t) + \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta\left(\alpha(x,t-\tau)\right)}^{\eta\left(\beta(x,t-\tau)\right)} q(\xi,\tau)u(\xi,\tau)\,d\xi. \tag{4.5}$$

Таким образом, задача (1.11)–(1.13) и интегральное уравнение (4.5) тесно связаны. Но в интегральном уравнении (4.5) функции $v(x,t)$ и $q(x,t)$ могут быть самого общего вида. А именно, $v(x,t)$ может быть функцией класса $\mathcal{Q}$, что верно при самых общих предположениях относительно параметров задачи $\varphi(x)$, $\psi(x)$, а именно: $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0,1]$, и функция $q(x,t)$ также может быть функцией класса $\mathcal{Q}$, но при условии, что произведение $q(x,t)u(x,t)) \in \mathcal{Q}$. Естественно дать следующее определение по аналогии с определением 4.1.

Определение 4.3. Будем называть решение $u(x,t)$ интегрального уравнения (4.5), в котором $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0,1]$, $q(x,t) \in \mathcal{Q}$, но при этом $q(x,t)u(x,t) \in \mathcal{Q}$, *обобщённым решением* начально-граничной задачи (1.11)–(1.13), а саму задачу — *обобщённой начально-граничной задачей.*

Введем оператор

$$(\mathcal{D}f)(x,t) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta\left(\alpha(x,t-\tau)\right)}^{\eta\left(\beta(x,t-\tau)\right)} q(\xi,\tau)f(\xi,\tau)\,d\xi,$$

отображающий свою область определения $D(\mathcal{D}) \subset L_1(Q_T)$ в $C(Q_T)$.

Очевидно, оператор $\mathcal{D}$ есть линейный оператор. Сужение этого оператора на пространство $C(Q_T)$ обозначим как оператор D.

С использованием этого оператора уравнение (4.5) кратко можно записать в виде

$$u(x,t) = v(x,t) + (\mathcal{D}u)(x,t).$$

Далее будут фигурировать два предположения относительно потенциала $q(x,t)$ для п.в. $(x,t) \in Q_T$ при любом фиксированном $T > 0$:

$$(i) \quad |q(x,t)| \leqslant q_T(x) \in L_1[0,1]; \qquad (ii) \quad |q(x,t)| \leqslant \check{q}(t) \in L_p[0,T],\ p > 1. \tag{4.6}$$

Введем чисто формально функцию

$$\mathsf{w}(x,t) := \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta(\alpha(x,t-\tau))}^{\eta(\beta(x,t-\tau))} q(\xi,\tau)v(\xi,\tau)\,d\xi =: (\mathcal{D}v)(x,t). \tag{4.7}$$

Ввиду специальной структуры функции $\mathsf{w}(x,t)$, на основании [34, лемма 1] можно утверждать, что если $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0,1]$, функция $q(x,t)$ класса $\mathcal{Q}$ и для неё выполняется условие (i) или (ii) в (4.6), то $\mathsf{w}(x,t)$ является функцией из пространства $C(Q_T)$ при любом $T > 0$, т. е. на самом деле уже не формально $\mathsf{w}(x,t) = \big(Dv\big)(x,t)$. Следовательно, можно образовать ряд

$$\mathcal{W}(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} (D^n \mathsf{w})(x,t). \tag{4.8}$$

Справедлива следующая теорема [34, теорема 3].

Теорема 4.2. *Предположим, что* $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0,1]$, *выполняется условие* (1.5), $q(x,t) \in \mathcal{Q}$ *и удовлетворяет условиям* (i) *или* (ii). *Тогда ряд* (4.8) *сходится абсолютно и равномерно в пространстве* $C(Q_T)$ *к непрерывной функции* $\mathcal{W}(x,t)$, *при этом сходимость ряда в случае* (i) *не медленнее экспоненциального ряда, а в случае* (ii) *не медленнее* $1/p'$*-экспоненциального, и функция*

$$u(x,t) = v(x,t) + \mathcal{W}(x,t) \tag{4.9}$$

является единственным обобщённым решением задачи (1.11)–(1.13).

5. Классическое решение начально-граничной задачи в случае ненулевого потенциала на основе обобщённого решения

5.1. Классическое решение в случае ненулевого потенциала $q(x)$. Рассмотрим обобщённую начально-граничную задачу (1.8)–(1.10) с потенциалом $q = q(x)$. В разделе 4 сформулирована теорема 4.1 об обобщённом решении этой задачи, которое определяется формулой (4.4). Естественно возникает вопрос: будет ли формула (4.4) давать классическое решение начально-граничной задачи (1.8)–(1.10) и при каких условиях на функции $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $p(x)$? Если ответ положительный (а это так и окажется), то можно сделать вывод, что метод получения обобщённого решения является регулярным. Этот вывод будет являться оправданием метода получения обобщённого решения.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.1. *Если* $\varphi(x) \in W_1^2[0,1]$, $\psi(x) \in W_1^1[0,1]$, *выполняются условия* $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, $\psi(0) = \psi(1) = 0$, $q(x) \in L_1[0,1]$ *и предположение* (1.5), *то единственным классическим решением задачи* (1.8)–(1.10) *является функция*

$$u^\circ(x,t) = v^\circ(x,t) + W^\circ(x,t), \tag{5.1}$$

где $W^\circ(x,t)$ *определяется формулой* (4.3) (*ряд справа в* (4.3) *сходится абсолютно и равномерно в* $C(Q_T)$, $T > 0$, *при самых общих предположениях на параметры* $\varphi(x)$, $\psi(x)$, *а именно*: $\varphi(x)$, $\psi(x) \in L_1[0,1]$), *функция* $w^\circ(x,t)$ *определяется формулой* (4.2), *в которой вместо* $v(x,t)$ *стоит* $v^\circ(x,t)$ — *классическое решение задачи* (1.1)–(1.3) *с однородным уравнением* (1.1).

Доказательство. Из определения $W^\circ(x,t)$ видно, что справедливо представление

$$W^\circ(x,t) = w^\circ(x,t) + \left(B\left(\sum_{n=0}^{\infty}(B^n w^\circ)\right)\right)(x,t) = (Bv^\circ)(x,t) + \Big(B\big(W^\circ\big)\Big)(x,t) =$$

$$= \Big(B\big(v^\circ + W^\circ\big)\Big)(x,t) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta\left(\alpha(x,t-\tau)\right)}^{\eta\left(\beta(x,t-\tau)\right)} q(\xi)\big(v^\circ(\xi,\tau) + W^\circ(\xi,\tau)\big)\,d\xi =$$

$$= \frac{1}{\omega_2 - \omega_1}\int\limits_0^t d\tau \int\limits_{\eta(\alpha(x,t-\tau))}^{\eta(\beta(x,t-\tau))} h(\xi,\tau)\,d\xi, \tag{5.2}$$

где обозначено

$$h(\xi,\tau) = q(\xi)\big(v^\circ(\xi,\tau) + W^\circ(\xi,\tau)\big) =: q(\xi)u^\circ(\xi,\tau). \tag{5.3}$$

Функция $u^\circ(\xi,\tau)$ выражается формулой (5.1) и является вполне определённой функцией из $\mathcal{Q}$. На основании теоремы 2.4 и представления (5.2) можно заключить, что для функции $W^\circ(x,t)$ имеет место и другое представление, более удобное для дальнейших рассуждений, а именно:

$$W^\circ(x,t) = -\frac{1}{\omega_2 - \omega_1}\int\limits_0^t \Big(\widetilde{H}\big(\{\alpha(x,t-\tau)\},\tau\big) - \widetilde{H}\big(\{\beta(x,t-\tau)\},\tau\big)\Big)\,d\tau, \tag{5.4}$$

где $\widetilde{H}(\xi,\tau)$ определяется формулой (см. (2.18))

$$\widetilde{H}(\xi,\tau)=\begin{cases} H\left(\dfrac{\xi}{a},\tau\right), & \xi\in[0,a),\\ H\left(\dfrac{1-\xi}{1-a},\tau\right), & \xi\in(a,1),\end{cases}$$

здесь $H(x,t)=\int\limits_0^x h(\xi,t)\,d\xi$.

В теореме 3.8 установлено, что если $h(x,t)$ есть абсолютно непрерывная функция по $t\geqslant 0$ при п.в. $x\in[0,1]$ и $h_t(x,t)\in\mathcal{Q}$, то функция $W^\circ(x,t)$, определённая формулой (5.4), является единственным классическим решением начально-граничной задачи

$$u_{xx}+p_1u_{xt}+p_2u_{tt}=h(x,t), \tag{5.5}$$

$$u(0,t)=0,\quad u(1,t)=0, \tag{5.6}$$

$$u(x,0)=0,\quad u_t(x,0)=0. \tag{5.7}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 5.1. *Если выполняются условия теоремы* 5.1 *и* $h_t(x,t)\in\mathcal{Q}$, *то функция* $u^\circ(x,t)$, *определяемая формулой* (5.1)*, является единственным классическим решением начально-граничной задачи* (1.8)–(1.10).

Доказательство. Так как $v^\circ(x,t)$ является классическим решением задачи (1.1)–(1.3) в случае однородного уравнения, $W^\circ(x,t)$ есть решение задачи (5.5)–(5.7) и выполняется (5.3), то

$$\begin{aligned}u^\circ_{tt}+p_1u^\circ_{xt}+p_2u^\circ_{tt}=(v^\circ_{tt}+p_1v^\circ_{xt}+p_2v^\circ_{tt})+(W^\circ_{xx}+p_1W^\circ_{xt}+p_2W^\circ_{tt})=\\ =0+h(x,t)=q(x)\big(v^\circ(x,t)+W^\circ(x,t)\big)=q(x)u^\circ(x,t).\end{aligned}$$

Таким образом, $u^\circ(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.8) для п.в. $(x,t)\in Q$.

Далее, при всех $t\geqslant 0$

$$u^\circ(0,t)=v^\circ(0,t)+W^\circ(0,t)=0+0=0,\quad u^\circ(1,t)=v^\circ(1,t)+W^\circ(1,t)=0+0=0,$$

т. е. $u^\circ(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям (1.9).

При $x\in[0,1]$ имеют место равенства

$$u^\circ(x,0)=v^\circ(x,0)+W^\circ(x,0)=\varphi(x)+0=\varphi(x),$$

$$u^\circ_t(x,0)=v^\circ_t(x,0)+W^\circ_t(x,0)=\psi(x)+0=\psi(x),$$

т. е. u° удовлетворяет и начальным условиям (1.13). Таким образом, функция $u^\circ(x,t)$ есть классическое решение задачи (1.8)–(1.10). Единственность решения $u^\circ(x,t)$ вытекает из того факта, что $v^\circ(x,t)$ есть единственное классическое решение задачи (1.1)–(1.3) в случае однородного уравнения, а $W^\circ(x,t)$ есть единственное классическое решение задачи (5.5)–(5.7), так как $h_t(x,t)\in\mathcal{Q}$ по предположению леммы. Тем самым лемма 5.1 доказана. □

Следовательно, для завершения доказательства теоремы 5.1 осталось установить, что на самом деле $h_t(x,t)\in\mathcal{Q}$. В соответствии с (5.3) имеем

$$h_t(x,t)=q(x)v^\circ_t(x,t)+q(x)W^\circ_t(x,t). \tag{5.8}$$

Так как $v^\circ(x,t)$ есть классическое решение задачи (1.1)–(1.3) в случае однородного уравнения, то $v^\circ_t(x,t)\in C(Q_T)$ для любого $T>0$ и, следовательно, $q(x)v^\circ_t(x,t)\in\mathcal{Q}$. Таким образом, из (5.8) видно, что всё свелось к доказательству следующего свойства:

$$q(x)W^\circ_t(x,t)\in\mathcal{Q}. \tag{5.9}$$

Установим, что $W_t^\circ(x,t) \in C(Q_T)$ при любом $T > 0$. Тогда, так как $q(x) \in L_1[0,1]$, свойство (5.9) будет доказано. Воспользуемся формулой (5.4) и установленной ранее формулой (3.36). Получим

$$W_t^\circ(x,t) = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\left(\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{H}_\xi\big(\xi, \omega_2 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi - \int\limits_{\beta(x,0)}^{\beta(x,t)} \breve{H}_\xi\big(\xi, \omega_1 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi\right) = \\ = J_1(x,t) + J_2(x,t), \quad (5.10)$$

где обозначено $\breve{H}(\xi,\tau) = \widetilde{H}\big(\{\xi\},\tau\big)$. Далее рассмотрим, например, слагаемое $J_1(x,t)$. Слагаемое $J_2(x,t)$ рассматривается совершенно аналогично. Для производной $\breve{H}_\xi(\xi,\tau)$ воспользуемся формулами (3.18) и (3.19)

$$\breve{H}_\xi(\xi,\tau) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\cdot h\left(\dfrac{\{\xi\}}{a},\tau\right), & \{\xi\}\in(0,a), \\ \dfrac{1}{a-1}\cdot h\left(\dfrac{1-\{\xi\}}{1-a},\tau\right), & \{\xi\}\in(a,1) \end{cases} = \\ = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\cdot q\left(\dfrac{\{\xi\}}{a}\right) u^\circ\left(\dfrac{\{\xi\}}{a},\tau\right), & \{\xi\}\in(0,a), \\ \dfrac{1}{a-1}\cdot q\left(\dfrac{1-\{\xi\}}{1-a}\right) u^\circ\left(\dfrac{1-\{\xi\}}{1-a},\tau\right), & \{\xi\}\in(a,1). \end{cases} \quad (5.11)$$

Определим аналогично $\widetilde{F}(\xi,\tau)$ (см. (2.18) или (2.16)) функцию

$$\widetilde{u}^\circ(\xi,\tau) := \begin{cases} u^\circ\left(\dfrac{\xi}{a},\tau\right), & \xi\in[0,a), \\ u^\circ\left(\dfrac{1-\xi}{1-a},\tau\right), & \xi\in[a,1), \end{cases} \qquad \breve{u}^\circ(\xi,\tau) := \widetilde{u}^\circ\big(\{\xi\},\tau\big). \quad (5.12)$$

Совершенно так же, как это было сделано для функции $\breve{F}(\xi.\tau)$ в подразделе 3.3, можно установить, что $\breve{u}^\circ(\xi,\tau)$ есть непрерывная функция по $\xi\in\mathbb{R}$ и $\tau \geqslant 0$.

Кроме того, определим функцию

$$\mathsf{q}(\xi) = \begin{cases} \dfrac{1}{a}\cdot q\left(\dfrac{\xi}{a}\right), & \xi\in[0,a), \\ \dfrac{1}{a-1}\cdot q\left(\dfrac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi\in[a,1), \end{cases} \qquad \breve{\mathsf{q}}(\xi) = \mathsf{q}\big(\{\xi\}\big). \quad (5.13)$$

Так как по предположению теоремы $q(x)\in L_1[0,1]$, то совершенно ясно, что функция $\breve{\mathsf{q}}(\xi)$ будет суммируемой на любом конечном отрезке. Из (5.11)–(5.13) следует представление

$$\breve{H}(\xi,\tau) = \breve{\mathsf{q}}(\xi)\breve{u}^\circ(\xi,\tau).$$

Следовательно, для $J_1(x,t)$ справедлива формула

$$J_1(x,t) = -\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_{\alpha(x,0)}^{\alpha(x,t)} \breve{\mathsf{q}}(\xi)\breve{u}^\circ\big(\xi, \omega_2 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi\big)\,d\xi.$$

Так как функция $\breve{\mathsf{q}}(\xi)$ суммируема на каждом конечном интервале, $\breve{u}^\circ(\xi,\tau)$ непрерывна по $\xi\in\mathbb{R}$ и $\tau\geqslant 0$, функции $\omega_2 x + t - (\omega_2-\omega_1)\xi$, $\alpha(x,0)$ и $\alpha(x,t)$ непрерывны по своим аргументам, то по свойству абсолютной непрерывности интеграла Лебега [4, теорема 5, с. 301] функция $J_1(x,t)$ есть непрерывная функция в Q_T при любом $T>0$. Совершенно аналогично показывается непрерывность второго слагаемого $J_2(x,t)$ в соотношении (5.10). Следовательно, непрерывность функции $W_t^\circ(x,t)$ в Q_T при любом $T>0$ установлена, а тем самым установлено, что $h_t(x,t)\in\mathcal{Q}$. Таким образом, на основании леммы 5.1 получаем утверждение доказываемой теоремы. Теорема 5.1 полностью доказана. $\square$

5.2. Классическое решение в случае ненулевого потенциала $q(x,t)$. Рассмотрим обобщённую начально-граничную задачу (1.11)–(1.13) с потенциалом $q=q(x,t)$. В разделе 4 сформулирована теорема 4.2 об обобщённом решении этой задачи, которое определяется формулой (4.9). Естественно возникает вопрос: будет ли формула (4.9) давать классическое решение задачи (1.11)–(1.13) и при каких условиях на параметры $\varphi(x)$, $\psi(x)$, $q(x,t)$? Если ответ положительный (а это так и окажется), то можно сделать вывод, что метод получения обобщённого решения является регулярным. Этот вывод будет являться оправданием метода получения обобщённого решения.

Справедлива следующая теорема.

Теорема 5.2. *Если $\varphi(x)\in W_1^2[0,1]$, $\psi(x)\in W_1^1[0,1]$, выполняются условия $\varphi(0)=\varphi(1)=0$, $\psi(0)=\psi(1)=0$, $q(x,t)=q_1(x)q_2(x,t)$, $q_1(x)\in L_1[0,1]$, $q_2(x,t)$ и $q_{2,t}(x,t)\in C(Q_T)$ при любом $T>0$, а также предположение* (1.5)*, то единственным классическим решением задачи* (1.11)–(1.13) *является функция*

$$\mathsf{u}^\circ(x,t)=v^\circ(x,t)+\mathcal{W}^\circ(x,t), \tag{5.14}$$

где $\mathcal{W}^\circ(x,t)$ определяется формулой (4.8) (*ряд справа в* (4.8) *сходится абсолютно и равномерно в $C(Q_T)$, $T>0$, при самых общих предположениях*: $\varphi(x)$, $\psi(x)\in L_1[0,1]$), *функция $\mathsf{w}^\circ(x,t)$ определяется формулой* (4.7)*, в которой вместо $v(x,t)$ стоит $v^\circ(x,t)$ — классическое решение задачи* (1.1)–(1.3) *с однородным уравнением* (1.1).

Доказательство. Из определения $\mathcal{W}^\circ(x,t)$ видно, что справедливо представление

$$\mathcal{W}^\circ(x,t)=\mathsf{w}^\circ(x,t)+\left(D\bigg(\sum_{n=0}^{\infty}(D^n\mathsf{w}^\circ)\bigg)\right)(x,t)=(Dv^\circ)(x,t)+\Big(D\big(\mathcal{W}^\circ\big)\Big)(x,t)=$$

$$=\Big(D\big(v^\circ+\mathcal{W}^\circ\big)\Big)(x,t)=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\eta\big(\alpha(x,t-\tau)\big)}^{\eta\big(\beta(x,t-\tau)\big)} q(\xi,\tau)\big(v^\circ(\xi,\tau)+\mathcal{W}^\circ(\xi,\tau)\big)\,d\xi=$$

$$=\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t d\tau\int\limits_{\eta(\alpha(x,t-\tau))}^{\eta(\beta(x,t-\tau))}\mathsf{h}(\xi,\tau)\,d\xi, \tag{5.15}$$

где обозначено

$$\mathsf{h}(\xi,\tau):=q(\xi,\tau)\big(v^\circ(\xi,\tau)+\mathcal{W}^\circ(\xi,\tau)\big)=q(\xi,\tau)\mathsf{u}^\circ(\xi,\tau). \tag{5.16}$$

С учетом предположений теоремы имеем представление

$$\mathsf{h}(\xi,\tau)=q_1(\xi)q_2(\xi,\tau)\big(v^\circ(\xi,\tau)+\mathcal{W}^\circ(\xi,\tau)\big)=:q_1(\xi)\mathsf{h}^\circ(\xi,\tau), \tag{5.17}$$

где функция $\mathsf{h}^\circ(\xi,\tau):=q_2(\xi,\tau)\big(v^\circ(\xi,\tau)+\mathcal{W}^\circ(\xi,\tau)\big)$ является вполне определённой функцией класса $\mathcal{Q}$. На основании теоремы 2.4 и представления (5.15) можно заключить, что для функции $W^\circ(x,t)$ имеет место и другое представление, более удобное для дальнейших рассуждений, а именно:

$$\mathcal{W}^\circ(x,t)=-\frac{1}{\omega_2-\omega_1}\int\limits_0^t\Big(\widetilde{\mathsf{H}}\big(\{\alpha(x,t-\tau)\},\tau\big)-\widetilde{\mathsf{H}}\big(\{\beta(x,t-\tau)\},\tau\big)\Big)\,d\tau, \tag{5.18}$$

где $\widetilde{\mathsf{H}}(\xi,\tau)$ определяется формулой (2.18), а именно:

$$\widetilde{\mathsf{H}}(\xi,\tau)=\begin{cases}\mathsf{H}\left(\dfrac{\xi}{a},\tau\right), & \xi\in[0,a),\\[2mm] \mathsf{H}\left(\dfrac{1-\xi}{1-a},\tau\right), & \xi\in(a,1),\end{cases}$$

здесь $\mathsf{H}(x,t)=\int\limits_0^x\mathsf{h}(\xi,t)\,d\xi$.

В теореме 3.8 установлено, что если $\mathsf{h}(x,t)$ есть абсолютно непрерывная функция по $t \geqslant 0$ при п.в. $x \in [0,1]$ и $\mathsf{h}_t(x,t) \in \mathcal{Q}$, то функция $\mathcal{W}^\circ(x,t)$, определённая формулой (5.18), является единственным классическим решением начально-граничной задачи

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = \mathsf{h}(x,t), \tag{5.19}$$

$$u(0,t) = 0, \quad u(1,t) = 0, \tag{5.20}$$

$$u(x,0) = 0, \quad u_t(x,0) = 0. \tag{5.21}$$

Справедлива следующая лемма.

Лемма 5.2. *Если выполняются условия теоремы* 5.2 *и* $\mathsf{h}_t(x,t) \in \mathcal{Q}$, *то функция* $\mathsf{u}^\circ(x,t)$, *определяемая формулой* (5.14), *является единственным классическим решением начально-граничной задачи* (1.11)–(1.13).

Доказательство. Так как $v^\circ(x,t)$ является классическим решением задачи (1.1)–(1.3) в случае однородного уравнения, $\mathcal{W}^\circ(x,t)$ есть решение задачи (5.19)–(5.21) и выполняется (5.16), то

$$u^\circ_{tt} + p_1 u^\circ_{xt} + p_2 u^\circ_{tt} = (v^\circ_{tt} + p_1 v^\circ_{xt} + p_2 v^\circ_{tt}) + (\mathcal{W}^\circ_{xx} + p_1 \mathcal{W}^\circ_{xt} + p_2 \mathcal{W}^\circ_{tt}) = 0 + \mathsf{h}(x,t) = q(x,t)\mathsf{u}^\circ(x,t).$$

Таким образом, $u^\circ(x,t)$ удовлетворяет уравнению (1.11) для п.в. $(x,t) \in Q$.

Далее, при всех $t \geqslant 0$

$$\mathsf{u}^\circ(0,t) = v^\circ(0,t) + \mathcal{W}^\circ(0,t) = 0 + 0 = 0, \quad \mathsf{u}^\circ(1,t) = v^\circ(1,t) + \mathcal{W}^\circ(1,t) = 0 + 0 = 0,$$

т. е. $\mathsf{u}^\circ(x,t)$ удовлетворяет граничным условиям (1.12).

