РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 70, № 1, 2024

Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1
http://journals.rudn.ru/cmfd

Научный журнал
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)
4 выпуска в год
http://journals.rudn.ru/cmfd
Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.
Включен в каталог подписных изданий агентства «Роспечать», индекс 36832.
Индексируется в РИНЦ и международных базах данных *MathSciNet* и *Zentralblatt Math*.
Полный текст журнала размещен в базах данных компании *EBSCO Publishing* на платформе *EBSCOhost*.
Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты.

Правила оформления статей, архив публикаций в открытом доступе и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала: http://journals.rudn.ru/cmfd, http://www.mathnet.ru/cmfd.

Редактор: ***Е. М. Варфоломеев***
Компьютерная верстка: ***Е. М. Варфоломеев***

Адрес редакции:
115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Подписано в печать 20.03.2024. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.
Усл. печ. л. 22,79. Тираж 110 экз. Заказ 26.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» (РУДН)
117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН
115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 952-04-41; e-mail: publishing@rudn.ru

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 70, No. 1, 2024

Functional spaces. Differential operators. Problems of mathematics education

DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1
http://journals.rudn.ru/cmfd

Founded in 2003

Founder: Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

---

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS
Published by the Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russian Federation

ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)
4 issues per year
http://journals.rudn.ru/cmfd
Indexed by *Russian Index of Science Citation*, *MathSciNet*, *Zentralblatt Math*.
The full texts can be found in the *EBSCOhost* databases by *EBSCO Publishing*.
Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Aims and Scope

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results.

Guidelines for authors, free accessible archive of issues, and other information can be found at the journal's website: http://journals.rudn.ru/cmfd, http://www.mathnet.ru/eng/cmfd.

Editor: ***E. M. Varfolomeev***
Computer design: ***E. M. Varfolomeev***

Address of the Editorial Office:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Print run 110 copies.

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba (RUDN University), Moscow, Russia
6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia

Printed at RUDN Publishing House:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 952-04-41; e-mail: publishing@rudn.ru

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 1 (2024). С. 1–14
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.954
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-1-14
EDN: ZXGOMR

ОБ ОЦЕНКЕ БОЯРСКОГО—МЕЙЕРСА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ЛИНЕЙНОГО ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СНОСОМ

Ю. А. Алхутов[1], **Г. А. Чечкин**[2,3,4]

[1] *Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, Владимир, Россия*
[2] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия*
[3] *Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа, Россия*
[4] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*

Аннотация. Установлена повышенная суммируемость градиента решения задачи Дирихле для оператора Лапласа с младшими членами, а также приведено доказательство однозначной разрешимости этой задачи.

Ключевые слова: задача Зарембы, оценки Мейерса, теоремы вложения, повышенная суммируемость.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Результаты первого автора в разделе 3 получены в рамках государственного задания ВлГУ (проект FZUN-2023-0004), а результаты второго автора в разделе 2 поддержаны грантом РНФ (проект 20-11-20272). Результаты второго автора в разделе 1 частично поддержаны комитетом науки Министерства науки и высшего образования республики Казахстан (грант AP14869553).

Для цитирования: *Ю. А. Алхутов, Г. А. Чечкин.* Об оценке Боярского—Мейерса решения задачи Дирихле для линейного эллиптического уравнения второго порядка со сносом// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 1. С. 1–14. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-1-14`

1. Введение

В настоящей работе рассматривается однородная задача Дирихле для неоднородного уравнения Пуассона со сносом. Основной целью является доказательство повышенной суммируемости градиента решения этой задачи в предположении, что правая часть тоже обладает повышенной суммируемостью.

Повышенная суммируемость градиента решений эллиптических уравнений привлекает внимание учёных-математиков на протяжении нескольких десятилетий. В пионерской работе [1] рассмотрен случай линейных дивергентных равномерно эллиптических уравнений второго порядка с измеримыми коэффициентами в плоской ограниченной области. Позже в многомерном случае для уравнений такого же вида повышенная суммируемость градиента решения задачи

Дирихле в области с достаточно регулярной границей была установлена в [17]. После этой работы оценки повышенной суммируемости градиента решений общепринято называть *оценками типа Мейерса*, хотя справедливее было бы их называть *оценками Боярского—Мейерса*. Оценка Боярского—Мейрса решения задачи Дирихле в области с липшицевой границей для уравнения p-Лапласа с переменным показателем p, обладающим логарифмическим модулем непрерывности, впервые получена в [19]. Позже в работах [6, 12] этот результат был усилен и распространен на системы эллиптических уравнений с переменным показателем суммируемости. Отметим, что в статье [19] стимулом изучения оценок Мейерса явилась задача о термисторе, дающей совместное описание потенциала электрического поля и температуры (см. [11, 15, 19]). Такого же рода системы возникают и в гидромеханике квазиньютоновых жидкостей.

Также рассматривался вопрос об оценках повышенной суммируемости градиента решения задачи Зарембы — см. работы [4, 7–9], в которых для линейного эллиптического уравнения в дивергентной форме получена оценка повышенной суммируемости градиента решения задачи Зарембы в областях с липшицевой границей и быстрой сменой краевых условий Дирихле и Неймана с повышенным показателем суммируемости, не зависящим от частоты смены краевых условий. Такого рода оценки важны в теории усреднения задач с быстрой сменой краевых условий, они позволяют улучшить скорость сходимости допредельных решений к решению усредненной задачи (см. аналогичную задачу в области, перфорированной вдоль границы, в [10]). Аналогичные оценки для p-лапласиана получены в [5].

Введем соболевское пространство функций $\overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$ как пополнение финитных бесконечно дифференцируемых в ограниченной области D функций по норме

$$\| v \|_{\overset{\circ}{W}{}^1_2(D)} = \left(\int\limits_D |\nabla v|^2 \, dx \right)^{1/2}.$$

Данное выражение является нормой в силу хорошо известного неравенства Фридрихса

$$\|u\|_{L_2(D)} \leqslant C(n, D) \|\nabla u\|_{L_2(D)}.$$

Настоящая работа посвящена оценкам решений задачи Дирихле для уравнения Пуассона с младшими членами вида

$$\mathcal{L}u := \Delta u + b \cdot \nabla u = \operatorname{div} f, \qquad f = (f_1, \dots f_n),\ f_j \in L_2(D),\ u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(D), \tag{1.1}$$

заданного в ограниченной липшицевой области $D \subset \mathbb{R}^n$, где $n > 1$. Здесь вектор-функция $b = (b_1, \dots, b_n)$ такова, что

$$b_j \in L_p(D), \quad p > n,\ j = 1, \dots, n. \tag{1.2}$$

При наличии младших слагаемых оценки повышенной суммируемости градиента решений задачи нам не известны.

Под *решением* задачи (1.1) понимается функция $u \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$, для которой выполнено интегральное тождество

$$\int\limits_D \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx - \int\limits_D (b \cdot \nabla u) \varphi \, dx = \int\limits_D (f \cdot \nabla \varphi) \, dx \tag{1.3}$$

для всех пробных функций $\varphi \in \overset{\circ}{W}{}^1_2(D)$ (см., например, [3, гл. 3, § 4]).

Основной результат настоящей работы состоит в следующем утверждении.

Теорема 1.1. *Если выполнено условие* (1.2) *и* $f \in \Big(L_{2+\delta_0}(D)\Big)^n$, *где* $\delta_0 > 0$, *то существуют положительные постоянные* $\delta(n, p, \delta_0) < \delta_0$ *и* C *такие, что для решения задачи* (1.3) *справедлива оценка*

$$\int\limits_D |\nabla u|^{2+\delta} dx \leqslant C \int\limits_D |f|^{2+\delta} \, dx, \tag{1.4}$$

где C *зависит только от* δ_0, *размерности пространства* n, *а также от области* D *и* $\|b\|_{L_p(D)}$.

Замечание 1.1. Теорема остаётся в силе, если вместо оператора Лапласа рассмотреть линейный равномерно эллиптический оператор второго порядка вида

$$\operatorname{div}(a(x) \nabla u).$$

Здесь $a(x) = \{a_{ij}(x)\}$ — равномерно эллиптическая измеримая и симметрическая матрица, т. е. $a_{ij} = a_{ji}$ и

$$\alpha|\xi|^2 \leqslant \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \leqslant \alpha^{-1}|\xi|^2 \text{ для почти всех } x \in D \text{ и для всех } \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.5}$$

Работа организована следующим образом. В разделе 2 мы для полноты изложения приводим простое доказательство однозначной разрешимости задачи (1.3), основанное на рассуждениях из [2]. В разделе 3 мы выводим оценку Боярского—Мейерса.

2. Однозначная разрешимость поставленной задачи

В этом разделе однозначная разрешимость задачи Дирихле в произвольной ограниченной области доказывается для уравнения вида

$$\mathcal{L}u := \mathrm{div}(a\nabla u) + b\cdot\nabla u = \mathrm{div} f, \qquad f = (f_1, \dots f_n),\ f_j \in L_2(D),\ u \in \mathring{W}_2^1(D), \tag{2.1}$$

где $a(x) = \{a_{ij}(x)\}$ — равномерно эллиптическая измеримая и симметрическая матрица, т. е. $a_{ij} = a_{ji}$, удовлетворяющая (1.5), а b удовлетворяет (1.2). Имеет место следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Если выполнены условия* (1.2) *и* (1.5)*, то задача* (1.1) *однозначно разрешима в* $\mathring{W}_2^1(D)$*, и для её решения справедлива оценка*

$$\| \nabla u \|_{L_2(D)} \leqslant C\|f\|_{L_2(D)} \tag{2.2}$$

с постоянной C*, зависящей только от коэффициентов оператора* $\mathcal{L}$*, области* D *и размерности пространства* n*.*

Доказательство основано на вспомогательных утверждениях, которые устанавливаются ниже. Сначала нам потребуются оценки билинейной формы, связанной с оператором $\mathcal{L}$, имеющей вид

$$\mathcal{L}(u,v) = \int_D a\nabla u\cdot\nabla v\,dx - \int_D b\cdot\nabla u\,v\,dx \tag{2.3}$$

и определённой на функциях $u, v \in \mathring{W}_2^1(D)$.

Лемма 2.1. *Если коэффициенты оператора* $\mathcal{L}$ *из* (2.1) *удовлетворяют условиям* (1.2) *и* (1.5)*, то*

$$\mathcal{L}(u,u) \geqslant \frac{\alpha}{2}\int_D |\nabla u|^2\,dx - C(\alpha,b,n,p)\int_D u^2\,dx. \tag{2.4}$$

Доказательство. В силу условия (1.5) имеем

$$\mathcal{L}(u,u) \geqslant \alpha\int_D |\nabla u|^2\,dx - \left|\int_D b\cdot\nabla u\,u\,dx\right|. \tag{2.5}$$

Оценим второе слагаемое в правой части (2.5). По неравенству Гёльдера

$$\begin{aligned}\left|\int_D b\cdot\nabla u\,u\,dx\right| &\leqslant \left(\int_D |\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_D |b|^2u^2\,dx\right)^{1/2} \leqslant \\ &\leqslant \left(\int_D |\nabla u|^2\,dx\right)^{1/2}\left(\int_D |b|^p\,dx\right)^{2/p}\left(\int_D |u|^{\tilde p}\,dx\right)^{1/\tilde p},\end{aligned} \tag{2.6}$$

где $\tilde p = \dfrac{2p}{p-2}$, $p > n$. Ясно, что $\tilde p > 2$.

Сначала предположим, что $n > 2$. Для $\tilde q \in (0,2)$ из представления

$$\int_D |u|^{\tilde p}\,dx = \int_D |u|^{\tilde q}|u|^{\tilde p-\tilde q}\,dx$$

по неравенству Гёльдера будем иметь

$$\int\limits_D |u|^{\tilde p}\,dx \leqslant \Bigl(\int\limits_D u^2\,dx\Bigr)^{\tilde q/2}\Bigl(\int\limits_D |u|^{2(\tilde p-\tilde q)/(2-\tilde q)}\,dx\Bigr)^{(2-\tilde q)/2}.$$

Выберем константу $\tilde q$ из соотношения

$$\frac{2(\tilde p-\tilde q)}{2-\tilde q}=\frac{2n}{n-2}, \tag{2.7}$$

согласно которому

$$\tilde q=\frac{2n-(n-2)\tilde p}{2}. \tag{2.8}$$

Проверим, что $\tilde q\in(0,2)$. Нетрудно видеть, что $\tilde q<2$, поскольку $n>2$. Осталось проверить, что $\tilde q>0$. Для этого (см. (2.8)) достаточно показать неравенство

$$2n-(n-2)\tilde p>0.$$

Имея в виду, что $\tilde p=\dfrac{2p}{p-2}$, заключаем, что

$$\frac{p}{p-2}<\frac{n}{n-2}$$

и, так как изначально $p>n$, требуемое неравенство также выполнено. Таким образом, $\tilde q\in(0,2)$ и из (2.6), (2.7) имеем

$$\Bigl|\int\limits_D b\cdot\nabla u\,u\,dx\Bigr| \leqslant \Bigl(\int\limits_D |b|^p\,dx\Bigr)^{2/p}\Bigl(\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx\Bigr)^{1/2}\Bigl(\int\limits_D |u|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\Bigr)^{\frac{2-\tilde q}{2\tilde p}}\Bigl(\int\limits_D u^2\,dx\Bigr)^{\frac{\tilde q}{2\tilde p}}. \tag{2.9}$$

Далее, по неравенству Коши

$$\begin{aligned}\Bigl(\int\limits_D |b|^p\,dx\Bigr)^{2/p}\Bigl(\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx\Bigr)^{1/2}\Bigl(\int\limits_D |u|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\Bigr)^{\frac{2-\tilde q}{2\tilde p}}\Bigl(\int\limits_D u^2\,dx\Bigr)^{\frac{\tilde q}{2\tilde p}} \leqslant\\ \leqslant \varepsilon\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx+\frac{1}{2\varepsilon}\Bigl(\int\limits_D |b|^p\,dx\Bigr)^{4/p}\Bigl(\int\limits_D |u|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\Bigr)^{\frac{2-\tilde q}{\tilde p}}\Bigl(\int\limits_D u^2\,dx\Bigr)^{\frac{\tilde q}{\tilde p}}.\end{aligned} \tag{2.10}$$

В силу неравенства Юнга с учётом равенства (2.7) и равенства $\dfrac{4\tilde p}{p\tilde q}=\dfrac{4}{p-n}$ выводим

$$\begin{aligned}\Bigl(\int\limits_D |b|^p\,dx\Bigr)^{4/p}\Bigl(\int\limits_D |u|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\Bigr)^{\frac{2-\tilde q}{\tilde p}}\Bigl(\int\limits_D u^2\,dx\Bigr)^{\frac{\tilde q}{\tilde p}} \leqslant\\ \leqslant \varepsilon_1\Bigl(\int\limits_D |u|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\Bigr)^{\frac{n-2}{n}}+C(\varepsilon_1)\Bigl(\int\limits_D |b|^p\,dx\Bigr)^{\frac{4}{p-n}}\int\limits_D u^2\,dx,\end{aligned}$$

а поскольку по теореме вложения Соболева

$$\Bigl(\int\limits_D |u|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\Bigr)^{\frac{n-2}{n}}\leqslant C_0\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx,$$

то имеем

$$\Bigl(\int\limits_D |b|^p\,dx\Bigr)^{4/p}\Bigl(\int\limits_D |u|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\Bigr)^{\frac{2-\tilde q}{\tilde p}}\Bigl(\int\limits_D u^2\,dx\Bigr)^{\frac{\tilde q}{\tilde p}} \leqslant \varepsilon_1 C_0\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx+C(\varepsilon_1,b,n,p)\int\limits_D u^2\,dx. \tag{2.11}$$

Теперь из (2.9)–(2.11) после соответствующего выбора ε_1 получим

$$\Bigl|\int\limits_D b\cdot\nabla u\,u\,dx\Bigr| \leqslant 2\varepsilon\int\limits_D |\nabla u|^2\,dx+C(\varepsilon,b,n,p)\int\limits_D u^2\,dx. \tag{2.12}$$

Выбирая теперь $\varepsilon = \dfrac{\alpha}{4}$, получаем из (2.12) и (2.5) требуемую оценку.

Покажем теперь неравенство (2.12) при $n = 2$. В этом случае, исходя из (2.6), будем иметь

$$\left|\int\limits_D b \cdot \nabla u\, u\, dx\right| \leqslant \Big(\int\limits_D |\nabla u|^2\, dx\Big)^{1/2} \Big(\int\limits_D |b|^p\, dx\Big)^{2/p} \Big(\int\limits_D |u|^{\tilde{p}}\, dx\Big)^{1/\tilde{p}}, \tag{2.13}$$

где, как и ранее, $\tilde{p} = \dfrac{2p}{p-2}$, $p > 2$ и $\tilde{p} > 2$. Исходя из тождества

$$\int\limits_D |u|^{\tilde{p}}\, dx = \int\limits_D |u||u|^{\tilde{p}-1}\, dx,$$

по неравенству Гёльдера найдём

$$\int\limits_D |u|^{\tilde{p}}\, dx \leqslant \Big(\int\limits_D u^2\, dx\Big)^{1/2} \Big(\int\limits_D |u|^{2(\tilde{p}-1)}\, dx\Big)^{1/2}.$$

Таким образом, из (2.13) вытекает, что

$$\left|\int\limits_D b \cdot \nabla u\, u\, dx\right| \leqslant \Big(\int\limits_D |b|^p\, dx\Big)^{2/p} \Big(\int\limits_D |\nabla u|^2\, dx\Big)^{1/2} \Big(\int\limits_D |u|^{2(\tilde{p}-1)}\, dx\Big)^{\frac{1}{2\tilde{p}}} \Big(\int\limits_D u^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2\tilde{p}}}. \tag{2.14}$$

Далее, по неравенству Коши

$$\begin{aligned} &\int\limits_D |b|^p\, dx\Big)^{2/p} \Big(\int\limits_D |\nabla u|^2\, dx\Big)^{1/2} \Big(\int\limits_D |u|^{2(\tilde{p}-1)}\, dx\Big)^{\frac{1}{2\tilde{p}}} \Big(\int\limits_D u^2\, dx\Big)^{\frac{1}{2\tilde{p}}} \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon \int\limits_D |\nabla u|^2\, dx + \frac{1}{2\varepsilon}\Big(\int\limits_D |b|^p\, dx\Big)^{4/p} \Big(\int\limits_D |u|^{2(\tilde{p}-1)}\, dx\Big)^{\frac{1}{\tilde{p}}} \Big(\int\limits_D u^2\, dx\Big)^{\frac{1}{\tilde{p}}}, \end{aligned} \tag{2.15}$$

и согласно неравенству Юнга с учётом формулы $\dfrac{4\tilde{p}}{p} = \dfrac{8}{p-2}$ выводим

$$\begin{aligned} &\Big(\int\limits_D |b|^p\, dx\Big)^{4/p} \Big(\int\limits_D |u|^{2(\tilde{p}-1)}\, dx\Big)^{\frac{1}{\tilde{p}}} \Big(\int\limits_D u^2\, dx\Big)^{\frac{1}{\tilde{p}}} \leqslant \\ &\leqslant \varepsilon_1 \Big(\int\limits_D |u|^{2(\tilde{p}-1)}\, dx\Big)^{\frac{1}{\tilde{p}-1}} + C(\varepsilon_1)\Big(\int\limits_D |b|^p\, dx\Big)^{\frac{8}{p-2}} \int\limits_D u^2\, dx. \end{aligned}$$

Поскольку по теореме вложения Соболева

$$\Big(\int\limits_D |u|^{2(\tilde{p}-1)}\, dx\Big)^{\frac{1}{\tilde{p}-1}} \leqslant C_1 \int\limits_D |\nabla u|^2\, dx,$$

то имеем

$$\Big(\int\limits_D |b|^p\, dx\Big)^{4/p} \Big(\int\limits_D |u|^{2(\tilde{p}-1)}\, dx\Big)^{\frac{1}{\tilde{p}}} \Big(\int\limits_D u^2\, dx\Big)^{\frac{1}{\tilde{p}}} \leqslant \varepsilon_1 C_1 \int\limits_D |\nabla u|^2\, dx + C(\varepsilon_1, b, p)\int\limits_D u^2\, dx. \tag{2.16}$$

Из (2.14)–(2.16) после соответствующего выбора ε_1 придём к неравенству (2.12).

Выбирая теперь $\varepsilon = \alpha/4$ в (2.12), из (2.5) придём к требуемой оценке (2.4). Лемма доказана. □

Лемма 2.2. *Если коэффициенты оператора* $\mathcal{L}$ *из* (2.1) *удовлетворяют условиям* (1.2) *и* (1.5), *то для фиксированного* $u \in \mathring{W}_2^1(D)$ *отображение* $v \mapsto \mathcal{L}(u, v)$, *где форма* $\mathcal{L}(u, v)$ *определена в* (2.3), *является ограниченным линейным функционалом на* $\mathring{W}_2^1(D)$ *и справедлива оценка*

$$|\mathcal{L}(u, v)| \leqslant C(\alpha, b, n, p)\, \|u\|_{\mathring{W}_2^1(D)} \|v\|_{\mathring{W}_2^1(D)}. \tag{2.17}$$

Доказательство. В силу условия равномерной эллиптичности (1.5) имеем

$$\left|\int\limits_D a\nabla u\cdot\nabla v\,dx\right| \leqslant \alpha^{-1}\|u\|_{\mathring{W}_2^1(D)}\|v\|_{\mathring{W}_2^1(D)}. \tag{2.18}$$

Второе слагаемое формы (2.3) оценим по неравенству Гёльдера:

$$\left|\int\limits_D b\cdot\nabla u\,v\,dx\right| \leqslant \|u\|_{\mathring{W}_2^1(D)}\Bigl(\int\limits_D |b|^2v^2\,dx\Bigr)^{1/2} \leqslant \|u\|_{\mathring{W}_2^1(D)}\Bigl(\int\limits_D |b|^p\,dx\Bigr)^{2/p}\Bigl(\int\limits_D |v|^{\frac{2p}{p-2}}\,dx\Bigr)^{\frac{p-2}{2p}}, \tag{2.19}$$

где $p>n$. Поскольку $\dfrac{2p}{p-2}<\dfrac{2n}{n-2}$, то по теореме вложения Соболева

$$\Bigl(\int\limits_D |v|^{\frac{2p}{p-2}}\,dx\Bigr)^{\frac{p-2}{2p}} \leqslant C_2\|v\|_{\mathring{W}_2^1(D)},$$

и из (2.19), (2.18) приходим к (2.17). Лемма доказана. □

Докажем теперь *принцип максимума* для решений однородной задачи (2.1). Функция $u\in \mathring{W}_2^1(D)$ называется *субрешением* однородной задачи (2.1) в области D, если

$$\int\limits_D a\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx - \int\limits_D b\cdot\nabla u\,\varphi\,dx \leqslant 0 \tag{2.20}$$

для любой неотрицательной функции $\varphi\in\mathring{W}_2^1(D)$. Аналогично определяется *суперрешение* $u\in \mathring{W}_2^1(D)$ в области D, для которого выполнено неравенство

$$\int\limits_D a\nabla u\cdot\nabla\varphi\,dx - \int\limits_D b\cdot\nabla u\,\varphi\,dx \geqslant 0$$

для всех неотрицательных функций $\varphi\in\mathring{W}_2^1(D)$.

Лемма 2.3. *Если выполнены условия* (1.2), (1.5) *и функция* $u\in\mathring{W}_2^1(D)$ *является субрешением в области* D, *то*

$$\operatorname*{ess\,sup}_D u\leqslant 0. \tag{2.21}$$

Если же $u\in\mathring{W}_2^1(D)$ *является суперрешением в области* D, *то*

$$\operatorname*{ess\,inf}_D u\geqslant 0. \tag{2.22}$$

Доказательство. Сначала покажем (2.21). Доказательство проводим от противного. Предположим, что $\operatorname*{ess\,sup}_D u>0$. Тогда существует такое число k, что $0<k<\operatorname*{ess\,sup}_D u$. Рассмотрим функцию $v=\max(u-k,0)=(u-k)^+$, которая принадлежит пространству $\mathring{W}_2^1(D)$ и неотрицательна. В силу (2.20) имеем

$$\int\limits_D a\nabla v\cdot\nabla v\,dx \leqslant \int\limits_D b\cdot\nabla v\,v\,dx.$$

Перепишем эту оценку в виде

$$\int\limits_{D\cap\{u>k\}} a\nabla u\cdot\nabla u\,dx \leqslant \int\limits_{D\cap\{u>k\}} b\cdot\nabla u\,v\,dx. \tag{2.23}$$

Сначала предположим, что $n>2$. Пользуясь в правой части (2.23) условием эллиптичности (1.5) и применяя неравенство Гёльдера в правой части, получим

$$\alpha\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2\,dx \leqslant \Bigl(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |b|^n\,dx\Bigr)^{1/n}\Bigl(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2\,dx\Bigr)^{1/2}\Bigl(\int\limits_D |v|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\Bigr)^{\frac{2n}{n-2}}. \tag{2.24}$$

Поскольку $v \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(D)$, по теореме вложения Соболева

$$\Big(\int\limits_D |v|^{\frac{2n}{n-2}}\,dx\Big)^{\frac{2n}{n-2}} \leqslant C\Big(\int\limits_D |\nabla v|^2\,dx\Big)^{1/2} = C\Big(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2},$$

и из (2.24) будем иметь

$$\alpha \int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2\,dx \leqslant C\Big(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |b|^n\,dx\Big)^{1/n} \int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2\,dx. \tag{2.25}$$

Если $M = \operatorname*{ess\,sup}_D u = \infty$, то первый множитель в правой части (2.25) стремится к нулю при $k \to \infty$, что приводит к противоречию.

Если же $M < \infty$, то $\nabla u = 0$ почти всюду на множестве $D \cap \{u = M\}$ и оценка (2.25) приобретает вид

$$\alpha \leqslant C\Big(\int\limits_{M_k} |b|^n\,dx\Big)^{1/n},$$

где

$$M_k = \{x \in D:\ k < u(x) < M\},\ \nabla u(x) \neq 0\}.$$

Ясно, что n-мерная мера Лебега множества M_k стремится к нулю при $k \to M$, в силу чего

$$\Big(\int\limits_{M_k} |b|^n\,dx\Big)^{1/n} \longrightarrow 0 \quad\text{при}\quad k \to M,$$

и мы вновь приходим к противоречию, что и доказывает (2.21).

Рассмотрим оставшийся случай, когда $n = 2$. Исходя из (2.23), пользуясь условием эллиптичности и применяя в правой части (2.23) неравенство Гёльдера с другими показателями, придём к оценке

$$\alpha \int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2\,dx \leqslant \Big(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |b|^p\,dx\Big)^{1/p}\Big(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_D |v|^{\frac{2p}{p-2}}\,dx\Big)^{\frac{2p}{p-2}}, \tag{2.26}$$

где $p > 2$. При $n = 2$ по теореме вложения Соболева

$$\Big(\int\limits_D |v|^{\frac{2p}{p-2}}\,dx\Big)^{\frac{2p}{p-2}} \leqslant C\Big(\int\limits_D |\nabla v|^2\,dx\Big)^{1/2} = C\Big(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2},$$

и из (2.26) приходим к оценке

$$\alpha \int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2\,dx \leqslant C\Big(\int\limits_{D\cap\{u>k\}} |b|^p\,dx\Big)^{1/p} \int\limits_{D\cap\{u>k\}} |\nabla u|^2\,dx. \tag{2.27}$$

Дальнейшие рассуждения, основанные на (2.27), ничем не отличаются от приведенных выше в случае $n > 2$, что вновь влечёт (2.21).

Оценка (2.22) доказывается аналогично. Нужно только заметить, что если функция u является суперрешением уравнения, то эта же функция со знаком минус будет субрешением. Лемма доказана. □

Следствие 2.1. *При выполнении условий* (1.2) *и* (1.5) *задача Дирихле* (2.1) *имеет единственное решение.*

Доказательство теоремы 2.1. Определим для $\sigma > 0$ оператор $\mathcal{L}_\sigma$ формулой $\mathcal{L}_\sigma u = \mathcal{L}u - \sigma u$. Из оценки (2.4) леммы 2.1 следует, что соответствующая оператору $\mathcal{L}_\sigma$ форма

$$\mathcal{L}_\sigma(u,u) = \int\limits_D a\nabla u\cdot\nabla u\,dx - \int\limits_D b\cdot\nabla u\,u\,dx + \sigma\int\limits_D u^2\,dx$$

при достаточно большом $\sigma = \sigma_0(\alpha, b, n, p)$ будет коэрцитивной, т. е.

$$\mathcal{L}_\sigma(u,u) \geqslant \alpha/2 \int\limits_D |\nabla u|^2\,dx.$$

Отметим, что таком выборе $\sigma = \sigma_0$ билинейная форма

$$\mathcal{L}_{\sigma_0}(u,v) = \int\limits_D a\nabla u \cdot \nabla v\,dx - \int\limits_D b \cdot \nabla u\, v\,dx + \sigma_0 \int\limits_D uv\,dx \tag{2.28}$$

является ограниченной. Это следует из оценки (2.17), применённой к первым двум слагаемым в правой части (2.28), и оценки

$$\int\limits_D uv\,dx \leqslant \|u\|_{L_2(D)}\|v\|_{L_2(D)} \leqslant C\|u\|_{\mathring{W}_2^1(D)}\|v\|_{\mathring{W}_2^1(D)},$$

вытекающей из неравенства Фридрихса. Таким образом, оператор $\mathcal{L}_{\sigma_0}$ является ограниченным и коэрцитивным в гильбертовом пространстве $H = \mathring{W}_2^1(D)$.

Пусть H^{-1} — сопряженное пространство к H. Определим оператор $\mathfrak{I}_u : H \to H^{-1}$ равенством

$$\mathfrak{I} = \mathfrak{I}_u v = \int\limits_D uv\,dx, \quad v \in H. \tag{2.29}$$

Покажем, что отображение $\mathfrak{I}_u$ является компактным. Для этого заметим, что отображение $\mathfrak{I}_u$ можно представить в виде композиции

$$\mathfrak{I}_u = \mathfrak{I}_1 \circ \mathfrak{I}_2. \tag{2.30}$$

Здесь $\mathfrak{I}_2 : H \to L_2(D)$ — естественное вложение. По теореме о компактности вложения Кондрашова—Соболева [2, теорема 7.22] оператор $\mathfrak{I}_2$ является компактным, а отображение $\mathfrak{I}_1 : L_2(D) \to H^{-1}$ определено формулами (2.29) и (2.30). Из того, что оператор $\mathfrak{I}_1$ непрерывен и оператор $\mathfrak{I}_2$ компактен, следует компактность оператора $\mathfrak{I}$.

Уравнение $\mathcal{L}u = l$ для $u \in H$, где l-функционал в пространстве H^{-1}, сопряженном к $H = \mathring{W}_2^1(D)$, эквивалентно уравнению $\mathcal{L}_{\sigma_0}u + \sigma_0\mathfrak{I}_u u = l$. По лемме Лакса—Мильграма (см. [16]) обратный оператор $\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1}$ задает непрерывное взаимно однозначное отображение H^{-1} на H. Поэтому, применяя этот оператор к предыдущему уравнению, получаем эквивалентное уравнение

$$u + \sigma_0\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1}\mathfrak{I}_u u = \mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1} l. \tag{2.31}$$

Отображение $T = -\sigma_0\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1}\mathfrak{I}_u$ в силу компактности $\mathfrak{I}$ также компактно. Следовательно, по альтернативе Фредгольма (см., например, [2, теорема 5.3, § 5.3]) существование функции $u \in H$, удовлетворяющей уравнению (2.31), является следствием единственности в H тривиального решения уравнения $\mathcal{L}u = 0$. Теперь однозначная разрешимость задачи Зарембы (1.1) вытекает из следствия 2.1 к лемме 2.3.

Перейдём к доказательству оценки (2.2). Для этого определим формально сопряженный для $\mathcal{L}$ оператор $\mathcal{L}^\star$ формулой

$$\mathcal{L}^\star u := \operatorname{div}(a(x)\nabla u) - \operatorname{div}(b(x)u).$$

Поскольку для соответствующих билинейных форм $\mathcal{L}^\star(u,v) = \mathcal{L}(v,u)$ при $u, v \in \mathring{W}_2^1(D)$, оператор $\mathcal{L}^\star$ сопряжен оператору $\mathcal{L}$ в гильбертовом пространстве H. Заменяя в предыдущем рассуждении $\mathcal{L}$ на $\mathcal{L}^\star$, мы видим, что уравнение $\mathcal{L}_\sigma u = l$ эквивалентно уравнению

$$u + (\sigma_0 - \sigma)\mathcal{L}_\sigma^{-1}\mathfrak{I}_u u = \mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1} l,$$

и сопряженный оператор $T^\star$ компактного отображения $T_\sigma = (\sigma_0 - \sigma)\mathcal{L}_{\sigma_0}^{-1}\mathfrak{I}$ (см. (2.29)) даётся формулой

$$T_\sigma^\star = (\sigma_0 - \sigma)(\mathcal{L}_{\sigma_0}^\star)^{-1}\mathfrak{I}.$$

Используя теперь теорему о сжимающих отображениях в банаховом пространстве (см., например, [2, теорема 5.1, § 5.1]), мы приходим к следующему утверждению, аналогичному [2, теорема 8.6, § 8.2].

Лемма 2.4. *Если выполнены условия* (1.2) *и* (1.5), *то существует не более чем счётное дискретное множество* $\Sigma \in (-\infty, 0)$ *такое, что если* $\sigma \notin \Sigma$, *то задачи Дирихле для уравнений* $\mathcal{L}_\sigma u = l$ *и* $\mathcal{L}^\star_\sigma u = l$ *однозначно разрешимы в* $\mathring{W}^1_2(D)$ *для произвольного линейного функционала* l *в пространстве, сопряженном к* $\mathring{W}^1_2(D)$.

Для доказательства оценки (2.2) рассмотрим оператор $G_\sigma : H^\star \to H$, определяемый равенством $G_\sigma = \mathcal{L}^{-1}_\sigma$ при $\sigma \notin \Sigma$. Этот оператор естественно назвать *оператором Грина* задачи Дирихле (2.1). Используя альтернативу Фредгольма (см., например, [2, теорема 5.3, § 5.3]), заключаем, что этот оператор является ограниченным, и, следовательно, справедлива оценка (2.2). Теорема 2.1 доказана. □

3. Доказательство основного результата

Доказательство теоремы 1.1 основано на получении обратного неравенства Гёльдера для градиента решения задачи Дирихле (1.1) с последующим применением обобщённой леммы Геринга.

Доказательство теоремы 1.1. Обозначим через $Q^{x_0}_R$ открытый куб с центром в точке x_0 и рёбрами длиной $2R$, которые параллельны координатным осям. Ниже полагается

$$\fint_{Q^{x_0}_R} f\,dx = \frac{1}{|Q^{x_0}_R|}\int_{Q^{x_0}_R} f\,dx,$$

где $|E|$ обозначает n-мерную меру множества $E \subset \mathbb{R}^n$.

Далее продолжим функцию u нулём вне области D.

Сначала рассмотрим случай, когда $Q^{x_0}_{3R/2} \subset D$, и выберем в интегральном тождестве (1.3) пробную функцию $\varphi = (u-\lambda)\eta^2$, где

$$\lambda = \fint_{Q^{x_0}_{3R/2}} u,\ dx,$$

а срезающая функция $\eta \in C^\infty_0(Q^{x_0}_{3R/2})$ такова, что $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, $\eta = 1$ в $Q^{x_0}_R$ и $|\nabla\eta| \leqslant CR^{-1}$. Тогда (1.3) преобразуется к виду

$$\begin{aligned}\int_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx = \int_{Q^{x_0}_{3R/2}} (b\cdot\nabla u)(u-\lambda)\eta^2\,dx - 2\int_{Q^{x_0}_{3R/2}} \eta(u-\lambda)\nabla u\cdot\nabla\eta\,dx +\\ + 2\int_{Q^{x_0}_{3R/2}} f(u-\lambda)\eta\cdot\nabla\eta\,dx + \int_{Q^{x_0}_{3R/2}} \eta^2 f\cdot\nabla u\,dx.\end{aligned} \tag{3.1}$$

Оценим сначала первое слагаемое в правой части тождества (3.1). По неравенству Гёльдера имеем

$$\begin{aligned}\Bigg|\int_{Q^{x_0}_{3R/2}} (b\cdot\nabla u)(u-\lambda)\eta^2\,dx\Bigg| \leqslant R\Bigg(\int_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx\Bigg)^{1/2}\Bigg(\int_{Q^{x_0}_{3R/2}} |b|^2\eta^2\left(\frac{u-\lambda}{R}\right)^2 dx\Bigg)^{1/2} \leqslant\\ \leqslant R\Bigg(\int_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx\Bigg)^{1/2}\Bigg(\int_{Q^{x_0}_{3R/2}} |b|^p\eta^p\,dx\Bigg)^{2/p}\Bigg(\int_{Q^{y_0}_{3R/2}} \left|\frac{u-\lambda}{R}\right|^{\frac{2p}{p-2}} dx\Bigg)^{\frac{p-2}{2p}}.\end{aligned} \tag{3.2}$$

Далее, по неравенству Пуанкаре—Соболева

$$\Bigg(\int_{Q^{x_0}_{3R/2}} \left|\frac{u-\lambda}{R}\right|^{\frac{2p}{p-2}} dx\Bigg)^{\frac{p-2}{2p}} \leqslant C(n,p)\Bigg(\int_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^q\,dx\Bigg)^{1/q}, \quad q = \frac{2np}{n(p-2)+2p} \in (1,2). \tag{3.3}$$

Из (3.3) и (3.2), учитывая, что $0 \leqslant \eta \leqslant 1$, найдём

$$\Big|\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} (b\cdot\nabla u)(u-\lambda)\eta^2\,dx\Big| \leqslant C(n,p)R\Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |b|^p\,dx\Big)^{2/p}\Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^q\,dx\Big)^{1/q},$$

и по неравенству Коши с $\varepsilon > 0$

$$\Big|\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} (b\cdot\nabla u)(u-\lambda)\eta^2\,dx\Big| \leqslant \varepsilon\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx + \frac{C(n,p)}{4\varepsilon}R^2\Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |b|^p\,dx\Big)^{4/p}\Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^q\,dx\Big)^{2/q}. \tag{3.4}$$

Оценим теперь оставшиеся интегралы в правой части интегрального равенства (3.1). Для второго слагаемого получаем

$$\Big|\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} \eta(u-\lambda)\nabla u\cdot\nabla\eta\,dx\Big| \leqslant \varepsilon\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx + \frac{C(\varepsilon)}{R^2}\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} (u-\lambda)^2|\nabla\eta|^2\,dx. \tag{3.5}$$

Третье слагаемое оценивается следующим образом:

$$\Big|\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} f(u-\lambda)\eta\cdot\nabla\eta\,dx\Big| \leqslant \int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |f|^2\,dx + \frac{C}{R^2}\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} (u-\lambda)^2\,dx. \tag{3.6}$$

Для четвертого слагаемого выводим

$$\Big|\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} \eta^2 f\cdot\nabla u\,dx\Big| \leqslant \varepsilon\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\,dx + C(\varepsilon)\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |f|^2\,dx. \tag{3.7}$$

В результате, пользуясь (3.1), учитывая последние оценки после соответствующего выбора ε, придём к неравенству

$$\int\limits_{Q^{x_0}_{R}} |\nabla u|^2\,dx \leqslant C(n,b,p)\Bigg(\frac{1}{R^2}\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} (u-\lambda)^2\,dx + \int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |f|^2\,dx + R^2\Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^q\,dx\Big)^{2/q}\Bigg),$$

или, поскольку $\dfrac{2n}{q} + 2 - n \geqslant 0$, выводим

$$\fint\limits_{Q^{x_0}_{R}} |\nabla u|^2\,dx \leqslant C(n,b,p)\Bigg(\frac{1}{R^2}\fint\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} (u-\lambda)^2\,dx + \fint\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |f|^2\,dx + \Big(\fint\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^q\,dx\Big)^{2/q}\Bigg). \tag{3.8}$$

Далее из неравенства Пуанкаре—Соболева

$$\Big(\fint\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} (u-\lambda)^2\,dx\Big)^{1/2} \leqslant C(n,p)R\Big(\fint\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^q\,dx\Big)^{1/q},\ q = \frac{2np}{n(p-2)+2p} \in (1,2),$$

и из (3.8) найдём

$$\Big(\fint\limits_{Q^{x_0}_{R}} |\nabla u|^2\,dx\Big)^{1/2} \leqslant C(n,b,p)\Bigg(\Big(\fint\limits_{Q^{x_0}_{2R}} |\nabla u|^q\,dx\Big)^{1/q} + \Big(\fint\limits_{Q^{x_0}_{2R}} |f|^2\,dx\Big)^{1/2}\Bigg). \tag{3.9}$$

Рассмотрим теперь случай, когда $Q^{x_0}_{3R/2} \cap \partial D \neq \varnothing$. В этом случае функция u равна нулю в $Q^{x_0}_{3R/2} \setminus D$. Выбирая в интегральном тождестве (1.3) пробную функцию $\varphi = u\eta^2$ с той же срезающей функцией η, получим

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx = \int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} b\cdot\nabla u\, u\eta^2\,dx - 2\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} (\eta u\nabla u\cdot\nabla\eta)\,dx - \\ -2\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} fu\eta\cdot\nabla\eta\,dx - \int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} (\eta^2 f\cdot\nabla u)\,dx.\end{aligned} \tag{3.10}$$

Перейдём к оценке первого интеграла в правой части (3.10). Имеем

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} b\cdot\nabla u\, u\eta^2\,dx \leqslant \Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |b|^2\eta^2\; u^2\,dx\Big)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant \Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |b|^p\eta^p\,dx\Big)^{2/p}\Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |u|^{\frac{2p}{p-2}}\;dx\Big)^{\frac{p-2}{2p}}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Далее заметим, что поскольку $Q^{x_0}_{3R/2}\cap\partial D\neq\varnothing$, имеем $|(\mathbb{R}^n\setminus D)\cap\overline{Q}^{x_0}_{2R}|\geqslant c(D)R^n$ для достаточно малого R. Поэтому по неравенству Соболева

$$\begin{aligned}\Big(\fint\limits_{Q^{x_0}_{2R}} |u|^{\frac{2p}{p-2}}\;dx\Big)^{\frac{p-2}{2p}} \leqslant C\,R\Big(\fint\limits_{Q^{x_0}_{2R}} |\nabla u|^q\;dx\Big)^{\frac1q}, \\ \Big(\fint\limits_{Q^{x_0}_{2R}} |u|^2\;dx\Big)^{\frac12} \leqslant C\,R\Big(\fint\limits_{Q^{x_0}_{2R}} |\nabla u|^q\;dx\Big)^{\frac1q}.\end{aligned} \tag{3.12}$$

Теперь из (3.11) получим

$$\begin{aligned}\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} b\cdot\nabla u\, u\eta^2\,dx \leqslant \Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |b|^2\eta^2\; u^2\,dx\Big)^{1/2} \leqslant \\ \leqslant C(n,p)R^{\frac{n(p-2)+2p}{2p}}\Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx\Big)^{1/2}\Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |b|^p\eta^p\,dx\Big)^{2/p}\Big(\fint\limits_{Q^{x_0}_{2R}} |\nabla u|^q\;dx\Big)^{\frac1q}\end{aligned} \tag{3.13}$$

и по неравенству Коши с $\varepsilon>0$ с учётом свойств η выводим

$$\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} b\cdot\nabla u\, u\eta^2\,dx \leqslant \varepsilon\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx + \frac{C(n,p)}{4\varepsilon}R^{\frac{n(p-2)+2p}{p}}\Big(\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |b|^p\,dx\Big)^{4/p}\Big(\fint\limits_{Q^{x_0}_{2R}} |\nabla u|^q\,dx\Big)^{2/q}.$$

Или, поскольку $p\geqslant n$, имеем

$$\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} b\cdot\nabla u\, u\eta^2\,dx \leqslant \varepsilon\int\limits_{Q^{x_0}_{3R/2}} |\nabla u|^2\eta^2\,dx + \frac{C(n,p)}{4\varepsilon}\Big(\int\limits_{Q^{y_0}_{3R/2}} |b|^p\,dx\Big)^{4/p}\Big(\fint\limits_{Q^{x_0}_{2R}} |\nabla u|^q\,dx\Big)^{2/q}. \tag{3.14}$$

Оценки оставшихся слагаемых проводим аналогично (3.5), (3.6) и (3.7). В результате, пользуясь (3.10), учитывая последние оценки, после соответствующего выбора ε получаем оценку (3.8) с $\lambda=0$ вида

$$\fint\limits_{Q^{x_0}_{R}} |\nabla u|^2\,dx \leqslant C(n,b,p,D)\Big(\frac{1}{R^2}\fint\limits_{Q^{x_0}_{2R}} u^2\,dx + \fint\limits_{Q^{x_0}_{2R}} |f|^2\,dx + \Big(\fint\limits_{Q^{x_0}_{2R}} |\nabla u|^q\,dx\Big)^{2/q}\Big). \tag{3.15}$$

Далее, пользуясь вторым неравенством из (3.12) и неравенством (3.15), вновь приходим к (3.9). Ясно, что оценка (3.9) выполнена и для кубов с центрами, лежащими вне области D. Таким образом, оценка (3.9) справедлива во всех рассматриваемых случаях.

Из оценки (3.9), справедливой для всех рассматриваемых кубов $Q_R^{y_0}$, и обобщённой леммы Геринга (см. [13, 14], а также [18, гл. VII]) вытекает, что в предположении $f \in L_{2+\delta_0}(D)$, где $\delta_0 > 0$, имеет место оценка

$$\|\nabla u\|_{L_{2+\delta}(D)} \leqslant C(n,p,b,\delta_0,D)(\|\nabla u\|_{L_2(D)} + \|f\|_{L_{2+\delta}(D)}). \tag{3.16}$$

Оценим первое слагаемое в правой части (3.16) с помощью оценки (2.2) теоремы 2.1. Теорема доказана. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Боярский Б. В.* Обобщенные решения системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа с разрывными коэффициентами// Мат. сб. — 1957. — *43*, № 4. — С. 451–503.
2. *Гилбарг Д., Трудингер Н. С.* Эллиптические дифференциальные уравнения с частными производными второго порядка. — М.: Наука, 1989.
3. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1973.
4. *Чечкин Г. А., Чечкина Т. П.* Оценка Боярского—Мейерса для дивергентных эллиптических уравнений второго порядка. Два пространственных примера// Пробл. мат. анализа. — 2022. — *119*. — С. 107–116.
5. *Чечкина А. Г.* О задаче Заремба для p-эллиптического уравнения// Мат. сб. — 2023. — *214*, № 9. — С. 144–160.
6. *Acerbi E., Mingione G.* Gradient estimates for the $p(x)$-Laplacian system// J. Reine Angew. Math. — 2005. — *584*. — С. 117–148.
7. *Alkhutov Yu. A., Chechkin G. A.* Increased integrability of the gradient of the solution to the Zaremba problem for the Poisson equation// Dokl. Math. — 2021. — *103*, № 2. — С. 69–71.
8. *Alkhutov Yu. A., Chechkin G. A.* The Meyer's estimate of solutions to Zaremba problem for second-order elliptic equations in divergent form// C. R. Mécanique. — 2021. — *349*, № 2. — С. 299–304.
9. *Alkhutov Yu. A., Chechkin G. A., Maz'ya V. G.* On the Bojarski–Meyers estimate of a solution to the Zaremba problem// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2022. — *245*, № 2. — С. 1197–1211.
10. *Chechkin G. A.* The Meyers estimates for domains perforated along the boundary// Mathematics. — 2021. — *9*, № 23. — 3015.
11. *Cimatti G., Prodi G.* Existence results for a nonlinear elliptic system modelling a temperature dependent electrical resistor// Ann. Mat. Pura Appl. — 1988. — *63*. — С. 227–236.
12. *Diening L., Schwarzsacher S.* Global gradient estimates for the $p(\cdot)$-Laplacian// Nonlinear Anal. — 2014. — *106*. — С. 70–85.
13. *Gehring F. W.* The L_p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping// Acta Math. — 1973. — *130*. — С. 265–277.
14. *Giaquinta M., Modica G.* Regularity results for some classes of higher order nonlinear elliptic systems// J. Reine Angew. Math. — 1979. — *311/312*. — С. 145–169.
15. *Howison S. D., Rodriges J. F., Shillor M.* Stationary solutions to the thermistor problem// J. Math. Anal. Appl. — 1993. — *174*. — С. 573–588.
16. *Lax P. D., Milgram A.* Parabolic equations// В сб.: «Contributions to the Theory of Partial Differential Equations». — Princeton: Princeton Univ. Press, 1954. — С. 167–190.
17. *Meyers N. G.* An L^p-estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. — 1963. — *17*, № 3. — С. 189–206.
18. *Skrypnik I. V.* Methods for Analysis of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems. — Providence: AMS, 1994.
19. *Zhikov V. V.* On some variational problems// Russ. J. Math. Phys. — 1997. — *5*, № 1. — С. 105–116.

Ю. А. Алхутов
Владимирский государственный университет им. А. Г. и Н. Г. Столетовых, Владимир, Россия
E-mail: `yurij-alkhutov@yandex.ru`

Г. А. Чечкин
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа, Россия
Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: `chechkin@mech.math.msu.su`

UDC 517.954
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-1-14
EDN: ZXGOMR

On the Boyarsky–Meyers estimate for the solution of the Dirichlet problem for a second-order linear elliptic equation with drift

Yu. A. Alkhutov[1] **and G. A. Chechkin**[2,3,4]

[1] *Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, Russia*
[2] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
[3] *Institute of Mathematics with Computing Center, Ufa Federal Research Centre, Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia*
[4] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*

Abstract. We establish the increased integrability of the gradient of the solution to the Dirichlet problem for the Laplace operator with lower terms and prove the unique solvability of this problem.

Keywords: Zaremba problem, Meyers estimates, embedding theorems, increased integrability.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The results of the first author in section 3 were obtained within the framework of the state assignment of the Vladimir State University (project FZUN-2023-0004), and the results of the second author in section 2 were supported by the grant of the Russian Science Foundation (project 20-11-20272). The results of the second author in section 1 were partially supported by the Science Committee of the Ministry of Science and Higher Education of the Republic of Kazakhstan (grant AP14869553).

For citation: Yu. A. Alkhutov, G. A. Chechkin, "On the Boyarsky–Meyers estimate for the solution of the Dirichlet problem for a second-order linear elliptic equation with drift," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 1, 1–14. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-1-14`

REFERENCES

1. B. V. Boyarsky, "Obobshchennye resheniya sistemy differentsial'nykh uravneniy pervogo poryadka ellipticheskogo tipa s razryvnymi koeffitsientami" [Generalized solutions of a system of first-order differential equations of elliptic type with discontinuous coefficients], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1957, **43**, No. 4, 451–503 (in Russian).
2. D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Ellipticheskie differentsial'nye uravneniya s chastnymi proizvodnymi vtorogo poryadka* [Elliptic Partial Differential Equations of Second Order], Nauka, Moscow, 1989 (Russian translation).
3. O. A. Ladyzhenskaya and N. N. Ural'tseva, *Lineynye i kvazilineynye uravneniya ellipticheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
4. G. A. Chechkin and T. P. Chechkina, "Otsenka Boyarskogo—Meyersa dlya divergentnykh ellipticheskikh uravneniy vtorogo poryadka. Dva prostranstvennykh primera" [Boyarsky–Meyers estimate for second-order divergent elliptic equations. Two spatial examples], *Probl. mat. analiza* [Probl. Math. Anal.], 2022, **119**, 107–116 (in Russian).
5. A. G. Chechkina, "O zadache Zaremby dlya p-ellipticheskogo uravneniya" [On Zaremba's problem for a p-elliptic equation], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2023, **214**, No. 9, 144–160 (in Russian).
6. E. Acerbi and G. Mingione, "Gradient estimates for the $p(x)$-Laplacian system," *J. Reine Angew. Math.*, 2005, **584**, 117–148.

7. Yu. A. Alkhutov and G. A. Chechkin, “Increased integrability of the gradient of the solution to the Zaremba problem for the Poisson equation,” *Dokl. Math.*, 2021, **103**, No. 2, 69–71.
8. Yu. A. Alkhutov and G. A. Chechkin, “The Meyer’s estimate of solutions to Zaremba problem for second-order elliptic equations in divergent form,” *C. R. Mécanique*, 2021, **349**, No. 2, 299–304.
9. Yu. A. Alkhutov, G. A. Chechkin, and V. G. Maz’ya, “On the Bojarski–Meyers estimate of a solution to the Zaremba problem,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2022, **245**, No. 2, 1197–1211.
10. G. A. Chechkin, “The Meyers estimates for domains perforated along the boundary,” *Mathematics*, 2021, **9**, No. 23, 3015.
11. G. Cimatti and G. Prodi, “Existence results for a nonlinear elliptic system modelling a temperature dependent electrical resistor,” *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1988, **63**, 227–236.
12. L. Diening and S. Schwarzsacher, “Global gradient estimates for the $p(\cdot)$-Laplacian,” *Nonlinear Anal.*, 2014, **106**, 70–85.
13. F. W. Gehring, “The L_p-integrability of the partial derivatives of a quasiconformal mapping,” *Acta Math.*, 1973, **130**, 265–277.
14. M. Giaquinta and G. Modica, “Regularity results for some classes of higher order nonlinear elliptic systems,” *J. Reine Angew. Math.*, 1979, **311**/**312**, 145–169.
15. S. D. Howison, J. F. Rodriges, and M. Shillor, “Stationary solutions to the thermistor problem,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1993, **174**, 573–588.
16. P. D. Lax and A. Milgram, “Parabolic equations,” In: *Contributions to the Theory of Partial Differential Equations*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1954, pp. 167–190.
17. N. G. Meyers, “An L^p-estimate for the gradient of solutions of second order elliptic divergence equations,” *Ann. Sc. Norm. Super. Cl. Pisa Sci.*, 1963, **17**, No. 3, 189–206.
18. I. V. Skrypnik, *Methods for Analysis of Nonlinear Elliptic Boundary Value Problems*, AMS, Providence, 1994.
19. V. V. Zhikov, “On some variational problems,” *Russ. J. Math. Phys.*, 1997, **5**, No. 1, 105–116.

Yu. A. Alkhutov

Vladimir State University named after Alexander and Nikolay Stoletovs, Vladimir, Russia

E-mail: `yurij-alkhutov@yandex.ru`

G. A. Chechkin

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

Institute of Mathematics with Computing Center, Ufa Federal Research Centre, Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia

Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan

E-mail: `chechkin@mech.math.msu.su`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 1 (2024). С. 15–24
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.958
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-15-24
EDN: ZDOAHT

ДИСКРЕТНЫЕ МОДЕЛИ КИНЕТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ ТИПА БОЛЬЦМАНА

А. В. Бобылев

Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. Известные нелинейные кинетические уравнения, в частности, волновое кинетическое уравнение и квантовые уравнения Нордхейма—Улинга—Уленбека, рассматриваются как естественное обобщение классического пространственно-однородного уравнения Больцмана. С этой целью введем общее кинетическое уравнение типа Больцмана, зависящее от функции четырех действительных переменных $F(x, y; v, w)$. Предполагается, что функция F удовлетворяет некоторым простым соотношениям. Изучены основные свойства этого кинетического уравнения. Показано, что упомянутым выше частным кинетическим уравнениям соответствуют различные полиномиальные формы функции F. Далее рассматривается задача дискретизации общего кинетического уравнения типа Больцмана на основе идей, аналогичных тем, что используются для построения дискретных скоростных моделей уравнения Больцмана. Основное внимание уделено дискретным моделям волнового кинетического уравнения. Показано, что такие модели имеют монотонный функционал, аналогичный H-функции Больцмана. Сформулирована и исследована теорема существования, единственности и сходимости к равновесию решений задачи Коши с произвольными положительными начальными условиями. Также кратко обсуждаются различия в долговременном поведении решений волнового кинетического уравнения и решений его дискретных моделей.

Ключевые слова: уравнение Больцмана, волновые кинетические уравнения, H-теорема, функция распределения, функция Ляпунова, дискретные кинетические модели.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Мегагрант, № 075-15-22-1115). Выражаю благодарность С. Б. Куксину за важные обсуждения и комментарии. Также хочу поблагодарить И. Ф. Потапенко за помощь в подготовке рукописи.

Для цитирования: *А. В. Бобылев.* Дискретные модели кинетических уравнений типа Больцмана// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 1. С. 15–24. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-15-24

Введение

Цель данной статьи — представить краткий обзор некоторых недавних результатов, связанных с так называемыми кинетическими уравнениями типа Больцмана и их дискретными моделями. Общая идея изучения неклассических кинетических уравнений, таких как квантовое уравнение Нордхейма—Улинга—Уленбека [14, 15] или волновое кинетическое уравнение (см., например, [12,13]) и ссылки в них), как частных случаев общего класса уравнений типа Больцмана было предложено в [2]. Наш подход к этому классу уравнений в некоторой степени близок к более раннему подходу Л. Аркерида [4]. К этому классу уравнений применимы некоторые известные методы, использованные для классического уравнения Больцмана. В частности, обсуждаются построение и свойства дискретных моделей уравнений типа Больцмана. Основное внимание уделено волновому кинетическому уравнению (ВКУ) и тому важному факту, что положительные решения любой нормальной дискретной модели ВКУ стремятся к равновесному распределению при стремлении времени к бесконечности [1]. В статье приводятся формулировки основных результатов и обрисовываются основные идеи доказательств. Полные доказательства будут приведены в публикации [5]. Мы также не обсуждаем в этой статье важный вопрос, связанный с обоснованностью различных уравнений типа Больцмана, т. е. их выводом из некоторой более общей математической модели. Следует отметить, что недавние математические результаты по выводу ВКУ из нелинейного уравнения Шредингера (при наличии случайного силового поля) в [12] выглядят в этом смысле весьма многообещающими.

Статья организована следующим образом. В разделе 1 мы вводим уравнение Больцмана для твердых сфер и кратко напоминаем его основные свойства. В разделе 2 мы вводим общее кинетическое уравнение типа Больцмана, зависящее от функции четырех действительных переменных $F(x, y; v, w)$. Предполагается, что функция F удовлетворяет некоторым простым соотношениям. Основные свойства этого общего кинетического уравнения обсуждаются в разделах 3 и 4. В разделе 4 показано, что известное волновое кинетическое уравнение и уравнение Нордхейма—Улинга—Уленбека соответствуют различным полиномиальным формам функции F. В разделе 5 рассматривается задача дискретизации общего кинетического уравнения типа Больцмана на основе идей, аналогичных тем, которые используются для построения дискретных скоростных моделей уравнения Больцмана. Важный класс нормальных кинетических моделей представлен и исследован в разделе 6. Основные свойства этих моделей собраны в теореме 1 в разделе 6. Разделы 7 и 8 посвящены дискретным моделям волнового кинетического уравнения. Показано, что такие модели имеют монотонный функционал, аналогичный H-функции Больцмана. Фактически это функция Ляпунова для ОДУ модели. Это свойство позволяет доказать сходимость любого положительного решения этой модели к ее равновесному решению при больших значениях времени. Результаты о существовании, единственности и сходимости модели к равновесию выражены в теореме 2 в разделе 7. Ключевые идеи доказательства кратко объяснены в разделе 8. Краткий обзор результатов, возможных приложений и связанных с ними открытых задач дан в разделе 9.

1. Функции распределения и уравнение Больцмана

Начнем с классической модели пространственно-однородного разреженного газа из твердых сфер. Тогда система характеризуется функцией распределения $f(v, t)$, где $v \in \mathbb{R}^3$ и $t \in \mathbb{R}_+$ обозначают скорость и время соответственно.

Физический смысл этой функции — средняя плотность числа частиц. Тогда среднее число частиц в любом измеримом множестве $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ определяется равенством

$$n_\Delta(t) = \int\limits_\Delta dv f(v, t).$$

Обычно мы предполагаем, что дано начальное условие

$$f(v, 0) = f_0(v).$$

Как найти функцию распределения $f(v, t)$ при $t > 0$? Это, в некотором смысле, основная задача кинетической теории. Можно показать, что для некоторых специальных физических систем, таких как разреженные газы, временная эволюция функции распределения $f(v, t)$ описывается так называемым «кинетическим уравнением»

$$f_t = A(f),$$

где $A(f)$ — некоторый нелинейный оператор, действующий на f. Обычно мы предполагаем, что начальная задача имеет единственное решение $f(v, t)$ на некотором интервале времени $0 \leqslant t \leqslant T$.

В нашем случае временная эволюция $f(v,t)$ описывается уравнением Больцмана для частиц, моделируемых твердыми сферами.

$$f_t(v,t)=Q(f,f)=\frac{d^2}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^3\times S^2} dw d\omega |u|\,[f(v')f(w')-f(v)f(w)],$$

$$u=v-w,\quad \omega\in S^2;$$
$$v'=\frac{1}{2}(v+w+|u|\omega),\quad w'=\frac{1}{2}(v+w-|u|\omega),$$

где d — диаметр частиц.

Для краткости обозначим

$$\langle f,\psi\rangle=\int\limits_{\mathbb{R}^3} dv\, f(v)\psi(v),$$

где $\psi(v)$ — произвольная функция скорости $v\in\mathbb{R}^3$, для которой существует интеграл. Тогда получаем следующие основные свойства уравнения Больцмана (см., например, [11]):

1. **Законы сохранения:**

   Масса: $\langle f,1\rangle=\mathrm{const}$,
   Момент: $\langle f,v\rangle=\mathrm{const}$,
   Энергия: $\langle f,|v|^2\rangle=\mathrm{const}$.

2. H**-теорема**:

$$H(f)=\langle f,\ln f\rangle,\qquad \frac{d}{dt}H[f(\cdot,t)]\leqslant 0.$$

3. **Сходимость к равновесию:**

$$f(v,t)\xrightarrow[t\to\infty]{} a\exp(-b|v-u|^2),$$

   где скалярные параметры a и b, а также векторный параметр u могут быть получены из законов сохранения.

2. Обобщение уравнения Больцмана

Введем общий класс кинетических уравнений, включающий в качестве частного случая пространственно-однородное уравнение Больцмана. Для этой цели мы выберем функцию $F(x_1,x_2;x_3,x_4)$ четырех действительных (или комплексных) переменных и предположим, что

$$F(x_1,x_2;x_3,x_4)=F(x_2,x_1;x_3,x_4)=-F(x_3,x_4;x_1,x_2).$$

Затем определим обобщенное кинетическое уравнение типа Больцмана для функции $f(v,t)$ при $v\in\mathbb{R}^d$, $t\in\mathbb{R}_+$ уравнением

$$f_t(v,t)=K[f](v),$$

где обобщенный кинетический оператор K действует только на переменную v. Он определяется формулой

$$K[f](v)=\int\limits_{\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d\times\mathbb{R}^d} dv_2\,dv_3\,dv_4\;\delta[v+v_2-v_3-v_4]\times$$
$$\times\,\delta\left[|v|^2+|v_2|^2-|v_3|^2-|v_4|^2\right]F[f(v),f(v_2);f(v_3),f(v_4)].$$

Здесь и далее предполагается, что $d\geqslant 2$. Мы можем преобразовать это уравнение к виду [2]:

$$f_t=K[f](v)=2^{-d}\int\limits_{\mathbb{R}^d\times S^{d-1}} dw\,d\omega\,|u|^{d-2}\,F[f(v),f(w);f(v'),f(w')],\tag{2.1}$$

$$\omega\in S^{d-1},\qquad u=v-w,\qquad v'=(v+w+u')/2,$$
$$u'=|u|\omega,\qquad w'=(v+w-u')/2.$$

Если $F(x_1, x_2; x_3, x_4) = x_3x_4 - x_1x_2$, тогда это уравнение Больцмана. В противном случае мы называем его *уравнением типа Больцмана.* Примеры таких уравнений мы рассмотрим в следующем разделе.

3. Уравнение Нордхейма—Улинга—Уленбека и волновое кинетическое уравнение (ВКУ)

Очевидно, что конкретные операторы K могут иметь разные функции $F(x_1, x_2; x_3, x_4)$. Во всех интересных приложениях функцию F можно представить как разность двух функций

$$F(x_1, x_2; x_3, x_4) = P(x_3, x_4; x_1, x_2) - P(x_1, x_2; x_3, x_4). \tag{3.1}$$

Существует как минимум три вида кинетических уравнений, представляющих интерес для физики, для которых F имеет структуру (3.1) с разными функциями P.

Вот эти случаи:

(А) Классическое кинетическое уравнение Больцмана

$$P_B(x_1, x_2; x_3, x_4) = x_1x_2. \tag{3.2}$$

(Б) Квантовое уравнение Нордхейма—Улинга—Уленбека для бозонов (при $\theta = 1$) и фермионов (при $\theta = -1$)

$$P_{NUU}(x_1, x_2; x_3, x_4) = x_1x_2(1 + \theta x_3)(1 + \theta x_4). \tag{3.3}$$

(В) Волновое кинетическое уравнение (ВКУ)

$$P_W(x_1, x_2; x_3, x_4) = x_1x_2(x_3 + x_4). \tag{3.4}$$

Математические результаты и соответствующие ссылки по этим уравнениям можно найти в [4, 12, 13].

4. Основные свойства уравнений типа Больцмана

Мы можем легко дать строгое доказательство следующих основных свойств уравнений типа Больцмана.

1. **Законы сохранения** (для любой F)

$$\langle f, 1\rangle = \text{const}, \ \langle f, v\rangle = \text{const}, \ \langle f, |v|^2\rangle = \text{const}, \tag{4.1}$$

где аналогичное обозначение $\langle f, \varphi\rangle$ используется для интегралов по $\mathbb{R}^d$ с произвольными $d = 1, 2, \dots$.

2. **Формализация H-теоремы**

Предположим, что существует функция $p(x)$ такая, что

$$F(x_1, x_2; x_3, x_4)\,[p(x_3) + p(x_4) - p(x_1) - p(x_2)] \geqslant 0 \tag{4.2}$$

для почти всех $x_i \geqslant 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Тогда мы можем формально ввести обобщенный H-функционал на множестве неотрицательных решений $f(v, t)$ уравнения типа Больцмана по формуле

$$\hat{H}[f(\cdot, t)] = \int\limits_{\mathbb{R}^d} dv I[f(v, t)], \quad I(x) = \int\limits_0^x dy p(y),$$

предполагая сходимость интегралов.

Тогда формальное дифференцирование дает

$$\frac{d}{dt}\hat{H}[f(\cdot, t)] = \langle f_t,\, p(f)\rangle = \langle K(f), p(f)\rangle \leqslant 0.$$

Следовательно, уравнения типа Больцмана могут иметь аналог H-теоремы Больцмана при выполнении условия (4.2) на соответствующую функцию F.

5. Дискретные кинетические модели

Модели уравнения Больцмана с дискретной скоростью имеют долгую историю. В частности, отметим первые такие модели, предложенные Больцманом [7], Карлеманом [10], Бродуэллом [8], Кабанном [9]. Подобная схема построения дискретных моделей может быть применена к любому кинетическому уравнению типа Больцмана. Введем фазовое множество $V \subset \mathbb{R}^d$, содержащее $n \geqslant 4$ точек, и заменим функцию $f(v,t)$ вектором $f(t) \in \mathbb{R}^n$, где

$$V = \{v_1, \dots, v_n\}, \qquad f(t) = \{f_1(t), \dots, f_n(t)\}.$$

Здесь неявно предполагается, что $f_i(t)$ аппроксимирует при больших n функцию $f(v,t)$ в точке $v = v_i \in \mathbb{R}^d$, $i = 1, \dots, n$.

Кинетическое уравнение (2.1) в d-мерном случае заменяется следующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений:

$$\frac{df_i}{dt} = \sum_{j,k,l=1}^{n} \Gamma_{ij}^{kl} F(f_i, f_j; f_k, f_l), \quad \Gamma_{ij}^{kl} = \Gamma_{ji}^{kl} = \Gamma_{kl}^{ij},\ 1 \leqslant i \leqslant n, \tag{5.1}$$

где постоянные (для данного множества V) параметры Γ_{ij}^{kl} зависят только от $|v_i - v_j| = |v_k - v_l|$ для любых целых значений индексов $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$.

Строгое неравенство $\Gamma_{ij}^{kl} > 0$ возможно только в том случае, если

$$v_i + v_j = v_k + v_l, \quad |v_i|^2 + |v_j|^2 = |v_k|^2 + |v_l|^2.$$

Используя эти условия симметрии для Γ_{ij}^{kl} и связанные с ними условия на F, легко вывести следующее тождество:

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} f_i(t) h_i = -\frac{1}{4} \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \Gamma_{ij}^{kl} F(f_i, f_j; f_k, f_l)(h_k + h_l - h_i - h_j),$$

где $h_1, h_2, \dots, h_n$ — некоторые постоянные. Очевидно, это дискретный аналог аналогичного тождества для кинетического уравнения. Тогда это тождество приводит к законам сохранения

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(t) = \mathrm{const}, \qquad \sum_{i=1}^{n} f_i(t) v_i = \mathrm{const}, \qquad \sum_{i=1}^{n} f_i(t) |v_i|^2 = \mathrm{const},$$

аналогичным интегралам (4.1) для кинетического уравнения (2.1).

6. Нормальные дискретные модели и их свойства

Для того чтобы построить дискретную модель, обладающую всеми необходимыми свойствами исходного кинетического уравнения, необходимо наложить некоторые ограничения на множество V и коэффициенты уравнений (5.1).

Определение 1. Модель называется *нормальной*, если она удовлетворяет следующим условиям на множестве V:

(а) все n ее элементов попарно различны и не лежат в линейном подпространстве размерности $d' \leqslant d - 1$ или на сфере в $\mathbb{R}^d$;

(б) множество V не имеет изолированных точек, т. е. для любого $1 \leqslant i \leqslant n$ существуют такие $1 \leqslant j, k, l \leqslant n$, что $\Gamma_{ij}^{kl} > 0$;

(в) если функциональное уравнение

$$h(v_i) + h(v_j) - h(v_k) - h(v_l) = 0$$

верно для *всех* индексов $(i, j; k, l)$, для которых $\Gamma_{ij}^{kl} > 0$, то существуют такие константы $\alpha, \gamma \in \mathbb{R}$, $\beta \in \mathbb{R}^d$, что $h(v) = \alpha + \beta \cdot v + \gamma |v|^2$.

Основные свойства нормальных дискретных моделей собраны в следующей теореме [5].

Теорема 1. *Пусть модель*

$$V = \{v_1, \dots, v_n\}, \quad f(t) = \{f_1(t), \dots, f_n(t)\};$$

$$\frac{df_i}{dt} = \sum_{j,k,l=1}^{n} \Gamma_{ij}^{kl} F(f_i, f_j; f_k, f_l), \quad \Gamma_{ij}^{kl} = \Gamma_{ji}^{kl} = \Gamma_{ji}^{kl},\ 1 \leqslant i \leqslant n$$

нормальна и существует функция $p(x)$ такая, что выполняется неравенство

$$F(x_1, x_2; x_3, x_4)\,[p(x_3) + p(x_4) - p(x_1) - p(x_2)] \geqslant 0$$

для всех $x_i > 0$, $i = 1, 2, 3, 4$.

Пусть также

(1) *существуют числа $0 < a < b$ такие, что $p(x)$ непрерывна и строго монотонна при всех $x \in [a, b]$;*

(2) *равенство достигается только при*

$$p(x_3) + p(x_4) - p(x_1) - p(x_2) = 0.$$

Тогда

(а) *существует функция $H(x_1, \dots, x_n)$ такая, что*

$$\frac{d}{dt} H[f_1(t), \dots, f_n(t)] \leqslant 0$$

для любого решения $\{f_i(t) > 0,\ i = 1, \dots, n\}$ модели;

(б) *если*

$$\frac{d}{dt} \sum_{i=1}^{n} f_i(t) h_i = 0$$

для любого решения $\{f_i(t) > 0,\ i = 1, \dots, n\}$ модели, тогда $h_i = \alpha + \beta \cdot v_i + \gamma |v_i|^2$, где $\alpha \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ и $\beta \in \mathbb{R}^d$ — некоторые постоянные;

(в) *если $f^{st} = \{f_1^{st}, \dots, f_n^{st}\}$ — некоторое стационарное решение модели, тогда*

$$p(f_i^{st}) = \alpha + \beta \cdot v_i + \gamma |v_i|^2, \quad i = 1, \dots, n$$

для некоторых постоянных $\alpha \in \mathbb{R}$, $\gamma \in \mathbb{R}$ и $\beta \in \mathbb{R}^d$.

Некоторые приложения теоремы 1 рассматриваются в следующем разделе.

7. Дискретные модели ВКУ: постановка задачи и формулировка результата

Ниже рассматриваются дискретные модели, где

$$F(x_1, x_2; x_3, x_4) = x_3 x_4 (x_1 + x_2) - x_1 x_2 (x_3 + x_4), \tag{7.1}$$

т. е. модели ВКУ. ОДУ модели записываются как

$$\frac{df}{dt} = Q(f) = Q^{+}(f) - Q^{-}(f), \tag{7.2}$$

где

$$f(t) = \{f_1(t), \dots, f_n(t)\},\ Q^{\pm}(f) = \{Q_1^{\pm}(f), \dots, Q_n^{\pm}(f)\},$$

$$Q^{+}(f) = \sum_{i,j,k,l=1}^{n} \Gamma_{ij}^{kl} f_k f_l (f_i + f_j), \quad Q^{-}(f) = f_i B_i(f),$$

$$B_i(f) = \sum_{j,k,l=1}^{n} \Gamma_{ij}^{kl} f_j (f_k + f_l),\ i = 1, \dots, n; \tag{7.3}$$

$$\Gamma_{ij}^{kl} = \Gamma_{ji}^{kl} = \Gamma_{kl}^{ij}, \quad 1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n.$$

Постоянные $\Gamma_{ij}^{kl} \geqslant 0$ зависят от фазового множества

$$V = \{v_i \in \mathbb{R}^d, i = 1, \dots, n\}, \quad d \geqslant 2. \tag{7.4}$$

Рассмотрим задачу Коши для уравнений (7.2), (7.3) и начальных условий

$$f|_{t=0} = f^{(0)} = \{f_1^{(0)}, \dots, f_n^{(0)}\}, \quad f_i^{(0)} > 0, \quad i = 1, \dots, n; \qquad \sum_{i=1}^{n} f_i^{(0)} v_i = 0. \tag{7.5}$$

Последнее ограничение не приводит к потере общности.

Основной результат можно сформулировать следующим образом.

Теорема 2. *Пусть дискретная модель* (7.1)–(7.4) *нормальна, т. е. множество* V *в* (7.4) *и коэффициенты* Γ_{ij}^{kl}, $1 \leqslant i, j, k, l \leqslant n$ *удовлетворяют определению* 1.

Пусть также

(1) $v_1 = 0$ *в* (7.4);

(2) *если* $v_i \in V$, *то* $(-v_i) \in V$ *для всех* $i = 1, \dots, n$.

Тогда задача Коши для уравнений (7.2), (7.3) *и начальных условий* (7.5) *имеет единственное решение* $f(t) = \{f_1(t), \dots f_n(t)\}$ *при всех* $t > 0$.

