

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ



СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ  
НАПРАВЛЕНИЯ

Том 70, № 2, 2024

Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы  
математического образования

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Научный журнал  
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.

Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

---

**Главный редактор**

*Р. В. Гамкрелидзе,*

д.ф.-м.н., профессор,

академик РАН,

Математический институт им.

В. А. Стеклова РАН, Москва,

Россия

**E-mail:** gam@mi.ras.ru

**Зам. главного редактора**

*А. Л. Скубачевский,*

д.ф.-м.н., профессор,

Российский университет

дружбы народов, Москва,

Россия

**E-mail:** skubachevskii-al@rudn.ru

**Ответственный секретарь**

*Е. М. Варфоломеев,*

к.ф.-м.н.,

Российский университет

дружбы народов, Москва,

Россия

**E-mail:** varfolomeev-em@rudn.ru

**Члены редакционной коллегии**

*А. А. Аграчев,* д.ф.-м.н., профессор, Международная школа передовых исследований (SISSA), Триест, Италия; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

*П. С. Красильников,* д.ф.-м.н., профессор, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

*А. Б. Муравник,* д.ф.-м.н., Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

*А. В. Овчинников,* к.ф.-м.н., доцент, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва, Россия

*В. Л. Попов,* д.ф.-м.н., профессор, член-корр. РАН, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

*А. В. Сарычев,* д.ф.-м.н., профессор, Флорентийский университет, Флоренция, Италия

## Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

4 выпуска в год

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.

Включен в каталог подписных изданий агентства «Роспечать», индекс 36832.

Индексируется в РИНЦ и международных базах данных *MathSciNet* и *Zentralblatt Math*.

Полный текст журнала размещен в базах данных компании *EBSCO Publishing* на платформе *EBSCOhost*.

Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences (New York)*.

### Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты.

Правила оформления статей, архив публикаций в открытом доступе и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала: <http://journals.rudn.ru/cmfd>, <http://www.mathnet.ru/cmfd>.

---

**Редактор: Е. М. Варфоломеев**

**Компьютерная верстка: Е. М. Варфоломеев**

**Адрес редакции:**

115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3  
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: [cmfdj@rudn.ru](mailto:cmfdj@rudn.ru)

Подписано в печать 15.04.24. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.

Усл. печ. л. 18,6. Тираж 110 экз. Заказ 628.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» (РУДН)

117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

**Отпечатано в типографии ИПК РУДН**

115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3  
тел. +7 495 952-04-41; e-mail: [publishing@rudn.ru](mailto:publishing@rudn.ru)

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba



CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 70, No. 2, 2024

Functional spaces. Differential operators. Problems of mathematics education

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Founded in 2003

Founder: Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

---

**EDITOR-IN-CHIEF**

*Revaz Gamkrelidze*,  
Steklov Mathematical Institute  
of Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russia  
**E-mail:** gam@mi.ras.ru

**DEPUTY EDITOR**

*Alexander Skubachevskii*,  
RUDN University  
Moscow, Russia  
**E-mail:** skubachevskii-al@rudn.ru

**EXECUTIVE SECRETARY**

*Evgeniy Varfolomeev*,  
RUDN University  
Moscow, Russia  
**E-mail:** varfolomeev-em@rudn.ru

**EDITORIAL BOARD**

*Andrei Agrachev*, International School for Advanced Studies (SISSA), Trieste, Italy; Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*Pavel Krasil'nikov*, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

*Andrey Muravnik*, RUDN University, Moscow, Russia

*Alexey Ovchinnikov*, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; Russian Institute for Scientific and Technical Information of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*Vladimir Popov*, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*Andrei Sarychev*, University of Florence, Florence, Italy

# CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Published by the Peoples' Friendship University of Russia  
named after Patrice Lumumba, Moscow, Russian Federation

ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

4 issues per year

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Indexed by *Russian Index of Science Citation*, *MathSciNet*, *Zentralblatt Math*.

The full texts can be found in the *EBSCOhost* databases by *EBSCO Publishing*.

Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences (New York)*.

## Aims and Scope

*Contemporary Mathematics. Fundamental Directions* is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results.

Guidelines for authors, free accessible archive of issues, and other information can be found at the journal's website: <http://journals.rudn.ru/cmfd>, <http://www.mathnet.ru/eng/cmfd>.

---

**Editor:** *E. M. Varfolomeev*

**Computer design:** *E. M. Varfolomeev*

**Address of the Editorial Office:**

3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia

Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: [cmfdj@rudn.ru](mailto:cmfdj@rudn.ru)

Print run 110 copies.

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba (RUDN University), Moscow, Russia

6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia

**Printed at RUDN Publishing House:**

3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia

Tel. +7 495 952-04-41; e-mail: [publishing@rudn.ru](mailto:publishing@rudn.ru)

## СОДЕРЖАНИЕ

|   |     |
|---|-----|
| <i>Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л.</i> Задача об успокоении системы управления с последствием с различным числом входов и выходов . . . . .                  | 189 |
| <i>Ахлынина В. В.</i> Третья смешанная краевая задача для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений в ограниченной области . . . . .            | 201 |
| <i>Водопьянов С. К., Павлов С. В.</i> Функциональные свойства пределов соболевских гомеоморфизмов с интегрируемым искажением . . . . .                          | 215 |
| <i>Волков С. В.</i> Построение плоских векторных полей с заданными глобальными топологическими структурами . . . . .  | 237 |
| <i>Ислам Р., Ибрагимов А.</i> Хемотаксические системы Келлера—Сегеля, основанные на модели броуновского движения Эйнштейна . . . . .                            | 253 |
| <i>Кожевникова Л. М.</i> Существование ренормализованного решения нелинейного эллиптического уравнения с $L_1$ -данными в пространстве $\mathbb{R}^n$ . . . . . | 278 |
| <i>Косенко И. И.</i> Вынужденные колебания спутника под действием сил светового давления и гравитации . . . . .   | 300 |
| <i>Лаврентьев М. М., Лысаков К. Ф., Марчук Ан. Г., Облаухов К. К., Шадрин М. Ю.</i> Зависимость расчетных высот волн цунами от разрешения сетки . . . . .       | 327 |

## CONTENTS

|  |     |
|--|-----|
| <i>Adkhamova A. Sh., Skubachevskii A. L.</i> Damping problem for control system with delay with different number of inputs and outputs . . . . .                         | 189 |
| <i>Akhlynina V. V.</i> The third mixed boundary-value problem for strongly elliptic differential-difference equations in a bounded domain . . . . .                      | 201 |
| <i>Vodopyanov S. K., Pavlov S. V.</i> Functional properties of limits of Sobolev homeomorphisms with integrable distortion . . . . .                                     | 215 |
| <i>Volkov S. V.</i> Construction of flat vector fields with prescribed global topological structures . . .   | 237 |
| <i>Islam R., Ibragimov A.</i> Class of Keller–Segel chemotactic systems based on Einstein method of Brownian motion modeling . . . . .                                   | 253 |
| <i>Kozhevnikova L. M.</i> Existence of a renormalized solution to a nonlinear elliptic equation with $L_1$ -data in the space $\mathbb{R}^n$ . . . . .                   | 278 |
| <i>Kosenko I. I.</i> Forced oscillations of a satellite under the influence of light pressure and gravity forces . . . . .   | 300 |
| <i>Lavrentiev M. M., Lysakov K. F., Marchuk An. G., Oblaukhov K. K., Shadrin M. Yu.</i> Dependence of the computed tsunami wave heights on the grid resolution . . . . . | 327 |

УДК 517.929

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-189-200

EDN: XXWMID

## ЗАДАЧА ОБ УСПОКОЕНИИ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ С РАЗЛИЧНЫМ ЧИСЛОМ ВХОДОВ И ВЫХОДОВ

А. Ш. АДХАМОВА, А. Л. СКУБАЧЕВСКИЙ

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

**Аннотация.** Рассматривается задача об успокоении нестационарной системы управления, описываемой системой дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа с гладкими матричными коэффициентами с различным числом входов и выходов и несколькими запаздываниями. Установлена связь между вариационной задачей, соответствующей задаче об успокоении системы с последствием, и краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка. Получены априорные оценки решений. Доказана теорема о разрешимости рассматриваемой краевой задачи.

**Ключевые слова:** дифференциально-разностное уравнение нейтрального типа, система управления с последствием, задача об успокоении, вариационная задача.

**Заявление о конфликте интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Благодарности и финансирование.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 24-11-00073, <https://rscf.ru/project/24-11-00073/>.

**Для цитирования:** А. Ш. Адхамова, А. Л. Скубачевский. Задача об успокоении системы управления с последствием с различным числом входов и выходов // *Соврем. мат. Фундам. направл.* 2024. Т. 70, № 2. С. 189–200. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-189-200>

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Впервые задача об успокоении системы управления с последствием рассматривалась Н. Н. Красовским [7]. Поведение системы управления описывалось системой линейных дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием. В работах [11, 15] задача Н. Н. Красовского об успокоении системы управления с последствием была обобщена на случай, когда уравнение, описывающее управляемую систему, содержит также старшие члены с запаздыванием, т. е. имеет нейтральный тип. Многомерная система управления с постоянными матричными коэффициентами исследовалась в [9, 12], а многомерная нестационарная система управления нейтрального типа рассматривалась в [1–4]. Системы управления с последствием запаздывающего типа изучались в [5, 8, 10]. Отметим также работы [13, 14], посвященные исследованию систем нейтрального типа с малыми коэффициентами при членах с запаздыванием.

Настоящая работа посвящена исследованию краевых задач для систем дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа, к которым сводится задача об успокоении многомерных нестационарных систем управления нейтрального типа с различным числом входов и выходов.

Статья построена следующим образом. В первом разделе содержится введение, второй раздел посвящен постановке задачи об успокоении многомерной системы управления с последствием. В третьем разделе установлена связь между вариационной задачей, описывающей модель успокоения системы управления с последствием запаздывающего типа, и краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка. В четвертом разделе доказаны априорные оценки, сформулирована теорема об однозначной разрешимости рассматриваемой краевой задачи и построено фридрихово расширение, соответствующее краевой задаче.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим линейную систему управления, описываемую системой дифференциально-разностных уравнений

$$\sum_{k=0}^M A_k(t)y'(t - k\tau) + \sum_{k=0}^M B_k(t)y(t - k\tau) = u(t), \quad 0 < t < T. \quad (2.1)$$

Здесь  $y(t) = (y_1(t), \dots, y_m(t))^T$  — неизвестная вектор-функция, описывающая состояние системы,  $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T$  — вектор-функция управления,  $A_k(t)$ ,  $B_k(t) = \{a_{ij}^k(t)\}$ ,  $\{b_{ij}^k(t)\}$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, m$  — матрицы порядка  $n \times m$  с элементами  $a_{ij}^k(t)$ ,  $b_{ij}^k(t)$ , которые являются вещественными непрерывно дифференцируемыми функциями на  $\mathbb{R}$ ,  $\tau = \text{const} > 0$  — запаздывание.

Предыстория системы задается начальным условием

$$y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-M\tau, 0]. \quad (2.2)$$

Здесь  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_m(t))^T$  — некоторая вектор-функция.

Рассмотрим задачу о приведении системы (2.1) с начальным условием (2.2) в положение равновесия при  $t \geq T$ . Для этого мы найдем такое управление  $u(t)$ ,  $0 < t < T$ , что:

$$y(t) = 0, \quad t \in [T - M\tau, T], \quad (2.3)$$

где  $T > (M + 1)\tau$ ,  $T - M\tau = \tau N$ .

Будем искать управление, доставляющее минимум функционалу энергии

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \rightarrow \min,$$

где  $|\cdot|$  — евклидова норма в  $\mathbb{R}^n$ . Таким образом, в силу (2.1) мы получаем вариационную задачу о минимуме функционала

$$J(y) := \int_0^T \left| \sum_{k=0}^M A_k(t)y'(t - k\tau) + \sum_{k=0}^M B_k(t)y(t - k\tau) \right|^2 dt \rightarrow \min. \quad (2.4)$$

## 3. ВАРИАЦИОННАЯ И КРАЕВАЯ ЗАДАЧИ

Для того, чтобы установить взаимосвязь между вариационной задачей (2.4), (2.2), (2.3) и соответствующей краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений, введем некоторые вспомогательные обозначения для различных вещественных функциональных пространств.

В данной статье рассмотрим случай  $n > m$ .

Обозначим через  $C(\mathbb{R})$  пространство непрерывных и ограниченных на  $\mathbb{R}$  функций с нормой:

$$\|x(t)\|_{C(\mathbb{R})} = \sup_{t \in \mathbb{R}} |x(t)|.$$

Пусть  $C^k(\mathbb{R})$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , — пространство непрерывных и  $k$  раз непрерывно дифференцируемых функций на  $\mathbb{R}$ , ограниченных на  $\mathbb{R}$  вместе со всеми производными вплоть до  $k$ -го порядка, с нормой

$$\|x(t)\|_{C^k(\mathbb{R})} = \max_{0 \leq i \leq k} \sup_{t \in \mathbb{R}} |x^{(i)}(t)|.$$

Обозначим через  $W_2^k(a, b)$  пространство абсолютно непрерывных на  $[a, b]$  функций, имеющих производную  $k$ -го порядка из  $L_2(a, b)$ , со скалярным произведением

$$(v, w)_{W_2^k(a, b)} = \sum_{i=0}^k \int_a^b v^{(i)}(t)w^{(i)}(t)dt.$$

Пусть  $\mathring{W}_2^k(a, b) = \{w \in W_2^k(a, b) : w^{(i)}(a) = w^{(i)}(b) = 0, i = 0, \dots, k - 1\}$ .

Введем пространства вектор-функций

$$L_2^m(a, b) = \prod_{i=1}^m L_2(a, b), \quad W_2^{k, m}(a, b) = \prod_{i=1}^m W_2^k(a, b), \quad \mathring{W}_2^{k, m}(a, b) = \prod_{i=1}^m \mathring{W}_2^k(a, b)$$

со скалярными произведениями

$$(v, w)_{L_2^n(a, b)} = \sum_{i=1}^n (v_i, w_i)_{L_2(a, b)},$$

$$(v, w)_{W_2^{k, n}(a, b)} = \sum_{i=1}^n (v_i, w_i)_{W_2^k(a, b)},$$

где  $v = (v_1, \dots, v_m)^T$ ,  $w = (w_1, \dots, w_m)^T$ .

Обозначим через  $\mathring{C}^{\infty, m}(a, b)$  прямое произведение  $m$  линейных многообразий  $\mathring{C}^{\infty}(a, b)$ , где  $\mathring{C}^{\infty}(a, b)$  — множество финитных бесконечно дифференцируемых функций на  $(a, b)$ .

Покажем, что вариационная задача (2.2)–(2.4) эквивалентна краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка. Воспользуемся схемой доказательств из [3].

Пусть  $y \in W_2^{1, m}(-M\tau, T)$  — решение вариационной задачи (2.2)–(2.4), где  $\varphi \in W_2^{1, m}(-M\tau, 0)$ . Введем пространства

$$\tilde{L} = \{v \in L_2^m(-M\tau, T) : v(t) = 0, t \in (-M\tau, 0) \cup (T - M\tau, T)\},$$

$$\tilde{W} = \{v \in W_2^{1, m}(-M\tau, T) : v(t) = 0, t \in (-M\tau, 0) \cup (T - M\tau, T)\}.$$

Мы будем часто отождествлять пространство  $\tilde{L}$  с  $L_2^m(0, T - M\tau)$ , а пространство  $\tilde{W}$  с  $\mathring{W}_2^{1, m}(0, T - M\tau)$ , не оговаривая этого специально.

Пусть  $v \in \tilde{W}$  — произвольная фиксированная функция. Тогда функция  $y + sv$  принадлежит  $W_2^{1, m}(-M\tau, T)$  и удовлетворяет краевым условиям (2.2), (2.3) для всех  $s \in \mathbb{R}$ .

Обозначим  $J(y + sv) = F(s)$ . Поскольку  $J(y + sv) \geq J(y)$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , мы имеем

$$\left. \frac{dF}{ds} \right|_{s=0} = 0. \tag{3.1}$$

Положим

$$\begin{aligned} B(y, v) := & \int_0^T \left( \sum_{k=0}^M A_k(t)y'(t - k\tau) + \sum_{k=0}^M B_k(t)y(t - k\tau) \right)^T \times \\ & \times \left( \sum_{l=0}^M A_l(t)v'(t - l\tau) + \sum_{l=0}^M B_l(t)v(t - l\tau) \right) d\tau. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Из равенства (3.1) следует, что

$$B(y, v) = 0, \quad v \in \tilde{W}. \tag{3.3}$$

Проведем преобразования одного из слагаемых, полученных при раскрытии скобок. Обозначим

$$B_{k, l}(y, v) = \int_0^T (A_k(t)y'(t - k\tau) + B_k(t)y(t - k\tau))^T (A_l(t)v'(t - l\tau) + B_l(t)v(t - l\tau)) d\tau.$$

В слагаемых, содержащих  $v(t-l\tau)$  или  $v'(t-l\tau)$ , сделаем замену переменной  $\xi = t-l\tau$ . Получим

$$B_{k,l}(y, v) = \int_{-l\tau}^{T-l\tau} (A_k(\xi + l\tau)y'(\xi + (l-k)\tau) + B_k(\xi + l\tau) \times \\ \times y(\xi + (l-k)\tau))^T (A_l(\xi + l\tau)v'(\xi) + B_l(\xi + l\tau)v(\xi)) d\xi.$$

Вернемся к старой переменной  $t$ , полагая  $t = \xi$ . Учитывая, что  $v(t) = 0$  при  $t \in (-M\tau, 0) \cup (T - M\tau, T)$ , будем иметь

$$B_{k,l}(y, v) = \int_0^{T-M\tau} (A_k(t + l\tau)y'(t + (l-k)\tau) + B_k(t + l\tau) \times \\ \times y(t + (l-k)\tau))^T (A_l(t + l\tau)v'(t) + B_l(t + l\tau)v(t)) dt. \quad (3.4)$$

Подставляя (3.4) в (3.2) и интегрируя по частям, получим:

$$B(y, v) = \int_0^{T-M\tau} \sum_{l,k=0}^M \{ (A_k(t + l\tau)y'(t + (l-k)\tau))^T (A_l(t + l\tau)v'(t)) + \\ + [(A_k(t + l\tau)y'(t + (l-k)\tau))^T B_l(t + l\tau) - \\ - ((B_k(t + l\tau)y(t + (l-k)\tau))^T A_l(t + l\tau))' + \\ + (B_k(t + l\tau)y(t + (l-k)\tau))^T B_l(t + l\tau)] v(t) \} dt. \quad (3.5)$$

Из (3.5) и определения обобщенной производной следует, что

$$\sum_{l,k=0}^M A_l^T(t + l\tau) A_k(t + l\tau) y'(t + (l-k)\tau) \in W_2^{1,n}(0, T - M\tau). \quad (3.6)$$

В силу (3.6), подставляя (3.4) в (3.3), мы можем произвести интегрирование по частям. Тогда мы получим

$$- \left( \sum_{l,k=0}^M A_l^T(t + l\tau) A_k(t + l\tau) y'(t + (l-k)\tau) \right)' + \\ + \sum_{l,k=0}^M \{ B_l^T(t + l\tau) A_k(t + l\tau) y'(t + (l-k)\tau) - \\ - \left( \sum_{l,k=0}^M A_l^T(t + l\tau) B_k(t + l\tau) y(t + (l-k)\tau) \right)' + \\ + \sum_{l,k=0}^M B_l^T(t + l\tau) B_k(t + l\tau) y(t + (l-k)\tau) \} = 0 \quad (t \in (0, T - M\tau)). \quad (3.7)$$

Таким образом, вектор-функция  $y \in W_2^{1,m}(-M\tau, T)$  удовлетворяет системе дифференциально-разностных уравнений (3.7) почти всюду на интервале  $(0, T - M\tau)$ .

**Определение 3.1.** Вектор-функция  $y \in W_2^{1,m}(-M\tau, T)$  называется *обобщенным решением* задачи (3.7), (2.2), (2.3), если выполняется условие (3.6),  $y(t)$  почти всюду на  $(0, T - M\tau)$  удовлетворяет системе уравнений (3.7), а также краевым условиям (2.2), (2.3).

Следующее определение обобщенного решения эквивалентно определению 3.1.

**Определение 3.2.** Вектор-функция  $y \in W_2^{1,m}(-M\tau, T)$  называется *обобщенным решением* задачи (3.7), (2.2), (2.3), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} B(y, v) = & \int_0^{T-M\tau} \sum_{l,k=0}^M (A_l^T(t+l\tau)A_k(t+l\tau)y'(t+(l-k)\tau))^T v'(t)dt + \\ & + \int_0^{T-M\tau} \sum_{l,k=0}^M \{ (B_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-k)\tau))^T - \\ & - ((A_l^T(t+l\tau)B_k(t+l\tau)y(t+(l-k)\tau))')^T + \\ & + (B_l^T(t+l\tau)B_k(t+l\tau)y(t+(l-k)\tau))^T \} v(t)dt = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

и краевым условиям (2.2), (2.3).

Таким образом, мы доказали, что если вектор-функция  $y \in W_2^{1,m}(-M\tau, T)$  является решением вариационной задачи (2.2)–(2.4), то она будет обобщенным решением краевой задачи (3.7), (2.2), (2.3).

Справедливо и обратное утверждение: если вектор-функция  $y \in W_2^{1,m}(-M\tau, T)$  является обобщенным решением краевой задачи (3.7), (2.2), (2.3), то она будет решением вариационной задачи (2.2)–(2.4).

Докажем это.

Пусть  $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$  — обобщенное решение краевой задачи (3.7), (2.2), (2.3). Тогда для всех  $v \in \widetilde{W}$  мы получаем

$$J(y + v) = J(y) + J(v) + 2B(y, v),$$

где  $J(v)$  — неотрицательный квадратичный функционал. Поскольку  $y$  — обобщенное решение задачи (3.7), (2.2), (2.3), то  $B(y, v) = 0$ . Следовательно,

$$J(y + v) \geq J(y)$$

для всех  $v \in \widetilde{W}$ . Таким образом, мы доказали следующее утверждение.

**Теорема 3.1.** Пусть  $\varphi \in W_2^{1,m}(-M\tau, 0)$ . Функционал (2.4) с краевыми условиями (2.2), (2.3) достигает минимума на некоторой функции тогда и только тогда, когда она является обобщенным решением краевой задачи (3.7), (2.2), (2.3).

#### 4. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ. РАЗРЕШИМОСТЬ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ. ФРИДРИХСОВО РАСШИРЕНИЕ

Введем оператор  $R_0 : \widetilde{L} \rightarrow L_2^m(0, T - M\tau)$  по формуле

$$R_0 u(t) = \sum_{k=0}^M A_k(t)u(t - k\tau).$$

**Лемма 4.1.** Пусть существует минор  $m$ -ого порядка матрицы  $A_0(t)$ , который не равен 0 при  $t \in \mathbb{R}$ . Тогда для всех  $w \in \widetilde{W}(0, T - M\tau)$

$$J_0(w) \geq c_0 \|w\|_{W_2^{1,m}(0, T - M\tau)}^2, \quad (4.1)$$

где  $c_0 > 0$  — постоянная, не зависящая от  $w$ ,

$$J_0(v) := \int_0^T \left( \sum_{k=0}^M A_k(t)v'(t - k\tau) \right)^T \left( \sum_{k=0}^M A_k(t)v'(t - k\tau) \right) dt. \quad (4.2)$$

*Доказательство.* Не ограничивая общности, предположим, что первые  $m$  строк матрицы  $A_0(t)$  образуют минор  $m$ -ого порядка, не равный 0 при  $t \in \mathbb{R}$ .

Введем матрицу  $\widetilde{A}_0(t)$ , полученную из  $A_0(t)$  вычеркиванием  $(n - m)$  последних строк.

1. Предположим противное: для любого  $k \in \mathbb{N}$  существует  $w_k \in \widetilde{W}$  такое, что

$$J_0(w_k) \leq \frac{1}{k} \|w_k\|_{W_2^{1,m}(0, T - M\tau)}^2. \quad (4.3)$$

Не ограничивая общности, мы будем считать, что  $\|w_k\|_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 1$ . Тогда в силу компактности вложения  $\widetilde{W}$  в  $L_2^m(0, T - M\tau)$  существует подпоследовательность  $\{w_{k_m}\} \subset \widetilde{W}$ , сходящаяся в  $L_2^m(0, T - M\tau)$  при  $k \rightarrow \infty$  к некоторой вектор-функции  $w_0 \in L_2^m(0, T - M\tau)$ .

2. Пусть  $0 < t < \tau$ . Тогда выражение  $(R_0 w'_{k_m})(t)$  имеет вид  $(R_0 w'_{k_m})(t) = A_0(t)w'_{k_m}(t)$ . Следовательно, в силу невырожденности матрицы  $\tilde{A}_0(t)$  и неравенства (4.3) имеем  $w'_{k_s} \rightarrow 0$  в  $L_2^m(0, \tau)$  при  $m \rightarrow \infty$ .

3. Пусть теперь  $\tau < t < 2\tau$ . Тогда  $(R_0 w'_{k_m})(t) = A_0(t)w'_{k_m}(t) + A_1(t)w'_{k_m}(t - \tau)$ . Отсюда в силу неравенства (4.3) и п. 2 доказательства имеем

$$(R_0 w'_{k_m})(t) \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad A_1(t)w'_{k_m}(t - \tau) \rightarrow 0 \quad \text{в} \quad L_2^m(\tau, 2\tau) \quad \text{при} \quad m \rightarrow \infty.$$

Следовательно, поскольку матрица  $\tilde{A}_0(t)$  — невырождена, то  $w'_{k_m} \rightarrow 0$  в  $L_2^m(\tau, 2\tau)$  при  $m \rightarrow \infty$ .

4. Аналогично за конечное число шагов мы докажем, что  $w'_{k_s} \rightarrow 0$  в  $L_2^m(l\tau, L)$  для любого  $l \in \mathbb{N}$  такого, что  $2\tau \leq l\tau < L$ , где  $L = \min\{(l+1)\tau, T - M\tau\}$ . Таким образом,  $w_0 \in \dot{W}_2^{1,m}(0, T - M\tau)$  и  $w_0 = \text{const} \neq 0$ . Мы получили противоречие, которое доказывает лемму 4.1.  $\square$

**Лемма 4.2.** Пусть выполнено условие леммы 4.1. Тогда для всех  $w \in \widetilde{W}$

$$J(w) \geq c_1 \|w\|_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}^2, \quad (4.4)$$

где  $c_1 > 0$  — постоянная, не зависящая от  $w$ .

*Доказательство.* Не ограничивая общности, будем считать, что  $\det \tilde{A}_0(t) \neq 0$ .

1. Предположим противное: неравенство (4.4) не выполняется. Тогда для любого  $k \in \mathbb{N}$  существует  $w_k \in \widetilde{W}$  такое, что

$$J(w_k) \leq \frac{1}{k} \|w_k\|_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}^2.$$

Не ограничивая общности, мы будем считать, что  $\|w_k\|_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 1$ . Тогда мы имеем

$$J(w_k) \leq \frac{1}{k}. \quad (4.5)$$

Введём оператор  $R_1 : \tilde{L} \rightarrow L_2^n(0, T - M\tau)$  по формуле

$$(R_1 v)(t) = \sum_{k=0}^M B_k(t)v(t - k\tau). \quad (4.6)$$

Из неравенства

$$\alpha^2 \leq 2(\alpha + \beta)^2 + 2\beta^2 \quad (\alpha, \beta \in \mathbb{R}),$$

леммы 4.1 и ограниченности оператора  $R_1 : \tilde{L} \rightarrow L_2^n(0, T - M\tau)$  для любого  $v \in \widetilde{W}$  мы получим

$$c_0 \|v\|_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}^2 \leq J_0(v) \leq 2J(v) + 2 \int_0^{T-M\tau} |(R_1 v)(t)|^2 dt \leq 2J(v) + k_1 \|v\|_{L_2^n(0,T-M\tau)}^2, \quad (4.7)$$

где  $c_0, k_1 > 0$  — постоянные, не зависящие от  $v$ .

В силу компактности оператора вложения  $\widetilde{W}$  в  $L_2^n(0, T - M\tau)$  существует подпоследовательность  $\{w_{k_m}\}$ , которая сходится к некоторой вектор-функции  $w_0$  в пространстве  $L_2^n(0, T - M\tau)$ . Таким образом, из (4.5), (4.7) следует, что

$$\begin{aligned} c_0 \|w_{k_m} - w_{k_l}\|_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}^2 &\leq 2J(w_{k_m} - w_{k_l}) + k_1 \|w_{k_m} - w_{k_l}\|_{L_2^n(0,T-M\tau)}^2 \leq \\ &\leq \frac{4}{k_m} + \frac{4}{k_l} + k_1 \|w_{k_m} - w_{k_l}\|_{L_2^n(0,T-M\tau)}^2 \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad l, m \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Следовательно,  $w_{k_m} \rightarrow w_0$  в  $\widetilde{W}$  и  $\|w_0\|_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} = 1$ . Поэтому в силу (4.5) мы имеем

$$J(w_0) = \int_0^{T-M\tau} \left| \sum_{m=0}^M A_m(t)w'_0(t - m\tau) + \sum_{m=0}^M B_m(t)w_0(t - m\tau) \right|^2 dt = 0,$$

т. е.

$$\sum_{m=0}^M A_m(t)w'_0(t - m\tau) + \sum_{m=0}^M B_m(t)w_0(t - m\tau) = 0, \quad t \in (0, T - M\tau). \quad (4.8)$$

Поскольку  $w_0 \in \widetilde{W}$ , вектор-функция  $w_0$  удовлетворяет начальному условию

$$w_0(t) = 0, \quad t \in [-M\tau, 0]. \quad (4.9)$$

Тогда, если  $0 < t \leq \tau$ , система уравнений (4.8) примет вид

$$\widetilde{A}_0(t)w'_0(t) + \widetilde{B}_0(t)w_0(t) = 0, \quad (4.10)$$

при этом в силу (4.9)

$$w_0(0) = 0,$$

где  $\widetilde{B}_0(t)$  — матрица порядка  $m \times m$ , полученная из матрицы  $B_0(t)$  вычеркиванием последних  $(n - m)$  строк.

Поскольку по условию  $\det \widetilde{A}_0(t) \neq 0$ , мы имеем

$$w_0(t) = 0, \quad t \in [0, \tau]. \quad (4.11)$$

В силу (4.9), (4.11) для  $\tau < t \leq 2\tau$  система уравнений (4.8) примет вид (4.10), при этом в силу (4.11)  $w_0(\tau) = 0$ . Решая полученную задачу Коши для системы обыкновенных дифференциальных уравнений на полуинтервале  $(\tau, 2\tau]$ , имеем  $w_0(t) = 0, t \in (\tau, 2\tau]$ , и т. д.

Таким образом,  $w_0(t) \equiv 0$  при  $t \in [0, T - M\tau]$ . Это противоречит равенству  $\|w_0\|_{W_2^{1,n}(0, T - M\tau)} = 1$ .  $\square$

**Теорема 4.1.** Пусть существует минор  $m$ -ого порядка матрицы  $A_0(t)$ , который не равен 0 при  $t \in \mathbb{R}$ . Тогда для любой вектор-функции  $\varphi \in W_2^{1,m}(-M\tau, 0)$  существует единственное обобщенное решение краевой задачи (3.7), (2.2), (2.3)  $y \in W_2^{1,m}(-M\tau, T)$ , при этом

$$\|y\|_{W_2^{1,m}(-M\tau, T)} \leq c\|\varphi\|_{W_2^{1,m}(-M\tau, 0)}, \quad (4.12)$$

где  $c > 0$  — постоянная, не зависящая от  $\varphi$ .

*Доказательство.* Обозначим

$$\Phi(t) = \begin{cases} \varphi(t), & \text{если } -M\tau \leq t \leq 0; \\ 0, & \text{если } T - M\tau \leq t \leq T; \\ \varphi(0) - \frac{\varphi(0)t}{T - M\tau}, & \text{если } 0 < t < T - M\tau. \end{cases}$$

Очевидно, что  $\Phi \in W_2^{1,m}(-M\tau, T)$ . Кроме того, в силу непрерывности оператора вложения  $W_2^1(-M\tau, T)$  в  $C[-M\tau, 0]$  имеем

$$\|\Phi\|_{W_2^{1,m}(-M\tau, T)} \leq k_1\|\varphi\|_{W_2^{1,m}(-M\tau, 0)}, \quad (4.13)$$

где  $k_1 > 0$  — постоянная, не зависящая от  $\varphi$ .

Пусть  $x = y - \Phi$ , тогда  $x \in \widetilde{W}$ . Интегральное тождество (3.3) примет вид

$$B(\Phi, v) + B(x, v) = 0, \quad v \in \widetilde{W}. \quad (4.14)$$

Поскольку  $B(v, v) = J(v), v \in \widetilde{W}$ , по лемме 4.2 в пространстве  $\overset{\circ}{W}_2^1(0, T - M\tau)$  мы можем ввести эквивалентное скалярное произведение по формуле

$$(x, v)'_{\overset{\circ}{W}_2^{1,m}(0, T - M\tau)} = B(x, v). \quad (4.15)$$

Следовательно, тождество (4.14) может быть записано в виде

$$B(\Phi, v) + (x, v)'_{\overset{\circ}{W}_2^{1,m}(0, T - M\tau)} = 0. \quad (4.16)$$

Для фиксированного  $\Phi \in W_2^{1,m}(-M\tau, T)$  функционал  $B(\Phi, v)$  линеен по  $v \in \widetilde{W}$ . Используя неравенство Коши—Буняковского и неравенства (4.13), (4.4), мы получаем

$$\begin{aligned} |B(\Phi, v)| &\leq k_2 \|\Phi\|_{W_2^{1,m}(-M\tau, T)} \|v\|_{W_2^{1,m}(0, T-M\tau)} \leq \\ &\leq k_3 \|\varphi\|_{W_2^{1,m}(-M\tau, 0)} \|v\|_{W_2^{1,m}(0, T-M\tau)} \leq k_4 \|\varphi\|_{W_2^{1,m}(-M\tau, 0)} \|v\|'_{\dot{W}_2^{1,m}(0, T-M\tau)}, \end{aligned} \quad (4.17)$$

где  $k_2, k_3, k_4 > 0$  — постоянные, не зависящие от  $\varphi$  и  $v$ .

Таким образом, при фиксированном  $\Phi$  функционал  $B(\Phi, v)$  ограничен по  $v$  на  $\widetilde{W}$ . В силу неравенства (4.17) норма функционала  $B(\Phi, v)$  на  $\dot{W}_2^{1,m}(0, T-M\tau)$  не превышает  $k_4 \|\varphi\|_{W_2^{1,m}(-M\tau, 0)}$ . Согласно теореме Рисса об общем виде линейного функционала в гильбертовом пространстве, существует функция  $F \in \widetilde{W}$  такая, что

$$B(\Phi, v) = (F, v)'_{\dot{W}_2^{1,m}(0, T-M\tau)}$$

и

$$\|F\|'_{\dot{W}_2^{1,m}(0, T-M\tau)} \leq k_4 \|\varphi\|_{W_2^{1,m}(-M\tau, 0)}. \quad (4.18)$$

Эта функция единственна. Таким образом, тождество (4.16) можно записать в виде

$$(x, v)'_{\dot{W}_2^{1,m}(0, T-M\tau)} + (F, v)'_{\dot{W}_2^{1,m}(0, T-M\tau)} = 0.$$

Следовательно, задача (3.7), (2.2), (2.3) имеет единственное обобщенное решение  $y = \Phi - F$ , при этом в силу (4.13) и (4.18) выполняется неравенство (4.12). Это доказывает теорему.  $\square$

Идея доказательства теоремы 3.1 состоит по существу в сведении однородной системы дифференциально-разностных уравнений (3.7) с неоднородными краевыми условиями (2.2) и однородными условиями (2.3) к неоднородной системе дифференциально-разностных уравнений с однородными краевыми условиями. Таким образом, возникает вопрос о построении соответствующего неограниченного оператора, действующего в пространстве  $\widetilde{L}$ , и изучении его свойств.

Пусть  $\mathcal{A}_R : \widetilde{L} \supset D(\mathcal{A}_R) \rightarrow \widetilde{L}$  — неограниченный оператор, заданный по формуле:

$$\begin{aligned} (\mathcal{A}_R y)(t) &= - \left( \sum_{l,k=0}^M A_l^T(t+l\tau) A_k(t+l\tau) y'(t+(l-k)\tau) \right)' + \\ &+ \sum_{l,k=0}^M \{ B_l^T(t+l\tau) A_k(t+l\tau) y'(t+(l-k)\tau) - \\ &- \left( \sum_{l,k=0}^M A_l^T(t+l\tau) B_k(t+l\tau) y(t+(l-k)\tau) \right)' + \\ &+ \sum_{l,k=0}^M B_l^T(t+l\tau) B_k(t+l\tau) y(t+(l-k)\tau) \} \quad (t \in (0, T-M\tau)) \end{aligned} \quad (4.19)$$

при  $y \in D(\mathcal{A}_R)$ , где

$$D(\mathcal{A}_R) = \left\{ y \in \widetilde{W} : \sum_{l,k=0}^M A_l^T(t+l\tau) A_k(t+l\tau) y'(t+(l-k)\tau) \in W_2^{1,m}(0, T-M\tau) \right\},$$

см. условие (3.6).

Обозначим через  $A_R$  сужение оператора  $\mathcal{A}_R$  на  $\dot{C}^{\infty, m}(0, T-M\tau)$ , т. е.  $A_R : \widetilde{L} \supset D(A_R) \rightarrow \widetilde{L}$  есть неограниченный оператор, заданный следующим образом:  $A_R y = \mathcal{A}_R y$  при  $y \in D(A_R) := \dot{C}^{\infty, m}(0, T-M\tau)$ .

**Теорема 4.2.** *Оператор  $A_R : \widetilde{L} \supset D(A_R) \rightarrow \widetilde{L}$  является самосопряженным фридриховым расширением оператора  $A_R$  с нижней гранью  $s_{A_R} \geq c_1 > 0$ , где  $c_1$  — постоянная из неравенства (4.4).*

*Доказательство.*

1. Докажем, что оператор  $A_R$  симметрический, т. е.  $(A_R v, w)_{\tilde{L}} = (v, A_R w)_{\tilde{L}}$  для любых  $v, w \in D(A_R)$ .

Действительно, интегрируя по частям выражение:

$$- \int_0^{T-M\tau} \left\{ \sum_{l,k=0}^M A_l^T(t+l\tau) A_k(t+l\tau) v'(t+(l-k)\tau) \right\}' w(t) dt,$$

получим

$$(A_R v, w)_{\tilde{L}} = B(v, w) = \sum_{l,k=0}^M B_{k,l}(v, w), \quad (4.20)$$

где

$$\begin{aligned} B_{k,l}(v, w) = & \int_0^{T-M\tau} \{ -[A_l^T(t+l\tau) A_k(t+l\tau) v'(t+(l-k)\tau)]^T \times \\ & \times w'(t) + [B_l^T(t+l\tau) A_k(t+l\tau) v'(t+(l-k)\tau)]^T w(t) - \\ & - [A_l^T(t+l\tau) B_k(t+l\tau) v(t+(l-k)\tau)]^T w(t) + \\ & + [B_l^T(t+l\tau) B_k(t+l\tau) v(t+(l-k)\tau)]^T w(t) \} dt, \end{aligned} \quad (4.21)$$

см. (3.4).

Сделаем в выражении для  $B_{k,l}(v, w)$  замену переменной  $\xi = t + (l-k)\tau$ . Тогда из (4.21) следует, что

$$\begin{aligned} B_{k,l}(v, w) = & \int_0^{T-M\tau} \{ (v'(\xi))^T (A_k^T(\xi+k\tau) A_l(\xi+k\tau) w'(\xi+(k-l)\tau)) + \\ & + (v'(\xi))^T (A_k^T(\xi+k\tau) B_l(\xi+k\tau) w(\xi+(k-l)\tau)) - \\ & - (v(\xi))^T (B_k^T(\xi+k\tau) A_l(\xi+k\tau) w'(\xi+(k-l)\tau)) + \\ & + (v(\xi))^T (B_k^T(\xi+k\tau) B_l(\xi+k\tau) w(\xi+(k-l)\tau)) \} dt. \end{aligned}$$

Возвращаясь к старой переменной  $t$ , полагая  $t = \xi$ , и интегрируя по частям, имеем

$$\begin{aligned} B_{k,l}(v, w) = & \int_0^{T-M\tau} (v(t))^T \{ -[A_k^T(t+k\tau) A_l(t+k\tau) w'(t+(k-l)\tau)]' - \\ & - (A_k^T(t+k\tau) B_l(t+k\tau) w(t+(k-l)\tau))' + \\ & + [B_k^T(t+k\tau) A_l(t+k\tau) w'(t+(k-l)\tau)] + \\ & + [B_k^T(t+k\tau) B_l(t+k\tau) w(t+(k-l)\tau)] \} dt. \end{aligned} \quad (4.22)$$

Суммируя левые и правые части (4.22) по  $k, l$  и меняя  $k, l$  местами, получим равенство  $(A_R v, w)_{\tilde{L}} = (v, A_R w)_{\tilde{L}}$ , для любых  $v, w \in D(A_R)$ .

2. Рассмотрим теперь квадратичную форму  $(A_R v, v)_{\tilde{L}}$ ,  $v \in D(A_R)$ .

В силу (4.20)

$$(A_R v, v)_{\tilde{L}} = B(v, v) = J(v), \quad v \in D(A_R).$$

Из леммы 4.2 следует, что

$$(A_R v, v)_{\tilde{L}} \geq c_1 \|v\|_{W_2^{1,m}(0, T-M\tau)}^2, \quad v \in D(A_R). \quad (4.23)$$

3. Из теоремы 2 в [6, гл. 12, п. 5] и следствия 3 в [6, гл. 12, п. 5], а также симметричности оператора  $A_R$  и неравенства (4.23) вытекает справедливость теоремы 4.2.  $\square$

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Адхамова А. Ш.* Гладкость решений задачи об успокоении нестационарной системы управления с последствием// *Соврем. мат. Фундам. направл.* — 2022. — 68, № 1. — С. 14–24.
2. *Адхамова А. Ш.* Гладкость решений задачи об успокоении нестационарной системы управления с последствием нейтрального типа на всем интервале// *Соврем. мат. Фундам. направл.* — 2023. — 69, № 1. — С. 1–17.
3. *Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л.* Об одной задаче успокоения нестационарной системы управления с последствием// *Соврем. мат. Фундам. направл.* — 2019. — 65, № 4. — С. 547–556.
4. *Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л.* Об успокоении системы управления с последствием нейтрального типа// *Докл. РАН.* — 2020. — 490, № 1. — С. 81–84.
5. *Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л.* Об одной краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа// *Дифф. уравн.* — 2022. — 58, № 6. — С. 747–755.
6. *Данфорд Н., Шварц Дж.* Линейные операторы, Т. 2. Спектральная теория. — М.: Мир, 1966.
7. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
8. *Кряжжимский А. В., Максимов В. И., Осипов Ю. С.* О позиционном моделировании в динамических системах// *Прикл. мат. мех.* — 1983. — 47, № 6. — С. 883–890.
9. *Леонов Д. Д.* К задаче об успокоении системы управления с последствием// *Соврем. мат. Фундам. направл.* — 2010. — 37. — С. 28–37.
10. *Осипов Ю. С.* О стабилизации управляемых систем с запаздыванием// *Дифф. уравн.* — 1965. — 1, № 5. — С. 605–618.
11. *Скубачевский А. Л.* К задаче об успокоении системы управления с последствием// *Докл. РАН.* — 1994. — 335, № 2. — С. 157–160.
12. *Adkhamova A. S., Skubachevskii A. L.* Damping problem for multidimensional control system with delays// *Distrib. Comput. Commun. Networks.* — 2016. — 678. — С. 612–623.
13. *Banks H. T., Kent G. A.* Control of functional differential equations of retarded and neutral type to target sets in function space// *SIAM J. Control.* — 1972. — 10, № 4. — С. 567–593.
14. *Kent G. A.* A maximum principle for optimal control problems with neutral functional differential systems// *Bull. Am. Math. Soc.* — 1971. — 77, № 4. — С. 565–570.
15. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.

А. Ш. Адхамова

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: [adkhamova\\_ash@pfur.ru](mailto:adkhamova_ash@pfur.ru)

А. Л. Скубачевский

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: [alskubachevskii@yandex.ru](mailto:alskubachevskii@yandex.ru)

UDC 517.929

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-189-200

EDN: XXWMID

## Damping Problem for Control System with Delay with Different Number of Inputs and Outputs

A. Sh. Adkhamova, A. L. Skubachevskii

**Abstract.** We consider the damping problem for a nonstationary control system described by a system of differential-difference equations of neutral type with smooth matrix coefficients and several delays. A connection has been established between the variational problem corresponding to the problem of calming a system with delay and the boundary value problem for a system of second-order differential equations. A priori estimates of solutions are obtained. A theorem on the solvability of the considered boundary value problem is proved.

**Keywords:** differential-difference equation of neutral type, control system with delay, damping problem, variational problem.

**Conflict-of-interest.** The authors declare no conflicts of interest.

**Acknowledgments and funding.** The study was supported by a grant from the Russian Science Foundation No. 24-11-00073, <https://rscf.ru/project/24-11-00073/>.

**For citation:** A. Sh. Adkhamova, A. L. Skubachevskii, “Damping Problem for Control System with Delay with Different Number of Inputs and Outputs,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. 70, No. 2, 189–200. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-189-200>

### REFERENCES

1. A. Sh. Adkhamova, “Gladkost’ resheniy zadachi ob uspokoenii nestatsionarnoy sistemy upravleniya s posledeystviem” [Smoothness of solutions to the damping problem for nonstationary control system with delay], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2022, **68**, No. 1, 14–24 (in Russian).
2. A. Sh. Adkhamova, “Gladkost’ resheniy zadachi ob uspokoenii nestatsionarnoy sistemy upravleniya s posledeystviem neytral’nogo tipa na vsem intervale” [Smoothness of solutions to the damping problem for nonstationary control system with delay of neutral type on the whole interval], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2023, **69**, No. 1, 1–17 (in Russian).
3. A. Sh. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, “Ob odnoy zadache uspokoeniya nestatsionarnoy sistemy upravleniya s posledeystviem” [On one damping problem for a nonstationary control system with aftereffect], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2019, **65**, No. 4, 547–556 (in Russian).
4. A. Sh. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, “Ob uspokoenii sistemy upravleniya s posledeystviem neytral’nogo tipa” [On damping of a control system with aftereffect of neutral type], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2020, **490**, No. 1, 81–84 (in Russian).
5. A. Sh. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, “Ob odnoy kraevoy zadache dlya sistemy differentsial’no-raznostnykh uravneniy zapazdyvayushchego tipa” [On one boundary-value problem for a system of differential-difference equations of retarded type], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2022, **58**, No. 6, 747–755 (in Russian).
6. N. Dunford and J. Schwartz, *Lineynye operatory. T. II. Spektral’naya teoriya. Samosopryazhennyye operatory v gil’bertovom prostranstve* [Linear Operators. Part II: Spectral Theory. Self-Adjoint Operators in Hilbert Space], Mir, Moscow, 1966 (Russian translation).



7. N. N. Krasovskii, *Teoriya upravleniya dvizheniem* [Theory of Motion Control], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
8. A. V. Kryazhimskii, V. I. Maksimov, and Yu. S. Osipov, “O pozitsionnom modelirovanii v dinamicheskikh sistemakh” [About positional modeling in dynamic systems], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1983, **47**, No. 6, 883–890 (in Russian).
9. D. D. Leonov, “K zadache ob uspokoenu sistemy upravleniya s posledeystviem” [To the damping problem for a control system with aftereffect], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **37**, 28–37 (in Russian).
10. Yu. S. Osipov, “O stabilizatsii upravlyaemykh sistem s zapazdyvaniem” [On stabilization of controllable systems with delay], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1965, **1**, No. 5, 605–618 (in Russian).
11. A. L. Skubachevskii, “K zadache ob uspokoenu sistemy upravleniya s posledeystviem” [To the damping problem for a control system with aftereffect], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1994, **335**, No. 2, 157–160 (in Russian).
12. A. S. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, “Damping problem for multidimensional control system with delays,” *Distrib. Comput. Commun. Networks*, 2016, **678**, 612–623.
13. H. T. Banks and G. A. Kent, “Control of functional differential equations of retarded and neutral type to target sets in function space,” *SIAM J. Control*, 1972, **10**, No. 4, 567–593.
14. G. A. Kent, “A maximum principle for optimal control problems with neutral functional differential systems,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1971, **77**, No. 4, 565–570.
15. A. L. Skubachevskii, *Elliptic functional differential equations and applications*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997.

A. Sh. Adkhamova  
RUDN University, Moscow, Russia  
E-mail: [adkhamova\\_ash@pfur.ru](mailto:adkhamova_ash@pfur.ru)

A. L. Skubachevskii  
RUDN University, Moscow, Russia  
E-mail: [alskubachevskii@yandex.ru](mailto:alskubachevskii@yandex.ru)

УДК 517.929

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-201-214

EDN: XYLGМК

## ТРЕТЬЯ СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ В ОГРАНИЧЕННОЙ ОБЛАСТИ

В. В. Ахлынина

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

**Аннотация.** Рассматриваются сильно эллиптические дифференциально-разностные уравнения со смешанными краевыми условиями, когда на части границы заданы однородные условия Дирихле, а на другой части границы — краевые условия третьего рода. Показана взаимосвязь таких задач с нелокальными смешанными задачами для сильно эллиптических дифференциальных уравнений. Показана их однозначная разрешимость, гладкость обобщенных решений.

**Ключевые слова:** дифференциально-разностное уравнение, эллиптическое уравнение, смешанные краевые условия, краевые условия Дирихле, краевые условия третьего рода.

**Заявление о конфликте интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Благодарности и финансирование.** Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Мегагрант, соглашение № 075-15-2022-1115).

**Для цитирования:** В. В. Ахлынина. Третья смешанная краевая задача для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений в ограниченной области // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 2. С. 201–214. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-201-214>

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения рассматривались в работах многих математиков: Ф. Хартмана и Г. Стампакья [10], А. Б. Антоновича [1], В. С. Рабиновича [4] и др. Интерес к этим уравнениям связан с их важными приложениями: к теории многослойных пластин и оболочек [13–15], к нелинейной оптике [7], к теории многомерных диффузионных процессов [15], к теории нелокальных эллиптических задач [2, 7–9, 15], возникающих в теории плазмы, к проблеме Като о квадратном корне из оператора [7, 11, 16] и др.

Общая теория эллиптических функционально-дифференциальных уравнений построена в работах А. Л. Скубачевского и его учеников [5, 7, 15], см. также имеющуюся там библиографию.

В работе [12] исследуется смешанная краевая задача для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения в случае, когда на части границы заданы однородные условия Дирихле, а на другой части границы — краевые условия второго рода. В настоящей работе исследуется третья смешанная краевая задача для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения, когда на части границы заданы однородные условия Дирихле, а на другой части границы — краевые условия третьего рода. Установлена взаимосвязь такой задачи с нелокальной смешанной задачей для сильно эллиптического дифференциального уравнения. Доказаны теоремы об однозначной разрешимости и гладкости обобщенных решений таких задач.

## 2. СВОЙСТВА РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Рассмотрим вспомогательные результаты о свойствах разностных операторов. Доказательства см. в [15, гл. II].

**2.1.** Пусть  $Q \subset \mathbb{R}^n$  — ограниченная область с границей  $\partial Q \in C^\infty$  или  $Q = (0, d) \times G$ , где  $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$  — ограниченная область с границей  $\partial G \in C^\infty$ , если  $n \geq 3$ , и  $G = (a, b)$ , если  $n = 2$ .

Пусть  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$  — конечное множество векторов с целочисленными координатами. Через  $\mathcal{M}$  обозначим аддитивную группу, порожденную множеством  $\mathcal{M}$ , а через  $Q_r$  — открытые связные компоненты множества  $Q \setminus (\bigcup_{h \in \mathcal{M}} (\partial Q + h))$ .

**Определение 2.1.** Множество  $Q_r$  будем называть *подобластью*. Множество  $\mathcal{R}$  всех подобластей  $Q_r$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) — *разбиением* области  $Q$ .

Для множества подобластей  $Q_r$  справедливы следующие результаты:

- 1)  $\bigcup_r \partial Q_r = (\bigcup_{h \in \mathcal{M}} (\partial Q + h)) \cap \overline{Q}$ .
- 2)  $\bigcup_r \overline{Q_r} = \overline{Q}$ .
- 3) Для любых  $Q_{r_1}$  и  $h \in \mathcal{M}$  либо существует  $Q_{r_2}$  такое, что  $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$ , либо  $Q_{r_1} + h \subset \mathbb{R}^n \setminus \overline{Q}$ .

Разбиение  $\mathcal{R}$  естественным образом распадается на непересекающиеся *классы*: подобласти  $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathcal{R}$  принадлежат одному и тому же классу, если существует вектор  $h \in \mathcal{M}$ , для которого  $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$ . Обозначим подобласти  $Q_r$  через  $Q_{sl}$ , где  $s$  — номер класса ( $s = 1, 2, \dots$ ), а  $l$  — порядковый номер данной подобласти в  $s$ -м классе. Очевидно, что каждый класс состоит из конечного числа  $N = N(s)$  подобластей  $Q_{sl}$ . Будем предполагать, что множество различных классов конечно. Обозначим число различных классов через  $s_1$ .

**2.2.** Введем множество

$$\mathcal{K} = \bigcup_{h_1, h_2 \in \mathcal{M}} \{\overline{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap \overline{[(\partial Q + h_2) \setminus (\partial Q + h_1)]}\}. \quad (2.1)$$

Будем предполагать, что множество  $\mathcal{K} \cap \partial Q$  имеет нулевую  $(n-1)$ -мерную меру Лебега  $\mu_{n-1}(\cdot)$ . Однако в общем случае может оказаться, что  $\mu_{n-1}(\mathcal{K} \cap \partial Q) \neq 0$ , см. [15, пример 7.6].

Граница  $\partial Q$  разбивается множеством  $\mathcal{K}$  на открытые связные в топологии  $\partial Q$  компоненты множества  $\partial Q \setminus \mathcal{K}$ , которые мы будем обозначать  $\Gamma_p$ .

Можно показать, что если  $(\Gamma_p + h) \cap \overline{Q} \neq \emptyset$  при некотором  $h \in \mathcal{M}$ , то либо  $\Gamma_p + h \subset Q$ , либо существует  $\Gamma_r \subset \partial Q \setminus \mathcal{K}$  такое, что  $\Gamma_p + h = \Gamma_r$ . Отсюда следует, что множество  $\{\Gamma_p + h : \Gamma_p + h \subset \overline{Q}, p = 1, 2, \dots; h \in \mathcal{M}\}$  можно разбить на классы следующим образом: множества  $\Gamma_{p_1} + h_1$  и  $\Gamma_{p_2} + h_2$  принадлежат одному и тому же классу, если:

- 1) существует  $h \in \mathcal{M}$  такое, что  $\Gamma_{p_1} + h_1 = \Gamma_{p_2} + h_2 + h$ , и
- 2) в случае  $\Gamma_{p_1} + h_1, \Gamma_{p_2} + h_2 \subset \partial Q$  направления внешних нормалей к  $\partial Q$  в точках  $x \in \Gamma_{p_1} + h_1$  и  $x - h \in \Gamma_{p_2} + h_2$  совпадают.

Будем предполагать, что число различных классов конечно и равно  $r_1$ .

Очевидно, что множество  $\Gamma_p \subset \partial Q$  может принадлежать лишь одному классу, а множество  $\Gamma_p + h \subset Q$  — не более, чем двум классам. Будем обозначать множества  $\Gamma_p + h$  через  $\Gamma_{rj}$ , где  $r = 1, 2, \dots, r_1$  — номер класса,  $j$  — номер элемента в данном классе ( $1 \leq j \leq J = J(r)$ ). Не ограничивая общности, будем считать, что  $\Gamma_{r1}, \dots, \Gamma_{rJ_0} \subset Q$ ,  $\Gamma_{r, J_0+1}, \dots, \Gamma_{rJ} \subset \partial Q$  ( $0 \leq J_0 = J_0(r) < J(r)$ ).

Из определения множества  $\mathcal{K}$  вытекают следующие утверждения.

**Лемма 2.1.** Для любого  $\Gamma_{rj} \subset \partial Q$  существует подобласть  $Q_{sl}$  такая, что  $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{sl}$ ; при этом  $\Gamma_{rj} \cap \partial Q_{s_1 l_1} = \emptyset$ , если  $(s_1, l_1) \neq (s, l)$ .

**Лемма 2.2.** Для любого  $r = 1, 2, \dots, r_1$  существует единственное  $s = s(r)$  такое, что  $N(s) = J(r)$ , и после некоторой перенумерации  $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$  ( $l = 1, \dots, N(s)$ ).

**Лемма 2.3.** Для любого  $\Gamma_{rj} \subset Q$  существуют  $Q_{s_1 l_1}$  и  $Q_{s_2 l_2}$  такие, что  $Q_{s_1 l_1} \neq Q_{s_2 l_2}$ ,  $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{s_1 l_1} \cap \partial Q_{s_2 l_2}$  и  $\Gamma_{rj} \cap \partial Q_{s_3 l_3} = \emptyset$ , если  $(s_3, l_3) \neq (s_1, l_1), (s_2, l_2)$ .

**2.3.** Рассмотрим разностный оператор  $R : L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ , определенный по формуле

$$Ru(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_h u(x+h), \quad (2.2)$$

где  $a_h \in \mathbb{C}$ ,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ .

Введем оператор  $R_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ , действующий по формуле

$$R_Q = P_Q R I_Q, \quad (2.3)$$

где  $I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$  — оператор продолжения функций из  $L_2(Q)$  нулем в  $\mathbb{R}^n \setminus Q$ , а  $P_Q : L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(Q)$  — оператор сужения функций из  $L_2(\mathbb{R}^n)$  на  $Q$ .

Легко показать, что операторы  $R_Q, R_Q^* : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$  ограничены и

$$R_Q^* = P_Q R^* I_Q, \quad R^* u(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} \overline{a_h} u(x-h).$$

Для каждого класса  $s$  определим объединение всех его подобластей как  $\Omega_s := \bigcup_{l=1}^{N(s)} Q_{sl}$ . Обозначим через  $L_2(\Omega_s)$  подпространство функций в  $L_2(Q)$ , равных нулю вне  $\Omega_s$ . Обозначим через  $P_s : L_2(Q) \rightarrow L_2(\Omega_s)$  оператор ортогонального проектирования на  $L_2(\Omega_s)$ . Можно показать, что

$$L_2(Q) = \bigoplus_s L_2(\Omega_s). \quad (2.4)$$

Более того, справедливо следующее утверждение.

**Лемма 2.4.**  $L_2(\Omega_s)$  — инвариантное подпространство оператора  $R_Q$ .

Введем изоморфизм гильбертовых пространств  $U_s : L_2(\Omega_s) \rightarrow L_2^N(Q_{s1})$  по формуле

$$(U_s u)_l(x) = u(x+h_{sl}) \quad (x \in Q_{s1}), \quad (2.5)$$

где  $l = 1, \dots, N = N(s)$ ,  $h_{sl}$  такое, что  $Q_{s1} + h_{sl} = Q_{sl}$  ( $h_{s1} = 0$ ), и  $L_2^N(Q_{s1}) = \prod_l L_2(Q_{s1})$ .

Справедлива следующая лемма, см. [15, лемма 8.6].

**Лемма 2.5.** Оператор  $R_{Q_s} : L_2^N(Q_{s1}) \rightarrow L_2^N(Q_{s1})$ , определяемый формулой

$$R_{Q_s} = U_s R_Q U_s^{-1}, \quad (2.6)$$

является оператором умножения на матрицу  $R_s$  порядка  $N(s) \times N(s)$  с элементами вида

$$r_{ij}^s = \begin{cases} a_h & (h = h_{sj} - h_{si} \in \mathcal{M}), \\ 0 & (h_{sj} - h_{si} \notin \mathcal{M}). \end{cases} \quad (2.7)$$

**Определение 2.2.** Будем называть разностный оператор  $R_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$  невырожденным, если  $0 \notin \sigma(R_Q)$ . В противном случае будем называть его вырожденным.

**Замечание 2.1.** Из леммы 2.5 следует, что оператор  $R_Q$  является невырожденным в том случае, когда все матрицы  $R_s$  ( $s = 1, \dots, s_1$ ) имеют отличные от нуля определители. Для невырожденного оператора  $R_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$  существует обратный оператор  $R_Q^{-1} : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ , имеющий вид

$$R_Q^{-1} = \sum_s U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s. \quad (2.8)$$

**Пример 2.1.** Пусть  $Q = \left(0, 2\frac{1}{3}\right) \times (0, 1)$ , разностный оператор  $R : L_2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^2)$  имеет вид

$$(Ru)(x) = a_{-2}u(x_1 - 2, x_2) + a_{-1}u(x_1 - 1, x_2) + a_0u(x_1, x_2) + a_1u(x_1 + 1, x_2) + a_2u(x_1 + 2, x_2).$$

Тогда  $\mathcal{M} = \{(-2, 0); (-1, 0); (0, 0); (1, 0); (2, 0)\}$ ,  $M = \{(j, 0) \mid j \in \mathbb{Z}\}$ . Множество  $\mathcal{H}$  состоит из двенадцати точек:  $(j, 0); (j + \frac{1}{3}, 0); (j, 1); (j + \frac{1}{3}, 1)$  ( $j = 0, 1, 2$ ). Сдвиги, порожденные разностным оператором, разбивают область  $Q$  на два класса подобластей (см. рис. 1):

- 1)  $Q_{11} = (0, \frac{1}{3}) \times (0, 1)$ ,  $Q_{12} = (1, 1\frac{1}{3}) \times (0, 1)$ ,  $Q_{13} = (2, 2\frac{1}{3}) \times (0, 1)$ ;
- 2)  $Q_{21} = (\frac{1}{3}, 1) \times (0, 1)$ ,  $Q_{22} = (1\frac{1}{3}, 2) \times (0, 1)$ .

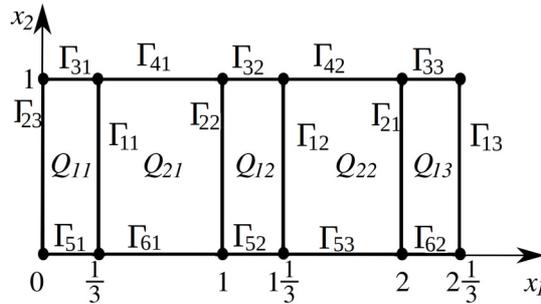


Рис. 1

Разностному оператору  $R$  соответствуют матрицы

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_{-1} & a_0 & a_1 \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}.$$

### 3. РАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

**3.1.** Пусть  $W_2^k(Q)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , — пространство Соболева комплекснозначных функций из  $L_2(Q)$ , имеющих все обобщенные производные вплоть до  $k$ -го порядка из  $L_2(Q)$  со скалярным произведением

$$(u, v)_{W_2^k(Q)} = \sum_{|\alpha| \leq k} \int_Q \mathcal{D}^\alpha u \cdot \overline{\mathcal{D}^\alpha v} dx,$$

где  $\mathcal{D}^\alpha = \mathcal{D}_1^{\alpha_1} \dots \mathcal{D}_n^{\alpha_n}$ ,  $\mathcal{D}_j = -i\partial/\partial x_j$ ,  $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ ,  $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$ .

Обозначим через  $\dot{W}_2^k(Q)$  замыкание в пространстве  $W_2^k(Q)$  множества  $C_0^\infty(Q)$  финитных, бесконечно дифференцируемых в  $Q$  функций с компактными носителями.

Пусть  $S \subset \overline{Q}$  —  $(n - 1)$ -мерная поверхность класса  $C^k$ . Через  $W_2^{k-\frac{1}{2}}(S)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ , обозначим пространство следов функций из  $W_2^k(Q)$  с нормой

$$\|\phi\|_{W_2^{k-\frac{1}{2}}(S)} = \inf \|u\|_{W_2^k(Q)} \quad (u \in W_2^k(Q) : u|_S = \phi).$$

Следующая лемма доказывается аналогично результату [15, лемма 8.15].

**Лемма 3.1.** Пусть для некоторых  $s = 1, \dots, s_1$ ,  $l = 1, \dots, N(s)$ , функция  $u \in L_2(Q)$  принадлежит пространству  $W_2^k(Q_{sl})$ . Тогда функция  $R_Q u$  также принадлежит пространству  $W_2^k(Q_{sl})$  и выполняется оценка нормы

$$\|R_Q u\|_{W_2^k(Q_{sl})} \leq c_1 \sum_{j=1}^N \|u\|_{W_2^k(Q_{sj})}. \tag{3.1}$$

Если, кроме того,  $\det R_s \neq 0$  для всех  $s = 1, 2, \dots, s_1$ , то существует ограниченный обратный оператор  $R_Q^{-1} : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ , функция  $R_Q^{-1} u$  также принадлежит пространству  $W_2^k(Q_{sl})$ , и выполняется оценка нормы

$$\|R_Q^{-1} u\|_{W_2^k(Q_{sl})} \leq c_2 \sum_{j=1}^N \|u\|_{W_2^k(Q_{sj})}. \tag{3.2}$$

Здесь  $c_1, c_2 > 0$  — константы, не зависящие от  $u$ .

Обозначим через  $\dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$  подпространство функций из пространства  $W_2^1(Q)$ , удовлетворяющих краевым условиям

$$u|_{\Gamma_{rl}} = 0 \quad (r \in B, l = J_0 + 1, \dots, J), \quad (3.3)$$

где  $J_0 = J_0(r)$ ,  $J = J(r)$ ,  $B = \{r : J_0(r) > 0\}$ ;  $\Gamma = \{\Gamma_{rl}\}$ ,  $r \in B$ ,  $l = J_0 + 1, \dots, J$ .

Справедлива следующая лемма, см. [12, лемма 3.2].

**Лемма 3.2.** *Разностный оператор  $R_Q$  непрерывно отображает  $\dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$  в  $W_2^1(Q)$ , при этом для любой функции  $u \in \dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$  справедливо равенство*

$$(R_Q u)_{x_j} = R_Q u_{x_j} \quad (j = 1, \dots, n). \quad (3.4)$$

**3.2.** Ниже мы приведем результат об осуществляемом регулярным разностным оператором изоморфизме пространства  $\dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$  и подпространства функций в  $W_2^1(Q)$ , удовлетворяющих нелокальным краевым условиям. Этот результат используется, чтобы установить связь между смешанной краевой задачей для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения и эллиптическим дифференциальным уравнением со смешанными нелокальными краевыми условиями.

В силу леммы 2.2 для любого  $r = 1, 2, \dots, r_1$  существует единственный класс  $s = s(r)$  такой, что  $N(s) = J(r)$ , и можно перенумеровать подобласти  $s$ -го класса так, чтобы  $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$  ( $l = 1, \dots, N(s)$ ).

Введем матрицы  $R_s^1$ , получаемые из матриц  $R_s$  путем вычеркивания последних  $N - J_0$  столбцов, и матрицы  $R_s^0$  порядка  $J_0 \times J_0$ , получаемые из матрицы  $R_s^1$  путем вычеркивания последних  $N - J_0$  строк.

Пусть  $e_i^r$  ( $i = 1, \dots, N$ ) —  $i$ -я строка матрицы  $R_s^1$ .

**Определение 3.1.** Будем называть разностный оператор  $R_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$  *регулярным*, если матрицы  $R_s$  ( $s = 1, \dots, s_1$ ) и  $R_s^0$  ( $s = s(r)$ ,  $r \in B$ ) невырождены.

**Замечание 3.1.** Заметим, что если оператор  $R_Q$  регулярный, то матрицы  $R_s^0$  невырождены. Следовательно, существует такие коэффициенты  $\gamma_{ij}^r$  ( $r \in B$ ;  $i = J_0(r) + 1, \dots, J(r)$ ;  $j = 1, \dots, J_0(r)$ ), что выполняются следующие соотношения:

$$e_l^r = \sum_{j=1}^{J_0} \gamma_{ij}^r e_j^r \quad (l = J_0 + 1, \dots, J(r)). \quad (3.5)$$

Введем  $W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$  — подпространство функций в  $W_2^1(Q)$ , удовлетворяющих нелокальным краевым условиям

$$w(x + h_{sl})|_{\Gamma_{r1}} = \sum_{j=1}^{J_0} \gamma_{ij}^r w(x + h_{sj})|_{\Gamma_{r1}} \quad (r \in B, l = J_0 + 1, \dots, J), \quad (3.6)$$

где  $\gamma_{ij}^r \in \mathbb{C}$ ,  $\gamma = \{\gamma_{ij}^r\}$ .

Справедлива следующая теорема, см. [12, теорема 3.1].

**Теорема 3.1.** *Регулярный разностный оператор  $R_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$  непрерывно и взаимно однозначно отображает  $\dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$  на  $W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$  для некоторых  $\gamma = \{\gamma_{ij}^r\}$ .*

**3.3.** Рассмотрим некоторое  $r \in B$  и соответствующие  $J = J(r)$  и  $J_0 = J_0(r)$ . По лемме 2.2 существует единственный класс  $s = s(r)$  такой, что  $N(s) = J(r)$  и элементы  $\Gamma_{rl}$  лежат в  $\partial Q_{sl}$  для всех  $l = 1, \dots, N(s)$  после некоторой перенумерации подобластей  $s$ -го класса. В силу леммы 2.3 существуют такие  $p = p(r)$  и  $m = m(r)$ , что  $\Gamma_{r1} \subset \partial Q_{pm}$ ,  $Q_{pm} \neq Q_{s1}$ . Перенумеруем подобласти  $p$ -го класса таким образом, чтобы  $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{pl}$  ( $l = 1, \dots, J_0$ ),  $J_0 \leq N(p)$ .

Введем матрицу  $R'_s$ , полученную из матрицы  $R_s$  вычеркиванием последних  $N(s) - J_0$  строк и первых  $J_0$  столбцов. Если  $N(p) > J_0$ , введем также матрицу  $R'_p$ , полученную из матрицы  $R_p$  вычеркиванием последних  $N(p) - J_0$  строк и первых  $J_0$  столбцов. Если  $N(p) > J_0$ , обозначим через  $T_r = (R'_s | R'_p)$  матрицу размера  $J_0 \times (N(s) + N(p) - 2J_0)$ , полученную объединением столбцов матриц  $R'_s$  и  $R'_p$ .

**Замечание 3.2.** Пусть  $N(p) > J_0$ . Рассмотрим множество  $\Gamma_{r1} + h_{pk}$  для некоторого  $J_0 + 1 \leq k \leq N(p)$ , где  $h_{pk}$  таково, что  $Q_{pk} = Q_{p1} + h_{pk}$ ,  $h_{p1} = 0$ . Из условия  $J_0 + 1 \leq k \leq N(p)$  следует, что  $\Gamma_{r1} + h_{pk} \neq \Gamma_{ri}$  для  $1 \leq i \leq J_0$ . Из соотношений  $\partial Q_{pk} = \partial Q_{p1} + h_{pk}$ ,  $\Gamma_{r1} + h_{pk} \subset \partial Q_{pk} \subset \overline{Q}$  и свойств множеств  $\Gamma_{rl}$  следует существование  $v$ -го класса  $\{\Gamma_{vl}\}$ ,  $v \neq r$ , такого, что  $\Gamma_{r1} + h_{pk} = \Gamma_{vt} \subset \partial Q$  для некоторого  $t$ , где  $1 \leq t \leq J(v)$ . Легко показать, что для такого класса значение  $J(v)$  совпадает с  $N(p)$  и можно перенумеровать множества  $\Gamma_{vl}$  и подобласти  $Q_{pl}$ , что  $\Gamma_{rl} = \Gamma_{vl} \subset Q$  ( $l = 1, \dots, J_0$ ),  $\Gamma_{vl} \subset \partial Q$  ( $l = J_0 + 1, \dots, N(p)$ ) и  $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{pl}$  ( $l = 1, \dots, N(p)$ ). Таким образом, матрица  $T_v$ , построенная для  $v$ -го класса, будет совпадать с матрицей  $T_r$  с точностью до перенумерации некоторых строк и столбцов. Отметим, что класс подобластей  $\{Q_{pk}\}$ ,  $k = 1, \dots, N(p)$ , может совпадать с перенумерованным классом  $\{Q_{sl}\}$ ,  $l = 1, \dots, N(s) = N(p)$ .

Справедлива следующая теорема, см. [12, теорема 3.2].

**Теорема 3.2.** Пусть оператор  $R_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$  регулярен, и пусть

$$\begin{cases} \text{для всех } r \in B \text{ таких, что } N(p) > J_0, \text{ столбцы матрицы } T_r \\ \text{линейно независимы, и для всех } r \in B \text{ таких, что } N(p) = J_0, \\ \text{столбцы матрицы } R'_s \text{ линейно независимы.} \end{cases} \quad (3.7)$$

Предположим также, что  $R_Q^{-1}(H_1) \subset W_2^1(Q)$ , где  $H_1$  — линейное подпространство в  $W_2^1(Q)$ . Тогда  $R_Q^{-1}(H_1) \subset \dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$  и  $H_1 \subset W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$ .

**Пример 3.1.** Рассмотрим разностный оператор  $R : L_2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^2)$ , заданный формулой

$$(Ru)(x) = 2u(x_1 - 1, x_2) + u(x_1, x_2) + u(x_1 + 1, x_2).$$

Пусть область  $Q = \left(0, 2\frac{1}{3}\right) \times (0, 1)$  (см. рис. 1).

Оператору  $R$  соответствуют матрицы

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Определители  $\det R_1 = -3$ ,  $\det R_2 = -1$  ненулевые, а значит оператор  $R_Q$  является регуляренным.

Подпространство  $\dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$  — подпространство функций в  $W_2^1(Q)$ , удовлетворяющих условиям  $u|_{x_1=0} = u|_{x_1=2\frac{1}{3}} = 0$ , а  $W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$  — подпространство функций в  $W_2^1(Q)$ , удовлетворяющих нелокальным краевым условиям

$$\begin{aligned} w|_{x_1=0} &= \gamma_{31}^2 w|_{x_1=1} + \gamma_{32}^2 w|_{x_1=2}, \\ w|_{x_1=2\frac{1}{3}} &= \gamma_{32}^1 w|_{x_1=1\frac{1}{3}} + \gamma_{31}^1 w|_{x_1=\frac{1}{3}}, \end{aligned}$$

где коэффициенты  $\gamma_{ij}^\pm$  определяются из системы алгебраических уравнений

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \gamma_{31}^2 + \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \gamma_{32}^2 &= \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \gamma_{32}^1 + \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \gamma_{31}^1 &= \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

т. е.  $\gamma_{31}^2 = -1$ ,  $\gamma_{32}^2 = 1$ ,  $\gamma_{31}^1 = -2$ ,  $\gamma_{32}^1 = 4$ .

Здесь  $\Gamma = \{(x_1, x_2) : x_1 = 0, x_2 \in (0, 1)\} \cup \{(x_1, x_2) : x_1 = 2\frac{1}{3}, x_2 \in (0, 1)\}$ ,  $\gamma = \{\gamma_{ij}^r\}$  ( $r = 1, 2$ ;  $i = 3$ ;  $j = 1, 2$ ).

Векторы  $c^1 = (0 \ 2)^T$  и  $c^2 = (1 \ 0)^T$  ненулевые, т. е. условие (3.7) выполняется. Пусть  $H_1$  — некоторое линейное подпространство в  $W_2^1(Q)$ . Тогда, в силу теоремы 3.2, если  $R_Q^{-1}(H_1) \subset W_2^1(Q)$ , то  $R_Q^{-1}(H_1) \subset \dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$  и  $H_1 \subset W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$ .

**Замечание 3.3.** Теорема 3.2 показывает, что для регулярного разностного оператора  $R_Q$  при дополнительном условии (3.7) на коэффициенты наличие «минимальной гладкости» функций из некоторого подпространства  $H_1$  и его прообраза  $R_Q^{-1}(H_1)$  означает, что функции из прообраза  $R_Q^{-1}(H_1)$  имеют нулевые следы на многообразиях  $\Gamma_{rl}$  ( $r \in B, l = J_0 + 1, \dots, J$ ), а функции из самого пространства  $H_1$  удовлетворяют нелокальным краевым условиям. Поэтому при рассмотрении смешанных краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений вида (4.1) естественно задавать однородные условия Дирихле на многообразиях  $\Gamma_{rl}$  ( $r \in B, l = J_0 + 1, \dots, J$ ) и краевые условия третьего рода на многообразиях  $\Gamma_{rl}$  ( $r \notin B, l = 1, \dots, J$ ). Такие задачи эквивалентны смешанным нелокальным краевым задачам для сильно эллиптических дифференциальных уравнений (см. раздел 4). Рассмотрение эллиптических дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями третьего рода на сдвигах многообразий  $\Gamma_{rl}$  ( $r \notin B, l = 1, \dots, J$ ) приводит к переопределенным задачам.

#### 4. СМЕШАННАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

**4.1.** Рассмотрим дифференциальный оператор

$$A = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j}. \quad (4.1)$$

Будем говорить, что оператор  $A$  *сильно эллиптический*, если выполняется условие

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij} \xi_i \xi_j > 0 \quad (0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n). \quad (4.2)$$

Здесь  $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$ .

Рассмотрим дифференциально-разностное уравнение

$$AR_Q u(x) = f_0(x) \quad (x \in Q) \quad (4.3)$$

со смешанными краевыми условиями

$$u|_{\Gamma_{rl}} = 0 \quad (r \in B, l = J_0(r) + 1, \dots, J(r)), \quad (4.4)$$

$$\left( \sum_{i,j} a_{ij} R_Q u_{x_j} \cos(\nu, x_i) + \sigma(x) R_Q u \right) \Big|_{\Gamma_{rl}} = 0 \quad (r \notin B, l = 1, \dots, J(r)), \quad (4.5)$$

где  $f_0 \in L_2(Q)$ ,  $\sigma \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $\sigma(x) = \sigma(x+h)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $h \in M$ , — вещественная неотрицательная функция,  $\nu$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $\Gamma_{rl}$ ,  $R_Q = P_Q R I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$  — ограниченный разностный оператор, оператор  $R$  задается формулой (2.2).

Будем предполагать, что матрицы  $R_s$ , соответствующие разностному оператору  $R_Q$ , удовлетворяют условию

$$R_s + R_s^* > 0 \quad (s = 1, \dots, s_1). \quad (4.6)$$

Далее в этом разделе будем предполагать, что условия (4.2), (4.6) выполнены. В таком случае уравнение (4.3) будем называть *сильно эллиптическим*.

**4.2.** Рассмотрим вопрос о разрешимости задачи (4.3)–(4.5).

**Определение 4.1.** Будем называть функцию  $u \in \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$  *обобщенным решением* задачи (4.3)–(4.5), если интегральное тождество

$$\sum_{i,j=1}^n (a_{ij} R_Q u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} + (\sigma R_Q u, v)_{L_2(\Gamma_\sigma)} = (f_0, v)_{L_2(Q)} \quad (4.7)$$

выполняется для любого  $v \in \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ .

Здесь  $(\sigma R_Q u, v)_{L_2(\Gamma_\sigma)} = ((\sigma R_Q u)|_{\Gamma_\sigma}, v|_{\Gamma_\sigma})_{L_2(\Gamma_\sigma)}$ ,  $\Gamma_\sigma = \cup \Gamma_{rl}$ ,  $r \notin B$ ,  $l = 1, \dots, J(r)$ . Всюду далее через  $(f, g)_{L_2(\Gamma_\sigma)}$  будем обозначать скалярное произведение следов функций  $f, g$ , т. е.  $(f, g)_{L_2(\Gamma_\sigma)} = (f|_{\Gamma_\sigma}, g|_{\Gamma_\sigma})_{L_2(\Gamma_\sigma)}$ .

Введем в пространстве  $L_2(Q)$  полуторалинейную форму  $a(u, v)$  с областью определения  $\mathcal{D}(a) = \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$  следующим образом:

$$a(u, v) = \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} R_Q u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} + (\sigma R_Q u, v)_{L_2(\Gamma_\sigma)}. \quad (4.8)$$

**Лемма 4.1.** Пусть выполняются условия (4.2), (4.6). Тогда в пространстве  $\mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$  можно ввести эквивалентное скалярное произведение по формуле

$$(u, v)'_{\mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)} = \operatorname{Re} a(u, v) \quad (u, v \in \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)). \quad (4.9)$$

*Доказательство.* В силу ограниченности операторов  $R_Q$  и  $R_Q^*$  в  $L_2(Q)$  и неравенства Коши—Буняковского для любых функций  $u, v$  из  $\mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$  справедливо неравенство

$$|\operatorname{Re} a(u, v)| \leq k_1 \|u\|_{W_2^1(Q)} \|v\|_{W_2^1(Q)}, \quad (4.10)$$

где  $k_1 > 0$  — постоянная, не зависящая от  $u$  и  $v$ .