При $x \in [0,1]$ имеют место равенства

$$\mathsf{u}^\circ(x,0) = v^\circ(x,0) + \mathcal{W}^\circ(x,0) = \varphi(x) + 0 = \varphi(x),$$

$$\mathsf{u}^\circ_t(x,0) = v^\circ_t(x,0) + \mathcal{W}^\circ_t(x,0) = \psi(x) + 0 = \psi(x),$$

т. е. $\mathsf{u}^\circ(x,t)$ удовлетворяет и начальным условиям (1.10). Таким образом, функция $\mathsf{u}^\circ(x,t)$ есть классическое решение задачи (1.11)–(1.13). Единственность решения $\mathsf{u}^\circ(x,t)$ вытекает из того факта, что $v^\circ(x,t)$ есть единственное классическое решение задачи (1.1)–(1.3) в случае однородного уравнения, а $\mathcal{W}^\circ(x,t)$ есть единственное классическое решение задачи (5.19)–(5.21), так как $\mathsf{h}_t(x,t) \in \mathcal{Q}$ по предположению леммы. Тем самым лемма 5.2 доказана. □

Следовательно, для завершения доказательства теоремы 5.2 осталось установить, что на самом деле $\mathsf{h}_t(x,t) \in \mathcal{Q}$. В соответствии с (5.17) имеем

$$\mathsf{h}_t(\xi,\tau) = q_1(x)\mathsf{h}^\circ_t(x,t) = q_1(x)\Big(q_{2t}(x,t)\big(v^\circ(x,t) + \mathcal{W}^\circ(x,t)\big) + q_2(x,t)\big(v^\circ_t(x,t) + \mathcal{W}^\circ_t(x,t)\big)\Big). \tag{5.22}$$

Так как по условию теоремы $q_1(x) \in L_1[0,1]$, $q_2(x,t)$, $q_{2t}(x,t) \in C(Q_T)$ для любого $T > 0$, $v^\circ(x,t)$ есть классическое решение задачи (1.1)–(1.3) в случае однородного уравнения и, следовательно, $v^\circ_t(x,t) \in C(Q_T)$ для любого $T > 0$, а $\mathcal{W}^\circ(x,t) \in C(Q_T)$ при любом $T > 0$ на основании теоремы 4.2, то функции $q_1(x)q_{2t}(x,t)v^\circ(x,t)$, $q_1(x)q_{2t}(x,t)\mathcal{W}^\circ(x,t)$ и $q_1(x)q_2(x,t)v^\circ_t(x,t)$ принадлежат классу $\mathcal{Q}$. Следовательно, из (5.22) видно, что для доказательства того факта, что $\mathsf{h}_t(x,t) \in \mathcal{Q}$, достаточно доказать, что $q_1(x)q_2(x,t)\mathcal{W}^\circ_t(x,t) \in \mathcal{Q}$. Но так как $q_2(x,t) \in C(Q_T)$, то всё сводится к необходимости доказать, что $q_1(x)\mathcal{W}^\circ_t(x,t) \in \mathcal{Q}$. Это свойство устанавливается совершенно аналогично свойству (5.9). Следовательно, установлено, что $\mathsf{h}_t(x,t) \in \mathcal{Q}$. Таким образом, на основании леммы 5.2 получаем утверждение доказываемой теоремы. Теорема 5.2 полностью доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход в методе Фурье// Докл. РАН. — 2014. — *458*, № 2. — С. 138–140. — DOI: 10.7868/S0869565214260041.
2. *Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П.* Резольвентный подход для волнового уравнения// Журн. вычисл. мат. и мат. физ. — 2015. — *55*, № 2. — С. 229–241. — DOI: 10.7868/S0044466915020052.
3. *Вагабов А. И.* Введение в спектральную теорию дифференциальных операторов. — Ростов-на-Дону: Рост. унив., 1994.
4. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.

5. *Корнев В. В.* О применении расходящихся рядов в смешанных задачах, не имеющих классического решения// В сб.: «Современные методы теории краевых задач: материалы межд. конференции: Воронеж. весенняя матем. школа “Понтрягинские чтения-XXXIII”». — Воронеж: ВГУ, 2022. — С. 132–137.
6. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Классическое решение смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. — 2019. — *172*. — С. 119–133. — DOI: 10.36535/0233-6723-2019-172-119-133.
7. *Корнев В. В., Хромов А. П.* Использование резольвентного подхода и расходящихся рядов при решении смешанных задач// В сб.: «Математика. Механика. Вып. 23». — Саратов: Сарат. унив., 2021. — С. 18–24.
8. *Крылов А. Н.* О некоторых дифференциальных уравнениях математической физики, имеющих приложения в технических вопросах. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1950.
9. *Курдюмов В. П., Хромов А. П., Халова В. А.* Смешанная задача для однородного волнового уравнения с ненулевой начальной скоростью с суммируемым потенциалом// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2020. — *20*, № 4. — С. 444–456. — DOI: 10.18500/1816-9791-2020-20-4-444-456.
10. *Ломов И. С.* Эффективное применение метода Фурье для построения решения смешанной задачи для телеграфного уравнения// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. мат. и киберн. — 2021. — № 4. — С. 37–42.
11. *Ломов И. С.* Обобщенная формула Даламбера для телеграфного уравнения// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. — 2021. — *172*. — С. 66–79. — DOI: 10.36535/0233-6723-2021-199-66-79.
12. *Ломов И. С.* Эффективное применение метода Фурье к решению смешанной задачи для телеграфного уравнения// В сб.: «Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й межд. Саратовской зимней школы». — Саратов: Сарат. унив., 2022. — С. 178–180.
13. *Ломов И. С.* Новый метод построения обобщённого решения смешанной задачи для телеграфного уравнения// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. мат. и киберн. — 2022. — № 3. — С. 33–40.
14. *Ломов И. С.* Построение обобщённого решения смешанной задачи для телеграфного уравнения: секвенциальный и аксиоматический подходы// Дифф. уравн. — 2022. — *58*, № 11. — С. 1471–1483. — DOI: 10.31857/S0374064122110048.
15. *Ломовцев Ф. Е.* Метод корректировки пробных решений волнового уравнения в криволинейной первой четверти плоскости для минимальной гладкости правой части// Журн. Белорус. гос. ун-та. Мат. Инф. — 2017. — *3*. — С. 38–52.
16. *Ломовцев Ф. Е., Лысенко В. Н.* Смешанная задача для общего одномерного волнового уравнения в полуполосе плоскости при нестационарных нехарактеристических вторых производных// Весн. МДУ iм. А. А. Куляшова. Сер. B. Мат. Фiз. Бiял. — 2021. — № 2. — С. 28–55.
17. *Ломовцев Ф. Е.* Глобальная теорема корректности по Адамару первой смешанной задачи для волнового уравнения в полуполосе плоскости// Весн. ГрДУ iм. Я. Купалы. Сер. 2. Мат. Фiз. Iнф, вылiч. тэх. i кiрав. — 2021. — *11*, № 1. — С. 68–82.
18. *Ломовцев Ф. Е.* Первая смешанная задача для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на полупрямой// Журн. Белорус. гос. ун-та. Мат. Инф. — 2021. — *1*. — С. 18–38.
19. *Ломовцев Ф. Е.* Глобальная теорема корректности первой смешанной задачи для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на отрезке// Пробл. физ., мат. и техн. — 2022. — № 1. — С. 62–73. — DOI: 10.54341/20778708_2022_1_50_62.
20. *Моисеев Е. И., Ломовцев Ф. Е., Новиков Е. Н.* Неоднородное факторизованное гиперболическое уравнение второго порядка в четверти плоскости при полунестационарной факторизованной второй косой производной в граничном условии// Докл. РАН. — 2014. — *459*, № 5. — С. 544–549. — DOI: 10.7868/S0869565214350072.
21. *Муравей Л. А., Петров В. М., Романенков А. М.* О задаче гашения поперечных колебаний продольно движущейся струны// Вестн. Мордовского ун-та. — 2018. — *28*, № 4. — С. 472–485. — DOI: 1015507/0236-2910.028.201804.472-485.
22. *Муравей Л. А., Романенков А. М.* Численные методы гашения колебаний движущегося бумажного полотна// В сб.: «Дифф. уравн., мат. моделир. и вычисл. алгоритмы: сборн. матер. межд. конф. Белгород, 25–29 окт. 2021 г.» — Белгород: ИД БелГУ НИУ БелГУ, 2021. — С. 194–196.
23. *Наймарк М. А.* Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
24. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974.
25. *Расулов М. Л.* Метод контурного интеграла и его применение к исследованию задач для дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1964.
26. *Рыхлов В. С.* Разрешимость смешанной задачи для гиперболического уравнения с распадающимися краевыми условиями при отсутствии полноты собственных функций// Итоги науки и техн. Сер. Соврем. мат. и ее прил. — 2022. — *204*. — С. 124–134. — DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-124-134.

27. *Рыхлов В. С.* О решении начально-граничной задачи для гиперболического уравнения со смешанной производной// В сб.: «Соврем. методы теории краевых задач: материалы Межд. конф. “Понтрягинские чтения-XXXIII”». — Воронеж: ВГУ, 2022. — С. 237–240.
28. *Рыхлов В. С.* Решение начально-граничной задачи для уравнения гиперболического типа со смешанной производной// В сб.: «Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й межд. Саратовской зимней школы». — Саратов: Сарат. унив., 2022. — С. 252–255. — URL: `https://sgu.ru/node/184778`.
29. *Рыхлов В. С.* Единственность решения начально-граничной задачи для гиперболического уравнения со смешанной производной и формула для решения// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2023. — *23*, № 2. — С. 183–194. — DOI: 10.18500/1816-9791-2023-23-2-183-194.
30. *Рыхлов В. С.* Обобщённая начально-граничная задача для волнового уравнения со смешанной производной// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2023. — *69*, № 2. — С. 342–363. — DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-342-363.
31. *Рыхлов В. С.* Обобщённое решение начально-граничной задачи для волнового уравнения со смешанной производной и ненулевым потенциалом// В сб.: «Соврем. методы теории краевых задач: матер. Межд. конф.: Воронеж. весен. матем. школа (3–9 мая 2023 г.)». — Воронеж: ВГУ, 2023. — С. 343–345.
32. *Рыхлов В. С.* Обобщённое решение начально-граничной задачи для волнового уравнения со смешанной производной и потенциалом общего вида// В сб.: «XXXIV Крымская осенняя математическая школа-симпозиум Н. Д. Копачевского по спектральным и эволюционным задачам». — Симферополь: ИТ АРИАЛ, 2023. — С. 17–19.
33. *Рыхлов В. С.* О решении начально-граничной задачи в полуполосе для гиперболического уравнения со смешанной производной// Итоги науки и техники. Сер. Совр. мат. и ее прил. — 2023. — *226*. — С. 89–107. — DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-89-107.
34. *Рыхлов В. С.* О решении начально-граничной задачи для волнового уравнения со смешанной производной и потенциалом общего вида// В сб.: «Современные проблемы теории функций и их приложения: Вып. 22: материалы 22-й межд. Саратовской зимней школы». — Саратов: Сарат. унив., 2024. — С. 238–242.
35. *Харди Г.* Расходящиеся ряды. — М.: Иностр. лит., 1951.
36. *Толстов Г. П.* О второй смешанной производной// Мат. сб. — 1949. — *24*, № 1. — С. 27–51.
37. *Хромов А. П.* Поведение формального решения смешанной задачи для волнового уравнения// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2016. — *56*, № 2. — С. 239–251. — DOI: 10.7868/S0044466916020149.
38. *Хромов А. П.* О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2019. — *19*, № 3. — С. 280–288. — DOI: 10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288.
39. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и смешанная задача для волнового уравнения// В сб.: «Математика. Механика. Вып. 21». — Саратов: Сарат. унив., 2019. — С. 62–67.
40. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и функциональные уравнения, связанные с аналогами геометрической прогрессии// В сб.: «Современные методы теории краевых задач: материалы межд. конференции: Воронежская весенняя математическая школа “Понтрягинские чтения-XXX”». — Воронеж: ВГУ, 2019. — С. 291–300.
41. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения// В сб.: «Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 20-й межд. Саратовской зимней школы». — Саратов: Научная книга, 2020. — С. 433–439.
42. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача// В сб.: «Математика. Механика. Вып. 23». — Саратов: Сарат. унив., 2021. — С. 63–67.
43. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача для волнового уравнения// В сб.: «Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й межд. Саратовской зимней школы». — Саратов: Саратов. унив., 2022. — С. 319–324. — URL: `https://sgu.ru/node/184778`.
44. *Хромов А. П.* Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача для волнового уравнения простейшего вида// Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2022. — *22*, № 3. — С. 322–331. — DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-3-322-331.
45. *Хромов А. П., Корнев В. В.* Классическое и обобщённое решения смешанной задачи для неоднородного волнового уравнения// Журн. вычисл. мат. и мат. физ. — 2019. — *59*, № 2. — С. 286–300. — DOI: 10.1134/S0044466919020091.
46. *Хромов А. П., Корнев В. В.* Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения// Тр. ИММ УрО РАН. — 2021. — *27*, № 4. — С. 215–238. — DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238.
47. *Хромов А. П., Корнев В. В.* Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача, не допускающая разделения переменных// Тр. Мат. центра им. Н. И. Лобачевского. — 2021. — *60*. — С. 325–328.

48. *Эйлер Л.* Дифференциальное исчисление. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1949.
49. *Archibald F. R., Emslie A. G.* The vibration of a string having a uniform motion along its length// J. Appl. Mech. — 1958. — *25*, № 1. — С. 347-348.
50. *Mahalingam S.* Transverse vibrations of power transmission chains// British J. Appl. Phys. — 1957. — *8*, № 4. — С. 145–148. — URL: `http://iopscience.iop.org/article/ 10.1088/0508-3443/8/4/303/pdf`.
51. *Sack R. A.* Transverse oscillations in traveling strings// British J. Appl. Phys. — 1954. — *5*, № 6. — С. 224–226. — DOI: 10.1088/0508-3443/5/6/307.

В. С. Рыхлов
Саратовский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия
E-mail: `RykhlovVS@yandex.ru`

UDC 517.958, 517.956.32
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-451-486
EDN: NKBXUW

Classical solution of the initial-boundary value problem for the wave equation with mixed derivative

V. S. Rykhlov

Saratov State University, Saratov, Russia

Abstract. In this paper, we study the initial-boundary value problem for a second-order nonhomogeneous hyperbolic equation in a half-strip of the plane with constant coefficients, containing a mixed derivative, with zero and nonzero potentials. This equation is the equation of transverse oscillations of a moving finite string. We consider the case of fixed ends (Dirichlet conditions). We assume that the roots of the characteristic equation are simple and lie on the real axis on different sides of the origin. We formulate our previously proven theorems on finite formulas for a generalized solution in the case of homogeneous and nonhomogeneous problems. Then, based on these formulas, we prove theorems on finite formulas for a classical solution or, in other words, a solution almost everywhere. In the second part of the paper, we formulate theorems on generalized solution of the initial-boundary value problem with ordinary potential and potential of general type, which we had proved earlier. These results are based on the idea of treating an equation with a potential as an inhomogeneity in an equation without a potential. This idea was previously used by A. P. Khromov and V. V. Kornev in the case of equation without mixed derivative. Further, on the basis of formulas for generalized solution to the problem with potentials, we prove theorems on the corresponding formulas for classical solutions for these two types of potentials.

Keywords: nonhomogeneous hyperbolic equation, initial-boundary value problem, mixed derivative, generalized solution, classical solution.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: V. S. Rykhlov, "Classical solution of the initial-boundary value problem for the wave equation with mixed derivative," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 3, 451–486. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-451-486`

REFERENCES

1. M. Sh. Burlutskaya and A. P. Khromov, "Rezol'ventnyy podkhod v metode Fur'e" [Resolvent approach in the Fourier method], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2014, **458**, No. 2, 138–140, DOI: 10.7868/S0869565214260041 (in Russian).
2. M. Sh. Burlutskaya and A. P. Khromov, "Rezol'ventnyy podkhod dlya volnovogo uravneniya" [Resolvent approach for the wave equation], *Zhurn. vychisl. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2015, **55**, No. 2, 229–241, DOI: 10.7868/S0044466915020052 (in Russian).
3. A. I. Vagabov, *Vvedenie v spektral'nuyu teoriyu differentsial'nykh operatorov* [Introduction to the Spectral Theory of Differential Operators], Rostov Univ., Rostov-na-Donu, 1994 (in Russian).
4. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
5. V. V. Kornev, "O primenenii raskhodyashchikhsya ryadov v smeshannykh zadachakh, ne imeyushchikh klassicheskogo resheniya" [On the application of divergent series in mixed problems that do not have a classical solution], In: *Sovremennye metody teorii kraevykh zadach: materialy mezhd. konferentsii: Voronezh. vesennyaya matem. shkola "Pontryaginskie chteniya-XXXIII"* [Modern Methods of the Theory of Boundary-Value Problems: Proc. of the Int. Conf.: Voronezh. Spring Math. School "Pontryagin Readings-XXXIII"], VGU, Voronezh, 2022, pp. 132–137 (in Russian).
6. V. V. Kornev and A. P. Khromov, "Klassicheskoe reshenie smeshannoy zadachi dlya odnorodnogo volnovogo uravneniya s zakreplennymi kontsami" [Classical solution of the mixed problem for the homogeneous wave equation with fixed ends], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i ee pril.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2019, **172**, 119–133, DOI: 10.36535/0233-6723-2019-172-119-133 (in Russian).
7. V. V. Kornev and A. P. Khromov, "Ispol'zovanie rezol'ventnogo podkhoda i raskhodyashchikhsya ryadov pri reshenii smeshannykh zadach" [Using the resolvent approach and divergent series in solving mixed problems], In: *Matematika. Mekhanika. Vyp. 23* [Math. Mech. Iss. 23], Saratov Univ., Saratov, 2021, pp. 18–24 (in Russian).
8. A. N. Krylov, *O nekotorykh differentsial'nykh uravneniyakh matematicheskoy fiziki, imeyushchikh prilozheniya v tekhnicheskikh voprosakh* [On Some Differential Equations of Mathematical Physics that Have Applications in Technical Matters], GITTL, Moscow–Leningrad, 1950 (in Russian).
9. V. P. Kurdyumov, A. P. Khromov, and V. A. Khalova, "Smeshannaya zadacha dlya odnorodnogo volnovogo uravneniya s nenulevoy nachal'noy skorost'yu s summiruemym potentsialom" [Mixed problem for a homogeneous wave equation with nonzero initial velocity and summable potential], *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mat. Mekh. Inf.* [Bull. Saratov Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inf.], 2020, **20**, No. 4, 444–456, DOI: 10.18500/1816-9791-2020-20-4-444-456 (in Russian).
10. I. S. Lomov, "Effektivnoe primenenie metoda Fur'e dlya postroeniya resheniya smeshannoy zadachi dlya telegrafnogo uravneniya" [Effective application of the Fourier method for constructing a solution to a mixed problem for the telegraph equation], *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 15. Vychisl. mat. i kibern.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 15. Numer. Math. Cybern.], 2021, No. 4, 37–42 (in Russian).
11. I. S. Lomov, "Obobshchennaya formula Dalambera dlya telegrafnogo uravneniya" [Generalized D'Alembert formula for the telegraph equation], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i ee pril.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2021, **172**, 66–79, DOI: 10.36535/0233-6723-2021-199-66-79(in Russian).
12. I. S. Lomov, "Effektivnoe primenenie metoda Fur'e k resheniyu smeshannoy zadachi dlya telegrafnogo uravneniya" [Efficient application of the Fourier method to solving a mixed problem for the telegraph equation], In: *Sovremennye problemy teorii funktsiy i ikh prilozheniya: materialy 21-y mezhd. Saratovskoy zimney shkoly* [Modern Problems of the Theory of Functions and Their Applications: Proc. 21st Int. Saratov Winter School], Saratov univ., Saratov, 2022, pp. 178–180 (in Russian).
13. I. S. Lomov, "Novyy metod postroeniya obobshchennogo resheniya smeshannoy zadachi dlya telegrafnogo uravneniya" [A new method for constructing a generalized solution to a mixed problem for the telegraph equation], *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 15. Vychisl. mat. i kibern.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 15. Numer. Math. Cybern.], 2022, No. 3, 33–40 (in Russian).
14. I. S. Lomov, "Postroenie obobshchennogo resheniya smeshannoy zadachi dlya telegrafnogo uravneniya: sekventsial'nyy i aksiomaticheskiy podkhody" [Construction of a generalized solution of a mixed problem for the telegraph equation: sequential and axiomatic approaches], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2022, **58**, No. 11, 1471–1483, DOI: 10.31857/S0374064122110048 (in Russian).
15. F. E. Lomovtsev, "Metod korrektirovki probnykh resheniy volnovogo uravneniya v krivolineynoy pervoy chetverti ploskosti dlya minimal'noy gladkosti pravoy chasti" [Method of correction of test solutions of the wave equation in the curvilinear first quarter of the plane for minimal smoothness of the right-hand side], *Zhurn. Belorus. gos. un-ta. Mat. Inf.* [J. Belorus State Univ. Math. Inf.], 2017, **3**, 38–52 (in Russian).

16. F. E. Lomovtsev and V. N. Lysenko, "Smeshannaya zadacha dlya obshchego odnomernogo volnovogo uravneniya v polupolose ploskosti pri nestatsionarnykh nekharakteristicheskikh vtorykh proizvodnykh" [Mixed problem for the general one-dimensional wave equation in a half-strip of the plane with nonstationary noncharacteristic second derivatives], *Vesn. MDU im. A. A. Kulyashova. Ser. B. Mat. Fiz. Biyal.* [Bull. A. A. Kulyashov MDU. Ser. B. Math. Phys. Biol.], 2021, No. 2, 28–55 (in Russian).
17. F. E. Lomovtsev, "Global'naya teorema korrektnosti po Adamaru pervoy smeshannoy zadachi dlya volnovogo uravneniya v polupolose ploskosti" [Global Hadamard correctness theorem for the first mixed problem for the wave equation in a half-strip of the plane], *Vesn. GrDU im. Ya. Kupaly. Ser. 2. Mat. Fiz. Inf, vylich. tekh. i kirav.* [Bull. Ya. Kupala GrDU Ser. 2. Math. Phys. Inf. Comp. Tech. Kirav.], 2021, **11**, No. 1, 68–82 (in Russian).
18. F. E. Lomovtsev, "Pervaya smeshannaya zadacha dlya obshchego telegrafnogo uravneniya s peremennymi koeffitsientami na polupryamoy" [The first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on the semiaxis], *Zhurn. Belorus. gos. un-ta. Mat. Inf.* [J. Belorus State Univ. Math. Inf.], 2021, **1**, 18–38 (in Russian).
19. F. E. Lomovtsev, "Global'naya teorema korrektnosti pervoy smeshannoy zadachi dlya obshchego telegrafnogo uravneniya s peremennymi koeffitsientami na otrezke" [Global correctness theorem for the first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on a segment], *Probl. fiz., mat. i tekhn.* [Probl. Phys. Math. Tech.], 2022, No. 1, 62–73, DOI: 10.54341/20778708_2022_1_50_62 (in Russian).
20. E. I. Moiseev, F. E. Lomovtsev, and E. N. Novikov, "Neodnorodnoe faktorizovannoe giperbolicheskoe uravnenie vtorogo poryadka v chetverti ploskosti pri polunestatsionarnoy faktorizovannoy vtoroy kosoy proizvodnoy v granichnom uslovii" [Nonhomogeneous factorized second-order hyperbolic equation in a quarter plane with a seminonstationary factorized second oblique derivative in the boundary condition], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2014, **459**, No. 5, 544–549, DOI: 10.7868/S0869565214350072 (in Russian).
21. L. A. Muravey, V. M. Petrov, and A. M. Romanenkov, "O zadache gasheniya poperechnykh kolebaniy prodol'no dvizhushcheysya struny" [On the problem of damping transverse oscillations of a longitudinally moving string], *Vestn. Mordovskogo un-ta* [Bull. Mordova Univ.], 2018, **28**, No. 4, 472–485, DOI: 1015507/0236-2910.028.201804.472-485 (in Russian).
22. L. A. Muravey and A. M. Romanenkov, "Chislennye metody gasheniya kolebaniy dvizhushchegosya bumazhnogo polotna" [Numerical methods for damping oscillations of a moving paper canvas], In: *Diff. uravn., mat. modelir. i vychisl. algoritmy: sborn. mater. mezhd. konf. Belgorod, 25–29 okt. 2021 g.* [Differ. Equ., Math. Model., and Comput. Algorithms: Collected Mater. Int. Conf. Belgorod, 25–29 October 2021], ID BelGU NIU BelGU, Belgorod, 2021, pp. 194–196 (in Russian).
23. M. A. Naimark, *Lineynye differentsial'nye operatory* [Linear Differential Operators], Nauka, Moscow, 1969 (Russian translation).
24. I. P. Natanson, *Teoriya funktsiy veshchestvennoy peremennoy* [Theory of Functions of a Real Variable], Nauka, Moscow, 1974 (in Russian).
25. M. L. Rasulov, *Metod konturnogo integrala i ego primenenie k issledovaniyu zadach dlya differentsial'nykh uravneniy* [The Method of Contour Integral and Its Application to the Study of Problems for Differential Equations], Nauka, Moscow, 1964 (in Russian).
26. V. S. Rykhlov, "Razreshimost' smeshannoy zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya s raspadayushchimisya kraevymi usloviyami pri otsutstvii polnoty sobstvennykh funktsiy" [Solvability of a mixed problem for a hyperbolic equation with decaying boundary conditions in the absence of completeness of eigenfunctions], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Sovrem. mat. i ee pril.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2022, **204**, 124–134, DOI: 10.36535/0233-6723-2022-204-124-134 (in Russian).
27. V. S. Rykhlov, "O reshenii nachal'no-granichnoy zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya so smeshannoy proizvodnoy" [On the solution of the initial-boundary value problem for a hyperbolic equation with a mixed derivative], In: *Sovrem. metody teorii kraevykh zadach: materialy Mezhd. konf. "Pontryaginskie chteniya-XXXIII"* [Modern Methods of the Theory of Boundary-Value Problems: Proc. Int. Conf.: Voronezh. Spring Math. School "Pontryagin Readings-XXXIII"], VGU, Voronezh, 2022, pp. 237–240 (in Russian).
28. V. S. Rykhlov, "Reshenie nachal'no-granichnoy zadachi dlya uravneniya giperbolicheskogo tipa so smeshannoy proizvodnoy" [Solution of the initial-boundary value problem for a hyperbolic equation with a mixed derivative], In: *Sovremennye problemy teorii funktsiy i ikh prilozheniya: materialy 21-y mezhd. Saratovskoy zimney shkoly* [Modern Problems of the Theory of Functions and Their Applications: Proc. 21st Int. Saratov Winter School], Saratov Univ., Saratov, 2022, pp. 252–255 (in Russian), URL: https://sgu.ru/node/184778.