Более того, для всех $1 \leqslant i \leqslant n$

(a) $$0 < f_i^{(0)} \exp(-c\,\rho_0^2\, t) \leqslant f_i(t) < \rho_0, \qquad \rho_0 = \sum_{i=1}^{n} f_i^{(0)},$$

где $c > 0$ *— константа, не зависящая от* $f^{(0)}$;

(б) $$\lim_{t\to\infty} f_i(t) = f_i^{st} = a(1 + b\,|v_i|^2)^{-1}, \qquad a \sum_{i=1}^{n} (1 + b|v_i|^2)^{-1} = \rho_0,$$

где

$$b > -M^{-1}, \quad M = \max\{|v_i|^2,\ 1 \leqslant i \leqslant n\},$$

является наибольшим вещественным корнем уравнения

$$T_0 = \rho_0^{-1} \sum_{i=1}^{n} f_i^{(0)} |v_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} \frac{(1 + b|v_i|^2)^{-1} |v_i|^2}{\sum\limits_{i=1}^{n} (1 + b|v_i|^2)^{-1}}.$$

Легко видеть, что функция $T_0(b)$, определенная равенством, монотонно убывает на интервале $-M^{-1} \leqslant b < \infty$ от своего максимального значения $T_0(-M^{-1}) = M$ до нуля при $b \to \infty$. Поэтому корень $b(T_0)$, определенный в пункте (б) теоремы, единствен.

8. Идея доказательства сходимости к равновесию

Доказательство теоремы 2 основано на простых оценках из пункта (а), законах сохранения, теореме 1 и на том, что уравнения (7.2), (7.3) имеют функцию Ляпунова

$$H(f) = -\sum_{i=1}^{n} \ln f_i.$$

Можно проверить, что $H[f(t)]$ монотонно убывает по $t > 0$ на положительных решениях $f(t)$ уравнений (7.2), (7.3). Более того, можно доказать, что

$$H(f) \geqslant H(f^{st}), \qquad f = \{f_1, \dots, f_n\}$$

для любого f такого, что

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(t) = \sum_{i=1}^{n} f_i^{(0)} = \rho_0, \qquad \sum_{i=1}^{n} f_i(t) v_i = 0,$$

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(t) |v_i|^2 = \sum_{i=1}^{n} f_i^{(0)} |v_i|^2 = \rho_0 T_0$$

в обозначениях теоремы 2. Более или менее стандартной процедурой (см., например, учебник [3]) доказывается часть (б) теоремы 2.

9. Выводы

1. В статье с единой точки зрения рассмотрен большой класс нелинейных кинетических уравнений типа Больцмана. К этому классу относятся, в частности, такие известные уравнения, как

1. *классическое уравнение Больцмана,*
2. *квантовое уравнение Нордхейма—Улинга—Уленбека,*
3. *волновое кинетическое уравнение, применяемое в теории слабой турбулентности.*

2. Было показано, что все эти уравнения естественно рассматривать как различные формы общего уравнения типа Больцмана. Также были изучены общие свойства (законы сохранения и монотонные функционалы) этого уравнения. По аналогии с дискретными скоростными моделями уравнения Больцмана, введен класс дискретных моделей общего кинетического уравнения и исследованы свойства моделей. Основные свойства моделей описаны в теореме 1.

3. Подробно исследовано долговременное поведение решений дискретных моделей ВКУ. Основные результаты этой части статьи сформулированы в теореме 2. Она включает в себя (а) существование и единственность глобального по времени решения соответствующего набора ОДУ для любых неотрицательных начальных условий и (б) сходимость к единственному (при заданных начальных данных) равновесному решению. Доказательство сходимости к равновесному решению основано на существовании функции Ляпунова. Этот результат доказан для так называемых нормальных моделей, не имеющих ложных законов сохранения. Возможно, аналогичные результаты можно доказать и для дискретных моделей уравнения Нордхейма—Улинга—Уленбека для фермионов, но случай ВКУ по ряду причин выглядит более интересным.

4. Обычно временная эволюция решений нормальных дискретных кинетических моделей в некоторой степени предсказывает поведение соответствующих решений кинетических уравнений. Мы можем с любой заданной точностью аппроксимировать уравнение Больцмана последовательностью дискретных моделей с достаточно большим числом дискретных фазовых точек [6], и то же самое можно доказать для ВКУ. Сходимость к равновесию имеет место для уравнения Больцмана. С другой стороны, аттрактор решений дискретных моделей ВКУ имеет вид $f^{st}(v) = a(1+b|v|^2)^{-1}$. Очевидно, эта функция не интегрируема в $\mathbb{R}^d$, $d \geqslant 2$ ни при каких положительных a и b. Она не может быть аттрактором интегрируемых решений ВКУ. Потому прямая оценка подобного долговременного поведения в этом случае невозможна. Этот вопрос все еще открыт. Мы надеемся, однако, что информация о долговременном поведении решений дискретных моделей ВКУ может оказаться полезной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бобылев А. В.* Об одном свойстве дискретных моделей волнового кинетического уравнения// Усп. мат. наук. — 2023. — *78*, № 5. — С. 179-180.
2. *Бобылев А. В., Куксин С. Б.* Уравнение Больцмана и волновые кинетические уравнения// Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2023. — 031.
3. *Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г.* Дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980.
4. *Arkeryd L.* On low temperature kinetic theory: spin diffusion, Bose–Einstein condensates, anyons// J. Stat. Phys. — 2013. — *150*. — С. 1063–1079.
5. *Bobylev A. V.* Boltzmann-type kinetic equation and discrete models// ArXiv. — 2023. — 2312.16094 [math-ph].
6. *Bobylev A. V., Palczewski A., Schneider J.* On approximation of the Boltzmann equation by discrete velocity models// C. R. Acad. Sci. Ser. I. Math. — 1995. — *320*, № 5. — С. 639–644.
7. *Boltzmann L.* Weiter Studien über das Wärmegleichgewicht unte Gasmolekülen// Wien. Akad. Sitzungsber. — 1872. — *66*. — С. 275–370.
8. *Broadwell J. E.* Study of rarefied shear flow by the discrete velocity method// J. Fluid Mech. — 1964. — *19*, № 3. — С. 401–414.
9. *Cabannes H.* The Discrete Boltzmann Equation: Theory and Applications. — Berkeley: Univ. California, 1980.
10. *Carleman T.* Problèmes Mathématiques dans la Théorie Cinétique des Gaz. — Uppsala: Almqvist and Wiksell, 1957.
11. *Cercignani C.* The Boltzmann Equation and Its Applications. — New York: Springer, 1988.

12. *Dymov A., Kuksin S.* Formal expansions in stochastic model for wave turbulence 1: Kinetic limit// Commun. Math. Phys. — 2021. — *382.* — C. 951–1014.
13. *Escobedo M., Velazquez J. J.* On the theory of weak turbulence for the nonlinear Schrödinger equation// Mem. Am. Math. Soc. — 2015. — *238.*
14. *Nordheim L. W.* On the kinetic method in the new statistics and application in the electron theory of conductivity// Proc. R. Soc. London Ser. A. — 1928. — *119.* — C. 689–698.
15. *Uehling E. A., Uhlenbeck G. E.* Transport phenomena in Einstein–Bose and Fermi–Dirac gases// Phys. Rev. — 1933. — *43*, № 7. — C. 552–561.

А. В. Бобылев
Институт прикладной математики им. М. В. Келдыша РАН, Москва, Россия
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: alexander.bobylev47@gmail.com

UDC 517.958
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-15-24
EDN: ZDOAHT

On discrete models of Boltzmann-type kinetic equations

A. V. Bobylev

Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. The known nonlinear kinetic equations, in particular, the wave kinetic equation and the quantum Nordheim–Uehling–Uhlenbeck equations are considered as a natural generalization of the classical spatially homogeneous Boltzmann equation. To this goal we introduce the general Boltzmann-type kinetic equation that depends on a function of four real variables $F(x, y; v, w)$. The function F is assumed to satisfy certain simple relations. The main properties of this kinetic equation are studied. It is shown that the above mentioned specific kinetic equations correspond to different polynomial forms of the function F. Then the problem of discretization of the general Boltzmann-type kinetic equation is considered on the basis of ideas similar to those used for construction of discrete velocity models of the Boltzmann equation. The main attention is paid to discrete models of the wave kinetic equation. It is shown that such models have a monotone functional similarly to the Boltzmann H-function. The theorem of existence, uniqueness and convergence to equilibrium of solutions to the Cauchy problem with any positive initial conditions is formulated and discussed. The differences in long time behaviour between solutions of the wave kinetic equation and solutions of its discrete models are also briefly discussed.

Keywords: Boltzmann equation, wave kinetic equation, H-theorem, distribution function, Lyapunov function, discrete kinetic models.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. This work is supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Megagrant, agreement No. 075-15-22-1115). I thank S. B. Kuksin for important discussions and comments. I am also grateful to I. F. Potapenko for her help in preparation of the manuscript.

For citation: A. V. Bobylev, "On discrete models of Boltzmann-type kinetic equations," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 1, 15–24. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-15-24

REFERENCES

1. A. V. Bobylev, "Ob odnom svoystve diskretnykh modeley volnovogo kineticheskogo uravneniya" [On one property of discrete models of the wave kinetic equation], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2023, **78**, No. 5, 179-180 (in Russian).
2. A. V. Bobylev and S. B. Kuksin, "Uravnenie Bol'tsmana i volnovye kineticheskie uravneniya" [Boltzmann equation and wave kinetic equations], *Preprinty IPM im. M. V. Keldysha* [Preprints Keldysh Inst. Appl. Math.], 2023, **031**, (in Russian).
3. A. N. Tikhonov, A. B. Vasil'eva, and A. G. Sveshnikov, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equations], Nauka, Moscow, 1980 (in Russian).
4. L. Arkeryd, "On low temperature kinetic theory: spin diffusion, Bose–Einstein condensates, anyons," *J. Stat. Phys.*, 2013, **150**, 1063–1079.
5. A. V. Bobylev, "Boltzmann-type kinetic equation and discrete models," *ArXiv*, 2023, 2312.16094 [math-ph].
6. A. V. Bobylev, A. Palczewski, and J. Schneider, "On approximation of the Boltzmann equation by discrete velocity models," *C. R. Acad. Sci. Ser. I. Math.*, 1995, **320**, No. 5, 639–644.
7. L. Boltzmann, "Weiter Studien über das Wärmegleichgewicht unte Gasmolekülen," *Wien. Akad. Sitzungsber.*, 1872, **66**, 275–370.
8. J. E. Broadwell, "Study of rarefied shear flow by the discrete velocity method," *J. Fluid Mech.*, 1964, **19**, No. 3, 401–414.
9. H. Cabannes, *The Discrete Boltzmann Equation: Theory and Applications*, Univ. California, Berkeley, 1980.
10. T. Carleman, *Problèmes Mathématiques dans la Théorie Cinétique des Gaz*, Almqvist and Wiksell, Uppsala, 1957.
11. C. Cercignani, *The Boltzmann Equation and Its Applications*, Springer, New York, 1988.
12. A. Dymov and S. Kuksin, "Formal expansions in stochastic model for wave turbulence 1: Kinetic limit," *Commun. Math. Phys.*, 2021, **382**, 951–1014.
13. M. Escobedo and J. J. Velazquez, "On the theory of weak turbulence for the nonlinear Schrödinger equation," *Mem. Am. Math. Soc.*, 2015, **238**.
14. L. W. Nordheim, "On the kinetic method in the new statistics and application in the electron theory of conductivity," *Proc. R. Soc. London Ser. A*, 1928, **119**, 689–698.
15. E. A. Uehling and G. E. Uhlenbeck, "Transport phenomena in Einstein–Bose and Fermi–Dirac gases," *Phys. Rev.*, 1933, **43**, No. 7, 552–561.

A. V. Bobylev
Keldysh Institute of Applied Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: alexander.bobylev47@gmail.com

УДК 517.521+517.547.22
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-25-37
EDN: YXLBJX

ЗАДАЧА СИЛЬВЕСТРА И МНОЖЕСТВА ЕДИНСТВЕННОСТИ В КЛАССАХ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Г. Г. Брайчев

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. В статье изучается задача о нахождении по выбранной последовательности комплексных чисел, стремящейся к бесконечности, максимально широкого в заданной шкале класса целых функций, для которого данная последовательность является множеством единственности. В рамках этой общей задачи установлены теоремы единственности в различных классах целых функций, выделяемых ограничениями на тип и индикатор при уточненном порядке. В частности, дополняется доказанная ранее теорема единственности, использующая понятие круга Сильвестра индикаторной диаграммы целой функции экспоненциального типа. Обсуждается точность полученных результатов и их связь с известными фактами.

Ключевые слова: круг Сильвестра, индикаторная диаграмма, целые функции, множество единственности.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор выражает искреннюю признательность В. Б. Шерстюкову, чьи замечания и советы во время оформления статьи существенно улучшили ее содержание, а также анонимному рецензенту, внимательно прочитавшему весь текст и указавшему на ряд полезных источников. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *Г. Г. Брайчев.* Задача Сильвестра и множества единственности в классах целых функций// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 1. С. 25–37. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-25-37

1. Введение

Проблеме единственности в различных классах аналитических функций посвящено большое число исследований (см., например, обзор-монографию Б. Н. Хабибуллина [13]). Эта проблема тесно связана с описанием характеристик нулевого множества функции в зависимости от ее роста. Как недавно выяснилось в совместной работе [4], нулевое множество целой функции F экспоненциального типа и вполне регулярного роста является множеством единственности в классе всех целых функций, тип которых (при порядке 1) меньше, чем величина радиуса круга Сильвестра индикаторной диаграммы функции F. Здесь и далее мы используем стандартную терминологию теории целых функций (см. книгу Б. Я. Левина [8]).

Кругом Сильвестра ограниченного замкнутого множества на плоскости называем наименьший круг, содержащий это множество (краткая история развития соответствующего раздела выпуклой геометрии изложена в [4]). В настоящей работе мы изучаем множества единственности в специальных классах целых функций, отправляясь не от порождающей функции F, а от наперед заданной последовательности комплексных чисел. Такой подход в ряде случаев позволяет для выбранной последовательности, не имеющей конечных предельных точек, указать максимально широкие классы целых функций, где данная последовательность служит множеством единственности. При этом вводятся новые, отличные от стандартных, классы целых функций. Полученные результаты носят критериальный характер и в определенном смысле неулучшаемы. Для целых функций экспоненциального типа дается вариант теоремы единственности в терминах радиуса круга Сильвестра. Прежде чем точно сформулировать результаты, напомним необходимые понятия и определения.

2. Характеристики роста и классы целых функций

Функция $f(z)$ называется *целой*, если она голоморфна во всей комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Множество всех целых функций обозначим $H(\mathbb{C})$. Функции, входящие в рассматриваемые далее классы, отличаются своими характеристиками роста. Приведем нужные определения.

Пусть $f(z)$ — целая функция. Как обычно, обозначим

$$M_f(r) = \max_{|z|=r} |f(z)|$$

максимум ее модуля на окружности (в круге) радиуса $r > 0$. Если f отлична от тождественной постоянной, то величина $M_f(r)$, строго возрастая, стремится к $+\infty$ при $r \to +\infty$ и является выпуклой относительно $\ln r$.

Порядок целой функции f определяется по формуле

$$\rho = \rho_f = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln\ln M_f(r)}{\ln r}.$$

Уточненным порядком в смысле Валирона называется неотрицательная дифференцируемая на положительной полуоси функция $\varrho = \varrho(r)$, обладающая двумя свойствами:

1) $\lim\limits_{r\to+\infty} \varrho(r) = \rho \in [0, +\infty]$,
2) $\lim\limits_{r\to+\infty} r \ln r\, \varrho'(r) = 0$.

Уточненный по Валирону порядок $\varrho(r)$ назовем *нулевым*, если в свойстве 1) предел $\rho = 0$, и *положительным* — если $\rho > 0$. В первом случае мы дополнительно требуем, чтобы уточненный порядок $\varrho(r)$ удовлетворял условию

$$\ln r = o(r^{\varrho(r)}), \quad r \to +\infty. \tag{2.1}$$

Во втором случае, т. е. при $\rho > 0$, условие (2.1) выполняется автоматически.

Тип целой функции f относительно уточненного порядка ϱ, коротко *ϱ-тип*, задается равенством

$$\sigma_\varrho(f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r^{\varrho(r)}}. \tag{2.2}$$

Как показал Валирон [17], каждая целая функция конечного положительного порядка ρ обладает уточненным порядком $\varrho(r)$, относительно которого она имеет нормальный тип, т. е. $\sigma_\varrho(f) \in (0, +\infty)$. Эта теорема Валирона носит принципиальный характер и прочно вошла во многие руководства по аналитическим функциям. Позднее Эрл и Хейман [15, 16] доказали аналогичные результаты для целых функций нулевого и бесконечного порядков.

Следуя Валирону, говорим, что целая функция f имеет *совершенно регулярный рост* относительно уточненного порядка $\varrho(r)$, если в равенстве (2.2) существует обычный предел.

Более тонкая характеристика роста целой функции, отражающая ее поведение на каждом луче комплексной плоскости $l_\theta = \{z \in \mathbb{C} : \arg z = \theta\}$, задается равенством

$$h_\varrho(\theta, f) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{\ln|f(re^{i\theta})|}{r^{\varrho(r)}}, \quad \theta \in [0, 2\pi], \tag{2.3}$$

и называется *индикатором* f относительно уточненного порядка ϱ, или, коротко, *ϱ-индикатором f*.

Если в определении (2.3) существует предел, когда положительная переменная r стремится к $+\infty$, не принимая значений из некоторого множества нулевой относительной меры (подробности см. в [8]), то функция f называется функцией *вполне регулярного роста* на луче l_θ. Говорят, что функция имеет *вполне регулярный рост* (во всей плоскости), если она вполне регулярного роста на каждом луче l_θ, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Введем в рассмотрение специальную усредненную характеристику роста целой функции f конечного ϱ-типа, имеющей ϱ-индикатор $h_\varrho(\theta, f)$. Именно, положим

$$I_\varrho(f) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} h_\varrho(\theta, f)\, d\theta. \tag{2.4}$$

Всегда выполнена двусторонняя оценка $0 \leqslant I_\varrho(f) \leqslant \sigma_\varrho(f)$ (см. [8, гл. I, § 16; гл. IV, § 1]). Подробнее об интегральной характеристике (2.4) поговорим в разделе 4.

Пусть $\varrho = \varrho(r)$ — произвольный уточненный порядок. Будем рассматривать следующие семь функциональных классов. Начнем со стандартных классов, выделяемых ограничением на тип:

$$[\varrho, \sigma] = \{\, f \in H(\mathbb{C}) : \ \sigma_\varrho(f) \leqslant \sigma \,\}, \quad \sigma \geqslant 0, \tag{2.5}$$

$$[\varrho, \sigma) = \{\, f \in H(\mathbb{C}) : \ \sigma_\varrho(f) < \sigma \,\}, \quad \sigma > 0. \tag{2.6}$$

Пусть теперь уточненный порядок $\varrho(r) \to \rho \in (0, +\infty)$ при $r \to +\infty$, и $h(\theta)$ — 2π-периодическая ρ-тригонометрически выпуклая на $\mathbb{R}$ функция (см. [8, гл. I, § 15-16]). Обозначим

$$[\varrho, h(\theta)] = \{\, f \in H(\mathbb{C}) : \ h_\varrho(\theta, f) \leqslant h(\theta), \ \theta \in [0, 2\pi] \,\}, \tag{2.7}$$

$$[\varrho, h(\theta)) = \{\, f \in H(\mathbb{C}) : \ h_\varrho(\theta, f) < h(\theta), \ \theta \in [0, 2\pi] \,\}, \tag{2.8}$$

а также

$$[\varrho,\, h(\theta)]_\circ = \{\, f \in H(\mathbb{C}) : \ h_\varrho(\theta, f) \leqslant h(\theta) \ \ \forall\, \theta \in [0, 2\pi] \ \text{ и } \ \exists \theta_0 \in [0, 2\pi] : \ h_\varrho(\theta_0, f) < h(\theta_0) \,\}, \tag{2.9}$$

классы функций, выделяемые ограничениями на индикатор.

Пусть, наконец, задано число I. Положим

$$[\varrho,\, I]_* = \{\, f \in H(\mathbb{C}) : \ I_\varrho(f) \leqslant I \,\}, \quad I \geqslant 0, \tag{2.10}$$

$$[\varrho,\, I)_* = \{\, f \in H(\mathbb{C}) : \ I_\varrho(f) < I \,\}, \quad I > 0, \tag{2.11}$$

с усредненной характеристикой (2.4).

Классы функций вида (2.5)–(2.8) являются линейными пространствами и широко используются в различных разделах комплексного анализа, а классы вида (2.9)–(2.11) здесь введены, по-видимому, впервые. Очевидно, что при условии $h(\theta) \equiv \sigma$ классы функций (2.5), (2.7), а также (2.6), (2.8), попарно совпадают. В общем случае справедливы, вообще говоря, строгие вложения

$$[\varrho, h(\theta)) \subset [\varrho, h(\theta)]_\circ \subset [\varrho, I_h)_* \subset [\varrho, I_h]_*,$$

$$[\varrho, h(\theta)]_\circ \subset [\varrho, h(\theta)] \subset [\varrho, I_h]_*, \qquad [\varrho, h(\theta)] \subset [\varrho, \sigma] \subset [\varrho, \sigma]_*,$$

где используется близкое к (2.4) обозначение

$$I_h \equiv \frac{1}{2\pi} \int\limits_0^{2\pi} h(\theta)\, d\theta,$$

ограничение $h(\theta) \leqslant \sigma$ при всех $\theta \in [0, 2\pi]$ и непрерывность функции $h(\theta)$. Условие (2.1) необходимо и достаточно для того, чтобы введенные классы содержали не только полиномы, но и трансцендентные целые функции (см. по этому поводу работу [7]).

3. Характеристики роста последовательностей

Из теоремы единственности для голоморфных в области функций следует, что две целые функции, совпадающие на множестве, имеющем хотя бы одну конечную предельную точку, тождественно равны, т. е. их разность есть нулевая функция. Поэтому в качестве множеств единственности для классов целых функций рассматриваются дискретные множества.

Определение 3.1. Последовательность комплексных чисел $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, не имеющую конечных предельных точек, назовем *множеством единственности* для некоторого класса целых функций, если в этом классе не существует не равной тождественно нулю функции, обращающейся в нуль на каждом элементе Λ с кратностью, не меньшей кратности этого элемента в Λ. При этом *кратностью* элемента в множестве Λ мы называем число вхождений этого элемента в Λ. Если же в рассматриваемом классе целых функций существует функция f, такая что $f(\Lambda) = 0$ (f обращается в нуль на Λ в указанном выше смысле), но f отлична от тождественного нуля, то Λ назовем *множеством неединственности* в данном классе.

Обозначим через Λ_f множество всех нулей функции f, записанных с учетом кратности (нуль кратности m записываем m раз). Определение множества единственности можно переписать следующим образом. Последовательность $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где $\lambda_n \to \infty$ при $n \to \infty$, есть *множество единственности* для некоторого класса целых функций, если для всякой функции f из этого класса, обращающейся в нуль на каждом элементе множества Λ, следует, что $f(z) \equiv 0,\ z \in \mathbb{C}$, т. е. условие $\Lambda_f \supset \Lambda$ влечет $f(z) \equiv 0,\ z \in \mathbb{C}$.

Для произвольной стремящейся к бесконечности последовательности $\Lambda \subset \mathbb{C}$ и фиксированного класса целых функций (из некоторой шкалы, определяемой ограничением на рост), можно поставить следующие вопросы.

- При каких условиях Λ является множеством единственности для данного класса?
- Пусть ответ на первый вопрос положительный. Является ли Λ множеством единственности для более широкого класса выделенной шкалы, и если является, то каков наиболее широкий класс, в котором Λ остается множеством единственности?
- Если Λ совпадает с множеством Λ_L нулей некоторой целой функции L (в таком случае L называем *порождающей функцией* последовательности Λ), то какие свойства этой функции гарантируют, что Λ является множеством единственности для данного (или более широкого) класса?

Исследование возникающих задач будем проводить в функциональных шкалах (2.5)–(2.11). Введем требующиеся для этого характеристики роста комплексных последовательностей.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность комплексных чисел, не имеющая конечных предельных точек. Считаем, что члены последовательности занумерованы с учетом неубывания их модулей, т. е. $|\lambda_n| \leqslant |\lambda_{n+1}|$ при всех $n \in \mathbb{N}$. *Считающей функцией* последовательности Λ называется величина

$$n_\Lambda(r) = \max\left\{\, n: \ |\lambda_n| \leqslant r,\ \lambda_n \in \Lambda \,\right\}, \quad r \geqslant 0,$$

совпадающая при каждом r с числом элементов этой последовательности в круге $|z| \leqslant r$. Далее, *усредненная считающая функция* последовательности Λ определяется формулой

$$N_\Lambda(r) = \int\limits_0^r \frac{n_\Lambda(t) - n_\Lambda(0)}{t}\,dt, \quad r \geqslant 0.$$

Величины, задаваемые равенствами

$$\overline{\Delta}_\varrho(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^{\varrho(r)}}, \qquad \underline{\Delta}_\varrho(\Lambda) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^{\varrho(r)}}, \tag{3.1}$$

называются соответственно *верхней* и *нижней ϱ-плотностями* последовательности Λ. Аналогично (с заменой считающей функции на усредненную считающую функцию) определяются и *усредненные верхняя* и *нижняя ϱ-плотности* Λ. Именно,

$$\overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda) = \varlimsup_{r\to+\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^{\varrho(r)}}, \qquad \underline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda) = \varliminf_{r\to+\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^{\varrho(r)}}. \tag{3.2}$$

Последовательность Λ называется *ϱ-измеримой*, если $\overline{\Delta}_\varrho(\Lambda) = \underline{\Delta}_\varrho(\Lambda)$, что эквивалентно совпадению усредненных (верхней и нижней) ϱ-плотностей $\overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda) = \underline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda)$. Тем самым ϱ-измеримость Λ означает существование любого из пределов

$$\Delta_\varrho(\Lambda) = \lim_{r\to+\infty} \frac{n_\Lambda(r)}{r^{\varrho(r)}}, \qquad \Delta^*_\varrho(\Lambda) = \lim_{r\to+\infty} \frac{N_\Lambda(r)}{r^{\varrho(r)}},$$

которые называют *ϱ-плотностями* (*обычной* и *усредненной*) ϱ-измеримой последовательности Λ.

Все подготовлено для перехода к формулировкам и доказательствам результатов.

4. Основные результаты

Следующее утверждение предъявляет достаточные условия того, что данная последовательность комплексных чисел является множеством единственности для класса $[\varrho,\sigma)$, и получено переформулировкой теоремы 1.3 из недавней работы [4] с учетом определения уточненного порядка. Для сохранения полноты и замкнутости изложения полезно дать нужный факт с доказательством, не ограничиваясь формальной ссылкой.

Теорема 4.1. *Пусть $\varrho=\varrho(r)$ — произвольный уточненный порядок, удовлетворяющий условию* (2.1). *Пусть также $\sigma>0$ и Λ — последовательность комплексных чисел, не имеющая конечных предельных точек, такая, что*

$$\overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda)=\sigma. \tag{4.1}$$

Тогда Λ является множеством единственности для класса $[\varrho,\sigma)$.

Доказательство. Согласно формуле Иенсена (см. [8, гл. I, § 5]) для произвольной целой функции f справедливо равенство

$$N_{\Lambda_f}(r)\equiv\int\limits_0^r\frac{n_f(t)-n_f(0)}{t}\,dt=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\ln|f(re^{i\theta})|\,d\theta-\ln\frac{|f^{(m)}(0)|}{m!}\,r^m,\qquad r>0. \tag{4.2}$$

Здесь $n_f(r)=n_{\Lambda_f}(r)$ — считающая функция множества корней Λ_f функции f, а m — число вхождений нуля в Λ_f. Оценивая сверху значения модуля функции на окружности радиуса r максимумом модуля этой функции на той же окружности, выводим неравенство

$$N_{\Lambda_f}(r)\leqslant\ln M_f(r)+O(\ln r),\quad r\to+\infty.$$

Поделив на $r^{\varrho(r)}$ обе части этого неравенства и воспользовавшись свойством (2.1), получим оценку

$$\overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda_f)\leqslant\sigma_\varrho(f). \tag{4.3}$$

Понятно, что в левой части (4.3) нужно написать нуль, если множество Λ_f не более чем конечно.

Предположим теперь, что целая функция f принадлежит классу $[\varrho,\sigma)$, обращается в нуль на данной последовательности Λ, но не равна тождественно нулю. Тогда для ее нулевого множества верно включение $\Lambda_f\supset\Lambda$ и, следовательно, $n_{\Lambda_f}(r)\geqslant n_\Lambda(r)$ при всех $r\geqslant 0$. Отсюда, привлекая (2.1) и (3.2), легко приходим к неравенству $\overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda_f)\geqslant\overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda)$. В результате (см. (4.1), (4.3)) имеем

$$\sigma>\sigma_f\geqslant\overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda_f)\geqslant\overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda)=\sigma.$$

Полученное противоречие означает, что Λ — множество единственности для класса $[\varrho,\sigma)$, и завершает доказательство теоремы. □

Ответ на вопрос, будет ли для заданной последовательности Λ со свойством (4.1) указанный в теореме 4.1 класс максимальным (в шкале классов (2.5) или (2.6) с ограничением на тип), требует дополнительной информации. Такую информацию можно получить, если известно, что последовательность Λ имеет порождающую (целую) функцию F_Λ, нулевое множество которой совпадает (по определению) с Λ.

Согласно теореме Вейерштрасса [8, гл. I, § 3] любая последовательность комплексных чисел без конечных предельных точек имеет порождающую функцию. В условиях теоремы 4.1 неравенство (4.3) для каждой порождающей функции F_Λ запишется в виде

$$\overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda)=\sigma\leqslant\sigma_\varrho(F_\Lambda). \tag{4.4}$$

Возникает необходимость из всех функций, порождающих последовательность Λ, выбрать функцию с наименьшим ϱ-типом, точнее — найти экстремальную величину

$$T(\Lambda,\sigma)\equiv\inf\left\{\sigma_\varrho(F):\ F\in[\varrho,\infty),\ \Lambda_F=\Lambda,\ \overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda)=\sigma\right\}, \tag{4.5}$$

где $[\varrho,\infty)=\bigcup\limits_{0<\sigma<\infty}[\varrho,\sigma)$ — класс всех целых функций конечного ϱ-типа. Близкая к (4.5) экстремальная величина

$$\sigma_{\inf}(\Lambda;\rho)\equiv\inf\left\{\sigma>0:\ \exists F\in[\varrho,\sigma]\setminus\{0\}\,,\ F(\Lambda)=0\right\}$$

введена в [11], где доказана точная двусторонняя оценка

$$\overline{\Delta}_{\varrho}^{*}(\Lambda)\leqslant\sigma_{\inf}(\Lambda;\rho)\leqslant P(\rho)\,\overline{\Delta}_{\varrho}^{*}(\Lambda)$$

с константой Пэли

$$P(\rho)=\begin{cases}\dfrac{\pi\rho}{\sin\pi\rho}, & 0<\rho<1/2,\\ \pi\rho, & \rho\geqslant 1/2\end{cases}$$

(см. также [13, гл. 3, теорема 3.3.3]). Существенные дополнения к этому результату сделаны сначала в [12], а затем — в [14, гл. 2], [2, гл. 3] и [6]. Вопрос о взаимосвязи величин $T(\Lambda,\sigma)$ и $\sigma_{\inf}(\Lambda;\rho)$, несмотря на их внешнее сходство, нетривиален и требует отдельного исследования.

Из определения (4.5) и неравенства (4.4) следует, что $T(\Lambda,\sigma)\geqslant\sigma$ и что для любого $\sigma'>T(\Lambda,\sigma)$ последовательность Λ является множеством неединственности для класса $[\varrho,\sigma')$. Как мы увидим ниже, обе логически возможные ситуации $T(\Lambda,\sigma)=\sigma$ и $T(\Lambda,\sigma)>\sigma$ реализуются на практике.

Определение 4.1. Если точная нижняя грань в (4.5) достигается на некоторой целой функции конечного ϱ-типа, то такую функцию назовем *экстремальной порождающей функцией* последовательности Λ и обозначим $\hat{F}_{\Lambda}$.

При наличии экстремальной порождающей функции $\hat{F}_{\Lambda}$ сама последовательность Λ является множеством неединственности для класса $[\varrho,\,T(\Lambda,\sigma)]$, поскольку $\hat{F}_{\Lambda}$ ему принадлежит.

Предположим теперь, что для Λ найдется такая экстремальная порождающая функция $\hat{F}_{\Lambda}$, что выполнено соотношение

$$T(\Lambda,\sigma)=\sigma_{\varrho}(\hat{F}_{\Lambda})=\sigma. \tag{4.6}$$

Условие (4.6) можно сформулировать как требование существования у последовательности Λ (с верхней усредненной ϱ-плотностью $\sigma>0$) порождающей функции ϱ-типа σ (автоматически — экстремальной порождающей функции). В таком случае можно дать следующее дополнение к теореме 4.1 (ср. с [4, теорема 1.3]), обоснование которого фактически уже проведено.

Теорема 4.2. *Пусть, как в теореме* 4.1, $\varrho=\varrho(r)$ — *произвольный уточненный порядок с условием* (2.1), $\sigma>0$ *и* Λ — *последовательность комплексных чисел, не имеющая конечных предельных точек и удовлетворяющая* (4.1). *Тогда* Λ *является множеством единственности для класса* $[\varrho,\sigma)$.

Если дополнительно известно, что Λ *имеет порождающую функцию* ϱ-*типа* σ, *т. е. выполнено условие* (4.6), *то эта последовательность не является множеством единственности для чуть более широкого класса* $[\varrho,\sigma]$.

Если такой порождающей функции нет, то можно лишь утверждать, что Λ *является множеством неединственности для класса* $[\varrho,\sigma')$ *при любом* $\sigma'>T(\Lambda,\sigma)$ *с величиной* $T(\Lambda,\sigma)$, *заданной по правилу* (4.5).

В связи с теоремой 4.2 важно знать, какие последовательности комплексных чисел обладают экстремальной порождающей функцией, и насколько велико множество функций, экстремально порождающих последовательность своих нулей. Сюда относятся все целые функции нулевого порядка (см. [1, ч. III, гл. 1, § 8] и [2, гл. 2, § 2.2]), функции положительного порядка вполне регулярного роста с постоянным индикатором (мы в этом убедимся чуть позже), и не только такие. Например, в работах [9, теорема 2.1] и [5, § 2] в базовом случае $\varrho(r)\equiv\rho>0$ для любых наперед заданных чисел $0\leqslant\alpha\leqslant\sigma<+\infty$ построен пример целой функции F с нулевым множеством Λ_F, обладающей свойствами:

$$\underline{\Delta}_{\rho}^{*}(\Lambda_F)=\alpha,\quad \overline{\Delta}_{\rho}^{*}(\Lambda_F)=\sigma,$$
$$\sigma_{\rho}(F)=\overline{\Delta}_{\rho}^{*}(\Lambda_F)=\sigma.$$

По теореме 4.2 последовательность нулей каждой из таких функций F является множеством единственности для $[\rho,\sigma)$, причем в шкале вида (2.6) этот класс будет в указанном смысле наибольшим. Отметим также, что F не обладает полной регулярностью роста при выборе $\alpha<\sigma$.

Естественно возникает вопрос: можно ли в случае нарушения (4.6) указать максимальный класс (из какой-либо введенной в разделе 2 шкалы), для которого Λ является множеством единственности? Попытки ответа на этот вопрос требуют привлечения следующей расширенной версии неравенства Иенсена (4.3) (см. [5, § 2], где обсуждается ситуация $\varrho(r) \equiv \rho > 0$).

Пусть целая функция f с последовательностью нулей Λ_f имеет конечный ϱ-тип при уточненном порядке $\varrho(r) \to \rho > 0$, $r \to +\infty$. Тогда верна цепочка неравенств

$$\frac{\underline{\Delta}_{\varrho}(\Lambda_f)}{\rho} \leqslant \underline{\Delta}^*_{\varrho}(\Lambda_f) \leqslant \overline{\Delta}^*_{\varrho}(\Lambda_f) \leqslant I_{\varrho}(f) \leqslant \sigma_{\varrho}(f). \tag{4.7}$$

Напомним, что фигурирующие в (4.7) ϱ-плотности комплексной последовательности введены в (3.1), (3.2), а $I_{\varrho}(f)$ — интегральная характеристика, заданная формулой (2.4). Последнее неравенство в цепочке (4.7) уже упоминалось после определения (2.4) и следует из очевидной оценки

$$h_{\varrho}(f, \theta) \leqslant \sigma_{\varrho}(f), \qquad \theta \in [0, 2\pi]$$

(ср. (2.2) с (2.3)), предпоследнее неравенство вытекает из формулы Иенсена (4.2) с учетом определения ϱ-индикатора и того факта, что стремление к верхнему пределу в (2.3) равномерное по θ. Остальные неравенства несложно выводятся из определений соответствующих плотностных характеристик.

Спросим попутно, могут ли достигаться равенства в отдельных частях или даже всюду в (4.7)? Как доказано в [8, гл. IV, § 1, теорема 3], равенство

$$\frac{\underline{\Delta}_{\varrho}(\Lambda_f)}{\rho} = I_{\varrho}(f)$$

имеет место для функций вполне регулярного роста и только для них. Другое равенство

$$I_{\varrho}(f) = \sigma_{\varrho}(f)$$

ввиду непрерывности ϱ-индикатора возможно лишь при условии

$$h_{\varrho}(f, \theta) \equiv \sigma_{\varrho}(f), \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

Тем самым любая функция вполне регулярного роста с постоянным индикатором (при положительном уточненном порядке ϱ) «тотально» доставляет равенства в (4.7) и является экстремально порождающей для последовательности своих нулей в специальном смысле (4.6).

Вернемся к вопросу об изучении ситуации в случае нарушения (4.6).

Теорема 4.3. *Пусть $\varrho = \varrho(r)$ — произвольный положительный уточненный порядок, $I > 0$ и Λ — последовательность комплексных чисел без конечных предельных точек, имеющая усредненную верхнюю ϱ-плотность $\overline{\Delta}^*_{\varrho}(\Lambda) = I$.*

Если Λ обладает такой порождающей функцией F_Λ, что $I_{\varrho}(F_\Lambda) = I$, то Λ является множеством единственности для класса $[\varrho, I)_*$ и не является таковым для чуть более широкого класса $[\varrho, I]_*$.

Если же Λ имеет порождающую функцию F_Λ со свойством $I_{\varrho}(F_\Lambda) = I' > I$, то можно лишь утверждать, что Λ есть множество неединственности для класса $[\varrho, I']_*$.

Доказательство. Опираемся на те же соображения, с помощью которых были доказаны теоремы 4.1 и 4.2. Пусть сначала в условиях теоремы для последовательности Λ найдется порождающая функция F_Λ со свойством $I_{\varrho}(F_\Lambda) = I$. Тогда F_Λ попадает в класс $[\varrho, I]_*$, и Λ не является множеством единственности в таком классе. Возьмем затем целую функцию f конечного ϱ-типа, которая обращается в нуль на последовательности Λ, но отлична от тождественного нуля. Тогда, во-первых, $\Lambda_f \supset \Lambda$ и $\overline{\Delta}^*_{\varrho}(\Lambda_f) \geqslant \overline{\Delta}^*_{\varrho}(\Lambda)$. Во-вторых (см. (4.7)),

$$I_{\varrho}(f) \geqslant \overline{\Delta}^*_{\varrho}(\Lambda_f) \geqslant \overline{\Delta}^*_{\varrho}(\Lambda) = I,$$

и функция f не может принадлежать классу $[\varrho, I)_*$. Отсюда следует первая часть теоремы. Вторая ее часть очевидна, поскольку порождающая функция F_Λ со свойством $I_{\varrho}(F_\Lambda) = I'$ принадлежит классу $[\varrho, I']_*$. □

Отметим, что теорема 4.2 вытекает из теоремы 4.3 в ситуации, когда функция F_Λ, порождающая последовательность Λ, имеет постоянный индикатор (равный ϱ-типу). По поводу целых функций с постоянным индикатором см. также библиографию в [5] и работы [3, 10]. В случае непостоянного индикатора порождающей функции полезным будет следующее утверждение, которое является прямым следствием теоремы 4.3 и имеет дело с множествами единственности (неединственности) в классах (2.7)–(2.9).

Теорема 4.4. *Пусть $\rho > 0$, $h(\theta)$ — 2π-периодическая ρ-тригонометрически выпуклая функция, Λ — нулевое множество целой функции F_Λ с ϱ-индикатором $h_\varrho(\theta, F_\Lambda) = h(\theta)$. Если выполнено соотношение*

$$\overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda) = I_\varrho(F_\Lambda) > 0, \tag{4.8}$$

то Λ является множеством единственности в классах $[\varrho, h(\theta))$, $[\varrho, h(\theta)]_\circ$ и не является таковым в классе $[\varrho, h(\theta)]$.

Замечание 4.1. Функция, удовлетворяющая условию (4.8), дает решение следующей экстремальной задачи: для заданных числа $I > 0$ и последовательности комплексных чисел Λ с усредненной верхней ϱ-плотностью $\overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda) = I$ найти точную нижнюю грань

$$\inf\left\{I_\varrho(F):\ F \in [\varrho, \infty),\ \Lambda_F = \Lambda,\ \overline{\Delta}^*_\varrho(\Lambda) = I\right\}.$$

Впрочем, задача о существовании такой порождающей функции нетривиальна и зависит от индивидуальных свойств выбранной последовательности Λ.

Как уже фактически отмечалось при обсуждении точности соотношения (4.7), требованию (4.8) заведомо удовлетворяет пара: целая функция вполне регулярного роста при уточненном порядке ϱ и последовательность ее нулей Λ. Нужно лишь исключить вырожденную ситуацию $\Delta_\varrho(\Lambda) = 0$ (тогда и $\Delta^*_\varrho(\Lambda) = 0$). Поэтому теорема 4.4 приводит к такому утверждению.

Следствие 4.1. *Последовательность нулей (положительной верхней ϱ-плотности) целой функции вполне регулярного роста с ϱ-индикатором $h(\theta)$ образует множество единственности в классе $[\varrho, h(\theta))$ и не является таковым в чуть более широком классе $[\varrho, h(\theta)]$.*

В связи со следствием 4.1 укажем, что по любой 2π-периодической ρ-тригонометрически выпуклой функции $h(\theta)$ можно, как известно, построить последовательность комплексных чисел, для которой порождающая ее функция имеет ϱ-индикатор, равный $h(\theta)$, и вполне регулярный рост. Вопрос об ослаблении условий на регулярность роста функции из формулировки следствия 4.1 еще ждет своего решения.

Наиболее прозрачный вид теоремы единственности приобретают в классах целых функций экспоненциального типа, т. е. целых функций, тип которых при уточненном порядке $\varrho(r) \equiv 1$ конечен. В таком случае в обозначениях используемых асимптотических характеристик опускаем индекс ϱ. Например, пишем $h(\theta, f)$ вместо $h_\varrho(\theta, f)$ и $\sigma(f)$ вместо $\sigma_\varrho(f)$. Таким образом, целые функции экспоненциального типа — в точности те, для которых $\sigma(f) < +\infty$. Напомним, что тогда величина

$$2\pi I(f) = \int_0^{2\pi} h(\theta, f)\, d\theta$$

совпадает с длиной границы выпуклого компакта на комплексной плоскости, определяемого равенством

$$D(f) = \bigcap_{\theta \in [0,\, 2\pi]} \left\{z \in \mathbb{C}:\ \mathrm{Re}\,(ze^{-i\theta}) \leqslant h(\theta, f)\right\}$$

и называемого *индикаторной диаграммой* целой функции f экспоненциального типа. В обозначениях классов целых функций экспоненциального типа уточненный порядок $\varrho(r) \equiv 1$ фигурирует в виде **1**.

Дадим, наконец, одну теорему единственности в геометрических терминах, использующих понятие круга Сильвестра (см. раздел 1). Предварительно установим простую формулу для вычисления радиуса круга Сильвестра индикаторной диаграммы целой функции экспоненциального типа.

Лемма 4.1. *Радиус $r(f)$ круга Сильвестра, построенного для индикаторной диаграммы $D(f)$ целой функции f экспоненциального типа, вычисляется по формуле*

$$r(f) = \min\bigl\{\sigma(f_a) :\ |a| \leqslant \sigma(f)\bigr\}. \tag{4.9}$$

Здесь для $a \in \mathbb{C}$ обозначено

$$f_a(z) = f(z)\, e^{az}, \quad z \in \mathbb{C}. \tag{4.10}$$

Доказательство. Сразу отметим, что приводимые ниже рассуждения проходят для случая одноточечной индикаторной диаграммы с допущением вырождения круга в точку.

Хорошо известно, что

$$\max_{0\leqslant\theta\leqslant 2\pi} h(\theta, f) = \sigma(f).$$

Следовательно, индикаторная диаграмма $D(f)$ содержится в круге $\{\, |z| \leqslant \sigma(f)\,\}$ и не содержится ни в каком круге $\{\, |z| \leqslant r\,\}$ при $r < \sigma(f)$. Другими словами, $\sigma(f)$ — это радиус наименьшего круга с центром в нуле, содержащего $D(f)$. Поместим теперь индикаторную диаграмму $D(f)$ в ее круг Сильвестра, т. е. в круг

$$\{\, |z - b| \leqslant r(f)\,\}$$

минимально возможного радиуса $r(f)$ с центром в некоторой точке $b \in \mathbb{C}$. Поскольку центр круга Сильвестра выпуклого компакта находится в этом компакте, то $|b| \leqslant \sigma(f)$. Положим $a = -\overline{b}$ (черта означает комплексное сопряжение, так что $|a| = |b|$) и перейдем от f к f_a по правилу (4.10). При указанном переходе индикаторная диаграмма $D(f)$ сдвинется таким образом, что

$$\{\, |z| \leqslant r(f)\,\}$$

станет кругом Сильвестра индикаторной диаграммы $D(f_a)$. Поэтому

$$r(f) = r(f_a) = \sigma(f_a),$$

и на функции f_a достигается минимум в (4.9). Лемма доказана. □

Из теорем 4.2–4.4 с учетом леммы 4.1 вытекает следующий результат.

Теорема 4.5. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — последовательность комплексных чисел с конечной и положительной усредненной верхней плотностью $\overline{\Delta}^*(\Lambda)$. Пусть, далее, F_Λ — соответствующее каноническое произведение Адамара*

$$F_\Lambda(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{\lambda_n}\right) e^{\frac{z}{\lambda_n}}, \qquad z \in \mathbb{C},$$

и $r(F_\Lambda)$ — радиус круга Сильвестра индикаторной диаграммы $D(F_\Lambda)$. Тогда при выполнении равенства

$$\overline{\Delta}^*(\Lambda) = r(F_\Lambda)$$

последовательность Λ будет множеством единственности для класса $\bigl[\mathbf{1},\, r(F_\Lambda)\bigr)$ и не будет таковым для чуть более широкого класса $\bigl[\mathbf{1},\, r(F_\Lambda)\bigr]$. Если же $\overline{\Delta}^*(\Lambda) < r(F_\Lambda)$, но выполнено равенство

$$\overline{\Delta}^*(\Lambda) = I(F_\Lambda) \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h(\theta,\, F_\Lambda)\, d\theta,$$

то Λ является множеством единственности для классов

$$\bigl[\mathbf{1},\, I(F_\Lambda)\bigr)_* \supset \bigl[\mathbf{1},\, h(\theta, F_\Lambda)\bigr]_\circ \supset \bigl[\mathbf{1},\, h(\theta, F_\Lambda)\bigr)$$

и не является таковым для классов

$$\bigl[\mathbf{1},\, I(F_\Lambda)\bigr]_* \supset \bigl[\mathbf{1},\, h(\theta, F_\Lambda)\bigr].$$

Доказательство. Приведем схему рассуждений. Условие конечности усредненной плотности последовательности Λ гарантирует принадлежность канонического произведения Адамара F_Λ, построенного по Λ, классу целых функций экспоненциального типа. В соответствии с общим определением это произведение является порождающей функцией последовательности Λ. Все другие порождающие (для этой последовательности) функции экспоненциального типа отличаются от F_Λ множителями вида $cz^m e^{az}$, где c, $a \in \mathbb{C}$, и поэтому имеют индикаторные диаграммы на плоскости, отличающиеся друг от друга только сдвигами. Теперь вкупе с леммой 4.1 применим теоремы 4.2–4.4, учитывая, что длина границы индикаторной диаграммы не меняется при сдвиге. Теорема доказана. □

5. Некоторые приложения, примеры, комментарии

Множества единственности для классов целых функций экспоненциального типа играют решающую роль в проблеме полноты системы экспоненциальных мономов в пространстве $H(G)$ аналитических в области G функций с топологией равномерной сходимости на компактах в G. Справедлив такой широко известный критерий (см., например, [13, теорема 3.3.1]).

Теорема 5.1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k\}$ — стремящаяся к бесконечности последовательность комплексных чисел, n_k — кратность элемента $\lambda_k \in \Lambda$. Пусть далее G — выпуклая область в комплексной плоскости $\mathbb{C}$ с опорной функцией*

$$h(\theta) = \max_{z\in G} \operatorname{Re}(ze^{-i\theta}).$$

Система экспоненциальных мономов

$$\operatorname{Exp}\Lambda = \left\{ z^j e^{\lambda_k z} : \ j = 1, 2, \ldots, n_k - 1, \ k \in \mathbb{N} \right\} \tag{5.1}$$

полна в пространстве $H(G)$ тогда и только тогда, когда Λ является множеством единственности для класса $[\mathbf{1}, h(-\theta))$.

Из теорем 4.4, 5.1 сразу вытекает такое утверждение (см. также комментарий к следствию 4.1).

Теорема 5.2. *Для любой выпуклой ограниченной области G в $\mathbb{C}$ существует такая последовательность комплексных чисел Λ, что система $\operatorname{Exp}\Lambda$ экспоненциальных мономов* (5.1) *будет полна в G, но не будет таковой ни в какой более широкой области.*

В заключение применим теорему 4.5 в одной простой, но наглядной ситуации, когда Λ совпадает с множеством целых чисел $\mathbb{Z}$, элементы которого занумеруем в порядке неубывания модулей. Здесь $\overline{\Delta}^*(\Lambda) = \Delta^*(\Lambda) = 2$. Каноническое произведение из теоремы 4.5, построенное по Λ, есть целая функция экспоненциального типа $F_\Lambda(z) = \sin \pi z$ со свойствами

$$h(\theta, F_\Lambda) = \pi|\sin\theta|, \quad \sigma(F_\Lambda) = r(F_\Lambda) = \pi, \quad I(F_\Lambda) = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} |\sin\theta|\, d\theta = 2.$$

Согласно второй части теоремы 4.5 для классов

$$\big[\mathbf{1},\, 2\big)_* \supset \big[\mathbf{1},\, \pi|\sin\theta|\big]_\circ \supset \big[\mathbf{1},\, \pi|\sin\theta|\big)$$

последовательность $\Lambda = \mathbb{Z}$ является множеством единственности, а для классов

$$\big[\mathbf{1},\, 2\big]_* \supset \big[\mathbf{1},\, \pi|\sin\theta|\big]$$

— уже нет. Полученный результат интересно сравнить с классической теоремой Карлсона, утверждающей, что $\Lambda = \mathbb{Z}$ образует множество единственности для класса $[\mathbf{1},\, \pi)$. Поскольку классы $\big[\mathbf{1},\, 2\big)_*$ и $[\mathbf{1},\, \pi)$ пересекаются, но ни один из них не вложен в другой, то наш результат не содержится в теореме Карлсона и наоборот. Теорема единственности, включающая в себя теорему Карлсона, предложена в [4, теорема 1]. Применение наших утверждений в более тонких ситуациях будет дано отдельно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брайчев Г. Г.* Введение в теорию роста выпуклых и целых функций. — М.: Прометей, 2005.
2. *Брайчев Г. Г.* Экстремальные задачи в теории выпуклых и целых функций// Дисс. докт. физ.-мат. наук. — М.: РУДН, 2018.
3. *Брайчев Г. Г.* О связи между ростом нулей и убыванием тейлоровских коэффициентов целой функции// Мат. заметки — 2023. — *113*, № 1. — С. 32–45.
4. *Брайчев Г. Г., Хабибуллин Б. Н., Шерстюков В. Б.* Задача Сильвестра, покрытия сдвигами и теоремы единственности для целых функций// Уфимский мат. ж. — 2023. — *15*, № 4. — С. 30–41.
5. *Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б.* Точные оценки асимптотических характеристик роста целых функций с нулями на заданных множествах// Фундам. и прикл. мат. — 2018. — *22*, № 1. — С. 51–97.
6. *Брайчев Г. Г., Шерстюкова О. В.* О наименьшем типе целой функции с заданной подпоследовательностью нулей// Уфимский мат. ж. — 2022. — *14*, № 3. — С. 17–22.
7. *Гришин А. Ф., Ван Куинь Н.* Целые функции с наперед заданным нулевым уточненным порядком// Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2014. — *424*. — С. 141–153.
8. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: ГИТТЛ, 1956.
9. *Попов А. Ю.* Развитие теоремы Валирона—Левина о наименьшем возможном типе целой функции с заданной верхней ρ-плотностью корней// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2013. — *49*. — С. 132–164.
10. *Филевич П. В.* Индикатор целых функций с сильно колеблющимися коэффициентами// Мат. студ. — 2011. — *35*, № 2. — С. 142–148.
11. *Хабибуллин Б. Н.* О типе целых и мероморфных функций// Мат. сб. — 1992. — *183*, № 11. — С. 35–44.
12. *Хабибуллин Б. Н.* Последовательность нулей голоморфных функций, представление мероморфных функций. II. Целые функции// Мат. сб. — 2009. — *200*, № 2. — С. 129–158.
13. *Хабибуллин Б. Н.* Полнота систем экспонент и множества единственности. — Уфа: РИЦ БашГУ, 2012.
14. *Шерстюков В. Б.* Асимптотические свойства целых функций, корни которых лежат в некотором угле// Дисс. докт. физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 2016.
15. *Earl E. P.* Note in the constraction of proximate orders// J. London Math. Soc. — 1968. — *43*. — С. 695–698.
16. *Earl E. P., Hayman W. K.* Smooth majorants for functions of arbitrarily rapid grouth// Math. Proc. Camb. Phil. Soc. — 1991. — *109*, № 3. — С. 565–569.
17. *Valiron G.* Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance règulière// Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (3). — 1913. — № 5. — С. 117–257.

Г. Г. Брайчев
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: braichev@mail.ru

UDC 517.521+517.547.22
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-25-37
EDN: YXLBJX

The Sylvester problem and uniqueness sets in classes of entire functions

G. G. Braichev

RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. In this paper, we study the problem of finding, by a chosen sequence of complex numbers tending to infinity, the widest possible class of entire functions in a given scale for which this sequence is a uniqueness set. Within the framework of this general problem, we establish uniqueness theorems in various classes of entire functions, distinguished by restrictions on the type and indicator under a refined order. In particular, we complement the previously proven uniqueness theorem, using the concept of the Sylvester circle of the indicator diagram of an entire function of exponential type. We discuss the accuracy of the results obtained and their connection with known facts.

Keywords: Sylvester circle, indicator diagram, entire functions, uniqueness set.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author expresses sincere gratitude to V. B. Sherstyukov, whose comments and advice during the preparation of the article significantly improved its content, as well as to the anonymous reviewer, who carefully read the entire text and pointed out a number of useful sources. The author declares no financial support.

For citation: G. G. Braichev, "The Sylvester problem and uniqueness sets in classes of entire functions," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 1, 25–37. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-25-37

REFERENCES

1. G. G. Braichev, *Vvedenie v teoriyu rosta vypuklykh i tselykh funktsiy* [Introduction to the Theory of Growth of Convex and Entire Functions], Prometey, Moscow, 2005 (in Russian).
2. G. G. Braichev, "Ekstremal'nye zadachi v teorii vypuklykh i tselykh funktsiy" [Extremal problems in the theory of convex and entire functions], *Diss. dokt. fiz.-mat. nauk*, RUDN University, Moscow, 2018.
3. G. G. Braichev, "O svyazi mezhdu rostom nuley i ubyvaniem teylorovskikh koeffitsientov tseloy funktsii" [On the connection between the growth of zeros and the decrease of Taylor coefficients of an entire function], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2023, **113**, No. 1, 32–45 (in Russian).
4. G. G. Braichev, B. N. Khabibullin, and V. B. Sherstyukov, "Zadacha Sil'vestra, pokrytiya sdvigami i teoremy edinstvennosti dlya tselykh funktsiy" [Sylvester's problem, coverings by shifts and uniqueness theorems for entire functions], *Ufimskiy mat. zh.* [Ufa Math. J.], 2023, **15**, No. 4, 30–41 (in Russian).
5. G. G. Braichev and V. B. Sherstyukov, "Tochnye otsenki asimptoticheskikh kharakteristik rosta tselykh funktsiy s nulyami na zadannykh mnozhestvakh" [Exact estimates of asymptotic growth characteristics of entire functions with zeros on given sets], *Fundam. i prikl. mat.* [Fundam. Appl. Math.], 2018, **22**, No. 1, 51–97 (in Russian).
6. G. G. Braichev and O. V. Sherstyukova, "O naimen'shem tipe tseloy funktsii s zadannoy podposledovatel'nost'yu nuley" [On the smallest type of an entire function with a given subsequence of zeros], *Ufimskiy mat. zh.* [Ufa Math. J.], 2022, **14**, No. 3, 17–22 (in Russian).
7. A. F. Grishin and N. Van Quynh, "Tselye funktsii s napered zadannym nulevym utochnennym poryadkom" [Entire functions with a predetermined zero refined order], *Zap. nauch. sem. POMI* [Notes Sci. Semin. St. Petersburg Dept. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2014, **424**, 141–153 (in Russian).

8. B. Ya. Levin, *Raspredelenie korney tselykh funktsiy* [Distribution of Roots of Entire Functions], GITTL, Moscow, 1956 (in Russian).
9. A. Yu. Popov, "Razvitie teoremy Valirona—Levina o naimen'shem vozmozhnom tipe tseloy funktsii s zadannoy verkhney ρ-plotnost'yu korney" [Development of the Valiron–Levin theorem on the smallest possible type of an entire function with a given upper ρ-density of roots], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2013, **49**, 132–164 (in Russian).
10. P. V. Filevich, "Indikator tselykh funktsiy s sil'no koleblyushchimisya koeffitsientami" [Indicator of entire functions with highly oscillating coefficients], *Mat. stud.* [Math. Stud.], 2011, **35**, No. 2, 142–148 (in Russian).
11. B. N. Khabibullin, "O tipe tselykh i meromorfnykh funktsiy" [On the type of entire and meromorphic functions], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1992, **183**, No. 11, 35–44 (in Russian).
12. B. N. Khabibullin, "Posledovatel'nost' nuley golomorfnykh funktsiy, predstavlenie meromorfnykh funktsiy. II. Tselye funktsii" [Sequence of zeros of holomorphic functions and representation of meromorphic functions. II. Entire functions], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2009, **200**, No. 2, 129–158 (in Russian).
13. B. N. Khabibullin, *Polnota sistem eksponent i mnozhestva edinstvennosti* [Completeness of Exponential Systems and Uniqueness Sets], RITs BashGU, Ufa, 2012 (in Russian).
14. V. B. Sherstyukov, "Asimptoticheskie svoystva tselykh funktsiy, korni kotorykh lezhat v nekotorom ugle" [Asimptoticheskie svoystva tselykh funktsiy, korni kotorykh lezhat v nekotorom ugle], *Doctoral Dissertation*, MSU, Moscow, 2016.
15. E. P. Earl, "Note in the constraction of proximate orders," *J. London Math. Soc.*, 1968, **43**, 695–698.
16. E. P. Earl and W. K. Hayman, "Smooth majorants for functions of arbitrarily rapid grouth," *Math. Proc. Camb. Phil. Soc.*, 1991, **109**, No. 3, 565–569.
17. G. Valiron, "Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance règulière," *Ann. Fac. Sci. Toulouse Math. (3)*, 1913, No. 5, 117–257.

G. G. Braichev
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: braichev@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 1 (2024). С. 38–52
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.956
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-38-52
EDN: YYQSXD

ЗАДАЧА РИМАНА ДЛЯ ОСНОВНЫХ МОДЕЛЬНЫХ СЛУЧАЕВ УРАВНЕНИЙ ЭЙЛЕРА—ПУАССОНА

Л. В. Гаргянц[1], **О. С. Розанова**[2], **М. К. Турцынский**[3,4]

[1] *Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия*
[2] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия*
[3] *Российский университет транспорта (МИИТ), Москва, Россия*
[4] *Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия*

Аннотация. В статье построено решение задачи Римана для неоднородной нестрого гиперболической системы двух уравнений, являющейся следствием уравнений Эйлера—Пуассона без давления [9]. Эти уравнения могут быть рассмотрены для случаев притягивающей и отталкивающей силы, и для случаев нулевого и ненулевого основного фона плотности. Решение задачи Римана для каждого случая является нестандартным и содержит дельтаобразную сингулярность в компоненте плотности. В [16] построено решение для комбинации, соответствующей модели холодной плазмы (отталкивающая сила и ненулевой фон плотности). В настоящей работе рассмотрены три оставшихся случая.

Ключевые слова: уравнения Эйлера—Пуассона, задача Римана, характеристики, ударная волна, волна разрежения.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Поддержано грантом РНФ № 23-11-00056 через Российский университет дружбы народов.

Для цитирования: *Л. В. Гаргянц, О. С. Розанова, М. К. Турцынский*. Задача Римана для основных модельных случаев уравнений Эйлера—Пуассона// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 1. С. 38–52. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-38-52

1. Уравнения Эйлера—Пуассона

Уравнения Эйлера—Пуассона являются основополагающими для описания движения сплошной среды, состоящей из частиц, между которыми действует некоторая сила. Это может быть сила притяжения (гравитационная сила), если речь идет о моделях астрофизики, или сила отталкивания, если речь идет о моделях плазмы или полупроводников, где составляющими среды выступают электроны. В самом простом случае, когда пренебрегается давлением, вязкостью, потерями энергии, связанными с трением, исключением из рассмотрения частиц с противоположным зарядом (в случае плазмы), уравнения Эйлера—Пуассона выглядят следующим образом [9]:

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{V}) = 0, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\,\mathbf{V} = k\,\nabla\Phi, \tag{1.2}$$

$$\Delta\Phi = n - n_0, \tag{1.3}$$

где $n \geqslant 0$ — плотность, $n_0 = \mathrm{const} \geqslant 0$ — фоновое значение плотности, $\mathbf{V}$ — скорость, Φ — потенциал действующей силы, $k = \mathrm{const}$, случай $k > 0$ отвечает отталкивающей силе, $k < 0$ — притягивающей силе. Все компоненты решения зависят от времени t и точки пространства $x \in \mathbb{R}^d$, $d \geqslant 1$.

Отметим, что несмотря на то, что система (1.1)–(1.3) может считаться самой простой среди прочих моделей, учитывающих дополнительные факторы, математически она очень сложна, особенно в многомерном пространстве[1]. Например, в случае отталкивающей силы и ненулевого фона плотности система Эйлера—Пуассона описывает суперпозицию нелинейных волн, распространяющихся в разных направлениях. Но даже в случае одной пространственной переменной многие стандартные задачи, будучи поставленными для системы (1.1)–(1.3), не могут быть решены в рамках стандартного подхода. К таким задачам относится задача Римана, т. е. задача Коши с кусочно-постоянными данными, имеющими разрыв в начале координат, типичная для квазилинейных законов сохранения.

Мы будем рассматривать четыре основных модельных случая, которые могут быть получены после ренормировки:

I. $k = -1$, $n_0 = 0$;
II. $k = 1$, $n_0 = 0$;
III. $k = -1$, $n_0 = 1$;
IV. $k = 1$, $n_0 = 1$.

Задача Римана для случая IV, отвечающего модели холодной (электронной) плазмы, была решена в [16]. В настоящей статье мы построим решение для случаев I–III. Отметим, что для каждого из этих случаев решение имеет свою специфику. Это проявляется, в частности, в том, что в зависимости от ситуации, волна разрежения и/или ударная волна могут быть построены неединственным образом.

Отметим, что мы будем подходить к решению задачи Римана чисто математически, без оглядки на физический смысл. Например, для уравнений холодной плазмы ставить задачу Коши с разрывными начальными условиями не имеет смысла, так как считается, что эта система адекватно описывает модель только на гладких решениях [4]. В случае, когда начальные данные гладкие, можно ставить вопрос о том, останется ли решение гладким для всех $t > 0$ или в течение конечного времени у него образуется особенность. Для $d = 1$ (а в настоящей статье мы рассматриваем только этот случай) ответ на такой вопрос существует [9], для радиально-симметричных решений задача решалась в [7, 15, 19, 20], есть результаты и для так называемых аффинных решений [17]. Для многомерного случая и начальных данных общего вида критерий возникновения особенностей неизвестен.

2. Преобразование к гиперболической системе

Преобразуем систему (1.1)–(1.3) к более удобному для нас виду. Для этого введем векторфункцию $\mathbf{E} = -\nabla\Phi$. Из (1.3) получим

$$n = n_0 - \operatorname{div}\mathbf{E}, \tag{2.1}$$

что позволяет исключить n, подставив (2.1) в (1.1) и получить $\operatorname{div}\mathbf{X} = 0$, где

$$\mathbf{X} = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{V}\operatorname{div}\mathbf{E} - n_0\mathbf{V}.$$

Согласно теореме Гельмгольца $\mathbf{X} = \nabla F + \operatorname{rot}\mathbf{A}$, где F и $\mathbf{A}$ — скалярный и векторный потенциалы, соответственно. Так как $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$, то в случае, когда $\operatorname{rot}(n\mathbf{V}) = 0$ (в одномерном по пространству случае это заведомо так) мы имеем $\operatorname{rot}\mathbf{X} = 0$. Предположив, что компоненты вектора $\mathbf{X}$ достаточно быстро убывают при $|x| \to \infty$, по теореме о восстановлении гладкого векторного поля по его дивергенции и ротору [2] получим, что $\mathbf{X}$ восстанавливается единственным образом и поэтому равно нулю.

[1] Хотя физический смысл имеют только размерности $d = 2$, $d = 3$, математически можно рассматривать любое d. Более того, оказывается, что размерность $d = 4$ имеет исключительный характер [15].

Тогда мы получим систему

$$\begin{aligned}\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\,\mathbf{V} &= -k\mathbf{E},\\ \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \mathbf{V}\,\mathrm{div}\,\mathbf{E} &= n_0\mathbf{V}.\end{aligned}$$

Мы будем изучать задачу Римана именно для этой системы, из которой будет следовать (1.1)–(1.3), и уже не будем требовать убывания решения на бесконечности. Нас будет интересовать одномерный случай, т. е.

$$V_t + VV_x = -kE, \quad E_t + VE_x = n_0V, \tag{2.2}$$

а выражение для n будет находиться как $n = n_0 - E_x$.

Далее мы будем рассматривать систему (2.2) вместе с начальными данными Римана

$$(V,E)|_{t=0} = (V_-^0 + [V]^0\Theta(x),\ E_-^0 + [E]^0\Theta(x)),$$

где $\Theta(x)$ — функция Хевисайда, константы (V_-, E_-) — значения слева от разрыва, $([V],[E])$ — величины скачков, $(V_+ = V_- + [V],\ E_+ = E_- + [E])$ — значения справа от скачков, $(V_\pm^0, E_\pm^0)$, $([V]^0,[E]^0)$ — соответствующие значения всех величин в нулевой момент времени. Плотность в нулевой момент времени находится как

$$n|_{t=0} = n_0 - [E]^0\delta(x).$$

Отметим, что из неотрицательности плотности следует $[E]^0 \leqslant 0$.

Специфика системы (2.2) состоит в том, что она является нестрого гиперболической, поэтому и волна разрежения, и ударная волна имеют свойства, отличающиеся от стандартного решения задачи Римана (например, [3, 8]).

Нам также понадобится дивергентная форма этой системы:

$$n_t + (Vn)_x = 0, \qquad \left(\frac{nV^2}{2} + k\frac{E^2}{2}\right)_t + \left(\frac{nV^3}{2}\right)_x = 0, \tag{2.3}$$

в которой уже должна присутствовать величина n или (что менее удобно) ее выражение через E_x как $n = n_0 - E_x$.

3. Анализ характеристик

Характеристическая система, соответствующая (2.2), имеет вид

$$\dot{x} = V, \quad \dot{V} = -k\,E, \quad \dot{E} = n_0\,V, \tag{3.1}$$

точка обозначает производную по времени. Решение этой системы с начальными данными

$$x_\pm(0) = 0, \quad V_\pm(0) = V_\pm^0, \quad E_\pm(0) = E_\pm^0,$$

задает пару характеристик $x_-(t)$ и $x_+(t)$, расположение которых определяет: с волны разрежения или с волны сжатия начинается построение решения задачи Римана. Первая ситуация соответствует случаю $V_-^0<V_+^0$, а вторая — случаю $V_-^0>V_+^0$. В случае $[V]^0 = 0$ решение может начинаться как с волны разрежения, так и с волны сжатия в зависимости от k. Заметим, что $x_-(t)$ и $x_+(t)$ могут пересекаться, причем не один раз; при каждом пересечении волна разрежения сменяется волной сжатия (или наоборот). Как показано в [16], в случае IV, т. е. $k = 1$, $n_0 = 1$, точек пересечения — бесконечное множество, что порождает периодическую по времени структуру сменяющих друг друга волн разрежения и сингулярных волн сжатия.

Как мы покажем, в случаях I–III такой периодической структуры не будет, однако смена одного типа волны на другой по-прежнему может происходить.

Заметим, что во всех случаях при $[V]^0 = 0$, $[E]^0 = 0$ решение остается гладким, поэтому такую комбинацию мы рассматривать не будем.

3.1. Случай I, $\mathbf{n_0 = 0}$, $\mathbf{k = -1}$. Характеристики (т. е. решение (3.1) с учетом начальных данных) имеют следующий вид:

$$E_\pm(t) = E^0_\pm,$$
$$V_\pm(t) = E^0_\pm t + V^0_\pm,$$
$$x_\pm(t) = E^0_\pm \frac{t^2}{2} + V^0_\pm t + x_0, \quad x_0 = 0.$$

Покажем, что:

1. если $[V]^0 > 0$, $[E]^0 < 0$, то решение задачи Римана начинается с волны разрежения в области $x_-(t) < x < x_+(t),\ 0 < t < T^* = -2\dfrac{[V]^0}{[E]^0} > 0$, которая сменяется ударной волной в области $x_+(t) < x < x_-(t),\ t > T^*$;
2. если $[V]^0 \leqslant 0$, $[E]^0 < 0$, то в области $x_+(t) < x < x_-(t),\ t > 0$, образуется ударная волна;
3. если $[V]^0 > 0$, $[E]^0 = 0$, то в области $x_-(t) < x < x_+(t),\ t > 0$, образуется волна разрежения;
4. если $[V]^0 < 0$, $[E]^0 = 0$, то в области $x_+(t) < x < x_-(t)$, $t > 0$, образуется ударная волна.

Найдем условия, при которых характеристики x_+ и x_- пересекаются в некоторой точке $T^* > 0$. Если $[E]^0 < 0$, то из условия $x_+(T^*) = x_-(T^*),\ T^* > 0$, получим

$$\frac{[E]^0}{2} T^* + [V]^0 = 0,$$

откуда $T^* = -2\dfrac{[V]^0}{[E]^0} > 0$ при $[V]^0 > 0$, т. е. решение задачи Римана начинается с волны разрежения в области $x_-(t) < x < x_+(t),\ 0 < t < T^*$, которая сменяется ударной волной в $x_+(t) < x < x_-(t),\ t > T^*$. Если же $[V]^0 \leqslant 0$, то в области $x_+(t) < x < x_-(t),\ t > 0$, образуется ударная волна. При $[E]^0 = 0$ имеем $x_+(t) - x_-(t) = [V]^0 t$. Если $[V]^0 > 0$, то в области $x_-(t) < x < x_+(t),\ t > 0$, образуется волна разрежения. Если же $[V]^0 < 0$, то в этой области образуется ударная волна.

3.2. Случай II, $\mathbf{n_0 = 0}$, $\mathbf{k = 1}$. Согласно (3.1) имеем

$$E_\pm(t) = E^0_\pm,$$
$$V_\pm(t) = -E^0_\pm t + V^0_\pm,$$
$$x_\pm(t) = -E^0_\pm \frac{t^2}{2} + V^0_\pm t + x_0, \quad x_0 = 0.$$

В этом случае:

1. если $[V]^0 < 0$, $[E]^0 < 0$, то решение задачи Римана начинается с ударной волны в области $x_+(t) < x < x_-(t),\ 0 < t < T^* = 2\dfrac{[V]^0}{[E]^0} > 0$, которая сменяется волной разрежения в области $x_-(t) < x < x_+(t),\ t > T^*$;
2. если $[V]^0 \geqslant 0$, $[E]^0 < 0$, то в области $x_-(t) < x < x_+(t),\ t > 0$, образуется волна разрежения;
3. если $[V]^0 > 0$, $[E]^0 = 0$, то в области $x_-(t) < x < x_+(t),\ t > 0$, образуется волна разрежения;
4. если $[V]^0 < 0$, $[E]^0 = 0$, то в области $x_+(t) < x < x_-(t),\ t > 0$, образуется ударная волна.

Рассуждения аналогичны предыдущему случаю. Координаты точки T^* пересечения характеристик x_+ и x_- имеют вид $T^* = 2\dfrac{[V]^0}{[E]^0}$. Если $[V]^0 < 0$, то $T^* > 0$, и решение задачи Римана начинается с ударной волны в области $x_+(t) < x < x_-(t),\ 0 < t < T^*$, которая меняется на волну разрежения в области $x_-(t) < x < x_+(t),\ t > T^*$.

Если же $[V]^0 \geqslant 0$, то в области $x_-(t) < x < x_+(t),\ t > 0$, образуется волна разрежения.

3.3. Случай III, $\mathbf{k = -1}$, $\mathbf{n_0 = 1}$. Решение уравнения характеристик имеет вид

$$E_\pm(t) = E^0_\pm \operatorname{ch} t + V^0_\pm \operatorname{sh} t,$$
$$V_\pm(t) = E^0_\pm \operatorname{sh} t + V^0_\pm \operatorname{ch} t,$$
$$x_\pm(t) = E^0_\pm(\operatorname{ch} t - 1) + V^0_\pm \operatorname{sh} t + x_0, \quad x_0 = 0.$$

Покажем, что:

1. если $[E]^0 < 0 < [V]^0 < -[E]^0$, то в области $x_-(t) < x < x_+(t),\ 0 < t < T^* = \ln\dfrac{[E]^0 - [V]^0}{[E]^0 + [V]^0}$ образуется волна разрежения, которая сменяется ударной волной в области $x_+(t) < x < x_-(t),\ t > T^*$;
2. если $[V]^0 + [E]^0 \geqslant 0$, $[E]^0 < 0$ то в области $x_-(t) < x < x_+(t),\ t > 0$, образуется волна разрежения;
3. если $[E]^0 < 0,\ [V]^0 < 0$, то в области $x_+(t) < x < x_-(t),\ t > 0$, образуется ударная волна;
4. если $[V]^0 > 0$, $[E]^0 = 0$, то в области $x_-(t) < x < x_+(t),\ t > 0$, образуется волна разрежения;
5. если $[V]^0 < 0$, $[E]^0 = 0$, то в области $x_+(t) < x < x_-(t),\ t > 0$, образуется ударная волна.