С другой стороны, в силу (2.5)–(2.7) и (4.6) имеем

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} \left( \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} R_Q u_{x_j}, u_{x_i})_{L_2(Q)} \right) &= \operatorname{Re} \sum_s \sum_{i,j} (a_{ij} R_s (U_s P_s u)_{x_j}, (U_s P_s u)_{x_i})_{L_2^N(Q_{s1})} = \\ &= \sum_s \sum_{i,j} (a_{ij} (\sqrt{R_s^H} U_s P_s u)_{x_j}, (\sqrt{R_s^H} U_s P_s u)_{x_i})_{L_2^N(Q_{s1})} \geq \\ &\geq k_2 \sum_s \sum_i ((\sqrt{R_s^H} U_s P_s u)_{x_i}, (\sqrt{R_s^H} U_s P_s u)_{x_i})_{L_2^N(Q_{s1})} \geq k_3 \sum_i \|u_{x_i}\|_{L_2(Q)}^2, \end{aligned} \quad (4.11)$$

где  $k_2, k_3 > 0$  — постоянные, не зависящие от  $u$ ,  $R_s^H = (R_s + R_s^*)/2$ .

Очевидно, в пространстве  $\mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$  можно ввести эквивалентное скалярное произведение по формуле

$$(u, v)'_{\mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)} = \sum_i (u_{x_i}, v_{x_i})_{L_2(Q)} + \operatorname{Re}(\sigma R_Q u, v)_{L_2(\Gamma_\sigma)}. \quad (4.12)$$

Из (4.11), (4.12), для всех  $u \in \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$  имеем

$$\operatorname{Re} a(u, u) \geq k_4 \|u\|_{W_2^1(Q)}^2,$$

где  $k_4 > 0$  — постоянная, не зависящая от  $u$ .

Таким образом, формулой (4.9) действительно можно задать в  $\mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$  эквивалентное скалярное произведение.  $\square$

**Теорема 4.1.** Пусть выполняются условия (4.2), (4.6). Тогда для любой правой части  $f_0 \in L_2(Q)$  у задачи (4.3)–(4.5) существует единственное обобщенное решение  $u \in \mathring{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ , при этом

$$\|u\|_{W_2^1(Q)} \leq c_0 \|f_0\|_{L_2(Q)}, \quad (4.13)$$

где  $c_0 > 0$  — постоянная, не зависящая от  $f_0$ .

*Доказательство.* Представим полуторалинейную форму  $a(u, v)$  в виде:

$$a(u, v) = p(u, v) + i q(u, v), \quad (4.14)$$

где

$$p(u, v) = \sum_{i,j} \left( a_{ij} \frac{R_Q + R_Q^*}{2} u_{x_j}, v_{x_i} \right)_{L_2(Q)}, \quad (4.15)$$

$$q(u, v) = \sum_{i,j} \left( a_{ij} \frac{R_Q - R_Q^*}{2i} u_{x_j}, v_{x_i} \right)_{L_2(Q)}. \quad (4.16)$$

Из ограниченности операторов  $R_Q$  и  $R_Q^*$  в  $L_2(Q)$ , используя неравенства Коши—Буняковского и лемму 3.1, получим для любых  $u, v \in \dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$

$$|q(u, v)| \leq k_1 \|u\|'_{\dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)} \|v\|'_{\dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)}, \quad (4.17)$$

где  $k_1 > 0$  постоянная, не зависящая от  $u, v$ .

Отсюда в силу теоремы Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве и симметричности формы  $q(u, v)$  в  $\dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$  следует, что существует такой самосопряженный ограниченный оператор  $S : \dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q) \rightarrow \dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ , что

$$q(u, v) = (Su, v)'_{\dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)} \quad (u, v \in \dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)). \quad (4.18)$$

По теореме Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве существует линейный ограниченный оператор  $B : L_2(Q) \rightarrow \dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$  такой, что

$$(f_0, v)_{L_2(Q)} = (Bf_0, v)'_{\dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)} \quad (f_0 \in L_2(Q), v \in \dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)). \quad (4.19)$$

Из равенств (4.14)–(4.16), (4.18), (4.19) и леммы 3.1 получим, что равенство (4.7) эквивалентно интегральному тождеству

$$(u + iSu, v)'_{\dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)} = (Bf_0, v)'_{\dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)} \quad (v \in \dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)), \quad (4.20)$$

которое, в свою очередь, можно переписать в виде уравнения в  $\dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ :

$$(I + iS)u = Bf_0. \quad (4.21)$$

Очевидно, оператор  $S : \dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q) \rightarrow \dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$  является ограниченным и самосопряженным. Отсюда следует существование ограниченного обратного оператора для  $I + iS$  в  $\dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ . Таким образом, для любой  $f_0 \in L_2(Q)$  существует единственное обобщенное решение  $u = (I + iS)^{-1} Bf_0$  задачи (4.3)–(4.5), при этом имеет место оценка (4.13).  $\square$

**4.3.** Перейдем к вопросу о гладкости обобщенных решений задачи (4.3)–(4.5).

**Теорема 4.2.** Пусть выполнены условия (4.2), (4.6),  $u \in \dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$  — обобщенное решение задачи (4.3)–(4.5). Тогда  $u \in W_2^2(Q_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon)$  для любого  $\varepsilon > 0$  и всех  $s, l$  ( $s = 1, \dots, s_1; l = 1, \dots, N(s)$ ), где  $\mathcal{K}^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \text{dist}(x, \mathcal{K}) < \varepsilon\}$ .

*Доказательство.* Из неравенства (4.11) следует, что дифференциально-разностный оператор  $AR_Q$  удовлетворяет условиям теоремы 11.1 из гл. II в [15] о локальной гладкости обобщенных решений сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений в подобластях  $Q_{sl}$  и условиям теоремы 11.2 в [15] о гладкости вблизи части границы, на которой задается краевое условие Дирихле.

С другой стороны, можно показать гладкость обобщенного решения вблизи части границы, на которой задается краевое условие третьего рода, см. [3, теорема 2, §14].

Из этих утверждений получим  $u \in W_2^2(Q_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon)$ .  $\square$

**4.4.** Рассмотрим следствия из теоремы 4.2, объясняющие, в каком смысле обобщенное решение задачи (4.3)–(4.5) удовлетворяет уравнению (4.3) и краевому условию (4.5).

**Следствие 4.1.** Пусть выполняются условия (4.2), (4.6). Тогда обобщенное решение задачи (4.3)–(4.5)  $u \in \dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$  удовлетворяет уравнению (4.3) почти всюду в  $Q_{sl}$  ( $s = 1, \dots, s_1; l = 1, \dots, N(s)$ ).

*Доказательство.* В силу теоремы 4.2 и леммы 3.1  $R_Q u_{x_j} \in W_2^1(Q_{sl} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon)$  для любых  $\varepsilon > 0$  и  $s, l$ . Выберем произвольным образом  $s = s_0, l = l_0$  и область  $\Omega$  так, что  $\bar{\Omega} \subset Q_{s_0 l_0}, \partial\Omega \in C^\infty$ . Пусть

теперь  $\varepsilon > 0$  удовлетворяет условию  $\varepsilon < \text{dist}(\Omega, \partial Q_{s_0 l_0})$ . Тогда  $R_Q u_{x_j} \in W_2^1(\Omega)$ , следовательно, для любой функции  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ , интегрируя по частям в тождестве (4.7), получим

$$-\int_{\Omega} \sum_{i,j=1}^n (a_{ij} R_Q u_{x_j})_{x_i} \bar{v} dx = \int_{\Omega} f_0 \bar{v} dx, \quad (4.22)$$

где  $s = s_0, l = l_0$ .

В силу произвольности области  $\Omega$  и функции  $v$  мы убеждаемся, что уравнение (4.3) удовлетворяется почти всюду в  $Q_{s_0 l_0}$ .  $\square$

**Следствие 4.2.** Пусть выполняются условия (4.2), (4.6), и пусть  $u \in \dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$  — обобщенное решение задачи (4.3)–(4.5). Тогда след функции  $\sum_{i,j} a_{ij} R_Q u_{x_j} \cos(\nu, x_i) + \sigma(x) R_Q u$  определен на поверхности  $M_{r_l \varepsilon} := (\Gamma_{r_l} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon)$  для любого  $\varepsilon > 0$  и всех  $r, l, r \notin B, l = 1, \dots, J(r)$ , при этом краевое условие второго рода (4.5) выполняется почти всюду на этой поверхности.

*Доказательство.* Выберем произвольным образом  $r = r_0 \notin B$  и  $l = l_0, 1 \leq l \leq J(r_0)$  и функцию  $\tilde{u}(x) = \sum_{i,j} a_{ij} R_Q u_{x_j} \cos(\nu, x_i) + \sigma R_Q u$ . По лемме 2.1 существует единственное  $s^* = s^*(r)$  такое, что  $N(s^*) = J(r^*)$ , и после некоторой перенумерации подобластей  $Q_{s^* l}$  будут справедливы вложения  $\Gamma_{r^* l} \subset \partial Q_{s^* l}$  ( $l = 1, \dots, N(s^*)$ ). Возьмем произвольную функцию  $v \in \dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$  с носителем в  $\overline{Q_{s^* l^*}} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon$ . В силу леммы 3.1, функция  $\tilde{u}$  принадлежит пространству  $W_2^1(Q_{s^* l^*} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon)$ , а ее след определен на поверхности  $\partial Q_{s^* l^*} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon$ .

Выберем произвольным образом  $r = r_0 \notin B$  и  $l = l_0, 1 \leq l \leq J(r_0)$ . В силу леммы 2.2 существует единственное  $s_0 = s_0(r)$  такое, что  $N(s_0) = J(r_0)$  и после некоторой перенумерации подобластей  $Q_{s_0 l}$  будут справедливы вложения  $\Gamma_{r_0 l} \subset \partial Q_{s_0 l}$  ( $l = 1, \dots, N(s_0)$ ). В силу теоремы 4.2 мы можем проинтегрировать по частям левую часть выражения (4.7) для любой функции  $v \in \dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$  такой, что  $\text{supp } v \subset \overline{Q_{s_0 l_0}} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon$ . По теореме 4.2 и лемме 3.1 получим, что  $\tilde{u}(x) \in W_2^1(Q_{s_0 l_0} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon)$  и след функции  $\tilde{u}(x)$  определен на поверхности  $\partial Q_{s_0 l_0} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon$ . Следовательно, используя следствие 4.1 и равенства  $v|_{\Gamma_{r_l}} = 0$  ( $r \in B, l = J_0 + 1, \dots, J$ ), получим

$$\int_{\partial Q_{s_0 l_0} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon} \tilde{u}(x)|_{\partial Q_{s_0 l_0} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon} \cdot \bar{v}|_{\partial Q_{s_0 l_0} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon} dS = 0. \quad (4.23)$$

В силу произвольности выбора функции  $v$  мы видим, что краевое условие (4.5) выполняется почти всюду на поверхности  $\partial Q_{s_0 l_0} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon$ , в том числе на  $M_{r_0 l_0 \varepsilon}$ .  $\square$

## 5. ПРИЛОЖЕНИЯ К ТЕОРИИ НЕЛОКАЛЬНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

**5.1.** Рассмотрим приложения результатов предыдущего раздела о разрешимости смешанной краевой задачи для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения к исследованию нелокальной смешанной задачи для сильно эллиптического дифференциального уравнения.

Рассмотрим дифференциальный оператор

$$A = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial}{\partial x_i} a_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j},$$

где  $a_{ij} = a_{ji} \in \mathbb{R}$  ( $i, j = 1, \dots, n$ ).

Будем предполагать, что оператор  $A$  сильно эллиптический, т. е. выполняется условие (4.2).

Рассмотрим уравнение

$$Aw(x) = f_0(x) \quad (x \in Q) \quad (5.1)$$

с нелокальными смешанными краевыми условиями

$$w(x + h_{sl})|_{\Gamma_{r_1}} = \sum_{j=1}^{J_0} \gamma_{lj}^r w(x + h_{sj})|_{\Gamma_{r_1}} \quad (r \in B, l = J_0 + 1, \dots, J), \quad (5.2)$$

$$\left( \sum_{i,j} a_{ij} w_{x_j} \cos(\nu, x_i) + \sigma(x) w \right) \Big|_{\Gamma_{r_l}} = 0 \quad (r \notin B, l = 1, \dots, J). \quad (5.3)$$

Здесь  $f_0 \in L_2(Q)$ ,  $\sigma \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $\sigma(x) = \sigma(x+h)$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $h \in \mathbf{M}$  — вещественная неотрицательная функция,  $\nu$  — единичный вектор внешней нормали к поверхности  $\Gamma_{rl}$ , а  $\gamma_{ij}^r$  — комплексные числа.

Будем предполагать, что выполняется следующее условие:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Для заданных чисел } \gamma_{ij}^r \in \mathbb{C} \ (r \in B; i = J_0 + 1, \dots, J; \\ j = 1, \dots, J_0) \text{ существуют числа } a_h \ (h \in \mathcal{M}) \text{ такие, что} \\ \text{выполняются равенства (3.5), при этом матрицы} \\ R_s \ (s = 1, \dots, s_1) \text{ вида (2.7) удовлетворяют условию (4.6).} \end{array} \right. \quad (5.4)$$

Напомним, что через  $W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$  мы обозначили подпространство функций в  $W_2^1(Q)$ , удовлетворяющих нелокальным краевым условиям (3.6).

**Определение 5.1.** Будем называть функцию  $w \in W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$  *обобщенным решением* нелокальной смешанной краевой задачи (5.1)–(5.3), если интегральное тождество

$$\sum_{i,j} (a_{ij} w_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} + (\sigma w, v)_{L_2(\Gamma_\sigma)} = (f_0, v)_{L_2(Q)} \quad (5.5)$$

выполняется для любого  $v \in \dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ .

**Теорема 5.1.** Пусть выполняются условия (4.2), (5.4). Тогда для любой  $f_0 \in L_2(Q)$  существует единственное обобщенное решение задачи (5.1)–(5.3), при этом

$$\|w\|_{W_2^1(Q)} \leq c_1 \|f_0\|_{L_2(Q)}, \quad (5.6)$$

где  $c_1 > 0$  — постоянная, не зависящая от  $f_0$ .

*Доказательство.* В силу условий (5.4), оператор  $R_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$  регулярен. Следовательно, в силу теоремы 3.1  $R_Q : \dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q) \rightarrow W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$  — изоморфизм. Поэтому интегральное тождество (5.5) примет вид

$$\sum_{i,j} (a_{ij} (R_Q u)_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} + (\sigma (R_Q u), v)_{L_2(\Gamma_\sigma)} = (f_0, v)_{L_2(Q)}, \quad (5.7)$$

где  $u = R_Q^{-1} w \in \dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$ .

В силу леммы 3.2 интегральное тождество (5.7) можно записать в виде

$$\sum_{i,j} (a_{ij} R_Q u_{x_j}, v_{x_i})_{L_2(Q)} + (\sigma R_Q u, v)_{L_2(\Gamma_\sigma)} = (f_0, v)_{L_2(Q)}, \quad (5.8)$$

т. е. функция  $u \in \dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$  является обобщенным решением задачи (4.3)–(4.5). У такой задачи существует единственное обобщенное решение  $u \in \dot{W}_{2,\Gamma}^1(Q)$  в силу теоремы 4.1, при этом выполняется априорная оценка (4.13). Отсюда получаем, что у задачи (5.1)–(5.3) также существует единственное обобщенное решение  $w = R_Q u \in W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$ , при этом в силу леммы 3.2 и неравенства (4.13) для некоторой независимой от  $u$  константы  $k_1$  имеем

$$\|w\|_{W_2^1(Q)} = \|R_Q u\|_{W_2^1(Q)} \leq k_1 \|u\|_{W_2^1(Q)} \leq k_1 c_0 \|f_0\|_{L_2(Q)}. \quad (5.9)$$

Таким образом, доказано неравенство (5.6).  $\square$

**5.2.** Докажем теперь теорему о гладкости обобщенных решений задачи (5.1)–(5.3).

**Теорема 5.2.** Пусть выполнены условия (4.2), (5.4), и пусть  $w \in W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$  — обобщенное решение задачи (5.1)–(5.3). Тогда  $w \in W_2^2(Q \setminus (\partial Q \cap \mathcal{K})^\varepsilon)$  для любого  $\varepsilon > 0$ .

*Доказательство.* В силу теоремы о гладкости обобщенных решений эллиптических краевых задач вблизи гладкого куска границы имеем  $w \in W_2^2(\Omega_1)$ , где  $\Omega_1 = \{x \in Q : \text{dist}(x, \Gamma_{rl}) \geq \delta \ \forall r \in B, l = 1, \dots, J_0(r)\}$  для любого достаточно малого  $\delta > 0$ . Отсюда и из краевых условий (5.2) следует, что

$$w|_{\Gamma_{rj} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon} \in W_2^{3/2}(\Gamma_{rj} \setminus \mathcal{K}^\varepsilon), \quad j = 1, \dots, J_0.$$

Применяя теорему о гладкости обобщенных решений эллиптических краевых задач с неоднородными краевыми условиями вблизи гладкого куска границы, получим, что  $w \in W_2^2(\Omega_2)$ ,

где  $\Omega_2 = \{x \in Q : \text{dist}(x, \Gamma_{rl}) \geq \delta \forall r \notin B, l = 1, \dots, J(r)\}$ . Полагая  $\delta = \varepsilon/\sqrt{2}$ , имеем  $w \in W_2^2(Q \setminus (\partial Q \cap \mathcal{H}^\varepsilon))$ .  $\square$

**5.3.** Аналогично доказательству следствий 4.1 и 4.2 можно доказать следующие утверждения, вытекающие из теоремы 5.2.

**Следствие 5.1.** Пусть выполняются условия (4.2), (5.4), и пусть  $w \in W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$  — обобщенное решение задачи (5.1)–(5.3). Тогда  $w(x)$  удовлетворяет уравнению (5.1) почти всюду в  $Q$ .

**Следствие 5.2.** Пусть выполняются условия (4.2), (5.4), и пусть  $w \in W_{2,\Gamma,\gamma}^1(Q)$  — обобщенное решение задачи (5.1)–(5.3). Тогда для любого  $\varepsilon > 0$  и всех  $r, l, r \notin B, l = 1, \dots, J(r)$  на поверхности  $M_{rl\varepsilon} = \Gamma_{rl} \setminus \mathcal{H}^\varepsilon$  определен след функции  $\sum_{i,j} a_{ij} w_{x_j} \cos(\nu, x_i) + \sigma w$ , при этом краевое условие (5.3) выполняется почти всюду на этой поверхности.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Антонец А. Б. Об индексе и нормальной разрешимости общей эллиптической краевой задачи с конечной группой сдвигов на границе // Дифф. уравн. — 1972. — 8, № 2. — С. 309–317.
2. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. — 1969. — 185, № 4. — С. 739–740.
3. Каменский Г. А., Скубачевский А. Л. Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. — М.: МАИ, 1992.
4. Рабинович В. С. О разрешимости дифференциально-разностных уравнений на  $\mathbb{R}^n$  и в полупространстве // Докл. АН СССР. — 1978. — 243, № 5. — С. 1134–1137.
5. Россовский Л. Е. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — 54. — С. 3–138.
6. Скубачевский А. Л. О спектре некоторых нелокальных эллиптических краевых задач // Мат. сб. — 1982. — 117, № 4. — С. 548–558.
7. Скубачевский А. Л. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Усп. мат. наук. — 2016. — 71, № 5. — С. 3–112.
8. Browder F. Non-local elliptic boundary value problems // Am. J. Math. — 1964. — 86, № 4. — С. 735–750.
9. Carleman T. Sur la théorie des équations intégrales et ses applications // Verhandlungen des Internat. Math. Kongr. Zürich. — 1932. — 1. — С. 138–151.
10. Hartman F., Stampacchia G. On some non-linear elliptic differential-functional equations // Acta Math. — 1966. — 115. — С. 271–230.
11. Kato T. Fractional powers of dissipative operators // J. Math. Soc. Jpn. — 1961. — 13, № 3. — С. 246–274.
12. Liiko V. V. Strongly elliptic differential-difference equations with mixed boundary conditions in a bounded domain // Complex Var. Elliptic Equ. — 2023. — 68, № 12. — С. 2034–2058.
13. Onanov G. G., Skubachevskii A. L. Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells // Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — 12, № 6. — С. 192–207.
14. Onanov G. G., Tsvetkov E. L. On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory // Russ. J. Math. Phys. — 1995. — 3, № 4. — С. 491–500.
15. Skubachevskii A. L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.
16. Skubachevskii A. L. Elliptic differential-difference operators with degeneration and the Kato square root problem // Math. Nachr. — 2018. — 291. — С. 2660–2692.

В. В. Ахлынина

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: vikalijko@gmail.com

UDC 517.929

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-201-214

EDN: XYLGMK

## The Third Mixed Boundary-Value Problem for Strongly Elliptic Differential-Difference Equations in a Bounded Domain

V. V. Akhlynina

*RUDN University, Moscow, Russia*

**Abstract.** We consider strongly elliptic differential-difference equations with mixed boundary conditions in a bounded domain. There are homogeneous Dirichlet conditions on a part of the boundary, and boundary conditions of the third kind on the other part of the boundary. We establish the connection between these problems and nonlocal mixed problems for strongly elliptic differential equations. We prove the uniqueness and the smoothness of their solutions.

**Keywords:** differential-difference equation, elliptic equation, mixed boundary conditions, Dirichlet boundary conditions, boundary conditions of the third kind.

**Conflict-of-interest.** The author declares no conflicts of interest.

**Acknowledgments and funding.** The work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Megagrant, agreement № 075-15-2022-1115).

**For citation:** V. V. Akhlynina, “The Third Mixed Boundary-Value Problem for Strongly Elliptic Differential-Difference Equations in a Bounded Domain,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. 70, No. 2, 201–214. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-201-214>

### REFERENCES

1. A. B. Antonevich, “Ob indekse i normal’noy razreshimosti obshchey ellipticheskoy kraevoy zadachi s konechnoy gruppoy sdvigoov na granitse” [On the index and normal solvability of a general elliptic boundary-value problem with a finite group of translations on the boundary], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1972, **8**, No. 2, 309–317 (in Russian).
2. A. V. Bitsadze and A. A. Samarskii, “O nekotorykh prosteyshikh obobshcheniyakh lineynykh ellipticheskikh kraevykh zadach” [On some simplest generalizations of linear elliptic boundary-value problems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1969, **185**, No. 4, 739–740 (in Russian).
3. G. A. Kamenskii and A. L. Skubachevskii, *Lineynye kraevye zadachi dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy* [Linear Boundary-Value Problems for Differential-Difference Equations], MAI, Moscow, 1992 (in Russian).
4. V. S. Rabinovich, “O razreshimosti differentsial’no-raznostnykh uravneniy na  $\mathbb{R}^n$  i v poluprostranstve” [On the solvability of differential-difference equations on  $\mathbb{R}^n$  and in a half-space], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1978, **243**, No. 5, 1134–1137 (in Russian).
5. L. E. Rossovskii, “Ellipticheskie funktsional’no-differentsial’nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii” [Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. naprav.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, 3–138 (in Russian).
6. A. L. Skubachevskii, “O spektre nekotorykh nelokal’nykh ellipticheskikh kraevykh zadach” [On the spectrum of some nonlocal elliptic boundary-value problems], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1982, **117**, No. 4, 548–558 (in Russian).



7. A. L. Skubachevskii, “Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy i ikh prilozheniya” [Boundary-value problems for elliptic functional differential equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 3–112 (in Russian).
8. F. Browder, “Non-local elliptic boundary value problems,” *Am. J. Math.*, 1964, **86**, No. 4, 735–750.
9. T. Carleman, “Sur la théorie des équations intégrales et ses applications,” *Verhandlungen des Internat. Math. Kongr. Zürich*, 1932, **1**, 138–151.
10. F. Hartman and G. Stampacchia, “On some non-linear elliptic differential-functional equations,” *Acta Math.*, 1966, **115**, 271–230.
11. T. Kato, “Fractional powers of dissipative operators,” *J. Math. Soc. Jpn.*, 1961, **13**, No. 3, 246–274.
12. V. V. Liiko, “Strongly elliptic differential-difference equations with mixed boundary conditions in a bounded domain,” *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2023, **68**, No. 12, 2034–2058.
13. G. G. Onanov and A. L. Skubachevskii, “Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, **12**, No. 6, 192–207.
14. G. G. Onanov and E. L. Tsvetkov, “On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory,” *Russ. J. Math. Phys.*, 1995, **3**, No. 4, 491–500.
15. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997.
16. A. L. Skubachevskii, “Elliptic differential-difference operators with degeneration and the Kato square root problem,” *Math. Nachr.*, 2018, **291**, 2660–2692.

V. V. Akhlynina

RUDN University, Moscow, Russia

E-mail: vikalijko@gmail.com

УДК 517.518+512.813.52

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-215-236

EDN: YHQGYL

## ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ПРЕДЕЛОВ СОБОЛЕВСКИХ ГОМЕОМОРФИЗМОВ С ИНТЕГРИРУЕМЫМ ИСКАЖЕНИЕМ

С. К. Водопьянов, С. В. Павлов

*Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия*

**Аннотация.** Исследуются функциональные и геометрические свойства пределов гомеоморфизмов с интегрируемым искажением областей в группах Карно. Гомеоморфизмы принадлежат классам Соболева. Получены условия, при выполнении которых пределы последовательностей таких гомеоморфизмов также принадлежат классу Соболева, имеют конечное искажение и обладают  $\mathcal{N}^{-1}$ -свойством Лузина. В случае групп Карно  $H$ -типа получены достаточные условия, налагаемые на области и последовательность гомеоморфизмов, при выполнении которых предельное отображение является инъективным почти всюду. Эти результаты играют ключевую роль при нахождении экстремальных решений задач математической теории упругости на группах Карно  $H$ -типа, которым посвящены последующие работы авторов.

**Ключевые слова:** класс отображений Соболева, группа Карно, отображение с конечным искажением, внешняя операторная функция искажения, свойство предела соболевских отображений,  $\mathcal{N}^{-1}$ -свойство Лузина, инъективность почти всюду.

**Заявление о конфликте интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Благодарности и финансирование.** Работа подготовлена в рамках выполнения гранта РФФИ (код проекта № 23-21-00359).

**Для цитирования:** С. К. Водопьянов, С. В. Павлов. Функциональные свойства пределов соболевских гомеоморфизмов с интегрируемым искажением // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 2. С. 215–236. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-215-236>

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Некоторые задачи нелинейной теории упругости (например, для гиперупругих материалов) сводятся к задаче минимизации функционала полной энергии [19]. В этой ситуации, в отличие от случая линейной теории упругости, подынтегральная функция почти всегда невыпуклая, что делает невозможным применение стандартных методов решения вариационных задач. Тем не менее, существует заложенная Боллом математическая теория, в рамках которой можно исследовать функционалы полной энергии и моделировать достаточно широкий класс прикладных задач [20, 22].

В работе [27] к вопросу о существовании решения вариационной задачи была применена современная теория квазиконформного анализа (основы теории отображений с ограниченным искажением заложены в 60-ые годы прошлого века в работах Ю. Г. Решетняка [15]), с помощью которой удалось существенно ослабить предположения о суммируемости производных допустимых деформаций. Более того, экстремальная деформация оказывается гомеоморфизмом, что соответствует физическому содержанию задачи.

В настоящей работе мы закладываем основы математической теории для решения вариационных задач нелинейной теории упругости [21, 26] на группах Карно. В случае произвольных групп Карно мы устанавливаем функциональные и геометрические свойства отображения, предельного для последовательности гомеоморфизмов с интегрируемым искажением, а в случае групп Карно  $H$ -типа — его свойство инъективности почти всюду. Многие ключевые результаты и методы квазиконформного анализа на группах Карно  $H$ -типа, необходимые для решения поставленных задач, получены в недавних работах [1, 2, 9]. Обобщения работы [2] на случай произвольных групп Карно пока неизвестны.

## 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

**Группы Карно.** Напомним, что *стратифицированной градуированной нильпотентной группой*, или *группой Карно* (см., например, [23]), называется связная односвязная группа Ли  $\mathbb{G}$  такая, что её алгебра левоинвариантных векторных полей  $\mathfrak{g}$  раскладывается в прямую сумму  $\mathfrak{g} = \mathfrak{g}_1 \oplus \mathfrak{g}_2 \oplus \dots \oplus \mathfrak{g}_m$  подпространств  $\mathfrak{g}_i$ , удовлетворяющих условиям  $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_i] = \mathfrak{g}_{i+1}$ ,  $i = 1, \dots, m-1$ , и  $[\mathfrak{g}_1, \mathfrak{g}_m] = \{0\}$ . Группа *двухступенчатая*, если  $m = 2$ .

Фиксируем скалярное произведение в  $\mathfrak{g}$ . Подпространство  $\mathfrak{g}_1 \subset \mathfrak{g}$  называется *горизонтальным пространством* алгебры  $\mathfrak{g}$ , его элементы — *горизонтальными векторными полями*. Пусть  $N = \dim \mathfrak{g}$ ,  $n_i = \dim \mathfrak{g}_i$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Для удобства также обозначим  $n = n_1$ . Фиксируем ортонормированные базисы  $X_{i1}, \dots, X_{in_i}$  подпространств  $\mathfrak{g}_i$ . Поскольку экспоненциальное отображение  $g = \exp\left(\sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^{n_i} x_{ij} X_{ij}\right)(e)$  (где  $e$  — нейтральный элемент  $\mathbb{G}$ ) есть глобальный диффеоморфизм  $\mathfrak{g}$  на  $\mathbb{G}$  (см. [23]), мы можем отождествить точку  $g \in \mathbb{G}$  с точкой  $x = (x_{ij}) \in \mathbb{R}^N$ . Тогда  $e = 0$  и  $x^{-1} = -x$ . Растяжения  $\delta_\lambda$ , заданные как  $\delta_\lambda(x_{ij}) = (\lambda^i x_{ij})$ , суть автоморфизмы группы для всех  $\lambda > 0$ .

*Однородной нормой* на  $\mathbb{G}$  называется непрерывная функция  $\rho : \mathbb{G} \rightarrow [0, +\infty)$  класса  $C^\infty(\mathbb{G} \setminus \{0\})$  такая, что

- (а)  $\rho(x) = 0$  тогда и только тогда, когда  $x = 0$ ;
- (б)  $\rho(x^{-1}) = \rho(x)$  и  $\rho(\delta_\lambda x) = \lambda \rho(x)$ .

Из определения также следует (см. [23]):

- (с) существует число  $c > 0$  такое, что  $\rho(xy) \leq c(\rho(x) + \rho(y))$  для всех  $x, y \in \mathbb{G}$ ;
- (д) любые две однородные нормы эквивалентны, т. е. для любых двух однородных норм  $\rho_1, \rho_2$  найдутся числа  $0 < \alpha \leq \beta < \infty$  такие, что  $\alpha \rho_1(x) \leq \rho_2(x) \leq \beta \rho_1(x)$  для всех  $x \in \mathbb{G}$ .

Кусочно-гладкая кривая  $\gamma : [a; b] \rightarrow \mathbb{G}$  называется *горизонтальной*, если  $\dot{\gamma}(t) \in \mathfrak{g}_1(\gamma(t))$  для п. в.  $t$ . *Расстоянием Карно—Каратеодори*  $d_{cc}(x, y)$  между точками  $x, y \in \mathbb{G}$  называется точная нижняя грань длин  $\int_a^b |\dot{\gamma}(t)| dt$  горизонтальных кривых с концевыми точками  $x$  и  $y$ . Отметим, что согласно теореме Рашевского—Чоу (см., например, [24]) любые две точки можно соединить кусочно-гладкой горизонтальной кривой конечной длины. Метрика  $d_{cc}$  и однородная норма  $\rho$  эквивалентны: существуют положительные постоянные  $\alpha$  и  $\beta$  такие, что

$$\alpha d_{cc}(x, y) \leq \rho(y^{-1}x) \leq \beta d_{cc}(x, y). \quad (2.1)$$

Мера Лебега  $dx$  на  $\mathbb{R}^N$  — биинвариантная мера Хаара на  $\mathbb{G}$ , и  $d(\delta_\lambda x) = \lambda^\nu dx$ , где  $\nu = \sum_{i=1}^m i n_i$  — *однородная размерность* группы  $\mathbb{G}$ . Мера нормирована так, чтобы её значение на единичном шаре  $B(0, 1)$  равно единице,  $|B(0, 1)| = 1$ . Здесь  $B(0, 1) = \{x \in \mathbb{G} \mid d_{cc}(0, x) < 1\}$  — шар в метрике Карно—Каратеодори.

Группа Карно  $\mathbb{H}$  называется *группой Карно  $H$ -типа*, если она является двухступенчатой и её алгебра Ли  $\mathfrak{h} = \mathfrak{h}_1 \oplus \mathfrak{h}_2$  может быть снабжена скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  таким, что  $\mathfrak{h}_1 \perp \mathfrak{h}_2$  и для каждого поля  $Z \in \mathfrak{h}_2$  единичной длины линейное отображение  $J_Z : \mathfrak{h}_1 \rightarrow \mathfrak{h}_1$ , определённое соотношением

$$\langle J_Z(X), Y \rangle = \langle Z, [X, Y] \rangle, \quad X, Y \in \mathfrak{h}_1,$$

ортогональное.

**Пример 2.1.** Группа Гейзенберга  $\mathbb{H}^k = (\mathbb{R}^{2k+1}, *)$  с групповой операцией

$$(x, y, z) * (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z' + \frac{x \cdot y' - x' \cdot y}{2}), \quad x, x', y, y' \in \mathbb{R}^k, \quad z, z' \in \mathbb{R},$$

— классический пример неабелевой группы Карно  $H$ -типа. Её алгебра Ли  $\mathfrak{h}^k$  образована векторными полями

$$X_i = \frac{\partial}{\partial x_i} - \frac{y_i}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad Y_i = \frac{\partial}{\partial y_i} + \frac{x_i}{2} \frac{\partial}{\partial z}, \quad i = 1, \dots, k, \quad Z = \frac{\partial}{\partial z}.$$

Здесь  $\mathfrak{h}_1^k = \text{span}\{X_i, Y_i \mid i = 1, \dots, k\}$ ,  $\mathfrak{h}_2^k = \text{span}\{Z\}$ , а нетривиальными скобками Ли являются лишь  $[X_i, Y_i] = Z$ ,  $i = 1, \dots, k$ . Однородная размерность  $\mathbb{H}^k$  равна  $\nu = 2k + 2$ . Если скалярное произведение  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  таково, что векторные поля  $X_i, Y_i, i = 1, \dots, k, Z$  образуют ортонормированную систему, то отображение  $J_Z : \mathfrak{h}_1^k \rightarrow \mathfrak{h}_1^k$  определяется соотношениями  $J_Z(X_i) = Y_i$ ,  $J_Z(Y_i) = -X_i$  и, очевидно, является ортогональным.

**Отображения класса Соболева.** Пусть  $\Omega \subset \mathbb{G}$  — область (непустое связное открытое множество в  $\mathbb{G}$ ). Пространство  $L_p(\Omega)$ ,  $p \geq 1$ , состоит из измеримых функций  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , интегрируемых в  $p$ -ой степени. Норма на  $L_p(\Omega)$  определяется как

$$\|u \mid L_p(\Omega)\| = \left( \int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Функция  $u$  принадлежит  $L_{p,\text{loc}}(\Omega)$ , если  $u \in L_p(K)$  для всякого компакта  $K \subset \Omega$ .

Пусть левоинвариантные векторные поля  $X_1, \dots, X_n$  образуют базис горизонтального пространства  $\mathfrak{g}_1$ , и пусть  $\Pi_j$  — гиперплоскость  $\{x \in \mathbb{G} \mid x_j = 0\}$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Мера  $d\mu_j = \iota(X_j)dx$  на  $\Pi_j$  задаётся внутренним произведением  $X_j$  с формой объёма. Каждому  $y \in \Pi_j$  соответствует интегральная линия  $\gamma_j(t) = \exp(tX_j)(y)$ . Отображение  $\varphi : \Omega \rightarrow M$  из области  $\Omega \subset \mathbb{G}$  в метрическое пространство  $M$  абсолютно непрерывно на линиях,  $\varphi \in \text{ACL}(\Omega; M)$ , если его можно изменить на множестве меры нуль так, чтобы для каждого  $j = 1, \dots, n$  оно было абсолютно непрерывным на  $\exp(tX_j)(y) \cap \Omega$  для  $\mu_j$ -почти всех  $y \in \Pi_j$ . Полагаем  $\text{ACL}(\Omega) = \text{ACL}(\Omega; \mathbb{R})$ .

Пространство функций Соболева  $L_p^1(\Omega)$ ,  $p \geq 1$ , состоит из функций  $u \in L_{1,\text{loc}}(\Omega) \cap \text{ACL}(\Omega)$  таких, что производные  $X_j u$  (существующие п. в.) принадлежат  $L_p(\Omega)$ ,  $j = 1, \dots, n$ . Полунорма функции  $u \in L_p^1(\Omega)$  равна  $\|u \mid L_p^1(\Omega)\| = \|\lvert \nabla_h u \rvert \mid L_p(\Omega)\|$ , где  $\nabla_h u = (X_1 u, \dots, X_n u)$  — горизонтальный градиент  $u$ . Далее вместо  $\|\lvert \nabla_h u \rvert \mid L_p(\Omega)\|$  мы будем писать  $\|\nabla_h u \mid L_p(\Omega)\|$ .

Эквивалентное определение пространства  $L_p^1(\Omega)$  основано на понятии обобщённой производной: локально суммируемая функция  $u_i : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  называется обобщённой производной функции  $u \in L_{1,\text{loc}}(\Omega)$  вдоль векторного поля  $X_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ , если

$$\int_{\Omega} u_i(x)v(x) dx = - \int_{\Omega} u(x)X_i v(x) dx$$

для любой тестовой функции  $v \in C_0^\infty(\Omega)$ . Локально суммируемая функция  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  принадлежит  $L_p^1(\Omega)$  в том и только том случае, когда существуют её обобщённые производные  $u_i \in L_p(\Omega)$ ,  $i = 1, \dots, n$ . При этом  $u_i = X_i u$ , где  $X_i u$  — классические производные функции  $u \in \text{ACL}(\Omega)$ , существующие п. в.

Пространство Соболева  $W_p^1(\Omega)$  состоит из функций  $u \in L_p(\Omega) \cap L_p^1(\Omega)$  и снабжено нормой

$$\|u \mid W_p^1(\Omega)\| = \|u \mid L_p(\Omega)\| + \|u \mid L_p^1(\Omega)\|.$$

Пусть  $\mathbb{G}, \tilde{\mathbb{G}}$  — две группы Карно,  $\Omega \subset \mathbb{G}$  — область. Рассмотрим  $\varphi \in \text{ACL}(\Omega; \tilde{\mathbb{G}})$ . Тогда  $X_j \varphi(x) \in \tilde{\mathfrak{g}}_1(\varphi(x))$  для п. в.  $x \in \Omega$  (см. [28, предложение 4.1]). Матрица  $D_h \varphi(x) = (X_i \varphi_j)$ ,  $i = 1, \dots, n$ ,  $j = 1, \dots, \tilde{n}$ , определяет линейный оператор  $D_h \varphi(x) : \mathfrak{g}_1 \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}_1$ , который называется горизонтальным дифференциалом  $\varphi$ . Известно (см. [31, теорема 1.2]), что для п. в.  $x \in \Omega$  отображение  $D_h \varphi(x)$  определено и может быть продолжено до гомоморфизма алгебр Ли  $\widehat{D} \varphi(x) : \mathfrak{g} \rightarrow \tilde{\mathfrak{g}}$ , который также можно рассматривать как линейный оператор  $\widehat{D} \varphi(x) : T_x \mathbb{G} \rightarrow T_{\varphi(x)} \tilde{\mathbb{G}}$ . Нормы обоих операторов находятся в отношении

$$\lvert D_h \varphi(x) \rvert \leq \lvert \widehat{D} \varphi(x) \rvert \leq C \lvert D_h \varphi(x) \rvert, \tag{2.2}$$

где  $C$  зависит только от структуры групп. Последнему гомоморфизму также соответствует гомоморфизм групп  $D_{\mathcal{P}}\varphi(x) = \widetilde{\exp} \circ \widehat{D}\varphi(x) \circ \exp^{-1}$ , известный как *дифференциал Пансю*, который является аппроксимативным дифференциалом  $\varphi$  по отношению к структуре группы [31].

**Определение 2.1.** Класс отображений Соболева  $W_p^1(\Omega; \widetilde{\mathbb{G}})$  состоит из отображений  $\varphi \in \text{ACL}(\Omega; \widetilde{\mathbb{G}})$ , для которых величина

$$\|\varphi \mid W_p^1(\Omega)\| = \|\rho \circ \varphi \mid L_p(\Omega)\| + \|\mid D_h\varphi \mid \mid L_p(\Omega)\|$$

конечна. Отображение  $\varphi$  принадлежит  $W_{p,\text{loc}}^1(\Omega; \widetilde{\mathbb{G}})$ , если  $\varphi \in W_p^1(U; \widetilde{\mathbb{G}})$  для всякой компактно вложенной области  $U \Subset \Omega$ . Далее мы пишем  $\|\mid D_h\varphi \mid \mid L_p(\Omega)\|$  вместо  $\|\mid D_h\varphi \mid \mid L_p(\Omega)\|$ .

Эквивалентные описания отображений групп Карно класса Соболева можно найти в [31, предложение 4.2]. Заметим, что если  $\varphi \in W_p^1(\Omega; \widetilde{\mathbb{G}})$ , то все координатные функции  $\varphi_i$ ,  $i = 1, \dots, \widetilde{N}$ , принадлежат  $W_p^1(\Omega)$ .

Отображение  $\varphi$  класса  $W_{1,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$  называется отображением с *конечным искажением*, если  $D_h\varphi = 0$  п. в. на множестве нулей якобиана  $Z = \{x \mid \det \widehat{D}\varphi(x) = 0\}$ . Класс отображений  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{G}$  с конечным искажением обозначается символом  $FD(\Omega; \mathbb{G})$ . *Внешняя функция искажения*  $K_{\varphi,p}$ ,  $p \in [1; \infty)$ , определяется по правилу

$$K_{\varphi,p}(x) = \begin{cases} \frac{\mid D_h\varphi(x) \mid}{\mid \det \widehat{D}\varphi(x) \mid^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } \det \widehat{D}\varphi(x) \neq 0, \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Пространство  $\text{Lip}(\Omega)$  состоит из липшицевых в метрике Карно—Каратеодори функций  $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , а пространство  $\text{Lip}_{\text{loc}}(\Omega)$  — из заданных на  $\Omega$  функций, липшицевых в метрике Карно—Каратеодори на каждом компакте  $K \Subset \Omega$ . Через  $\mathbb{H}$  мы будем обозначать группу Карно  $H$ -типа, а через  $\mathbb{G}$  — произвольную группу Карно.

Отображения с конечным искажением и интегрируемой функцией искажения тесно связаны с описанием ограниченных операторов композиции однородных пространств Соболева.

**Теорема 2.1** (см. [10, теорема 2]). *Гомеоморфизм  $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$  областей в произвольной группе Карно  $\mathbb{G}$  индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi^* : L_p^1(\Omega') \cap \text{Lip}_{\text{loc}}(\Omega') \rightarrow L_q^1(\Omega), \quad 1 < q \leq p < \infty,$$

*однородных пространств Соболева по правилу  $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$  тогда и только тогда, когда*

- 1)  $\varphi \in W_{q,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$ ;
- 2)  $\varphi$  имеет конечное искажение;
- 3)  $K_{\varphi,p} \in L_\sigma(\Omega)$ , где  $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$  ( $\sigma = \infty$  при  $q = p$ ).

*При этом норма  $\|\varphi^*\|$  эквивалентна величине  $\|K_{\varphi,p} \mid L_\sigma(\Omega)\|$ , т. е. для некоторой константы  $\alpha_{p,q} > 0$  справедливо неравенство*

$$\alpha_{p,q} \|K_{\varphi,p} \mid L_\sigma(\Omega)\| \leq \|\varphi^*\| \leq \|K_{\varphi,p} \mid L_\sigma(\Omega)\|.$$

**Теорема 2.2.** *Пусть  $\Omega, \Omega'$  — области на группе Карно  $H$ -типа. Если гомеоморфизм  $\varphi : \Omega \rightarrow \Omega'$  порождает ограниченный оператор композиции  $\varphi^* : L_p^1(\Omega') \cap \text{Lip}_{\text{loc}}(\Omega') \rightarrow L_q^1(\Omega)$ ,  $\nu - 1 < q \leq p < \infty$ , то обратное отображение  $\varphi^{-1}$  порождает ограниченный оператор композиции  $(\varphi^{-1})^* : L_{q'}^1(\Omega) \cap \text{Lip}_{\text{loc}}(\Omega) \rightarrow L_{p'}^1(\Omega')$ , где  $q' = \frac{q}{q - (\nu - 1)}$ ,  $p' = \frac{p}{p - (\nu - 1)}$ . Более того,  $\|K_{\varphi^{-1},q'} \mid L_{\sigma'}(\Omega')\| \leq C \|K_{\varphi,p} \mid L_\sigma(\Omega)\|^{\nu-1}$ , где  $\frac{1}{\sigma'} = \frac{1}{p'} - \frac{1}{q'}$  ( $\sigma' = \infty$  при  $q' = p'$ ).*

*Доказательство.* Условия теоремы 2.2 и теорема 2.1 позволяют применить результат [8, предложение 40] или [1, теорема 5], на основании которого отображение  $\varphi^{-1} : \Omega' \rightarrow \Omega$

- 1) принадлежит  $W_{1,\text{loc}}^1(\Omega'; \mathbb{H})$ ;
- 2) имеет конечное искажение;
- 3)  $\mathcal{P}$ -дифференцируемо п. в. в  $\Omega'$  (определение  $\mathcal{P}$ -дифференцируемости см. в разделе 3.4).

В доказательстве свойства  $\varphi^{-1} \in W_{1,\text{loc}}^1(\Omega'; \mathbb{H})$  работы [1] существенно применяется неравенство для ёмкости конденсатора  $E = (F, U)$ , где  $F$  — континуум (т. е. связный компакт) в связном открытом множестве  $U$ :

$$\text{cap}^{\nu-1}(E; L_p^1(U)) \geq c_{10}^{\nu-1} \frac{(\text{diam } F)^p}{|U|^{p-(\nu-1)}},$$

установленное в [1, лемма 9] на группах Карно  $H$ -типа (здесь постоянная  $c_{10}$  зависит только структуры группы Карно).

Напомним, что  $p$ -ёмкость конденсатора  $E = (F, U)$  определяется следующим образом:

$$\text{cap}(E; L_p^1(U)) = \inf_u \int_U |\nabla_h u|^p(x) dx,$$

где инфимум берётся по всем финитным в области  $U$  функциям  $u \in L_p^1(U) \cap \text{Lip}(U)$ , равным единице на  $F$ .

Обозначим символом  $\text{adj } \widehat{D}\varphi(x)$  присоединенную матрицу к матрице  $\widehat{D}\varphi(x)$ , определяемую из условия  $\widehat{D}\varphi(x) \cdot \text{adj } \widehat{D}\varphi(x) = \det \widehat{D}\varphi(x) \cdot \text{Id}$ , если определитель  $(N \times N)$ -матрицы  $\widehat{D}\varphi(x)$  отличен от нуля, и по непрерывности в топологии  $\mathbb{R}^{N \times N}$  в остальных случаях.

Далее используем легко проверяемое равенство

$$\sigma' = \frac{p'q'}{q' - p'} = \frac{pq}{(p - q)(\nu - 1)}.$$

В точках невырожденности матрицы Якоби  $\widehat{D}\varphi(x)$  имеем

$$[\text{adj } \widehat{D}\varphi(x)]^{-1} = [\det \widehat{D}\varphi(x)]^{-1} \cdot \widehat{D}\varphi(x).$$

Отсюда с учётом равенств  $\widehat{D}\varphi^{-1}(y) = [\widehat{D}\varphi(x)]^{-1}$ ,  $\text{adj } \widehat{D}\varphi^{-1}(y) = [\text{adj } \widehat{D}\varphi(x)]^{-1}$  и  $\det \widehat{D}\varphi^{-1}(y) = \det \widehat{D}\varphi(x)^{-1}$  получаем

$$|\widehat{D}\varphi^{-1}(y)| = |\det \widehat{D}\varphi(\varphi^{-1}(y))|^{-1} |\text{adj } \widehat{D}\varphi(\varphi^{-1}(y))|, \quad y = \varphi(x).$$

Ниже  $Z \subset \Omega$  — борелевское множество, содержащее нули якобиана, такое, что мера образа  $\varphi(Z)$  равна нулю, а дизъюнктное с ним борелевское множество  $\Sigma \subset \Omega$  — это сингулярное множество нулевой меры функции множества  $\Omega \supset A \mapsto |\varphi(A)|$ : мера  $\varphi(\Sigma)$  положительна, в то время как мера  $\Sigma$  равна нулю.

В случае  $\nu - 1 < q < p < \infty$  с учётом последних равенств выводим (в приводимом ниже выводе применяется формула замены переменной, сформулированная ниже в предложении 3.7)

$$\begin{aligned} \|K_{\varphi^{-1}, q'} | L_{\sigma'}(\Omega')\|^{\sigma'} &\leq \int_{\Omega' \setminus \varphi(\Sigma)} \left( \frac{|\widehat{D}\varphi^{-1}(y)|}{|\det \widehat{D}\varphi^{-1}(y)|^{1/q'}} \right)^{\sigma'} dy = \\ &= \int_{\Omega' \setminus \varphi(\Sigma \cup Z)} \left( \frac{|\det \widehat{D}\varphi(\varphi^{-1}(y))|^{-1} |\text{adj } \widehat{D}\varphi(\varphi^{-1}(y))|}{|\det \widehat{D}\varphi^{-1}(y)|^{1/q'}} \right)^{p'q'/(q'-p')} dy = \\ &= \int_{\Omega \setminus (Z \cup \Sigma)} \left( \frac{|\det \widehat{D}\varphi(x)|^{-1} |\text{adj } \widehat{D}\varphi(x)|}{|\det \widehat{D}\varphi(x)|^{-1/q'}} \right)^{p'q'/(q'-p')} |\det \widehat{D}\varphi(x)| dx = \\ &= \int_{\Omega \setminus Z} \left( \frac{|\text{adj } \widehat{D}\varphi(x)|}{|\det \widehat{D}\varphi(x)|^{(\nu-1)/p}} \right)^{\sigma'} dx \leq \int_{\Omega \setminus Z} \left( \frac{|\widehat{D}\varphi(x)|}{|\det \widehat{D}\varphi(x)|^{1/p}} \right)^{\sigma'(\nu-1)} dx \leq \\ &\leq C^\sigma \|K_{\varphi, p} | L_\sigma(\Omega)\|^\sigma. \end{aligned}$$

Неравенство в предпоследней строке возникает из соотношения  $|\text{adj } \widehat{D}\varphi(x)| \leq |\widehat{D}\varphi(x)|^{\nu-1}$ , а постоянная  $C$  в последней строке — это множитель в правой части (2.2). Случай  $\nu - 1 < q = p < \infty$  проще рассмотренного (см. детали в [6]).  $\square$

### 3. ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ И ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ПРЕДЕЛЬНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ

В первую очередь в общем случае мы установим ряд свойств отображения, предельного для последовательности гомеоморфизмов с интегрируемым искажением, из которых в ситуации групп Карно  $H$ -типа будет выведено, что предельное отображение инъективно почти всюду.

**Теорема 3.1.** Пусть  $\mathbb{G}$  — группа Карно,  $1 < q \leq p < \infty$ ,  $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{G}$  — ограниченные области,  $\varphi_0 \in L_{1,\text{loc}}(\Omega; \mathbb{G})$ . Пусть  $\{\varphi_k : \Omega \rightarrow \Omega'\}$  — последовательность гомеоморфизмов класса  $W_{q,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G}) \cap FD(\Omega; \mathbb{G})$  таких, что:

- 1)  $\{\varphi_k\}$  сходится<sup>1</sup> к  $\varphi_0$  в  $L_{1,\text{loc}}(\Omega; \mathbb{G})$ ;
- 2) последовательность  $\{K_{\varphi_k,p}\}$  ограничена в  $L_\sigma(\Omega)$ , где  $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$  ( $\sigma = \infty$  при  $q = p$ ).

Тогда  $\varphi_0$ :

- a) индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi_0^* : L_p^1(W) \cap \text{Lip}(W) \rightarrow L_q^1(\Omega),$$

где  $W$  — ограниченная область, содержащая  $\overline{\Omega'}$ ;

- b)  $\|\varphi_0^*\| \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k^*\|$ ;
- c) принадлежит классу  $W_q^1(\Omega; \mathbb{G})$ ;
- d) имеет конечное искажение.

Если ещё  $p \leq \nu$ , и  $\varphi_0$  — непостоянное отображение, то

- e)  $\varphi_0$  обладает  $\mathcal{N}^{-1}$ -свойством Лузина, т. е.  $|\varphi_0^{-1}(E)| = 0$  при  $|E| = 0$ ,  $E \subset W$ .

**Замечание 3.1.** Отметим, что из условий теоремы 3.1 в силу теоремы 2.1 вытекает, что последовательность  $\left\{ \int_\Omega |D_h \varphi_k(x)|^q dx \right\}$  ограничена. Действительно, пусть  $Z_k = \{x \in \Omega \mid \det \widehat{D} \varphi_k(x) = 0\}$ .

Так как  $\varphi_k$  имеет конечное искажение, то

$$\begin{aligned} \int_\Omega |D_h \varphi_k(x)|^q dx &= \int_{\Omega \setminus Z_k} \frac{|D_h \varphi_k(x)|^q}{|\det \widehat{D} \varphi_k(x)|^{q/p}} |\det \widehat{D} \varphi_k(x)|^{q/p} dx \leq \\ &\leq \left( \int_{\Omega \setminus Z_k} \left( \frac{|D_h \varphi_k(x)|^q}{|\det \widehat{D} \varphi_k(x)|^{q/p}} \right)^{\frac{p}{p-q}} dx \right)^{\frac{p-q}{p}} \left( \int_\Omega |\det \widehat{D} \varphi_k(x)| dx \right)^{q/p} \leq \|K_{\varphi_k,p}\| L_\sigma(\Omega)^q \cdot |\Omega'|^{q/p}. \end{aligned}$$

Доказательство теоремы 3.1 содержится в следующих утверждениях, в которых последовательно устанавливаются свойства предельного отображения  $\varphi_0$ .

#### 3.1. Ограниченность предельного оператора композиции.

**Предложение 3.1.** Предположим, что  $\{f_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  — последовательность действительных функций класса  $L_{1,\text{loc}}(\Omega)$ , сходящаяся в  $L_{1,\text{loc}}(\Omega)$  к функции  $f : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ , где  $\Omega \subset \mathbb{G}$  — область на группе Карно  $\mathbb{G}$ . Предположим, что  $f_k \in L_q^1(\Omega)$ ,  $q \in (1, \infty)$ , и выполнено поточечное неравенство

$$|\nabla_h f_k(x)| \leq g_k(x) \text{ для п. в. } x \in \Omega$$

при каждом  $k \in \mathbb{N}$ , где последовательность функций  $g_k \in L_q(\Omega)$  ограничена в  $L_q(\Omega)$ . Тогда  $f \in L_q^1(\Omega)$  и для всякой ограниченной неотрицательной измеримой функции  $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  имеет место неравенство

$$\int_\Omega |\nabla_h f(x)|^q \alpha(x) dx \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \int_\Omega g_k^q(x) \alpha(x) dx. \quad (3.1)$$

Более того, если  $g$  — слабый предел в  $L_q(\Omega)$  последовательности  $\{g_k\}$ , то

$$|\nabla_h f(x)| \leq g(x) \text{ для п. в. } x \in \Omega. \quad (3.2)$$

<sup>1</sup>Это означает, что для любого компакта  $K \subset \Omega$  последовательность интегралов  $\int_K d_{cc}(\varphi_k(x), \varphi_0(x)) dx$  стремится к нулю при  $k \rightarrow \infty$ .

*Доказательство.* Приводимое ниже доказательство — это модификация рассуждений работ [16, 17], [4, лемма 12]. Фиксируем функцию  $\alpha(x) \geq 0$  и выбираем подпоследовательность  $\{g_{k_l}\}$  такую, что

$$\lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_{k_l}^q(x) \alpha(x) dx = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_k^q(x) \alpha(x) dx.$$

Поскольку пространство  $L_q(\Omega)$ ,  $q \in (1, \infty)$ , рефлексивно, выделяя подпоследовательность, можно считать, что последовательность  $X_i f_{k_l}$  сходится слабо в  $L_q(\Omega)$  к функции  $h_i \in L_q(\Omega)$  для каждого  $i = 1, \dots, n$ , а подпоследовательность  $g_{k_l}$  сходится слабо в  $L_q(\Omega)$  к функции  $g \in L_q(\Omega)$  при  $l \rightarrow \infty$ . Переходя в соотношении

$$\int_{\Omega} f_{k_l}(x) X_i v(x) dx = - \int_{\Omega} X_i f_{k_l}(x) v(x) dx, \quad v \in C_0^\infty(\Omega),$$

к пределу при  $l \rightarrow \infty$ , получаем, что  $h_i$  — обобщённая производная  $X_i f$  функции  $f$ . Функция

$$\operatorname{sgn} \nabla_h f(x) = \begin{cases} \frac{\nabla_h f(x)}{|\nabla_h f(x)|}, & \text{если } |\nabla_h f(x)| \neq 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

измерима и ограничена. Подпоследовательность  $\langle \nabla_h f_{k_l}, \operatorname{sgn} \nabla_h f \rangle \alpha^{1/q}$  сходится слабо в  $L_q(\Omega)$  к функции  $|\nabla_h f| \alpha^{1/q}$  при  $l \rightarrow \infty$ . Пусть  $0 \leq v \in L_{q'}(\Omega)$ ,  $q' = q/(q-1)$ , — произвольная функция. Перейдём в выражении

$$\left| \int_{\Omega} \langle \nabla_h f_{k_l}(x), \operatorname{sgn} \nabla_h f(x) \rangle \alpha^{1/q}(x) v(x) dx \right| \leq \int_{\Omega} g_{k_l}(x) \alpha^{1/q}(x) v(x) dx$$

к пределу при  $l \rightarrow \infty$ . В результате приходим к соотношению

$$\int_{\Omega} |\nabla_h f(x)| \alpha^{1/q}(x) v(x) dx \leq \int_{\Omega} g(x) \alpha^{1/q}(x) v(x) dx, \quad 0 \leq v \in L_{q'}(\Omega).$$

Отсюда выводим неравенство  $|\nabla_h f(x)| \alpha^{1/q}(x) \leq g(x) \alpha^{1/q}(x)$  для п. в.  $x \in \Omega$ . Учитывая последнее соотношение и то, что  $g \alpha^{1/q}$  — слабый предел в  $L_q(\Omega)$  подпоследовательности  $\{g_{k_l} \alpha^{1/q}\}$ , получаем

$$\int_{\Omega} |\nabla_h f(x)|^q \alpha(x) dx \leq \int_{\Omega} g^q(x) \alpha(x) dx \leq \lim_{l \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_{k_l}^q(x) \alpha(x) dx = \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_k^q(x) \alpha(x) dx.$$

Таким образом, соотношения (3.1) и (3.2) доказаны.  $\square$

**Предложение 3.2.** В условиях теоремы 3.1 отображение  $\varphi_0$  индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi_0^* : L_p^1(W) \cap \operatorname{Lip}(W) \rightarrow L_q^1(\Omega),$$

и

$$\|\varphi_0^*\| \leq \underline{\lim}_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k^*\|. \quad (3.3)$$

*Доказательство.* Приводимое ниже доказательство представляет собой модификацию рассуждений работ [16, 17], [4, теорема 9]. Пусть  $u \in L_p^1(W) \cap \operatorname{Lip}(W)$ . В силу липшицевости функции  $u$  последовательность  $\{u \circ \varphi_k\}$  сходится к  $u \circ \varphi_0$  в  $L_{1,\text{loc}}(\Omega)$ . Согласно теореме 2.1 из ограниченности последовательности  $\{K_{\varphi_k,p}\}$  в  $L_\sigma(\Omega)$  вытекает, что последовательность  $\{\nabla_h(u \circ \varphi_k)\}$  ограничена в  $L_q(\Omega)$ . Более того,

$$\|u \circ \varphi_k | L_q^1(\Omega)\| \leq \|\varphi_k^*\| \cdot \|u | L_p^1(\Omega')\|. \quad (3.4)$$

Применяя предложение 3.1 с  $f_k = u \circ \varphi_k$ ,  $g_k = |\nabla_h(u \circ \varphi_k)|$  и  $\alpha = 1$ , получаем, что  $u \circ \varphi_0 \in L_q^1(\Omega)$ , причём

$$\int_{\Omega} |\nabla_h(u \circ \varphi_0)(x)|^q dx \leq \underline{\lim}_k \int_{\Omega} |\nabla_h(u \circ \varphi_k)(x)|^q dx. \quad (3.5)$$

Положим  $C = \varliminf_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k^*\| < \infty$ . Теперь из (3.4) и (3.5) выводим

$$\|u \circ \varphi_0 \mid L_q^1(\Omega)\| \leq \varliminf_k \|\varphi_k^* u \mid L_q^1(\Omega)\| \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \|\varphi_k^*\| \cdot \|u \mid L_p^1(\Omega')\| \leq C \|u \mid L_p^1(W)\|. \quad (3.6)$$

Отсюда получаем неравенство (3.3). Предложение 3.2 доказано.  $\square$

**Предложение 3.3.** Пусть  $1 < q < \infty$ ,  $\mathbb{G}$  — группа Карно,  $\Omega \subset \mathbb{G}$  — область, и пусть  $\varphi_k : \Omega \rightarrow \mathbb{G}$  — произвольная последовательность отображений класса  $W_{q,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$ , сходящаяся в  $L_{1,\text{loc}}(\Omega; \mathbb{G})$  к некоторому отображению  $\varphi_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{G}$ . Если последовательность  $\{\int_{\Omega} |D_h \varphi_k(x)|^q dx\}$  ограничена, то  $\varphi_0$  принадлежит классу  $W_{q,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$  и  $\int_{\Omega} |D_h \varphi_0(x)|^q dx < \infty$ .

*Доказательство.* Приводимое ниже доказательство основано на рассуждениях работ [4, теорема 9] и [11, лемма 2]. Последовательность функций  $g_k(x) = |D_h \varphi_k|(x)$  ограничена в  $L_q(\Omega)$ . Поскольку пространство  $L_q(\Omega)$  рефлексивно, последовательность  $\{g_k\}$  можно считать слабо сходящейся к неотрицательной функции  $g \in L_q(\Omega)$ .

Фиксируем точку  $z \in \mathbb{G}$ . С точкой  $z$  ассоциируем функцию

$$x \in \Omega \mapsto u_z(x) = d_{cc}(x, z).$$

Последовательности функций  $f_k(x) = u_z \circ \varphi_k(x)$  и  $g_k(x) = |D_h \varphi_k|(x)$  удовлетворяют всем условиям предложения 3.1. Пределом в  $L_{1,\text{loc}}(\Omega)$  последовательности функций  $f_k$  является функция  $f(x) = u_z \circ \varphi_0(x)$ , поэтому для неё поточечное неравенство (3.2) можно записать в следующем виде:

$$|\nabla_h(u_z \circ \varphi_0)(x)| \leq g(x) \text{ для п. в. } x \in \Omega. \quad (3.7)$$

Выберем в  $\mathbb{G}$  счётное всюду плотное множество  $Z_0$ . Неравенство (3.7) можно считать выполненным одновременно для всех  $z \in Z_0$  при п. в.  $x \in \Omega$ .

Рассмотрим слоение  $\Gamma_j$  области  $\Omega$ , порождённое каким-либо горизонтальным векторным полем  $X_j$ . На  $d\gamma$ -п. в. линиях  $\gamma$  слоения  $\Gamma_j$ , выбор которых не зависит от точки  $z \in Z_0$ , функция  $(u_z \circ \varphi_0)|_{\gamma}$  абсолютно непрерывна,  $g|_{\gamma} \in L_q$  и

$$|X_j(u_z \circ \varphi_0)|_{\gamma}(x) \leq |\nabla_h(u_z \circ \varphi_0)|_{\gamma}(x) \leq g|_{\gamma}(x)$$

для п. в.  $x \in \gamma \cap \Omega$ . Отсюда для отрезка  $[x, y]$  слоя  $\gamma$  имеем

$$|(u_z \circ \varphi_0)|_{\gamma}(y) - (u_z \circ \varphi_0)|_{\gamma}(x)| \leq \int_{[x,y]} g dt.$$

Таким образом, приращение функции  $u_z \circ \varphi_0|_{\gamma}$  вдоль слоя  $\gamma$  контролируется интегралом от интегрируемой функции  $g$ , не зависящим от выбора  $z \in Z_0$ . Следовательно, возможен предельный переход по  $z \in Z_0$ , а так как совокупность точек  $z \in Z_0$  плотна в  $\overline{\Omega'}$ , то последнее неравенство справедливо для любой точки  $z \in \overline{\Omega'}$ . Полагая  $z = \varphi_0(x)$ , получим

$$d_{cc}(\varphi_0(x), \varphi_0(y)) \leq \int_{[x,y]} g dt.$$

Отсюда вытекают абсолютная непрерывность отображения  $\varphi_0$  на п. в. линиях горизонтальных слоений и оценка  $|X_j \varphi_0(x)| \leq g(x)$  для п. в.  $x \in \Omega$ . Следовательно,  $\varphi_0$  принадлежит классу  $W_{q,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$  и  $\int_{\Omega} |D_h \varphi_0(x)|^q dx < \infty$ .  $\square$

**3.2. Конечность искажения предельного отображения.** Фиксируем произвольное открытое множество  $U \subset W$ . Обозначим через  $\text{Lip}(U)$  пространство липшицевых в метрике Карно—Каратеодори функций  $u : W \rightarrow \mathbb{R}$ , носители которых содержатся в  $U$ .

Обозначим через  $\|\varphi_U^*\|$  норму сужения оператора композиции  $\varphi_0^*$  на подпространство  $L_p^1(W) \cap \text{Lip}(U)$ . При  $q < p$  определим функцию множества  $\Phi$ , сопоставляя открытому множеству  $U \subset W$  число

$$\Phi(U) = \|\varphi_U^*\|^\sigma = \sup_{\substack{u \in L_p^1(W) \cap \text{Lip}(U), \\ u \neq 0}} \left( \frac{\|\varphi_0^* u \mid L_q^1(\Omega)\|}{\|u \mid L_p^1(W)\|} \right)^\sigma. \quad (3.8)$$

**Лемма 3.1.** *Функция множества  $\Phi$ , определённая на открытых множествах  $U \subset W$  формулой (3.8), монотонна и счётно-аддитивна.*

Простое доказательство леммы 3.1 можно получить, рассуждая аналогично [10, лемма 3.1] (ср. с первоначальным доказательством в [11, лемма 1]).

**Предложение 3.4** (см. [29, 30]). *Пусть  $D$  — открытое множество в  $\mathbb{G}$ , а монотонная и счётно-аддитивная функция множества  $\Phi$  определена на некоторой системе  $\mathcal{O}(D)$  открытых подмножеств в  $D$ , содержащей все шары  $B(x, r)$  такие, что  $\bar{B}(x, r) \subset D$ . Тогда:*

а) *в почти каждой точке  $x \in D$  существует конечная производная*

$$\lim_{\substack{B_\delta \ni x, \\ \delta \rightarrow 0}} \frac{\Phi(B_\delta)}{|B_\delta|} = \Phi'(x),$$

где  $B_\delta \in D$  — шар в метрике Карно–Каратеодори радиуса  $\delta$ , содержащий точку  $x$ ;

б) *для любого открытого множества  $U \in \mathcal{O}(D)$  справедливо неравенство*

$$\int_U \Phi'(x) dx \leq \Phi(U).$$

Сформулируем применяемое ниже свойство евклидовых шаров в группе Карно (см. [12, 18], где доказаны свойства 1, 2 предложения 3.5, и [3], где доказано свойство 3 предложения 3.5). Евклидово расстояние между точками  $x = (x_{ij}), y = (y_{ij}) \in \mathbb{G}$  определяется как

$$\left( \sum_{i,j} (x_{ij} - y_{ij})^2 \right)^{1/2}.$$

**Предложение 3.5** (см. [3, 12, 18]). *Для любого открытого множества  $U \subset \mathbb{R}^N$  с непустой границей существует не более чем счётное семейство  $\mathcal{F} = \{B_i^E\}$  евклидовых шаров такое, что*

- 1)  $\bigcup_{i=1}^{\infty} 2B_i^E = U$ , где  $2B_i^E = B^E(z_i, 2r_i)$ ;
- 2) семейства  $\mathcal{F} = \{B_i^E\}$  и  $2\mathcal{F} = \{2B_i^E\}$  образуют конечнократное покрытие множества  $U$ ;
- 3) семейство  $\{2B_i^E\}$  может быть разбито на конечное число  $\beta_N$  (зависящее только от размерности  $N$ ) подсемейств таких, что внутри каждого из них шары не пересекаются.

**Следствие 3.1.** *Если покрытие  $\{B^E(x_j, 2r_j)\}$  открытого множества  $U \subset \mathbb{G}$  выбрано в соответствии с предложением 3.5, то*

$$\sum_j \Phi(B^E(x_j, 2r_j)) \leq \beta_N \Phi(U),$$

где постоянная  $\beta_N$  зависит только от топологической размерности  $N$  группы  $\mathbb{G}$ .

*Доказательство.* Пусть  $\mathcal{B}_i$  — подсемейства семейства  $\{B^E(x_j, 2r_j)\}$ , состоящие из взаимно-непересекающихся шаров, и такие, что  $\bigcup_{i=1}^{\beta_N} \mathcal{B}_i = \{B^E(x_j, 2r_j)\}$ . Тогда очевидно имеем

$$\sum_j \Phi(B^E(x_j, 2r_j)) = \sum_{i=1}^{\beta_N} \sum_{B^E(x_j, 2r_j) \in \mathcal{B}_i} \Phi(B^E(x_j, 2r_j)) \leq \sum_{i=1}^{\beta_N} \Phi(U) = \beta_N \Phi(U).$$

□

Доказательство следующего предложения основано на модификации рассуждений из [10, лемма 3.4].

**Предложение 3.6.** *Пусть отображение  $\varphi_0 : \Omega \rightarrow W$ , где  $\Omega, W$  — области в группе Карно  $\mathbb{G}$ , принадлежит классу Соболева  $W_{1,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$  и индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi_0^* : L_p^1(W) \cap \text{Lip}(W) \rightarrow L_q^1(\Omega), \quad 1 < q \leq p < \infty.$$

Тогда  $\varphi_0$  имеет конечное искажение.

*Доказательство.* Будем предполагать, что  $q < p$ ; случай  $q = p$  рассматривается аналогично. Применяя функцию множества  $\Phi$ , определённую выше, для любой функции  $u \in L_p^1(W) \cap \overset{\circ}{\text{Lip}}(V)$  можно записать

$$\|\varphi_0^* u \mid L_q^1(\Omega)\| \leq \Phi(V)^{1/\sigma} \|u \mid L_p^1(V)\|,$$

где  $V \subset W$  — открытое ограниченное подмножество. Фиксируем срезку  $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{G})$ , равную единице на  $B^E(0, 1)$  и нулю вне шара  $B^E(0, 2)$ . Подставляя в это неравенство функции  $h_j(z) = (z - y)_j \eta\left(\frac{z - y}{r}\right)$ ,  $j = 1, \dots, n$ , где  $(z - y)_j$  обозначает  $j$ -ю координату точки  $z - y \in \mathbb{G}$ ,  $B^E(y, 2r) \subset W$ , приходим к неравенству

$$\left( \int_{\varphi_0^{-1}(B^E(y, r))} |D_h \varphi_0|^q(x) dx \right)^{\frac{1}{q}} \leq C \Phi(B^E(y, 2r))^{1/\sigma} |B^E(y, 2r)|^{\frac{1}{p}}, \quad (3.9)$$

где  $C$  — некоторая постоянная, зависящая только от  $N$ .

Здесь и далее при выводе неравенств типа (3.9) следует учесть, что  $|\nabla_h h_j(z)| \leq |\nabla h_j(z)| \leq L$  для всех  $j \in \mathbb{N}$ , где  $\nabla h_j(z)$  — риманов градиент функции  $h_j$ , а постоянная  $L$  не зависит от  $j$ .

Пусть  $Z = \{x \in \Omega \setminus \Sigma_{\varphi_0} \mid \det \widehat{D}\varphi_0(x) = 0\}$ , где  $\Sigma_{\varphi_0}$  — множество сингулярности отображения  $\varphi_0$  нулевой мерой. Покажем, что

$$\int_Z |D_h \varphi_0|^q(x) dx = 0. \quad (3.10)$$

По формуле замены переменной имеем  $|\varphi_0(Z)| = 0$ . Фиксируем число  $\varepsilon > 0$  и открытое множество  $U \subset W$  такие, что  $U \supset \varphi_0(Z)$  и  $|U| < \varepsilon$ . Выберем согласно предложению 3.5 конечнократное покрытие  $\{B^E(y_i, r_i)\}$  открытого множества  $U$  евклидовыми шарами. Имеем

$$\sum_i |B^E(y_i, 2r_i)| < \beta_N \varepsilon.$$

Теперь, применяя неравенство (3.9) к каждому шару  $B^E(y_i, 2r_i)$ , и следствие 3.1, выводим

$$\begin{aligned} \int_Z |D_h \varphi_0|^q(x) dx &= \int_{Z \setminus \Sigma_{\varphi_0}} |D_h \varphi_0|^q(x) dx \leq \sum_{i=1}^{\infty} \int_{\varphi_0^{-1}(B(y_i, r_i))} |D_h \varphi_0|^q(x) dx \leq \\ &\leq C^q \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(B^E(y_i, 2r_i))^{\frac{q}{\sigma}} (|B^E(y_i, 2r_i)|)^{\frac{q}{p}} \leq C_2^q \Phi(U)^{\frac{p-q}{p}} |U|^{\frac{q}{p}}. \end{aligned}$$

В последней строке применено неравенство Гёльдера:  $\frac{q}{\sigma} + \frac{q}{p} = 1$ . Так как  $\Phi(U) \leq \|\varphi_0^*\|^\sigma < \infty$  и  $\varepsilon > 0$  — произвольное число, то (3.10) доказано, и следовательно,  $|D_h \varphi_0| = 0$  почти всюду на множестве  $Z$ .  $\square$

**3.3.  $\mathcal{N}^{-1}$ -свойство предельного отображения.** Далее мы будем применять формулу замены переменной с функцией кратности.

**Предложение 3.7** (см. [31, Theorem 5.3]). Пусть  $\varphi : U \rightarrow \mathbb{G}$  — любое отображение класса Соболева  $W_{1, \text{loc}}^1(U)$ . Тогда существует некоторое подмножество  $\Sigma_\varphi \subset U$  меры ноль такое, что отображение  $\varphi : U \setminus \Sigma_\varphi \rightarrow \mathbb{G}$  удовлетворяет  $\mathcal{N}$ -условию Лузина.

Кроме того, для любой неотрицательной измеримой функции  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  справедливы следующие утверждения:

1) функция  $\mathbb{G} \ni y \mapsto \sum_{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus \Sigma_\varphi} u(x)$  измерима;

2) верно равенство

$$\int_U u(x) |\det \widehat{D}\varphi(x)| dx = \int_{\mathbb{G}} \sum_{x \in \varphi^{-1}(y) \setminus \Sigma_\varphi} u(x) dy; \quad (3.11)$$

3) если функция  $u : U \rightarrow \mathbb{R}$  измерима, а функция

$$U \ni x \mapsto u(x) |\det \widehat{D}\varphi(x)|$$

интегрируема, то и вторая функция в формуле (3.11) также интегрируема, и верна формула (3.11).

В следующем утверждении мы установим двухсторонние оценки для нормы оператора композиции  $\varphi_0^*$ .

Для отображения  $\varphi_0 : \Omega \rightarrow W$  определим функцию искажения<sup>1</sup>

$$W \ni y \mapsto H_q(y) = \begin{cases} 0, & \text{если } \{x \in \varphi_0^{-1}(y) \setminus \Sigma_{\varphi_0} \mid \det \widehat{D}\varphi_0(x) \neq 0\} = \emptyset, \\ \left( \sum_{\substack{x \in \varphi_0^{-1}(y) \setminus \Sigma_{\varphi_0}, \\ \det \widehat{D}\varphi_0(x) \neq 0}} \frac{|D_h \varphi_0|^q(x)}{|\det \widehat{D}\varphi_0(x)|} \right)^{\frac{1}{q}}, & \text{иначе.} \end{cases} \quad (3.12)$$

Напомним, что в доказываемых ниже соотношениях (3.13)  $V$  — открытое множество в  $W$ ,  $\varphi_V^*$  — ограничение оператора композиции  $\varphi_0^*$  на подпространство  $L_p^1(V) \cap \mathring{\text{Lip}}(V)$ , а  $\|\varphi_V^*\|$  — норма оператора  $\varphi_V^* : L_p^1(V) \cap \mathring{\text{Lip}}(V) \rightarrow L_q^1(\Omega)$ .

**Предложение 3.8.** Пусть отображение  $\varphi_0 : \Omega \rightarrow W$ , где  $\Omega, W$  — области в  $\mathbb{G}$ , принадлежит классу Соболева  $W_{1,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$  и индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi_0^* : L_p^1(W) \cap \text{Lip}(W) \rightarrow L_q^1(\Omega), \quad 1 < q \leq p < \infty.$$

Тогда

$$\alpha_{q,p} \|H_q \mid L_\sigma(V)\| \leq \|\varphi_V^*\| = \Phi(V)^{\frac{1}{\sigma}} \leq \|H_q \mid L_\sigma(V)\| \quad (3.13)$$

для любого открытого множества  $V \subset W$ , где  $\alpha_{q,p}$  — положительная постоянная,  $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ , если  $q < p$ , и  $\Phi(V)^{\frac{1}{\sigma}} = \|\varphi_V^*\|$ ,  $\sigma = \infty$  при  $q = p$ .

*Доказательство.* Пусть  $q < p$ . Фиксируем срезку  $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{G})$ , равную единице на субримановом шаре  $B(0, 1)$  и нулю вне шара  $B(0, 2)$ . Подставляя в неравенство (3.9) субриманов шар  $B(y, 2r) \subset W$  вместо евклидова  $B^E(y, 2r)$ , и функции  $h_j(z) = (y^{-1}z)_j \eta(\delta_{r^{-1}}(y^{-1}z))$ , где  $(y^{-1}z)_j$  обозначает  $j$ -ю координату точки  $y^{-1}z \in \mathbb{G}$ ,  $j = 1, \dots, n$ , в случае  $q < p$  получаем

$$\int_{\varphi_0^{-1}(B(y,r))} |D_h \varphi_0|^q(x) dx \leq \tilde{C}^q \left( \frac{\Phi(B(y, 2r))}{|B(y, 2r)|} \right)^{\frac{q}{\sigma}} |B(y, r)|.$$

Применим к левой части этого соотношения формулу (3.11) замены переменной

$$\begin{aligned} \int_{\varphi_0^{-1}(B(y,r))} |D_h \varphi_0|^q(x) dx &= \int_{\varphi_0^{-1}(B(y,r)) \setminus Z} \frac{|D_h \varphi_0|^q(x)}{|\det \widehat{D}\varphi_0(x)|} |\det \widehat{D}\varphi_0(x)| dx = \\ &= \int_{B(y,r)} \sum_{x \in \varphi_0^{-1}(y) \setminus (\Sigma_{\varphi_0} \cup Z)} \frac{|D_h \varphi_0|^q(x)}{|\det \widehat{D}\varphi_0(x)|} dy \leq \tilde{C}^q \left( \frac{\Phi(B(y, 2r))}{|B(y, 2r)|} \right)^{\frac{q}{\sigma}} |B(y, r)|. \end{aligned}$$

Из теоремы Лебега о дифференцировании интеграла и свойств производной аддитивной функции множества (см. предложение 3.4) вытекает

$$H_q^\sigma(y) = \left( \sum_{x \in \varphi_0^{-1}(y) \setminus (\Sigma_{\varphi_0} \cup Z)} \frac{|D_h \varphi_0|^q(x)}{|\det \widehat{D}\varphi_0(x)|} \right)^{\frac{p}{p-q}} \leq \tilde{C}^\sigma \Phi'(y)$$

<sup>1</sup>Функция (3.12) определена в [5] для операторов композиции в евклидовых пространствах.