29. V. S. Rykhlov, “Edinstvennost’ resheniya nachal’no-granichnoy zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya so smeshannoy proizvodnoy i formula dlya resheniya” [Uniqueness of the solution of the initial!boundary value problem for a hyperbolic equation with a mixed derivative and a formula for the solution], *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mat. Mekh. Inf.* [Bull. Saratov Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inf.], 2023, **23**, No. 2, 183–194, DOI: 10.18500/1816-9791-2023-23-2-183-194 (in Russian).
30. V. S. Rykhlov, “Obobshchennaya nachal’no-granichnaya zadacha dlya volnovogo uravneniya so smeshannoy proizvodnoy” [Generalized initial-boundary value problem for the wave equation with mixed derivative], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2023, **69**, No. 2, 342–363, DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-342-363 (in Russian).
31. V. S. Rykhlov, “Obobshchennoe reshenie nachal’no-granichnoy zadachi dlya volnovogo uravneniya so smeshannoy proizvodnoy i nenulevym potentsialom” [Generalized solution of the initial-boundary value problem for the wave equation with mixed derivative and nonzero potential], In: *Sovrem. metody teorii kraevykh zadach: mater. Mezhd. konf.: Voronezh. vesen. matem. shkola (3–9 maya 2023 g.)* [Modern Methods of the Theory of Boundary-Value Problems: Proc. of the Int. Conf.: Voronezh. Spring Math. School (3–9 May, 2023)], VGU, Voronezh, 2023, pp. 343–345 (in Russian).
32. V. S. Rykhlov, “Obobshchennoe reshenie nachal’no-granichnoy zadachi dlya volnovogo uravneniya so smeshannoy proizvodnoy i potentsialom obshchego vida” [Generalized solution of the initial-boundary value problem for the wave equation with a mixed derivative and a general potential], In: *XXXIV Krymskaya osennyaya matematicheskaya shkola-simpozium N. D. Kopachevskogo po spektral’nym i evolyutsionnym zadacham* [N. D. Kopachevsky’s XXXIV Crimean Autumn Math. School-Symposium on Spectral and Evolution Problems], IT ARIAL, Simferopol’, 2023, pp. 17–19 (in Russian).
33. V. S. Rykhlov, “O reshenii nachal’no-granichnoy zadachi v polupolose dlya giperbolicheskogo uravneniya so smeshannoy proizvodnoy” [On the solution of the initial-boundary value problem in a half-strip for a hyperbolic equation with a mixed derivative], *Itogi nauki i tekhniki. Ser. Sovr. mat. i ee pril.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2023, **226**, 89–107, DOI: 10.36535/0233-6723-2023-226-89-107 (in Russian).
34. V. S. Rykhlov, “O reshenii nachal’no-granichnoy zadachi dlya volnovogo uravneniya so smeshannoy proizvodnoy i potentsialom obshchego vida” [On the solution of the initial-boundary value problem for the wave equation with a mixed derivative and a general potential], In: *Sovremennye problemy teorii funktsiy i ikh prilozheniya: Vyp. 22: materialy 22-y mezhd. Saratovskoy zimney shkoly* [Modern Problems of the Theory of Functions and Their Applications: Proc. 22nd Int. Saratov Winter School], Saratov Univ., Saratov, 2024, pp. 238–242 (in Russian).
35. G. Hardy, *Raskhodyashchiesya ryady* [Divergent Series], Inostr. Lit., Moscow, 1951 (Russian translation).
36. G. P. Tolstov, “O vtoroy smeshannoy proizvodnoy” [On the second mixed derivative], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1949, **24**, No. 1, 27–51 (in Russian).
37. A. P. Khromov, “Povedenie formal’nogo resheniya smeshannoy zadachi dlya volnovogo uravneniya” [Behavior of the formal solution of the mixed problem for the wave equation], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2016, **56**, No. 2, 239–251, DOI: 10.7868/S0044466916020149 (in Russian).
38. A. P. Khromov, “O klassicheskom reshenii smeshannoy zadachi dlya odnorodnogo volnovogo uravneniya s zakreplennymi kontsami i nulevoy nachal’noy skorost’yu” [On the classical solution of a mixed problem for a homogeneous wave equation with fixed ends and zero initial velocity], *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mat. Mekh. Inf.* [Bull. Saratov Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inf.], 2019, **19**, No. 3, 280–288, DOI: 10.18500/1816-9791-2019-19-3-280-288 (in Russian).
39. A. P. Khromov, “Raskhodyashchiesya ryady i smeshannaya zadacha dlya volnovogo uravneniya” [Divergent series and mixed problem for the wave equation], In: *Matematika. Mekhanika. Vyp. 21* [Mathematics. Mechanics. Iss. 21], Saratov Univ., Saratov, 2019, pp. 62–67 (in Russian).
40. A. P. Khromov, “Raskhodyashchiesya ryady i funktsional’nye uravneniya, svyazannye s analogami geometricheskoy progressii” [Divergent series and functional equations associated with analogs of geometric progression], In: *Sovremennye metody teorii kraevykh zadach: materialy mezhd. konferentsii: Voronezhskaya vesennyaya matematicheskaya shkola “Pontryaginskie chteniya-XXX”* [Modern Methods of the Theory of Boundary-Value Problems: Proc. of the Int. Conf.: Voronezh. Spring Math. School “Pontryagin Readings-XXX”], VGU, Voronezh, 2019, pp. 291–300 (in Russian).
41. A. P. Khromov, “Raskhodyashchiesya ryady i metod Fur’e dlya volnovogo uravneniya” [Divergent series and the Fourier method for the wave equation], In: *Sovremennye problemy teorii funktsiy i ikh prilozheniya: materialy 20-y mezhd. Saratovskoy zimney shkoly* [Modern Problems of the Theory of Functions and Their Applications: Proc. 20th Int. Saratov Winter School], Nauchnaya kniga, Saratov, 2020, pp. 433–439 (in Russian).

42. A. P. Khromov, "Raskhodyashchiesya ryady i obobshchennaya smeshannaya zadacha" [Divergent series and generalized mixed problem], In: *Matematika. Mekhanika. Vyp. 23* [Mathematics. Mechanics. Iss. 23], Sarat. univ., Saratov, 2021, pp. 63–67 (in Russian).
43. A. P. Khromov, "Raskhodyashchiesya ryady i obobshchennaya smeshannaya zadacha dlya volnovogo uravneniya" [Divergent series and generalized mixed problem for the wave equation], In: *Sovremennye problemy teorii funktsiy i ikh prilozheniya: materialy 21-y mezhd. Saratovskoy zimney shkoly* [Modern Problems of the Theory of Functions and Their Applications: Proc. 21st Int. Saratov Winter School], Saratov Univ., Saratov, 2022, pp. 319–324 (in Russian), URL: `https://sgu.ru/node/184778`.
44. A. P. Khromov, "Raskhodyashchiesya ryady i obobshchennaya smeshannaya zadacha dlya volnovogo uravneniya prosteyshego vida" [Divergent series and generalized mixed problem for the wave equation of the simplest form], *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mat. Mekh. Inf.* [Bull. Saratov Univ. N.S. Ser. Math. Mech. Inf.], 2022, **22**, No. 3, 322–331, DOI: 10.18500/1816-9791-2022-22-3-322-331 (in Russian).
45. A. P. Khromov and V. V. Kornev, "Klassicheskoe i obobshchennoe resheniya smeshannoy zadachi dlya neodnorodnogo volnovogo uravneniya" [Classical and generalized solutions of a mixed problem for a nonhomogeneous wave equation], *Zhurn. vychisl. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2019, **59**, No. 2, 286–300, DOI: 10.1134/S0044466919020091 (in Russian).
46. A. P. Khromov and V. V. Kornev, "Raskhodyashchiesya ryady v metode Fur'e dlya volnovogo uravneniya" [Divergent series in the Fourier method for the wave equation], *Tr. IMM UrO RAN* [Proc. Inst. Math. Mech. Ural Brach RAS], 2021, **27**, No. 4, 215–238, DOI: 10.21538/0134-4889-2021-27-4-215-238 (in Russian).
47. A. P. Khromov and V. V. Kornev, "Raskhodyashchiesya ryady i obobshchennaya smeshannaya zadacha, ne dopuskayushchaya razdeleniya peremennykh" [Divergent series and generalized mixed problem that does not allow separation of variables], *Tr. Mat. tsentra im. N. I. Lobachevskogo* [Proc. Lobachevskii Math. Center], 2021, **60**, 325–328 (in Russian).
48. L. Euler, *Differentsial'noe ischislenie* [Foundations of Differential Calculus], GITTL, Moscow–Leningrad, 1949 (Russian translation).
49. F. R. Archibald and A. G. Emslie, "The vibration of a string having a uniform motion along its length," *J. Appl. Mech.*, 1958, **25**, No. 1, 347-348.
50. S. Mahalingam, "Transverse vibrations of power transmission chains," *British J. Appl. Phys.*, 1957, **8**, No. 4, 145–148, URL: `http://iopscience.iop.org/article/ 10.1088/0508-3443/8/4/303/pdf`.
51. R. A. Sack, "Transverse oscillations in traveling strings," *British J. Appl. Phys.*, 1954, **5**, No. 6, 224–226, DOI: 10.1088/0508-3443/5/6/307.

V. S. Rykhlov
Saratov State University, Saratov, Russia
E-mail: `RykhlovVS@yandex.ru`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 3 (2024). С. 487–497
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 51-7, 519.6
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-487-497
EDN: NLALYX

ОБРАТНАЯ ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ТОЛЩИНЫ НАКИПИ В ТРУБКАХ ПАРОВОГО КОТЛА

А. Н. Соловьев[1,2], **М. А. Шевченко**[2], **М. С. Германчук**[3]

[1] *Крымский инженерно-педагогический университет имени Февзи Якубова, Симферополь, Россия*
[2] *Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия*
[3] *Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия*

Аннотация. В работе рассматривается нестационарная нелинейная задача теплопроводности в трубке парового котла, на внутренней поверхности которой находится кальцинированная накипь. В обратной геометрической задаче определяется толщина этой накипи по изменению температуры на внешней границе трубки. Рассматривается три случая движения воды и пара в трубке: только вода, вода и пар и только пар. Задача решается на сечении элемента конструкции, движение воды и пара моделируется наличием распределенного отбора тепла в них, при образовании пара учитывается отбор тепла на фазовой границе, которая задается температурой кипения. В результате решения задачи методом конечных элементов для трех рассматриваемых случаев построена зависимость температуры на внешней границе от толщины слоя накипи. Эти зависимости служат основой решения обратной геометрической задачи идентификации параметров накипи.

Ключевые слова: обратная геометрическая задача теплопроводности, фазовый переход вода—пар, метод конечных элементов.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа поддержана Министерством науки и высшего образования Российской Федерации, соглашения: № 075-02-2023-1799, № 75-02-2024-1431.

Для цитирования: *А. Н. Соловьев, М. А. Шевченко, М. С. Германчук.* Обратная геометрическая задача теплопроводности определения толщины накипи в трубках парового котла// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 3. С. 487–497. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-487-497

1. Введение

Решению обратных задач теплопроводности посвящено огромное внимание в мировой научной литературе. Это связано с широким применением теплотехники и с тем, что повышение скорости теплопередачи теплообменного оборудования — ее актуальная тема. Основные направления этих исследований связаны с решением коэффициентных и граничных обратных задач.

Исследованию теплопередачи наножидкости, металлической пены и их комбинации посвящена обзорная работа [12]. Формулировке структуры математической модели на основе оператора интегрирования нецелого порядка для идентификации сложных тепловых систем посвящена работа [3]. В области теплопередачи обратные задачи связаны с оценкой параметров, которые трудно измерить напрямую. Полезность обратных методов такова, что из-за тяжелых условий прямое измерение определенной переменной становится недоступным.

Целью работы [10] является выполнение обратной оценки в двух задачах. Первый случай связан с оценкой граничного условия теплового потока и термического контактного сопротивления между двумя стальными пластинами. Второй случай заключается в оценке трех тепловых сопротивлений в бортовой системе летательного аппарата, состоящей из четырех компонентов и окружающего воздуха. Результаты этой работы объединяют недорогую установку обратной оценки и свидетельствуют о возможности многомерной оценки в обратных задачах теплопередачи.

В работе [4] предложен новый метод оценки температурно-зависимых тепловых свойств с использованием решения нестационарных обратных задач теплопроводности. Для решения некорректной обратной задачи применяется метод наименьших квадратов, чтобы минимизировать разницу между расчетными и измеренными температурами. Даны обратные оценки теплоемкости, теплопроводности и температуропроводности. Зависящие от времени конвективные граничные условия на внутренней стенке являются основными причинами потока и теплопередачи, вызывающими термическую усталость в трубах с термическим расслоением.

В работе [5] была разработана трехмерная нестационарная обратная задача теплопроводности для одновременной оценки многих переменных нестационарного конвективного граничного условия. На основании расчетных результатов рассмотрено влияние объемного расхода холодной воды на коэффициент кондуктивной теплопередачи вблизи внутренней стенки рабочего участка и распределение температуры стенки трубы.

В статье [6] представлен метод оценки пространственно изменяющегося сопротивления теплового контакта, получены две граничные обратных задач теплопроводности. Используются как аналитические решения, так и метод конечных элементов. Количественная оценка неопределенности расчетного сопротивления теплового контакта демонстрируется путем добавления ошибки смещения, основанной на точности датчиков, к температурам, указанным во внутренних точках обоих материалов.

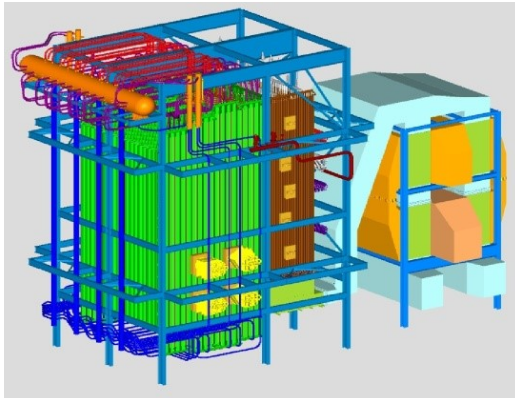
В статье [9] рассматривается неитерационное обратное определение температурно-зависимой теплопроводности в двумерной стационарной задаче теплопроводности. Метод фундаментальных решений использован для решения двумерной задачи теплопроводности. С помощью метода интегрального преобразования в работе [11] решена обратная задача нестационарной теплопроводности в тонкой конечной круглой пластине с заданным распределением температуры на внутренней поверхности, являющимся функцией времени и положения, а также определены тепловые прогибы на внешней криволинейной поверхности. Из-за эрозии жидкости и отложения нагаров в трубах внутренние дефекты трубопроводов имеют широкое распространение и серьезно угрожают безопасности промышленного производства.

В статье [13] предлагается модель косвенной инверсии, основанная на модифицированном методе одномерной коррекции (MODCM), для выявления эрозионного утончения и отложений обрастания внутренней стенки двумерной круглой трубы. Предлагаемая модель косвенной инверсии превосходит вычислительную эффективность других методов и дает способность отслеживать прерывистые границы.

В работе [2] предложен метод, сочетающий в себе метод дискретных ординат, метод конечных элементов и алгоритм Левенберга—Марквардта, для решения двумерных переходных обратно связанных задач излучения и проводимости. Во-первых, одновременно извлекаются три радиационных теплофизических параметра полупрозрачных сред. Во-вторых, параметры керамики Si_3N_4 восстанавливаются с использованием экспериментально измеренных температур в качестве обратных входных данных.

В настоящей работе рассматривается нестационарная нелинейная задача теплопроводности в трубке (рис. 1a) парового котла (рис. 1b), на внутренней поверхности которой находится кальцинированная накипь. В обратной геометрической задаче определяется толщина этой накипи по изменению температуры на внешней границе трубки. Рассматривается три случая движения воды и пара в трубке: только вода, вода и пар и только пар. Задача решается на сечении элемента конструкции, движение воды и пара моделируется наличием распределенного отбора тепла в них, при образовании пара учитывается отбор тепла на фазовой границе, которая задается температурой кипения. Источник моделируется дельта функцией Дирака, а фазовая граница связана

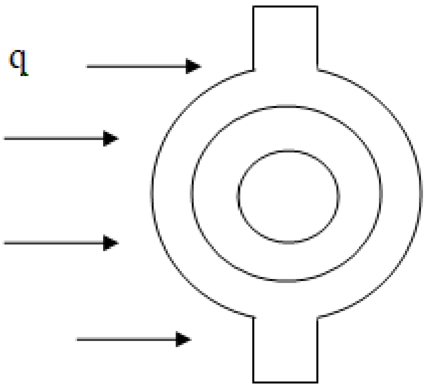
(a)



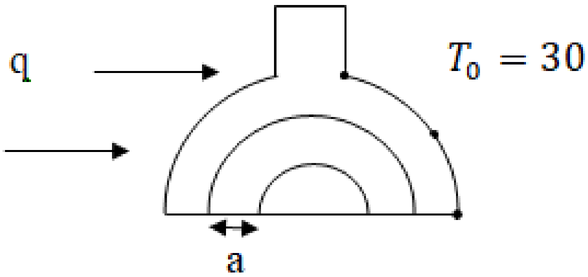
(b)

Рис. 1: Примеры конструкций (a) и модель парового котла (b)

Fig. 1: Examples of structures (a) and a model of a steam boiler (b)



(a)



(b)

Рис. 2: Элемент конструкций (a) и расчетная модель (b)

Fig. 2: Structural element (a) and calculation model (b)

с кусочно постоянными свойствами жидкой и газообразной сред. В результате решения задачи методом конечных элементов для трех рассматриваемых случаев построена зависимость температуры на внешней границе от толщины слоя накипи. Эти зависимости служат основой решения обратной геометрической задачи идентификации параметров накипи.

2. Математическая постановка задачи

2.1. Геометрическая и физическая модель. Физическая модель представлена на рис. 1a и представляет собой периодический набор стальных цилиндрических трубок, имеющих внешний радиус R и внутренний r, соединенных стальными панелями толщины h. Для численного анализа рассматривается сечение элемента конструкции, перпендикулярное оси трубки (рис. 2a). Внешний слой выполнен из стали, внутренний круговой слой толщины a — кальцинированная накипь, внутренняя круговая область занята водой или паром, граница между которыми в явном виде не строится.

Со стороны камеры сгорания задается тепловой поток q, на внешней границе происходит теплообмен с окружающей средой заданной температуры T_0. В силу предполагаемой симметрии процесса в рамках одного элемента рассматривается половина (верхняя) сечения (рис. 2b), при этом на нижней и верхней границах задаются симметричные граничные условия (теплоизоляция).

2.2. Континуальная модель. Рассматривается нелинейная нестационарная задача теплопроводности относительно температуры $T(x,y,t)$ в системе координат Oxy, которая описывается [1] уравнением с переменными коэффициентами λ, ρ, c_r и источником S, зависящим от распределения температуры,

$$\operatorname{div}(\lambda \operatorname{grad}(T)) + W + S = \rho c_r \frac{\partial T}{\partial t} \tag{2.1}$$

с граничными условиями:

$$\begin{gathered} S_q : -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = q, \\ S_d \text{ и } S_t : -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = 0, \\ S_f : -\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = f(T - T_0), \end{gathered} \tag{2.2}$$

где S_q — левая граница, S_d и S_t — низ и верх, S_f — правая граница области (рис. 2b). Коэффициенты λ, ρ, c_r — постоянные в областях трубки, панели, слоя накипи, кусочно постоянны в жидкой и газообразной среде и зависят от температуры T и температуры фазового перехода от жидкости к пару T_s

$$c_r\rho = \begin{cases} C_1, & T > T_s, \\ C_2, & T \leqslant T_s, \end{cases} \tag{2.3}$$

$$\lambda = \begin{cases} \lambda_s, & T > T_s, \\ \lambda_w, & T \leqslant T_s, \end{cases} \tag{2.4}$$

$$S = Q_w \delta(T - T_s). \tag{2.5}$$

Источник W принимается постоянным во внутренней круговой области и моделирует движение воды со скоростью, направленной по оси трубки, в результате чего в данное ее сечение постоянно прибывает среда с более низкой температурой.

3. Конечно элементная модель

3.1. Дискретизация. Численная реализация модели (2.1)–(2.5) осуществлена методом конечных элементов в пакете FlexPDE. Используются треугольные квадратичные конечные элементы, примеры конечно элементного разбиения представлены на рис. 3.

3.2. Сглаживание. При численном расчете кусочно-постоянные свойства заменяются сигмоидальной зависимостью; так, выражение (2.4) заменяется формулой

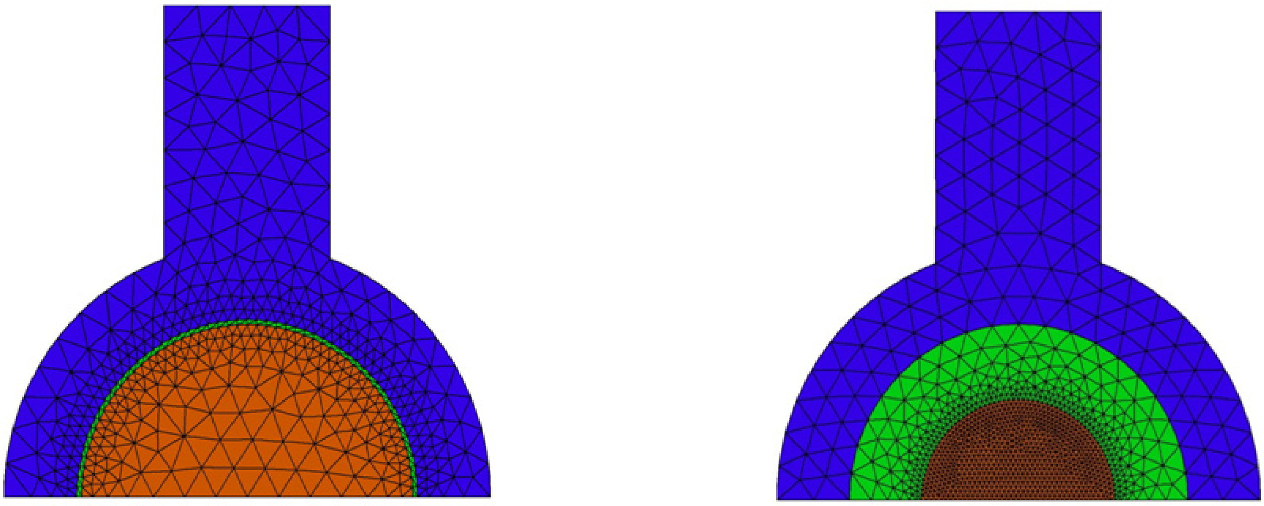
$$\lambda = \frac{\lambda_w - \lambda_s}{1 + \mathrm{e}^{d(T - T_s)}} + \lambda_s, \tag{3.1}$$

где λ_w, λ_s — теплопроводности воды и пара, соответственно.