Найдем точку $T^* > 0$ пересечения характеристик $x_+(t)$ и $x_-(t)$ и условия, при которых эта точка существует. Точка пересечения находится из уравнения

$$[E]^0(\operatorname{ch} T^* - 1) + [V]^0 \operatorname{sh} T^* = 0. \tag{3.2}$$

Поскольку $[E]^0 \leqslant 0$, данное уравнение имеет решение $T^* > 0$ лишь в случае $[E]^0 < 0 < [V]^0$. После замены $u = e^{T^*}$ из (3.2) получим квадратное уравнение $P(u) = 0$, где

$$P(u) = ([V]^0 + [E]^0)u^2 - 2[E]^0 u + [E]^0 - [V]^0.$$

Если $[V]^0 + [E]^0 \neq 0$, то это уравнение имеет два решения: $u = 1$ и $u = \dfrac{[E]^0 - [V]^0}{[E]^0 + [V]^0}$. Разложив квадратный трехчлен $P(u)$ на множители, получим

$$P(u) = \left([V]^0 + [E]^0\right)(u-1)\left(u - \frac{[E]^0 - [V]^0}{[E]^0 + [V]^0}\right).$$

Первому решению соответствует $T^* = 0$, что нам не подходит. У второго решения числитель всегда отрицателен, поэтому $u > 0$ тогда и только тогда, когда $[E]^0 + [V]^0 < 0$, т. е. $[V]^0 < -[E]^0$. Заметим, что в этом случае $u > 1$.

Если $[V]^0 + [E]^0 \geqslant 0$, то уравнение $P(u) = 0$ не имеет решений при $u > 1$.

4. Волна разрежения

В этом разделе мы построим волну разрежения для каждого из случаев. Заметим, что решение между характеристиками, т. е. при $x \in (x_-(t), x_+(t))$, можно искать в виде линейной по x функции, т. е.

$$(V,E) = \begin{cases} (V_-(t), E_-(t)), & x < x_-(t); \\ (V_r, E_r) = (a(t)x + b(t),\ c(t)x + d(t)), & x \in [x_-(t),\ x_+(t)]; \\ (V_+(t), E_+(t), & x > x_+(t)). \end{cases} \tag{4.1}$$

Чтобы это решение было непрерывно при всех $x \in \mathbb{R}$, нужно, чтобы при $x = x_\pm(t)$ оно совпадало с независящим от x решением в областях $x < x_-(t)$ и $x > x_+(t)$, соответственно.

4.1. Случай I, $\mathbf{n_0 = 0}$, $\mathbf{k = -1}$. Легко проверить, что решение вида (4.1) таково:

$$a(t) = \frac{2([V]^0 + [E]^0 t)}{(2[V]^0 + [E]^0 t)t}, \qquad b(t) = \frac{(E_-^0 V_+^0 - E_+^0 V_-^0)t}{[E]^0 t + 2[V]^0},$$
$$c(t) = \frac{2[E]^0}{(2[V]^0 + [E]^0 t)t}, \qquad d(t) = \frac{2(E_-^0 V_+^0 - E_+^0 V_-^0)}{2[V]^0 + [E]^0 t}.$$

Компонента плотности оказывается разрывной (кусочно-постоянной) и имеет вид

$$n = -c(t)\chi_{(x_-(t), x_+(t))},$$

где χ_Ω — характеристическая функция множества Ω.

Согласно результатам п. 3.1 такое решение существует при $[V]^0 > 0$. Если $[E]^0 < 0$, оно сменяется ударной волной при $T^* = -2\dfrac{[V]^0}{[E]^0}$, а при $[E]^0 = 0$ существует при всех $t > 0$. При этом

$c(t) = 0$, $d(t) = E_- - E_+$, т. е. компонента E остается непрерывной, $a(t) \to 0$, $b(t) \sim \dfrac{1}{2}E_\pm t$ при $t \to \infty$, т. е. волна разрежения присутствует только в компоненте V, и $x_+(t) - x_-(t) = [V]^0 t$.

4.2. Случай II, $\mathbf{n_0 = 0}$, $\mathbf{k = 1}$. В этом случае

$$a(t) = \frac{2([V]^0 - [E]^0 t)}{(2[V]^0 - [E]^0 t)t}, \qquad b(t) = \frac{(E_-^0 V_+^0 - E_+^0 V_-^0)t}{[E]^0 t - 2[V]^0}, \tag{4.2}$$

$$c(t) = \frac{2[E]^0}{(2[V]^0 - [E]^0 t)t}, \qquad d(t) = \frac{2(E_-^0 V_+^0 - E_+^0 V_-^0)}{2[V]^0 - [E]^0 t}, \tag{4.3}$$

$$n = -c(t)\chi_{(x_-(t), x_+(t))}.$$

Согласно результатам пункта 3.2 такое решение существует при $[V]^0 < 0$, $[E]^0 < 0$, начиная с момента времени $T^* = 2\dfrac{[V]^0}{[E]^0}$, поэтому в выражениях (4.2), (4.3) нужно сделать замену $t_1 = t - T^*$, а в качестве x_0 нужно взять точку $x_-(T_*) = x_+(T_*)$. При этом $a(t) \to 0$, $c(t) \to 0$, $d(t) \to 0$ при $t \to \infty$, однако $b(t) \sim \mathrm{const}$ при этом же условии. Это означает, что структура волн разрежения для компонент V и E различна.

При $[V]^0 > 0$, $[E]^0 = 0$ ситуация аналогична описанной в пункте 4.1, т. е. E остается непрерывной, и волна разрежения присутствует только в компоненте V, и $x_+(t) - x_-(t) = [V]^0 t$.

4.3. Случай III, $\mathbf{n_0 = 1}$, $\mathbf{k = -1}$. Согласно результатам п. 3.3, решение содержит волну разрежения, если $[E]^0 < 0 < [V]^0 < -[E]^0$ до момента времени $T^* = \ln \dfrac{[E]^0 - [V]^0}{[E]^0 + [V]^0}$. Если $[E]^0 < 0$, $[V]^0 + [E]^0 \geqslant 0$, или $[E]^0 = 0$, $[V]^0 > 0$, то решение содержит волну разрежения при всех $t > 0$.

В непрерывном решении (4.1) коэффициенты имеют вид

$$a(t) = \frac{[V]^0 \operatorname{ch} t + [E]^0 \operatorname{sh} t}{[V]^0 \operatorname{sh} t + [E]^0(\operatorname{ch} t - 1)}, \qquad b(t) = \frac{(E_-^0 V_+^0 - E_+^0 V_-^0)(\operatorname{ch} t - 1)}{[V]^0 \operatorname{sh} t + [E]^0(\operatorname{ch} t - 1)},$$

$$c(t) = \frac{[E]^0 \operatorname{ch} t + [V]^0 \operatorname{sh} t}{[V]^0 \operatorname{sh} t + [E]^0(\operatorname{ch} t - 1)}, \qquad d(t) = \frac{(E_-^0 V_+^0 - E_+^0 V_-^0)\operatorname{sh} t}{[V]^0 \operatorname{sh} t + [E]^0(\operatorname{ch} t - 1)},$$

$$n = 1 - c(t)\chi_{(x_-(t), x_+(t))}.$$

Найдем асимптотику волны разрежения при $t \to \infty$. Мы видим, что $a(t) \to 1$, $c(t) \to 1$, $b(t) \to K$, $d(t) \to K$, $K = \dfrac{E_-^0 V_+^0 - E_+^0 V_-^0}{[V]^0 + [E]^0}$.

4.3.1. Простые волны. Заметим, что система (2.2) в случае III обладает подклассом решений, выделяемых условием $E^2 - V^2 = C = \mathrm{const}$. Константа C может иметь любой знак и быть нулем. В этом случае в области гладкости система (2.2) сводится к одному уравнению

$$V_t + VV_x = \sigma\sqrt{C + V^2}, \quad \sigma = \pm 1, \tag{4.4}$$

знак σ соответствует знаку E.

Начальные условия E_-^0 и E_+^0 связаны с V_-^0 и V_+^0 соотношениями $E_-^0 = \pm\sqrt{C + (V_-^0)^2}$, $E_+^0 = \pm\sqrt{C + (V_+^0)^2}$, причем $[E]^0 \leqslant 0$. Отметим, что величина под корнем неотрицательна.

Характеристическая система для (4.4) имеет вид

$$\dot{x} = V, \quad \dot{V} = \sigma\sqrt{V^2 + C}, \tag{4.5}$$

причем знак σ выбирается из условия $V_-(t) < V(t) < V_+(t)$, он меняется в тех точках, где $V^2 + C = 0$. Из (4.5) найдем

$$x = X(t, V) = \sigma\sqrt{V^2 + C} - F(\sigma \ln|V + \sqrt{V^2 + C}| - t), \tag{4.6}$$

где F — произвольная гладкая функция. Таким образом, для простой волны непрерывное решение $V_{sw} = V(t, x)$ при $x \in (x_-(t), x_+(t))$ не имеет вида (4.1), а задается неявным образом как (4.6).

Чтобы найти функцию F, воспользуемся начальным условием $X(0,V)=0$ для $V\in(V_-^0,V_+^0)$. Для этого подставим его в (4.6) и обозначим: $\xi=\sigma\ln|V+\sqrt{V^2+C}|$. Тогда $|V+\sqrt{V^2+C}|=\exp(\sigma\xi)$ и $V=\pm\dfrac{1}{2}(\exp(\sigma\xi)-C\exp(-\sigma\xi))$. Значит, $F(\xi)=\dfrac{\sigma}{2}|\exp(\sigma\xi)+C\exp(-\sigma\xi)|$.

Таким образом, получим:

1. если $\sigma=1$, то $F(\xi)=\dfrac{1}{2}|\exp(\xi)+C\exp(-\xi)|$ и имеем

$$X_1(t,V)=\sqrt{V^2+C}-\frac{1}{2}\left||V+\sqrt{V^2+C}|\exp(-t)+\operatorname{sign}(C)|V-\sqrt{V^2+C}|\exp(t)\right|; \tag{4.7}$$

2. если $\sigma=-1$, то $F(\xi)=-\dfrac{1}{2}|\exp(-\xi)+C\exp(\xi)|$ и имеем

$$X_2(t,V)=-\sqrt{V^2+C}+\frac{1}{2}\left||V+\sqrt{V^2+C}|\exp(t)+\operatorname{sign}(C)|V-\sqrt{V^2+C}|\exp(-t)\right|. \tag{4.8}$$

Если знаки E_-^0 и E_+^0 совпадают, то в выражении, неявно задающем $V_{sw}(t,x)$ между характеристиками, надо использовать представление с $\sigma=\operatorname{sign}(E_\pm^0)$. Такая ситуация будет, например, при $C=1$, $V_-^0=-1$, $V_+^0=0$, $E_-^0=\sqrt{C+(V_-^0)^2}=\sqrt{2}$, $E_+^0=\sqrt{C+(V_-^0)^2}=1$, что соответствует случаю III.2, когда $[V]^0+[E]^0>0$ и волна разрежения существует при всех $t>0$. Отметим, что визуально график функции V_{sw} между характеристиками мало отличается от графика аффинного решения, указанного в пункте 4.3, т. е. линейной по x функции, см. рис. 1.

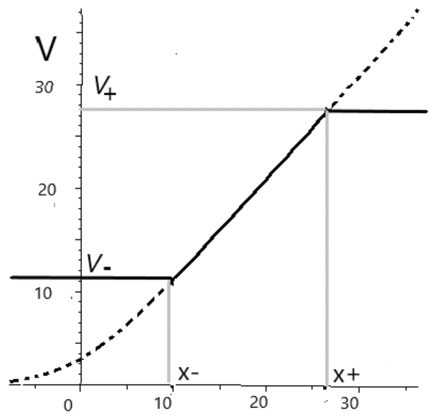


Рис. 1. Простая волна разрежения $V_{sw}(t,x)$ для случая $C=1$, $V_-^0=-1$, $V_+^0=0$, $E_-^0=\sqrt{2}$, $E_+^0=1$, соответствует повернутому к обычным осям графику функции (4.7), мало отличающемуся от графика линейной функции внутри $(x_-(t),x_+(t))$; $t=5$, горизонтальная ось соответствует переменной x.

Fig. 1. A simple rarefaction wave $V_{sw}(t,x)$ for the case $C=1$, $V_-^0=-1$, $V_+^0=0$, $E_-^0=\sqrt{2}$, $E_+^0=1$, corresponds to the graph of the function (4.7) rotated to the usual axes, which differs little from the graph of the linear function inside $(x_-(t),x_+(t))$; $t=5$, horizontal axis corresponds to the variable x.

Однако если знаки E_-^0 и $E+^0$ разные, то с каждой из сторон разрыва можно использовать выражения для V_{sw} с соответствующим знаком σ. Кроме того, интервалы изменения $X_1(t,V)$ и $X_2(t,V)$ не обязаны пересекаться при $V\in(V_-(t),V_+(t))$. Поэтому для тех $x\in(x_-(t),x_+(t))$, для которых не определены решения вида (4.7), (4.8), может быть использовано аффинное решение, аналогичное указанному в пункте 4.3, для того, чтобы обеспечить непрерывность. Более того, аффинное решение может быть использовано вместо решения вида V_{sw}, прилегающего к какому-либо краю разрыва. Такая ситуация, например, будет при $C=1$, $V_-^0=1$, $V_+^0=3$, $E_-^0=\sqrt{C+(V_-^0)^2}=\sqrt{2}$,

$E_+^0 = -\sqrt{C + (V_-^0)^2} = -\sqrt{10}$, что соответствует случаю III.1, когда $0 < [V]^0 < -[E]^0$. В этом случае волна разрежения содержит внутри себя еще два слабых разрыва.

Таким образом, мы видим, что как и в случае IV, разобранном в [16], существуют начальные данные Римана, для которых волна разрежения строится неединственным образом, и для выделения единственного решения приходится привлекать дополнительные условия, например, выбирать решение, энергия которого минимальна. Эти начальные данные подчинены условию $(E_\pm^0)^2 - (V_\pm^0)^2 = C = \mathrm{const}$.

Отметим, что в случаях I и II нетривиального решения вида простой волны не существует.

5. Сингулярная ударная волна

В этом разделе мы построим сингулярную ударную волну в каждом из трех случаев I–III.

Предположим, что между характеристиками существует решение нашей задачи в виде

$$(V_s,\, E_s) = \begin{cases} (V_-(t), E_-(t)), & x < \Phi(t), \\ (V_+(t), E_+(t)), & x > \Phi(t), \end{cases}$$

т. е. мы нашли положение ударной волны $x = \Phi(t)$ в виде некоторой гладкой кривой. Тогда плотность может быть найдена как

$$n(t,\, x) = n_0 - [E]|_{x=\Phi(t)}\delta(x - \Phi(t)).$$

Обозначим

$$V(t,x) = V_-(t,x) + [V(t,x)]|_{x=\Phi(t)}\Theta(x - \Phi(t)), \tag{5.1}$$

$$E(t,x) = E_-(t,x) + [E(t,x)]|_{x=\Phi(t)}\Theta(x - \Phi(t)), \tag{5.2}$$

$$n(t,x) = \hat{n}(t,x) + e(t)\delta(x - \Phi(t)), \tag{5.3}$$

где $[f] = f_+ - f_-$, $f_\pm$ — односторонние пределы дифференцируемой функции f, $t > 0$, $\hat{n}(t,x) = n_0 - E_x(t,x)$, E_x — частная производная функции E в тех точках, где она существует в классическом смысле $e(t) := e(t, \phi(t))$, $e(t) = -[E(t,x)]|_{x=\Phi(t)}$.

Определим сингулярную ударную волну аналогично тому, как это было сделано в [16] для случая IV. Заметим, что в [16], в свою очередь, было существенно использовано определение сингулярной ударной волны для систем, обобщающих систему газовой динамики без давления из [5].

Определение 5.1. Тройка распределений (V, E, n), определенная формулами (5.1)–(5.3), и кривая γ, являющаяся графиком гладкой функции $x = \Phi(t)$, $\Phi(0) = 0$, называется *сильно сингулярным решением* задачи (2.3) с начальными условиями

$$(V, E, n)|_{t=0} = (V_-^0(x) + [V(x)]^0\Theta(x), E_-^0(x) + [E(x)]^0\Theta(x), n^0(x) = \hat{n}^0(x) + e^0\delta(x)),$$

если для любой пробной функции $\phi(t,x) \in \mathcal{D}(\mathbb{R} \times [0,\infty))$ выполнено тождество

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}} \hat{n}(\phi_t + V\phi_x)\,dxdt + \int_\gamma e(t)\frac{\delta\phi(t,x)}{\delta t}\frac{dl}{\sqrt{1 + (\dot{\Phi}(t))^2}} + \int_{\mathbb{R}} \hat{n}^0(x)\phi(0,x)\,dx + e(0)\phi(0,0) = 0,$$

$$\int_0^\infty\int_{\mathbb{R}} \left(\left(\frac{\hat{n}V^2}{2} + \frac{kE^2}{2}\right)\phi_t + \frac{\hat{n}V^2}{2}\phi_x\right)\,dxdt + \int_\gamma \frac{e(t)(\dot{\Phi}(t))^2}{2}\frac{\delta\phi(t,x)}{\delta t}\frac{dl}{\sqrt{1 + (\dot{\Phi}(t))^2}} +$$
$$+ \int_{\mathbb{R}} \left(\frac{\hat{n}^0(x)(V^0(x))^2}{2} + \frac{k(E^0(x))^2}{2}\right)\phi(0,x)\,dx + \frac{e(0)(\dot{\Phi}(0))^2}{2}\phi(0,0) = 0,$$

где $\int \cdot dl$ — обозначает криволинейный интеграл по дуге γ, δ-производная по времени $\left.\dfrac{\delta\phi(t,x)}{\delta t}\right|_\gamma$ определяется как производная вдоль касательного направления к дуге кривой γ

$$\left.\frac{\delta\phi}{\delta t}\right|_\gamma = \sqrt{1 + (\dot{\Phi}(t))^2}\frac{\partial\phi(t,x)}{\partial\mathbf{l}} = \frac{d\phi(t,\Phi(t))}{dt} = \left(\frac{\partial\phi(t,x)}{\partial t} + \dot{\Phi}(t)\frac{\partial\phi(t,x)}{\partial x}\right),$$

$\mathbf{l} = (-\nu_2, \nu_1) = \dfrac{(1, \dot{\Phi}(t))}{\sqrt{1 + (\dot{\Phi}(t))^2}}$ — единичный касательный вектор к кривой γ.

В случае сингулярной ударной волны на ней выполняются условия, являющиеся аналогом условий Ранкина—Гюгонио для обычных ударных волн.

Теорема 5.1. *Пусть область $\Omega \subset (0, \infty) \times \mathbb{R}$ делится гладкой кривой $\gamma_t = \{(t, x) \colon x = \Phi(t)\}$ на левую и правую части $\Omega_\mp$. Пусть тройка распределений (V, E, n), определенная формулами* (5.1)–(5.3)*, и кривая γ_t есть решение типа δ-ударной волны для системы* (2.3)*. Тогда это решение удовлетворяет на γ_t условию Ранкина—Гюгонио для δ-ударных волн*:

$$\frac{d}{dt} e(t) = (-[\hat{n} V] + [\hat{n}] \dot{\Phi}(t))|_{x=\Phi(t)}, \tag{5.4}$$

$$\frac{d}{dt} \frac{e(t)(\dot{\Phi}(t))^2}{2} = \left(- \left[\frac{\hat{n} V^3}{2} \right] + \left[\frac{\hat{n} V^2 + k E^2}{2} \right] \dot{\Phi}(t) \right) \Big|_{x=\Phi(t)}. \tag{5.5}$$

Эта теорема является переформулировкой на случай произвольного k теоремы, доказанной в [16], поэтому мы не будем приводить здесь дословное повторение ее доказательства.

Легко видеть, что в случае, когда сингулярная компонента $e(t)$ отсутствует, условия (5.4), (5.5) сводятся к обычным условиям Ранкина—Гюгонио.

Условие допустимости для δ-ударной волны имеет вид

$$\min\{V_-, V_+\} \leqslant \dot{\Phi}(t) \leqslant \max\{V_-, V_+\}. \tag{5.6}$$

5.1. Случай I, $\mathbf{n_0 = 0}$, $\mathbf{k = -1}$. Заметим, что как следует из результатов пункта 3.1, ударная волна будет существовать в случае 1, т. е. при $[V]^0 > 0$, $[E]^0 < 0$, после момента времени $T^* = -2\dfrac{[V]^0}{[E]^0}$, и в случаях 2 ($[V]^0 \leqslant 0$, $[E]^0 < 0$) и 4 ($[V]^0 < 0$, $[E]^0 = 0$) при всех $t > 0$.

Так как $\hat{n} = 0$, то из уравнения (5.4) имеем $\dot{e} = 0$, т. е. $e(t) = \mathrm{const} = -[E]^0$. Таким образом, в случае 4 будет отсутствовать сингулярная компонента.

Уравнение (5.5) принимает вид

$$2[E]^0 \dot{\Phi} \ddot{\Phi} = ([E^2] \dot{\Phi})|_{x=\Phi(t)},$$

и в случае $[E]^0 \neq 0$ преобразуется к

$$2\dot{\Phi}\ddot{\Phi} = (E_+^0 + E_-^0)\dot{\Phi}. \tag{5.7}$$

Это уравнение второго порядка требует двух начальных условий. В случае 2 это

$$\Phi(0) = x_0 = 0, \quad \dot{\Phi}(0) = v, \quad V_+^0 < v < V_-^0, \tag{5.8}$$

второе условие может быть выбрано произвольным образом из соображений выполнения условия допустимости (5.6).

В случае 1 это

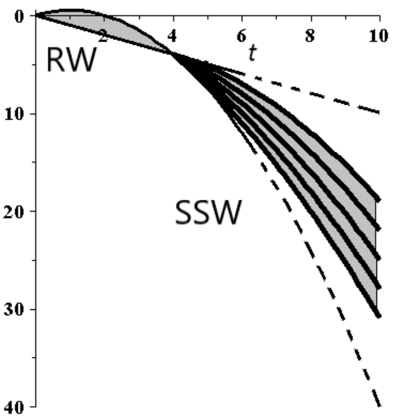
$$\Phi(T^*) = x_-(T^*) = x_+(T^*), \quad \dot{\Phi}(T^*) = v, \quad V_+(T^*) < v < V_-(T^*).$$

Таким образом, сингулярная ударная волна строится неединственным образом, как и в ситуации газовой динамики без давления [11]. Уравнение кривой $\Phi(t)$ представляет собой квадратичную по времени функцию и может быть найдено явно.

Отметим, что решение $\dot{\Phi}(t) = 0$ уравнения (5.7) является особым, и поэтому в каждой точке $t > 0$ нарушается его единственность.

На рис. 2, слева, показана ситуация случая I.1 при $E_-^0 = 0$, $E_+^0 = -1$, $V_- = -1$, $V_+ = 1$, когда волна разрежения сменяется сингулярной ударной волной. Заштрихованный участок соответствует всем возможным положениям сингулярных ударных волн, отвечающих условию допустимости.

Отметим, что в случае 4, когда $[E]^0 = 0$, т. е. E постоянно, условия (5.4), (5.5) вырождаются и определить положение $\Phi(t)$ с их помощью невозможно. Однако можно заметить, что в этом случае второе уравнение (2.2) выполняется тривиальным образом, а из первого уравнения, которое может быть записано в дивергентном виде, получим $\dot{\Phi}(t) = \dfrac{1}{2}(V_+^0 + V_-^0)$, $\Phi(0) = x_0 = 0$. Кроме того, можно предложить альтернативный способ построения разрыва. Если определить последовательность начальных данных Римана E_k^0, $k \in \mathbb{N}$, $E_k^0 \to E^0$ таких, что $[E_k]^0 < 0$, $[E]^0 = 0$, то для определения положения ударной волны можно воспользоваться уравнением (5.7), которое не содержит величины скачка и в этом вырожденном случае имеет вид $2\dot\Phi\ddot\Phi = -2E\dot\Phi$, для нахождения Φ требуются два начальных условия (5.8).



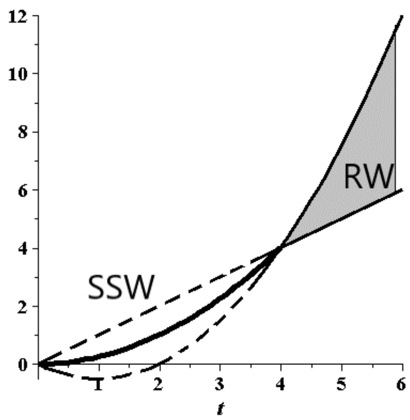


Рис. 2. Слева: случай I.1, при $E_-^0 = 0$, $E_+^0 = -1$, $V_- = -1$, $V_+ = 1$, когда волна разрежения (RW) сменяется сингулярной ударной волной (SSW). Заштрихованный участок соответствует всем возможным положениям сингулярных ударных волн, отвечающих условию допустимости. Справа: случай II, 1, при $E_-^0 = 0$, $E_+^0 = -1$, $V_- = 1$, $V_+ = -1$, когда сингулярная ударная волна сменяется волной разрежения.

Fig. 2. Left: the case I.1, with $E_-^0 = 0$, $E_+^0 = -1$, $V_- = -1$, and $V_+ = 1$, when the rarefaction wave (RW) is replaced by a singular shock wave (SSW). The shaded area corresponds to all possible positions of singular shock waves that meet the admissibility condition. Right: the case II.1, with $E_-^0 = 0$, $E_+^0 = -1$, $V_- = 1$, and $V_+ = -1$, when the singular shock wave is replaced by a rarefaction wave.

5.2. Случай II, $\mathbf{n_0 = 0}$, $\mathbf{k = 1}$. Согласно результатам пункта 3.2 ударная волна существует в случае 1 ($[V]^0 < 0$, $[E]^0 < 0$) при $0 < t < T^* = 2\dfrac{[V]^0}{[E]^0}$ и в случае 4 ($[V]^0 < 0$, $[E]^0 = 0$) при $t > 0$.

Как и в предыдущем разделе, имеем $e(t) = \text{const} = -[E]^0$, а уравнение (5.5) принимает вид

$$2[E]^0\dot\Phi\ddot\Phi = (-[E^2]\dot\Phi)|_{x=\Phi(t)}$$

и при $[E]^0 \neq 0$ (т. е. для случая 1) преобразуется к

$$2\dot\Phi\ddot\Phi = -(E_+^0 + E_-^0)\dot\Phi.$$

Однако здесь ситуация радикально отличается от описанной в предыдущем пункте для случая I, так как для построения кривой $\Phi(t)$ возникает краевая задача, т. е. имеются начальное и конечное условия:

$$\Phi(0) = x_0 = 0, \quad \Phi(T^*) = x_-(T^*) = x_+(T^*).$$

Таким образом, сингулярная ударная волна в данном случае строится единственным образом. Уравнение для кривой $\Phi(t)$ имеет вид

$$\Phi(t) = -\frac{1}{4}(E_-^0 + E_+^0)t^2 + \frac{1}{2}(V_-^0 + V_+^0)t.$$

На рис. 2, справа, показана ситуация случая II.1 при $E_-^0 = 0$, $E_+^0 = -1$, $V_- = 1$, $V_+ = -1$, когда сингулярная ударная волна сменяется волной разрежения.

Однако если оказывается, что $\dot\Phi(0) = \dfrac{1}{2}(V_-^0 + V_+^0) = 0$ (а именно такой случай изображен на рисунке), то сингулярная ударная волна может быть построена неединственным образом: она состоит из комбинации прямой $\Phi(t) = 0$, $t \in (0, t_1)$, $x_-(t_1) < 0 < x_+(t_1)$, $0 < t_1 < T^*$ и параболы, соединяющей точку $(t_1, 0)$ и $(T^*, x_-(T^*) = x_+(T^*))$. Но такая составная кривая уже не будет гладкой, как это требует определение сингулярной ударной волны, так как значение $\dot\Phi(t_1)$ справа уже не будет нулем.

Случай 4, при котором не возникает сильной сингулярности, рассматривается аналогично пункту 5.1.

5.3. Случай III, $\mathbf{n_0 = 1}$, $\mathbf{k = -1}$. Согласно результатам пункта 3.3 сингулярная ударная волна существует в случае 1 ($[E]^0 < 0 < [V]^0 < -[E]^0$) при $t > T^* = \ln \dfrac{[E]^0 - [V]^0}{[E]^0 + [V]^0}$, в случаях 3 и 5 ($[E]^0 \leqslant 0,\ [V]^0 < 0$) при $t > 0$.

Так как $\hat n = 1$, то $[\hat n] = 0$, и уравнения (5.4), (5.5) преобразуются к виду

$$\dot e(t) = -[V]|_{x=\Phi(t)},$$
$$\frac{d}{dt} e(t)(\dot\Phi(t))^2 = (-[V^3] + [V^2 - E^2]\,\dot\Phi(t))|_{x=\Phi(t)}.$$

Величины скачков можно явно посчитать:

$$[V^3]|_{x=\Phi(t)} = V_+^3 - V_-^3 = (V_+^0 \operatorname{ch} t + E_+^0 \operatorname{sh} t)^3 - (V_-^0 \operatorname{ch} t + E_-^0 \operatorname{sh} t)^3,$$
$$[V^2 - E^2]|_{x=\Phi(t)} = [V^2 - E^2]|_{x=0} = K = \mathrm{const}.$$

Тогда $\dot e(t) = -[V]^0 \operatorname{ch} t - [E]^0 \operatorname{sh} t$ и $e(t) = -[V]^0 \operatorname{sh} t - [E]^0 \operatorname{ch} t$. Мы можем заметить, что амплитуда дельта-функции экспоненциально растет при $t \to \infty$.

Таким образом, в случае 1 мы получаем уравнение второго порядка для определения положения сингулярной ударной волны

$$2e\dot\Phi(t)\ddot\Phi(t) = -[V^3] + K\dot\Phi(t) - \dot e(\dot\Phi(t))^2,$$

для которого можно поставить начальные условия

$$\Phi(T^*) = x_-(T^*) = x_-(T^*), \quad \dot\Phi(T^*) = v, \quad V_+(T^*) < v < V_-(T^*).$$

Так как точка $t_* = -\operatorname{arcth}\dfrac{[V]^0}{[E]^0}$, в которой $V_-(t_*) = V_+(t_*)$, не принадлежит полуоси $t > T^*$, на которой находится ударная волна, то мы не можем получить дополнительное краевое условие из условия допустимости, как это было в случае IV.

Таким образом, сингулярная ударная волна определяется неединственным образом.

6. Заключение

В настоящей работе и в [16] построено решение задачи Римана для одномерных по пространству уравнений Эйлера—Пуассона для всех четырех стандартных случаев. Как оказалось, для каждого из случаев решение имеет специфические черты. В случае IV, как было показано в [16], сингулярная ударная волна и волна разрежения периодически сменяют друг друга, тогда как в случаях I — III решение может состоять из одной сингулярной ударной волны, одной волны разрежения, сингулярной ударной волны, сменяющейся волной разрежения, и волны разрежения, сменяющейся сингулярной ударной волной. Отдельным интересным вопросом является единственность полученного решения. В некоторых случаях неединственность доказывается путем предъявления нескольких возможных решений. Однако в случаях I и II, для которых не существует нетривиальных простых волн, с помощью которых была показана неединственность волны разрежения в случаях III и IV, мы не можем утверждать, что не существует непрерывного решения, отличающегося от построенного аффинного. Таким образом, единственность волны разрежения остается открытым вопросом. Таблица ниже подводит итог наших исследований в вопросе единственности. Знак “+” означает то, что волна разрежения или ударная волна определяется единственным образом, знак “−” означает неединственность волны разрежения или ударной волны.

Случай / Case	I	II	III	IV
волна разрежения / rarefaction wave	?	?	−	−
ударная волна / shock wave	−	+	−	+

Отметим, что сингулярная ударная волна может быть построена на других принципах. Можно использовать как другую форму консервативной записи системы вместо (2.3), а также применить метод исчезающей вязкости для неконсервативной записи (2.2). Результат будет отличаться от того, что мы получили выше. Однако если мы отталкиваемся от физической природы задачи, то мы должны использовать естественные сохраняющиеся величины, имеющие смысл полной массы и энергии, поэтому вид (2.3) представляется наиболее естественным.

Несмотря на кажущуюся простоту в одномерном случае, модели, описываемые системой (2.2), весьма содержательны физически. Уже упомянутая модель холодной плазмы соответствует случаю IV. Случай II соответствует модели, введенной Гуревичем и Зыбиным [1] для описания динамики темной материи во Вселенной. После ряда замен к этой же системе сводится модель нелокальной газовой динамики [6] и уравнение Гюнтера—Закстона [12], которое используется для моделирования распространения волн в нематическом жидком кристалле [18]. Математически система (2.2) для случая II относится к обобщенным уравнениям риманова типа [14], которые интенсивно изучаются в последнее время. Перечень результатов, касающихся представления Лакса, законов сохранения, бигамильтоновых структур, интегрируемости, может быть найден, например, в [10, 13]. Работы [21, 22] касаются свойств решений задачи Коши с гладкими начальными данными, статья [23] посвящена корректности слабых решений задачи Коши таких систем в классах Соболева.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Гуревич А. В., Зыбин К. П.* Недиссипативная гравитационная турбулентность// Ж. эксперимент. и теор. физ. — 1988. — *94*, № 1. — С. 3–25.
2. *Кочин Н. Е.* Векторное исчисление и начала тензорного анализа. — М.: Наука, 1965.
3. *Рождественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.
4. *Чижонков Е. В.* Математические аспекты моделирования колебаний и кильватерных волн в плазме. — М.: Физматлит, 2018.
5. *Шелкович В. М.* Сингулярные решения систем законов сохранения типа δ и δ'-ударных волн и процессы переноса и концентрации// Усп. мат. наук. — 2008. — *63*, № 3. — С. 73–146.
6. *Brunelli J. C., Das A.* On an integrable hierarchy derived from the isentropic gas dynamics// J. Math. Phys. — 2004. — *45*, № 7. — С. 2633–2645.
7. *Chae D., Tadmor E.* On the finite time blow-up of the Euler–Poisson equations in $\mathbb{R}^n$// Commun. Math. Sci. — 2008. — *6*, № 3. — С. 785–789.
8. *Dafermos C. M.* Hyperbolic conservation laws in continuum physics. — Berlin–Heidelberg: Springer, 2016.
9. *Engelberg S., Liu H., Tadmor E.* Critical thresholds in Euler–Poisson equations// Indiana Univ. Math. J. — 2001. — *50*, № 1. — С. 109–157.
10. *Gao B., Tian K., Liu Q. P., Feng L.* Conservation laws of the generalized Riemann equations// J. Nonlinear Math. Phys. — 2018. — *25*, № 1. — С. 122–135.
11. *Huang F., Wang Zh.* Well posedness for pressureless flow// Commun. Math. Phys. — 2001. — *222*, № 1. — С. 117–146.
12. *Hunter J. K., Saxton R.* Dynamics of director fields// SIAM J. Appl. Math. — 1991. — *51*, № 6. — С. 1498–1521.
13. *Pavlov M. V.* The Gurevich–Zybin system// J. Phys. A: Math. Gen. — 2005. — *38*, № 17. — С. 3823–3840.
14. *Popowicz Z., Prykarpatski A. K.* The non-polynomial conservation laws and integrability analysis of generalized Riemann type hydrodynamical equations// Nonlinearity. — 2010. — *23*, № 10. — С. 2517–2537.
15. *Rozanova O. S.* On the behavior of multidimensional radially symmetric solutions of the repulsive Euler–Poisson equations// Phys. D: Nonlinear Phenom. — 2022. — *443*. — 133578.
16. *Rozanova O. S.* The Riemann problem for equations of a cold plasma// J. Math. Anal. Appl. — 2023. — *527*, № 1, Part 1. — 127400.

17. *Rozanova O. S., Turzynsky M. K.* On the properties of affine solutions of cold plasma equations// Commun. Math. Sci. — 2024. — *22*, № 1. — C. 215–226.
18. *Schäfer T., Wayne C. E.* Propagation of ultra-short optical pulses in cubic nonlinear media// Phys. D.: Nonlinear Phenom. — 2004. — *196*, № 1. — C. 90–105.
19. *Tan C.* Eulerian dynamics in multidimensions with radial symmetry// SIAM J. Math. Anal. — 2021. — *53*, № 3. — C. 3040–3071.
20. *Wei D., Tadmor E., Bae H.* Critical thresholds in multi-dimensional Euler–Poisson equations with radial symmetry// Commun. Math. Sci. — 2012. — *10*, № 1. — C. 75–86.
21. *Wei L.* Wave breaking, global existence and persistent decay for the Gurevich–Zybin system// J. Math. Fluid Mech. — 2020. — *22*, № 4. — C. 1–14.
22. *Wei L., Wang Y.* The Cauchy problem for a generalized Riemann-type hydrodynamical equation// J. Math. Phys. — 2021. — *62*, № 4. — 041502.
23. *Xia S.* Existence of a weak solution to a generalized Riemann-type hydrodynamical equation// Appl. Anal. — 2023. — *102*, № 18. — C. 4997–5007.

Л. В. Гаргянц
Московский государственный технический университет им. Н. Э. Баумана, Москва, Россия
E-mail: `gargyants@bmstu.ru`

О. С. Розанова
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: `rozanova@mech.math.msu.su`

М. К. Турцынский
Российский университет транспорта (МИИТ), Москва, Россия
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики», Москва, Россия
E-mail: `M13041@yandex.ru`

UDC 517.956
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-38-52
EDN: YYQSXD

The Riemann problem for the main model cases of the Euler—Poisson equations

L. V. Gargyants[1], O. S. Rozanova[2], and M. K. Turzynsky[3,4]

[1] *Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia*
[2] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
[3] *Russian University of Transport, Moscow, Russia*
[4] *National Research University "Higher School of Economics" (HSE University), Moscow, Russia*

Abstract. In this paper, we construct a solution to the Riemann problem for an inhomogeneous nonstrictly hyperbolic system of two equations, which is a corollary of the Euler–Poisson equations without pressure [9]. These equations can be considered for the cases of attractive and repulsive forces as well as for the cases of zero and nonzero underlying density background. The solution to the Riemann problem for each case is nonstandard and contains a delta-shaped singularity in the density component. In [16], solutions were constructed for the combination corresponding to the cold plasma model (repulsive force and nonzero background density). In this paper, we consider the three remaining cases.

Keywords: Euler—Poisson equations, Riemann problem, characteristics, shock wave, rarefaction wave.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. Supported by the Russian Science Foundation grant № 23-11-00056 through the Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba.

For citation: L. V. Gargyants, O. S. Rozanova, M. K. Turzynsky, "The Riemann problem for the main model cases of the Euler—Poisson equations," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 1, 38–52. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-38-52

REFERENCES

1. A. V. Gurevich and K. P. Zybin, "Nedissipativnaya gravitatsionnaya turbulentnost"' [Nondissipative gravitational turbulence], *Zh. eksperiment. i teor. fiz.* [J. Exp. Theor. Phys.], 1988, **94**, No. 1, 3–25 (in Russian).
2. N. E. Kochin, *Vektornoe ischislenie i nachala tenzornogo analiza* [Vector CALCULUS and the Essentials of Tensor Analysis], Nauka, Moscow, 1965 (in Russian).
3. B. L. Rozhdestvenskii and N. N. Yanenko, *Sistemy kvazilineynykh uravneniy i ikh prilozheniya k gazovoy dinamike* [Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics], Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).
4. E. V. Chizhonkov, *Matematicheskie aspekty modelirovaniya kolebaniy i kil'vaternykh voln v plazme* [Mathematical Aspects of Modeling Oscillations and Wake Waves in Plasma], Fizmatlit, Moscow, 2018 (in Russian).
5. V. M. Shelkovich, "Singulyarnye resheniya sistem zakonov sokhraneniya tipa δ i δ'-udarnykh voln i protsessy perenosa i kontsentratsii" [Singular solutions of systems of conservation laws of the δ- and δ'-shock waves type and processes of transport and concentration], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2008, **63**, No. 3, 73–146 (in Russian).
6. J. C. Brunelli and A. Das, "On an integrable hierarchy derived from the isentropic gas dynamics," *J. Math. Phys.*, 2004, **45**, No. 7, 2633–2645.
7. D. Chae and E. Tadmor, "On the finite time blow-up of the Euler–Poisson equations in $\mathbb{R}^n$," *Commun. Math. Sci.*, 2008, **6**, No. 3, 785–789.
8. C. M. Dafermos, *Hyperbolic conservation laws in continuum physics*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2016.
9. S. Engelberg, H. Liu, and E. Tadmor, "Critical thresholds in Euler–Poisson equations," *Indiana Univ. Math. J.*, 2001, **50**, No. 1, 109–157.
10. B. Gao, K. Tian, Q. P. Liu, and L. Feng, "Conservation laws of the generalized Riemann equations," *J. Nonlinear Math. Phys.*, 2018, **25**, No. 1, 122–135.
11. F. Huang and Zh. Wang, "Well posedness for pressureless flow," *Commun. Math. Phys.*, 2001, **222**, No. 1, 117–146.
12. J. K. Hunter and R. Saxton, "Dynamics of director fields," *J. SIAM Appl. Math.*, 1991, **51**, No. 6, 1498–1521.
13. M. V. Pavlov, "The Gurevich–Zybin system," *J. Phys. A: Math. Gen.*, 2005, **38**, No. 17, 3823–3840.
14. Z. Popowicz and A. K. Prykarpatski, "The non-polynomial conservation laws and integrability analysis of generalized Riemann type hydrodynamical equations," *Nonlinearity*, 2010, **23**, No. 10, 2517–2537.
15. O. S. Rozanova, "On the behavior of multidimensional radially symmetric solutions of the repulsive Euler–Poisson equations," *Phys. D: Nonlinear Phenom.*, 2022, **443**, 133578.
16. O. S. Rozanova, "The Riemann problem for equations of a cold plasma," *J. Math. Anal. Appl.*, 2023, **527**, No. 1, Part 1, 127400.
17. O. S. Rozanova and M. K. Turzynsky, "On the properties of affine solutions of cold plasma equations," *Commun. Math. Sci.*, 2024, **22**, No. 1, 215–226.
18. T. Schäfer and C. E. Wayne, "Propagation of ultra-short optical pulses in cubic nonlinear media," *Phys. D.: Nonlinear Phenom.*, 2004, **196**, No. 1, 90–105.
19. C. Tan, "Eulerian dynamics in multidimensions with radial symmetry," *J. SIAM Math. Anal.*, 2021, **53**, No. 3, 3040–3071.
20. D. Wei, E. Tadmor, and H. Bae, "Critical thresholds in multi-dimensional Euler–Poisson equations with radial symmetry," *Commun. Math. Sci.*, 2012, **10**, No. 1, 75–86.
21. L. Wei, "Wave breaking, global existence and persistent decay for the Gurevich–Zybin system," *J. Math. Fluid Mech.*, 2020, **22**, No. 4, 1–14.
22. L. Wei and Y. Wang, "The Cauchy problem for a generalized Riemann-type hydrodynamical equation," *J. Math. Phys.*, 2021, **62**, No. 4, 041502.
23. S. Xia, "Existence of a weak solution to a generalized Riemann-type hydrodynamical equation," *Appl. Anal.*, 2023, **102**, No. 18, 4997–5007.

L. V. Gargyants
Bauman Moscow State Technical University, Moscow, Russia
E-mail: gargyants@bmstu.ru

O. S. Rozanova
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: rozanova@mech.math.msu.su

M. K. Turzynsky
Russian University of Transport, Moscow, Russia
National Research University "Higher School of Economics" (HSE University), Moscow, Russia
E-mail: M13041@yandex.ru

УДК 517.9
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-53-76
EDN: YPMUOA

МЕТОД ОСРЕДНЕНИЯ ДЛЯ ЗАДАЧ О КВАЗИКЛАССИЧЕСКИХ АСИМПТОТИКАХ

С. Ю. Доброхотов[1,2], **В. Е. Назайкинский**[1,2]

[1] *Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия*
[2] *Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия*

Аннотация. Разрабатывается метод осреднения для операторов с быстроосциллирующими коэффициентами, предназначенный для использования в задачах о квазиклассических асимптотиках и не предполагающий периодической структуры осцилляций коэффициентов. Исследуются алгебры локально усреднимых функций, доказывается теорема об осреднении для дифференциальных операторов общего вида, некоторые особенности применения метода иллюстрируются на примере волнового уравнения.

Ключевые слова: методы осреднения, быстроосциллирующие коэффициенты, квазиклассические асимптотики, алгебры локально усреднимых функций.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 21-71-30011).

Для цитирования: *С. Ю. Доброхотов, В. Е. Назайкинский.* Метод осреднения для задач о квазиклассических асимптотиках// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 1. С. 53–76. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-53-76

1. Введение

Методам осреднения для разнообразных классов уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами посвящена обширная литература. Ни в коей мере не претендуя на полноту, отметим прежде всего монографии [1, 14, 31, 41, 46] и обзорные статьи [15, 16, 18, 28], где можно найти дальнейшие ссылки. В большинстве работ быстроосциллирующие коэффициенты моделируются функциями $f(x/\mu)$ «быстрой переменной» x/μ, где μ — малый параметр, характеризующий скорость осцилляций, причём сама функция $f(y)$ предполагается либо периодической (см., например, [12,13,17,27,29,43]), либо почти периодической (см., например, [20]), либо случайной со специальными условиями на соответствующую функцию распределения (см., например, [21,34,39]). Исследуются не только дифференциальные уравнения, но и другие классы уравнений (например, уравнения с оператором типа свертки; см. [44,45]). Для уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами изучаются краевые задачи, причём области, в которых они рассматриваются, сами могут иметь весьма сложную мелкомасштабную структуру, аналогичную структуре коэффициентов (т. н. «перфорированные области»); см., например, [26,35]. В ряде работ рассматривались также классы коэффициентов и областей, выходящие за рамки указанных выше предположений (см., например, [3, 32, 42]). Отметим, наконец, идейно близкие к методам осреднения многомасштабные варианты метода конечных элементов в вычислительной математике [36].

Данная статья является продолжением работ [9, 19, 37] и развивает предложенный там метод усреднения, мотивировкой для разработки которого послужили исследования в области квазиклассических асимптотик для линеаризованных уравнений мелкой воды (см. обзор [8]). Как известно, в отсутствие вихревых движений эти уравнения сводятся к волновому уравнению

$$\eta_{tt} - \nabla \left(c^2(x)\nabla\eta\right) = 0, \quad x = (x_1, x_2)\,, \tag{1.1}$$

для возвышения свободной поверхности $\eta(x,t)$, причём квадрат скорости задается формулой

$$c^2(x) = gD(x),$$

где $D(x)$ — глубина бассейна в точке x, а g — ускорение силы тяжести. Если иметь в виду, скажем, приложения к описанию распространения волн цунами в океане, то в задаче возникает естественный малый параметр h — отношение горизонтальных размеров источника к размерам бассейна — так что для построения соответствующих решений естественно использовать квазиклассические асимптотики, доставляемые каноническим оператором Маслова [23] и его современными вычислительно эффективными модификациями [10,11]. Непосредственному применению канонического оператора препятствует, однако, то обстоятельство, что глубина $D(x)$ в реальной задаче наряду с «плавной» компонентой имеет быстрые осцилляции, горизонтальный размер которых много меньше характерной длины волны (определяемой размерами источника). Таким образом, перед применением квазиклассических методов уравнение (1.1) следует осреднить. При этом нужно иметь в виду, что в отличие от ситуации, с которой имеет дело «классическое» осреднение, здесь в задаче присутствуют два малых параметра, μ и h. Далее, в отличие от уравнений, относящихся к периодическим средам, в данном случае нет никаких доводов в пользу предположения, что быстрые осцилляции функции $D(x)$ можно описывать периодической функцией от быстрых переменных x/μ, т. е. представить её в виде

$$D(x) = f\left(\frac{x}{\mu}\right).$$

Как минимум следует допустить, что имеет место ещё «медленная» зависимость от переменных x:

$$D(x) = f\left(x, \frac{x}{\mu}\right),$$

где $f(x,y)$ — уже «плавно меняющаяся» функция своих аргументов. При допущениях такого рода вывод пригодного для дальнейшего построения квазиклассических асимптотик осреднённого уравнения был дан в [4] на основе идеи, что уравнения с быстроосциллирующими коэффициентами можно изучать с помощью адиабатического приближения, причём их регуляризация [2,5,7] с помощью анзаца, подобного анзацу Кузмака—Уизема в нелинейной теории [22, 47], приводит к уравнениям с операторнозначным символом [23], которые удобно решать с помощью операторного разделения переменных [2,30]. Соответствующие вычисления, проведённые в [4,33], приводят при определенном соотношении между параметрами к осреднённому уравнению с дисперсионными членами типа линеаризованного уравнения Буссинеска (ср. [48]). Следует, однако, отметить, что эти построения носят теоретический характер, поскольку они основаны на решении уравнений на ячейке периодичности и требуют знания явного вида функции $f(x,y)$, определить которую при всех (x,y) по фактически известной из измерений функции $D(x)$ — т. е. по значениям функции $f(x, x/\mu)$ при одном-единственном фиксированном μ — в задаче о волнах на воде не представляется возможным.

Таким образом, в данной задаче необходим метод осреднения, все формулы которого используют только функцию $D(x)$, а не функцию $f(x,y)$, а в идеале метод не должен опираться даже на существование последней — все условия на функцию $D(x)$ должны формулироваться в терминах само́й этой функции.

При дополнительном предположении, что осциллирующая часть функции $D(x)$ мала по сравнению с неосциллирующей, т. е. имеет место представление

$$D(x) \equiv D(x,\mu,\delta) = f_0(x) + \delta f_1(x,\mu),$$

где $\delta > 0$ — ещё один малый параметр, функция f_0 плавно меняющаяся, а f_1 — быстроосциллирующая, такой метод осреднения был предложен в [9], а в [19] свойства метода изучались для уравнения (1.1) на примерах реальной топографии дна некоторых участков Мирового океана. Несколько более подробное изложение метода было дано в обзоре [37, § 4].

Все основные результаты в [9,19,37] приведены без доказательств. Исключение составляет собственно теорема об осреднении, но она сформулирована и доказана [19, теорема 1] только для уравнения (1.1); таким образом, осреднение проведено только для оператора $-\langle\nabla, c^2(x)\nabla\rangle$ пространственной части волнового уравнения. Данная работа закрывает этот пробел — в разделе 2 мы приводим доказательства основных утверждений об усреднимых функциях из [9, 19, 37], а в разделе 3 формулируем и доказываем теорему об осреднении для дифференциальных операторов общего вида. В разделе 4 мы возвращаемся к волновому уравнению и на его примере описываем способ практического решения ключевого «уравнения на ячейке», возникающего в предлагаемом методе.

Отметим, что мы используем термины «усреднение» и «осреднение» в разном смысле — первый означает вычисление определённого тем или иным образом среднего от заданной функции, а второй — процедуру редукции оператора с быстроосциллирующими коэффициентами к оператору с плавно меняющимися коэффициентами.

Некоторые обозначения. Мы будем использовать операторы с малым параметром при производных. Таких параметров у нас два — квазиклассический параметр h и параметр μ, характеризующий скорость осцилляции коэффициентов, и поэтому мы различаем h- и μ-дифференциальные операторы, для которых используются следующие обозначения:

$$
\begin{aligned}
\breve{H} &= H(\overset{2}{x}, \overset{1}{\breve{p}}) = H\left(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right), \quad \breve{p} = -ih\frac{\partial}{\partial x},\\
\widehat{H} &= H(\overset{2}{x}, \overset{1}{\widehat{p}}) = H\left(\overset{2}{x}, -i\mu\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right) \quad \breve{p} = -i\mu\frac{\partial}{\partial x}.
\end{aligned} \tag{1.2}
$$

Здесь $H(x,p)$ — многочлен от переменных $p = (p_1, \ldots, p_n)$ с коэффициентами, зависящими от переменных $x = (x_1, \ldots, x_n)$ — символ рассматриваемого оператора; номера над операторами, подставляемыми в символ вместо числовых переменных, обозначают порядок их действия (фейнмановские номера [24, 25, 38]) — сначала к функции, на которую действует μ- или h-дифференциальный оператор (1.2), применяются дифференцирования, а потом полученные производные умножаются на коэффициенты.

Многие из рассматриваемых далее функций зависят от параметров h, μ, δ. Если характер этой зависимости ясен из контекста, мы опускаем соответствующие аргументы для краткости.

Через $f * g$ обозначаем свертку функций f и g:

$$
(f * g)(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(y)g(x-y)\,dy.
$$

2. Усреднимые функции

В этом разделе, в основном следуя [9, 19, 37], мы приведем определения и утверждения, касающиеся быстро меняющихся функций и их усреднения, и дадим отсутствующие в [9, 19, 37] доказательства.

2.1. Быстро меняющиеся функции и усреднение.

Определение 2.1. Пусть $f(x,\mu)$ — бесконечно дифференцируемая функция от переменных $x \in \mathbb{R}^n$, зависящая от параметра $\mu \in (0,1]$ (гладкость и даже непрерывность по которому не предполагается). Будем говорить, что функция $f(x,\mu)$ *равномерно гладкая*, если

$$
\left|\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(x,\mu)\right| \leqslant C_\alpha, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in (0,1], \quad |\alpha| = 0, 1, 2, \ldots, \tag{2.1}
$$

и *быстроосциллирущая*, если

$$\left|\mu^{|\alpha|}\frac{\partial^\alpha f}{\partial x^\alpha}(x,\mu)\right| \leqslant C_\alpha, \quad x\in\mathbb{R}^n, \quad \mu\in(0,1], \quad |\alpha|=0,1,2,\dots, \tag{2.2}$$

где C_α — постоянные, не зависящие от x и μ. Пространство равномерно гладких функций обозначим через $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$, а быстроосциллирующих — через $C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)$.

Пространства $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$ и $C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)$ являются пространствами Фреше относительно счётных систем полунорм, задаваемых наилучшими возможными значениями постоянных C_α в (2.1) и (2.2) соответственно, и имеет место непрерывное вложение $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)\subset C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)$. Будем писать $f=O(\mu^N;C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n))$, если $\mu^{-N}f\in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$, и $f=O(\mu^N;C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n))$, если $\mu^{-N}f\in C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)$. Далее, $f=\widehat{O}(\mu^\infty)$, если $f=O(\mu^N;C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n))$ для любого $N=0,1,2,\dots$ (или, что эквивалентно, $f=O(\mu^N;C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n))$ для любого $N=0,1,2,\dots$).

Пусть $\varphi(x)$ — функция из пространства Шварца $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Для $\varepsilon>0$ через $T_\varepsilon\varphi$ обозначим «масштабированную» функцию

$$T_\varepsilon\varphi(x)=\frac{1}{\varepsilon^n}\varphi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right).$$

Определение 2.2. Функция $f\in C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)$ называется *локально усреднимой*, если свертка

$$\left(T_{\mu^\gamma}\varphi * f\right)(x,\mu)=\frac{1}{\mu^{\gamma n}}\int\varphi\left(\frac{x-y}{\mu^\gamma}\right)f(y,\mu)\,dy= \tag{2.3}$$

$$=\int\varphi(y)f\left(x-\mu^\gamma y,\mu\right)\,dy \tag{2.4}$$

принадлежит пространству $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$ для любого $\gamma\in(0,1)$ и любой функции φ из пространства Шварца $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$. Пространство локально усреднимых функций обозначим через $C^\infty_{\mathbf{la}}(\mathbb{R}^n)$.

Из формулы (2.4) видно, что всякая равномерно гладкая функция локально усреднима, так что имеют место вложения $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)\subset C^\infty_{\mathbf{la}}(\mathbb{R}^n)\subset C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)$.

Специальным ядром усреднения будем называть произвольную функцию $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, такую, что

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n}\varphi(x)\,dx=1, \qquad \int\limits_{\mathbb{R}^n}x^\alpha\varphi(x)\,dx=0, \quad |\alpha|=1,2,\dots \tag{2.5}$$

Определение 2.3. *Локальным средним* функции $f\in C^\infty_{\mathbf{la}}(\mathbb{R}^n)$ называется функция $\mathsf{E}[f]\in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$, задаваемая формулой

$$\mathsf{E}[f](x,\mu)=(T_{\mu^\gamma}\varphi * f)(x,\mu), \tag{2.6}$$

где $\gamma\in(0,1)$ и специальное ядро усреднения $\varphi\in\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ выбираются произвольным образом.

Утверждения из следующей теоремы анонсированы в [9, 19, 37] без доказательства, которое приводится ниже.

Теорема 2.1 (см. [37, Theorem 1])**.** *Справедливы следующие утверждения*:

1. *Локальное среднее* $\mathsf{E}[f]$ *корректно определено, т. е. не зависит от выбора* γ *и* φ, *с точностью до* $\widehat{O}(\mu^\infty)$.
2. *Если* $f\in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$, *то* $\mathsf{E}[f]=f+\widehat{O}(\mu^\infty)$.
3. *Если* $f\in C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)$, *то*
$$\mathsf{E}[\widehat{H}f]=\widehat{H}\mathsf{E}[f]+\widehat{O}(\mu^\infty)$$
для любого μ-*дифференциального оператора* $\widehat{H}$ *с коэффициентами из* $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$.

Доказательство. Докажем сначала утверждение 2. Для этого запишем свертку, задающую локальное среднее (2.6), в форме (2.4), обозначив для краткости $\mu^\gamma=\varepsilon$, и разложим $f(x-\varepsilon y,\mu)$ в подынтегральном выражении по формуле Тейлора с остаточным членом

$$f(z)=f(x)+\sum_{|\alpha|=1}^{N-1}\frac{(z-x)^\alpha}{\alpha!}f^{(\alpha)}(x)+\sum_{|\alpha|=N}\frac{N}{\alpha!}(z-x)^\alpha\int\limits_0^1(1-\tau)^{N-1}f^{(\alpha)}(x+\tau(z-x))\,d\tau, \tag{2.7}$$

подставляя в неё $z = x - \varepsilon y$. В результате, с учётом свойств (2.5) специального ядра усреднения, получим (опуская для краткости второй аргумент μ)

$$E[f](x) = f(x) + \sum_{|\alpha|=1}^{N-1} \frac{(-\varepsilon)^{|\alpha|}}{\alpha!} f^{(\alpha)}(x) \int_{\mathbb{R}^n} y^\alpha \varphi(y)\, dy + \varepsilon^N R_N(x) = f(x) + \mu^{\gamma N} R_N(x),$$

$$R_N(x) = (-1)^N \sum_{|\alpha|=N} \frac{N}{\alpha!} \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^n} y^\alpha \varphi(y) f^{(\alpha)}(x + \tau\varepsilon y)\, dy\, d\tau.$$

Так как функция $y^\alpha\varphi(y)$ лежит в пространстве Шварца, то $R_N(x) \in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$, и в силу произвольности N получаем $\mathsf{E}[f] = f + \widehat{O}(\mu^\infty)$, что и требовалось.

Теперь мы можем доказать утверждение 1. Пусть φ, ψ — два специальных ядра усреднения, и пусть $\varepsilon = \mu^{\gamma_1}$, $\delta = \mu^{\gamma_2}$, $\gamma_1, \gamma_2 \in (0,1)$. Далее, пусть $f \in C^\infty_{\mathbf{la}}(\mathbb{R}^n)$. Тогда $T_\varepsilon\varphi * f, T_\delta\psi * f \in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$, и с учетом утверждения 2 и коммутативности и ассоциативности свертки получаем

$$(T_\delta\psi * T_\varepsilon\varphi) * f = T_\delta\psi * (T_\varepsilon\varphi * f) = T_\varepsilon\varphi * f + \widehat{O}(\mu^\infty);$$
$$(T_\delta\psi * T_\varepsilon\varphi) * f = (T_\varepsilon\varphi * T_\delta\psi) * f = T_\varepsilon\varphi * (T_\delta\psi * f) = T_\delta\psi * f + \widehat{O}(\mu^\infty).$$

Таким образом, $T_\varepsilon\varphi * f = T_\delta\psi * f + \widehat{O}(\mu^\infty)$, и утверждение 1 доказано.

Докажем утверждение 3. Достаточно проверить, что

$$\mathsf{E}[\widehat{p} f] = \widehat{p}\mathsf{E}[f], \qquad \mathsf{E}[Qf] = Q\mathsf{E}[f] + \widehat{O}(\mu^\infty), \qquad f \in C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n), \quad Q \in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n).$$

Первое равенство очевидно, так как свертка коммутирует с дифференцированиями. Чтобы проверить второе утверждение, в формулу

$$E[Qf] = \int_{\mathbb{R}^n} \varphi(y) Q(x - \varepsilon y) f(x - \varepsilon y)\, dy,$$

где φ — специальное ядро усреднения, а $\varepsilon = \mu^\gamma$, $\gamma \in (0,1)$, подставим разложение (2.7) функции $Q(x - \varepsilon y)$:

$$Q(x - \varepsilon y) = Q(x) + \sum_{|\alpha|=1}^{N-1} \frac{(-\varepsilon)^{|\alpha|} Q^{(\alpha)}(x)}{\alpha!} y^\alpha + \varepsilon^N \sum_{|\alpha|=N} y^\alpha Q_{N\alpha}(x,y),$$

где функции $Q_{N\alpha}(x,y)$ равномерно по (x,y,μ) ограничены вместе со всеми своими производными. Поэтому

$$E[Qf] = QE[f] + \sum_{|\alpha|=1}^{N-1} \frac{(-\varepsilon)^{|\alpha|} Q^{(\alpha|}(x)}{\alpha!} T_\varepsilon\left[y^\alpha\varphi(y)\right] * f + O(\varepsilon^N; C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)). \tag{2.8}$$

Обозначим для краткости $\varphi_\alpha(y) = y^\alpha\varphi(y)$. Покажем, что

$$T_\varepsilon\varphi_\alpha * f = \widehat{O}(\mu^\infty) \qquad \text{при } |\alpha| > 0. \tag{2.9}$$

Пусть ψ — специальное ядро усреднения, а $\delta = \mu^\varkappa$, $0 < \gamma < \varkappa < 1$. Тогда

$$T_{\delta/\varepsilon}\psi * \varphi_\alpha = \varphi_\alpha + O(\mu^\infty, \mathscr{S}(\mathbb{R}^N))$$

(доказательство этого факта с небольшими изменениями воспроизводит доказательство утверждения 2 выше) и соответственно

$$T_\varepsilon\varphi_\alpha * T_\delta\psi = T_\varepsilon\left(\varphi_\alpha * T_{\delta/\varepsilon}\psi\right) = T_\varepsilon\varphi_\alpha + O(\mu^\infty, \mathscr{S}(\mathbb{R}^N)),$$

так что

$$T_\varepsilon\varphi_\alpha * f = T_\varepsilon\varphi_\alpha * T_\delta\psi * f + \widehat{O}(\mu^\infty) = T_\varepsilon\varphi_\alpha * E[f] + \widehat{O}(\mu^\infty).$$

Поскольку функция $E[f]$ равномерно гладкая, мы опять можем использовать рассуждение из доказательства утверждения 2 и получить (2.9). Теперь равенство $\mathsf{E}[Qf] = Q\mathsf{E}[f] + \widehat{O}(\mu^\infty)$ вытекает из (2.8) в силу произвольности N. Теорема доказана. $\square$

Определение 2.4. Диффеоморфизм (замену переменных) $g\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ назовем *правильным*, если все производные (начиная с первых) задающих его функций ограничены равномерно по $x \in \mathbb{R}^n$ и то же самое справедливо для обратного диффеоморфизма.

Следующее утверждение также приводится в [9, 19, 37] без доказательства.

Теорема 2.2. *Пространства* $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$, $C^\infty_{\mathbf{la}}(\mathbb{R}^n)$ *и* $C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)$ *инвариантны относительно правильных замен переменных.*

Доказательство. Для пространств $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$ и $C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)$ утверждение непосредственно следует из определения 2.1 и ограниченности производных функций, задающих диффеоморфизм. Остается доказать, что если $f \in C^\infty_{\mathbf{la}}(\mathbb{R}^n)$, а g — правильный диффеоморфизм, то $f \circ g^{-1} \in C^\infty_{\mathbf{la}}(\mathbb{R}^n)$.

Пусть $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon = \mu^\gamma$, $\gamma \in (0,1)$. Покажем, что

$$T_\varepsilon\varphi * \left(f \circ g^{-1}\right) \in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n).$$

Поскольку g — правильная замена переменных, это условие эквивалентно условию

$$\left[T_\varepsilon\varphi * \left(f \circ g^{-1}\right)\right] \circ g \in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n),$$

которое мы и будем проверять. Таким образом, необходимо доказать, что функция

$$F(x,\mu) = \left[\left[T_\varepsilon\varphi * \left(f \circ g^{-1}\right)\right] \circ g\right](x,\mu) = \frac{1}{\varepsilon^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{g(x)-g(y)}{\varepsilon}\right) f(y,\mu)\det\frac{\partial g}{\partial x}(y)\,dy \tag{2.10}$$

и её производные любого порядка по переменным y ограничены равномерно по $(y,\mu) \in \mathbb{R}^n \times (0,1]$. Применяя формулу Тейлора (2.7) к функции $g(x)$, получаем

$$g(x)-g(y) = A(x)(x-y) + \sum_{|\alpha|=2}^{N-1}(x-y)^\alpha B_\alpha(x) + \sum_{|\alpha|=N}(x-y)^\alpha D_\alpha(x,y), \quad A(x) = \frac{\partial g}{\partial x}(x), \tag{2.11}$$

где матричные функции $A(x)$ и $A^{-1}(x)$, равно как и вектор-функции $B_\alpha(x)$ и $D_\alpha(x,y)$ (конкретные выражения для которых для доказательства несущественны) равномерно ограничены вместе со всеми своими производными. Частный случай этого разложения при $N=0$ имеет вид

$$g(x)-g(y) = D(x,y)(x-y), \qquad D(x,x) = A(x) = \frac{\partial g}{\partial x}(x).$$

Обозначим через $A(x,y,\tau)$ матрицу

$$A(x,y,\tau) = (1-\tau)A(x) + \tau D(x,y), \qquad \tau \in [0,1];$$

тогда

$$A(x,y,0) = A(x) \quad \text{и} \quad (1-\tau)A(x)(x-y) + \tau(g(x)-g(y)) = A(x,y,\tau)(x-y).$$

Из равномерной ограниченности матричных функций $A(x)$, $A^{-1}(x)$ и $D(x,y)$ вытекает, что существуют постоянные $R>0, C_0>0$, такие, что

$$\left|A(x,y,\tau)(x-y)\right| \geqslant C_0|x-y| \qquad \text{при} \quad \tau \in [0,1]$$

для любых $x,y \in \mathbb{R}^n$, таких, что $|x-y| \leqslant 5R$. Выберем и зафиксируем такое R. Пусть $\chi_1(r)$ — гладкая срезающая функция, равная нулю при $r \geqslant 4R$ и единице при $r \leqslant 2R$, $\chi_2(r) = 1-\chi_1(r)$. Выберем произвольную точку $x \in \mathbb{R}^n$ и разобьем функцию (2.10) на два слагаемых:

$$\begin{aligned} &F(x,\mu) = F_1(x,\mu) + F_2(x,\mu) \\ &F_j(x,\mu) = \frac{1}{\varepsilon^n}\int\limits_{\mathbb{R}^n} \varphi\left(\frac{g(x)-g(y)}{\varepsilon}\right)\chi_j(|y-x_0|)f(y,\mu)\det\frac{\partial g}{\partial x}(y)\,dy. \end{aligned} \tag{2.12}$$

Достаточно показать, что функции $F_j(x,\mu)$, $j=1,2$, равномерно по μ ограничены вместе со всеми производными в шаре $B_R(x_0) = \{|x-x_0| \leqslant R\}$, причём соответствующие оценки равномерны по x_0. Рассмотрим сначала функцию $F_2(x,\mu)$. В этом случае на носителе подынтегрального выражения выполнено неравенство $|y-x_0| \geqslant 2R$, так что если $x \in B_R(x_0)$, то $|x-y| \geqslant R$. Для правильной замены переменных g существуют такие постоянные $C_1, C_2 > 0$, что

$$|x-y| \leqslant C_1|g(x)-g(y)| \leqslant C_2|x-y|,$$

так что на носителе подынтегрального выражения получаем

$$|g(x)-g(y)| \geqslant \frac{1}{C_1}|x-y| \geqslant \frac{1}{2C_1}(R+|x-y|).$$

Поскольку $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, получаем, что при $x \in B_R(x_0)$ на носителе подынтегрального справедливы оценки

$$\left|\frac{1}{\varepsilon^n}\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}\left[\varphi\left(\frac{g(x)-g(y)}{\varepsilon}\right)\chi_2(|y-x_0|)f(y,\mu)\det\frac{\partial g}{\partial x}(y)\right]\right| \leqslant C_{\alpha N}\frac{\varepsilon^{N-n-|\alpha|}}{(R+|x-y|)^N},$$

$|\alpha|, N = 0,1,2,\ldots$, с постоянными $C_{\alpha N}$, не зависящими от x_0, откуда немедленно следует, что $F_2(x,\mu)$ и её производные не только ограничены, но и равны $O(\mu^\infty)$ в шаре $|x-x_0| \leqslant R$, причём соответствующие оценки равномерны по параметру x_0.

Оценим теперь функцию $F_1(x,\mu)$. Подставляя разложение (2.11) в аргумент функции φ из подынтегрального выражения в (2.12) и применяя к ней разложение Тейлора (2.7) с центром в точке $A(x)(x-y)/\varepsilon)$, получаем

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{g(x)-g(y)}{\varepsilon}\right) &= \varphi\left(A(x)\frac{x-y}{\varepsilon}\right) + \\
&+ \sum_{|\alpha|=1}^{N-1}\frac{1}{\alpha!\varepsilon^{|\alpha|}}\left(\sum_{|\beta|=2}^{N-1}(x-y)^\beta B_\beta(x) + \sum_{|\beta|=N}(x-y)^\beta D_\beta(x,y)\right)^\alpha \varphi^{(\alpha)}\left(A(x)\frac{x-y}{\varepsilon}\right) + \\
&+ \sum_{|\alpha|=N}\frac{1}{\varepsilon^N}\left(\sum_{|\beta|=2}^{N-1}(x-y)^\beta B_\beta(x) + \sum_{|\beta|=N}(x-y)^\beta D_\beta(x,y)\right)^\alpha \times \\
&\times \frac{N}{\alpha!}\int_0^1(1-\tau)^{N-1}\varphi^{(\alpha)}\left(A(x,y,\tau)\frac{x-y}{\varepsilon}\right)d\tau.
\end{aligned}$$

Раскрывая скобки, перепишем это выражение в виде (суммы здесь и далее в доказательстве конечны)

$$\begin{aligned}
\varphi\left(\frac{g(x)-g(y)}{\varepsilon}\right) &= \varphi\left(A(x)\frac{x-y}{\varepsilon}\right) + \sum_{|\alpha|=1}^{N-1}\sum_{|\beta|\geqslant 2|\alpha|}\varepsilon^{-|\alpha|}(x-y)^\beta K_{\alpha\beta}(x)\varphi^{(\alpha)}\left(A(x)\frac{x-y}{\varepsilon}\right) + \\
&+ \sum_{|\alpha|=1}^{N-1}\sum_{|\beta|\geqslant(N+2)|\alpha|-2}\varepsilon^{-|\alpha|}(x-y)^\beta K_{\alpha\beta}(x,y)\varphi^{(\alpha)}\left(A(x)\frac{x-y}{\varepsilon}\right) + \\
&+ \sum_{\substack{|\alpha|=N\\|\beta|\geqslant 2N}}\varepsilon^{-|\alpha|}(x-y)^\beta K_{\alpha\beta}(x,y)\int_0^1(1-\tau)^{N-1}\varphi^{(\alpha)}\left(A(x,y,\tau)\frac{x-y}{\varepsilon}\right)d\tau,
\end{aligned}$$

где $K_{\alpha\beta}(x)$ и $K_{\alpha\beta}(x,y)$ — гладкие функции, равномерно ограниченные вместе со всеми своими производными. Положим

$$k(x,\mu) = \chi_1\left(|k-x_0|\right)f(x,\mu)\det\frac{\partial g}{\partial x}(y), \quad \varphi_{\alpha\beta}(A,x) = x^\beta\varphi^{(\alpha)}(Ax);$$

тогда функцию $F_1(x,\mu)$ можно записать в виде

$$F_1(x,\mu) = \sum_{|\alpha|=0}^{N-1}\sum_{|\beta|\geqslant 2\alpha}\varepsilon^{|\beta|-|\alpha|}K_{\alpha\beta}(x)\left[T_\varepsilon\varphi_{\alpha\beta}(A,x) * k(x,\mu)\right]\Big|_{A=A(x)} + R_1(x,\mu) + R_2(x,\mu),$$

где $K_{00}(x) = 1$, $K_{0\beta}(x) = 0$ при $\beta \neq 0$,

$$R_1(x,\mu) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int\limits_{B_R(x_0)} \sum_{|\alpha|=1}^{N-1} \sum_{\beta \geqslant N|\alpha|+2|\alpha|-2} \varepsilon^{|\beta|-|\alpha|} K_{\alpha\beta}(x,y) \varphi_{\alpha\beta}\left(A(x), \frac{x-y}{\varepsilon}\right) k(y,\mu)\,dy,$$

$$R_2(x,\mu) = \frac{1}{\varepsilon^n} \int\limits_0^1 \int\limits_{B_R(x_0)} \sum_{\substack{|\alpha|=N\\ |\beta|\geqslant 2N}} \varepsilon^{|\beta|-|\alpha|} K_{\alpha\beta}(x,y)(1-\tau)^{N-1} \varphi_{\alpha\beta}\left(A(x,y,\tau), \frac{x-y}{\varepsilon}\right) k(y,\mu)\,dy\,d\tau.$$

Оценим прежде всего слагаемые в основной сумме. Функция $k(x,\mu)$ получается из $f(x,\mu)$ умножением на гладкую не зависящую от μ функцию и потому вместе с ней принадлежит пространству $C^\infty_{\mathbf{la}}(\mathbb{R}^n)$ и, следовательно, задаёт всюду определённый линейный оператор

$$Q\colon \mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n), \qquad \varphi \longmapsto T_\varepsilon\varphi * k,$$

действующий между пространствами Фреше. Мы утверждаем, что этот оператор замкнут. Действительно, если $\varphi_j \to \varphi_\infty$ и $T_\varepsilon\varphi_j * k \to \psi$, то последняя сходимость имеет место и при каждом фиксированном $\mu \in (0,1]$ в пространстве $\mathcal{C}^\infty_b(\mathbb{R}^n)$ гладких функций, ограниченных вместе со всеми производными. Но при фиксированном μ рассматриваемый оператор непрерывен в пространствах $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n) \longrightarrow \mathcal{C}^\infty_b(\mathbb{R}^n)$, так что с необходимостью $T_\varepsilon\varphi_\infty * k = \psi$. По теореме о замкнутом графике оператор Q непрерывен. Далее, отображение $A \mapsto \varphi_{\alpha\beta}(A,\cdot)$ — гладкое отображение группы $GL(n,\mathbb{R})$ неособых вещественных матриц размера $n \times n$ в $\mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$, так что $T_\varepsilon\varphi_{\alpha\beta}(A,\cdot) * k$ — гладкое семейство элементов пространства $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$, параметризованное матрицами $A \in GL(n,\mathbb{R})$. Функция $A(x)$ гладкая, все её производные ограничены, и все матрицы $A(x)$ содержатся в компактном подмножестве в $GL(n,\mathbb{R})$. Поэтому $\psi(y,\cdot,\mu) = T_\varepsilon\varphi_{\alpha\beta}(A(y),\cdot) * k$ — гладкое и ограниченное вместе со всеми производными семейство элементов пространства $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$. Таким образом, имеют место оценки

$$\left|\frac{\partial^{\alpha+\beta}\psi}{\partial x^\alpha \partial y^\beta}(y,x,\mu)\right| \leqslant C_{\alpha\beta}, \qquad x,y \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in [0,1], \quad |\alpha|,|\beta| = 0,1,2,\dots$$

Из этих оценок немедленно вытекает, что функция

$$[T_\varepsilon\varphi_{\alpha\beta}(A,x) * k(x,\mu)]\,\big|_{A=A(x)} = \psi(x,x,\mu)$$

является элементом пространства $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$. Умножение на функцию $K_{\alpha\beta}(x)$ также не выводит из пространства $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$, а показатель степени $|\alpha| - |\beta|$ у ε положителен. Итак,

$$\varepsilon^{|\beta|-|\alpha|} K_{\alpha\beta}(x)\,[T_\varepsilon\varphi_{\alpha\beta}(A,x) * k(x,\mu)]\,\big|_{A=A(x)} \in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n).$$

Осталось оценить влияние остаточных членов. Минимальная степень параметра ε в выражениях для R_1 и R_2 есть ε^{N-1}; функции $\varphi_{\alpha\beta}$ ограничены; при каждом дифференцировании по x возникает множитель ε^{-1}. В силу произвольности N ясно, что остаточные члены R_1 и R_2 не портят необходимых оценок. Равномерность всех полученных оценок по x_0 является следствием того факта, что все оценки для исходных функций инвариантны относительно сдвигов по x. Теорема доказана. □

2.2. Алгебры усреднимых функций. Пространство $C^\infty_{\mathbf{la}}(\mathbb{R}^n)$ не замкнуто относительно умножения функций; мы будем рассматривать в нем подпространства, которые являются алгебрами и удовлетворяют некоторым специальным условиям. В данной статье будем использовать модифицированный вариант определения из [8].