для п. в.  $y \in W$  таких, что  $\varphi_0^{-1}(y) \setminus (\Sigma_{\varphi_0} \cup Z) \neq \emptyset$ , где  $H_q$  определена формулой (3.12). Интегрируя последнее неравенство по открытому множеству  $V \subset W$ , получим

$$\|H_q \mid L_\sigma(V)\|^\sigma = \int_V \left( \sum_{x \in \varphi_0^{-1}(y) \setminus (\Sigma_{\varphi_0} \cup Z)} \frac{|D_h \varphi_0|^q(x)}{|\det \widehat{D} \varphi_0(x)|} \right)^{\frac{\sigma}{p-q}} dy \leq \tilde{C}^\sigma \int_V \Phi'(y) dy \leq \tilde{C}^\sigma \Phi(V) = \tilde{C}^\sigma \|\varphi_V^*\|^\sigma.$$

Таким образом, для любого открытого множества  $V \subset W$  доказано  $\|H_q \mid L_\sigma(V)\| \leq \tilde{C} \|\varphi_V^*\|$ .

Фиксируем открытое множество  $V \subset W$ . Покажем, что для любой функции  $u \in L_p^1(W) \cap \text{Lip}(V)$  выполняется неравенство  $\|\varphi_0^* u \mid L_q^1(\Omega)\| \leq \|H_q \mid L_\sigma(V)\| \cdot \|u \mid L_p^1(W)\|$ ,  $q < p$ . Так как  $u \circ \varphi_0$  принадлежит классу  $\text{ACL}(\Omega)$ , то

$$\begin{aligned} \|\varphi_0^* u \mid L_q^1(\Omega)\| &\leq \left( \int_{\Omega \setminus Z} (|\nabla_h u|(\varphi_0(x)) |D_h \varphi_0(x)|)^q dx \right)^{1/q} \leq \\ &\leq \left( \int_V |\nabla_h u|^q(y) \left( \sum_{x \in \varphi_0^{-1}(y) \setminus (\Sigma_{\varphi_0} \cup Z)} \frac{|D_h \varphi_0|^q(x)}{|\det \widehat{D} \varphi_0(x)|} \right) dy \right)^{\frac{1}{q}}. \end{aligned}$$

Используя неравенство Гёльдера, выводим оценку

$$\|\varphi_0^* u \mid L_q^1(\Omega)\| \leq \left( \int_V H_q^\sigma(y) dy \right)^{1/\sigma} \left( \int_V |\nabla_h u|^p(y) dy \right)^{1/p}.$$

Из этого неравенства получаем правую часть соотношений (3.13). При  $q = p$  доказательство упрощается.  $\square$

**Лемма 3.2.** Пусть  $F$  — измеримое подмножество шара  $B = B(0, r)$  положительной меры. Для всех  $u \in W_q^1(B)$ ,  $1 \leq q < \nu$ ,  $u|_F = 0$ , выполняется неравенство

$$\left( \int_B |u(x)|^{q^*} dx \right)^{\frac{1}{q^*}} \leq \frac{C r^{\frac{\nu}{q}}}{|F|^{\frac{1}{q}}} \left( \int_B |\nabla_h u(x)|^q dx \right)^{\frac{1}{q}}, \quad (3.14)$$

где  $\frac{1}{q^*} = \frac{1}{q} - \frac{1}{\nu}$ , а  $C$  — некоторая постоянная, не зависящая от функции  $u$ .

*Доказательство.* Идея приводимого ниже доказательства заимствована из [14, § 10.1] (см. в [6] её применение в  $\mathbb{R}^n$ ). Достаточно доказать лемму для шара  $B = B(0, 1)$ , а затем воспользоваться растяжением  $x \mapsto \delta_t x$ ,  $t > 0$ . Напомним, что мера шара  $B(0, 1)$  равна 1:  $|B(0, 1)| = 1$ . Рассмотрим произвольную функцию  $u \in W_q^1(B)$ ,  $u|_F = 0$ , и положим  $M = \|u \mid L_q(B)\| > 0$ . Пусть для определённости  $u_B = \frac{1}{|B|} \int_B u dx \geq 0$  (иначе вместо  $u$  следует рассмотреть функцию  $-u$ ). Тогда

$$|F| \leq \|1 - M^{-1}u \mid W_q^1(B)\|^q \leq C M^{-q} \|\nabla_h u \mid L_q(B)\|^q + C \|1 - M^{-1}u \mid L_q(B)\|^q.$$

Отсюда получаем

$$M^q |F| \leq C \|\nabla_h u \mid L_q(B)\|^q + C \|M - u \mid L_q(B)\|^q. \quad (3.15)$$

Заметим, что  $|M - u_B| = \left| \|u \mid L_q(B)\| - \|u_B \mid L_q(B)\| \right| \leq \|u - u_B \mid L_q(B)\|$ . Следовательно, применяя неравенство Пуанкаре [25, Theorem 4] во второй строке формулы (3.16), имеем

$$\begin{aligned} \|M - u \mid L_q(B)\| &\leq \|M - u_B \mid L_q(B)\| + \|u - u_B \mid L_q(B)\| \leq \\ &\leq 2 \|u - u_B \mid L_q(B)\| \leq C_0 \|\nabla_h u \mid L_q(B)\|, \end{aligned} \quad (3.16)$$

где  $C_0$  — постоянная, не зависящая от  $u$ . Отсюда и из (3.15) вытекает неравенство

$$\|u \mid L_q(B)\| \leq \frac{C_1}{|F|^{\frac{1}{q}}} \|\nabla_h u \mid L_q(B)\|,$$

где  $C_1 = (C + C C_0^q)^{\frac{1}{q}}$ .

Из теоремы вложения Соболева [25, Theorem 5] и последнего неравенства выводим

$$\begin{aligned} \|u \mid L_{q^*}(B)\|^q &\leq c(\|u \mid L_q(B)\|^q + \|\nabla_h u \mid L_q(B)\|^q) \leq \\ &\leq \frac{C}{2} \left(1 + \frac{1}{|F|}\right) \|\nabla_h u \mid L_q(B)\|^q \leq \frac{C}{|F|} \|\nabla_h u \mid L_q(B)\|^q. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Из (3.17) получаем доказательство леммы.  $\square$

Сформулируем на группах Карно применяемую ниже лемму о покрытиях типа Уитни.

**Лемма 3.3** (см. [23, Лемма 1.67]). *Пусть  $U$  — открытое подмножество группы  $\mathbb{G}$  конечной меры. Существует счётное покрытие  $U$  субримановыми шарами  $\{B(y_i, r_i)\}$  такое, что:*

- 1)  $U = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(y_i, r_i) = \bigcup_{i=1}^{\infty} B(y_i, 2r_i)$ ;
- 2) кратность  $M$  покрытия  $\{B(y_i, 2r_i)\}$  не превосходит  $48^\nu$ .

**Предложение 3.9.** *Пусть непостоянное отображение  $\varphi_0 : \Omega \rightarrow W$ , где  $\Omega, W$  — ограниченные области в  $\mathbb{G}$ , принадлежит классу Соболева  $W_{1,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{G})$  и индуцирует ограниченный оператор композиции*

$$\varphi_0^* : L_p^1(W) \cap \text{Lip}(W) \rightarrow L_q^1(\Omega), \quad 1 < q \leq p \leq \nu.$$

Тогда  $|\varphi^{-1}(E)| = 0$  при  $|E| = 0$ ,  $E \subset W$ .

*Доказательство.* Поскольку области  $\Omega$  и  $W$  ограничены, можно считать, что  $p = \nu$  и  $1 < q < \nu$ . Действительно, если отображение  $\varphi_0^*$  индуцирует ограниченный оператор композиции  $\varphi_0^* : L_p^1(W) \cap \text{Lip}(W) \rightarrow L_q^1(\Omega)$ ,  $1 < q \leq p < \infty$ , то в силу неравенства Гёльдера для всех  $q' \in (1; q)$ ,  $p' \in (p; \infty)$  и  $u \in L_{p'}^1(W) \cap \text{Lip}(W)$  имеем

$$|\Omega|^{\frac{q'}{q}-1} \|\varphi_0^* u \mid L_q^1(\Omega)\| \leq \|\varphi_0^* u \mid L_q^1(\Omega)\| \leq \|\varphi_0^*\| \cdot \|u \mid L_{p'}^1(W)\| \leq |W|^{1-\frac{p'}{p}} \|\varphi_0^*\| \|u \mid L_{p'}^1(W)\|.$$

Последнее означает, что  $\varphi_0$  индуцирует ограниченный оператор композиции  $\varphi_0^* : L_{p'}^1(W) \cap \text{Lip}(W) \rightarrow L_q^1(\Omega)$ . Полагаем далее  $p = \nu$ ,  $1 < q < \nu$ .

**1ый шаг.** Фиксируем срезку  $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{G})$ , равную единице на субримановом шаре  $B(0, 1)$  и нулю вне шара  $B(0, 2)$ . Подставляя в неравенство (3.9) субриманов шар  $2B = B(y, 2r) \subset W$  вместо евклидова  $B^E(y, 2r)$ , и функции  $f(z) = \eta(\delta_{r^{-1}}(y^{-1}z))$ , получаем

$$\|\varphi_0^* f \mid L_q^1(\Omega)\| \leq C_1 \Phi(2B)^{\frac{1}{\sigma}}.$$

Фиксируем в  $W$  произвольное борелевское множество  $E$  нулевой меры. Так как отображение  $\varphi_0$  имеет конечное искажение (см. предложение 3.6), то  $\varphi_0^{-1}(E) \neq \Omega$  (в противном случае  $\det \widehat{D}\varphi_0 = 0$  в  $\Omega$  и, следовательно,  $D_h \varphi_0 = 0$  п. в. в  $\Omega$ , откуда получаем, что  $\varphi_0$  — постоянное отображение). Поэтому найдётся шар  $Q \subset \Omega$  такой, что  $2Q \subset \Omega$  и  $|Q \setminus \varphi_0^{-1}(E)| > 0$  (здесь  $2Q$  — субриманов шар с тем же центром, что и  $Q$ , и вдвое большим радиусом сравнительно с радиусом шара  $Q$ ).

Поскольку компоненты данного отображения измеримы, то по теореме Лузина найдётся компакт  $T \subset Q \setminus \varphi_0^{-1}(E)$  положительной меры такой, что  $\varphi_0 : T \rightarrow W$  непрерывно. Тогда образ  $\varphi_0(T) \subset W$  компактен и  $\varphi_0(T) \cap E = \emptyset$ .

Рассмотрим произвольное открытое множество  $U \supset E$ ,  $\varphi_0(T) \cap U = \emptyset$ ,  $U \subset W$ . Пусть  $\{B(y_i, r_i)\}$  — набор шаров, выбранный согласно лемме 3.3, такой, что наборы  $\{B(y_i, r_i)\}$  и  $\{B(y_i, 2r_i)\}$  образуют покрытия множества  $U$ , и кратность  $M$  покрытия  $\{B(y_i, 2r_i)\}$  конечна ( $B(y_i, 2r_i) \subset U$  для всех  $i \in \mathbb{N}$ ).

Тогда для функции  $f_i$ , ассоциированной с шаром  $B(y_i, r_i)$ ,  $f_i(z) = \eta(\delta_{r_i^{-1}}(y_i^{-1}z))$ , имеем  $\varphi_0^* f_i = 1$  на множестве  $\varphi_0^{-1}(B(y_i, r_i))$  и  $\varphi_0^* f_i = 0$  вне прообраза  $\varphi_0^{-1}(B(y_i, 2r_i))$ , в частности,  $\varphi_0^* f_i = 0$  на множестве  $T$ . Кроме того, для неё справедлива оценка

$$\|\varphi_0^* f_i \mid L_q^1(Q)\| \leq \|\varphi_0^* f_i \mid L_q^1(\Omega)\| \leq C_1 \Phi(B(y_i, 2r_i))^{\frac{1}{\sigma}}.$$

В силу неравенства Пуанкаре (3.14) справедливо соотношение

$$\left( \int_Q |u|^{q^*} dx \right)^{\frac{1}{q^*}} \leq \frac{Cr^{\frac{\nu}{q}}}{|T|^{\frac{1}{q}}} \left( \int_Q |\nabla_h u|^q dx \right)^{\frac{1}{q}},$$

где  $q^* = q\nu/(\nu - q)$ ,  $r$  — радиус шара  $Q$ ,  $u \in W_q^1(Q)$  — произвольная функция, равная нулю на множестве  $T \subset Q$ , а  $C$  — постоянная, не зависящая от функции  $u$ . Применяя неравенство Пуанкаре к функции  $\varphi_0^* f_i$  вместо  $u$ , с учётом двух последних оценок и равенства  $\sigma = q^*$  получаем

$$|\varphi_0^{-1}(B(y_i, r_i)) \cap Q| \leq C_3 \Phi(B(y_i, 2r_i)).$$

Применяя правую часть соотношений (3.13), выводим неравенства

$$\begin{aligned} |\varphi_0^{-1}(E) \cap Q| &\leq \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_0^{-1}(B(y_i, r_i)) \cap Q| \leq C_3 \sum_{i=1}^{\infty} \Phi(B(y_i, 2r_i)) \leq \\ &\leq C_3 \sum_{i=1}^{\infty} \|H_q | L_{\sigma}(B(y_i, 2r_i))\|^{\sigma} \leq C_3 M \|H_q | L_{\sigma}(U)\|^{\sigma}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

В силу свойств интеграла Лебега функция множества  $U \mapsto \|H_q | L_{\sigma}(U)\|^{\sigma}$  абсолютно непрерывна. Следовательно, правая часть (3.18) может быть сделана сколь угодно малой при подходящем выборе открытого множества  $U \supset E$ .

Таким образом,  $\mathcal{N}^{-1}$ -свойство отображения  $\varphi_0 : Q \rightarrow \mathbb{G}$  доказано.

**2ой шаг.** Покажем, что отображение  $\varphi_0$  обладает  $\mathcal{N}^{-1}$ -свойством Лузина на любом другом субримановом шаре  $Q_1 = B(z, r_1) \subset \Omega$  таком, что  $B(z, 2r_1) \subset \Omega$ . Шар, выбранный на предыдущем шаге, обозначим символом  $Q_0 = Q = B(x_0, r_0)$ . Пусть  $\gamma : [0, l] \rightarrow \Omega$  — спрямляемая в метрике Карно—Каратеодори кривая с концевыми точками  $\gamma(0) = x_0$ ,  $\gamma(l) = z$  и параметризованная длиной дуги (построение кривой с указанными свойствами можно найти в [7, лемма 3]). Пусть ещё  $\Delta = \text{dist}(\gamma, \partial\Omega) = \inf_{t \in [0, l]} \text{dist}(\gamma(t), \partial\Omega)$ . На отрезке  $[0, l]$  отметим точки  $0 = s_0 < s_1 < \dots < s_j < \dots < s_m = l$  так, чтобы  $d_{cc}(\gamma(s_{j-1}), \gamma(s_j)) \leq \Delta/4$ ,  $j = 1, 2, \dots, m$ . Обозначим  $x_j = \gamma(s_j)$ ,  $j = 1, 2, \dots, m-1$ ,  $\gamma(s_m) = \gamma(l) = z$ .

Очевидно, шар  $B(x_1, d_{cc}(x_0, x_1))$  имеет с шаром  $Q_0$  непустое пересечение  $W_1$ , на котором  $|\varphi_0^{-1}(E) \cap W_1| = 0$ . Следовательно, шар  $B(x_1, d_{cc}(x_0, x_1))$  можно взять в качестве шара  $Q$  на первом шаге рассуждения. В результате придём к выводу, что

$$|\varphi_0^{-1}(E) \cap B(x_1, d_{cc}(x_0, x_1))| = 0.$$

Продолжая этот процесс по индукции, докажем  $\mathcal{N}^{-1}$ -свойство отображения  $\varphi_0 : B_1 \rightarrow \mathbb{G}$  (на последнем шаге индукции следует взять шар  $Q_1 = B(z, r_1) = B(\gamma(s_m), r_1)$ ).

**3ий шаг.** Остается заметить, что область  $\Omega$  можно покрыть счётным набором субримановых шаров  $Q_0, Q_1, \dots, Q_k, \dots$ , на каждом из которых мера пересечения  $\varphi_0^{-1}(E) \cap Q_k$  равна нулю. Следовательно, прообраз  $\varphi_0^{-1}(E)$  имеет нулевую меру,  $\square$

Предложение 3.9 завершает доказательство теоремы 3.1.

**3.4. Доказательство равенства  $|D_h \varphi_0|(x) = |\nabla \varphi_0|(x)$  для п. в.  $x \in \Omega$ .** Мы предполагаем, что в этом пункте выполнены условия теоремы 3.1.

Пусть  $Z = \{y \in \Omega \mid \det \widehat{D} \varphi_0(y) = 0\}$  — множество нулей якобиана отображения  $\varphi_0$ . Дополнение  $\Omega \setminus Z$  с точностью до множества  $\Sigma$  нулевой меры можно представить в виде не более чем счётной дизъюнктивной совокупности измеримых множеств  $T_i$  (т. е.  $\Omega \setminus Z = \Sigma \cup \bigcup_{i=1}^{\infty} T_i$ ), на каждом из которых отображение  $\varphi_0 : T_i \rightarrow \mathbb{G}$  липшицево относительно метрики Карно—Каратеодори [31]. Известно [31], что липшицево отображение  $\varphi_0 : T_i \rightarrow \mathbb{G}$   $\mathcal{P}$ -дифференцируемо в почти всех точках плотности 1 множества  $T_i$ ,  $i \in \mathbb{N}$ . Если  $x \in T_i$  — точка  $\mathcal{P}$ -дифференцируемости, то для некоторого гомоморфизма  $D_{\mathcal{P}} \varphi_0(x) : \mathbb{G} \rightarrow \mathbb{G}$  групп Карно имеем

$$d_{cc}([D_{\mathcal{P}} \varphi_0(x) \langle x^{-1} y \rangle]^{-1} \varphi_0(x)^{-1} \varphi_0(y)) = o(d_{cc}(x^{-1} y)) \quad \text{при } y \rightarrow x, y \in T_i, \quad (3.19)$$

где  $d_{cc}(z) = d_{cc}(z, 0)$ . Соответствующий гомоморфизму  $D_{\mathcal{P}}\varphi_0(x)$  гомоморфизм  $\widehat{D}\varphi_0(x) : \mathfrak{g} \rightarrow \mathfrak{g}$  алгебр Ли однозначно определяется горизонтальным дифференциалом  $D_h\varphi_0(x)$  и связан с  $D_{\mathcal{P}}\varphi_0(x)$  соотношением  $D_{\mathcal{P}}\varphi_0(x) = \exp \circ \widehat{D}\varphi_0(x) \circ \exp^{-1}$ . Мы полагаем  $\det D_{\mathcal{P}}\varphi_0(x) = \det \widehat{D}\varphi_0(x)$ .

**Свойство 3.1.** Пусть  $z \in \mathbb{G}$  — фиксированная точка, а  $\Omega \ni x \mapsto (u_z \circ \varphi_0)(x) = d_{cc}(\varphi_0(x), z)$  — композиция отображения  $\varphi_0$  с функцией  $u_z$ . Тогда для п. в.  $x \in \Omega$  имеем равенство

$$\nabla_h(u_z \circ \varphi_0)(x) = \begin{cases} [\nabla_h u_z](\varphi_0(x))[D_h\varphi_0(x)]^{\text{tr}}, & \text{если } x \in \Omega \setminus Z, \\ 0, & \text{если } x \in Z. \end{cases} \quad (3.20)$$

Отсюда, в частности, получаем

$$|\nabla_h(u_z \circ \varphi_0)(x)| \leq |D_h\varphi_0(x)|. \quad (3.21)$$

*Доказательство.* Пусть  $S \subset \mathbb{G}$  — множество нулевой меры. Заметим, что если мера прообраза  $\varphi^{-1}(S)$  положительна, то по формуле замены переменной  $\det D_{\mathcal{P}}\varphi(x) = 0$  для п. в.  $x \in \varphi^{-1}(S)$ . Следовательно, с точностью до множества меры нуль (т. е.  $|\varphi^{-1}(S) \setminus Z| = 0$ ) имеем  $\varphi^{-1}(S) \subset Z$ . В силу конечности искажения имеем также  $D_h\varphi(x) = 0$  на  $Z$ .

Если  $x \in Z$  — точка аппроксимативной  $\mathcal{P}$ -дифференцируемости отображения  $\varphi_0$ , то  $D_{\mathcal{P}}\varphi_0(x) = 0$ . Из (3.19) выводим

$$\begin{aligned} |(u_z \circ \varphi_0)(y) - (u_z \circ \varphi_0)(x)| &= |d_{cc}(\varphi_0(y), z) - d_{cc}(\varphi_0(x), z)| \leq d_{cc}(\varphi_0(y), \varphi_0(x)) = \\ &= d_{cc}(D_{\mathcal{P}}\varphi_0(x)\langle x^{-1}y \rangle) + o(d_{cc}(x^{-1}y)) = o(d_{cc}(x^{-1}y)) \quad \text{при } Z \ni y \rightarrow x. \end{aligned}$$

Таким образом, второе равенство в (3.20) доказано.

Для доказательства первого равенства в (3.20) рассмотрим точку  $x \in T_i$  плотности 1, в которой отображение  $\varphi_0$   $\mathcal{P}$ -дифференцируемо (как отмечено выше, таковыми будут п. в. точки  $T_i$ ). Можно предполагать, что  $\varphi_0(x)$  — точка  $\mathcal{P}$ -дифференцируемости функции  $\mathbb{G} \ni y \mapsto d_{cc}(y, z)$ . Функция  $T_i \ni x \mapsto u_z(\varphi_0(x))$   $\mathcal{P}$ -дифференцируема как композиция  $\mathcal{P}$ -дифференцируемых отображений [32, § 2, теорема 2.1].

Таким образом, (3.20) доказано.  $\square$

**Определение 3.1.** Пусть  $\varphi_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{G}$  — отображение класса  $W_q^1(\Omega; \mathbb{G})$ . Семейство функций  $(|\nabla_h(u_z \circ \varphi_0)(x)|)_{z \in \mathbb{G}}$  ограничено в  $L_q(\Omega)$  в силу неравенств  $|\nabla_h(u_z \circ \varphi_0)(x)| \leq |D_h\varphi_0(x)|$ , выполняющихся п. в. в  $\Omega$  (см. (3.21)). Ввиду известных результатов теории  $K$ -пространств [13] совокупность всех верхних мажорант для семейства  $(|\nabla_h(u_z \circ \varphi_0)(x)|)_{z \in \mathbb{G}}$  имеет наименьший элемент. Он обозначается символом  $|\nabla\varphi_0|(x)$  и называется *верхним градиентом* отображения  $\varphi_0$ .

**Лемма 3.4.** Сильный градиент совпадает с верхним: для п. в.  $x \in \Omega$  имеет место равенство

$$|D_h\varphi_0|(x) = |\nabla\varphi_0|(x).$$

*Доказательство.* В доказательстве этой леммы мы применяем некоторые идеи и результаты работ [16, 17, 31].

Для доказательства неравенства  $|D_h\varphi_0|(x) \leq |\nabla\varphi_0|(x)$  рассмотрим точку  $x \in T_i$  плотности 1, в которой существуют горизонтальные производные  $X_i(u_z \circ \varphi_0)(x)$ ,  $i = 1, \dots, n$ , и отображение  $\varphi_0$   $\mathcal{P}$ -дифференцируемо (как отмечено выше, таковыми будут п. в. точки  $T_i$ ).

Пусть ещё  $D_h\varphi_0(x)$  — горизонтальная часть аппроксимативного дифференциала  $D\varphi_0(x)$  в точке  $x$ , а её норма достигается на векторе  $v \in \mathfrak{g}_1$  единичной длины:  $|D_h\varphi_0(x)| = |D_h\varphi_0(x)\langle v \rangle|$ .

Ниже и далее в доказательстве счётный набор векторов  $\{w_l \in \mathfrak{g}_1\}_{l \in \mathbb{N}}$  единичной длины всюду плотен на сфере  $S(0, 1) \cap \mathfrak{g}_1$  подпространства  $\mathfrak{g}_1$ . Если  $E$  — измеримое множество в  $\mathbb{G}$ , то почти все точки  $E$  будут точками линейной плотности 1 вдоль  $w_l$ :

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{|\{s \in [-t, t] \mid x \exp tw_l \in E\}|}{2t} = 1, \quad l \in \mathbb{N}$$

(см. [31, Property 2.1]).

Если  $x \in T_i \setminus \varphi_0^{-1}(z)$  — точка  $\mathcal{P}$ -дифференцируемости отображения  $\varphi_0$ , то для точки  $y = x \exp tw_l \in T_i$ ,  $w_l \in S(0, 1) \cap \mathfrak{g}_1$ , применяя (3.19), получаем

$$|u_z(x \exp tw_l) - u_z(x)| = |u_z(y) - u_z(x)| = |d_{cc}(\varphi_0(y), z) - d_{cc}(\varphi_0(x), z)| \leq d_{cc}(\varphi_0(y), \varphi_0(x)) =$$

$$= d_{cc}(D_{\mathcal{P}}\varphi_0(x)\langle x^{-1}y \rangle) + o(d_{cc}(x^{-1}y)) = td_{cc}(\exp D_h\varphi_0(x)\langle w_l \rangle) + o(t) \quad \text{при } t \rightarrow 0. \quad (3.22)$$

В этих обозначениях имеем

$$\begin{aligned} |D_h\varphi_0|(x) &= |D_h\varphi_0(x)\langle v \rangle| = \sup_{\substack{w_l \in \mathfrak{g}_1, \\ |w_l|=1}} |D_h\varphi_0(x)\langle w_l \rangle| = \\ &= \sup_{\substack{w_l \in \mathfrak{g}_1, \\ |w_l|=1}} \lim_{\substack{t \rightarrow 0, \\ x \exp(tw_l) \in T_i}} \frac{d_{cc}(\varphi_0(x \exp tw_l), \varphi_0(x))}{t} = \sup_{\substack{w_l \in \mathfrak{g}_1, \\ |w_l|=1}} \lim_{\substack{t \rightarrow 0, \\ x \exp(tw_l) \in T_i}} \frac{u_{\varphi_0(x)}(\varphi_0(x \exp tw_l))}{t} = \\ &= \sup_{\substack{w_l \in \mathfrak{g}_1, \\ |w_l|=1}} |\langle \nabla_h(u_{\varphi_0(x)} \circ \varphi_0)(x), w_l \rangle| \leq |\nabla_h(u_{\varphi_0(x)} \circ \varphi_0)(x)| \leq |\nabla\varphi_0|(x). \end{aligned} \quad (3.23)$$

Для доказательства обратного неравенства к (3.23) применим (3.21). В точках дополнения  $x \in T_i \setminus Z$  имеем

$$|\nabla_h(u_z \circ \varphi_0)(x)| = \sup_{w_l \in \mathfrak{g}_1, |w_l|=1} |D_h\varphi_0(x)| \cdot |w_l| \leq |D_h\varphi_0(x)|.$$

А в точках  $x \in Z$  получаем  $|\nabla_h(u_z \circ \varphi_0)(x)| = |D_h\varphi_0(x)| = 0$ . Лемма 3.4 доказана.  $\square$

**Предложение 3.10.** В условиях теоремы 3.1 отображение  $\varphi_0$  не только принадлежит  $W_q^1(\Omega; \mathbb{G})$ , но и удовлетворяет соотношению

$$\int_{\Omega} |D_h\varphi_0(x)|^q \alpha(x) dx \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |D_h\varphi_k(x)|^q \alpha(x) dx \quad (3.24)$$

для любой неотрицательной ограниченной измеримой функции  $\alpha : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ .

*Доказательство.* В предложении 3.3 доказано, что если последовательность  $\left\{ \int_{\Omega} |D_h\varphi_k(x)|^q dx \right\}$  ограничена, то  $\varphi_0$  принадлежит классу  $W_q^1(\Omega; \mathbb{G})$ .

Последовательность функций  $g_k(x) = |D_h\varphi_k(x)|^q$  ограничена в  $L_q(\Omega)$ . Поскольку пространство  $L_q(\Omega)$  рефлексивно, последовательность  $g_k$  можно считать слабо сходящейся к неотрицательной функции  $g \in L_q(\Omega)$ .

Так как неравенство (3.7) выполняется для всех  $z \in \mathbb{G}$ , для верхней огибающей  $|\nabla\varphi_0|(x)$  (см. определение 3.1) имеем неравенство  $|\nabla\varphi_0|(x) \leq g(x)$  для п. в.  $x \in \Omega$ . Отсюда получаем (3.24). Действительно, с одной стороны,

$$\int_{\Omega} |\nabla\varphi_0|^q(x) \alpha(x) dx \leq \int_{\Omega} g^q(x) \alpha(x) dx \leq \varliminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} g_k^q(x) \alpha(x) dx = \varliminf_{k \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |D_h\varphi_k|^q(x) \alpha(x) dx,$$

а с другой  $|D_h\varphi_0|^q(x) \leq |\nabla\varphi_0|^q(x)$  (см. неравенство (3.23)). Предложение 3.10 доказано.  $\square$

#### 4. ИНЪЕКТИВНОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ

В этом разделе мы формулируем условия, при которых предельное отображение  $\varphi_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{H}$  почти всюду инъективно. Напомним, что отображение  $\varphi : \Omega \rightarrow \mathbb{G}$  называется *инъективным почти всюду*, если найдётся множество  $S$  такое, что  $|S| = 0$  и отображение  $\varphi : \Omega \setminus S \rightarrow \mathbb{G}$  — инъекция (здесь  $\Omega \subset \mathbb{G}$  — область на группе  $\mathbb{G}$ ).

**Теорема 4.1.** Пусть  $\mathbb{H}$  — группа Карно  $H$ -типа,  $q \in (\nu - 1; \nu]$ ,  $\Omega, \Omega' \subset \mathbb{H}$  — ограниченные области с условием  $|\partial\Omega'| = 0$ ,  $\varphi_0 \in L_{1,\text{loc}}(\Omega; \mathbb{H})$  — непостоянное отображение. Пусть  $\{\varphi_k : \Omega \rightarrow \Omega'\}$  — последовательность гомеоморфизмов класса  $W_{q,\text{loc}}^1(\Omega; \mathbb{H}) \cap FD(\Omega; \mathbb{H})$  таких, что:

- 1)  $\{\varphi_k\}$  сходится к  $\varphi_0$  в  $L_{1,\text{loc}}(\Omega; \mathbb{H})$ ;
- 2) последовательность  $\{K_{\varphi_k, \nu}\}$  ограничена в  $L_{\sigma}(\Omega)$ , где  $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{\nu}$  ( $\sigma = \infty$  при  $q = \nu$ ).

Тогда справедливы заключения теоремы 3.1 с  $p = \nu$  и отображение  $\varphi_0$  почти всюду инъективное.

**Предложение 4.1.** Пусть  $\mathbb{H}$  — группа Карно  $H$ -типа,  $\Omega' \subset \mathbb{H}$  — область, а  $\psi \in W_\nu^1(\Omega'; \mathbb{H})$  — гомеоморфизм.

Тогда для точек  $x, y \in \Omega'$ ,  $y \in B_\rho(x, r)$ ,  $r < r_0/2$ ,  $r_0 = \frac{1}{13c}\rho(x, \partial\Omega')$  выполняется соотношение

$$d_{cc}(\psi(x), \psi(y)) \leq C_1 \left( \ln \frac{r_0}{r} \right)^{-\frac{1}{\nu}} \left( \int_{B_\rho(a, r_0)} [M_{6r_0}(D_h\psi)(z)]^p dz \right)^{\frac{1}{\nu}}, \quad (4.1)$$

где  $c$  — постоянная в обобщённом неравенстве треугольника (см. определение однородной нормы и её свойства в разделе 2 работы),  $B_\rho(x, r)$  — шар в однородной норме, а постоянная  $C_1$  не зависит ни от  $x, y$ , ни от  $\psi$ .

В доказательстве неравенства (4.1) мы применим следующий результат:

**Теорема 4.2** (см. [1, теорема 3]). Пусть  $\mathbb{G}$  — двухступенчатая группа Карно,  $\rho \in C^{1,1}(\mathbb{G} \setminus \{0\})$  — однородная норма на  $\mathbb{G}$ ,  $f \in L_p^1(\mathbb{G})$ ,  $p > \nu - 1$ . Тогда функцию  $f$  можно переопределить на множестве нулевой меры так, чтобы для п. в.  $r > 0$  она была непрерывной по Гёльдеру на сфере  $S_\rho(r) = \{x \in \mathbb{G} : \rho(x) = r\}$  и

$$|f(x) - f(y)| \leq C \rho(x, y)^{1 - \frac{\nu-1}{p}} \left( \int_{S_\rho(r)} [M_{6r}(\nabla_h f)(\omega)]^p d\omega \right)^{\frac{1}{p}} \quad (4.2)$$

для всех  $x, y \in S_\rho(r)$ , где постоянная  $C > 0$  не зависит от выбора  $f$  и  $r$ .

Здесь  $d\omega$  — поверхностная мера на сфере  $S_\rho(r)$  (см. [1, Lemma 4]), а

$$M_t(g)(z) = \sup_{0 < s \leq t} \frac{1}{|B_\rho(z, s)|} \int_{B_\rho(z, s)} |g(y)| dy$$

— усеченная максимальная функция Харди—Литтлвуда.

*Доказательство предложения 4.1.* Фиксируем точку  $a \in \Omega'$  и число  $r_0$  такое, чтобы  $\rho(z, \partial\Omega') > 12r_0$  для любой точки  $z \in S_\rho(a, r_0)$  (это то же самое, что  $\rho(S_\rho(a, r_0), \partial\Omega') > 12r_0$ ). Для этого положим  $\alpha = 13cr_0$  и проверим, что при выполнении условий  $\alpha \leq \rho(a, \partial\Omega') \leq c(\rho(a, S_\rho(a, r_0)) + \rho(S_\rho(a, r_0), \partial\Omega'))$  имеем

$$13cr_0 \leq cr_0 + c\rho(S_\rho(a, r_0), \partial\Omega') \implies 12r_0 < \rho(S_\rho(a, r_0), \partial\Omega').$$

Теперь фиксируем точку  $a \in \Omega'$  и число  $r_0$  такие, чтобы  $\rho(z, \partial\Omega') \geq 12r_0$  для любой точки  $z \in S_\rho(a, r_0)$ . Пусть ещё  $Z_0$  — счётное всюду плотное множество в  $\mathbb{G}$ .

Для фиксированной точки  $z \in Z_0$  рассмотрим функцию

$$\Omega' \ni x \mapsto d_{cc}(z, \psi(x)).$$

Эта функция удовлетворяет условиям теоремы 4.2 при  $p = \nu$ , и кроме того

$$|\nabla_h d_{cc}(z, \psi(x))| \leq |D_h\psi(x)|$$

для п. в.  $x \in \Omega'$ . При  $p = \nu$  из неравенства (4.2) на почти каждой сфере  $S_\rho(a, t)$ ,  $t < r_0$ , имеем оценку

$$|d_{cc}(z, \psi(x)) - d_{cc}(z, \psi(y))| \leq C \rho(x, y)^{\frac{1}{\nu}} \left( \int_{S_\rho(a, t)} [M_{6t}(D_h\psi)(\omega)]^\nu d\omega \right)^{\frac{1}{\nu}} \quad (4.3)$$

для всех точек  $x, y \in S_\rho(a, t)$ . Заметим, что в неравенстве (4.3) возможен предельный переход при  $z \rightarrow \psi(x)$ ,  $z \in Z_0$ . Следовательно,

$$d_{cc}(\psi(x), \psi(y)) \leq C \rho(x, y)^{\frac{1}{\nu}} \left( \int_{S_\rho(a, t)} [M_{6t}(D_h\psi)(\omega)]^\nu d\omega \right)^{\frac{1}{\nu}} \quad (4.4)$$

для всех точек  $x, y \in S_\rho(a, t)$ .

Пусть  $y_1, y_2 \in S_\rho(a, t)$  — пара точек, на которых достигается максимальное колебание  $\psi$ :

$$\text{osc}(\psi, S_\rho(a, t)) = \sup\{d_{cc}(\psi(w_1), \psi(w_2)) : w_1, w_2 \in S_\rho(a, t)\} = d_{cc}(\psi(y_1), \psi(y_2)).$$

Подставляя в (4.4) точки  $y_1, y_2 \in S_\rho(a, t)$  вместо  $x, y$ , с учётом  $\rho(y_1, y_2) \leq 2ct$  выводим

$$\frac{\text{osc}(\psi, S_\rho(a, t))^\nu}{t} \leq C_1 \int_{S_\rho(a, t)} [M_{6t}(D_h\psi)(\omega)]^\nu d\omega. \tag{4.5}$$

Далее мы воспользуемся свойством монотонности гомеоморфизмов: колебание отображения на шаре контролируется колебанием отображения на граничной сфере:

$$\begin{aligned} \text{osc}(\psi, B_\rho(a, t)) &= \sup\{d_{cc}(\psi(w_1), \psi(w_2)) : w_1, w_2 \in B_\rho(a, t)\} \leq \\ &\leq \text{osc}(\psi, S_\rho(a, t)) = \sup\{d_{cc}(\psi(w_1), \psi(w_2)) : w_1, w_2 \in S_\rho(a, t)\}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

Интегрируя (4.5) по  $t$  в пределах от  $0 < r < r_0/2$  до  $r_0$ , с учётом  $\text{osc}(\psi, S_\rho(a, r)) \leq \text{osc}(\psi, S_\rho(a, t))$  для всех  $r < t < r_0$ , по формуле коплощади [1, Lemma 4] получаем

$$\text{osc}(\psi, B_\rho(a, r)) \leq C_1 \left(\ln \frac{r_0}{r}\right)^{-\frac{1}{\nu}} \left(\int_{B_\rho(a, r_0)} [M_{6r_0}(D_h\psi)(z)]^\nu dz\right)^{\frac{1}{\nu}}, \tag{4.7}$$

так как в силу (4.6)  $\text{osc}(\psi, B_\rho(a, r)) \leq \text{osc}(\psi, S_\rho(a, r))$  для всех  $t \in [r, r_0]$ .

Для произвольных точек  $x, y \in B_\rho(a, r)$  имеем

$$d_{cc}(\psi(x), \psi(y)) \leq \text{osc}(\psi, B_\rho(a, r)). \tag{4.8}$$

Из (4.7) и (4.8) для  $x, y \in B_\rho(a, r)$  выводим (4.1).

Пусть теперь  $x, y \in \Omega', d_{cc}(x, y) < r, r < r_0/2$ . В силу вышесказанного  $r \leq \frac{1}{2 \cdot 13c} \rho(x, \partial\Omega')$  и для любой точки  $y \in B_\rho(x, r)$  выполнено соотношение (4.1). □

**Следствие 4.1.** *В условиях теоремы 4.1 найдётся подпоследовательность последовательности  $\{\psi_k = \varphi_k^{-1}\}$ , сходящаяся локально равномерно в  $\Omega'$  к некоторому непрерывному отображению  $\psi_0 : \Omega' \rightarrow \bar{\Omega}$ .*

*Доказательство.* По теореме 2.2 гомеоморфизмы  $\psi_k$  индуцируют ограниченные операторы композиции

$$\psi_k^* : L_{q'}^1 \cap \text{Lip}_{\text{loc}}(\Omega) \rightarrow L_\nu^1(\Omega'), \quad q' = \frac{q}{q - \nu + 1},$$

причём  $\sup \|\psi_k^*\| < \infty$ . Из теоремы 2.1 следует, что последовательность  $\{D_h\psi_k\}$  ограничена в  $L_\nu(\Omega')$ , так как области  $\Omega$  и  $\Omega'$  имеют конечную меру (см. замечание 3.1).

Из (4.1) получаем, что семейство отображений  $\{\psi_k\}$  равномерно ограничено и равномерно непрерывно на каждой компактно вложенной области  $U \Subset \Omega'$ . Так как область  $\Omega$  ограничена, то существование нужной подпоследовательности стандартным образом вытекает из теоремы Асколи—Арцела, и диагонального выбора Кантора. □

**Предложение 4.2.** *В условиях теоремы 4.1 отображение  $\varphi_0$  инъективно почти всюду в  $\Omega \setminus \varphi_0^{-1}(\partial\Omega')$ .*

*Доказательство.* Пусть  $\{\psi_k\}$  — подпоследовательность из следствия 4.1. Можно считать, что  $\{\varphi_k\}$  поточечно сходится к  $\varphi_0$  вне некоторого множества  $S$  меры нуль.

Пусть точка  $x \in \Omega \setminus S$  такова, что  $\varphi_0(x) \in \Omega'$ . Тогда из соотношений

$$\psi_k \circ \varphi_k(x) = x, \quad k \in \mathbb{N},$$

и равномерной сходимости  $\{\psi_k\}$  к  $\psi_0$  на некоторой компактно вложенной в  $\Omega'$  окрестности внутренней точки  $\varphi_0(x) \in \Omega'$ , переходя к пределу при  $k \rightarrow \infty$ , получаем

$$\psi_0 \circ \varphi_0(x) = x.$$

Последнее означает, что  $\varphi_0$  инъективно на множестве  $\Omega \setminus (S \cup \varphi_0^{-1}(\partial\Omega'))$ , т. е.  $\varphi_0$  почти всюду инъективно на  $\Omega \setminus \varphi_0^{-1}(\partial\Omega')$ . □

Из предложения 4.2, условия  $|\partial\Omega'| = 0$  и того, что  $\varphi_0$  обладает  $\mathcal{N}^{-1}$ -свойством, следует его инъективность почти всюду в  $\Omega$ . Таким образом, теорема 4.1 доказана.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Басалаев С. Г., Водопьянов С. К.* Непрерывность по Гёльдеру следов функций класса Соболева на гиперповерхностях групп Карно и  $\mathcal{P}$ -дифференцируемость соболевских отображений// Сиб. мат. ж. — 2023. — 64, № 4. — С. 700–719.
2. *Басалаев С. Г., Водопьянов С. К.* Открытость и дискретность отображений с конечным искажением на группах Карно// Сиб. мат. ж. — 2023. — 64, № 6. — С. 1151–1159.
3. *Брудный Ю. А., Котляр Б. Д.* Одна задача комбинаторной геометрии// Сиб. мат. ж. — 1970. — 11, № 5. — С. 1171–1173.
4. *Водопьянов С. К.* О замкнутости классов отображений с ограниченным искажением на группах Карно// Мат. тр. — 2002. — 5, № 2. — С. 92–137.
5. *Водопьянов С. К.* Операторы подстановки пространств Соболева// В сб.: «Современные проблемы теории функций и их приложений», Тез. докл. конференции, г. Саратов, 2002 г. — Саратов, 2002. — С. 42–43.
6. *Водопьянов С. К.* О регулярности отображений, обратных к соболевским// Мат. сб. — 2012. — 203, № 10. — С. 3–32.
7. *Водопьянов С. К.* Допустимые замены переменных для функций классов Соболева на (суб)римановых многообразиях// Мат. сб. — 2019. — 210, № 1. — С. 63–112.
8. *Водопьянов С. К.* О регулярности отображений, обратных к соболевским и теория  $\mathcal{Q}_{q,p}$ -гомеоморфизмов// Сиб. мат. ж. — 2020. — 61, № 6. — С. 1257–1299.
9. *Водопьянов С. К.* Непрерывность отображений класса Соболева  $W_{\nu, \text{loc}}^1$  с конечным искажением на группах Карно// Сиб. мат. ж. — 2023. — 64, № 5. — С. 912–934.
10. *Водопьянов С. К., Евсеев Н. А.* Функциональные и аналитические свойства одного класса отображений квазиконформного анализа на группах Карно// Сиб. мат. ж. — 2022. — 63, № 2. С. 283–315.
11. *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д.* Пространства Соболева и  $(P, Q)$ -квазиконформные отображения групп Карно// Сиб. мат. ж. — 1998. — 39, № 4. — С. 776–795.
12. *Гусман М.* Дифференцирование интегралов в  $\mathbb{R}^n$ . — М.: Мир, 1978.
13. *Канторович Л. В., Вулих Б. З., Пинскер А. Г.* Функциональный анализ в полуупорядоченных пространствах. — М.—Л.: Гостехиздат, 1950.
14. *Мазья В. Г.* Пространства С. Л. Соболева. — Л.: Ленингр. ун-т, 1985.
15. *Решетняк Ю. Г.* Пространственные отображения с ограниченным искажением. — Новосибирск: Наука, 1982.
16. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве// Сиб. мат. ж. — 1997. — 38, № 3. — С. 657–675.
17. *Решетняк Ю. Г.* Соболевские классы функций со значениями в метрическом пространстве. II// Сиб. мат. ж. — 2004. — 45, № 4. — С. 855–870.
18. *Эванс Л. К., Гариппи Р. Ф.* Теория меры и тонкие свойства функций. — Новосибирск: Научная книга, 2002.
19. *Ball J. M.* Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1977. — 63. — С. 337–403.
20. *Ball J. M.* Global invertibility of Sobolev functions and the interpretation of matter// Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A. — 1981. — 88. — С. 315–328.
21. *Christodoulou D.* On the geometry and dynamics of crystalline continua// Ann. Inst. Henri Poincaré. — 1998. — 69, № 3. — С. 335–358.
22. *Ciarlet P. G.* Mathematical Elasticity, Vol. I. Three-Dimensional Elasticity. — Amsterdam: North-Holland, 1988.
23. *Folland G. B., Stein E. M.* Hardy spaces on homogeneous groups. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1982.
24. *Gromov M.* Carnot–Caratheodory spaces seen from within// В сб.: «Sub-Riemannian Geometry». — Basel: Birkhäuser, 1996. — С. 79–323.
25. *Isangulova D. V., Vodopyanov S. K.* Coercive estimates and integral representation formulas on Carnot groups// Eurasian Math. J. — 2010. — 1, №3. — С. 58–96.
26. *Maione A.* Variational convergences for functionals and differential operators depending on vector fields// Дисс. канд. наук. — University of Trento, 2020. — С. 1–145.
27. *Molchanova A., Vodopyanov S.* Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity// Calc. Var. Part. Differ. Equ. — 2019. — 59, № 17. — С. 2–25.

28. *Pansu P.* Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un// Ann. Math. — 1989. — 129, №1. — С. 1–60.
29. *Ukhlov A. D., Vodopyanov S. K.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. I// Sib. Adv. Math. — 2004. — 14, № 4. — С. 78–125.
30. *Ukhlov A. D., Vodopyanov S. K.* Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. II// Sib. Adv. Math. — 2005. — 15, № 1. — С. 1–35.
31. *Vodop'yanov S. K.*  $\mathcal{P}$ -Differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics// В сб.: «Proceedings on Analysis and Geometry». — Novosibirsk: Sobolev Institute Press, 2000. — С. 603–670.
32. *Vodop'yanov S. K.* Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings// Contemp. Math. — 2007. — 424. — С. 247–302.

С. К. Водопьянов

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

E-mail: vodopis@mail.ru

С. В. Павлов

Новосибирский государственный университет, Новосибирск, Россия

E-mail: s.pavlov4254@gmail.com

UDC 517.518+512.813.52

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-215-236

EDN: YHQGYL

## Functional Properties of Limits of Sobolev Homeomorphisms with Integrable Distortion

S. K. Vodopyanov and S. V. Pavlov

*Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia*

**Abstract.** The functional and geometric properties of limits of homeomorphisms with integrable distortion of domains in Carnot groups are studied. The homeomorphisms belong to Sobolev classes. Conditions are obtained under which the limits of sequences of such homeomorphisms also belong to the Sobolev class, have a finite distortion, and have the  $\mathcal{N}^{-1}$ -Luzin property. In the case of Carnot groups of  $H$ -type, sufficient conditions are obtained that are imposed on domains and a sequence of homeomorphisms under which the limit mapping is injective almost everywhere. These results play a key role in finding extremal solutions to problems in the mathematical theory of elasticity on  $H$ -type Carnot groups, which are the subject of subsequent works by the authors.

**Keywords:** class of Sobolev mappings, Carnot group, mapping with finite distortion, external operator distortion function, limit property of Sobolev mappings,  $\mathcal{N}^{-1}$ -Luzin property, injectivity almost everywhere.

**Conflict-of-interest.** The authors declare no conflicts of interest.

**Acknowledgments and funding.** The work was prepared within the framework of the grant from the Russian Science Foundation (project code No. 23-21-00359).

**For citation:** S. K. Vodopyanov, S. V. Pavlov, “Functional Properties of Limits of Sobolev Homeomorphisms with Integrable Distortion,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. 70, No. 2, 215–236. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-215-236>



## REFERENCES

1. S. G. Basalaeв and S. K. Vodopyanov, “Nepрerыvнoсt’ po Gel’deru sledov funktsiy klassa Soboleva na giperpoverkhnostyakh grupp Karno i  $\mathcal{P}$ -differentsiruemost’ sobolevskikh otobrazheniy” [Hölder continuity of traces of functions of the Sobolev class on hypersurfaces of Carnot groups and  $\mathcal{P}$ -differentiability of Sobolev mappings], *Sib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 2023, **64**, No. 4, 700–719 (in Russian).
2. S. G. Basalaeв and S. K. Vodopyanov, “Otkrytost’ i diskretnost’ otobrazheniy s konechnym iskazheniem na gruppakh Karno” [Openness and discreteness of mappings with finite distortion on Carnot groups], *Sib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 2023, **64**, No. 6, 1151–1159 (in Russian).
3. Yu. A. Brudnyy and B. D. Kotlyar, “Oдна zadacha kombinatornoy geometrii” [One combinatorial geometry problem], *Sib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 1970, **11**, No. 5, 1171–1173 (in Russian).
4. S. K. Vodopyanov, “Closure of classes of mappings with bounded distortion on Carnot groups,” *Sib. Adv. Math.*, 2004, **14**, No. 1, 84–125.
5. S. K. Vodopyanov, “Operatorы podstanovki prostranstv Soboleva” [Substitution operators for Sobolev spaces], In: *Sovremennyye problemy teorii funktsiy i ikh prilozheniy* [Contemporary Problems of Function Theory and Their Applications], Abstracts Conf., Saratov, 2002, pp. 42–43 (in Russian).
6. S. K. Vodopyanov, “O regulярnosti otobrazheniy, obratnykh k sobolevskim” [On the regularity of mappings inverse to Sobolev ones], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2012, **203**, No. 10, 3–32 (in Russian).
7. S. K. Vodopyanov, “Dopustimyye zameny peremennykh dlya funktsiy klassov Soboleva na (sub)rimanovykh mnogoobraziyakh” [Admissible changes of variables for functions of Sobolev classes on (sub)Riemannian manifolds], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2019, **210**, No. 1, 63–112 (in Russian).
8. S. K. Vodopyanov, “The regularity of inverses to Sobolev mappings and the theory of  $Q_{q,p}$ -homeomorphisms,” *Sib. Math. J.*, 2020, **61**, No. 6, 1002–1038.
9. S. K. Vodopyanov, “Nepрerыvнoсt’ otobrazheniy klassa Soboleva  $W^1_{\nu,loc}$  s konechnym iskazheniem na gruppakh Karno” [Continuity of the mappings with finite distortion of the Sobolev class  $W^1_{\nu,loc}$  on Carnot groups], *Sib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 2023, **64**, No. 5, 912–934 (in Russian).
10. S. K. Vodopyanov and N. A. Evseev, “Functional and analytical properties of a class of mappings of quasiconformal analysis on Carnot groups,” *Sib. Math. J.*, 2022, **63**, No. 2, 233–261.
11. S. K. Vodopyanov and A. D. Ukhlov, “Sobolev spaces and  $(P, Q)$ -quasiconformal mappings of Carnot groups,” *Sib. Math. J.*, 1998, **39**, No. 4, 665–682.
12. M. de Guzmán, *Differentsirovaniye integralov v  $\mathbb{R}^n$*  [Differentiation of integrals in  $\mathbb{R}^n$ ], Mir, Moscow, 1978 (Russian translation).
13. L. V. Kantorovich, B. Z. Vulikh, and A. G. Pinsker, *Funktsional’nyy analiz v poluuporyadochennykh prostranstvakh* [Functional Analysis in Semi-Ordered Spaces], Gostekhizdat, Moscow—Leningrad, 1950 (in Russian).
14. V. G. Maz’ya, *Prostranstva S. L. Soboleva* [S. L. Sobolev Spaces], Leningrad Univ., Leningrad, 1985 (in Russian).
15. Yu. G. Reshetnyak, *Prostranstvennyye otobrazheniya s ogranichennym iskazheniem* [Spatial Mappings with Bounded Distortion], Nauka, Novosibirsk, 1982 (in Russian).
16. Yu. G. Reshetnyak, “Sobolevskie klassy funktsiy so znacheniyami v metricheskom prostranstve” [Sobolev classes of functions with values in a metric space], *Sib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 1997, **38**, No. 3, 657–675 (in Russian).
17. Yu. G. Reshetnyak, “Sobolevskie klassy funktsiy so znacheniyami v metricheskom prostranstve. II” [Sobolev classes of functions with values in a metric space. II], *Sib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 2004, **45**, No. 4, 855–870 (in Russian).
18. L. C. Evans and R. F. Gariepy, *Teoriya mery i tonkie svoystva funktsiy* [Measure Theory and Fine Properties of Functions], Nauchnaya kniga, Novosibirsk, 2002 (Russian translation).
19. J. M. Ball, “Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1977, **63**, 337–403.
20. J. M. Ball, “Global invertibility of Sobolev functions and the interpretation of matter,” *Proc. R. Soc. Edinb. Sect. A*, 1981, **88**, 315–328.
21. D. Christodoulou, “On the geometry and dynamics of crystalline continua,” *Ann. Inst. Henri Poincaré*, 1998, **69**, No. 3, 335–358.
22. P. G. Ciarlet, *Mathematical Elasticity, Vol. I. Three-Dimensional Elasticity*, North-Holland, Amsterdam, 1988.
23. G. B. Folland and E. M. Stein, *Hardy spaces on homogeneous groups*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1982.
24. M. Gromov, “Carnot—Caratheodory spaces seen from within,” In: *Sub-Riemannian Geometry*, Birkhäuser, Basel, 1996, pp. 79–323.

25. D. V. Isangulova and S. K. Vodopyanov, “Coercive estimates and integral representation formulas on Carnot groups,” *Eurasian Math. J.*, 2010, **1**, No. 3, 58–96.
26. A. Maione, “Variational convergences for functionals and differential operators depending on vector fields,” *PhD Thesis*, University of Trento, 2020, pp. 1–145.
27. A. Molchanova and S. Vodopyanov, “Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity,” *Calc. Var. Part. Differ. Equ.*, 2019, **59**, No. 17, 2–25.
28. P. Pansu, “Métriques de Carnot–Carathéodory et quasiisométries des espaces symétriques de rang un,” *Ann. Math.*, 1989, **129**, No. 1, 1–60.
29. A. D. Ukhlov and S. K. Vodopyanov, “Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. I,” *Sib. Adv. Math.*, 2004, **14**, No. 4, 78–125.
30. A. D. Ukhlov and S. K. Vodopyanov, “Set functions and their applications in the theory of Lebesgue and Sobolev spaces. II,” *Sib. Adv. Math.*, 2005, **15**, No. 1, 1–35.
31. S. K. Vodop’yanov, “ $\mathcal{P}$ -Differentiability on Carnot groups in different topologies and related topics,” In: *Proceedings on Analysis and Geometry*, Sobolev Institute Press, Novosibirsk, 2000, pp. 603–670.
32. S. K. Vodop’yanov, “Geometry of Carnot–Carathéodory spaces and differentiability of mappings,” *Contemp. Math.*, 2007, **424**, 247–302.

S. K. Vodopyanov  
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia  
E-mail: vodopis@mail.ru

S. V. Pavlov  
Novosibirsk State University, Novosibirsk, Russia  
E-mail: s.pavlov4254@gmail.com

УДК 517.925; 517.93; 531.13

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-237-252

EDN: YIWVPRQ

## ПОСТРОЕНИЕ ПЛОСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ С ЗАДААННЫМИ ГЛОБАЛЬНЫМИ ТОПОЛОГИЧЕСКИМИ СТРУКТУРАМИ

С. В. Волков

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

**Аннотация.** В статье представлен метод построения векторных полей, фазовые портреты которых имеют конечные множества заданных особых траекторий (предельных циклов, простых и сложных особых точек, сепаратрис) и заданные топологические структуры в ограниченных областях фазовой плоскости. Задача построения таких векторных полей является обобщением ряда известных обратных задач качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений. Предложенный метод её решения расширяет возможности математического моделирования динамических систем с заданными свойствами в различных областях науки и техники.

**Ключевые слова:** векторное поле, система ОДУ, качественная теория ОДУ, фазовый портрет, топологическая структура, динамическая система, обратная задача.

**Заявление о конфликте интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Благодарности и финансирование.** Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

**Для цитирования:** С. В. Волков. Построение плоских векторных полей с заданными глобальными топологическими структурами // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 2. С. 237–252. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-237-252>

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть плоское векторное поле  $\vec{v}$  описывается автономной системой обыкновенных дифференциальных уравнений класса  $C_k$ ,  $k \geq 1$ :

$$\vec{v}(v_x, v_y) : \begin{cases} \dot{x} = v_x(x, y), \\ \dot{y} = v_y(x, y). \end{cases} \quad (1.1)$$

Целью данной статьи является представление метода построения векторных полей вида (1.1), которые имеют:

- конечные множества заданных предельных циклов, простых и сложных особых точек, сепаратрис и
- заданные топологические структуры

в заданных ограниченных областях фазовой плоскости  $Oxy$ .

Построение векторных полей с заданными свойствами их фазовых портретов является обратной задачей качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, так как её решение равносильно построению соответствующих систем обыкновенных дифференциальных уравнений с использованием понятий и методов этой теории.



Первыми известными работами, в которых были рассмотрены задачи такого типа, являются работы по обратным задачам классической механики И. Ньютона, М. Ж. Бертрана, Г. К. Суллова, Н. Е. Жуковского, И. В. Мещерского на построение механических систем, имеющих заданные интегралы. Подробный анализ этих и других обратных задач динамики и методов их решения проведён А. С. Галиуллиным [5]. Основой дальнейшего развития методов решения обратных задач динамики (см. [6]) явился подход Н. П. Еругина [7] к построению систем обыкновенных дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую.

Задачи построения дифференциальных уравнений вида  $dy/dx = f(x, y)$  и систем уравнений вида (1.1) с заданными свойствами их решений были изучены в работах [1, 2, 4, 8, 11]. А именно, были решены задачи построения уравнений, которые имеют:

- конечное число заданных простых особых точек указанных типов [1];
- конечное число заданных предельных циклов требуемых типов [2];
- конечное число заданных простых особых точек указанных типов с прямолинейными сепаратрисами и предельных циклов указанных типов [8];
- только одну сложную особую точку с заданными прямолинейными сепаратрисами и заданной топологической структурой [4, 11].

Заметим, что глобальные топологические структуры искомым дифференциальным уравнениям в работах [1, 2, 7, 8] не рассматривались. Детальный анализ задач, рассмотренных в [1, 2], и методов их решения дан в [12].

## 2. РЕЗУЛЬТАТЫ

В данной статье представлен метод построения векторных полей вида (1.1), который:

- (i) допускает одновременное существование у этих векторных полей заданных особых траекторий всех типов, рассмотренных в [1, 2, 4, 8, 11], и заданной глобальной топологической структуры в ограниченной односвязной области фазовой плоскости, содержащей эти траектории;
- (ii) основан на использовании вспомогательных векторных полей для представления требуемых свойств искомым векторным полем в аналитической форме с помощью скалярных произведений векторов;
- (iii) допускает, в силу (ii), геометрическую интерпретацию основных действий построения искомым векторных полей, что упрощает процесс их выполнения;
- (iv) сводит поставленную задачу к решению системы линейных уравнений относительно компонентов искомого векторного поля.

Результаты данной статьи строго доказаны методом М. Фроммера [9], приведены примеры их применения. Аналитические решения примеров визуализированы графическими схемами соответствующих им векторных полей с помощью функции *fieldplot* пакета *MAPLE*.

Представленный ниже метод решения основной задачи данной статьи может быть использован в различных областях науки и техники для построения математических моделей динамических систем с требуемыми свойствами их поведения.

**Обозначения.** Для объектов, относящихся к векторному полю (1.1), будут использованы следующие обозначения:

- $P_k(x_k, y_k)$ ,  $k \in I_P = \{1, 2, \dots, m\}$  — изолированная особая точка, отличная от центра и фокуса;
- $\Gamma_i : \omega_i(x, y) = 0$ ,  $i \in I_\Gamma = \{1, 2, \dots, n_1\}$  — интегральная кривая, проходящая через некоторые точки  $P_{k_1}, \dots, P_{k_s}$ ,  $s \geq 1$ ,  $k_1, \dots, k_s \in I_P$ ;
- $L_{ki, \alpha}$ ,  $k \in I_P$ ,  $\alpha = 1, 2$  — одна из двух сепаратрис точки  $P_k$ , расположенных на  $\Gamma_i$ ;
- $C_i : \omega_i(x, y) = 0$ ,  $i \in I_C = \{n_1 + 1, \dots, n_2\}$  — замкнутая кривая, которая может быть предельным циклом;
- $\Phi_i(x_i, y_i) : \omega_i(x, y) = 0$ ,  $i \in I_\Phi = \{n_2 + 1, \dots, n\}$  — особая точка типа центр или фокус;
- $I = I_\Gamma \cup I_C \cup I_\Phi = \{1, 2, 3, \dots, n\}$ ;
- $I_k = \{i : \omega_i(P_k) = 0, i \in I_\Gamma, k \in I_P\}$ ;
- $U_k(\varepsilon) = \{(x, y) : (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2 = \varepsilon^2\}$  —  $\varepsilon$ -окрестность особой точки  $P_k$  такая, что:

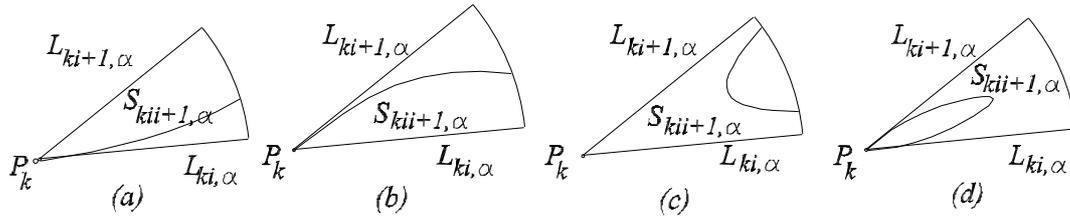


РИС. 1. Секторы особой точки: (а) сектор параболический справа; (б) сектор параболический слева; (с) гиперболический сектор; (д) эллиптический сектор.

- (i)  $\omega_s(P) \neq 0$  для любой точки  $P \in U_k(\varepsilon)$ ,  $k \in I_P$ ,  $s \in I_\Gamma \setminus I_k$ ;
- (ii)  $\overline{U}_k(\varepsilon)$  — замыкание окрестности  $U_k(\varepsilon)$ ,  $k \in I_P$ , не содержащей ни замкнутых траекторий, ни целых особых траекторий, кроме соответствующей точки  $P_k$ ;
- $S_{kij, \alpha}(\varepsilon)$ ,  $k \in I_P$ , где  $i, j \in I_k$  — сектор окрестности  $U_k(\varepsilon)$ , ограниченный смежными сепаратрисами  $L_{ki, \alpha}$  и  $L_{kj, \alpha}$  точки  $P_k$  (см. рис. 1).

### 3. ОСНОВНАЯ ЗАДАЧА И ПОДХОД К ЕЁ РЕШЕНИЮ

**3.1. Постановка основной задачи.** Основной задачей данной статьи является построение векторного поля  $\vec{v}(1.1)$  с заданной топологической структурой в ограниченной области  $D$  фазовой плоскости  $Oxy$  при условии, что заданы:

(а) уравнения

$$\omega_i(x, y) = 0, \quad i \in I \tag{3.1}$$

всех особых траекторий (предельных циклов, простых и сложных особых точек, сепаратрис) этого векторного поля в области  $D$ , где  $\omega_i(x, y)$ ,  $i \in I$ , таковы, что

$$\text{grad } \omega_i \neq 0 \text{ для } i \in I \setminus I_\Phi, \quad \text{и} \quad \text{grad } \omega_i(P) \neq 0 \text{ для } i \in I_\Phi, \quad P \neq \Phi_i; \tag{3.2}$$

(б) направления искомого векторного поля на этих особых траекториях;

(с) локальные топологические структуры всех особых траекторий в области  $D$ .

Предполагается, что область  $D$  не содержит особых траекторий, отличных от указанных в п. (а).

Для упрощения дальнейшего изложения будем считать, что все критические направления особых точек  $P_k$ ,  $k \in I_P$ , являются простыми обыкновенными в смысле определения, данного в [9]. В этом случае:

- каждое критическое направление особой точки  $P_k$  является касательным к одной, и только одной, интегральной кривой  $\Gamma_i$  в этой точке и, следовательно,

$$\text{grad } \omega_i \neq \text{grad } \omega_j \quad \text{для} \quad i, j \in I_k : i \neq j, \quad k \in I_P; \tag{3.3}$$

- сепаратрисы  $L_{ki, 1}$  и  $L_{ki, 2}$  особой точки  $P_k$ ,  $k \in I_P$ , являются для данного  $i \in I_k$  однотипными и только несмешанного типа: либо гиперболическими, либо параболическими в смысле данных ниже определений.

**3.2. Классификация сепаратрис особых точек.** Пусть  $g_{ki, \alpha}(\varepsilon)$  является криволинейным сектором окрестности  $U_k(\varepsilon)$  с вершиной в точке  $P_k$ , и только одна сепаратриса  $L_{ki, \alpha}$  проходит через её внутренние точки,  $k \in I_P$ ,  $i \in I_k$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Предположим, что:  $L_{ki, \alpha}$  пересекает границу сектора  $g_{ki, \alpha}(\varepsilon)$  только один раз и только в точке, не принадлежащей его боковой стороне; внутри  $g_{ki, \alpha}(\varepsilon)$  не содержится ни петель<sup>1</sup>, ни точек других особых траекторий. В этом случае все неособые траектории векторного поля (1.1), проходящие через внутренние точки  $g_{ki, \alpha}(\varepsilon)$ , образуют два непересекающихся множества, скажем,  $A$  и  $B$ , видимые из точки  $P_k$  справа и слева от  $L_{ki, \alpha}$ , соответственно. Поведение этих траекторий внутри сектора  $g_{ki, \alpha}(\varepsilon)$  определяет его топологическую структуру и, следовательно, тип сепаратрисы  $L_{ki, \alpha}$ . А именно, сепаратриса  $L_{ki, \alpha}$  может быть одного из следующих типов:

<sup>1</sup>Петля — это простая замкнутая траектория, состоящая из особой точки и незамкнутой траектории  $L$ , которая стремится к этой точке при  $t \rightarrow -\infty$  и  $t \rightarrow +\infty$  (см. в [3, гл. VII, § 16, п. 10]).

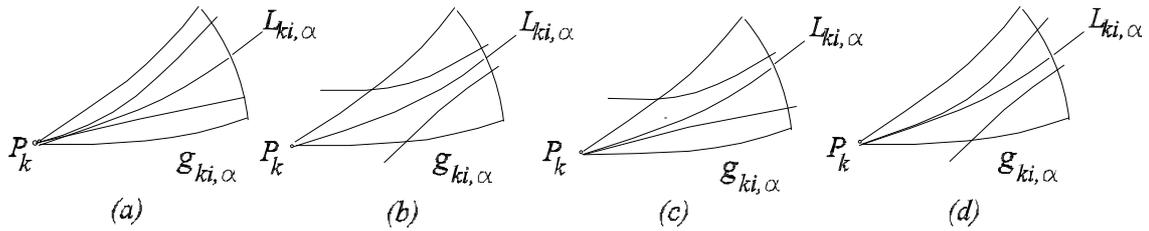


РИС. 2. Классификация сепаратрис особых точек  $P_k$ ,  $k \in I_P$ : (a) параболическая; (b) гиперболическая; (c) параболическая справа; (d) параболическая слева.

- *параболической*, если любая траектория  $L \in A \cup B$  стремится к точке  $P_k$  при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) и выходит из  $g_{ki, \alpha}(\varepsilon)$  при  $t \rightarrow -\infty$  ( $t \rightarrow +\infty$ ) (рис. 2.a);
- *гиперболической*, если любая траектория  $L \in A \cup B$  выходит из  $g_{ki, \alpha}(\varepsilon)$  как при  $t \rightarrow -\infty$ , так и при  $t \rightarrow +\infty$  (рис. 2.b);
- *параболической справа*, если любая траектория  $L \in A$  стремится к  $P_k$  при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) и выходит из  $g_{ki, \alpha}(\varepsilon)$  при  $t \rightarrow -\infty$  ( $t \rightarrow +\infty$ ), в то время как любая траектория  $L \in B$  выходит из  $g_{ki, \alpha}(\varepsilon)$  при  $t \rightarrow -\infty$  и  $t \rightarrow +\infty$  (рис. 2.c);
- *параболической слева*, если любая траектория  $L \in A$  выходит из  $g_{ki, \alpha}(\varepsilon)$  как при  $t \rightarrow -\infty$ , так и при  $t \rightarrow +\infty$ , в то время как любая  $L \in B$  стремится к  $P_k$  при  $t \rightarrow +\infty$  ( $t \rightarrow -\infty$ ) и выходит из  $g_{ki, \alpha}(\varepsilon)$  при  $t \rightarrow -\infty$  ( $t \rightarrow +\infty$ ) (рис. 2.d).

Сепаратрисы, параболические справа, и сепаратрисы, параболические слева, называются *сепаратрисами смешанного типа*.

Данная выше классификация сепаратрис аналогична той, что дана в [10], но только для прямолинейных сепаратрис особой точки  $(0, 0)$  системы уравнений вида  $\dot{x} = X_m(x, y)$ ,  $\dot{y} = Y_m(x, y)$ , где  $X_m(x, y)$  и  $Y_m(x, y)$  — однородные многочлены одного и того же порядка  $m \geq 1$ .

**Замечание 3.1.** Типы смежных сепаратрис  $L_{ki, \alpha}$  и  $L_{kj, \alpha}$  точки  $P_k$  определяют тип соответствующего сектора  $S_{kij, \alpha}(\varepsilon)$ , который может быть параболическим справа (рис. 1.a), параболическим слева (рис. 1.b), гиперболическим (рис. 1.c) или эллиптическим (рис. 1.d).

**Замечание 3.2.** Сведения об искомом векторном поле, упомянутые в п.п. (b) и (c) раздела 3.1, могут быть представлены в виде списков и таблиц, описывающих его топологическую структуру в заданной области фазовой плоскости (см. [3, гл. XI, § 29]). Однако эти сведения могут быть представлены графической схемой, что наглядно, удобно и целесообразно с точки зрения решения основной задачи.

**3.3. Общая схема решения основной задачи.** В общем случае решение основной задачи является двухшаговой процедурой. На первом шаге выполняется построение некоторой функции  $z = f(x, y)$  в соответствии с требованиями (a)–(c) раздела 3.1. А именно, векторное поле  $\vec{\tau} = (\tau_x, \tau_y)$ , касательное к линиям уровней  $f(x, y) = c$ , должно удовлетворять требованиям (a), (b) и частично (c); кривые  $C_j$ ,  $j \in I_C$ , должны быть элементами множеств вложенных замкнутых интегральных кривых, содержащих внутри себя соответствующие особые точки  $\Phi_i$ ,  $i \in I_\Phi$ . Заметим, что такое векторное поле  $\vec{\tau}$  само является частным решением основной задачи, если искомое векторное поле  $\vec{v}$  не имеет ни предельных циклов, ни особых точек типа фокус в области  $D$ . В противном случае требуется выполнение второго шага.

На втором шаге векторные поля  $\vec{\tau}$  и  $\vec{n} = \vec{k} \times \vec{\tau}$ , где  $\vec{k}$  является единичным направляющим вектором оси  $Oz$  прямоугольной декартовой системы координат  $Oxyz$ , используются в качестве вспомогательных векторных полей направлений сравнения. В каждой точке области  $D$  векторы  $\vec{\tau}$  и  $\vec{n}$  образуют локальный ортогональный базис, который вырождается только в особых точках  $P_k$ ,  $k \in I_P$ , и  $\Phi_i$ ,  $i \in I_\Phi$ . Тот факт, что  $|\vec{\tau}| = |\vec{n}|$ , позволяет представить требования (a)–(c) раздела 3.1 в аналитической форме, используя скалярные произведения

$$\begin{aligned} \vec{\tau} \cdot \vec{v} &= \eta \cdot F_1(x, y), \\ \vec{n} \cdot \vec{v} &= \eta \cdot F_2(x, y), \end{aligned} \quad (3.4)$$

где  $\eta = \eta(x, y)$  — произвольная неотрицательная функция, которая может иметь нулевые значения в области  $D$  только в точках  $P_k$ ,  $k \in I_P$ , и  $\Phi_i$ ,  $i \in I_\Phi$ . Такой множитель  $\eta(x, y)$  не влияет на фазовый портрет векторного поля  $\vec{v}$ , соответствующего функциям  $F_1$  и  $F_2$ . Так как система уравнений (3.4) является линейной относительно  $v_x$  и  $v_y$ , то имеет смысл положить этот множитель равным её определителю:  $\eta = \tau_x^2 + \tau_y^2$ . В этом случае из (3.4) получим компоненты искомого векторного поля в виде

$$\begin{aligned} v_x &= F_1\tau_x - F_2\tau_y, \\ v_y &= F_2\tau_x + F_1\tau_y. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Таким образом, решение основной задачи сводится к построению функций  $F_1$  и  $F_2$ , которые зависят от отношения  $(\vec{\tau} \cdot \vec{v}) : (\vec{n} \cdot \vec{v})$  вблизи особых точек и от знаков произведений  $\vec{\tau} \cdot \vec{v}$  и  $\vec{n} \cdot \vec{v}$  в области  $D$ .

Используя графическую схему фазового портрета искомого векторного поля  $\vec{v}$  и общие свойства скалярного произведения векторов, можно составить предварительные выражения  $F_1$  и  $F_2$  с точностью до некоторых положительных множителей. Затем, чтобы определить эти множители и получить окончательные выражения функций  $F_1$  и  $F_2$ , необходимо исследовать особые точки  $P_k$ ,  $k \in I_P$ , и  $\Phi_i$ ,  $i \in I_\Phi$ , дифференциального уравнения  $dy/dx = v_y/v_x$  с функциями  $v_x$  и  $v_y$  из (3.5). Такое исследование предполагает использование подходящего метода качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений для изучения особых точек. В данной статье для этого используется метод Фроммера [9].

#### 4. ПОСТРОЕНИЕ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ НАПРАВЛЕНИЙ СРАВНЕНИЯ

Предположим, что в (3.1) множество индексов  $I = I_\nu \cup I_\delta$ ,  $I_\nu \cap I_\delta = \emptyset$  и

$$z = \left( \prod_{i \in I_\nu} \omega_i \right) / \left( \prod_{i \in I_\delta} \omega_i \right). \quad (4.1)$$

В плоскости  $Oxy$  множества линий уровней  $z = 0$  и  $z = \pm\infty$  функции (4.1) состоят из кривых  $\Gamma_i$ ,  $i \in I_\Gamma$ ,  $C_j$ ,  $j \in I_C$ , и точек  $\Phi_l$ ,  $l \in I_\Phi$ , которые разбивают эту плоскость на конечное число ячеек, заполненных линиями уровней  $z = c$ , где  $c \neq 0; \pm\infty$ .

Переписывая (4.1) в виде неявного уравнения относительно  $z$

$$F(x, y, z) \equiv z - \left( \prod_{i \in I_\nu} \omega_i \right) / \left( \prod_{i \in I_\delta} \omega_i \right) = 0,$$

найдем

$$\begin{aligned} \text{grad } F &= \frac{1}{\prod_{i \in I_\delta} \omega_i^2} \times \\ &\times \left( - \sum_{i \in I_\nu} \omega_{ix} \cdot \prod_{j \in I, j \neq i} \omega_j + \sum_{i \in I_\delta} \omega_{ix} \cdot \prod_{j \in I, j \neq i} \omega_j, - \sum_{i \in I_\nu} \omega_{iy} \cdot \prod_{j \in I, j \neq i} \omega_j + \sum_{i \in I_\delta} \omega_{iy} \cdot \prod_{j \in I, j \neq i} \omega_j, 1 \right), \end{aligned}$$

откуда следует, что вектор

$$\vec{n}_S = \sum_{i \in I_\nu} \vec{n}_i \cdot \prod_{j \in I, j \neq i} \omega_j - \sum_{i \in I_\delta} \vec{n}_i \cdot \prod_{j \in I, j \neq i} \omega_j - \vec{k} \cdot \prod_{j \in I, j \neq i} \omega_j^2, \quad (4.2)$$

где  $\vec{n}_i = (\omega_{ix}, \omega_{iy}, 0)$ ,  $i \in I$ , является вектором нормали к поверхности  $S$ , заданной уравнением (4.1) в координатной системе  $Oxyz$ . В этом случае векторное поле

$$\vec{\tau} = \vec{k} \times \vec{n}_S = \sum_{i \in I_\nu} \vec{\tau}_i \cdot \prod_{j \in I, j \neq i} \omega_j - \sum_{i \in I_\delta} \vec{\tau}_i \cdot \prod_{j \in I, j \neq i} \omega_j, \quad \text{где } \vec{\tau}_i = \vec{n}_i \times \vec{k}, \quad i \in I, \quad (4.3)$$

является касательным к линиям уровней функции (4.1), включая кривые  $\Gamma_i$ ,  $i \in I_\Gamma$ , и  $C_j$ ,  $j \in I_C$ ;  $P_k$ ,  $k \in I_P$ , и  $\Phi_l$ ,  $l \in I_\Phi$ , являются особыми точками этого векторного поля  $\vec{\tau}$ .

**Замечание 4.1.** Функции  $z = P(x, y)/Q(x, y)$  и  $z = -Q(x, y)/P(x, y)$ , построенные указанным выше способом, порождают одно и то же векторное поле  $\vec{\tau}$ .

## 5. ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ ОСОБЫХ ТРАЕКТОРИЙ ВЕКТОРНОГО ПОЛЯ $\vec{\tau}$

Для построения функции (4.1), соответствующей условиям п.п. (а)-(с) постановки основной задачи, необходимо знать, как локальные топологические структуры особых траекторий соответствующего векторного поля  $\vec{\tau}$  (4.3) зависят от взаимного расположения множителей  $\omega_i$ ,  $i \in I$ , в правой части равенства (4.1).