Кроме того, дельта функция в выражении (2.5) заменяется на гауссовскую кривую, заданную формулой

$$S = Q_w \, \mathrm{e}^{-d(T - T_s)^2}. \tag{3.2}$$

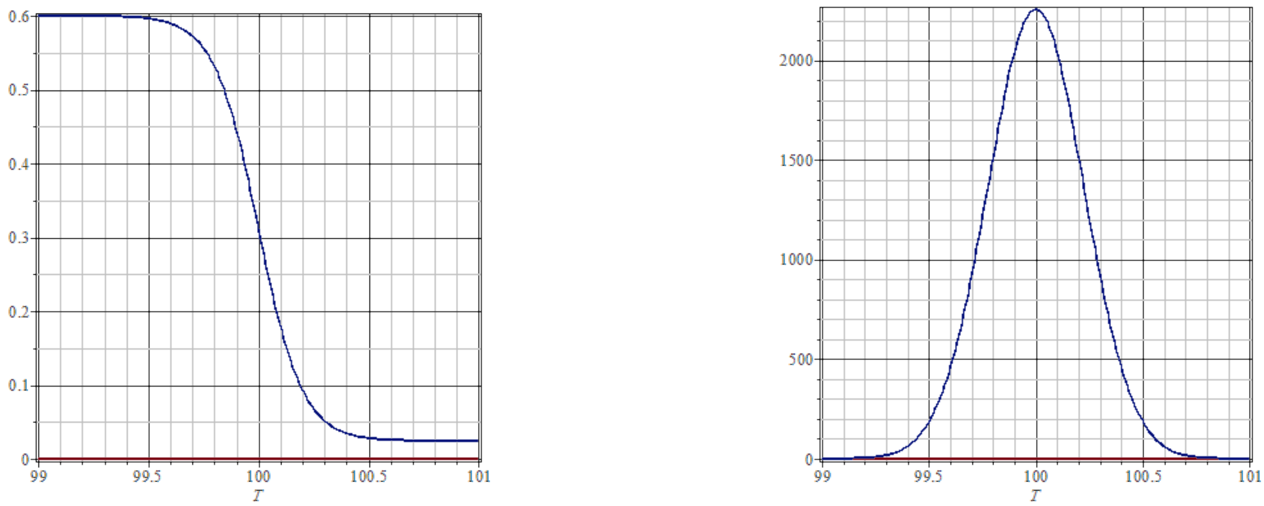
Замечание. Соотношения (3.1) и (3.2) которые представляют собой гладкие функции, которые существенно влияют на сходимость численного расчета, кроме этого, могут моделировать размытость фазовой границы, как это было предложено в [7, 8].



(a) (b)

Рис. 3: Сетка конечных элементов для воды (a), для двух фаз — вода и пар (b)

Fig. 3: Finite element mesh for water (a) and for two phases: water and steam (b)



(a) (b)

Рис. 4: Зависимости от температуры: коэффициента теплопроводности (a), источника S (b)

Fig. 4: Dependencies on temperature: thermal conductivity coefficient (a) and source S (b)

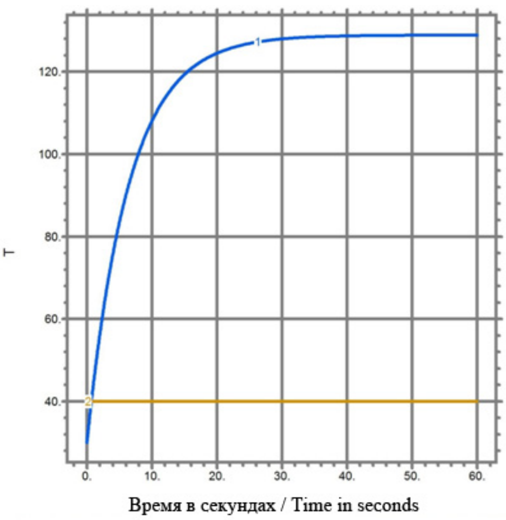
4. Численный эксперимент

В численном эксперименте рассмотрено три случая заполнения трубки: в первом случае — только вода, во втором — вода и пар и в третьем — только пар. Размеры конструкции $R = 1{,}0$ см, $r = 0{,}7$ см, a изменяется в пределах от 0,02 см до 0,30 см, $d = 10$, $T_s = 100°$ Цельсия, $T_0 = 30°$ Цельсия (совпадает с начальной температурой конструкции), $Q_w = 2257000$ кДж/кг, $q = 600$ Вт/м^2, $W = -92500$ кДж/кг, $f = 5$ Вт/(м^2·град), время расчета 60 сек. Конечноэлементная сетка содержала 2627 элементов и 1362 узла. Материал трубки — сталь, накипь — $CaCO_3$, жидкость — вода, газ — водяной пар. В таб. 1 представлены теплофизические свойства материалов.

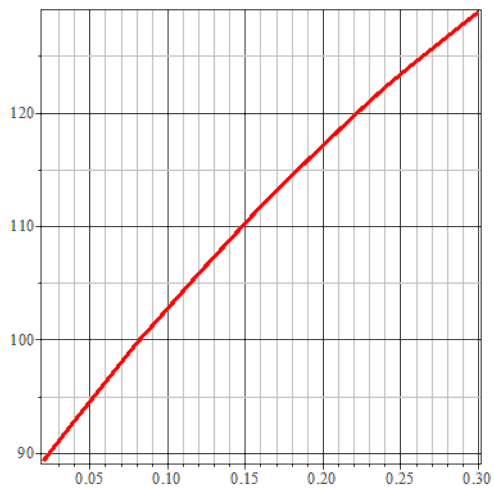
	λ Вт/(м·град)	ρ кг/м^3	c_r кДж/(кг·град)
Сталь	46,7	7800	0,46
Накипь	2,7	2000	0,8
Вода	0,6	1000	4,19
Водяной пар	0,024	0,6	2,1

	λ W/(m·deg)	ρ kg/m^3	c_r kJ/(kg·deg)
Steel	46.7	7800	0.46
Scale	2.7	2000	0.8
Water	0.6	1000	4.19
Water steam	0.024	0.6	2.1

Таб. 1



(a)



(b)

Рис. 5: Зависимости: температуры от времени (a), температуры от толщины слоя накипи (b)

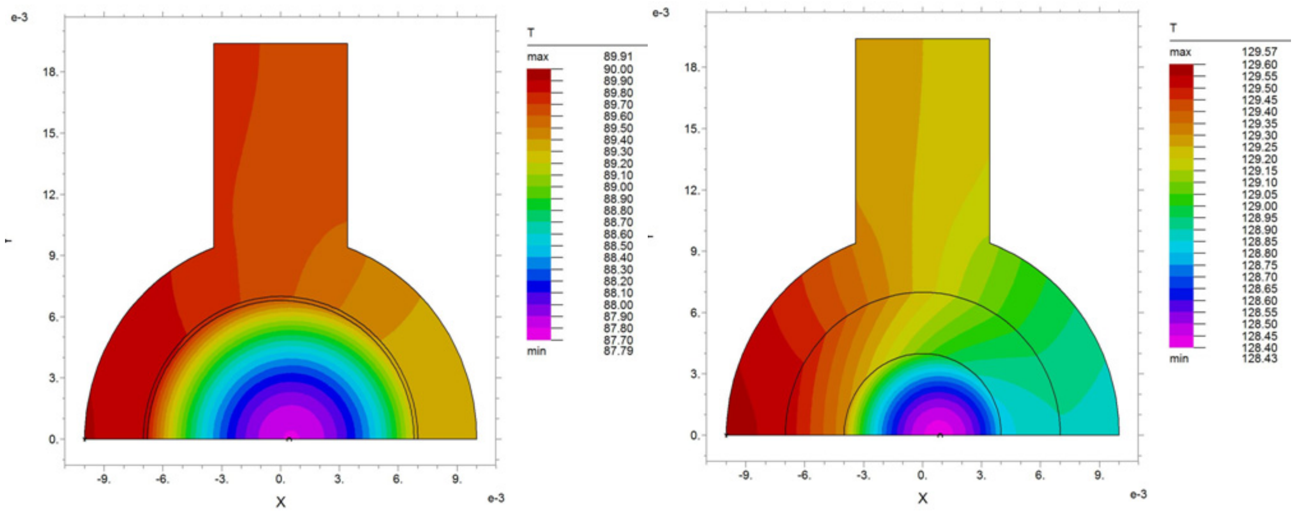
Fig. 5: Dependencies: temperature on time (a), temperature on the thickness of the scale layer (b)

4.1. Вода. В этом случае в трубке протекает вода, не превращающаяся в пар. На рис. 5a представлена зависимость температуры на внешней поверхности трубки от времени. Время выбрано с таким расчетом, что устанавливается стационарный режим теплообмена. На рис. 5b представлена зависимость температуры на внешней границе трубки от толщины слоя накипи. Эта зависимость может быть использована при решении обратной геометрической задачи.

На рис. 6 представлено распределение температуры в стационарном режиме при толщине слоя накипи: 0,02 см (рис. 6a), 0,3 см (рис. 6б).

4.2. Вода—пар. В этом случае в трубке протекает вода, и при достижении температуры кипения она превращается в пар. На рис. 7a представлено распределение температуры в стационарном режиме при толщине слоя накипи 0,3 см. Между водой и внутренней поверхностью накипи образуется слой пара. На рис. 7b представлена зависимость температуры на внешней границе трубки от толщины слоя накипи. Эта зависимость отличается от аналогичной для случая одной воды (рис. 6b), но также может быть использована при решении обратной геометрической задачи.

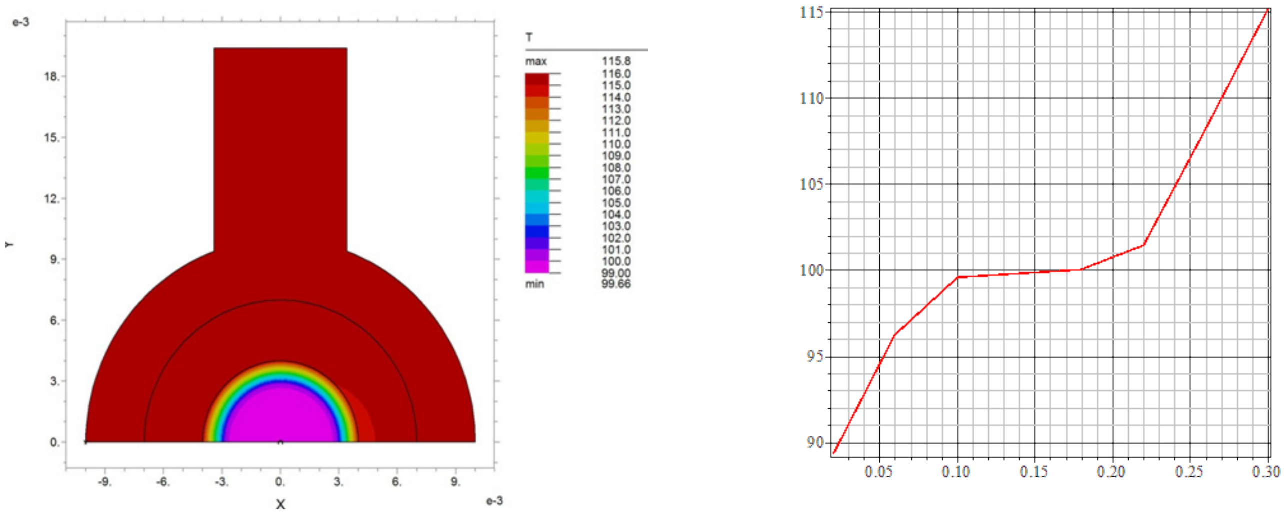
4.3. Пар. В последнем случае трубка заполнена паром. На рис. 8a представлено распределение температуры, в виде тепловой поверхности, при толщине слоя накипи 0,3 см. Векторное поле



(a) (b)

Рис. 6: Распределение температуры при толщине слоя накипи: 0,02 см (a), 0,3 см (b)

Fig. 6: Temperature distribution at scale layer thickness: 0.02 cm (a), 0.3 cm (b)



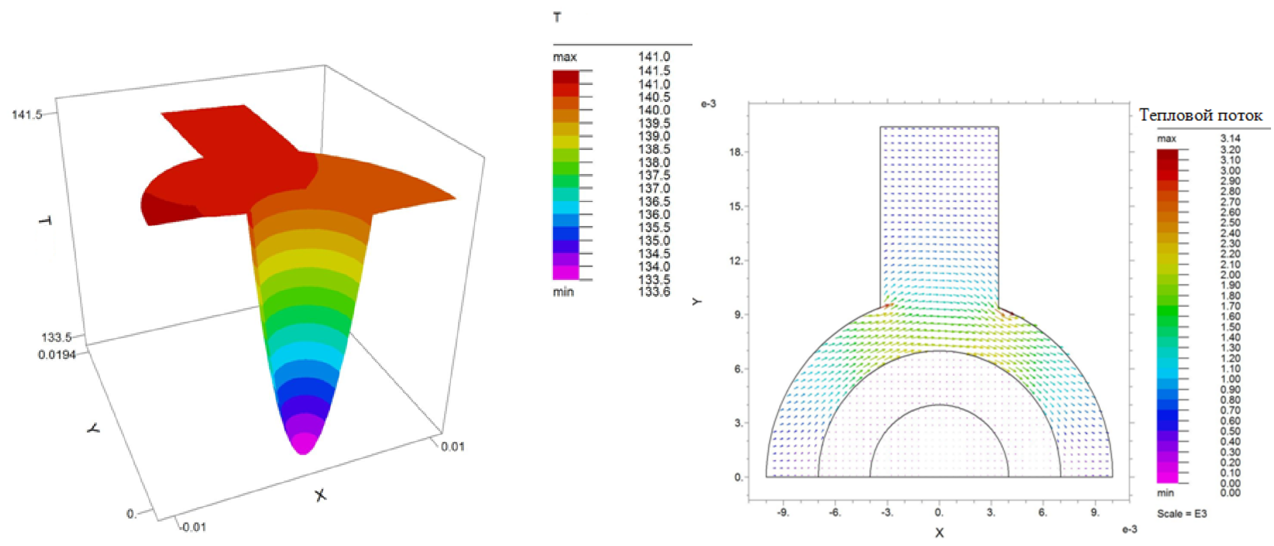
(a) (b)

Рис. 7: Распределение температуры: толщина слоя накипи 0,3 см (a), зависимость температуры от толщины слоя накипи (b)

Fig. 7: Temperature distribution: at scale layer thickness 0.3 cm (a), temperature dependence on scale layer thickness (b)

теплового потока представлено на рис. 8b. Можно видеть, что наиболее интенсивный тепловой поток в верхней части трубки.

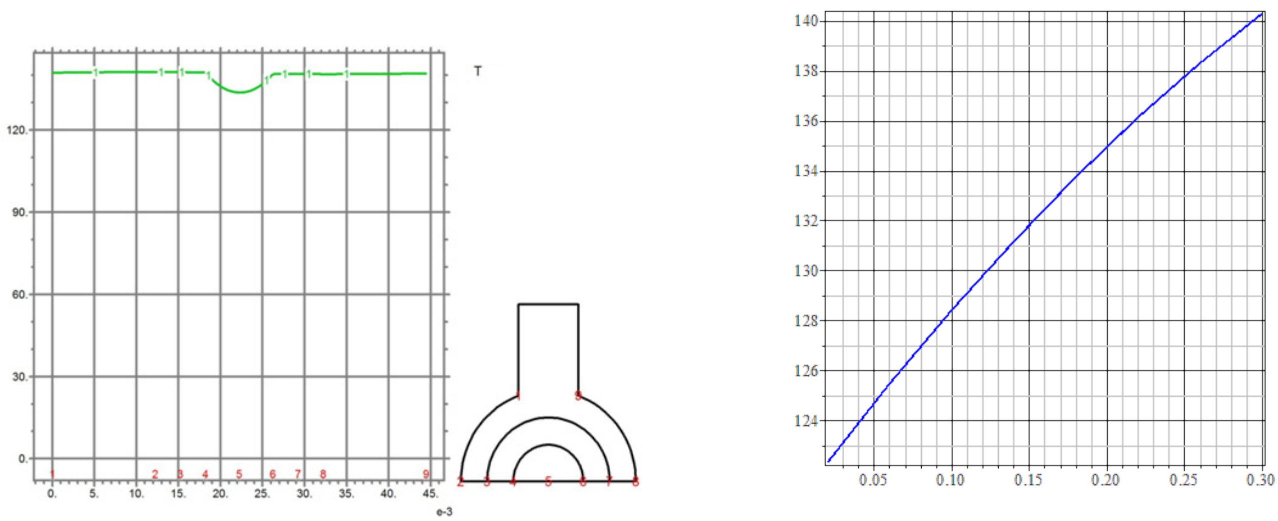
На рис. 9a представлена зависимость температуры на нижней поверхности расчетной модели. Можно заметить, что температура становится симметричной относительно центра, т. е. можно применить осесимметричный ее расчет. На рис. 9b представлена зависимость температуры на внешней границе трубки от толщины слоя накипи. Эта зависимость качественно совпадает с графиком на рис. 5b и также может быть использована при решении обратной геометрической задачи.



(a) (b)

Рис. 8: Распределение температуры при толщине слоя накипи 0,3 см (a), векторное поле теплового потока (b)

Fig. 8: Temperature distribution at a scale layer thickness of 0.3 cm (a), heat flux vector field (b)



(a) (b)

Рис. 9: Распределение температуры при толщине слоя накипи 0,3 см (a), векторное поле теплового потока (b)

Fig. 9: Temperature distribution at a scale layer thickness of 0.3 cm (a), heat flux vector field (b)

5. Заключение

В работе построена математическая модель теплопередачи в элементе парового котла с учетом образования накипи на внутренних поверхностях, осуществлена ее численная компьютерная реализация методом конечных элементов. Особенностью предложенной модели является реализация фазового перехода жидкости в пар при нагревании. В результате расчетов в пакете FlexPDE решена серия нестационарных задач разогрева элемента конструкции. Построены зависимости температуры на внешней границе конструкции, на которой может быть помещен датчик температуры, в зависимости от толщины слоя накипи. Эти зависимости представляют собой монотонно возрастающие функции, что позволяет однозначно решить обратную геометрическую задачу идентификации толщины накипи внутри трубок котла. Разработанная программа может найти применение на производстве для мониторинга элементов тепловых котлов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алифанов О. М.* Обратные задачи теплообмена. — М.: Машиностроение, 1988.
2. *Bai Y., Zhang C., He Z., Cui M., Sun D.* Inverse solution to two-dimensional transient coupled radiation and conduction problems and the application in recovering radiative thermo-physical properties of Si3N4 ceramics// Int. J. Thermal Sci. — 2023. — *190.* — 108303.
3. *Battaglia J.-L.* Linear and nonlinear thermal system identification based on the integral of noninteger order — Application to solve inverse heat conduction linear and nonlinear problems// Int. J. Thermal Sci. — 2024. — *197.* — 108840.
4. *Cui M., Gao X., Zhang J.* A new approach for the estimation of temperature-dependent thermal properties by solving transient inverse heat conduction problems// Int. J. Thermal Sci. — 2012. — *58.* — С. 113–119.
5. *Han W. W., Chen H. B., Lu T.* Estimation of the time-dependent convective boundary condition in a horizontal pipe with thermal stratification based on inverse heat conduction problem// Int. J. Heat and Mass Transfer. — 2019. — *132.* — С. 723–730.
6. *Kanjanakijkasem W.* Estimation of spatially varying thermal contact resistance from finite element solutions of boundary inverse heat conduction problems split along material interface// Appl. Thermal Engin. — 2016. — *106.* — С. 731–742.
7. *Matrosov A., Soloviev A., Ponomareva E., Meskhi B., Rudoy D., Olshevskaya A., Serebryanaya I., Nizhnik D., Pustovalova O., Maltseva T.* Finite element modeling of crystallization with temperature jump to improve cryopreservation of fish germ cells// Processes. — 2024. — *12*, № 2. — 413.
8. *Matrosov A., Soloviev A., Serebryanaya I., Pustovalova O., Nizhnik D.* Modelling of phase transitions in the process of cryopreservation of biological material// В сб.: «Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications PHENMA 2023». — 2024. — *41*, №12. — С. 114–121.
9. *Mierzwiczak M., Kolodziej J. A.* The determination temperature-dependent thermal conductivity as inverse steady heat conduction problem// Int. J. Heat Mass Transfer. — 2011. — *54*, № 4. — С. 790–796.
10. *Resende L., Silva R., Magalhaes E., Machado H.* Applying multivariate inverse heat conduction problem to determine thermal contact resistance in aircraft embedded systems// Int. Commun. Heat Mass Transfer. — 2023. — *149.* — 107163.
11. *Tikhe A. K., Deshmukh K. C.* Inverse heat conduction problem in a thin circular plate and its thermal deflection// Appl. Math. Model. — 2006. — *30*, № 6. — С. 554–560.
12. *Xu H. J., Xing Z. B., Wang F. Q., Cheng Z. M.* Review on heat conduction, heat convection, thermal radiation and phase change heat transfer of nanofluids in porous media: Fundamentals and applications// Chem. Engin. Sci. — 2019. — *195.* — С. 462–483.
13. *Zhang J., Lu T., Deng J., Ding Sh., Xiong P.* Rapid identification of erosion thinning and scaling thickening of inner wall of circular tube based on inverse heat conduction problem method// Thermal Sci. Engin. Prog. — 2024. — *47.* — 102263.

А. Н. Соловьев

Крымский инженерно-педагогический университет имени Февзи Якубова, Симферополь, Россия

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: solovievarc@gmail.com

М. А. Шевченко

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: msh@sfedu.ru

М. С. Германчук

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия

E-mail: germanchukms@cfuv.ru

UDC 51-7, 519.6
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-487-497
EDN: NLALYX

The inverse geometric problem of thermal conductivity for determining the thickness of scale in steam boiler pipes

A. N. Soloviev[1,2], M. A. Shevchenko[2], and M. S. Germanchuk[3]

[1] *Crimean Engineering and Pedagogical University the name Fevzi Yakubov, Simferopol, Russia*
[2] *Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia*
[3] *V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia*

Abstract. The paper considers a nonstationary nonlinear problem of thermal conductivity in a steam boiler pipe, on the inner surface of which there is calcined scale. In the inverse geometric problem, the thickness of this scale is determined by the temperature change at the outer surface of the tube. Three cases of movement of water and steam in a tube are considered: only water, water and steam, and only steam. The problem is solved on the cross section of the structural element, the movement of water and steam is modeled by the presence of distributed heat extraction in them, when steam is formed, heat extraction at the phase boundary is taken into account, which is set by the boiling point. As a result of solving the problem by the finite element method, for the three cases under consideration, the dependence of the temperature at the outer boundary on the thickness of the scale layer is constructed. These dependencies serve as the basis for solving the inverse geometric problem of identifying scale parameters.

Keywords: inverse geometric problem of thermal conductivity, water–steam phase transition, finite element method.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. This work was financially supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation, projects No. 075-02-2023-1799 and No. 075-02-2024-1431.

For citation: A. N. Soloviev, M. A. Shevchenko, M. S. Germanchuk, "The inverse geometric problem of thermal conductivity for determining the thickness of scale in steam boiler pipes," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 3, 487–497. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-487-497`

REFERENCES

1. O. M. Alifanov, *Obratnye zadachi teploobmena* [Inverse Heat Transfer Problems], Mashinostroenie, Moscow, 1988 (in Russian).
2. Y. Bai, C. Zhang, Z. He, M. Cui, and D. Sun, "Inverse solution to two-dimensional transient coupled radiation and conduction problems and the application in recovering radiative thermo-physical properties of Si3N4 ceramics," *Int. J. Thermal Sci.*, 2023, **190**, 108303.
3. J.-L. Battaglia, "Linear and nonlinear thermal system identification based on the integral of noninteger order — Application to solve inverse heat conduction linear and nonlinear problems," *Int. J. Thermal Sci.*, 2024, **197**, 108840.
4. M. Cui, X. Gao, and J. Zhang, "A new approach for the estimation of temperature-dependent thermal properties by solving transient inverse heat conduction problems," *Int. J. Thermal Sci.*, 2012, **58**, 113–119.