Определение 2.5. *Правильной алгеброй локально усреднимых функций* (или просто *правильной алгеброй*) назовем алгебру функций $\mathscr{A}$, $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n) \subseteq \mathscr{A} \subset C^\infty_{\mathbf{la}}(\mathbb{R}^n)$, инвариантную относительно μ-дифференцирований: если $f \in \mathscr{A}$, то и

$$\widehat{p}_j f \equiv -i\mu\frac{\partial f}{\partial x_j} \in \mathscr{A}, \qquad j = 1,\dots,n.$$

Следующий важный класс правильных алгебр описан в [37]. Пусть $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ — счетная аддитивная подгруппа, снабжённая нормой — функцией $\nu\colon \Gamma \to \mathbb{R}_+$, такой, что

$$\nu(g) > 0 \quad \text{при } g \neq 0, \quad \nu(g+h) \leqslant \nu(g) + \nu(h), \quad \nu(mg) = |m|\nu(g), \quad m \in \mathbb{Z}.$$

Обозначим через $N_\Gamma(t)$ считающую функцию группы Γ — функцию, значение которой при любом $t \in \mathbb{R}_+$ есть число

$$N_\Gamma(t) = \#\{g \in \Gamma\colon \nu(g) < t\}$$

элементов группы Γ, норма которых меньше t. Предположим, что функция $N_\Gamma(t)$ конечна при всех t и растет не быстрее некоторой степени:

$$N_\Gamma(t) \leqslant C_0 t^{m_0} \qquad \text{с некоторыми постоянными } C_0, m_0 > 0. \tag{2.13}$$

Далее, предположим, что норма $\nu(\cdot)$ и сужение на подгруппу Γ обычной евклидовой нормы $\|\cdot\|$ в $\mathbb{R}^n$ связаны неравенствами

$$C_1\nu(g)^{-m_1} \leqslant \|g\| \leqslant C_2\nu(g) \quad \text{при } g \neq 0 \text{ с некоторыми постоянными } m_0, m_1, C_1, C_2 > 0 \tag{2.14}$$

(левое неравенство здесь называется условием диофантовости). При выполнении условий (2.13) и (2.14) будем говорить, что Γ — *диофантова группа степенного роста.*

Пример 2.1. В качестве $\Gamma \subset \mathbb{R}^n$ можно взять подгруппу, порожденную векторами $b_1, \dots, b_m \in \mathbb{R}^n$, удовлетворяющими для некоторого $s > 0$ диофантову условию

$$\left\|\sum_{j=1}^m n_j b_j\right\| \geqslant C\|n\|^{-s}, \quad n = (n_1, \dots, n_m) \in \mathbb{Z}^m \backslash \{0\};$$

основной интерес здесь, разумеется, представляет случай $m > n$. Отметим, что по теореме Хинчина—Грошева [6, 40] для любых фиксированных m, n это условие выполнено для почти всех наборов $\{b_1, \dots, b_m\}$ в смысле меры Лебега в $\mathbb{R}^{mn}$.

Рассмотрим всевозможные почти периодические функции переменных $y \in \mathbb{R}^n$ с модулем частот Γ и с коэффициентами из $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$, т. е. функции $F(x, \mu, y)$ вида

$$F(x, \mu, y) = \sum_{g \in \Gamma} F_g(x, \mu) e^{igy}, \tag{2.15}$$

где коэффициенты $F_g \in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$ удовлетворяют условиям быстрого убывания

$$\left|\frac{\partial^\alpha F_g}{\partial x^\alpha}(x, \mu)\right| \leqslant C_{N\alpha}(1 + \nu(g))^{-N}, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \mu \in (0, 1] \quad |\alpha|, \ N = 0, 1, 2, \dots, \tag{2.16}$$

с постоянными $C_{N\alpha}$, не зависящими от x и μ (но своими для каждой функции f).

Теорема 2.3. *Пространство* $\mathscr{A}_\Gamma$ *функций*

$$f(x, \mu) = F\left(x, \mu, \frac{x}{\mu}\right), \tag{2.17}$$

где $F(x, \mu, y)$ — *функция вида* (2.15) *с коэффициентами* $F_g(x, \mu)$, *удовлетворяющими условиям* (2.16), *представляет собой правильную алгебру локально усреднимых функций. Локальное среднее функции* (2.17) *имеет вид*

$$\mathsf{E}[f](x, \mu) = F_0(x, \mu) + \widehat{O}(\mu^\infty).$$

Замечание 2.1. Осреднение дифференциальных операторов с быстроосциллирующими коэффициентами вида (2.15) с *постоянными* F_g рассматривалось в [20].

Замечание 2.2. Разумеется, $\mathscr{A}_\Gamma$ можно интерпретировать как скрещенное произведение групповой алгебры быстро убывающих функций на Γ (относительно свертки) на алгебру $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$ с тривиальным действием группы Γ на последней.

Доказательство теоремы 2.3. Подставляя в (2.17) выражение (2.15) для функции F, получаем

$$f(x,\mu)=\sum_{g\in\Gamma}F_g(x,\mu)e^{\frac{i}{\mu}gx}. \tag{2.18}$$

Покажем, что этот ряд равномерно сходится. Для этого воспользуемся следующей леммой.

Лемма 2.1. *Пусть $\{a_g\}_{g\in\Gamma}$ — семейство чисел, удовлетворяющих неравенству*

$$|a_g|\leqslant C(1+\nu(g))^{-s}$$

с некоторыми постоянными $C,s>0$. Если $s>m_0$, то ряд $\sum\limits_{g\in\Gamma}a_g$ абсолютно сходится, и

$$\sum_{g\in\Gamma}|a_g|\leqslant\frac{sCC_0}{s-m_0}.$$

Доказательство. Для частичной суммы ряда из абсолютных значений запишем неравенство

$$\sum_{g:\nu(g)<R}|a_g|\leqslant C\sum_{g:\nu(g)<R}(1+\nu(g))^{-s}=C\int_0^R(1+t)^{-s}\,dN_\Gamma(t)$$

(интеграл Стилтьеса). Интегрируя по частям и пользуясь оценкой для считающей функции группы Γ, получаем

$$\sum_{g:v(g)<R}|a_g|\leqslant C(1+R)^{-s}N_\Gamma(R)+sC\int_0^R N_\Gamma(t)(1+t)^{-s-1}\,dt\leqslant$$
$$\leqslant CC_0(1+R)^{m_0-s}+sCC_0\int_0^R(1+t)^{m_0-s-1}\,dt.$$

При $s>m_0$ правая часть неравенства равномерно ограничена, и при $R\to\infty$ получаем

$$\sum_{g\in\Gamma}|a_g|\leqslant sCC_0\int_0^\infty(1+t)^{m_0-s-1}\,dt=\frac{sCC_0}{s-m_0}.$$

Лемма доказана. □

В силу этой леммы и оценок (2.16) при $\alpha=0$ и $N>m_0$ ряд (2.18) сходится равномерно по (x,μ). Таким образом, произвольный элемент $f\in\mathscr{A}_\Gamma$ представляет собой функцию, равномерно по (x,μ) ограниченную и при каждом $\mu\in(0,1]$ непрерывную по x. Далее, почленное дифференцирование ряда (2.18) приводит к формуле

$$\mu\frac{\partial f}{\partial x_j}(x,\mu)=\sum_{g\in\Gamma}F_{gj}(x,\mu)e^{\frac{i}{\mu}gx},\qquad\text{где}\quad F_{gj}(x,\mu)=ig_jF_g(x,\mu)+\mu\frac{\partial F_g}{\partial x_j}(x,\mu). \tag{2.19}$$

В силу (2.16) и правого неравенства в (2.14) для коэффициентов продифференцированного ряда при всех α и N справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^\alpha F_{gj}}{\partial x^\alpha}(x,\mu)\right|\leqslant\widetilde{C}_{N\alpha}(1+\nu(g))^{-N},\qquad\text{где}\quad\widetilde{C}_{N\alpha}=C_2C_{N+1,\alpha}+C_{N,\alpha+1_j}$$

(здесь $1_j=(0,\dots,0,1,0,\dots,0)$, где единица стоит на j-м месте). Это оценки того же вида, что и (2.16), но с другими постоянными, и мы заключаем, что

$$f\in\mathscr{A}_\Gamma\Longrightarrow\mu\frac{\partial f}{\partial x_j}\in\mathscr{A}_\Gamma,\qquad j=1,\dots,n.$$

По индукции получаем $\mu^{|\alpha|}f^{(\alpha)}\in\mathscr{A}_\Gamma$ для производной любого порядка α, так что все μ-производные функции f также равномерно ограничены, а значит, $f\in C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)$.

Итак, $\mathscr{A}_\Gamma \subset C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)$, и $\mathscr{A}_\Gamma$ инвариантно относительно μ-дифференцирований. Покажем теперь, что $\mathscr{A}_\Gamma$ — алгебра. Пусть $f, \widetilde{f} \in \mathscr{A}_\Gamma$ — два элемента вида (2.18). Тогда

$$f\widetilde{f} = \sum_{g,\widetilde{g}\in\Gamma} F_g \widetilde{F}_{\widetilde{g}} e^{\frac{i}{\mu}(g+\widetilde{g})x} = \sum_{g\in\Gamma} H_g e^{\frac{i}{\mu}gx},$$

где

$$H_g = \sum_{h\in\Gamma} F_h \widetilde{F}_{g-h} \tag{2.20}$$

(обычная свертка функций на группе Γ). Пользуясь оценками вида (2.16) для коэффициентов F_h и $\widetilde{F}_{g-h}$ и их производных, получаем

$$|H_g^{(\alpha)}| = \left|\sum_{h\in\Gamma}\sum_{0\leqslant\beta\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\beta} F_h \widetilde{F}_{g-h}\right| \leqslant \operatorname{const}\sum_{h\in\Gamma}(1+\nu(h))^{-N-s}(1+\nu(g-h))^{-N},$$

где $\binom{\alpha}{\beta} = \binom{\alpha_1}{\beta_1}\cdots\binom{\alpha_n}{\beta_n}$ — биномиальные коэффициенты, а постоянная зависит от α и N. Так как

$$\frac{1}{1+\nu(h)}\frac{1}{1+\nu(g-h)} = \frac{1}{1+\nu(h)+\nu(g-h)+\nu(h)\nu(g-h)} \leqslant \frac{1}{1+\nu(h)+\nu(g-h)} \leqslant \frac{1}{1+\nu(g)}$$

(в действительности это вариант неравенства Питре), то из предыдущего неравенства следует, что

$$|H_g^{(\alpha)}| \leqslant \operatorname{const}(1+\nu(g))^{-N}\sum_{h\in\Gamma}(1+\nu(h))^{-s}.$$

При $s > m_0$ ряд в правой части сходится по лемме 2.1, и мы видим, что коэффициенты H_g удовлетворяют оценкам вида (2.16). Итак, $f\widetilde{f} \in \mathscr{A}_\Gamma$, что и требовалось.

Покажем, наконец, что $\mathscr{A}_\Gamma \subset C^\infty_{\mathbf{la}}(\mathbb{R}^n)$, и вычислим локальное среднее $\mathsf{E}[f]$ функции (2.18). Пусть $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ и $\varepsilon = \mu^\gamma$, $\gamma \in (0,1)$. Ряд (2.18) сходится в $C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)$, а отображение $\psi \mapsto T_\varepsilon\varphi * \psi$ пространства $C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)$ в себя непрерывно, так что свертку можно вычислять почленно:

$$T_\varepsilon\varphi * f = \sum_{g\in\Gamma} T_\varepsilon\varphi * (F_g e^{\frac{i}{\mu}gx}).$$

Для слагаемого при $g = 0$ получаем

$$T_\varepsilon\varphi * F_0 \in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n).$$

При $g \neq 0$ воспользуемся тем фактом, что

$$e^{-\frac{i\varepsilon}{\mu}gy} = \frac{i\mu}{\varepsilon\|g\|}\left\langle\frac{g}{\|g\|}, \frac{\partial}{\partial y}\right\rangle e^{-\frac{i\varepsilon}{\mu}gy}$$

и для произвольного целого $k \geqslant 0$ запишем

$$\begin{aligned} T_\varepsilon\varphi * \left(F_g e^{\frac{i}{\mu}gx}\right) &= \int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)F_g(x-\varepsilon y,\mu)\left(\frac{i\mu}{\varepsilon\|g\|}\left\langle\frac{g}{\|g\|},\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle\right)^k e^{\frac{i}{\mu}g(x-\varepsilon y)}\,dy = \\ &= e^{\frac{i}{\mu}gx}\int_{\mathbb{R}^n}\varphi(y)F_g(x-\varepsilon y,\mu)\left(\frac{i\mu}{\varepsilon\|g\|}\left\langle\frac{g}{\|g\|},\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle\right)^k e^{-\frac{i\varepsilon}{\mu}gy}\,dy = \\ &= e^{\frac{i}{\mu}gx}\left(\frac{i\mu}{\varepsilon\|g\|}\right)^k\int_{\mathbb{R}^n} e^{-\frac{i\varepsilon}{\mu}gy}\left\langle\frac{g}{\|g\|},\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle^k\Bigl(\varphi(y)F_g(x-\varepsilon y,\mu)\Bigr)\,dy. \end{aligned}$$

Из оценок (2.16) для коэффициентов F_g и включения $\varphi \in \mathscr{S}(\mathbb{R}^n)$ вытекает, что

$$\left|\left\langle\frac{g}{\|g\|},\frac{\partial}{\partial y}\right\rangle^k(\varphi(y)F_g(x-\varepsilon y,\mu))\right| \leqslant \operatorname{const}(1+\nu(g))^{-N}(1+|y|)^{-n-1},$$

где постоянная зависит от k и N, но не зависит от g. Интегрируя по $\mathbb{R}^n$ и учитывая левое неравенство в (2.14), с некоторыми новыми постоянными получаем

$$\left|T_\varepsilon\varphi * F_g e^{\frac{i}{\mu}gx}\right| \leqslant \mathrm{const}\,\mu^{k(1-\gamma)}\|g\|^{-k}(1+\nu(g))^{-N} \leqslant \mathrm{const}\,\mu^{k(1-\gamma)}(1+\nu(g))^{-N+m_1k}.$$

Положим здесь $k = m/(1-\gamma)$, $N = m_0 + m_1k + 1$. Тогда

$$\left|T_\varepsilon\varphi * F_g e^{\frac{i}{\mu}gx}\right| \leqslant \mathrm{const}\,\mu^m(1+\nu(g))^{-m_0-1},$$

и по лемме 2.1, суммируя ряд, получаем $T_\varepsilon\varphi * f = T_\varepsilon\varphi * F_0 + O(\mu^m; C_b(\mathbb{R}^n))$. Оценивая производные аналогичным образом, в силу произвольности m имеем $T_\varepsilon\varphi * f = T_\varepsilon\varphi * F_0 + \widehat{O}(\mu^\infty)$. Таким образом, $f \in C^\infty_{\mathbf{la}}(\mathbb{R}^n)$. Выбирая в качестве φ специальное ядро усреднения, получаем

$$\mathsf{E}[f] = \mathsf{E}[F_0] + \widehat{O}(\mu^\infty) = F_0 + \widehat{O}(\mu^\infty).$$

Теорема доказана. □

3. Теорема об осреднении

Как уже говорилось выше, в теории осреднения для квазиклассических асимптотик фигурируют два основных малых параметра: квазиклассический параметр h при производных, входящих в уравнение, и параметр μ, характеризующий скорость осцилляции коэффициентов. Всюду далее будем предполагать, что эти параметры связаны соотношением

$$0 < \nu \equiv \frac{\mu}{h} < Ch^{\varkappa}$$

с постоянными $\varkappa, C > 0$, которое означает, что коэффициенты оператора осциллируют значительно быстрее, чем предполагаемые квазиклассические решения.

Пусть $\breve{\mathcal{H}}_0$ и $\breve{\mathcal{H}}_1$ — h-дифференциальные операторы порядка m с равномерно гладкими и μ-быстроосциллирующими коэффициентами, соответственно. Через $P(x,p) = \mathcal{H}_{0m}(x,p)$ обозначим старшую однородную часть степени m по переменным p символа $\mathcal{H}_0(x,p)$ оператора $\breve{\mathcal{H}}_0$. Рассмотрим задачу об осреднении для возмущённого оператора

$$\breve{\mathcal{H}} = \breve{\mathcal{H}}_0 + \delta\breve{\mathcal{H}}_1,$$

где δ — ещё один малый параметр, характеризующий величину возмущения.

Теорема 3.1. *Предположим, что коэффициенты оператора $\breve{\mathcal{H}}_1$ лежат в правильной алгебре $\mathscr{A}$ локально усреднимых функций и выполнено следующее условие*:

(P) *для любой функции $v \in \mathscr{A}$ такой, что $\mathsf{E}[v] = \widehat{O}(\mu^\infty)$, уравнение $\widehat{P}u = v \bmod \widehat{O}(\mu^\infty)$ имеет решение $u \in \mathscr{A}$ такое, что $\mathsf{E}[u] = \widehat{O}(\mu^\infty)$.*

Тогда для любого $N = 1, 2, \ldots$ существует μ-дифференциальный оператор $\widehat{\chi}$ с символом вида

$$\chi = 1 + \delta\chi_1 + \cdots + \delta^N\chi_N,$$

где χ_j — многочлены от переменных (p, μ, ν) с коэффициентами в $\mathscr{A}$, и h-дифференциальный оператор $\breve{\mathcal{L}}$ с символом вида

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_0 + \delta\mathcal{L}_1 + \cdots + \delta^N\mathcal{L}_N, \qquad \mathcal{L}_0 = \mathcal{H}_0,$$

где $\mathcal{L}_j$ — многочлены от переменных (p, p, ν) с коэффициентами в $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$ такие, что

$$\breve{\mathcal{H}}\,\widehat{\chi} = \widehat{\chi}\,\breve{\mathcal{L}} + \breve{\mathcal{R}}, \tag{3.1}$$

где через $\breve{\mathcal{R}}$ обозначен h-дифференциальный оператор, символ которого является многочленом от переменных (p, h, δ, ν), причём в каждом слагаемом этого многочлена сумма показателей степеней при h, ν и δ не ниже $N+1$.

Замечание 3.1. Уравнение $\widehat{P}u = v \bmod \widehat{O}(\mu^\infty)$, упомянутое в условии (P), играет в рассматриваемой теории ту же роль, что «уравнение на ячейке» в классической теории осреднения для уравнений с коэффициентами — периодическими функциями от быстрых переменных.

Доказательство теоремы 3.1. Пусть

$$\check{\mathcal{H}} = \mathcal{H}\left(\overset{2}{x}, -ih\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\right) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} (a_\alpha(x) + \delta b_\alpha(x)) \left(-ih\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}. \tag{3.2}$$

Заметим, что если умножить оператор $\check{\mathcal{H}}$ на ν^m, то получится μ-дифференциальный оператор $\widehat{H} = H(\overset{2}{x}, \overset{1}{\widehat{p}})$ с символом

$$H(x,p) = H_0(x,p) + \delta H_1(x,p) = \sum_{|\alpha|=0}^{m} \nu^{m-|\alpha|}(a_\alpha(x) + \delta b_\alpha(x))p^\alpha.$$

Поэтому вместо (3.1) получим сначала соотношение вида

$$\widehat{H}\ \widehat{\chi} = \widehat{\chi}\ \widehat{L} + \widehat{R} \tag{3.3}$$

с подходящими свойствами входящих в него операторов, а потом покажем, что при умножении $\widehat{L}$ и $\widehat{R}$ на ν^{-m} получаются h-дифференциальные операторы с указанными в теореме свойствами.

В доказательстве будем использовать μ-дифференциальные операторы $F(\overset{2}{x}, \overset{1}{\widehat{p}})$, символы которых полиномиально зависят от параметров μ и ν:

$$F(x,p) \equiv F(x,p,\mu,\nu) = \sum_{\alpha,j,k} F_{\alpha jk}(x) p^\alpha \mu^j \nu^k \qquad \text{(сумма конечна)}; \tag{3.4}$$

для краткости мы опускаем параметры в обозначении символа.

Обозначим через $\mathbf{I}_s$, $s \in \mathbb{Z}_+$, пространство символов (3.4), для которых $F_{\alpha jk} \in \mathscr{A}$ (так что коэффициенты сами могут зависеть от параметра μ), причём $F_{\alpha jk} = 0$ при $|\alpha| + j + k < s$, а через $\mathbf{I}_s^{reg} \subset \mathbf{I}_s$ — подпространство символов с равномерно гладкими коэффициентами $F_{\alpha jk} \in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$. В частности, $H_0 \in \mathbf{I}_m^{reg}$, $H_1 \in \mathbf{I}_m$. Очевидно, оба семейства пространств символов убывают при возрастании параметра s.

Напомним, что для произведения дифференциальных операторов справедлива формула

$$\widehat{F}\ \widehat{G} = \widehat{F * G}, \qquad \text{где} \quad [F * G] = F(\overset{2}{x}, p + \overset{1}{\widehat{p}})(G) = \sum_{\alpha} \frac{(-i\mu)^{|\alpha|}}{\alpha!} \frac{\partial^\alpha F}{\partial p^\alpha} \frac{\partial^\alpha G}{\partial x^\alpha}, \tag{3.5}$$

выражающая символ произведения операторов как «скрученное» произведение символов сомножителей[1]. Следующее утверждение о скрученных произведениях символов из введённых выше пространств непосредственно вытекает из формулы (3.5).

Лемма 3.1. *Имеют место соотношения*

$$\mathbf{I}_k * \mathbf{I}_s \subset \mathbf{I}_s, \qquad \mathbf{I}_k * \mathbf{I}_s^{reg} \subset \mathbf{I}_{k+s}, \qquad \mathbf{I}_k^{reg} * \mathbf{I}_s^{reg} \subset \mathbf{I}_{k+s}^{reg}.$$

Построим символы

$$\begin{aligned}
&\chi = 1 + \delta\chi_1 + \dots + \delta^N \chi_N, && \chi_j \in \mathbf{I}_m, \quad j = 1, \dots, N, \\
&L = L_0 + \delta L_1 + \dots + \delta^N L_N, \quad L_0 = H_0, && L_j \in \mathbf{I}_m^{reg}, \quad j = 1, \dots, N, \\
&R = \delta R_1 + \dots + \delta^N R_N + \delta^{N+1} R_{N+1} + \dots + \delta^{2N} R_{2N}, && R_j \in \mathbf{I}_{m+N+1-j}, \quad j = 1, \dots, N, \\
& && R_j \in \mathbf{I}_m, \quad j = N+1, \dots, 2N,
\end{aligned} \tag{3.6}$$

такие, что выполнено соотношение (3.3). Для этого перепишем (3.3) в развернутом виде

$$\begin{aligned}
\big(\widehat{H}_0 + \delta\widehat{H}_1\big)\big(1 + \delta\widehat{\chi}_1 + \dots + \delta^N \widehat{\chi}_N\big) = \big(1 + \delta\widehat{\chi}_1 + \dots + \delta^N \widehat{\chi}_N\big)\big(\widehat{H}_0 + \delta\widehat{L}_1 + \dots + \delta^N \widehat{L}_N\big) + \\
+ \delta\widehat{R}_1 + \dots + \delta^N \widehat{R}_N + \delta^{N+1}\widehat{R}_{N+1} + \dots + \delta^{2N}\widehat{R}_{2N},
\end{aligned}$$

[1]Начиная с этого момента, звездочкой обозначается именно скрученное произведение, определенное в (3.5), а не свертка, как в разделе 2.

воспользуемся формулой (3.5), чтобы перейти от произведения операторов к «скрученному» произведению символов и приравняем коэффициенты слева и справа при одинаковых степенях δ:

$$\begin{aligned} H_0 * \chi_1 - \chi_1 * H_0 &= L_1 - H_1 + R_1, \\ H_0 * \chi_2 - \chi_2 * H_0 &= L_2 - H_1 * \chi_1 + \chi_1 * L_1 + R_2, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ H_0 * \chi_k - \chi_k * H_0 &= L_k - H_1 * \chi_{k-1} + \chi_1 * L_{k-1} + \cdots + \chi_{k-1} * L_1 + R_k, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ H_0 * \chi_N - \chi_N * H_0 &= L_N - H_1 * \chi_{N-1} + \chi_1 * L_{N-1} + \cdots + \chi_{N-1} * L_1 + R_N. \end{aligned} \tag{3.7}$$

Для экономии места мы не выписываем здесь явно соотношения для коэффициентов при δ^j при $j > N$, так как эти соотношения служат просто определением соответствующих символов R_j; отметим лишь, что $\mathbf{I}_m * \mathbf{I}_m \subset \mathbf{I}_m$ в силу леммы 3.1, так что если нам удастся решить рекуррентную систему (3.7) относительно χ_j, L_j и R_j, $j = 1, \dots, N$, в классах символов (3.6), то и оставшиеся R_j, $j = N+1, \dots, 2N$, будут лежать в нужных классах.

Лемма 3.2. *Имеет место формула*

$$H_0 * F - F * H_0 = (\widehat{P} + \widehat{K})F,$$

где $\widehat{P}$ — μ-дифференциальный оператор с введённым выше символом $P(x,p)$, а $\widehat{K}$ — оператор с тем свойством, что $\widehat{K}\mathbf{I}_s \subset \mathbf{I}_{s+1}$ для любого $s \geqslant 1$.

Доказательство. Пусть $F \in \mathbf{I}_s$. Так как $H_0 = P + \nu Q$, где $Q \in \mathbf{I}_{m-1}$, то

$$H_0 * F - F * H_0 = P * F + \nu Q * F - F * H_0.$$

По лемме 3.1 $Q * F \in \mathbf{I}_s$ и $F * H_0 \in \mathbf{I}_{s+m}$, так что $\nu Q * F - F * H_0 \in \mathbf{I}_{s+1}$. Осталось показать, что $P * F = \widehat{P}F$ с точностью до элементов из $\mathbf{I}_{s+1}$. Но

$$P * F = \sum_{|\alpha|=m} a_\alpha(x)\left(p - i\mu\frac{\partial}{\partial x}\right)^\alpha F = \sum_{|\alpha|=m}\sum_{0\leqslant\gamma\leqslant\alpha}\binom{\alpha}{\gamma}a_\alpha(x)p^\gamma\left(-i\mu\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha-\gamma}F,$$

где $\binom{\alpha}{\gamma} = \binom{\alpha_1}{\gamma_1}\cdots\binom{\alpha_n}{\gamma_n}$ — биномиальные коэффициенты. Поскольку μ-дифференцирование коэффициентов не выводит из $\mathbf{I}_s$, а умножение на p_j переводит $\mathbf{I}_s$ в $\mathbf{I}_{s+1}$, все слагаемые в правой части, в которых $\gamma \neq 0$, лежат в $\mathbf{I}_{s+1}$. Слагаемые же с $\gamma = 0$ дают в точности $\widehat{P}f$. Лемма доказана. □

Вернемся к доказательству теоремы. В силу леммы 3.2 k-е уравнение рекурсивной цепочки (3.7) можно записать в виде

$$\widehat{P}\chi_k = -\widehat{K}\chi_k + L_k + F_k + R_k, \tag{3.8}$$

где $\chi_k \in \mathbf{I}_m$ и $L_k \in \mathbf{I}_m^{reg}$ — неизвестные функции, R_k — остаток, относительно которого нужно добиться, чтобы $R_k \in \mathbf{I}_{m+N+1-k}$, а

$$F_k = \begin{cases} -H_1, & k = 1, \\ -H_1 * \chi_{k-1} + \chi_1 * L_{k-1} + \cdots + \chi_{k-1} * L_1, & k > 1, \end{cases}$$

— заданная функция (при $k > 1$ выражающаяся через решения предыдущих уравнений цепочки), причём если предположить по индукции, что все предыдущие уравнения решены в нужных пространствах, то $F_k \in I_m$.

Чтобы решить уравнение (3.8) для очередного k, поступим следующим образом. Рассмотрим цепочку уравнений[1]

$$\widehat{P}f_0 = F_k - \mathsf{E}[F_k], \tag{3.9}$$

$$\widehat{P}f_j = \mathsf{E}[\widehat{K}f_{j-1}] - \widehat{K}f_{j-1}, \qquad j = 1, 2, \dots \tag{3.10}$$

Имеем $F_k - E(F_k) \in \mathbf{I}_m$, $\mathsf{E}[F_k - E(F_k)] = \widehat{O}(\mu^\infty)$. В силу условия (P) уравнение (3.9) имеет решение $f_0 \in \mathbf{I}_m$ (уравнение решаем по отдельности для каждого коэффициента многочлена f_0, получая решения из $\mathscr{A}$; так как набор одночленов, коэффициенты при которых ненулевые, тот же, что и в

[1] Здесь операция осреднения E применяется к символам покоэффициентно.

правой части, полученный многочлен, как и правая часть, лежит в $\mathbf{I}_m$). Теперь последовательно решаем уравнения (3.10). Предположим по индукции, что $f_{j-1} \in \mathbf{I}_{m+j-1}$; тогда правая часть уравнения (3.10) лежит в $\mathbf{I}_{m+j}$, имеет локальное среднее $\widehat{O}(\mu^\infty)$, и в силу условия (P) получаем решение $f_j \in \mathbf{I}_{m+j}$. Для суммы этих решений получаем

$$\widehat{P}\sum_{j=0}^{M} f_j = F_k - \mathsf{E}[F_k] + \sum_{j=0}^{M-1}\bigl(\mathsf{E}[\widehat{K}f_j] - \widehat{K}f_j\bigr) = -\widehat{K}\sum_{j=0}^{M} f_j + \mathsf{E}\Biggl[-F_k + \sum_{j=0}^{M-1}\widehat{K}f_j\Biggr] + F_k + \widehat{K}f_M.$$

При достаточно большом M символ $\widehat{K}f_M$ будет лежать в $\mathbf{I}_{m+N+1-k}$, мы получаем решение уравнения (3.8) в виде

$$\chi_k = \sum_{j=0}^{M} f_j \in \mathbf{I}_m, \qquad L_k = \mathsf{E}\Biggl[-F_k + \sum_{j=0}^{M-1}\widehat{K}f_j\Biggr] \in \mathbf{I}_m^{reg}, \qquad R_k = \widehat{K}f_M \in \mathbf{I}_{m+N+1-k}. \tag{3.11}$$

Итак, цепочка уравнений (3.7) решена. Для доказательства теоремы осталось проверить, что операторы $\check{\mathcal{L}} := \nu^{-m}\widehat{L}$ и $\check{\mathcal{R}} := \nu^{-m}\widehat{R}$, где

$$\widehat{L} = \widehat{H}_0 + \delta\widehat{L}_1 + \dots + \delta^N\widehat{L}_N, \qquad \widehat{R} = \delta\widehat{R}_1 + \dots + \delta^N\widehat{R}_N + \delta^{N+1}\widehat{R}_{N+1} + \dots + \delta^{2N}\widehat{R}_{2N},$$

суть h-дифференциальные операторы с заявленными в формулировке теоремы свойствами. Чтобы показать это, заметим, что коэффициенты в разложениях символов L и R по степеням параметра δ являются символами вида (3.4), лежащими либо в пространстве $\mathbf{I}_m^{reg}$ (в случае символа L), либо в пространствах $\mathbf{I}_s$ для $s = m + N + 1 - k$ или $s = m$ (в случае символа R). Рассмотрим произвольный оператор $F(\overset{2}{x}, \overset{1}{\widehat{p}})$ с символом (3.4) из пространства $\mathbf{I}_s^{reg}$ или $\mathbf{I}_s$. Так как $\mu = h\nu$, то

$$\nu^{-m}F(\overset{2}{x}, \overset{1}{\widehat{p}}) = \sum_{|\alpha|+j+k\geqslant s} F_{\alpha jk}(x)\mu^j\nu^{k-m}\left(-i\mu\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha} = \sum_{|\alpha|+j+k\geqslant s} F_{\alpha jk}(x)h^j\nu^{k+j+|\alpha|-m}\left(-ih\frac{\partial}{\partial x}\right)^{\alpha}.$$

Таким образом, при $s \geqslant m$ показатель степени у ν всегда неотрицателен, так что оператор $\nu^{-m}F(\overset{2}{x}, \overset{1}{\widehat{p}})$ записывается в виде h-дифференциального оператора с полиномиальным по (p, h, ν) символом, причём в каждом слагаемом в символе сумма показателей степени у h и ν не меньше $s - m$. Отсюда немедленно вытекают требуемые утверждения. Теорема доказана. $\square$

Пример 3.1. В качестве простого примера приложения теоремы 3.1 рассмотрим асимптотическую задачу на собственные значения для оператора $\check{\mathcal{H}}$:

$$\check{\mathcal{H}}\psi = \lambda\psi + O(h^m).$$

Предположим, что $\delta \leqslant Ch^\varepsilon$ для некоторого $\varepsilon > 0$. Выберем $N \geqslant m/\min\{\varepsilon, \varkappa\}$. Пусть $\widehat{\chi}$ и $\check{\mathcal{L}}$ — операторы, построенные в теореме. Найдем решение асимптотической задачи на собственные значения

$$\check{\mathcal{L}}\varphi = \lambda\varphi + O(h^m)$$

для оператора $\check{\mathcal{L}}$. Поскольку символ этого оператора уже не быстроосциллирующий, квазиклассическое асимптотическое решение φ этой задачи можно во многих случаях построить с помощью канонического оператора Маслова. Положим $\psi = \widehat{\chi}\varphi$. Тогда

$$(\check{\mathcal{H}} - \lambda)\psi = (\check{\mathcal{H}} - \lambda)\widehat{\chi}\varphi = \widehat{\chi}(\check{\mathcal{H}} - \lambda)\varphi + O(h^m) = O(h^m),$$

т. е. мы получаем асимптотическое решение исходной задачи.

Пример 3.2. Теорема 1 из [19] об осреднении волнового уравнения с быстроосциллирующей скоростью является следствием (или, если угодно, частным случаем) теоремы 3.1.

Условие (P) в теореме 3.1 может оказаться труднопроверяемым, но во многих ситуациях достаточно просто доказать, что оно выполнено. Например, справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.2. *Пусть* Γ *— диофантова группа степенного роста, и пусть*

$$P(x,p) = \sum_{|\alpha|=m} b_\alpha(x)p^\alpha$$

— однородный многочлен степени m от переменных p с коэффициентами $b_\alpha \in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$, удовлетворяющий условию равномерной эллиптичности: существует постоянная $C > 0$ такая, что при всех (x, p) справедливо неравенство

$$|P(x,p)| \geqslant C|p|^m.$$

Тогда для любой функции $f \in \mathscr{A}_\Gamma$ такой, что $\mathsf{E}[f] = 0 \bmod \widehat{O}(\mu^\infty)$, существует решение $u \in \mathscr{A}_\Gamma$ уравнения

$$\widehat{P}u = f \bmod \widehat{O}(\mu^\infty) \tag{3.12}$$

такое, что $\mathsf{E}[u] = 0 \bmod \widehat{O}(\mu^\infty)$.

Доказательство. Пусть функция f записана в виде (2.18). Тогда

$$F_0(x,\mu) = \mathsf{E}[f] + \widehat{O}(\mu^\infty) = \widehat{O}(\mu^\infty).$$

Так как уравнение (3.12) мы будем решать с точностью до $\widehat{O}(\mu^\infty)$, то без ограничения общности будем считать, что $F_0(x,\mu) = 0$, т. е.

$$F(x,\mu) = \sum_{g\in\Gamma\setminus\{0\}} F_g(x,\mu)e^{\frac{i}{\mu}gx}. \tag{3.13}$$

Для каждого члена $f_g(x,\mu) = F_g(x,\mu)e^{\frac{i}{\mu}gx}$ ряда (3.13) построим формальное асимптотическое решение u_g уравнения $\widehat{P}u_g = f_g$ в виде ряда по степеням параметра μ:

$$u_g(x,\mu) = e^{\frac{i}{\mu}\xi x}\sum_{j=0}^\infty (-i\mu)^j a_{gj}(x,\mu), \qquad a_{gj} \in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n).$$

Чтобы найти коэффициенты $a_{gj}(x,\mu)$, подставим этот ряд в уравнение и получим

$$\biggl(P(x,g) + \sum_{k=1}^\infty (-i\mu)^k R_k(g)\biggr)\sum_{j=0}^\infty (-i\mu)^j a_{gj}(x,\mu) = F_g(x,\mu), \quad \text{где} \quad R_k(g) = \sum_{|\alpha|=k}\frac{1}{\alpha!}\frac{\partial^\alpha P}{\partial p^\alpha}(x,g)\frac{\partial^\alpha}{\partial x^\alpha}$$

(и, в частности, $R_k(g) = 0$ при $k > m$), откуда, приравнивая коэффициенты при степенях μ, для функций $a_{gj}(x,\xi)$ получаем рекуррентные формулы

$$a_{g0}(x,\mu) = \frac{F_g(x,\mu)}{P(x,g)}, \qquad a_{gj}(x,\mu) = -\frac{1}{P(x,g)}\sum_{k=1}^j R_k(g)a_{g,j-k}(x,\mu), \quad j = 1,2,\dots$$

Так как коэффициенты оператора $R_k(g)$ — однородные функции от g степени $m-k$, а сам этот оператор — дифференциальный порядка k, то из этих формул по индукции следуют оценки

$$\left|\frac{\partial^\alpha a_{gj}}{\partial x^\alpha}(x,\mu)\right| \leqslant C_{j\alpha}\|g\|^{-m-j}\sum_{|\beta|\leqslant|\alpha|+j}\left|\frac{\partial^\beta F_g}{\partial x^\beta}(x,\mu)\right|, \qquad j, |\alpha| = 0,1,2,\dots,$$

с некоторыми постоянными $C_{j\alpha}$, не зависящими от g и F_g. Из условия диофантовости (2.14) следует, что $\|g\|^{-m-j} \leqslant \operatorname{const}\nu(g)^{m_1(m+j)}$. Комбинируя это неравенство с оценками (2.16), получим неравенства

$$\left|\frac{\partial^\alpha a_{gj}}{\partial x^\alpha}(x,\mu)\right| \leqslant C_{Nj\alpha}(1+\nu(g))^{-N}, \qquad N, j, |\alpha| = 0,1,2,\dots, \tag{3.14}$$

с некоторыми постоянными $C_{Nj\alpha}$. Теперь, чтобы превратить формальное асимптотическое решение в настоящее асимптотическое решение с точностью до $\widehat{O}(\mu^\infty)$, воспользуемся хорошо известным приемом построения функции с заданным рядом Тейлора. Положим

$$K_l = \max\{1, \max_{N,j,|\alpha|\leqslant l} C_{Nj\alpha}\}, \qquad \mu_l = \frac{1}{2K_l}, \tag{3.15}$$

$$a_g(x,\mu) = \sum_{j:\mu\leqslant\mu_j}(-i\mu)^j a_{gj}(x,\mu), \qquad u(x,\mu) = \sum_{g\in\Gamma} a_g(x,\mu)e^{\frac{i}{\mu}gx}. \tag{3.16}$$

Теперь все утверждения теоремы вытекают из следующей леммы.

Лемма 3.3. *Ряды* (3.16) *сходятся, причём* $a_g \in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$, $u \in \mathscr{A}_\Gamma$ *является решением уравнения* (3.12), $\mathsf{E}[u] = \widehat{O}(\mu^\infty)$, *и для любого* $M = 0, 1, 2, \dots$ *имеют место разложения*

$$a_g(x,\mu) = \sum_{j=0}^{M-1} (-i\mu)^j a_{gj}(x,\mu) + O(\mu^M; C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)), \tag{3.17}$$

$$u(x,\mu) = \sum_{j=0}^{M-1} (-i\mu)^j u_j(x,\mu) + O(\mu^M; \mathscr{A}_\Gamma), \tag{3.18}$$

где

$$u_j(x,\mu) = \sum_{g\in\Gamma} a_{gj}(x,\mu) e^{\frac{i}{\mu}gx}.$$

Доказательство. Рассмотрим хвост первого ряда в (3.16):

$$\sum_{\substack{j:j\geqslant M\\ \mu\leqslant\mu_j}} (-i\mu)^j a_{gj}(x,\mu) = (-i\mu)^M \sum_{\substack{j:j\geqslant M\\ \mu\leqslant\mu_j}} (-i\mu)^{j-M} a_{gj}(x,\mu) =: (-i\mu)^M Q_{gM}(x,\mu).$$

Пользуясь оценкой (3.14), получим

$$|Q_{gM}|^{(\alpha)}(x,\mu) \leqslant (1+\nu(g))^{-N} \sum_{j=M}^\infty \mu_j^{j-M} C_{Nj\alpha} = (1+\nu(g))^{-N} \sum_{j=M}^\infty \frac{1}{2^{j-M} K_j^{j-M-1}} \frac{C_{Nj\alpha}}{K_j}.$$

Ряд в правой части сходится, поскольку при $j \geqslant \max\{M+1, N, |\alpha|\}$ имеет место неравенство

$$\frac{1}{2^{j-M} K_j^{j-M-1}} \frac{C_{Nj\alpha}}{K_j} \leqslant \frac{1}{2^{j-M}}.$$

При $M = 0$ отсюда следует сходимость первого ряда в (3.16) в пространстве $C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$ и оценки для функций a_g, гарантирующие, что вторая формула в (3.16) задаёт элемент пространства $\mathscr{A}_\Gamma$. При произвольном M получаем разложения (3.17) и (3.18).

Лемма 3.3, а вместе с ней и теорема 3.2, доказаны. □

4. О практическом решении уравнения из условия (P)

Вопрос о практическом решении уравнения из условия (P), необходимого при построении редуцирующего преобразования, рассмотрим на примере волнового уравнения

$$\eta_{tt} - \langle\nabla, c^2(x)\nabla\rangle\eta = 0, \quad t\in[0,T], \quad x \in D \subset \mathbb{R}^2, \tag{4.1}$$

где квадрат скорости зависит от малых параметров $\mu, \delta > 0$ (соотношение между которыми мы обсудим ниже) следующим образом:

$$c^2(x) \equiv c^2(x,\mu,\delta) = f_0(x,\mu) + \delta f_1(x,\mu), \tag{4.2}$$

где $f_0 \in C^\infty_{\mathbf{us}}(\mathbb{R}^n)$, $f_1 \in C^\infty_{\mathbf{rv}}(\mathbb{R}^n)$. Будем предполагать, что функция $f_1(x,\mu)$ лежит в некоторой правильной алгебре локально усреднимых, причём $\mathsf{E}[f_1] = 0$.

Для волнового уравнения (4.1) рассмотрим задачу Коши

$$\eta\,\big|_{t=0} = \eta_0(x,h), \qquad -ih\eta_t\,\big|_{t=0} = \eta_1(x,h) \tag{4.3}$$

с быстроосциллирующими начальными данными $\eta_{0,1}(x,h)$, скорость осцилляций которых характеризуется малым параметром $h > 0$:

$$\left|\frac{\partial^\alpha \eta_{0,1}(x,h)}{\partial x^\alpha}\right| \leqslant C_\alpha h^{-|\alpha|}, \quad |\alpha| = 0,1,2,\dots$$

Теорема 1 из [19] утверждает, что при этих условиях, если $\delta \asymp h \asymp \mu^{1/2}$, то решение задачи Коши (4.1), (4.3) близко к решению задачи Коши с начальными условиями (4.3) для осреднённого волнового уравнения первого приближения

$$\eta_{tt} - \langle\nabla, f_0(x)\nabla\rangle\eta = 0. \tag{4.4}$$

Если указанные соотношения на параметры не выполняются (скажем, $\sqrt{\mu} \ll \delta \ll 1$), то следует учитывать в осреднённом уравнении и члены более высокого порядка, которые приводят к тому, что в осреднённом уравнении появляется дисперсия. Сколько именно дальнейших членов понадобится, зависит от соотношения между параметрами.

Осреднённое уравнение второго приближения по параметру δ было вычислено в [9, 37]. Оно имеет вид

$$\mu^2\eta_{tt} + \langle -i\mu\nabla, f_0(x)(-i\mu\nabla)\rangle\eta + \delta^2 L\Bigl(\overset{2}{x}, -i\mu\overset{1}{\frac{\partial}{\partial x}}\Bigr)\eta = 0,$$

где

$$L(x,p) = -\frac{1}{f_0}\mathscr{E}\left[f_1\cdot\frac{\langle p,\nabla\rangle^2}{\Delta}f_1 - \frac{1}{\mu^2\Delta}\left(p^2 - \frac{2\langle p,\nabla\rangle^2}{\Delta}\right)f_1\cdot\left(p^2 - \frac{2\langle p,\nabla\rangle^2}{\Delta}\right)f_1\right]. \tag{4.5}$$

Погрешность составляет при этом $O(\mu^2+\delta^3+\delta^2(\mu/h)^6)$, так что если взять, например, $\delta \asymp \mu^{2/3}$ и $h \asymp \mu^{8/9}$, то погрешность будет $O(\mu^2) = O(\delta^3)$.

Формулу для $L(x,p)$ можно переписать в виде

$$L(x,p) = -\frac{1}{f_0}\mathscr{E}\left[f_1\cdot\frac{\langle p,\widehat{p}\rangle^2}{\widehat{p}^2}f_1\right] - \frac{1}{f_0}\mathscr{E}\left[\frac{1}{\widehat{p}^2}\left(p^2 - \frac{2\langle p,\widehat{p}\rangle^2}{\widehat{p}^2}f_1\right)\cdot\left(p^2 - \frac{2\langle p,\widehat{p}\rangle}{\widehat{p}^2}f_1\right)\right], \tag{4.6}$$

где через $\widehat{p}^{-2}v$ обозначается решение уравнения $\widehat{P}u = v \in C^\infty_{\mathbf{la}}(\mathbb{R}^n)$, $\mathsf{E}[v] = 0$, из условия (P) с оператором $\widehat{P} = \widehat{p}^2$. Предложенные в [9, 19] методы для вычисления решения этого уравнения не особенно удобны с вычислительной точки зрения. Напишем явную формулу, удобную для практического применения. Прежде всего заметим, что

$$\frac{1}{p^2} = \frac{1}{p^2+\varepsilon^2-\varepsilon^2} = \frac{1}{p^2+\varepsilon^2}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{\varepsilon^2}{p^2+\varepsilon^2}} = \frac{1}{p^2+\varepsilon^2}\left(1+\varepsilon^2\frac{1}{p^2+\varepsilon^2}+\varepsilon^4\frac{1}{(p^2+\varepsilon^2)^2}+\dots\right)$$

(ряд Неймана). Преобразование Фурье с параметром μ от функции, которая локально усреднима с нулевым средним, есть $O(\mu^\infty)$ в шаре некоторого радиуса, стремящегося при $\mu \to 0$ к нулю медленнее произвольной степени μ. Поэтому, если взять $\varepsilon = \mu^\lambda$ для некоторого $\lambda \in (0,1)$, то некоторый конечный отрезок этого ряда Неймана будет хорошим приближением к символу оператора $\widehat{p}^{-2}$ на таких функциях. Таким образом, надо вычислить ядро Шварца оператора $\dfrac{1}{\widehat{p}^2+\varepsilon^2}$. Имеем

$$\left[\frac{1}{\widehat{p}^2+\varepsilon^2}u\right](x) = \frac{1}{(2\pi\mu)^2}\int\limits_{\mathbb{R}^2_y}\int\limits_{\mathbb{R}^2_p} e^{\frac{i}{\mu}p(x-y)}\frac{u(y)}{p^2+\varepsilon^2}\,dy\,dp = \mu^{-2}\int\limits_{\mathbb{R}^2} K\left(\frac{x-y}{\mu}\right)u(y)\,dy,$$

где

$$K(\xi) = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int\limits_{\mathbb{R}^2_p}\frac{e^{ip\xi}}{p^2+\varepsilon^2}\,dp = \left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\int\limits_0^\infty\int\limits_0^{2\pi}\frac{e^{i\rho|\xi|\cos\varphi}}{\rho^2+\varepsilon^2}\rho\,d\rho\,d\varphi.$$

Вычисляя интеграл по φ, получаем

$$K(\xi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^\infty\frac{\rho}{\rho^2+\varepsilon^2}J_0(\rho|\xi|)\,d\rho,$$

где $J_0(z)$ — функция Бесселя. Таким образом, функция $K(\xi)$ зависит только от $|\xi|$ и как функция от $|\xi|$ с точностью до множителя $\dfrac{1}{2\pi}$ является преобразованием Ханкеля функции $\dfrac{1}{\rho^2+\varepsilon^2}$. Поэтому

$$K(\xi) = \frac{1}{2\pi}K_0(\varepsilon|\xi|),$$

где $K_0(z)$ — модифицированная функция Бесселя 2-го рода. Окончательно, переходя к полярным координатам, получаем

$$\left[\frac{1}{\widehat{p}^2+\varepsilon^2}u\right](x)=\frac{\mu^{-2\lambda}}{2\pi}\int\limits_0^\infty \rho K_0(\rho)\left(\int\limits_0^{2\pi} u(x-\mu^{1-\lambda}\rho\mathbf{n}(\phi))\,d\phi\right)d\rho,$$

где

$$\mathbf{n}(\phi)=\begin{pmatrix}\cos\phi\\ \sin\phi\end{pmatrix}.$$

Как отмечено в [19], при практической реализации оператора усреднения E достаточно ограничиться ядром, у которого равны нулю только моменты до порядка $|\alpha|=3$ включительно, но которое зато задаётся явной аналитической формулой. Следуя [19], можно взять

$$\varphi(y)=\frac{1}{\pi}e^{-4y^2}(3-8y_1^2)(3-8y_2^2).$$

Более того, вместо интегрирования по всей плоскости можно ограничиться интегрированием по единичному квадрату:

$$\mathsf{E}[F](x,\mu)\approx\int\limits_{-1/2}^{1/2}\int\limits_{-1/2}^{1/2}\varphi(y)F(x-\mu^\gamma y)\,dy.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. — М.: Наука, 1984.
2. *Берлянд Л. В., Доброхотов С. Ю.* Операторное разделение переменных в задачах о коротковолновой асимптотике для дифференциальных уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами// Докл. АН СССР. — 1987. — *296*, № 1. — С. 80–84.
3. *Борисов Д. И.* Об усреднении операторов с возмущениями общего вида в младших членах// Мат. заметки. — 2023. — *113*, № 1. — С. 132–137.
4. *Брюнинг Й., Грушин В. В., Доброхотов С. Ю.* Осреднение линейных операторов, адиабатическое приближение и псевдодифференциальные операторы// Мат. заметки. — 2012. — *92*, № 2. — С. 163–180.
5. *Буслаев В. С.* Квазиклассическое приближение для уравнений с периодическими коэффициентами// Усп. мат. наук. — 1987. — *42*, № 6. — С. 77–98.
6. *Грошев А. В.* Теорема о системе линейных форм// Докл. АН СССР. — 1938. — № 19. — С. 151–152.
7. *Доброхотов С. Ю.* Резонансы в асимптотике решения задачи Коши для уравнения Шрёдингера с быстроосциллирующим конечно-зонным потенциалом// Мат. заметки. — 1988. — *44*, № 3. — С. 319–340.
8. *Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е.* Асимптотики волновых и вихревых локализованных решений линеаризованных уравнений мелкой воды// В сб.: «Актуальные проблемы механики». — М.: Наука, 2015. — С. 98–139.
9. *Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е., Тироцци Б.* О методе осреднения для дифференциальных операторов с осциллирующими коэффициентами// Докл. РАН. — 2015. — *461*, № 5. — С. 516–520.
10. *Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е., Шафаревич А. И.* Новые интегральные представления канонического оператора Маслова в особых картах// Изв. РАН. Сер. мат. — 2017. — *81*, № 2. — С. 53–96.
11. *Доброхотов С. Ю., Назайкинский В. Е., Шафаревич А. И.* Эффективные асимптотики решений задачи Коши с локализованными начальными данными для линейных систем дифференциальных и псевдодифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 2021. — *76*, № 5. — С. 3–80.
12. *Дородный М. А., Суслина Т. А.* Усреднение гиперболических уравнений// Функц. анализ и его прилож. — 2016. — *50*, № 4. — С. 91–96.
13. *Дородный М. А., Суслина Т. А.* Усреднение гиперболических уравнений: операторные оценки при учете корректоров// Функц. анализ и его прилож. — 2023. — *57*, № 4. — С. 123–129.
14. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1993.
15. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А., Нгоан Ха Тьен.* Усреднение и G-сходимость дифференциальных операторов// Усп. мат. наук. — 1979. — *34*, № 5. — С. 65–133.
16. *Жиков В. В., Пастухова С. Е.* Об операторных оценках в теории усреднения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 3. — С. 27–122.

17. *Жиков В. В., Пастухова С. Е.* О сходимости блоховских собственных функций в задачах усреднения// Функц. анализ и его прилож. — 2016. — *50*, № 3. — С. 47–65.
18. *Жиков В. В., Пятницкий А. Л.* Усреднение случайных сингулярных структур и случайных мер// Изв. РАН. Сер. мат. — 2006. — *70*, № 1. — С. 23–74.
19. *Караева Д. А., Караев А. Д., Назайкинский В. Е.* Метод осреднения в задаче о распространении длинных волн от локализованного источника в бассейне над неровным дном// Дифф. уравн. — 2018. — *54*, № 8. — С. 1075–1089.
20. *Козлов С. М.* Осреднение дифференциальных операторов с почти-периодическими быстроосциллирующими коэффициентами// Мат. сб. — 1978. — *107*, № 2. — С. 199–217.
21. *Козлов С. М.* Осреднение случайных операторов// Мат. сб. — 1979. — *109*, № 2. — С. 188–202.
22. *Кузмак Г. Е.* Асимптотические решения нелинейных дифференциальных уравнений с переменными коэффициентами// Прикл. мат. и мех. — 1951. — *23*, № 3. — С. 519–526.
23. *Маслов В. П.* Теория возмущений и асимптотические методы. — М.: МГУ, 1965.
24. *Маслов В. П.* Операторные методы. — М.: Мир, 1976.
25. *Назайкинский В. Е., Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е.* Методы некоммутативного анализа. — М.: Техносфера, 2002.
26. *Назаров С. А., Пятницкий А. Л.* Осреднение спектральной задачи Дирихле для системы дифференциальных уравнений с быстроосциллирующими коэффициентами при плотности переменного знака// Пробл. мат. анализа. — 2010. — *47*. — С. 75–107.
27. *Пастухова С. Е.* Об операторных оценках усреднения для эллиптических систем высокого порядка// Мат. заметки. — 2023. — *114*, № 3. — С. 370–389.
28. *Суслина Т. А.* Теоретико-операторный подход к усреднению уравнений типа Шрёдингера с периодическими коэффициентами// Усп. мат. наук. — 2023. — *78*, № 6. — С. 47–178.
29. *Alicandro R., Ansini N., Braides A., Piatnitski A., Tribuzio A.*. Periodic homogenization// В сб.: «A Variational Theory of Convolution-Type Functionals». — Singapore: Springer, 2023. — С. 59–89
30. *Belov V. V., Dobrokhotov S. Yu., Tudorovskiy T. Ya.* Operator separation of variables for adiabatic problems in quantum and wave mechanics// J. Eng. Math. — 2006. — *55*, № 1–4. — С. 183–237.
31. *Bensoussan A., Lions J.-L., Papanicolaou G.* Asymptotic Analysis of Periodic Structures. — Amsterdam: North-Holland, 1978.
32. *Borisov D. I.* Homogenization for operators with arbitrary perturbations of coefficients// J. Differ. Equ. — 2023. — *369*. — С. 41–93.
33. *Brüning J., Dobrokhotov S. Yu., Grushin V. V.* Approximate formulas for the eigenvalues of a Laplace operator on a torus, which arises in linear problems with oscillating coefficients// Russ. J. Math. Phys. — 2012. — *19*, № 3. — С. 1–10.
34. *Calvo-Jurado C., Casado-Díaz J., Luna-Laynez M.* Homogenization of the Poisson equation with Dirichlet conditions in random perforated domains// J. Comput. Appl. Math. — 2015. — *275*. — С. 375–381.
35. *Cancedda A., Chiado Piat V., Nazarov S.A., Taskinen J.* Spectral gaps for the linear water-wave problem in a channel with thin structures// Math. Nachr. — 2022. — *295*. — С. 657–682.
36. *Chung E., Efendiev Ya., Hou Th. Y.* Multiscale Model Reduction. Multiscale Finite Element Methods and Their Generalizations. — Cham: Springer, 2023.
37. *Dobrokhotov S. Yu., Nazaikinskii V. E.* Homogenization of the Cauchy problem for the wave equation with rapidly varying coefficients and initial conditions// В сб.: «Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics». — Cham: Birkhäuser, 2022. — С. 77–102.
38. *Feynman R. P.* An operator calculus having applications in quantum electrodynamics// Phys. Rev. — 1951. — *84*, № 2. — С. 108–128.
39. *Heida M., Neukamm S., Varga M.* Stochastic two-scale convergence and Young measures// Netw. Heterog. Media. — 2022. — *17*, № 2. — С. 227–254.
40. *Khintchine A. J.* Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen// Math. Ann. — 1924. — *92*. — С. 115–125.
41. *Marchenko V. A., Khruslov E. Ya.* Homogenization of Partial Differential Equations. — Boston: Birkhäuser, 2006.
42. *Nguetseng G.* Homogenization in perforated domains beyond the periodic setting// J. Math. Anal. Appl. — 2004. — *289*. — С. 608–628.
43. *Piatnitski A., Remy E.* Homogenization of elliptic difference operators// SIAM J. Math. Anal. — 2001. — *33*, № 1. — С. 53–83.
44. *Piatnitski A., Sloushch V., Suslina T., Zhizhina E.* On operator estimates in homogenization of nonlocal operators of convolution type// J. Differ. Equ. — 2023. — *352*. — С. 153–188.

45. *Piatnitski A., Zhizhina E.* Periodic homogenization of nonlocal operators with a convolution-type kernel// SIAM J. Math. Anal. — 2017. — *49*, № 1. — С. 64–81.
46. *Sanchez-Palencia E.* Non-Homogeneous Media and Vibration Theory. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1980.
47. *Whitham G. B.* Two-timing, variational principles and waves// J. Fluid Mech. — 1970. — *44*. — С. 373–395.
48. *Whitham G. B.* Linear and Nonlinear Waves. — New York: Wiley, 1974.

С. Ю. Доброхотов
Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
E-mail: s.dobrokhotov@gmail.com

В. Е. Назайкинский
Центр интегрируемых систем, Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия
Институт проблем механики им. А. Ю. Ишлинского РАН, Москва, Россия
E-mail: nazaikinskii@yandex.ru

UDC 517.9
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-53-76
EDN: YPMUOA

Averaging method for problems on quasiclassical asymptotics

S. Yu. Dobrokhotov[1,2] **and V. E. Nazaikinskii**[1,2]

[1] *Centre of Integrable Systems, P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia*
[2] *Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia*

Abstract. The averaging method is developed for operators with rapidly oscillating coefficients, intended for use in problems of quasiclassical asymptotics and not assuming a periodic structure of coefficient oscillations. Algebras of locally averaged functions are studied, an averaging theorem for differential operators of general form is proved, and some features of the method are illustrated using the example of the wave equation.

Keywords: averaging methods, rapidly oscillating coefficients, quasiclassical asymptotics, algebras of locally averaged functions.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The research was supported by the grant of the Russian Science Foundation (project № 21-71-30011).

For citation: S. Yu. Dobrokhotov, V. E. Nazaikinskii, “Averaging method for problems on quasiclassical asymptotics,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 1, 53–76. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-53-76

REFERENCES

1. N. S. Bakhvalov and G. P. Panasenko, *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh* [Averaging Processes in Periodic Media], Nauka, Moscow, 1984 (in Russian).

2. L. V. Berlyand and S. Yu. Dobrokhotov, "Operatornoe razdelenie peremennykh v zadachakh o korotkovolnovoy asimptotike dlya differentsial'nykh uravneniy s bystroostsilliruyushchimi koeffitsientami" [Operator separation of variables in problems on short-wave asymptotics for differential equations with rapidly oscillating coefficients], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1987, **296**, No. 1, 80–84 (in Russian).
3. D. I. Borisov, "Ob usrednenii operatorov s vozmushcheniyami obshchego vida v mladshikh chlenakh" [On homogenization of operators with general perturbations in lower terms], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2023, **113**, No. 1, 132–137 (in Russian).
4. Y. Bryuning, V. V. Grushin, and S. Yu. Dobrokhotov, "Osrednenie lineynykh operatorov, adiabaticheskoe priblizhenie i psevdodifferentsial'nye operatory" [Averaging of linear operators, adiabatic approximation, and pseudodifferential operators], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2012, **92**, No. 2, 163–180 (in Russian).
5. V. S. Buslaev, "Kvaziklassicheskoe priblizhenie dlya uravneniy s periodicheskimi koeffitsientami" [Quasiclassical approximation for equations with periodic coefficients], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1987, **42**, No. 6, 77–98 (in Russian).
6. A. V. Groshev, "Teorema o sisteme lineynykh form" [Theorem on the system of linear forms], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1938, No. 19, 151–152 (in Russian).
7. S. Yu. Dobrokhotov, "Rezonansy v asimptotike resheniya zadachi Koshi dlya uravneniya Shredingera s bystroostsilliruyushchim konechno-zonnym potentsialom" [Resonances in the asymptotics of the solution of the Cauchy problem for the Schrödinger equation with a rapidly oscillating finite-band potential], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1988, **44**, No. 3, 319–340 (in Russian).
8. S. Yu. Dobrokhotov and V. E. Nazaikinskii, "Asimptotiki volnovykh i vikhrevykh lokalizovannykh resheniy linearizovannykh uravneniy melkoy vody" [Asymptotic behavior of wave and vortex localized solutions of linearized shallow water equations], In: *Aktual'nye problemy mekhaniki* [Actual Problems of Mechanics], Nauka, Moscow, 2015, pp. 98–139 (in Russian).
9. S. Yu. Dobrokhotov, V. E. Nazaikinskii, and B. Tirotstsi, "O metode osredneniya dlya differentsial'nykh operatorov s ostsilliruyushchimi koeffitsientami" [On the averaging method for differential operators with oscillating coefficients], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2015, **461**, No. 5, 516–520 (in Russian).
10. S. Yu. Dobrokhotov, V. E. Nazaikinskii, and A. I. Shafarevich, "Novye integral'nye predstavleniya kanonicheskogo operatora Maslova v osobykh kartakh" [New integral representations of the Maslov canonical operator in singular charts], *Izv. RAN. Ser. mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2017, **81**, No. 2, 53–96 (in Russian).
11. S. Yu. Dobrokhotov, V. E. Nazaikinskii, and A. I. Shafarevich, "Effektivnye asimptotiki resheniy zadachi Koshi s lokalizovannymi nachal'nymi dannymi dlya lineynykh sistem differentsial'nykh i psevdodifferentsial'nykh uravneniy" [Effective asymptotics of solutions of the Cauchy problem with localized initial data for linear systems of differential and pseudodifferential equations], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2021, **76**, No. 5, 3–80 (in Russian).
12. M. A. Dorodnyy and T. A. Suslina, "Usrednenie giperbolicheskikh uravneniy" [Homogenization of hyperbolic equations], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2016, **50**, No. 4, 91–96 (in Russian).
13. M. A. Dorodnyy and T. A. Suslina, "Usrednenie giperbolicheskikh uravneniy: operatornye otsenki pri uchete korrektorov" [Homogenization of hyperbolic equations: operator estimates with correctors taken into account], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2023, **57**, No. 4, 123–129 (in Russian).
14. V. V. Zhikov, S. M. Kozlov, and O. A. Oleynik, *Usrednenie differentsial'nykh operatorov* [Homogenization of Differential Operators], Nauka, Moscow, 1993 (in Russian).
15. V. V. Zhikov, S. M. Kozlov, O. A. Oleynik, and Ngoan Kha T'en, "Usrednenie i G-skhodimost' differentsial'nykh operatorov" [Homogenization and G-convergence of differential operators], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1979, **34**, No. 5, 65–133 (in Russian).
16. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, "Ob operatornykh otsenkakh v teorii usredneniya" [Ob operatornykh otsenkakh v teorii usredneniya], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 3, 27–122 (in Russian).
17. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, "O skhodimosti blokhovskikh sobstvennykh funktsiy v zadachakh usredneniya" [On the convergence of Bloch eigenfunctions in homogenization problems], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2016, **50**, No. 3, 47–65 (in Russian).
18. V. V. Zhikov and A. L. Piatnitski, "Usrednenie sluchaynykh singulyarnykh struktur i sluchaynykh mer" [Homogenization of random singular structures and random measures], *Izv. RAN. Ser. mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2006, **70**, No. 1, 23–74 (in Russian).
19. D. A. Karaeva, A. D. Karaev, and V. E. Nazaikinskii, "Metod osredneniya v zadache o rasprostranenii dlinnykh voln ot lokalizovannogo istochnika v basseyne nad nerovnym dnom" [Averaging method in the problem of propagation of long waves from a localized source in a pool over an uneven bottom], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2018, **54**, No. 8, 1075–1089 (in Russian).

20. S. M. Kozlov, “Osrednenie differentsial’nykh operatorov s pochti-periodicheskimi bystroostsilliruyushchimi koeffitsientami” [Averaging differential operators with almost periodic, rapidly oscillating coefficients], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1978, **107**, No. 2, 199–217 (in Russian).
21. S. M. Kozlov, “Osrednenie sluchaynykh operatorov” [Averaging of random operators], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1979, **109**, No. 2, 188–202 (in Russian).
22. G. E. Kuzmak, “Asimptoticheskie resheniya nelineynykh differentsial’nykh uravneniy s peremennymi koeffitsientami” [Asymptotic solutions of nonlinear differential equations with variable coefficients], *Prikl. mat. i mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1951, **23**, No. 3, 519–526 (in Russian).
23. V. P. Maslov, *Teoriya vozmushcheniy i asimptoticheskie metody* [Perturbation Theory and Asymptotic Methods], MGU, Moscow, 1965 (in Russian).
24. V. P. Maslov, *Operatornye metody* [Operator Methods], Mir, Moscow, 1976 (in Russian).
25. V. E. Nazaikinskii, B. Yu. Sternin, and V. E. Shatalov, *Metody nekommutativnogo analiza* [Methods of Noncommutative Analysis], Tekhnosfera, Moscow, 2002 (in Russian).
26. S. A. Nazarov and A. L. Piatnitski, “Osrednenie spektral’noy zadachi Dirikhle dlya sistemy differentsial’nykh uravneniy s bystroostsilliruyushchimi koeffitsientami pri plotnosti peremennogo znaka” [Homogenization of the Dirichlet spectral problem for a system of differential equations with rapidly oscillating coefficients with a density of alternating sign], *Probl. mat. analiza* [Probl. Math. Anal.], 2010, **47**, 75–107 (in Russian).
27. S. E. Pastukhova, “Ob operatornykh otsenkakh usredneniya dlya ellipticheskikh sistem vysokogo poryadka” [On operator estimates of homogenization for higher-order elliptic systems], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2023, **114**, No. 3, 370–389 (in Russian).
28. T. A. Suslina, “Teoretiko-operatornyy podkhod k usredneniyu uravneniy tipa Shredingera s periodicheskimi koeffitsientami” [Operator-theoretic approach to the homogenization of Schrödinger-type equations with periodic coefficients], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2023, **78**, No. 6, 47–178 (in Russian).
29. R. Alicandro, N. Ansini, A. Braides, A. Piatnitski, and A. Tribuzio, “. Periodic homogenization,” In: *A Variational Theory of Convolution-Type Functionals*, Springer, Singapore, 2023, pp. 59–89
30. V. V. Belov, S. Yu. Dobrokhotov, and T. Ya. Tudorovskiy, “Operator separation of variables for adiabatic problems in quantum and wave mechanics,” *J. Eng. Math.*, 2006, **55**, No. 1–4, 183–237.
31. A. Bensoussan, J.-L. Lions, and G. Papanicolaou, *Asymptotic Analysis of Periodic Structures*, North-Holland, Amsterdam, 1978.
32. D. I. Borisov, “Homogenization for operators with arbitrary perturbations of coefficients,” *J. Differ. Equ.*, 2023, **369**, 41–93.
33. J. Brüning, S. Yu. Dobrokhotov, and V. V. Grushin, “Approximate formulas for the eigenvalues of a Laplace operator on a torus, which arises in linear problems with oscillating coefficients,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2012, **19**, No. 3, 1–10.
34. C. Calvo-Jurado, J. Casado-Díaz, and M. Luna-Laynez, “Homogenization of the Poisson equation with Dirichlet conditions in random perforated domains,” *J. Comput. Appl. Math.*, 2015, **275**, 375–381.
35. A. Cancedda, V. Chiado Piat, S. NazarovA., and J. Taskinen, “Spectral gaps for the linear water-wave problem in a channel with thin structures,” *Math. Nachr.*, 2022, **295**, 657–682.
36. E. Chung, Ya. Efendiev, and Th. Y. Hou, *Multiscale Model Reduction. Multiscale Finite Element Methods and Their Generalizations*, Springer, Cham, 2023.
37. S. Yu. Dobrokhotov and V. E. Nazaikinskii, “Homogenization of the Cauchy problem for the wave equation with rapidly varying coefficients and initial conditions,” In: *Differential Equations on Manifolds and Mathematical Physics*, Birkhäuser, Cham, 2022, pp. 77–102.
38. R. P. Feynman, “An operator calculus having applications in quantum electrodynamics,” *Phys. Rev.*, 1951, **84**, No. 2, 108–128.
39. M. Heida, S. Neukamm, and M. Varga, “Stochastic two-scale convergence and Young measures,” *Netw. Heterog. Media*, 2022, **17**, No. 2, 227–254.
40. A. J. Khintchine, “Einige Sätze über Kettenbrüche, mit Anwendungen auf die Theorie der Diophantischen Approximationen,” *Math. Ann.*, 1924, **92**, 115–125.
41. V. A. Marchenko and E. Ya. Khruslov, *Homogenization of Partial Differential Equations*, Birkhäuser, Boston, 2006.
42. G. Nguetseng, “Homogenization in perforated domains beyond the periodic setting,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2004, **289**, 608–628.
43. A. Piatnitski and E. Remy, “Homogenization of elliptic difference operators,” *J. SIAM Math. Anal.*, 2001, **33**, No. 1, 53–83.
44. A. Piatnitski, V. Sloushch, T. Suslina, and E. Zhizhina, “On operator estimates in homogenization of nonlocal operators of convolution type,” *J. Differ. Equ.*, 2023, **352**, 153–188.

45. A. Piatnitski and E. Zhizhina, “Periodic homogenization of nonlocal operators with a convolution-type kernel,” *J. SIAM Math. Anal.*, 2017, **49**, No. 1, 64–81.
46. E. Sanchez-Palencia, *Non-Homogeneous Media and Vibration Theory*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1980.
47. G. B. Whitham, “Two-timing, variational principles and waves,” *J. Fluid Mech.*, 1970, **44**, 373–395.
48. G. B. Whitham, *Linear and Nonlinear Waves*, Wiley, New York, 1974.

S. Yu. Dobrokhotov
Centre of Integrable Systems, P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia
E-mail: s.dobrokhotov@gmail.com

V. E. Nazaikinskii
Centre of Integrable Systems, P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia
Ishlinsky Institute for Problems in Mechanics of the RAS, Moscow, Russia
E-mail: nazaikinskii@yandex.ru

УДК 517.925.4
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-77-98
EDN: YQTKXF

О ПРЕДЕЛЬНЫХ ЦИКЛАХ АВТОНОМНЫХ СИСТЕМ

Т. М. Иванова[1], **А. Б. Костин**[1], **А. И. Рубинштейн**, **В. Б. Шерстюков**[2,3]

[1] *Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, Россия*
[2] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия*
[3] *Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*

Аннотация. Рассматривается задача о существовании предельных циклов у автономных систем дифференциальных уравнений. Излагаются вполне элементарные соображения, которые могут быть полезны при обсуждении качественных вопросов, возникающих в курсе обыкновенных дифференциальных уравнений. Установлено, что любая простая замкнутая кривая, заданная уравнением $F(x, y) = 1$ с достаточно общей функцией F, является предельным циклом для соответствующей автономной системы на плоскости (и даже для бесконечного множества систем, зависящих от вещественного параметра). Эти системы выписываются явно. Подробно разобрано несколько конкретных примеров. Приведены графические иллюстрации.

Ключевые слова: автономная система на плоскости, периодические решения, положительно определённая функция, устойчивый предельный цикл.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *Т. М. Иванова, А. Б. Костин, А. И. Рубинштейн, В. Б. Шерстюков.* О предельных циклах автономных систем// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 1. С. 77–98. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-77-98

1. Введение

В обзорной работе [3] Ю. С. Ильяшенко выделяет следующие три условных периода развития теории динамических систем.

Период Ньютона. Дано дифференциальное уравнение. Решить его.

Период Пуанкаре. Дано дифференциальное уравнение. Описать свойства решений, не решая само уравнение, а используя лишь свойства его правой части.

Период Андронова. Не дано никакого конкретного дифференциального уравнения. Описать свойства решений уравнений из некоторого класса.