**5.1. Локальные топологические структуры особых точек  $P_k$ ,  $k \in I_P$ .** Локальная топологическая структура особой точки  $P_k(x_k, y_k)$  определяется множеством её сепаратрис  $L_{ki, \alpha}$  и их типами или типами ограниченных ими секторов  $S_{kij, \alpha}$ , где  $i, j \in I_k$ ,  $\alpha = 1, 2$ . Для получения этих сведений методом Фроммера [9] перепишем (4.3) следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{\tau} = & \left( \sum_{i \in I_{\nu k}} \vec{\tau}_i \cdot \prod_{j \in I_k, j \neq i} \omega_j - \sum_{i \in I_{\delta k}} \vec{\tau}_i \cdot \prod_{j \in I_k, j \neq i} \omega_j \right) \cdot \prod_{s \in I \setminus I_k} \omega_s + \\ & + \left( \sum_{i \in I_{\nu} \setminus I_k} \vec{\tau}_i \cdot \prod_{j \in I \setminus I_k, j \neq i} \omega_j - \sum_{i \in I_{\delta} \setminus I_k} \vec{\tau}_i \cdot \prod_{j \in I \setminus I_k, j \neq i} \omega_j \right) \cdot \prod_{s \in I_k} \omega_s \end{aligned} \quad (5.1)$$

и обозначим порядки произведений  $\prod_{i \in I_{\nu k}} \omega_i$  и  $\prod_{i \in I_{\delta k}} \omega_i$  относительно  $r_k = \sqrt{(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2}$  через

$$N_{k\nu} = \deg_{r_k} \left( \prod_{i \in I_{\nu k}} \omega_i \right) \quad \text{и} \quad N_{k\delta} = \deg_{r_k} \left( \prod_{i \in I_{\delta k}} \omega_i \right).$$

Положим для простоты  $x_k = y_k = 0$  и рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\tau_y(x, y)}{\tau_x(x, y)}. \quad (5.2)$$

Выполнив подстановки  $y = u(x) \cdot x$  и  $x = v(y) \cdot y$  в (5.2), получим уравнения

$$x \frac{du}{dx} = \left( \frac{x\tau_y - y\tau_x}{x\tau_x} \right) \Big|_{y=ux} \quad \text{и} \quad y \frac{dv}{dy} = - \left( \frac{x\tau_y - y\tau_x}{y\tau_y} \right) \Big|_{x=vy}, \quad (5.3)$$

соответственно. При условии, что все критические направления особой точки  $P_k$  являются простыми обыкновенными (см. определение в [9]), из (5.1) следует, что в достаточно малой окрестности  $U_k(\varepsilon)$

$$x\tau_y - y\tau_x = [(-N_{k\nu} + N_{k\delta}) \cdot \alpha + \varphi_0(x, y)] \cdot \prod_{i \in I_k} \omega_i, \quad (5.4)$$

$$x\tau_x = x \cdot \left[ \sum_{i \in I_k} \tau_{ix} \prod_{j \in I_k, j \neq i} \omega_j \cdot \alpha + o(r_k^{N_{k\nu} + N_{k\delta}}) \right], \quad (5.5)$$

$$y\tau_y = y \cdot \left[ \sum_{i \in I_k} \tau_{iy} \prod_{j \in I_k, j \neq i} \omega_j \cdot \alpha + o(r_k^{N_{k\nu} + N_{k\delta}}) \right], \quad (5.6)$$

где

$$\alpha = \prod_{j \in I \setminus I_k} \omega_j(0, 0), \quad \varphi_0(0, 0) = 0.$$

Из (5.3)–(5.6) следует, что если  $N_{k\nu} - N_{k\delta} \neq 0$ , то только касательные направления к кривым  $\Gamma_i$ ,  $i \in I_k$ , в точке  $P_k$  являются её критическими направлениями.

**Замечание 5.1.** Если все критические направления особых точек  $P_k$ ,  $k \in I_P$ , являются простыми обыкновенными и выполняются неравенства (3.2) и (3.3), то из (5.2)–(5.6) следует, что сепаратрисы  $L_{ki, 1}$  и  $L_{ki, 2}$  являются однотипными и, следовательно, однотипными являются секторы  $S_{kij, 1}$  и  $S_{kij, 2}$ ,  $i, j \in I_k$ . Поэтому в обозначениях этих объектов индекс  $\alpha$  далее не используется (см. раздел 2, Обозначения).

Предположим, что сепаратрисы  $L_{ki}$  и  $L_{ki+1}$ , ограничивающие сектор  $S_{kii+1}(\varepsilon)$  особой точки  $P_k$ , расположены так, что  $L_{ki}$  предшествует  $L_{ki+1}$  при обходе границы окрестности  $U_k(\varepsilon)$  в направлении против хода часовой стрелки. При сделанных выше предположениях рассмотрим следующие случаи взаимного расположения множителей  $\omega_i$  и  $\omega_{i+1}$  в правой части уравнения (4.1).

**Утверждение 5.1.**  $S_{kii+1}$  является сектором, параболическим справа (рис. 1.a), если

- (a)  $i \in I_{k\nu}$ ,  $i+1 \in I_{k\delta}$ ,  $N_{k\nu} < N_{k\delta}$  или
- (b)  $i \in I_{k\delta}$ ,  $i+1 \in I_{k\nu}$ ,  $N_{k\nu} > N_{k\delta}$ .

**Утверждение 5.2.**  $S_{kii+1}$  является сектором, параболическим слева (рис. 1.b), если

- (a)  $i \in I_{k\nu}$ ,  $i+1 \in I_{k\delta}$ ,  $N_{k\nu} > N_{k\delta}$  или
- (b)  $i \in I_{k\delta}$ ,  $i+1 \in I_{k\nu}$ ,  $N_{k\nu} < N_{k\delta}$ .

**Утверждение 5.3.**  $S_{kii+1}$  является гиперболическим сектором (рис. 1.c), если

- (a)  $i, i+1 \in I_{k\nu}$ ,  $N_{k\nu} > N_{k\delta}$  или
- (b)  $i, i+1 \in I_{k\delta}$ ,  $N_{k\nu} < N_{k\delta}$ .

**Утверждение 5.4.**  $S_{kii+1}$  является эллиптическим сектором (рис. 1.d), если

- (a)  $i, i+1 \in I_{k\nu}$ ,  $N_{k\nu} < N_{k\delta}$  или
- (b)  $i, i+1 \in I_{k\delta}$ ,  $N_{k\nu} > N_{k\delta}$ .

*Доказательство.* Чтобы применить метод Фроммера [9], перепишем равенства (5.4)–(5.6) следующим образом:

$$x\tau_y - y\tau_x = [(-N_{k\nu} + N_{k\delta})B\alpha + \varphi(x, y)]\omega_i\omega_{i+1}, \quad (5.7)$$

$$x\tau_x = x \left[ (-1)^{\xi_i} \tau_{ix} \omega_{i+1} + (-1)^{\xi_{i+1}} \tau_{i+1x} \omega_i \right] B\alpha + \omega_i \omega_{i+1} A_x, \quad (5.8)$$

$$y\tau_y = y \left[ (-1)^{\xi_i} \tau_{iy} \omega_{i+1} + (-1)^{\xi_{i+1}} \tau_{i+1y} \omega_i \right] B\alpha + \omega_i \omega_{i+1} A_y, \quad (5.9)$$

где

$$B = \prod_{j \in I, j \neq i, i+1} \omega_j(x, y), \quad \deg_{r_k} \varphi(x, y) = N_{k\nu} + N_{k\delta} - 1, \quad \xi_j = \begin{cases} 1 & \text{для } i \in I_\delta; \\ 2 & \text{для } i \in I_\nu, \end{cases}$$

$$A_x = x \cdot \sum_{j \in I, j \neq i, i+1} \tau_{jx} \cdot \prod_{s \in I, s \neq j, i, i+1} \omega_s, \quad A_y = y \cdot \sum_{j \in I, j \neq i, i+1} \tau_{jy} \cdot \prod_{s \in I, s \neq j, i, i+1} \omega_s,$$

$$\deg_{r_k} A_x = \deg_{r_k} A_y = N_{k\nu} + N_{k\delta} - 1.$$

Предположим, что для  $i \in I_k$

$$\omega_i \equiv a_i x + b_i y + \sigma_1(x, y), \quad \omega_{i+1} \equiv a_{i+1} x + b_{i+1} y + \sigma_2(x, y), \quad (5.10)$$

где  $a_i, a_{i+1}, b_i, b_{i+1}$  являются постоянными, а  $\sigma_1(x, y), \sigma_2(x, y)$  — многочленами порядка выше первого. Если  $b_i$  и  $b_{i+1}$  отличны от нуля, то после подстановки (5.7) и (5.8) в первое из уравнений (5.3) получим уравнение

$$x \frac{du}{dx} = \frac{[(-N_{k\nu} + N_{k\delta})B_1 + \varphi](u - u_i)(u - u_{i+1})b_i b_{i+1}}{[(-1)^{\xi_i} \tau_{ix}(u - u_{i+1})b_{i+1} + (-1)^{\xi_{i+1}} \tau_{i+1x}(u - u_i)b_i]B_1 + (u - u_i)(u - u_{i+1})A_1}, \quad (5.11)$$

где

$$\tau_{ix} = b_i, \quad \tau_{i+1x} = b_{i+1}; \quad u_s = -\frac{a_s}{b_s}, \quad s \in I_k;$$

$$B_1 = \alpha \cdot \prod_{j \in I_k, j \neq i, i+1} (u - u_j), \quad \varphi = x\eta_1(x, u), \quad A_1 = x\eta_2(x, u),$$

и  $\eta_s(x, u)$ ,  $s = 1, 2$  — некоторые многочлены. В малых окрестностях точек  $(0; u_i)$  и  $(0; u_{i+1})$  плоскости  $Oxu$  уравнение (5.11) имеет вид

$$\frac{du}{dx} = \frac{\Delta_i \cdot (u - u_i) + xg_1(x, u)}{x[1 + (u - u_i)g_2(x, u)]} \quad \text{и} \quad \frac{du}{dx} = \frac{\Delta_{i+1} \cdot (u - u_{i+1}) + xg_3(x, u)}{x[1 + (u - u_{i+1})g_4(x, u)]}, \quad (5.12)$$

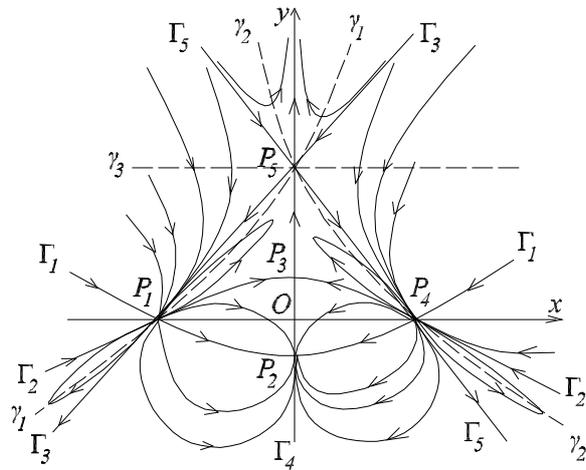


Рис. 3. Схема фазового портрета векторного поля  $\vec{v}$  примера 5.1

соответственно, где  $\Delta_s = (-1)^{\xi_s} \cdot (-N_{k\nu} + N_{k\delta})$ ,  $s = i, i+1$ , а  $g_j = g_j(x, u)$ ,  $j = 1, \dots, 4$  — некоторые многочлены.

При выполнении условий утверждения 5.1 справедливы неравенства  $\Delta_i > 0$  и  $\Delta_{i+1} < 0$ , поэтому из (5.12) следует, что  $L_{ki}$  и  $L_{ki+1}$  являются сепаратрисами параболического и гиперболического типов соответственно, а сектор  $S_{kii+1}$  — сектором, параболическим справа.

Если в (5.10) один из коэффициентов  $b_i, b_{i+1}$  равен нулю, то одна из сепаратрис  $L_{ki}$  и  $L_{ki+1}$  точки  $P_k$  касается оси  $Oy$ . В этом случае для выяснения типа сектора  $S_{kii+1}$ , следует аналогичным образом исследовать второе из уравнений (5.3) совместно с равенствами (5.7) и (5.9). В результате утверждение 5.1 будет доказано.

Утверждения 5.2–5.4 доказываются аналогично. □

**Замечание 5.2.** Из (5.7) и (5.12) следует, что изменение знака разности  $-N_{k\nu} + N_{k\delta}$  приводит к изменению типа сектора  $S_{kii+1}$ , а именно: сектора, параболического справа, в сектор, параболический слева, и наоборот в случаях, рассмотренных в утверждениях 5.1 и 5.2; параболического сектора в эллиптический и наоборот в случаях, рассмотренных в утверждениях 5.3 и 5.4.

**Замечание 5.3.** Знак разности  $-N_{k\nu} + N_{k\delta}$  можно изменить двумя способами:

- (i) добавлением множителя, например, вида  $[(x - x_k)^2 + (y - y_k)^2]^\nu$  в числитель или знаменатель правой части уравнения (4.1), где  $\nu$  — некоторое натуральное число; или
- (ii) заменой некоторого множителя  $\omega_i$  его степенью  $\omega_i^{\beta_i}$  с натуральным показателем  $\beta_i > 1$ .

В случае (i) в правой части равенства (5.1) появится ещё одно слагаемое, а случае (ii) показатель степени  $\beta_i$  войдёт слагаемым с соответствующим знаком в разности  $-N_{l\nu} + N_{l\delta}$ , относящиеся к другим особым точкам  $P_l, l \in I_P$  и  $l \neq k$ , через которые проходит соответствующая кривая  $\Gamma_i$ .

**Пример 5.1.** Построить векторное поле  $\vec{v}$  вида (1.1), топологическая структура которого в области  $D = \{(x, y) : -1,7 < x < 1,7, -1,2 < y < 1,7\}$  эквивалентна топологической структуре фазового портрета, представленного схемой на рис. 3, где

$$\begin{aligned}
 \Gamma_1 : \quad \omega_1 &\equiv y - 0,5 \cdot (x^2 - 1) = 0 & \Rightarrow \quad \vec{\tau}_1 &= (1, x), \\
 \Gamma_2 : \quad \omega_2 &\equiv y + 0,2 \cdot (x^2 - 1) = 0 & \Rightarrow \quad \vec{\tau}_1 &= (1, -0,4x), \\
 \Gamma_3 : \quad \omega_3 &\equiv y - x - 1 = 0 & \Rightarrow \quad \vec{\tau}_3 &= (1, 1), \\
 \Gamma_4 : \quad \omega_4 &\equiv x = 0 & \Rightarrow \quad \vec{\tau}_4 &= (0, -1), \\
 \Gamma_5 : \quad \omega_5 &\equiv x + y - 1 = 0 & \Rightarrow \quad \vec{\tau}_5 &= (1, -1).
 \end{aligned}
 \tag{5.13}$$

**Решение.** 1. Построение векторного поля направлений сравнения  $\vec{\tau}$ . Согласно утверждениям 5.1–5.4, схеме фазового портрета на рис. 3 соответствует, в частности, функция

$$z_4 = \frac{\omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5}{\omega_1^3}$$

и, следовательно, векторное поле

$$\vec{\tau} = -3\vec{\tau}_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5 + \vec{\tau}_2 \omega_1 \omega_3 \omega_4 \omega_5 + \vec{\tau}_3 \omega_1 \omega_2 \omega_4 \omega_5 + \vec{\tau}_4 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_5 + \vec{\tau}_5 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \quad (5.14)$$

с компонентами

$$\begin{aligned} \tau_x &= -3\omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5 + \omega_1 \omega_3 \omega_4 \omega_5 + \omega_1 \omega_2 \omega_4 \omega_5 + \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4, \\ \tau_y &= -3x \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5 - 0,4x \omega_1 \omega_3 \omega_4 \omega_5 + \omega_1 \omega_2 \omega_4 \omega_5 - \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_5 - \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \end{aligned} \quad (5.15)$$

и требуемой топологической структурой в области  $D$ . Так как  $D$  не содержит ни предельных циклов, ни особых точек типа фокус, то векторное поле (5.14) само является частным решением задачи.

2. Построение функций  $F_1$  и  $F_2$ . Для нахождения других решений задачи можно использовать  $\vec{\tau}$  (5.14) и  $\vec{n} = \vec{k} \times \vec{\tau}$  в качестве векторных полей направлений сравнения. В соответствии с пунктом 3.3 составим предварительные выражения функций  $F_1$  и  $F_2$ , соответствующих топологической структуре фазового портрета на рис. 3:

$$F_1 = \vec{\tau} \cdot \vec{v} = -\lambda \omega_{01} \omega_{02} \omega_{03} \omega_{04} \omega_{05}, \quad (5.16)$$

$$F_2 = \vec{n} \cdot \vec{v} = -\mu \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5 \sigma_1 \sigma_2 \sigma_3 \sigma_4, \quad (5.17)$$

где  $\lambda, \mu$  — неопределённые неотрицательные множители,  $\omega_{0k} = (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2$ ,  $k = 1, \dots, 5$ , а множители  $\sigma_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , соответствуют следующим кривым и точке:

$$\begin{aligned} \gamma_1 : \quad \sigma_1 &\equiv \omega_3 - \omega_2 \omega_4 = 0, \\ \gamma_2 : \quad \sigma_2 &\equiv \omega_5 + \omega_2 \omega_4 = 0, \\ \gamma_3 : \quad \sigma_3 &\equiv y - 1 = 0, \\ \gamma_4 : \quad \sigma_4 &\equiv x^2 + (y + 0,5)^2 = 0. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Из (5.14) и (5.17) следует, что  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ , из (5.13) являются интегральными кривыми векторного поля  $\vec{\tau}$ , так как  $\vec{n}$  является вектором нормали для всех его интегральных кривых, включая и кривые  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, 5$ .

Если  $\sigma_j$ ,  $j = 1, \dots, 4$ , определены, то дальнейшее построение функций  $F_1$  (5.16) и  $F_2$  (5.17) сводится к выбору значений  $\lambda$  и  $\mu$ , которые обеспечивают одновременно требуемые локальные топологические структуры особых точек  $P_k$ ,  $k = 1, \dots, 5$ , и глобальную топологическую структуру искомого векторного поля  $\vec{v}(v_x, v_y)$  в области  $D$ . Такой выбор предполагает, прежде всего, исследование особых точек  $P_k$ ,  $k = 1, \dots, 5$ , уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{v_y}{v_x}, \quad (5.19)$$

которое мы выполним, используя метод Фроммера [9].

*Исследование точки  $P_1(-1, 0)$ .* Для нахождения критических направлений, отличных от направления  $x = -1$ , выполним в (5.19) подстановку  $y = u(x) \cdot (x + 1)$  и получим уравнение

$$(x + 1) \frac{du}{dx} = \left( \frac{v_y}{v_x} - \frac{y}{x + 1} \right) \Big|_{y=u \cdot (x+1)},$$

которое, после замены в нём  $v_x$  и  $v_y$  их выражениями (3.5), преобразуется в уравнение

$$(x + 1) \frac{du}{dx} = \left\{ \frac{F_1[(x + 1)\tau_y - y\tau_x] + F_2[(x + 1)\tau_x + y\tau_y]}{(x + 1)[F_1\tau_x - F_2\tau_y]} \right\} \Big|_{y=u \cdot (x+1)}, \quad (5.20)$$

где

$$\begin{aligned} (x + 1)\tau_y - y\tau_x &= \alpha \omega_1 \omega_2 \omega_3 + o(r_1^3), \quad \alpha = (\omega_4 \cdot \omega_5)|_{P_1} = 2, \\ (x + 1)\tau_x &= (x + 1)[(-3\omega_2 \omega_3 + \omega_1 \omega_3 + \omega_1 \omega_2) \cdot \alpha + o(r_1^3)] \end{aligned} \quad (5.21)$$

согласно (5.12) и (5.16)–(5.18). Предположим для определённости, что  $\lambda$  и  $\mu$  являются положительными постоянными. Тогда вблизи точки  $P_1$  функция  $F_2$  (5.17) имеет более высокий порядок

малости, чем  $F_1$  (5.16):  $\deg_{r_1} F_2 > \deg_{r_1} F_1$ . В этом случае подстановка (5.21) в (5.20) приводит к уравнению

$$(x+1) \frac{du}{dx} = \frac{-(u-u_1)(u-u_2)(u-u_3) \cdot [1+(x+1)\varphi_1(x,u)]}{3(u-u_2)(u-u_3) + (u-u_1)(u-u_3) + (u-u_1)(u-u_2) + (x+1)\varphi_2(x,u)}, \quad (5.22)$$

где  $u_1 = -1$ ,  $u_2 = 0,4$ ,  $u_3 = 1$  являются угловыми коэффициентами касательных к соответствующим кривым  $\Gamma_1$ ,  $\Gamma_2$ ,  $\Gamma_3$  в точке  $P_1(-1;0)$ ;  $\varphi_1(x,u)$ ,  $\varphi_2(x,u)$  — многочлены. Из (5.22) следует, что сепаратрисы  $L_{11,1}$  и  $L_{11,2}$  относятся к гиперболическому типу, а  $L_{12,\alpha}$  и  $L_{13,\alpha}$ ,  $\alpha = 1, 2$ , — к параболическому типу.

Заметим, что  $x = -1$  не является критическим направлением особой точки  $P_1$ , так как предел правой части уравнения (5.22) равен  $-u$  при  $x \rightarrow -1$  и  $u \rightarrow \infty$ . Этот факт может быть проверен подстановкой  $x+1 = v(y) \cdot y$  в уравнение

$$\frac{dx}{dy} = \frac{v_x}{v_y} \quad (5.23)$$

и исследованием особых точек полученного уравнения

$$y \frac{dv}{dy} = \left( \frac{v_x}{v_y} - \frac{x+1}{y} \right) \Big|_{x+1=v(y) \cdot y}, \quad (5.24)$$

расположенных на оси  $Ov$  координатной плоскости  $Oyv$ . В силу (3.5), первого из равенств (5.21) и второго из равенств (5.15), уравнение (5.24) приводится к виду

$$y \frac{dv}{dy} = - \left\{ \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3 + o(r_1^3)}{y[3\omega_2 \omega_3 + 0,4\omega_1 \omega_3 + \omega_1 \omega_2 + o(r_1^2)]} \right\} \Big|_{x+1=v(y) \cdot y}. \quad (5.25)$$

Так как

$$\omega_1 = y + yv - 0,5 \cdot y^2 v^2, \quad \omega_2 = y - 0,4 \cdot yv + 0,2 \cdot y^2 v^2, \quad \omega_3 = y + yv,$$

то разделив числитель и знаменатель правой части уравнения (5.25) на  $y^3$ , получим

$$y \frac{dv}{dy} = - \frac{(v+1)(v-2,5)(v-1) + y\varphi_3(y,v)}{3 \cdot (v-2,5)(v-1) - (v+1)(v-1) - (v+1)(v-2,5) + y\varphi_4(y,v)}, \quad (5.26)$$

где  $\varphi_3(y,v)$  и  $\varphi_4(y,v)$  — некоторые многочлены. Из вида правой части последнего уравнения следует, что  $(0,0)$  не является его особой точкой и, следовательно,  $x = -1$  не является критическим направлением точки  $P_1(-1;0)$ .

**Замечание 5.4.** Если  $\deg_{r_1} F_1 < \deg_{r_1} F_2$ ,  $\lambda(x_1, y_1) \neq 0$  и  $\mu(x_1, y_1) \neq 0$ , то из (5.22) и (5.26) следует, что топологическая структура особой точки  $P_1$  не зависит от  $\lambda$  и  $\beta$  и является одинаковой у обоих векторных полей  $\vec{r}$  и  $\vec{v}$ .

*Исследование точки  $P_2(0,0,2)$ .* После подстановки  $y-0,2 = u(x) \cdot x$  в (5.19) получим уравнение

$$x \frac{du}{dx} = \left\{ \frac{F_1 [x\tau_y - (y-0,2)\tau_x] + F_2 [x\tau_x + (y-0,2)\tau_y]}{x(F_1\tau_x - F_2\tau_y)} \right\} \Big|_{y-0,2=ux}, \quad (5.27)$$

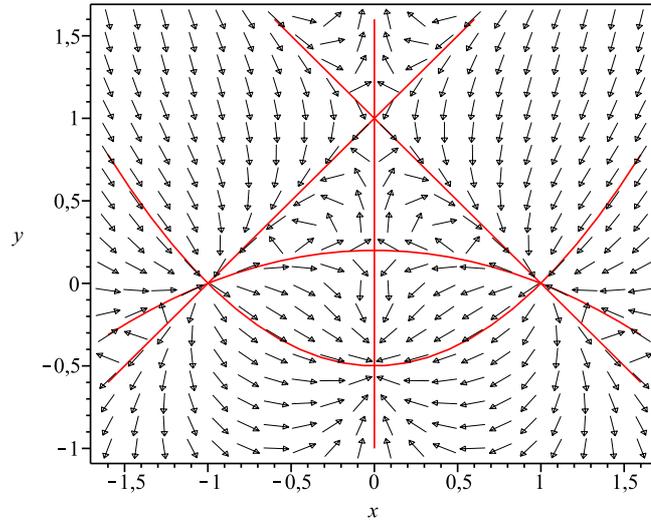
где

$$\begin{aligned} x\tau_y - (y-0,2)\tau_x &= -2\alpha\omega_2\omega_4 + o(r_2^2), \quad \alpha = (\omega_1\omega_3\omega_5)|_{P_2} \approx 0,768, \\ x\tau_x + (y-0,2)\tau_y &= [x\omega_4 - (y-0,2)\omega_2] \alpha + o(r_2^2), \\ xv_x &= x(F_1\omega_4 + F_2\omega_2)\alpha + o(r_2), \\ F_1 &= -\lambda [x^2 + (y-0,2)^2] \cdot \beta_1, \quad \beta_1 = (\omega_{01}\omega_{03}\omega_{04}\omega_{05})|_{P_2} \approx 0,3992, \\ F_2 &= -\mu\omega_2\omega_4\alpha\beta_2, \quad \beta_2 = (\sigma_1\sigma_2\sigma_3\sigma_4)|_{P_2} \approx -0,1229312. \end{aligned} \quad (5.28)$$

Так как  $\omega_2 = y - 0,2 + 0,2 \cdot x^2 = ux + 0,2 \cdot x^2$ , то в силу (5.28) уравнение (5.27) приводится к виду

$$x \frac{du}{dx} = - \frac{[2\lambda\beta_1 - \mu\alpha\beta_2 + (2\lambda\beta_1 + \mu\alpha\beta_2)u^2] \cdot u + x\varphi_5(x,u)}{\lambda\beta_1 + (\lambda\beta_1 + \mu\alpha\beta_2)u^2 + x\varphi_6(x,u)}, \quad (5.29)$$

где  $2\lambda\beta_1 - \mu\alpha\beta_2 > 0$ ,  $\varphi_5(y,v)$  и  $\varphi_4(y,v)$  — некоторые многочлены. Если  $2\beta_1 + \alpha\beta_2 > 0$ , то выражение в квадратных скобках в (5.29) положительно и, следовательно,  $u = 0$  является угловым

РИС. 4. График векторного поля  $\vec{v}$ , построенного в примере 5.1

коэффициентом единственного невертикального критического направления точки  $P_2$ . Это направление является касательным к сепаратрисам  $L_{22,1}$  и  $L_{22,2}$  в этой точке. Эти сепаратрисы являются гиперболическими, что следует из (5.29).

Чтобы убедиться в том, что  $x = 0$  является критическим направлением точки  $P_2$ , подставим  $x = v(y) \cdot (y - 0,2)$  в (5.23). В результате получим

$$(y - 0,2) \cdot \frac{dv}{dy} = - \frac{[2\lambda\beta_1 + \mu\alpha\beta_2 + (2\lambda\beta_1 - \mu\alpha\beta_2)v^2] \cdot v + (y - 0,2)\varphi_7(y, v)}{\lambda\beta_1 + (\lambda\beta_1 - \mu\alpha\beta_2)v^2 + (y - 0,2)\varphi_8(y, v)},$$

где  $\varphi_7(y, v)$ ,  $\varphi_8(y, v)$  — некоторые многочлены. Из вида правой части последнего уравнения следует, что  $x = 0$  действительно является критическим направлением точки  $P_2$ ; при этом  $L_{24,1}$  и  $L_{24,2}$  являются её гиперболическими сепаратрисами, если  $2\beta_1 + \alpha\beta_2 > 0$ . Для  $\alpha, \beta_1, \beta_2$  из (5.28) это неравенство выполняется, в частности, если  $\lambda = \mu = 1$ . В этом случае функциям  $F_1$  (5.16) и  $F_2$  (5.17) соответствует векторное поле  $\vec{v}$  с особой точкой  $P_2$  заданной топологической структуры.

**Замечание 5.5.** Из изложенного выше следует, что если  $\deg_{r_k} F_1 = \deg_{r_k} F_2$ , то топологическая структура соответствующей особой точки  $P_k$  векторного поля  $\vec{v}$  зависит от соотношения значений  $\lambda$  и  $\mu$  вблизи этой точки. В этом случае выбор подходящих значений  $\lambda$  и  $\mu$  предполагает изучение уравнений (5.19) и (5.23) после выполнения в них замен переменных  $y - y_k = u(x)(x - x_k)$  и  $x - x_k = v(y)(y - y_k)$ , соответственно.

Аналогичное изучение особых точек  $P_3, P_4, P_5$  показывает, что при  $\lambda = \mu = 1$  их локальные топологические структуры эквивалентны локальным топологическим структурам этих точек на схеме, представленной на рис. 3.

Таким образом, полагая  $\lambda = \mu = 1$  в (5.16) и (5.17), мы получим окончательные выражения функций  $F_1$  и  $F_2$ . Подстановка этих выражений в (3.5) даёт компоненты  $v_x$  и  $v_y$  искомого векторного поля  $\vec{v}$ . График этого векторного поля, построенный с помощью функции *fieldplot* пакета *MAPLE*, представлен на рис. 4.

**5.2. Локальные структуры особых точек  $\Phi_i, i \in I_\Phi$ , и предельных циклов  $C_j, j \in I_C$ .** Предположим, что искомое векторное поле  $\vec{v}$ (1.1) имеет в области  $D$  не только особые точки  $P_k, k \in I_P$ , но также фокусы  $\Phi_i, i \in I_\Phi$ , и предельные циклы  $C_j, j \in I_C$ , заданных типов. В этом случае  $\Phi_i, i \in I_\Phi$ , и  $C_j, j \in I_C$ , ограничивают конечное число двусвязных ячеек, не содержащих внутри себя особых траекторий векторного поля  $\vec{v}$  (см. [3, гл. VII, § 16]). Для построения такого векторного поля способом, описанным в пункте 3.3, следует сначала составить функцию  $z$  (4.1), для которой фокусы  $\Phi_i, i \in I_\Phi$ , и предельные циклы  $C_j, j \in I_C$ , являются элементами некоторых множеств вложенных замкнутых линий уровней  $z = c$ . Это требование выполняется,

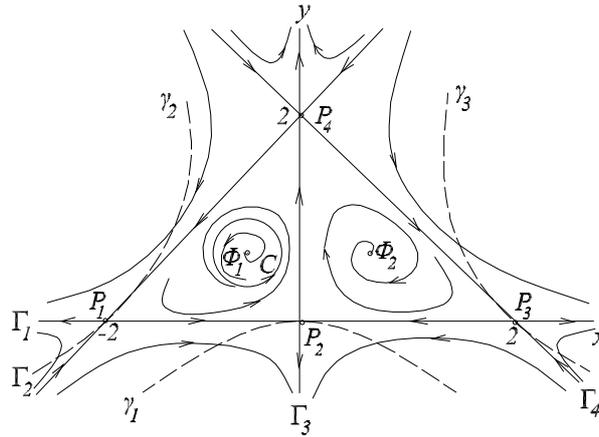


Рис. 5. Схема фазового портрета векторного поля  $\vec{v}$  примера 5.2

если множители  $\omega_i, i \in I$ , соответствующие внутренним и внешним границам одних и тех же упомянутых выше ячеек, располагаются в разных частях дроби из (4.1): один в её числителе, а другой/другие — в знаменателе или наоборот. В этом случае векторы  $\vec{n}_S$  (4.2) и  $\vec{k}$  не являются коллинеарными во внутренних точках этих ячеек, из чего следует, что соответствующий вектор  $\vec{\tau}$  (4.3) отличен от нуля в этих точках. Этот факт позволяет использовать  $\vec{\tau}$  в качестве векторного поля направлений сравнения, для которого кривые упомянутых выше множеств вложенных замкнутых кривых являются интегральными кривыми. Для этого векторного поля каждая точка  $\Phi_i$  является центром, расположенным в одной из этих ячеек, ограниченной внешне (а) некоторой кривой  $C_j, j \in I_C$ , или (б) несколькими интегральными кривыми  $\Gamma_{s_1}, \dots, \Gamma_{s_h}$ , где  $s_1, \dots, s_h \in I_\Gamma$ . В случае (б) каждая вершина ячейки является одной из особых точек  $P_k, k \in I_P$ , а соответствующий сектор  $S_{kij,\alpha}$ , расположенный внутри этой ячейки, является гиперболическим.

При сделанных выше предположениях топологические структуры фокусов  $\Phi_i, i \in I_\Phi$ , и предельных циклов  $C_j, j \in I_C$ , искомого векторного поля  $\vec{v}$  зависят от знаков функций  $F_1$  и  $F_2$  из (3.4) внутри упомянутых выше ячеек. А именно: знак функции  $F_1$  определяет направление векторного поля  $\vec{v}$  на его интегральных кривых, а сочетания знаков функций  $F_1$  и  $F_2$  определяют характер устойчивости фокусов  $\Phi_i, i \in I_\Phi$ , и предельных циклов  $C_j, j \in I_C$ .

**Пример 5.2.** Построить векторное поле  $\vec{v}$  (1.1), которое в области  $D = \{(x, y) : x \in (-3, 3), y \in (-1, 2, 3, 2)\}$  имеет топологическую структуру, эквивалентную топологической структуре фазового портрета, представленного схемой на рис. 5, где

$$\begin{aligned} \Gamma_1 : \omega_1 &\equiv y = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_1 = (1, 0), & \Gamma_2 : \omega_2 &\equiv y - 2 - x = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_2 = (1, 1), \\ \Gamma_3 : \omega_3 &\equiv x = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_3 = (0, -1), & \Gamma_4 : \omega_4 &\equiv y + x - 2 = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_3 = (1, -1), \\ C : \omega_5 &\equiv -(x + 0,5)^2 - (y - 0,75)^2 + \frac{1}{9} = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_5 = (-2(y - 0,75), 2(x + 0,5)), \\ \Phi_1 : \omega_6 &\equiv -(x + 0,5)^2 - (y - 0,75)^2 = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_6 = (-2(y - 0,75), 2(x + 0,5)), \\ \Phi_2 : \omega_7 &\equiv -(x - 0,5)^2 - (y - 0,75)^2 = 0 \Rightarrow \vec{\tau}_7 = (-2(y - 0,75), 2(x - 0,5)). \end{aligned}$$

**Решение. 1.** Построение векторного поля  $\vec{\tau}$ . В соответствии с разделами 4 и 5 топологической структуре фазового портрета, представленного на рис. 5, отвечает, в частности, функция

$$z = \frac{\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_6}{\omega_5 \omega_7} \tag{5.30}$$

и, следовательно, векторное поле

$$\begin{aligned} \vec{\tau} = & \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5 \omega_6 \omega_7 \vec{\tau}_1 + \omega_1 \omega_3 \omega_4 \omega_5 \omega_6 \omega_7 \vec{\tau}_2 + \omega_1 \omega_2 \omega_4 \omega_5 \omega_6 \omega_7 \vec{\tau}_3 + \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_5 \omega_6 \omega_7 \vec{\tau}_4 - \\ & - \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_6 \omega_7 \vec{\tau}_5 + \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5 \omega_7 \vec{\tau}_6 - \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5 \omega_6 \vec{\tau}_7. \end{aligned} \tag{5.31}$$

Так как все  $\omega_i, i = 1, \dots, 7$ , входят в (5.30) только в первых степенях, то:

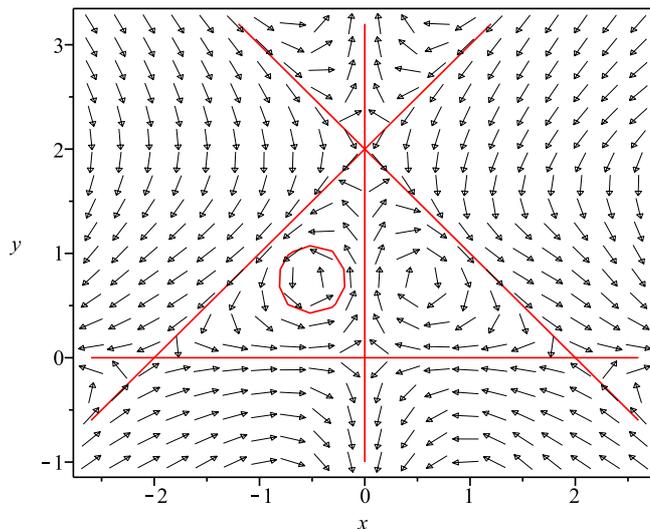


Рис. 6. График векторного поля  $\vec{v}$ , построенного в примере 5.2

- (i) проекция вектора  $\vec{n}_S$  (4.2) на плоскость  $Oxy$  отлична от нуля в области  $D$ , за исключением точек  $P_1(-2, 0)$ ,  $P_2(0, 0)$ ,  $P_3(2, 0)$ ,  $P_4(0, 2)$ ,  $\Phi_1(-0,5, 0,75)$ ,  $\Phi_2(0,5, 0,75)$ ;
- (ii) линии уровней  $z = c$  ( $c = \text{const} \neq 0, \pm\infty$ ), являясь интегральными кривыми векторного поля  $\vec{\tau}$ , образуют, в частности, два множества вложенных замкнутых кривых, которые заполняют области (ячейки), ограниченные кривыми  $\Gamma_i$ ,  $i = 1, \dots, 4$ , и точками  $\Phi_1$ ,  $\Phi_2$  (см. рис. 5);
- (iii) кривая  $C$  является элементом одного из этих множеств.

Из (i) и (ii) следует, что для векторного поля  $\vec{\tau}$  (5.31):

- (a) особые точки  $\Phi_1$  и  $\Phi_2$  являются центрами;
- (b) все секторы особых точек  $P_k(x_k, y_k)$ ,  $k = 1, \dots, 4$ , являются гиперболическими, что устанавливается методом Фроммера [9] аналогично тому, как это было сделано в примере 5.1.

2. *Построение векторного поля  $\vec{v}$ .* В соответствии с разделом 3.3, используя  $\vec{\tau}$  (5.31) и  $\vec{n} = \vec{k} \times \vec{\tau}$  в качестве векторных полей направлений сравнения, составим функции  $F_1$  и  $F_2$  из (3.4), которые соответствуют топологической структуре фазового портрета на рис. 5. Такими функциями являются, в частности,

$$F_1 = \omega_{01}\omega_{02}\omega_{03}\omega_{04}\omega_6, \quad F_2 = \omega_1\omega_2\omega_3\omega_4\omega_5\omega_6\omega_7\sigma_1\sigma_2, \tag{5.32}$$

где

$$\omega_{0i} = (x - x_k)^2 + (y - y_k)^2, \quad i = 1, 2, 3, 4; \quad \sigma_1 = y + 0,2x^2, \quad \sigma_2 = \omega_2\omega_4 + 0,3\omega_1^2.$$

Заметим, что равенство  $\sigma_1(x, y) = 0$  определяет кривые  $\gamma_1$  и  $\gamma_2$ , а равенство  $\sigma_2(x, y) = 0$  является уравнением кривой  $\gamma_3$  (см. рис. 5).

Подстановкой  $F_1$  и  $F_2$  из (5.32) в (3.5) получим компоненты искомого векторного поля  $\vec{v}$ . График этого векторного поля, построенный с помощью функции *fieldplot* пакета *MAPLE*, представлен на рис. 6.

Очевидно, что топологические структуры фазового портрета на рис. 5 и векторного поля на рис. 6 эквивалентны друг другу.

### 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

При постановке основной задачи (см. пункт 3.1) предполагалось, что все критические направления особых точек  $P_k$ ,  $k \in I_P$ , являются *простыми обыкновенными* (см. [9]). Снятие этого ограничения и допущение того, что эти точки могут иметь также: (a) *кратные обыкновенные* критические направления, (b) сепаратрисы смешанных типов и (c) *особые* критические направления (определения типов критических направлений, указанных в п.п. (a) и (c), см. в [9]), приводит

к обобщению основной задачи и усложнению возможных топологических структур искомых векторных полей. Решение такой обобщённой задачи представляется возможным с использованием соответствующих векторных полей направлений сравнения.

Результаты решения основной задачи, изложенные в данной статье, могут быть использованы для построения математических моделей динамических систем, описываемых обыкновенными дифференциальными уравнениями, в различных областях науки и техники. В частности, сочетание этих результатов с методами решения обратных задач динамики (см. [6]) позволяет составлять кинематические уравнения программных движений механических систем (например, таких как манипуляционные роботы) и использовать эти уравнения для нахождения управляющих сил, обеспечивающих осуществление этих движений и их устойчивость.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Альмухамедов М. И.* Обратная задача качественной теории дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Сер. Мат. — 1963. — № 4. — С. 3–6.
2. *Альмухамедов М. И.* О конструировании дифференциального уравнения, имеющего своими предельными циклами заданные кривые // Изв. вузов. Сер. Мат. — 1965. — № 1. — С. 12–16.
3. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон И. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем на плоскости. — М.: Наука, 1966.
4. *Волков С. В.* Построение плоских векторных полей с непростой особой точкой заданной топологической структуры // Современ. мат. Фундам. направл. — 2022. — 68, № 4. — С. 575–595.
5. *Галиуллин А. С.* Обратные задачи динамики. — М.: Мир, 1984.
6. *Галиуллин А. С.* Методы решения обратных задач динамики. — М.: Наука, 1986.
7. *Еругин Н. П.* Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // Прикл. мат. мех. — 1952. — 16, № 6. — С. 659–670.
8. *Мухарлямов Р. Г.* К обратным задачам качественной теории дифференциальных уравнений // Дифф. уравн. — 1967. — 3, № 19. — С. 1673–1681.
9. *Фроммер М.* Интегральные кривые обыкновенного дифференциального уравнения первого порядка в окрестности особой точки, имеющей рациональный характер // Усп. мат. наук. — 1941. — № 9. — С. 212–253.
10. *Argémi J.* Sur les points singuliers multiples de systèmes dynamiques dans  $\mathbb{R}^2$  // Ann. Mat. Pura Appl. — 1968. — 79. — С. 35–69.
11. *Jaumes G.* Synthèse d'un système dynamique correspondant a un portrait topologique donné // Int. J. Nonlinear Mech. — 1972. — 7, № 6. — С. 597–608.
12. *Sverdlove R.* Inverse problems for dynamical systems // J. Differ. Equ. — 1981. — 42, № 1. — С. 72–105.

С. В. Волков

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: volkov-sv@rudn.ru

UDC 517.925; 517.93; 531.13

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-237-252

EDN: YIWVPQ

## Construction of Flat Vector Fields with Prescribed Global Topological Structures

S. V. Volkov

*RUDN University, Moscow, Russia*

**Abstract.** In this paper, we present a method for constructing vector fields whose phase portraits have finite sets of prescribed special trajectories (limit cycles, simple and complex singular points, separatrices) and prescribed topological structures in limited domains of the phase plane. The problem of constructing such vector fields is a generalization of a number of well-known inverse problems of the qualitative theory of ordinary differential equations. The proposed method for solving it expands the possibilities of mathematical modeling of dynamic systems with prescribed properties in various fields of science and technology.

**Keywords:** vector field, ODE system, qualitative ODE theory, phase portrait, topological structure, dynamical system, inverse problem.

**Conflict-of-interest.** The author declares no conflicts of interest.

**Acknowledgments and funding.** The author declares no financial support.

**For citation:** S. V. Volkov, “Construction of Flat Vector Fields with Prescribed Global Topological Structures,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 2, 237–252. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-237-252>

### REFERENCES

1. M. I. Al'mukhamedov, “Obratnaya zadacha kachestvennoy teorii differentsial'nykh uravneniy” [The inverse problem of qualitative theory of differential equations], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1963, No. 4, 3–6 (in Russian).
2. M. I. Al'mukhamedov, “O konstruirovani differentsial'nogo uravneniya, imeyushchego svoimi predel'nye tsiklami zadannye krivye” [On the construction of a differential equation having given curves as its limit cycles], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1965, No. 1, 12–16 (in Russian).
3. A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon, and A. G. Maier, *Kachestvennaya teoriya dinamicheskikh sistem na ploskosti* [Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems on the Plane], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
4. S. V. Volkov, “Postroenie ploskikh vektornykh poley s neprostoy osoboy tochkoy zadannoy topologicheskoy struktury” [Construction of planar vector fields with a nonsimple critical point of prescribed topological structure], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2022, **68**, No. 4, 575–595 (in Russian).
5. A. S. Galiullin, *Obratnye zadachi dinamiki* [Inverse Dynamics Problems], Mir, Moscow, 1984 (in Russian).
6. A. S. Galiullin, *Metody resheniya obratnykh zadach dinamiki* [Methods for Solving Inverse Dynamics Problems], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
7. N. P. Erugin, “Postroenie vsego mnozhestva sistem differentsial'nykh uravneniy, imeyushchikh zadannuyu integral'nyuyu krivuyu” [Construction of the entire set of systems of differential equations having a given integral curve], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1952, **16**, No. 6, 659–670 (in Russian).



8. R. G. Mukharlyamov, “K obratnym zadacham kachestvennoy teorii differentsial’nykh uravneniy” [To inverse problems of the qualitative theory of differential equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1967, **3**, No. 19, 1673–1681 (in Russian).
9. M. Frommer, “Integral’nye krivye obyknovennogo differentsial’nogo uravneniya pervogo poryadka v okrestnosti osoboy tochki, imeyushchey ratsional’nyy kharakter” [Integral curves of a first-order ordinary differential equation in the neighborhood of a singular point of rational character], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1941, No. 9, 212–253 (in Russian).
10. J. Argémi, “Sur les points singuliers multiples de systèmes dynamiques dans  $\mathbb{R}^2$ ,” *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1968, **79**, 35–69.
11. G. Jaumes, “Synthèse d’un système dynamique correspondant a un portrait topologique donné,” *Int. J. Nonlinear Mech.*, 1972, **7**, No. 6, 597–608.
12. R. Sverdlove, “Inverse problems for dynamical systems,” *J. Differ. Equ.*, 1981, **42**, No. 1, 72–105.

S. V. Volkov  
RUDN University, Moscow, Russia  
E-mail: volkov-sv@rudn.ru

УДК 517.958

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-253-277

EDN: YJBKVV

## ХЕМОТАКСИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ КЕЛЛЕРА—СЕГЕЛЯ, ОСНОВАННЫЕ НА МОДЕЛИ БРОУНОВСКОГО ДВИЖЕНИЯ ЭЙНШТЕЙНА

Р. Ислам<sup>1</sup>, А. Ибрагимов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Техасский технологический университет, Лаббок, США

<sup>2</sup>Институт проблем нефти и газа РАН, Москва, Россия

**Аннотация.** Изучается движение живого организма ленточной формы в направлении концентрации химических субстратов с помощью системы эволюционных дифференциальных уравнений в частных производных. Используется метод броуновского движения Эйнштейна для вывода хемотаксической модели, демонстрирующей бегущую полосу. Впервые применен метод Эйнштейна для обоснования уравнений, описывающих взаимодействие хемотаксической системы. Показано, что при наличии как ограниченного, так и неограниченного субстрата возможны бегущие полосы, и это соответствующим образом обосновано. Также изучается устойчивость постоянных стационарных состояний системы. Линеаризованная система в окрестности постоянного стационарного состояния получена при смешанных граничных условиях Дирихле и Неймана. Нам удалось найти явные условия линейной неустойчивости. Установлена линейная устойчивость по  $L^2$ -норме,  $H^1$ -норме и  $L^\infty$ -норме при определенных условиях.

**Ключевые слова:** хемотаксическая модель, метод броуновского движения Эйнштейна, бегущая полоса.

**Заявление о конфликте интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Благодарности и финансирование.** Мы благодарим профессора Луана Хоанга за его вклад в написание теорем 3.2 и 3.3 и плодотворные обсуждения. Исследования поддержаны госзаказом Института проблем нефти и газа РАН, проект 122022800272-4.

**Для цитирования:** Р. Ислам, А. Ибрагимов. Хемотаксические системы Келлера—Сегеля, основанные на модели броуновского движения Эйнштейна // Современ. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 2. С. 253–277. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-253-277>

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В знаменитой работе Эйнштейна о теории броуновского движения [6] предполагается существование дискретных молекул, которые слишком малы, чтобы их можно было увидеть в микроскоп, но результирующее движение которых наблюдаемо через микроскоп. В этой теории утверждается, что возбуждение частиц в воде является результатом столкновений с молекулами. Эйнштейном была построена модель, описывающая это движение относительно близлежащих частиц.

*Хемотаксис* — это биологическое явление, посредством которого организмы меняют свое состояние движения либо по направлению к химическому веществу, либо от него. Эту миграцию можно увидеть как в клетках бактерий, так и млекопитающих. В 1966 году Адлер провел эксперимент с капиллярной трубкой, содержащей разбавленную культуру бактерий и хемоаттрактант [1].

Бактерии чувствуют более высокое содержание хемоаттрактанта и движутся в его направлении. Во время этого процесса детальное движение, осуществляемое каждой клеткой, кажется беспорядочным. Эта хаотичность возникает не только из-за хемотаксического ответа, но также и из-за случайных скачков клеток. Мы утверждаем, что на теоретической основе броуновского движения Эйнштейна можно описать хемотаксическую реакцию и случайное движение организмов.

На основе наблюдений Адлера за полосами мигрирующих бактерий за последние несколько десятилетий было сформулировано множество моделей. Одна из самых интересных и новаторских моделей хемотаксиса была разработана Келлером и Сегелем [10]. С тех пор проводились обширные исследования и были построены различные варианты модели Келлера—Сегеля. Келлер и Сегель применили макроскопический подход для вывода модели хемотаксиса, но существует и другой способ моделирования хемотаксического движения — с микроскопической точки зрения. Отмер и Стивенс [16] использовали случайное блуждание в дискретном пространстве с непрерывным временем для описания движения бактериальных клеток по одномерной решетке. Стивенс рассматривал стохастическую систему многих частиц, в которой взаимодействие между частицами описывается системой хемотаксиса, которую можно интерпретировать с помощью плотности популяции [15]. Романчук, Эрдманн, Энгель и Шиманский-Гайер исследовали самоорганизованное движение бактерий, используя концепцию активных броуновских частиц [13].

В статьях [2, 4, 18] использовался стохастический подход для перехода от модели Келлера—Сегеля в терминах уравнений в частных производных к интегро-дифференциальному стохастическому уравнению с шумом в качестве источника. В настоящем исследовании мы собираемся применить микроскопический подход и расширить структуру случайных блужданий Эйнштейна, чтобы получить такую модель. Наши предположения включают взаимодействие между бактериями и движение бактерий к субстратам. Мы также обсуждаем и анализируем агрегированную массу бактериальных клеток.

В разделе 2 мы выводим хемотаксическую модель, основанную на модели случайного блуждания Эйнштейна. Мы описываем поведение бегущих полос в двух случаях: среда с неограниченным и ограниченным запасами еды, описанными в разделе 3. В разделе 4 рассмотрен критерий линейной неустойчивости постоянных стационарных решений с однородными граничными условиями Дирихле и Неймана и линейная устойчивость в  $L^2$  и  $L^\infty$  с использованием энергетического метода (ср. с подходом [9]).

## 2. ВЫВОД ХЕМОТАКСИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ НА ОСНОВЕ МОДЕЛИ ЭЙНШТЕЙНА

В этом разделе рассматривается применение модели броуновского движения Эйнштейна для описания хемотаксической системы.

**2.1. Модели с потреблением или реакцией.** Пусть  $X = (x, t)$  — наблюдаемая точка в пространстве  $x \in \mathbb{R}$  в момент времени  $t \in (0, \infty)$ . При  $t > 0$  рассмотрим пространство, ограниченное двумя плоскостями  $x$  и  $x + dx$ , перпендикулярными оси  $x$ . Для вывода модели в частных производных требуется существование временного интервала  $\tau$  между столкновением двух частиц. Интервал  $\tau$  «достаточно мал» по сравнению с временем  $t$  наблюдения физического процесса, но не настолько мал, чтобы движения стали коррелированными. Обозначим через  $\Delta$  расстояние, которое каждая частица проходит за интервал времени  $(t, t + \tau)$ , а за  $\varphi_\tau(\Delta)$  — плотность вероятности отсутствия столкновения. Пусть  $w(x, t)$  — количество частиц (таких как бактерии и глюкоза либо хищник и добыча и т. д.) в объеме  $[x, x + dx]$ . Введем следующие основные свойства.

**Определение 2.1.** Ожидание длины свободного прыжка:

$$\Delta_e = \int \Delta \varphi_\tau(\Delta) d\Delta.$$

**Определение 2.2.** Стандартное отклонение свободного прыжка:

$$\sigma^2 = \int (\Delta - \Delta_e)^2 \varphi_\tau(\Delta) d\Delta.$$

Тогда число частиц в момент времени  $t + \tau$  между двумя плоскостями, перпендикулярными оси  $x$ , с абсциссами  $x$  и  $x + dx$ , определяется выражением

$$(w(x, t + \tau)) \cdot dx = \left( \underbrace{\mathbb{E}[w(x + \Delta, t)]}_{I_1} + \underbrace{w \frac{\partial \Delta_e}{\partial x}}_{I_2} + \underbrace{\frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} f(x, \xi) d\xi}_{I_3} \right) \cdot dx \quad (2.1)$$

Здесь

$$\mathbb{E}[w(x + \Delta, t)] = \int_{-\infty}^{\infty} w(x + \Delta, t) \varphi_{\tau}(\Delta) d\Delta.$$

В правой части уравнения (2.1) первый член  $I_1$  описывает распределение частиц вследствие случайного блуждания. Второе слагаемое  $I_2$  описывает адвективный поток частиц, зависящий от градиента ожидаемой длины. Последний член  $I_3$  описывает рождение или смерть частиц в течение времени  $[t, t + \tau]$ .

Величины  $\tau$ ,  $\Delta$  и  $\varphi_{\tau}(\Delta)$  могут быть функциями пространственного расстояния  $x$  и временной переменной  $t$ , а также любой другой физической величины, такой как плотность или количество частиц и т. д. В нашем случае будем пока считать, что  $\tau$  не зависит от концентрации частиц  $w(x, t)$ , а  $\varphi_{\tau}(\Delta)$  фиксировано относительно  $w(x, t)$ .

Добавим и вычтем  $w(x, t)$  в правой части уравнения (2.1), получим

$$(w(x, t + \tau) - w(x, t)) \cdot dx = \left( \mathbb{E}[w(x + \Delta, t)] - \mathbb{E}[w(x, t)] + w \cdot \frac{\partial \Delta_e}{\partial x} + \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} f(x, \xi) d\xi \right) \cdot dx. \quad (2.2)$$

Пусть  $w(x, t)$  — четырехкратно дифференцируемая ограниченная функция на  $\mathbb{R}$ , тогда величина  $(\mathbb{E}[w(x + \Delta, t)] - w(x, t))$  хорошо аппроксимируется формулами [14]

$$(\mathbb{E}[w(x + \Delta, t)] - w(x, t)) = \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + \Delta_e \frac{\partial w(x, t)}{\partial x}. \quad (2.3)$$

Используя свойства функции  $\varphi$  и применяя уравнение (2.3) к (2.2), получаем

$$\tau \frac{\partial w}{\partial t} = \Delta_e \frac{\partial w}{\partial x} + w \cdot \frac{\partial \Delta_e}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} f(x, \xi) d\xi, \quad (2.4)$$

или, что то же самое,

$$\tau \frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial (w \cdot \Delta_e)}{\partial x} + \frac{1}{2} \sigma^2 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{\tau} \int_t^{t+\tau} f(x, \xi) d\xi. \quad (2.5)$$

**2.2. Модели хемотаксических систем.** Пусть  $x$  — расстояние вдоль трубки, а  $t$  — время. Обозначим через  $u(x, t)$  и  $v(x, t)$  соответственно концентрацию бактерий и химического субстрата (пищи или любого химического аттрактора) в единице объема.

Соответствующее представление уравнения (2.5) для бактерий имеет вид

$$\tau_u \frac{\partial u}{\partial t} - \frac{\partial (u \cdot \Delta_{e,u})}{\partial x} - \frac{1}{2} \sigma_u^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{1}{\tau_u} \int_t^{t+\tau_u} f_u(x, \xi) d\xi = 0. \quad (2.6)$$

На хемотаксический ответ бактерий  $u(x, t)$  в среде может влиять концентрация химического субстрата  $v(x, t)$  и/или  $\nabla v$  (см. недавний обзор [17]). Мы предполагаем, что хемотаксический ответ, вызывающий движение организма к пище (или какому-либо аттрактору), пропорционален пространственному изменению  $v$  по отношению к количеству пищи. Тогда по определениям 2.1 и 2.2 величины  $\Delta_{e,u}$  и  $\sigma_u$  также зависят от  $v(x, t)$ . Келлер и Сегель предположили, что чувствительность зависит от плотности с особенностью при  $v = 0$  (см. [10]). Следуя предположению

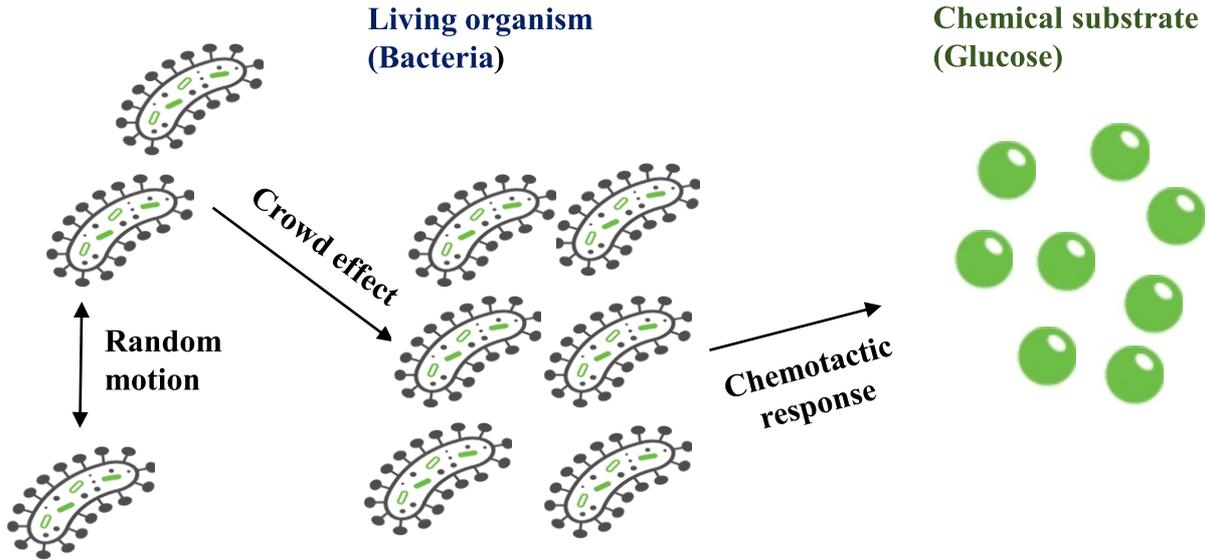


Рис. 1. Представление взаимодействия организма (бактерии) и субстрата (глюкозы).

FIG. 1. A virtual representation of the interactions between the organism (bacteria) and chemical substrates (glucose).

Келлера—Сегеля, опишем динамику направленного движения, характеризуемую ожидаемой величиной свободного прыжка  $\Delta_{e,u}$ , следующим образом:

$$\Delta_{e,u}(v) = -\beta(v) \frac{\partial v}{\partial x} = -\frac{\beta}{v} \frac{\partial v}{\partial x} = -\beta \frac{\partial \ln v}{\partial x}, \quad (2.7)$$

где  $\beta$  — положительный коэффициент хемотаксиса размерности  $[L^2]$ .

Хотя в действительности стандартное отклонение — составной параметр, зависящий от  $v$ ,  $\nabla v$ ,  $u$ ,  $\nabla u$ ,  $x$ ,  $t$  и т. д., в этой статье мы рассматриваем динамику процессов с постоянным стандартным отклонением. А именно,

$$\sigma_u^2(v) = \mu, \quad (2.8)$$

где  $\mu$  — параметр подвижности, или коэффициент диффузии, организма с размерностью  $[L^2]$ . И  $\mu$ , и  $\beta$  можно получить из анализа динамики процесса с использованием обработки изображений.

Величина  $f_u$  — количество организмов, которые рождаются или умирают в единице объема. Будем считать, что

$$\int_t^{t+\tau_u} f_u(x, \xi) d\xi = \tau_u g(u, v). \quad (2.9)$$

Здесь  $g(u, v)$  — скорость рождения или гибели организма размерности  $[\frac{1}{T}]$ . Поскольку рост или размножение организма происходят в больших временных масштабах, а хемотаксис происходит в очень малых временных масштабах, мы можем игнорировать этот член. Полагая  $g(u, v) = 0$  в уравнении (2.10), получим

$$\tau_u \frac{\partial u}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial \ln v}{\partial x} \right) - \frac{\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0. \quad (2.10)$$

Первый член в правой части уравнения (2.10) представляет собой хемотаксическую реакцию организма. Второй член — изменение плотности организма вследствие хаотического движения.

Концентрация  $v(x, t)$  химических субстратов может быть задана уравнением

$$\tau_v \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial (v \cdot \Delta_{e,v})}{\partial x} - \frac{1}{2} \sigma_v^2 \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{1}{\tau_v} \int_t^{t+\tau_v} f_v(x, \xi) d\xi = 0. \quad (2.11)$$

**Предположение 2.1.** Пища (химический субстрат) считается неподвижной, поэтому химическое взаимодействие между частицами субстратов в нашем предположении невозможно. Следовательно,

$$\Delta_{e,v} = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_v^2 = D,$$

где  $D$  — константа диффузии химического субстрата.

**Предположение 2.2.** Величина  $f_v$  определяется как потребление клеток субстрата и

$$\int_t^{t+\tau_v} f_v(x, \xi) d\xi = H(u, v) = -\tau_v k(v)u,$$

где  $k(v)$  — скорость расхода субстрата размерности  $\left[\frac{1}{T}\right]$ .

В этих предположениях уравнение (2.11) можно записать как

$$\tau_v \frac{\partial v}{\partial t} = -\tau_v k(u, v)u + \frac{D}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2}. \quad (2.12)$$

Следовательно, хемотаксическая модель запишется в виде

$$\tau_u \frac{\partial u}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial \ln v}{\partial x} \right) - \frac{\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (2.13a)$$

$$\tau_v \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{D}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \tau_v k(u, v)u = 0. \quad (2.13b)$$

### 3. БЕГУЩИЕ ПОЛОСЫ

Этот раздел посвящен демонстрации того, что при описании хемотаксических моделей при неограниченном и ограниченном субстрате возникают бегущие полосы. Сначала определим понятие *бегущей полосы*.

**Определение 3.1.** Система уравнений (2.10) и (2.12) имеет форму *бегущей полосы*, если существуют решения  $u(x, t)$  и  $v(x, t)$  следующего вида:

$$u(x, t) = U(x - ct) \quad \text{и} \quad v(x, t) = V(x - ct) \quad \text{для всех} \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{и} \quad t \geq 0, \quad (3.1)$$

где  $c > 0$  — постоянная скорость полосы, а  $U, V$  — функции из  $\mathbb{R}$  в  $(0, \infty)$  такие, что пределы  $\lim_{\zeta \rightarrow \pm\infty} U(\zeta)$  и  $\lim_{\zeta \rightarrow \pm\infty} V(\zeta)$  существуют и принадлежат  $[0, \infty)$ .

Мы также будем предполагать  $D = 0$  в уравнении (2.12), поскольку соответствующий эффект тривиален в хемотаксической модели. Для простоты также положим  $\tau = \tau_u$  и  $\tau_v = 1$ .

**3.1. Случай неограниченного субстрата.** При обилии субстрата скорость потребления пищи  $k(v)$  не зависит от концентрации пищи. Следовательно,  $k(v) = k = \text{const}$ . Тогда хемотаксическая модель неограниченного субстрата имеет вид

$$\tau \frac{\partial u}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial \ln v}{\partial x} \right) - \frac{\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (3.2a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + kv = 0 \quad (3.2b)$$

для всех  $\zeta$  в  $\mathbb{R}$ .

**Теорема 3.1.** Если  $d = \frac{2\beta}{\mu}$  и  $d \geq 1$ , то система (3.2) имеет форму бегущей полосы. Точнее, для любых  $\tau, \beta, \mu, k, c, V_\infty, C_0 > 0$  и  $d \geq 1$  существуют решения вида (3.1), где

$$U(\zeta) = C_0 V^d(\zeta) e^{-\frac{2\tau c \zeta}{\mu}}, \quad (3.3a)$$

$$V(\zeta) = \begin{cases} \left[ \frac{1}{2} C_0 k c^{-2} \tau^{-1} \mu (d-1) e^{-\frac{2\tau c \zeta}{\mu}} + V_\infty^{-d+1} \right]^{-\frac{1}{d-1}} & \text{при } d > 1, \\ V_\infty e^{-\frac{1}{2} C_0 k c^{-2} \tau^{-1} \mu e^{-\frac{2\tau c \zeta}{\mu}}} & \text{при } d = 1. \end{cases} \quad (3.3b)$$

Более того,  $(U(\zeta), V(\zeta))$  является решением уравнений (3.5) и (3.6), которое удовлетворяет условию

$$\begin{aligned} U(\zeta) \rightarrow 0, \quad U'(\zeta) \rightarrow 0, \quad V(\zeta) \rightarrow V_\infty \quad \text{при} \quad \zeta \rightarrow \infty, \\ U(0)V(0)^{-d} = C_0. \end{aligned} \quad (3.4)$$

*Доказательство.* Подставляя  $u(x, t)$  и  $v(x, t)$  вида (3.1) в уравнения (3.2a) и (3.2b), получим

$$\tau c U' - \beta(UV^{-1}V')' + \frac{\mu}{2}U'' = 0, \quad (3.5)$$

$$cV' - kU = 0. \quad (3.6)$$

Мы будем искать решения  $U$  и  $V$  уравнений (3.5) и (3.6), которые удовлетворяют (3.1).

Разделив уравнение (3.5) на  $\frac{\mu}{2}$  и проинтегрировав, получим

$$\frac{2\tau c}{\mu}U - dUV^{-1}V' + U' = \text{const}. \quad (3.7)$$

Затем, переходя к пределу при  $\zeta \rightarrow \infty$  в уравнении (3.7) и применив условия (3.4), мы получаем константу, равную 0. Тогда из уравнения (3.7) получаем

$$U' = \left(dV^{-1}V' - \frac{2\tau c}{\mu}\right)U.$$

Следовательно, решение для  $U$  имеет вид

$$U(\zeta) = C_0 V^d(\zeta) e^{-\frac{2\tau c \zeta}{\mu}} = U(0)V(0)^d V^d(\zeta) e^{-\frac{2\tau c \zeta}{\mu}}. \quad (3.8)$$

*Случай*  $d > 1$ . Из уравнения (3.6) получаем  $V' = \frac{k}{c}U$ .

Подставляя выражение для  $U$ , заданное уравнением (3.8), в уравнение (3.6) и интегрируя с условиями (3.4), получаем

$$V(\zeta) = \left[\frac{1}{2}C_0 k c^{-2} \tau^{-1} \mu (d-1) e^{-\frac{2\tau c \zeta}{\mu}} + V_\infty^{-d+1}\right]^{-\frac{1}{d-1}}.$$

*Случай*  $d = 1$ . Решение  $U$  имеет вид

$$U(\zeta) = C_0 V(\zeta) e^{-\frac{2\tau c \zeta}{\mu}}.$$

Тогда из уравнения (3.6) получаем

$$V' = \frac{k}{c} C_0 V e^{-\frac{2\tau c \zeta}{\mu}}. \quad (3.9)$$

Интегрируя уравнение (3.9) и применяя условие (3.4), получаем

$$V(\zeta) = V_\infty e^{-\frac{1}{2}C_0 k c^{-2} \tau^{-1} \mu e^{-\frac{2\tau c \zeta}{\mu}}}.$$

□

Можно проверить, что решения (3.3a) и (3.3b) удовлетворяют условию (3.4) и

$$\lim_{\zeta \rightarrow -\infty} U(\zeta) = 0, \quad \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} V(\zeta) = 0.$$

Кроме того, используя уравнение (3.6), мы можем вычислить

$$c = \frac{k}{V_\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\zeta) d\zeta.$$

**Замечание 3.1.** Здесь  $V_\infty > 0$  — некоторая пороговая концентрация субстрата, инициирующая потребление субстрата бактериями.

Замкнутая форма решения позволяет провести базовый анализ чувствительности модели по отношению к ее параметрам следующим образом.

**Теорема 3.2.** Обозначим  $\vec{W} = (d, C_0, k, c, \tau, \mu, V_\infty) \in \mathbb{D} = (1, \infty) \times (0, \infty)^6$ . Тогда для любого компакта  $\Omega \subset \mathbb{D}$  существует  $K > 0$  такое, что для любого  $\vec{W}_1, \vec{W}_2 \in \Omega$ ,

$$|U(\zeta, \vec{W}_1) - U(\zeta, \vec{W}_2)| \leq K |\vec{W}_1 - \vec{W}_2|, \quad (3.10a)$$

$$|V(\zeta, \vec{W}_1) - V(\zeta, \vec{W}_2)| \leq K |\vec{W}_1 - \vec{W}_2| \quad (3.10b)$$

для всех  $\zeta \in \mathbb{R}$ .

*Доказательство.* Пусть  $A(C_0, k, c, \tau, \mu, \zeta) = \frac{1}{2} C_0 k c^{-2} \tau^{-1} \mu e^{-\frac{2\tau c \zeta}{\mu}}$ , тогда уравнение (3.3b) можно записать в виде

$$V(\zeta) = \left( A(d-1) + V_\infty^{-(d-1)} \right)^{-\frac{1}{(d-1)}}.$$

Пусть, без потери общности,

$$\Omega = [d_*, d^*] \times [C_*, C^*] \times [k_*, k^*] \times [c_*, c^*] \times [\tau_*, \tau^*] \times [\mu_*, \mu^*] \times [V_*, V^*] \subset \mathbb{D}.$$

Сначала мы докажем (3.10b). Для  $\vec{W} \in \Omega$  вычисляем

$$D_{\vec{W}} V(\zeta, \vec{W}) = \frac{\partial V}{\partial \vec{W}} = \left( \frac{\partial V}{\partial d}, \frac{\partial V}{\partial C_0}, \frac{\partial V}{\partial k}, \frac{\partial V}{\partial c}, \frac{\partial V}{\partial \tau}, \frac{\partial V}{\partial \mu}, \frac{\partial V}{\partial V_\infty} \right),$$

где

$$\frac{\partial V}{\partial d} = -V \frac{1}{d-1} \left( \ln V + \left( A(d-1) + V_\infty^{-(d-1)} \right)^{-1} (A - V_\infty^{-(d-1)} \ln V_\infty) \right), \quad (3.11a)$$

$$\frac{\partial V}{\partial C_0} = - \left( A(d-1) + V_\infty^{-(d-1)} \right)^{-\frac{d}{d-1}} \frac{\partial A}{\partial C_0}, \quad (3.11b)$$

$$\frac{\partial V}{\partial k} = - \left( A(d-1) + V_\infty^{-(d-1)} \right)^{-\frac{d}{d-1}} \frac{\partial A}{\partial k}, \quad (3.11c)$$

$$\frac{\partial V}{\partial c} = - \left( A(d-1) + V_\infty^{-(d-1)} \right)^{-\frac{d}{d-1}} \frac{\partial A}{\partial c}, \quad (3.11d)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = - \left( A(d-1) + V_\infty^{-(d-1)} \right)^{-\frac{d}{d-1}} \frac{\partial A}{\partial \tau}, \quad (3.11e)$$

$$\frac{\partial V}{\partial \mu} = - \left( A(d-1) + V_\infty^{-(d-1)} \right)^{-\frac{d}{d-1}} \frac{\partial A}{\partial \mu}, \quad (3.11f)$$

$$\frac{\partial V}{\partial V_\infty} = \left( A(d-1) + V_\infty^{-(d-1)} \right)^{-\frac{d}{d-1}} V_\infty^{-d}. \quad (3.11g)$$

Теперь мы более подробно рассмотрим уравнение (3.11a), а остальные уравнения можно исследовать аналогичным образом. Для любого  $\zeta \in \mathbb{R}$  и любого  $\vec{W} \in \Omega$  из уравнения (3.11a) имеем

$$\left| \frac{\partial V}{\partial d}(\zeta, \vec{W}) \right| \leq V^* \frac{1}{d_* - 1} \left( \frac{1}{d_* - 1} \left| \ln \left( A(d-1) + V_\infty^{-(d-1)} \right) \right| + \frac{1}{d_* - 1} + \max\{|\ln V^*|, |\ln V_*|\} \right).$$

Для  $\zeta > 0$  имеем  $0 < A \leq \frac{1}{2} C^* k^* c_*^{-2} \tau_*^{-1} \mu^*$ . Тогда

$$A(d-1) + V_\infty^{-(d-1)} \geq \frac{1}{(V^* + 1)^{d_* - 1}} = k_1,$$

$$A(d-1) + V_\infty^{-(d-1)} \leq \frac{1}{2} C^* k^* c_*^{-2} \tau_*^{-1} \mu^* + \left( \frac{1}{V_*} + 1 \right)^{d^* - 1} = k_2.$$

Тогда мы получим

$$\left| \frac{\partial V}{\partial d}(\zeta, \vec{W}) \right| \leq V^* \frac{1}{d_* - 1} \left( \frac{1}{d_* - 1} \max\{|\ln k_1|, |\ln k_2|\} + \frac{1}{d_* - 1} + \max\{|\ln V^*|, |\ln V_*|\} \right) = K_1.$$

Таким образом, для всех  $\zeta \geq 0$  и  $\vec{W} \in \Omega$

$$\left| \frac{\partial V}{\partial d}(\zeta, \vec{W}) \right| \leq K_1. \quad (3.12)$$

При  $\zeta < 0$  получим

$$\frac{\partial V}{\partial d}(\zeta, \vec{W}) = -\frac{e^{\frac{2\tau c \zeta}{\mu} \frac{1}{d-1}}}{(d-1)\left(\frac{1}{2}C_0 k c^{-2} \tau^{-1} \mu (d-1) + V_\infty^{-(d-1)} e^{\frac{2\tau c \zeta}{\mu}}\right)^{\frac{1}{d-1}}} \times \\ \times \left( -\frac{2\tau c \zeta}{\mu} + \ln \left( \frac{1}{2}C_0 k c^{-2} \tau^{-1} \mu (d-1) + V_\infty^{-(d-1)} e^{\frac{2\tau c \zeta}{\mu}} \right) + \frac{1}{d-1} + |\ln V_\infty| \right) = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = -\frac{e^{\frac{2\tau c \zeta}{\mu} \frac{1}{d-1}} \ln \left( \frac{1}{2}C_0 k c^{-2} \tau^{-1} \mu (d-1) + V_\infty^{-(d-1)} e^{\frac{2\tau c \zeta}{\mu}} \right)}{(d-1) \left( \frac{1}{2}C_0 k c^{-2} \tau^{-1} \mu (d-1) + V_\infty^{-(d-1)} e^{\frac{2\tau c \zeta}{\mu}} \right)^{\frac{1}{d-1}}}, \\ I_2 = -\frac{e^{\frac{2\tau c \zeta}{\mu} \frac{1}{d-1}}}{(d-1) \left( \frac{1}{2}C_0 k c^{-2} \tau^{-1} \mu (d-1) + V_\infty^{-(d-1)} e^{\frac{2\tau c \zeta}{\mu}} \right)^{\frac{1}{d-1}}} \left( -\frac{2\tau c \zeta}{\mu} + \frac{1}{d-1} + |\ln V_\infty| \right).$$

Сначала оценим  $|I_1|$ . Имеем

$$\frac{1}{2}C_0 k c^{-2} \tau^{-1} \mu (d-1) + V_\infty^{-(d-1)} e^{\frac{2\tau c \zeta}{\mu}} \geq \frac{1}{2}C_* k_* c_*^{-2} \tau_*^{-1} \mu_* (d_* - 1) = k_3, \\ \frac{1}{2}C_0 k c^{-2} \tau^{-1} \mu (d-1) + V_\infty^{-(d-1)} e^{\frac{2\tau c \zeta}{\mu}} \leq \frac{1}{2}C^* k^* c_*^{-2} \tau_*^{-1} \mu^* (d^* - 1) + \left( \frac{1}{V_*} + 1 \right)^{-(d_* - 1)} = k_4, \\ \left( \frac{1}{2}C_0 k c^{-2} \tau^{-1} \mu (d-1) + V_\infty^{-(d-1)} e^{\frac{2\tau c \zeta}{\mu}} \right)^{-\frac{1}{d-1}} \leq \left( \frac{1}{\frac{1}{2}C_* k_* c_*^{-2} \tau_*^{-1} \mu_* (d_* - 1)} + 1 \right)^{\frac{1}{d_* - 1}} = k_5.$$

Поэтому

$$|I_1| \leq \frac{k_5 \max\{|\ln k_3|, |\ln k_4|\}}{d_* - 1} = K_2.$$

Для оценки  $|I_2|$  мы имеем

$$|I_2| \leq V^* \frac{k_5 k_6 \frac{2\tau_* c_*}{\mu_*}}{d_* - 1} + V^* \frac{k_5 \left( \frac{1}{d_* - 1} + \max\{|\ln V^*|, |\ln V_*|\} \right)}{d_* - 1} = K_3,$$

где

$$\sup \left\{ e^{-\frac{2\tau_* c_* |\zeta|}{\mu_* (d_* - 1)}} |\zeta|, \zeta < 0 \right\} = k_6 < \infty. \quad (3.13)$$

Потому

$$\left| \frac{\partial V}{\partial d}(\zeta, \vec{W}) \right| \leq K_2 + K_3 = K_4 \quad (3.14)$$

для любых  $\vec{W} \in \Omega$  и  $\zeta < 0$ . Пусть  $K = \max\{K_1, K_4\}$ , тогда из уравнений (3.12) и (3.14) получаем

$$\left| \frac{\partial V}{\partial d}(\zeta, \vec{W}) \right| \leq K \quad (3.15)$$

для любых  $\vec{W} \in \Omega$  и  $\zeta \in \mathbb{R}$ .

Аналогичная проверка остальных уравнений (3.11) показывает, что для любого  $\vec{W} \in \Omega$  существует  $K > 0$  такое, что  $|D_{\vec{W}} V| \leq K$  на  $\mathbb{R} \times \Omega$ . Следовательно, по теореме о среднем значении мы получаем неравенство (3.10b).

Аналогично мы можем показать, что для любых  $\vec{W} \in \Omega$  и  $\zeta \in \mathbb{R}$

$$D_{\vec{W}} U(\zeta, \vec{W}) = \frac{\partial U}{\partial \vec{W}} = \left( \frac{\partial U}{\partial d}, \frac{\partial U}{\partial C_0}, \frac{\partial U}{\partial k}, \frac{\partial U}{\partial c}, \frac{\partial U}{\partial \tau}, \frac{\partial U}{\partial \mu}, \frac{\partial U}{\partial V_\infty} \right),$$

где

$$\frac{\partial U}{\partial d} = C_0 d V^{d-1} \frac{\partial V}{\partial d} e^{-\frac{2\tau c \zeta}{\mu}}, \quad (3.16a)$$

$$\frac{\partial U}{\partial C_0} = V^d \left( 1 + C_0 d V^{-1} \frac{\partial V}{\partial C_0} \right) e^{-\frac{2\tau c \zeta}{\mu}}, \quad (3.16b)$$

$$\frac{\partial U}{\partial k} = C_0 d V^{d-1} \frac{\partial V}{\partial k} e^{-\frac{2\tau c \zeta}{\mu}}, \quad (3.16c)$$

$$\frac{\partial U}{\partial c} = C_0 V^d \left( d V^{-1} \frac{\partial V}{\partial c} - \frac{2\tau \zeta}{\mu} \right) e^{-\frac{2\tau c \zeta}{\mu}}, \quad (3.16d)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \tau} = C_0 V^d \left( d V^{-1} \frac{\partial V}{\partial \tau} - \frac{2c \zeta}{\mu} \right) e^{-\frac{2\tau c \zeta}{\mu}}, \quad (3.16e)$$

$$\frac{\partial U}{\partial \mu} = -C_0 V^d \left( d [A(d-1) + V_\infty^{-(d-1)}]^{-1} \frac{\partial A}{\partial \mu} - \frac{2\tau c \zeta}{\mu^2} \right) e^{-\frac{2\tau c \zeta}{\mu}}, \quad (3.16f)$$

$$\frac{\partial U}{\partial V_\infty} = C_0 d V^{d-1} \frac{\partial V}{\partial V_\infty} e^{-\frac{2\tau c \zeta}{\mu}}. \quad (3.16g)$$

ограничены и, следовательно, неравенство (3.10a) верно.  $\square$

Также исследуем равномерную сходимость решений (3.3a) и (3.3b) по параметру  $d$ . Здесь  $d$  — отношение коэффициента хемотаксиса и коэффициента подвижности.