5. W. W. Han, H. B. Chen, and T. Lu, "Estimation of the time-dependent convective boundary condition in a horizontal pipe with thermal stratification based on inverse heat conduction problem," *Int. J. Heat and Mass Transfer*, 2019, **132**, 723–730.
6. W. Kanjanakijkasem, "Estimation of spatially varying thermal contact resistance from finite element solutions of boundary inverse heat conduction problems split along material interface," *Appl. Thermal Engin.*, 2016, **106**, 731–742.
7. A. Matrosov, A. Soloviev, E. Ponomareva, B. Meskhi, D. Rudoy, A. Olshevskaya, I. Serebryanaya, D. Nizhnik, O. Pustovalova, and T. Maltseva, "Finite element modeling of crystallization with temperature jump to improve cryopreservation of fish germ cells," *Processes*, 2024, **12**, No. 2, 413.
8. A. Matrosov, A. Soloviev, I. Serebryanaya, O. Pustovalova, and D. Nizhnik, "Modelling of phase transitions in the process of cryopreservation of biological material," In: *Physics and Mechanics of New Materials and Their Applications PHENMA 2023*, 2024, **41**, No. 12, 114–121.
9. M. Mierzwiczak and J. A. Kolodziej, "The determination temperature-dependent thermal conductivity as inverse steady heat conduction problem," *Int. J. Heat Mass Transfer*, 2011, **54**, No. 4, 790–796.
10. L. Resende, R. Silva, E. Magalhaes, and H. Machado, "Applying multivariate inverse heat conduction problem to determine thermal contact resistance in aircraft embedded systems," *Int. Commun. Heat Mass Transfer*, 2023, **149**, 107163.
11. A. K. Tikhe and K. C. Deshmukh, "Inverse heat conduction problem in a thin circular plate and its thermal deflection," *Appl. Math. Model.*, 2006, **30**, No. 6, 554–560.
12. H. J. Xu, Z. B. Xing, F. Q. Wang, and Z. M. Cheng, "Review on heat conduction, heat convection, thermal radiation and phase change heat transfer of nanofluids in porous media: Fundamentals and applications," *Chem. Engin. Sci.*, 2019, **195**, 462–483.
13. J. Zhang, T. Lu, J. Deng, Sh. Ding, and P. Xiong, "Rapid identification of erosion thinning and scaling thickening of inner wall of circular tube based on inverse heat conduction problem method," *Thermal Sci. Engin. Prog.*, 2024, **47**, 102263.

A. N. Soloviev
Crimean Engineering and Pedagogical University the Name Fevzi Yakubov, Simferopol, Russia
Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia
E-mail: soloviеvarc@gmail.com

M. A. Shevchenko
Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia
E-mail: msh@sfedu.ru

M. S. Germanchuk
V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia
E-mail: germanchukms@cfuv.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 3 (2024). С. 498–515
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.98
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-498-515
EDN: NLGGDV

ОБ ОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ, СВЯЗАННОЙ С ВНУТРЕННЕЙ ФЛОТАЦИЕЙ

Д. О. Цветков

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия

Аннотация. Изучается задача о малых движениях системы из несмешивающихся идеальных жидкостей со свободной поверхностью, состоящей из двух областей: участка упругого льда и участка крошеного льда. Упругий лед моделируется упругой пластиной. Под крошеным льдом подразумеваем плавающие на свободной поверхности весомые частицы некоторого вещества. Предполагается также, что граница раздела слоев жидкости является весомой поверхностью. Используя метод ортогонального проектирования граничных условий и введения вспомогательных задач, исходную начально-краевую задачу сводим к равносильной задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка в некотором гильбертовом пространстве. Получены условия, при которых существует сильное по времени решение начально-краевой задачи, описывающей эволюцию данной гидросистемы. Доказаны утверждения о структуре спектра задачи и о базисности системы собственных функций.

Ключевые слова: идеальная жидкость, свободная поверхность, раздел слоев жидкости, метод ортогонального проектирования, сильное решение, спектр.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *Д. О. Цветков.* Об одной краевой задаче, связанной с внутренней флотацией// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 3. С. 498–515. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-498-515`

Введение

Настоящая статья является продолжением работ [8–11, 13], в которых исследовались начально-краевые задачи динамики жидкости, покрытой льдом (крошеным, упругим). Под крошеным льдом подразумеваем плавающие на свободной поверхности весомые частицы некоторого вещества (см., например, [2]). Упругий лед моделируется упругой пластиной, близкая по математической постановке задача о колебаниях однородной жидкости в контейнере с упругим дном рассматривалась в монографии [12]. Исследование задач проводилось по принципу «от простого к сложному», благодаря чему задачи можно классифицировать по трем уровням сложности.

Задачам первого уровня соответствуют случаи, когда подвижная поверхность Γ есть область лишь одного типа: крошеный лед, упругий лед [8, 9].

К задачам второго уровня относятся задачи, когда на Γ соприкасаются две среды: подвижная поверхность без упругого льда и подвижная поверхность без крошеного льда [10].

Наконец, к третьему уровню отнесена наиболее общая задача, когда на Γ имеется участок чистой воды, упругого льда и крошеного льда [11, 13].

В монографии [12] рассматривалась задача о малых движениях системы однородных идеальных жидкостей со свободной поверхностью (чистая вода). Поля скоростей считались элементами векторного пространства пар функций. С учетом этого исходная задача переписывалась в виде пар соотношений для исходных объектов, далее с использованием метода ортогонального проектирования на выбранные подпространства задача сводилась к равносильной задаче Коши для дифференциального уравнения второго порядка в некотором гильбертовом пространстве, для которой устанавливалась теорема существования решений. Однако не был осуществлен переход от достаточных условий, где требуется принадлежность функций областям определения матричных операторов, к достаточным условиям, где ограничения накладываются на начальные условия и внешние силы на соответствующих границах.

В представленной работе модифицируется изложенный выше подход при изучении задачи о малых движениях и нормальных колебаниях многослойной идеальной жидкости со свободной поверхностью, состоящей из двух областей: участка крошеного льда и участка упругого льда. Предполагается также, что граница раздела слоев жидкости является весомой поверхностью (т. н. внутренняя флотация).

Интерес к таким проблемам может быть связан с тем, что при экспериментальных исследованиях распределения характеристик воды, например, в Черном море было обнаружено, что на границе раздела двух основных слоев (верхнего и нижнего) «плавают» частицы различных материалов, объемная плотность которых больше плотности верхнего слоя, но меньше нижнего. Этими материалами являются намокшее дерево, водоросли, растительные остатки, «экологический мусор» и тому подобное.

1. Эволюционная задача

1.1. Математическая формулировка задачи. Рассмотрим неподвижный сосуд, частично заполненный системой из двух идеальных несжимаемых жидкостей. Жидкости предполагаются тяжелыми, и в силу этого действие капиллярных сил в задаче не учитывается. Обозначим через Ω_i $(i=1,2)$ область, занимаемую в состоянии покоя жидкостью плотности ρ_i $(\rho_1>\rho_2)$, соответствующий участок твердой стенки — через S_i; всем параметрам, относящимся к нижней жидкости, будем приписывать индекс 1, а к верхней — 2. Представим $\Gamma=\partial\Omega_2\setminus\overline{S_2}=\Gamma_1\cup\Gamma_2$, где Γ_1 и Γ_2 — это нижняя и верхняя границы области Ω_2, соответственно, причем Γ_2 состоит из областей нескольких типов: $\Gamma_2=\Gamma_{21}\cup\Gamma_{22}$, где Γ_{21} — участок крошеного льда, Γ_{22} — участок упругого льда. Кроме того, будем считать, что граница раздела слоев жидкостей (граница Γ_1) является весомой поверхностью с поверхностной плотностью ρ_0.

Введем систему координат $Ox_1x_2x_3$ таким образом, что ось Ox_3 направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится на поверхности раздела Γ_1. Обозначим через $\vec{n}_i$ единичный вектор, нормальный к $\partial\Omega_i$ и направленный вне Ω_i. Рассмотрим малые движения изучаемой гидросистемы, близкие к состоянию покоя. Пусть $\vec{u}_i$ — поля скоростей в жидкостях, а $\zeta_i=\zeta_i(t,\hat{x})$, $\hat{x}\in\Gamma_i$ представляют собой отклонение свободно движущихся поверхностей жидкостей $\Gamma_i(t)$ от Γ_i по нормали $\vec{n}_i$; $p_i=p_i(t,x)$, $x\in\Omega_i$ — отклонение полей давлений от равновесных. Кроме того, полагаем, что на исследуемую гидродинамическую систему дополнительно к гравитационному полю действует малое поле внешних сил $\vec{f}_i=\vec{f}_i(t,x)$, $x\in\Omega_i$.

Линейная постановка начально-краевой задачи о колебаниях рассматриваемой гидросистемы выглядит следующим образом:

$$\frac{\partial\vec{u}_i}{\partial t}=-\rho_i^{-1}\nabla p_i+\vec{f}_i\quad \operatorname{div}\vec{u}_i=0\ (\text{в }\Omega_i),\quad \vec{u}_i\cdot\vec{n}_i=0\ (\text{на }S_i),\tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\zeta_1}{\partial t}=\vec{u}_1\cdot\vec{n}_1=\vec{u}_2\cdot\vec{n}_1\ (\text{на }\Gamma_1),\quad \frac{\partial\zeta_2}{\partial t}=\vec{u}_2\cdot\vec{n}_2\ (\text{на }\Gamma_2),\quad \int\limits_{\Gamma_i}\zeta_i d\Gamma_i=0,$$

$$p_1-p_2=\Delta\rho g\zeta_1+\rho_0\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial t^2},\quad \Delta\rho:=\rho_1-\rho_2>0\ (\text{на }\Gamma_1),\tag{1.2}$$

$$p_2=g\rho_2\zeta_2+\rho_{01}\frac{\partial^2\zeta_2}{\partial t^2}\ (\text{на }\Gamma_{21}),\quad p_2=K\zeta_2+\rho_{02}\frac{\partial^2\zeta_2}{\partial t^2}\quad (\text{на }\Gamma_{22}),\tag{1.3}$$

$$\vec{u}_i(0,x)=\vec{u}_i^0(x),\quad \zeta_i(0,\hat{x})=\zeta_i^0(\hat{x}),\quad i=1,2.\tag{1.4}$$

Здесь линеаризованные уравнения Эйлера, описывающие движения идеальных однородных жидкостей, принимают вид первых двух уравнений (1.1) (см., например, [12]). На границе задано условие непротекания жидкости, которое в терминах вектора скорости имеет вид третьего уравнения (1.1). Если искать отклонение движущихся поверхностей $\Gamma_i(t)$ в виде $x_3 = b_i + \zeta_i$ $(i = 1, 2)$, то линеаризованные кинематические условия для частиц жидкости, находящихся на $\Gamma_i(t)$, имеют вид четвертого и пятого уравнений (1.1); шестое — условие сохранения объема.

Записав второй закон Ньютона для частиц крошеного льда и линеаризовав его, получим динамические условия (1.2) на Γ_1 и первое уравнение (1.3) на Γ_{21} (см. подробнее [2]), где ρ_0 и ρ_{01} — поверхностные плотности крошеного льда на границе раздела Γ_1 и на свободной поверхности Γ_{21}, соответственно. Вывод динамического условия на участке упругого льда (второе уравнение (1.3)) можно найти в [9].

Последние три условия (1.4) — это начальные условия, которые добавлены к задаче для полноты ее формулировки.

Замечание 1.1. Линейный дифференциальный оператор K задается дифференциальным выражением (см. подробнее [9, 10])

$$K\zeta_2 := d\triangle_2^2\zeta_2 + \rho_2 g\zeta_2$$

на области определения

$$\mathcal{D}(K) = \left\{\zeta_2 \in C^4\left(\overline{\Gamma_{22}}\right) \mid \zeta_2 = \partial\zeta_2/\partial\nu = 0 \text{ (на } \gamma_2),\ M\zeta_2 = N\zeta_2 = 0 \text{ (на } \partial\Gamma_{22}\setminus\gamma_2)\right\}, \tag{1.5}$$

где $d > 0$ — коэффициент жесткости льда, $\triangle_2 = \partial^2/\partial x_1^2 + \partial^2/\partial x_2^2$, ρ_{02} — поверхностная плотность упругого льда. Считаем, что на линии $\gamma_2 := \overline{\Gamma}_{22}\bigcap\overline{S}_2$ контакта упругого льда с твердой стенкой S_2 выполнены условия жесткого закрепления льда как упругой пластинки $\zeta_2 = 0$, $\partial\zeta_2/\partial\nu = 0$ (на γ_2), где $\vec{\nu}$ — единичный вектор внешней нормали к $\partial\Gamma_{22}$ (расположенный, очевидно, в плоскости Ox_1x_2). Далее, на остальной части границы $\partial\Gamma_{22}\setminus\gamma_2$ области Γ_{22}, где упругий лед соприкасается с участком крошеного льда, поперечная сила и момент силы на кромке упругого льда должны равняться нулю. Математически эти условия записываются в следующем виде:

$$M\zeta_2 = 0, \quad N\zeta_2 = 0 \quad (\text{на } \partial\Gamma_2\setminus\gamma_2), \quad \text{где} \quad M\zeta_2 = \sigma\triangle_2\zeta_2 + (1-\sigma)\frac{\partial^2\zeta_2}{\partial\nu^2},$$
$$N\zeta_2 = -\frac{\partial}{\partial\nu}\left(\triangle_2\zeta_2\right) + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{\partial^2\zeta_2}{\partial {x_1}^2}\nu_1\nu_2 - \frac{\partial^2\zeta_2}{\partial x_1\partial x_2}\left(\nu_1^2-\nu_2^2\right) - \frac{\partial^2\zeta_2}{\partial {x_2}^2}\nu_1\nu_2\right),$$

ν_i — i-я координата единичного вектора внешней нормали $\vec{\nu}$ к границе $\partial\Gamma_{22}$, $\vec{s}$ — вектор касательной к $\partial\Gamma_{21}$, а σ — т. н. постоянная Пуассона, характеризующая упругую пластинку.

Замечание 1.2. Свяжем с поверхностью $L_2(\Gamma_{22})$ гильбертово пространство (скалярных) функций $L_2(\Gamma_{22})$ со скалярным произведением

$$(\phi,\psi)_{\Gamma_2(\Gamma_{22})} = \int\limits_{\Gamma_{22}} \phi(\hat{x})\psi(\hat{x})\,d\Gamma_{22}.$$

В работе [10] установлено, что оператор $K : \mathcal{D}(K) \subset L_2(\Gamma_{22}) \to L_2(\Gamma_{22})$ (после расширения по Фридрихсу) — неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор с дискретным спектром. Обратный оператор K^{-1} является компактным и положительным в $L_2(\Gamma_{22})$.

1.2. Об одном ортогональном разложении гильбертова пространства. Пусть задана область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Граница области $\partial\Omega = \overline{S}\cup\Gamma$, где Γ — связное множество с $\operatorname{mes}\Gamma > 0$. Введем пространство $H^1_\Gamma(\Omega)$ функций из $H^1(\Omega)$, имеющих средним значением по Γ нуль, с нормой

$$\|p\|^2_{H^1_\Gamma(\Omega)} = \int\limits_\Omega |\nabla p|^2 d\Omega < \infty, \quad \int\limits_\Gamma p\,d\Gamma = 0. \tag{1.6}$$

Для $H^1_\Gamma(\Omega)$ имеет место ортогональное разложение (см. [12, с. 106]):

$$H^1_\Gamma(\Omega) = H^1_{h,S}(\Omega) \oplus H^1_{0,\Gamma}(\Omega), \tag{1.7}$$

где $H^1_{0,\Gamma}(\Omega) = \{\, p \in H^1_\Gamma(\Omega) \mid p = 0 \text{ (на } \Gamma) \,\}$,

$$H^1_{h,S}(\Omega) = \left\{ p \in H^1_\Gamma(\Omega) \mid \Delta p = 0 \text{ (в } \Omega),\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ (на } S),\ \int\limits_\Gamma p\, d\Gamma = 0 \right\},$$

причем ортогональность в (1.7) понимается относительно скалярного произведения, соответствующего норме (1.6).

Предположим теперь, что $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$, $\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \varnothing$, Γ_1 и Γ_2 — связные множества ненулевой меры, расположенные горизонтально.

Введем в рассмотрение множество

$$H^1_{\widehat{h,S}}(\Omega) := \left\{ p \in H^1_\Gamma(\Omega) \mid \Delta p = 0 \text{ (в } \Omega), \quad \frac{\partial p}{\partial n} = 0 \text{ (на } S), \right.$$
$$\left. \int\limits_{\Gamma_1} \frac{\partial p}{\partial n}\, d\Gamma_1 = 0, \quad \int\limits_{\Gamma_2} \frac{\partial p}{\partial n}\, d\Gamma_2 = 0, \quad \int\limits_\Gamma p\, d\Gamma = 0 \right\}. \tag{1.8}$$

Лемма 1.1. *Справедливо ортогональное разложение*

$$H^1_{h,S}(\Omega) = H^1_{\widehat{h,S}}(\Omega) \oplus \{\alpha\, \varphi_0\}, \tag{1.9}$$

где $\{\alpha\, \varphi_0\}$ — одномерное подпространство, а функция φ_0 является решением краевой задачи

$$\Delta \varphi_0 = 0 \quad (\textit{в } \Omega), \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial n} = 0 \quad (\textit{на } S), \tag{1.10}$$
$$\varphi_0 = \operatorname{mes} \Gamma_1 \quad (\textit{на } \Gamma_2), \quad \varphi_0 = -\operatorname{mes} \Gamma_2 \quad (\textit{на } \Gamma_1).$$

Разложение (1.9) порождает разложение подпространства потенциальных полей $\vec{G}_{h,S}(\Omega)$ в ортогональную сумму:

$$\vec{G}_{h,S}(\Omega) = \vec{G}_{\widehat{h,S}}(\Omega) \oplus \{\alpha\, \nabla \varphi_0\}. \tag{1.11}$$

1.3. Метод ортогонального проектирования. Для области Ω_1 введем разложение пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega_1)$ в ортогональную сумму (см. [12, с. 118]):

$$\vec{L}_2(\Omega_1) = \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1), \tag{1.12}$$
$$\vec{J}_0(\Omega_1) := \{\, \vec{u}_1 \mid \operatorname{div} \vec{u}_1 = 0 \text{ (в } \Omega_1),\ \vec{u}_1 \cdot \vec{n}_1 = 0 \text{ (на } \partial\Omega_1) \,\},$$
$$\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1) := \left\{ \vec{v}_1 \mid \vec{v}_1 = \nabla p_1,\ \vec{v}_1 \cdot \vec{n}_1 = 0 \text{ (на } S_1),\ \operatorname{div} \vec{v}_1 = 0 \text{ (в } \Omega_1),\ \int\limits_{\Gamma_1} p_1\, d\Gamma_1 = 0 \right\},$$
$$\vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1) := \{\, \vec{w}_1 \mid \vec{w}_1 = \nabla \varphi_1,\ \varphi_1 = 0 \text{ (на } \Gamma_1) \,\}.$$

Будем считать $\vec{u}_1(t,x)$ и $\nabla p_1(t,x)$ функциями переменной t со значениями в $\vec{L}_2(\Omega_1)$, тогда в силу уравнений, граничных условий (1.1) и ортогонального разложения (1.12) имеем

$$\vec{u}_1(t,x) \in \vec{J}_0(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1), \quad \nabla p_1(t,x) \in \vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1) \oplus \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1).$$

Поэтому при каждом t будем разыскивать их в виде

$$\vec{u}_1(t,x) = \vec{v}_1(t,x) + \nabla \Phi_1(t,x), \quad \vec{v}_1(t,x) \in \vec{J}_0(\Omega_1), \quad \nabla \Phi_1(t,x) \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1), \tag{1.13}$$
$$\nabla p_1(t,x) = \nabla p_{1,1}(t,x) + \nabla p_{1,2}(t,x),\ \nabla p_{1,1}(x,t) \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1),\ \nabla p_{1,2}(t,x) \in \vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1).$$

Обозначим через $P_{0,1}$, P_{h,S_1} и P_{0,Γ_1} ортопроекторы на подпространства $\vec{J}_0(\Omega_1)$, $\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$ и $\vec{G}_{0,\Gamma_1}(\Omega_1)$, соответственно. Тогда, подставляя (1.13) в первое уравнение (1.1) и применяя ортопроекторы, получаем

$$\frac{\partial \vec{v}_1}{\partial t} = P_{0,1} \vec{f}_1, \quad \vec{0} = -\nabla p_{1,2} + \rho_1 P_{0,\Gamma_1} \vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1), \tag{1.14}$$

$$\rho_1 \frac{\partial}{\partial t} \nabla \Phi_1 = -\nabla p_{1,1} + \rho_1 P_{h,S_1} \vec{f}_1 \quad (\text{в } \Omega_1). \tag{1.15}$$

Из первого уравнения (1.14) с учетом начальных условий (1.4) сразу получаем

$$\vec{v}_1(t,x) = \int\limits_0^t P_{0,1}\vec{f}_1(\tau,x)d\tau + P_{0,1}\vec{u}_1^0.$$

Поэтому достаточно ограничиться рассмотрением соотношения (1.15), а также граничных условий и начальных данных с соответствующей заменой $p_1 \to p_{1,1}$, так как $p_1 = p_{1,1} + p_{1,2}$, где $p_{1,2} = 0$ (на Γ_1).

Для области Ω_2 введем разложение пространства векторных полей $\vec{L}_2(\Omega_2)$ в ортогональную сумму:

$$\vec{L}_2(\Omega_2) = \vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2). \tag{1.16}$$

Подпространство $\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2)$ из (1.16) состоит из потенциальных гармонических полей с нулевой нормальной составляющей на твердой стенке S_2, для которых также выполнено условие сохранения объема по всей границе $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. В изучаемой задаче, в силу несжимаемости жидкостей, условие сохранения объема должно выполняться на каждой из границ Γ_1 и Γ_2 в отдельности. Отсюда следует, что подпространство $\vec{G}_{h,S_2}(\Omega_2)$ шире, чем требуется. В связи с этим воспользуемся разложением этого подпространства в ортогональную сумму двух подпространств (см. (1.11)), естественным образом приспособленных к данной задаче.

Учитывая (1.11) и (1.16), введем ортогональное разложение

$$\vec{L}_2(\Omega_2) = \vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2) \oplus \{\alpha\,\nabla\varphi_0\} \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2), \tag{1.17}$$

где $\Gamma = \Gamma_1 \cup \Gamma_2$. Введем также ортопроекторы на соответствующие подпространства: $P_{0,2}$, $P_{\widehat{h,S_2}}$, P_{φ}, $P_{0,\Gamma}$.

Как и прежде, в силу условия соленоидальности и условия непротекания на твердой стенке S_2 считаем, что $\vec{u}_2(t,x) \in \vec{J}_0(\Omega_2) \oplus \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2)$. Поле $\nabla p_2(t,x)$ потенциально, поэтому

$$\nabla p_2(t,x) \in \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2) \oplus \{\alpha\nabla\varphi_0\} \oplus \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2).$$

Представим поля $\vec{u}_2 = \vec{u}_2(t,x)$ и $\nabla p_2 = \nabla p_2(t,x)$ в виде:

$$\begin{gathered}\vec{u}_2 = \vec{v}_2 + \nabla\Phi_2, \qquad \vec{v}_2 \in \vec{J}_0(\Omega_2), \quad \nabla\Phi_2 \in \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2),\\ \nabla p_2 = \nabla p_{2,1} + \nabla p_{2,2} + \alpha(t)\,\nabla\varphi_0, \quad \nabla p_{2,1} \in \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2), \quad \nabla p_{2,2} \in \vec{G}_{0,\Gamma}(\Omega_2).\end{gathered} \tag{1.18}$$

Подставим эти представления в уравнение движения для идеальной жидкости из Ω_2 и применим к нему ортопроекторы, отвечающие разложению (1.17). Получим:

$$\frac{\partial\vec{v}_2}{\partial t} = P_{0,2}\vec{f}_2, \quad \alpha(t)\nabla\varphi_0 = \rho_2 P_{\varphi}\vec{f}_2, \quad \nabla p_{2,2} = \rho_2 P_{0,\Gamma}\vec{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2), \tag{1.19}$$

$$\rho_2\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Phi_2 = -\nabla p_{2,1} + \rho_2 P_{\widehat{h,S_2}}\vec{f}_2 \quad (\text{в } \Omega_2). \tag{1.20}$$

Из первого уравнения (1.19) с учетом начальных условий (1.4) получаем

$$\vec{v}_2(t,x) = \int\limits_0^t P_{0,2}\vec{f}_2(\tau,x)d\tau + P_{0,2}\vec{u}_2^0.$$

Из третьего уравнения (1.19) следует, что составляющая $\nabla p_{2,2}$ поля давлений ∇p_2 определяется непосредственно по полю внешних сил $\vec{f}_2$. Более того, потенциал этого поля обращается в нуль на Γ и потому в граничных условиях не участвует. Отметим также, что для элементов подпространства $\{\alpha\nabla\varphi_0\}$ выполнены условия (1.10), поэтому из второго уравнения (1.19) находятся все коэффициенты α, и тем самым составляющая $\alpha\nabla\varphi_0$.