Материал заметки по большей части связан со вторым из отмеченных этапов. Многие вопросы качественной (геометрической) теории подробно изложены в монографиях [1, 5]. Напомним отдельные сведения, относящиеся к этой замечательной теории.

В 70-х годах XIX века А. Пуанкаре начал изучать качественное поведение траекторий систем дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \dot{x} \equiv \dfrac{dx}{dt} = f(x,y), \\ \dot{y} \equiv \dfrac{dy}{dt} = g(x,y) \end{cases} \tag{1.1}$$

(см., например, [6, 7]) и ввёл понятие предельного цикла — замкнутой траектории (1.1), в малой окрестности которой нет других замкнутых траекторий. Обычно при этом предполагается, что в некоторой области плоскости имеют место факты существования и единственности решения задачи Коши для автономной системы (1.1), а также, что всякое решение (1.1) продолжается по переменной t на максимальный интервал $(t_*, +\infty)$, где не исключено, что $t_* = -\infty$.

Идея написать заметку возникла после того, как один из её авторов (А. И. Рубинштейн) заинтересовался следующими вопросами.

1. Насколько общей может быть простая замкнутая кривая, являющаяся предельным циклом некоторой системы вида (1.1)?
2. Можно ли по такой кривой достаточно общего вида выписать явно соответствующую систему (1.1), т. е. предъявить функции f и g?

Как известно, периодические решения динамических систем находят важные применения в физике, теории колебаний, радиотехнике. Однако, лишь в редких случаях периодические решения удаётся найти в явном виде. Приведём одну яркую цитату из книги [10, с. 299]: «*Предельные циклы представляют огромный интерес для физики и техники. Поведение многих физических и технических систем описывается уравнениями вида* (1.1). *Существование устойчивого предельного цикла у этой системы уравнений означает, что соответствующая физическая или техническая система может работать в устойчивом периодическом режиме*».

В 1922 году Балтазар ван дер Поль рассмотрел уравнение

$$\ddot{x} + x = \mu\,(1 - x^2)\,\dot{x}, \qquad \mu > 0 \text{ — малый параметр,}$$

описывающее работу лампового генератора (см., например, [6, гл. 5, § 29]). Мы рекомендуем прекрасный обзор [4], написанный специально к 125-летнему юбилею голландского учёного.

Уравнение ван дер Поля, очевидно, равносильно системе

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \mu\,(1 - x^2)\,y. \end{cases} \tag{1.2}$$

Оказывается, система (1.2) для малых значений μ имеет устойчивый предельный цикл. Эта замкнутая траектория содержит внутри себя единственную точку покоя (положение равновесия) $x = 0$, $y = 0$. Установить факт наличия данного предельного цикла весьма непросто. Так, в книгу [2, гл. 14, §§ 6, 7] помещено предложенное Г. В. Каменковым конструктивное доказательство существования предельного цикла системы (1.2), занимающее 37 (!) страниц.

Линеаризованная форма уравнения ван дер Поля есть уравнение колебаний $\ddot{x} + x = \mu\,\dot{x}$, которое в виде системы записывается как

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \mu\,y. \end{cases}$$

Для этой линейной системы точка покоя $(0, 0)$ при $0 < \mu < 2$ — неустойчивый фокус, а при $\mu > 2$ — неустойчивый узел. В [6, § 30, теоремы 23, 24] показано, что такой же характер положения равновесия сохраняется и для нелинейной системы (1.2), т. е. в каждом из указанных случаев фазовые траектории системы (1.2) и её первого приближения имеют схожую топологическую структуру. При $\mu = 2$ точка покоя $(0, 0)$ линейной системы является неустойчивым вырожденным узлом, и фазовые портреты системы (1.2) до и после линеаризации существенно различаются.

Немного «подправив» уравнение ван дер Поля, рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{x} = y, \\ \dot{y} = -x + \mu\,(1 - x^2 - y^2)\,y. \end{cases} \tag{1.3}$$

Для всякого решения системы (1.3) выполняется тождество

$$\frac{1}{2}\,\frac{d}{dt}\,(x^2+y^2)=\mu\,(1-x^2-y^2)\,y^2.$$

Элементарной проверкой убеждаемся, что для любого фиксированного значения τ пара функций $x=\sin(t+\tau)$, $y=\cos(t+\tau)$ удовлетворяет этому тождеству, а окружность $x^2+y^2=1$ есть замкнутая траектория системы (1.3). Можно показать (похожие рассуждения даны ниже при доказательстве теоремы 2.1), что при $\mu>0$ указанная окружность является двусторонним устойчивым предельным циклом. Здесь мы имеем дело с той исключительной ситуацией, когда периодическое решение автономной системы удаётся выписать в явном виде.

Пусть P и Q — многочлены от двух переменных степени не выше второй. В заметке [8] для класса динамических систем вида $\dot{x}=P(x,y)$, $\dot{y}=Q(x,y)$, имеющих своей траекторией окружность $x^2+y^2=1$, движение по которой происходит с постоянной угловой скоростью, исследовался вопрос о наличии предельных циклов и характере точек покоя.

Отметим ещё, что в фундаментальном труде [1, гл. 11, пример 14] приведена система

$$\begin{cases}\dot{x}=(x+2)\,y+x^2+y^2-1,\\ \dot{y}=-x\,(x+2),\end{cases}$$

для которой окружность $x^2+y^2=1$ является предельным циклом. Доказательство этого факта использует качественные методы исследования динамических систем. Ясно, что пары функций вида $x=\sin(\omega t+\tau)$, $y=\cos(\omega t+\tau)$ или $x=\cos(\omega t+\tau)$, $y=\sin(\omega t+\tau)$ ни при каких фиксированных ω и τ не будут решениями такой системы. Записать периодическое решение в явном виде проблематично.

2. Основные положения

Перейдём непосредственно к интересующей нас задаче. Пусть на фазовой плоскости задана функция $F(x,y)$. Для произвольно зафиксированного параметра $c>0$ обозначим

$$\Gamma_c\equiv\{\,(x,y)\mid F(x,y)=c\,\},\qquad K_c\equiv\{\,(x,y)\mid F(x,y)\leqslant c\,\},$$

считая эти множества непустыми и ограниченными.

Предположим, что выполнены следующие четыре условия:

(i) $F\in C(\mathbb{R}^2)$ и положительно определена, т. е.

$$0=F(0,0)<F(x,y)\quad\text{при всех}\quad(x,\,y)\neq(0,0);$$

(ii) при каждом $c>0$ линия уровня Γ_c есть простая (без точек самопересечения) замкнутая непрерывная кривая, имеющая конечную длину;

(iii) $F\in C^2(\mathbb{R}^2)$, причём

$$F_x(0,0)=F_y(0,0)=0\quad\text{и}\quad F_x^2(x,y)+F_y^2(x,y)>0\quad\text{при}\quad(x,y)\neq(0,0);$$

(iv) линии уровня функции F меняются непрерывно с изменением параметра, точнее, при заданном $c>0$ для любого $\varepsilon>0$ найдётся $\delta>0$ такое, что для всех $d>0$, удовлетворяющих неравенству $|d-c|<\delta$, выполняется условие $H(\Gamma_d;\,\Gamma_c)<\varepsilon$, где $H(\Gamma_d;\,\Gamma_c)$ обозначает хаусдорфово расстояние (см., например, [9]) между множествами Γ_d и Γ_c.

Замечание 2.1. Из определения множеств Γ_c, K_c ясно, что в условиях (i)–(iii) это компакты в $\mathbb{R}^2$, причём K_d содержится строго внутри K_c для любых $c>d>0$, и точка $(0,0)$ является внутренней точкой каждого из компактов K_c. По поводу самих условий (i)–(iii) см. [2, с. 485]. Систему ключевых предположений (i)–(iv) удобно выписать явно. В то же время, обсуждение зависимости-независимости такого набора требований увело бы нас в сторону от основной линии.

В «опорном» случае $c=1$ пишем Γ вместо Γ_1. Используем запись $\Omega\equiv\{\,(x,y)\mid F(x,y)<1\,\}$ для внутренности компакта $K\equiv K_1$. Наша цель — обосновать следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть функция $F(x,y)$ подчинена условиям (i)–(iv). Тогда кривая*

$$\Gamma\equiv\{(x,y)\mid F(x,y)=1\}$$

есть двусторонний устойчивый предельный цикл для любой системы вида

$$\begin{cases} \dot{x} = F_x(x,y) + a\,F_y(x,y) - F_x(x,y)\,F(x,y), \\ \dot{y} = -a\,F_x(x,y) + F_y(x,y) - F_y(x,y)\,F(x,y) \end{cases} \tag{2.1}$$

с произвольным вещественным параметром $a \neq 0$.

Доказательство. Покажем, что $(0,0)$ — единственная точка покоя системы (2.1). Допустив противное, предположим, что для некоторой пары $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ выполняются условия

$$\begin{cases} \big(1 - F(x_0,y_0)\big)\,F_x(x_0,y_0) + a\,F_y(x_0,y_0) = 0, \\ -a\,F_x(x_0,y_0) + \big(1 - F(x_0,y_0)\big)\,F_y(x_0,y_0) = 0. \end{cases}$$

Отсюда следует равенство $F_x^2(x_0,y_0) + F_y^2(x_0,y_0) = 0$, что противоречит условию (iii).

Для любого решения $(x(t),y(t)) \not\equiv (0,0)$ системы (2.1) имеем

$$\frac{d}{dt}F(x(t),y(t)) = \big(F_x^2(x(t),y(t)) + F_y^2(x(t),y(t))\big)\big(1 - F(x(t),y(t))\big). \tag{2.2}$$

Формула (2.2) показывает, что функция $F(x(t),y(t))$ переменной t «возрастает в области Ω», заданной неравенством $F(x,y) < 1$, и «убывает в области $\mathbb{R}^2 \setminus K$», заданной неравенством $F(x,y) > 1$. Ниже в тексте доказательства будет разъяснён точный смысл сказанного.

Докажем, что кривая Γ является предельным циклом системы (2.1), т. е. её замкнутой траекторией, в малой окрестности которой нет других замкнутых траекторий. Рассмотрим произвольную точку $(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)$ на кривой Γ, т. е. точку, в которой $F(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0) = 1$. В силу условий, наложенных на функцию F, существует (и притом единственное) решение $(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t))$ системы (2.1), удовлетворяющее начальным условиям $\tilde{x}(0) = \tilde{x}_0$, $\tilde{y}(0) = \tilde{y}_0$. Это решение продолжаемо на промежуток $t \in (-\infty,+\infty)$ (см. лемму ниже). Точка $(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0) \neq (0,0)$ и поэтому не является точкой покоя (2.1).

Докажем, что $z(t) \equiv F(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t)) = 1$ для любого $t \in (-\infty,+\infty)$. Действительно, в силу (2.2) функция $z(t)$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \tilde{\Phi}(t)\,(1 - z(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \\ z(0) = 1, \end{cases} \tag{2.3}$$

где $\tilde{\Phi}(t) \equiv F_x^2(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t)) + F_y^2(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t))$ есть непрерывная на $\mathbb{R}$ функция. По теореме единственности решения задачи Коши (2.3) получим, что $z(t) \equiv 1$. Последнее означает, что траектория $(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t))$, где $t \in \mathbb{R}$, целиком лежит на Γ. При этом $(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t)) \not\equiv (\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)$, поскольку $(\tilde{x}_0,\tilde{y}_0)$ не является точкой покоя.

Покажем, что рассматриваемая траектория замкнута. Для этого достаточно установить существование числа $T > 0$ со свойством

$$\tilde{x}(T) = \tilde{x}(0) = \tilde{x}_0, \qquad \tilde{y}(T) = \tilde{y}(0) = \tilde{y}_0. \tag{2.4}$$

Траектория $(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t))$ является гладкой кривой на плоскости, поскольку (см. (iii))

$$\dot{\tilde{x}}^2(t) + \dot{\tilde{y}}^2(t) = a^2\left[\,F_x^2(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t)) + F_y^2(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t))\,\right] > 0, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

По условию (ii) линия уровня $\Gamma \equiv \Gamma_1$ — простая замкнутая спрямляемая (имеющая конечную длину $L > 0$) кривая. Пусть $T > 0$ выбрано из условия

$$\int\limits_0^T \sqrt{\dot{\tilde{x}}^2(t) + \dot{\tilde{y}}^2(t)}\,dt = L. \tag{2.5}$$

Тогда за промежуток от $t = 0$ до $t = T$ точка плоскости $(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t))$ сделает полный оборот по кривой Γ и вернётся в начальное положение так, что будут выполнены равенства (2.4). Докажем, что такое $T > 0$ существует и единственно. Так как $(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t)) \in \Gamma$, то из (2.1) при всех $t \in \mathbb{R}$ имеем равенства

$$\begin{cases} \dot{\tilde{x}}(t) = a\,F_y(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t)), \\ \dot{\tilde{y}}(t) = -a\,F_x(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t)). \end{cases}$$

Уравнение (2.5) для нахождения $T > 0$ приобретает вид

$$|a| \int_0^T \sqrt{F_x^2(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t)) + F_y^2(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t))}\, dt = L. \tag{2.6}$$

В силу условий на F и компактности Γ (см. (ii), (iii)) для подынтегральной функции в (2.6) справедлива двусторонняя оценка

$$0 < m \leqslant \sqrt{F_x^2(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t)) + F_y^2(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t))} \leqslant M < +\infty, \qquad t \in \mathbb{R},$$

с константами

$$m \equiv \min_{(x,y)\in\Gamma} \sqrt{F_x^2(x,y) + F_y^2(x,y)}, \qquad M \equiv \max_{(x,y)\in\Gamma} \sqrt{F_x^2(x,y) + F_y^2(x,y)}.$$

Как видим, левая часть (2.6) строго возрастает по переменной T, а уравнение (2.5) при заданном L имеет (и притом единственное) решение $T > 0$. Следовательно (см. [6, гл. 2, § 15], [11, гл. 4, § 17]), решение $(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t))$ удовлетворяет (2.4) и является периодическим. Отметим также, что число T заключено в границах

$$\frac{L}{|a|\,M} \leqslant T \leqslant \frac{L}{|a|\,m}$$

и по построению является наименьшим положительным периодом для решения $(\tilde{x}(t),\tilde{y}(t))$.

Докажем теперь, что в окрестности кривой Γ нет других замкнутых траекторий системы (2.1). Пусть $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ — произвольная точка, лежащая в малой окрестности Γ, но не на самой Γ. Для определённости считаем, что $F(x_0,y_0) < 1$ (случай $F(x_0,y_0) > 1$ разбирается аналогично). Рассмотрим решение $(x(t),y(t))$ системы (2.1), удовлетворяющее начальному условию $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Это решение продолжается на промежуток $t \in (-\infty,+\infty)$ (см. лемму ниже) и не содержит единственную точку покоя системы (2.1) — точку $(0,0)$. Предположим, что возникающая траектория замкнута (и, следовательно, выбранное решение — периодическое). Тогда существует такое число $\tau > 0$, что $x(\tau) = x_0$, $y(\tau) = y_0$. Кроме того, из (2.2) для $g(t) \equiv F(x(t),y(t))$ следуют равенства

$$\begin{cases} \dot{g}(t) = \Phi(t)\,(1 - g(t)), & t \in \mathbb{R}, \\ g(0) = F(x_0,y_0) \equiv \delta < 1 \end{cases}$$

с непрерывной и положительной на $\mathbb{R}$ функцией

$$\Phi(t) \equiv F_x^2(x(t),y(t)) + F_y^2(x(t),y(t)).$$

Отсюда

$$g(t) = 1 - (1-\delta)\exp\left\{ -\int_0^t \Phi(\eta)\, d\eta \right\}, \qquad t \in \mathbb{R}. \tag{2.7}$$

Функция (2.7) строго возрастает при всех $t \in \mathbb{R}$, что противоречит равенству $g(\tau) = g(0)$ при некотором $\tau > 0$. Само равенство порождено связью

$$g(\tau) = F(x(\tau),y(\tau)) = F(x_0,y_0) = g(0).$$

Таким образом, кривая $\Gamma = \{(x,y) \mid F(x,y) = 1\}$ на фазовой плоскости образует предельный цикл для автономной системы вида (2.1) при любом выборе параметра $a \neq 0$ (см. также [6, гл. 5, § 28, теорема 20]).

Нам осталось установить устойчивость фазовой траектории Γ. Последнее свойство означает (см. [6, гл. 5, § 28]), что все траектории из её достаточно малой окрестности «наматываются» на Γ при $t \to +\infty$. Пусть, как и выше, $(x_0,y_0) \neq (0,0)$ — произвольная точка, лежащая в малой окрестности Γ. Рассмотрим траекторию $(x(t),y(t))$ системы (2.1), проходящую через точку (x_0,y_0). Докажем, что для любой такой траектории существует предел

$$\lim_{t\to+\infty} \operatorname{dist}\bigl((x(t),y(t));\, \Gamma\bigr) = 0. \tag{2.8}$$

Для определённости считаем, что $F(x_0,y_0) < 1$ (случай $F(x_0,y_0) > 1$ рассматривается аналогично). Тогда из интегрального представления (2.7) следует, что для этой траектории функция

$g(t) \equiv F(x(t), y(t))$ при всех $t \in [0, +\infty)$ удовлетворяет неравенствам $0 < \delta \leqslant g(t) < 1$. Значит, траектория $(x(t), y(t))$ лежит в ограниченном замкнутом множестве $K_{\delta,1} \equiv \{(x, y) \mid \delta \leqslant F(x, y) \leqslant 1\}$, не содержащем точку $(0, 0)$. Благодаря этому и условию (iii), подынтегральная функция в (2.7) отделена от нуля:

$$\Phi(t) \geqslant \min\{F_x^2(x, y) + F_y^2(x, y) \mid (x, y) \in K_{\delta,1}\} \equiv \gamma > 0 \quad \text{для всех} \quad t \geqslant 0.$$

Поэтому $g(t)$ подчинена двойному неравенству

$$1 - (1 - \delta)\, e^{-\gamma t} \leqslant g(t) < 1$$

при любом $t \geqslant 0$. Отсюда заключаем, что функция $g(t)$, строго возрастая, стремится к единице при $t \to +\infty$. Поэтому

$$\forall\, \Delta > 0 \quad \exists\, t_\Delta > 0 \quad \forall t > t_\Delta \quad \Rightarrow \quad 1 - \Delta < g(t) < 1. \tag{2.9}$$

Из условия (iv) непрерывности линии уровня Γ_c по параметру $c > 0$ имеем

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \Delta \in (0, 1) \quad \forall\, c \in (1 - \Delta,\, 1) \quad \Rightarrow \quad H(\Gamma_c; \Gamma) < \varepsilon.$$

Но тогда по определению хаусдорфова расстояния получим, что

$$\forall\, \varepsilon > 0 \quad \exists\, \Delta \in (0, 1) \quad \forall\, c \in (1 - \Delta,\, 1) \quad \forall\, A \in \Gamma_c \quad \Rightarrow \quad \operatorname{dist}\bigl(A; \Gamma\bigr) < \varepsilon. \tag{2.10}$$

Комбинируя (2.9) и (2.10), выводим (2.8). Следовательно, кривая Γ есть устойчивый предельный цикл для системы (2.1). Теорема 2.1 полностью доказана. $\square$

При доказательстве теоремы мы существенно пользовались тем, что соответствующее решение системы (2.1) продолжается на максимальный промежуток $(t_*, +\infty)$. Покажем, что в наших условиях такое продолжение всегда существует для любого решения системы (2.1).

Лемма 2.1. *Пусть для функции $F(x, y)$ выполнены условия теоремы* 2.1, (x_0, y_0) — *произвольная точка плоскости, а* $(x(t), y(t))$ — *решение системы* (2.1), *удовлетворяющее начальным условиям $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$. Тогда это решение продолжается на максимальный промежуток* $(t_*, +\infty)$, *причём выполняются соотношения*:

1) *если точка $(x_0, y_0) \in K = \Omega \cup \Gamma$, то $t_* = -\infty$;*
2) *если точка $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus K$, то $t_* \geqslant -\infty$ и $x^2(t) + y^2(t) \to +\infty$ при $t \to t_* + 0$.*

Доказательство. Так как $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$, то автономная система (2.1) может быть записана в следующем виде

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y), \\ \dot{y} = g(x, y), \end{cases}$$

где функции f и g принадлежат $C^1(\mathbb{R}^2)$. Поэтому решение $(x(t), y(t))$ задачи Коши, о котором идёт речь в лемме, существует и единственно на отрезке $[-h, h]$ с некоторым $h > 0$. Далее рассмотрим каждый из пунктов отдельно.

Начнём со случая, когда $(x_0, y_0) \in \Gamma$. Как и при доказательстве теоремы 2.1, получим, что функция $z(t) = F(x(t), y(t)) \in C^1[-h, h]$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \tilde{\Phi}(t)\,(1 - z(t)), \quad t \in [-h, h], \\ z(0) = 1. \end{cases}$$

Отсюда $z(t) = 1$ и $(x(t), y(t)) \in \Gamma$ при всех $t \in [-h, h]$. Докажем, что это решение продолжается на промежуток $[-h, +\infty)$. Для этого рассмотрим непустое множество

$$E_1 \equiv \bigl\{\, \alpha > 0 \mid \text{ решение } (x(t), y(t)) \text{ продолжаемо на } [-h, \alpha\,] \,\bigr\}.$$

Предположим, что оно ограничено сверху. Тогда существует $\sup E_1 = b \in \mathbb{R}$. Из определения точной верхней грани ясно, что x, $y \in C^1[-h, b)$. Эти функции продолжаются по непрерывности на отрезок $[-h, b\,]$. В самом деле, для функции $x(t)$ и любых t', $t'' \in [-h, b)$ справедливо равенство

$$x(t'') - x(t') = \int\limits_{t'}^{t''} f(x(t), y(t))\, dt.$$

Поскольку $f \in C(\Gamma)$, а Γ — компакт, то f ограничена на Γ. Поэтому верна оценка

$$|x(t') - x(t'')| \leqslant M_f \, |t' - t''|, \quad t', t'' \in [-h, b),$$

которая влечёт равномерную непрерывность $x(t)$ на $[-h, b)$ и наличие предела $\lim\limits_{t \to b-0} x(t) \equiv x(b)$. Аналогичным образом для $y(t)$ выводим $\lim\limits_{t \to b-0} y(t) \equiv y(b)$. При этом $(x(b), y(b)) \in \Gamma$. Так определённые функции $x(t)$, $y(t)$ непрерывны на $[-h, b]$. Покажем, что у каждой из этих функций существует производная в точке b слева и в этой точке выполнены уравнения системы. Действительно, для $x(t)$ справедливо равенство

$$\dot{x} = f(x(t), y(t)), \qquad t \in [-h, b),$$

правая часть которого непрерывна на отрезке $[-h, b]$. Значит, существует предел

$$\lim_{t \to b-0} \dot{x}(t) \equiv \dot{x}_-(b),$$

что влечёт существование у функции $x(t)$ в точке $t = b$ левой производной, равной $\dot{x}_-(b)$. Точно так же убеждаемся в наличии предела

$$\lim_{t \to b-0} \dot{y}(t) \equiv \dot{y}_-(b),$$

совпадающего с левой производной функции $y(t)$ в точке $t = b$. Следовательно, уравнения системы выполнены на всем отрезке $[-h, b\,]$. Выбирая точку $(x(b), y(b)) \in \Gamma$ в качестве начальной, получаем противоречие с тем, что $b = \sup E_1$.

По той же схеме, рассматривая множество

$$E_2 \equiv \left\{ \alpha < 0 \mid (x(t), y(t)) \text{ продолжаемо на } [\alpha, h\,] \right\},$$

доказываем, что $(x(t), y(t))$ продолжается и на $(-\infty, h\,]$, а поэтому — на $(-\infty, +\infty)$.

Если $x_0 = 0$, $y_0 = 0$, то, в силу единственности решения задачи Коши, $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ при всех $t \in (-\infty, +\infty)$. Пусть теперь $(x_0, y_0) \in \Omega \setminus \{(0, 0)\}$. В этом случае $0 < z_0 \equiv F(x_0, y_0) < 1$. Как и выше, введём непустые множества E_1 и E_2. Предположив, что E_1 ограничено сверху, обозначим $b = \sup E_1$. Повторяя рассуждения, получим, что уравнения системы выполняются на отрезке $[-h, b\,]$, а точка $(x(b), y(b)) \in K$. Покажем, что это невозможно. Если $(x(b), y(b)) \in \Omega \setminus \{(0, 0)\}$, то решение продолжается правее точки $t = b$, что противоречит равенству $b = \sup E_1$. Если же точка $(x(b), y(b)) \in \Gamma$, то при выборе начальных условий $x_0 = x(b)$, $y_0 = y(b)$ приходим к противоречию с теоремой единственности решения задачи Коши, так как по разобранному случаю такое решение лежит на Γ для всех $t \in \mathbb{R}$. Наконец, если допустить $(x(b), y(b)) = (0, 0)$, то рассматриваемая траектория достигнет точки покоя за конечное время, что невозможно (см., например, [11, гл. 4]).

Пусть теперь E_2 ограничено снизу и $a = \inf E_2$. Проводя аналогичные рассуждения для отрезка $[a, h]$, получим, что уравнения системы выполняются на таком отрезке, а точка $(x(a), y(a)) \in K$. Покажем, что это невозможно. Если $(x(a), y(a)) \in \Omega \setminus \{(0, 0)\}$, то решение продолжается левее точки $t = a$, что противоречит равенству $a = \inf E_2$. Случаи $(x(a), y(a)) \in \Gamma$ и $(x(a), y(a)) = (0, 0)$ невозможны по тем же причинам, что и выше для E_1. Пункт 1 полностью разобран.

Перейдём к доказательству пункта 2. Пусть $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2 \setminus K$ и $z_0 = F(x_0, y_0) > 1$. Как и выше, рассмотрим множества E_1 и E_2. Докажем, что E_1 — неограниченное сверху множество. Пусть $\sup E_1 = b < +\infty$. Повторяя рассуждения, приведённые выше, получим, что решение $(x(t), y(t))$ определено на $[-h, b\,]$. На этом отрезке функция $z(t) = F(x(t), y(t))$ удовлетворяет задаче

$$\begin{cases} \dot{z}(t) = \Phi(t)\,(1 - z(t)), & t \in [-h, b], \\ z(0) = z_0 > 1. \end{cases}$$

Учитывая интегральное представление (2.7), видим, что $z(t)$ убывает и $z(t) > 1$ при $t \in [-h, b]$. Отсюда заключаем, что траектория $(x(t), y(t))$ заведомо лежит в ограниченном замкнутом множестве $K_{1,\,z_0} \equiv \{(x, y) \mid 1 \leqslant F(x, y) \leqslant z_0\}$, не содержащем точку $(0, 0)$. Но это невозможно. Действительно, как и при доказательстве пункта 1, решение продолжается вплоть до $t = b$. При этом точка $(x(b), y(b))$ не может лежать внутри $K_{1,\,z_0}$, поскольку, как и выше, получим противоречие с равенством $\sup E_1 = b$. Точка $(x(b), y(b))$ не может лежать и на Γ, так как это противоречит единственности решения задачи Коши. Равенство $F(x(b), y(b)) = z_0$ также невозможно в силу строгого убывания $z(t)$.

Оказывается (см. пример 3.1 ниже), множество E_2 в ситуации пункта 2 может быть ограниченным снизу. Через $t_* \geqslant -\infty$ обозначим $\inf E_2$ и докажем оставшееся в этом пункте свойство:

$$x^2(t) + y^2(t) \to +\infty, \qquad t \to t_* + 0.$$

Рассуждения для случаев $t_* = -\infty$ и $t_* > -\infty$ различаются и будут проведены отдельно. Впрочем, в каждом из этих случаев функция $z(t) = F(x(t), y(t))$ удовлетворяет равенствам

$$\begin{cases} \dot z(t) = \Phi(t)\,(1 - z(t)), \quad t \in (t_*, +\infty), \\ z(0) = z_0 > 1 \end{cases}$$

с непрерывной и положительной на промежутке $(t_*, +\infty)$ функцией

$$\Phi(t) \;\equiv\; F_x^2(x(t), y(t)) + F_y^2(x(t), y(t)).$$

Отсюда

$$z(t) = 1 - (1 - z_0)\exp\left\{-\int\limits_0^t \Phi(\eta)\,d\eta\right\}, \qquad t \in (t_*, +\infty),$$

а также

$$\dot z(t) = \Phi(t)\,(1 - z_0)\exp\left\{-\int\limits_0^t \Phi(\eta)\,d\eta\right\} < 0, \qquad t \in (t_*, +\infty).$$

Шаг 1. Докажем, что $\lim\limits_{t\to t_*+0} z(t) = +\infty$. Для этого, поскольку $\dot z(t) < 0$ при $t \in (t_*, +\infty)$, достаточно установить, что функция $z(t)$ неограничена сверху. Предположим противное: функция $z(t)$ ограничена сверху на множестве $(t_*, +\infty)$. Тогда существует конечный $\lim\limits_{t\to t_*+0} z(t) \equiv z_*$, и $1 < z_0 < z(t) < z_*$ при всех значениях $t \in (t_*, +\infty)$. Следовательно, траектория $(x(t), y(t))$ заведомо лежит в компакте $K_{z_0, z_*} \equiv \{(x, y) \mid z_0 \leqslant F(x, y) \leqslant z_*\}$ при всех $t \in (t_*, +\infty)$.

- Пусть $t_* = -\infty$. Для функции Φ имеем оценку

  $$\Phi(t) \geqslant \min\,\{F_x^2(x, y) + F_y^2(x, y) \mid (x, y) \in K_{z_0, z_*}\} \equiv \gamma_* > 0 \quad \text{для всех} \quad t \in (t_*, +\infty).$$

  Переходя к пределу при $t \to -\infty$ в интегральной формуле для $z(t)$, получим, что её левая часть стремится к конечному значению z_*, а правая часть, в силу расходимости интеграла, стремится к $+\infty$. Противоречие показывает, что равенство $t_* = -\infty$ невозможно.
- Пусть t_* конечно. Повторяя проведённые выше рассуждения, видим, что решение $(x(t), y(t))$ продолжается влево по непрерывности до точки t_*, и в этой точке выполняются уравнения системы. Далее, выбрав в качестве начальных значений $x(t_*)$, $y(t_*)$, замечаем, что решение продолжается влево от точки t_*, а это противоречит определению t_*. Тем самым и конечной величиной t_* быть не может.

Суммируя доказанное в последних двух пунктах, делаем вывод, что функция $z(t)$ не может быть ограниченной сверху на промежутке $(t_*, +\infty)$. В результате имеем требуемое предельное соотношение $\lim\limits_{t\to t_*+0} z(t) = +\infty$.

Шаг 2. Докажем теперь, что решение стремится к бесконечности при $t \to t_* + 0$. Потребуется одно простое наблюдение, которое для удобства ссылок дадим в виде встроенного утверждения.

Лемма 2.2. *Пусть функция $F(x, y)$ удовлетворяет условиям теоремы* 2.1. *Тогда*

$$\forall\,\delta > 0 \quad \exists z_\delta > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \bigl(F(x, y) > z_\delta \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 > \delta\bigr).$$

Доказательство. Неотрицательная (обращающаяся в нуль только при $x = y = 0$) непрерывная функция $F(x, y)$ ограничена в замкнутом круге $B_\delta \equiv \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leqslant \delta\}$ при любом $\delta > 0$. Формальная запись такого факта означает, что

$$\forall\,\delta > 0 \quad \exists z_\delta > 0 \quad \forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \quad \bigl(x^2 + y^2 \leqslant \delta \;\Rightarrow\; F(x, y) \leqslant z_\delta\bigr),$$

где можно взять
$$z_\delta = \max_{(x,y)\in B_\delta} F(x,y) > 0.$$
Именно это (в эквивалентной форме) и утверждается. Лемма 2.2 доказана. □

Продолжим обоснование.

- Пусть $t_* = -\infty$. Для произвольного $\delta > 0$ выберем $z_\delta > 0$ как в лемме 2.2. Для функции $z(t) = F(x(t), y(t))$ (см. шаг 1) имеем
$$\forall\, z_\delta > 0 \quad \exists\, t_\delta < 0 \quad \forall\, t < t_\delta \quad z(t) > z_\delta.$$
Тогда, ввиду леммы 2.2, для тех же значений $t < t_\delta$ будет выполнено требуемое неравенство
$$x(t)^2 + y(t)^2 > \delta.$$
- Пусть t_* конечно. Возьмём произвольное $\delta > 0$ и снова найдём по нему $z_\delta > 0$, исходя из леммы 2.2. Для функции $z(t)$ (см. шаг 1) имеем
$$\forall\, z_\delta > 0 \quad \exists\, t_\delta \in (t_*,\, 0) \quad \forall\, t \in (t_*,\, t_\delta) \quad z(t) > z_\delta.$$
Тогда, в силу выбора $z_\delta > 0$, для тех же значений $t \in (t_*,\, t_\delta)$ будет выполнено неравенство
$$x(t)^2 + y(t)^2 > \delta.$$

Шаг 2 сделан. Лемма 2.1 доказана. □

Замечание 2.2. В условиях теоремы единственная точка покоя $x = 0$, $y = 0$ является неустойчивой. В самом деле, производная F в силу системы (2.1) имеет вид
$$\frac{d}{dt} F(x,y)\bigg|_{(2.1)} = \big(F_x^2(x,y) + F_y^2(x,y)\big)\big(1 - F(x,y)\big) \equiv w(x,y)$$
и положительна при всех (x, y) из «проколотого» круга $0 < x^2 + y^2 < \delta^2$, если $\delta > 0$ достаточно мало. Применяя теорему Четаева о неустойчивости (см., например, [11, гл. 4, § 19]) в δ-окрестности точки $(0,0)$ с положительно определёнными функциями $F(x,y)$ и $w(x,y)$, получим, что положение равновесия $x = 0$, $y = 0$ системы (2.1) неустойчиво. В условиях доказанной теоремы характер этой точки покоя может быть различным, что частично иллюстрируется данными ниже примерами.

Теорема 2.1 и замечание 2.2 описывают характер поведения фазовых траекторий системы (2.1) в окрестности предельного цикла Γ и точки покоя $(0,0)$. Оказывается, что в условиях теоремы 2.1 для любого решения $(x(t), y(t))$ системы (2.1) реализуется только одна из четырёх возможностей, перечисленных ниже.

1. Решение является тривиальным, т. е. $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ для всех $t \in \mathbb{R}$, и отвечающая ему фазовая траектория — точка $(0,0)$.
2. Решение $(x(t), y(t))$ является периодическим, причём точки $(x(t), y(t)) \in \Gamma$ для всех $t \in \mathbb{R}$. Такому решению отвечает кривая Γ — фазовая траектория, образующая предельный цикл.
3. Решение таково, что точки $(x(t), y(t)) \in \Omega \setminus \{(0,0)\}$ для всех $t \in \mathbb{R}$, причём
   - $\operatorname{dist}\big((x(t), y(t));\, \Gamma\big) \to 0$ при $t \to +\infty$ (см. доказательство теоремы 2.1),
   - $x^2(t) + y^2(t) \to 0$ при $t \to -\infty$,

   а сама траектория при $t \to +\infty$ изнутри наматывается на предельный цикл Γ.
4. Решение таково, что точки $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ для всех $t \in (t_*, +\infty)$, причём
   - $\operatorname{dist}\big((x(t), y(t));\, \Gamma\big) \to 0$ при $t \to +\infty$ (см. доказательство теоремы 2.1),
   - $x^2(t) + y^2(t) \to +\infty$ при $t \to t_* + 0$,

   а сама траектория при $t \to +\infty$ извне наматывается на предельный цикл Γ.

Развёрнутых пояснений требуют только пункты 3 и 4. Пункт 1 очевиден. Тот факт, что решение в условиях пункта 2 продолжается на всю числовую ось, установлен в лемме 2.1. Утверждение пункта 2 о том, что кривая Γ есть предельный цикл, проверено при доказательстве теоремы 2.1. Сохраняя её обозначения, дадим подробное обоснование для ситуации из пункта 3. Возможность 4 разбирается аналогично, краткие пояснения даны ниже.

Рассмотрим произвольную траекторию $(x(t), y(t))$ системы (2.1), удовлетворяющую при некотором $t_0 \in \mathbb{R}$ условию $(x(t_0), y(t_0)) \in \Omega \setminus \{(0,0)\}$, т. е. $0 < F(x(t_0), y(t_0)) < 1$. В силу леммы 2.1

такое решение может быть продолжено на всю числовую ось. Считаем, что это сделано, сохранив за ним то же обозначение $(x(t), y(t))$. Докажем, что значения функции $z(t) \equiv F(x(t), y(t))$ попадают в интервал $(0,1)$ при всех $t \in \mathbb{R}$. Во-первых, ясно, что для каждого фиксированного $t^* \in \mathbb{R}$ будет $F(x(t^*), y(t^*)) \neq 0$, иначе по свойствам функции F имели бы $(x(t^*), y(t^*)) = (0,0)$ и $x(t) = 0$, $y(t) = 0$ при всех $t \in \mathbb{R}$ согласно пункту 1. Это противоречит предположению $0 < F(x(t_0), y(t_0)) < 1$. Положительность (в строгом смысле) функции $z(t)$ доказана. Теперь проверим, что она меньше единицы. Ввиду тождества (2.2) верны соотношения

$$\begin{cases} \dot z(t) = \Phi(t)\,(1 - z(t)), \quad t \in \mathbb{R}, \\ z(t_0) = z_0 \equiv F(x(t_0), y(t_0)) \in (0,1) \end{cases}$$

с непрерывной положительной на $\mathbb{R}$ функцией $\Phi(t) \equiv F_x^2(x(t), y(t)) + F_y^2(x(t), y(t))$. Решив такую задачу Коши в предположении, что Φ задана, запишем для $z(t)$ явную формулу

$$z(t) = 1 - (1 - z_0)\exp\left\{ -\int_{t_0}^{t} \Phi(\eta)\, d\eta \right\}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Отсюда

$$\dot z(t) = \Phi(t)\,(1 - z_0)\exp\left\{ -\int_{t_0}^{t} \Phi(\eta)\, d\eta \right\} > 0, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Функция $z(t)$ строго возрастает, поэтому траектория $(x(t), y(t))$ при всех $t \geqslant t_0$ лежит в компакте $K_{z_0,1} \equiv \{(x,y) \mid 0 < z_0 \leqslant F(x,y) \leqslant 1\}$, не содержащем точку $(0,0)$. Отсюда для функции $\Phi(t)$ справедлива оценка снизу $\Phi(t) \geqslant \gamma_0 > 0$ при всех $t \geqslant t_0$, и $z(t)$, возрастая, стремится к единице при $t \to +\infty$. Следовательно, $0 < z(t) < 1$ на $\mathbb{R}$. Итак, доказано, что при всех $t \in \mathbb{R}$ выполнено неравенство $0 < F(x(t), y(t)) < 1$, т. е. траектория $(x(t), y(t)) \in \Omega \setminus \{(0,0)\}$, $t \in \mathbb{R}$.

Покажем, что $z(t) \to 0$ при $t \to -\infty$. В силу монотонности и положительности $z(t)$ сразу можем утверждать, что $z(t) \to z^* \geqslant 0$, если $t \to -\infty$. Требуется обосновать равенство $z^* = 0$. Считая $t \leqslant t_0$, будем иметь $z^* < z(t) \leqslant z_0$. Предположим, что $z^* > 0$. Тогда при всех $t \leqslant t_0$ траектория $(x(t), y(t))$ заведомо лежит в компакте $K_{z^*, z_0} \equiv \{(x,y) \mid z^* \leqslant F(x,y) \leqslant z_0\}$, не содержащем начало координат. Отсюда для функции Φ получим оценку снизу

$$\Phi(t) \geqslant \min\left\{ F_x^2(x,y) + F_y^2(x,y) \mid (x,y) \in K_{z^*, z_0} \right\} \equiv \gamma > 0 \quad \text{при всех} \quad t \leqslant t_0.$$

Следовательно, для таких t справедливо неравенство

$$z(t) \leqslant 1 - (1 - z_0)\exp\left\{ \gamma\,(t_0 - t) \right\},$$

правая часть которого при $t \to -\infty$ стремится к $-\infty$, а левая — к $z^* \geqslant 0$. Полученное противоречие заставляет признать, что $z^* = 0$.

Наконец, проверим утверждение

$$\forall \delta > 0 \quad \exists\, t_\delta \in \mathbb{R} \quad \forall t < t_\delta \quad x^2(t) + y^2(t) < \delta,$$

которое и означает, что $x^2(t) + y^2(t) \to 0$ при $t \to -\infty$.

Напомним, что функцию $F(x,y)$, определённую в замкнутом круге

$$B_r \equiv \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \leqslant r^2\},$$

называют *положительно определённой* в этом круге, если выполнено условие

$$0 = F(0,0) < F(x,y) \quad \text{при всех} \quad (x,\, y) \in B_r \setminus \{(0,0)\}.$$

Воспользуемся одним известным свойством таких функций, которое для полноты изложения снабдим доказательством.

Лемма 2.3. *Пусть $F(x,y)$ — непрерывная положительно определённая в круге B_r функция. Тогда выполнено условие*

$$\forall \delta \in (0, r^2) \quad \exists\, z_\delta > 0 \quad \forall (x,y) \in B_r \quad \big(F(x,y) < z_\delta \;\Rightarrow\; x^2 + y^2 < \delta \big).$$

Доказательство. Предположим противное, т. е.

$$\exists\,\delta_0 \in (0, r^2) \quad \forall z > 0 \quad \exists (x,y) \in B_r \quad \big(F(x,y) < z \ \wedge\ x^2 + y^2 \geqslant \delta_0 \big).$$

Выбирая $z_n = 1/n$, $n \in \mathbb{N}$, найдём последовательность точек $(x_n, y_n) \in B_r$, для которой

$$x_n^2 + y_n^2 \geqslant \delta_0 \quad \wedge \quad F(x_n, y_n) < \frac{1}{n}.$$

Последовательность (x_n, y_n) лежит в компакте B_r, и поэтому из неё можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к некоторой точке $(x_0, y_0) \in B_r$. Переходя к пределу в предыдущих соотношениях по этой подпоследовательности (с учётом непрерывности F в B_r), получим

$$x_0^2 + y_0^2 \geqslant \delta_0 \quad \wedge \quad F(x_0, y_0) = 0,$$

что противоречит положительной определённости F в B_r. Лемма 2.3 доказана. □

Вернёмся к обоснованию предельного соотношения

$$\lim_{t \to -\infty} \big(x^2(t) + y^2(t)\big) = 0$$

для любой траектории $(x(t), y(t))$ системы (2.1) при условии $0 < F(x(t_0), y(t_0)) < 1$ с некоторым фиксированным $t_0 \in \mathbb{R}$. Пусть число $\delta > 0$ взято настолько малым, что круг B_δ содержится в области Ω, но не содержит точку $(x(t_0), y(t_0))$. Выберем $z_\delta > 0$, исходя из леммы 2.3. В таком случае $F(x(t_0), y(t_0)) \geqslant z_\delta$, откуда $0 < z_\delta < 1$. Затем найдём такое $t_\delta \in \mathbb{R}$, что $z(t_\delta) = z_\delta$. Это возможно благодаря свойствам функции $z(t)$. Но тогда будем иметь $z(t) = F(x(t), y(t)) < z_\delta$ при всех $t < t_\delta$. Применив лемму 2.3, получим для таких t нужный результат: $x^2(t) + y^2(t) < \delta$. Отметим, что малость выбираемых значений $\delta > 0$ очевидно не ограничивает общности рассуждений. Полное разъяснение ситуации из пункта 3 завершено.

Сделаем несколько ремарок по поводу пункта 4. Из интегральной формулы для $z(t)$ (но теперь с выбором $z_0 > 1$) получаем, что $\dot z(t) < 0$ при всех $t \in (t_*, +\infty)$ и $z(t) \to 1$ при $t \to +\infty$, т. е. траектория $(x(t), y(t)) \in \mathbb{R}^2 \setminus \overline{\Omega}$ при всех $t \in (t_*, +\infty)$. Доказательство равенства

$$\lim_{t \to t_* + 0} \big(x^2(t) + y^2(t)\big) = +\infty$$

дано подробно в лемме 2.1. Описание поведения решений системы (2.1) завершено.

3. Примеры

Рассмотрим несколько примеров, иллюстрирующих теорему 2.1 и картину поведения фазовых траекторий системы (2.1).

Пример 3.1. Пусть $F(x,y) = x^2 + y^2$ для всех $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Легко проверить, что для такой функции все условия (i)–(iv) выполнены. По доказанной теореме окружность $x^2 + y^2 = 1$ образует устойчивый предельный цикл автономной системы

$$\begin{cases} \dot x = 2ay - 2x\,(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot y = -2ax - 2y\,(x^2 + y^2 - 1) \end{cases} \tag{3.1}$$

при любом заданном $a \neq 0$. Ясно также, что пара функций

$$x = \sin(2at + \tau), \quad y = \cos(2at + \tau)$$

с произвольно зафиксированным τ будет периодическим решением системы (3.1). Здесь число $T = \pi/|a|$ есть наименьший положительный период выписанного в явном виде решения, а длина L предельного цикла, т. е. единичной окружности $\Gamma:\ x^2 + y^2 = 1$, равна 2π. Кроме того, величина

$$m \equiv \min_{(x,y) \in \Gamma} \sqrt{F_x^2(x,y) + F_y^2(x,y)} = \min_{x^2+y^2=1} \sqrt{4x^2 + 4y^2} = 2$$

и совпадает с величиной

$$M \equiv \max_{(x,y) \in \Gamma} \sqrt{F_x^2(x,y) + F_y^2(x,y)}.$$

Тем самым в оценке

$$|a|\,m\,T \leqslant L \leqslant |a|\,M\,T$$

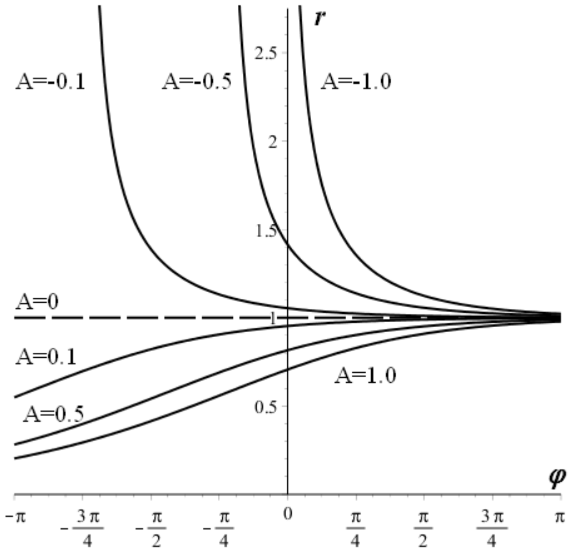


Рис. 1. Зависимость полярного радиуса r траекторий системы (3.1) от угла φ для различных значений параметра A при $a = 2$.

Fig. 1. Dependence of the polar radius r of system trajectories (3.1) on the angle φ for various values of the parameter A at $a = 2$.

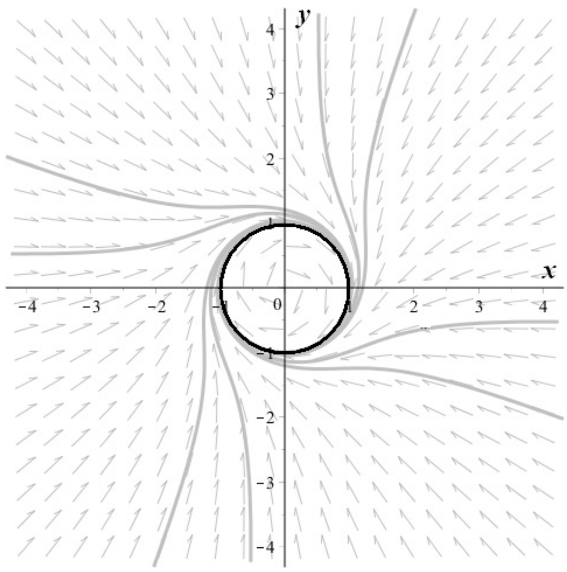


Рис. 2. Поле направлений системы (3.1) с внешними траекториями, отвечающими значениям $A < 0$, и предельным циклом, соответствующим значению $A = 0$.

Fig. 2. Directional field of the system with external trajectories corresponding to the values $A < 0$, and a limit cycle corresponding to the value $A = 0$.

(см. доказательство теоремы 2.1) оба неравенства превращаются в равенства.

Более того, оказалось, что для системы (3.1) можно найти не только все фазовые траектории, но и соответствующие решения. Для полноты мы приведём полученные выражения, считая $a > 0$. Тогда фазовые траектории системы (3.1) в координатах $x = r\cos\varphi$, $y = -r\sin\varphi$ (помимо точки покоя $r = 0$) задаются равенством

$$r(\varphi) = \frac{1}{\sqrt{1 + A\exp(-2\,\varphi/a)}}, \qquad \varphi \in (\varphi_*, +\infty).$$

При $A = 0$ получаем единичную окружность; при $A > 0$ траектории лежат строго внутри единичного круга для всех $\varphi \in \mathbb{R}$ (в этих случаях $\varphi_* = -\infty$). При $A < 0$ фазовые траектории лежат вне замкнутого единичного круга, неограничены и имеют наклонную асимптоту

$$\varphi = \varphi_* \equiv \frac{a}{2}\ln\bigl(-A\bigr).$$

На рис. 1 приведены графики зависимости полярного радиуса r от угла φ при различных значениях параметра A в случае $a = 2$. Асимптотическое поведение внешних траекторий (отвечающих значениям $A < 0$) представлено на рис. 2.

При всех $a \neq 0$ решения системы (3.1) выписываются явно по формулам

$$x(t) = \frac{\cos\bigl(2a(t - t_0)\bigr)}{\sqrt{1 + A\exp\bigl(-4(t - t_0)\bigr)}}, \qquad y(t) = -\frac{\sin\bigl(2a(t - t_0)\bigr)}{\sqrt{1 + A\exp\bigl(-4(t - t_0)\bigr)}}, \qquad t \in (t_*, +\infty).$$

Здесь $t_* = t_0 + (1/4)\ln(-A)$, если $A < 0$, и $t_* = -\infty$, если $A \geqslant 0$. Из формул видно, что в соответствии с теоремой 2.1 и описанием поведения решений, траектории наматываются при $t \to +\infty$ на единичную окружность: изнутри — для $A > 0$ и извне — для $A < 0$. Для значений $A > 0$ и $t \to -\infty$ решения стремятся к точке покоя $(0, 0)$, а для $A < 0$ при $t \to t_* + 0$ — к бесконечности, причём в последнем случае имеется наклонная асимптота.

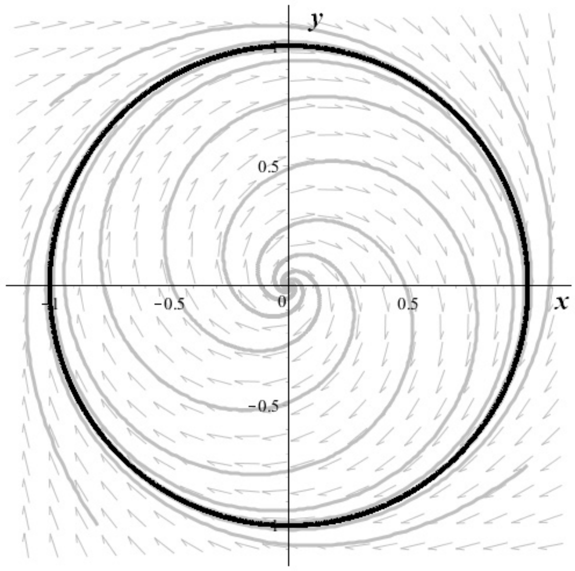


Рис. 3. Фазовый портрет системы (3.1) с наложенным полем направлений для случая $a = 2$. Жирной линией выделен предельный цикл.

Fig. 3. Phase portrait of the system (3.1) with overlayed field of directions for the case $a = 2$. The limit cycle is highlighted with a bold line.

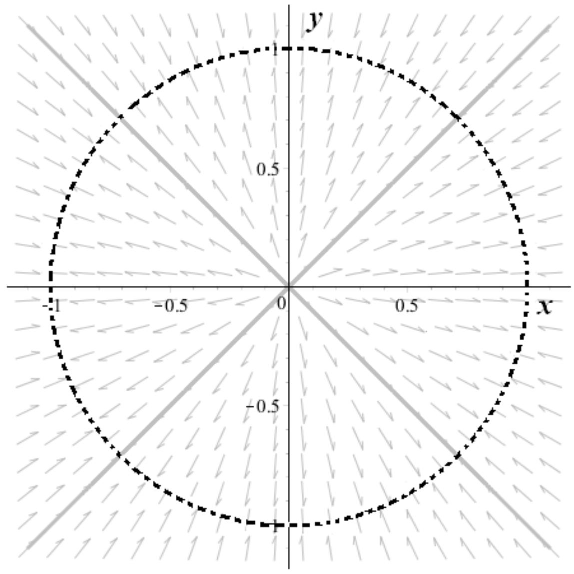


Рис. 4. Фазовый портрет системы (3.2) с наложенным полем направлений и единичной окружностью — линией точек покоя.

Fig. 4. Phase portrait of the system (3.2) with overlayed field of directions and the unit circle, which is the line of rest points.

Линейная система первого приближения (с единственной точкой покоя $(0,0)$) в данном случае выглядит так:

$$\begin{cases} \dot{x} = 2x + 2ay, \\ \dot{y} = -2ax + 2y. \end{cases}$$

Матрица этой системы имеет два различных (комплексно сопряжённых) собственных значения

$$\lambda_{1,2} = 2 \pm 2|a|\, i$$

с положительной ($= 2$) вещественной частью и отличной от нуля ($= \pm 2|a|$) мнимой частью. Следовательно, точка покоя $(0,0)$ линеаризованной системы является неустойчивым фокусом. Из курса обыкновенных дифференциальных уравнений (см., например, [6, гл. 5, § 30, теорема 24]) известно, что все траектории исходной нелинейной системы вблизи начала координат при $t \to -\infty$ наматываются на точку покоя $(0,0)$ как спирали. Фазовый портрет системы (3.1) при выборе $a = 2$, построенный с использованием численного моделирования, представлен на рис. 3.

Замечание 3.1. Для $a = 0$ доказанная теорема ничего не утверждает. В этой связи интересно исследовать поведение решений (3.1) при $a = 0$, т. е. следующей системы:

$$\begin{cases} \dot{x} = -2x\,(x^2 + y^2 - 1), \\ \dot{y} = -2y\,(x^2 + y^2 - 1). \end{cases} \tag{3.2}$$

Точками покоя системы (3.2) являются точка $(0,0)$ и все точки окружности $x^2 + y^2 = 1$. Таким образом, замкнутая кривая (окружность) целиком составлена из одноточечных траекторий системы (3.2), но сама эта окружность траекторией не является. С другой стороны, на любой траектории $(x(t), y(t))$, отличной от точки покоя, выполняется равенство

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}}{\dot{x}} = \frac{y}{x}.$$

Поэтому каждая траектория $(x(t), y(t))$ системы (3.2) лежит на соответствующей прямой, проходящей через начало координат. Умножив первое уравнение на x, второе уравнение на y и сложив результаты, получим для всякого решения системы (3.2) тождество

$$\frac{d}{dt}\left(x^2(t)+y^2(t)\right) = -4\left(x^2(t)+y^2(t)\right)\left(x^2(t)+y^2(t)-1\right), \qquad t\in(-\infty,+\infty).$$

Анализ записанных соотношений позволяет сделать следующие выводы. Находясь внутри единичного круга, точка $(x(t),y(t))$ удаляется от начала координат и с возрастанием t стремится по соответствующей прямой к точке единичной окружности. Аналогичный характер стремления траектории $(x(t),y(t))$ при $t\to+\infty$ к точкам граничной окружности наблюдается извне единичного круга. В этом примере точка покоя $(0,0)$ является неустойчивой, а все точки на единичной окружности устойчивы по Ляпунову. На рис. 4 представлен фазовый портрет системы (3.2).

Пример 3.2. Пусть, чуть более общо, $F(x,y)=x^2+by^2$ для всех $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ с параметром $b>0$, $b\neq 1$. Как и в примере 3.1, легко проверить, что для такой функции все условия (i)–(iv) выполнены. По доказанной теореме эллипс $x^2+by^2=1$ образует устойчивый предельный цикл автономной системы

$$\begin{cases}\dot{x} = 2aby - 2x\,(x^2+by^2-1),\\ \dot{y} = -2ax - 2by\,(x^2+by^2-1)\end{cases} \tag{3.3}$$

при любом заданном $a\neq 0$. Ясно также, что пара функций

$$x=\sin\left(2a\sqrt{b}\,t+\tau\right), \quad y=\frac{1}{\sqrt{b}}\cos\left(2a\sqrt{b}\,t+\tau\right)$$

с произвольно зафиксированным $\tau\in\mathbb{R}$ будет периодическим решением системы (3.3). Здесь число $T=\pi/(|a|\sqrt{b})$ есть наименьший положительный период выписанного в явном виде решения. Длина L предельного цикла, т. е. эллипса $\Gamma:\ x^2+by^2=1$, не может быть вычислена явно (по элементарной формуле) через параметр $b>0$, $b\neq 1$, а выражается специальным (эллиптическим) интегралом

$$L=\int\limits_0^{2\pi}\sqrt{\sin^2\theta+(1/b)\cos^2\theta}\,d\theta=\frac{4}{\sqrt{b}}\int\limits_0^{\pi/2}\sqrt{1+(b-1)\sin^2\theta}\,d\theta.$$

Вопрос о точном или приближённом нахождении длины дуги эллипса имеет богатую историю и способствовал развитию важных разделов математики. Не имея сейчас возможности говорить об этом подробно, приведём только двустороннюю оценку на L, извлекаемую из доказательства теоремы 2.1 (ср. с примером 3.1). Для этого, считая $b>1$, вычислим значения

$$m\equiv\min_{(x,y)\in\Gamma}\sqrt{F_x^2(x,y)+F_y^2(x,y)}=\min_{x^2+by^2=1}\sqrt{4x^2+4b^2y^2}=2\min_{x^2+by^2=1}\sqrt{1+(b^2-b)y^2}=2,$$

$$M\equiv\max_{(x,y)\in\Gamma}\sqrt{F_x^2(x,y)+F_y^2(x,y)}=\max_{x^2+by^2=1}\sqrt{4x^2+4b^2y^2}=2\max_{x^2+by^2=1}\sqrt{1+(b^2-b)y^2}=2\sqrt{b}.$$

Следовательно, в разбираемом случае общая оценка $|a|\,m\,T\leqslant L\leqslant|a|\,M\,T$ примет вид

$$\frac{2\pi}{\sqrt{b}}\leqslant L\leqslant 2\pi, \qquad b>1.$$

Аналогичные соображения дают оценку

$$2\pi\leqslant L\leqslant\frac{2\pi}{\sqrt{b}}, \qquad 0<b<1.$$

Объединённый результат допускает при всех $b>0$, $b\neq 1$ компактную запись

$$2\pi\cdot\min\left\{1,\ \frac{1}{\sqrt{b}}\right\}\leqslant L\leqslant 2\pi\cdot\max\left\{1,\ \frac{1}{\sqrt{b}}\right\}$$

и имеет понятный геометрический смысл: длина эллипса не меньше длины вписанной в него окружности и не больше длины описанной около него окружности. После предельного перехода $b\to 1$ возникает «идеальная» ситуация из примера 3.1. Линейная система первого приближения (с единственной точкой покоя $(0,0)$) в данном случае выглядит так:

$$\begin{cases}\dot{x} = 2x+2aby,\\ \dot{y} = -2ax+2by.\end{cases}$$

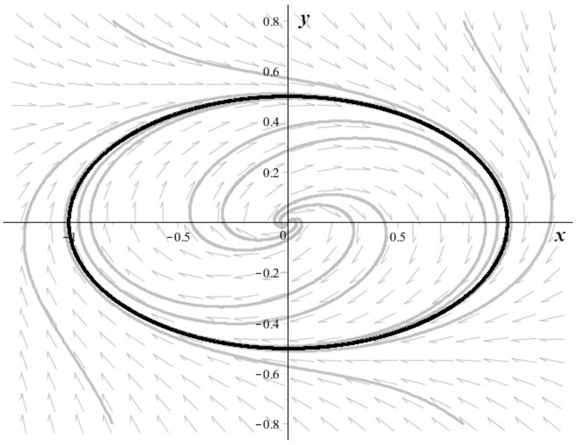


Рис. 5. Фазовый портрет системы (3.3) с наложенным полем направлений при выборе параметров $a = 2$, $b = 4$. Точка покоя является неустойчивым фокусом. Жирной линией выделен предельный цикл $x^2 + 4y^2 = 1$.

Fig. 5. Phase portrait of the system (3.3) with overlayed field of directions when choosing parameters $a = 2$, $b = 4$. The rest point is an unstable focus. The limit cycle $x^2 + 4y^2 = 1$ is highlighted with a bold line.

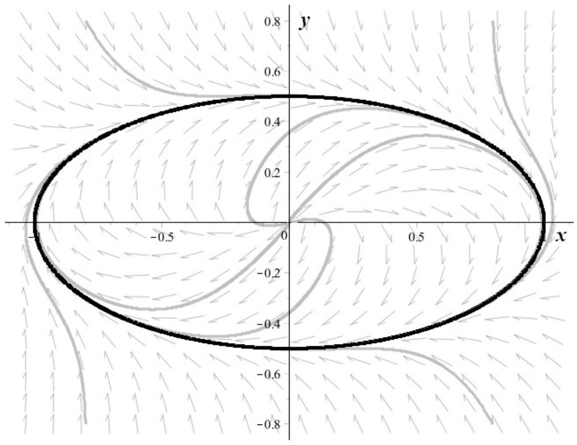


Рис. 6. Фазовый портрет системы (3.3) с наложенным полем направлений при выборе параметров $a = 3/5$, $b = 4$. Точка покоя является неустойчивым узлом. Жирной линией выделен предельный цикл $x^2 + 4y^2 = 1$.

Fig. 6. Phase portrait of the system with overlayed field of directions when choosing parameters $a = 3/5$, $b = 4$. The rest point is an unstable node. The limit cycle $x^2 + 4y^2 = 1$ is highlighted with a bold line.

Для собственных значений матрицы этой системы в зависимости от сочетания параметров a и b, точнее — от знака числа $D \equiv (b-1)^2 - 4ba^2$, возможны следующие ситуации.

- Если $D < 0$, то $\lambda_{1,2} = b+1 \pm \sqrt{-D}\, i$, и точка покоя $(0,0)$ линеаризованной системы является неустойчивым фокусом.
- Если $D > 0$, то $\lambda_{1,2} = b+1 \pm \sqrt{D}$, и точка покоя $(0,0)$ линеаризованной системы является неустойчивым узлом.
- Если $D = 0$, то $\lambda_{1,2} = b+1$, и точка покоя $(0,0)$ линеаризованной системы является вырожденным узлом.

Из курса дифференциальных уравнений (см., например, [6, гл 5, § 30, теоремы 23, 24]) известно, что в первых двух (невырожденных) случаях все траектории исходной нелинейной системы (3.3) вблизи начала координат при $t \to -\infty$ качественно ведут себя как траектории соответствующей линейной системы первого приближения для фокуса и узла. Фазовые портреты соответствующих систем (3.3) с подходящим выбором параметров a и b представлены ниже на рис. 5 ($D < 0$) и рис. 6 ($D > 0$). В вырожденном случае, когда $D = 0$, ситуация более сложная, и соответствующая общая теорема авторам неизвестна. Результат компьютерного анализа поведения фазовых траекторий (3.3) при разных наборах параметров, реализующих вырожденный случай, дан ниже на рис. 7, 8.

Примеры 3.1, 3.2 были довольно просты. Разберём подробно более сложный пример.

Пример 3.3. Пусть функция задаётся формулой

$$F(x,y) = (1 + bx^2y^2)\,(x^2 + y^2)$$

для всех $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ с фиксированным параметром $b > 0$. Проверим, что такая функция удовлетворяет всем требованиям (i)–(iv). Действительно, $0 = F(0,0) < F(x,y)$ при $x^2 + y^2 > 0$. Ясно, что F, будучи многочленом, имеет в $\mathbb{R}^2$ частные производные любого порядка. Далее,

$$\begin{cases} F_x(x,y) = 2x\,\big(\,by^2(2x^2 + y^2) + 1\,\big), \\ F_y(x,y) = 2y\,\big(\,bx^2(2y^2 + x^2) + 1\,\big), \end{cases}$$

так что $F_x(0,0) = F_y(0,0) = 0$ и $F_x^2(x,y) + F_y^2(x,y) > 0$ для всех $(x,y) \neq (0,0)$.

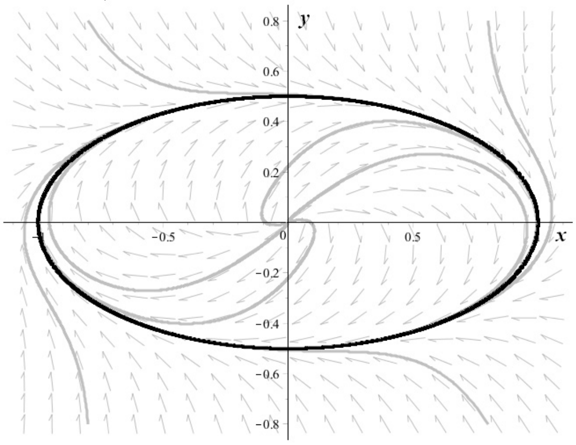


Рис. 7. Фазовый портрет системы (3.3) с наложенным полем направлений при выборе параметров $a = 3/4$, $b = 4$. Жирной линией выделен предельный цикл $x^2 + 4y^2 = 1$.

Fig. 7. Phase portrait of the system (3.3) with overlayed direction field when choosing the parameters $a = 3/4$, $b = 4$. The limit cycle $x^2 + 4y^2 = 1$ is highlighted with a bold line.

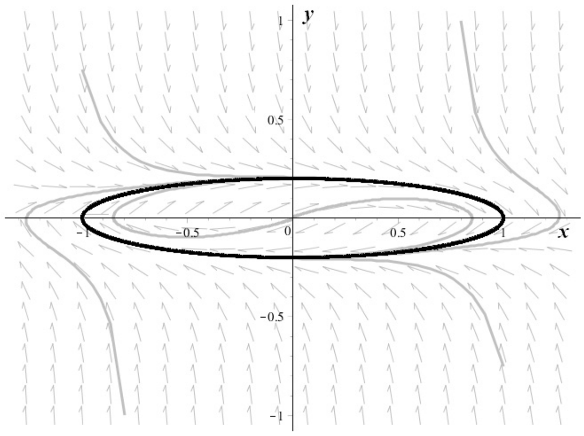


Рис. 8. Фазовый портрет системы (3.3) с наложенным полем направлений при выборе параметров $a = 12/5$, $b = 25$. Жирной линией выделен предельный цикл $x^2 + 25y^2 = 1$.

Fig. 8. Phase portrait of the system (3.3) with overlayed direction field when choosing parameters $a = 12/5$, $b = 25$. The limit cycle $x^2 + 25y^2 = 1$ is highlighted with a bold line.

При анализе поведения линий уровня функции F удобно воспользоваться полярными координатами $x = r\cos\varphi$, $y = r\sin\varphi$, где $r \geqslant 0$, $\varphi \in \mathbb{R}$. Наряду с коэффициентом $b > 0$ зафиксируем второй параметр $c > 0$. Для линии уровня $\Gamma_c = \Gamma_c(b)$ переход в уравнении $F(x, y) = c$ к полярным координатам даёт

$$\big(1 + (b/4)\, r^4 \sin^2 2\varphi\big)\, r^2 = c. \tag{3.4}$$

Другими словами, полярное уравнение кривой Γ_c записывается в виде

$$\Gamma_c: \quad r = r_c(\varphi) = r_c(\varphi;\, b), \tag{3.5}$$

где $r_c(\varphi)$ — положительная функция переменной φ, заданная неявно уравнением (3.4). Перечислим основные свойства этой функции и кривой Γ_c.

- Так как левая часть в (3.4) строго возрастает по $r \geqslant 0$, то при любом фиксированном $\varphi \in \mathbb{R}$ существует единственный положительный корень $r_c(\varphi)$ уравнения (3.4). Этот корень $r_c(\varphi)$ строго возрастает по параметру $c > 0$.
- Справедливы очевидные равенства

  $$r_c(-\varphi) = r_c(\varphi), \quad r_c(\varphi \pm \pi/2) = r_c(\varphi), \quad r_c(\pm\pi/4 + \varphi) = r_c(\pm\pi/4 - \varphi), \quad r_c(0) = r_c(2\pi),$$

  которые показывают, что функция $r_c(\varphi)$ переменной φ является $(\pi/2)$-периодической, а Γ_c есть простая замкнутая кривая, имеющая четыре оси симметрии — прямые с уравнениями $y = 0$, $x = 0$, $y = \pm x$ в исходной декартовой системе координат.
- Функция $r_c(\varphi)$ принадлежит классу $C^1(\mathbb{R})$, а кривая Γ_c — гладкая и имеет конечную длину.
- При любом $\varphi \in \mathbb{R}$ верны оценки

  $$\sqrt{\alpha} \equiv r_c(\pi/4) \leqslant r_c(\varphi) \leqslant r_c(0) = \sqrt{c}, \tag{3.6}$$

  где $\alpha \in (0, c)$ — корень уравнения $(b/4)\,\rho^3 + \rho = c$, зависящий от положительных параметров b, c. Значит, кривая Γ_c лежит в кольце $\alpha \leqslant x^2 + y^2 \leqslant c$ на плоскости (x, y). Квадрат внутреннего радиуса такого кольца $\alpha = \alpha(b, c)$ (значит — и сам радиус) стремится к нулю, если $c > 0$ фиксировано, а $b \to +\infty$, или если $b > 0$ фиксировано, а $c \to 0$.

Таким образом, рассматриваемая функция $F(x, y)$ удовлетворяет условиям (i)–(iii). Осталось проверить, что выполнено и условие (iv) — непрерывная зависимость линии уровня Γ_c от параметра c. Для этого (при фиксированном $b > 0$) рассмотрим два решения уравнения (3.4) с правыми частями, равными c и d соответственно, где для определённости $d > c > 0$. Соответствующие функции переменного угла φ обозначим коротко $r_c = r_c(\varphi)$ и $r_d = r_d(\varphi)$. Тогда при всех значениях $\varphi \in \mathbb{R}$ имеем $r_d = r_d(\varphi) > r_c(\varphi) = r_c$. Согласно (3.4) запишем

$$r_d^2 - r_c^2 = \frac{d-c}{1 + (b/4)\,\sin^2 2\varphi\left(r_c^4 + r_c^2 r_d^2 + r_d^4\right)} \leqslant d - c.$$

Отсюда для разности $r_d - r_c \equiv r_d(\varphi) - r_c(\varphi)$ при всех $\varphi \in \mathbb{R}$ выводим оценку

$$0 < r_d - r_c \leqslant \frac{d-c}{r_d + r_c} < \frac{d-c}{2r_c} \leqslant \frac{d-c}{2\sqrt{\alpha}} \tag{3.7}$$

с тем же $\alpha = \alpha(b,c) > 0$, что и в (3.6).

По-прежнему считаем положительные числа b, c фиксированными. Если теперь взять произвольное малое $\varepsilon > 0$ и положить $\delta = \delta(\varepsilon) = 2\sqrt{\alpha}\,\varepsilon > 0$, то при всех таких d, что $0 < d - c < \delta$, будут справедливы вложения $\Gamma_c \subset U_\varepsilon(\Gamma_d)$ и $\Gamma_d \subset U_\varepsilon(\Gamma_c)$ (см. (3.5) и (3.7)). Здесь окрестность непустого множества $X \subset \mathbb{R}^2$ понимаем как

$$U_\varepsilon(X) = \{A \mid \operatorname{dist}(A; X) \leqslant \varepsilon\},$$

а расстояние от точки $A = A(x,y)$ до множества X даётся формулой

$$\operatorname{dist}(A; X) = \inf\left\{\, \rho(A, A') \mid A' \in X \right\},$$

в которой $\rho(A, A')$ — стандартное евклидово расстояние между точками A и A' на плоскости.

По определению хаусдорфова расстояния между множествами окончательно имеем: при заданных $b > 0$ и $c > 0$ для любого $\varepsilon > 0$ найдётся $\delta > 0$ такое, что для всех $d > 0$, удовлетворяющих неравенству $0 < d - c < \delta$, справедлива оценка

$$H(\Gamma_d;\, \Gamma_c) \equiv H(\Gamma_d(b);\, \Gamma_c(b)) < \varepsilon.$$

Итак, требование (iv) также выполнено.

Согласно доказанной теореме кривая, заданная уравнением

$$\Gamma = \Gamma(b): \quad (1 + bx^2y^2)\,(x^2 + y^2) = 1, \tag{3.8}$$

является устойчивым предельным циклом системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2ay\left(bx^2(2y^2 + x^2) + 1\right) - 2x\left(by^2(2x^2 + y^2) + 1\right)\left[(1 + bx^2y^2)\,(x^2 + y^2) - 1\right], \\ \dot{y} = -2ax\left(by^2(2x^2 + y^2) + 1\right) - 2y\left(bx^2(2y^2 + x^2) + 1\right)\left[(1 + bx^2y^2)\,(x^2 + y^2) - 1\right]. \end{cases} \tag{3.9}$$

Выписать явно соответствующее периодическое решение не представляется возможным. Однако, вычислив при заданном $b > 0$ приближённо длину кривой (3.8) и оценив экстремальные величины m и M, мы можем, как в примерах 3.1, 3.2, определить границы, в которых заключён наименьший положительный период такого решения.

Кривая (3.8) при $b = 2$ фигурирует на рис. 9, а при $b = 30$ — на рис. 10. Кстати, было бы интересно выяснить, при каких b кривая является выпуклой, а при каких — нет.

Линейная система первого приближения в данном случае точно такая же, как в примере 3.1. Поэтому точка покоя $(0, 0)$ линейной системы является неустойчивым фокусом. Как и выше, заключаем, что все траектории нелинейной системы (3.9) вблизи начала координат при $t \to -\infty$ наматываются на точку покоя $(0, 0)$, как спирали. Результат моделирования фазового портрета системы (3.9) при выборе параметров $a = b = 2$ представлен на рис. 9, а при выборе параметров $a = 2$, $b = 30$ — на рис. 10.

В примерах 3.1–3.3 функция $F(x,y)$ была многочленом, чётным по обеим переменным. Чаще всего именно такие примеры возникают при обсуждении понятия положительно определённой функции. Сейчас предъявим подпадающий под действие нашей теоремы 2.1 пример положительно определённой функции, не являющейся многочленом и такой, что

$$F(-x, y) \neq F(x, y), \quad \text{если} \quad x \neq 0$$

(другими словами, функция $F(x,y)$ не является чётной по первой переменной).