**Теорема 3.3.** Пусть  $C_0, k, c, \tau, \mu, V_\infty$  заданы. Обозначим семейство решений, заданных уравнениями (3.3a) и (3.3b), через  $U_d(\zeta)$  и  $V_d(\zeta)$ , соответствующие значениям  $d \geq 1$ . Тогда

$$U_d(\zeta) \rightarrow U_1(\zeta) \text{ и } V_d(\zeta) \rightarrow V_1(\zeta) \text{ равномерно по } \zeta \in \mathbb{R} \text{ при } d \searrow 1.$$

*Доказательство.* Пусть  $\delta = d - 1$ ,  $B = \frac{1}{2} C_0 k c^{-2} \tau^{-1} \mu$  и  $y = B V_\infty^\delta e^{-\frac{2\tau c \zeta}{\mu}}$ , тогда уравнение (3.3b) при  $d > 1$  сводится к

$$V_{1+\delta}(\zeta) = V_\infty \left( (1 + \delta y)^{\frac{1}{\delta y}} \right)^{-B V_\infty^\delta e^{-\frac{2\tau c \zeta}{\mu}}}. \quad (3.17)$$

Тогда

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} V_{1+\delta}(\zeta) = V_\infty e^{-B e^{-\frac{2\tau c \zeta}{\mu}}} = V_1(\zeta),$$

кроме того,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} U_{1+\delta}(\zeta) = C_0 V_1 e^{-\frac{2\tau c \zeta}{\mu}} = U_1(\zeta).$$

Далее нам нужно доказать равномерную сходимость на  $\mathbb{R}$ . Пусть  $\varepsilon > 0$ , тогда обозначим

$$V_{1+\delta}(\zeta) = V_\infty \left( (1 + \delta y)^{\frac{1}{\delta y}} \right)^{-y} = V_\infty \left( e^{\frac{1}{\delta y} \ln(1 + \delta y)} \right)^{-y} = V_\infty e^{-\frac{1}{\delta} \ln(1 + \delta y)}. \quad (3.18)$$

**Шаг 1.** Существует  $M > 0$  такое, что для любого  $\zeta \in (-\infty, -M]$  имеем

$$|V_1(\zeta)| \leq \left| V_\infty e^{-B e^{\frac{2\tau c M}{\mu}}} \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.19)$$

Равенство (3.17) дает

$$\|V_{1+\delta}(\zeta)\|_{C((-\infty, -M])} = V_\infty (1 + \delta B V_\infty^\delta e^{\frac{2\tau c M}{\mu}})^{-\frac{1}{\delta}}. \quad (3.20)$$

Так как

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} V_\infty (1 + \delta B V_\infty^\delta e^{\frac{2\tau c M}{\mu}})^{-\frac{1}{\delta}} = V_\infty e^{-B e^{\frac{2\tau c M}{\mu}}},$$

существует  $\delta_1 > 0$  такое, что для любого  $0 < \delta < \delta_1$  имеем

$$\left| V_\infty (1 + \delta B V_\infty^\delta e^{\frac{2\tau c M}{\mu}})^{-\frac{1}{\delta}} - V_\infty e^{-B e^{\frac{2\tau c M}{\mu}}} \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3.21)$$

Таким образом,

$$\|V_{1+\delta}(\zeta)\|_{C((-\infty, -M])} < \frac{\varepsilon}{3} + V_\infty e^{-B e^{\frac{2\tau c M}{\mu}}} \leq \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \frac{2\varepsilon}{3}.$$

Следовательно, из соотношений (3.19), (3.20) и (3.21) при  $\zeta \in (-\infty, -M]$  получаем

$$|V_{1+\delta}(\zeta) - V_1(\zeta)| \leq |V_{1+\delta}(\zeta)| + |V_1(\zeta)| \leq \frac{2\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon. \quad (3.22)$$

**Шаг 2.** Рассмотрим  $\zeta \in [-M, \infty)$  и  $\delta < 1$ . Тогда

$$0 < y \leq K := B(V_\infty + 1)e^{\frac{2\tau c M}{\mu}}. \quad (3.23)$$

В последнем равенстве (3.18) разложение  $\ln(1 + \delta y)$  в  $\delta y \in [0, K]$  дает

$$V_{1+\delta}(\zeta) = V_\infty e^{-\frac{1}{\delta}(\delta y + \mathcal{O}((\delta y)^2))} = V_\infty e^{-y + \mathcal{O}(\delta)}. \quad (3.24)$$

Для любого  $\zeta \in [-M, \infty)$

$$\left| V_{1+\delta}(\zeta) - V_\infty e^{-Be^{-\frac{2\tau c}{\mu}\zeta}} \right| \leq V_\infty \left| e^{(1-V_\infty^\delta)Be^{-\frac{2\tau c}{\mu}\zeta} + \mathcal{O}(\delta)} - 1 \right|.$$

Поскольку  $e^{-\frac{2\tau c}{\mu}\zeta} \leq e^{\frac{2\tau c}{\mu}M}$  для всех  $\zeta \in [-M, \infty)$ , получаем, что  $(1 - V_\infty^\delta)Be^{-\frac{2\tau c}{\mu}\zeta} + \mathcal{O}(\delta)$  сходится к 0 при  $\delta \rightarrow 0$  равномерно по  $\zeta \in [-M, \infty)$ . Следовательно,  $e^{(1-V_\infty^\delta)Be^{-\frac{2\tau c}{\mu}\zeta} + \mathcal{O}(\delta)}$  сходится к 1 при  $\delta \rightarrow 0$  равномерно по  $\zeta$ . Таким образом, существует  $\delta_2 > 0$  такое, что для любых  $0 < \delta < \delta_2$  и  $\zeta \in [-M, \infty)$

$$V_\infty \left| e^{(1-V_\infty^\delta)Be^{-\frac{2\tau c}{\mu}\zeta} + \mathcal{O}(\delta)} - 1 \right| < \varepsilon.$$

Следовательно, при  $0 < \delta < \delta_2$  имеем

$$\left| V_{1+\delta}(\zeta) - V_\infty e^{-Be^{-\frac{2\tau c}{\mu}\zeta}} \right| < \varepsilon \quad (3.25)$$

для всех  $\zeta \in [-M, \infty)$ .

**Шаг 3.** Теперь выберем  $\delta_0 = \min(\delta_1, \delta_2) > 0$ . Для любого  $0 < \delta < \delta_0$  и любого  $\zeta \in \mathbb{R}$  из (3.22) и (3.25) следует, что

$$|V_{1+\delta}(\zeta) - V_1(\zeta)| < \varepsilon.$$

Следовательно,  $V_{1+\delta}(\zeta)$  сходится равномерно к  $V_1(\zeta)$  для  $\zeta \in \mathbb{R}$  при  $\delta \rightarrow 0$ .  $\square$

**Следствие 3.1** (вид  $U$  и  $V$ ). Пусть  $U$  и  $V$  – решения модели (3.2).

(i) Функция  $U(\zeta)$  достигает максимума

$$U_{max} = \begin{cases} 2c^2\tau k^{-1}\mu^{-1}V_\infty d^{-\left(\frac{d}{d-1}\right)} & \text{для } \zeta_0 = \frac{\mu}{2\tau c} \ln \left( \frac{\frac{1}{2}C_0 k c^{-2}\tau^{-1}\mu}{V_\infty^{-d+1}} \right) \text{ при } d > 1, \\ 2c^2\tau k^{-1}\mu^{-1}V_\infty e^{-1} & \text{для } \zeta_0 = \frac{\mu}{2\tau c} \ln \left( \frac{1}{2}C_0 k c^{-2}\tau^{-1}\mu \right) \text{ при } d = 1. \end{cases}$$

Фактически,  $U(\zeta)$  – возрастающая функция на  $(-\infty, \zeta_0)$  и убывающая на  $(\zeta_0, \infty)$ .

(ii) Функция  $V(\zeta)$  строго возрастает от 0 до  $V_\infty$  при изменении  $\zeta$  от  $-\infty$  до  $\infty$ .

**3.2. Случай ограниченного субстрата.** Если недоступность источника питания приводит к уменьшению концентрации субстрата, то  $k(v)$  пропорционально  $v(x, t)$ , т. е.  $k(v) = kv$  с некоторой константой  $k$ . Поэтому хемотаксическая модель для ограниченного субстрата имеет вид

$$\tau \frac{\partial u}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial \ln v}{\partial x} \right) - \frac{\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (3.26a)$$

$$\frac{\partial v}{\partial t} + kuv = 0. \quad (3.26b)$$

С помощью уравнения (3.1) система уравнений (3.26a) и (3.26b) приводится к виду

$$\tau c U' - \beta \left( U(\ln V)' \right)' + \frac{\mu}{2} U'' = 0, \quad (3.27)$$

$$cV' - kUV = 0. \quad (3.28)$$

Отметим, что из уравнения (3.28) имеем

$$(\ln V)' = \frac{k}{c}U, \quad \text{что дает} \quad (\ln V)'' = \frac{k}{c}U'.$$

Следовательно, из уравнений (3.27) и (3.28) следует, что

$$U' - C_3(U^2)' + \frac{\mu}{2\tau c}U'' = 0. \quad (3.29)$$

Здесь

$$C_3 = \frac{2\beta k}{c\mu}$$

с размерностью  $[L]$ .

Тогда интегрирование уравнения (3.29) дает:

$$U - C_3U^2 + \frac{\mu}{2\tau c}U' = \text{const}. \quad (3.30)$$

Будем искать решения, удовлетворяющие условию (3.4). По условию (3.4) константа в уравнении (3.30) равна 0. Тогда из рассуждений выше следует

$$U' = C_3U(U - C_4), \quad (3.31)$$

где

$$C_4 = \frac{\tau c^2}{\beta k}.$$

Отметим, что  $C_3 > 0$  и  $C_4 > 0$ .

**Случай I:**  $U(0) = C_4$ . Тогда  $U(\zeta) = C_4$  и  $V(\zeta) = V(0)e^{\frac{kC_4}{c}\zeta}$  для всех  $\zeta \in \mathbb{R}$ . Эти решения не удовлетворяют условию (3.4).

**Случай II:**  $0 < U(0) < C_4$ . Тогда  $0 < U(\zeta) < C_4$  для всех  $\zeta \in \mathbb{R}$ . Тогда частичное разложение уравнения (3.31) дает

$$\frac{U'}{C_4 - U} + \frac{U'}{U} = -\frac{2\tau c}{\mu}.$$

Интегрируя, получим

$$\ln \left| \frac{C_4 - U}{U} \right| = -\frac{2\tau c}{\mu}\zeta + \text{const}. \quad (3.32)$$

Следовательно, из уравнения (3.32) получаем

$$U = C_4(1 + C_0e^{\frac{2\tau c}{\mu}\zeta})^{-1} \quad (3.33)$$

Следовательно,  $U(\zeta) \rightarrow C_4$  при  $\zeta \rightarrow -\infty$  и  $U(\zeta) \rightarrow 0$  при  $\zeta \rightarrow \infty$ .

Подставив уравнение (3.33) в уравнение (3.28) и проинтегрировав, получим

$$V = C_6(e^{-\frac{2\tau c}{\mu}\zeta} + C_0)^{-\frac{\mu}{2\beta}}, \quad (3.34)$$

где  $C_6$  — константа интегрирования.

При условии (3.4) получаем

$$V = V_\infty \left(1 + C_7e^{-\frac{2\tau c}{\mu}\zeta}\right)^{-\frac{\mu}{2\beta}},$$

где  $C_7 = C_0^{-1}$ . Здесь  $V(\zeta) \rightarrow V_\infty$  при  $\zeta \rightarrow \infty$ . Следовательно, решения удовлетворяют условию (3.4).

**Случай III:**  $U(0) > C_4$ . Тогда  $U(\zeta) > C_4$  для всех  $\zeta \in (-\infty, \zeta_{max})$ , где  $\zeta_{max} \leq \infty$ . Следовательно, уравнение (3.32) дает

$$U = C_4 \left(1 - C_0e^{\frac{2\tau c}{\mu}\zeta}\right)^{-1}.$$

Здесь величина  $\zeta_{max} = -\frac{\mu}{2\tau c} \ln C_5$  конечна, и  $U(\zeta) \rightarrow \infty$  при  $\zeta \rightarrow \zeta_{max}$ . Следовательно, решения не удовлетворяют условию (3.4).

**Теорема 3.4.** Для любых  $\tau, \beta, \mu, k, c > 0$  система (3.26) имеет бегущую полосу вида (3.1). Точнее,  $U(\zeta)$  и  $V(\zeta)$  могут быть заданы формулами

$$U(\zeta) = \frac{\tau c^2}{\beta k} \left(1 + C_0 e^{\frac{2\tau c}{\mu} \zeta}\right)^{-1}, \quad (3.35a)$$

$$V(\zeta) = V_\infty \left(1 + C_0^{-1} e^{-\frac{2\tau c}{\mu} \zeta}\right)^{-\frac{\mu}{2\beta}}, \quad (3.35b)$$

где  $V_\infty > 0$  и  $C_0 > 1$ . Фактически,  $U(\zeta)$  и  $V(\zeta)$  в уравнениях (3.35a) и (3.35b) являются единственными решениями уравнений (3.27) и (3.28), которые удовлетворяют условиям (3.4) и

$$U(0) = \frac{\tau c^2 C_0}{\beta k}. \quad (3.36)$$

*Доказательство.* Пусть  $C_0 > 1$  и  $U(0)$  удовлетворяет уравнению (3.36). Тогда имеем  $0 < U(0) < C_4$ , и результат соответствует случаю II, приведенному выше.  $\square$

Из уравнений (3.35a) и (3.35b) видим, что

$$\lim_{\zeta \rightarrow -\infty} U(\zeta) = \frac{\tau c^2}{\beta k}, \quad \lim_{\zeta \rightarrow -\infty} V(\zeta) = 0. \quad (3.37)$$

**Теорема 3.5.** Пусть  $\vec{W} = (C_0, k, \tau, c, \beta, \mu, V_\infty) \in \mathbb{D} = (1, \infty) \times (0, \infty)^6$ . Тогда  $U(\zeta, \vec{W})$  непрерывна по  $\vec{W}$  равномерно при  $\zeta \in \mathbb{R}$ . Точнее, для любого компакта  $\Omega \subset \mathbb{D}$  существует  $K > 0$  такое, что для всех  $\vec{W}_1, \vec{W}_2 \in \Omega$

$$\begin{aligned} |U(\zeta, \vec{W}_1) - U(\zeta, \vec{W}_2)| &\leq K |\vec{W}_1 - \vec{W}_2|, \\ |V(\zeta, \vec{W}_1) - V(\zeta, \vec{W}_2)| &\leq K |\vec{W}_1 - \vec{W}_2| \end{aligned}$$

при всех  $\zeta \in \mathbb{R}$ .

**3.3. Обсуждение.** В этом разделе мы проведем анализ полученных в замкнутой форме решений обеих моделей (3.2) и (3.26). Мы обсудим явление бегущей полосы в каждом случае. Все результаты являются качественными, и мы использовали следующие значения параметров из опубликованных данных [1, 10], за исключением  $\tau$  для сравнения.

| Параметр | Описание                    | Значения   | Единицы измерения    |
|----------|-----------------------------|------------|----------------------|
| $\tau$   | интервал столкновения       | 0,05–0,005 | час                  |
| $\mu$    | коэффициент подвижности     | 0,25       | см <sup>2</sup> /ч   |
| $c$      | скорость полосы             | 1,5        | см/ч                 |
| $\beta$  | хемотаксический коэффициент | 0,16–0,6   | см <sup>2</sup> /час |
| $d$      | $\frac{2\beta}{\mu}$        | 0,3–10     | безразмерная         |
| $C_0$    | константа интегрирования    | 4          | безразмерная         |

ТАБ. 1. Значения параметров

| Parameter | Description                | Value      | Units                 |
|-----------|----------------------------|------------|-----------------------|
| $\tau$    | time interval of collision | 0.05–0.005 | hour                  |
| $\mu$     | motility coefficient       | 0.25       | cm <sup>2</sup> /hour |
| $c$       | band speed                 | 1.5        | cm/hour               |
| $\beta$   | chemotactic coefficient    | 0.16–0.6   | cm <sup>2</sup> /hour |
| $d$       | $\frac{2\beta}{\mu}$       | 0.3–10     | unitless              |
| $C_0$     | integrating constant       | 4          | unitless              |

ТАБ. 1. Parameter values

Графики решений для концентрации организмов в системе (3.2) при различных значениях  $\tau$  представлены на рис. 2. Они показывают зависимость размера бегущей полосы от времени столкновения  $\tau$ . Полоса бактерий расширяется при уменьшении значения  $\tau$ .

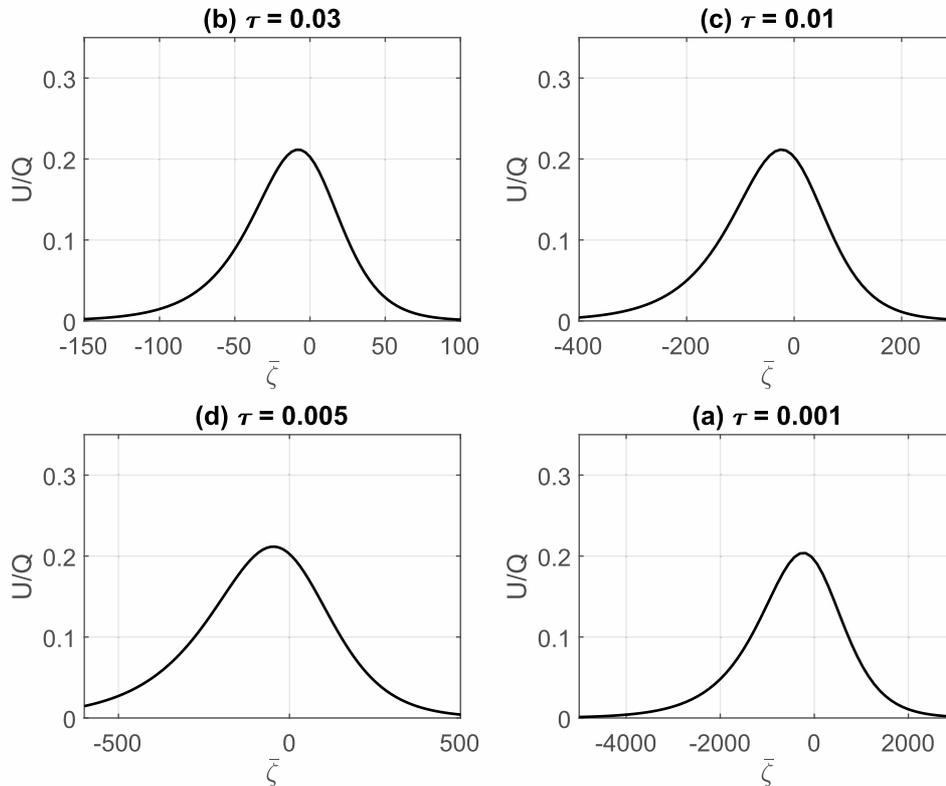


Рис. 2. Концентрация бактерий  $U(\zeta)$ , разделенная на  $Q = C_0V_\infty$ , в модели (3.2) при разных значениях  $\tau$  с  $d = 1,3$  относительно  $\bar{\zeta} = c\mu^{-1}\zeta$ , показывающая зависимость размера бактериальной полосы от параметра  $\tau$ . Изменение диапазона оси  $\bar{\zeta}$  эквивалентно ширине полосы.

FIG. 2. Concentration of bacteria  $U(\zeta)$  divided by  $Q = C_0V_\infty$  of model (3.2) for different values of  $\tau$  with  $d = 1.3$  against  $\bar{\zeta} = c\mu^{-1}\zeta$  showing the dependence of the size of bacterial band on the parameter  $\tau$ . The change in the range of the  $\bar{\zeta}$  axis is equivalent to the width of the band.

Семейство решений модели (3.2) равномерно сходится к решению  $U_1, V_1$ . Рис. 3 показывает равномерную сходимость (а) концентрации  $U$  и (б) концентрации  $V$ . Пунктирная черная линия — это решения  $U_1$  и  $V_1$  в (а) и (б), соответственно. На рис. 3(а) показано, что пики  $U(\zeta)$  растут выше по мере уменьшения значения  $d$ .

Концентрации организмов и субстрата модели (3.26) показаны на рис. 4 и 5 для разных значений  $d$ . Концентрация  $U$  стремится к 0 при  $\zeta \rightarrow \infty$ . При больших отрицательных значениях  $\zeta$  концентрация  $U$  сходится к константе, размер которой уменьшается по мере увеличения  $d$ . Поэтому при наличии ограничений на пищу, если фиксировать местоположение и длительно наблюдать, то концентрация организмов будет сходиться к тем меньшей константе, чем больше хемотаксис. Для субстрата кривая  $V$  с ростом  $d$  становится более пологой.

#### 4. АНАЛИЗ ЛИНЕЙНОЙ УСТОЙЧИВОСТИ

В этом разделе сосредоточимся на классической модели типа Келлера—Сегеля, основанной на рассуждениях раздела 2. Переписав (2.13), где  $u(x, t)$  — концентрация бактерий, а  $v(x, t)$  —

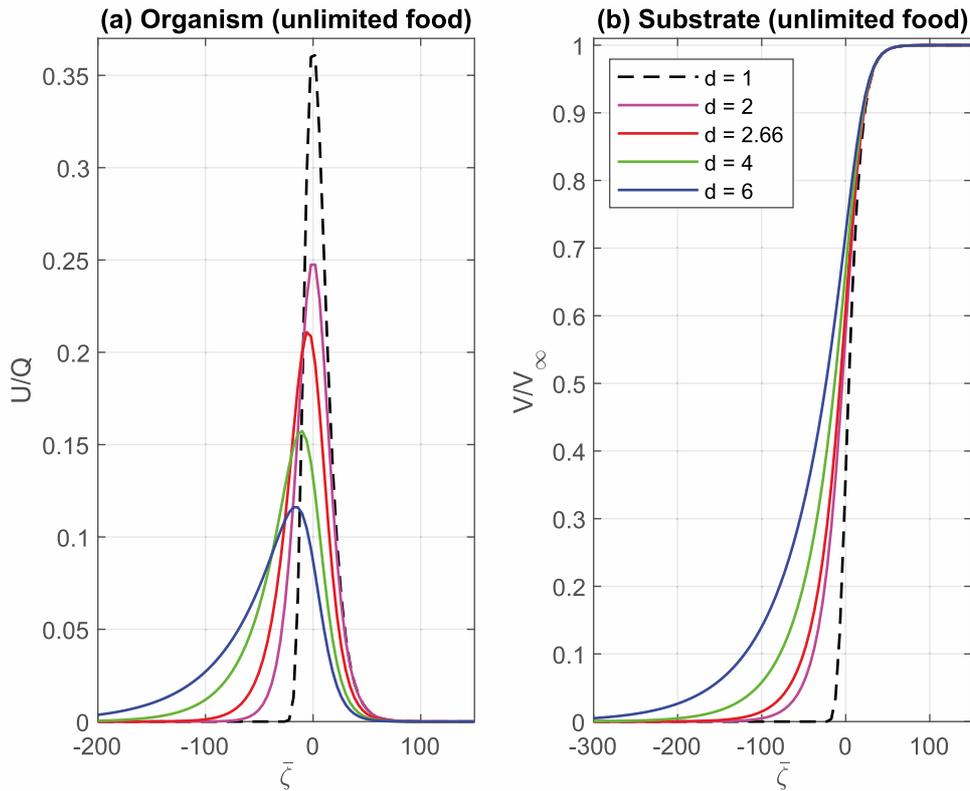


Рис. 3. Равномерная сходимость (а) концентрации бактерий  $U(\zeta)$ , разделенной на  $Q = C_0 V_\infty$ , к решению  $U_1$  и (б) концентрации субстратов  $V(\zeta)$ , разделенной на  $V_\infty$ , к решению  $V_1$  при  $d \rightarrow 1$ .

FIG. 3. The uniform convergence of (a) the concentration of bacteria  $U(\zeta)$  divided by  $Q = C_0 V_\infty$  to the solution  $U_1$  and (b) the concentration of the substrates  $V(\zeta)$  divided by  $V_\infty$  of model (3.2) to the solution  $V_1$  as  $d \rightarrow 1$ .

химический субстрат, или аттрактант, получим

$$\tau \frac{\partial u}{\partial t} + \beta \frac{\partial}{\partial x} \left( u \frac{\partial \ln v}{\partial x} \right) - \frac{\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (4.1a)$$

$$\tau \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{D}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + H(u, v) = 0. \quad (4.1b)$$

В уравнениях (4.1a) и (4.1b)  $\beta$  — коэффициент хемоаттрактанта,  $\mu$  и  $D$  — коэффициенты диффузии бактерий и химического субстрата, соответственно,  $H(u, v)$  обозначает чистое производство химического субстрата.

Нашей основной целью является изучение процесса агрегации, который указывает на неустойчивость однородной конфигурации бактерий и химического субстрата. Пусть популяция клеток однородна по всей системе до агрегации. Равномерное распределение  $u(x, t)$  и  $v(x, t)$  называется *состоянием равновесия*. Обозначим эти равновесные распределения через  $u_0$  и  $v_0$ , соответственно. Здесь  $u_0 > 0$  и  $v_0 > 0$  являются константами,  $H(u_0, v_0) = 0$ . Мы ищем решения уравнений (4.1) вблизи равновесия.

Начнем с рассмотрения области  $\Omega = (0, L)$ ,  $L > 0$ , и малых возмущений,

$$u = u_0 + \bar{u}(x, t), \quad v = v_0 + \bar{v}(x, t). \quad (4.2)$$

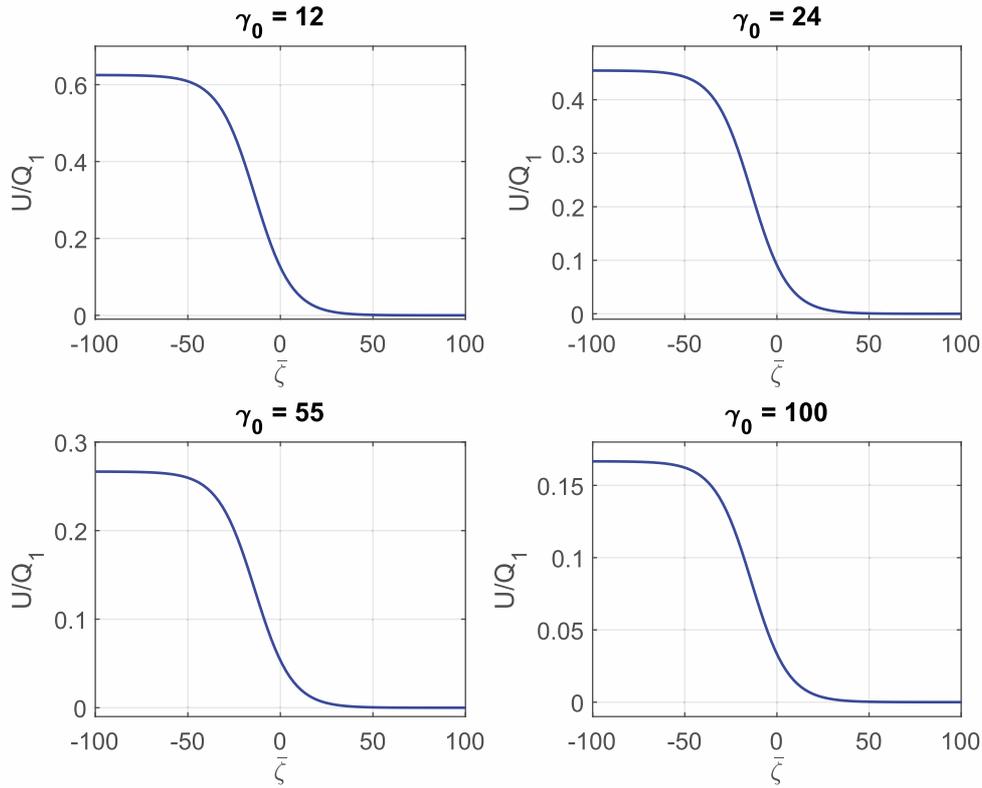


Рис. 4. Концентрация бактерий  $U(\zeta)$ , разделенная на  $Q_1 = 2\tau c^2 k^{-1} \beta^{-1}$ , в модели (3.26) для разных значений  $d$  относительно  $\zeta = c\mu^{-1}\zeta$ .

FIG. 4. Concentration of bacteria  $U(\zeta)$  divided by  $Q_1 = 2\tau c^2 k^{-1} \beta^{-1}$  of model (3.26) for different values of  $d$  against  $\zeta = c\mu^{-1}\zeta$ .

Тогда соответствующие однородные граничные условия Дирихле на левой границе и граничные условия Неймана на правой границе имеют вид

$$\bar{u}(0, t) = \bar{v}(0, t) = 0, \quad (4.3)$$

$$\bar{u}_x(L, t) = \bar{v}_x(L, t) = 0. \quad (4.4)$$

Пусть  $\bar{u}$ ,  $\bar{u}_x$ ,  $\bar{v}$ ,  $\bar{v}_x$ ,  $\bar{v}_{xx}$  малы. Используя равенства (4.2), получаем

$$\tau \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \beta \frac{u_0}{v_0} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} - \frac{\mu}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = 0.$$

Тогда, поскольку  $H(u_0, v_0) = 0$  и игнорируются члены более высокого порядка, имеем следующее приближение:

$$H(u, v) \approx \left( \frac{\partial H}{\partial u}(u_0, v_0) \right) \bar{u} + \left( \frac{\partial H}{\partial v}(u_0, v_0) \right) \bar{v} = -a\bar{u} + d\bar{v}. \quad (4.5)$$

Здесь  $a = -\frac{\partial H}{\partial u}(u_0, v_0)$  — производство химического субстрата, а  $d = \frac{\partial H}{\partial v}(u_0, v_0)$  — деградация субстрата.

Подставив соотношение (4.5) в уравнение (4.1b), получим уравнения для возмущений  $\bar{u}(x, t)$  и  $\bar{v}(x, t)$  следующего вида:

$$\tau \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} + \beta \frac{u_0}{v_0} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} - \frac{\mu}{2} \frac{\partial^2 \bar{u}}{\partial x^2} = 0. \quad (4.6)$$

$$\tau \frac{\partial \bar{v}}{\partial t} - \frac{D}{2} \frac{\partial^2 \bar{v}}{\partial x^2} - a\bar{u} + d\bar{v} = 0. \quad (4.7)$$

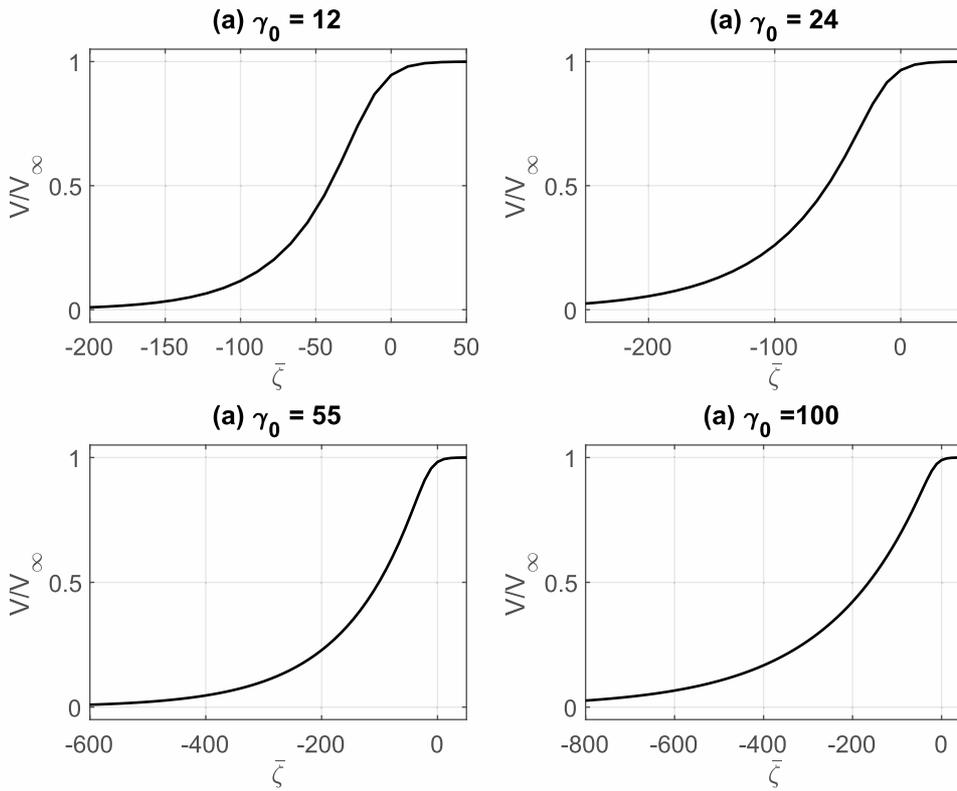


Рис. 5. То же, что и на рис. 4, для концентрации субстратов  $V(\zeta)$ , разделенной на  $V_\infty$  в модели (3.26).

FIG. 5. Same as in Fig. 4 for the concentration of the substrates  $V(\zeta)$  divided by  $V_\infty$  of model (3.26).

Благодаря вышеизложенному биологическому смыслу  $a$  и  $d$  мы естественно предполагаем следующее.

**Предположение 4.1.** Пусть  $a > 0$  и  $d > 0$ .

Для установления условий неустойчивости ищем решения в виде

$$\bar{u}(x, t) = u^* e^{\sigma t} \Phi_\lambda(x), \quad \bar{v}(x, t) = v^* e^{\sigma t} \Phi_\lambda(x). \tag{4.8}$$

Здесь  $u^*, v^* > 0$  и  $\Phi_\lambda(x)$  — ненулевая функция, удовлетворяющая условию

$$\Phi_\lambda''(x) = -\lambda^2 \Phi_\lambda(x) \text{ на } \Omega, \quad \Phi_\lambda(0) = 0, \quad \Phi_\lambda'(L) = 0. \tag{4.9}$$

Другими словами,  $\Phi_\lambda(x)$  является собственной функцией в задаче на собственные значения (4.9). А именно,  $\lambda = \lambda_n$ , где

$$\lambda_n = \frac{1}{L} \left( 2\pi n + \frac{\pi}{2} \right) \text{ для } n \in \{0\} \cup \mathbb{N},$$

и  $\Phi_\lambda(x) = \Phi_{\lambda_n}(x) = \sin(\lambda_n x)$ .

Пусть  $\lambda = \lambda_n$  для фиксированного числа  $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ . Тогда, подставив соотношения (4.8) в уравнения (4.6) и (4.7), получим

$$\left( \tau\sigma + \frac{\mu}{2} \lambda^2 \right) u^* - \beta \frac{u_0}{v_0} \lambda^2 v^* = 0, \tag{4.10a}$$

$$-a u^* + \left( \tau\sigma + \frac{D}{2} \lambda^2 + d \right) v^* = 0. \tag{4.10b}$$

Нетривиальное решение  $(u^*, v^*)$  существует тогда и только тогда, когда

$$\det \begin{pmatrix} \tau\sigma + \frac{\mu}{2}\lambda^2 & -\beta\frac{u_0}{v_0}\lambda^2 \\ -a & \tau\sigma + \frac{D}{2}\lambda^2 + d \end{pmatrix} = 0.$$

Тогда мы получаем квадратное уравнение

$$\sigma^2 + b\sigma + c = 0, \quad (4.11)$$

где

$$b = \frac{1}{\tau} \left( \frac{D}{2}\lambda^2 + \frac{\mu}{2}\lambda^2 + d \right), \quad (4.12)$$

$$c = \frac{\lambda^2}{\tau^2} \left( \frac{\mu D}{4}\lambda^2 + \frac{\mu d}{2} - a\beta\frac{u_0}{v_0} \right). \quad (4.13)$$

Корни уравнения (4.11) имеют вид

$$\sigma_i = \frac{-b \mp \sqrt{b^2 - 4c}}{2}, \quad i = 1, 2. \quad (4.14)$$

Чтобы проанализировать устойчивость, нам нужно исследовать знак  $\operatorname{Re}(\sigma_i)$  — вещественной части  $\sigma_i$  в формуле (4.14). Если  $\operatorname{Re}(\sigma_i) > 0$  либо для  $i = 1$ , либо для  $i = 2$ , то возмущения будут расти со временем, что соответствует неустойчивому состоянию вблизи равновесия. Напомним, что каждый из параметров  $\mu, \lambda, \tau, \beta, k, D, u_0, v_0, a, d$  положителен. Следовательно, знак  $b$  всегда положителен и знак  $c$  будет определять знак  $\operatorname{Re}(\sigma_i)$ . Поскольку  $b > 0$ , находим, что

|         |  |
|---------|--|
| $c > 0$ | $\operatorname{Re}(\sigma_i) < 0$ для $i = 1, 2$ |
| $c < 0$ | $\sigma_1 < 0, \sigma_2 > 0$                     |
| $c = 0$ | $\sigma_1 = -b, \sigma_2 = 0$                    |

Благодаря приведенной выше таблице видим, что система линейно неустойчива, если  $c < 0$ , что вследствие формулы (4.13) эквивалентно

$$a > \frac{v_0}{2u_0} \frac{\mu}{\beta} \left( \frac{D\lambda^2}{2} + d \right) = \frac{v_0}{2u_0} \frac{\mu}{\beta} \left( \frac{D}{2L^2} \left( 2\pi n + \frac{\pi}{2} \right)^2 + d \right). \quad (4.15)$$

Следовательно, получаем следующую теорему.

**Теорема 4.1.** *При предположении 4.1, если*

$$a > \frac{v_0}{16u_0} \frac{\mu}{\beta} \left( \frac{D\pi^2}{L^2} + 8d \right), \quad (4.16)$$

*то тривиальное решение  $(0, 0)$  линеаризованной системы (4.6) и (4.7) неустойчиво. Следовательно, стационарное состояние  $(u_0, v_0)$  системы (4.1) линейно неустойчиво.*

*Доказательство.* Пусть  $\varepsilon > 0$ . Если взять  $n = 0$ , то  $\lambda = \lambda_0$  и неравенство (4.15) становится (4.16). Пусть  $\sigma$  — положительный корень (4.11). Тогда существуют решения  $u^*$  и  $v^*$  системы (4.10), принадлежащие  $(0, \varepsilon)$ . Отметим, что

$$\Phi_\lambda(x) = \Phi_{\lambda_0}(x) = \sin \left( \frac{\pi x}{2L} \right) \in (0, 1) \quad \text{для всех } 0 < x < L.$$

Отсюда следует, что решение  $(\bar{u}(x, t), \bar{v}(x, t))$  линеаризованной системы (4.6), (4.7), заданное формулой (4.8), удовлетворяет условиям  $\bar{u}(x, 0), \bar{v}(x, 0) \in (0, \varepsilon)$  для всех  $x \in (0, L)$  и

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{u}(x, t) = \infty, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \bar{v}(x, t) = \infty \quad \text{для всех } x \in (0, L).$$

Следовательно, тривиальное решение  $(0, 0)$  линеаризованной системы (4.6) и (4.7) неустойчиво.  $\square$

Исследование условия неустойчивости (4.15) показывает, что неустойчивость возникает, когда производство химического субстрата превышает определенный порог. Производство субстрата должно перевешивать локальную диффузию бактерий и субстрата. Кроме того, по мере того, как  $L$  становится больше, у  $a$  появляется больше возможностей преодолеть порог и начать агрегацию. Таким образом, в большой области меньшее производство субстрата запускает процесс агрегации. Большое значение хемотаксического фактора или медленная деградация уровня субстрата приводит к росту возмущений.

**4.1. Линейная устойчивость по энергетическому методу.** Этот раздел посвящен установлению линейной устойчивости системы (4.1) с использованием линеаризованной системы (4.6), (4.7). Для удобства мы переобозначим  $u = \bar{u}$ ,  $v = \bar{v}$  в уравнениях (4.6), (4.7) и условиях (4.3), (4.4). Таким образом, имеем систему

$$\tau \frac{\partial u}{\partial t} + \frac{u_0}{v_0} \beta \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \frac{\mu}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = 0, \quad (4.17a)$$

$$\tau \frac{\partial v}{\partial t} - \frac{D}{2} \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - au + dv = 0 \quad (4.17b)$$

с граничными условиями

$$u(0, t) = v(0, t) = 0, \quad (4.18)$$

$$u_x(L, t) = v_x(L, t) = 0. \quad (4.19)$$

При исследовании устойчивости системы (4.17) мы будем использовать следующие известные неравенства в леммах 4.1 и 4.2 ниже.

**Лемма 4.1** (неравенство Пуанкаре). Пусть  $L > 0$ . Если  $u \in C^1([0, L])$  удовлетворяет

$$u(0) = 0 \quad \text{или} \quad u(L) = 0,$$

тогда

$$\int_0^L (u'(x))^2 dx \geq C_p \int_0^L u^2(x) dx, \quad (4.20)$$

где

$$C_p = \frac{2}{L^2}. \quad (4.21)$$

*Доказательство.* Хотя неравенство хорошо известно, мы приведем его быстрое доказательство для полноты изложения. Сначала рассмотрим  $u(0) = 0$ . При  $x \in [0, L]$  имеем

$$u^2(x) = \left( \int_0^x u'(\xi) d\xi \right)^2 \leq \left( \int_0^x |u'(\xi)| d\xi \right)^2.$$

Применение неравенства Гельдера дает

$$u^2(x) \leq x \cdot \left( \int_0^x |u'(\xi)|^2 d\xi \right) \leq x \cdot \left( \int_0^L |u'(\xi)|^2 d\xi \right).$$

Интегрирование по  $x$  приводит к неравенству

$$\int_0^L u^2(x) dx \leq \frac{L^2}{2} \cdot \int_0^L |u'(x)|^2 dx,$$

что доказывает неравенство (4.21).

Далее рассмотрим  $u(L) = 0$ . При  $x \in [0, L]$  имеем

$$u^2(x) = \left( - \int_x^L u'(\xi) d\xi \right)^2 \leq \left( \int_x^L |u'(\xi)| d\xi \right)^2.$$

Применение неравенства Гельдера дает

$$u^2(x) \leq (L-x) \cdot \left( \int_0^x |u'(\xi)|^2 d\xi \right) \leq (L-x) \cdot \left( \int_0^L |u'(\xi)|^2 d\xi \right),$$

а интегрирование по  $x$  приводит к неравенству

$$\int_0^L u^2(x) dx \leq \frac{L^2}{2} \cdot \int_0^L |u'(x)|^2 dx,$$

что доказывает неравенство (4.21).  $\square$

**Лемма 4.2.** Пусть  $L > 0$ . Если  $u \in C^1([0, L])$  удовлетворяет

$$u(0) = 0 \quad \text{или} \quad u(L) = 0,$$

тогда

$$\sup_{x \in [0, L]} |u(x)| \leq \sqrt{L} \left( \int_0^L |u'(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (4.22)$$

*Доказательство.* Опять же, для полноты приводим элементарное доказательство. Пусть  $x \in [0, L]$ . Если  $u(0) = 0$ , то по основной теореме анализа и неравенству Гельдера имеем

$$|u(x)| = \left| \int_0^x u'(\xi) d\xi \right| \leq \int_0^L |u'(\xi)| d\xi \leq \sqrt{L} \left( \int_0^L |u'(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Если  $u(L) = 0$ , то аналогично

$$|u(x)| = \left| - \int_x^L u'(\xi) d\xi \right| \leq \int_0^L |u'(\xi)| d\xi \leq \sqrt{L} \left( \int_0^L |u'(\xi)|^2 d\xi \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Таким образом, мы получаем неравенство (4.22).  $\square$

Для начала, мы имеем следующий результат об устойчивости в  $L^2$ .

**Теорема 4.2.** Если

$$\frac{2u_0}{v_0} \beta \leq \mu, \quad \frac{2u_0}{v_0} \beta \leq D, \quad (4.23)$$

$$4a \leq C_p \mu, \quad 4a \leq C_p D + d, \quad (4.24)$$

то существует число  $A > 0$  такое, что

$$\int_0^L (u^2(x, t) + v^2(x, t)) dx \leq e^{-At} \int_0^L (u^2(x, 0) + v^2(x, 0)) dx \quad (4.25)$$

для всех  $t \geq 0$ . Следовательно, стационарное состояние  $(u_0, v_0)$  системы (4.1) линейно устойчиво относительно  $L^2$ -нормы на интервале  $[0, L]$ .

*Доказательство.* Умножив уравнение (4.17а) на  $u$  и уравнение (4.17б) на  $v$  и проинтегрировав по  $x$  на  $(0, L)$ , получим

$$\begin{aligned} \frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u^2 dx + \frac{u_0}{v_0} \beta \int_0^L u \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx - \frac{\mu}{2} \int_0^L u \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} dx &= 0, \\ \frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L v^2 dx - \frac{D}{2} \int_0^L v \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} dx - a \int_0^L v u dx + d \int_0^L v^2 dx &= 0. \end{aligned}$$

Интегрирование по частям и сложение обоих уравнений дает

$$\begin{aligned} & \frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_0^L u^2 dx + \int_0^L v^2 dx \right) + \frac{\mu}{4} \int_0^L \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{u_0}{v_0} \beta \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{D}{4} \int_0^L \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx + \\ & + \frac{\mu}{4} \int_0^L \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{D}{4} \int_0^L \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx - a \int_0^L v u dx + d \int_0^L v^2 dx = 0. \end{aligned} \quad (4.26)$$

По условию (4.23) и неравенству Гельдера

$$\begin{aligned} & \frac{\mu}{4} \int_0^L \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx - \frac{u_0}{v_0} \beta \int_0^L \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{D}{4} \int_0^L \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx \geq \\ & \geq \frac{1}{2} \frac{u_0}{v_0} \beta \left( \sqrt{\int_0^L \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx} - \sqrt{\int_0^L \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx} \right)^2 \geq 0. \end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем

$$\frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_0^L u^2 dx + \int_0^L v^2 dx \right) + \frac{\mu}{4} \int_0^L \left( \frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{D}{4} \int_0^L \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx - a \int_0^L v u dx + d \int_0^L v^2 dx \leq 0.$$

Применяя неравенство Пуанкаре (4.20), получаем

$$\begin{aligned} & \frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_0^L u^2 dx + \int_0^L v^2 dx \right) + \frac{C_p \mu}{8} \int_0^L u^2 dx + \left( \frac{C_p D}{8} + \frac{7d}{8} \right) \int_0^L v^2 dx + \\ & + \frac{C_p \mu}{8} \int_0^L u^2 dx - a \int_0^L v u dx + \left( \frac{C_p D}{8} + \frac{d}{8} \right) \int_0^L v^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

По условию (4.24) и неравенству Гельдера находим

$$\frac{C_p \mu}{8} \int_0^L u^2 dx - a \int_0^L v u dx + \left( \frac{C_p D}{8} + \frac{d}{8} \right) \int_0^L v^2 dx \geq \frac{1}{2} a \left( \sqrt{\int_0^L u^2 dx} - \sqrt{\int_0^L v^2 dx} \right)^2 \geq 0.$$

Отсюда следует, что

$$\frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \left( \int_0^L u^2 dx + \int_0^L v^2 dx \right) + \frac{C_p \mu}{8} \int_0^L u^2 dx + \left( \frac{C_p D}{8} + \frac{7d}{8} \right) \int_0^L v^2 dx \leq 0. \quad (4.27)$$

Обозначая  $C = \min \left\{ \frac{C_p \mu}{4}, \frac{C_p D}{4} + \frac{7d}{4} \right\}$ , из уравнения (4.27) получим

$$\tau \frac{d}{dt} I(t) + CI(t) \leq 0,$$

где  $I(t) = \int_0^L u^2(x, t) dx + \int_0^L v^2(x, t) dx$ .

По неравенству Гронуолла находим

$$I(t) \leq I(0) e^{-\frac{C}{\tau} t}$$

для всех  $t \geq 0$ . Таким образом, получаем (4.25). □

Далее покажем устойчивость в  $H^1$  и  $L^\infty$ .

**Теорема 4.3.** Пусть верны (4.23) и (4.24). Тогда

$$\int_0^L (u_x^2(x, t) + v_x^2(x, t)) dx \leq M_0^2 e^{-Bt} \quad \text{для всех } t \geq 0, \quad (4.28)$$

где  $B = a/\tau$  и

$$M_0 = \int_0^L (u_x^2(x, 0) + v_x^2(x, 0)) dx.$$

Следовательно, для всех  $t \geq 0$  имеем

$$\sup_{x \in [0, L]} |u(x, t)| + \sup_{x \in [0, L]} |v(x, t)| \leq 2\sqrt{L} M_0 e^{-\frac{Bt}{2}}. \quad (4.29)$$

Таким образом, стационарное состояние  $(u_0, v_0)$  системы (4.1) линейно устойчиво относительно  $L^\infty$ -нормы на интервале  $[0, L]$ .

*Доказательство.* Умножая уравнение (4.17а) на  $-u_{xx}$  и уравнение (4.17б) на  $-v_{xx}$  и интегрируя по  $x$  на  $(0, L)$ , используя граничные условия (4.18) и (4.19), мы имеем

$$\frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L u_x^2 dx + \frac{\mu}{2} \int_0^L u_{xx}^2 dx - \frac{u_0}{v_0} \beta \int_0^L u_{xx} v_{xx} dx = 0, \quad (4.30)$$

$$\frac{\tau}{2} \frac{d}{dt} \int_0^L v_x^2 dx + \frac{D}{2} \int_0^L v_{xx}^2 dx - a \int_0^L u_x v_x dx + d \int_0^L v_x^2 dx = 0. \quad (4.31)$$

В силу неравенства Коши

$$|u_{xx} v_{xx}| \leq \frac{1}{2} (u_{xx}^2 + v_{xx}^2), \quad |u_x v_x| \leq \frac{1}{2} (u_x^2 + v_x^2). \quad (4.32)$$

Суммируя уравнения (4.30) и (4.31) и используя (4.32), получаем

$$\begin{aligned} & \tau \frac{d}{dt} \left( \int_0^L u_x^2 dx + \int_0^L v_x^2 dx \right) + \left( \mu - \frac{u_0}{v_0} \beta \right) \int_0^L u_{xx}^2 dx + \left( D - \frac{u_0}{v_0} \beta \right) \int_0^L v_{xx}^2 dx - \\ & - a \int_0^L u_x^2 dx + (2d - a) \int_0^L v_x^2 dx \leq 0. \end{aligned}$$

Применяя неравенство Пуанкаре к  $u_x$  и  $v_x$  с граничными условиями  $u_x(L, t) = v_x(L, t) = 0$ , получаем

$$\int_0^L u_{xx}^2(x, t) dx \geq C_p \int_0^L u_x^2(x, t) dx, \quad \int_0^L v_{xx}^2(x, t) dx \geq C_p \int_0^L v_x^2(x, t) dx.$$

Отметим, что

$$\mu - \frac{u_0}{v_0} \beta > 0, \quad D - \frac{u_0}{v_0} \beta > 0.$$

Следовательно,

$$\tau \frac{d}{dt} \left( \int_0^L u_x^2 dx + \int_0^L v_x^2 dx \right) + \left( \mu C_p - \frac{u_0 C_p}{v_0} \beta - a \right) \int_0^L u_x^2 dx + \left( D C_p + 2d - \frac{u_0 C_p}{v_0} \beta - a \right) \int_0^L v_x^2 dx \leq 0.$$

Имеем

$$\mu C_p - \frac{u_0 C_p}{v_0} \beta - a \geq \mu C_p - \frac{1}{2} \mu C_p - a = \frac{1}{2} \mu C_p - a \geq 2a - a = a,$$

$$DC_p + 2d - \frac{u_0 C_p}{v_0} \beta - a \geq DC_p + 2d - \frac{1}{2} DC_p - a = \frac{1}{2} (DC_p + d) + \frac{3}{2} d - a \geq 2a - a = a.$$

Следовательно, мы получаем

$$\tau \frac{d}{dt} \int_0^L (u_x^2 + v_x^2) dx + a \int_0^L (u_x^2 + v_x^2) dx \leq 0.$$

По неравенству Гронуолла находим

$$I(t) \leq I(0) e^{-\frac{a}{\tau} t} \quad \text{для всех } t \geq 0,$$

где  $I(t) = \int_0^L (u_x^2(x, t) + v_x^2(x, t)) dx$ . Таким образом, получаем (4.28).

Тогда оценка (4.29) следует из неравенства (4.22).  $\square$

Используя лемму 4.1, условия устойчивости (4.23) и (4.24) можно переписать в виде

$$\frac{v_0}{2u_0} \frac{\mu}{\beta} \geq 1 \quad \text{и} \quad \frac{v_0}{2u_0} \frac{D}{\beta} \geq 1, \quad (4.33a)$$

$$\frac{\mu}{2aL^2} \geq 1 \quad \text{и} \quad \frac{D}{2aL^2} + \frac{d}{2a} \geq 1. \quad (4.33b)$$

Первое условие (4.33a) указывает на то, что  $\mu$  и  $D$  должны быть велики для привлечения бактерий к аттрактору. Это имеет смысл, поскольку амёбу привлекает высокая концентрация субстрата. Поскольку большое значение  $D$  сглаживает высокую концентрацию, это приводит к небольшому притяжению  $\beta$  к субстрату. Кроме того, большое значение  $\mu$  противодействует скоплению бактерий и направляет их в сторону присутствия химического субстрата.

С другой стороны, второе условие (4.33b) показывает, что для стабильного состояния  $\mu$  и  $D$  должны быть больше, чем производительность  $a$ . Кроме того, необходимо быстрое уменьшение концентрации субстрата  $d$ , чтобы перевесить производство  $a$ . И, наконец, размер области  $L$  должен быть достаточно мал, чтобы диффузия бактерий и субстрата могла распространиться по всему пространству.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой работе показан способ применения модели броуновского движения Эйнштейна для вывода хемотаксической системы типа Келлера—Сегеля. Обе системы с ограниченным и неограниченным субстратом имеют решения в виде бегущей полосы. Анализ линейной устойчивости показывает, что небольшое значение  $D$  и/или  $\mu$  по сравнению с производством субстрата провоцирует агрегацию или неустойчивость системы. С другой стороны, ожидается, что хемотаксическая аттракция клетки должна быть выше для устойчивости системы. Уменьшение концентрации субстрата также дает устойчивость. Наконец, большая длина области способствует неустойчивости.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adler J. Effect of amino acids and oxygen on chemotaxis in escherichia coli// J. Bacteriology. — 1966. — 92, № 1. — С. 121–129.
2. Belopolskaya Y. I. Stochastic models of chemotaxis processes// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2020. — 251, № 1. — С. 1–14.
3. Carrillo J. A., Li J., Wang Zh. Boundary spike-layer solutions of the singular Keller—Segel system: existence and stability// Proc. Lond. Math. Soc. (3). — 2021. — 122, № 1. — С. 42–68.
4. Chavanis P. H. A stochastic Keller—Segel model of chemotaxis// Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. — 2010. — 15, № 1. — С. 60–70.
5. Davis P. N., van Heijster P., Marangell R. Absolute instabilities of travelling wave solutions in a Keller—Segel model// Nonlinearity. — 2017. — 30, № 11. — С. 4029–4061.
6. Einstein A. Uber die von der molekularkinetischen theorie der warme geforderte bewegung von in ruhenden flussigkeiten suspendierten teilchen// Ann. Phys. Leipzig. — 1905. — 322. — С. 549–560.
7. Fu S., Huang G., Adam B. Instability in a generalized multi-species Keller—Segel chemotaxis model// Comput. Math. Appl. — 2016. — 72, № 9. — С. 2280–2288.

8. *Gobbetti M., De Angelis M., Di Cagno R., Minervini F., Limitone A.* Cell-cell communication in food related bacteria// *Int. J. Food Microbiology.* — 2007. — 120, № 1-2. — С. 34–45.
9. *Ibragimov A., Peace A.* Light driven interactions in spatial predator-prey chemotaxis model in the presence of chemical agent// *J. Pure Appl. Math.* — 2022. — 2, № 1. — С. 222–244.
10. *Keller E. F., Segel L. A.* Traveling bands of chemotactic bacteria: A theoretical analysis// *J. Theor. Biol.* — 1971. — 30, № 2. — С. 235–248.
11. *Li Yi, Li Yong, Wu Y., Zhang H.* Spectral stability of bacteria pulses for a Keller–Segel chemotactic model// *J. Differ. Equ.* — 2021. — 304. — С. 229–286.
12. *Qiao Q.* Traveling waves and their spectral instability in volume-filling chemotaxis model// *J. Differ. Equ.* — 2024. — 382. — С. 77–96.
13. *Romanczuk P., Erdmann U., Engel H., Schimansky-Geier L.* Beyond the Keller–Segel model: Microscopic modelling of bacterial colonies// *Eur. Phys. J. Spec. Topics.* — 2008. — 157. — С. 61–77.
14. *Skorokhod A.* Basic principles and applications of probability theory. — Berlin–Heidelberg: Springer, 2005.
15. *Stevens A.* The derivation of chemotaxis equations as limit dynamics of moderately interacting stochastic many-particle systems// *SIAM J. Appl. Math.* — 2000. — 61, № 1. — С. 183–212.
16. *Stevens A., Othmer H. G.* Aggregation, blowup, and collapse: the abc’s of taxis in reinforced random walks// *SIAM J. Appl. Math.* — 1997. — 57, № 4. — С. 1044–1081.
17. *Tindall M., Maini P., Porter S., Armitage J.* Overview of mathematical approaches used to model bacterial chemotaxis II: bacterial populations// *Bull. Math. Biol.* — 2008. — 70, № 6. — С. 1570–607.
18. *Tomasevic M., Talay D.* A new McKean–Vlasov stochastic interpretation of the parabolic-parabolic Keller–Segel model: The one-dimensional case// *Bernoulli.* — 2020. — 26, № 2. — С. 1323–1353.
19. *Wang Q., Yan J., Gai C.* Qualitative analysis of stationary Keller–Segel chemotaxis models with logistic growth// *Z. Angew. Math. Phys.* — 2016. — 67, № 3. — 51.

Р. Ислам

Техасский технологический университет, Лаббок, США

А. Ибрагимов

Техасский технологический университет, Лаббок, США

Институт проблем нефти и газа РАН, Москва, Россия

E-mail: akif.ibragimov@ttu.edu

UDC 517.958

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-253-277

EDN: YJBKWV

## Class of Keller–Segel Chemotactic Systems Based on Einstein Method of Brownian Motion Modeling

R. Islam<sup>1</sup> and A. Ibragimov<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>*Texas Tech University, Lubbock, USA*

<sup>2</sup>*Institute of Oil and Gas Problems of the RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** We study the movement of the living organism in a band form towards the presence of chemical substrates based on a system of partial differential evolution equations. We incorporate Einstein’s method of Brownian motion to deduce the chemotactic model exhibiting a traveling band. It is the first time that Einstein’s method has been used to motivate equations describing the mutual interaction of the chemotactic system. We have shown that in the presence of limited and unlimited substrate, traveling bands are achievable and it has been explained accordingly. We also study the stability of the constant steady states for the system. The linearized system about a constant steady state is obtained under the mixed Dirichlet and Neumann boundary conditions. We are able to find explicit conditions for linear instability. The linear stability is established with respect to the  $L^2$ -norm,  $H^1$ -norm, and  $L^\infty$ -norm under certain conditions.

**Keywords:** chemotactic model, Einstein’s method of Brownian motion, traveling band.

**Conflict-of-interest.** The authors declare no conflicts of interest.

**Acknowledgments and funding.** We thank Prof. Dr. Luan Hoang for his contributions in to writing out theorems 3.2 and 3.3 and stimulating discussion. The research was supported by the state assignment of the Institute of Oil and Gas Problems of the RAS, project 122022800272-4.

**For citation:** R. Islam, A. Ibragimov, “Class of Keller–Segel Chemotactic Systems Based on Einstein Method of Brownian Motion Modeling,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 2, 253–277. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-253-277>

### REFERENCES

1. J. Adler, “Effect of amino acids and oxygen on chemotaxis in escherichia coli,” *J. Bacteriol.*, 1966, **92**, No. 1, 121–129.
2. Y. I. Belopolskaya, “Stochastic models of chemotaxis processes,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2020, **251**, No. 1, 1–14.
3. J. A. Carrillo, J. Li, and Zh. Wang, “Boundary spike-layer solutions of the singular Keller–Segel system: existence and stability,” *Proc. Lond. Math. Soc. (3)*, 2021, **122**, No. 1, 42–68.
4. P. H. Chavanis, “A stochastic Keller–Segel model of chemotaxis,” *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2010, **15**, No. 1, 60–70.
5. P. N. Davis, P. van Heijster, and R. Marangell, “Absolute instabilities of travelling wave solutions in a Keller–Segel model,” *Nonlinearity*, 2017, **30**, No. 11, 4029–4061.
6. A. Einstein, “Über die von der molekularkinetischen theorie der warme geforderte bewegung von in ruhenden flussigkeiten suspendierten teilchen,” *Ann. Phys. Leipzig*, 1905, **322**, 549–560.
7. S. Fu, G. Huang, and B. Adam, “Instability in a generalized multi-species Keller–Segel chemotaxis model,” *Comput. Math. Appl.*, 2016, **72**, No. 9, 2280–2288.



8. M. Gobetti, De M. Angelis, Di R. Cagno, F. Minervini, and A. Limitone, “Cell–cell communication in food related bacteria,” *Int. J. Food Microbiol.*, 2007, **120**, No. 1-2, 34–45.
9. A. Ibragimov and A. Peace, “Light driven interactions in spatial predator–prey chemotaxis model in the presence of chemical agent,” *J. Pure Appl. Math.*, 2022, **2**, No. 1, 222–244.
10. E. F. Keller and L. A. Segel, “Traveling bands of chemotactic bacteria: A theoretical analysis,” *J. Theor. Biol.*, 1971, **30**, No. 2, 235–248.
11. Yi Li, Yong Li, Y. Wu, and H. Zhang, “Spectral stability of bacteria pulses for a Keller–Segel chemotactic model,” *J. Differ. Equ.*, 2021, **304**, 229–286.
12. Q. Qiao, “Traveling waves and their spectral instability in volume-filling chemotaxis model,” *J. Differ. Equ.*, 2024, **382**, 77–96.
13. P. Romanczuk, U. Erdmann, H. Engel, and L. Schimansky-Geier, “Beyond the Keller–Segel model: Microscopic modelling of bacterial colonies,” *Eur. Phys. J. Spec. Topics*, 2008, **157**, 61–77.
14. A. Skorokhod, *Basic principles and applications of probability theory*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2005.
15. A. Stevens, “The derivation of chemotaxis equations as limit dynamics of moderately interacting stochastic many-particle systems,” *SIAM J. Appl. Math.*, 2000, **61**, No. 1, 183–212.
16. A. Stevens and H. G. Othmer, “Aggregation, blowup, and collapse: the abc’s of taxis in reinforced random walks,” *SIAM J. Appl. Math.*, 1997, **57**, No. 4, 1044–1081.
17. M. Tindall, P. Maini, S. Porter, and J. Armitage, “Overview of mathematical approaches used to model bacterial chemotaxis II: bacterial populations,” *Bull. Math. Biol.*, 2008, **70**, No. 6, 1570–607.
18. M. Tomasevic and D. Talay, “A new McKean–Vlasov stochastic interpretation of the parabolic-parabolic Keller–Segel model: The one-dimensional case,” *Bernoulli*, 2020, **26**, No. 2, 1323–1353.
19. Q. Wang, J. Yan, and C. Gai, “Qualitative analysis of stationary Keller–Segel chemotaxis models with logistic growth,” *Z. Angew. Math. Phys.*, 2016, **67**, No. 3, 51.

R. Islam

Texas Tech University, Lubbock, USA

A. Ibragimov

Texas Tech University, Lubbock, USA

Institute of Oil and Gas Problems of the RAS, Moscow, Russia

УДК 517.956.25

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-278-299

EDN: YKDZHU

## СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕНОРМАЛИЗОВАННОГО РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С $L_1$ -ДАННЫМИ В ПРОСТРАНСТВЕ $\mathbb{R}^n$

Л. М. КОЖЕВНИКОВА

*Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия**Елабужский Институт Казанского Федерального университета, Елабуга, Россия*

**Аннотация.** Рассматривается квазилинейное эллиптическое уравнение второго порядка с суммируемой правой частью в пространстве  $\mathbb{R}^n$ . Ограничения на структуру уравнения формулируются в терминах обобщенной  $N$ -функции. В нерефлексивных пространствах Музилака—Орлича—Соболева доказано существование ренормализованного решения в пространстве  $\mathbb{R}^n$ .

**Ключевые слова:** квазилинейное уравнение, эллиптическое уравнение, обобщенная  $N$ -функция, пространство Музилака—Орлича—Соболева, ренормализованное решение.

**Заявление о конфликте интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Благодарности и финансирование.** Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

**Для цитирования:** Л. М. Кожевникова. Существование ренормализованного решения нелинейного эллиптического уравнения с  $L_1$ -данными в пространстве  $\mathbb{R}^n$  // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 2. С. 278–299. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-278-299>

### 1. ВВЕДЕНИЕ

В работе рассматривается уравнение

$$-\operatorname{div} a(x, u, \nabla u) + b_0(x, u) + b(x, u, \nabla u) = f, \quad f \in L_1(\mathbb{R}^n), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (1.1)$$

$\mathbb{R}^n = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$ ,  $n \geq 2$ . Здесь функции  $a(x, s_0, s) = (a_1(x, s_0, s), \dots, a_n(x, s_0, s))$ ,  $b_0(x, s_0)$ ,  $b(x, s_0, s)$  имеют рост, определяемый функцией Музилака—Орлича  $M(x, z)$ . При этом на функцию  $M$  и сопряженную к ней функцию  $\bar{M}$  не требуется дополнительное ограничение по переменной  $z$  (обычно это  $\Delta_2$ -условие). Предполагается, что по переменной  $x \in \mathbb{R}^n$  функция  $M$  подчиняется условию  $\phi$ -регулярности, что приводит к хорошим аппроксимационным свойствам нерефлексивного пространства Музилака—Орлича.

Понятие ренормализованных и энтропийных решений служит основным инструментом для изучения общих вырождающихся эллиптических уравнений с правой частью в виде меры, в частности, из пространства  $L_1(\Omega)$ ,  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ . В работе [16] доказано существование ренормализованного решения задачи Дирихле

$$-\operatorname{div} a(x, \nabla u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad x \in \Omega, \quad (1.2)$$

$$u \Big|_{\partial\Omega} = 0 \quad (1.3)$$



в пространствах Музилака—Орлича с неоднородной анизотропной функцией Музилака—Орлича.

Авторы работ [8, 15] установили существование ренормализованного и энтропийного решений, соответственно, задачи Дирихле для уравнения вида

$$-\operatorname{div}(a(x, u, \nabla u) + c(u)) + a_0(x, u, \nabla u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad x \in \Omega,$$

с функцией  $c \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ .

В работах [9, 14] (при  $a_0 \equiv 0$ ) и [22] доказано существование энтропийного решения задачи Дирихле для уравнения вида

$$-\operatorname{div}(a(x, u, \nabla u) + c(x, u)) + a_0(x, u, \nabla u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad x \in \Omega,$$

с каратеодориевой функцией  $c(x, s_0) : \Omega \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , подчиняющейся условию роста по переменной  $s_0$ .

В работе [20] доказаны существование и единственность энтропийных и ренормализованных решений задачи (1.2), (1.3), установлена их эквивалентность. Все перечисленные результаты получены в пространствах Музилака—Орлича для ограниченных областей  $\Omega$ .

Трудность в областях с бесконечной мерой состоит в том, что не работают теоремы вложения и аналог неравенства типа Фридрихса, поэтому установить ключевое соотношение (4.7) весьма проблематично. Автор решает эту проблему за счет свойств младшего члена  $b_0(x, u)$  уравнения (1.1). Кроме того, важную роль в полученных результатах имеет теорема об аппроксимации элементов нереклексивного пространства Музилака—Орлича—Соболева гладкими функциями (см. лемму 2.1). В работе [3] без ограничений на меру строго липшицевой области  $\Omega$  доказано существование энтропийного решения задачи Дирихле (1.1), (1.3) с функцией  $b_0(x, s_0) = \frac{M(x, s_0)}{s_0}$  в нереклексивных пространствах Музилака—Орлича—Соболева. При этом на младший член  $b(x, s_0, s)$  уравнения (1.1) накладывается условие знакоопределенности по переменной  $s_0 \in \mathbb{R}$ :

$$b(x, s_0, s)s_0 \geq 0. \tag{1.4}$$

Другим путем в работе [1] в неограниченных областях установлено существование энтропийного решения задачи Дирихле для нелинейного эллиптического уравнения второго порядка с сингулярным мерозначным потенциалом. При этом на сопряженную функцию  $\bar{M}$  накладывается  $\Delta_2$ -условие, а младший член уравнения удовлетворяет условию знака. Следует отметить, что впервые в неограниченных областях, допускающих бесконечную меру, для функции  $M(x, z) = |z|^{p(x)}$  существование энтропийного и ренормализованного решений уравнения (1.1) в анизотропных пространствах с переменными показателями нелинейностей было установлено в работах [4, 17, 18]. Более полный обзор результатов представлен в работе [5].

В ограниченных областях вопросы существования энтропийных и ренормализованных решений нелинейных эллиптических задач без условия (1.4) исследовались в работах [6, 13] и др. В настоящей работе впервые в пространстве  $\mathbb{R}^n$  без условия знакоопределенности (1.4) доказано существование ренормализованного решения уравнения (1.1) в нереклексивных пространствах Музилака—Орлича—Соболева.

## 2. ПРОСТРАНСТВА МУЗИЛАКА—ОРЛИЧА

В этом разделе будут приведены необходимые сведения из теории обобщенных  $N$ -функций и пространств Музилака—Орлича (см. [21]).

**Определение 2.1.** Пусть функция  $M(x, z) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}_+$  удовлетворяет следующим условиям:

- 1)  $M(x, \cdot)$  —  $N$ -функция по  $z \in \mathbb{R}$ , т. е. она является выпуклой вниз, неубывающей при  $z \in \mathbb{R}_+$ , четной, непрерывной,  $M(x, 0) = 0$  для п. в.  $x \in \mathbb{R}^n$ , и

$$\operatorname{vrai} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} M(x, z) > 0 \quad \text{для всех } z \neq 0, \tag{2.1}$$

$$\lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{vrai} \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{M(x, z)}{z} = 0,$$

$$\lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{vrai} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{M(x, z)}{z} = \infty; \tag{2.2}$$

2)  $M(\cdot, z)$  — измеримая функция по  $x \in \mathbb{R}^n$  для любых  $z \in \mathbb{R}$ .

Такая функция  $M(x, z)$  называется *функцией Музилака—Орлича*, или *обобщенной  $N$ -функцией*.

Сопряженная функция  $\overline{M}(x, \cdot)$  к функции Музилака—Орлича  $M(x, \cdot)$  в смысле Юнга для п. в.  $x \in \mathbb{R}^n$  и любых  $z \geq 0$  определяется равенством

$$\overline{M}(x, z) = \sup_{y \geq 0} (yz - M(x, y)).$$

Отсюда следует неравенство Юнга:

$$|zy| \leq M(x, z) + \overline{M}(x, y), \quad z, y \in \mathbb{R}, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (2.3)$$

Следует отметить, что  $\overline{M}$  также является  $N$ -функцией (см. [21, пункты 13.4 и 13.6]).

Если для каждой положительной константы  $l$  имеем:

$$\lim_{z \rightarrow 0} \operatorname{vrai\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{P(x, lz)}{M(x, z)} = 0 \quad \text{или} \quad \lim_{z \rightarrow \infty} \operatorname{vrai\,sup}_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{P(x, lz)}{M(x, z)} = 0, \quad (2.4)$$

то это обозначается  $P \prec\prec M$  и говорят, что  $P$  *растет медленнее*, чем  $M$ , в 0 или  $\infty$ .

Функция Музилака—Орлича  $N$  удовлетворяет  $\Delta_2$ -условию, если существуют константы  $c > 0$ ,  $z_0 \geq 0$  и функция  $H \in L_1(\mathbb{R}^n)$  такие, что для п. в.  $x \in \mathbb{R}^n$  и любых  $|z| \geq z_0$  справедливо неравенство

$$N(x, 2z) \leq cN(x, z) + H(x).$$

В настоящей работе не предполагается, что  $N$ -функция  $M$  и ее сопряженная  $\overline{M}$  удовлетворяют  $\Delta_2$ -условию.

Существуют три класса Музилака—Орлича:

1)  $\mathcal{L}_M(\mathbb{R}^n)$  — обобщенный класс Музилака—Орлича, состоящий из измеримых функций  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  таких, что

$$\varrho_{M, \mathbb{R}^n}(v) = \int_{\mathbb{R}^n} M(x, v(x)) dx < \infty;$$

2)  $L_M(\mathbb{R}^n)$  — обобщенное пространство Музилака—Орлича, являющееся наименьшим линейным пространством, которое содержит класс  $\mathcal{L}_M(\mathbb{R}^n)$ , с нормой Люксембурга

$$\|v\|_{M, \mathbb{R}^n} = \inf \left\{ \lambda > 0 \mid \varrho_{M, \mathbb{R}^n} \left( \frac{v}{\lambda} \right) \leq 1 \right\};$$

3)  $E_M(\mathbb{R}^n)$  — наибольшее линейное пространство, содержащееся в классе  $\mathcal{L}_M(\mathbb{R}^n)$ .

Очевидно,  $E_M(\mathbb{R}^n) \subset \mathcal{L}_M(\mathbb{R}^n) \subset L_M(\mathbb{R}^n)$ . Заметим, что для любого  $v \in E_M(\mathbb{R}^n)$  и любого  $\mu > 0$  справедливо неравенство  $\varrho_{M, \mathbb{R}^n}(v/\mu) < \infty$ . Кроме того, для любого  $v \in L_M(\mathbb{R}^n)$  найдется  $\lambda > 0$  такое, что  $\varrho_{M, \mathbb{R}^n}(v/\lambda) < \infty$  (см. [21, 7.4]).

Ниже в обозначениях  $\|\cdot\|_{M, Q}$ ,  $\varrho_{M, Q}(\cdot)$ ,  $\|\cdot\|_{1, Q}$ ,  $\|\cdot\|_{\infty, Q}$  будем опускать индекс  $Q$ , если  $Q = \mathbb{R}^n$ . Далее будем рассматривать следующие условия на функцию Музилака—Орлича  $M(x, z)$ .

(M1, loc): *Функция  $M(x, z)$  локально интегрируема, т. е.*

$$\varrho_{M, Q}(z) = \int_Q M(x, z) dx < \infty, \quad \forall z \in \mathbb{R},$$

для любого измеримого множества  $Q \subset \mathbb{R}^n$  такого, что  $\operatorname{meas} Q < \infty$ .

(M2): *Функция  $M(x, z)$  удовлетворяет условию  $\phi$ -регулярности, если существует функция  $\phi : [0, 1/2] \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$  такая, что  $\phi(\cdot, z)$  и  $\phi(r, \cdot)$  — неубывающие функции, и для всех  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $|x - y| \leq \frac{1}{2}$ ,  $z \in \mathbb{R}^+$  и некоторой константы  $c > 0$  выполняется*

$$M(x, z) \leq \phi(|x - y|, z)M(y, z), \quad \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \phi(\varepsilon, c\varepsilon^{-n}) < \infty.$$

Заметим, что из условий  $(M1, \text{loc})$ ,  $(M2)$  следует ограниченность функции  $M(\cdot, z)$  по  $x \in Q$ ,  $\text{meas } Q < \infty$ , для любого фиксированного  $z \in \mathbb{R}$ .

Пусть  $M$  и  $\overline{M}$  подчиняются условию  $(M1, \text{loc})$ . Тогда пространство  $E_M(\mathbb{R}^n)$  является замыканием по норме  $\|\cdot\|_M$  простых интегрируемых функций (см. [21, Theorem 7.6]). Пространство  $E_M(\mathbb{R}^n)$  — сепарабельное, и  $(E_M(\mathbb{R}^n))^* = L_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n)$ . Если  $M$  удовлетворяет  $\Delta_2$ -условию, то  $E_M(\mathbb{R}^n) = \mathcal{L}_M(\mathbb{R}^n) = L_M(\mathbb{R}^n)$  и  $L_M(\mathbb{R}^n)$  — сепарабельное. Пространство  $L_M(\mathbb{R}^n)$  рефлексивно тогда и только тогда, когда функции Музилака—Орлича  $M$  и  $\overline{M}$  удовлетворяют  $\Delta_2$ -условию.

Для  $v \in L_M(\mathbb{R}^n)$  справедливо неравенство:

$$\|v\|_M \leq \varrho_M(v) + 1.$$

Последовательность функций  $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$  из  $L_M(\mathbb{R}^n)$  модулярно сходится к  $v \in L_M(\mathbb{R}^n)$  ( $v^j \xrightarrow{j \rightarrow \infty}^M v$ ), если существует константа  $\lambda > 0$  такая, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varrho_M \left( \frac{v^j - v}{\lambda} \right) = 0.$$

Если  $M$  удовлетворяет  $\Delta_2$ -условию, то модулярная топология и топология по норме совпадают.

Также для двух сопряженных функций Музилака—Орлича  $M$  и  $\overline{M}$ , если  $u \in L_M(\mathbb{R}^n)$  и  $v \in L_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n)$ , выполняется неравенство Гельдера:

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} u(x)v(x)dx \right| \leq 2\|u\|_M \|v\|_{\overline{M}}.$$

Определим пространство Музилака—Орлича—Соболева

$$W^1 L_M(\mathbb{R}^n) = \{v \in L_M(\mathbb{R}^n) \mid |\nabla v| \in L_M(\mathbb{R}^n)\}$$

с нормой  $\|v\|_M^1 = \|v\|_M + \|\nabla v\|_M$ . Последовательность функций  $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$  из  $W^1 L_M(\mathbb{R}^n)$  модулярно сходится к  $v \in W^1 L_M(\mathbb{R}^n)$ , если существует константа  $\lambda > 0$  такая, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \varrho_M \left( \frac{v^j - v}{\lambda} \right) = 0, \quad \lim_{j \rightarrow \infty} \varrho_M \left( \frac{|\nabla v^j - \nabla v|}{\lambda} \right) = 0.$$

Для краткости записи введем обозначения  $(L_M(\mathbb{R}^n))^n = \mathbf{L}_M(\mathbb{R}^n)$ ,  $(L_M(\mathbb{R}^n))^{n+1} = \mathbf{L}_M(\mathbb{R}^n)$ ,  $(E_M(\mathbb{R}^n))^n = \mathbf{E}_M(\mathbb{R}^n)$ ,  $(E_M(\mathbb{R}^n))^{n+1} = \mathbf{E}_M(\mathbb{R}^n)$ . Пространство  $W^1 L_M(\mathbb{R}^n)$  отождествляется с подпространством произведения  $\mathbf{L}_M(\mathbb{R}^n)$  и является замкнутым по слабой топологии  $\sigma(\mathbf{L}_M, \mathbf{E}_{\overline{M}})$ .

Сформулируем теорему о плотности гладких функций в пространстве Музилака—Орлича—Соболева (см. [7, Theorem 1]).

**Лемма 2.1.** *Предположим, что  $N$ -функция  $M$  удовлетворяет условиям  $(M1, \text{loc})$  и  $(M2)$ , и пусть  $\overline{M}$  удовлетворяет условию  $(M1, \text{loc})$ . Тогда для любого  $v \in W^1 L_M(\mathbb{R}^n)$  существует последовательность функций  $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$  из  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$  такая, что*

$$v^j \xrightarrow{j \rightarrow \infty}^M v \quad \text{модулярно в } W^1 L_M(\mathbb{R}^n), \quad j \rightarrow \infty.$$

Примеры функций Музилака—Орлича  $M$ , удовлетворяющих условиям леммы 2.1:

- 1)  $N$ -функция  $M(x, z) = M(z)$ ;
- 2)  $M_1(x, z) = |z|^{p(x)}$ ,  $M_2(x, z) = |z|^{p(x)} \ln(1+|z|)$ ,  $M_3(x, z) = |z| \ln^{p(x)}(1+|z|)$ ,  $M_4(x, z) = e^{|z|^{p(x)}} - 1$ , где  $p : \mathbb{R}^n \rightarrow [p^-, p^+]$ ,  $p^- = \inf_{x \in \mathbb{R}^n} p(x) > 1$ ,  $p^+ = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} p(x) < \infty$  и существует константа  $c > 0$

такая, что для всех  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,  $|x - y| \leq \frac{1}{2}$  и выполняется неравенство

$$|p(x) - p(y)| \leq -c / \ln |x - y|.$$

## 3. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТА

Предполагается, что функции

$$a(x, s_0, s) : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad b(x, s_0, s) : \mathbb{R}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{R}, \quad b_0(x, s_0) : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R},$$

входящие в уравнение (1.1), измеримы по  $x \in \mathbb{R}^n$  для  $s_0 \in \mathbb{R}$ ,  $s \in \mathbb{R}^n$ , непрерывны по  $s_0 \in \mathbb{R}$ ,  $s \in \mathbb{R}^n$ , для почти всех  $x \in \mathbb{R}^n$  и выполнено следующее условие.