Условимся называть решения уравнений (1.14), (1.19) *тривиальными решениями.* Итак, основные уравнения, которые будем рассматривать, это уравнения (1.15) и (1.20).

1.4. Формулировка задачи после отделения тривиальных соотношений. Введем в рассмотрение поля смещений частиц жидкостей, полагая, что

$$\nabla\Phi_i = \frac{\partial}{\partial t}\nabla\Psi_i, \quad \nabla\Psi_1 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1), \quad \nabla\Psi_2 \in \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2). \tag{1.21}$$

При этом отклонения ζ_i подвижных границ Γ_i в процессе движения, очевидно, равны

$$\zeta_1 = \frac{\partial\Psi_1}{\partial n_1} = \frac{\partial\Psi_2}{\partial n_1} \quad (\text{на } \Gamma_1), \qquad \zeta_2 = \frac{\partial\Psi_2}{\partial n_2} \quad (\text{на } \Gamma_2). \tag{1.22}$$

Далее, если $P_{h,S_1}\vec{f_1} = \nabla F_1 \in \vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)$, $P_{\widehat{h,S_2}}\vec{f_2} = \nabla F_2 \in \vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2)$, то из (1.15) и (1.20) следует

$$p_{k,1} = \rho_k\left(F_k - \frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi_k\right) + c_k(t) \quad (\text{в } \Omega_k,\ k = 1,2), \tag{1.23}$$

с произвольными функциями $c_k(t)$, зависящими только от временной переменной (т. н. интегралы Коши—Лагранжа).

С учетом сказанного, а также после отделения тривиальных соотношений начально-краевая задача (1.1)–(1.4) формулируется следующим образом:

$$\Delta\Psi_i = 0 \ (\text{в}\,\Omega_i), \quad \frac{\partial\Psi_i}{\partial n_i} = 0 \ (\text{на}\,S_i), \quad \int\limits_{\Gamma_i}\Psi_i d\Gamma_i = 0, \tag{1.24}$$

$$\zeta_1 = \frac{\partial\Psi_1}{\partial n_1} = \frac{\partial\Psi_2}{\partial n_1} \ (\text{на}\,\Gamma_1), \quad \zeta_2 = \frac{\partial\Psi_2}{\partial n_2} \ (\text{на}\,\Gamma_2),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}(\rho_1\Psi_1 - \rho_2\Psi_2) + g\Delta\rho\frac{\partial\Psi_1}{\partial n_1} + \rho_0\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\Psi_1}{\partial n_1} = \rho_1F_1 - \rho_2F_2 + c_1(t) - c_2(t) \quad (\text{на}\,\Gamma_1), \tag{1.25}$$

$$\rho_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi_2 + \rho_{01}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\Psi_2}{\partial n_2} + g\rho_2\frac{\partial\Psi_2}{\partial n_2} = \rho_2F_2 + c_2(t) \quad (\text{на}\,\Gamma_{21}), \tag{1.26}$$

$$\rho_2\frac{\partial^2}{\partial t^2}\Psi_2 + \rho_{02}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\frac{\partial\Psi_2}{\partial n_2} + K\frac{\partial\Psi_2}{\partial n_2} = \rho_2F_2 + c_2(t) \quad (\text{на}\,\Gamma_{22}), \tag{1.27}$$

$$\int\limits_{\Gamma_1}\frac{\partial\Psi_1}{\partial n_1}d\Gamma_1 = 0, \quad \int\limits_{\Gamma_2}\frac{\partial\Psi_2}{\partial n_2}d\Gamma_2 = \int\limits_{\Gamma_{21}}\frac{\partial\Psi_2}{\partial n_2}d\Gamma_{21} + \int\limits_{\Gamma_{22}}\frac{\partial\Psi_2}{\partial n_2}d\Gamma_{22} = 0,$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\nabla\Psi_1(0,x) = P_{h,S_1}\vec{u}_1^0(x), \quad \frac{\partial}{\partial t}\nabla\Psi_2(0,x) = P_{\widehat{h,S_2}}\vec{u}_2^0(x), \tag{1.28}$$

$$\zeta_i(0,\hat{x}) = \zeta_i^0(\hat{x}) = \left(\frac{\partial\Psi_i}{\partial n_i}\right)_{\Gamma_i}(0,\hat{x}), \quad i = 1,2.$$

1.5. Приведение системы к дифференциально-операторному уравнению. Для перехода к операторной формулировке исследуемой задачи рассмотрим ряд вспомогательных краевых задач.

Вспомогательная задача I.

$$\Delta\Psi_1 = 0 \ (\text{в } \Omega_1), \quad \frac{\partial\Psi_1}{\partial n_1} = 0 \ (\text{на } S_1), \quad \int\limits_{\Gamma_1}\Psi_1\,d\Gamma_1 = 0,$$

$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial n_1} = \eta_0 \ (\text{на } \Gamma_1), \quad \int\limits_{\Gamma_1}\eta_0\,d\Gamma_1 = 0.$$

Введем в пространстве $H_1 = L_{2,\Gamma_1} := L_2(\Gamma_1) \ominus \{1_{\Gamma_1}\}$ его оснащение в виде $H_1^+ \subset H_1 \subset H_1^-$, где

$$H_1^+ = H_1^{1/2}(\Gamma_1) \cap H_1 =: H_{\Gamma_1}^{1/2}, \quad H_1^- = \left(H_1^+\right)^* =: \widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}.$$

Символом «$\widetilde{\ }$» обозначен класс функций из $H_{\Gamma_1}^{-1/2}$, продолжимых нулем на всю границу $\partial\Omega_1$ в классе $H^{-1/2}(\partial\Omega_1)$ (см. [1] и [3, с.122-123]). Если $\eta_0 \in \widetilde{H}_{\Gamma_1}^{-1/2}$, то задача имеет единственное решение $\Psi_1 \in H^1_{\Gamma_1}(\Omega_1)$. Введем по решению задачи I оператор: $P_{\Gamma_1}\Psi_1|_{\Gamma_1} =: S_0\eta_0$, оператор S_0 является самосопряженным, положительным и компактным в $L_{2,\Gamma_1} = H_1$ (см., например, [3]).

Вспомогательная задача II.

$$\Delta\Psi_{2,1} = 0 \text{ (в } \Omega_2), \quad \frac{\partial\Psi_{2,1}}{\partial n_2} = 0 \text{ (на } S_2), \quad \int\limits_{\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2} \Psi_{2,1}\, d\Gamma = 0,$$

$$\frac{\partial\Psi_{2,1}}{\partial n_2} = \eta_1 \text{ (на } \Gamma_1), \quad \frac{\partial\Psi_{2,1}}{\partial n_2} = 0 \text{ (на } \Gamma_2).$$

Аналогично предыдущим рассуждениям, если $\eta_1 \in \widetilde{H}^{-1/2}_{\Gamma_1}$, то задача II имеет единственное решение $\Psi_1 \in H^1_{\Gamma}(\Omega_2)$, при этом $P_{\Gamma_1}\Psi_{2,1} =: S_1\eta_1$, где оператор S_1 — самосопряженный, положительный и компактный в $L_{2,\Gamma_1} = H_1$.

Вспомогательная задача III.

$$\Delta\Psi_{2,2} = 0 \text{ (в } \Omega_2), \quad \frac{\partial\Psi_{2,2}}{\partial n_2} = 0 \text{ (на } S_2), \quad \int\limits_{\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2} \Psi_{2,2}\, d\Gamma = 0,$$

$$\frac{\partial\Psi_{2,2}}{\partial n_2} = 0 \text{ (на } \Gamma_1), \quad \frac{\partial\Psi_{2,2}}{\partial n_2} = \eta_2 \text{ (на } \Gamma_2 = \Gamma_{20}\cup\Gamma_{21}).$$

Функцию η_2 будем рассматривать как элемент пространства $H_2 = L_{2,\Gamma_2} := L_2(\Gamma_2) \ominus \{1_{\Gamma_2}\}$ и искать в виде пары функций $\eta_2 = (\eta_{2,1}; \eta_{2,2})$, где $\eta_{2,1} = \eta_2|_{\Gamma_{21}}$ и $\eta_{2,2} = \eta_2|_{\Gamma_{22}}$, т. е. функций, заданных на соответствующих областях Γ_{21} и Γ_{22}.

Рассмотрим следующие подпространства пространства H_2:

$$H_{21} := \{\, (\eta_{2,1}; \eta_{2,2}) \mid \eta_{2,1} \in L_2(\Gamma_{21}) \ominus \{1_{\Gamma_{21}}\},\ \eta_{2,2} \equiv 0 \,\},$$
$$H_{22} := \{\, (\eta_{2,1}; \eta_{2,1}) \mid \eta_{2,2} \in L_2(\Gamma_{22}) \ominus \{1_{\Gamma_{22}}\},\ \eta_{2,1} \equiv 0 \,\}.$$

Пространство H_2 можно разложить в ортогональную сумму трех пространств (см. подробнее [11])

$$H_2 = H_{21} \oplus H_{22} \oplus \widehat{H}, \tag{1.29}$$

где $\widehat{H}$ есть одномерное подпространство пространства H_2, натянутое на вектор $\widehat{\varphi}$:

$$\widehat{H} = \{\, \widehat{v} \,|\, \widehat{v} = \alpha\widehat{\varphi},\ \forall\,\alpha \in \mathbb{C},\ \widehat{\varphi} = (\operatorname{mes}\Gamma_{22}; -\operatorname{mes}\Gamma_{21}) \,\}.$$

Введем действующие в пространстве H_2 ортопроекторы P_{21}, P_{21} и $\widehat{P}$ на подпространства H_{21}, H_{22} и $\widehat{H}$, соответственно. Они будут действовать по следующим правилам:

$$P_{21}w = (w_{2,1} - \tilde{w}_{2,1}; 0), \quad \tilde{w}_{2,1} = (\operatorname{mes}\Gamma_{21})^{-1} \int\limits_{\Gamma_{21}} w_{2,1}\, d\Gamma_{21},$$

$$P_{22}w = (0; w_{2,2} - \tilde{w}_{2,2}), \quad \tilde{w}_{2,2} = (\operatorname{mes}\Gamma_{22})^{-1} \int\limits_{\Gamma_{22}} w_{2,2}\, d\Gamma_{22},$$

$$\widehat{P}w = (I - P_{21} - P_{22})\, w = (\tilde{w}_{2,1}; \tilde{w}_{2,2}).$$

Для удобства дальнейших построений введем подпространство $\widehat{H}_2 = H_{21} \oplus \widehat{H}$, тогда (1.29) перепишем в виде: $H_2 = H_{21} \oplus \widehat{H}_2$. При этом ортопроектор $\widehat{P}_2$ на подпространство $\widehat{H}_2$ действует по закону $\widehat{P}_2 w = (\tilde{w}_{2,1}; w_{2,2})$.

Перейдем к построению потенциала $\Psi_{2,2}$ в области Ω_2, выразив его через η_2. Для получения общего вида функции $\Psi_{2,2}$, учитывающего представление η_2 в виде

$$\eta_2 = (\eta_{2,1} - \widetilde{\eta}_{2,1}; 0) + (\widetilde{\eta}_{2,1}; \eta_{2,2}) = P_{21}\eta_2 + \widehat{P}_2\eta_2, \tag{1.30}$$

рассмотрим две вспомогательные задачи.

Вспомогательная задача III.1.

$$\Delta\Psi^1_{2,2}=0 \ (\text{в } \ \Omega_2),\quad \frac{\partial\Psi^1_{2,2}}{\partial n_2}=0 \ (\text{на } \ S_2),\quad \int\limits_{\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2}\Psi^1_{2,2}\,d\Gamma=0,$$

$$\frac{\partial\Psi^1_{2,2}}{\partial n_2}=0 \ (\text{на } \ \Gamma_1),\quad \frac{\partial\Psi^1_{2,2}}{\partial n_2}=\eta_{2,1}-\widetilde{\eta}_{2,1} \ (\text{на } \ \Gamma_{21}),\quad \frac{\partial\Psi^1_{2,2}}{\partial n_2}=0 \ (\text{на } \ \Gamma_{22}).$$

Так как $H_{21}\subset H_2$, то необходимое условие разрешимости задачи III.1 выполнено, а значит, эта задача имеет единственное решение $\Psi^1_{2,2}=\Psi^1_{2,2}(x)$ из пространства $H^1_\Gamma(\Omega_2)$.

Введем оператор T_1, который ставит в соответствие функции $P_{21}\eta_2$ решение задачи III.1:

$$\Psi^1_{2,2}=\Psi^1_{2,2}\big|_{\Omega_2}=:T_1P_{21}\eta_2=T_1(\eta_{2,1}-\widetilde{\eta}_{2,1};0)=:T_1w_1,\quad w_1:=P_{21}\eta_2\in H_{21}.$$

Рассмотрим теперь значения функции $\Psi^1_{2,2}$ на границе Γ_2. Введем оператор следа на границе Γ_2, $\gamma_2\left(\Psi^1_{2,2}|_{\Omega_2}\right):=\Psi^1_{2,2}|_{\Gamma_2}$, и представим функцию $\Psi^1_{2,2}|_{\Gamma_2}$ в виде суммы ее проекций на подпространства H_{21} и $\widehat{H}_2$:

$$\Psi^1_{2,2}|_{\Gamma_2}=P_{21}\gamma_2T_1P_{21}\eta_2+\widehat{P}_2\gamma_2T_1P_{21}\eta_2=:C_{11}w_1+C_{21}w_1. \tag{1.31}$$

Вспомогательная задача III.2.

$$\Delta\Psi^2_{2,2}=0 \ (\text{в } \ \Omega_2),\quad \frac{\partial\Psi^2_{2,2}}{\partial n_2}=0 \ (\text{на } \ S_2),\quad \int\limits_{\Gamma=\Gamma_1\cup\Gamma_2}\Psi^2_{2,2}\,d\Gamma=0,$$

$$\frac{\partial\Psi^1_{2,2}}{\partial n_2}=0 \ (\text{на } \ \Gamma_1),\quad \frac{\partial\Psi^2_{2,2}}{\partial n_2}=\widetilde{\eta}_{2,1} \ (\text{на } \ \Gamma_{21}),\quad \frac{\partial\Psi^1_{2,2}}{\partial n_2}=\eta_{2,2} \ (\text{на } \ \Gamma_{22}).$$

Вспомогательная задача III.2 имеет единственное решение $\Psi^2_{2,2}=\Psi^2_{2,2}(x)\in H^1_\Gamma(\Omega_2)$. Введем оператор T_2, который ставит в соответствие функции $\widehat{P}_2\eta_2$ решение задачи III.2:

$$\Psi^2_{2,2}=\Psi^2_{2,2}\big|_{\Omega_2}=:T_2\widehat{P}_2\eta_2=T_2(\widetilde{\eta}_{2,1};\eta_{2,2})=:T_2w_2,\quad w_2=\widehat{P}_2\eta_2\in\widehat{H}_2.$$

Рассмотрим значения функции $\Psi^2_{2,2}$ на границе Γ_2 и представим функцию $\Psi^2_{2,2}|_{\Gamma_2}$ в виде суммы проекций этой функции на подпространства H_{22} и $\widehat{H}_2$:

$$\Psi^2_{2,2}|_{\Gamma_2}=P_{21}\gamma_2T_2\widehat{P}_2\eta_2+\widehat{P}_2\gamma_2T_2\widehat{P}_2\eta_2=:C_{12}w_2+C_{22}w_2. \tag{1.32}$$

Замечание 1.3. В силу принадлежности $\nabla\Psi_2$ пространству $\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2)$ и определения пространства $\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2)$ потенциал Ψ_2 с помощью решений вспомогательных задач можно представить в виде:

$$\Psi_2=\Psi_{2,1}+\Psi_{2,2}, \tag{1.33}$$

при этом считаем

$$\eta_1=\frac{\partial\Psi_{2,1}}{\partial n_2}=-\frac{\partial\Psi_{2,1}}{\partial n_1}=-\frac{\partial\Psi_1}{\partial n_1}=-\eta_0=-\zeta_1 \quad (\text{на } \ \Gamma_1),$$

$$\eta_2=\frac{\partial\Psi_{2,2}}{\partial n_2}=\zeta_2 \quad (\text{на } \ \Gamma_2).$$

Исходя из сказанного, разложим пространство $\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2)$ в виде следующей прямой суммы:

$$\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2)=\vec{G}_1(\Omega_2)\dot{+}\vec{G}_2(\Omega_2), \tag{1.34}$$

$$\vec{G}_1(\Omega_2):=\left\{\nabla p\,|\,\Delta p=0\,(\text{в } \ \Omega_2),\ \frac{\partial p}{\partial n_2}=0\,(\text{на } \ S_2),\ \frac{\partial p}{\partial n_2}=0\,(\text{на } \ \Gamma_2),\ \int\limits_\Gamma p\,d\Gamma=0\right\},$$

$$\vec{G}_2(\Omega_2):=\left\{\nabla p\,|\,\Delta p=0\,(\text{в } \ \Omega_2),\ \frac{\partial p}{\partial n_2}=0\,(\text{на } \ S_2),\ \frac{\partial p}{\partial n_2}=0\,(\text{на } \ \Gamma_1),\ \int\limits_\Gamma p\,d\Gamma=0\right\}.$$

В дальнейшем все функции, зависящие от t, будем считать функциями переменной t со значениями в соответствующем гильбертовом пространстве; в связи с этим в уравнениях задачи заменим $\partial/\partial t$ на d/dt.

С учетом (1.33) перепишем соотношения (1.25)–(1.27) в виде

$$\begin{gathered}
\frac{d^2}{dt^2}\left(-\rho_1\Psi_1+\rho_2\Psi_{2,1}+\rho_2\Psi_{2,2}\right)-g\Delta\rho\eta_0-\rho_0\frac{d^2\eta_0}{dt^2}=(\rho_2F_2-\rho_1F_1)+c_2(t)-c_1(t) \quad (\text{на } \Gamma_1);\\
\rho_2\frac{d^2}{dt^2}\Psi_{2,1}+\rho_2\frac{d^2}{dt^2}\Psi_{2,2}+\rho_{01}\frac{d^2\eta_2}{dt^2}+g\rho_2\eta_2=\rho_2F_2+c_2(t) \quad (\text{на } \Gamma_{21});\\
\rho_2\frac{d^2}{dt^2}\Psi_{2,1}+\rho_2\frac{d^2}{dt^2}\Psi_{2,2}+\rho_{02}\frac{d^2\eta_2}{dt^2}+K\eta_2=\rho_2F_2+c_2(t) \quad (\text{на } \Gamma_{22}).
\end{gathered} \tag{1.35}$$

Проектируя обе части первого уравнения (1.35) на пространство H_1, используя введенные операторы вспомогательных задач I и II, приходим к следующему уравнению

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big((\rho_1S_0+\rho_2S_1+\rho_0I_1)\eta_0-\rho_2S_3\eta_2\Big)+g\Delta\rho\eta_0=G_1, \tag{1.36}$$

где $G_1:=P_{\Gamma_1}(\rho_1F_1|_{\Gamma_1}-\rho_2F_2|_{\Gamma_1})$, $S_3\eta_2=P_{\Gamma_1}\Psi_{2,2}$, I_1 — единичный оператор в H_1.

Спроектируем теперь второе и третье уравнения (1.35) на подпространства H_{21} и $\widehat{H}_2$. Для этого предварительно выделим явно элемент из подпространства H_{21}:

$$\begin{gathered}
\rho_2\frac{d^2}{dt^2}\widetilde{\Psi}_{2,1}|_{\Gamma_{21}}+\rho_2\frac{d^2}{dt^2}\left(\Psi_{2,1}|_{\Gamma_{21}}-\widetilde{\Psi}_{2,1}|_{\Gamma_{21}}\right)+\rho_2\frac{d^2}{dt^2}\widetilde{\Psi}_{2,2}|_{\Gamma_{21}}+\rho_2\frac{d^2}{dt^2}\left(\Psi_{2,2}|_{\Gamma_{21}}-\widetilde{\Psi}_{2,2}|_{\Gamma_{21}}\right)+\\
+\rho_{01}\frac{d^2\widetilde{\eta}_{2,1}}{dt^2}+\rho_{01}\frac{d^2(\eta_{2,1}-\widetilde{\eta}_{2,1})}{dt^2}+g\rho_2\widetilde{\eta}_{2,1}+g\rho_2(\eta_{2,1}-\widetilde{\eta}_{2,1})=\rho_2\widetilde{F}_2+\rho_2(F_2-\widetilde{F}_2)+c_2(t) \quad (\text{на } \Gamma_{21});\\
\rho_2\frac{d^2}{dt^2}\Psi_{2,1}|_{\Gamma_{22}}+\rho_2\frac{d^2}{dt^2}\Psi_{2,2}|_{\Gamma_{22}}+\rho_{02}\frac{d^2\eta_{2,2}}{dt^2}+K\eta_{2,2}=\rho_2F_2+c_2(t) \quad (\text{на } \Gamma_{22}).
\end{gathered}$$

Отметим, что элементы $\rho_{01}d^2/dt^2w_1=\rho_{01}d^2/dt^2\left((\eta_{2,1}-\widetilde{\eta}_{2,1});0\right)$ и $g\rho_2w_1=g\rho_2\left((\eta_{2,1}-\widetilde{\eta}_{2,1});0\right)$ являются функциями переменной t со значениями в H_{21}.