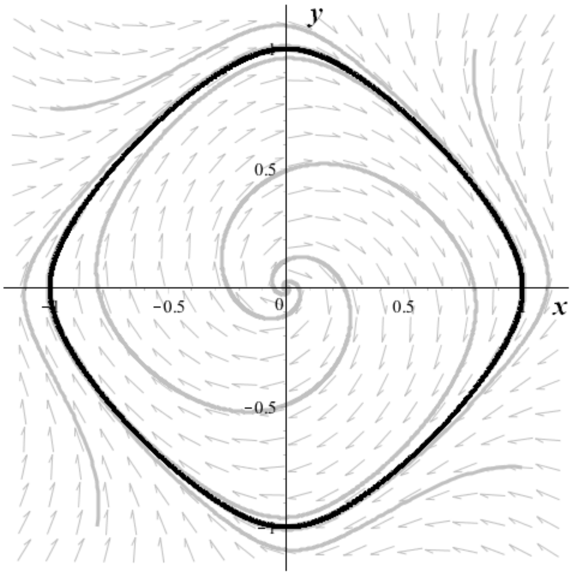


Рис. 9. Фазовый портрет системы (3.9) с наложенным полем направлений при выборе параметров $a = 2$, $b = 2$. Жирной линией выделен предельный цикл $(1 + 2x^2y^2)\,(x^2 + y^2) = 1$.

Fig. 9. Phase portrait of the system (3.9) with overlayed direction field and parameters $a = 2$, $b = 2$. The limit cycle $(1 + 2x^2y^2)\,(x^2 + y^2) = 1$ is highlighted with a bold line.

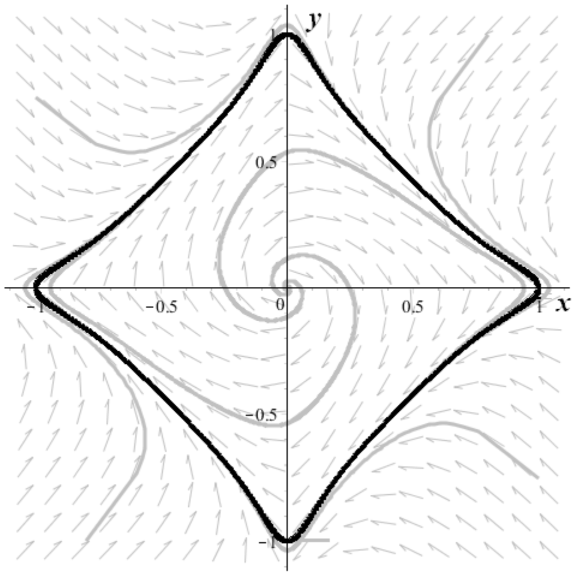


Рис. 10. Фазовый портрет системы (3.9) с наложенным полем направлений при выборе параметров $a = 2$, $b = 30$. Жирной линией выделен предельный цикл $(1 + 30x^2y^2)\,(x^2 + y^2) = 1$.

Fig. 10. Phase portrait of the system (3.9) with overlayed field of directions and parameters $a = 2$, $b = 30$. The limit cycle $(1 + 30x^2y^2)\,(x^2 + y^2) = 1$ is highlighted with a bold line.

Пример 3.4. Пусть

$$F(x,y) = 2|x|^3 + x^3 + e^{\,y^2} - 1, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Очевидно $F \in C(\mathbb{R}^2)$ и положительно определена, так как $F(0,0) = 0$, а

$$2|x|^3 + x^3 = x^2\,(2|x| + x) > 0, \quad \text{если} \quad x \neq 0; \qquad e^{\,y^2} - 1 > 0, \quad \text{если} \quad y \neq 0.$$

Кроме того, для всех $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ имеем $F_x(x,y) = 3x^2\,(2\operatorname{sgn} x + 1)$ и $F_y(x,y) = 2y\,e^{\,y^2}$, откуда

$$F_x(0,0) = F_y(0,0) = 0, \qquad F_x^2(x,y) + F_y^2(x,y) > 0, \quad (x,y) \neq (0,0).$$

Отметим, что $F \in C^2(\mathbb{R}^2)$, но $F \notin C^3(\mathbb{R}^2)$, поскольку частные производные

$$F_{xx}(x,y) = 6x\,(2\operatorname{sgn} x + 1), \qquad F_{xy}(x,y) = F_{yx}(x,y) \equiv 0, \qquad F_{yy}(x,y) = 2(4y^2 + 1)\,e^{\,y^2}$$

непрерывны всюду, а частная производная $F_{xxx}(x,y)$ в точке $(0,0)$ не существует.

Итак, свойства (i), (iii) выполнены. При проверке свойств (ii), (iv) полезно учитывать, что для заданного значения параметра $c > 0$ линия уровня

$$\Gamma_c: \quad 2|x|^3 + x^3 + e^{\,y^2} - 1 = c$$

есть объединение графиков двух функций одной переменной

$$y = -\sqrt{\ln\,(1 + c - 2|x|^3 - x^3)}, \qquad y = \sqrt{\ln\,(1 + c - 2|x|^3 - x^3)},$$

определённых на общем для них отрезке $-\sqrt[3]{c} \leqslant x \leqslant \sqrt[3]{c/3}$. Подробности мы опускаем.

По доказанной теореме кривая

$$\Gamma \equiv \Gamma_1: \quad 2|x|^3 + x^3 + e^{\,y^2} = 2 \tag{3.10}$$

является двусторонним устойчивым предельным циклом динамической системы

$$\begin{cases} \dot{x} = 2ay\,e^{\,y^2} - 3x^2\,(2\operatorname{sgn} x + 1)\left(2|x|^3 + x^3 + e^{\,y^2} - 2\right), \\ \dot{y} = -3ax^2\,(2\operatorname{sgn} x + 1) - 2y\,e^{\,y^2}\left(2|x|^3 + x^3 + e^{\,y^2} - 2\right) \end{cases} \tag{3.11}$$

при любом $a \neq 0$. Кривая (3.10) имеет единственную ось симметрии — ось абсцисс. Представление о поведении фазовых траекторий системы (3.11) можно получить из рис. 11.

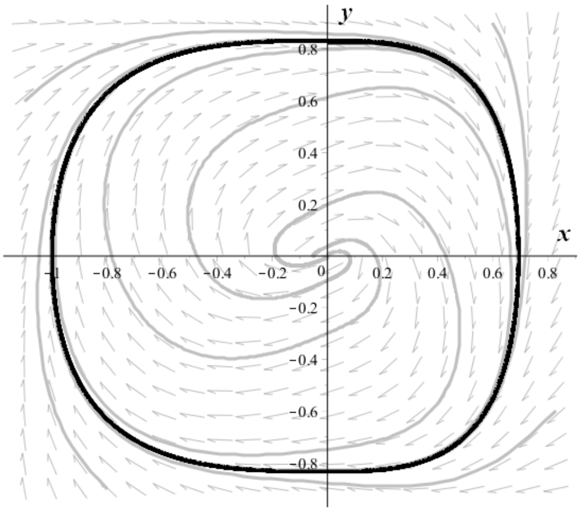


Рис. 11. Фазовый портрет системы (3.11) с наложенным полем направлений при выборе параметра $a = 2$. Жирной линией выделен предельный цикл $2|x|^3 + x^3 + e^{y^2} = 2$.

Fig. 11. Phase portrait of the system (3.11) with overlayed direction field and the parameter $a = 2$. The limit cycle $2|x|^3 + x^3 + e^{y^2} = 2$ is highlighted with a bold line.

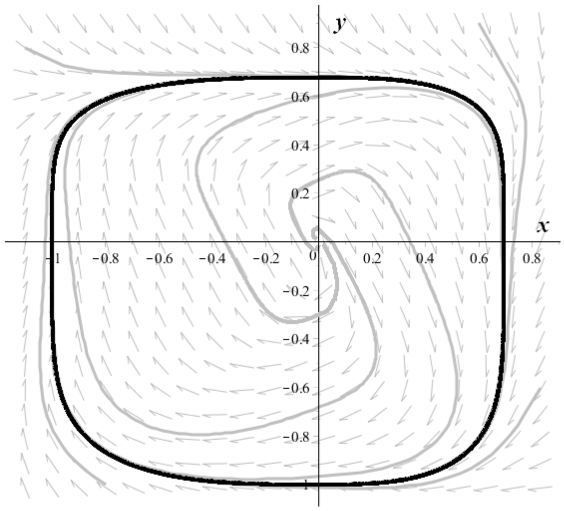


Рис. 12. Фазовый портрет системы (2.1) для случая порождающей функции (3.12) и $a = 2$ с наложенным полем направлений и предельным циклом $2|x|^3 + x^3 + 4|y|^5 + 3y^5 = 1$.

Fig. 12. Phase portrait of the system (2.1) for the case of the generating function (3.12) and the parameter $a = 2$ with overlayed direction field and limit cycle $2|x|^3 + x^3 + 4|y|^5 + 3y^5 = 1$.

Процедура линеаризации для (3.11) даёт систему

$$\begin{cases} \dot{x} = 2ay, \\ \dot{y} = 2y, \end{cases}$$

точки покоя которой заполняют всю ось абсцисс. Матрица последней системы имеет (не зависящие от $a \neq 0$) собственные значения $\lambda_1 = 0$ и $\lambda_2 = 2$, а траектории образуют на фазовой плоскости семейство параллельных прямых с заданным угловым коэффициентом $k = 1/a \neq 0$.

Разумеется, нетрудно придумать динамическую систему формата (2.1) с предельным циклом в виде несимметричной траектории, выбрав, например, функцию

$$F(x, y) = 2|x|^3 + x^3 + 4|y|^5 + 3y^5, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2. \tag{3.12}$$

Линия уровня

$$2|x|^3 + x^3 + 4|y|^5 + 3y^5 = 1$$

вместе с фазовым портретом системы (2.1) при выборе функции (3.12) и параметра $a = 2$ изображены на рис. 12.

Наконец, в шаблоне (2.1) возможен выбор неэлементарной функции, например,

$$F(x, y) = \int_0^{x^2+y^2} e^{t^2}\, dt, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

частные производные которой являются элементарными функциями

$$F_x(x, y) = 2x\, e^{(x^2+y^2)^2}, \qquad F_y(x, y) = 2y\, e^{(x^2+y^2)^2}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Проверка того, что $F(x, y)$ обладает нужными свойствами (i)–(iv), является несложным упражнением. На этом завершим разбор примеров и дадим короткий заключительный комментарий.

4. Заключение

Мы постарались сделать изложение материала замкнутым и максимально доступным, избегая (без особой нужды) опоры на известные, но подчас трудные положения общей теории. Основной результат заметки, заключённый в предложенной теореме 2.1, представляется очень естественным. Поэтому не исключено, что в том или ином виде он уже отмечался кем-то ранее. Как явствует уже из примеров 3.1–3.4, геометрия предельных циклов автономных систем семейства (2.1) весьма разнообразна. На наш взгляд, в контексте высвеченного раздела теории динамических систем внешне простой шаблон (2.1) выступает содержательным «архивом» для большого числа полезных упражнений и может быть эффективно использован на практике.

Отметим, что полученные результаты обобщаются на многомерные автономные системы. Здесь характер предельных циклов и поведение решений зависят от чётности или нечётности размерности. Обстоятельный разбор возникающих при этом вопросов выходит за рамки данной работы.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андронов А. А., Леонтович Е. А., Гордон Н. И., Майер А. Г.* Качественная теория динамических систем второго порядка. — М.: Наука, 1966.
2. *Еругин Н. П.* Книга для чтения по общему курсу дифференциальных уравнений. — Минск: Наука и техн., 1979.
3. *Ильяшенко Ю. С.* Аттракторы динамических систем и философия общего положения// Мат. просвещ. — 2008. — *12*. — С. 13–22.
4. *Кузнецов А. П., Селиверстова Е. С., Трубецков Д. И., Тюрюкина Л. В.* Феномен уравнения ван дер Поля// Изв. вузов. Прикл. нелин. динам. — 2014. — *22*, № 4. — С. 3–42.
5. *Немыцкий В. В., Степанов В. В.* Качественная теория дифференциальных уравнений. — М.: ГИТТЛ, 1947.
6. *Понтрягин Л. С.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1982.
7. *Пуанкаре А.* О кривых, определяемых дифференциальными уравнениями. — М.—Л: Гостехиздат, 1947.
8. *Рубинштейн А. И.* О некоторых динамических системах второго порядка (дополнение к стандартному втузовскому курсу математики)// Мат. образован. — 2010. — № 1. — С. 24–30.
9. *Скворцов В. А.* Примеры метрических пространств. — М.: МЦНМО, 2002.
10. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — СПб: Лань, 2003.
11. *Филиппов А. Ф.* Введение в теорию дифференциальных уравнений. — М.: КомКнига, 2007.

Т. М. Иванова
Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, Россия
E-mail: `ivatatiana@gmail.com`

А. Б. Костин
Национальный исследовательский ядерный университет МИФИ, Москва, Россия
E-mail: `abkostin@yandex.ru`

А. И. Рубинштейн

В. Б. Шерстюков
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия
E-mail: `shervb73@gmail.com`

UDC 517.925.4
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-77-98
EDN: YQTKXF

On limit cycles of autonomous systems

T. M. Ivanova[1], **A. B. Kostin**[1], **A. I. Rubinshtein, and V. B. Sherstyukov**[2,3]

[1]*National Research Nuclear University "MEPhI," Moscow, Russia*
[2]*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
[3]*Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Abstract. We consider the problem of the existence of limit cycles for autonomous systems of differential equations. We present quite elementary considerations that can be useful in discussing qualitative issues that arise in the course of ordinary differential equations. We establish that any simple closed curve defined by the equation $F(x, y) = 1$ with a sufficiently general function F is a limit cycle for the corresponding autonomous system on the plane (and even for an infinite number of systems depending on the real parameter). These systems are written out explicitly. We analyze in detail several specific examples. Graphic illustrations are provided.

Keywords: autonomous system on the plane, periodic solutions, positive definite function, stable limit cycle.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: T. M. Ivanova, A. B. Kostin, A. I. Rubinshtein, V. B. Sherstyukov, "On limit cycles of autonomous systems," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 1, 77–98. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-77-98`

REFERENCES

1. A. A. Andronov, E. A. Leontovich, N. I. Gordon, and A. G. Mayer, *Kachestvennaya teoriya dinamicheskikh sistem vtorogo poryadka* [Qualitative Theory of Second-Order Dynamical Systems], Nauka, Moscow, 1966 (in Russian).
2. N. P. Erugin, *Kniga dlya chteniya po obshchemu kursu differentsial'nykh uravneniy* [Reading Book for the General Course of Differential Equations], Nauka i tekhn., Minsk, 1979 (in Russian).
3. Yu. S. Il'yashenko, "Attraktory dinamicheskikh sistem i filosofiya obshchego polozheniya" [Attractors of dynamical systems and general position philosophy], *Mat. prosveshch.* [Math. Educ.], 2008, **12**, 13–22 (in Russian).
4. A. P. Kuznetsov, E. S. Seliverstova, D. I. Trubetskov, and L. V. Tyuryukina, "Fenomen uravneniya van der Polya" [The phenomenon of the van der Pol equation], *Izv. vuzov. Prikl. nelin. dinam.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Appl. Nonlinear Dynam.], 2014, **22**, No. 4, 3–42 (in Russian).
5. V. V. Nemytskii and V. V. Stepanov, *Kachestvennaya teoriya differentsial'nykh uravneniy* [Qualitative Theory of Differential Equations], GITTL, Moscow, 1947 (in Russian).
6. L. S. Pontryagin, *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], Nauka, Moscow, 1982 (in Russian).
7. A. Poincaré, *O krivykh, opredelyaemykh differentsial'nymi uravneniyami* [On Curves Defined by Differential Equations], Gostekhizdat, M.—L, 1947 (Russian translation).
8. A. I. Rubinshteyn, "O nekotorykh dinamicheskikh sistemakh vtorogo poryadka (dopolnenie k standartnomu vtuzovskomu kursu matematiki)" [On some second-order dynamical systems (addition to the standard college mathematics course)], *Mat. obrazovan.* [Math. Educ.], 2010, No. 1, 24–30 (in Russian).

9. V. A. Skvortsov, *Primery metricheskikh prostranstv* [Examples of Metric Spaces], MTsNMO, Moscow, 2002 (in Russian).
10. M. V. Fedoryuk, *Obyknovennye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], Lan', Saint Petersburg, 2003 (in Russian).
11. A. F. Filippov, *Vvedenie v teoriyu differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the Theory of Differential Equations], KomKniga, Moscow, 2007 (in Russian).

T. M. Ivanova
National Research Nuclear University "MEPhI," Moscow, Russia
E-mail: ivatatiana@gmail.com

A. B. Kostin
National Research Nuclear University "MEPhI," Moscow, Russia
E-mail: abkostin@yandex.ru

A. I. Rubinshtein

V. B. Sherstyukov
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia
E-mail: shervb73@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 1 (2024). С. 99–120
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.9
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-99-120
EDN: YUEIWO

КОЭРЦИТИВНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ МНОГОСЛОЙНО-ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Г. Г. Казарян

Институт математики НАН Армении, Ереван, Армения
Российско-Армянский университет, Ереван, Армения

Аннотация. Получены условия, при которых данный многослойный дифференциальный оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) мощнее оператора $Q(D)$ (многочлена $Q(\xi)$). Это применяется для получения оценок мономов, что, в свою очередь, с использованием теории мультипликаторов Фурье, применяется при получении коэрцитивных оценок производных функций через дифференциальный оператор $P(D)$, применённый к этим функциям.

Ключевые слова: коэрцитивная оценка, сравнение мощности дифференциальных операторов (многочленов), младший член дифференциального оператора (многочлена), многогранник Ньютона, вырожденный (невырожденный) оператор (многочлен), многослойный оператор (многочлен).

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *Г. Г. Казарян.* Коэрцитивные оценки для многослойно-вырождающихся дифференциальных операторов// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 1. С. 99–120. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-99-120

Введение

Будем пользоваться следующими стандартными обозначениями: $\mathbb{E}^n$ и $\mathbb{R}^n$ — n-мерные евклидовы пространства точек (векторов) $x = (x_1, \ldots, x_n)$ и $\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n)$, соответственно, $\mathbb{R}^{n,+} := \{\xi \in \mathbb{R}^n, \xi_j \geqslant 0,\ j = 1, \ldots, n\}$, $\mathbb{R}^{n,0} := \{\xi \in \mathbb{R}^n, \xi_1 \ldots \xi_n \neq 0\}$. Через $\mathbb{N}$ мы обозначим множество всех натуральных чисел, $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, а через $\mathbb{N}_0^n = \mathbb{N}_0 \times \ldots \times \mathbb{N}_0$ — множество всех n-мерных мультииндексов, т. е. множество всех точек с целыми неотрицательными координатами $\{\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) : \alpha_i \in \mathbb{N}_0\ (i = 1, \ldots, n)\}$. Далее, для вектора $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ запись $x \geqslant 0$ (соответственно, $x > 0$) означает $x_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, n)$ (соответственно, $x_j > 0$ $(j = 1, \ldots, n)$).

Для $\xi \in \mathbb{R}^n$, $\lambda \in \mathbb{R}^n$, $\lambda > 0$, и $\nu \in \mathbb{R}^{n,+}$ введём обозначения $|\xi| = \sqrt{\xi_1^2 + \ldots + \xi_n^2}$, $|\xi, \lambda| = \sqrt{\xi_1^{2/\lambda_1} + \ldots + \xi_n^{2/\lambda_n}}$, $|\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_n$, $\xi^\nu = \xi_1^{\nu_1} \ldots \xi_n^{\nu_n}$, $|\xi^\nu| = |\xi_1|^{\nu_1} \ldots |\xi_n|^{\nu_n}$, а для $\alpha \in \mathbb{N}_0^n : D^\alpha = D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n}$, где $D_j = \dfrac{1}{i}\partial/\partial x_j$ или $D_j = \partial/\partial \xi_j$ $(j = 1, \ldots n)$.

Многие вопросы теории общих линейных дифференциальных уравнений в частных производных (и с постоянными, и с переменными коэффициентами) сводятся к сравнению в том или ином смысле соответствующих дифференциальных операторов. В свою очередь, сравнение дифференциальных операторов чаще всего приводится к сравнению их символов (характеристических многочленов), к изучению алгебраических свойств этих символов, в том числе к нахождению алгебраических условий, при которых символ данного оператора бесконечно возрастает при бесконечном возрастании его аргументов, к выяснению вопроса о возможности добавления «младших членов» к символу данного оператора (следовательно, к данному оператору) без нарушения характера этого оператора и т. д.

Следующий пример непосредственно выражает эту связь. Пусть $P(D)$ и $Q(D)$ — линейные дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами, а $P(\xi)$ и $Q(\xi)$ — отвечающие им характеристические многочлены. Применение L_2-теории, преобразования Фурье и равенства Парсеваля непосредственно приводит к тому, что вопрос о существовании постоянной $c_1 > 0$ такой, что для всех функций $f \in C_0^\infty(E^n)$ имеет место неравенство

$$||Q(D)f||_{L_2} \leqslant c_1\,[||P(D)f||_{L_2} + ||f||_{L_2}], \tag{0.1}$$

сводится к существованию постоянной $c_2 > 0$ такой, что

$$|Q(\xi)| \leqslant c_2[|P(\xi)| + 1] \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{0.2}$$

На наш взгляд, одной из ярких иллюстраций сведения задач теории дифференциальных уравнений к задачам изучения свойств алгебраических многочленов, в частности, к их сравнению, является теория Л. Хёрмандера (см. [22]) об эквивалентных условиях гипоэллиптичности. С одной стороны, это оператор $P(D)$, для которого все обобщённые решения уравнения $P(D)u = 0$ являются бесконечно дифференцируемыми функциями, с другой стороны, это оператор, символ $P(\xi)$ которого удовлетворяет условию

$$\frac{|D^\alpha P(\xi)|}{|P(\xi)| + 1} \to 0 \quad \text{при} \quad |\xi| \to \infty$$

для любого мультииндекса $\alpha \neq 0$. Отметим, что из этого условия, в частности, следует, что $|P(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$. При этом оказывается, что многие свойства решений гипоэллиптических уравнений, в том числе их бесконечная гладкость, во многом объясняются именно этим свойством их символов.

Отметим ещё, что по этой теории неравенство типа (0.1) для всех функций $f \in C_0^\infty(\Omega)$, где Ω — ограниченная область из $\mathbb{E}^n$, сводится к неравенству (1.2) уже для функций $\tilde{Q}$ и $\tilde{P}$ Хёрмандера, образованных по символам $Q(\xi)$ и $P(\xi)$.

Другой не менее типичный пример такого сведения — это понятие N-гиперболичности по Петровскому—Гордингу, где $N \in \mathbb{E}^n$ (см. [22, теорема 12.3.1]). С одной стороны, это такой оператор $P(D)$, для которого уравнение $P(D)u = f$ с $\operatorname{supp} f \subset H$ имеет одно и только одно решение $u \in C^\infty(E^n)$ с $\operatorname{supp} u \subset H$, где $H := \{x \in E^n, (x, N) > 0\}$; с другой стороны, это оператор, символ $P(\xi)$ которого удовлетворяет условию: существует число τ_0 такое, что $P(\xi + i\tau N) \neq 0$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $\tau < \tau_0$.

Если в одномерном случае модуль любого многочлена, отличного от постоянной, бесконечно возрастает при бесконечном возрастании модуля его аргумента, то многочлены многих переменных (каковыми являются, например, символы гиперболических по Петровскому—Гордингу операторов), вообще говоря, не обладают этим свойством.

В связи с этим естественно ввести следующее понятие: через $\mathbb{I}_n$ мы обозначим множество многочленов (вообще говоря, с комплексными коэффициентами) $P(\xi) = P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ таких, что $|P(\xi)| \to \infty$ при $|\xi| \to \infty$, а через $\mathbb{I}_n^+$ обозначим множество многочленов с вещественными коэффициентами таких, что $P(\xi) \to +\infty$ при $|\xi| \to \infty$. Так как эти понятия можно ввести для любой функции $F(\xi) = F(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ и, в частности, для функции $|P(\xi)|$, то далее мы можем пользоваться также и обозначением типа $|P| \in \mathbb{I}_n^+$. При этом очевидно, что условие $P \in \mathbb{I}_n$ эквивалентно каждому из условий $|P| \in \mathbb{I}_n^+$ и $|P| \in \mathbb{I}_n$.

Имея в виду то, что условие $P \in \mathbb{I}_n$ является необходимым для гипоэллиптичности оператора $P(D)$, а также вследствие того, что оно достаточно часто встречается в других областях математического анализа и при этом является трудно проверяемым, естественно задаться вопросом о нахождении условий, при которых многочлен многих вещественных переменных обладает этим свойством, т. е. принадлежит $\mathbb{I}_n$.

На наш взгляд, наиболее значимый результат в этом направлении принадлежит В. П. Михайлову (см. [21]). Аналогичный результат в других терминах получен в работе [2] (см. также [3]). Некоторые частные случаи получены и применены к дифференциальным уравнениям в работах [3–5, 25–27, 30] и др., в работе [4] изучены асимптотические свойства многочленов и алгебраических функций и т. д. Однако все эти работы относились к так называемым невырожденным (регулярным) многочленам. Вырожденные (нерегулярные) многочлены изучены в работах [7–19].

Отметим, что в многомерном случае в поведении многочлена на бесконечности решающую роль могут играть «младшие члены». При этом, если к эллиптическому оператору можно добавлять любой младший член, не нарушая его эллиптичность (при этом сохраняя и силу, и мощность оператора), то к гиперболическим или гипоэллиптическим операторам можно добавлять лишь такие младшие члены, которые удовлетворяют определенным ограничениям.

Далее, многие вопросы разных областей дифференциальных уравнений естественным образом сводятся к требованиям:

1) описать множество операторов (многочленов) $\{Q\}$ (в частности, мономов $\{\xi^\alpha\}$), которые имеют в определенном смысле меньшую мощность или силу, чем данный оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) (точные определения см. ниже);
2) выяснить, как влияет добавление таких (в частности, младших) членов на силу, мощность, гипоэллиптичность по Хёрмандеру, гиперболичность по Петровскому—Гордингу или почти гипоэллиптичность данного оператора (многочлена)?

Для изучения этих и других (возникших при изложении дальнейшего текста) вопросов, введём некоторые обозначения и понятия.

Определение 0.1 (см. [28] или [21]). Линейную оболочку в $\mathbb{R}^n$ множества мультииндексов $\mathfrak{A} := \{\alpha^1, \alpha^2, \dots, \alpha^N\}$ назовём *многогранником Ньютона* этого множества и обозначим через $\Re(\mathfrak{A})$. Поверхность многогранника $\Re$ обозначим через $\partial\Re$, а множество вершин через $\Re^0$.

Определение 0.2. Многогранник $\Re \subset \mathbb{R}^{n,+}$ называется *полным* [21], если $\Re$ имеет вершину в начале координат и отличную от начала координат вершину на каждой оси координат. Обозначим k-мерные грани многогранника $\Re$ через $\Re_i^k$ $(i = 1, \dots, M_k, k = 0, 1, \dots, n-1)$. Грани многогранника Ньютона будем по определению считать замкнутыми множествами.

Единичный вектор λ называется *внешней нормалью* (или $\Re$-*нормалью*) грани Γ многогранника $\Re$, если:

1) $(\lambda, \mu) = (\lambda, \nu)$ для всех μ и ν из Γ,
2) $(\lambda, \mu) > (\lambda, \nu)$ для всех точек $\mu \in \Gamma$ и $\nu \in \Re \setminus \Gamma$.

Другими словами, $\Re$-нормаль k-мерной грани Γ многогранника $\Re$ $(0 \leqslant k \leqslant n-1)$ — это единичная внешняя нормаль гиперплоскости, опорной к многограннику $\Re$, содержащей грань Γ и не содержащей какую-либо грань Γ размерности больше k.

Таким образом данный вектор λ может служить внешней нормалью одной и только одной грани многогранника $\Re$.

Обозначим через Λ_i^k множество всех внешних нормалей грани $\Re_i^k = \Re_i^k(P)$ $(1 \leqslant i \leqslant M_k;$ $0 \leqslant k \leqslant n-1)$. Отметим, что либо множество Λ_i^k состоит из одного вектора (когда $k = n-1$), либо является открытым множеством (когда $0 \leqslant k < n-1$).

Из определения $\Re$-нормалей следует, что для каждого $\lambda \in \Lambda_i^k$ $(1 \leqslant i \leqslant M_k, 0 \leqslant n-1)$ существует число $d_{i,k} = d_{i,k}(\lambda) \geqslant 0$ такое, что $(\lambda, \beta) = d$ для всех $\beta \in \Re_i^k$ и $(\lambda, \beta) < d$ для любого $\beta \in \Re \setminus \Re_i^k$. Отметим, что $\Re$-нормаль $(n-1)$-мерной (и только $(n-1)$-мерной) грани многогранника $\Re$ определяется однозначно.

Определение 0.3 (см. [21] или [12]). Грань $\Re_i^k$ $(1 \leqslant i \leqslant M_k,$ $0 \leqslant k \leqslant n-1)$ полного многогранника $\Re$ называется *главной*, если среди её внешних нормалей существует нормаль, хотя бы одна координата которой положительна.

Пусть $\Re$ — полный многогранник в $\mathbb{R}^{n,+}$ с вершинами $\mathbb{N}_0^n$, $\Re_i^k$ $(1 \leqslant i \leqslant M_k,$ $0 \leqslant n-1)$ — произвольная его грань, а Λ_i^k — множество всех $\Re$-нормалей этой грани. Вместе с каждым n-мерным выпуклым многогранником $\Re$ рассмотрим n-мерную единичную сферу концов $\Re$-нормалей этого многогранника, или, что то же самое, сферическое отображение поверхности многогранника $\Re$

на единичную сферу Λ. При этом отображении грани $\Re_i^k$ (при $k < n-1$) соответствует открытое связное множество Λ_i^k, лежащее на Λ и имеющее размерность $n-k-1$. Граням размерности $(n-1)$ соответствуют точки на Λ.

В дальнейших обозначениях мы не будем различать множество $\Re$-нормалей грани $\Re_i^k$ и множество концов этих нормалей, лежащих на Λ, обозначая их через Λ_i^k. По контексту будет ясно, о каком множестве идет речь.

Пусть при $n \geqslant 2$

$$P(D) = P(D_1, D_2, \ldots, D_n) = \sum_{\alpha\in(P)} \gamma_\alpha D^\alpha$$

— линейный дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, а

$$P(\xi) = P(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = \sum_{\alpha\in(P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$$

— отвечающий ему символ (характеристический многочлен), где сумма распространяется по конечному набору мультииндексов $(P) := \{\alpha : \alpha \in \mathbb{N}_0^n, \gamma_\alpha \neq 0\}$. Многогранник Ньютона множества $(P) \cup \{0\}$ назовём *многогранником Ньютона оператора* $P(D)$ (*многочлена* $P(\xi)$) и обозначим через $\Re(P)$.

Если $\Re(P)$ — многогранник Ньютона многочлена $P(\xi) = \sum_{\alpha\in(P)} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ и $\Re_i^k$ ($1 \leqslant i \leqslant M_k$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$) — некоторая его (главная) грань, то многочлен $P^{i,k}(\xi) := \sum_{\alpha\in\Re_i^k} \gamma_\alpha \xi^\alpha$ назовём *подмногочленом* многочлена P, отвечающим грани $\Re_i^k$ многогранника $\Re(P)$.

Определение 0.4. Многочлен $R(\xi)$ назовём *обобщённо-однородным* (λ-*однородным*), если для вектора $\lambda \in \mathbb{R}^n$ и числа $d = d(R, \lambda)$

$$R(t^\lambda \xi) = R(t^{\lambda_1} \xi_1, \ldots, t^{\lambda_n} \xi_n) = t^d R(\xi) \ \ \forall t > 0, \, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Докажем, что любой подмногочлен многочлена является обобщённо-однородным.

Лемма 0.1 (см. [21]). *Подмногочлен* $P^{l,m}(\xi)$ ($1 \leqslant l \leqslant M_m$, $0 \leqslant m \leqslant n-1$) *многочлена* P *является* λ-*однородным для любого* $\lambda \in \Lambda_l^m$, *т. е. существует* (*однозначно определяемое*) *число* $d_{l,m,\lambda}$ *такое, что*

$$P^{l,m}(\xi) = P^{l,m,\lambda}(\xi) = \sum_{\alpha\in\Re_l^m} \gamma_\alpha \xi^\alpha = \sum_{(\lambda,\alpha)=d_{l,m,\lambda}} \gamma_\alpha \xi^\alpha.$$

Доказательство. Доказательство приведём для случая $m = n-1$, когда внешняя нормаль грани $\Re_l^{n-1}$ определяется однозначно. Случай $m < n-1$ рассматривается аналогично. Пусть $(\lambda, \alpha) = d_{l,m,\lambda}$ — уравнение $(n-1)$-мерной гиперплоскости, в которой лежит грань $\Re_l^{n-1}$, тогда $(\lambda, \alpha) = d_{l,m,\lambda}$ для всех мультииндексов $\alpha \in \Re_l^{n-1}$, для которых $\gamma_\alpha \neq 0$ в подмногочлене $P^{l,m}(\xi)$.

Заменим вектор ξ на вектор $t^\lambda \xi$ при произвольном $t > 0$, получим

$$P^{l,n-1}(t^\lambda \xi) = \sum_{\alpha\in\Re_l^{n-1}} \gamma_\alpha |t^\lambda \xi|^\alpha = \sum_{\alpha\in\Re_l^{n-1}} t^{(\lambda,\alpha)} \gamma_\alpha \xi^\alpha = t^{d_{l,m,\lambda}} P^{l,n-1}(\xi),$$

что доказывает лемму. □

Следствие 0.1. *Для любого* (*единичного*) *вектора* λ *многочлен* P *можно представить в виде суммы* λ-*однородных многочленов*

$$P(\xi) = P_0(\xi) + P_1(\xi) + \ldots + P_M(\xi) = \sum_{k=0}^{M} \sum_{(\lambda,\alpha)=d_k} \gamma_\alpha \xi^\alpha, \tag{0.3}$$

где $M = M(P) = M(P, \lambda)$; *при этом, если* $\lambda > 0$, *то* $d_0 > d_1 > \ldots > d_M \geqslant 0$.

Определение 0.5. Пусть $\Re = \Re(P)$ — многогранник Ньютона многочлена P, а $\Re_i^k$ ($1 \leqslant i \leqslant M_k$, $0 \leqslant k \leqslant n-1$) — некоторая грань этого многогранника. Грань $\Re_i^k$ называется *невырожденной* (см. [21]), если $P^{i,k}(\xi) \neq 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^{n,0}$. В противном случае грань $\Re_i^k$ называется *вырожденной*.

Многочлен P называется *невырожденным*, если невырождены все главные грани его многогранника Ньютона.

Определение 0.6. Если $\Re_l^m$ $(1 \leqslant l \leqslant M_m,\ 0 \leqslant m \leqslant n-1)$ — некоторая главная вырожденная грань многогранника Ньютона $\Re = \Re(P)$ многочлена P, $\lambda \in \Lambda_l^m$, и многочлен P представлен по вектору λ в виде (0.3), где $P_0(\xi) = P^{l,m}(\xi)$.

1) Обозначим $\Sigma(P_0, \lambda) := \{\xi \in \mathbb{R}^{n,0}, |\xi, \lambda| = 1, P_0(\xi) = 0\}$.
2) Пусть $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$. Многочлен P назовём $r = r(\eta)$-*слойно вырожденным* относительно точки η, если $P_0(\eta) = P_1(\eta) = \ldots = P_{r-1}(\eta) = 0$, а $P_r(\eta) \neq 0$ для некоторого $r = r(\eta)$ $(0 < r < M_m)$; назовём k-*слойно вырожденным*, где $k = k(P) := \max\limits_{\eta \in \Sigma(P_0)} r(\eta)$. Условимся ради краткости далее такой многочлен называть просто k-*слойным*.

Отметим, что *двухслойность* многочлена определяется просто: $P_1(\eta) \neq 0$ для всех точек $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$.

Цель настоящей заметки — для данного линейного дифференциального оператора $P(D)$ и данного числа $p > 1$ описать множество мультииндексов $\mathbb{M} = \mathbb{M}(P, p)$ таких, что для каждого $\nu \in \mathbb{M}$ с некоторой постоянной $c = c(\nu, P) > 0$ имеет место (коэрцитивное) неравенство

$$||D^{\nu} u||_{L_p} \leqslant c\,[\,||P(D)u||_{L_p} + ||u||_{L_p}\,]\ \ \forall u \in C_0^{\infty}(E^n). \tag{0.4}$$

Как уже было сказано выше, при $p = 2$ оценка (0.4) эквивалентна оценке

$$|\xi^{\nu}| \leqslant c_1\,[|P(\xi)| + 1]\ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \tag{0.5}$$

с некоторой постоянной $c_1 > 0$.

Ниже множество мультииндексов, для которых справедливо неравенство (0.5), т. е. множество $\mathbb{M}(P, 2)$, мы обозначим просто через $\mathbb{M}$.

В первом разделе статьи для данного класса двухслойно-вырождающихся многочленов $\{P\}$ мы описываем множество $\mathbb{M}$, во втором разделе сравниваем мощности двухслойно-вырождающихся многочленов, в третьем разделе даём оценки мономов через многослойно-вырождающийся многочлен, в четвертом разделе, пользуясь теорией мультипликаторов Фурье, мы получаем коэрцитивные оценки производных функций через многослойно-вырождающийся дифференциальный оператор, применённый к этим функциям.

Изучение оценок в L_p производных функций через данный дифференциальный оператор (проблема коэрцитивности) началось фундаментальной работой Ароншайна [25]. Затем Агмон [24] и независимо от него Хёрмандер [23], продолжая работу Ароншайна, решили общую проблему коэрцитивности для определенных классов операторов и для областей Ω с достаточно гладкой границей. Шехтер [35] получил аналогичные оценки для систем дифференциальных операторов. В более поздних работах Смита [36] и Нечаса [32] получены оценки производных через данные однородные дифференциальные операторы и для систем таких операторов В работе [1] О. В. Бесова решается аналогичная задача для обобщённо-однородных дифференциальных многочленов с более слабыми ограничениями на область Ω. В. П. Ильиным [6] получены необходимые и достаточные условия для справедливости оценок производных функций через заданный набор производных функций. Нами [7] аналогичные вопросы рассмотрены в более общей постановке, когда дифференциальные многочлены могут не быть однородными.

Во всех перечисленных (и некоторых не перечисленных) работах изучаемые дифференциальные операторы (многочлены) были в определенном смысле невырожденные. Здесь мы рассматриваем случай, когда дифференциальный оператор (многочлен), через который должны оцениваться другие операторы (многочлены и, в частности, мономы) может быть вырожденным.

В настоящей работе для данного многочлена $P(\xi) = P(\xi_1, \ldots, \xi_n)$ мы выделяем множество мономов $\{\xi^{\nu}\}$, для которых выполняется неравенство (0.5), или, что то же самое, описываем множество $\mathbb{M} = \mathbb{M}(P, 2)$. Для этого сначала мы введём класс многочленов $\mathbb{I}_n$ как множество многочленов n $(n \geqslant 2)$ переменных с постоянными вещественными коэффициентами, модуль которых бесконечно возрастает при бесконечном возрастании модуля аргумента.

Прежде чем перейти к решению поставленных задач, отметим несколько фактов, которые оправдывают такой выбор и позволят нам упростить их постановку:

1) модуль символа $P(\xi)$ гипоэллиптического оператора $P(D)$ бесконечно возрастает при бесконечном возрастании модуля аргумента $|\xi|$;
2) очевидно, что многочлены $P(\xi)$ и $P(\xi)+C$ одновременно принадлежат или одновременно не принадлежат $\mathbb{I}_n$ для любой постоянной C.

Поэтому, не умаляя общности, достаточно считать, что множество $\mathbb{I}_n$ состоит из положительных многочленов $\{P(\xi)=P(\xi_1,\dots,\xi_n)\}$ с вещественными коэффициентами таких, что $P(\xi)\to+\infty$ при $|\xi|\to\infty$. А тот факт, что мы рассматриваем только положительные многочлены с вещественными коэффициентами, оправдывается следующим предложением.

Лемма 0.2 (см. [21] или [7])**.** *Пусть $\Re=\Re(P)$ — полный n-мерный многогранник Ньютона многочлена $P(\xi)$ (вообще говоря, с комплексными коэффициентами), а $\mathfrak{M}=\mathfrak{M}(P):=\Re(|P|^2)$ — многогранник Ньютона многочлена $|P|^2=P\,\bar{P}$.*

1) *Многогранник $\mathfrak{M}(P)$ подобен многограннику $\Re(P)$ с центром подобия в начале координат и коэффициентом подобия 2.*
2) *Пусть при этом соответствующие грани имеют одинаковые индексы i,k. Если $\alpha\in\mathfrak{M}_i^k$ и $\alpha=\alpha^1+\alpha^2$, где $\alpha^1\in\Re$ и $\alpha^2\in\Re$, то $\alpha^1\in\Re_i^k$ и $\alpha^2\in\Re_i^k$. Отсюда, в частности, следует, что $[|P|^2]^{i,k}(\xi)\equiv[|P^{i,k}(\xi)|]^2$ $(i=1,\dots,M_k;\ k=0,1,\dots,n-1)$.*
3) *Вырожденным (невырожденным) граням $\Re(P)$ соответствуют вырожденные (невырожденные) грани $\mathfrak{M}(P)$ и наоборот.*
4) *$P\in\mathbb{I}_n$ тогда и только тогда, когда $|P|^2\in\mathbb{I}_n$.*
5) *Если для всех точек $\nu\in\Re^\star\subset\Re$ справедлива оценка (0.5), то оценка (0.5) справедлива для точек $\nu\in 2\,\Re^\star$ с заменой P на $|P|^2$.*
6) *Для произвольных многочленов P и Q (вообще говоря, с комплексными коэффициентами) соотношение $Q<P$ выполняется тогда и только тогда, когда $|Q|^2<|P|^2$.*

1. Оценки мономов через данный многочлен. Двухслойный случай

В. П. Михайлов в [21] ввёл класс невырожденных многочленов $\{\,P\,\}$ с полными многогранниками Ньютона $\{\Re(P)\}$, для которых имеет место оптимальный результат, т. е. $\mathbb{M}(P)=\Re(P)$. Аналогичный результат в других терминах получен С. Г. Гиндикиным и Л. Р. Волевичем в [3]. Классы дифференциальных операторов (многочленов), изученных этими авторами, достаточно отличаются от класса эллиптических операторов, однако они близки им в том смысле, что состоят из невырожденных многочленов. В постановке вопроса настоящей работы случай двухслойно-вырожденных операторов (многочленов) впервые изучен в работе [7], в настоящей работе мы рассматриваем многослойно-вырожденный случай.

Сначала докажем некоторые свойства многочленов класса $\mathbb{I}_n$, которыми будем пользоваться.

Лемма 1.1. *Пусть $\Re=\Re(P)$ — многогранник Ньютона многочлена $P\in I_n$, а $\Re_i^k$ $(i=1,2,\dots,M_k,\ k=0,1,\dots,n-1)$ — его главные грани. Тогда*:

a) *многогранник $\Re=\Re(P)$ является полным*;
b) *$P^{i,k}(\xi)\geqslant 0$ для всех $\xi\in\mathbb{R}^n$ $(i=1,2,\dots,M_k,\ k=0,1,\dots,n-1)$;*
c) *пусть пара (i,k) $(1\leqslant i\leqslant M_k,\ 0\leqslant k\leqslant n-1)$, вектор $\lambda\in\Lambda(\Re_i^k)$ и точка $\eta\in\Sigma(P_0,\lambda)=\Sigma(P^{i,k})$ фиксированы, и по некоторому вектору $\lambda\in\Lambda_i^k(P)$ многочлен P представлен в виде (0.3), $P_j(\eta)=0$ $(j=0,1,\dots,l-1)$, $P_l(\eta)\neq 0$ $(1\leqslant l\leqslant M)$. Тогда $P_l(\eta)>0$.*

Доказательство. Пункт a) очевиден, потому что если многогранник $\Re=\Re(P)$ не является полным, то не имеет вершину, например, на первой координатной оси, тогда на последовательности $\{\xi^s=(s,0,\dots,0)\}$ $(s=1,2,\dots)$ $P(\xi^s)=const$.

Для доказательства обоих пунктов b) и c), полагая, что $P_0(\eta):=P^{i,k}(\eta)<0$ (соответственно, $P_l(\eta)<0$) в некоторой точке $\eta\in\Sigma(P^{i,k})$, мы получим, что на последовательности $\{\xi^s:=s^\lambda\,\eta\}_{s=1}^\infty$ $P(\xi^s)\to-\infty$ при $s\to\infty$, что противоречит неотрицательности многочлена P. □

В добавление этой лемме мы докажем один простой результат, которым будем пользоваться ниже.

Лемма 1.2. *Пусть точка* $\alpha \in \mathbb{R}^{n,+}$ *(не обязательно с целыми компонентами) принадлежит выпуклой оболочке* $\Re$ *точек* $\alpha^1, \ldots, \alpha^N$, *т. е.* $\alpha = \sum\limits_{j=1}^{N} \sigma_j\, \alpha^j$ *для некоторых* $\sigma_j \geqslant 0$ $(j = 1, \ldots, N)$, $\sum\limits_{j=1}^{N} \sigma_j = 1$, $N \geqslant n$. *Тогда для всех* $\xi \in \mathbb{R}^n$ *имеем* $|\xi^\alpha| \leqslant h(\xi) := |\xi^{\alpha^1}| + \ldots + |\xi^{\alpha^N}|$. *Более того, если* α — *внутренняя точка* $\Re$, *то* $|\xi^\alpha|/[h(\xi)] \to 0$ *при* $h(\xi) \to \infty$.

Доказательство. По неравенству Юнга имеем

$$|\xi^\alpha| = \left|\xi^{\sum\limits_{j=1}^{N} \sigma_j\, \alpha^j}\right| = \left|\xi^{\alpha^1}\right|^{\sigma_1} \ldots \left|\xi^{\alpha^N}\right|^{\sigma_N} \leqslant \sum_{j=1}^{N} \sigma_j\, |\xi^{\alpha^j}| \leqslant \sum_{j=1}^{N} |\xi^{\alpha^j}|.$$

Для доказательства второй части леммы отметим, что если α — внутренняя точка $\Re$, то для некоторого $t > 1$ точка $t\,\alpha$ также является внутренней точкой $\Re$, следовательно, $|\xi^{t\,\alpha}| = |\xi^\alpha|^t \leqslant c\, h(\xi)$, т. е. $|\xi^\alpha| \leqslant c^{1/t}\, h(\xi)^{1/t}$. Поэтому $|\xi^\alpha|/h(\xi) \leqslant c^{1/t}\, h(\xi)^{(1/t)-1} \to 0$ при $h(\xi) \to \infty$.

Чтобы описать множество мономов, которые оцениваются через данный многочлен $P \in I_n$, мы сначала рассмотрим простейший случай, когда только одна главная грань многогранника Ньютона $\Re(P)$ многочлена P является вырожденной, при этом размерности $(n-1)$. Очевидно, что рассмотрение случая существования только одной вырожденной грани не умаляет общности потому, что при наличии более одной вырожденной грани соответствующие условия надо накладывать на каждую такую грань. Рассмотрение только $(n-1)$-мерной вырожденной грани объясняется тем, что

1) в двумерном случае это единственно возможный вариант;
2) в случае существования вырожденной грани размерности $k < n - 1$ рассуждения можно вести аналогично рассуждениям работ [12] или [7].

□

Теорема 1.1. *Пусть* $\Re = \Re(P)$ — *многогранник Ньютона многочлена* $P \in I_n$, *все главные грани которого невырождены, кроме, быть может, одной* $(n-1)$*-мерной грани* $\Gamma := \Re_{i_0}^{n-1}$ *с внешней нормалью* $\mu > 0$. *Тогда*:

1) *Если* Γ *невырождена, то для всех мультииндексов* $\nu \in \Re$ *справедливо неравенство*
$$|\xi^\nu| \leqslant c\,[|P(\xi)| + 1] \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \tag{1.1}$$
с некоторой постоянной $c = c(P, \nu) > 0$.
2) *Если* Γ *вырождена, по вектору* μ *многочлен* P *представляется в виде* (0.3) *и является двухслойным, т. е.* $P_1(\eta) \neq 0$ *для всех* $\eta \in \Sigma(P_0)$, *то неравенство* (1.1) *справедливо для всех мультииндексов* $\nu \in \Re^* = \Re^*(P, \mu) := \{\nu \in \Re, (\mu, \nu) \leqslant d_1\}$.
3) *если* $\nu \notin \Re^*$, *то неравенство* (1.1) *не выполняется ни для какой постоянной* c.

Доказательство. Сначала докажем пункт 3). Так как очевидно, что для точек $\nu \notin \Re$ неравенство (1.1) не выполняется, то достаточно рассматривать случай $\nu \in \Re \setminus \Re^*$. Пусть $\nu \in \Re \setminus \Re^*$ и $\eta \in \Sigma(P_0, \mu)$.

Принимая во внимание, что $d_1 < (\mu, \nu) \leqslant d_0$ и обозначая $\tau := |\eta_1^{\nu_1}| \ldots |\eta_n^{\nu_n}| \neq 0$, $\xi(t) := t^\mu\, \eta$, имеем $|\xi(t)^\nu| = t^{(\mu,\nu)}\tau$, $|P(\xi(t))| = t^{d_1}\, |P_1(\eta)|(1 + o(1))$ при $t \to \infty$, т. е. $|\xi(t)^\nu|/[1 + |P(\xi(t))|] \to \infty$. Это означает, что неравенство (1.1) не выполняется и доказывает пункт 3) теоремы.

Первый пункт теоремы доказан В. П. Михайловым в работе [21]. Докажем пункт 2). Пусть наоборот, существуют точка $\nu \in \Re^\star$ и последовательность $\{\xi^s\}_{s=1}^\infty$ такие, что $|\xi^s, \mu| \to \infty$ (что эквивалентно $|\xi^s| \to \infty$) при $s \to \infty$ и

$$\frac{|(\xi^s)^\nu|}{|P(\xi^s)| + 1} \to \infty. \tag{1.2}$$

Обозначая $\tau^s := \xi^s/|\xi^s, \mu|^\mu$ $(s = 1, 2, \ldots)$, имеем $|\tau^s, \mu| = 1$ $(s = 1, 2, \ldots)$. По теореме Больцано—Вейерштрасса существуют подпоследовательность последовательности $\{\xi^s\}$ (которую также обозначим через $\{\xi^s\}$) и точка τ такие, что $|\tau, \mu| = 1$ и $|\tau^s - \tau, \lambda| \to 0$ (следовательно, $\tau^s \to \tau$) при $s \to \infty$. Таким образом, соотношение (1.2) возможно, только если $P_0(\tau) = 0$. С другой стороны, так как $P \in I_n$, то по лемме 1.1 $P_0(\xi) \geqslant 0$ и $P_1(\tau) > 0$, поэтому с некоторой постоянной $c_1 > 0$ и для достаточно больших s имеем (напомним, что $d_0 > d_1 > \ldots > d_M$)

$$|P_2(\xi^s)| + |P_3(\xi^s)| + \ldots + |P_M(\xi^s)| = o(|P_0(\xi^s) + P_1(\xi^s)|),$$

т. е. соотношение (1.2) эквивалентно следующему соотношению: при $s \to \infty$

$$\frac{|(\tau^s\,|\xi^s,\mu|^{\mu})|^{\nu}}{\left|\sum\limits_{j=0}^{1} |\xi^s,\mu|^{d_j}\,P_{d_j}(\tau^s)\right| + 1} \to \infty.$$

Отсюда имеем для достаточно больших s

$$|P(\xi^s)| = \left|\sum_{j=0}^{M} P_{d_j}(\xi^s)\right| = \left|\sum_{j=0}^{M} |\xi^s,\mu|^{d_j}\,P_{d_j}(\tau^s)\right| \geqslant$$

$$\geqslant \left|\,|\xi^s,\mu|^{d_0}\,P_{d_0}(\tau^s) + |\xi^s,\mu|^{d_1}\,P_{d_1}(\tau^s)\right| - \sum_{j=2}^{M} |\xi^s,\mu|^{d_j}\,|P_{d_j}(\tau^s)| \geqslant |\xi^s,\mu|^{d_1}\,|P_{d_1}(\tau)|(1+o(1)).$$

Поэтому

$$\frac{|(\tau^s)^{\nu}|\,|\xi^s,\mu|^{(\mu,\nu)}}{|\xi^s,\mu|^{d_1}\,|P_{d_1}(\tau^s)|(1+o(1))} \to \infty.$$

при $s \to \infty$. Так как множество чисел $\{(\tau^s)^{\nu}\}$ ограничено, то это противоречит условию $(\mu,\nu) \leqslant d_1$ и доказывает теорему. $\square$

В дополнение к доказанной теореме мы приведём ещё один результат, которым будем пользоваться ниже и который доказан в работе [19].

Лемма 1.3. *Пусть многочлен $P \in \mathbb{I}_n$, удовлетворяет условиям теоремы* 1.1, *а $\{\xi^s\}$ — последовательность из $\mathbb{R}^n$ такая, что $\xi^s \to \infty$ и $\xi^s/|\xi^s,\mu|^{\mu} \to \eta$ при $s \to \infty$, где $\eta_1 \ldots \eta_n = 0$. Тогда существует постоянная $c > 0$ такая, что для всех $\nu \in \Re(P)$ справедливо неравенство* (1.1).

Таким образом, задача об описании набора мультииндексов, для которых выполняется оценка (0.5), для *двухслойных многочленов* решена. Перейдём к решению этой задачи для *многослойных многочленов.*

Для этого нам понадобится ввести понятие сравнения мощностей дифференциальных операторов (многочленов) (см., например, [14]) и вывести алгебраические условия, при которых один дифференциальный оператор (многочлен) мощнее другого дифференциального оператора (многочлена), чем мы будем заниматься в следующем разделе.

2. Сравнение мощностей дифференциальных операторов (многочленов). Двухслойный случай

Определение 2.1. Будем говорить, что дифференциальный оператор $P(D)$ (многочлен $P(\xi)$) *мощнее* дифференциального оператора $Q(D)$ (многочлена $Q(\xi)$) и обозначать $Q < P$ или $P > Q$, если существует постоянная $c > 0$ такая, что $|Q(\xi)| \leqslant c\,[|P(\xi)| + 1]$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$. Если $Q < P < Q$, то говорим, что P и Q *равномощны*, или имеют *одинаковую мощность.*

Прежде всего сделаем следующее замечание.

Замечание 2.1. Условие $\Re(Q) \subset \Re(P)$ является необходимым для выполнения соотношения $Q < P$ независимо от вырожденности или невырожденности многочлена P.

Доказательство. В самом деле, пусть $\Re(Q) \not\subset \Re(P)$ для сравнимых многочленов P и Q. Тогда, очевидно, существуют вершина $\nu \neq 0$ многогранника $\Re(Q)$, не принадлежащая многограннику $\Re(P)$, вектор $\lambda > 0$, являющийся внешней нормалью вершины ν, и число $d > 0$ такие, что $(\lambda,\alpha) = d$ является уравнением опорной к $\Re(Q)$ гиперплоскости, проходящей через точку ν и не содержащей ни одной точки множества $\Re(Q) \cup \Re(P)$, отличной от ν. Тогда $(\lambda,\nu) > (\lambda,\alpha)$ для всех $\alpha \in \Re(Q) \cup \Re(P)$, $\alpha \neq \nu$.

Пусть $\eta \in \mathbb{R}^{n,0}$ и $\xi^s = s^{\lambda}\,\eta$ $(s = 1.2\ldots.)$, тогда при $s \to \infty$ $Q(\xi^s) = s^d\,\eta^{\nu}(1+o(1))$, $P(\xi^s) = o(s^d)$. Так как $\eta^{\nu} \neq 0$, то это означает, что $Q \not< P$. $\square$

Из приведённого замечания следует, что при сравнении мощностей многочленов $\{Q\}$ с заданным многочленом P интерес представляет только случай, когда $\Re(Q) \subset \Re(P)$.

Уточним то множество многочленов $\{P\}$, с которыми будем сравнивать остальные многочлены.

Определение 2.2. Через $\mathbb{G}_n = \mathbb{G}_n(\lambda)$ обозначим множество многочленов $P \in \mathbb{I}_n$, для которых невырождены все главные грани многогранника Ньютона $\Re(P)$, кроме, быть может одной $(n-1)$-мерной главной грани $\Gamma := \Re^{n-1}_{i_0}$ $(1 \leqslant i_0 \leqslant M_{n-1})$ с внешней нормалью $\lambda > 0$. При этом, если грань Γ вырождена и по вектору λ многочлен P представлен в виде (см. (0.3))

$$P(\xi) = \sum_{j=0}^{M(P)} P_j(\xi) = \sum_{j=0}^{M(P)} P_{d_j(\lambda)}(\xi) = \sum_{j=0}^{M(P)} \sum_{(\lambda,\alpha)=d_j(\lambda)} \gamma_\alpha \, \xi^\alpha, \tag{2.1}$$

то $\Sigma(P_0, \lambda) \cap \Sigma(P_1, \lambda) = \varnothing$ и с некоторой постоянной $c > 0$

$$1 + |P(\xi)| \geqslant c\,[\,|P_0(\xi)| + |P_1(\xi)| + \ldots + |P_{M(P)}(\xi)|\,] \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.2}$$

Прежде всего докажем, что сравнение общих многочленов можно свести к сравнению обобщённо-однородного многочлена с общим многочленом.

Лемма 2.1. *Пусть по вектору λ многочлен $P \in \mathbb{G}_n$ представлен в виде* (2.1)*. Тогда существует число $c > 1$ такое, что для всех $t \geqslant 1$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$*

$$c^{-1}\, t^{-d_0}\; [\,|P(t^\lambda \xi)| + 1] \leqslant |P(\xi)| + 1 \leqslant c\; [\,|P(t^\lambda \xi)| + 1]. \tag{2.3}$$

Доказательство. Сначала докажем левую часть неравенства (2.3). Из условий $d_0 > d_1 > \ldots > d_M$ и $P \in \mathbb{G}_n$ с некоторой постоянной $c_1 > 0$ для всех $t \geqslant 1$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$ имеем

$$1 + |P(t^\lambda \xi)| \leqslant 1 + \sum_{j=0}^{M} |P_{d_j}(t^\lambda \xi)| = 1 + \sum_{j=0}^{M} t^{d_j}\, |P_{d_j}(\xi)| \leqslant t^{d_0} \left[1 + \sum_{j=0}^{M} |P_{d_j}(\xi)|\right] \leqslant c_1\, t^{d_0}\, [1 + |P(\xi)|],$$

откуда следует левая часть оценки (2.3).

Для доказательства правой части оценки (2.3) заметим, что в силу условия $P \in \mathbb{G}_n$ имеем с некоторыми положительными постоянными c_2 и c_3 при всех $t \geqslant 1$ и $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$1 + |P(t^\lambda \xi)| \geqslant c_2\, [1 + \sum_{j=0}^{M} |P_{d_j}(t^\lambda \xi)|] = c_2\, [1 + \sum_{j=0}^{M} t^{d_j}\, |P_{d_j}(\xi)|] \geqslant c_2\, [1 + \sum_{j=0}^{M} |P_{d_j}(\xi)|] \geqslant c_3\, [|P(\xi)| + 1],$$

что доказывает правую часть оценки (2.3). □

Лемма 2.2. *Пусть по вектору $\lambda = \lambda(P)$ многочлен $P \in \mathbb{G}_n$ представлен в виде* (2.2)*, а многочлен Q в виде*

$$Q(\xi) = \sum_{j=0}^{M(Q)} Q_j(\xi) =: \sum_{j=0}^{M(Q)} Q_{\delta_j}(\xi) = \sum_{j=0}^{M} \sum_{(\lambda,\alpha)=\delta_j} \gamma_\alpha(Q)\, \xi^\alpha, \tag{2.4}$$

при этом $\Re(Q) \subset \Re(P)$. Тогда $Q < P$ в том и только в том случае, когда $Q_j < P$ для всех $j = 0, 1, \ldots, M(Q)$.

Доказательство. Так как часть теоремы, относящаяся к достаточности, очевидна, то докажем необходимость.

Из условия $Q < P$ следует, что с некоторой постоянной $c_1 > 0$ имеем

$$|Q(t^\lambda \xi)| \leqslant c_1[1 + |P(t^\lambda \xi)|] \;\; \forall t > 0,\, \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Отсюда в силу леммы 2.1 получаем, что для любого $t > 1$ с некоторой постоянной $c_2 = c_2(t) > 0$

$$|Q(t^\lambda \xi)| \leqslant c_2[1 + |P(\xi)|] \;\; \forall \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.5}$$

Пусть $t_j \geqslant 1$ $(j = 0, 1, \ldots, M)$ — попарно различные числа. Рассмотрим следующую систему уравнений относительно $\{Q_j\}$ $(j = 0, 1, \ldots, M)$:

$$\sum_{j=0}^{M} t_k^{d_j} Q_j(\xi) = Q(t_k^{\delta_j}\, \xi), \quad k = 0, 1, \ldots, M, \quad \xi \in \mathbb{R}^n.$$

Так как матрица

$$\begin{pmatrix} t_0^{\delta_0} & \dots & t_0^{\delta_M} \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ t_M^{\delta_0} & \dots & t_M^{\delta_M} \end{pmatrix}$$

невырождена, то для любого $j = 0, 1, \dots, M_Q$ существуют числа κ_l^j $(l = 0, 1, \dots, M)$ такие, что

$$Q_j(\xi) = \sum_{l=0}^{M} \kappa_l^j \, Q(t_l^\lambda \xi), \quad j = 0, 1, \dots, M. \tag{2.6}$$

Применяя оценки (2.5) для точек $t_0, t_1, \dots, t_M$, получаем с некоторой постоянной $c_3 > 0$

$$|Q_j(\xi)| \leqslant c_3 \, [|P(\xi)| + 1] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n, \quad j = 0, 1, \dots, M.$$

Лемма 2.2 доказана. □

Таким образом, лемма 2.2 сводит задачу сравнения общих многочленов $\{Q\}$ с (двухслойным) многочленом $P \in \mathbb{G}_n$ к задаче сравнения обобщённо-однородных многочленов с общим многочленом P. Прежде чем перейти к этому вопросу, нам понадобится сравнить два обобщённо-однородных многочлена. Следующая теорема посвящена этому.

Теорема 2.1. *Пусть P и Q — λ-однородные многочлены λ-степени d_P и d_Q соответственно,* $(\lambda > 0$). *Пусть все главные грани многогранника Ньютона $\Re(P)$ многочлена P невырождены, кроме, быть может, $(n-1)$-мерной грани Γ, содержащей множество (P). Тогда*:

I) *Если грань Γ невырождена, то $Q < P$ для любого многочлена Q такого, что $\Re(Q) \subset \Re(P)$.*

II) *Если грань Γ вырождена, то $Q < P$ тогда и только тогда, когда одновременно выполняются следующие условия*:

1) $d_Q \leqslant d_P$;
2) $\Sigma(Q, \lambda) \supset \Sigma(P, \lambda)$;
3) $\Re(Q) \subset \Re(P)$;
4) *для каждой точки $\eta \in \Sigma(P, \lambda)$ существует некоторая окрестность $U(\eta)$ и постоянная $c = c(\eta) > 0$, такие, что*

$$|Q(\xi)| \leqslant c|P(\xi)|^{\frac{d_Q}{d_P}} \quad \forall \xi \in U(\eta);$$

5) *для каждой точки $\eta \in \Sigma(P, \lambda)$*

$$\frac{d_Q}{d_P} \leqslant \frac{\Delta(\eta, Q)}{\Delta(\eta, P)}. \tag{2.7}$$

Для упрощения доказательства теоремы сделаем следующие шаги.

Замечание 2.2 (первый шаг)**.** Так как числа $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ являются положительными и рациональными и любой λ-однородный многочлен R также $(k\,\lambda)$-однороден, то, выбирая натуральное число k соответствующим образом (что не влияет на отношение d_Q/d_P), мы можем считать, что числа d_Q и d_P являются натуральными, следовательно, функции P^{d_Q} и Q^{d_P} являются многочленами. Поэтому мы можем сравнивать их мощности.

Более того, справедлива следующая лемма.

Лемма 2.3 (второй шаг)**.** *Пусть P и Q — λ-однородные многочлены λ-степеней d_P и d_Q, соответственно, где $d_P \geqslant d_Q$. Тогда*:

a) *$P > Q$ в том и только в том случае, когда $Q^{d_P} < P^{d_Q}$ (или, что то же самое, $Q < P^{d_Q/d_P}$), т. е. существует положительное число c такое, что*

$$|Q(\xi)|^{d_P} \leqslant c\,[1 + |P(\xi)|^{d_Q}] \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^n; \tag{2.8}$$

b) *если $P > Q$ и $d_Q < d_P$, то* $\lim\limits_{|P(\xi)| \to \infty} |Q(\xi)|/[1 + |P(\xi)|] \to 0$;

c) *пусть $P > Q$, $d_P \geqslant d_Q$, $\delta < d_Q/d_P$, $\eta \in \Sigma(P, \lambda)$ и $\eta^s \to \eta$ при $s \to \infty$, тогда $|Q(\eta^s)|/|P(\eta^s)|^\delta \to 0$ при $s \to \infty$.*

Доказательство. Докажем пункт a). Так как $d_P \geqslant d_Q$, то из $Q^{d_P} < P^{d_Q}$ следует, что $Q < P$. Следовательно, достаточность оценки (2.8) для выполнения $Q < P$ очевидна.

Докажем, что оценка (2.8) следует из $Q < P$. Пусть, наоборот, $Q < P$, но оценка (2.8) не выполняется, т. е. существует последовательность $\{\xi^s\}$ такая, что $\xi^s \to \infty$ при $s \to \infty$ и $|Q(\xi^s)|^{d_P}/[1+|P(\xi^s)|^{d_Q}] \to \infty$. Тогда $|Q(\xi^s)| \to \infty$ при $s \to \infty$. Так как $Q < P$, то отсюда следует, что $t_s := |P(\xi^s)| \to \infty$ при $s \to \infty$.

Обозначим $\tau_i^s := t_s^{-\lambda_i/d_P}\,\xi_i^s$, т. е. $\xi^s = t_s^{\lambda/d_P}\,\tau^s$. Имеем $P(\tau^s) = 1$ $(i = 1,2,\ldots,n,\ s = 1,2,\ldots)$. Из λ-однородности многочленов Q и P имеем

$$|Q(\xi^s)| = t_s^{d_Q/d_P}\,|Q(\tau^s)|,$$

$$|P(\xi^s)|^{d_Q/d_P} = t_s^{d_Q}\,|P(\tau^s)|^{d_Q/d_P} = t_s^{d_Q}.$$

Так как $Q < P$, из полученных представлений и из $P(\tau^s) = 1$ $(s = 1,2,\ldots)$ имеем

$$|Q(\xi^s)|/[1+|P(\xi^s)|^{d_Q/d_P}] = t_s^{d_Q/d_P}\,|Q(\tau^s)|/[1+t_s^{d_Q}] \leqslant$$
$$\leqslant c\,t_s^{d_Q/d_P}\,[1+|P(\tau^s)|]/[1+t_s^{d_Q}] \leqslant 2\,c\,t_s^{d_Q/d_P-d_Q} = 2\,c\,t_s^{d_Q(1/d_P-1)}.$$

Так как $d_P \geqslant 1$, выражение $t_s^{d_Q(1/d_P-1)}$ ограничено, что противоречит нашему предположению и доказывает пункт a) леммы.

Пункт b). Сначала отметим, что из неравенства (2.8) следует, что для достаточно больших $|\xi|$ с некоторой постоянной $c_1 > 0$ справедливо неравенство

$$\frac{|O(\xi)|}{|P(\xi)|} \leqslant c_1\,|P(\xi)|^{d_O/d_P-1}.$$

Так как $d_Q < d_P$, то $\lim\limits_{|\xi|\to\infty} |Q(\xi)|/|P(\xi)| \to 0$ при $|P(\xi)| \to \infty$.

Теперь докажем пункт c). Опять полагаем обратное, т. е. что для некоторой точки $\eta \in \Sigma(P,\lambda)$, некоторой последовательности $\{\eta^s\}, \eta^s \to \eta$ и некоторого числа $\delta < d_Q/d_P$

$$|Q(\eta^s)|/|P(\eta^s)|^\delta \geqslant \varepsilon > 0 \ \ (s = 1,2,\ldots).$$

Обозначим $t_s := |P(\eta^s)|^{-1/d_P}$, $\xi^s := t_s^\lambda\,\eta^s$ $(s = 1,2,\ldots)$. Тогда из λ-однородности многочленов Q и P имеем для всех $s = 1,2,\ldots$

$$|Q(\xi^s)| = t_s^{d_Q}\,|Q(\eta^s)| \geqslant \varepsilon\ t_s^{d_Q}\,|P(\eta^s)|^\delta = \varepsilon\,t_s^{d_Q-\delta\,d_P}, \tag{2.9}$$

$$|P(\xi^s)| = t_s^{d_P}\,|P(\eta^s)| \equiv 1. \tag{2.10}$$

Так как $t_s \to \infty$ (напомним, что $P(\eta^s) \to 0$) при $s \to \infty$ и $d_Q - \delta\,d_P > 0$, соотношения (2.9)-(2.10) противоречат условию $Q < P$ и доказывают пункт c). □

Основываясь на этой лемме и имея в виду, что многочлены P^{d_Q} и Q^{d_P} имеют одинаковую λ-степень, далее, при сравнении мощностей двух многочленов P и Q, там, где это нам удобно, мы будем считать, что сравниваемые многочлены имеют одинаковую λ-степень: $d_P = d_Q := d$. После такого соглашения теорему 2.1 можно перефразировать следующим образом.

Теорема 2.1' (третий шаг). *Пусть P и Q — λ-однородные многочлены λ-степени $d := d_P = d_Q$, где $\lambda > 0$. Тогда для выполнения соотношения $Q < P$ каждое из следующих условий* 1)–4) *необходимо, а совместное выполнение условий* 1)–3) *достаточно*:

1) $\Re(Q,\lambda) \subset \Re(P,\lambda)$;
2) $\Sigma(Q) \supset \Sigma(P)$;
3) *для каждой точки $\eta \in \Sigma(P,\lambda)$ существует окрестность $U(\eta)$ и постоянная $c = c(\eta) > 0$ такие, что $|Q(\xi)| \leqslant c\,|P(\xi)|\ \forall \xi \in U(\eta)$*;
4) $\Delta(\eta,Q) \geqslant \Delta(\eta,P)$ *для каждой $\eta \in \Sigma(P,\lambda)$*.

Сделаем ещё следующее замечание.

Замечание 2.3. Очевидно, условие 3) теоремы эквивалентно следующему:

3.a) *существует постоянная $c = c(\eta) > 0$ такая, что $|Q(\xi)| \leqslant c$ для всех $\xi \in \mathcal{D}(P) := \{\eta \in \mathbb{R}^n; |P(\eta)| = 1\}$*.

Доказательство теорем 2.1*,* 2.1'. Таким образом, дело сводится к доказательству теоремы 2.1'. Отметим, что доказательство проводится методом, отличным от метода доказательства теоремы 1 работы [16].

Необходимость условия 1) доказана в замечании 2.1.

Необходимость условия 2) очевидна, потому что в противном случае для некоторой точки $\eta \in \Sigma(Q,\lambda) \setminus \Sigma(P,\lambda)$ при $t \to \infty$ мы будем иметь $P(t^{\lambda}\eta) = t^d\, P(\eta) = 0$, в то время как $Q(t^{\lambda}\eta) = t^d\, Q(\eta) \to \infty$.

Для доказательства необходимости условия 3), опять предполагая обратное, на основании пункта 2) получим существование точки $\eta \in \Sigma(P,\lambda)$ и последовательности $\{\eta^s\} : \eta^s \to \eta$ при $s \to \infty$ таких, что $P(\eta^s) \neq 0$ $(s = 1, 2, \ldots)$ и

$$R(\eta^s) := |Q(\eta^s)/P(\eta^s)| \to \infty. \tag{2.11}$$

При этом отметим, что если $P(\eta^s) = 0$ для некоторых s, то по уже доказанному свойству 2) $Q(\eta^s) = 0$ для таких s и соотношение $Q < P$ для таких s очевидно. Поэтому, можем считать, что $P(\eta^s) \neq 0$, $s = 1, 2, \ldots$

Обозначим $t_s := |P(\eta^s)|^{-1/d}$, $\xi^s := t_s^{\lambda}\eta^s$ $(s = 1, 2, \ldots)$. На последовательности $\{\xi^s\}$ мы имеем $P(\xi^s) = P(t_s^{\lambda}\eta^s) = t_s^d\, P(\eta^s) = 1$ $(s = 1, 2, \ldots)$ и $Q(\xi^s) = t_s^d\, Q(\eta^s)$.

Из определения функции R следует, что $Q(\eta^s) = [R(\eta^s)]\ |P(\eta^s)|$. Так как $t_s\, |P(\eta^s)|^{1/d} = 1$ $(s = 1, 2, \ldots)$, то (см. (2.11))

$$|Q(\xi^s)| = t_s^d\, |Q(\eta^s)| = t_s^d\, [R(\eta^s)]\ \ |P(\eta^s)| = R(\eta^s) \to \infty$$

при $s \to \infty$. Это значит $Q \not< P$, что и доказывает необходимость условия 3) теоремы.

Наконец, докажем необходимость условия 4). Пусть $\Delta(\eta, Q) < \Delta(\eta, P)$ для некоторой точки $\eta \in \Sigma(P,\lambda)$.

По определению $\Delta(\eta, Q)$ существует точка $\tau \in \mathbb{R}^n$ такая, что

$$\sum_{(\lambda,\alpha)=\Delta(\eta,Q)} \frac{Q^{(\alpha)}(\eta)}{\alpha!}\, \tau^{\alpha} \neq 0.$$

Пусть $t > 0$ и $\xi(t) = \eta + t^{-\lambda}\, \tau$. Тогда $\xi(t) \to \eta$ при $t \to \infty$, и по формуле Тейлора получим для достаточно больших t

$$Q(\xi(t)) = \sum_{(\lambda,\alpha)\geqslant\Delta(\eta,Q)} \frac{Q^{(\alpha)}(\eta)\, (t^{\lambda}\, \tau)^{\alpha}}{\alpha!} = t^{-\Delta(\eta,Q)} \Big[\sum_{(\lambda,\alpha)=\Delta(\eta,Q)} \frac{Q^{(\alpha)}(\eta)\, \tau^{\alpha}}{\alpha!} + o(1) \Big] =: t^{-\Delta(\eta,Q)}\, A(Q),$$

$$P(\xi(t)) = t^{-\Delta(\eta,P)}\ \Big[\sum_{(\lambda,\alpha)=\Delta(\eta,P)} \frac{P^{(\alpha)}(\eta)\, \tau^{\alpha}}{\alpha!} + o(1) \Big] =: t^{-\Delta(\eta,Q)}\, B(P)],$$

где $|A(Q)\, B(P)| \neq 0$.

Так как по нашему предположению $\Delta(\eta, Q) < \Delta(\eta, P)$, то отсюда следует, что

$$\frac{|Q(\xi(t))|}{|P(\xi(t))|} = t^{\Delta(\eta,P)-\Delta(\eta,(Q)}\ \left|\frac{A(Q)}{B(P)}\right| \to \infty$$

при $t \to \infty$, что доказывает необходимость условия 4).