**Условие (M).** *Существуют неотрицательные функции  $\psi, \psi_0 \in E_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n)$ ,  $\phi \in L_1(\mathbb{R}^n)$  и положительные константы  $\widehat{a}, \overline{a}, \overline{d}, \widehat{d}, \widehat{b}_0, \overline{b}_0$  такие, что для п. в.  $x \in \mathbb{R}^n$  и для любых  $s_0, t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $s_0 \neq t_0$ ,  $s, t \in \mathbb{R}^n$ ,  $s \neq t$  справедливы неравенства:*

$$a(x, s_0, s) \cdot s \geq \overline{a}M(x, \overline{d}|s|) - \phi(x); \quad (3.1)$$

$$|a(x, s_0, s)| \leq \psi(x) + \widehat{a}\overline{M}^{-1}(x, M(x, \widehat{d}|s|)) + \widehat{a}\overline{M}^{-1}(x, P(x, s_0)); \quad (3.2)$$

$$(a(x, s_0, s) - a(x, s_0, t)) \cdot (s - t) > 0; \quad (3.3)$$

$$b_0(x, s_0)s_0 \geq \overline{b}_0M(x, s_0); \quad (3.4)$$

$$|b_0(x, s_0)| \leq \psi_0(x) + \widehat{b}_0\overline{M}^{-1}(x, M(x, s_0)). \quad (3.5)$$

Здесь функция Музилака–Орлича  $M(x, z)$  подчиняется условиям  $(M1, \text{loc})$ ,  $(M2)$ , сопряженная к  $M$  функция  $\overline{M}(x, z)$  удовлетворяет условию  $(M1, \text{loc})$ . Функция Музилака–Орлича  $P(x, z)$  такова, что  $P \prec\prec M$  в окрестности 0 и  $\infty$ ,  $s \cdot t = \sum_{i=1}^n s_i t_i$ ,  $|s| = \left( \sum_{i=1}^n s_i^2 \right)^{1/2}$ .

Кроме того, пусть существует неотрицательная функция  $\Phi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ , непрерывная положительная функция  $\widehat{b} : \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ ,  $\widehat{b} \in L_1(\mathbb{R}^+)$  такие, что при п. в.  $x \in \mathbb{R}^n$  для всех  $s_0 \in \mathbb{R}$ ,  $s \in \mathbb{R}^n$  справедливо неравенство:

$$|b(x, s_0, s)| \leq \widehat{b}(|s_0|) \left( M(x, \widetilde{d}|s|) + \Phi(x) \right), \quad \widetilde{d} \leq \overline{d}. \quad (3.6)$$

Определим срезающую функцию  $T_k(r) = \max(-k, \min(k, r))$ . Через  $\mathcal{T}_M^1(\mathbb{R}^n)$  обозначим множество измеримых функций  $u : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  таких, что  $T_k(u) \in W^1 L_M(\mathbb{R}^n)$  при любом  $k > 0$ . Для любой функции  $u \in \mathcal{T}_M^1(\mathbb{R}^n)$  и любого  $k > 0$  имеем:

$$\nabla T_k(u) = \chi_{\{|u| < k\}} \nabla u \in L_M(\mathbb{R}^n),$$

где  $\chi_Q$  — характеристическая функция измеримого множества  $Q$  и  $\nabla u$  — обобщенный градиент  $u$ . Введем обозначение  $\langle u \rangle = \int_{\mathbb{R}^n} u dx$ .

**Определение 3.1.** *Ренормализованным решением уравнения (1.1) называется функция  $u \in \mathcal{T}_M^1(\mathbb{R}^n)$  такая, что для любого  $k > 0$  выполнены условия:*

- 1)  $b(x, u, \nabla u) \in L_1(\mathbb{R}^n)$ ;
- 2)  $b_0(x, u)\chi_{\{\mathbb{R}^n: |u| < k\}} \in L_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n)$ ;
- 3)  $a(x, u, \nabla u)\chi_{\{\mathbb{R}^n: |u| < k\}} \in L_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n)$ ;
- 4)  $\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\{\mathbb{R}^n: h \leq |u| < h+1\}} M(x, \overline{d}|\nabla u|) dx = 0$ ;

и для любых функций  $S \in C_0^1(\mathbb{R})$ ,  $\xi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$  справедливо равенство:

$$\langle (b(x, u, \nabla u) + b_0(x, u) - f)S(u)\xi \rangle + \langle a(x, u, \nabla u) \cdot (S'(u)\xi \nabla u + S(u)\nabla \xi) \rangle = 0. \quad (3.7)$$

Основным результатом работы является следующая теорема.

**Теорема 3.1.** *Пусть выполнены условия (M), тогда существует ренормализованное решение уравнения (1.1).*

Следует отметить, что в работе [19] без ограничений на меру строго липшицевой области  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  при тех же требованиях на функцию  $M$  для уравнения

$$-\operatorname{div} a(x, \nabla u) + \frac{M(x, u)}{u} + b(x, u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad x \in \Omega,$$

при условии монотонности функции  $b(\cdot, s_0)$  установлена эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений задачи Дирихле и доказана их единственность.

4. ПОДГОТОВИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

В этом разделе будут приведены вспомогательные леммы. Предполагается, что выполнено условие (M). Все постоянные, встречающиеся ниже в работе, положительны.

Приведем теорему Витали в следующей форме (см. [2, гл. III, § 6, теорема 15]).

**Лемма 4.1.** Пусть  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^n$  и  $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$  — последовательность функций из  $L_1(\Omega)$  такая, что  $v^j \rightarrow v$  п. в. в  $\Omega$ ,  $j \rightarrow \infty$ .

Для сходимости

$$v^j \rightarrow v \text{ сильно в } L_1(\Omega), \quad j \rightarrow \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность функций  $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$  имела равностепенно абсолютно непрерывные интегралы: для любого  $\varepsilon > 0$  существуют  $\delta > 0$  и измеримое множество  $Q_\varepsilon \subset \Omega$ ,  $\text{meas } Q_\varepsilon < \infty$  такие, что

$$(i) \quad \int_Q |v^j(x)| dx < \varepsilon \text{ для любого } Q \subset \Omega, \text{ meas } Q < \delta, \quad j \in \mathbb{N};$$

$$(ii) \quad \int_{\Omega \setminus Q_\varepsilon} |v^j(x)| dx < \varepsilon, \quad j \in \mathbb{N}.$$

**Замечание 4.1.** Очевидно, в случае  $\text{meas } \Omega < \infty$  условие (ii) вытекает из условия (i).

Пользуясь выпуклостью функции  $\overline{M}$ , из (3.2) выводим оценку:

$$3\overline{M}\left(x, \frac{|a(x, s_0, s)|}{3\hat{a}}\right) \leq M(x, \hat{d}|s|) + \overline{M}\left(x, \frac{\psi}{\hat{a}}\right) + P(x, s_0) = M(x, \hat{d}|s|) + \Psi(x) + P(x, s_0) \quad (4.1)$$

с функцией  $\Psi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ . Применяя (2.3), (4.1), для  $s^1, s^2 \in \mathbb{R}^n$  и любого  $\mu > 0$  устанавливаем неравенства

$$|a(x, s_0, s^1)||s^2| \leq 3\hat{a}\mu \left( \overline{M}\left(x, \frac{|a(x, s_0, s^1)|}{3\hat{a}}\right) + M\left(x, \frac{|s^2|}{\mu}\right) \right) \leq \hat{a}\mu \left( M(x, \hat{d}|s^1|) + P(x, s_0) + 3M\left(x, \frac{|s^2|}{\mu}\right) + \Psi(x) \right). \quad (4.2)$$

Заметим, что ввиду  $P \ll M$ , согласно (2.4), для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $C(\varepsilon)$  такое, что для п. в.  $x \in \mathbb{R}^n$  и  $z \in \mathbb{R}$  справедливо неравенство:

$$P(x, z) \leq C(\varepsilon)M(x, \varepsilon z). \quad (4.3)$$

Применяя (2.3), (3.5) и выпуклость функции  $\overline{M}$ , для  $s_0 \in \mathbb{R}$  устанавливаем неравенства

$$|b_0(x, s_0)| \leq \hat{b}_0 \left( M(x, s_0) + 2M(x, 1) + \overline{M}(x, \hat{b}_0^{-1}\psi_0) \right) = \hat{b}_0(M(x, s_0) + 2M(x, 1) + \Psi_0(x)), \quad (4.4)$$

$$2\overline{M}\left(x, \frac{|b_0(x, s_0)|}{2\hat{b}_0}\right) \leq M(x, s_0) + \overline{M}(x, \hat{b}_0^{-1}\psi_0) = M(x, s_0) + \Psi_0(x) \quad (4.5)$$

с функцией  $\Psi_0 \in L_1(\mathbb{R}^n)$ .

**Предложение 4.1.** Пусть  $v : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  — измеримая функция такая, что при всех  $k \geq 1$  имеем  $T_k(v) \in W^1L_M(\mathbb{R}^n)$  и справедливо неравенство

$$\int_{\{\mathbb{R}^n: |v| \geq k\}} \frac{M(x, v)}{|v|} dx \leq C_1, \quad (4.6)$$

тогда для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $k_0(C_1, M, \varepsilon)$  такое, что справедливо неравенство:

$$\text{meas } \{\mathbb{R}^n : |v| \geq k\} < \varepsilon, \quad k \geq k_0. \quad (4.7)$$

*Доказательство.* Из неравенства (4.6), пользуясь монотонностью функции  $M(x, s_0)/s_0$  по переменной  $s_0$ , выводим соотношения

$$\text{meas}\{\mathbb{R}^n : |v| \geq k\} \inf_{x \in \mathbb{R}^n} \frac{M(x, k)}{k} \leq \int_{\{\mathbb{R}^n : |v| \geq k\}} \frac{M(x, v)}{|v|} dx \leq C_1.$$

Отсюда, применяя (2.2), устанавливаем (4.7).  $\square$

**Лемма 4.2** (см. [10, Lemma 2]). Пусть  $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$  — ограниченная последовательность функций из  $L_M(\mathbb{R}^n)$  такая, что имеет место сходимость

$$v^j \rightarrow v \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad j \rightarrow \infty, \quad (4.8)$$

тогда  $v \in L_M(\mathbb{R}^n)$  и  $v^j \rightarrow v$ ,  $j \rightarrow \infty$ , в топологии  $\sigma(L_M, E_M)$  пространства  $L_M(\mathbb{R}^n)$ .

Имеем следствие из теоремы Витали.

**Лемма 4.3** (см. [7, Lemma 2]). Пусть  $v, \{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$  — функции из  $L_M(\mathbb{R}^n)$  и

$$v^j \xrightarrow{M} v \quad \text{модулярно в } L_M(\mathbb{R}^n), \quad j \rightarrow \infty.$$

Тогда  $v^j \rightarrow v$ ,  $j \rightarrow \infty$ , в топологии  $\sigma(L_M, L_M)$  пространства  $L_M(\mathbb{R}^n)$ .

**Лемма 4.4.** Пусть  $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$  — ограниченная последовательность функций из  $L_\infty(\mathbb{R}^n)$  такая, что имеет место сходимость (4.8), тогда  $v \in L_\infty(\mathbb{R}^n)$ ,  $v^j \rightarrow v$ ,  $j \rightarrow \infty$ , в топологии  $\sigma(L_\infty, L_1)$  пространства  $L_\infty(\mathbb{R}^n)$ .

Если, кроме того,  $g \in L_M(\mathbb{R}^n)$  ( $g \in E_M(\mathbb{R}^n)$ ), то

$$v^j g \rightarrow v g \quad \text{модулярно (сильно) в } L_M(\mathbb{R}^n) \text{ (в } E_M(\mathbb{R}^n)), \quad j \rightarrow \infty.$$

Доказательство леммы 4.4 следует из теоремы Лебега.

**Замечание 4.2.** Пусть  $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$ ,  $v$  — измеримые в  $\mathbb{R}^n$  функции такие, что имеет место сходимость (4.8). Тогда

$$\chi_{\{\mathbb{R}^n : |v^j| \leq k\}} \rightarrow \chi_{\{\mathbb{R}^n : |v| \leq k\}} \quad \text{п. в. на } \mathbb{R}^n, \quad j \rightarrow \infty$$

для таких  $k$ , что

$$\text{meas}\{\mathbb{R}^n : |v| = k\} = 0. \quad (4.9)$$

Таких  $k$ , для которых условие (4.9) не выполнено, может быть не более чем счетное число. Положительные числа  $k$ , для которых выполнено условие (4.9), будем называть «правильными» для функции  $v$  (см. [12, Lemma 9]).

**Лемма 4.5** (см. [21, Definition 9.1, Lemma 9.2]). Пусть  $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$  — последовательность функций из  $E_M(\Omega)$ . Для сходимости

$$v^j \rightarrow 0 \quad \text{в } E_M(\Omega), \quad j \rightarrow \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы для любого измеримого  $Q \subset \Omega$ ,  $\text{meas } Q < \infty$ ,

$$v^j \rightarrow 0 \quad \text{по мере в } Q, \quad j \rightarrow \infty,$$

и семейство функций  $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$  имело равномерно абсолютно непрерывные нормы: для любого  $\varepsilon > 0$  существует измеримое множество  $Q_\varepsilon \subset \Omega$ ,  $\text{meas } Q_\varepsilon < \infty$  и  $\delta > 0$  такие, что

$$(iii) \quad \|v^j \chi_Q\|_M < \varepsilon \text{ для любого } Q \subset Q_\varepsilon, \text{ meas } Q < \delta, \quad j \in \mathbb{N};$$

$$(iv) \quad \|v^j \chi_{\Omega \setminus Q_\varepsilon}\|_M < \varepsilon, \quad j \in \mathbb{N}.$$

**Лемма 4.6.** Пусть  $M$  подчиняется условию  $(M1, \text{loc})$ , тогда для любой функции  $v \in E_M(\Omega)$ ,  $\text{meas}(\Omega) < \infty$ , ее норма абсолютно непрерывна, т. е. выполнены условия (iii), (iv).

Доказательство следует из [21, Lemma 13.16] и плотности ограниченных функций в  $E_M(\Omega)$ .

**Утверждение 4.1.** Пусть  $Q$  — ограниченное подмножество  $\mathbb{R}^n$  и выполнены условия (3.1)–(3.3) и для некоторого фиксированного  $k > 0$  для последовательности функций

$$(T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \in L_M(Q), \quad m \in \mathbb{N},$$

справедливы условия:

$$\nabla T_k(u^m) \rightharpoonup \nabla T_k(u) \quad \text{по топологии } \sigma(L_M, E_{\overline{M}}) \text{ в } L_M(Q), \quad m \rightarrow \infty,$$

$$T_k(u^m) \rightarrow T_k(u) \quad \text{н. в. в } Q, \quad m \rightarrow \infty,$$

$$a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)), \quad m \in \mathbb{N}, \quad \text{ограничена в } L_{\overline{M}}(Q);$$

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_Q q_s^m(x) dx = 0,$$

$$q_s^m(x) = (a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) - a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u)\chi_s)) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(u)\chi_s), \quad (4.10)$$

где  $\chi_s$  — характеристическая функция множества  $Q_s = \{x \in Q \mid |\nabla T_k(u)| \leq s\}$ . Тогда по некоторой подпоследовательности

$$\nabla T_k(u^m) \rightarrow \nabla T_k(u) \quad \text{н. в. в } Q, \quad m \rightarrow \infty,$$

$$\nabla T_k(u^m) \rightarrow \nabla T_k(u) \quad \text{модулярно в } L_M(Q), \quad m \rightarrow \infty,$$

$$a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) \rightarrow a(x, T_k(u), \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) \text{ в } L_1(Q), \quad m \rightarrow \infty.$$

Доказательство утверждения см. в [5, Лемма 4.10] и [3, Утверждение 1].

**Лемма 4.7.** Пусть  $g^j, j \in \mathbb{N}, g$  — такие функции из пространства  $L_1(\mathbb{R}^n)$ , что  $g^j \geq 0$  н. в. в  $\mathbb{R}^n$ ,

$$g^j \rightarrow g \quad \text{сильно в } L_1(\mathbb{R}^n), \quad j \rightarrow \infty,$$

и пусть  $v^j, j \in \mathbb{N}, v$  — измеримые функции в  $\mathbb{R}^n$  такие, что имеет место сходимость (4.8) и

$$|v^j| \leq g^j, \quad j \in \mathbb{N} \quad \text{н. в. в } \mathbb{R}^n.$$

Тогда

$$\int_{\mathbb{R}^n} v^j dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} v dx, \quad j \rightarrow \infty.$$

## 5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕНОРМАЛИЗОВАННОГО РЕШЕНИЯ

### 5.1. Аппроксимационная задача. Положим

$$f^m(x) = T_m f(x)\chi_{U(m)}, \quad U(m) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x| < m\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Несложно показать, что

$$f^m \rightarrow f \quad \text{в } L_1(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty, \quad (5.1)$$

и при этом

$$|f^m(x)| \leq |f(x)|, \quad |f^m(x)| \leq m\chi_{U(m)}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (5.2)$$

Рассмотрим уравнения

$$-\operatorname{div} a^m(x, u, \nabla u) + a_0^m(x, u, \nabla u) = f^m(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad m \in \mathbb{N}, \quad (5.3)$$

с функциями

$$a^m(x, s_0, s) = a(x, T_m(s_0), s), \quad a_0^m(x, s_0, s) = b^m(x, s_0, s) + b_0(x, s_0).$$

Здесь

$$a^m(x, s_0, s) = (a_1^m(x, s_0, s), \dots, a_n^m(x, s_0, s)), \quad b^m(x, s_0, s) = T_m b(x, s_0, s)\chi_{U(m)}.$$

Очевидно, что

$$|b^m(x, s_0, s)| \leq |b(x, s_0, s)|, \quad |b^m(x, s_0, s)| \leq m\chi_{U(m)}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (s_0, s) \in \mathbb{R}^{n+1}. \quad (5.4)$$

Для каждого  $m \in \mathbb{N}$  существует обобщенное решение  $u^m \in \dot{W}^1 L_M(U(m))$  уравнения (5.3) (см. [11, Theorem 13]). Продолжим  $u^m$  нулем на  $\mathbb{R}^n \setminus U(m)$ , тогда для любой функции  $v \in \dot{W}^1 L_M(U(l)) \cap L_\infty(U(l))$ ,  $l \leq m$ , выполняется интегральное равенство

$$\langle (b^m(x, u^m, \nabla u^m) + b_0(x, u^m) - f^m(x))v \rangle + \langle a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla v \rangle = 0, \quad m \in \mathbb{N}. \quad (5.5)$$

**5.2. Оценки для приближенных решений.** Установим априорные оценки для последовательности  $\{u^m\}_{m \in \mathbb{N}}$ . Пусть

$$\widehat{B}(s_0) = \frac{1}{\bar{a}} \int_0^{s_0} \widehat{b}(|z|) dz,$$

тогда  $0 \leq \widehat{B}(s_0) \leq \widehat{B}(+\infty) = \frac{1}{\bar{a}} \int_0^\infty \widehat{b}(|z|) dz = C_0 < \infty$ ,  $s_0 \in \mathbb{R}^+$ . Очевидно, что  $\widehat{b}$  ограничена на  $\mathbb{R}^+$ , следовательно, справедлива оценка  $\widehat{b}(|s_0|) \leq \widehat{C}$ ,  $s_0 \in \mathbb{R}$ .

Положив в (5.5)  $v = T_{k,h}(u^m) e^{2\widehat{B}(|u^m|)} = T_k(u^m - T_h(u^m)) e^{2\widehat{B}(|u^m|)}$ ,  $h, k > 0$ , будем иметь

$$\begin{aligned} & \int_{\{h \leq |u^m| < k+h\}} a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m e^{2\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\ & + \int_{\{h \leq |u^m|\}} (b^m(x, u^m, \nabla u^m) + b_0(x, u^m)) T_{k,h}(u^m) e^{2\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\ & + \frac{2}{\bar{a}} \int_{\{h \leq |u^m|\}} a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m e^{2\widehat{B}(|u^m|)} \widehat{b}(|u^m|) |T_{k,h}(u^m)| dx \leq k \int_{\{|u^m| \geq h\}} |f^m| e^{2\widehat{B}(|u^m|)} dx. \end{aligned}$$

Далее выводим

$$\begin{aligned} & \int_{\{h \leq |u^m| < k+h\}} a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m e^{2\widehat{B}(|u^m|)} dx + \int_{\{h \leq |u^m|\}} b_0(x, u^m) T_{k,h}(u^m) e^{2\widehat{B}(|u^m|)} dx + \quad (5.6) \\ & + \frac{2}{\bar{a}} \int_{\{h \leq |u^m|\}} a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m e^{2\widehat{B}(|u^m|)} \widehat{b}(|u^m|) |T_{k,h}(u^m)| dx \leq \\ & \leq k \int_{\{|u^m| \geq h\}} |f| e^{2\widehat{B}(|u^m|)} dx + \int_{\{h \leq |u^m|\}} |b^m(x, u^m, \nabla u^m)| |T_{k,h}(u^m)| e^{2\widehat{B}(|u^m|)} dx. \end{aligned}$$

Применяя (3.4), оценим второй интеграл слева в неравенстве (5.6)

$$\int_{\{h \leq |u^m|\}} b_0(x, u^m) T_{k,h}(u^m) e^{2\widehat{B}(|u^m|)} dx \geq \int_{\{h \leq |u^m|\}} \bar{b}_0 M(x, u^m) \frac{|T_{k,h}(u^m)|}{|u^m|} e^{2\widehat{B}(|u^m|)} dx. \quad (5.7)$$

Применяя (3.1), (3.6), оценим третий интеграл слева в неравенстве (5.6)

$$\begin{aligned} & \frac{2}{\bar{a}} \int_{\{h \leq |u^m|\}} a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m e^{2\widehat{B}(|u^m|)} \widehat{b}(|u^m|) |T_{k,h}(u^m)| dx \geq \\ & \geq 2 \int_{\{h \leq |u^m|\}} \left( M(x, \bar{d} |\nabla u^m|) - \frac{\phi}{\bar{a}} \right) e^{2\widehat{B}(|u^m|)} \widehat{b}(|u^m|) |T_{k,h}(u^m)| dx \geq \quad (5.8) \\ & \geq 2 \int_{\{h \leq |u^m|\}} \left( |b^m(x, u^m, \nabla u^m)| - \widehat{b}(|u^m|) \left( \frac{\phi}{\bar{a}} + \Phi \right) \right) e^{2\widehat{B}(|u^m|)} |T_{k,h}(u^m)| dx \geq \\ & \geq 2 \int_{\{h \leq |u^m|\}} \left( |b^m(x, u^m, \nabla u^m)| - \widehat{C} \left( \frac{\phi}{\bar{a}} + \Phi \right) \right) e^{2\widehat{B}(|u^m|)} |T_{k,h}(u^m)| dx. \end{aligned}$$

Соединяя оценки (5.6)–(5.8), выводим неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\{h \leq |u^m| < k+h\}} (a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m + \phi) dx + \\ & + \int_{\{h \leq |u^m|\}} \left( \bar{b}_0 \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} + |b^m(x, u^m, \nabla u^m)| \right) |T_{k,h}(u^m)| dx \leq C_4 \int_{\{|u^m| \geq h\}} (k\phi_1 + \phi) dx, \end{aligned} \quad (5.9)$$

где  $\phi_1$  — положительная функция из пространства  $L_1(\mathbb{R}^n)$ . Отсюда следует неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\{h \leq |u^m| < k+h\}} (a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m + \phi) dx + \\ & + k \int_{\{|u^m| \geq k+h\}} \left( |b^m(x, u^m, \nabla u^m)| + \bar{b}_0 \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} \right) dx \leq C_4 \int_{\{|u^m| \geq h\}} (k\phi_1 + \phi) dx \leq C_5 k + C_6, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (5.10)$$

В частности, полагая в (5.9)  $h = 0$ , устанавливаем неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\{|u^m| < k\}} (a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) + \phi) dx + \\ & + \int_{\mathbb{R}^n} \left( |b^m(x, u^m, \nabla u^m)| + \bar{b}_0 \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} \right) |T_k(u^m)| dx \leq C_5 k + C_6, \quad m \geq k. \end{aligned} \quad (5.11)$$

Отсюда, применяя (3.1), выводим

$$\begin{aligned} & \bar{a} \int_{\{|u^m| < k\}} M(x, \bar{d}|\nabla u^m|) dx + k \int_{\{|u^m| \geq k\}} \left( |b^m(x, u^m, \nabla u^m)| + \bar{b} \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} \right) dx \leq \\ & \leq \bar{a} \int_{\{|u^m| < k\}} M(x, \bar{d}|\nabla u^m|) dx + \int_{\mathbb{R}^n} \left( |b^m(x, u^m, \nabla u^m)| + \bar{b}_0 \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} \right) |T_k(u^m)| dx \leq C_6 + C_5 k, \quad m \geq k. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Из оценки (5.12) имеем

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} M(x, T_k(u^m)) dx = \int_{\{|u^m| < k\}} M(x, u^m) dx + \int_{\{|u^m| \geq k\}} M(x, k) dx \leq \\ & \leq \int_{\{|u^m| < k\}} M(x, u^m) dx + k \int_{\{|u^m| \geq k\}} \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} dx = \int_{\mathbb{R}^n} \frac{M(x, u^m)}{u^m} T_k(u^m) dx \leq C_7 k + C_8, \quad m \geq k. \end{aligned} \quad (5.13)$$

Кроме того, из (5.12) следует оценка

$$\int_{\{|u^m| < k\}} M(x, \bar{d}|\nabla u^m|) dx = \int_{\mathbb{R}^n} M(x, \bar{d}|\nabla T_k(u^m)|) dx \leq C_9(k), \quad m \geq k. \quad (5.14)$$

Из оценки (5.11), в частности, имеем

$$\|b^m(x, u^m, \nabla u^m)\|_1 \leq C_{10}(k), \quad m \geq k. \quad (5.15)$$

Кроме того, из оценок (5.13), (5.14) выводим

$$\|T_k(u^m)\|_M + \|\nabla T_k(u^m)\|_M \leq C_{11}(k), \quad m \geq k. \quad (5.16)$$

**5.3. Сходимость почти всюду.** Из оценки (5.12), согласно предложению 4.1, имеем:

$$\text{meas} \{|u^m| \geq \rho\} \rightarrow 0 \quad \text{равномерно по } m \in \mathbb{N}, \quad \rho \rightarrow \infty. \quad (5.17)$$

Из (5.10) при  $k = 1$  для любого  $h > 0$  получаем:

$$\begin{aligned} & \int_{\{h \leq |u^m| < 1+h\}} (a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m + \phi) dx + \\ & + \int_{\{|u^m| \geq h+1\}} \left( |b^m(x, u^m, \nabla u^m)| + \bar{b}_0 \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} \right) dx \leq C_4 \int_{\{|u^m| \geq h\}} (\phi_1 + \phi) dx, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Ввиду того, что  $\phi_1, \phi \in L_1(\mathbb{R}^n)$ , и абсолютной непрерывности интеграла в правой части последнего неравенства, учитывая (5.17), для любого  $\varepsilon > 0$  можно выбрать достаточно большое  $\tilde{h}(\varepsilon) > 1$  такое, что для  $h \geq \tilde{h}$  справедлива оценка:

$$\begin{aligned} & \int_{\{h-1 \leq |u^m| < h\}} (a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m + \phi) dx + \\ & + \int_{\{|u^m| \geq h\}} \left( |b^m(x, u^m, \nabla u^m)| + \bar{b}_0 \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} \right) dx < \frac{\varepsilon}{2}, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned} \quad (5.18)$$

Так же, как в [3], устанавливаются сходимость по подпоследовательности:

$$u^m \rightarrow u \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad m \rightarrow \infty, \quad (5.19)$$

и для любого  $k > 0$  имеем сходимости:

$$\nabla T_k(u^m) \rightarrow \nabla T_k(u) \quad \text{по топологии } \sigma(L_M, E_{\overline{M}}) \quad \text{в } W^1 L_M(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty, \quad (5.20)$$

$$T_k(u^m) \rightarrow T_k(u) \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.21)$$

Выполняя предельный переход в (5.13) по  $m \rightarrow \infty$ , заключаем принадлежность

$$M(x, T_k(u)), \quad \frac{M(x, u)}{u} T_k(u) \in L_1(\mathbb{R}^n).$$

Отсюда, применяя оценку (4.5), заключаем, что условие 2) определения 3.1 выполнено.

Далее докажем, что для любой функции  $S \in C_0^1(\mathbb{R})$  имеет место сходимость

$$b_0(x, u^m) S(u^m) \rightarrow b_0(x, u) S(u) \quad \text{в } L_{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.22)$$

Учитывая сходимость (5.19), имеем:

$$b_0(x, u^m) S(u^m) \rightarrow b_0(x, u) S(u) \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.23)$$

Пусть  $Q$  — произвольное измеримое подмножество в  $\mathbb{R}^n$ , а функция  $S \in C_0^1(\mathbb{R})$  такая, что  $\text{supp } S \subset [-K, K]$  для  $K > 0$  и  $|S(r)| \leq K_1$  для любого  $r \in \mathbb{R}$ . Пользуясь (4.4), получаем следующие соотношения:

$$\begin{aligned} & \int_Q |b_0(x, u^m)| |S(u^m)| dx = \int_Q |b_0(x, u^m)| |S(u^m)| \chi_{\{\mathbb{R}^n: |u^m| < K\}} dx \leq \\ & \leq K_1 \hat{b}_0 \int_Q (\Psi_0 + 2M(x, 1) + M(x, K)) dx. \end{aligned}$$

Отсюда, ввиду принадлежности  $M(x, K) \in L_{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n)$ , заключаем равномерную интегрируемость последовательности  $\{|b(x, u^m) S(u^m)|\}_{m \in \mathbb{N}}$  для любого  $Q \subset \mathbb{R}^n : \text{meas } Q < \infty$ . Учитывая сходимость (5.23), применяя лемму 4.1, устанавливаем сходимость (5.22).

**5.4. Модулярная сходимость градиентов от срезов.** Докажем сходимости

$$\nabla T_k(u^m) \rightarrow \nabla T_k(u) \quad \text{модулярно в } L_{M,\text{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty, \quad (5.24)$$

$$a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) \rightarrow a(x, T_k(u), \nabla T_k(u)) \cdot \nabla T_k(u) \quad \text{в } L_{1,\text{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.25)$$

Пусть  $w \in E_M(\Omega)$  произвольное, из условия (3.3) следует неравенство

$$(a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) - a(x, T_k(u^m), w)) \cdot (\nabla T_k(u^m) - w) \geq 0. \quad (5.26)$$

Отсюда получаем:

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot w dx &\leq \int_{\Omega} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) dx - \\ &- \int_{\Omega} a(x, T_k(u^m), w) \cdot (\nabla T_k(u^m) - w) dx. \end{aligned} \quad (5.27)$$

Далее, применяя (4.1), (4.3) ( $\varepsilon = 1$ ), выводим

$$3 \int_{\Omega} \overline{M}(x, |a(x, T_k(u^m), w)(3\widehat{a})^{-1}|) dx \leq \|\Psi\|_1 + C \int_{\Omega} M(x, T_k(u^m)) dx + \int_{\Omega} M(x, \widehat{d}|w|) dx.$$

Отсюда, применяя (5.13), устанавливаем оценку

$$\|a(x, T_k(u^m), w)\|_{\overline{M}} \leq C_{12}, \quad m \geq k. \quad (5.28)$$

Соединяя (5.27), (5.11), (5.16), (5.28), получаем оценку:

$$\int_{\Omega} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot w dx \leq C_{13}, \quad m \geq k, \quad \forall w \in E_M(\Omega).$$

Применяя принцип равномерной ограниченности, при любом  $k > 0$  имеем оценку:

$$\|a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m))\|_{\overline{M}} \leq C_{14}(k), \quad m \geq k. \quad (5.29)$$

Из оценки (5.29) следует сходимость по подпоследовательности

$$a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \rightarrow \tilde{a}_k \quad \text{по топологии } \sigma(L_{\overline{M}}, E_M) \quad \text{в } L_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.30)$$

Для положительных вещественных чисел  $m, j, s$  обозначим через  $\omega(m, j, s)$  любую величину такую, что

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \lim_{j \rightarrow +\infty} \lim_{m \rightarrow +\infty} \omega(m, j, s) = 0.$$

Пусть  $h, k, h - 1 > k > 0$ .

Согласно лемме 2.1, существует последовательность функций  $\{v^j\}_{j \in \mathbb{N}}$  из  $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ :

$$v^j \rightarrow T_k(u) \quad \text{модулярно в } W^1 L_M(\mathbb{R}^n), \quad j \rightarrow \infty,$$

тогда

$$T_k(v^j) \rightarrow T_k(u) \quad \text{модулярно в } W^1 L_M(\mathbb{R}^n), \quad j \rightarrow \infty. \quad (5.31)$$

Отсюда, согласно лемме 4.1, следует, что найдется  $\lambda > 0$  такое, что для последовательностей

$$\left\{ M \left( x, \frac{|T_k(u) - T_k(v^j)|}{\lambda} \right) \right\}_{j \in \mathbb{N}}, \quad \left\{ M \left( x, \frac{|\nabla(T_k(u) - T_k(v^j))|}{\lambda} \right) \right\}_{j \in \mathbb{N}}$$

выполнены условия (i), (ii) (5.32)

и справедлива сходимость по некоторой подпоследовательности  $J \subset \mathbb{N}$  (см. [21, Remark 7.9]:

$$T_k(v^j) \rightarrow T_k(u), \quad \nabla T_k(v^j) \rightarrow \nabla T_k(u) \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad j \rightarrow \infty. \quad (5.33)$$

**Замечание 5.1.** Пользуясь выпуклостью функции  $M(x, \cdot)$  и тем, что  $T_k(u) \in W^1 L_M(\mathbb{R}^n)$ , несложно установить эквивалентность (5.32) условию:

$$\left\{ M \left( x, \frac{|T_k(v^j)|}{\lambda_1} \right) \right\}_{j \in \mathbb{N}}, \quad \left\{ M \left( x, \frac{|\nabla T_k(v^j)|}{\lambda_1} \right) \right\}_{j \in \mathbb{N}} \quad \text{подчиняются условиям (i), (ii)}$$

с некоторым  $\lambda_1 > 0$ .

Кроме того, согласно лемме 4.3, имеем:

$$\nabla T_k(v^j) \rightharpoonup \nabla T_k(u) \quad \text{по топологии } \sigma(L_M, L_{\overline{M}}), \quad j \rightarrow \infty.$$

Полагаем

$$z^{mj} = T_k(u^m) - T_k(v^j), \quad z^j = T_k(u) - T_k(v^j), \quad m, j \in \mathbb{N},$$

$\varphi_k(\rho) = \rho \exp(\gamma^2 \rho^2)$ , где  $\gamma = \frac{\widehat{b}_k}{a}$ ,  $\widehat{b}_k = \max\{\widehat{b}(|s|) : |s| \leq k\}$ . Очевидно, что

$$\psi_k(\rho) = \varphi'_k(\rho) - 2\gamma|\varphi_k(\rho)| \geq 1/2, \quad \rho \in \mathbb{R}.$$

Отсюда следуют неравенства

$$1/2 \leq \psi_k(z^{mj}) \leq \max_{[-2k, 2k]} \psi_k(\rho) = C_{15}(k), \quad m, j \in \mathbb{N}. \quad (5.34)$$

Ввиду (5.21), (5.33) имеем:

$$\varphi_k(z^{mj}) \rightarrow \varphi_k(z^j), \quad \varphi'_k(z^{mj}) \rightarrow \varphi'_k(z^j), \quad \psi_k(z^{mj}) \rightarrow \psi_k(z^j) \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad m \rightarrow \infty, \quad (5.35)$$

$$\varphi_k(z^j) \rightarrow \varphi_k(0) = 0, \quad \varphi'_k(z^j) \rightarrow \varphi'_k(0) = 1, \quad \psi_k(z^j) \rightarrow \psi_k(0) = 1 \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad j \rightarrow \infty, \quad (5.36)$$

а также

$$|\varphi_k(z^{mj})| \leq \varphi_k(2k), \quad 1 \leq \varphi'_k(z^{mj}) \leq \varphi'_k(2k), \quad m, j \in \mathbb{N}, \quad (5.37)$$

$$|\varphi_k(z^j)| \leq \varphi_k(2k), \quad 1 \leq \varphi'_k(z^j) \leq \varphi'_k(2k), \quad j \in \mathbb{N}. \quad (5.38)$$

Применяя (5.35)–(5.38), по лемме 4.4 устанавливаем сходимости:

$$|\varphi_k(z^{mj})| \rightharpoonup |\varphi_k(z^j)| \quad \text{в топологии } \sigma(L_\infty, L_1) \quad \text{пространства } L_\infty(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty, \quad (5.39)$$

$$|\varphi_k(z^j)| \rightharpoonup 0 \quad \text{в топологии } \sigma(L_\infty, L_1) \quad \text{пространства } L_\infty(\mathbb{R}^n), \quad j \rightarrow \infty. \quad (5.40)$$

Кроме того, для любой функции  $g \in E_M(\mathbb{R}^n)$ , применяя лемму 4.4, устанавливаем сходимости

$$\varphi_k(z^{mj})g \rightarrow \varphi_k(z^j)g \quad \text{сильно в } E_M(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty, \quad (5.41)$$

$$\varphi_k(z^j)g \rightarrow 0 \quad \text{сильно в } E_M(\mathbb{R}^n), \quad j \rightarrow \infty. \quad (5.42)$$

Введем обозначения  $\chi_s^j$ ,  $\chi_s$ ,  $k\chi^m$ ,  $k\chi$  для характеристических функций множеств  $\{x \in \mathbb{R}^n : |\nabla T_k(v^j)| \leq s\}$ ,  $\{x \in \mathbb{R}^n : |\nabla T_k(u)| \leq s\}$ ,  $\{x \in \mathbb{R}^n : |u^m| \geq k\}$ ,  $\{x \in \mathbb{R}^n : |u| \geq k\}$ , соответственно. Будем рассматривать «правильные»  $k, s$ , для которых  $\text{meas}\{\mathbb{R}^n : |u| = k\} = 0$  и  $\text{meas}\{\mathbb{R}^n : |\nabla T_k(u)| = s\} = 0$ .

Положим  $\eta_h(r) = \min(1, \max(0, h - r + 1))$ ,  $r \in \mathbb{R}$ . Для краткости записи будем использовать обозначения

$$\zeta_{h-1}^m = \eta_{h-1}(|u^m|), \quad \zeta_{h-1} = \eta_{h-1}(|u|), \quad \eta_R = \eta_R(|x|).$$

Из (5.19), (5.33) для правильных  $k, s$  следуют сходимости:

$$\zeta_{h-1}^m \rightarrow \zeta_{h-1} \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad m \rightarrow \infty, \quad (5.43)$$

$$\chi_s^j \rightarrow \chi_s \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad j \rightarrow \infty, \quad (5.44)$$

$$k\chi^m \rightarrow k\chi \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.45)$$

Принимая в качестве тестовой функции в (5.5)  $\varphi_k(z^{mj})\zeta_{h-1}^m\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)}$ , получим

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla(\varphi_k(z^{mj})\eta_R\zeta_{h-1}^m e^{\widehat{B}(|u^m|)}) dx + \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^n} b^m(x, u^m, \nabla u^m)\varphi_k(z^{mj})\zeta_{h-1}^m\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\ & \quad + \int_{\mathbb{R}^n} b_0(x, u^m)\varphi_k(z^{mj})\zeta_{h-1}^m\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx - \int_{\mathbb{R}^n} f^m\varphi_k(z^{mj})\zeta_{h-1}^m\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx = \\ & \quad = I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0, \quad m \geq h. \end{aligned} \quad (5.46)$$

Оценки интегралов  $I_2$ – $I_4$ . Ввиду оценки (4.4) имеем:

$$|b_0(x, u^m)|\zeta_{h-1}^m \eta_R \leq \widehat{b}_0(M(x, h) + 2M(x, 1) + \Psi_0) \eta_R = \Psi_h \eta_R \in L_1(\mathbb{R}^n);$$

из сходимостей (5.39), (5.40), имеем:

$$|I_3| \leq \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_h \eta_R |\varphi_k(z^{mj})| e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx \leq \omega_{h,R}(m) + e^{C_0} \int_{\mathbb{R}^n} \Psi_h \eta_R |\varphi_k(z^j)| dx = \omega_{h,R}(m, j). \quad (5.47)$$

Аналогично, благодаря (5.2), ввиду  $f \in L_1(\mathbb{R}^n)$  получаем

$$|I_4| \leq \int_{\mathbb{R}^n} |f| |\varphi_k(z^{mj})| e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx \leq \omega(m) + e^{C_0} \int_{\mathbb{R}^n} |f| |\varphi_k(z^j)| dx = \omega(m, j). \quad (5.48)$$

Применяя (5.4), (3.6), оценим интеграл

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |b^m(x, u^m, \nabla u^m)| |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} \xi_{h-1}^m dx \leq \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{b}(|u^m|) (M(x, \bar{d} |\nabla T_h(u^m)|) + \Phi(x)) |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} \xi_{h-1}^m dx, \quad m \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Используя (3.1), выводим

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \frac{1}{\bar{a}} \int_{\mathbb{R}^n} (\bar{a}\Phi(x) + \phi(x)) |\varphi_k(z^{mj})| e^{\widehat{B}(|u^m|)} \widehat{b}(|u^m|) dx + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{b}(|u^m|)}{\bar{a}} |a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m)| |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\ &+ \int_{\{|u^m| > k\}} \frac{\widehat{b}(|u^m|)}{\bar{a}} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_h(u^m) |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} \xi_{h-1}^m dx = \quad (5.49) \\ &= I_{21} + I_{22} + I_{23}. \end{aligned}$$

Учитывая то, что  $z^{mj} u^m \geq 0$  при  $|u^m| \geq k$ , выводим

$$\begin{aligned} I_1 &\geq \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \varphi'_k(z^{mj}) \nabla z^{mj} \eta_R \zeta_{h-1}^m e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx - \\ &- \int_{\{\mathbb{R}^n: h-1 \leq |u^m| < h\}} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla u^m |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \varphi_k(z^{mj}) \nabla \eta_R \zeta_{h-1}^m e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx - \quad (5.50) \\ &- \int_{\mathbb{R}^n} \frac{\widehat{b}(|u^m|)}{\bar{a}} |a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m)| |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\ &+ \int_{\{|u^m| > k\}} \frac{\widehat{b}(|u^m|)}{\bar{a}} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_h(u^m) |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} \xi_{h-1}^m dx = \\ &= I_{11} - I_{12} + I_{13} - I_{14} + I_{15}. \end{aligned}$$

Теперь, используя то, что  $I_{15} = I_{23}$ ,  $I_{22} = I_{14}$ , и оценки интегралов (5.47)–(5.50), из (5.46) выводим неравенства

$$I_{11} - 2I_{22} \leq \omega_{h,R}(m, j) + I_{21} + I_{12} - I_{13}, \quad m \geq h. \quad (5.51)$$

Далее, учитывая (3.1), получаем

$$\begin{aligned}
I_{12} + I_{21} + 2I_{22} &\leq \varphi_k(2k)e^{C_0} \int_{\{\mathbb{R}^n: h-1 \leq |u^m| < h\}} (\mathbf{a}(\mathbf{x}, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot \nabla u^m + \phi) dx + \\
&\quad + C_{16} \int_{\mathbb{R}^n} (\Phi(\mathbf{x}) + \phi(\mathbf{x})) |\varphi_k(z^{mj})| dx + \\
&\quad + 2 \frac{\widehat{b}_k}{a} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) |\varphi_k(z^{mj})| e^{\widehat{B}(|u^m|)} \eta_R dx = I_{121} + I_{211} + I_{221}.
\end{aligned} \tag{5.52}$$

Ввиду (5.39), (5.40), имеем:

$$I_{211} = \omega(m, j). \tag{5.53}$$

Благодаря (5.18), заключаем:

$$I_{121} \leq \omega(h). \tag{5.54}$$

Применяя оценку (5.29) и сходимости (5.41), (5.42) с  $g = \chi_{U(R+1)}$ , устанавливаем соотношения

$$|I_{13}| \leq C_{17} \int_{U(R+1)} |\mathbf{a}(\mathbf{x}, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m))| \cdot |\varphi_k(z^{mj})| dx \leq C_{18}(h) \|\varphi_k(z^{mj})\|_{M, U(R+1)} = \omega_{h,R}(m, j). \tag{5.55}$$

Соединяя (5.51)–(5.55), устанавливаем

$$I_5 = I_{11} - I_{221} \leq \omega(h) + \omega_{h,R}(m, j), \quad m \geq h. \tag{5.56}$$

*Представление  $I_5$ .* Выполнив элементарные преобразования, выводим равенства

$$\begin{aligned}
I_5 &= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) \varphi'_k(z^{mj}) \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx - \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_k(v^j) \varphi'_k(z^{mj}) \zeta_{h-1}^m \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx - \\
&\quad - \frac{2\widehat{b}_k}{a} \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(u^m) \psi_k(z^{mj}) \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx - \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_k(v^j) \varphi'_k(z^{mj}) \zeta_{h-1}^m \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(v^j) \chi_s^j) \psi_k(z^{mj}) \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(v^j) \chi_s^j \psi_k(z^{mj}) \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx - \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_k(v^j) \varphi'_k(z^{mj}) \chi_s^j \zeta_{h-1}^m \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_k(v^j) (\chi_s^j - 1) \varphi'_k(z^{mj}) \zeta_{h-1}^m \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx.
\end{aligned}$$

Очевидно равенство

$$I_5 = \int_{\mathbb{R}^n} \mathbf{a}(\mathbf{x}, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(v^j) \chi_s^j) \psi_k(z^{mj}) \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx - \tag{5.57}$$

$$\begin{aligned}
 & - \frac{2\widehat{b}_k}{\widehat{a}} \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla T_k(v^j) \chi_s^j |\varphi_k(z^{mj})| \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\
 & + \int_{\mathbb{R}^n} (a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) - \zeta_{h-1}^m a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m))) \cdot \nabla T_k(v^j) \chi_s^j \varphi'_k(z^{mj}) \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx + \\
 & + \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_h(u^m), \nabla T_h(u^m)) \cdot \nabla T_k(v^j) (\chi_s^j - 1) \varphi'_k(z^{mj}) \zeta_{h-1}^m \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx = \\
 & = I_{51} + I_{52} + I_{53} + I_{54}, \quad m \geq h.
 \end{aligned}$$

Оценки интегралов  $I_{52}$ – $I_{54}$ .

Применяя (5.19), (5.35), (5.37) и лемму 4.4 с  $g = \nabla T_k(v^j) \chi_s^j \eta_R \in E_M(\mathbb{R}^n)$ , получаем

$$\eta_R \nabla T_k(v^j) \chi_s^j |\varphi_k(z^{mj})| e^{\widehat{B}(|u^m|)} \rightarrow \eta_R \nabla T_k(v^j) \chi_s^j |\varphi_k(z^j)| e^{\widehat{B}(|u|)} \text{ сильно в } E_M(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty.$$

Отсюда, ввиду сходимости (5.30), устанавливаем

$$I_{52} = - \frac{2\widehat{b}_k}{\widehat{a}} \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{a}_k \cdot \nabla T_k(v^j) \chi_s^j |\varphi_k(z^j)| \eta_R e^{\widehat{B}(|u|)} dx + \omega_R(m).$$

Применяя (5.33), (5.36), (5.38), (5.44), по теореме Лебега устанавливаем:

$$I_{52} = \omega_R(m, j). \tag{5.58}$$

Применяя (5.35), (5.37), (5.45) и лемму 4.4 с  $g = \nabla T_k(v^j) \chi_s^j \eta_R \in E_M(\mathbb{R}^n)$ , получаем

$$\nabla T_k(v^j) \chi_s^j \varphi'_k(z^{mj}) \chi_s^m \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} \rightarrow \nabla T_k(v^j) \chi_s^j \varphi'_k(z^j) \chi_s \eta_R e^{\widehat{B}(|u|)} \text{ сильно в } E_M(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty.$$

Отсюда, ввиду сходимостей (5.30), (5.43), устанавливаем

$$I_{53} = \int_{\mathbb{R}^n} (\widetilde{a}_k - \zeta_{h-1} \widetilde{a}_h) \cdot \nabla T_k(v^j) \chi_s \chi_s^j \varphi'_k(z^j) \eta_R e^{\widehat{B}(|u|)} dx + \omega_R(m).$$

Далее, применяя (5.33), (5.36), (5.38), (5.44), по теореме Лебега заключаем:

$$I_{53} = \int_{\mathbb{R}^n} (\widetilde{a}_k - \zeta_{h-1} \widetilde{a}_h) \cdot \nabla T_k(u) \chi_s \chi_s^j \eta_R e^{\widehat{B}(|u|)} dx + \omega_R(m, j) = \omega_R(m, j). \tag{5.59}$$

Далее, применяя (5.35), (5.37), (5.43) и лемму 4.4 с  $g = \nabla T_k(v^j) (\chi_s^j - 1) \eta_R \in E_M(\mathbb{R}^n)$ , получаем

$$\nabla T_k(v^j) (\chi_s^j - 1) \varphi'_k(z^{mj}) \zeta_{h-1}^m \eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} \rightarrow \nabla T_k(v^j) (\chi_s^j - 1) \varphi'_k(z^j) \zeta_{h-1} \eta_R e^{\widehat{B}(|u|)} \text{ сильно в } E_M(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty.$$

Отсюда, ввиду сходимости (5.30), устанавливаем

$$I_{54} = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{a}_h \cdot \nabla T_k(v^j) (\chi_s^j - 1) \varphi'_k(z^j) \zeta_{h-1} \eta_R e^{\widehat{B}(|u|)} dx + \omega_R(m).$$

Применяя (5.36), (5.38), (5.44), (5.31) и лемму 4.1 (см. замечание 5.1), получаем

$$\nabla T_k(v^j) (\chi_s^j - 1) \varphi'_k(z^j) \eta_R \rightarrow \nabla T_k(u) (\chi_s - 1) \eta_R \text{ модулярно в } L_M(\mathbb{R}^n), \quad j \rightarrow \infty.$$

Отсюда, ввиду принадлежности  $\widetilde{a}_h \zeta_{h-1} e^{\widehat{B}(|u|)} \in L_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n)$ , имеем:

$$I_{54} = \int_{\mathbb{R}^n} \widetilde{a}_h \cdot \nabla T_k(u) (\chi_s - 1) \eta_R e^{\widehat{B}(|u|)} dx + \omega_R(m, j).$$

В силу того, что  $\widetilde{a}_h \cdot \nabla T_k(u) e^{\widehat{B}(|u|)} \in L_1(\mathbb{R}^n)$ , имеем:

$$I_{54} = \omega_R(m, j, s). \tag{5.60}$$

Из (5.56)–(5.60) следует, что

$$I_{51} \leq \omega_{h,R}(m, j, s) + \omega(h). \tag{5.61}$$

Оценим интеграл

$$\begin{aligned}
0 \leq I_6 &= \int_{\mathbb{R}^n} (a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) - a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)) \times \\
&\quad \times (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\psi_k(z^{mj})\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx = \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\psi_k(z^{mj})\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx - \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\psi_k(z^{mj})\eta_R e^{\widehat{B}(|u^m|)} dx = I_{51} - I_{61}.
\end{aligned} \tag{5.62}$$

Из (5.19), (5.21) следует сходимость

$$a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)e^{\widehat{B}(|u^m|)} \rightarrow a(x, T_k(u), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)e^{\widehat{B}(|u|)} \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad m \rightarrow \infty,$$

а из (3.2), (4.3) имеем оценки

$$|a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)| \leq \widehat{a} \left( M(x, \widehat{d}s) + 2M(x, 1) + CM(x, k) \right) + \psi(x), \quad m, j \in \mathbb{N}.$$

Пользуясь ограниченностью функции  $M(\cdot, z)$  по  $x \in U(R+1)$ , для любых фиксированных  $z \in \mathbb{R}$  устанавливаем оценку

$$|a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)|\eta_R \leq \psi(x) + C_{19}\eta_R \in E_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n), \quad m, j \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, учитывая (5.34), (5.35), по леммам 4.5, 4.6 получаем сходимость

$$\begin{aligned}
&a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\psi_k(z^{mj})e^{\widehat{B}(|u^m|)}\eta_R \rightarrow \\
&\rightarrow a(x, T_k(u), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\psi_k(z^j)e^{\widehat{B}(|u|)}\eta_R \quad \text{сильно в } E_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty.
\end{aligned} \tag{5.63}$$

Применяя (5.63), (5.20), выводим

$$I_{61} = \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_k(u), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j) \cdot (\nabla T_k(u) - \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\psi_k(z^j)\eta_R e^{\widehat{B}(|u|)} dx + \omega_R(m), \quad j \in \mathbb{N}.$$

Применяя оценку (4.2) и сходимости (5.33), (5.36), (5.44), по теореме Лебега устанавливаем

$$I_{61} = \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_k(u), 0) \cdot \nabla T_k(u)(1 - \chi_s)\eta_R e^{\widehat{B}(|u|)} dx + \omega_R(m, j).$$

Наконец, благодаря  $a(x, T_k(u), 0) \cdot \nabla T_k(u)e^{\widehat{B}(|u|)}\eta_R \in L_1(\mathbb{R}^n)$  (см. (4.2)) получаем

$$I_{61} = \omega_R(m, j, s). \tag{5.64}$$

Соединяя (5.62), (5.64), (5.61) и применяя (5.34), выводим

$$\begin{aligned}
I_7 &= \int_{\mathbb{R}^n} (a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) - a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)) \times \\
&\quad \times (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\eta_R dx \leq 2I_6 \leq \omega_{h,R}(m, j, s) + \omega(h).
\end{aligned} \tag{5.65}$$

Используя обозначение (4.10), имеем

$$\begin{aligned}
0 \leq \int_{U(R)} q_s^m(x) dx &\leq I_7 + \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \cdot (\nabla T_k(v^j)\chi_s^j - \nabla T_k(u)\chi_s)\eta_R dx - \\
&\quad - \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u)\chi_s) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(u)\chi_s)\eta_R dx + \\
&\quad + \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(v^j)\chi_s^j) \cdot (\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(v^j)\chi_s^j)\eta_R dx = I_7 + I_{71} + I_{72} + I_{73}.
\end{aligned} \tag{5.66}$$

Для интегралов  $I_{71}$ – $I_{73}$  справедливы оценки (см. [3]):

$$I_{71} = \omega_R(m, j), \quad I_{72} = \omega_R(m, s), \quad I_{73} = \omega_R(m, j, s). \quad (5.67)$$

Соединяя (5.65)–(5.67), получаем

$$\int_{U(R)} q_s^m(x) dx \leq \omega_{R,h}(m, j, s) + \omega(h).$$

Ввиду того, что левая часть последнего неравенства не зависит от  $j, h$ , переходя последовательно к пределам по  $m \rightarrow \infty, j \rightarrow \infty, s \rightarrow \infty$ , устанавливаем соотношение

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{U(R)} q_s^m(x) dx \leq \omega(h).$$

Выполняя предельный переход при  $h \rightarrow \infty$ , выводим соотношение

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \lim_{m \rightarrow \infty} \int_{U(R)} q_s^m(x) dx = 0.$$

По утверждению 4.1 ( $Q = U(R)$ ) ввиду произвольности  $R > 0$  имеем сходимости (5.24), (5.25) и сходимость

$$\nabla T_k(u^m) \rightarrow \nabla T_k(u) \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.68)$$

Далее так же, как в [4, 5.5], устанавливается сходимость по подпоследовательности

$$\nabla u^m \rightarrow \nabla u \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.69)$$

**5.5. Предельный переход.** Используя оценку (5.29) и сходимости (5.21), (5.68), по лемме 4.2 устанавливаем слабую сходимость

$$a(x, T_k(u^m), \nabla T_k(u^m)) \rightharpoonup a(x, T_k(u), \nabla T_k(u)) \quad (5.70)$$

в топологии  $\sigma(L_{\overline{M}}, E_M)$  пространства  $L_{\overline{M}}(\mathbb{R}^n)$ ,  $m \rightarrow \infty$ .

Из непрерывности  $b(x, s_0, s)$  по  $(s_0, s)$  и сходимостей (5.19), (5.69) следует, что

$$b^m(x, u^m, \nabla u^m) \rightarrow b(x, u, \nabla u) \quad \text{п. в. в } \mathbb{R}^n, \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.71)$$

Из оценки (5.15), ввиду (5.71), согласно лемме Фату заключаем, что

$$b(x, u, \nabla u) \in L_1(\mathbb{R}^n).$$

Таким образом, условия 1), 3) определения 3.1 выполнены.

Далее, сходимость

$$b^m(x, u^m, \nabla u^m) \rightarrow b(x, u, \nabla u) \quad \text{в } L_{1, \text{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.72)$$

устанавливается так же, как в [5, Шаг 6].

Докажем, что  $u$  является ренормализованным решением уравнения (1.1). Условия 1), 2), 3) определения 3.1 доказаны. Докажем условие 4). Применяя (3.1), из неравенства (5.10) получаем

$$\int_{\{h \leq |u^m| < k+h\}} \overline{a}M(x, \overline{d}|\nabla u^m|) dx + k\overline{b}_0 \int_{\{|u^m| \geq k+h\}} \frac{M(x, u^m)}{|u^m|} dx \leq C_4 \int_{\{|u^m| \geq h\}} (k\phi_1 + \phi) dx, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, пользуясь сходимостями (5.69), (5.19), применяя теорему Лебега и лемму Фату, выполним предельный переход при  $m \rightarrow \infty$  для правильных  $h$  и получим неравенство:

$$\int_{\{h \leq |u| < k+h\}} \overline{a}M(x, \overline{d}|\nabla u|) dx + k\overline{b}_0 \int_{\{|u| \geq k+h\}} \frac{M(x, u)}{|u|} dx \leq C_4 \int_{\{|u| \geq h\}} (k\phi_1 + \phi) dx. \quad (5.73)$$

Отсюда, в частности, справедлива оценка вида (4.6). Тогда согласно предложению 4.1 имеем:

$$\text{meas} \{\mathbb{R}^n : |u| \geq h\} \rightarrow 0, \quad h \rightarrow \infty. \quad (5.74)$$

Выполняя предельный переход в (5.73) при  $h \rightarrow \infty$ , пользуясь (5.74), устанавливаем соотношение

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \int_{\{h \leq |u| < k+h\}} M(x, \bar{d}|\nabla u|) dx = 0.$$

Докажем равенство (3.7). Пусть  $\xi \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$ ,  $\text{supp } \xi \subset U(l)$ ,  $l \geq l_0$  и функция  $S \in C_0^1(\mathbb{R})$  такая, что  $\text{supp } S \subset [-K, K]$ ,  $K > 0$ . Пусть  $\{u^m\}_{m \in \mathbb{N}}$  — последовательных слабых решений уравнения (5.3). Взяв  $S(u^m)\xi \in \dot{W}^1 L_M(U(l)) \cap L_\infty(\mathbb{R}^n)$  в качестве тестовой функции в (5.5), выводим равенство

$$\begin{aligned} & \langle a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot (S'(u^m)\xi \nabla u^m + S(u^m)\nabla \xi) \rangle + \\ & + \langle (b^m(x, u^m, \nabla u^m) + b_0(x, u^m) - f^m(x))S(u^m)\xi \rangle = I^m + J^m = 0, \quad m \geq l_0. \end{aligned} \quad (5.75)$$

Очевидно, что

$$\begin{aligned} I^m &= \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_m(u^m), \nabla u^m) \cdot (S'(u^m)\xi \nabla u^m + S(u^m)\nabla \xi) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_K(u^m), \nabla T_K(u^m)) \cdot \nabla T_K(u^m) S'(u^m)\xi dx + \\ &+ \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_K(u^m), \nabla T_K(u^m)) \cdot \nabla \xi S(u^m) dx = I_1^m + I_2^m, \quad m \geq \max(K, l_0). \end{aligned} \quad (5.76)$$

Ввиду сходимостей (5.19), (5.25), применяя лемму 4.7, устанавливаем

$$I_1^m = \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_K(u), \nabla T_K(u)) \cdot \nabla T_K(u) S'(u)\xi dx + \omega(m), \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.77)$$

Из сходимости (5.19) по лемме 4.4 получаем:

$$S(u^m)\nabla \xi \rightarrow S(u)\nabla \xi \quad \text{сильно в } E_M(\mathbb{R}^n), \quad m \rightarrow \infty.$$

Отсюда, учитывая сходимость (5.70), выводим:

$$I_2^m = \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_K(u), \nabla T_K(u)) \cdot \nabla \xi S(u) dx + \omega(m), \quad m \rightarrow \infty. \quad (5.78)$$

Соединяя (5.76)–(5.78), получаем:

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} I^m &= \int_{\mathbb{R}^n} a(x, T_K(u), \nabla T_K(u)) \cdot (S'(u)\xi \nabla T_K(u) + S(u)\nabla \xi) dx = \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} a(x, u, \nabla u) \cdot (S'(u)\xi \nabla u + S(u)\nabla \xi) dx. \end{aligned} \quad (5.79)$$

По лемме 4.4 имеем

$$S(u^m)\xi \rightarrow S(u)\xi \quad \text{в топологии } \sigma(L_\infty, L_1), \quad m \rightarrow \infty.$$

Тогда, ввиду сходимостей (5.1), (5.22), (5.72), устанавливаем равенство:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} J^m = \int_{\mathbb{R}^n} (b(x, u, \nabla u) + b_0(x, u) - f)S(u)\xi dx. \quad (5.80)$$

Комбинируя (5.75), (5.79), (5.80), получаем равенство (3.7). Таким образом, приходим к выводу, что  $u$  является ренормализованным решением уравнения (1.1).

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Вильданова В. Ф., Мукминов Ф. Х. Энтропийное решение для уравнения с мерозначным потенциалом в гиперболическом пространстве// *Мат. сб.* — 2023. — 214, № 11. — С. 37–62.
2. Данфорд Н., Шварц Дж. Т. Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.
3. Кожевникова Л. М. Существование энтропийного решения нелинейной эллиптической задачи в неограниченной области// *Теор. мат. физ.* — 2024. — 218, № 1. — С. 124–148.
4. Кожевникова Л. М. Энтропийные и ренормализованные решения анизотропных эллиптических уравнений с переменными показателями нелинейностей// *Мат. сб.* — 2019. — 210, № 3. — С. 131–161.
5. Кожевникова Л. М., Кашиникова А. П. Существование решений нелинейных эллиптических уравнений с данными в виде меры в пространствах Музилака—Орлича// *Мат. сб.* — 2022. — 213, № 4. — С. 38–73.
6. Ahmdatt T., Elemine Vall M. S. B., Benkirane A., Touzani A. Existence of renormalized solutions for a nonlinear elliptic equation in Musielak framework and  $L^1$ // *An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform.* — 2017. — 44, № 2. — С. 190–213.
7. Ahmida Y., Chlebicka I., Gwiazda P., Youssfi A. Gossez's approximation theorems in Musielak—Orlicz—Sobolev spaces// *J. Funct. Anal.* — 2018. — 275, № 9. — С. 2538–2571.
8. Ait Khellou M., Benkirane A. Renormalized solution for nonlinear elliptic problems with lower order terms and  $L^1$  data in Musielak—Orlicz spaces// *An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform.* — 2016. — 43, № 2. — С. 164–187.
9. Ait Khelloul M., Douiri S. M., El Hadfi Y. Existence of solutions for some nonlinear elliptic equations in Musielak spaces with only the log-Hölder continuity condition// *Mediterr. J. Math.* — 2020. — 17, № 1. — С. 1–18.
10. Benkirane A., Sidi El Vally M. An existence result for nonlinear elliptic equations in Musielak—Orlicz—Sobolev spaces// *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin.* — 2013. — 20. — С. 57–75.
11. Benkirane A., Sidi El Vally M. Variational inequalities in Musielak—Orlicz—Sobolev spaces// *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin.* — 2014. — 21, № 5. — С. 787–811.
12. Chlebicka I. Measure data elliptic problems with generalized Orlicz growth// *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A.* — 2023. — 153, № 2. — С. 588–618.
13. Douiri S. M., Benkirane A., Ait Khellou M., El Hadfi Y. Nonlinear unilateral problems without sign condition in Musielak spaces// *Anal. Math. Phys.* — 2021. — 11, № 2. — С. 66.
14. Elarabi R., Rhoudaf M., Sabiki H. Entropy solution for a nonlinear elliptic problem with lower order term in Musielak—Orlicz spaces// *Ric. Mat.* — 2018. — 67, № 2. — С. 549–579.
15. Elemine Vall M. S. B., Ahmedatt T., Touzani A., Benkirane A. Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic equations in Musielak framework with  $L^1$  data// *Bol. Soc. Parana. Mat.* — 2018. — 36, № 1. — С. 125–150.
16. Gwiazda P., Skrzypczaka I., Zatorska-Goldstein A. Existence of renormalized solutions to elliptic equation in Musielak—Orlicz space// *Differ. Equ.* — 2018. — 264. — С. 341–377.
17. Kozhevnikova L. M. On solutions of anisotropic elliptic equations with variable exponent and measure data// *Complex Var. Elliptic Equ.* — 2020. — 65, № 3. — С. 337–367.
18. Kozhevnikova L. M. On solutions of elliptic equations with variable exponents and measure data in  $\mathbb{R}^n$ // В сб.: «Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics». — Cham: Birkhäuser, 2021. — С. 221–239.
19. Kozhevnikova L. M. On solutions of nonlinear elliptic equations with  $L_1$ -data in unbounded domains// *Lobachevskii J. Math.* — 2023. — 44, № 5. — С. 1879–1901.
20. Li Y., Fengping Y., Shulin Zh. Entropy and renormalized solutions to the general nonlinear elliptic equations in Musielak—Orlicz spaces// *Nonlinear Anal. Real World Appl.* — 2021. — 61, № 2. — С. 1–20.
21. Musielak J. Orlicz spaces and modular spaces. — Berlin: Springer, 1983.
22. Talha A., Benkirane A. Strongly nonlinear elliptic boundary value problems in Musielak—Orlicz spaces// *Monatsh. Math.* — 2018. — 186, № 4. — С. 745–776.

Л. М. Кожевникова

Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

Елабужский институт Казанского федерального университета, Елабуга, Россия

E-mail: kosul@mail.ru

UDC 517.956.25

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-278-299

EDN: YKDZHU

## Existence of a Renormalized Solution to a Nonlinear Elliptic Equation with $L_1$ -Data in the Space $\mathbb{R}^n$

L. M. Kozhevnikova

*Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia*  
*Elabuga Institute of Kazan Federal University, Elabuga, Russia*

**Abstract.** We consider a second-order quasilinear elliptic equation with an integrable right-hand side in the space  $\mathbb{R}^n$ . Restrictions on the structure of the equation are formulated in terms of a generalized  $N$ -function. In the nonreflexive Muzilak–Orlicz–Sobolev spaces, the existence of a renormalized solution in the space  $\mathbb{R}^n$  is proved.

**Keywords:** quasilinear equation, elliptic equation, generalized  $N$ -function, Muzilak–Orlicz–Sobolev space, renormalized solution.

**Conflict-of-interest.** The author declares no conflicts of interest.

**Acknowledgments and funding.** The author declares no financial support.

**For citation:** L. M. Kozhevnikova, “Existence of a Renormalized Solution to a Nonlinear Elliptic Equation with  $L_1$ -Data in the Space  $\mathbb{R}^n$ ,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 2, 278–299. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-278-299>

### REFERENCES

1. V. F. Vil'danova and F. Kh. Mukminov, “Entropiynoe reshenie dlya uravneniya s meroznachnym potentsialom v giperbolicheskom prostranstve” [Entropy solution for an equation with measure-valued potential in hyperbolic space], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2023, **214**, No. 11, 37–62 (in Russian).
2. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Lineynye operatory. Obshchaya teoriya* [Linear Operators, Part 1: General Theory], IL, Moscow, 1962 (in Russian).
3. L. M. Kozhevnikova, “Sushchestvovanie entropiynogo resheniya nelineynoy ellipticheskoy zadachi v neogranichennoy oblasti” [Existence of an entropy solution to a nonlinear elliptic problem in an unbounded domain], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 2024, **218**, No. 1, 124–148 (in Russian).
4. L. M. Kozhevnikova, “Entropiynye i renormalizovannye resheniya anizotropnykh ellipticheskikh uravneniy s peremennymi pokazatelyami nelineynostey” [Entropy and renormalized solutions of anisotropic elliptic equations with variable nonlinearity exponents], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2019, **210**, No. 3, 131–161 (in Russian).
5. L. M. Kozhevnikova and A. P. Kashnikova, “Sushchestvovanie resheniy nelineynykh ellipticheskikh uravneniy s dannymi v vide mery v prostranstvakh Muzilaka–Orlicha” [Existence of solutions of nonlinear elliptic equations with measure data in Musielak–Orlicz spaces], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2022, **213**, No. 4, 38–73 (in Russian).
6. T. Ahmdatt, M. S. B. Elemine Vall, A. Benkirane, and A. Touzani, “Existence of renormalized solutions for a nonlinear elliptic equation in Musielak framework and  $L^1$ ,” *An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform.*, 2017, **44**, No. 2, 190–213.
7. Y. Ahmida, I. Chlebicka, P. Gwiazda, and A. Youssfi, “Gossez’s approximation theorems in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces,” *J. Funct. Anal.*, 2018, **275**, No. 9, 2538–2571.



8. M. Ait Khellou and A. Benkirane, “Renormalized solution for nonlinear elliptic problems with lower order terms and  $L^1$  data in Musielak–Orlicz spaces,” *An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform.*, 2016, **43**, No. 2, 164–187.
9. M. Ait Khelloul, S. M. Douiri, and Y. El Hadfi, “Existence of solutions for some nonlinear elliptic equations in Musielak spaces with only the log-Hölder continuity condition,” *Mediterr. J. Math.*, 2020, **17**, No. 1, 1–18.
10. A. Benkirane and M. Sidi El Vally, “An existence result for nonlinear elliptic equations in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces,” *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 2013, **20**, 57–75.
11. A. Benkirane and M. Sidi El Vally, “Variational inequalities in Musielak–Orlicz–Sobolev spaces,” *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin*, 2014, **21**, No. 5, 787–811.
12. I. Chlebicka, “Measure data elliptic problems with generalized Orlicz growth,” *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 2023, **153**, No. 2, 588–618.
13. S. M. Douiri, A. Benkirane, M. Ait Khellou, and Y. El Hadfi, “Nonlinear unilateral problems without sign condition in Musielak spaces,” *Anal. Math. Phys.*, 2021, **11**, No. 2, 66.
14. R. Elarabi, M. Rhoudaf, and H. Sabiki, “Entropy solution for a nonlinear elliptic problem with lower order term in Musielak–Orlicz spaces,” *Ric. Mat.*, 2018, **67**, No. 2, 549–579.
15. M. S. B. Elemine Vall, T. Ahmedatt, A. Touzani, and A. Benkirane, “Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic equations in Musielak framework with  $L^1$  data,” *Bol. Soc. Parana. Mat.*, 2018, **36**, No. 1, 125–150.
16. P. Gwiazda, I. Skrzypczaka, and A. Zatorska-Goldstein, “Existence of renormalized solutions to elliptic equation in Musielak–Orlicz space,” *Differ. Equ.*, 2018, **264**, 341–377.
17. L. M. Kozhevnikova, “On solutions of anisotropic elliptic equations with variable exponent and measure data,” *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2020, **65**, No. 3, 337–367.
18. L. M. Kozhevnikova, “On solutions of elliptic equations with variable exponents and measure data in  $\mathbb{R}^n$ ,” In: *Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics*, Birkhäuser, Cham, 2021, pp. 221–239.
19. L. M. Kozhevnikova, “On solutions of nonlinear elliptic equations with  $L_1$ -data in unbounded domains,” *Lobachevskii J. Math.*, 2023, **44**, No. 5, 1879–1901.
20. Y. Li, Y. Fengping, and Zh. Shulin, “Entropy and renormalized solutions to the general nonlinear elliptic equations in Musielak–Orlicz spaces,” *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2021, **61**, No. 2, 1–20.
21. J. Musielak, *Orlicz Spaces and Modular Spaces*, Springer, Berlin, 1983.
22. A. Talha and A. Benkirane, “Strongly nonlinear elliptic boundary value problems in Musielak–Orlicz spaces,” *Monatsh. Math.*, 2018, **186**, No. 4, 745–776.

L. M. Kozhevnikova

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

Elabuga Institute of Kazan Federal University, Elabuga, Russia

E-mail: kosul@mail.ru

УДК 517.5+519.6+629.195.1

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-300-326

EDN: XNCXFF

## ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ СПУТНИКА ПОД ДЕЙСТВИЕМ СИЛ СВЕТОВОГО ДАВЛЕНИЯ И ГРАВИТАЦИИ

И. И. КОСЕНКО

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

**Аннотация.** Рассматривается относительное движение космического аппарата (КА) под действием моментов сил гравитации и светового давления. Под КА мы подразумеваем небесное тело, способное отражать световой поток от Солнца. Орбитальное движение КА считается известным. КА совершает плоские движения в горизонтальной плоскости относительно центра масс. Отражающее зеркало может быть размещено перпендикулярно плоскости орбиты.

Основная задача, решаемая в работе — это исследование устойчивости эксцентриситетных колебаний. Данная технология разворачивается постепенно. Сначала устанавливается существование колебаний заданного типа. Здесь штатным образом применяется теорема о неявной функции. Последующий затем анализ устойчивости опирается на линейную теорию и сводится к рассмотрению систем в вариациях. Завершает работу рассмотрение нелинейного случая.

**Ключевые слова:** эксцентриситетные колебания, устойчивость колебаний, возмущение с малым параметром, световое давление, орбита спутника.

**Заявление о конфликте интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Благодарности и финансирование.** Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

**Для цитирования:** И. И. Косенко. Вынужденные колебания спутника под действием сил светового давления и гравитации // Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. 70, № 2. С. 300–326. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-300-326>

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Следуя работам [3, 4, 18], будем исходить из уравнения плоских колебаний спутника на эллиптической орбите, представленного в форме

$$\ddot{\delta} = c f(\delta) - \mu(1 + e \cos \nu(t))^3 \sin(\delta - 2\nu(t) + 2\varphi), \quad (1.1)$$

где конфигурационная переменная  $\delta = 2\theta - 2\varphi$ ,  $\theta$  — угол между направлением на перицентр орбиты спутника и одной из его главных центральных осей инерции (рис. 1),  $\varphi$  — азимут источника светового потока (Солнца) относительно перицентра орбиты,  $e$  — эксцентриситет орбиты,  $c$  — постоянная, характеризующая отражающую/поглощающую характеристику внешней поверхности спутника, функция  $f(\delta)$  задает момент сил светового давления:

$$f(\delta) = \begin{cases} 1 - \cos \delta & \text{при } \sin \frac{\delta}{2} \geq 0, \\ -1 + \cos \delta & \text{при } \sin \frac{\delta}{2} < 0, \end{cases}$$

где  $\mu$  — параметр динамической асимметрии спутника,  $\nu(t)$  — истинная аномалия (известная функция времени).

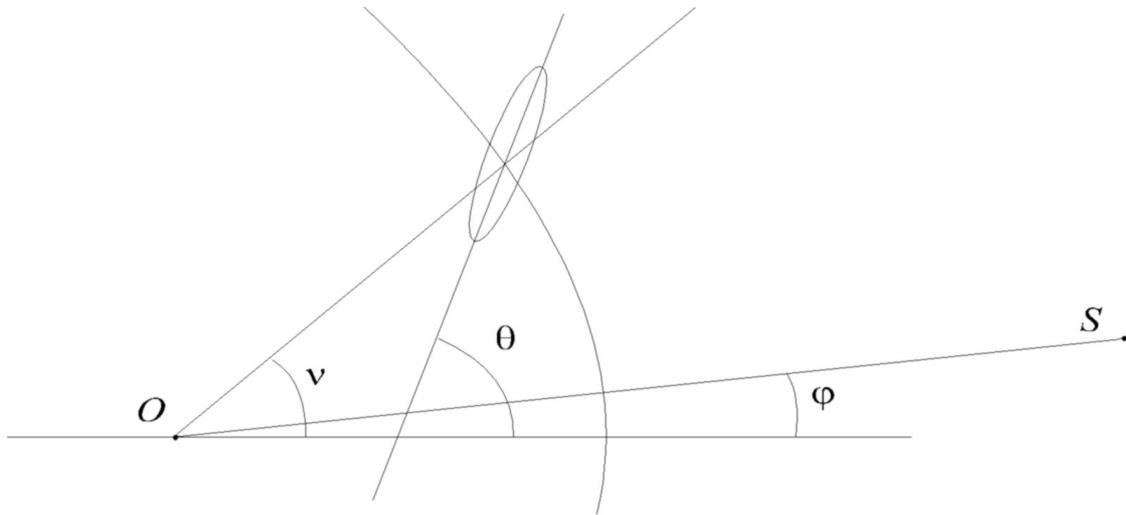


Рис. 1. Расположение спутника на орбите.

Уравнение вращательного движения (1.1) «обезразмерено» так что фокальный параметр орбиты и гравитационная постоянная оказались равными единице.

Как и в работе [18], здесь мы рассматриваем динамику вращательного движения спутника в рамках теории возмущений с малым параметром  $\mu \ll 1$ . Это означает, что спутник с динамической точки зрения представляет собой почти цилиндрическое тело, что естественно для большинства запускаемых на орбиту объектов.

Нетрудно проверить также, что в пределе, когда излучение отсутствует, мы получим известное уравнение Белецкого [1]. Что касается модели солнечного света, то здесь мы будем использовать, как и ранее, модели Карымова [2].

С учетом выбора размерных величин укажем полезные в дальнейшем выражения

$$a = \frac{1}{1 - e^2}, \quad T = 2\pi a^{3/2}.$$

для большой полуоси кеплеровой орбиты  $a$  и периода орбитального движения  $T$ . Параметры  $s, e, \varphi$  в общем случае малыми не являются. Параметр  $e$ , кроме того, считается не слишком близким к своему предельному значению  $e = 1$ , соответствующему случаю параболической орбиты.

Истинная аномалия удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\dot{\nu} = (1 + e \cos \nu)^2, \tag{1.2}$$

так что система обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ) (1.1) и (1.2) является замкнутой относительно фазовых переменных  $\delta, \dot{\delta}, \nu$ .

Фазовое пространство исходной, невозмущенной при  $\mu = 0$ , задачи (1.1) представляет собой цилиндр с конфигурационной координатой  $\delta \pmod{4\pi}$ . При  $\mu = 0$  рассматриваемая механическая система имеет два положения равновесия:  $\delta = 0 \pmod{4\pi}$ ,  $\delta = 2\pi \pmod{4\pi}$ . Первое соответствует ориентации «отражающего зеркала» спутника вдоль солнечного ветра на источник света. Эта ориентация неустойчива в невозмущенной задаче, и при малых возмущениях начальных данных зеркало подобно маятнику в поле силы тяжести начинает совершать либо вращения вокруг оси, перпендикулярной плоскости орбиты, либо либрации относительно другой, устойчивой ориентации (от источника света).

Нашей целью является исследование динамики либрационного возмущенного движения спутника в малой окрестности положения устойчивого равновесия  $\delta = 2\pi$  при  $\mu > 0$ . Вечная сохраняемость «больших» квазипериодических колебаний была установлена в работе [18]. Однако с практической точки зрения было бы желательно избежать больших (хотя и устойчивых) разворотов аппарата с отражающим зеркалом, что может приводить к нежелательным колебательным

процессам в его упругих компонентах. Устойчивость малых эксцентриситетных колебаний означает возможность «остронаправленной» ориентации аппарата, почти неподвижно «зависающего» в потоке солнечного ветра несмотря на наличие «раскачивающего» гравитационного момента от планеты.