Элемент $\left(\rho_{01}\,d^2\widetilde{\eta}_{2,1}/dt^2;\rho_{02}\,d^2\eta_{2,2}/dt^2\right)$ принадлежит подпространству $\widehat{H}_2\oplus\{1_{\Gamma_2}\}$ (при $\rho_{01}=\rho_{02}$ этот элемент принадлежит $\widehat{H}_2$). Значит, проекцию на $\widehat{H}_2$ можно представить в следующем виде:

$$M_1w_2=M_1\left(\widetilde{\eta}_{2,1};\eta_{2,2}\right):=\widehat{P}_2\left(\rho_{01}\,\widetilde{\eta}_{2,1};\rho_{02}\,\eta_{2,2}\right)=\left(\rho_{01}\,\widetilde{\eta}_{2,1}-c_1;\rho_{02}\,\eta_{2,2}-c_1\right). \tag{1.37}$$

Из условия ортогональности функции 1_{Γ_2} следует формула для константы c_1:

$$c_1=\frac{\operatorname{mes}\Gamma_{21}}{\operatorname{mes}\Gamma_{21}+\operatorname{mes}\Gamma_{22}}\;\rho_{01}\,\widetilde{\eta}_{2,1}+\frac{\operatorname{mes}\Gamma_{22}}{\operatorname{mes}\Gamma_{21}+\operatorname{mes}\Gamma_{22}}\;\rho_{02}\,\widetilde{\eta}_{2,2}.$$

Аналогично поступаем с элементом $(g\rho_2\widetilde{\eta}_{2,1};K\eta_{2,2})$:

$$\begin{gathered}
M_2w_2=M_2\left(\widetilde{\eta}_{2,1};\eta_{2,2}\right):=\widehat{P}_2\left(g\rho_2\widetilde{\eta}_{2,1};K\eta_{2,2}\right)=\left(g\rho_2\widetilde{\eta}_{2,1}-c_2;K\eta_{2,2}-c_2\right),\\
c_2=\frac{\operatorname{mes}\Gamma_{21}}{\operatorname{mes}\Gamma_{21}+\operatorname{mes}\Gamma_{22}}\;g\rho_2\widetilde{\eta}_{2,1}+\frac{\operatorname{mes}\Gamma_{22}}{\operatorname{mes}\Gamma_{21}+\operatorname{mes}\Gamma_{22}}\;\left(\widetilde{K\eta_{2,2}}\right).
\end{gathered} \tag{1.38}$$

Итак, после проектирования второго и третьего уравнения (1.35), получаем

$$\rho_2\frac{d^2}{dt^2}(\Psi_{2,1}|_{\Gamma_{21}}-\widetilde{\Psi}_{2,1}|_{\Gamma_{21}};0)+\rho_2\frac{d^2}{dt^2}(\Psi_{2,2}|_{\Gamma_{21}}-\widetilde{\Psi}_{2,2}|_{\Gamma_{21}};0)+\rho_{01}\frac{d^2w_1}{dt^2}+g\rho_2w_1=f_1, \tag{1.39}$$

$$\rho_2\frac{d^2}{dt^2}(\widetilde{\Psi}_{2,1}|_{\Gamma_{21}};\Psi_{2,1}|_{\Gamma_{22}})+\rho_2\frac{d^2}{dt^2}(\widetilde{\Psi}_{2,2}|_{\Gamma_{21}};\Psi_{2,2}|_{\Gamma_{22}})+\frac{d^2}{dt^2}M_1w_2+M_2w_2=f_2, \tag{1.40}$$

$$f_1:=\rho_2(F_2|_{\Gamma_{21}}-\widetilde{F}_2|_{\Gamma_{21}};0),\quad f_2:=(\widetilde{F}_2|_{\Gamma_{21}};F_2|_{\Gamma_{22}}).$$

В соответствии с разложением (1.30) представим решение задачи III в виде суммы решений двух вспомогательных задач: $\Psi_{2,2}=\Psi^1_{2,2}+\Psi^2_{2,2}$, тогда (см. подробнее (1.31), (1.32))

$$\begin{pmatrix}\left(\Psi_{2,2}|_{\Gamma_{21}}-\widetilde{\Psi}_{2,2}|_{\Gamma_{21}};0\right)\\ \left(\widetilde{\Psi}_{2,2}|_{\Gamma_{21}};\Psi_{2,2}|_{\Gamma_{22}}\right)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}C_{11}&C_{12}\\C_{21}&C_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}w_1\\w_2\end{pmatrix}=:\mathcal{C}\eta_2. \tag{1.41}$$

Перепишем (1.39), (1.40) в виде одного уравнения

$$\frac{d^2}{dt^2}\Big(-\rho_2 S_2\eta_0 + (\rho_2\mathcal{C} + \mathcal{N}_1)\eta_2\Big) + \mathcal{N}_2\eta_2 = G_2, \tag{1.42}$$

$$\mathcal{N}_1 := \operatorname{diag}(\rho_{01} I_{21}; M_1), \quad \mathcal{N}_2 := \operatorname{diag}(g\rho_2; M_2), \quad G_2 = \operatorname{diag}(f_1; f_2)$$

$$-S_2\eta_0 = S_2\eta_1 := P_{\Gamma_2}\Psi_{2,1} = \begin{pmatrix} \Big(\Psi_{2,1}|_{\Gamma_{21}} - \widetilde{\Psi}_{2,1}|_{\Gamma_{21}}; 0\Big) \\ \Big(\widetilde{\Psi}_{2,1}|_{\Gamma_{21}}; \Psi_{2,1}|_{\Gamma_{22}}\Big) \end{pmatrix}.$$

С учетом (1.36) и (1.42) запишем задачу (1.24)–(1.28) в следующем виде:

$$\frac{d^2}{dt^2}\mathcal{A}\eta + \mathcal{B}\eta = \mathcal{G}, \quad \eta(0) = \eta^0, \quad \eta^{'}(0) = \eta^1, \tag{1.43}$$

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_1 + \mathcal{A}_2 := \begin{pmatrix} \rho_1 S_0 + \rho_2 S_1 & -\rho_2 S_3 \\ -\rho_2 S_2 & \rho_2\mathcal{C}\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\rho_0 I_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{N}_1\end{pmatrix},$$

$$\mathcal{B} = \begin{pmatrix} g\Delta\rho & 0 \\ 0 & \mathcal{N}_2\end{pmatrix}, \quad \eta = \begin{pmatrix}\eta_0 \\ \eta_2\end{pmatrix}, \quad \mathcal{G} = \begin{pmatrix} G_1 \\ G_2\end{pmatrix},$$

$$\eta^0 = (\eta_0(0); \eta_2(0)) = (\zeta_1^0; \zeta_2^0), \quad \eta^{'}(0) = (\eta_0^1(0); \eta_2^1(0)), \quad \eta_0^1(0) = (P_{h,S_1}\vec{u}_1^0(x)\cdot\vec{n}_1)|_{\Gamma_1},$$

$$\eta_2^1(0) = (\eta_{2,1}^1(0); \eta_{2,2}^1(0)), \quad \eta_{2,1}^1(0) = P_{21}\left(P_{\widehat{h,S_2}}\vec{u}_2^0(x)\cdot\vec{n}_2\right), \quad \eta_{2,2}^1(0) = \widehat{P}_2\left(P_{\widehat{h,S_2}}\vec{u}_2^0(x)\cdot\vec{n}_2\right).$$

Причем для начальных данных в силу разложения (1.34) должно выполняться следующее кинематическое условие:

$$\gamma_1 P_{h,S_1}\vec{u}_1^0(x) = -\gamma_2\Pi_1 P_{\widehat{h,S_2}}\vec{u}_2^0(x) \quad (\text{на } \Gamma_1). \tag{1.44}$$

Здесь через Π_1 обозначен проектор на подпространство $\vec{G}_1(\Omega_2)$, через символы γ_i — операция взятия нормального следа на Γ_1 для полей, заданных в области Ω_i $(i = 1, 2)$.

Теорема 1.1. *Начально-краевая задача* (1.24)–(1.28) *равносильна задаче Коши* (1.43) *для дифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве*

$$\mathcal{H} := H_1 \oplus H_2, \quad H_2 = H_{21} \oplus \widehat{H}_2.$$

Рассмотрим свойства операторных блоков из (1.43).

Лемма 1.2. *Оператор* $\mathcal{C}$ (*см.* (1.41)) — *самосопряженный компактный и положительный оператор, действующий в пространстве* $H_2 = H_{21} \oplus \widehat{H}_2$.

Доказательство. Все операторы C_{ij} $(i, j = 1, 2)$, из которых состоит оператор $\mathcal{C}$, являются произведением ограниченных операторов ортогонального проектирования на компактный оператор $\gamma_2 T_j$ (см., например, [9]). Следовательно, все C_{ij} $(i, j = 1, 2)$ являются компактными операторами, а значит, и оператор $\mathcal{C}$ является компактным.

Докажем, что оператор $\mathcal{C}$ является самосопряженным. Обозначим через Φ решение вспомогательной задачи III при $\eta_2 = w = (w_1; w_2)$. Для любых w и v из H_2 имеем:

$$(\mathcal{C}w, v)_{H_2} = \left(\begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} \\ C_{21} & C_{22}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} w_1 \\ w_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} P_{21}v \\ \widehat{P}_2 v\end{pmatrix}\right) = \Big[(C_{11}w_1, P_{21}v) + \Big(C_{21}w_1, \widehat{P}_2 v\Big)\Big] +$$

$$+ \Big[(C_{12}w_2, P_{21}v) + \Big(C_{22}w_2, \widehat{P}_2 v\Big)\Big] = \big(\Phi_1|_{\Gamma_2}, v\big)_{H_2} + \big(\Phi_2|_{\Gamma_2}, v\big)_{H_2}.$$

Обозначим через Ψ решение вспомогательной задачи III при $\eta_2 = v$, тогда

$$(\mathcal{C}w, v)_{H_2} = \int\limits_{\Gamma_2}\Phi_1\, v\, d\Gamma_2 + \int\limits_{\Gamma_2}\Phi_2\, v\, d\Gamma_2 = \int\limits_{\Gamma_2}\Phi\, v\, d\Gamma_2 = \int\limits_{\Gamma_2}\Phi\,\frac{\partial\Psi}{\partial n_2}\,d\Gamma_2 = \int\limits_{\Gamma_2}\Phi\,\frac{\partial\Psi}{\partial n_2}\,d\Gamma_2 +$$

$$+ \int\limits_{S_2}\Phi\,\frac{\partial\Psi}{\partial n_2}\,dS_2 = \int\limits_{\partial\Omega_2}\Phi\,\frac{\partial\Psi}{\partial n_2}\,dS_2 = \int\limits_{\Omega_2}(\Phi\,\Delta\Psi + \nabla\Phi\,\nabla\Psi)\,d\,\Omega_2 = \int\limits_{\Omega_2}\nabla\Phi\,\nabla\Psi\,d\,\Omega_2 = \ldots = (w, \mathcal{C}v)_{H_2}.$$

Так как оператор $\mathcal{C}$ является ограниченным, то из полученного выражения следует, что оператор $\mathcal{C}$ — самосопряженный.

Рассмотрим теперь форму оператора $\mathcal{C}$:

$$(\mathcal{C}u,u)_{H_2}=\int\limits_{\Omega_2}|\nabla\Phi|^2\,d\,\Omega_2\geqslant 0.$$

Если $(\mathcal{C}u,u)_{H_2}=0$, то $\Phi=\mathrm{const}$, тогда из условия нормировки функции Φ получаем, что $\Phi\equiv 0$, а следовательно, и $u=0$. Отсюда следует, что оператор $\mathcal{C}$ положительный. $\square$

Лемма 1.3. *Оператор* $\mathcal{N}_2$ (*см.* (1.42)) *на области определения*

$$\mathcal{D}(\mathcal{N}_2)=H_{21}\oplus\mathcal{D}(M_2),\quad \mathcal{D}(M_2)=\{(\widetilde{\psi}_1;\psi_2)\in\widehat{H}_2\,|\,\psi_2\in\mathcal{D}(K)\},\tag{1.45}$$

является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором.

Доказательство. Исследуем оператор M_2 из (1.38). Для произвольных $u,v\in\mathcal{D}(M_2)\subset\widehat{H}_2$, $u=(\widetilde{u}_1;u_2)$, $v=(\widetilde{v}_1;v_2)$, в силу самосопряженности оператора ортогонального проектирования $\widehat{P}_2$ и оператора K имеем:

$$\begin{aligned}(M_2u,v)&=\Big(\widehat{P}_2\,(\rho_0g\widetilde{u}_1;Ku_2)\,;(\widetilde{v}_1;v_2)\Big)=\Big((\rho_0g\widetilde{u}_1;Ku_2)\,;\widehat{P}_2\,(\widetilde{v}_1;v_2)\Big)=((\rho_0g\widetilde{u}_1;Ku_2)\,;(\widetilde{v}_1;v_2))=\\&=(\rho_0g\widetilde{u}_1;\widetilde{v}_1)_{\widehat{H}}+(Ku_2;v_2)_{H_2}=(\widetilde{u}_1;\rho_0g\widetilde{v}_1)_{\widehat{H}}+(u_2;Kv_2)_{H_2}=((\widetilde{u}_1;u_2)\,;(\rho_0g\widetilde{v}_1;Kv_2))=\\&=\Big(\widehat{P}_2\,(\widetilde{u}_1;u_2)\,;(\rho_0g\widetilde{v}_1;Kv_2)\Big)=\Big((\widetilde{u}_1;u_2)\,;\widehat{P}_2\,(\rho_0g\widetilde{v}_1;Kv_2)\Big)=(u;M_2v),\end{aligned}$$

откуда следует, что оператор M_2 — самосопряженный.

Далее имеем:

$$(M_2u,u)=(\rho_0g\widetilde{u}_1;\widetilde{u}_1)_{\widehat{H}}+(Ku_2;u_2)_{H_2}\geqslant\min\,(c;\rho_0g)\,\|u\|^2_{\widehat{H}_2}\,,\tag{1.46}$$

где $(Ku_2,u_2)_{H_2}\geqslant c\,\|u_2\|^2_{H_2}$ (см. замечание 1.2), а значит, M_2 — положительно определенный оператор в $\widehat{H}_2$. Тогда и для оператора $\mathcal{N}_2=\mathrm{diag}(\rho_0gI_1;M_2)$ эти свойства сохранятся, т. е. оператор $\mathcal{N}_2$ — неограниченный самосопряженный положительно определенный оператор, и следовательно, ограниченно обратим. Обратный $\mathcal{N}_2^{-1}$ при этом является положительным оператором.

Заметим в заключение, что так как M_2 положительно определен, то обратный M_2^{-1} является ограниченным. Докажем, что он является компактным. Для этого достаточно показать, что H_{M_2} (энергетическое пространство оператора M_2) компактно вложено в $\widehat{H}_2$. Выберем произвольное ограниченное множество E из $H_{M_2}\subset\widehat{H}_2$. Элементы $\eta_2\in E$ имеют вид $\eta_2=(\widetilde{\eta}_{2,1};\eta_{2,2})$, где $\eta_{2,2}\in\mathcal{D}(K^{1/2})\subset L_2(\Gamma_{22})$ (см. подробнее теорему 1 из работы [8]). Рассмотрим компоненты E из подпространства $L_2(\Gamma_{22})$.

Обозначим это множество E_1. Из (1.46) следует, что

$$(M_2\eta_2,\eta_2):=\|\eta_2\|^2_{M_2}\geqslant(K\eta_{2,2},\eta_{2,2})_{H_2}:=\|\eta_{2,2}\|^2_K.$$

Таким образом, E_1 будет являться ограниченным множеством в H_k (энергетическое пространство оператора K), которое в свою очередь компактно вложено в $L_2(\Gamma_{22})$ (см. подробнее [8]). Следовательно, E_1 будет компактно в $L_2(\Gamma_{22})$. В силу вида подпространства H_{22} и того, что $\widehat{H}$ конечномерно, получаем, что E будет компактным множеством в $\widehat{H}_2$. Таким образом, любое ограниченное множество в H_{M_2} компактно в $\widehat{H}_2$, значит, оператор M_2^{-1} — компактный оператор. $\square$

Изучим свойства оператора $\mathcal{N}_1$, который имеет вид (см. (1.42), (1.37)):

$$\mathcal{N}_1=\mathrm{diag}(\rho_{01}I_1,M_1),\quad M_1w_2=(\rho_{01}\widetilde{\psi}_1-c_1;\rho_{02}\psi_2-c_1),\tag{1.47}$$

$$c_1=\alpha_1\,\rho_{01}\,\widetilde{\psi}_1+\alpha_2\,\rho_{02}\,\widetilde{\psi}_2,\quad \alpha_1=\frac{\mathrm{mes}\,\Gamma_{21}}{\mathrm{mes}\,\Gamma_{21}+\mathrm{mes}\,\Gamma_{22}},\quad \alpha_2=1-\alpha_1.$$

Опираясь на представления оператора M_1, учитывая связь между $\widetilde{\psi}_1$ и $\widetilde{\psi}_2$:

$$\widetilde{\psi}_1\ \mathrm{mes}\,\Gamma_{21}+\widetilde{\psi}_2\ \mathrm{mes}\,\Gamma_{22}=0,$$

имеем:

$$(M_1w_2,w_2)_{\widehat{H}_2}=\Big((\rho_{01}\widetilde{\psi}_1-c_1;\rho_{02}\psi_2-c_1),(\widetilde{\psi}_1;\psi_2)\Big)_{\widehat{H}_2}=\Big(\rho_{01}\widetilde{\psi}_1-c_1;\widetilde{\psi}_1\Big)_{\widehat{H}}+(\rho_{02}\psi_2-c_1;\psi_2)_{H_{22}}=$$

$$= \rho_{01}|\widetilde{\psi}_1|^2 \,\mathrm{mes}\,\Gamma_{21} - \Big((1-\alpha_2)\,\rho_{01}\,\widetilde{\psi}_1 + \alpha_2\,\rho_{02}\,\widetilde{\psi}_2\Big)\,\widetilde{\psi_1}\,\mathrm{mes}\,\Gamma_{21} + \rho_{02}\int\limits_{\Gamma_{22}} |\psi_2|^2 d\Gamma_{22} -$$

$$-\Big((1-\alpha_2)\,\rho_{01}\,\widetilde{\psi}_1 + \alpha_2\,\rho_{02}\,\widetilde{\psi}_2\Big)\,\widetilde{\psi_2}\,\mathrm{mes}\,\Gamma_{22} = \rho_{02}\|\psi_2\|^2_{H_{22}} + \rho_{01}|\widetilde{\psi}_1|^2 \,\mathrm{mes}\,\Gamma_{21}.$$

Таким образом,

$$(M_1 w_2, w_2)_{\widehat{H}_2} \geqslant k_1 \cdot \Big(\|\psi_2\|^2_{H_{22}} + |\widetilde{\psi}_1|^2 \,\mathrm{mes}\,\Gamma_{21}\Big) = k_1 \cdot \|w_2\|_{\widehat{H}_2}, \quad k_1 := \min(\rho_{01}, \rho_{02}) > 0.$$

Из полученного результата следует лемма.

Лемма 1.4. *Для M_1 и $\mathcal{N}_1$ из* (1.47) *справедливы оценки*

$$k_1\,\widehat{I} \leqslant M_1 \leqslant k_2\,\widehat{I}, \quad k_1\,I \leqslant \mathcal{N}_1 \leqslant k_2\,I, \quad k_2 := max(\rho_{01}, \rho_{02}) \geqslant k_1,$$

где $\widehat{I}$ и I — единичные операторы в $\widehat{H}_2$ и H_2, соответственно.

Лемма 1.5. *Оператор $\mathcal{A}_1$ (см.* (1.43)) *ограничен, самосопряжен и положителен.*

Доказательство. Свойство ограниченности следует из того, что ограничены все операторные коэффициенты матрицы $\mathcal{A}_1$.

Найдем квадратичную форму оператора $\mathcal{A}_1$. Для любого $\eta \in \mathcal{H}$ имеем

$$(\mathcal{A}_1\eta, \eta) = \left(\begin{pmatrix} (\rho_1 S_0 + \rho_2 S_1)\eta_0 - \rho_2 S_3 \eta_2 \\ -\rho_2 S_2 \eta_0 + \rho_2 \mathcal{C}\eta_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \eta_0 \\ \eta_2 \end{pmatrix}\right) = \rho_1\,(S_0\eta_0, \eta_0) + (\rho_2 S_1 \eta_0 - \rho_2 S_3 \eta_2, \eta_0) +$$

$$+ (-\rho_2 S_2 \eta_0 + \rho_2 \mathcal{C}\eta_2, \eta_2) = \rho_1\,(S_0\eta_0, \eta_0) + \rho_2\,(-P_{\Gamma_1}\Psi_2, \eta_0) + \rho_2\,(P_{\Gamma_2}\Psi_2, \eta_2) =$$

$$= \rho_1 \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Psi_1|^2\, d\Omega_1 + \rho_2 \int\limits_{\Omega_2} |\nabla\Psi_2|^2\, d\Omega_2. \tag{1.48}$$

Так как

$$(S_0\eta_0, \eta_0) = \left(P_{\Gamma_1}\Psi_1, \frac{\partial\Psi_1}{\partial n_1}\right) = \int\limits_{\Gamma_1} P_{\Gamma_1}\Psi_1\,\frac{\partial\Psi_1}{\partial n_1}\,d\Gamma_1 = \int\limits_{\partial\Omega_1} P_{\Gamma_1}\Psi_1\,\frac{\partial\Psi_1}{\partial n_1}\,dS_1 =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega_1} \Psi_1 \cdot (\nabla\Psi_1 \cdot \vec{n}_1)\, dS_1 = \int\limits_{\Omega_1} \nabla\Psi_1 \cdot \nabla\Psi_1\, d\Omega_1 = \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Psi_1|^2\, d\Omega_1;$$

$$-(P_{\Gamma_1}\Psi_2, \eta_0) + (P_{\Gamma_2}\Psi_2, \eta_2) = \int\limits_{\Gamma_1} P_{\Gamma_1}\Psi_2\,\frac{\partial\Psi_{2,1}}{\partial n_2}\,d\Gamma_1 + \int\limits_{\Gamma_2} P_{\Gamma_2}\Psi_2\,\frac{\partial\Psi_{2,2}}{\partial n_2}\,d\Gamma_2 =$$

$$= \int\limits_{\partial\Omega_2} \Psi_2\,\left(\frac{\partial\Psi_{2,1}}{\partial n_2} + \frac{\partial\Psi_{2,2}}{\partial n_2}\right)\,dS_2 = \int\limits_{\partial\Omega_2} \Psi_2\,\frac{\partial\Psi_2}{\partial n_2}\,dS_2 = \int\limits_{\partial\Omega_2} \Psi_2 \cdot (\nabla\Psi_2 \cdot \vec{n}_2)\,dS_2 =$$

$$= \int\limits_{\Omega_2} \nabla\Psi_2 \cdot \nabla\Psi_2\, d\Omega_2 = \int\limits_{\Omega_2} |\nabla\Psi_2|^2\, d\Omega_2.$$

С учетом ограниченности оператора $\mathcal{A}_1$ из (1.48) можно установить, что он самосопряжен и положителен. □

1.6. Вспомогательные утверждения. Рассмотрим задачу Коши для линейного дифференциального уравнения второго порядка следующего вида:

$$A^{1/2}\frac{d^2}{dt^2}\left(A^{1/2}u\right) + Bu = f\,(t)\,, \quad u\,(0) = u^0, \quad u'\,(0) = u^1, \tag{1.49}$$

где операторные коэффициенты удовлетворяют условиям

$$0 < A = A^* \in \mathcal{L}\,(H)\,, \quad B = B^* \gg 0. \tag{1.50}$$

Здесь $\mathcal{L}(H)$ — пространство ограниченных линейных операторов, действующих в пространстве H. В частности, операторы A^{-1} и B могут быть неограниченными самосопряженными операторами, заданными на плотных в H областях определения $\mathcal{D}\left(A^{-1}\right)$ и $\mathcal{D}(B)$.

Приведенные ниже результаты изложены в [4, с. 44–47], которые в свою очередь являются обоснованием соответствующих утверждений из [12, с. 57–62], а также [5, с. 38–76, 158–170].

Определение 1.1. Будем говорить, что функция $u(t)$, $0 \leqslant t \leqslant T$, является *сильным решением задачи Коши* (1.49) со значениями в $\mathcal{D}(A^{-1/2}) \subset H$, если выполнены следующие условия:

$$u(t) \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \quad Bu(t) \in C([0,T]\,;\mathcal{D}(A^{-1/2})), \quad A^{1/2}u(t) \in C^2([0,T]\,;H),$$

выполнено уравнение и начальные условия (1.49).

Теорема 1.2. *Если выполнены условия*

$$u^0 \in \mathcal{D}(A^{-1/2}B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}), \quad f(t) \in C^1([0,T];\mathcal{D}(A^{-1/2})), \tag{1.51}$$

то задача Коши (1.49) *имеет единственное сильное решение* (*со значениями в* $\mathcal{D}(A^{-1/2})$) *на отрезке* $[0,T]$.

Замечание 1.4. Так как оператор $0 < A = A^* \in \mathcal{L}(H)$, то оператор $A^{1/2}$ можно внести под знак производной d^2/dt^2, а следовательно, условия теоремы 1.2 достаточны и для существования сильного решения уравнения

$$\frac{d^2}{dt^2}(Au) + Bu = f(t). \tag{1.52}$$

Замечание 1.5. В случае, когда оператор $A \gg 0$, обратный оператор A^{-1} является ограниченным, а значит, $\mathcal{D}(A^{-1}) = H$. Следовательно, условия (1.51) сильной разрешимости задачи Коши (1.49) эквивалентны условиям

$$u^0 \in \mathcal{D}(B), \quad u^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}), \quad f(t) \in C^1([0,T]\,;H). \tag{1.53}$$

1.7. Теорема существования сильного решения. С учетом лемм 1.4 и 1.5 имеем, что оператор $\mathcal{A} \gg 0$ (см. определение (1.43)), и следовательно, он ограниченно обратим. Тогда, как следствие теоремы 1.2 и замечания 1.5, получим следующую теорему.

Теорема 1.3. *Если выполнены условия*

$$\eta^0 \in \mathcal{D}(B), \quad \eta^1 \in \mathcal{D}(B^{1/2}), \quad \mathcal{G} \in C^1([0,T]\,;\mathcal{H}), \tag{1.54}$$

то существует единственное сильное решение задачи (1.43) (*в смысле определения* 1.1).