Достаточность. Мы докажем, что условия 1)–3) (см. также замечание 2.3) обеспечивают соотношение $Q < P$. Представим $\mathbb{R}^n$ в виде объединения следующих двух множеств: $\mathcal{A} := \{\xi \in \mathbb{R}^n,\ P(\xi) = 0\}$ и $\mathcal{B} := \mathbb{R}^n \setminus \mathcal{A}$. Из λ-однородности многочленов P и Q и из условия 2) следует, что $Q(\xi) = 0$ для всех $\xi \in \mathcal{A}$. Поэтому для любого $c > 0$

$$|Q(\xi)| \leqslant c\, [|P(\xi)| + 1]\ \ \forall \xi \in \mathcal{A}. \tag{2.12}$$

Покажем, что соотношение (2.12) справедливо также для множества $\mathcal{B}$ с некоторой постоянной $c > 0$. Для $\xi \in \mathcal{B}$ обозначим $\eta(\xi) := |P(\xi)|^{-\lambda/d}$. Очевидно, что $\eta(\xi) \in \mathcal{D}(P)$ для всех $\xi \in \mathcal{B}$. Поэтому в силу условия 3) нашей теоремы $|Q(\eta(\xi)| \leqslant c$ $\forall \xi \in \mathcal{B}$. Следовательно, в силу λ-однородности многочленов P и Q, имеющих одинаковую степень d, имеем

$$\left|\frac{Q(\xi)}{P(\xi)}\right| = |Q(\, |P(\xi)|^{-\lambda/d}\, \xi)| = |Q(\eta(\xi))| \leqslant c \quad \forall \xi \in \mathcal{B}.$$

Мы получили оценку (2.12) также для множества $\mathcal{B}$ и, следовательно, для всего пространства $\mathbb{R}^n$.

Теорема 2.1' и, следовательно, теорема 2.1 доказаны. □

Таким образом, чтобы ответить на поставленный вопрос, нам остаётся сравнить обобщённо-однородный многочлен с общим многочленом, что дается следующей теоремой.

Теорема 2.2. *Пусть $P \in \mathbb{G}_n$, а Q — λ-однородный многочлен λ-степени $\delta = \delta_Q$, $\mu > 0$, $d_1 < \delta < d_0$ и $\Re(Q) \subset \Re(P)$. Тогда, если грань Γ невырождена, то $Q < P$. Если грань Γ вырождена, то*:

I) *$Q < P$ в том и только в том случае, когда*

I.1) $\Sigma(P_0, \lambda) \subset \Sigma(Q, \lambda)$;

I.2) $(d_0 - d_1)/(\delta - d_1) \geqslant \Delta(\eta, P_0)/\Delta(\eta, Q)$, $\forall \eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$;

I.3) *для каждой точки $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$ существуют постоянная $c = c(\eta) > 0$ и окрестность $U(\eta)$ такие, что*

$$\psi(\xi) := |Q(\xi)|/|P_0(\xi)|^{(\delta_Q - d_1)/(d_0 - d_1)} \leqslant c \ \forall \xi \in U(\eta).$$

II) *Более того,*

II.1) *если для каждой точки $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$ существует окрестность $U_1(\eta)$ такая, что $Q(\xi) \geqslant 0$ для всех $\xi \in U_1(\eta)$, то $P < P + Q < P$;*

II.2) *если $\psi(\xi) \to 0$ при $\xi \to \eta$ для любой точки $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$, то $|Q(\xi)|/[P(\xi) + 1] \to 0$ при $|\xi| \to \infty$ и $Q < P + Q$, $P < P + Q < P$.*

Доказательство. В невырожденном случае утверждение теоремы следует из теоремы 1.1. Рассмотрим случай, когда грань Γ вырождена.

Необходимость условия I.1) очевидна.

Докажем необходимость условия I.2). Пусть, наоборот, условие $Q < P$ выполняется, но существует точка $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$ такая, что

$$(d_0 - d_1)/(\delta_Q - d_1) < \Delta(\eta, P_0)/\Delta(\eta, Q). \tag{2.13}$$

Для $t > 0$, $\theta = (\theta_1, \ldots, \theta_n) \in \mathbb{R}^n$, $\kappa > 0$ положим $\xi_i = \xi_i(t) = \xi_i(t, \theta, \kappa) = t^{\mu_i}(\eta_i + \theta_i t^{-\kappa \mu_i})$, $i = 1, \ldots, n$. Тогда по формуле Тейлора имеем

$$Q(\xi(t)) = t^{\delta_Q} Q(\eta + \theta t^{-\kappa \mu}) = t^{\delta_Q} \sum_\alpha t^{-\kappa (\mu, \alpha)} [D^\alpha Q(\eta)/(\alpha!)] \theta^\alpha =$$
$$= t^{\delta_Q - \kappa \Delta(\eta, Q)} \sum_{(\mu, \alpha) = \Delta(\eta, Q)} [D^\alpha Q(\eta)/(\alpha!)] \theta^\alpha + o(t^{\delta_Q - \kappa \Delta(\eta, Q)}).$$

Выберем вектор θ таким образом, чтобы

$$c = c(\theta) := \sum_{(\mu, \alpha) = \Delta(\eta, Q)} [D^\alpha Q(\eta)/(\alpha!)] \theta^\alpha \neq 0.$$

Существование такого вектора очевидно следует из определения числа $\Delta(\eta, Q)$. В самом деле, в противном случае получается, что все коэффициенты многочлена $c(\theta)$ — нули, что противоречит определению числа $\Delta(\eta, Q)$. Тогда (для числа θ, фиксированного таким образом), получаем

$$|Q(\xi(t))| \geqslant c\, t^{\delta_Q - \kappa \Delta(\eta, Q)}. \tag{2.14}$$

Для многочленов P_0 и P_1, очевидно, имеем с некоторой постоянной $c_1 > 0$, и для всех достаточно больших t

$$|P_0(\xi(t))| \leqslant c_1 t^{d_0 - \kappa \Delta(\eta, P_0)}, \ \ |P_1(\xi(t))| = t^{d_1} P_1(\eta) (1 + o(1)). \tag{2.15}$$

Очевидные геометрические соображения показывают, что при $t \to +\infty$

$$r(\xi(t)) := P(\xi(t)) - [P_0(\xi(t)) + P_1(\xi(t))] = o(t^{d_1}).$$

Положим $\kappa = (d_0 - d_1)/\Delta(\eta, P_0)$, тогда $d_0 - \kappa \Delta(\eta, P_0) = d_1$, и из (2.15) получаем с некоторой постоянной $c_2 > 0$

$$|P(\xi(t))| \leqslant c_2 t^{d_1}. \tag{2.16}$$

Легко убедиться, что из условия I.2) теоремы следует соотношение $d_1 < \delta_Q - \kappa\,\Delta(\eta, Q)$. Отсюда и из оценок (2.14), (2.16) следует, что $|Q(\xi(t))|/[1 + P(\xi(t))] \to \infty$ при $t \to \infty$, что противоречит условию $Q < P$ и доказывает необходимость условия I.2) теоремы.

Необходимость условия I.3). Предположим, что для некоторой точки $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$ существует последовательность $\{\eta^s\}$ такая, что $P_o(\eta^s) \neq 0$ $(s = 1, 2, \ldots)$, $\eta^s \to \eta$ при $s \to \infty$ и

$$\psi(\eta^s) := |Q(\eta^s)|/[|P_0(\eta^s)|^{(\delta_Q - d_1)/(d_0 - d_1)}] \to \infty. \tag{2.17}$$

Обозначим $t_s := |P_0(\eta^s)|^{-1/(d_0 - d_1)}$, $\xi^s = t_s^{\mu}\,\eta^s$, $s = 1, 2, \ldots$ Так как $\eta^s \to \eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$, имеем $t_s \to \infty$ при $s \to \infty$. Тогда, как следствие μ-однородности многочленов $P_0(\xi)$, $P_1(\xi)$ и $Q(\xi)$, имеем для достаточно больших s

$$|P_1(\xi^s)| = t_s^{d_1}\,|P_1(\eta^s)| = t_s^{d_1}\,|P_1(\eta)|\,(1 + o(1)), \tag{2.18}$$

$$|P_0(\xi^s)| = t_s^{d_0}\,|P_0(\eta^s)| = t_s^{d_1}, \;\; r(\xi) = o(t_s^{d_1}). \tag{2.19}$$

Представления (2.18), (2.19) показывают, что существует число $c_3 > 0$ такое, что для достаточно больших s

$$|P(\xi^s)| + 1 \leqslant c_3 t^{d_1}. \tag{2.20}$$

Для $Q(\xi)$ аналогично получаем

$$|Q(\xi^s)| = t_s^{\delta_Q}\,|Q(\eta^s)| = t_s^{\delta_Q}\,R(\eta^s)\,|P_0(\eta^s)|^{(\delta_Q - d_1)/(d_0 - d_1)} = R(\eta^s)\,t_s^{d_1}. \tag{2.21}$$

Оценки (2.20) и (2.21) вместе с (2.17) показывают, что при $s \to \infty$

$$|Q(\xi^s)|/[|P(\xi^s)| + 1] \geqslant [1/c_3]\,\psi(\eta^s) \to \infty.$$

Это доказывает необходимость условия I.3) для $Q < P$.

Докажем *достаточность*. Предположим, что $Q \not< P$ при условиях настоящей теоремы, т. е. существует последовательность $\{\xi^s\}$ такая, что $\xi^s \to \infty$ при $s \to \infty$, но

$$\frac{|Q(\xi^s)|}{|P(\xi^s)| + 1} \to \infty. \tag{2.22}$$

Поступая как выше, обозначим $\eta^s := \xi^s/|\xi^s, \lambda|^{\lambda}$, тогда $|\eta^s, \lambda| = 1$ $(s = 1, 2, \ldots)$. Так как множество $\{\eta^s : |\eta^s, \lambda| = 1,\ s = 1, 2, \ldots\}$ ограничено (напомним, что $\lambda > 0$), существует подпоследовательность последовательности $\{\xi^s\}$ (которую также обозначим через $\{\xi^s\}$) и точка η, $|\eta, \lambda| = 1$, такие, что $|\eta^s - \eta, \lambda| \to 0$ при $s \to \infty$.

Покажем, что $P_0(\eta) = 0$. Пусть, наоборот, $P_0(\eta) \neq 0$. Тогда при $s \to \infty$ имеем

$$|P(\xi^s)| = |\xi^s, \lambda|^{d_0}\,|P_0(\eta)|(1 + o(1)) \tag{2.23}$$

и существует число $c_4 > 0$ такое, что

$$|Q(\xi^s)| \leqslant c_4\,|\xi^s, \lambda|^{d_1} \;\; s = 1, 2, \ldots \tag{2.24}$$

Соотношения (2.23) и (2.24) вместе противоречат нашему предположению (2.22) и доказывают, что $P_0(\eta) = 0$.

Рассмотрим следующие возможные случаи:

a) $\eta \in \mathbb{R}^{n,0}$, т. е. $\eta \in \Sigma(P_0, \lambda)$;

b) $\eta \notin \mathbb{R}^{n,0}$, т. е. $\eta_1 \ldots \eta_n = 0$.

Так как $\eta^s \to \eta$ при $s \to \infty$, то в случае a) по условию I.3) теоремы существует постоянная $c_4 > 0$ такая, что (не нарушая общности, можно считать, что для всех $s = 1, 2, \ldots$)

$$|Q(\eta^s)| \leqslant c_4\,|P_0(\eta^s)|^{(\delta_Q - d_1)/(d_0 - d_1)}. \tag{2.25}$$

В силу условия $P \in \mathbb{G}(n)$ существуют положительные постоянные c_5 и c_6 такие, что для достаточно больших s (не нарушая общности, можно считать, что для всех $s = 1, 2, \ldots$) имеем

$$1 + |P(\xi^s)| = 1 + \left|\sum_{j=0}^{M} P_j(\xi^s)\right| = 1 + \left|\sum_{j=0}^{M} |\xi^s, \lambda|^{d_j}\,P_j(\eta^s)\right| \geqslant 1 + |\xi^s, \lambda|^{d_0}\,|P_0(\eta^s)| +$$
$$+ |\xi^s, \lambda|^{d_1}\,|P_1(\eta^s)| - o(|\xi^s, \lambda|^{d_1}) \geqslant c_2\,[|\xi^s, \lambda|^{d_0}\,|P_0(\eta^s)| +$$

$$+ |\xi^s, \lambda|^{d_1} |P_1(\eta^s)|] \geqslant c_3 [|\xi^s, \lambda|^{d_0} |P_0(\eta^s)| + |\xi^s, \lambda|^{d_1}]. \quad (2.26)$$

Пользуясь неравенством (2.25), мы оценим также $|Q(\xi^s)|$, именно

$$|Q(\xi^s)| = |\xi^s, \lambda|^{\delta_Q} |Q(\eta^s)| \leqslant c_4 |\xi^s, \lambda|^{\delta_Q} |P_0(\eta^s)|^{\frac{\delta_Q - d_1}{d_0 - d_1}} = c_4 [|\xi^s, \lambda|^{d_0} |P_0(\eta^s)|]^{\frac{\delta_Q - d_1}{d_0 - d_1}} |\xi^s, \lambda|^{d_1 \frac{d_0 - \delta_Q}{d_0 - d_1}}.$$

Применяя неравенство Гёльдера для $p = \dfrac{d_0 - d_1}{\delta_Q - d_1}$ и $q = \dfrac{p}{p-1} = \dfrac{d_0 - d_1}{d_0 - \delta_Q}$, мы получим с некоторой постоянной $c_5 > 0$

$$|Q(\xi^s)| \leqslant c_5 [|\xi^s, \lambda|^{d_0} |P_0(\eta^s)| + |\xi^s, \lambda|^{d_1}], \ \ s = 1, 2, \ldots \quad (2.27)$$

Из (2.26)-(2.27) мы получим с некоторой постоянной $c_6 > 0$

$$|Q(\xi^s)| \leqslant c_6 [|P(\xi^s)| + 1], \ \ s = 1, 2, \ldots,$$

что противоречит нашему предположению (2.22).

В случае b) противоречие получается применением леммы 1.3.

Докажем вторую часть теоремы. Сначала покажем, что $P < P + Q$.

Будем повторять соображения, применённые при доказательстве достаточности первой части теоремы, т. е. предположим, что существует последовательность $\{\xi^s\}$, такая, что $|\xi^s| \to \infty$, $|\eta^s - \eta, \lambda| \to 0$ при $s \to \infty$ и

$$\frac{|P(\xi^s)|}{1 + |P(\xi^s) + Q(\xi^s)|} \to \infty. \quad (2.28)$$

Так как $d_0 > d_1$, в случае $\eta \notin \Sigma(P_0)$ мы получим следующие представления для многочленов P и Q при $s \to \infty$: $|P(\xi^s)| = |\xi^s, \lambda|^{d_0} \, | |P_0(\eta)| \, (1 + o(1))$ и $|Q(\xi^s)| = o(|\xi^s, \lambda|^{d_0})$, которые вместе противоречат (2.28) и доказывают, что $P < P + Q$.

Если $P_0(\eta) = 0$, то по предположению теоремы $P_1(\eta) \neq 0$. В этом случае мы получаем противоречие с (2.28) в силу того, что $Q(\xi) \geqslant 0$ при $\xi \in U(\eta)$ и в силу того, что $P_0(\xi) \geqslant 0 \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n$ для многочленов $P \in I_n$.

Соотношение $P + Q < P$ является прямым следствием уже доказанной части теоремы. Этим доказан пункт II.1). Пункт II.2) доказывается буквальным повторением предыдущих соображений.

Теорема 2.2 доказана. □

3. Оценки мономов через многослойный многочлен

В этом разделе мы рассмотрим более общий случай, когда многочлен $P \in I_n$ является k-слойным при $2 < k < M$.

Именно, пусть, как и в предыдущем разделе, $\Re = \Re(P)$ — многогранник Ньютона многочлена $P \in I_n$, все главные грани которого невырождены, кроме, быть может, одной $(n-1)$-мерной грани $\Gamma := \Re^{n-1}_{i_0}$ с внешней нормалью $\mu > 0$. При этом многочлен $P \in I_n$ является *k-слойным* при $2 < k < M$. Напомним, что это означает следующее: если по вектору μ многочлен P представить в виде суммы μ-однородных многочленов μ-степеней $d_0 > d_1 > \ldots > d_M$ (см. (0.3))

$$P(\xi) = P_0(\xi) + P_1(\xi) + \ldots + P_{k-1}(\xi) + P_k(\xi) + P_{k+1}(\xi) + \ldots + P_M(\xi), \quad (3.1)$$

то $P_k(\eta) \neq 0$ для всех $\eta \in \Sigma(P_0)$, в то время как каждый из многочленов P_j $(j = 1, 2, \ldots, k-1)$ обращается в нуль хотя бы в одной точке $\eta \in \Sigma(P_0)$.

Наша цель в этом разделе — описать то (наиболее широкое) множество мультииндексов $\{\nu\}$, для которых справедлива оценка (1.1) для многослойных многочленов.

Сначала введём следующие обозначения для многочлена (3.1): $\mathfrak{M} := \{P_1, P_2, \ldots, P_{l-1}\}$, $\mathcal{P}(\xi) := P_0(\xi) + P_k(\xi)$, $\mathcal{P}_1(\xi) := P_1(\xi) + \ldots + P_{k-1}(\xi)$, $p(\xi) := P_{k+1}(\xi) + \ldots + P_M(\xi)$. Тогда $P(\xi) = \mathcal{P}(\xi) + \mathcal{P}_1(\xi) + p(\xi)$. В этих обозначениях наша задача звучит так: пусть *двухслойный* многочлен $\mathcal{P}(\xi) + p(\xi)$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1, следовательно, по этой теореме, для всех мультииндексов $\nu \in \Re^\star := \{\beta \in \Re : (\mu, \beta) \leqslant d_k\}$ справедлива оценка

$$|\xi^\nu| \leqslant c \, [|\mathcal{P}(\xi) + p(\xi)| + 1] \ \ \forall \xi \in \mathbb{R}^n \quad (1.1')$$

с некоторой постоянной $c = c(P + p, \nu) > 0$.

Поставленная цель сводится к ответу на следующий вопрос: каким условиям должны удовлетворять (μ-однородные) многочлены $P_j \in \mathfrak{M}$ $(j = 1, \dots k-1)$, чтобы для всех мультииндексов $\nu \in \Re^\star$ выполнялась оценка (1.1) для многочлена $P(\xi) = \mathcal{P}(\xi) + \mathcal{P}_1(\xi) + p(\xi)$?

Ответ на этот вопрос дается следующей теоремой.

Теорема 3.1. *Пусть* $\Re = \Re(P)$ *— полный многогранник Ньютона* k-слойного *многочлена* $P \in G_n$ *(см. определения* 0.6 *и* 2.2*), т. е. все главные грани* $\Re$ *невырождены, кроме, быть может,* $(n-1)$*-мерной главной грани* $\Gamma := \Re^{n-1}_{i_0}$ *(с внешней нормалью* $\mu > 0$*). Если* Γ *невырождена, то* $\xi^\nu < P$ *для всех мультииндексов* $\nu \in \Re$.

Если Γ *вырождена, по вектору* μ *многочлен* P *представлен в виде* (3.1) *суммы* μ*-однородных многочленов,* $\mathcal{P}(\xi) := P_0(\xi) + P_k(\xi)$, $\mathcal{P}_1(\xi) := P_1(\xi) + \ldots + P_{l-1}(\xi)$, $p(\xi) := P_{k+1}(\xi) + \ldots + P_M(\xi)$, $\Re^\star := \{\beta \in \Re : (\mu, \beta) \leqslant d_k\}$, *и* (двухслойный) *многочлен* $P - \mathcal{P}_1 = \mathcal{P} + p$ *удовлетворяет условиям теоремы* 1.1, *то*

a) *при* $\nu \notin \Re^\star$, *неравенство* $\xi^\nu < P$ *не может иметь места;*
b) *неравенство* $\xi^\nu < P$ *выполняется для любого мультииндекса* $\nu \in \Re^\star$, *если либо*
  b.1) $\mathcal{P}_1 < P$, *т. е. (см. лемму* 2.2*)* $P_j < P$ $(j = 1, \dots, k-1)$, *либо*
  b.2) *каждый многочлен* $P_j \in \mathfrak{M}$ $(j = 1, \dots, k-1)$ *удовлетворяет одному из следующих условий:*
    b.2.1) $P_j < P_0$, *т. е. для пары* (μ*-однородных*) *многочленов* (P_j, P_0) *удовлетворяются условия теоремы* 2.1;
    b.2.2) $P_j < \mathcal{P}$, *т. е. для пары многочленов* $(P_j, \mathcal{P})$ *выполняются условия* I)-II) *теоремы* 2.2;
    b.2.3) $P_j < \mathcal{P} + P_j$, $\mathcal{P} < \mathcal{P} + P_j < \mathcal{P}$, *т. е. для пары многочленов* $(P_j, \mathcal{P})$ *выполняется одно из условий* II.1) *или* II.2) *теоремы* 2.2.

Прежде чем доказать теорему, сделаем следующее замечание.

Замечание 3.1.

1) Условия b.2.2) и b.2.3) мы должны были ставить не для пары многочленов $(P_j, \mathcal{P})$, а для пары $(P_j, \mathcal{P} + p)$. Но мы поступили так не только по соображениям краткости записи, но и потому, что по пункту II.1) теоремы 2.2 многочлен p не влияет на мощности многочленов P и $\mathcal{P}$.
2) Доказанные выше предложения диктуют нам, что мы должны считать, что многочлены $P_j \in \mathfrak{M}$ $(j = 1, \dots, l-1)$ должны обращаться в нуль во всех точках $\eta \in \Sigma(P_0)$.

Доказательство теоремы 3.1. Имея в виду, что двухслойный многочлен $P - \mathcal{P}_1 = \mathcal{P} + p$ удовлетворяет условиям теоремы 1.1, следовательно, $\xi^\nu < P$ для любого мультииндекса $\nu \in \Re^\star$, достаточно доказать, что $\mathcal{P} < P = \mathcal{P} + \mathcal{P}_1$.

Сначала мы добавим к многочлену $\mathcal{P}$ те многочлены из $\mathfrak{M}$, которые (совместно с многочленом P_0) удовлетворяют условию b.1), т. е. условиям леммы 2.2. Пусть это многочлены $\mathfrak{M}_1 = \{P_{i_1}, P_{i_2}, \dots, P_{i_{k_1}}\}$, $(k_1 \leqslant k-1)$.

Так как $d_{i_j} < d_0$ $j = 1, \dots, k_1$, то по пункту b) леммы 2.3 $|P_{i_1}(\xi)| + |P_{i_2}(\xi)| + \ldots + |P_{i_{k_1}}(\xi)| = o(|P_0(\xi))|$ при $|P_0(\xi))| \to \infty$.

Из леммы 1.1 вытекает, что $P_0 < \mathcal{P} = P_0 + P_k$, следовательно, $|P_{i_1}(\xi)| + |P_{i_2}(\xi)| + \ldots + |P_{i_{k_1}}(\xi)| = o(|P_0(\xi))|$ при $|P_0(\xi))| \to \infty$. Таким образом, существует постоянная $c > 0$ такая, что для достаточно больших $|\xi|$ имеет место неравенство

$$|\mathcal{P}(\xi)| \leqslant c\,[1 + |\mathcal{P}(\xi) + P_{i_1}(\xi) + P_{i_2}(\xi) + \ldots, P_{i_{k_1}}(\xi)|]. \tag{3.2}$$

Если $\{|P_0(\xi^s)|\}$ ограничено для последовательности $\{\xi^s\}$ при $|\xi^s| \to \infty$, то многочлены $\{P_{i_j}(\xi^s)\}$ также ограничены на этой последовательности (напомним, что $P_{i_j} < P_0$ $(j = 1, \dots, k_1)$). С другой стороны, так как $\mathcal{P} \in \mathbb{I}_n$, то $\mathcal{P}(\xi) \to \infty$, и неравенство (3.2) (быть может, с другой постоянной) очевидно. В итоге мы получим $\mathcal{P} < \mathcal{P} + P_{i_1} + P_{i_2} + \ldots + P_{i_{k_1}} < \mathcal{P}$. Это значит, что далее при сравнении многочленов $\mathcal{P}$ и P достаточно сравнивать многочлены $\mathcal{P}^1 := \mathcal{P} + P_{i_1} + P_{i_2} + \ldots + P_{i_{k_1}}$ и P.

Если $k_1 = k-1$, т. е. $\mathcal{P}^1(\xi) := \mathcal{P}(\xi) + \mathcal{P}_1(\xi) = P(\xi)$ $\forall \xi \in \mathbb{R}^n$, то это доказывает теорему.

Рассмотрим случай, когда $k_1 < k-1$, т. е. $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}$.

Сначала рассмотрим те многочлены $P_j \in \mathfrak{M} \setminus \mathfrak{M}_1$, которые удовлетворяют условию b.2.3), т. е. для пары многочленов $(P_j, \mathcal{P})$ выполняется одно из условий II.1) или II.2) теоремы 2.2. Пусть это многочлены

$$\mathfrak{M}_2 := \{P_{k_1+i_1}, P_{k_1+i_2}, \ldots, P_{k_1+k_2}\} \quad (1 \leqslant i_j \leqslant k_1 - 1,\ j = 1, \ldots, k_2,\ k_1 + k_2 \leqslant k - 1),$$

т. е.

$$\frac{|P_{i_j}(\xi)|}{|P(\xi)| + 1} \to 0$$

при $|\xi| \to \infty$ и $P < P + P_{i_j} < P$ для всех $j = k_1 + 1, \ldots, k_1 + k_2$.

Рассуждая, как в предыдущем случае, получим, что

$$\mathcal{P} < \mathcal{P}^2 := \mathcal{P}^1 + P_{k_1+i_1} + P_{k_1+i_2} + \ldots + P_{i_{k_1}+k_2} < \mathcal{P}.$$

Это значит, что далее при сравнении многочленов $\mathcal{P}$ и P достаточно сравнить многочлены $\mathcal{P}^2$ и P.

Наконец, к многочлену $\mathcal{P}^2$ мы добавим оставшиеся многочлены из $\mathfrak{M}$, которые удовлетворяют условиям I)-II) теоремы 2.2. Пусть это многочлены

$$\mathfrak{M}_3 := \{P_{k_1+k_2+i_1}, P_{k_1+k_2+i_2}, \ldots, P_{k_1+k_2+k_3}\},\ k_1 + k_2 + k_3 = k - 1.$$

Тогда $\mathcal{P}^2(\xi)+ P_{k_1+k_2+i_1}(\xi) + P_{k_1+k_2+i_2}(\xi) + \ldots + P_{k_1+k_2+k_3}(\xi) = P(\xi)$ для всех $\xi \in \mathcal{R}^n$.

В результате, как добавление к предыдущим двум случаям, мы получаем, что $\mathcal{P} < \mathcal{P}^2 < \mathcal{P}$. Из теоремы 2.2 следует, что $\mathcal{P} < \mathcal{P}+ P_{k_1+k_2+i_1} + P_{k_1+k_2+i_2} + \ldots + P_{k_1+k_2+k_3}$. Следовательно, $\mathcal{P}^2 < \mathcal{P}^2 + P_{k_1+k_2+i_1} + P_{k_1+k_2+i_2} + \ldots + P_{k_1+k_2+k_3} = P$. В итоге мы получили $\mathcal{P} < P < \mathcal{P}$, что доказывает теорему 3.1. □

4. Коэрцитивные оценки в L_p

Совершая преобразование Фурье и применяя равенство Парсеваля, непосредственно получим, что при $p = 2$ для тех мультииндексов $\{\nu\}$, для которых выполняется условия теоремы 3.1, т. е. для которых $\xi^\nu < P$, выполняется оценка

$$||D^\nu u||_{L_2} \leqslant c\,[\,||P(D)u||_{L_2} + ||u||_{L_2}\,] \ \ \forall u \in C_0^\infty(E^n). \tag{4.1'}$$

Применяя теорию мультипликаторов Фурье, мы покажем, что для того же множества мультииндексов $\{\nu\}$ и для любого $p > 1$ также справедлива оценка

$$||D^\nu u||_{L_p} \leqslant c\,[\,||P(D)u||_{L_p} + ||u||_{L_p}\,] \ \ \forall u \in C_0^\infty(E^n). \tag{4.1}$$

Сначала напомним понятие мультипликатора.

Определение 4.1 (см., например, [20])**.** Измеримая функция Φ называется *мультипликатором* из L_p в L_q, $p \leqslant q$ (обозначим $\Phi \in \mathbb{M}_p^q$, при этом, если $q = p$, то вместо $\mathbb{M}_p^p$ мы обозначим просто $\mathbb{M}_p$), если преобразование $T_M : L_p \to L_q$, определенное формулой

$$T_M f = (2\pi)^{-\pi/2} \int\limits_{E_n} M(\xi)\, F[f]\, e^{i\,(x,\xi)\,d\xi} d\xi = F^{-1}[M\,F(f))],$$

является ограниченным из L_p в L_q на C_0^∞, где $F[f]$ — преобразование Фурье функции $f \in C_0^\infty$.

Ниже мы будем пользоваться следующей теоремой П. И. Лизоркина.

Теорема (см. [20] или [2])**.** *Пусть функция* $\Phi(\xi)$ *непрерывна вместе с производной* $\dfrac{\partial^n \Phi(\xi)}{\partial \xi_1 \ldots \partial \xi_n}$ *и всеми предшествующими ее производными при* $\xi \in \mathbb{R}^{n,0}$. *Тогда* $\Phi \in \mathbb{M}_p$, *если существует постоянная* $c > 0$ *такая, что для всех* $\xi \in \mathbb{R}^{n,0}$ *имеет место неравенство*

$$|\xi_1^{k_1} \ldots \xi_n^{k_n} \frac{\partial^k \Phi(\xi)}{\partial \xi_1^{k_1} \ldots \partial \xi_n^{k_n}}| \leqslant c,$$

где $0 \leqslant k_j \leqslant 1$ $(j = 1, \ldots, n)$, $\boldsymbol{k} = k_1 + \ldots + k_n$.

Теперь мы в состоянии доказать основной результат настоящей работы.

Теорема 4.1. *Пусть* $\Re = \Re(P)$ *— полный многогранник Ньютона многочлена* $P \in G_n$, *удовлетворяющий условиям теоремы* 3.1 *и* $p > 1$. *Тогда*:

1) *если грань* $\Gamma := \Re^{n-1}_{i_0}$ невырождена, *то для всех* $\nu \in \Re$ *имеет место неравенство* (4.1);
2) *если грань* $\Gamma := \Re^{n-1}_{i_0}$ вырождена, *то неравенство* (4.1) *имеет место для тех мультииндексов* $\nu \in \Re^\star$, *для которых функция* $\Phi_\nu = \xi^\nu / P(\xi)$ *является мультипликатором*;
3) *если* $\nu \notin \Re^\star$, *то неравенство* (4.1) *не может иметь места.*

Доказательство. По свойствам преобразования Фурье для функций $u \in C_0^\infty$ и для любого мультииндекса ν имеем
$$F[D^\nu u] = \xi^\nu F[u]; \quad F[P(D)u] = P(\xi)\, F[u].$$
Отсюда имеем (напомним, что $P(\xi) > 0$ (см. лемму 1.1))
$$F[D^\nu u] = \frac{\xi^\nu}{P(\xi)}\ F[P(D)u] =: \Phi(\xi)\ F[P(D)u].$$
Для доказательства теоремы достаточно установить, что $\Phi_\nu \in \mathbb{M}_p$ для соответствующих $\{\nu\}$. По теореме Лизоркина для этого достаточно доказать ограниченность выражений $\{\xi^k\ D^k \Phi(\xi)\}$ для определенных мультииндексов $\{\mathbf{k}\}$.

Пусть сначала многочлен P невырожден, т. е. невырождена также грань $\Gamma := \Re^{n-1}_{i_0}$ многогранника $\Re(P)$ и $\mathbf{k} = 0$.

Тогда по теореме 3.1 $|P(\xi)| \geqslant c \sum\limits_{\alpha \in \Re^\star} |\xi^\alpha|$, что доказывает ограниченность $|\Phi_\nu(\xi)| = \left|\dfrac{\xi^\nu}{P(\xi)}\right|$ для всех $\nu \in \Re(P)$.

Пусть теперь $\mathbf{k} \neq 0$ и, например, $\mathbf{k} = (1, 0, \ldots, 0)$. Тогда, если $\nu_1 \neq 0$, то
$$\xi_1 \frac{\partial \Phi}{\partial \xi_1} = \nu_1\, \frac{\xi^\nu}{P(\xi)} + \frac{\xi_1\, \xi^\nu\, \partial P/\partial \xi_1}{|P(\xi)|^2}. \tag{4.2}$$

Ограниченность первого слагаемого в правой части (4.2) для любого $\nu \in \Re$ в *невырожденном* случае следует из теоремы 3.1. Для доказательства ограниченности второго слагаемого представим его в виде
$$\frac{\xi_1\, \xi^\nu\, \partial P/\partial \xi_1}{|P(\xi)|^2} = \frac{\xi^\nu}{|P(\xi)|}\ \ \frac{\xi_1\, \partial P/\partial \xi_1}{|P(\xi)|}. \tag{4.3}$$

Ограниченность первого множителя в правой части (4.3) уже доказана, а ограниченность второго множителя для невырожденного многочлена P следует из того, что $\partial P/\partial \xi_1 < P$.

Ограниченность других выражений $\left|\xi_1^{k_1} \ldots \xi_n^{k_n} \dfrac{\partial^k \Phi(\xi)}{\partial \xi_1^{k_1} \ldots \partial \xi_n^{k_n}}\right|$ в невырожденном случае доказывается аналогично.

Перейдём к случаю, когда грань Γ многочлена P *вырождена.* Повторяя рассуждения, проводимые в невырожденном случае, с заменой $\Re$ на $\Re^\star$ и пользуясь условием 2) настоящей теоремы, мы получим неравенство (4.1) для тех мультииндексов $\nu \in \Re^\star$, для которых функция $\Phi_\nu = \xi^\nu / P(\xi)$ является мультипликатором. ☐

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бесов О. В.* О коерцитивности в анизотропном пространстве С. Л. Соболева// Мат. сб. — 1967. — *75*, № 4. — С. 585–599.
2. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Физматлит, 1996.
3. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Об одном классе гипоэллиптических полиномов// Мат. сб. — 1968. — *75*, № 3. — С. 400–416.
4. *Горин Е. А.* Об асимптотических свойствах многочленов и алгебраических функций// Усп. мат. наук. — 1961. — *16*, № 1. — С. 91–118.
5. *Грушин В. В.* Об одном классе гипоэллиптических операторов// Мат. сб. — 1970. — *83*, № 3. — С. 456–473.
6. *Ильин В. П.* О неравенствах между нормами частных производных функций многих переменных// Тр. МИАН. — 1965. — *84*. — С. 144–173.
7. *Казарян Г. Г.* Об оценках L_p-норм производных через нерегулярный набор дифференциальных операторов// Дифф. уравн. — 1969. — *5*, № 5. — С. 911–921.
8. *Казарян Г. Г.* О гипоэллиптических полиномах// Докл. АН СССР. — 1974. — *214*, № 5. — С. 1018–1019.

9. *Казарян Г. Г.* Об одном семействе гипоэллиптических полиномов// Изв. АН Арм. ССР. Мат. — 1974. — *9*, № 3. — С. 189–211.
10. *Казарян Г. Г.* О добавлении младших членов к дифференциальным полиномам// Изв. АН Арм. ССР. Мат. — 1974. — *9*, № 6. — С. 473–485.
11. *Казарян Г. Г.* О сравнении дифференциальных операторов и дифференциальных операторах постоянной силы// Тр. МИАН. — 1974. — *131*. — С. 94–118.
12. *Казарян Г. Г.* Оценки дифференциальных операторов и гипоэллиптические операторы// Тр. МИАН. — 1976. — *140*. — С. 130–161.
13. *Казарян Г. Г.* Сравнение мощности многочленов и их гипоэллиптичность// Тр. МИАН. — 1979. — *150*. — С. 143–159.
14. *Казарян Г. Г.* О почти гипоэллиптических многочленах// Докл. РАН. — 2004. — *398*, № 6. — С. 701–703.
15. *Казарян Г. Г.* О почти гипоэллиптических многочленах, возрастающих на бесконечности// Изв. НАН Армении. Мат. — 2011. — *46*, № 6. — С. 11–30.
16. *Казарян Г. Г., Маргарян В. Н.* Критерии гипоэллиптичности в терминах мощности и силы операторов// Тр. МИАН. — 1979. — *150*. — С. 128–142.
17. *Казарян Г. Г., Маргарян В. Н.* Об одном классе почти гипоэллиптических операторов// Изв. НАН Армении. Мат. — 2006. — *41*, № 6. — С. 39–56.
18. *Казарян Г. Г., Маргарян В. Н.* Об одном классе вырождающихся гипоэллиптических многочленов// Тр. Моск. мат. об-ва. — 2022. — *83*, № 1. — С. 181–217.
19. *Казарян Г. Г., Маргарян В. Н.* Сравнение трехслойных многочленов многих переменных// *Сдано в печать.*
20. *Лизоркин П. И.* О мультипликаторах интегралов Фурье в пространствах $L_{p,\Theta}$// Тр. МИАН. — 1967. — *91*. — С. 59–81.
21. *Михайлов В. П.* О поведении на бесконечности одного класса многочленов// Тр. МИАН. — 1967. — *91*. — С. 59–81.
22. *Михайлов В. П.* Первая краевая задача для квазиэллиптических и квазипараболических уравнений// Тр. МИАН. — 1967. — *91*. — С. 81–99.
23. *Хёрмандер Л.* Анализ линейных дифференциальных операторов с частными производными. Т. 2. — М.: Мир, 1986.
24. *Agmon S.* The coercivness problem for integro-differential forms// J. Anal. Math. — 1958. — *6*. — С. 183–223.
25. *Aronszajn N.* On coercive integro-differential quadratic forms// В сб.: «Conference on Partial Differential Equations». — Lawrence: Univ. Kansas, 1954. — С. 94–106.
26. *Cattabriga L.* Su una classi di polinomi ipoellittici// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 1966. — *36*. — С. 285–309.
27. *Chaleyat M.* La condition d'hypoelliptisity d'Hormander// Asteribque. — 2020. — *84-85*. — С. 189–202.
28. *Friberg J.* Multiquasielliptic polynomials// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. — 1967. — *21*, № 2. — С. 239–260.
29. *Ghazaryan H. G.* Addition of lower order terms preserving almost hypoelliptisity of polynomials// Eurasian Math. J. — 2013. — *4*, № 3. — С. 32–52.
30. *Ghazaryan H. G., Margaryan V. N.* On the comparison of powers of differential operators (polynomials)// Boll. Unione Mat. Ital. — 2023. — *16*, № 4. — С. 703–740.
31. *Khovanskii A. G.* Newton polyhedra (algebra and geometry)// Am. Math. Soc. Transl. — 1992. — *153*, № 2. — С. 1–15.
32. *Nečas J.* Sur les normes équivalentes dans $W_p^k(\Omega)$ et sur la coercitivité des formes formellement positives // В сб.: «Séminaire Equations aux Dérivées partielles». — Montréal: Univ. Montréal, 1966. — С. 102–128.
33. *Pini B.* Sulla classe di Gevrey della soluzone di certe equazioni ipoellittiche// Boll. Unione Mat. Ital. — 1963. — *18*, № 3. — С. 260–269.
34. *Pini B.* Osservazioni sulla ipoellittisita// Boll. Unione Mat. Ital. — 1963. — *18*, № 4. — С. 420–433.
35. *Schechter M.* Integral inequalities for PDO and functions satisfying general boundary conditions// Commun. Pure Appl. Math. — 1959. — *12*. — С. 37–66.
36. *Smith K. T.* Inequalities for formali positive integro-differential forms// Bull. Am. Math. Soc. — 1961. — *67*. — С. 368–370.

Г. Г. Казарян
Институт математики НАН Армении, Ереван, Армения
Российско-Армянский университет, Ереван, Армения
E-mail: `haikghazaryan@mail.ru`

UDC 517.9
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-99-120
EDN: YUEIWO

Coercive estimates for multilayer degenerate differential operators

G. G. Kazaryan

Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Armenia, Yerevan, Armenia
Russian-Armenian University, Yerevan, Armenia

Abstract. We obtain the conditions under which a given multilayer differential operator $P(D)$ (polynomial $P(\xi)$) is more powerful than operator $Q(D)$ (polynomial $Q(\xi)$). This is used to obtain estimates of monomials, which, in turn, using the theory of Fourier multipliers, is used to obtain coercive estimates of derivatives of functions through the differential operator $P(D)$ applied to these functions.

Keywords: coercive estimate, comparison of power of differential operators (polynomials), lower-order term of differential operator (polynomial), Newton polyhedron, degenerate (nondegenerate) operator (polynomial), multilayer operator (polynomial).

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author declares no financial support.

For citation: G. G. Kazaryan, "Coercive estimates for multilayer degenerate differential operators," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 1, 99–120. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-99-120

REFERENCES

1. O. V. Besov, "O koertsitivnosti v anizotropnom prostranstve S. L. Soboleva" [On coercivity in an anisotropic Sobolev space], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1967, **75**, No. 4, 585–599 (in Russian).
2. O. V. Besov, V. P. Il'in, and S. M. Nikol'skii, *Integral'nye predstavleniya funktsiy i teoremy vlozheniya* [Integral Representations of Functions and Embedding Theorems], Fizmatlit, Moscow, 1996 (in Russian).
3. L. R. Volevich and S. G. Gindikin, "Ob odnom klasse gipoellipticheskikh polinomov" [On one class of hypoelliptic polynomials], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1968, **75**, No. 3, 400–416 (in Russian).
4. E. A. Gorin, "Ob asimptoticheskikh svoystvakh mnogochlenov i algebraicheskikh funktsiy" [On the asymptotic properties of polynomials and algebraic functions], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1961, **16**, No. 1, 91–118 (in Russian).
5. V. V. Grushin, "Ob odnom klasse gipoellipticheskikh operatorov" [On one class of hypoelliptic operators], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1970, **83**, No. 3, 456–473 (in Russian).
6. V. P. Il'in, "O neravenstvakh mezhdu normami chastnykh proizvodnykh funktsiy mnogikh peremennykh" [On inequalities between the norms of partial derivatives of functions of several variables], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1965, **84**, 144–173 (in Russian).
7. G. G. Kazaryan, "Ob otsenkakh L_p-norm proizvodnykh cherez neregulyarnyy nabor differentsial'nykh operatorov" [On estimates of L_p-norms of derivatives through an irregular set of differential operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1969, **5**, No. 5, 911–921 (in Russian).
8. G. G. Kazaryan, "O gipoellipticheskikh polinomakh" [On hypoelliptic polynomials], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1974, **214**, No. 5, 1018–1019 (in Russian).
9. G. G. Kazaryan, "Ob odnom semeystve gipoellipticheskikh polinomov" [On one family of hypoelliptic polynomials], *Izv. AN Arm. SSR. Mat.* [Bull. Acad. Sci. Armenian SSR. Ser. Math.], 1974, **9**, No. 3, 189–211 (in Russian).

10. G. G. Kazaryan, "O dobavlenii mladshikh chlenov k differentsial'nym polinomam" [On adding lower terms to differential polynomials], *Izv. AN Arm. SSR. Mat.* [Bull. Acad. Sci. Armenian SSR. Ser. Math.], 1974, **9**, No. 6, 473–485 (in Russian).
11. G. G. Kazaryan, "O sravnenii differentsial'nykh operatorov i differentsial'nykh operatorakh postoyannoy sily" [The comparison of differential operators and differential operators of constant strength], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1974, **131**, 94–118 (in Russian).
12. G. G. Kazaryan, "Otsenki differentsial'nykh operatorov i gipoellipticheskie operatory" [Estimates of differential operators and hypoelliptic operators], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1976, **140**, 130–161 (in Russian).
13. G. G. Kazaryan, "Sravnenie moshchnosti mnogochlenov i ikh gipoellipticnnost"' [Comparison of the power of polynomials and their hypoellipticity], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1979, **150**, 143–159 (in Russian).
14. G. G. Kazaryan, "O pochti gipoellipticheskikh mnogochlenakh" [On almost hypoelliptic polynomials], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2004, **398**, No. 6, 701–703 (in Russian).
15. G. G. Kazaryan, "O pochti gipoellipticheskikh mnogochlenakh, vozrastayushchikh na beskonechnosti" [On almost hypoelliptic polynomials increasing at infinity], *Izv. NAN Armenii. Mat.* [Bull. Natl. Acad. Sci. Armenia. Ser. Math.], 2011, **46**, No. 6, 11–30 (in Russian).
16. G. G. Kazaryan and V. N. Margaryan, "Kriterii gipoelliptichnosti v terminakh moshchnosti i sily operatorov" [Hypoellipticity criteria in terms of power and strength of operators], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1979, **150**, 128–142 (in Russian).
17. G. G. Kazaryan and V. N. Margaryan, "Ob odnom klasse pochti gipoellipticheskikh operatorov" [On a class of almost hypoelliptic operators], *Izv. NAN Armenii. Mat.* [Bull. Natl. Acad. Sci. Armenia. Ser. Math.], 2006, **41**, No. 6, 39–56 (in Russian).
18. G. G. Kazaryan and V. N. Margaryan, "Ob odnom klasse vyrozhdayushchikhsya gipoellipticheskikh mnogochlenov" [On one class of degenerate hypoelliptic polynomials], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 2022, **83**, No. 1, 181–217 (in Russian).
19. G. G. Kazaryan and V. N. Margaryan, "Sravnenie trekhsloynykh mnogochlenov mnogikh peremennykh" [Comparison of three-layer polynomials of many variables] *to be published.*
20. P. I. Lizorkin, "O mul'tiplikatorakh integralov Fur'e v prostranstvakh $L_{p,\Theta}$" [On multipliers of Fourier integrals in the spaces $L_{p,\Theta}$], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1967, **91**, 59–81 (in Russian).
21. V. P. Mikhaylov, "O povedenii na beskonechnosti odnogo klassa mnogochlenov" [On the behavior at infinity of one class of polynomials], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1967, **91**, 59–81 (in Russian).
22. V. P. Mikhaylov, "Pervaya kraevaya zadacha dlya kvaziellipticheskikh i kvaziparabolicheskikh uravneniy" [The first boundary-value problem for quasi-elliptic and quasi-parabolic equations], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1967, **91**, 81–99 (in Russian).
23. L. Hörmander, *Analiz lineynykh differentsial'nykh operatorov s chastnymi proizvodnymi. T. 2* [The Analysis of Linear Partial Differential Operators. II], Mir, Moscow, 1986 (Russian translation).
24. S. Agmon, "The coercivness problem for integro-differential forms," *J. Anal. Math.*, 1958, **6**, 183–223.
25. N. Aronszajn, "On coercive integro-differential quadratic forms," In: *Conference on Partial Differential Equations*, Univ. Kansas, Lawrence, 1954, pp. 94–106.
26. L. Cattabriga, "Su una classi di polinomi ipoellittici," *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 1966, **36**, 285–309.
27. M. Chaleyat, "La condition d'hypoellipticity d'Hormander," *Asteribque*, 2020, **84-85**, 189–202.
28. J. Friberg, "Multiquasielliptic polynomials," *Ann. Sc. Norm. Super. Cl. Pisa Sci.*, 1967, **21**, No. 2, 239–260.
29. H. G. Ghazaryan, "Addition of lower order terms preserving almost hypoelliptisity of polynomials," *Eurasian Math. J.*, 2013, **4**, No. 3, 32–52.
30. H. G. Ghazaryan and V. N. Margaryan, "On the comparison of powers of differential operators (polynomials)," *Boll. Unione Mat. Ital.*, 2023, **16**, No. 4, 703–740.
31. A. G. Khovanskii, "Newton polyhedra (algebra and geometry)," *Am. Math. Soc. Transl.*, 1992, **153**, No. 2, 1–15.
32. J. Nečas, "Sur les normes équivalentes dans $W_p^k(\Omega)$ et sur la coercitivité des formes formellement positives ," In: *Séminaire Equations aux Dérivées partielles*, Univ. Montréal, Montréal, 1966, pp. 102–128.
33. B. Pini, "Sulla classe di Gevrey della soluzone di certe equazioni ipoellittiche," *Boll. Unione Mat. Ital.*, 1963, **18**, No. 3, 260–269.
34. B. Pini, "Osservazioni sulla ipoellittisita," *Boll. Unione Mat. Ital.*, 1963, **18**, No. 4, 420–433.
35. M. Schechter, "Integral inequalities for PDO and functions satisfying general boundary conditions," *Commun. Pure Appl. Math.*, 1959, **12**, 37–66.
36. K. T. Smith, "Inequalities for formali positive integro-differential forms," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1961, **67**, 368–370.

G. G. Kazaryan
Institute of Mathematics, National Academy of Sciences of Armenia, Yerevan, Armenia
Russian-Armenian University, Yerevan, Armenia
E-mail: haikghazaryan@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 1 (2024). С. 121–149
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.946
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-121-149
EDN: YVHQAW

ОБ УСЛОВИЯХ ПОДЧИНЕННОСТИ ДЛЯ СИСТЕМ МИНИМАЛЬНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Д. В. Лиманский[1], **М. М. Маламуд**[2,3]

[1]*Донецкий государственный университет, Донецк, Россия*
[2]*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*
[3]*Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия*

Аннотация. В работе приводится обзор результатов об априорных оценках для систем минимальных дифференциальных операторов в шкале пространств $L^p(\Omega)$, где $p \in [1, \infty]$. Приведены результаты о характеризации эллиптических и l-квазиэллиптических систем при помощи априорных оценок в изотропных и анизотропных пространствах Соболева $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$. При заданном наборе $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ доказаны критерии существования l-квазиэллиптических и слабо коэрцитивных систем, а также указаны широкие классы слабо коэрцитивных в $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, неэллиптических и неквазиэллиптических систем. Кроме того, описаны линейные пространства операторов, подчиненных в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$-норме тензорному произведению двух эллиптических дифференциальных полиномов.

Ключевые слова: дифференциальный оператор, априорная оценка, квазиэллиптичность, коэрцитивность.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Мы признательны профессорам Б. С. Митягину и Д. М. Столярову за полезные обсуждения и замечания, способствовавшие улучшению текста работы. Исследование проводилось первым автором по теме государственного задания (рег. № 124012400352-6). Исследования второго автора выполнены за счёт гранта Российского научного фонда № 23-11-00153.

Для цитирования: *Д. В. Лиманский, М. М. Маламуд.* Об условиях подчиненности для систем минимальных дифференциальных операторов// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 1. С. 121–149. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-121-149

1. Общие сведения об априорных оценках в L^p

Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, $p \in [1, \infty]$. Обозначим через $L^0_{p,\Omega}(P_1, \ldots, P_N)$ линейное пространство операторов $Q(x, D)$, подчиненных системе минимальных дифференциальных операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ в $L^p(\Omega)$, т. е. пространство операторов $Q(x, D)$, удовлетворяющих *априорной оценке*

$$\|Q(x, D)f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C \sum_{j=1}^{N} \|P_j(x, D)f\|_{L^p(\Omega)}, \qquad f \in C_0^\infty(\Omega), \tag{1.1}$$

где константа $C > 0$ не зависит от выбора f.

В случае $N = 1$ говорят, что минимальный оператор $P(x, D)$ *сильнее* оператора $Q(x, D)$.

1.1. Оценки в L^p при $p \in (1,\infty)$. Операторы $P_j(x,D)$ порядка l имеют вид

$$P_j(x,D) = \sum_{|\alpha|\leqslant l} a_{j\alpha}(x)\, D^\alpha, \qquad j \in \{1,\dots,N\}. \tag{1.2}$$

Здесь $D := (D_1,\dots,D_n)$, $D_k := -i\partial/\partial x_k$, $\alpha := (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, $D^\alpha := D_1^{\alpha_1}\dots D_n^{\alpha_n}$, $|\alpha| := \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k$ и $a_{j\alpha}(x) \in L^\infty_{\mathrm{loc}}(\Omega)$. *Полный символ* оператора (1.2) имеет вид

$$P_j(x,\xi) = \sum_{|\alpha|\leqslant l} a_{j\alpha}(x)\, \xi^\alpha, \qquad j \in \{1,\dots,N\}, \tag{1.3}$$

т. е. получается заменой D_k на ξ_k, где $\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n$. Обозначим также через

$$P_j^l(x,\xi) := \sum_{|\alpha|= l} a_{j\alpha}(x)\, \xi^\alpha, \qquad j \in \{1,\dots,N\} \tag{1.4}$$

главный символ (старшую однородную форму порядка l) оператора (1.3).

В случае операторов с постоянными коэффициентами символ $T(\xi)$ связан с оператором $T(D)$ соотношением

$$\widehat{T(D)f}(\xi) = T(\xi)\, \widehat{f}(\xi),$$

где $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, а $\widehat{f}(\xi)$ — преобразование Фурье:

$$\widehat{f}(\xi) = [\mathcal{F}f](\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)}\, f(x)\, dx.$$

В данной работе рассматриваются только минимальные операторы. Напомним, что дифференциальный оператор P в $L^p(\Omega)$ называется *минимальным*, если его область определения $\operatorname{dom} P$ является замыканием множества $C_0^\infty(\Omega)$ в норме графика этого оператора. При этом оценка (1.1) эквивалентна вложению

$$\operatorname{dom} Q \supset \bigcap_{j=1}^{N} \operatorname{dom} P_j$$

областей определения соответствующих операторов (в случае $N = 1$ см. [27]).

Предложение 1.1 (см. [2, 13, 33]). *Пусть $\{P_j(D)\}_1^N$ — система операторов с постоянными коэффициентами. Тогда для всех $p \in [1,\infty]$ и $\Omega = \mathbb{R}^n$ из оценки*

$$\|Q(D)f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C \sum_{j=1}^{N} \|P_j(D)f\|_{L^p(\Omega)}, \qquad f \in C_0^\infty(\Omega) \tag{1.5}$$

вытекает алгебраическое неравенство для символов операторов:

$$|Q(\xi)| \leqslant C \sum_{j=1}^{N} |P_j(\xi)|, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.6}$$

Для доказательства предложения 1.1 достаточно положить в неравенстве (1.5)

$$f(x) := \varphi(\varepsilon x)\, e^{i(\xi,x)} = \varphi(\varepsilon x) \exp\left(i \sum_{k=1}^{n} \xi_k x_k\right), \qquad \xi,\ x \in \mathbb{R}^n,$$

где $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\varphi(x) \equiv 1$ в окрестности нуля и $\varepsilon > 0$ достаточно мало, и воспользоваться тем, что для любого дифференциального полинома $T(D)$ выполнено $T(D)\, e^{i(\xi,x)} = T(\xi)\, e^{i(\xi,x)}$.

При $p = 2$ и $\Omega = \mathbb{R}^n$ из равенства Парсеваля вытекает, что оценка (1.5) и неравенство (1.6) эквивалентны. При $p \in (1,\infty)$ и $\Omega = \mathbb{R}^n$ в случае дифференциальных мономов $Q(D)$ и $\{P_j(D)\}_1^N$ В. П. Ильиным [2, 6] доказана эквивалентность оценки (1.5) алгебраической оценке (1.6) (см. далее теорему 2.3). Однако в общем случае при $p \neq 2$ эквивалентность (1.5) $\Longleftrightarrow$(1.6), вообще говоря, не имеет места.

Далее, при $N = 1$, $p = 2$ и ограниченной области Ω Л. Хермандером [27] получен следующий критерий справедливости оценки (1.1).

Теорема 1.1 (см. [27]). *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Тогда для дифференциальных полиномов $Q(D)$ и $P(D)$ включение $Q \in L^0_{2,\Omega}(P)$ эквивалентно алгебраическому неравенству*

$$|Q(\xi)| \leqslant C\,\widetilde{P}(\xi) := \left[\sum_{\alpha} |D^\alpha P(\xi)|^2\right]^{1/2}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.7}$$

Функцию $\widetilde{P}(\xi)$ вида (1.7) называют *функцией Хермандера.*

Из теоремы 1.1, в частности, вытекает, что предложение 1.1, вообще говоря, неверно для ограниченных областей Ω.

Пример 1.1. Рассмотрим операторы $Q(D) := D_1$ и $P(D) := D_1^2 - D_2^2$. Если область Ω ограничена и $p = 2$, то оценка (1.5) справедлива в силу теоремы 1.1, хотя неравенство $|\xi_1| \leqslant C[|\xi_1^2 - \xi_2^2|]$ не имеет места для всех $(\xi_1, \xi_2) \in \mathbb{R}^2$.

Напомним, что оператор $P(D)$ порядка l называют *эллиптическим*, если

$$P^l(\xi) \neq 0, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \tag{1.8}$$

(см. далее более общее определение 2.1). Из теоремы 1.1 вытекает следующее утверждение.

Предложение 1.2. *Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Тогда оператор $P(D)$ порядка l эллиптичен в точности тогда, когда $Q \in L^0_{2,\Omega}(P)$ для всех операторов $Q(D)$ порядка $\deg Q \leqslant l$, т. е. оператор $P(D)$ сильнее любого оператора $Q(D)$ порядка $\leqslant l$.*

Предложение 1.2 также распространяется на операторы с переменными коэффициентами, действующие в L^p при $p \in (1, \infty)$ (см. далее теорему 2.2).

Другим важным классом операторов, чью «силу» можно охарактеризовать в терминах символов, являются операторы главного типа, введенные Хермандером.

Определение 1.1 (см. [27]). Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Оператор $P(D)$ порядка l называют *оператором главного типа* в $L^2(\Omega)$, если

$$\nabla P^l(\xi) := \left(\frac{\partial P^l}{\partial \xi_1}, \dots, \frac{\partial P^l}{\partial \xi_n}\right)(\xi) \neq (0, \dots, 0), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}.$$

Пример 1.2. Гиперболический оператор

$$P(D) := D_1^2 + \dots + D_k^2 - D_{k+1}^2 - \dots - D_n^2, \qquad k \in \{1, \dots, n-1\} \tag{1.9}$$

является оператором главного типа в $L^2(\Omega)$.

Предложение 1.3. *Эллиптический оператор является оператором главного типа в $L^2(\Omega)$.*

Доказательство. Предполагая противное, найдем точку $\xi^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$, для которой $\nabla P^l(\xi^0) = 0$. Отсюда в силу тождества Эйлера для полинома $P^l(\xi)$,

$$\sum_{k=1}^n \xi_k^0 \frac{\partial P^l}{\partial \xi_k}(\xi^0) = l\,P^l(\xi^0) = 0. \tag{1.10}$$

Это противоречит эллиптичности оператора $P(D)$. □

Предложение 1.4. *Оператор $P(D)$ главного типа в $L^2(\Omega)$ порядка l сильнее любого оператора $Q(D)$ порядка $\leqslant l-1$.*

Доказательство вытекает из теоремы 1.1, а также из общего свойства эллиптической системы $\{D_k P^l(\xi)\}_1^n$ (см. теорему 2.2 в «изотропном» случае $l_1 = \dots = l_n = l$).

Утверждение, обратное к предложению 1.4, вообще говоря, не имеет места. Например, в силу теоремы 1.1 параболический оператор

$$P(D) := D_1^2 + \dots + D_{n-1}^2 + iD_n \tag{1.11}$$

сильнее в $L^2(\Omega)$ любого оператора $Q(D) = D_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$, но не является оператором главного типа. Этот факт вытекает из теоремы 1.1 Хермандера, но также является следствием более общего свойства l-квазиэллиптического оператора (см. теорему 2.2).

Кроме того, следствие 1.4 не имеет места при $p \neq 2$. Демонстрацией этого факта служит следующий глубокий результат Литтмана [39].

Теорема 1.2 (см. [39]). *Пусть Ω — куб в $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, и $P(D)$ — волновой оператор вида* (1.9) *с* $k = n-1$. *Тогда при* $p \geqslant \dfrac{2n}{n-1}$ *оценка* (1.5) *с операторами* $Q(D) = D_k$, $k \in \{1, \dots, n\}$ *не имеет места.*

Следующая характеристика операторов главного типа также принадлежит Хермандеру.

Предложение 1.5 (см. [27]). *Пусть $P(D)$ — оператор порядка l в $L^2(\Omega)$ и Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$. Тогда $P(D)$ является оператором главного типа в $L^2(\Omega)$ в точности тогда, когда $P(D)$ и любой другой оператор $R(D)$ с той же главной частью, $P^l(\xi) \equiv R^l(\xi)$, имеют одинаковую «силу» в том смысле, что пространства $L^0_{p,\Omega}(P)$ и $L^0_{p,\Omega}(R)$ совпадают.*

Результаты, аналогичные теореме 1.1 и предложению 1.5, справедливы при $N > 1$ для системы операторов с постоянными коэффициентами (см. [2, 19]). Из этого, в частности, вытекает, что пространство $L^0_{2,\Omega}(P_1, \dots, P_N)$ для эллиптической системы $\{P_j(D)\}_1^N$ порядка l максимально возможно, т. е. оценка (1.5) справедлива для любого оператора $Q(D)$ порядка $\leqslant l$. То же утверждение верно и для нормы в пространстве $L^p(\Omega)$ при $p \in (1, \infty)$, но утрачивает силу в концах шкалы, т. е. при $p = 1$ и $p = \infty$.

1.2. Оценки в L^∞. Изотропный случай. При $p = \infty$ Б. С. Митягиным [20, 21] доказана невозможность оценки (1.1) при $N = 2$ для операторов $Q(D) = D_1 D_2$ и $P_j(D) = D_j^2$, $j \in \{1, 2\}$. Более того, в работе [21] показано, что при $p = \infty$ даже непрерывность вторых несмешанных производных $D_1^2 f$, $D_2^2 f$ и функции f не влечет ограниченности в существенном обобщенной смешанной производной $D_1 D_2 f$ (см. также [2]). Явный пример функции с такими свойствами принадлежит В. И. Юдовичу [29]:

$$f(x_1, x_2) = x_1 x_2 \ln\ln \frac{e}{x_1^2 + x_2^2}, \qquad (x_1, x_2) \in \mathbb{D}, \tag{1.12}$$

где $\mathbb{D} := \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leqslant 1\}$ — единичный круг.

Первый общий результат об оценках в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ получен де Лю и Миркилом [34]. Именно, они получили следующее необходимое условие справедливости оценки (1.5) в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1.3 (см. [34]). *Пусть $P_j(D)$, $j \in \{1, \dots, N\}$, — операторы с постоянными коэффициентами порядка l, а $Q(D)$ — оператор порядка $\leqslant l$. Тогда из справедливости оценки*

$$\|Q(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \sum_{j=1}^{N} \|P_j(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{1.13}$$

вытекает тождество

$$Q^l(\xi) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j P_j^l(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{1.14}$$

для главных символов $Q^l(\xi)$ и $P_j^l(\xi)$ операторов $Q(D)$ и $P_j(D)$, соответственно, с некоторыми константами $\lambda_j \in \mathbb{C}$.

В частности, для однородных полиномов $P_j(\xi) = P_j^l(\xi)$, $j \in \{1, \dots, N\}$, и $Q(\xi) = Q^l(\xi)$ оценка (1.5) *при $p = \infty$ эквивалентна тождеству* (1.14).

Как указал Г. Е. Шилов [28] (см. также работу Е. А. Горина [5]), теоремы типа теоремы 1.3 имеют непосредственное применение для локальной классификации алгебр типа C.

Обобщение теоремы 1.3 на системы операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ с переменными коэффициентами другим методом получено одним из авторов в [17]. В этом случае из оценки (1.1) при $p = \infty$ и произвольной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ вытекает тождество

$$Q^l(x, \xi) = \sum_{j=1}^{N} \lambda_j(x)\, P_j^l(x, \xi), \qquad x \in \Omega, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.15}$$

с функциями $\lambda_j(\cdot)$ вместо констант λ_j. Более общий случай операторов с l-квазиоднородными главными частями обсуждается далее в теореме 1.6.

Отметим также, что в недавней работе Казанецкого и Войцеховского [36] доказано, что на пространстве аналитических тригонометрических полиномов

$$f(x_1, x_2) = \sum_{\alpha_1+\alpha_2 \leqslant m} c_\alpha \, e^{i(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2)}, \qquad \alpha = (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{Z}_+^2, \tag{1.16}$$

степени m от двух переменных справедлива оценка

$$\max_f \frac{\|D_1 D_2 f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}}{\|D_1^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)} + \|D_2^2 f\|_{L^\infty(\mathbb{T}^2)}} \geqslant C \ln^{1/8} m, \qquad m \in \mathbb{N}, \tag{1.17}$$

где $\mathbb{T}^2 := \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ — двумерный тор, а константа $C > 0$ не зависит от m.

Если отказаться от аналитичности полиномов, то, как сообщил нам Б. С. Митягин, для однородных дифференциальных операторов порядка l с постоянными коэффициентами им доказаны следующие оценки: если $Q^l \notin \operatorname{span}\{P_j^l\}_1^N$, то

$$\max_f \frac{\|Q^l(D) f\|_\infty}{\sum\limits_{j=1}^N \|P_j^l(D) f\|_\infty} \geqslant C \, \ln m, \qquad m \in \mathbb{N}.$$

Здесь $C > 0$ — не зависящая от m константа, а $f(\cdot)$ пробегает множество всех (не обязательно аналитических) тригонометрических полиномов степени m от n переменных:

$$f(x) = \sum_{|\alpha_k| \leqslant m} c_\alpha \, e^{i(\alpha, x)}, \qquad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}^n, \quad k \in \{1, \ldots, n\}. \tag{1.18}$$

Напомним определение понятия мультипликатора в L^p, играющее важную роль в дальнейшем.

Определение 1.2 (см. [26]). Пусть $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье в $L^2(\mathbb{R}^n)$. Ограниченную измеримую (по Лебегу) функцию $\Phi : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$ называют *мультипликатором* в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, если оператор свертки $f \mapsto T_\Phi f =: \mathcal{F}^{-1} \Phi \mathcal{F} f$ отображает $L^p(\mathbb{R}^n) \cap L^2(\mathbb{R}^n)$ в $L^p(\mathbb{R}^n)$ и ограничен в $L^p(\mathbb{R}^n)$. Совокупность всех мультипликаторов из L^p в L^p обозначается $\mathcal{M}_p$.

Простое описание пространств $\mathcal{M}_p$ известно лишь при $p \in \{1, 2, \infty\}$. Так, алгебра $\mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_\infty$ состоит из преобразований Фурье—Стилтьеса конечных борелевских мер в $\mathbb{R}^n$ (см. [26]):

$$\Phi \in \mathcal{M}_1 = \mathcal{M}_\infty \quad \Longleftrightarrow \quad \Phi(\xi) = \widehat{\mu}(\xi) := \int\limits_{\mathbb{R}^n} e^{i(x,\xi)} \, d\mu(x), \qquad \mu(\mathbb{R}^n) < \infty. \tag{1.19}$$

Для остальных значений $p \in (1, \infty)$ известны лишь достаточные условия включения $\Phi \in \mathcal{M}_p$ (см. [2, 26]).

Следующий результат де Лю и Миркила дополняет теорему 1.3 и дает критерий справедливости оценки (1.5) при $p = \infty$ и $\Omega = \mathbb{R}^n$ в терминах мультипликаторов.

Теорема 1.4 (см. [34]). *Пусть $Q(D)$ и $\{P_j(D)\}_1^N$ — дифференциальные операторы с постоянными коэффициентами. Тогда априорная оценка* (1.13) *эквивалентна тождеству*

$$Q(\xi) = \sum_{j=1}^N M_j(\xi) P_j(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.20}$$

в котором $\{M_j(\cdot)\}_1^N$ — мультипликаторы в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Приведем наброски доказательств теорем 1.3 и 1.4. Сначала докажем следующую лемму.

Лемма 1.1 (см. [34]). *Из справедливости априорной оценки* (1.5) *в норме пространства $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ вытекает следующее интегральное представление*:

$$[Q(D) f](0) = \sum_{j=1}^N \int\limits_{\mathbb{R}^n} P_j(D) f \, d\mu_j(x), \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{1.21}$$

где $\{\mu_j\}_1^N$ — конечные борелевские меры в $\mathbb{R}^n$.

Доказательство. Следуя [34], рассмотрим функционал F, для каждого $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ сопоставляющий вектору $\{P_j(D)f\}_1^N$ значение $[Q(D)f](0)$. Этот функционал линеен и, ввиду оценки (1.5), ограничен в $\prod_1^N C_0(\mathbb{R}^n)$, где $C_0(\mathbb{R}^n)$ — пространство непрерывных в $\mathbb{R}^n$ функций, стремящихся к нулю на бесконечности. По теореме Хана—Банаха функционал F продолжается до ограниченного линейного функционала в $\prod_1^N C_0(\mathbb{R}^n)$. Рассматривая одноточечную компактификацию $\mathbb{R}^n$ — сферу $\mathbb{S}^n$, — расширим F до функционала $\widetilde{F}$ на подпространстве $\prod_1^N C_0(\mathbb{S}^n)$ непрерывных вектор-функций на сфере $\mathbb{S}^n$, равных нулю в одной точке. К функционалу $\widetilde{F}$ на указанном подпространстве применима теорема Рисса, из которой вытекает представление (1.21). □

Набросок доказательства теоремы 1.3. Для функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ полагаем $f_r(x) := f(rx)$, $r > 0$. Тогда, подставляя функции $f = f_r$ в интегральное представление (1.21), придем к соотношению

$$r^l[Q^l(D)f]_r(0) + o(r^l) = r^l \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} [P_j^l(D)f]_r \, d\mu_j(x) + o(r^l), \qquad r \to +\infty, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{1.22}$$

Деля обе части (1.22) на r^l и затем устремляя $r \to +\infty$, придем к тождеству

$$[Q^l(D)f](0) = \sum_{j=1}^N \lambda_j \, [P_j^l(D)f](0), \qquad \text{где} \quad \lambda_j := \mu_j(0), \quad j \in \{1, \ldots, N\}.$$

Наконец, заменяя в предыдущих рассуждениях функцию $f(x)$ на $f(x-h)$, где $h \in \mathbb{R}^n$ — произвольный вектор, получим доказываемое тождество (1.14). □

Набросок доказательства теоремы 1.4.

(i) Пусть справедлива оценка (1.5). Тогда, согласно лемме 1.1, имеет место интегральное представление вида (1.21). Кроме того, функции $M_j(\xi) := \widehat{\mu}_j(\xi)$, $j \in \{1, \ldots, N\}$, будут мультипликаторами в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Отметим, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \widehat{f}(\xi) \, \widehat{\mu}(\xi) \, d\xi = \int_{\mathbb{R}^n} \widehat{(f * \mu)}(\xi) \, d\xi = (f * \mu)(0) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x) \, d\mu(x) \tag{1.23}$$

для функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ и конечной меры μ (см. [26]).

Применяя в обеих частях (1.21) преобразование Фурье, с учетом равенства (1.23) придем к соотношению

$$\int_{\mathbb{R}^n} Q(\xi)\widehat{f}(\xi) \, d\xi = \sum_{j=1}^N \int_{\mathbb{R}^n} M_j(\xi)P_j(\xi)\widehat{f}(\xi) \, d\xi, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{1.24}$$

Так как множество образов Фурье $\widehat{f}(\cdot)$ функций $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ плотно в $L^2(\mathbb{R}^n)$, из (1.24) получаем тождество (1.20).

(ii) Обратно, пусть выполнено тождество (1.20). Умножая обе его части на $\widehat{f}(\xi)$ и учитывая, что в силу определения мультипликаторов

$$M_j(\xi)\widehat{f}(\xi) =: \widehat{T_j f}(\xi), \qquad j \in \{1, \ldots, N\},$$

где $\{T_j\}$ — ограниченные операторы в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$, придем к соотношению

$$\widehat{Q(D)f}(\xi) = \sum_{j=1}^N T_j(\widehat{P_j(D)}f)(\xi), \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{1.25}$$

Применяя теперь к обеим частям (1.25) обратное преобразование Фурье и затем обозначая $C := \max_{j \in \{1,\ldots,N\}} \|T_j\|_{L^\infty \to L^\infty}$, получаем оценку (1.5). □

Следствие 1.1. *Пусть дополнительно в условиях теоремы* 1.4 *в систему* $\{P_j(D)\}_1^{N+1}$ *входит тождественный оператор* $P_{N+1}(D) := E$. *Тогда априорная оценка*

$$\|Q(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\sum_{j=1}^N \|P_j(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{1.26}$$

эквивалентна тождеству

$$Q(\xi) = \sum_{j=1}^N M_j(\xi)P_j(\xi) + M_{N+1}(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{1.27}$$

в котором $\{M_j(\cdot)\}_1^{N+1}$ — *мультипликаторы в* $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Приведем еще один важный результат, касающийся оценок в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$.

Теорема 1.5 (см. [13]). *Пусть* $Q(x,D)$ *и* $\{P_j(x,D)\}_1^N$ — *дифференциальные операторы, а также* $(D',0) := (D_1,\dots,D_m,0,\dots,0)$. *Тогда*:

(i) *из оценки* (1.1) *с* $p=\infty$ *и* $\Omega = \mathbb{R}^n$ *при любом* $m<n$ *следует «суженная» оценка*

$$\|Q(x,D',0)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\sum_{j=1}^N \|P_j(x,D',0)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m). \tag{1.28}$$

(ii) *Если коэффициенты операторов* Q *и* P_j *постоянны, то оценка* (1.1) *остается справедливой после «сужения» операторов на произвольное подпространство* $E \subset \mathbb{R}^n$.

Набросок доказательства.

(i) Пусть $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^{n-m})$ — «срезающая» функция, равная единице в окрестности нуля. Рассмотрим функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ вида

$$f(x_1,\dots,x_n) := \widetilde{f}(x_1,\dots,x_m)\,\varphi(x_{m+1},\dots,x_n), \qquad \text{где} \qquad \widetilde{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m). \tag{1.29}$$

Далее, для $r>0$ и функции $f(\cdot)$ вида (1.29) обозначим

$$f_r(x) := f\Big(x_1,\dots,x_m,\frac{x_{m+1}}{r},\dots,\frac{x_n}{r}\Big) = \widetilde{f}(x_1,\dots,x_m)\,\varphi\Big(\frac{x_{m+1}}{r},\dots,\frac{x_n}{r}\Big). \tag{1.30}$$

Подставим теперь функции (1.30) в неравенство (1.1). Так как для любого дифференциального монома $D^\alpha = D_1^{\alpha_1}\dots D_n^{\alpha_n}$ имеем

$$D^\alpha f_r = r^{-(\alpha_{m+1}+\dots+\alpha_n)}(D^\alpha f)_r,$$

то после перехода к пределу при $r \to +\infty$ в полученном неравенстве придем к (1.28).

(ii) Если коэффициенты операторов Q и P_j постоянны, то каждая из $L^\infty(\mathbb{R}^n)$-норм в (1.28) равна соответствующей $L^\infty(\mathbb{R}^m)$-норме, что доказывает справедливость оценки (1.1) после «сужения» всех операторов на подпространство E, порожденное $\xi_1,\dots,\xi_m$. Так как символы $Q(\xi)$ и $P_j(\xi)$ инвариантны при ортогональной замене переменных $\xi_1,\dots,\xi_n$, то можно считать m-мерное подпространство E произвольным. □

Замечание 1.1. Поясним, что в теореме 1.5 коэффициенты суженных операторов $Q(x,D)$, $\{P_j(x,D)\}_1^N$ по-прежнему зависят от всех n переменных, в то время как дифференцирование производится лишь по первым m переменным. Заметим еще, что функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ не являются финитными в $\mathbb{R}^n$.