## 2. СУЩЕСТВОВАНИЕ ВЫНУЖДЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ

Вместо переменной  $\delta$  будем рассматривать в качестве конфигурационной координаты локальную переменную  $x = \delta - 2\pi$  отклонения от исследуемого положения равновесия. Тогда вместо (1.1) для описания динамики можно использовать следующее ОДУ:

$$\ddot{x} = -c \operatorname{sgn}(x)(1 - \cos x) - \mu(1 + e \cos \nu(t))^3 \sin(x - 2\nu(t) + 2\varphi). \quad (2.1)$$

Теперь для оценки вклада различных возмущений проведем масштабирование переменной  $x \mapsto y$  по формуле

$$x = \mu y, \quad (2.2)$$

после чего уравнение (2.1) трансформируется к виду

$$\ddot{y} = -\frac{c}{\mu} \operatorname{sgn}(y)(1 - \cos \mu y) - (1 + e \cos \nu(t))^3 \sin(\mu y - 2\nu(t) + 2\varphi). \quad (2.3)$$

Дальнейшая методика построения вынужденных колебаний частично заимствована из [9], где, в отличие от данного случая, рассмотрен случай аналитической правой части. При  $\mu = 0$  уравнение (2.3) принимает вид

$$\ddot{y} = Y_0(t), \quad Y_0(t) = (1 + e \cos \nu(t))^3 \sin(2\nu(t) - 2\varphi), \quad (2.4)$$

При малых значениях  $\mu$  уравнение (2.3) записывается как

$$\ddot{y} = Y_0(t) + \mu Y_1(t, y, \mu) = Y(t, y, \mu), \quad (2.5)$$

$$Y_1(t, y, \mu) = -\frac{1}{\mu} a(\nu(t)) \sin \mu y - \frac{1}{\mu} \left[ b(\nu(t)) + \frac{c}{\mu} \operatorname{sgn}(y) \right] (1 - \cos \mu y), \quad (2.6)$$

$$a(\nu) = (1 + e \cos \nu)^3 \cos(2\nu - 2\varphi), \quad b(\nu) = (1 + e \cos \nu)^3 \sin(2\nu - 2\varphi).$$

Функция  $Y_1(t, y, \mu)$  аналитична по переменным  $t, \mu$ , но лишь один раз непрерывно дифференцируема по переменной  $y$ . Полученные разложения имеют место потому, что функции

$$\alpha \mapsto \frac{\sin \alpha}{\alpha}, \quad \alpha \mapsto \frac{\cos \alpha - 1}{\alpha}, \quad \alpha \mapsto \frac{\cos \alpha - 1}{\alpha^2}$$

равномерно ограничены при всех  $\alpha \in \mathbb{R}$  и регулярны при  $\alpha \neq 0$ .

Из уравнения (2.5) видно, что член  $Y_0(t)$  задает главный гравитационный вклад в вынужденные эксцентриситетные колебания. Кроме того, из (2.2) следует, что при  $\mu \rightarrow 0$  эти колебания вырождаются в положения равновесия невозмущенной задачи.

Среднее значение функции  $Y_0(t) = b(\nu(t))$  на отрезке  $t \in [0, T]$ , соответствующем орбитальному периоду, равно нулю. В самом деле, в силу (1.2) периодическая первообразная от  $Y_0(t)$  имеет вид

$$\begin{aligned} c_1(\nu(t)) &= \int Y_0(t) dt = \int (1 + e \cos \nu(t))^3 \sin(2\nu(t) - 2\varphi) dt = \\ &= \int (1 + e \cos \nu) \sin(2\nu - 2\varphi) d\nu = \\ &= -\frac{1}{2} \cos(2\nu(t) - 2\varphi) - \frac{e}{6} \cos(3\nu(t) - 2\varphi) - \frac{e}{2} \cos(\nu(t) - 2\varphi). \end{aligned} \quad (2.7)$$

Обозначим через

$$[c_1] = \frac{1}{T} \int_0^T c_1(\nu(t)) dt = \frac{1}{T} \int_0^{2\pi} \frac{c_1(\nu)}{(1 + e \cos \nu)^2} d\nu$$

среднее значение функции (2.7) и центрируем эту функцию с помощью

$$c_1^0(\nu(t)) = c_1(\nu(t)) - [c_1].$$

Введем также обозначение для второй первообразной

$$c_0(\nu(t)) = \int_0^{\nu(t)} \frac{c_1^0(\sigma)}{(1 + e \cos \sigma)^2} d\sigma$$

и так же центрируем ее по  $t$ :

$$c_0^0(\nu(t)) = c_0(\nu(t)) - [c_0].$$

Таким образом, периодическая функция

$$y^0(\nu(t)) = c_0^0(\nu(t)) + \eta \tag{2.8}$$

является решением уравнения (2.4), и она задает главную часть искомого вынужденного колебания. Постоянная  $\eta$  произвольна и подлежит дальнейшему уточнению.

Решение  $y(t)$  уравнения (2.5) является периодическим тогда и только тогда, когда выполняются условия периодичности

$$\int_0^T \dot{y}(t) dt = 0, \quad \int_0^T Y(t, y(t), \mu) dt = 0. \tag{2.9}$$

В силу того, что функция  $Y_0(t)$  имеет нулевое среднее, второе из условий (2.9) можно переписать в виде

$$\int_0^T Y_1(t, y(t), \mu) dt = 0.$$

Из общих теорем теории ОДУ [10] следует, что общее решение  $y(t, y_0, \dot{y}_0, \mu)$  уравнения (2.5) непрерывно дифференцируемо по начальным условиям  $y_0, \dot{y}_0$  и параметру  $\mu$ .

Введем обозначения

$$f(y_0, \dot{y}_0, \mu) = [\dot{y}], \quad g(y_0, \dot{y}_0, \mu) = [Y_1] \tag{2.10}$$

и перепишем систему уравнений (2.9) в виде

$$f(y_0, \dot{y}_0, \mu) = 0, \quad g(y_0, \dot{y}_0, \mu) = 0. \tag{2.11}$$

Функции  $f$  и  $g$  непрерывно дифференцируемы по своим аргументам. В пределе при  $\mu = 0$  в силу вышеприведенного анализа получим

$$f(y_0, \dot{y}_0, 0) = \dot{y}_0 + [c_1], \quad g(y_0, \dot{y}_0, 0) = \frac{1}{T} \int_0^T Y_1(t, y(t), 0) dt.$$

С другой стороны,

$$y(t, y_0, \dot{y}_0, 0) = y_0 + [c_0] + (\dot{y}_0 + [c_1])t + c_0^0(\nu(t)). \tag{2.12}$$

Это равенство при выполнении первого из (2.9) условия периодичности совпадет с (2.8), если положить  $\eta = y_0 + [c_0]$ . Так что второе условие периодичности из (2.10) при  $\mu = 0$  можно записать в виде соотношения

$$\int_0^T Y_1(t, \eta + c_0^0(\nu(t)), 0) dt = 0, \tag{2.13}$$

которое можно рассматривать в качестве уравнения относительно величины  $\eta$ .

Если  $\eta = \eta_*$  является решением уравнения (2.13), то начальные данные  $y_0 = \eta_* - [c_0], \dot{y}_0 = -[c_1]$  будут соответствовать порождающему решению (2.8) и при  $\mu = 0$  удовлетворять системе уравнений (2.11). Как известно [12], эта система будет задавать величины  $y_0(\mu), \dot{y}_0(\mu)$  в виде однозначных непрерывных функций параметра  $\mu$  в окрестности нуля, если выполнено условие

$$\left| \frac{\partial(f, g)}{\partial(y_0, \dot{y}_0)} \right|_{\mu=0} \neq 0 \tag{2.14}$$

невыврожденности из соответствующей теоремы о неявной функции для системы (2.11). Условие следует проверять при  $\mu = 0$ .

Выполним проверку условия (2.14). Используя выражения (2.10) и дифференцируя сложные функции по  $y_0, \dot{y}_0$  под знаком соответствующих интегралов, получим

$$\left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(y_0, \dot{y}_0)} \right|_{\mu=0} = \int_0^T \left. \frac{\partial(\dot{y}, Y_1)}{\partial(y_0, \dot{y}_0)} \right|_{\mu=0} dt = \int_0^T \left. \frac{\partial(\dot{y}, Y_1)}{\partial(y, \dot{y})} \right|_{\mu=0} \left. \frac{\partial(y, \dot{y})}{\partial(y_0, \dot{y}_0)} \right|_{\mu=0} dt. \quad (2.15)$$

Прямые вычисления показывают

$$\left. \frac{\partial(\dot{y}, Y_1)}{\partial(y, \dot{y})} \right|_{\mu=0} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \left. \frac{\partial Y_1}{\partial y} \right|_{\mu=0} & 0 \end{pmatrix}, \quad \left. \frac{\partial(y, \dot{y})}{\partial(y_0, \dot{y}_0)} \right|_{\mu=0} = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.16)$$

Поэтому

$$\left| \left. \frac{\partial(f, g)}{\partial(y_0, \dot{y}_0)} \right|_{\mu=0} \right| = - \int_0^T \frac{\partial Y_1}{\partial y}(t, y_0 + [c_0] + c_0^0(\nu(t)), 0) dt, \quad (2.17)$$

и условие невырожденности можно записать в виде

$$\int_0^T \frac{\partial Y_1}{\partial y}(t, \eta + c_0^0(\nu(t)), 0) dt \neq 0. \quad (2.18)$$

Запишем уравнение (2.13) в более компактной форме

$$\psi(\eta) = 0, \quad (2.19)$$

где

$$\begin{aligned} \psi(\eta) &= - \int_0^T Y_1(t, \eta + c_0^0(\nu(t)), 0) dt = B + \frac{c}{2} \int_0^T \operatorname{sgn}(\eta + c_0^0(\nu(t))) (\eta + c_0^0(\nu(t)))^2 dt, \\ B &= \int_0^T a(\nu(t)) c_0^0(\nu(t)) dt. \end{aligned}$$

Условие (2.18) после преобразований принимает вид

$$\left. \frac{d\psi}{d\eta} \right|_{\eta=\eta_*} = c \int_0^T |\eta + c_0^0(\nu(t))| dt \neq 0. \quad (2.20)$$

Ясно, что при  $\eta \rightarrow \pm\infty$  функция  $\psi(\eta) \rightarrow \pm\infty$  финально монотонна. Пусть для определенности это свойство выполняется вне достаточно большого отрезка  $\eta \in [-A, A]$ . Однако в пределах самого этого отрезка в силу формулы (2.20) и того, что функция  $c_0^0(\nu(t))$  не является тождественной константой, величина  $d\psi/d\eta$  всегда строго положительна. Кроме того, она непрерывна по переменной  $\eta$ , т. к. подынтегральная функция в (2.20) непрерывна по своим аргументам.

Поэтому на отрезке  $[-A, A]$  функция  $d\psi/d\eta$  строго положительна и существует такое положительное  $\alpha > 0$ , что

$$\frac{d\psi}{d\eta} \geq \alpha > 0, \quad \eta \in [-A, A].$$

Отсюда следует, что функция  $\psi(\eta)$  строго монотонно растет не только вне отрезка  $[-A, A]$ , но и внутри него. Поэтому  $\psi(\eta)$  строго монотонна при любых  $\eta \in \mathbb{R}$ . В итоге мы доказали следующее утверждение.

**Теорема 2.1.** *При любых фиксированных значениях параметров задачи  $c > 0$ ,  $0 \leq e < 1$ ,  $0 \leq \varphi < 2\pi$  существует такое достаточно малое  $\mu_0 > 0$ , что при  $|\mu| \leq \mu_0$  существует единственное периодическое вынужденное колебание  $x(t, \mu)$  спутника, стремящееся равномерно при  $\mu \rightarrow 0$  к положению равновесия  $x = 0$ .*

**Замечание 2.1.** Если дополнительно отделить значение эксцентриситета от его предела 1:  $0 \leq e \leq 1 - \varepsilon$  (где  $\varepsilon$  — некоторая малая положительная величина), то амплитуда колебаний функции  $c_0(\nu(t))$  и ее среднее значение  $[c_0]$  могут быть равномерно оценены сверху. Кроме того, функция  $Y_1(t, y, \mu)$  и ее производная

$$\frac{\partial Y_1}{\partial y}(t, y, \mu) = -a(\nu(t)) \cos \mu y - \left( b(\nu(t)) + \frac{c}{\mu} \operatorname{sgn}(y) \right) \sin \mu y, \quad (2.21)$$

используемые в условиях периодичности, сходятся при  $\mu \rightarrow 0$  к своим пределам равномерно по параметрам и по переменной  $y$ , ограниченной некоторой фиксированной константой (порядка амплитуды  $c_0^0(\nu(t))$ ).

**Замечание 2.2.** Решение задачи Коши для (2.5) на отрезке  $[0, T]$  зависит от  $y_0, \dot{y}_0, \mu$  равномерно непрерывно по упомянутым параметрам. Из всего вышесказанного следует, что равномерно по параметрам можно получить требуемые оценки в теореме о неявной функции и найти единое для всех допустимых значений параметров  $c, e, \varphi$  значение  $\mu_0$  такое, что при  $|\mu| \leq \mu_0$  будет существовать единственное периодическое решение  $x(t, \mu) = \mu y(t, \mu)$ , переходящее при  $\mu \rightarrow 0$  в положение равновесия  $x = 0$ .

### 3. ЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

Рассматривается устойчивость найденного выше периодического решения уравнения (2.5), существующего и единственного для достаточно малых  $\mu > 0$ . Исследование устойчивости в смысле Ляпунова будем проводить по отношению к масштабированным переменным  $y, \dot{y}$ , поведение которых задается дифференциальным уравнением (2.5).

В силу уже упоминавшейся выше теоремы теории ОДУ общее решение уравнения (2.5) непрерывно дифференцируемо по начальным данным  $y_0, \dot{y}_0$  и параметру  $\mu$ . Более того, проведенный в предыдущем разделе анализ разрешимости условий периодичности (2.11) показывает, что неявные функции  $y_0(\mu), \dot{y}_0(\mu)$  — решения системы (2.11) — по крайней мере в окрестности значения  $\mu = 0$ , в которой выполняются условия невырожденности, являются функциями, непрерывно дифференцируемыми по  $\mu$  (см. [12]).

Для унификации дальнейшего изложения перейдем от уравнения (2.5) к системе Гамильтона второго порядка вида

$$\dot{\mathbf{z}} = I H_{\mathbf{z}}(t, \mathbf{z}, \mu) \quad (\mathbf{z} \in \mathbb{R}^2), \quad (3.1)$$

где  $z_1 = y, z_2 = \dot{y}, I$  — симплектическая матрица второго порядка, а функция Гамильтона имеет вид

$$H(t, \mathbf{z}, \mu) = \frac{1}{2} z_2^2 - \int Y(t, z_1, \mu) dz_1$$

и может быть разложена на невозмущенную и возмущающую части в виде

$$H(t, \mathbf{z}, \mu) = H_0(t, \mathbf{z}) + \mu H_1(t, \mathbf{z}, \mu)$$

так, что слагаемые следует представить в форме

$$H_0(t, \mathbf{z}) = \frac{1}{2} z_2^2 - b(\nu(t)) z_1, \quad H_1(t, \mathbf{z}, \mu) = - \int Y(t, z_1, \mu) dz_1.$$

Функция  $H_0$  аналитична по своим аргументам, а  $H_1$  аналитична по  $t, \mu$  и дважды непрерывно дифференцируема по  $z_1$ . Общее решение невозмущенной гамильтоновой системы (при  $\mu = 0$ ) имеет вид (2.12).

Исследуемые вынужденные (эксцентриситетные) колебания спутника задаются периодическим решением  $\mathbf{z} = \mathbf{z}^*(t, \mu)$  системы (3.1), имеющим при  $\mu = 0$  в качестве порождающего решение

$$z_1^*(t, 0) = \eta_* + c_0^0(\nu(t)), \quad z_2^*(t, 0) = c_1^0(\nu(t)). \quad (3.2)$$

При  $\mu = 0$  это решение невозмущенной задачи является неустойчивым. Однако вся порождающая задача вследствие соотношения (2.2) соответствует только одному решению  $x = 0$  исходной задачи (2.1) о колебаниях спутника. Это решение, как можно видеть из (2.1), устойчиво при  $\mu = 0$ . При  $\mu > 0$  решения уравнений (2.1), (2.3), (3.1) однозначно соответствуют друг другу, и задача об устойчивости построенного периодического решения приобретает механический смысл. Вне пределов малой окрестности, но все еще при малых  $\mu$ , действует результат работы [18] о сохранении

колебаний невозмущенной задачи и устойчивости невозмущенных движений вне пределов упомянутой окрестности, размер которой на самом деле убывает вместе с  $\mu \rightarrow 0$ .

Представим далее систему (3.1) в виде

$$\dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Z}(t, \mathbf{z}, \mu) \quad (3.3)$$

и перейдем в (3.3) к переменной  $\Delta \mathbf{z} = \mathbf{z} - \mathbf{z}^*(t, \mu)$  — отклонению от найденного периодического решения. Эта векторная переменная удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\Delta \dot{\mathbf{z}} = \mathbf{Z}(t, \mathbf{z}^*(t, \mu) + \Delta \mathbf{z}, \mu) - \mathbf{Z}(t, \mathbf{z}^*(t, \mu), \mu). \quad (3.4)$$

Вследствие непрерывной дифференцируемости функции  $\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}, \mu)$  по переменной  $\mathbf{z}$  по теореме Лагранжа при  $0 \leq \theta \leq 1$  имеем

$$\mathbf{Z}(t, \mathbf{z}^*(t, \mu) + \Delta \mathbf{z}, \mu) - \mathbf{Z}(t, \mathbf{z}^*(t, \mu), \mu) = \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{z}}(t, \mathbf{z}^*(t, \mu) + \theta \Delta \mathbf{z}, \mu) \Delta \mathbf{z},$$

и уравнение (3.4) можно представить в виде

$$\Delta \dot{\mathbf{z}} = A(t, \mu) \Delta \mathbf{z} + B(t, \Delta \mathbf{z}, \mu) \Delta \mathbf{z}, \quad (3.5)$$

$$A(t, \mu) = \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{z}}(t, \mathbf{z}^*(t, \mu), \mu), \quad B(t, \Delta \mathbf{z}, \mu) = \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{z}}(t, \mathbf{z}^*(t, \mu) + \theta \Delta \mathbf{z}, \mu) - \frac{\partial \mathbf{Z}}{\partial \mathbf{z}}(t, \mathbf{z}^*(t, \mu), \mu).$$

Отсюда видно, что при  $\Delta \mathbf{z} \rightarrow \mathbf{0}$  матрица  $B(t, \Delta \mathbf{z}, \mu) \rightarrow 0$  равномерно по  $t$  (а также и параметрам  $\mu, c, \varphi, e$ ). Поэтому в (3.5) второй член имеет более высокий порядок малости по сравнению с первым, и к (3.5) можно применять теоремы об устойчивости нулевого решения периодической по  $t$  системы по первому приближению [5].

Рассмотрим теперь вместо (3.5) линейную систему в вариациях

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = A(t, \mu) \boldsymbol{\xi} \quad (3.6)$$

и исследуем ее устойчивость.

Как и система (3.1), система (3.6) является гамильтоновой. Для исследования ее устойчивости достаточно [17] вычислить ее мультипликаторы  $\rho_1, \rho_2$ . В рассматриваемом случае характеристическое уравнение имеет вид

$$\rho^2 - 2\alpha\rho + 1 = 0, \quad (3.7)$$

где величина  $\alpha = \text{Tr } \Xi(T)/2$  определяет устойчивость/неустойчивость решений системы (3.6). Матрицант  $\Xi(t)$  системы (3.6) имеет вид

$$\Xi(t) = \begin{pmatrix} \xi_1^1(t) & \xi_1^2(t) \\ \xi_2^1(t) & \xi_2^2(t) \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}^1(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \boldsymbol{\xi}^2(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Из общей теории [17] известно, что мультипликаторы могут либо находиться на единичной окружности комплексной плоскости ( $|\alpha| < 1$ ), либо на вещественной прямой ( $|\alpha| > 1$ ), либо быть кратными:  $\rho_1 = \rho_2 = \pm 1$  ( $|\alpha| = 1$ ). Нас интересует анализ устойчивости при малых  $\mu \neq 0$ .

Матрица  $A(t, \mu)$  в правой части (3.6) имеет вид

$$A(t, \mu) = IH_{zz}(t, \mathbf{z}^*(t, \mu), \mu) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \mu \frac{\partial Y_1}{\partial z_1}(t, \mathbf{z}^*(t, \mu), \mu) & 0 \end{pmatrix}, \quad (3.8)$$

причем выражение для  $\partial Y_1 / \partial z_1$  задается при помощи формулы (2.21). При  $\mu = 0$  система (3.6) записывается как

$$\begin{pmatrix} \dot{\xi}_1 \\ \dot{\xi}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix},$$

что соответствует случаю кратного нулевого характеристического показателя и кратного единичного мультипликатора. Матрицант в этом случае имеет вид

$$\Xi(t, 0) = \begin{pmatrix} 1 & t \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

откуда  $\alpha(0) = 1$ . При  $\mu > 0$  возможны два варианта деформации матрицанта: либо  $\alpha(\mu) > 1$ , и тогда кратный мультипликатор распадается на два вещественных (гиперболический случай); либо  $\alpha(\mu) < 1$ , и тогда появляются два комплексно сопряженных мультипликатора на единичной окружности (эллиптический случай).

Чтобы выяснить, какой из этих вариантов имеет место, вычислим производную  $d\alpha/d\mu$  при  $\mu = 0$ . Для этого достаточно подсчитать производную от матрицанта  $\partial\Xi/\partial\mu$  при  $\mu = 0$ . Сам матрицант составляется из столбцов координат фундаментальных решений. Так что на самом деле нужно вычислить производную по  $\mu$  от фиксированного базисного решения  $\xi = \xi^i(t, \mu)$  ( $i = 1, 2$ ) при  $\mu = 0$ . Подставляя такое решение в (3.6) и дифференцируя по  $\mu$  обе стороны (3.6), получаем уравнение для производных по  $\mu$  от фундаментальных решений в виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial \xi^i}{\partial \mu} \right) = A(t, \mu) \left( \frac{\partial \xi^i}{\partial \mu} \right) + \frac{\partial A}{\partial \mu}(t, \mu) \xi^i(t, \mu). \quad (3.9)$$

Начальные условия для этой системы уравнений следует брать нулевыми

$$\frac{\partial \xi^i}{\partial \mu}(0, \mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Остановимся более подробно на проблеме корректности вывода уравнения (3.9). Из формулы (2.21) следует, что производная по  $\mu$  матрицы  $A(t, \mu)$  — функция, кусочно-непрерывная по  $t$ . Как будет видно позднее, в общем положении изучаемое периодическое решение имеет не более четырех участков непрерывности. В самом деле, из (2.21) видно, что регулярность при дифференцировании  $A(t, \mu)$  по  $\mu$  может нарушиться только из-за члена  $c\mu^{-1} \operatorname{sgn} y \sin \mu y$ , который вследствие малости  $\mu$  и ограниченности  $z_1^*(t, \mu)$  удобно представить в виде

$$\frac{c}{\mu} \operatorname{sgn}(z_1^*(t, \mu)) \sin(\mu z_1^*(t, \mu)) = c \left| \frac{\sin(\mu z_1^*(t, \mu))}{\mu} \right|.$$

Так что, если  $z_1^*(t, \mu) > 0$ , то производная по  $\mu$  от исследуемого выражения при проходе точки нарушения регулярности, соответствующей условию  $z_1^*(t, \mu) = 0$ , будет менять знак на противоположный. Получим в худшем случае разрывы первого рода по  $t$ . Если же учесть, что эта производная домножается в матрице  $\partial A/\partial \mu$  на множитель  $\mu$ , то при  $\mu \rightarrow 0$  возможные разрывы этой матричной функции исчезнут.

Действуя более формально, применим здесь известный результат [14], справедливый для систем ОДУ, удовлетворяющих условиям Каратеодори. Наша задача состоит в том, чтобы доказать дифференцируемость решения задачи Коши для линейной системы ОДУ (3.6) по параметру  $\mu$  при фиксированных начальных условиях. Дифференцируемость по  $\mu$  будем проверять для значения  $\mu = 0$ .

Обозначим, как и выше, символом  $\xi(t, \mu)$  решение (3.6) при фиксированном начальном условии  $\xi(0, \mu) = \xi_0$ . Составим векторную функцию — конечную разность по параметру  $\mu$  в виде

$$\zeta(t, \mu) = \frac{\xi(t, \mu) - \xi(t, 0)}{\mu}.$$

Эта функция удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$\frac{d}{dt} \zeta(t, \mu) = A(t, 0) \zeta(t, \mu) + C(t, \mu) \xi(t, \mu), \quad (3.10)$$

где матрица  $C(t, \mu)$  составляет конечную разность по параметру  $\mu$  для матрицы  $A(t, \mu)$

$$C(t, \mu) = \frac{A(t, \mu) - A(t, 0)}{\mu}.$$

При  $\mu \rightarrow 0$  система (3.10) стремится к предельной системе

$$\frac{d}{dt} \zeta(t, 0) = A(t, 0) \zeta(t, 0) + \frac{\partial A}{\partial \mu}(t, 0) \xi(t, 0) \quad (3.11)$$

относительно неизвестной функции  $\zeta(t, 0)$ . Задачи Коши для (3.10) и (3.11) имеют, очевидно, нулевые начальные данные

$$\zeta(0, \mu) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Система (3.11) при  $\mu = 0$  совпадает с системой (3.9). В силу (3.8) матрица  $C(t, \mu)$  имеет только один ненулевой элемент  $c_{21}(t, \mu) = \mu\gamma(t, \mu)$ , где, как уже было замечено выше, функция  $\gamma(t, \mu)$  является кусочно-дифференцируемой и ограниченной.

Чтобы применить упомянутый выше результат [14] о равномерном по  $t$  пределе для решений  $\zeta(t, \mu) \rightarrow \zeta(t, 0)$  при  $\mu \rightarrow 0$ , необходимо проверить свойства функций

$$B(t, \mu) = \int_0^t A(\tau, 0) d\tau, \quad \mathbf{g}(t, \mu) = \int_0^t C(\tau, \mu) \boldsymbol{\xi}(\tau, \mu) d\tau.$$

Матричная функция  $B(t, \mu)$  является по  $t$  достаточно регулярной, а от  $\mu$  вообще не зависит. Рассмотрим вектор-функцию  $g(t, \mu)$  и оценим разность

$$\begin{aligned} \|\mathbf{g}(t, \mu) - \mathbf{g}(t, 0)\| &\leq \int_0^t \left\| \frac{A(\tau, \mu) - A(\tau, 0)}{\mu} \boldsymbol{\xi}(\tau, \mu) - \frac{\partial A}{\partial \mu}(\tau, 0) \boldsymbol{\xi}(\tau, 0) \right\| d\tau = \\ &= \int_0^t |\gamma(\tau, \mu) \xi_1(\tau, \mu) - \gamma(\tau, 0) \xi_1(\tau, 0)| d\tau. \end{aligned}$$

Подынтегральная функция здесь является непрерывной, ограниченной и сходящейся к нулю поточечно при  $\mu \rightarrow 0$ . Поэтому по известной теореме Лебега о переходе к пределу под знаком интеграла [15] вся оцениваемая разность также стремится к нулю. Причем, т. к. при любом  $t \in [0, T]$  указанная разность не превосходит соответствующего интеграла на отрезке  $[0, T]$ , то предельный переход  $\mathbf{g}(t, \mu) \rightarrow \mathbf{g}(t, 0)$  при  $\mu \rightarrow 0$  является равномерным по  $t \in [0, T]$ . Все условия теоремы А. Ф. Филиппова [14] выполнены.

Применяя теперь эту теорему, получаем, что  $\zeta(t, \mu) \rightarrow \zeta(t, 0)$  при  $\mu \rightarrow 0$  равномерно по  $t \in [0, T]$ . С другой стороны,

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \zeta(t, \mu) = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mu}(t, 0).$$

Поэтому решения задачи Коши для уравнения (3.6) являются дифференцируемыми по  $\mu$  при  $\mu = 0$ .

Положим теперь  $\mu = 0$  в уравнении (3.9) и найдем искомое приращение элементов матрицанта. Поскольку при  $\mu = 0$  справедливы соотношения

$$A(t, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial A}{\partial \mu}(t, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ \gamma(t, 0) & 0 \end{pmatrix},$$

где  $\gamma(t, 0) = -a(\nu(t)) - c|z_1^*(t, 0)|$ , то, обозначая неизвестную функцию символом

$$\zeta(t) = \frac{\partial \boldsymbol{\xi}}{\partial \mu}(t, 0),$$

получим для двух фундаментальных решений две задачи Коши

$$\ddot{\zeta}_i^i = \gamma(t, 0) \xi_1^i(t, 0), \quad \zeta_1^i(0) = \dot{\zeta}_1^i(0) = 0 \quad (i = 1, 2),$$

При этом функции правых частей в этих ОДУ второго порядка имеют вид

$$\xi_1^1(t, 0) \equiv 1, \quad \xi_1^2(t, 0) \equiv t.$$

Таким образом, для производных диагональных элементов матрицанта имеем выражения

$$\begin{aligned} \zeta_1^1(t) &= \int_0^t d\tau \int_0^\tau \gamma(\sigma, 0) d\sigma = t \int_0^t \gamma(\tau, 0) d\tau - \int_0^t \tau \gamma(\tau, 0) d\tau, \\ \zeta_2^2(t) &= \int_0^t \tau \gamma(\tau, 0) d\tau, \end{aligned}$$

из которых следует искомая производная

$$\frac{d\alpha}{d\mu}(0) = \frac{1}{2} (\zeta_1^1(T) + \zeta_2^2(T)) = \frac{T}{2} \int_0^T \gamma(t, 0) dt.$$

Но аналогично тому, как это было сделано выше для функции  $b(\nu(t))$ , можно убедиться, что для функции  $a(\nu(t))$  среднее равно нулю. Поэтому

$$\frac{d\alpha}{d\mu}(0) = -\frac{cT}{2} \int_0^T |z_1^*(t, 0)| dt = -\alpha_1 < 0,$$

что означает, что при малых  $\mu > 0$  величина  $\alpha(\mu)$  всегда удовлетворяет условию  $0 < \alpha(\mu) < 1$ , отвечающему эллиптическому случаю пары чисто мнимых характеристических показателей. Таким образом, мы убедились, что имеет место следующий результат.

**Теорема 3.1.** *Эксцентриситетные колебания спутника с солнечным зеркалом под действием гравитационного возмущения всегда устойчивы в первом приближении.*

#### 4. РЕДУКЦИЯ В ОКРЕСТНОСТИ ПЕРИОДИЧЕСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Нелинейный анализ устойчивости найденного периодического решения в значительной степени затруднен недостаточной регулярностью по переменной  $y$  в правой части дифференциального уравнения движения (2.3). Однако в нашем случае анализ показывает, что по крайней мере в обратимом симметричном случае, когда  $\varphi = 0$ , и даже достаточно далеко от него траектория вынужденных колебаний описывает на фазовой плоскости переменных  $y, \dot{y}$  замкнутую кривую, которая при изменении переменной  $\nu \in [0, 2\pi]$  дважды обходит начало координат (рис. 2), четыре раза трансверсально пересекая прямую  $y = 0$  нарушения регулярности правой части. Это обстоятельство обеспечивает возможность анализировать динамику задачи в малой окрестности исследуемого периодического движения. При этом роль «времени» будет играть новая быстрая переменная  $u$ , характеризующая полярный угол изображающей точки на фазовой плоскости (рис. 2). Тогда «моментам» пересечения множества нерегулярности будут в точности соответствовать значения  $u = 0, \pi, 2\pi, 3\pi, 4\pi$ , а в интервалах между этими значениями динамическая система аналитична.

В предыдущем разделе было вычислено только начальное («нулевое») приближение (2.8) к искомому вынужденному колебанию

$$\begin{pmatrix} y(t, \mu) \\ \dot{y}(t, \mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y^0(\nu(t)) \\ c_1^0(\nu(t)) \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y^1(t, \mu) \\ \dot{y}^1(t, \mu) \end{pmatrix}. \tag{4.1}$$

Справедливость формулы (4.1) также следует из теоремы о неявной функции для системы уравнений (2.11). В силу этой формулы начальные данные  $y_0(\mu), \dot{y}_0(\mu)$ , отвечающие периодическому решению, дифференцируемы по  $\mu$  при  $\mu = 0$ , т. е.

$$y_0(\mu) = y_0(0) + \mu\alpha(\mu), \quad \dot{y}_0(\mu) = \dot{y}_0(0) + \mu\beta(\mu),$$

где величины  $\alpha(\mu), \beta(\mu)$  при  $\mu \rightarrow 0$  имеют конечные пределы. В силу же уже упоминавшейся общей теоремы теории ОДУ общее решение уравнения (2.5) непрерывно дифференцируемо по  $y_0, \dot{y}_0, \mu$ . Поэтому периодическое решение может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} & \begin{pmatrix} y(t, y_0(\mu), \dot{y}_0(\mu), \mu) \\ \dot{y}(t, y_0(\mu), \dot{y}_0(\mu), \mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y(t, y_0(0), \dot{y}_0(0), 0) \\ \dot{y}(t, y_0(0), \dot{y}_0(0), 0) \end{pmatrix} + \\ & + \mu \left[ \frac{\partial(y, \dot{y})}{\partial(y_0, \dot{y}_0)} \Big|_{\mu=0} \cdot \begin{pmatrix} \alpha(0) \\ \beta(0) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \partial y / \partial \mu \\ \partial \dot{y} / \partial \mu \end{pmatrix} \Big|_{\mu=0} \right] + o(\mu), \end{aligned}$$

причем величина  $o(\mu)$  оценивается равномерно на отрезке  $[0, T]$ . Формула (4.1) следует из полученного разложения. Таким образом, точное периодическое решение расположено в  $\mu$ -окрестности начального приближения.

Далее по примеру работы [18] перейдем от ОДУ (2.5) к системе Гамильтона

$$\begin{aligned} \dot{y} &= H_{p_y}, & \dot{p}_y &= -H_y, \\ \dot{\nu} &= H_{p_\nu}, & \dot{p}_\nu &= -H_\nu \end{aligned} \tag{4.2}$$

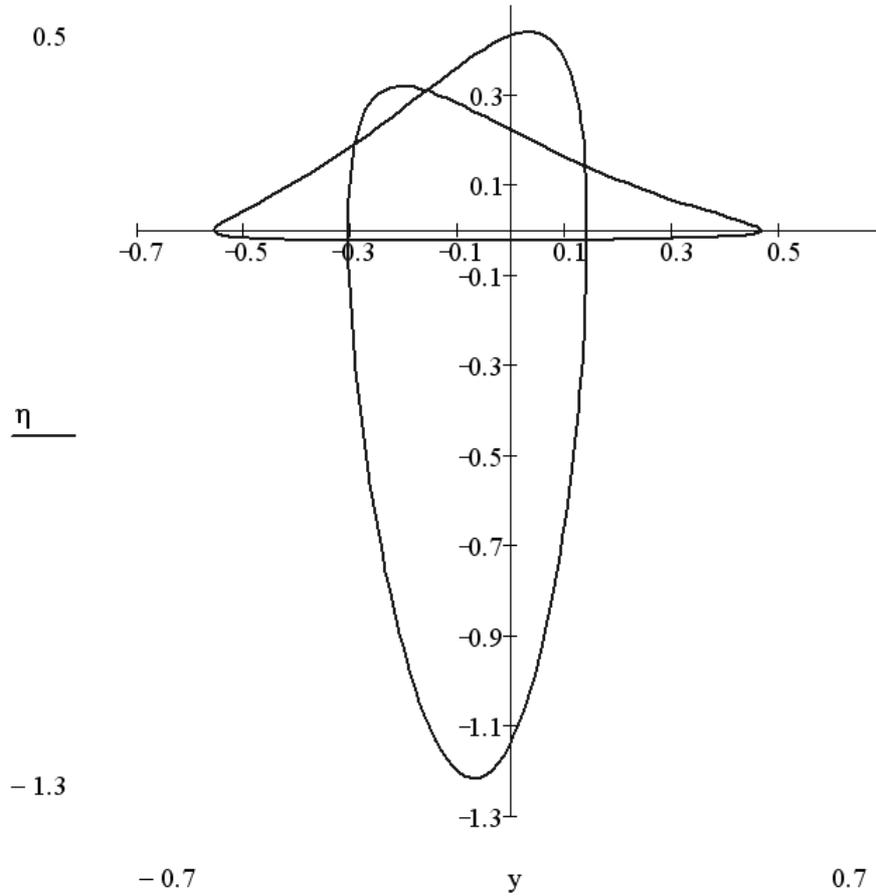


Рис. 2. Невозмущенное периодическое решение при  $e = 0,9$ ,  $\varphi = 0,1$ ,  $c = 1$ .

с двумя степенями свободы и гамильтонианом

$$\begin{aligned}
 H(y, \nu, p_y, p_\nu, \mu) &= H_0(y, \nu, p_y, p_\nu) + \mu H_1(y, \nu, \mu), \\
 H_0(y, \nu, p_y, p_\nu) &= \frac{1}{2} p_y^2 - b(\nu)y + p_\nu(1 + e \cos \nu)^2, \\
 H_1(y, \nu, \mu) &= \frac{1}{\mu} \left( \frac{c}{\mu} \operatorname{sgn} y + b(\nu) \right) \left( y - \frac{\sin \mu y}{\mu} \right) - \frac{1}{\mu^2} a(\nu)(\cos \mu y - 1),
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

обобщенными координатами  $y, \nu$  и обобщенными импульсами  $p_y, p_\nu$ . При этом  $p_y = \dot{y}$ , а импульс  $p_\nu$  является избыточной переменной, канонически сопряженной координате  $\nu$ .

Для выполнения анонсированной выше задачи регуляризации, приводящей динамику в окрестности рассматриваемого периодического решения к неаналитическому по  $t$  потоку аналитических отображений, выполним последовательность канонических преобразований системы Гамильтона (4.2)

$$(y, \nu, p_y, p_\nu) \mapsto (u, \nu, I, p_\nu) \mapsto (u, z_1, I, z_2),$$

задаваемых по формулам

$$\begin{aligned}
 y &= \sqrt{2I} \sin u, & p_y &= \sqrt{2I} \cos u, \\
 z_1 &= \sqrt{2p_\nu} \sin \nu, & z_2 &= \sqrt{2p_\nu} \cos \nu.
 \end{aligned} \tag{4.4}$$

Оба преобразования пар переменных  $(y, \nu, p_y) \mapsto (u, I)$ ,  $(\nu, p_\nu) \mapsto (z_1, z_2)$  удовлетворяют условию каноничности. Далее фиксируем достаточно большую постоянную энергии в интеграле

$$H(y, \nu, p_y, p_\nu, \mu) = h \tag{4.5}$$

и опишем более подробно методику подбора этой постоянной. В силу (1.2) можно считать, что на найденном периодическом движении в качестве независимой переменной используется истинная

аномалия  $\nu$ :

$$y = y^\mu(\nu), \quad p_y = p_y^\mu(\nu).$$

Упомянутая траектория при  $\mu = 0$  имеет вид

$$y = y^0(\nu), \quad p_y = p_y^0(\nu).$$

Теперь из уравнения (4.5) при помощи формул (4.3) выразим зависимость обобщенного импульса  $p_\nu$  от параметра  $\nu$  в виде  $p_\nu^*(\nu)$ . При  $\mu = 0$  это выражение выглядит особенно просто:

$$p_\nu^0(\nu) = \frac{h - \frac{1}{2} [p_y^0(\nu)]^2 + b(\nu)y^0(\nu)}{(1 + e \cos \nu)^2}.$$

Ясно, что при фиксированном  $e \in [0, 1)$  и достаточно большом  $h > 0$  это выражение будет отделено от нуля при любом  $\nu \in [0, 2\pi]$ . В этом случае и близкая к  $p_\nu^0(\nu)$  функция  $p_\nu^*(\nu)$  также будет отделена от нуля так, что переменная  $p_\nu$  в окрестности вынужденного колебания может играть роль радиуса в канонических полярных фазовых переменных  $\nu, p_\nu$ .

Далее, следуя [13], проведем изоэнергетическую редукцию нашей автономной гамильтоновой системы с двумя степенями свободы в окрестности периодического решения так, чтобы угловая переменная  $u$  оказалась новой независимой переменной вместо  $t$ . Это сделать возможно, поскольку в рассматриваемом нами случае общего положения переменная  $u \in [0, 4\pi]$  растет вместе с  $t$  строго монотонно.

Новая функция Гамильтона  $K(u, \nu, p_\nu, \mu)$  должна задаваться в неявном виде при помощи уравнения

$$G(u, \nu, -K, p_\nu, \mu) - h = 0, \quad (4.6)$$

где следует положить

$$G(u, \nu, I, p_\nu, \mu) = H(y, \nu, p_y, p_\nu, \mu),$$

выражая в  $H$  величины  $y, p_y$  в соответствии с формулами (4.4). Так же, как и в (4.3), получим разложение гамильтониана

$$G(u, \nu, I, p_\nu, \mu) = G_0(u, \nu, I, p_\nu) + \mu G_1(u, \nu, I, p_\nu, \mu),$$

причем невозмущенную часть легко преобразовать к форме

$$G_0(u, \nu, I, p_\nu, \mu) = I \cos^2 u - \sqrt{2I} b(\nu) \sin u + p_\nu(1 + e \cos \nu)^2.$$

Проверим условие невырожденности уравнения (4.6) относительно переменной  $K$  в окрестности периодического движения. При достаточно малых  $\mu$  для этого достаточно вычислить производную на порождающем решении

$$\left. \frac{\partial G_0}{\partial I} \right|_{\mu=0} = \cos^2 u - \frac{b(\nu) \sin u}{\sqrt{2I}} = \frac{(p_y^0(\nu))^2 - b(\nu)y^0(\nu)}{(y^0(\nu))^2 + (p_y^0(\nu))^2} = \left. \frac{\dot{y}^2(t) - y(t)\ddot{y}(t)}{y^2(t) + \dot{y}^2(t)} \right|_{\mu=0}.$$

В числителе здесь стоит скалярное произведение вектора  $(\dot{y}(t), \ddot{y}(t))^T$ , касательного к фазовому вектору  $(y(t), \dot{y}(t))^T$ , и перпендикулярного к нему вектора  $(\dot{y}(t), -y(t))^T$ , направленного в сторону движения изображающей точки. В знаменателе стоит длина фазового вектора. Ясно, что на порождающей траектории в исследуемом нами случае общего положения величина  $\partial G_0 / \partial I$  при  $\mu = 0$  отделена от нуля. Поэтому по непрерывности локально, в окрестности исследуемого периодического движения, уравнение (4.6) однозначно разрешимо относительно переменной  $K$ , задавая тем самым неявную функцию  $K(u, \nu, p_\nu, \mu)$ .

В упомянутой окрестности переменная  $u$  может рассматриваться в качестве быстрой. В самом деле,

$$\frac{du}{dt} = \frac{\partial G}{\partial I} = \frac{\partial G_0}{\partial I} + \mu \frac{\partial G_1}{\partial I}.$$

Но в силу проведенного анализа на порождающем решении и, значит, в окрестности точного решения величина  $du/dt > 0$ . Поэтому на периоде исследуемого периодического движения величина  $u(t)$  строго монотонно растет. Таким образом, переменная  $u$  пригодна в качестве нового «времени» в новой неавтономной периодической системе Гамильтона с одной степенью свободы,

фазовыми переменными  $\nu$ ,  $p_\nu$  и функцией Гамильтона  $K(u, \nu, p_\nu, \mu)$ . На самом деле, мы будем исследовать устойчивость периодического движения, задаваемого соотношениями

$$z_1 = z_1^*(u), \quad z_2 = z_2^*(u), \quad (4.7)$$

и представляющего то же самое периодическое движение, но в другой карте переменных  $(u, z_1, z_2)$  на трехмерном многообразии  $M_h^3$  постоянной энергии, задаваемом уравнением (4.5). Так что символом  $K(u, z_1, z_2, \mu)$  будем обозначать функцию Гамильтона редуцированной системы во введенной таким образом системе координат.

Легко видеть, что на  $M_h^3$  в окрестности найденного периодического движения системы координат  $(y, \nu, p_y)$  и  $(u, z_1, z_2)$  задают эквивалентные карты  $\varphi_1, \varphi_2 : M_h^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  соответственно. В карте  $\varphi_1$  траектория найденного периодического движения имеет вид, задаваемый уравнениями

$$y = y^*(\nu), \quad p_y = p_y^*(\nu).$$

Используя  $\nu$  как параметр, это решение в карте  $\varphi_2$  можно выразить по формулам

$$\begin{aligned} u &= u^*(\nu) = \arg(p_y^*(\nu) + iy^*(\nu)), \\ z_1 &= \sqrt{2p_\nu^*} \sin \nu, \quad z_2 = \sqrt{2p_\nu^*} \cos \nu. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Для перехода от этих параметрических уравнений к уравнениям (4.7) необходимо разрешить уравнение (4.8) относительно  $\nu$ . Это можно сделать, например, при помощи интегрирования дифференциального уравнения

$$\frac{d\nu}{du} = \frac{G_{p_\nu}(\nu)}{G_I(u^*(\nu), \nu, I^*(\nu), p_\nu^*(\nu))}$$

вдоль найденного решения. Используя исходные переменные  $y, p_y$ , это уравнение можно переписать в виде

$$\frac{d\nu}{du} = \frac{(1 + e \cos \nu)^2 [(y^*(\nu))^2 + (p_y^*(\nu))^2]}{H_y|_* y^*(\nu) + H_{p_y}|_* p_y^*(\nu)}, \quad (4.9)$$

где, как можно видеть, например,

$$\left. \frac{\partial H}{\partial p_y} \right|_* p_y^*(\nu) = (p_y^*(\nu))^2.$$

Начальные данные для уравнения (4.9) подбираются в виде  $\nu(0) = \nu_0$  из условия пересечения фазовой кривой на плоскости  $(y, p_y)$  оси  $p_y$  слева направо.

Как было установлено ранее, в характеристическом уравнении (3.7) характеристическая постоянная Ляпунова [17] может быть представлена в виде

$$\alpha = 1 - \alpha_1 \mu + o(\mu) = 1 - a_1(\mu).$$

Тогда мультипликаторы имеют вид

$$\rho_{1,2} = 1 - a_1 \pm i\sqrt{a_1} \sqrt{2 - a_1} = \exp(\lambda_{1,2} T).$$

Отсюда с учетом того, что величины  $a_1$  малы вместе с  $\mu$ ,

$$\lambda_{1,2} T = \pm i \arcsin(\sqrt{a_1} \sqrt{2 - a_1}) = \pm i\sqrt{a_1} \sqrt{2 - a_1} + o(a_1) = \pm i\sqrt{2a_1} \sqrt{\mu} + o(\mu). \quad (4.10)$$

**Замечание 4.1.** Система в вариациях для трехмерной динамической системы на  $M_h^3$ , заданная на периодическом движении, помимо показателей  $\lambda_1, \lambda_2$  имеет еще один, третий, показатель  $\lambda_3 = 0$ . Он соответствует сдвигу вдоль траектории периодического движения, в нашем случае — вдоль координаты  $\nu$ .

Желая перейти к описанию динамики на  $M_h^3$  при помощи координат  $u, z_1, z_2$ , используем в дальнейшем легко выводимое в общей теории ОДУ [16] методическое утверждение.

**Утверждение 4.1.** Пусть заданы две автономные динамические системы

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}), \quad \dot{\mathbf{y}} = \mathbf{Y}(\mathbf{y}); \quad \mathbf{x} \in M^n, \quad \mathbf{y} \in N^n; \quad M^n, N^n \subset \mathbb{R}^n, \quad (4.11)$$

имеющие  $T$ -периодические решения  $\mathbf{x}^*(t), \mathbf{y}^*(t)$  с начальными условиями  $\mathbf{x}_0, \mathbf{y}_0$  соответственно. Пусть в окрестностях указанных решений динамические системы эквивалентны, и эта эквивалентность устанавливается при помощи диффеоморфизма  $\mathbf{g} : \mathbf{x} \mapsto \mathbf{y}$ .

Тогда системы в вариациях этих динамических систем имеют идентичные системы характеристических показателей, а соответствующие этим показателям решения взаимно однозначно соответствуют друг другу при помощи касательного отображения

$$d\mathbf{g} : T_{\mathbf{x}^*(t)}M^n \rightarrow T_{\mathbf{y}^*(t)}N^n,$$

рассматриваемого в каждой точке периодического решения  $\mathbf{x}^*(t)$ .

*Доказательство.* В силу эквивалентности динамических систем заключаем, что

$$\mathbf{Y}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x})\mathbf{X}(\mathbf{x}). \quad (4.12)$$

Рассмотрим системы в вариациях

$$\dot{\boldsymbol{\xi}} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}\boldsymbol{\xi}, \quad \dot{\boldsymbol{\eta}} = \frac{\partial \mathbf{Y}}{\partial \mathbf{y}}\boldsymbol{\eta}, \quad (4.13)$$

заданные на соответствующих друг другу при помощи диффеоморфизма  $\mathbf{g}$  периодических движениях. Пусть матрицы-функции  $\Xi(t)$ ,  $\mathbf{H}(t)$  являются матрицантами этих систем в вариациях.

Поскольку для любого  $t \in [0, T]$  справедливо соответствие  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{g}(\mathbf{x}(t))$ , то касательное отображение можно задать по формуле

$$\boldsymbol{\eta} = \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}}\boldsymbol{\xi}, \quad (4.14)$$

где матрица  $\partial \mathbf{g} / \partial \mathbf{x}$  задает обратимый линейный оператор  $d\mathbf{g}$  из касательного пространства  $T_{\mathbf{x}^*(t)}M^n$  в касательное пространство  $T_{\mathbf{y}^*(t)}$ . отождествим при каждом  $t \in [0, T]$  эти касательные пространства с координатным пространством  $\mathbb{R}^n$ .

Решения систем в вариациях можно представить в виде

$$\boldsymbol{\xi}(t) = \Xi(t)\boldsymbol{\xi}_0, \quad \boldsymbol{\eta}(t) = \mathbf{H}(t)\boldsymbol{\eta}_0,$$

где  $\boldsymbol{\xi}_0$ ,  $\boldsymbol{\eta}_0$  — векторы начальных данных для (4.13). Формула (4.14) задает линейный оператор в линейном пространстве вектор-функций вида  $\mathbf{f} : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^n$ . Этот линейный оператор обеспечивает линейную эквивалентность систем в вариациях (4.13). Проверим это прямым вычислением. Имеем с одной стороны

$$\dot{\boldsymbol{\eta}} = \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right)' \boldsymbol{\xi} + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \dot{\boldsymbol{\xi}} = \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right)' + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right] \boldsymbol{\xi} = \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right)' + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right] \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} \boldsymbol{\eta}.$$

Убедимся, что матрица перед вектором  $\boldsymbol{\eta}$  совпадает с  $\partial \mathbf{Y} / \partial \mathbf{y}$ . Заметим, что вычисление всех дифференциальных объектов производится на решениях систем (4.11), соответствующих друг другу в силу диффеоморфизма  $\mathbf{g}$ . Получаем далее в покоординатном представлении

$$\begin{aligned} \left\{ \left[ \left( \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \right)' + \frac{\partial \mathbf{y}}{\partial \mathbf{x}} \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}} \right] \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial \mathbf{y}} \right\}_{i,k} &= \sum_{l=1}^n \left[ \left( \frac{\partial y_i}{\partial x_l} \right)' + \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_j}{\partial x_l} \right] \frac{\partial x_l}{\partial y_k} \\ &= \sum_{l=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_l \partial x_j} X_j + \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_j}{\partial x_l} \right) \right] \frac{\partial x_l}{\partial y_k}. \end{aligned}$$

С другой стороны, предполагая, что диффеоморфизм  $\mathbf{g}$  достаточно регулярен, а также используя правила вычисления производных от сложных функций и изменяя очередность дифференцирования в производных второго порядка, с учетом (4.12) можно написать

$$\begin{aligned} \frac{\partial Y_i}{\partial y_k} &= \frac{\partial}{\partial y_k} \left( \sum_{j=1}^n \frac{\partial y_i}{\partial x_j} X_j \right) = \\ &= \sum_{j=1}^n \left[ \left( \sum_{l=1}^n \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_j \partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial y_k} \right) X_j + \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \sum_{l=1}^n \frac{\partial X_j}{\partial x_l} \frac{\partial x_l}{\partial y_k} \right] = \sum_{l=1}^n \left[ \sum_{j=1}^n \left( \frac{\partial^2 y_i}{\partial x_l \partial x_j} X_j + \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \frac{\partial X_j}{\partial x_l} \right) \right] \frac{\partial x_l}{\partial y_k}. \end{aligned}$$

Таким образом, отправляясь от формулы соответствия (4.14) и системы в вариациях для  $\xi$ , мы приходим к системе в вариациях для  $\eta$ . Зададим теперь для  $\xi$  начальное условие  $\xi(0) = \xi_0$ . Ему соответствует начальное условие

$$\eta(0) = \eta_0 = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} \xi_0,$$

где  $\mathbf{x}_0$  предполагается в качестве начального условия для периодического решения исходной задачи (в переменных  $\mathbf{x}$ ). Далее, при любом  $t \in [0, T]$  решение системы для  $\eta$  можно представить двумя способами:

$$\eta(t) = \mathbf{H}(t) \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}, \quad \xi_0 = \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} \Xi(t) \xi_0.$$

В силу произвольности выбора вектора начальных данных  $\xi_0$  получим матричное равенство

$$\mathbf{H}(t) \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0} = \left( \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right)_{\mathbf{x}=\mathbf{x}(t)} \Xi(t),$$

справедливое для любого  $t$ . При  $t = T$  решение исходной задачи возвращается в начальную точку  $\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(T)$  либо сдвигается по угловым переменным на период их изменения. Поэтому, обозначая символом

$$A = \left. \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial \mathbf{x}} \right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}_0}$$

невыврожденную матрицу Якоби, задающую касательное отображение, получим соотношение подобия

$$\mathbf{H}(t) = A \Xi(t) A^{-1}$$

матрицантов систем в вариациях (4.13) за период. Это означает, что эти системы в вариациях имеют совпадающие характеристические уравнения. Доказательство завершает замечание о том, что собственные векторы, соответствующие мультипликаторам, и их инвариантные подпространства в силу линейного изоморфизма (4.14) для систем (4.13) взаимно однозначно соответствуют друг другу.  $\square$

Доказанное утверждение 4.1 позволяет заключить, что система в вариациях для гамильтоновой системы

$$\frac{dz_1}{du} = \frac{\partial K}{\partial z_2}(u, z_1, z_2), \quad \frac{dz_2}{du} = -\frac{\partial K}{\partial z_1}(u, z_1, z_2) \quad (4.15)$$

вдоль периодического решения (4.7) имеет в точности два чисто мнимых характеристических показателя, вычисляемых при помощи (4.10). На многообразии  $M_h^3$  нулевой характеристический показатель соответствует смещению вдоль координаты  $u$ .

Построенная система Гамильтона (4.15) является аналитической почти во всех точках окрестности периодического движения. Функция Гамильтона, как уже сказано выше, имеет нарушения аналитичности только при  $u = k\pi$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ). Но поскольку  $u$  здесь является независимой переменной, то канонические отображения в силу системы ОДУ (4.15) будут аналитичны по своим аргументам (начальным данным) при любом фиксированном  $u$ . Это обстоятельство позволяет для нелинейного анализа устойчивости применить далее методы КАМ-теории и строить разложения коэффициентов и показателей в ряды по малому параметру.

**Замечание 4.2.** Платой за регулярность в системе (4.15) является значительная аналитическая сложность ее правых частей и практическая невозможность выполнить параметрическое исследование устойчивости задачи аналитическими методами. Для решения подобного рода задач, к счастью, имеются развитые методы численного анализа устойчивости [7].

Таким образом, характеристические показатели (4.10) системы в вариациях для (4.15) могут быть разложены в сходящиеся степенные ряды по малому параметру  $\varepsilon = \sqrt{\mu}$  в силу двукратности соответствующего показателя при  $\mu = 0$  (см. [6]).

Для вычисления нормальной формы нам, помимо показателей  $\lambda_1, \lambda_2$ , потребуются также решения для системы в вариациях

$$\frac{d}{du} \delta \mathbf{z} = I K_{\mathbf{z}\mathbf{z}} \delta \mathbf{z} \quad (\delta \mathbf{z} \in \mathbb{R}^2), \quad (4.16)$$

построенной для нелинейной системы (4.15) вдоль периодического решения (4.7).

В карте  $\varphi_1$  периодическое решение имеет показатели  $\lambda_1, \lambda_2$ , а также  $\lambda_3 = 0$ . Кроме того, в этой же карте мы можем приблизительно вычислять решения системы в вариациях, соответствующие этим показателям. Ввиду того, что переход к регуляризованной задаче (4.15) сопровождается одновременно ее аналитическим усложнением, прямое вычисление базисных решений системы в вариациях оказывается невозможным. Поэтому остается единственный путь — использовать линейное отображение касательных пространств вида (4.14), т. е. касательное отображение диффеоморфизма  $\mathbf{g} : (y, \nu, p_y) \mapsto (u, z_1, z_2)$  на периодическом решении.

В этом случае остается открытым вопрос о соответствии между решениями системы в вариациях в карте  $\varphi_2$  и (4.16). Для решения этой задачи используем еще одно техническое утверждение о редукции решений систем в вариациях. Пусть динамическая система

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{X}(\mathbf{x}) \quad (\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n) \quad (4.17)$$

имеет периодическое решение  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)$  с периодом  $T$ . Среди переменных  $x_i$  ( $i = 1, \dots, n$ ) могут быть как позиционные, так и угловые, от которых функции  $X_i(x_1, \dots, x_n)$  зависят периодически. Как обычно, периодичность угловых переменных предполагается равной  $2\pi$ . Пусть, кроме того, переменная  $x_1$  является быстрой угловой, т. е. ее производная вдоль периодического решения строго положительна

$$X_1(\mathbf{x}^*(t)) > 0 \quad (t \in [0, T]).$$

В этом случае вместо (4.17) в окрестности решения  $\mathbf{x} = \mathbf{x}^*(t)$  можно рассмотреть неавтономную периодическую по  $x_1$  динамическую систему

$$\xi' = \Xi(x_1, \xi) \quad (\xi \in \mathbb{R}^{n-1}), \quad (4.18)$$

где  $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_{n-1})^T$ , а правые части задаются известными формулами

$$\Xi(x_1, \xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \frac{X_i(x_1, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})}{X_1(x_1, \xi_1, \dots, \xi_{n-1})}.$$

Задача Коши для (4.18) естественным образом переформулируется из задачи Коши для (4.17).

**Утверждение 4.2.** *Решение системы ОДУ в вариациях*

$$\frac{d}{dt} \delta \mathbf{x} = \frac{\partial \mathbf{X}}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}^*(t)) \delta \mathbf{x}, \quad (4.19)$$

составленной для (4.17) на решении  $\mathbf{x}^*(t)$ , взаимно однозначно соответствует решениям системы в вариациях

$$\frac{d}{dx_1} \delta \xi = \frac{\partial \Xi}{\partial \xi}(x_1, \xi^*(x_1)) \delta \xi, \quad (4.20)$$

составленной для редуцированной системы ОДУ (4.18), по формуле

$$\delta x_{i+1}(t) = \delta \xi_i(x_1^*(t)) + \frac{X_{i+1}(\mathbf{x}^*(t))}{X_1(\mathbf{x}^*(t))} \delta x_1(t) \quad (i = 1, \dots, n-1). \quad (4.21)$$

**Замечание 4.3.** Предполагается, что функции  $\xi_i^*(x_1)$  представляют собой рассматриваемое  $2\pi$ -периодическое движение в зависимости от новой независимой  $x_1 \in [0, 2\pi]$ . При этом на самом невозмущенном решении выполняется соотношение

$$\xi_i^*(x_1^*(t)) = x_{i+1}^*(t).$$

*Доказательство.* Формулу (4.21) проверим непосредственной подстановкой в соответствующее  $i+1$ -е уравнение системы в вариациях (4.19). Имеем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \delta x_{i+1} &= \frac{d}{dt} \delta \xi_i + \frac{d}{dt} \left( \frac{X_{i+1}}{X_1} \right) \delta x_1 + \frac{X_{i+1}}{X_1} \frac{d}{dt} \delta x_1 = \\ &= X_1 \frac{d}{dx_1} \delta \xi_i + \left( \frac{1}{X_1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_{i+1}}{\partial x_j} X_j - \frac{X_{i+1}}{X_1^2} \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_1}{\partial x_j} X_j \right) \delta x_1 + \frac{X_{i+1}}{X_1} \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_1}{\partial x_j} \delta x_j. \end{aligned}$$

Используем теперь то, что  $\delta\xi_i(x_1)$  удовлетворяет системе ОДУ в вариациях (4.20), т. е.

$$\frac{d}{dx_1}\delta\xi_i = \frac{1}{X_1} \sum_{j=2}^n \frac{\partial X_{i+1}}{\partial x_j} \delta\xi_{j-1} - \frac{X_{i+1}}{X_1^2} \sum_{j=2}^n \frac{\partial X_1}{\partial x_j} \delta\xi_{j-1}.$$

Подставим правую часть этого равенства в правую часть предыдущего равенства. Получим с учетом (4.21)

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}\delta x_{i+1} &= \sum_{j=2}^n \frac{\partial X_{i+1}}{\partial x_j} \delta x_j - \left( \sum_{j=2}^n \frac{\partial X_{i+1}}{\partial x_j} \frac{X_j}{X_1} \right) \delta x_1 - \frac{X_{i+1}}{X_1} \sum_{j=2}^n \frac{\partial X_1}{\partial x_j} \delta x_j + \\ &+ \left( \frac{X_{i+1}}{X_1} \sum_{j=2}^n \frac{\partial X_1}{\partial x_j} \frac{X_j}{X_1} \right) \delta x_1 + \frac{\partial X_{i+1}}{\partial x_1} \delta x_1 + \left( \sum_{j=2}^n \frac{\partial X_{i+1}}{\partial x_j} \frac{X_j}{X_1} \right) \delta x_1 - \\ &- \frac{X_{i+1}}{X_1} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \delta x_1 - \left( \frac{X_{i+1}}{X_1} \sum_{j=2}^n \frac{\partial X_1}{\partial x_j} \frac{X_j}{X_1} \right) \delta x_1 + \frac{X_{i+1}}{X_1} \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \delta x_1 + \frac{X_{i+1}}{X_1} \sum_{j=2}^n \frac{\partial X_1}{\partial x_j} \delta x_j = \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_{i+1}}{\partial x_j} \delta x_j. \end{aligned}$$

Поэтому переменные  $\delta x_{i+1}$  удовлетворяют соответствующим дифференциальным уравнениям системы в вариациях (4.18). Обратная декомпозиция позволяет из функций  $\delta x_1(t)$ ,  $\delta x_{i+1}(t)$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) вычислить функции  $\delta\xi_i(x_1^*(t))$ . Чтобы построить функции  $\delta\xi_i(x_1)$ , нужно вдоль периодического движения обратить уравнение  $x_1 = x_1^*(t)$ .

Если же после решения системы (4.20) найдены функции  $\delta\xi_i(x_1)$ , то, подставляя выражения (4.21) в правую часть первого из уравнений (4.19), получим дифференциальное уравнение первого порядка относительно  $\delta x_1(t)$ . Решая его, получим остальные  $\delta x_{i+1}$  как функции времени по формуле (4.21).  $\square$

Пусть для простоты система (4.19) имеет один нулевой характеристический показатель (вдоль периодического решения) и остальные ненулевые. Тогда легко убедиться, что нулевому показателю соответствует решение системы (4.19), получающееся из (4.21) при  $\delta\xi_i(x_1) \equiv 0$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ). В самом деле, положим в (4.20)  $\delta\xi_i = 0$ . Тогда

$$\delta x_{i+1} = \frac{X_{i+1}}{X_1} \delta x_1.$$

Подставляя это выражение в первое из уравнений (4.19), получим дифференциальное уравнение относительно функции  $\delta x_1(t)$  в виде

$$\frac{d}{dt}\delta x_1 = \frac{\partial X_1}{\partial x_1} \delta x_1 + \sum_{i=2}^n \frac{\partial X_1}{\partial x_i} \frac{X_i}{X_1} \delta x_1 = \frac{\delta x_1}{X_1} \sum_{i=2}^n \frac{\partial X_1}{\partial x_i} X_i = \frac{\delta x_1}{X_1} \frac{dX_1}{dt},$$

откуда заключаем, что имеет место равенство

$$X_1 \frac{d}{dt}\delta x_1 = \delta x_1 \frac{dX_1}{dt},$$

из которого следует, что

$$\delta x_1(t) = C X_1(\mathbf{x}^*(t)),$$

где  $C$  — постоянная интегрирования, параметризующая одномерное линейное подпространство решений системы (4.19), соответствующее упомянутому нулевому характеристическому показателю. Функции из этого пространства имеют вид

$$\delta \mathbf{x}(t) = C \mathbf{X}(\mathbf{x}^*(t)).$$

Найденное решение системы в вариациях (4.19) является периодической функцией периода  $T$  (в силу периодичности функции  $\mathbf{x}^*(t)$ ). Поэтому оно соответствует единичному мультипликатору или нулевому характеристическому показателю.

Остальные  $n-1$  (ненулевые) показатели и соответствующие им собственные функции вычисляются уже из редуцированной системы в вариациях (4.20). Причем показатели  $\lambda_i$  ( $i = 2, \dots, n$ ) системы (4.19) связаны с показателями  $\varkappa_i$  ( $i = 1, \dots, n-1$ ) системы (4.20) соотношениями

$$\lambda_{i+1} T = \varkappa_i 2\pi.$$

В нашем случае роль переменной  $x_1$  играет угловая переменная  $u$  с периодом изменения  $4\pi$ . Поэтому здесь будем иметь

$$\lambda_{1,2}T = \varkappa_{1,2}4\pi,$$

где  $\lambda_{1,2}$  — найденные ранее чисто мнимые характеристические показатели системы в вариациях (3.6).

Как было видно выше, при анализе устойчивости вынужденных колебаний спутника в линейном приближении оказалось достаточным ограничиться рассмотрением порождающего решения, отбрасывая члены более высокого (первого) порядка по  $\mu$ , и членами первого порядка в возмущающей части правых частей системы ОДУ (или, что в данном случае эквивалентно, функции Гамильтона). Следуя и далее той же тактике, всегда при анализе устойчивости в разложениях коэффициентов гамильтониана по малому параметру будем ограничиваться членами наименьшего необходимого порядка.

Так что в процессе вычисления нормальных форм системы Гамильтона (4.15) на основе коэффициентов степенного по  $z_i - z_i^*(u)$  ( $i = 1, 2$ ) разложения гамильтониана  $K(u, \mathbf{z}, \mu)$  ограничимся приближенными по малому параметру выражениями для этих коэффициентов. На самом деле коэффициенты будут вычисляться на найденном порождающем решении

$$\mathbf{z} = \mathbf{z}^0(u) = \mathbf{z}^*(u, \mu)|_{\mu=0}.$$

Однако, поскольку система в вариациях на порождающем решении вырождается в резонансную с двукратным нулевым показателем и непростым элементарным делителем, то требуется уточнение коэффициентов этой системы до членов следующего (первого) порядка по малому параметру.

Опишем более аккуратно процедуру анализа устойчивости при помощи нормальных форм функции Гамильтона с учетом малости параметра  $\mu$ . Диффеоморфизм  $\mathbf{g}$ , задающий связь карт  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , строится в окрестности порождающего решения и от малого параметра не зависит. Представим функцию Гамильтона системы (4.15) в этой окрестности в виде следующего разложения по степеням вектора  $\Delta\mathbf{z} = \mathbf{z} - \mathbf{z}^0(u)$  отклонений от порождающего решения:

$$K(u, \mathbf{z}, \mu) = K(u, \mathbf{z}^0(u) + \Delta\mathbf{z}, \mu) = \sum_{i=0}^{\infty} K_i(u, \mu) \underbrace{[\Delta\mathbf{z}, \dots, \Delta\mathbf{z}]_i}_{i \text{ раз}},$$

где  $K_i(u, \mu)[\Delta\mathbf{z}, \dots, \Delta\mathbf{z}]$  — однородные формы степени  $i$  от компонент вектора  $\Delta\mathbf{z}$  с коэффициентами, зависящими от времени  $t$  и малого параметра  $\mu$ . В динамических уравнениях участвуют формы, начиная с  $i = 2$ .

Переходя в системе Гамильтона (4.15) к отклонениям

$$\boldsymbol{\zeta} = \Delta\mathbf{z} - [\mu\mathbf{z}^1(u) + \mu^2\mathbf{z}^2(u) + \dots],$$

учитывая поправку точного решения  $\mu\mathbf{z}^1(u)$  к порождающему решению, получим новый гамильтониан  $F(u, \boldsymbol{\zeta}, \mu)$  в виде

$$F(u, \boldsymbol{\zeta}, \mu) = \sum_{i=2}^{\infty} F_i(u, \mu) \underbrace{[\boldsymbol{\zeta}, \dots, \boldsymbol{\zeta}]_i}_{i \text{ раз}}, \quad (4.22)$$

где однородная форма  $F_i(u, \mu)[\boldsymbol{\zeta}, \dots, \boldsymbol{\zeta}]$  выражается через формы  $K_j$  порядков  $j \leq i$ . Например, форма наименьшего, второго, порядка имеет вид

$$F_2(u, \mu)[\boldsymbol{\zeta}, \dots, \boldsymbol{\zeta}] = K_2^0(u)[\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}] + \mu(K_2^1(u)[\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}] + K_3^0(u)[\mathbf{z}^1(u), \boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}] + K_3^0(u)[\boldsymbol{\zeta}, \mathbf{z}^1(u), \boldsymbol{\zeta}] + K_3^0(u)[\boldsymbol{\zeta}, \boldsymbol{\zeta}, \mathbf{z}^1(u)]).$$

Поправки более высокого порядка, чем  $\mu$ , рассматривать не будем. Процесс дальнейшей линейной и нелинейной нормализации следует проводить с функцией Гамильтона (4.22).

## 5. НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ

В гамильтоновой системе (4.15) перейдем к переменным, задающим отклонения от найденного периодического решения,

$$\zeta = \mathbf{z} - \mathbf{z}^*(u, \mu).$$

Для них имеет место система ОДУ

$$\dot{\zeta} = IF_{\zeta}(u, \zeta, \mu), \quad (5.1)$$

в которой функция  $F(u, \zeta, \mu)$  аналитична по  $\zeta$ ,  $\mu$  и допускает разложение (4.22) по однородным относительно  $\zeta$  формам. Коэффициенты форм  $F_i(u, \mu)$  являются функциями, аналитическими по  $\mu$  и кусочно-аналитическими по  $u$ . В самом деле, в регуляризованном «времени»  $u$  функция точного периодического движения  $\mathbf{z}^*(u, \mu)$  может быть разложена в сходящийся по  $\mu$  степенной ряд при помощи известных общих алгоритмов [6]. Поэтому функция  $F$  также сохранит аналитичность по  $\mu$ .

Выше уже была установлена устойчивость в линейном приближении, соответствующая эллиптическому случаю поведения гамильтоновой системы (5.1) в окрестности положения равновесия  $\zeta = \mathbf{0}$ . Поскольку вычисляемые из (4.10) характеристические показатели

$$\varkappa_{1,2} = \frac{T}{4\pi} \lambda_{1,2} = \pm i \frac{\sqrt{2\alpha_1}}{4\pi} \varepsilon + O(\varepsilon^3)$$

малы вместе с малым параметром  $\varepsilon$ , то случаи резонансов третьего и четвертого порядков здесь не реализуются. В такой ситуации в общем положении возможна нормализация до четвертого порядка включительно с ненулевым (в общем случае) коэффициентом в форме четвертой степени. В результате становится возможным применить теорему Мозера об инвариантной кривой [8] для закручивающих отображений плоскости, которая, в свою очередь, приводит к устойчивости положения равновесия или, в конечном счете, нашего периодического решения.

Таким образом, в эллиптическом случае для (5.1) в общем положении следует ожидать и строгой нелинейной устойчивости. Соответствующий анализ можно провести при помощи численных процедур для определения на плоскости параметров  $e$ ,  $\varphi$  кривых вырождения в нормальной форме четвертой степени. Если такие кривые могут быть обнаружены, то для соответствующих точек нужна дальнейшая нормализация гамильтониана.

Общая ситуация (при произвольных  $e$ ,  $\varphi$ ) исключительно затруднительна с аналитической точки зрения. Поэтому строгий аналитический нелинейный анализ устойчивости мы выполним для простейшего случая  $e = 0$ ,  $\varphi = 0$ . Величину  $c > 0$  считаем фиксированным параметром.

Будем исходить из функции Гамильтона, выводимой из (4.3) и представимой в виде

$$\begin{aligned} H(y, \nu, p_y, p_\nu, \mu) &= H_0(y, \nu, p_y, p_\nu) + \mu H_1(y, \nu) + \dots, \\ H_0(y, \nu, p_y, p_\nu) &= \frac{1}{2} p_y^2 - y \sin 2\nu + p_\nu, \quad H_1(y, \nu) = \frac{c}{6} y^3 \operatorname{sgn} y - \frac{1}{2} y^2 \cos 2\nu. \end{aligned}$$

В исходной постановке порождающее решение

$$y^0(t) = \eta - \frac{1}{4} \sin 2t, \quad p_y^0(t) = -\frac{1}{2} \cos 2t$$

для задачи с функцией Гамильтона

$$\begin{aligned} H(t, y, p_y, \mu) &= H_0(t, y, p_y) + \mu H_1(t, y) + \dots, \\ H_0(t, y, p_y) &= \frac{1}{2} p_y^2 - y \sin 2t, \quad H_1(t, y) = \frac{c}{6} y^3 \operatorname{sgn} y - \frac{1}{2} y^2 \cos 2t \end{aligned}$$

определяется из уравнения (2.19), в котором при подстановке выражений

$$a(\nu(t)) = \cos 2t, \quad c_0^0(\nu(t)) = \sin 2t$$

следует положить  $B = 0$  и

$$\psi(\eta) = \frac{c}{2} \int_0^{2\pi} (\eta + \sin 2t) |\eta + \sin 2t| dt.$$

Легко видеть, что  $\psi(0) = 0$ . Поскольку же уравнение (2.19) имеет единственное решение, то в рассматриваемом симметричном случае параметр порождающего периодического решения

будет иметь нулевое значение:  $\eta = 0$ . Поэтому порождающее решение расширенной автономной задачи имеет вид

$$y^0(t) = -\frac{1}{4} \sin 2t, \quad \nu^0(t) = t, \quad p_y^0(t) = -\frac{1}{2} \cos 2t, \quad p_\nu^0(t) = h - \frac{1}{8} - \frac{1}{8} \sin^2 2t.$$

На плоскости фазовых переменных  $(y, p_y)$  кривая порождающего решения образует эллипс. При помощи канонического преобразования  $(y, p_y) \mapsto (z, p_z)$  трансформируем этот эллипс в окружность с равномерным движением вдоль нее. Для этого достаточно задать новые переменные по формуле

$$z = \sqrt{2}y, \quad p_z = \frac{1}{\sqrt{2}}p_y.$$

Тогда порождающее решение будет иметь вид

$$z^0(t) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \sin 2t, \quad p_z^0(t) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \cos 2t.$$

Кроме того, поскольку функция Гамильтона при  $e = 0$  зависит периодически от переменной  $\nu$  только в виде двойного аргумента  $2\nu$ , при помощи другого канонического преобразования  $(\nu, p_\nu) \mapsto (\lambda, p_\lambda)$  вида

$$\lambda = 2\nu, \quad p_\lambda = \frac{1}{2}p_\nu$$

сформируем новый набор канонических переменных задачи  $(z, \lambda, p_z, p_\lambda)$  так, что после этого гамильтониан можно записать в виде

$$H(z, \lambda, p_z, p_\lambda, \mu) = H_0(z, \lambda, p_z, p_\lambda) + \mu H_1(z, \lambda) + \dots, \quad H_0(z, \lambda, p_z, p_\lambda) = p_z^2 - \frac{1}{\sqrt{2}}z \sin \lambda + 2p_\lambda,$$

$$H_1(z, \lambda) = \frac{\sqrt{2}}{24}cz^3 \operatorname{sgn} z - \frac{1}{4}z^2 \cos \lambda.$$

Наконец, в расширенном фазовом пространстве переменных  $(t, z, \lambda, -H, p_z, p_\lambda)$  перейдем к новому времени по формуле  $(t, -H) \mapsto (2t, -H/2)$  и оставим те же обозначения для этих переменных, корректируя гамильтониан на соответствующий множитель. Так что в итоге получим исходное, максимально упрощенное, представление функции Гамильтона

$$H(z, \lambda, p_z, p_\lambda, \mu) = H_0(z, \lambda, p_z, p_\lambda) + \mu H_1(z, \lambda) + \dots,$$

$$H_0(z, \lambda, p_z, p_\lambda) = \frac{1}{2}p_z^2 - \frac{\sqrt{2}}{4}z \sin \lambda + p_\lambda, \quad H_1(z, \lambda) = \frac{\sqrt{2}}{48}cz^3 \operatorname{sgn} z - \frac{1}{8}z^2 \cos \lambda.$$

При этом будем рассматривать уже не  $4\pi$ -, а  $2\pi$ -периодические решения с порождающим, задаваемым формулами

$$z^0(t) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \sin t, \quad \lambda^0(t) = t, \quad p_z^0(t) = -\frac{\sqrt{2}}{4} \cos t, \quad p_\lambda^0(t) = h - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \sin^2 t. \quad (5.2)$$

Для перехода к новой регуляризирующей независимой быстрой угловой фазовой переменной  $u$  выполним каноническое преобразование  $(z, p_z) \mapsto (u, I)$  по формулам

$$z = \sqrt{2I} \sin u, \quad p_z = \sqrt{2I} \cos u. \quad (5.3)$$

В переменных  $(u, \lambda, I, p_\lambda)$  на многообразии постоянной энергии  $M_h^3$  в качестве координат карты в окрестности порождающего периодического решения теперь можно использовать переменные  $(u, \lambda, I)$ . Далее, в силу уравнения энергии  $H = h$  вместо переменной  $I$  возьмем импульс  $p_\lambda$  такой, что  $p_\lambda$  будет иметь выражение

$$p_\lambda = h - \frac{1}{2}p_z^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}z \sin \lambda - \mu H_1(z, \lambda) - \dots, \quad (5.4)$$

где всюду вместо  $z$  и  $p_z$  нужно подставить их выражения (5.3) через  $u$  и  $I$ .

На найденном периодическом решении

$$z^*(t) = z^0(t) + \mu z^1(t, \mu), \quad p_z^*(t) = p_z^0(t) + \mu p_z^1(t, \mu),$$

$$\lambda(t) = t, \quad p_\lambda^*(t) = p_\lambda^0(t) + \mu p_\lambda^1(t, \mu). \quad (5.5)$$

Отсюда заключаем, что в качестве независимого параметра в этих функциях вместо времени  $t$  можно взять угловую переменную  $\lambda$  и считать, что

$$p_\lambda^*(\lambda) = p_\lambda^0(\lambda) + \mu p_\lambda^1(\lambda, \mu).$$

При этом, как видно из (5.3),

$$p_\lambda^0(\lambda) = h - \frac{1}{16} - \frac{1}{16} \sin^2 \lambda. \quad (5.6)$$

При помощи канонического преобразования  $(\lambda, p_\lambda) \mapsto (\lambda, \rho)$  перейдем к отклонению в полярных канонических переменных по формуле

$$p_\lambda = p_\lambda^*(\lambda) + \rho.$$

Такое преобразование является каноническим, поскольку

$$p_\lambda d\lambda = p_\lambda^*(\lambda) d\lambda + \rho d\lambda,$$

где, очевидно, выражение  $p_\lambda^*(\lambda) d\lambda$  является дифференциалом первообразной от функции  $p_\lambda^*(\lambda)$ .