Опишем достаточное условие сильной разрешимости в терминах исходного оператора K. Предварительно дадим (согласованные между собой) определения сильных по переменной t решений задач (1.1)–(1.4), (1.24)–(1.28).

Определение 1.2. *Сильным* (по переменной t) *решением* задачи (1.1)–(1.4) на промежутке $[0,T]$ назовем набор функций $\vec{u}_i(t,x)$, $p_i(t,x)$ и $\zeta_i(t,\hat{x})$ $(i=1,2)$, для которых выполнены следующие условия:

1. $\vec{u}_i(t) \in C^1([0,T];\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i))$, $\vec{J}_{0,S_i}(\Omega_i) := \vec{J}_0(\Omega_i) \oplus \vec{G}_{h,S_i}(\Omega_i)$, $\nabla p_i(t,x) \in C([0,T];\vec{G}(\Omega_i))$, $\vec{G}(\Omega_i) := \vec{G}_{h,S_i}(\Omega_i) \oplus \vec{G}_{0,\Gamma_i}(\Omega_i)$ $(i=1,2)$ (см. (1.12), (1.17)), и при любом $t \in [0,T]$ справедливо первое уравнение (1.1);
2. $\zeta_1 \in C^1([0,T];L_2(\Gamma_1))$, $\zeta_2 \in C^1([0,T];L_2(\Gamma_2))$, $\int_{\Gamma_i} \zeta_i d\Gamma_i = 0$ $(i=1,2)$;
3. выполнены граничные условия на Γ_1 и Γ_2:
$$p_1 - p_2 = \Delta\rho g\zeta_1 + \rho_0\frac{\partial^2\zeta_1}{\partial t^2} \in C([0,T];L_2(\Gamma_1)),$$
$$p_2 = g\rho_2\zeta_2 + \rho_{01}\frac{\partial^2\zeta_2}{\partial t^2} \in C\left([0,T]\,;L_2(\Gamma_{21})\right), \quad p_2 = K\zeta_2 + \rho_{02}\frac{\partial^2\zeta_2}{\partial t^2} \in C\left([0,T]\,;L_2(\Gamma_{22})\right),$$
где все слагаемые являются непрерывными по t функциями со значениями в соответствующих пространствах;
4. выполнены начальные условия (1.4).

Определение 1.3. *Сильным* (по переменной t) *решением* задачи (1.24)–(1.28) на промежутке $[0,T]$ назовем такой набор функций $\Psi_i\,(t,x),\ \zeta_i(t,\hat{x})\ \ (i=1,2)$ для которых выполнены следующие условия:

1. $\nabla\Psi_1\in C^1([0,T];\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1)),\quad \nabla\Psi_2\in C^1([0,T];\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2)),$ где $\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2)=\vec{G}_1(\Omega_2)\dotplus\vec{G}_2(\Omega_2)$ (см. подробнее (1.34));
2. для $\Psi_i(t,x)$ и $\zeta_i(t,\hat{x})$ выполнены кинематические условия
$$\frac{\partial\Psi_1}{\partial n_1}=\frac{\partial\Psi_2}{\partial n_2}=\zeta_1\in C^1([0,T];L_2(\Gamma_1)),\quad \frac{\partial\Psi_2}{\partial n_2}=\zeta_2\in C^1([0,T];L_2(\Gamma_2));$$
3. выполнены граничные условия (1.25)–(1.27), где все слагаемые являются непрерывными по t функциями со значениями в соответствующих пространствах;
4. выполнены начальные условия (1.28).

Теорема 1.4. *Пусть выполнены условия*

1. $\vec{u}_1^0\in\vec{J}_{0,S_1}(\Omega_1):=\vec{J}_0(\Omega_1)\oplus\vec{G}_{h,S_1}(\Omega_1),\ \vec{u}_2^0\in\vec{J}_{\widehat{0,S_2}}(\Omega_2):=\vec{J}_0(\Omega_2)\oplus\vec{G}_{\widehat{h,S_2}}(\Omega_2)$ (*см.* (1.12), (1.17)), *причем* $\gamma_1P_{h,S_1}\vec{u}_1^0(x)=-\gamma_2\Pi_1P_{\widehat{h,S_2}}\vec{u}_2^0(x)$ (*на* Γ_1) (*см.* (1.44));
2. $\zeta_1^0\in L_2(\Gamma_1),\ \zeta_2^0\in L_2(\Gamma_2),\ \int_{\Gamma_i}\zeta_i^0d\Gamma_i=0\ \ (i=1,2),\ \zeta_2^0|_{\Gamma_{22}}\in\mathcal{D}(K)$ (*см.* (1.5));
3. $\zeta_1^1=[(P_{h,S_1}\vec{u_1}^0(x))\cdot\vec{n_1}]_{\Gamma_1}\in L_2(\Gamma_1),\ \zeta_2^1=[(P_{\widehat{h,S_2}}\vec{u_2}^0(x))\cdot\vec{n_2}]_{\Gamma_2}\in L_2(\Gamma_2),\ \int_{\Gamma_i}\zeta_i^1d\Gamma_i=0\ \ (i=1,2),$ *при этом* $\zeta_2^1|_{\Gamma_{22}}\in\mathcal{D}(K^{1/2})$;
4. $\vec{f_i}\,(t)\in C^1\left([0,T]\,;\vec{L}_2\,(\Omega_i)\right).$

Тогда каждая из задач (1.1)–(1.4), (1.24)–(1.28), (1.43) *имеет единственное сильное по* t *решение.*

Доказательство. Непосредственно проверяется, что если выполнены условия теоремы 1.4, то выполнены и условия (1.54), а значит, задача Коши (1.43) имеет единственное сильное по t решение. Дальнейшее доказательство основано на обратном переходе от задачи Коши (1.43) к начально-краевой задаче (1.24)–(1.28), а затем к задаче (1.1)–(1.4). □

Замечание 1.6. Вспоминая вид оператора K и его область определения до расширения (см. (1.5)), можно записать в теореме 1.4 более простые достаточные условия на функцию ζ_2^0:
$$\zeta_2^0\in C^1(\overline{\Gamma_2}),\quad \zeta_2^0\in C^4(\overline{\Gamma}_2),\quad \int_{\Gamma_2}\zeta_2^0\,d\Gamma_2=0,$$
$$\zeta_2^0=\frac{\partial\zeta_2^0}{\partial\nu}=0\ (\text{на }\gamma_{22}),\quad M\zeta_2^0=N\zeta_2^0=0\ (\text{на }\partial\Gamma_{22}\setminus\gamma_{22}).$$
Для функции ζ_2^1 накладывается условие принадлежности области определения оператора $K^{1/2}$. В этом случае главные условия (см., например, [6, с. 82]) сохраняются, а естественные условия снимаются (см. подробнее [10]), и потому достаточно потребовать, чтобы
$$\zeta_2^1\in C^2(\overline{\Gamma_2}),\quad \int_{\Gamma_2}\zeta_2^1\,d\Gamma_2=0,\quad \zeta_2^1=\frac{\partial\zeta_2^1}{\partial\nu}=0\ (\text{на }\gamma_{22}).$$

2. Собственные колебания

В случае отсутствия внешних сил (кроме гравитационного поля), т. е. при $\mathcal{G}\equiv0$, рассмотрим собственные колебания — решения задачи (1.43), зависящие от времени по закону $\exp(i\omega t)$: $\eta(t,x)=e^{i\omega t}\eta(x)$. Для амплитудных элементов $\eta(x)$ приходим к спектральной задаче
$$\lambda\mathcal{A}\eta=\mathcal{B}\eta,\quad \lambda:=\omega^2. \tag{2.1}$$
При $\lambda=0$ получаем $\eta=0$. Значит, $\lambda=0$ не является собственным значением для спектральной задачи (2.1). Разделим обе части на λ и переобозначим:
$$\mathcal{A}\eta=\mu\mathcal{B}\eta,\quad \mu:=1/\lambda. \tag{2.2}$$

Из определения оператора $\mathcal{B} = \mathrm{diag}(g\Delta\rho; \mathcal{N}_2)$ и леммы 1.3 следует его обратимость, причем обратный оператор $\mathcal{B}^{-1}$ — ограниченный и положительный. Значит, существует оператор $\mathcal{B}^{-1/2}$. Введем обозначение:

$$\mathcal{B}^{1/2}\eta =: \psi. \tag{2.3}$$

Подставим (2.3) в уравнение (2.2), подействуем на обе части уравнения ограниченным оператором $\mathcal{B}^{-1/2}$ и получим:

$$\mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1/2}\eta = \mu\eta. \tag{2.4}$$

Получили задачу на собственные значения для оператора (см. подробнее (1.43))

$$J := \mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1/2} = \mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}_1\mathcal{B}^{-1/2} + \mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}_2\mathcal{B}^{-1/2},$$

$$\mathcal{A}_1 = \begin{pmatrix} \rho_1 S_0 + \rho_2 S_1 & -\rho_2 S_3 \\ -\rho_2 S_2 & \rho_2 \mathcal{C} \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}_2 = \begin{pmatrix} \rho_0 I_1 & 0 \\ 0 & \mathcal{N}_1 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{N}_1 = \begin{pmatrix} \rho_{01} I_{21} & 0 \\ 0 & M_1 \end{pmatrix}.$$

Оператор $\mathcal{A}_1$ ограничен, самосопряжен и положителен (лемма 1.5). Более того, он является компактным оператором, компактность оператора $\mathcal{C}$ следует из леммы 1.2, а операторы S_i компактны по построению (см. вспомогательные задачи). Таким образом, оператор $\mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}_1\mathcal{B}^{-1/2}$ является компактным как произведение компактного оператора на ограниченные. Оператор $\mathcal{A}_2$ ограничен и положительно определен (лемма 1.4), следовательно, оператор J является самосопряженным ограниченным положительно определенным оператором, а значит, спектр задачи (2.4) будет вещественным и положительным. Далее, к оператору J применима теорема Вейля, а значит, предельный спектр этого оператора совпадает с предельным спектром оператора $\mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}_2\mathcal{B}^{-1/2}$ ($\mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}_1\mathcal{B}^{-1/2}$ есть компактное возмущение оператора $\mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}_2\mathcal{B}^{-1/2}$). Напомним, что *предельным спектром* оператора называется совокупность точек непрерывного спектра, предельных точек точечного спектра и собственных значений бесконечной кратности.

Исследуем предельный спектр оператора $\mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}_2\mathcal{B}^{-1/2}$. Из вида операторов $\mathcal{A}_2$ и $\mathcal{B}$ имеем, что

$$\mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}_2\mathcal{B}^{-1/2} = \begin{pmatrix} (g\Delta\rho)^{-1/2} & 0 \\ 0 & N_2^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \rho_0 I_1 & 0 \\ 0 & N_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (g\Delta\rho)^{-1/2} & 0 \\ 0 & N_2^{-1/2} \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} \rho_0/(g\Delta\rho) & 0 \\ 0 & N_2^{-1/2} N_1 N_2^{-1/2} \end{pmatrix}, \quad N_2^{-1/2} N_1 N_2^{-1/2} = \begin{pmatrix} \rho_{01}/(g\rho_2) & 0 \\ 0 & M_2^{-1/2} M_1 M_2^{-1/2} \end{pmatrix}.$$

Оператор M_1 — ограниченный (лемма 1.4), а оператор $M_2^{-1/2}$ — компактный (конец леммы 1.3), следовательно, оператор $M_2^{-1/2} M_1 M_2^{-1/2}$ — компактный, и предельный спектр оператора $\mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}_2\mathcal{B}^{-1/2}$ состоит из точек

$$\sigma(\mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}_2\mathcal{B}^{-1/2}) = \Big\{0; \rho_0/(g\Delta\rho); \rho_{01}/(g\rho_2)\Big\}.$$

Проверим, что данные точки предельного спектра оператора $\mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}_2\mathcal{B}^{-1/2}$ являются пределами ветвей собственных значений, а не собственными значениями бесконечной кратности.

Оператор $\mathcal{A}$ положительно определен, а следовательно, обратим. Тогда для $\mu = 0$ $(\lambda = \infty)$, решая уравнение (2.2), получаем, что $\eta = 0$. Таким образом, точка $\mu = 0$ не является собственным значением оператора J.

Для исследования точки $\rho_{01}/(g\rho_2)$ запишем уравнение (2.2) в виде системы:

$$\begin{cases} (\rho_1 S_0 + \rho_2 S_1 + \rho_0 I_1)\,\eta_0 - \rho_2 S_{31} w_1 - \rho_2 S_{32} w_2 = \mu \cdot g\Delta\rho\eta_0 = \rho_{01}\,(\Delta\rho/\rho_2)\,\eta_0, \\ -\rho_2 S_{21}\eta_0 + \rho_2 C_{11} w_1 + \rho_2 C_{12} w_2 + \rho_{01} w_1 = \mu \cdot g\rho_2 w_1 = \rho_{01} w_1, \\ -\rho_2 S_{22}\eta_0 + \rho_2 C_{21} w_1 + \rho_2 C_{22} w_2 + M_1 w_2 = \mu \cdot M_2 w_2 = \rho_{01}/(g\rho_2)\, M_2 w_2, \end{cases} \tag{2.5}$$

где $w_1 = P_{21}\eta_2,\ w_2 = \widehat{P}\eta_2,\ S_{21}\eta_0 = P_{21}S_2\eta_0,\ S_{22}\eta_0 = \widehat{P}S_2\eta_0,\ S_{31}w_1 = S_3P_{21}\eta_2,\ S_{32}w_2 = S_3\widehat{P}_2\eta_2$.

Согласно результату, полученному в работе [13, теорема 4], оператор C_{11}^{-1} ограниченно действует из пространства $H_{21}^{1/2}$ в пространство $H_{21}^{-1/2}$. Таким образом, из второго уравнения можно выразить w_1:

$$-\rho_2 S_{21}\eta_0 + \rho_2 C_{12} w_2 = -\rho_2 C_{11} w_1, \quad w_1 = C_{11}^{-1}(S_{21}\eta_0 - C_{12} w_2).$$

Подставляя полученное выражение в (2.5), приходим к системе

$$\begin{cases} \mathcal{P}\eta_0 := \Big(\rho_1 S_0 + \rho_2 S_1 - \rho_2 S_{31}C_{11}^{-1}S_{21} + (\rho_0 - \rho_{01}\,\Delta\rho/\rho_2)\Big)\eta_0 = \rho_2(S_{32} - S_{31}C_{11}^{-1}C_{12})w_2, \\ -\rho_2\Big(S_{22} - C_{21}C_{11}^{-1}S_{21}\Big)\eta_0 + \rho_2\Big(C_{22} - C_{21}C_{11}^{-1}C_{12} + M_1\Big)w_2 = \rho_{01}/(g\rho_2)\,M_2 w_2. \end{cases}$$

Оператор S_0 — положительный как оператор первой вспомогательной задачи. Кроме того, повторяя рассуждения леммы 1.5, имеем

$$((\rho_1 S_0 + \rho_2 S_1 - \rho_2 S_{31}C_{11}^{-1}S_{21})\eta_0, \eta_0) = \int\limits_{\Omega_1} |\nabla\Psi_1|^2 d\Omega_1 + \int\limits_{\Omega_2} |\nabla\Psi_{2,1}|^2 d\Omega_2 \geqslant 0.$$

Таким образом, при условии $\rho_0 - \rho_{01}\,\Delta\rho/\rho_2 > 0$ оператор $\mathcal{P}$ положительно определен, а значит, имеет ограниченный обратный. Выражая из первого уравнения

$$\eta_0 = \rho_2 \mathcal{P}^{-1}(S_{32} - S_{31}C_{11}^{-1}C_{12})w_2$$

и подставляя результат во второе уравнение, приходим к задаче

$$\mathcal{P}_0 w_2 := \Big(-\rho_2^2(S_{22} - C_{21}C_{11}^{-1}S_{21})\mathcal{P}^{-1}(S_{32} - S_{31}C_{11}^{-1}C_{12}) + \\ + \rho_2(C_{22} - C_{21}C_{11}^{-1}C_{12} + M_1)\Big)w_2 = \rho_{01}/(g\rho_2)\,M_2 w_2. \quad (2.6)$$

Здесь оператор M_2 — положительно определенный (лемма 1.3), поэтому можно сделать замену $M_2^{1/2}w_2 = z$. Тогда уравнение (2.6) преобразуется в следующее:

$$M_2^{-1/2}\mathcal{P}_0 M_2^{-1/2} z = \rho_{01}/(g\rho_2)\,z.$$

Оператор $\mathcal{P}_0$ является ограниченным, а оператор $M_2^{-1/2}$ является компактным (см. подробнее доказательство леммы 1.3), поэтому весь целиком оператор, стоящий слева, также является компактным. Значит, собственное значение $\rho_{01}/(g\rho_2)$ может быть лишь собственным значением конечной кратности. Аналогично проверяется соответствующие утверждение для значения $\rho_0/(g\Delta\rho)$.

Итак, предельный спектр оператора $J = \mathcal{B}^{-1/2}\mathcal{A}\mathcal{B}^{-1/2}$ из (2.4) состоит из трех точек: 0, $\rho_{01}/(g\rho_2)$ и $\rho_0/(g\Delta\rho)$, причем к каждой точке сходится ветвь собственных значений оператора J. Тогда для квадратов собственных частот колебаний ω_k получаем предельный спектр, состоящий из $+\infty$ и точек $g\rho_2/\rho_{01}$, $g\Delta\rho/\rho_0$ $(g\rho_2/\rho_{01} > g\Delta\rho/\rho_0 > 0)$, причем существуют соответствующие ветви собственных значений, сходящиеся к данным значениям. Так как все собственные значения самосопряженного оператора J конечнократные, то объединение собственных элементов $\{\eta_k\}_{k=1}^{+\infty}$ оператора J образует ортогональный базис пространства $\mathcal{H}$ (см. [7, с. 411]). На основании выше изложенного окончательно можно сформулировать спектральную теорему для задачи (2.1).

Теорема 2.1. *Задача* (2.1) *имеет дискретный положительный спектр* $\{\lambda_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *с предельными точками на бесконечности и* $\lambda_0 = g\rho_2/\rho_{01} > 0$, $\lambda_1 = g\Delta\rho/\rho_0 > 0$. *Совокупность всех собственных элементов* $\{\zeta_k\}_{k=1}^{+\infty}$ *задачи* (2.1) *образует ортогональный базис в пространстве* $\mathcal{H}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С.* Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 5. — С. 3–78.
2. *Габов С. А., Свешников А. Г.* Математические задачи динамики флотирующей жидкости// Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. — 1990. — *28*. — С. 3–86.
3. *Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина и некоторые ее приложения. — Симферополь: Форма, 2016.
4. *Копачевский Н. Д.* Интегродифференциальные уравнения Вольтера в гильбертовом пространстве: специальный курс лекций. — Симферополь: Форма, 2016.
5. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховых пространствах. — М.: Наука, 1967.
6. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. — М.: Наука, 1970.
7. *Смирнов В. И.* Курс высшей математики. Т. 5. — М.: Физматлит, 1969.

8. *Цветков Д. О.* Нормальные колебания идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, полностью покрытой упругим льдом// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2017. — *3.* — С. 79–93.
9. *Цветков Д. О.* Малые движения идеальной стратифицированной жидкости со свободной поверхностью, полностью покрытой упругим льдом// Сиб. электрон. мат. изв. — 2018. — *15.* — С. 422–435.
10. *Цветков Д. О.* Малые движения идеальной стратифицированной жидкости, частично покрытой упругим льдом// Вестн. Удмуртск. ун-та. Мат. Мех. Компьют. науки. — 2018. — *28*, № 3. — С. 328–347.
11. *Цветков Д. О.* Колебания стратифицированной жидкости, частично покрытой льдом (общий случай)// Мат. заметки. — 2020. — *107*, № 1. — С. 130–144.
12. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint problems for an ideal fluid. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2001.
13. *Tsvetkov D. O.* Oscillations of a liquid partially covered with ice// Lobachevskii J. Math. — 2021. — *42*, № 5. — С. 1078–1093.

Д. О. Цветков
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия
E-mail: `tsvetdo@gmail.com`

UDC 517.98
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-3-498-515
EDN: NLGGDV

On one boundary-value problem related to internal flotation

D. O. Tsvetkov

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia

Abstract. We study the problem of small motions of a system of immiscible ideal fluids with a free surface consisting of two domains: a domain of elastic ice and a domain of crushed ice. Elastic ice is modeled by an elastic plate. By crushed ice we mean weighty particles of some substance floating on the free surface. We also assume that the interface between the fluid layers is a weighty surface. Using the method of orthogonal projection of boundary conditions and the introduction of auxiliary problems, we reduce the original initial-boundary value problem to an equivalent Cauchy problem for a second-order differential equation in a Hilbert space. We obtain the conditions under which there is a strong-in-time solution of the initial-boundary value problem describing the evolution of this hydraulic system. We prove statements about the structure of the spectrum of the problem and about the basis property of the system of eigenfunctions.

Keywords: ideal fluid, free surface, separation of fluid layers, orthogonal projection method, strong solution, spectrum.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: D. O. Tsvetkov, “On one boundary-value problem related to internal flotation,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 3, 498–515. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-3-498-515`

REFERENCES

1. M. S. Agranovich, "Spektral'nye zadachi dlya sil'no ellipticheskikh sistem vtorogo poryadka v oblastyakh s gladkoy i negladkoy granitsey" [Spectral problems for strongly elliptic second-order systems in domains with smooth and nonsmooth boundaries], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2002, **57**, No. 5, 3–78 (in Russian).
2. C. A. Gabov and A. G. Sveshnikov, "Matematicheskie zadachi dinamiki flotiruyushchey zhidkosti" [Mathematical problems of the dynamics of floating liquid], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Mat. analiz* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Anal.], 1990, **28**, 3–86 (in Russian).
3. N. D. Kopachevsky, *Abstraktnaya formula Grina i nekotorye ee prilozheniya* [Abstract Green's Formula and Some of Its Applications], Forma, Simferopol', 2016 (in Russian).
4. N. D. Kopachevsky, *Integrodifferentsial'nye uravneniya Vol'tera v gil'bertovom prostranstve: spetsial'nyy kurs lektsiy* [Volterra Integrodifferential Equations in Hilbert Space: Special Course of Lectures], Forma, Simferopol', 2016 (in Russian).
5. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovykh prostranstvakh* [Linear Differential Equations in Banach Spaces], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
6. S. G. Mikhlin, *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike* [Variational Methods in Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
7. V. I. Smirnov, *Kurs vysshey matematiki. T. 5* [Course of Higher Mathematics. Vol. 5], Fizmatlit, Moscow, 1969 (in Russian).
8. D. O. Tsvetkov, "Normal'nye kolebaniya ideal'noy stratifitsirovannoy zhidkosti so svobodnoy poverkhnost'yu, polnost'yu pokrytoy uprugim l'dom" [Normal oscillations of an ideal stratified fluid with a free surface completely covered with elastic ice], *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2017, **3**, 79–93 (in Russian).
9. D. O. Tsvetkov, "Malye dvizheniya ideal'noy stratifitsirovannoy zhidkosti so svobodnoy poverkhnost'yu, polnost'yu pokrytoy uprugim l'dom" [Small motions of an ideal stratified fluid with a free surface completely covered with elastic ice], *Sib. elektron. mat. izv.* [Siberian Electron. Math. Bull.], 2018, **15**, 422–435 (in Russian).
10. D. O. Tsvetkov, "Malye dvizheniya ideal'noy stratifitsirovannoy zhidkosti, chastichno pokrytoy uprugim l'dom" [Small motions of an ideal stratified fluid partially covered with elastic ice], *Vestn. Udmurtsk. un-ta. Mat. Mekh. Komp'yut. nauki* [Bull. Udmurtia Univ. Math. Mech. Comp. Sci.], 2018, **28**, No. 3, 328–347 (in Russian).
11. D. O. Tsvetkov, "Kolebaniya stratifitsirovannoy zhidkosti, chastichno pokrytoy l'dom (obshchiy sluchay)" [Oscillations of a stratified fluid partially covered with ice (general case)], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2020, **107**, No. 1, 130–144 (in Russian).
12. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint problems for an ideal fluid*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 2001.
13. D. O. Tsvetkov, "Oscillations of a liquid partially covered with ice," *Lobachevskii J. Math.*, 2021, **42**, No. 5, 1078–1093.

D. O. Tsvetkov

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia

E-mail: `tsvetdo@gmail.com`