Теперь выполним вспомогательное преобразование  $(\lambda, \rho) \mapsto (\lambda, p)$  вида

$$p = \frac{1}{2} + \rho,$$

после чего перейдем к прямоугольным переменным обычным образом:

$$z_1 = \sqrt{2p} \sin \lambda, \quad z_2 = \sqrt{2p} \cos \lambda.$$

Так что на фазовой плоскости  $(z_1, z_2)$  порождающее решение будет представлять собой равномерное движение изображающей точки по окружности радиуса 1. Итоговое преобразование можно представить в форме соответствия

$$(z, \lambda, p_z, p_\lambda) \mapsto (u, z_1, I, z_2).$$

Теперь, используя ранее полученные результаты, рассмотрим на многообразии  $M_h^3$  в карте  $\varphi_1 : M_h^3 \rightarrow (z, p_z, \lambda)$  для найденного периодического решения систему уравнений в вариациях. Для этого, как уже отмечалось выше, достаточно рассмотреть уравнения возмущенного движения вдоль порождающего решения (5.2). Проводя простые вычисления, получим систему в вариациях

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_1 &= 0, \\ \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ \dot{\xi}_3 &= \mu \left( \frac{1}{4} \cos t - \frac{c}{16} |\sin t| \right) \xi_2, \end{aligned} \quad (5.7)$$

в которой были приняты обозначения:  $\xi_1 = \delta\lambda$ ,  $\xi_2 = \delta z$ ,  $\xi_3 = \delta p_z$ . Легко видеть, что эту систему линейных ОДУ можно свести к системе второго порядка

$$\begin{aligned} \dot{\xi}_2 &= \xi_3, \\ \dot{\xi}_3 &= \mu \left( \frac{1}{4} \cos t - \frac{c}{16} |\sin t| \right) \xi_2. \end{aligned} \quad (5.8)$$

Как уже было вычислено ранее, эта система ОДУ, эквивалентная уравнению Хилла вида

$$\ddot{\xi}_2 + \varepsilon^2 \left( \frac{c}{16} |\sin t| - \frac{1}{4} \cos t \right) \xi_2 = 0,$$

имеет два чисто мнимых характеристических показателя, аналитически зависящих от  $\varepsilon$  и представимых в виде разложения

$$\lambda_{2,3} = \pm \frac{i}{2} \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \varepsilon + O(\varepsilon^3). \quad (5.9)$$

Решение задачи Коши и характеристические показатели системы (5.8) зависят от  $\varepsilon$  аналитически [17]. Из общей теории Флоке–Ляпунова известно, что (5.8) имеет два фундаментальных решения вида

$$\xi_j(t) = \varphi_j(t) e^{\lambda_j t} \quad (j = 2, 3), \quad (5.10)$$

где  $\varphi_{2,3}$  являются  $2\pi$ -периодическими функциями  $t$ . Эти функции удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\dot{\varphi}_j = -\lambda_j \varphi_j + A(t, \mu) \varphi_j,$$

где  $A(t, \mu)$  является матрицей правой части линейной системы (5.8). Для вычисления разложений функций  $\varphi_j(t)$  по малому параметру  $\varepsilon$  в системе (5.8) выполним преобразование по формулам

$$\xi_2 = \eta_1, \quad \xi_3 = \varepsilon \eta_2$$

и получим новую линейную систему ОДУ с теми же, что и в (5.8), характеристическими показателями  $\lambda_{2,3}$  и фундаментальными решениями

$$\eta_i(t) = \psi_i(t) e^{\lambda_{i+1} t} \quad (i = 1, 2)$$

такими, что  $\varphi_{i+1,1}(t) = \psi_{i1}(t)$ ,  $\varphi_{i+1,2}(t) = \varepsilon \psi_{i2}(t)$ . Ясно, что вектор-функции  $\psi_i(t)$  удовлетворяют ОДУ

$$\dot{\psi}_j = -\lambda_{j+1} \psi_j + \varepsilon B(t) \psi_j, \quad (i = 1, 2), \quad (5.11)$$

где матрица  $B(t)$  имеет вид

$$B(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \frac{1}{4} \cos t - \frac{c}{16} |\sin t| & 0 \end{pmatrix}.$$

Учитывая разложение (5.9), систему (5.11) можно представить в виде

$$\dot{\psi} = \varepsilon C(t, \varepsilon) \psi, \quad (5.12)$$

где матрица  $C(t, \varepsilon) = C^0(t) + \varepsilon^2 C^2 + \dots$  зависит от параметра  $\varepsilon$  аналитически и может быть представлена в форме

$$C(t, \varepsilon) = \begin{pmatrix} \mp \frac{i}{2} \sqrt{\frac{c}{2\pi}} + O(\varepsilon^2) & 1 \\ \frac{1}{4} \cos t - \frac{c}{16} |\sin t| & \mp \frac{i}{2} \sqrt{\frac{c}{2\pi}} + O(\varepsilon^2) \end{pmatrix}. \quad (5.13)$$

Поскольку *a priori* известно, что система (5.12) при любом достаточно малом  $\varepsilon$  имеет одномерное линейное пространство периодических решений, то нетрудно задать однопараметрическое, аналитическое по  $\varepsilon$  семейство периодических решений  $\psi(t, \varepsilon)$ . Такое семейство может порождаться, например, начальными данными на единичной окружности. Будем использовать для начальных данных условие

$$\psi_1(0, \varepsilon) \equiv 1,$$

из которого в силу аналитичности функции  $\psi_1(0, \varepsilon)$  по  $\varepsilon$  и справедливости разложения

$$\psi_1(0, \varepsilon) = \psi_{01}^0 + \varepsilon \psi_{01}^1 + \dots$$

сразу следует, что

$$\psi_{01}^0 = 1, \quad \psi_{01}^1 = 0, \dots$$

Таким образом, на периодическом решении  $\psi(t, \varepsilon)$  для системы (5.12) должно выполняться условие периодичности

$$\int_0^{2\pi} C(t, \varepsilon) \psi(t, \varepsilon) dt = \mathbf{0},$$

из которого следует, что любой коэффициент в разложении левой части по  $\varepsilon$  имеет нулевое среднее. Подставляя теперь разложение

$$\psi(t, \varepsilon) = \psi^0(t) + \varepsilon \psi^1(t) + \dots$$

в левую и правую части уравнения (5.12), получим, в частности,

$$\dot{\psi}^0 = \mathbf{0}, \quad \dot{\psi}^1 = C^0(t) \psi^0, \dots$$

Условие нулевого среднего

$$\int_0^{2\pi} C^0(t) dt \psi^0 = \mathbf{0}$$

можно записать в виде системы двух уравнений

$$\mp \frac{i}{2} \sqrt{2\pi c} \psi_{01}^0 + 2\pi \psi_{02}^0 = 0, \quad (5.14)$$

$$-\frac{c}{4} \psi_{01}^0 \mp \frac{i}{2} \sqrt{2\pi c} \psi_{02}^0 = 0, \quad (5.15)$$

поскольку

$$\int_0^{2\pi} C^0(t) dt = \begin{pmatrix} \mp \frac{i}{2} \sqrt{2\pi c} & 2\pi \\ -\frac{c}{4} & \mp \frac{i}{2} \sqrt{2\pi c} \end{pmatrix}.$$

Из уравнения (5.14) имеем

$$\psi_{02}^0 = \pm \frac{i}{2} \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \psi_{01}^0.$$

Подставляя полученную величину для  $\psi_{02}^0$  в (5.15), получим тождество

$$\left(-\frac{c}{4} + \frac{c}{4}\right) \psi_{01}^0 \equiv 0.$$

Величину  $\psi_{01}^0$  здесь можно выбирать произвольно. При нашем выборе аналитического семейства она равна единице. Так что имеем в нулевом приближении

$$\psi_{01}^0 = 1, \quad \psi_{02}^0 = \pm \frac{i}{2} \sqrt{\frac{c}{2\pi}}.$$

В дальнейшем нам понадобится также первая компонента первого приближения, имеющего вид

$$\psi^1(t) = \psi_0^1 + \int_0^t C^0(\tau) \psi^0 d\tau.$$

Компонента  $\psi_0^1$  является нулевой. Первая строка матрицы  $C^0(\tau)$ , умноженная на вектор  $\psi^0$ , также по предыдущему дает нулевой результат. Поэтому периодическое решение системы линейных ОДУ (5.12) можно записать в виде

$$\psi_1(t) = 1 + O(\varepsilon^2), \quad \psi_2(t) = \pm \frac{i}{2} \sqrt{\frac{c}{2\pi}} + O(\varepsilon),$$

из чего выводим, что соответствующие периодические функции в (5.10) допускают асимптотическое представление

$$\varphi_1(t) = 0, \quad \varphi_2(t) = 1 + O(\varepsilon^2), \quad \varphi_3(t) = \pm \frac{i}{2} \sqrt{\frac{c}{2\pi}} \varepsilon + O(\varepsilon^2).$$

Так что базисные решения, соответствующие характеристическим показателям системы (5.7), можно представить в форме

$$\xi_1(t) = \beta_1(1, 0, 0)^T, \quad \xi_2(t) = \beta_2 \varphi_2(t) e^{\lambda_2 t}, \quad \xi_3(t) = \beta_3 \varphi_3(t) e^{\lambda_3 t},$$

где  $\beta_i$  ( $i = 1, 2, 3$ ) — произвольные постоянные. Вычислим эти же решения в карте  $\varphi_2$ . Для этого представим диффеоморфизм

$$\mathbf{g} : (\lambda, z, p_z) \mapsto (u, z_1, z_1)$$

в виде композиции  $\mathbf{g} = \mathbf{g}_3 \circ \mathbf{g}_2 \circ \mathbf{g}_1$ , где частичные отображения задаются при помощи соответствий

$$\begin{aligned} \mathbf{g}_1 & : (\lambda, z, p_z) \mapsto (u, \lambda, p_\lambda), \\ \mathbf{g}_2 & : (u, \lambda, p_\lambda) \mapsto (u, \lambda, p), \\ \mathbf{g}_3 & : (u, \lambda, p) \mapsto (u, z_1, z_1), \end{aligned}$$

вычисляемых по формулам

$$\begin{aligned} \mathfrak{g}_1 &: \begin{cases} u = \arg(p_z + iz) = \operatorname{atan2}(p_z, z), \\ \lambda = \lambda, \\ p_\lambda = h - \frac{1}{2}p_z^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}z \sin \lambda - \mu H_1(\lambda, z) - \dots, \end{cases} \\ \mathfrak{g}_2 &: \begin{cases} u = u, \\ \lambda = \lambda, \\ p = \frac{1}{2} + p_\lambda - p_\lambda^*(\lambda), \end{cases} \\ \mathfrak{g}_3 &: \begin{cases} u = u, \\ z_1 = \sqrt{2p} \sin \lambda, \\ z_2 = \sqrt{2p} \cos \lambda, \end{cases} \end{aligned}$$

причем функция  $p_\lambda^*(\lambda)$  соответствует точному периодическому решению в соответствии с интегралом энергии

$$p_\lambda^*(\lambda) = h - \frac{1}{2}[p_z^*(\lambda)]^2 + \frac{\sqrt{2}}{4}z^*(\lambda) \sin \lambda - \mu H_1(\lambda, z^*(\lambda)) - \dots$$

Вычислим по отдельности матрицы Якоби этих отображений. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial(u, \lambda, p_\lambda)}{\partial(\lambda, z, p_z)} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{p_z}{z^2 + p_z^2} & -\frac{z}{z^2 + p_z^2} \\ 1 & 0 & 0 \\ \frac{\partial p_\lambda}{\partial \lambda} & \frac{\partial p_\lambda}{\partial z} & -p_z \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial(u, \lambda, p)}{\partial(u, \lambda, p_\lambda)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{\partial p_\lambda^*}{\partial \lambda} & 1 \end{pmatrix}, \\ \frac{\partial(u, z_1, z_2)}{\partial(u, \lambda, p)} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & z_2 & \frac{z_1}{z_1^2 + z_2^2} \\ 0 & -z_1 & \frac{z_2}{z_1^2 + z_2^2} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Для обеспечения точности порядка  $\varepsilon$  при представлении решения системы в вариациях в карте  $\varphi_2$  эти матрицы достаточно вычислить на порождающем решении, т. к. возмущения в решении первого порядка по  $\mu$  соответствуют по  $\varepsilon = \sqrt{\mu}$  второму порядку малости. На порождающем решении те же матрицы Якоби имеют вид

$$\begin{aligned} \left. \frac{\partial(u, \lambda, p_\lambda)}{\partial(\lambda, z, p_z)} \right|_{\mu=0} &= \begin{pmatrix} 0 & -2\sqrt{2} \cos t & 2\sqrt{2} \sin t \\ 1 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{8} \sin t \cos t & \frac{\sqrt{2}}{4} \sin t & \frac{\sqrt{2}}{4} \cos t \end{pmatrix}, \\ \left. \frac{\partial(u, \lambda, p)}{\partial(u, \lambda, p_\lambda)} \right|_{\mu=0} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{8} \sin t \cos t & 1 \end{pmatrix}, \\ \left. \frac{\partial(u, z_1, z_2)}{\partial(u, \lambda, p)} \right|_{\mu=0} &= \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos t & \sin t \\ 0 & -\sin t & \cos t \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

## 6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрено относительное движение КА под действием моментов сил гравитации и светового давления. Под КА подразумевается небесное тело, способное отражать световой поток от Солнца. Орбитальное движение КА считается известным. КА совершает плоские движения в горизонтальной плоскости относительно центра масс. Отражающее зеркало может быть размещено перпендикулярно плоскости орбиты. Основная задача, решенная в работе — это исследование устойчивости эксцентриситетных колебаний КА. Данный процесс развернут поэтапно. Сначала установлено существование колебаний заданного типа. Здесь штатным образом применена теорема о неявной функции. Последующий затем анализ устойчивости опирается на линейную теорию и сводится к рассмотрению систем в вариациях.

Общие вопросы динамики квазистатических систем можно найти в [4, 11]. Завершает работу анализ нелинейного случая.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Белецкий В. В.* Движение искусственного спутника относительно центра масс. — М.: Наука, 1965.
2. *Карымов А. А.* Определение сил и моментов сил светового давления, действующих на тело при движении в космическом пространстве// Прикл. мат. мех. — 1962. — 26, № 5. — С. 865–876.
3. *Косенко И. И.* Топологическая степень и аппроксимация решений нерегулярных задач механики. Колебания спутника на эллиптической орбите// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2006. — 16. — С. 68–95.
4. *Красильников П. С.* Прикладные методы исследования нелинейных колебаний. — Ижевск: Институт комп. иссл., 2015.
5. *Малкин И. Г.* Теория устойчивости движения. — М.—Л.: ГИТТЛ, 1952.
6. *Малкин И. Г.* Некоторые задачи теории нелинейных колебаний. — М.: Едиториал УРСС, 2004.
7. *Маркеев А. П.* Конструктивный алгоритм нормализации периодического гамильтониана// Прикл. мат. мех. — 2005. — 69, № 3. — С. 355–371.
8. *Мозер Ю.* Лекции о гамильтоновых системах. — М.: Мир, 1973.
9. *Моисеев Н. Н.* Асимптотические методы нелинейной механики. — М.: Наука, 1969.
10. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2001.
11. *Розо М.* Нелинейные колебания в теории устойчивости. — М.: Наука, 1971.
12. *Треногин В. А.* Функциональный анализ. — М.: Наука, 1980.
13. *Уиттекер Э. Т.* Аналитическая динамика. — Ижевск: Удмуртский унив., 1999.
14. *Филлипов А. Ф.* Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985.
15. *Шварц Л.* Анализ. Т. 1. — М.: Мир, 1972.
16. *Шильников Л. П., Шильников А. Л., Тураев Д. В., Чуа Л.* Методы качественной теории в нелинейной динамике. Часть 1. — Москва—Ижевск: Институт комп. иссл., 2004.
17. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972.
18. *Kossenko I. I.* On preservation of conditionally-periodic satellite librations in elliptic orbit with account of solar light pressure// Regul. Chaotic Dyn. — 2004. — 9, № 1. — С. 47–58.

И. И. Косенко

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

E-mail: kosenkoi@gmail.com

UDC 517.5+519.6+629.195.1

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-300-326

EDN: XNCXFF

## Forced Oscillations of a Satellite under the Influence of Light Pressure and Gravity Forces

I. I. Kosenko

*Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia*

**Abstract.** The relative motion of a spacecraft under the influence of gravitational forces and light pressure is considered. By spacecraft we mean a celestial body capable of reflecting light from the Sun. The orbital motion of the spacecraft is considered known. The spacecraft makes plane movements in a horizontal plane relative to its center of mass. The reflecting mirror can be placed perpendicular to the orbital plane.

The main problem solved in this paper is the study of the stability of eccentric oscillations. This technology is being rolled out gradually. First, the existence of oscillations of a given type is established. To do this, the implicit function theorem is applied in a standard way. The subsequent stability analysis is based on linear theory and is reduced to the consideration of systems in variations. The paper is concluded with consideration of the nonlinear case.

**Keywords:** eccentricity oscillations, stability of oscillations, disturbance with a small parameter, light pressure, satellite orbit.

**Conflict-of-interest.** The author declares no conflicts of interest.

**Acknowledgments and funding.** The author declares no financial support.

**For citation:** I. I. Kosenko, “Forced Oscillations of a Satellite under the Influence of Light Pressure and Gravity Forces,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. 70, No. 2, 300–326. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-300-326>

### REFERENCES

1. V. V. Beletskiy, *Dvizhenie iskusstvennogo sputnika otnositel'no tsentra mass* [Movement of an artificial satellite relative to the center of mass], Nauka, Moscow, 1965 (in Russian).
2. A. A. Karymov, “Opredelenie sil i momentov sil svetovogo davleniya, deystvuyushchikh na telo pri dvizhenii v kosmicheskom prostranstve” [Determination of forces and moments of light pressure forces acting on a body when moving in cosmic space], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1962, **26**, No. 5, 865–876 (in Russian).
3. I. I. Kosenko, “Topologicheskaya stepen' i approksimatsiya resheniy neregulyarnykh zadach mekhaniki. Kolebaniya sputnika na ellipticheskoy orbite” [Topological degree and approximation of solutions for nonregular problems of mechanics: oscillations of satellites on elliptic orbits], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2006, **16**, 68–95 (in Russian).
4. P. S. Krasil'nikov, *Prikladnye metody issledovaniya nelineynykh kolebaniy* [Applied Methods for Studying Nonlinear Oscillations], Inst. Komp. Issl., Izhevsk, 2015 (in Russian).
5. I. G. Malkin, *Teoriya ustoychivosti dvizheniya* [Theory of Motion Stability], GITTL, Moscow–Leningrad, 1952 (in Russian).
6. I. G. Malkin, *Nekotorye zadachi teorii nelineynykh kolebaniy* [Some Problems of the Theory of Nonlinear Oscillations], Editorial URSS, Moscow, 2004 (in Russian).



7. A. P. Markeev, “Konstruktivnyy algoritm normalizatsii periodicheskogo gamil’toniana” [Constructive algorithm for normalizing a periodic Hamiltonian], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 2005, **69**, No. 3, 355–371 (in Russian).
8. J. Moser, *Lektsii o gamil’tonovykh sistemakh* [Lectures on Hamiltonian Systems], Mir, Moscow, 1973 (Russian translation).
9. N. N. Moiseev, *Asimptoticheskie metody nelineynoy mekhaniki* [Asymptotic Methods of Nonlinear Mechanics], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
10. L. S. Pontryagin, *Obyknovennyye differentsial’nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], NITs «Regulyarnaya i khaoticheskaya dinamika», Izhevsk, 2001 (in Russian).
11. M. Rozo, *Nelineynyye kolebaniya v teorii ustoychivosti* [Nonlinear Oscillations in Stability Theory], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
12. V. A. Trenogin, *Funktsional’nyy analiz* [Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1980 (in Russian).
13. E. T. Whittaker, *Analiticheskaya dinamika* [A Treatise on the Analytical Dynamics of Particles and Rigid Bodies], Udmurt. Univ., Izhevsk, 1999 (in Russian).
14. A. F. Filippov, *Differentsial’nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast’yu* [Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side], Nauka, Moscow, 1985 (in Russian).
15. L. Schwartz, *Analiz. T. 1* [Analyse Mathématique. Cours I et II], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
16. L. P. Shil’nikov, A. L. Shil’nikov, D. V. Turaev, and L. Chua, *Metody kachestvennoy teorii v nelineynoy dinamike. Chast’ 1* [Methods of Qualitative Theory in Nonlinear Dynamics. Part 1], Inst. Komp. Issl., Moskva–Izhevsk, 2004 (in Russian).
17. V. A. Yakubovich and V. M. Starzhinskiy, *Lineynyye differentsial’nye uravneniya s periodicheskimi koeffitsientami i ikh prilozheniya* [Linear Differential Equations with Periodic Coefficients and Their Applications], Nauka, Moscow, 1972 (in Russian).
18. I. I. Kosenko, “On preservation of conditionally-periodic satellite librations in elliptic orbit with account of solar light pressure,” *Regul. Chaotic Dyn.*, 2004, **9**, No. 1, 47–58.

I. I. Kosenko

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

E-mail: kosenkoi@gmail.com

УДК 519.684.4, 550.394.2

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-327-342

EDN: YMOOYD

## ЗАВИСИМОСТЬ РАСЧЕТНЫХ ВЫСОТ ВОЛН ЦУНАМИ ОТ РАЗРЕШЕНИЯ СЕТКИ

М. М. Лаврентьев<sup>1</sup>, К. Ф. Лысаков<sup>1</sup>, Ан. Г. Марчук<sup>2</sup>, К. К. Облаухов<sup>1</sup>,  
М. Ю. Шадрин<sup>1</sup>

<sup>1</sup>Институт автоматизации и электротехники СО РАН, Новосибирск, Россия

<sup>2</sup>Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск,  
Россия

**Аннотация.** Цунами, произошедшее 11 марта 2011 года, а также другие недавние события показали, что разрушительные волны цунами, вызванные землетрясениями, продолжают представлять значительный риск для населения прибрежных районов, прилегающих к зонам субдукции, где расположено большинство источников цунами. В некоторых местах вдоль этих побережий высота подъема цунами может достигать 30 м и более, что приводит к разрушениям и человеческим жертвам. Однако максимумы высоты волн очень неравномерно распределены вдоль побережья с резкими локальными пиками амплитуды. Поскольку для прибрежных событий время прибытия волны цунами в ближайшую прибрежную точку после землетрясения составляет порядка 20 минут, быстрая (в течение 1-2 минут) правильная оценка распределения максимальной высоты волн вдоль побережья позволит службам оповещения принять меры по эвакуации именно там, где это необходимо.

Современные инструменты моделирования позволяют быстро рассчитать параметры волны с достаточной точностью, если известны характеристики волны на начальный момент времени. Однако для этого требуются расчеты с шагом в несколько метров, что отнимает много времени даже при использовании суперкомпьютеров. Кроме того, в случае сильного землетрясения возможны перебои в подаче электроэнергии, что не гарантирует, что численное моделирование можно будет начать сразу после сейсмического события. Использование большой расчетной сетки с разрешением в сотни метров не позволяет корректно оценить высоту волн цунами вблизи берега. Мелкие сетки приводят к увеличению продолжительности вычислительного времени. Разрешение этого противоречия диктует необходимость выбора оптимального соотношения между шагом сетки (точность результатов) и временем расчета. В данной работе исследуется зависимость расчетных параметров волны цунами от шага сетки. Полученные результаты будут использованы для оптимального выбора зон применения сеток с различным шагом.

Вычислительные эксперименты проводились на персональном компьютере (ПК) с использованием аппаратного ускорения — специализированной микросхемы на базе программируемых вентильных матриц (*Field Programmable Gate Array* — *FPGA*), используемой с компьютером в качестве сопроцессора. В результате достигается достаточно высокая производительность вычислений. Расчет параметров волн вблизи берега на расчетной сетке из  $3000 \times 2500$  узлов занимает менее 1 минуты. Кроме того, предлагаемое решение не зависит от возможных сбоев в электропитании.

**Ключевые слова:** система уравнений мелкой воды, схема Мак-Кормака, высота волны цунами.

**Заявление о конфликте интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Благодарности и финансирование.** Работа выполнена при поддержке государственного задания ИАиЭ СО РАН (FWNG-2024-0014) и ИВМиМГ СО РАН (FWNM-2022-0004).

**Для цитирования:** М. М. Лаврентьев, К. Ф. Лысаков, Ан. Г. Марчук, К. К. Облаухов, М. Ю. Шадрин. Зависимость расчетных высот волн цунами от разрешения сетки // *Соврем. мат. Фундам. направл.* 2024. Т. 70, № 2. С. 327–342. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-327-342>

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Важность численного моделирования волн цунами, начиная с момента их возникновения и заканчивая оценкой зоны затопления на берегу, чрезвычайно высока из-за их возможного воздействия на прибрежные территории. Например, волна цунами, вызванная Великим землетрясением Тохоку 11 марта 2011 года, привела к человеческим жертвам (по оценкам, более 20 тысяч человек) и огромному экономическому ущербу (около 1/4 ВВП Японии [18]). Если эпицентр землетрясения расположен в районе одной из зон субдукции у берегов Японии, то волна цунами, вызванная таким землетрясением, достигает ближайшего к очагу прибрежного района примерно за 20 минут. Поэтому предлагаемые инструменты анализа и оценки параметров волн должны давать результаты очень быстро, в течение 1-2 минут. В то же время оценка ожидаемых параметров волны у побережья (главным из которых является максимальная высота волны) должна быть достаточно точной. Очевидно, что значительно заниженное значение ожидаемой амплитуды может привести к человеческим жертвам. В случае значительного завышения максимальных значений стоимость мер по эвакуации, остановке предприятий и дорожного движения может привести к большим экономическим потерям.

Существует несколько доступных пакетов программного обеспечения для численного моделирования цунами. Среди наиболее известных мы упоминаем следующие: метод расщепления цунами MOST (Method Of Splitting Tsunamis, Тихоокеанская лаборатория морской среды NOAA, Сиэтл, Вашингтон, США) [1, 12]; COMCOT (Корнеллский университет, Итака, Нью-Йорк, США; NS Science, Новая Зеландия) [13]; TUNAMI-N1/TUNAMI-N2 (Университет Тохоку, Сендай, Япония) [10, 14]; «ВОЛНА» и «НАМИ-ДАНС» (программное обеспечение для моделирования цунами, разработанное Специальным бюро Сахалина, Россия, и METU, Турция) [15]. Для получения результатов в кратчайшие сроки некоторые алгоритмы реализованы на графических процессорах (GPU) и высокопроизводительных кластерах. Однако ни один из этих пакетов не дает результата за требуемый промежуток времени в 1-2 минуты. Как показано в [3-5], использование аппаратного ускорения выполнения компьютерного кода (калькулятор на основе FPGA для системы уравнений мелкой воды) позволяет выполнять корректное (т. е. практически точное) численное моделирование двух часов распространения волны на сетке  $2500 \times 3000$  узлов менее чем за 1 минуту.

Время, необходимое для численного расчета распространения волн на компьютере, зависит от следующих факторов: (1) характеристики вычислительной платформы, (2) количество узлов сетки, (3) общее время распространения цунами по акватории и (4) шаг по времени. Таким образом, время вычислений можно сократить либо за счет увеличения производительности компьютера, либо за счет уменьшения количества вычислительных узлов благодаря увеличению шага пространственной сетки. Произвольное увеличение значения шага по времени невозможно из-за возникновения вычислительной неустойчивости. Существует максимально допустимое значение этого шага, зависящее от максимальной глубины расчетной области и длины пространственных шагов [6].

Численное моделирование распространения волн цунами обычно (в частности, как это сделано в упомянутых выше программных комплексах) осуществляется с использованием разностных схем на сетках, чаще всего с привязкой к географическим координатам. Разрешение расчетных сеток обычно выбирается исходя из требуемого уровня детализации результатов (высот цунами) вдоль береговой линии. Если высокий уровень детализации не требуется, длину пространственного шага можно выбирать произвольно. Небольшой шаг сетки существенно увеличивает количество вычислительных узлов и, следовательно, время расчета одного временного шага. Кроме того, по условию устойчивости Куранта для явных разностных схем [6] короткий пространственный шаг требует меньшего шага по времени, что также увеличивает время вычислений. Для точной оценки ожидаемой максимальной высоты волн вдоль побережья обычно требуется шаг расчетной сетки от 5 до 15 метров. Поэтому для того, чтобы иметь возможность выполнить расчеты в разумные сроки, в ряде исследований [7, 9] используется метод вложенных (адаптивных) сеток.

Возникает вопрос о влиянии длины пространственного шага на результаты моделирования. Это важно как для анализа результатов численного моделирования, так и для правильного выбора регионов в методе вложенных сеток.

В настоящей работе расчеты распространения цунами от одного и того же источника выполнены на трех сетках различного разрешения. В расчетах используются реальные батиметрические данные на шельфе Японии.

Остальная часть статьи устроена следующим образом. В разделе 2 сначала представлена система уравнений мелкой воды в рассматриваемой форме вместе с конечно-разностной схемой Мак-Кормака, используемой для численных расчетов. Затем кратко описывается архитектура предлагаемого калькулятора на базе FPGA. Результаты численных испытаний приведены в разделе 3. Они обсуждаются в заключительном разделе.

## 2. МАТЕРИАЛЫ И МЕТОДЫ

**2.1. Системы уравнений мелкой воды.** Следуя большинству исследователей явлений цунами (см., напр., [2, 10]), мы моделируем распространение волн на основе версии системы уравнений мелкой воды [11] в следующем виде:

$$\begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial(uH)}{\partial x} + \frac{\partial(vH)}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} + g \frac{\partial H}{\partial x} &= g \frac{\partial D}{\partial x}, \\ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} + g \frac{\partial H}{\partial y} &= g \frac{\partial D}{\partial y}, \end{aligned} \quad (2.1)$$

где  $H(x, y, t) = \eta(x, y, t) + D(x, y)$  — расстояние от поверхности моря до дна;  $\eta$  — смещение морской поверхности относительно среднего уровня моря (высота волны);  $D(x, y)$  — глубина (значение которой предполагается известной во всех точках сетки);  $u(x, y, t)$  и  $v(x, y, t)$  — компоненты вектора скорости водного потока в направлениях  $x$  и  $y$  соответственно;  $g$  — ускорение силы тяжести.

Система уравнений мелкой воды (2.1) не учитывает дисперсионные эффекты, поскольку при локальном распространении достаточно длинных волн цунами эти эффекты не успевают существенно изменить параметры волн вблизи побережья. Использование аппроксимации уравнений мелкой воды для изучения явления типично среди исследователей цунами.

Существует большой список литературы по численному изучению нелинейных систем дифференциальных уравнений в частных производных гиперболического типа, к которым также принадлежит система (2.1). В вышеупомянутом программном обеспечении MOST реализовано разделение шагов расчета по пространственным направлениям.

**2.2. Схема Мак-Кормака.** Для численной аппроксимации системы уравнений мелкой воды (2.1) использовалась двухполушаговая схема Мак-Кормака (см. [8]). Этот алгоритм представляет собой явную разностную схему, использующую трехточечный шаблон типа «крест». Расчет на каждой итерации проводится в два этапа. Таким образом, на каждой итерации значения высоты волны и компоненты вектора скорости вычисляются с использованием необходимых данных в той же точке и двух соседних точках сетки при предыдущем значении времени; описание шаблонов расчета см. в [3]. Ниже представлена версия схемы Мак-Кормака, используемая для численных экспериментов.

Шаг 1:

$$\begin{aligned} \frac{\hat{H}_{ij}^{n+1} - H_{ij}^n}{\tau} + \frac{H_{ij}^n u_{ij}^n - H_{i-1j}^n u_{i-1j}^n}{\Delta x} + \frac{H_{ij}^n v_{ij}^n - H_{ij-1}^n v_{ij-1}^n}{\Delta y} &= 0, \\ \frac{\hat{u}_{ij}^{n+1} - u_{ij}^n}{\tau} + u_{ij}^n \frac{u_{ij}^n - u_{i-1j}^n}{\Delta x} + v_{ij}^n \frac{u_{ij}^n - u_{ij-1}^n}{\Delta y} + g \frac{\eta_{ij}^n - \eta_{i-1j}^n}{\Delta x} &= 0, \\ \frac{\hat{v}_{ij}^{n+1} - v_{ij}^n}{\tau} + u_{ij}^n \frac{v_{ij}^n - v_{i-1j}^n}{\Delta x} + v_{ij}^n \frac{v_{ij}^n - v_{ij-1}^n}{\Delta y} + g \frac{\eta_{ij}^n - \eta_{ij-1}^n}{\Delta y} &= 0. \end{aligned}$$

Шаг 2:

$$\begin{aligned} \frac{H_{ij}^{n+1} - \frac{\hat{H}_{ij}^{n+1} + H_{ij}^n}{2}}{\tau/2} + \frac{\hat{H}_{i+1j}^{n+1} \hat{u}_{i+1j}^{n+1} - \hat{H}_{ij}^{n+1} \hat{u}_{ij}^{n+1}}{\Delta x} + \frac{\hat{H}_{ij+1}^{n+1} \hat{v}_{ij+1}^{n+1} - \hat{H}_{ij}^{n+1} \hat{v}_{ij}^{n+1}}{\Delta y} &= 0, \\ \frac{u_{ij}^{n+1} - \frac{\hat{u}_{ij}^{n+1} + u_{ij}^n}{2}}{\tau/2} + u_{ij}^n \frac{\hat{u}_{i+1j}^{n+1} - \hat{u}_{ij}^{n+1}}{\Delta x} + v_{ij}^n \frac{\hat{u}_{ij+1}^{n+1} - \hat{u}_{ij}^{n+1}}{\Delta y} + g \frac{\hat{\eta}_{i+1j}^{n+1} - \hat{\eta}_{ij}^{n+1}}{\Delta x} &= 0, \\ \frac{v_{ij}^{n+1} - \frac{\hat{v}_{ij}^{n+1} + v_{ij}^n}{2}}{\tau/2} + u_{ij}^n \frac{\hat{v}_{i+1j}^{n+1} - \hat{v}_{ij}^{n+1}}{\Delta x} + v_{ij}^n \frac{\hat{v}_{ij+1}^{n+1} - \hat{v}_{ij}^{n+1}}{\Delta y} + g \frac{\hat{\eta}_{i+1j}^{n+1} - \hat{\eta}_{ij}^{n+1}}{\Delta y} &= 0. \end{aligned}$$

Здесь  $H_{ij}^n$ ,  $u_{ij}^n$ ,  $v_{ij}^n$  и  $\eta_{ij}^n$  — сеточные переменные, соответствующие функциям  $H$ ,  $u$  и  $v$  в дифференциальной системе (2.1). Параметры  $\tau$ ,  $\Delta x$  и  $\Delta y$  — это временной и пространственные шаги расчетной сетки. Для учета сферической формы Земного шара использовался уменьшающийся шаг сетки по долготе для больших значений широты. Обозначение  $F_{ij}^n$  описывает переменные на временном слое  $n$ ,  $\hat{F}_{ij}^n$  описывает промежуточные значения, а  $F_{ij}^{n+1}$  соответствует переменным на временном слое  $n + 1$ .

**2.3. Калькулятор на базе FPGA.** Конечно-разностная схема Мак-Кормака, описанная в предыдущем подразделе, была реализована как конвейер, позволяющий параллельно вычислять искомые параметры волны на нескольких временных слоях.

Для реализации алгоритма Мак-Кормака (конечно-разностной схемы) на платформе FPGA [4, 5] в качестве базового элемента калькулятора (ускорителя численного решения системы уравнений мелкой воды) были спроектированы так называемые процессорные элементы (ПЭ). Один ПЭ отражает реализацию одного временного шага алгоритма расчета. ПЭ были реализованы с использованием технологии HLS (*High Level Synthesize*) [19]. На вход ПЭ поступает поток значений  $H$ ,  $u$ ,  $v$  и  $D$  на  $n$ -м шаге по времени, что представляет собой последовательный обход вычислительного стека. На выходе получается тот же поток со значениями на временном шаге  $n + 1$ . ПЭ работает в конвейерном режиме и позволяет обрабатывать одну точку сетки за один такт компьютера. Соединив выход ПЭ со входом другого ПЭ, можно организовать цепочки (конвейеры) разной длины, позволяющие рассчитывать несколько шагов алгоритма одновременно по мере поступления результатов от предыдущего элемента.

Проведем краткое сравнение ключевых параметров FPGA и процессора  $x86$ , который де-факто является отраслевым стандартом для вычислительных платформ. Количество рабочих блоков FPGA достигает 12 888 при тактовой частоте до 1 ГГц. Процессор  $x86$  имеет менее 100 рабочих блоков при тактовой частоте до 5 ГГц. Пятикратное преимущество перед FPGA в тактовой частоте не компенсируется меньшим более чем в 100 раз количеством рабочих блоков. Еще более серьезное преимущество платформы FPGA заключается в объеме памяти и допустимом количестве обращений к памяти за один такт компьютера. На современных кристаллах FPGA объем памяти достигает 100 Мб при количестве операций чтения/записи за один такт компьютера, равном удвоенному числу рабочих блоков, т. е. достигает более 25 000. Процессор  $x86$  с аналогичным объемом памяти в 100 Мб допускает только одну операцию чтения/записи за такт компьютера.

Загрузить все рабочие блоки в компьютер можно только в том случае, если в качестве источника/приемника обрабатываемых данных используется регистровый файл. Он встроен в архитектуру  $x86$ . Практика показывает, что при реализации сложных алгоритмов потоковой обработки данных допустимого размера регистрового файла недостаточно. В таких случаях узким местом является путь доступа к памяти (в том числе к кэшу), вплоть до того, что часть рабочих блоков находится в состоянии простоя из-за ожидания получения данных из памяти или ожидания записи обработанных данных в память.

В случае использования FPGA эта проблема решается тем, что для каждого рабочего блока создается независимый блок памяти, способный выполнять две операции чтения/записи за один такт компьютера. Это позволяет практически всем операционным блокам загружать новые операции в каждом такте. Общий объем внутренней памяти FPGA сравним с размером кэша процессора  $x86$  и позволяет реализовать достаточно сложные алгоритмы обработки без обращения к внешней памяти.

Ограничивающим фактором использования FPGA вместо центрального процессора (ЦП) является сравнительная ограниченность таких инструментов, как среда разработки и реализация алгоритмов обработки данных. Разработка приложений для FPGA ведется на языках описания аппаратуры, таких как Verilog или VHDL, что требует, с одной стороны, ценных знаний в области проектирования цифровых схем, а с другой — дополнительного времени на разработку, поскольку языки описания аппаратуры являются достаточно низкоуровневыми.

В настоящее время широкое распространение получил подход HLS (*High Level Synthesize*): синтез цифровых схем из компьютерных языков высокого уровня. Использование компиляторов из высокоуровневых языков позволяет значительно ускорить процесс разработки. Таким образом, описанный выше калькулятор был реализован одним разработчиком на языке программирования C++ за 1 в месяц.

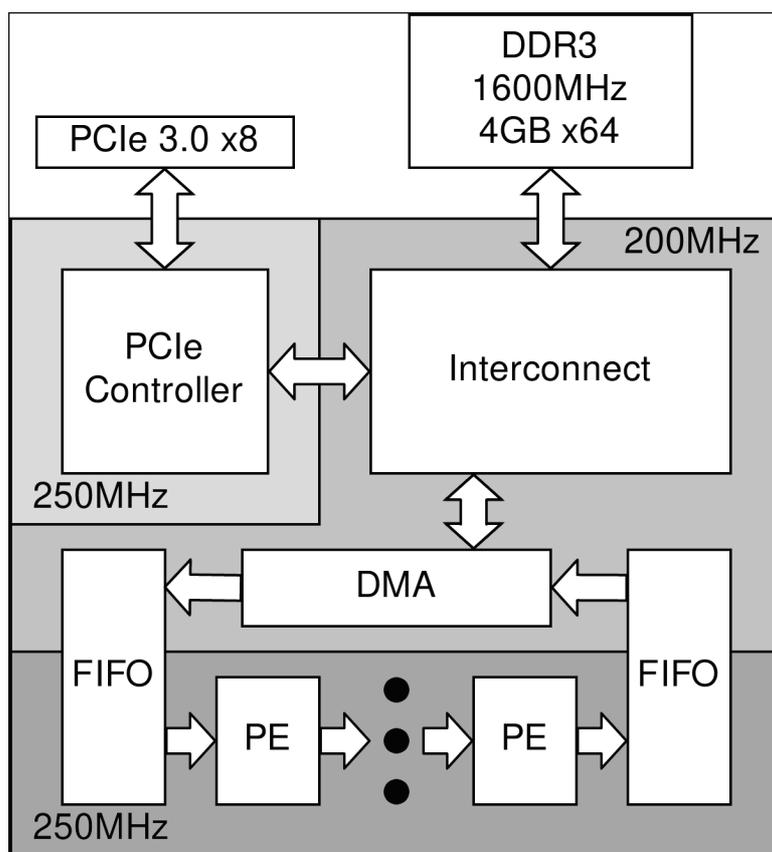


Рис. 1. Архитектура калькулятора для ускорения численного решения системы уравнений мелкой воды.

FIG. 1. Calculator architecture for accelerating the numerical solution of a system of shallow water equations.

### 3. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Чтобы исследовать влияние разрешения расчетной сетки на численные результаты, были проведены три вычислительных эксперимента по моделированию распространения цунами от одного и того же модельного источника, расположенного в Японском море у северо-западного побережья острова Хонсю. Для этой цели были построены 3 цифровые батиметрии на регулярных сетках, привязанных к географическим координатам и покрывающих одну и ту же территорию от 137° до 141° восточной долготы и от 37° до 42° северной широты. Цифровая батиметрия с координатной сеткой была построена на основе данных JODC [16] и ЕТОРО-2022 [17]. Длина пространственного шага была выбрана одинаковой в обоих направлениях и равна 0,001 географического градуса (111,3 м в направлении юг—север) для наиболее детальной батиметрии. Для

батиметрии со средней и крупной сеткой длина пространственного шага в обоих направлениях составила  $0,002^\circ$  (222,6 м) и  $0,004^\circ$  (445,2 м). География и топография расчетной области показаны на рис. 2.

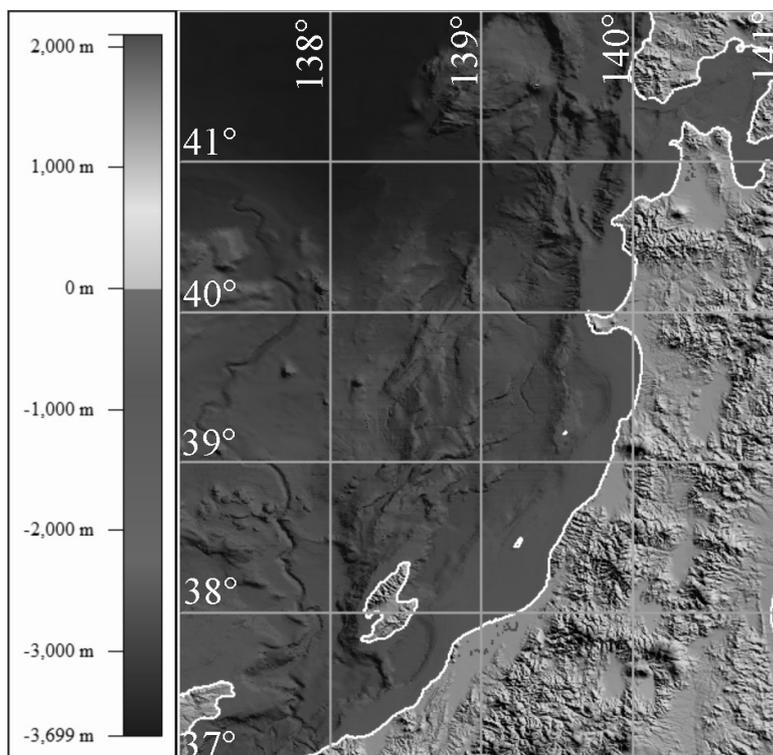


Рис. 2. География и батиметрия расчетного района.

FIG. 2. Geography and bathymetry of the calculated area.

Начальное вертикальное смещение водной поверхности имело форму эллипса с центром в точке с координатами  $x_0 = 138^\circ$  восточной долготы,  $y_0 = 40^\circ$  северной широты и определялось следующей формулой:

$$\eta = \frac{\eta_0}{2} \left( 1 + \cos \left( \sqrt{\frac{(x - x_0)^2}{r_1^2} + \frac{(y - y_0)^2}{r_2^2}} \right) \cdot \pi \right), \quad (3.1)$$

$$0 \leq \frac{(x - x_0)^2}{r_1^2} + \frac{(y - y_0)^2}{r_2^2} \leq 1.$$

Здесь  $r_1$  и  $r_2$  задают длины полуосей эллипса, а  $\eta_0$  — высоту в центре источника. В расчетах  $r_1$  и  $r_2$  были равны 35 км и 90 км соответственно, а максимальная высота смещения  $\eta_0$  в центре источника принималась равной 1 м. Длинная ось эллипсообразного центра источника была ориентирована под углом  $30^\circ$  к направлению юг—север (рис. 3). На рис. 3 показано распределение максимумов высоты цунами, рассчитанное по разностной схеме Мак-Кормака на персональном компьютере с калькулятором на базе FPGA.

На рис. 3 видно, что рассчитанные максимальные амплитуды цунами у берега наблюдаются в районах, приблизительно расположенных в направлении короткой оси эллипса. Результаты детальной, промежуточной и грубой сетки визуально не отличаются на изображениях, показывающих всю область, поэтому показан только один рисунок, соответствующий промежуточной сетке (а именно, рис. 3). Разницу высот цунами, рассчитанных на разных сетках по всей области, можно увидеть на рис. 4–7. На рис. 4 и 5 показано распределение разностей максимумов высоты волн по всей области, полученное при сравнении результатов на детальной и промежуточной сетках.

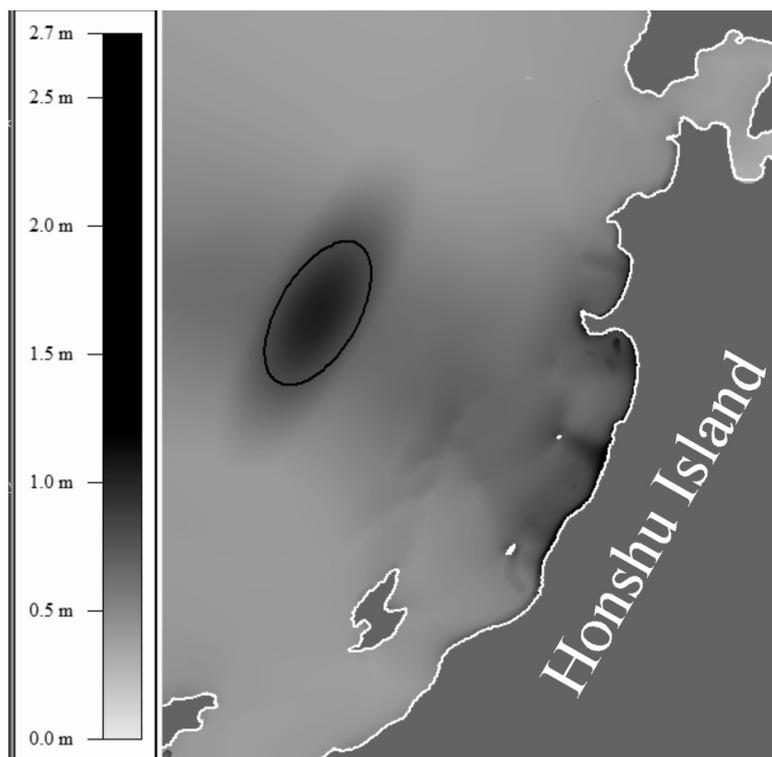


Рис. 3. Распределение максимальных высот волн по всей расчетной области в результате численного моделирования распространения цунами от модельного источника эллипсовидной формы на сетке промежуточного разрешения.

FIG. 3. Distribution of maximum wave heights over the entire computational domain as a result of numerical simulation of tsunami propagation from a model ellipsoidal source on an intermediate resolution grid.

На рис. 4 черным цветом показаны изолинии пространственного распределения разностей между детальной и промежуточной сетками, соответствующие уровню 0,001 м. На рис. 5, демонстрирующем прибрежную часть расчетной области, черной линией обозначены места, где разница максимальных высот цунами превышает 1 см. На рисунке видно, что разница максимальных высот в узлах сеток с одинаковым расположением почти везде не превышает 1 мм, за исключением некоторых прибрежных районов. На рис. 6 и 7 также показано распределение максимальных перепадов высот по результатам моделирования, но в виде сравнения высот на промежуточной и грубой сетках.

Сравнительно с рис. 4, 5, на рис. 6, 7 наблюдаются несколько большие площади акваторий с различиями в результатах более 1 мм (рис. 6) и с различиями более 1 см (рис. 7). Но площадь этих зон существенно меньше площади той части региона, где разница незначительна (менее 1 мм на максимальных высотах у берега порядка 1–2,5 м). Для более детального сравнения результатов на рис. 8 сравниваются максимальные высоты волн в узлах расчетной сетки вблизи участка береговой линии от точки **A** до точки **B**, указанного на рис. 4.

Анализ распределения максимальных высот на рис. 8 показывает достаточную близость результатов, полученных на детальной и промежуточной сетках. В целом максимальные высоты на детальной сетке незначительно превышают (на 1%–3%) высоты на промежуточной сетке. Аналогичное сравнение было проведено между результатами на промежуточной и грубой сетках. Это отражено на рис. 9.

Чтобы количество отсчетов максимальной высоты волн на участке береговой линии от точки **A** до точки **B** было одинаковым для промежуточной и грубой сеток, к результатам на грубой сетке добавлены повторы. В результате оба набора данных содержат 1301 значений максимальной высоты.

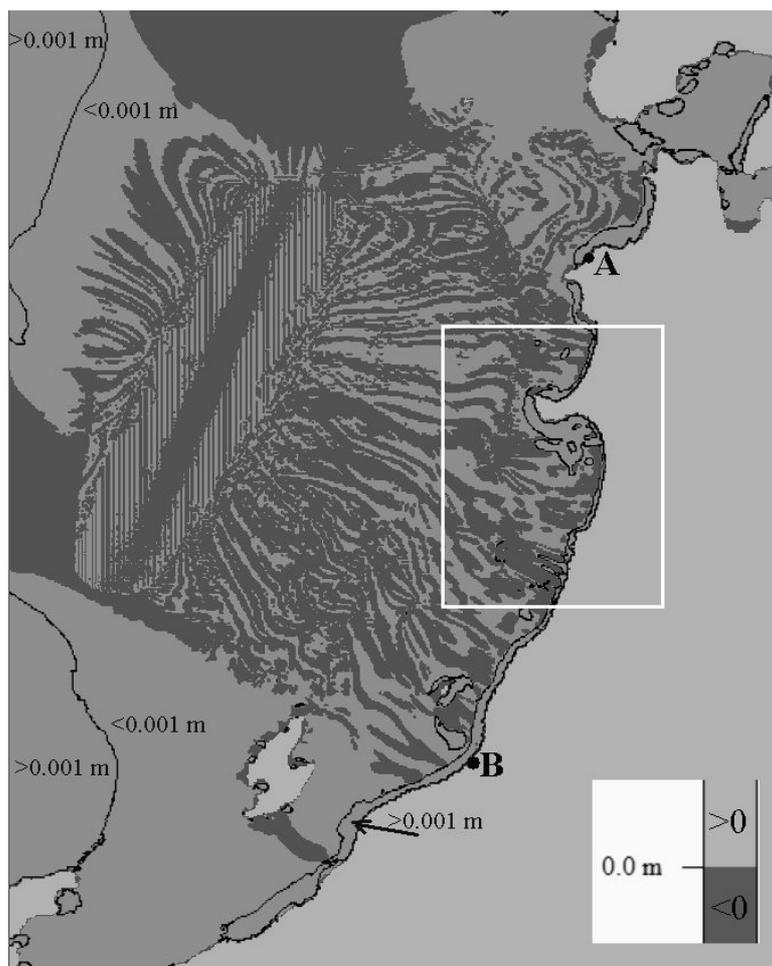


РИС. 4. Распределение разностей между максимальными высотами, рассчитанными на детальной и промежуточной сетках. Изолинии черного цвета соответствуют уровню 1 мм.

FIG. 4. Distribution of differences between maximum heights calculated on the detailed and intermediate grids. Black isolines correspond to the 1 mm level.

Наконец, на рис. 10 показано сравнение максимальных высот цунами, полученных по детальной сетке (сетка 1) и грубой сетке (сетка 3) вдоль участка береговой линии от точки А до точки В. Распределение максимумов высот цунами (в см) показано на рис. 10.

Чтобы уравнивать количество отсчетов максимального возвышения над уровнем моря между точками А и В в узлах детальной и грубой сеток, подробные данные были прорежены удалением каждого второго значения, а количество отсчетов в «грубых» данных было удвоено путем повторения каждого значения дважды.

#### 4. ОБСУЖДЕНИЕ

Вычислительные эксперименты на выбранной акватории показали, что практически везде увеличение пространственного шага примерно с 110 м до почти 500 м не привело к сколько-нибудь заметному изменению расчетных высот волн цунами. Даже в шельфовой зоне разница в результатах составляет 1-2% от высоты волны. Более заметная разница в амплитудах цунами наблюдается в некоторых точках вблизи береговой линии (см. рис. 8–10).

При сравнении результатов численных расчетов на сетках разного разрешения, представленных на рис. 4–10, видно, что в большей части прибрежных вод расчетные максимальные высоты выше для более детальных сеток (рис. 5 и 7). Ту же тенденцию можно наблюдать и по распределениям максимальных высот вдоль береговой линии, представленным на рис. 8–10. В то же время вдоль береговой линии имеется несколько точек, где высоты цунами, рассчитанные по



Рис. 5. Распределение разностей между максимальными высотами, рассчитанными на детальной и промежуточной сетках. На этом рисунке более подробно показан сегмент расчетной области, обозначенный белым прямоугольником на рис. 4. Изолинии черного цвета соответствуют уровню 1 см.

FIG. 5. Distribution of differences between maximum heights calculated on the detailed and intermediate grids. This figure shows in more detail the segment of the computational domain, indicated by the white rectangle in Fig. 4. Black isolines correspond to the level 1 cm.

грубой сетке, оказались выше, чем высоты волн в тех же узлах сетки при использовании более детальной сетки.

Это можно объяснить используемыми при численном моделировании граничными условиями у берега, реализующими полное отражение волны в ближайшем к берегу узле расчетной сетки, где глубина составляет не менее 8 м. В связи с тем, что сравнение высот производилось в узлах более грубой из двух сравниваемых сеток, расчетный узел более грубой сетки не всегда является точкой отражения волны при расчете на более детальной сетке. На более детальной сетке может быть узел, находящийся еще ближе к берегу, в котором глубина также не менее 8 м, где моделируется полное отражение, увеличивающее высоту волны вдвое. Из сравнения рис. 8 и 9 видно, что разница высот волн в одних и тех же точках побережья при использовании детальной и промежуточной сеток существенно меньше, чем такая же разница для промежуточной и грубой сеток.

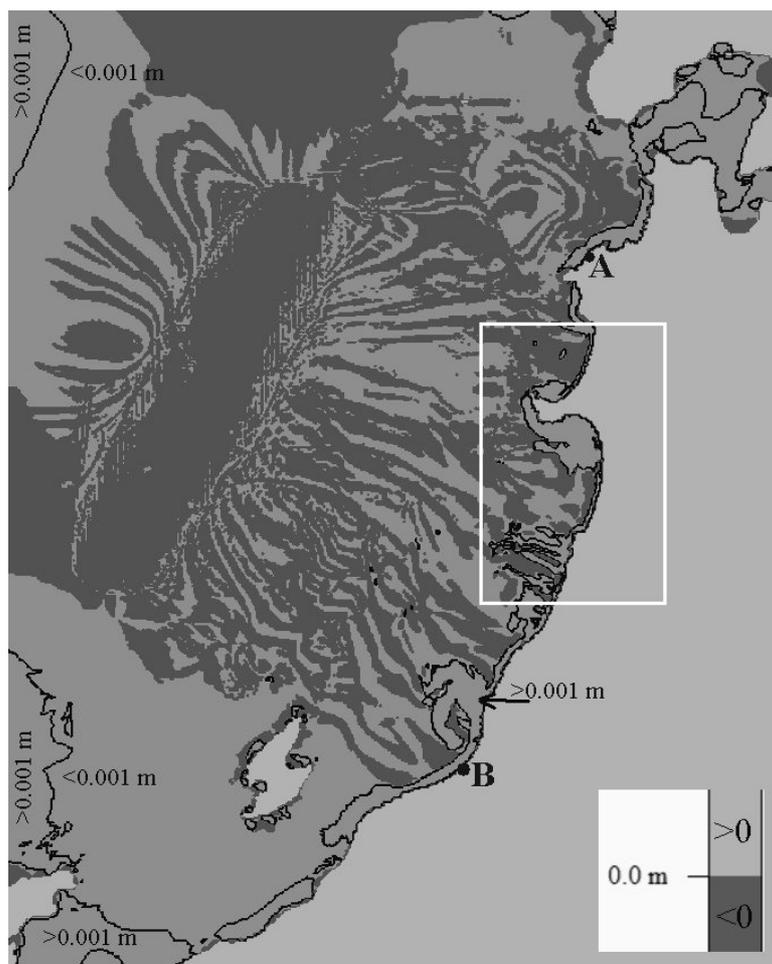


Рис. 6. Распределение разностей между максимальными высотами, рассчитанными на промежуточной и грубой сетках. На этом рисунке изолинии черного цвета соответствуют уровню 1 мм.

FIG. 6. Distribution of differences between maximum heights calculated on intermediate and coarse grids. In this figure, the black isolines correspond to the 1 mm level.

При дальнейшем увеличении шага пространственной сетки до 1-2 км, помимо ухудшения детальности результатов моделирования, будет возрастать численная диссипация разностной схемы, что становится заметным в результатах, если количество узлов сетки на длину волны составляет менее 15–20. В проведенных вычислительных экспериментах волна, генерируемая рассматриваемым модельным источником, изначально имеет длину порядка 60 км на глубине около 3000 м. Затем ее длина уменьшается до 10–15 км вблизи побережья, что приводит к существенному искажению результатов при использовании сеток с пространственным шагом более 1 км.

## 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Численные эксперименты показали, что при 15–20 узлах сетки на длину волны расстояние между точками сетки оказывает незначительное влияние на расчетную максимальную высоту волны. Следовательно, расчетные сетки с более чем 25 узлами на длину волны могут использоваться для повышения точности результирующих значений амплитуды цунами. Этот вывод следует использовать и при применении метода вложенных сеток для расчета параметров волн цунами. В частности, нет необходимости использовать более детальную сетку на достаточно больших глубинах, поскольку это увеличивает время расчета, но не способствует большей точности получаемых значений максимальной высоты волн.

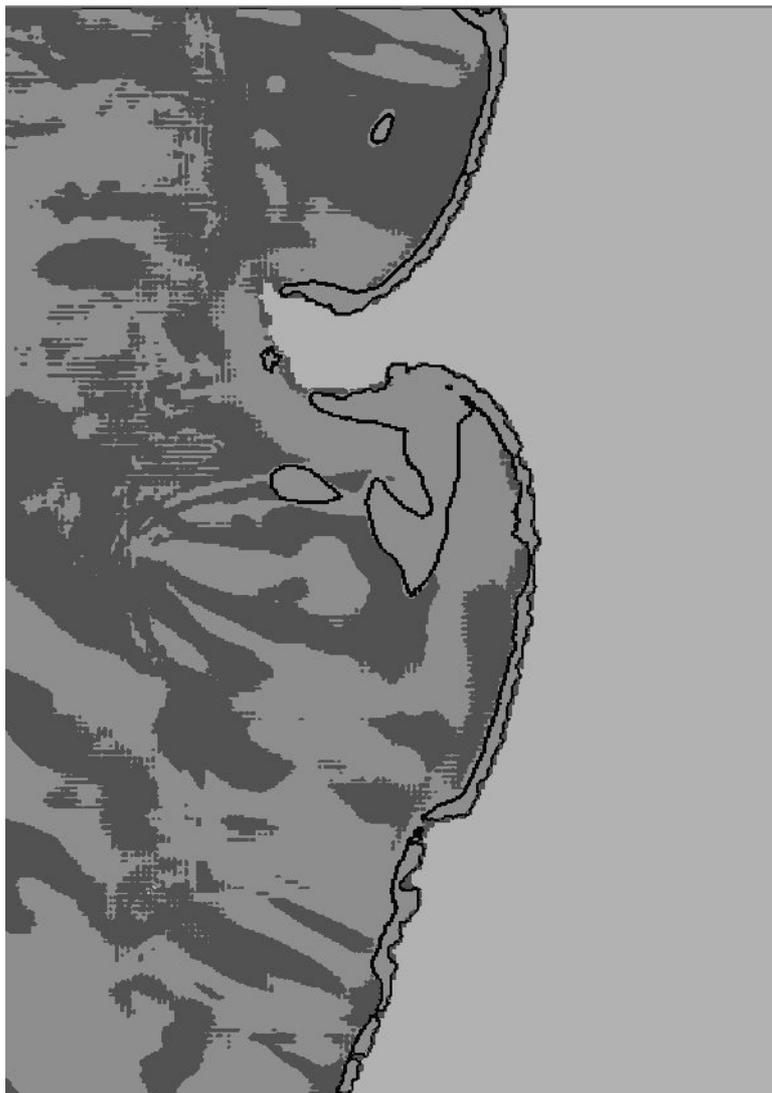


Рис. 7. Распределение разностей между максимальными высотами, рассчитанными на промежуточной и грубой сетках. На этом рисунке более подробно показан сегмент расчетной области, обозначенный белым прямоугольником на рис. 6. Черные изолинии соответствуют уровню 1 мм.

FIG. 7. Distribution of differences between maximum heights calculated on intermediate and coarse grids. This figure shows in more detail the segment of the computational domain, indicated by the white rectangle in Fig. 6. Black isolines correspond to the 1 mm level.

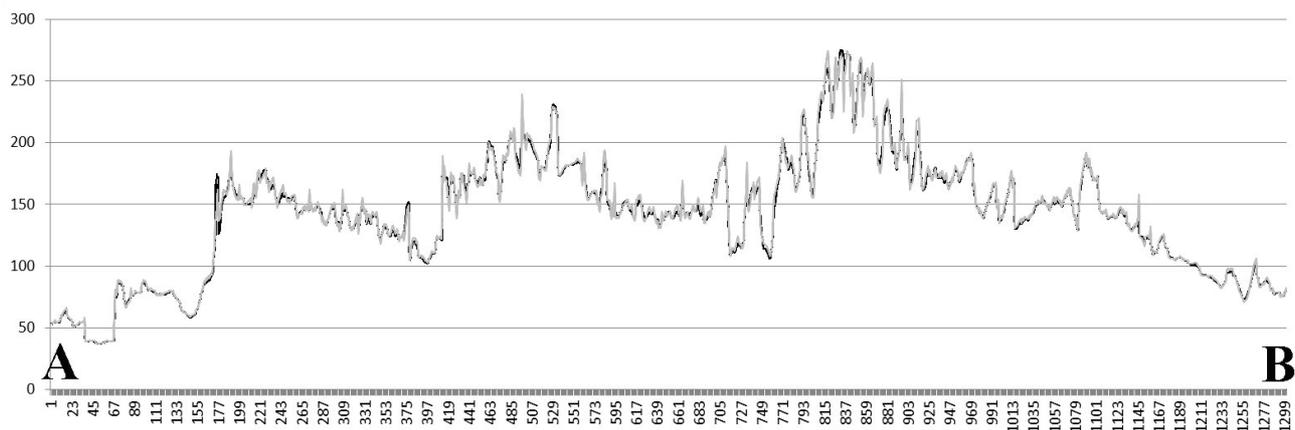


Рис. 8. Распределение максимальных высот в см вдоль побережья острова Хонсю между точками **A** и **B** (см. рис. 4), рассчитанное на детальной сетке (серый цвет) и на промежуточной сетке (черный цвет). По горизонтальной оси указано расстояние по широте (с шагом  $0,002^\circ$ ) от точки **A**.

FIG. 8. Distribution of maximum heights in cm along the coast of Honshu Island between points **A** and **B** (see Fig. 4), calculated on the detailed grid (gray) and on the intermediate grid (black). The horizontal axis indicates the latitude distance (with  $0.002^\circ$  steps) from the point **A**.

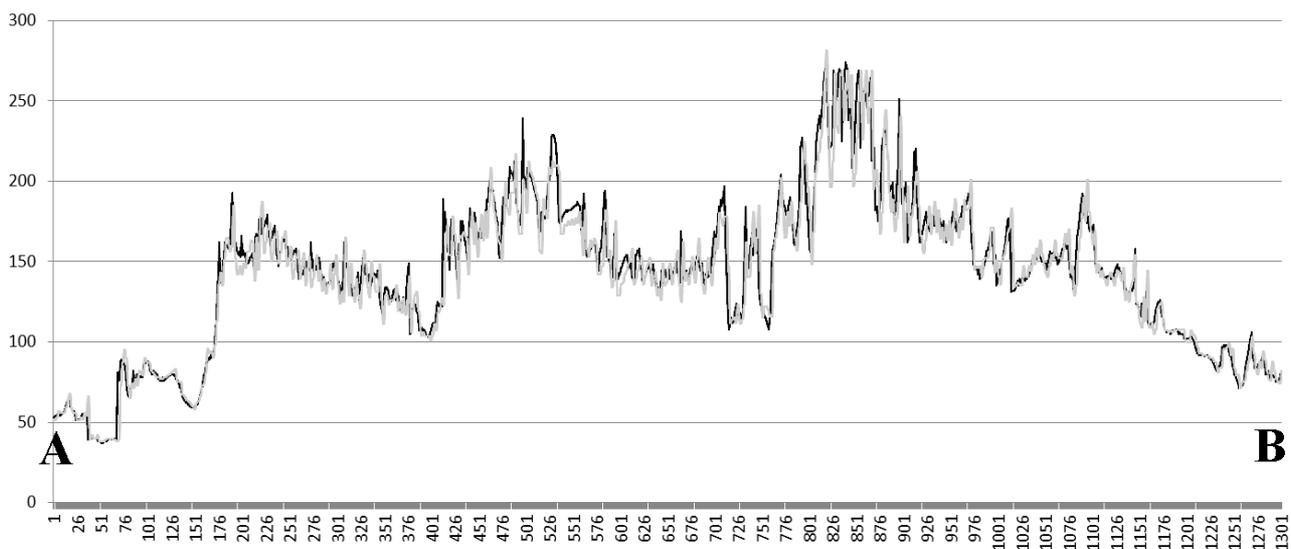


Рис. 9. Распределение максимальных высот вдоль участка побережья острова Хонсю от точки **A** до точки **B** (см. рис. 4), рассчитанное на промежуточной сетке (черный цвет) и на грубой сетке (серый цвет).

FIG. 9. Distribution of maximum heights along the coastline of Honshu Island from point **A** to point **B** (see Fig. 4), calculated on an intermediate grid (black) and on a coarse grid (gray).

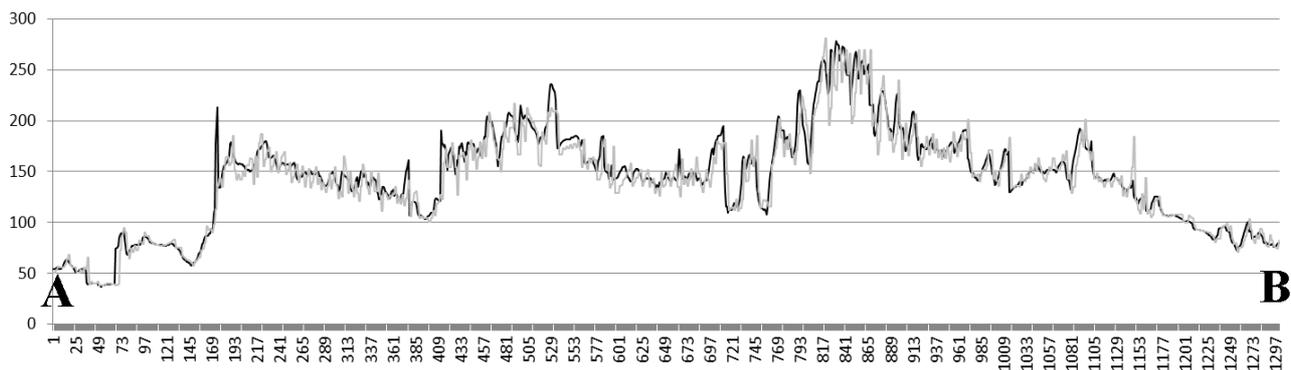


Рис. 10. Распределение максимальных высот вдоль участка побережья острова Хонсю от точки **A** до точки **B**, рассчитанное на детальной сетке (черный цвет) и на грубой сетке (серый цвет).

FIG. 10. Distributions of maximum heights along the coastline of Honshu Island from point **A** to point **B**, calculated on a fine grid (black) and on a coarse grid (gray).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Giga E., Spillane M., Titov V., Chamberlin C., Newman J. Development of the forecast propagation database for NOAA's short-term inundation forecast for tsunamis (SIFT)// NOAA Tech. Memo. OAR PMEL-139. — Washington: NOAA, 2008.
2. Kowalik Z., Murty T. S. Numerical modeling of ocean dynamics. — Singapore: World Scientific, 1993.
3. Lavrentiev M., Lysakov K., Marchuk An., Oblaukhov K. Fundamentals of fast tsunami wave parameter determination technology for hazard mitigation// Sensors. — 2022. — 22. — 7630.
4. Lavrentiev M., Lysakov K., Marchuk An., Oblaukhov K., Shadrin M. Hardware acceleration of tsunami wave propagation modeling in the southern part of Japan// Appl. Sci. — 2020. — 10. — 4159.
5. Lavrentiev M. M., Marchuk An. G., Oblaukhov K. K., Romanenko A. A. Comparative testing of MOST and Mac-Cormack numerical schemes to calculate tsunami wave propagation// J. Phys. Conf. Ser. — 2020. — 1666. — 012028.
6. Lax P. D., Richtmyer R. D. Survey of the stability of linear finite difference equations// Commun. Pure Appl. Math. — 1956. — 9. — С. 267–293.
7. Liang Q., Hou J., Amouzgar R. Simulation of tsunami propagation using adaptive cartesian grids// Coast. Engng. J. — 2015. — 57, № 4. — 1550016-1-1550016–30.
8. MacCormack R. W., Paullay A. J. Computational efficiency achieved by time splitting of finite-difference operators// В сб: «AIAA Meeting Paper. 10th Aerospace Sciences Meeting». — San-Diego, 1972. — 154.
9. Popinet S. Quadtree-adaptive tsunami modelling// Ocean Dynamics. — 2011. — 61. — С. 1261–1285.
10. Shuto N., Goto C., Imamura F. Numerical simulation as a means of warning for near field tsunamis// Coast. Eng. Jpn. — 1990. — 33. — С. 173–193.
11. Stoker J. J. Water waves. The mathematical theory with applications. — New York: Interscience Publ., 1957.
12. Titov V. V., Gonzalez F. I. Implementation and testing of the method of splitting tsunami (MOST) model// NOAA Tech. Memo. ERL PMEL-112. — Washington: NOAA, 1997.
13. Wang X., Power W. L. COMCOT: a tsunami generation propagation and run-up model. — Lower Hutt City: GNS Science, 2011.
14. Yalciner A. C., Alpar B., Altinok Y., Ozbay I., Imamura F. Tsunamis in the sea of Marmara: historical documents for the past, models for future// Mar. Geol. — 2002. — 190. — С. 445–463.
15. Zaytsev A., Kurkin A., Pelinovsky E., Yalciner A. C. Numerical tsunami model NAMI\_DANCE// Sci. Tsunami Hazards. — 2019. — 38. — С. 151–168.
16. 500m Gridded Bathymetry Data// Japan Oceanographic Data Center [электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://www.jodc.go.jp/jodcweb/JDOSS/infoJEGG.html> (дата обращения: 26.06.2024).
17. ETOPO 2022 15 Arc-Second Global Relief Model// NOAA National Centers for Environmental Information [электронный ресурс]. — Режим доступа: [https://www.ngdc.noaa.gov/mgg/global/relief/ETOPO2022/data/15s/15s\\_surface\\_elev\\_gtif/](https://www.ngdc.noaa.gov/mgg/global/relief/ETOPO2022/data/15s/15s_surface_elev_gtif/) (дата обращения: 26.06.2024).

18. Natural disasters in 2011 caused record economic losses// EarthSky [электронный ресурс]. — Режим доступа: <http://earthsky.org/earth/economic-losses-from-earthquakes-and-natural-disasters-peaked-in-2011> (дата обращения: 21.06.2024).
19. Vitis High-Level Synthesis User Guide// AMD Technical Information Portal [электронный ресурс]. — Режим доступа: <https://docs.amd.com/r/en-US/ug1399-vitis-hls> (дата обращения: 26.06.2024).

М. М. Лаврентьев

Институт автоматики и электрометрии СО РАН, Новосибирск, Россия

E-mail: [mmlavrentiev@gmail.com](mailto:mmlavrentiev@gmail.com)

К. Ф. Лысаков

Институт автоматики и электрометрии СО РАН, Новосибирск, Россия

E-mail: [lysakov@sl.iae.nsk.su](mailto:lysakov@sl.iae.nsk.su)

Ан. Г. Марчук

Институт вычислительной математики и математической геофизики СО РАН, Новосибирск, Россия

E-mail: [mag@omzg.sscs.ru](mailto:mag@omzg.sscs.ru)

К. К. Облаухов

Институт автоматики и электрометрии СО РАН, Новосибирск, Россия

E-mail: [oblaukhov.konstantin@gmail.com](mailto:oblaukhov.konstantin@gmail.com)

М. Ю. Шадрин

Институт автоматики и электрометрии СО РАН, Новосибирск, Россия

E-mail: [miksha@sl.iae.nsk.su](mailto:miksha@sl.iae.nsk.su)

UDC 519.684.4, 550.394.2

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-2-327-342

EDN: YMOOYD

## Dependence of the Computed Tsunami Wave Heights on the Grid Resolution

M. M. Lavrentiev<sup>1</sup>, K. F. Lysakov<sup>1</sup>, An. G. Marchuk<sup>2</sup>, K. K. Oblaukhov<sup>1</sup>,  
and M. Yu. Shadrin<sup>1</sup>

<sup>1</sup>*Institute of Automation and Electrometry SB RAS, Novosibirsk, Russia*

<sup>2</sup>*Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia*

**Abstract.** Tsunami after the March 11, 2011, as well as the other recent events, have shown that destructive tsunami waves generated by earthquakes continue to pose a significant risk to coastal populations adjacent to subduction zones, where most of tsunami sources are located. In some places along these coasts, the tsunami run-up heights can reach 30 m or more, causing destruction and casualties. However, the wave heights maxima are distributed very nonuniformly along the coast with sharp local peaks in amplitude. Since for near-shore events the tsunami wave arrival time at the nearest coastal point after an earthquake is on the order of 20 minutes, a quick (within 1-2 minutes) correct assessment of the distribution of maximum wave heights along the coast will allow warning services take evacuation actions exactly where needed.

Modern modelling tools allowing quickly calculate wave parameters with sufficient accuracy if the wave characteristics at the initial time instance are known. However, this requires calculations in spatial steps of several meters, which is time-consuming even when using supercomputers. In addition, in the case of a strong earthquake, power outages are possible, which does not guarantee that numerical modelling can be started immediately after the seismic event. The use of large, hundreds of meters resolution calculation grid does not allow estimate correctly the tsunami wave heights near the shore. Fine grids entail the growth of the duration of computing time. The resolution of this contradiction dictates the necessity to choose the optimal correlation between grid spacing (results precision) and calculation time. In this paper the dependence of the calculated tsunami wave parameters depending on the grid spacing is studied. Obtained results will be used for optimal selection of application zones of meshes with different spacing.

Computational experiments were carried out on a personal computer (PC) using hardware acceleration – a specialized FPGA-based microchip (FPGA being Field Programmable Gates Array), used with the computer as a coprocessor. As a result, a sufficiently high performance of calculations is achieved. Calculation of wave parameters near the shore on the computational grid of  $3000 \times 2500$  nodes takes less than 1 min. In addition, the proposed solution does not depend on possible power supply failures.

**Keywords:** system of shallow water equations, Mac-Cormack numerical scheme, tsunami wave height.

**Conflict-of-interest.** The authors declare no conflicts of interest.

**Acknowledgments and funding.** This research was supported by the state contract with IAE SB RAS (FWNG-2024-0014) and with ICMMG SB RAS (FWNM-2022-0004).

**For citation:** M. M. Lavrentiev, K. F. Lysakov, An. G. Marchuk, K. K. Oblaukhov, M. Yu. Shadrin, “Dependence of the Computed Tsunami Wave Heights on the Grid Resolution,” *Sovrem. Mat. Fundam. Naprav.*, 2024, vol. **70**, No. 2, 327–342. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-2-327-342>

## REFERENCES

1. E. Giga, M. Spillane, V. Titov, C. Chamberlin, and J. Newman, “Development of the forecast propagation database for NOAA’s short-term inundation forecast for tsunamis (SIFT),” *NOAA Tech. Memo. OAR PMEL-139*, NOAA, Washington, 2008.



2. Z. Kowalik and T. S. Murty, *Numerical Modeling of Ocean Dynamics*, World Scientific, Singapore, 1993.
3. M. Lavrentiev, K. Lysakov, An. Marchuk, and K. Oblaukhov, “Fundamentals of fast tsunami wave parameter determination technology for hazard mitigation,” *Sensors*, 2022, **22**, 7630.
4. M. Lavrentiev, K. Lysakov, An. Marchuk, K. Oblaukhov, and M. Shadrin, “Hardware acceleration of tsunami wave propagation modeling in the southern part of Japan,” *Appl. Sci.*, 2020, **10**, 4159.
5. M. M. Lavrentiev, An. G. Marchuk, K. K. Oblaukhov, and A. A. Romanenko, “Comparative testing of MOST and Mac-Cormack numerical schemes to calculate tsunami wave propagation,” *J. Phys. Conf. Ser.*, 2020, **1666**, 012028.
6. P. D. Lax and R. D. Richtmyer, “Survey of the stability of linear finite difference equations,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1956, **9**, 267–293.
7. Q. Liang, J. Hou, and R. Amouzgar, “Simulation of tsunami propagation using adaptive cartesian grids,” *Coast. Engrg. J.*, 2015, **57**, No. 4, 1550016-1-1550016–30.
8. R. W. MacCormack and A. J. Paullay, “Computational efficiency achieved by time splitting of finite-difference operators,” In: *AIAA Meeting Paper. 10th Aerospace Sciences Meeting*, San-Diego, 1972, 154.
9. S. Popinet, “Quadtree-adaptive tsunami modelling,” *Ocean Dynamics*, 2011, **61**, 1261–1285.
10. N. Shuto, C. Goto, and F. Imamura, “Numerical simulation as a means of warning for near field tsunamis,” *Coast. Eng. Jpn.*, 1990, **33**, 173–193.
11. J. J. Stoker, *Water Waves. The Mathematical Theory with Applications*, Interscience Publ., New York, 1957.
12. V. V. Titov and F. I. Gonzalez, “Implementation and testing of the method of splitting tsunami (MOST) model,” *NOAA Tech. Memo. ERL PMEL-112*, NOAA, Washington, 1997.
13. X. Wang and W. L. Power, *COMCOT: A Tsunami Generation Propagation and Run-Up Model*, GNS Science, Lower Hutt City, 2011.
14. A. C. Yalciner, B. Alpar, Y. Altinok, I. Ozbay, and F. Imamura, “Tsunamis in the sea of Marmara: historical documents for the past, models for future,” *Mar. Geol.*, 2002, **190**, 445–463.
15. A. Zaytsev, A. Kurkin, E. Pelinovsky, and A. C. Yalciner, “Numerical tsunami model NAMI\_DANCE,” *Sci. Tsunami Hazards*, 2019, **38**, 151–168.
16. “500m Gridded Bathymetry Data,” *Japan Oceanographic Data Center*. Available online: <https://www.jodc.go.jp/jodcweb/JDOSS/infoJEGG.html> (accessed on June 26, 2024).
17. “ETOPO 2022 15 Arc-Second Global Relief Model,” *NOAA National Centers for Environmental Information*. Available online: [https://www.ngdc.noaa.gov/mgg/global/relief/ETOPO2022/data/15s/15s\\_surface\\_elev\\_gtif/](https://www.ngdc.noaa.gov/mgg/global/relief/ETOPO2022/data/15s/15s_surface_elev_gtif/) (accessed on June 26, 2024).
18. “Natural disasters in 2011 caused record economic losses,” *EarthSky*. Available online: <http://earthsky.org/earth/economic-losses-from-earthquakes-and-natural-disasters-peaked-in-2011> (accessed on June 21, 2024).
19. “Vitis High-Level Synthesis User Guide,” *AMD Technical Information Portal*. Available online: <https://docs.amd.com/r/en-US/ug1399-vitis-hls> (accessed on June 26, 2024).

M. M. Lavrentiev

Institute of Automation and Electrometry SB RAS, Novosibirsk, Russia

E-mail: [mmlavrentiev@gmail.com](mailto:mmlavrentiev@gmail.com)

K. F. Lysakov

Institute of Automation and Electrometry SB RAS, Novosibirsk, Russia

E-mail: [lysakov@sl.iae.nsk.su](mailto:lysakov@sl.iae.nsk.su)

An. G. Marchuk

Institute of Computational Mathematics and Mathematical Geophysics SB RAS, Novosibirsk, Russia

E-mail: [mag@omzg.sccc.ru](mailto:mag@omzg.sccc.ru)

K. K. Oblaukhov

Institute of Automation and Electrometry SB RAS, Novosibirsk, Russia

E-mail: [oblaukhov.konstantin@gmail.com](mailto:oblaukhov.konstantin@gmail.com)

M. Yu. Shadrin

Institute of Automation and Electrometry SB RAS, Novosibirsk, Russia

E-mail: [miksha@sl.iae.nsk.su](mailto:miksha@sl.iae.nsk.su)