1.3. Оценки в L^∞. Анизотропный случай. В дальнейшем мы определяем главную часть дифференциального оператора по отношению к произвольному вектору l с натуральными компонентами, $l=(l_1,\dots,l_n) \in \mathbb{N}^n$. Для $\alpha = (\alpha_1,\dots,\alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$ полагают $|\alpha : l| := \alpha_1/l_1 + \dots + \alpha_n/l_n$.

Определение 1.3. Пусть $l = (l_1,\dots,l_n) \in \mathbb{N}^n$. Полином $P(\xi) = P(\xi_1,\dots,\xi_n)$ называется *l-однородным*, если справедливо тождество

$$P(t^{1/l_1}\xi_1,\dots,t^{1/l_n}\xi_n) = tP(\xi_1,\dots,\xi_n), \qquad t>0, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.31}$$

Далее везде будем считать, что операторы $Q(x,D)$ и $\{P_j(x,D)\}_1^N$ имеют вид

$$Q(x,D)=\sum_{|\alpha:l|\leqslant 1} b_\alpha(x)D^\alpha, \qquad P_j(x,D)=\sum_{|\alpha:l|\leqslant 1} a_{j\alpha}(x)D^\alpha. \tag{1.32}$$

Отметим, что в изотропном случае, т. е. при $l_1=\dots=l_n=l$, неравенство $|\alpha:l|\leqslant 1$ принимает обычный вид $|\alpha|\leqslant l$.

Определение 1.4. Операторы

$$Q^l(x,D):=\sum_{|\alpha:l|=1} b_\alpha(x)\,D^\alpha, \qquad P_j^l(x,D):=\sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}(x)D^\alpha, \qquad j\in\{1,\dots,N\} \tag{1.33}$$

называют *l-главными частями*, а их l-однородные символы

$$Q^l(x,\xi):=\sum_{|\alpha:l|=1} b_\alpha(x)\,\xi^\alpha, \qquad P_j^l(x,\xi):=\sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}(x)\,\xi^\alpha, \qquad j\in\{1,\dots,N\}$$

называют *l-главными символами*, соответственно, операторов $Q(x,D)$ и $P_j(x,D)$ вида (1.32).

При $l_1=\dots=l_n=l$ определение 1.4 совпадает с определением главных символов, данным в пункте 1.1 (см. формулу (1.4)).

Замечание 1.2. Как видно из доказательства теоремы 1.5, пункт (i), в отличие от пункта (ii), справедлив для операторов как с однородными, так и с l-квазиоднородными главными частями.

Отметим, что при заданном операторе существуют различные векторы l, задающие l-главные части этого оператора. Например, параболический оператор $P(D)$ вида (1.11) имеет главные части $P^l(D)=D_1^2+\dots+D_{n-1}^2$ при $l:=(2,\dots,2,2)$ и $P^{l'}(D):=D_1^2+\dots+D_{n-1}^2+iD_n$ при $l':=(2,\dots,2,1)$.

Следующая теорема обобщает теорему 1.3 де Лю и Миркила в трех направлениях:

(i) для операторов с переменными коэффициентами;

(ii) для операторов с l-квазиоднородными главными частями;

(iii) на случай произвольной области Ω вместо $\mathbb{R}^n$.

Отметим, что метод доказательства теоремы 1.6, предложенный одним из авторов в [17, 19], в отличие от метода работы [34], позволяет охватить случай операторов с переменными коэффициентами.

Теорема 1.6 (см. [17, 19])**.** *Пусть Ω — область в $\mathbb{R}^n$, а $Q(x,D)$ и $\{P_j(x,D)\}_1^N$ — дифференциальные операторы вида* (1.32) *с коэффициентами $a_{j\alpha}(\cdot),b_\alpha(\cdot)\in L^\infty(\Omega)$ при $|\alpha:l|<1$ и $a_{j\alpha}(\cdot),b_\alpha(\cdot)\in C^1(\Omega)$ при $|\alpha:l|=1$.*

Тогда из априорной оценки

$$\|Q(x,D)f\|_{L^\infty(\Omega)}\leqslant C\sum_{j=1}^N \|P_j(x,D)f\|_{L^\infty(\Omega)}, \qquad f\in C_0^\infty(\Omega) \tag{1.34}$$

вытекает тождество

$$Q^l(x,\xi)=\sum_{j=1}^N \lambda_j(x)\,P_j^l(x,\xi), \qquad x\in\Omega, \quad \xi\in\mathbb{R}^n, \tag{1.35}$$

в котором функции $\lambda_j(\cdot)\in C^1(\Omega)$. Если коэффициенты операторов $Q(x,D)$ и $\{P_j(x,D)\}_1^N$ постоянны, то функции $\lambda_j(x)$ в (1.35) *также постоянны, $\lambda_j(x)\equiv\lambda_j$.*

В частности, для l-однородных операторов $P_j(x,D)=P_j^l(x,D)$, $j\in\{1,\dots,N\}$, и $Q(x,D)=Q^l(x,D)$ оценка (1.34) *при $p=\infty$ эквивалентна тождеству* (1.35).

Набросок доказательства. В доказательстве мы следуем [17, 19]. Ограничимся случаем операторов с постоянными коэффициентами. Замыкая неравенство (1.34) в норме $C(\Omega)$, распространим его на все финитные непрерывные в Ω функции, для которых правая часть в (1.34) конечна. Здесь дифференциальные операторы $Q(D)$ и $P_j(D)$ понимаются как обобщенные. Кроме того, без ограничения общности считаем, что $0\in\Omega$.

Далее, при $|\alpha : l| = 1$ полагаем $\alpha! := \alpha_1! \dots \alpha_n!$, и пусть $\eta(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ — срезающая функция с носителем в единичном шаре $\{x : \ |x| \leqslant 1\}$, причем $\eta(x) = 1$ при $|x| \leqslant \dfrac{1}{2}$. Тогда система пробных функций

$$f_\alpha(x) := \eta(x)\,\frac{x^\alpha}{\alpha!}\,\ln\ln e(x_1^{2l_1} + \dots + x_n^{2l_n})^{-1} = \eta(x)\,\frac{x^\alpha}{\alpha!}\,\ln\ln\frac{e}{x_1^{2l_1} + \dots + x_n^{2l_n}}, \qquad |\alpha : l| = 1 \quad (1.36)$$

определена корректно. Заметим, что при $n = 2$, $\alpha = (1,1)$ и $l_1 = l_2 = 1$ функция в (1.36) совпадает с функцией (1.12).

Функции (1.36) обладают следующими свойствами:

$$D^\beta f_\alpha(x) \in C(\Omega), \qquad |\beta : l| \leqslant 1, \quad \beta \neq \alpha; \tag{1.37}$$

$$D^\alpha f_\alpha(x) = \eta(x)\,\ln\ln e(x_1^{2l_1} + \dots + x_n^{2l_n})^{-1} + \varphi_\alpha(x), \qquad \varphi_\alpha \in C(\Omega). \tag{1.38}$$

Более того, $D^\alpha f_\alpha \notin L^\infty(\Omega)$, поскольку $\ln\ln e(x_1^{2l_1} + \dots + x_n^{2l_n})^{-1} \notin L^\infty(\Omega)$.

Предположим противное, т. е. что доказываемое тождество (1.35) нарушается. Переписывая (1.35) в терминах коэффициентов $a_{j\alpha}$ и b_α, заключаем, что нарушается хотя бы одно из равенств

$$b_\alpha = \sum_{j=1}^N \lambda_j\, a_{j\alpha}, \qquad |\alpha : l| = 1.$$

Тогда найдутся числа $\{\mu_\alpha\}$, $|\alpha : l| = 1$, не все равные нулю и такие, что

$$\sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}\mu_\alpha = 0, \quad j \in \{1, \dots, N\}, \qquad \text{но} \qquad \sum_{|\alpha:l|=1} b_\alpha\mu_\alpha \neq 0. \tag{1.39}$$

Рассмотрим функцию

$$g(x) := \sum_{|\alpha:l|=1} \mu_\alpha f_\alpha(x), \tag{1.40}$$

где $f_\alpha(\cdot)$ — функции вида (1.36). Применяя операторы $\{P_j(D)\}_1^N$ к (1.40) и учитывая соотношения (1.37)–(1.39), получаем:

$$P_j(D)g(x) = \eta(x)\left[\sum_{|\alpha:l|=1} a_{j\alpha}\mu_\alpha\right]\ln\ln e(x_1^{2l_1} + \dots + x_n^{2l_n})^{-1} + \varphi_j(x) = \varphi_j(x) \in C(\Omega), \quad j \in \{1, \dots, N\}.$$

Рассуждая аналогично, приходим к соотношению

$$Q(D)g(x) = \eta(x)\left[\sum_{|\alpha:l|=1} b_\alpha\mu_\alpha\right]\ln\ln e(x_1^{2l_1} + \dots + x_n^{2l_n})^{-1} + \varphi_0(x),$$

в котором $\varphi_0 \in C(\Omega)$. Поэтому в силу последнего соотношения в (1.39) имеем $Q(D)g \notin L^\infty(\Omega)$. Таким образом, $\|Q(D)g\|_{L^\infty(\Omega)} = \infty$, в то время как нормы $\|P_j(D)g\|_{L^\infty(\Omega)}$ конечны, $j \in \{1, \dots, N\}$. Полученное противоречие завершает доказательство. □

Следствие 1.2. *Пусть в условиях теоремы* 1.6 $Q(x,D) = Q^l(x,D)$ *и* $P_j(x,D) = P_j^l(x,D)$, $j \in \{1, \dots, N\}$. *Тогда априорная оценка* (1.34) *эквивалентна тождеству* (1.35), *в котором функции* $\lambda_j(\cdot) \in C^1(\Omega)$, $j \in \{1, \dots, N\}$. *Если коэффициенты операторов* $Q^l(x,D)$ *и* $P_j^l(x,D)$ *постоянны, то функции* $\lambda_j(\cdot)$ *в* (1.35) *также постоянны,* $\lambda_j(x) \equiv \lambda_j$, $j \in \{1, \dots, N\}$.

В частности, при $N = 1$ *оценка*

$$\|Q(x,D)f\|_{L^\infty(\Omega)} \leqslant C\|P(x,D)f\|_{L^\infty(\Omega)}, \qquad f \in C_0^\infty(\Omega) \tag{1.41}$$

эквивалентна тождеству

$$Q(x,\xi) = \lambda(x)\,P(x,\xi), \qquad x \in \Omega, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{1.42}$$

Условие (1.35), как и условие (1.14), является лишь необходимым, но не достаточным для справедливости оценки (1.1). Кроме того, «анизотропная» теорема 1.6 демонстрирует полезность неоднозначного выделения l-главной части дифференциального оператора.

Пример 1.3. Пусть $P(D) := D_1^4 + D_2^2 + iD_3$. При $l := (4,4,4)$ равенство (1.42) не исключает наличие оценки (1.41) для

$$Q_1(D) = D_1^4, \quad Q_2(D) = D_2^2, \quad Q_3(D) = D_3, \quad Q_4(D) = D_1^4 + D_2^2, \quad Q_5(D) = D_1^4 + iD_3. \tag{1.43}$$

Но при $l' := (4,2,1)$ оценка (1.41) противоречит следствию 1.2. Действительно, l'-главные символы этих операторов $P^{l'}(\xi) = \xi_1^4 + \xi_2^2 + i\xi_3$ и

$$Q_1^{l'}(\xi) = \xi_1^4, \qquad Q_2^{l'}(\xi) = \xi_2^2, \qquad Q_3^{l'}(\xi) = \xi_3, \qquad Q_4^{l'}(\xi) = \xi_1^4 + \xi_2^2, \qquad Q_5^{l'}(\xi) = \xi_1^4 + i\xi_3$$

в этом случае не пропорциональны и, значит, как тождество (1.42), так и оценка (1.41) с $Q(D) = Q_j(D)$, $j \in \{1,\dots,5\}$, вида (1.43) не имеют места.

Отсутствие оценки (1.41) при $\Omega = \mathbb{R}^3$ для операторов (1.43) показывает также, что функции

$$\Phi_j(\xi) := \frac{Q_j(\xi)}{P(\xi)}, \qquad j \in \{1,\dots,5\}, \tag{1.44}$$

не являются мультипликаторами в $L^\infty(\mathbb{R}^3)$. Действительно, в противном случае каждое из вытекающих из (1.44) тождеств $Q_j(\xi) = \Phi_j(\xi)\, P(\xi)$, в которых $\Phi_j \in \mathcal{M}_\infty$, $j \in \{1,\dots,5\}$, противоречит теореме 1.4 де Лю и Миркила.

1.4. Оценки в L^1. Остановимся кратко на результатах об оценках в L^1. Орнстейном [41] был получен следующий результат, являющийся L^1-версией теоремы 2.4 де Лю и Миркила.

Теорема 1.7 (см. [41])**.** *Пусть $P_j(D) = P_j^l(D)$, $j \in \{1,\dots,N\}$ — однородные операторы порядка l с постоянными коэффициентами и $Q(D) = Q^l(D)$, $\deg Q = l$. Тогда оценка*

$$\|Q(D)f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \sum_{j=1}^N \|P_j(D)f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{1.45}$$

эквивалентна тождеству

$$Q^l(\xi) = \sum_{j=1}^N \lambda_j P_j^l(\xi), \qquad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{1.46}$$

с некоторыми константами $\lambda_j \in \mathbb{C}$, $j \in \{1,\dots,N\}$.

Изотропный аналог следствия 1.2 при $N = 1$ для пространства L^1 получен в работе Кирхгайма и Кристенсена [37].

Теорема 1.8 (см. [37])**.** *Пусть $Q(x,D) = Q^l(x,D)$ и $P(x,D) = P^l(x,D)$ — однородные операторы порядка l с локально интегрируемыми в $\mathbb{R}^n$ коэффициентами. Тогда оценка*

$$\|Q(x,D)f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)} \leqslant C\|P(x,D)f\|_{L^1(\mathbb{R}^n)}, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{1.47}$$

при $\Omega = \mathbb{R}^n$ эквивалентна тождеству (1.42) *при для п. в. $x \in \mathbb{R}^n$ с некоторой функцией $\lambda(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$.*

Наконец, в работе Казанецкого, Столярова и Войцеховского [35] теорема 1.7 Орнстейна обобщена на анизотропный случай l-однородных операторов с постоянными коэффициентами. Тем самым была получена L^1-версия следствия 1.2.

Теорема 1.9 (см. [35])**.** *Пусть $l = (l_1,\dots,l_n) \in \mathbb{N}^n$,*

$$Q(D) = \sum_{|\alpha:l|\leqslant 1} b_\alpha D^\alpha = Q^l(D) \quad \text{и} \quad P_j(D) = \sum_{|\alpha:l|\leqslant 1} a_{j\alpha} D^\alpha = P_j^l(D), \quad j \in \{1,\dots,N\}, \tag{1.48}$$

— l-однородные операторы с постоянными коэффициентами. Пусть также степени всех мономов, входящих в запись символов $Q^l(\xi)$ и $\{P_j^l(\xi)\}_1^N$, имеют одинаковую четность. Тогда оценка (1.45) *эквивалентна тождеству* (1.46)*.*

Отметим, что доказательства теорем 1.7–1.9 значительно труднее соответствующих доказательств их L^∞-версий. Отметим еще, что при доказательстве теорем 1.8 и 1.9 в работах [35, 37] существенно используются методы выпуклого анализа.

2. Оценки для квазиэллиптической системы в L^p при $p \in [1,\infty]$

Наиболее употребительными в приложениях являются априорные оценки для эллиптических и l-квазиэллиптических систем операторов.

Определение 2.1 (см. [2,4]). Пусть $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$. Систему дифференциальных операторов $\{P_j(x,D)\}_1^N$ вида (1.32) называют *l-квазиэллиптической*, если

$$(P_1^l(x,\xi), \dots, P_N^l(x,\xi)) \neq 0, \qquad (x,\xi) \in \Omega \times (\mathbb{R}^n \setminus \{0\}). \tag{2.1}$$

В частности, в изотропном случае, т. е. при $l_1 = \dots = l_n = l$, систему $\{P_j(x,D)\}_1^N$ называют *эллиптической* порядка l.

Определение 2.2 (см. [2]). Пусть $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$. *Анизотропным пространством Соболева* $W_p^l(\Omega)$, $p \in [1,\infty]$, называют множество функций $f \in L^p(\Omega)$, имеющих обобщенные производные $D^\alpha f \in L^p(\Omega)$ при всех $|\alpha : l| \leqslant 1$, с нормой

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)} := \sum_{|\alpha:l| \leqslant 1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)}. \tag{2.2}$$

Подпространство в $W_p^l(\Omega)$, совпадающее с замыканием множества $C_0^\infty(\Omega)$ в норме (2.2), обозначают через $W_{p,0}^l(\Omega)$.

Определение 2.3 (см. [2]). Систему дифференциальных операторов $\{P_j(x,D)\}_1^N$ называют *коэрцитивной* в анизотропном пространстве Соболева $W_{p,0}^l(\Omega)$, если справедлива априорная оценка

$$\|f\|_{W_p^l(\Omega)} \leqslant C_1 \sum_{j=1}^N \|P_j(x,D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2 \|f\|_{L^p(\Omega)}, \qquad f \in C_0^\infty(\Omega), \tag{2.3}$$

в которой константы $C_1, C_2 > 0$ не зависят от f.

Другими словами, система $\{P_j(x,D)\}_1^N$ коэрцитивна в $W_{p,0}^l(\Omega)$, если линейное пространство $L_{p,\Omega}^0(P_1, \dots, P_N)$ максимально возможное.

Для доказательства критерия коэрцитивности нам понадобится следующая классическая теорема Михлина—Лизоркина [8,23] о мультипликаторах в L^p при $p \in (1,\infty)$ (см. также [2, гл. III, § 11]).

Теорема 2.1 (см. [8,23]). *Пусть функция $\Phi(\cdot)$ непрерывна и ограничена на множестве*

$$\mathbb{R}_*^n := \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ \xi_k \neq 0, \ k \in \{1, \dots, n\}\}$$

вместе со всеми производными $D^\alpha \Phi(\cdot)$, $\alpha \in \mathbb{Z}_2^n := \mathbb{Z}_2 \times \dots \times \mathbb{Z}_2$, $\mathbb{Z}_2 := \{0;1\}$. Если

$$|\xi^\alpha D^\alpha \Phi(\xi)| \leqslant C, \quad \alpha \in \mathbb{Z}_2^n, \quad \xi \in \mathbb{R}_+^n, \tag{2.4}$$

то $\Phi \in \mathcal{M}_p(\mathbb{R}^n)$ при $p \in (1,\infty)$.

Следующий классический результат об l-квазиэллиптических системах хорошо известен.

Теорема 2.2 (см. [2,4]). *Система операторов $\{P_j(x,D)\}_1^N$ вида (1.32) с непрерывными в области Ω коэффициентами l-квазиэллиптична в точности тогда, когда она коэрцитивна в анизотропном пространстве $W_{p,0}^l(\Omega)$ при каждом $p \in (1,\infty)$.*

Набросок доказательства. Ограничимся случаем операторов с постоянными коэффициентами.

(i) *Необходимость.* Пусть система $\{P_j(D)\}_1^N$ l-квазиэллиптична. Тогда с помощью теоремы 2.1 легко проверить, что функции

$$\Phi_{j\alpha}(\xi) := \frac{\xi^\alpha \overline{P_j^l(\xi)}}{\sum\limits_{k=1}^n |P_k^l(\xi)|^2}, \qquad |\alpha : l| \leqslant 1, \qquad j \in \{1, \dots, N\} \tag{2.5}$$

являются мультипликаторами в $L^p(\mathbb{R}^n)$ при $p \in (1,\infty)$. Доказательство теоремы 2.2 теперь вытекает из тождества

$$\xi^\alpha \widehat{f}(\xi) = \sum_{j=1}^{N} \Phi_{j\alpha}(\xi) P_j(\xi) \widehat{f}(\xi), \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{2.6}$$

Именно, после применения обратного преобразования Фурье к обеим частям (2.6) получаем

$$D^\alpha f = \sum_{j=1}^{N} T_j(P_j(D)f), \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{2.7}$$

где T_j — ограниченные в L^p операторы свертки с символами $\Phi_{j\alpha}(\cdot)$, $j \in \{1,\dots,N\}$. Из равенства (2.7) вытекает оценка (1.5) с $Q(D) = D^\alpha$.

(ii) *Достаточность.* Пусть теперь система $\{P_j(D)\}_1^N$ коэрцитивна в $W^l_{p,0}(\Omega)$ при некотором $p \in (1,\infty)$. Предположим противное, т. е. что система не l-квазиэллиптична, т. е. $P_j^l(\xi^0) = 0$, $j \in \{1,\dots,N\}$, при некотором $\xi^0 = (\xi_1^0,\dots,\xi_n^0) \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Положим при $t > 0$

$$f_t(x) := \chi(\xi)\,\exp\biggl[\sum_{k=1}^{n} t^{1/l_k}\xi_k^0 x_k\biggr], \tag{2.8}$$

где $\chi(\cdot) \in C_0^\infty(\Omega)$ — ненулевая функция. Подставляя функции (2.8) в (1.5), придем к оценке

$$\sum_{k=1}^{n} \|D_k^{l_k} f_t\|_{L^p(\Omega)} + o(t) = t\sum_{k=1}^{n} |\xi_k^0|^{l_k}\,\|f_t\|_{L^p(\Omega)} + o(t) \leqslant o(t), \qquad t \to +\infty,$$

противоречивой при больших t.

Теорема полностью доказана. □

Замечание 2.1. Отметим, что при $p = 2$ в изотропном случае для операторов с постоянными коэффициентами теорема 2.2 вытекает из равенства Парсеваля.

Далее, обозначим через $\mathrm{ch}(\mathcal{A})$ выпуклую (замкнутую) оболочку множества $\mathcal{A} \subset \mathbb{R}^n$. Следующая теорема, доказанная Ильиным [6], дает критерий справедливости оценки (1.5) для случая, когда $Q(D)$ и $\{P_j(D)\}_1^N$ — дифференциальные мономы в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p \in (1,\infty)$. Ее доказательство также базируется на проверке условий теоремы 2.1 Михлина—Лизоркина.

Теорема 2.3 (см. [6])**.** *Пусть $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}_+^n$ — конечное подмножество и $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$. Тогда при каждом $p \in (1,\infty)$ оценка*

$$\|D^\beta f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)} \leqslant C \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \|D^\alpha f\|_{L^p(\mathbb{R}^n)}, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n) \tag{2.9}$$

с константой $C = C_{\mathcal{A}}$ (не зависящей от f) эквивалентна условию $\beta \in \mathrm{ch}(\mathcal{A})$.

При $p = 1$ и $p = \infty$ l-квазиэллиптическая система является коэрцитивной в $W^l_{\infty,0}(\Omega)$ и $W^l_{1,0}(\Omega)$ в исключительных случаях (см. теорему 1.6). Тем не менее, она является слабо коэрцитивной в $W^l_{p,0}(\Omega)$, $p \in [1,\infty]$, в смысле следующего определения.

Определение 2.4 (см. [13])**.** Систему дифференциальных операторов $\{P_j(x,D)\}_1^N$ называют *слабо коэрцитивной* в анизотропном пространстве Соболева $W^l_{p,0}(\Omega)$, если верна оценка

$$\sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant C_1 \sum_{j=1}^{N} \|P_j(x,D)f\|_{L^p(\Omega)} + C_2\|f\|_{L^p(\Omega)}, \qquad f \in C_0^\infty(\Omega) \tag{2.10}$$

с некоторыми постоянными $C_1, C_2 > 0$, не зависящими от f.

Оценка (2.10) для l-квазиэллиптической системы $\{P_j(x,D)\}_1^N$ при $p \in (1,\infty)$ вытекает из (2.3), а при $p = \infty$ доказана в [19]. В случае постоянных коэффициентов она доказана в [32] при всех $p \in [1,\infty]$.

Для случая одного оператора с постоянными коэффициентами еще ранее де Лю и Миркил [34] показали, что при $n \geqslant 3$ эллиптический оператор $P(D) = P_1(D)$ может быть охарактеризован при помощи априорных оценок в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Именно, справедлив следующий результат.

Теорема 2.4 (см. [34]). *При $n \geqslant 3$ эллиптичность дифференциального полинома $P(D)$ порядка $l \geqslant 2$ эквивалентна его слабой коэрцитивности в $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$.*

Условие $n \geqslant 3$ в теореме 2.4 существенно. Так, в [34] приведен принадлежащий Мальгранжу пример слабо коэрцитивного в $W^2_{\infty,0}(\mathbb{R}^2)$ неэллиптического оператора $P(D) = (D_1 + i)(D_2 + i)$.

В связи с критерием де Лю и Миркила естественно возникает вопрос о возможной характеризации эллиптических и l-квазиэллиптических операторов и систем при помощи априорных оценок типа слабой коэрцитивности в $W^l_{p,0}(\Omega)$ при $p \in [1, \infty]$.

Введем еще подкласс слабо коэрцитивных систем.

Определение 2.5. Систему операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ будем называть *ε-слабо коэрцитивной* в анизотропном пространстве Соболева $W^l_{p,0}(\Omega)$, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдется константа $C_\varepsilon > 0$, не зависящая от f и такая, что верна оценка

$$\sum_{|\alpha:l|<1} \|D^\alpha f\|_{L^p(\Omega)} \leqslant \varepsilon \sum_{j=1}^N \|P_j(x, D) f\|_{L^p(\Omega)} + C_\varepsilon \|f\|_{L^p(\Omega)}, \qquad f \in C_0^\infty(\Omega). \tag{2.11}$$

Для выяснения условий слабой коэрцитивности в L^p при $p \in [1, \infty]$ нам понадобится теорема о мультипликаторах в L^1, полученная Э. С. Белинским, М. З. Двейриным и одним из авторов в [32].

Теорема 2.5 (см. [32]). *Пусть $\Phi \in C(\mathbb{R}^n)$ и при некоторых постоянных $\delta \in (0, 1)$ и $A_\delta > 0$ удовлетворяет следующим условиям:*

(i) *справедливо неравенство*

$$\prod_{j=1}^n (1 + |\xi_j|)^\delta |\Phi(\xi)| \leqslant A_\delta, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n; \tag{2.12}$$

(ii) *для любых мультииндексов $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}_2^n$ таких, что $\alpha + \beta = (1, 1, \ldots, 1)$, существуют производные $D^\alpha \Phi$ и выполнено неравенство*

$$\prod_{j \in \mathbb{N}_\alpha} |\xi_j|^{1-\delta} (1 + |\xi_j|^{2\delta}) \prod_{j \in \mathbb{N}_\beta} (1 + |\xi_j|)^\delta |D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} \Phi(\xi)| \leqslant A_\delta, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n. \tag{2.13}$$

Здесь $\mathbb{N}_\alpha \subset \{1, \ldots, n\}$ — носитель мультииндекса $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{Z}_+^n$, т. е. множество индексов $j \in \{1, \ldots, n\}$, для которых $\alpha_j > 0$.

Тогда $\Phi \in \mathcal{M}_1$ и, значит, $\Phi \in \mathcal{M}_p$ при $p \in [1, \infty]$.

Замечание 2.2. При $\delta = 0$ условие (i) теоремы 2.5 выполняется автоматически, а условие (ii) принимает вид

$$|\xi_1^{\alpha_1} \ldots \xi_n^{\alpha_n} D_1^{\alpha_1} \ldots D_n^{\alpha_n} \Phi(\xi)| \leqslant A_\delta, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \tag{2.14}$$

где $\alpha_j \in \{0; 1\}$, $j \in \{1, \ldots, n\}$. В этом случае условие теоремы 2.5 превращается в условие (2.4) Михлина—Лизоркина из их теоремы 2.1, согласно которой функция $\Phi(\cdot)$ является мультипликатором в $L^p(\mathbb{R}^n)$ при $p \in (1, \infty)$.

С помощью теоремы 2.5 в работе [32] был получен следующий результат.

Теорема 2.6 (см. [32]). *Пусть $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ и $\{P_j(D)\}_1^N$ — l-квазиэллиптическая система операторов вида (1.32) с постоянными коэффициентами. Тогда система $\{P_j(D)\}_1^N$ является ε-слабо коэрцитивной в шкале пространств $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$.*

В работе [38] С. В. Кислякова, Д. В. Максимова и Д. М. Столярова теорема 2.5 применяется при доказательстве следующего утверждения.

Предложение 2.1 (см. [38]). *Пусть функция $\varphi \in C^\infty(\mathbb{R}^n \backslash \{0\})$ и l-однородна (в смысле тождества (1.31)) при $l = (-l_1, \ldots, -l_n)$, $l_k > 0$, $k \in \{1, \ldots, n\}$. Пусть также $\chi(\cdot) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ — срезающая функция и такая, что $0 \leqslant \chi(\xi) \leqslant 1$, $\chi(\xi) \equiv 0$ при $|\xi| \leqslant r$, $\chi(\xi) \equiv 1$ при $|\xi| \geqslant 2r$, $r > 0$. Тогда функция $f(x) := \varphi(x)\chi(x)$ является мультипликатором в $L^p(\mathbb{R}^n)$ при $p \in [1, \infty]$.*

В [38] по системе $T := \{T_j\}_1^N$ дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами вида (1.32) с l-однородными главными частями $\{T_j^l\}_1^N$ вида (1.33), первоначально заданными на множестве тригонометрических полиномов от n переменных, вводится полунорма графика отображения T:

$$\|f\|_T := \max_{j\in\{1,\ldots,N\}} \|T_j f\|_{C(\mathbb{T}^n)}. \tag{2.15}$$

После факторизации по ядру полунормы и пополнения приходят к банаховому пространству $C^T(\mathbb{T}^n)$, называемому пространством гладких функций, порождаемому системой $T := \{T_j\}_1^N$ на n-мерном торе $\mathbb{T}^n$. Эти пространства играют важную роль в общей теории B-пространств (см. [38] и цитируемую там литературу).

В частности, они фигурируют в формулировке следующего замечательного результата из [38], в доказательстве которого среди других утверждений используется также и предложение 2.1.

Теорема 2.7 (см. [38, теорема 2.2]). *Пусть $T = \{T_j\}_1^N$ — система операторов с постоянными коэффициентами вида* (1.32)*, и пусть среди их l-однородных главных частей $\{T_j^l\}_1^N$ не менее двух линейно независимых. Тогда второе сопряжённое к $C^T(\mathbb{T}^n)$ пространство $C^T(\mathbb{T}^n)^{**}$ не изоморфно* дополняемому подпространству *пространства $C(K)$ ни для какого компакта K.*

Отметим, что согласно формуле (2.15) отображение $T : f \to \{T_1 f, \ldots, T_N f\}$ (после факторизации по ядру) задаёт изоморфизм пространства $C^T(\mathbb{T}^n)$ некоторому подпространству пространства $C(\coprod_{j=1}^{N} \mathbb{T}^n)$. Теорема 2.7, в частности, утверждает, что это *подпространство не дополняемо.*

Отметим, что «изотропная» версия предложения 2.1 (при $l_1 = \cdots = l_n$) другим методом ранее доказана Боманом в [33]. Этот факт использовался им для доказательства справедливости оценки

$$\|Q(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1\|P(D)f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C_2\|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \qquad \deg Q \leqslant l-1,$$

в случае эллиптического оператора $P(D)$ порядка l, т. е. для доказательства части теоремы 2.4 де Лю и Миркила.

Далее, в работе [32] при помощи теоремы 2.5 было получено другое (более простое и короткое) доказательство критерия Бомана [33] для системы дифференциальных мономов в $L^\infty(\mathbb{R}^n)$. Этот результат является естественным распространением теоремы 2.3 Ильина на случай $p = \infty$.

Для его формулировки обозначим через $\mathrm{int}_k(\mathcal{A})$ множество внутренних точек $\mathcal{A}$ относительно k-мерного аффинного подпространства $E_k \subset \mathbb{R}^n$, где $\mathcal{A} \subset E_k$.

Теорема 2.8 (см. [33]). *Пусть $\mathcal{A} \subset \mathbb{Z}_+^n$ — конечное подмножество и $\beta \in \mathbb{Z}_+^n$.*

(i) *Если существует k-мерное аффинное подпространство $E_k \subset \mathbb{R}^n$, $k \in \{0, \ldots, n\}$, параллельное k-мерной координатной плоскости в $\mathbb{R}^n$ и такое, что*

$$\beta \in \mathrm{int}_k(\mathrm{ch}(E_k \cap \mathcal{A})), \tag{2.16}$$

то оценка (2.9) *верна при $p = \infty$.*

(ii) *Обратно, из справедливости оценки* (2.9) *при $p = \infty$ вытекает включение* (2.16)*.*

Доказательство. Следуя [32], приведем доказательство достаточности (пункт (i)).

1. Пусть условие (2.16) выполнено при $k = n$, т. е. $\beta \in \mathrm{int}_n(\mathrm{ch}(\mathcal{A}))$. Положим

$$m_\beta(\xi) := \frac{\xi^{2\beta}}{\sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \xi^{2\alpha}}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \tag{2.17}$$

и $m_\beta(0) := 0$. Покажем, что $m_\beta \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n)$.

Сначала проверим непрерывность $m_\beta(\cdot)$ при $\xi = 0$. Так как β — внутренняя точка $\mathrm{ch}(\mathcal{A})$, то существует $\varepsilon_0 > 0$ такое, что $\beta' := \beta'(\varepsilon) := \beta \pm \varepsilon \in \mathrm{int}_n(\mathrm{ch}(\mathcal{A}))$, где $\varepsilon := (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ — вектор с $\varepsilon_j \in [0, \varepsilon_0)$. Следовательно, β допускает различные представления вида

$$\beta = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \lambda_\alpha \cdot \alpha \pm \varepsilon, \qquad \lambda_\alpha := \lambda_\alpha(\varepsilon) > 0, \quad \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \lambda_\alpha = 1, \quad \varepsilon_j \in [0, \varepsilon_0). \tag{2.18}$$

Подставляя соотношения (2.18) в (2.17), получаем

$$|m_\beta(\xi)| \leqslant \frac{|\prod\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} \xi^{\lambda_\alpha\cdot 2\alpha}| \cdot |\xi^{\pm 2\varepsilon}|}{\sum\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} \xi^{2\alpha}}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}, \tag{2.19}$$

где

$$\xi^{\lambda_\alpha\cdot 2\alpha} := \prod_{j=1}^n (\xi_j^{2\alpha})^{\lambda_\alpha} \qquad \text{и} \qquad \xi^{\pm 2\varepsilon} := \prod_{j=1}^n (\xi_j^2)^{\pm\varepsilon}. \tag{2.20}$$

Применяя неравенство Юнга, из (2.19) видим, что

$$|m_\beta(\xi)| \leqslant \frac{\sum\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} \lambda_\alpha \cdot \xi^{2\alpha}}{\sum\limits_{\alpha\in\mathcal{A}} \xi^{2\alpha}} |\xi^{\pm 2\varepsilon}| \leqslant |\xi^{\pm 2\varepsilon}|, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}. \tag{2.21}$$

Из оценки (2.21) со знаком «плюс» вытекает непрерывность $m_\beta(\cdot)$ в нуле.

Далее, выбирая знак «минус» в представлении (2.18) и снова применяя неравенство Юнга, приходим к оценке

$$|\xi^{2\beta} \cdot \xi^{2\varepsilon}| = \prod_{\alpha\in\mathcal{A}} |\xi^{2\alpha}|^{\lambda_\alpha} \leqslant \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \lambda_\alpha \xi^{2\alpha} \leqslant \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} \xi^{2\alpha}. \tag{2.22}$$

Полагая $\varepsilon = 0$ в (2.22), видим, что $m_\beta(\cdot)$ ограничена, $|m_\beta(\xi)| \leqslant 1$.

Для доказательства включения $m_\beta \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n)$ проверим условия (i) и (ii) теоремы 2.5. Полагая $\varepsilon := (0, \ldots, \varepsilon_j, \ldots, 0)$ с $\varepsilon_j > 0$, из (2.21) (взятого со знаком «минус») выводим, что $|\xi_j^{2\varepsilon_j} m_\beta(\xi)| \leqslant 1$ при $\xi \in \mathbb{R}^n$. Принимая во внимание неравенство $|m_\beta(\xi)| \leqslant 1$, получаем оценку

$$(|\xi_j|^{\varepsilon_j} + 1)\,|m_\beta(\xi)| \leqslant 2\,|\xi_j^{2\varepsilon_j} m_\beta(\xi)| \leqslant 2, \qquad |\xi_j| \geqslant 1. \tag{2.23}$$

В случае $|\xi_j| < 1$ неравенство $(|\xi_j|^{\varepsilon_j} + 1)\,|m_\beta(\xi)| \leqslant 2$ очевидно. Поэтому

$$|m_\beta(\xi)| \leqslant 2(|\xi_j|^{\varepsilon_j} + 1)^{-1}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n, \qquad j \in \{1, \ldots, n\}. \tag{2.24}$$

Перемножая неравенства (2.24) и применяя неравенство Бернулли, придем к требуемой оценке

$$|m_\beta(\xi)| \leqslant C_\varepsilon \prod_{j=1}^n (|\xi_j| + 1)^{-\varepsilon_j/n}, \qquad \xi \in \mathbb{R}^n \tag{2.25}$$

с положительной постоянной C_ε. Оценки (ii) для производных $D^\alpha m_\beta$ проверяются аналогично. Таким образом, $m_\beta \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n)$ для всех $\beta \in \operatorname{int}_n(\operatorname{ch}(\mathcal{A}))$.

Оценка (2.9) вытекает теперь из тождества

$$\xi^\beta \widehat{f}(\xi) = \sum_{\alpha\in\mathcal{A}} m_{\frac{\alpha+\beta}{2}}(\xi)(\xi^\alpha \widehat{f}(\xi)), \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{2.26}$$

В самом деле, применяя к обеим частям (2.26) обратное преобразование Фурье, получаем соотношение вида (2.7), которое, в свою очередь, влечет оценку (2.9).

2. Пусть условие (2.16) выполнено для некоторого $k \in \{0, 1, \ldots, n-1\}$, и $\mathcal{A}_k := E_k \cap \mathcal{A}$. По условию теоремы, аффинное подпространство E_k имеет вид $E_k = E_k^0 + \gamma$, где E_k^0 — k-мерная координатная плоскость, $\gamma \in \mathbb{R}^n$ и $\gamma \perp E_k^0$. Не умаляя общности, можно считать, что $E_k^0 = \{x \in \mathbb{R}^n :\ x_{k+1} = \cdots = x_n = 0\}$ и $\gamma = (0, \ldots, 0, \gamma_{k+1}, \ldots, \gamma_n) \in \mathbb{R}^n$. Положим $\alpha = (\alpha', \alpha'')$, $\xi = (\xi', \xi'')$ и $\gamma = (\gamma', \gamma'') = (0, \gamma'')$, где $\alpha' \in \mathbb{Z}_+^k$, $\alpha'' \in \mathbb{Z}_+^{n-k}$ и $\xi' \in E_k^0$, $\xi'' \in (E_k^0)^\perp$. Если β удовлетворяет (2.16), то $\beta = (\beta', \gamma'')$, где

$$\beta' \in \operatorname{int}_k(\operatorname{ch}(\mathcal{A}'_k)) \cap \mathbb{Z}_+^k \qquad \text{и} \qquad \mathcal{A}'_k := \{\alpha' \in \mathbb{Z}_+^k : (\alpha', \gamma'') \in \mathcal{A}_k\}. \tag{2.27}$$

Определим теперь $m_\beta(\cdot)$, заменяя $\mathcal{A}$ на $\mathcal{A}_k$ в (2.17), т. е. полагая

$$m_\beta(\xi) := \frac{\xi^{2\beta}}{\sum\limits_{\alpha\in\mathcal{A}_k} \xi^{2\alpha}} = \frac{\xi^{2\beta'+2\gamma''}}{\sum\limits_{\alpha\in\mathcal{A}_k} \xi^{2\alpha'+2\gamma''}} = \frac{(\xi')^{2\beta'}}{\sum\limits_{\alpha'\in\mathcal{A}'_k} (\xi')^{2\alpha'}} =: m_{\beta'}(\xi'), \qquad \xi' \in E_k^0 \setminus \{0\}.$$

На предыдущем шаге было доказано, что $m_{\beta'}(\xi') \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^k)$. Следовательно, требуемая оценка вытекает из тождества

$$\xi^\beta \widehat{f}(\xi) = \sum_{\alpha \in \mathcal{A}_k} \widetilde{m}_{\frac{\alpha+\beta}{2}}(\xi)(\xi^\alpha \widehat{f}(\xi)), \qquad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \tag{2.28}$$

аналогичного (2.26), но в котором

$$\widetilde{m}_{(\alpha+\beta)/2} := m_{(\alpha'+\beta')/2} \otimes \widehat{\delta}_{k+1} \otimes \cdots \otimes \widehat{\delta}_n \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^n).$$

Здесь δ_j обозначает меру Дирака,

$$\delta_j \varphi(\xi_1, \ldots, \xi_j, \ldots, \xi_n) = \varphi(\xi_1, \ldots, 0, \ldots, \xi_n), \qquad j \in \{k+1, \ldots, n\}.$$

Теорема полностью доказана. □

Замечание 2.3.

(i) В силу включения $\mathcal{M}_1 \subset \mathcal{M}_p$ при $p \in (1, \infty)$ приведенное доказательство показывает, что оценка (2.9) в теореме 2.8 справедлива также при произвольном $p \in [1, \infty]$. Это доказывает часть теоремы 2.3 Ильина для случая $\beta \in \operatorname{int}_n(\operatorname{ch}(\mathcal{A}))$. Доказательство теоремы 2.3 в общем случае может быть выведено из вида мультипликатора (2.17) и при $\beta \in \operatorname{ch}(\mathcal{A})$.

(ii) Боман [33] доказал теорему 2.8 значительно сложнее, используя теорему 1.4 де Лю и Миркила и некоторые другие результаты гармонического анализа.

В следующей теореме мы показываем, что при каждом $p \in (1, \infty]$ неравенство (2.11) с любым $\varepsilon > 0$ уже характеризует эллиптические системы в классе всех слабо коэрцитивных в $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$ систем с постоянными коэффициентами в их главных частях.

Теорема 2.9 (см. [13]). *Пусть $p \in (1, \infty]$, Ω — область в $\mathbb{R}^n$ и $\{P_j(x, D)\}_1^N$ — операторы порядка l, главные части которых имеют постоянные коэффициенты, т. е. $P_j^l(x, D) = P_j^l(D)$, и $a_{j\alpha}(\cdot) \in L^\infty(\Omega)$ при $|\alpha| < l$, $j \in \{1, \ldots, N\}$. Тогда система операторов $\{P_j(x, D)\}_1^N$ эллиптична в точности тогда, когда она ε-слабо коэрцитивна в $W^l_{p,0}(\Omega)$.*

Для операторов $P_j(D)$ с постоянными коэффициентами результат остается верным и при $p = 1$.

В частности, операторы типа Мальгранжа, т. е. операторы вида $P(D) = (D_1 + i)(D_2 + i)$, являются слабо коэрцитивными, но не ε-слабо коэрцитивными в $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$.

Замечание 2.4. В этом обзоре мы не касаемся условий коэрцитивности для системы максимальных операторов. Этим вопросам, в частности, посвящены работыАроншайна [31], Агмона [30], Шехтера [42], Смита [43], Нечаса [40] и В. П. Михайлова [22]. В работе О. В. Бесова [1] (см. также [2, гл. III, § 11]) решается аналогичная задача коэрцитивности для максимальных операторов с переменными коэффициентами и l-квазиоднородной главной частью. Отметим также работу Г. Г. Казаряна [7], в которой найдены достаточные условия справедливости оценки вида (2.3) в случае $N = 1$ и вырожденного многочлена $P_1(\xi)$.

3. Оценки в L^∞ для систем эллиптических и l-квазиэллиптических операторов

В этом разделе мы распространяем теорему 2.4 де Лю и Миркила на случай одного оператора *с переменными коэффициентами.* Кроме того, мы приводим аналоги этой теоремы для системы с постоянными коэффициентами в изотропном и анизотропном случаях. Всюду в дальнейшем $\Omega = \mathbb{R}^n$.

3.1. Изотропный случай.

Вначале мы приведем общие результаты о слабо коэрцитивных системах в изотропных пространствах $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, представляющие и самостоятельный интерес.

Теорема 3.1 (см. [13]). *Пусть $\{P_j(x, D)\}_1^N$ — система операторов вида (1.2) порядка $l \geqslant 2$, коэффициенты главных частей которых постоянны. Пусть также система $\{P_j(x, D)\}_1^N$ слабо коэрцитивна в изотропном пространстве $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$.*

(i) *Если коэффициенты операторов $P_j(x,D)$ непрерывны, $j \in \{1,\dots,N\}$, то при каждом фиксированном $x_0 \in \mathbb{R}^n$ множество нулей*

$$\mathcal{N}(x_0,P) := \{\xi \in \mathbb{R}^n : \ P_1(x_0,\xi) = \dots = P_N(x_0,\xi) = 0\}$$

системы полиномов $\{P_j(x_0,\xi)\}_1^N$ компактно.

(ii) *Для любой системы $\{Q_j(x,D)\}_1^N$, где $Q_j(x,D)$ — операторы порядка $\leqslant l-2$, система $\{P_j(x,D)+Q_j(x,D)\}_1^N$ также слабо коэрцитивна в $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$.*

(iii) *Пусть $\xi^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ — нуль отображения*

$$P^l := (P_1^l,\dots,P_N^l) : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2N}, \tag{3.1}$$

т. е. $P_j^l(\xi^0)=0$, $j \in \{1,\dots,N\}$, и

$$T_{2j-1}(\xi) := \operatorname{Re} P_j^l(\xi), \qquad T_{2j}(\xi) := \operatorname{Im} P_j^l(\xi), \qquad j \in \{1,\dots,N\}. \tag{3.2}$$

Если $n \geqslant 2N+1$, то ранг якобиевой матрицы отображения

$$T := (T_1,\dots,T_{2N}) : \ \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2N} \tag{3.3}$$

в точке ξ^0 не превосходит $2N-1$.

(iv) *Пусть дополнительно $a_{j\alpha}(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ при $|\alpha| < l-1$ и $a_{j\alpha}(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ при $|\alpha| = l-1$. Если $N=1$, $p=\infty$, $n \geqslant 2$, $\xi^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ — нуль полинома $P^l(\xi)$. Тогда $\nabla P^l(\xi^0) \neq 0$. В частности, при $n=2$ нули полинома $P^l(\xi)$ простые.*

Замечание 3.1.

(i) Компактность множества нулей отображения

$$P = (P_1,\dots,P_N) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^{2N}$$

в случае слабо коэрцитивной системы $\{P_j(D)\}_1^N$ с постоянными коэффициентами вытекает из алгебраического неравенства (1.6).

(ii) В доказательстве утверждения (iii) используются теория степени отображения (см. [24, 25]) и другие топологические соображения.

(iii) В случае постоянных коэффициентов утверждение (iv) содержательно лишь при $n=2$, так как в силу теоремы 2.4 при $n \geqslant 3$ каждый слабо коэрцитивный в $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$ оператор является эллиптическим.

Теорема 3.2 (см. [13, 14]). *Пусть $l \geqslant 2$, $n \geqslant 3$ и $P(x,D)$ — дифференциальный оператор порядка l,*

$$P(x,D) = \sum_{|\alpha|\leqslant l} a_\alpha(x) D^\alpha, \tag{3.4}$$

с постоянными коэффициентами в его главной части, $P^l(x,D) = P^l(D)$. Пусть, кроме того, $a_\alpha(\cdot) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$ при $|\alpha| < l-1$, а также $a_\alpha(\cdot) \in C^1(\mathbb{R}^n)$ при $|\alpha| = l-1$.

Тогда оператор $P(x,D)$ слабо коэрцитивен в изотропном пространстве Соболева $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$ в точности тогда, когда он эллиптичен.

Набросок доказательства. Ввиду теоремы 2.5, достаточно доказать, что из слабой коэрцитивности оператора $P(x,D)$ вида (3.4) в $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$ вытекает его эллиптичность.

Предположим противное, т. е. что $P(x,D)$ слабо коэрцитивен, но не эллиптичен. Тогда $P^l(\xi^0)=0$ при некотором $\xi^0 \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Выполняя, если нужно, замену переменных $\xi_1,\dots,\xi_n$, можно считать, что $\xi^0 = (1,0,\dots,0)$. Тогда из тождества Эйлера (1.10) для однородных полиномов и равенства $P^l(\xi^0)=0$ вытекает, что $(\partial P^l/\partial \xi_1)(\xi^0)=0$. Но так как $n \geqslant 3$, то согласно теореме 3.1 (iii) ранг матрицы Якоби отображения $P^l := (\operatorname{Re} P^l, \operatorname{Im} P^l)$ в точке ξ^0 не превосходит 1. Выполняя, если нужно, линейную замену координат $\xi_2,\dots,\xi_n$, можно считать второй столбец этой матрицы нулевым, т. е. $(\partial P^l/\partial \xi_2)(\xi^0)=0$. Таким образом, символ $P(x,\xi)$ оператора $P(x,D)$ не содержит мономов ξ_1^l и $\xi_1^{l-1}\xi_2$.

Далее, в силу предложения 1.5, из оценки (2.10) при $N = 1$, $p = \infty$ и $\Omega = \mathbb{R}^n$ вытекает «суженная» оценка

$$\sum_{\alpha_1+\alpha_2<l} \|D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} \leqslant C_1 \|P(x, D_1, D_2, 0, \dots, 0) f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)} + C_2 \|f\|_{L^\infty(\mathbb{R}^n)}, \quad f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2). \quad (3.5)$$

Используя следствие 1.2, легко показать, что $P^l(\xi_1, \xi_2, 0, \dots, 0) \not\equiv 0$. Поэтому найдется k ($\geqslant 2$), для которого коэффициент при мономе $\xi_1^{l-k}\xi_2^k$ в полиноме $P^l(\xi_1, \xi_2, 0, \dots, 0)$ отличен от нуля. Выберем наименьшее такое k и проведем прямую m через точки $(l-1; 0)$ и $(l-k; k)$. Обозначим через $l' := (l'_1, l'_2)$ вектор, компоненты которого $l'_1 := l-1$ и $l'_2 := k(l-1)/(k-1)$ — длины отрезков, отсекаемых прямой m на осях координат.

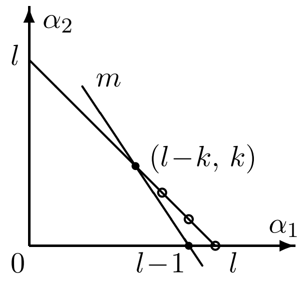


Рис. 1

Поскольку мономы ξ_1^l и $\xi_1^{l-1}\xi_2$ в символе $P(x, \xi_1, \xi_2, 0, \dots, 0)$ отсутствуют, то все показатели α мономов ξ^α из $P(x, \xi_1, \xi_2, 0, \dots, 0)$ лежат в той же полуплоскости относительно прямой m, что и точка $(0; 0)$ (см. рис. 1). То есть «суженный» оператор $P(x, D_1, D_2, 0, \dots, 0)$ имеет вид

$$P(x, D_1, D_2, 0, \dots, 0) = \sum_{\alpha_1/l'_1+\alpha_2/l'_2\leqslant 1} a_{\alpha_1,\alpha_2}(x)\, D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2}.$$

Это позволяет определить его главную (квазиоднородную) часть при помощи вектора l':

$$P^{l'}(x, D_1, D_2, 0, \dots, 0) = c(x) D_1^{l-1} + b D_1^{l-k} D_2^k,$$

причем $b \neq 0$. Поскольку оценка (3.5) имеет место с оператором D_1^{l-1} в левой части, то в силу (анизотропного!) следствия 1.2 справедливо равенство

$$\xi_1^{l-1} = \lambda(x)\,[c(x)\xi_1^{l-1} + b\xi_1^{l-k}\xi_2^k], \qquad x \in \mathbb{R}^n, \qquad \xi_1, \xi_2 \in \mathbb{R}. \quad (3.6)$$

Из (3.6) вытекает, что $\lambda(x)\, c(x) \equiv 1$ и $\lambda(x)\, b \equiv 0$, что противоречит условию $b \neq 0$. Следовательно, оператор $P(x, D)$ эллиптичен. Теорема доказана. $\square$

Замечание 3.2. Отметим, что метод доказательства теоремы 2.4 де Лю и Миркила, основанный на применении теоремы 1.4 и некоторых свойств конечных борелевских мер, неприменим для операторов с переменными коэффициентами. Для доказательства теоремы 3.2 мы применили другой метод, связанный с принципиальной возможностью неоднозначного выделения главной части дифференциального оператора, что позволяет применять «анизотропный» результат (тождество (1.35)) в «изотропной» ситуации.

Кроме того, приведенное выше доказательство дает другой (более простой) способ доказательства теоремы 2.4. Действительно, в случае постоянных коэффициентов условия

$$P^l(\xi^0) = \frac{\partial P^l}{\partial \xi_1}(\xi^0) = \frac{\partial P^l}{\partial \xi_2}(\xi^0) = 0, \qquad \xi^0 = (1, 0, \dots, 0)$$

после «сужения» оператора P на двумерное подпространство, порожденное ξ_1 и ξ_2, означают, что $\nabla \widetilde{P}^l(1, 0) = 0$ ($\widetilde{P}$ — соответствующее «сужение» оператора P). Последнее условие сразу же ведет к противоречию с теоремой 3.1, (iv).

Перейдем теперь к случаю системы $\{P_j(D)\}_1^N$ в изотропном пространстве $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$. Не нарушая общности, можно считать, что главные символы $\{P_j^l(\xi)\}_1^N$ линейно независимы.

Теорема 3.3 (см. [13]). *Пусть $l \geqslant 2$ и $\{P_j(D)\}_1^N$ — линейно независимая система операторов с постоянными коэффициентами порядка l, удовлетворяющая условиям:*

(i) $n \geqslant 2N + 1$;

(ii) *главные символы $\{P_j^l(\xi)\}_1^N$ операторов $\{P_j(D)\}_1^N$, суженные на любое двумерное подпространство пространства $\mathbb{R}^n$, остаются линейно независимыми.*

Тогда система $\{P_j(D)\}_1^N$ слабо коэрцитивна в изотропном пространстве Соболева $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^n)$ в точности тогда, когда она эллиптична.

Примеры 3.1.

(1) Условие (ii) теоремы 3.3 существенно для ее справедливости. Так, для системы

$$P_1(\xi) := \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2, \qquad P_2(\xi) := (\xi_4 + i)(\xi_5 + i)$$

выполнено условие (i) ($n = 2N + 1 = 5$), но сужения главных символов $P_1^2(\xi) = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2$ и $P_2^2(\xi) = \xi_4\xi_5$ полиномов $\{P_j(\xi)\}_1^2$ на двумерное подпространство, порожденное ξ_1 и ξ_2, линейно зависимы (поскольку последнее из них — нулевое). Тогда условие (ii) нарушено. При этом система $\{P_j(D)\}_1^2$ слабо коэрцитивна в $W_{\infty,0}^2(\mathbb{R}^5)$, но не эллиптична.

(2) В то же время условие (ii) теоремы 3.3 не является необходимым. Так, система

$$P_1(\xi) := \xi_1^2 + \xi_2^2, \qquad P_2(\xi) := \xi_3^2 + \xi_4^2 + \xi_5^2$$

слабо коэрцитивна в $W_{\infty,0}^2(\mathbb{R}^5)$, хотя сужения полиномов $\{P_j(\xi)\}_1^2$ на подпространство, порожденное ξ_1 и ξ_2, линейно зависимы.

(3) Мы не располагаем примерами слабо коэрцитивных в $W_{\infty,0}^2(\mathbb{R}^n)$, но не эллиптических систем операторов при $N > 1$, для которых нарушено условие (i), но выполнено (ii). Однако системы, для которых нарушены оба условия (i) и (ii) теоремы 3.3, строятся легко. Например, при $n = 2N$ для системы

$$P_j(\xi) := (\xi_{2j-1} + i)(\xi_{2j} + i), \qquad j \in \{1, \ldots, N\}$$

нарушены оба условия (i) и (ii) теоремы 3.3. Она также слабо коэрцитивна в $W_{\infty,0}^2(\mathbb{R}^n)$, но не эллиптична.

3.2. Анизотропный случай. Пусть $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$. Подпространство $E \subset \mathbb{R}^n$ назовем *координатным*, если оно имеет вид

$$E = \{x = (x_1, \ldots, x_n) : \xi_{i_1} = \cdots = \xi_{i_k} = 0\}, \qquad \text{где} \quad i_1, \ldots, i_k \in \{1, \ldots, n\}.$$

Обозначим через $P(\xi) \restriction E$ *сужение* полинома $P(\xi)$ на координатное подпространство E, а через $P(D) \restriction E$ — соответствующий оператор.

Не ограничивая общности, расположим числа $l_1, \ldots, l_n$ в порядке убывания (нестрогого):

$$l_1 = \cdots = l_{n_1} > l_{n_1+1} = \cdots = l_{n_2} > \cdots > l_{n_{m-1}+1} = \cdots = l_n.$$

Также положим $n_0 := 0$, $n_m := n$. Тогда пространство $\mathbb{R}^n$ разлагается в прямую сумму

$$\mathbb{R}^n = \bigoplus_{k=1}^m E_k, \tag{3.7}$$

в которой $\{E_k\}_1^m$ — «однородные» координатные подпространства, т. е. E_k, $k \in \{1, \ldots, m\}$, порождено переменными $\xi_{n_{k-1}+1}, \ldots, \xi_{n_k}$, соответствующими k-й группе равных между собой компонент вектора $l = (l_1, \ldots, l_n)$.

Для каждого $k \in \{1, \ldots, m\}$ и всех $j \in \{1, \ldots, N\}$ обозначим через $P_j(\xi) \restriction E_k$ сужение полинома $P_j(\xi)$ на подпространство E_k. При этом система $\{P_j^l(\xi) \restriction E_k\}_1^N$ является однородной степени l_{n_k}.

Отметим также, что для сужений на «однородные» подпространства E_k, $k \in \{1, \ldots, m\}$ остается справедливым и утверждение (ii) «однородной» теоремы 1.5.

Теорема 3.4 (см. [11]). *Пусть $l_1 \geqslant l_2 \geqslant \ldots \geqslant l_n$ и $\{E_k\}_1^m$ — «однородные» подпространства из* (3.7).

(i) *Если система $\{P_j(D)\}_1^N$ является l-квазиэллиптической, то*

$$\text{«суженная» система } \{P_j(\xi) \restriction E_k\}_1^N \text{ — эллиптическая при каждом } k \in \{1, \ldots, m\}. \tag{3.8}$$

(ii) *Обратно, если система* $\{P_j(D)\}_1^N$ *слабо коэрцитивна в анизотропном пространстве Соболева* $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^n)$ *и выполнено условие* (3.8), *то она* l*-квазиэллиптична.*

Следствие 3.1 (см. [11]). *Пусть* $l_1 > l_2 > \cdots > l_n$ *и выполнено условие*

$$\big(P_1^l(0,\ldots,0,\xi_k,0,\ldots,0),\ldots,P_N^l(0,\ldots,0,\xi_k,0,\ldots,0)\big) \neq 0 \quad \text{при} \quad \xi_k \neq 0, \quad k \in \{1,\ldots,n\}.$$

Тогда система $\{P_j(D)\}_1^N$ *слабо коэрцитивна в анизотропном пространстве Соболева* $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^n)$ *в точности тогда, когда она* l*-квазиэллиптична.*

Следующие леммы иногда упрощают проверку условия (3.8).

Лемма 3.1 (см. [11]). *Пусть* $E \subset \mathbb{R}^n$ — *некоторое координатное подпространство. Если система* $\{P_j(D)\}_1^N$ *слабо коэрцитивна в* $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^n)$, *то «суженная» система* $\{P_j(D) \upharpoonright E\}_1^N$ *остается слабо коэрцитивной в* $W_{\infty,0}^{l'}(E)$, *где* l' — *соответствующее «сужение» вектора* l.

Лемма 3.2 (см. [11]). *Пусть* $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2$, $l_1 > l_2 \geqslant 2$ *и оператор*

$$P(x, D_1, D_2) = \sum_{|\alpha:l|\leqslant 1} a_{\alpha_1,\alpha_2}(x)\, D_1^{\alpha_1} D_2^{\alpha_2} \tag{3.9}$$

слабо коэрцитивен в $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^2)$. *Тогда*:

(i) $a_{l_1,0} \neq 0$, *т. е.* $P^l(1,0) \neq 0$;

(ii) *если к тому же* l_2 *не является делителем* l_1, *то* $a_{0,l_2} \neq 0$, *т. е.* $P^l(0,1) \neq 0$.

Замечание 3.3. Подчеркнем, что условия леммы 3.2 являются необходимыми. Так, при $l_1 = l_2$ или $l_2 = 1$ заключение леммы неверно. В первом случае контрпример дает оператор $P(D) = (D_1 + i)(D_2 + i)$, а во втором — оператор $P(D) = D_1^{l_1-1}$.

Леммы 3.1, 3.2 и теорема 3.4 играют существенную роль в доказательстве следующей теоремы, являющейся анизотропным аналогом теоремы 2.4 де Лю и Миркила.

Теорема 3.5 (см. [11, 12]). *Пусть* $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$, $l_1 \geqslant l_2 \geqslant \ldots \geqslant l_n \geqslant 2$ *и* $P(D)$ — *оператор с постоянными коэффициентами вида*

$$P(D) = \sum_{|\alpha:l|\leqslant 1} a_\alpha\, D^\alpha. \tag{3.10}$$

Пусть также выполнено хотя бы одно из следующих двух условий:

(i) $l_{n-2} = l_{n-1} = l_n$;

(ii) l_n *не является делителем хотя бы одного из* l_k *при* $k \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Тогда оператор $P(D)$ *слабо коэрцитивен в анизотропном пространстве* $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^n)$ *в точности тогда, когда он* l*-квазиэллиптичен.*

Таким образом, теорема 3.5 верна для п. в. наборов $l = (l_1, \ldots, l_n) \in \mathbb{N}^n$. Поэтому слабая коэрцитивность оператора (3.10) в $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^n)$ не влечет его l-квазиэллиптичность в исключительных случаях. В разделе 5 будет показано, что условие (ii) теоремы является существенным (см. теорему 5.4).

Дополним теорему 3.5, рассмотрев случай $n = 2$.

Следствие 3.2 (см. [11]). *Пусть* $l = (l_1, l_2) \in \mathbb{N}^2$, $l_1 > l_2 \geqslant 2$ *и* $P(D)$ — *оператор вида* (3.10). *Если* l_2 *не является делителем* l_1, *то слабая коэрцитивность оператора* $P(D)$ *в* $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^2)$ *эквивалентна его* l*-квазиэллиптичности.*

Замечание 3.4. При $N > 1$, в отличие от случая $N = 1$, условие (3.8) не вытекает из слабой коэрцитивности системы $\{P_j(D)\}_1^N$ в $W_{\infty,0}^l(\mathbb{R}^n)$ даже в изотропном случае. Так, система

$$P_1(D) = D_1^{k+1}, \qquad P_2(D) = D_2^k, \qquad k \in \mathbb{N} \tag{3.11}$$

слабо коэрцитивна в изотропном пространстве $W_{\infty,0}^{k+1}(\mathbb{R}^2)$, но не эллиптична. Отметим, что слабая коэрцитивность системы (3.11) в $W_{\infty,0}^{k+1}(\mathbb{R}^2)$ вытекает из ее l-квазиэллиптичности при $l = (k+1, k)$.

Менее тривиальный пример дает система

$$P_1(D) = D_1^5 + iD_2^3, \quad P_2(D) = D_3^2, \quad P_3(D) = D_1^3 D_3, \quad P_4(D) = D_1 D_3^2, \quad P_5(D) = D_1 D_2 D_3,$$

которая не l-квазиэллиптична при $l = (5, 3, 3)$, но слабо коэрцитивна в $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^3)$.

4. Условия существования l-квазиэллиптических и слабо коэрцитивных систем при заданном векторе $l = (l_1, \dots, l_n)$

4.1. Существование l-квазиэллиптических систем. Согласно результату Лопатинского [16] (см. также [15, гл. II, § 1]), при $n \geqslant 3$ эллиптический оператор $P(D)$ имеет четный порядок, а также является собственно эллиптическим. В [12, 13] нами получено следующее полное описание тех векторов l, для которых существуют l-квазиэллиптические системы $\{P_j(x, D)\}_1^N$.

Теорема 4.1 (см. [12, 13]). *Пусть $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ и $n \geqslant 2N + 1$. Для существования l-квазиэллиптических систем $\{P_j(x, D)\}_1^N$ необходимо и достаточно, чтобы среди чисел $l_1, \dots, l_n$ было не более $2N - 1$ нечетных.*

Набросок доказательства. Ограничимся случаем операторов с постоянными коэффициентами.

(i) Необходимость. Если $n > 2N + 1$, то сузим полиномы $\{P_j(\xi)\}_1^N$ на $k = 2N + 1$-мерное подпространство. Поэтому можно считать, что $n = 2N + 1$.

Пусть вначале все $\{l_j\}_1^n$ нечетны. Обозначим $\mathbb{S}^{n-1} := \{x \in \mathbb{R}^n : \ \|x\| = 1\}$ и рассмотрим отображение $T := (T_1, \dots, T_{2N}) : \mathbb{S}^{2N} \to \mathbb{R}^{2N}$, в котором

$$T_{2j-1}(\xi) := \operatorname{Re} P_j^l(\xi), \qquad T_{2j}(\xi) := \operatorname{Im} P_j^l(\xi), \qquad j \in \{1, \dots, N\}. \tag{4.1}$$

Оно нечетно, $T(-\xi) = -T(\xi)$, и согласно теореме Борсука—Улама [25] выполнено $T(\xi^0) = 0$ в некоторой точке $\xi^0 \in \mathbb{S}^{2N}$. Но это противоречит l-квазиэллиптичности системы $\{P_j(D)\}_1^N$.

(ii) Пусть среди чисел l_j есть ровно одно четное. Например, $l_1 = 2^m l_1'$, где $m \in \mathbb{N}$ и $l_1', l_2, \dots, l_n$ нечетны. Тогда из соотношения $|\alpha : l| = 1$ вытекает $\alpha_1 = 2^m \alpha_1'$, $\alpha_1' \in \mathbb{Z}_+$. После замены $\xi_1' := \xi_1^{2^{-m}}$ в символах $P_j(\xi)$ приходим к l'-квазиэллиптической системе $\{P_j(\xi_1', \xi_2, \dots, \xi_n)\}_1^N$, $l' := (l_1', l_2, \dots, l_n)$, в которой все компоненты вектора l' нечетны. Противоречие с (i).

(iii) Достаточность. Пусть $n = 2N+1$, $l = (l_1, \dots, l_n)$, где $l_1, \dots, l_{n-2}$ нечетны, а l_{n-1} и l_n четны. Тогда система

$$P_1(\xi) := \xi_1^{l_1} + i\xi_2^{l_2}, \ \dots, \ P_{N-1}(\xi) := \xi_{n-4}^{l_{n-4}} + i\xi_{n-3}^{l_{n-3}}, \quad P_N(\xi) := i\xi_{n-2}^{l_{n-2}} + \xi_{n-1}^{l_{n-1}} + \xi_n^{l_n}$$

является l-квазиэллиптической, причем ровно два числа из $\{l_j\}_1^n$ четны. □

Замечание 4.1. Условие $n \geqslant 2N + 1$ теоремы 4.1 является точным. Например, система

$$P_1(D) := D_1^{l_1} + iD_2^{l_2}, \quad \dots, \quad P_N(D) := D_{2N-1}^{l_{2N-1}} + iD_{2N}^{l_{2N}}. \tag{4.2}$$

является l-квазиэллиптической при $n = 2N$ и любом $l = (l_1, \dots, l_{2N})$.

Следствие 4.1 (см. [13]). *Если $n \geqslant 3$, то l-квазиэллиптические операторы существуют в точности тогда, когда среди чисел $l_1, \dots, l_n$ не более одного нечетного.*

В изотропном случае теорема 4.1 обобщает результат Лопатинского, принимая следующий вид.

Следствие 4.2 (см. [13]). *Пусть $l_1 = \dots = l_n = l$ и $\{P_j(x, D)\}_1^N$ — эллиптическая система порядка l. Если $n \geqslant 2N + 1$, то l четно.*

4.2. Существование слабо коэрцитивных систем. Перейдем теперь к условиям существования слабо коэрцитивных в $W^l_{p,0}(\Omega)$, $p \in [1, \infty]$ систем. В анизотропном случае справедлив более общий, чем лемма 3.2, результат.

Предложение 4.1 (см. [12]). *Пусть $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{R}^n$, $l_1 \geqslant l_2 \geqslant \ldots \geqslant l_{n-k} > l_{n-k+1} = \dots = l_n$ и оператор $P(D)$ вида (3.9) слабо коэрцитивен в $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$. Тогда его l-главный символ $P^l(\xi)$ может обращаться в нуль лишь в точках k-мерного координатного подпространства $\{\xi \in \mathbb{R}^n : \ \xi_1 = \xi_2 = \dots = \xi_{n-k} = 0\}$.*

Следующая теорема распространяет «половину» теоремы 4.1 на случай слабо коэрцитивных систем.

Теорема 4.2 (см. [12]). *Пусть система* $\{P_j(D)\}_1^N$ *вида*

$$P_j(D) = \sum_{|\alpha:l|\leqslant 1} a_{j\alpha}\, D^\alpha, \qquad j\in\{1,\dots,N\} \tag{4.3}$$

слабо коэрцитивна в $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, $p\in[1,\infty]$, $n\geqslant 2N+1$, *а отображение*

$$T := (T_1,\dots,T_{2N}) :\ \mathbb{S}^{2N}\to\mathbb{R}^{2N}, \tag{4.4}$$

где $\{T_j(\xi)\}_1^{2N}$ *определяются равенствами* (4.1), *имеет конечное число нулей на единичной сфере* $\mathbb{S}^{n-1}$. *Тогда среди чисел* $l_1,\dots,l_n$ *не более* $2N$ *нечетных.*

Следствие 4.3 (см. [12]). *Пусть* $n\geqslant 3$ *и оператор* $P(D)$ *вида* (3.9) *слабо коэрцитивен в* $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$, *а его* l*-главный символ* $P^l(\xi)$ *имеет конечное число нулей на сфере* $\mathbb{S}^{n-1}$. *Тогда среди чисел* $l_1,\dots,l_n$ *не более двух нечетных.*

Комбинируя предложение 4.1 с теоремой 4.2, получим

Следствие 4.4 (см. [12]). *Пусть* $n\geqslant 3$ *и среди чисел* $l_1,\dots,l_n$ *не менее трех нечетных. Тогда не существует слабо коэрцитивных операторов в* $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$.

Из теоремы 4.2 вытекает следующий «изотропный» результат.

Предложение 4.2 (см. [12]). *Пусть* $l_1=\dots=l_n=l$, $n\geqslant 2N+1$ *и система* $\{P_j(D)\}_1^N$ *вида* (4.3) *слабо коэрцитивна в* $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$ *при* $p\in[1,\infty]$. *Если отображение* (4.4) *имеет конечное число нулей на сфере* $\mathbb{S}^{n-1}$, *то* l *четно.*

5. Слабо коэрцитивные неэллиптические и неквазиэллиптические системы

В связи с ограничениями в теоремах 3.3, 3.4 и 3.5 на систему операторов перейдем теперь к вопросу об условиях существования слабо коэрцитивных неэллиптических (неквазиэллиптических) систем в шкале изотропных (анизотропных) пространств Соболева $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$.

5.1. Изотропный случай. При $n=2$ критерий де Лю и Миркила (см. теорему 2.4) не имеет места. Так, Мальгранж впервые указал, что неэллиптический оператор $P(D)=(D_1+i)(D_2+i)$ является слабо коэрцитивным в $W^2_{\infty,0}(\mathbb{R}^2)$ (см. [34]).

В следующей теореме дается полная характеристика операторов, слабо коэрцитивных в изотропном пространстве Соболева $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^2)$ и алгебраический критерий слабой коэрцитивности.

Теорема 5.1 (см. [12, 13]).

(i) *Произвольный слабо коэрцитивный оператор порядка* $l\geqslant 2$ *в изотропном пространстве* $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^2)$ *имеет вид*

$$R(D) = P(D)\prod_{k=1}^m [\lambda_k D_1 + \mu_k D_2 + \alpha_k] + Q(D), \tag{5.1}$$

где $P(D)$ — *эллиптический оператор порядка* $l-m$, $Q(D)$ — *произвольный оператор порядка* $\leqslant l-2$, $\alpha_k\in\mathbb{C}\backslash\mathbb{R}$, (λ_k,μ_k) — *попарно неколлинеарные векторы в* $\mathbb{R}^2$, $k\in\{1,\dots,m\}$, $m\leqslant l$.

(ii) *Обратно, всякий оператор* $R(D)$ *вида* (5.1) *слабо коэрцитивен в изотропном пространстве* $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^2)$ *при* $p\in[1,\infty]$.

Следствие 5.1. *Произведение эллиптического оператора порядка* l *от двух переменных на слабо коэрцитивный в* $W^m_{\infty,0}(\mathbb{R}^2)$ *оператор порядка* m *является слабо коэрцитивным в* $W^{l+m}_{\infty,0}(\mathbb{R}^2)$ *оператором.*

Теорема 5.2 (см. [12, 13]). *Пусть* $P(D)$, $D=(D_1,D_2)$ — *оператор порядка* l, *а все коэффициенты и корни полинома* $P^l(\xi)$ *вещественны. Тогда оператор* $P(D)$ *слабо коэрцитивен в изотропном пространстве* $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^2)$ *в точности тогда, когда полиномы* $P^l(\xi)$ *и* $\operatorname{Im} P^{l-1}(\xi)$ *не имеют общих нетривиальных вещественных нулей. Здесь* $P^{l-1}(\xi) := \sum_{|\alpha|=l-1} a_\alpha \xi^\alpha$ *обозначает однородную часть полинома* $P(\xi)$ *степени* $l-1$.

Замечание 5.1.

(i) При помощи результата $R[f, g]$ полиномов f и g условие теоремы 5.2 записывается в виде $R[P^l, \operatorname{Im} P^{l-1}](\xi) \neq 0,\ \xi \in \mathbb{R}^n$. В таком виде проверка слабой коэрцитивности не требует знания нулей полинома $P^l(\xi)$.

(ii) Теорема 5.1 вместе с теоремой 3.1 показывают, что любой строго гиперболический оператор порядка l от двух переменных после подходящего возмущения его оператором порядка $l-1$ становится слабо коэрцитивным в $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^2)$. Возмущениями порядка $l-2$ добиться этого, вообще говоря, невозможно.

(iii) Операторы (5.1) остаются слабо коэрцитивными в $W^l_{p,0}(\Omega)$ в случае любой (в том числе ограниченной) области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, но не описывают всей совокупности слабо коэрцитивных операторов в $W^l_{p,0}(\Omega)$.

(iv) Теорема 5.1 также позволяет дополнить теорему 3.1, (iii) для случая $N = 1$ и $n = 2N = 2$. Так, используя представление (5.1), легко показать, что для неэллиптического оператора $P(D)$, слабо коэрцитивного в $W^l_{\infty,0}(\mathbb{R}^2)$, ранг якобиевой матрицы отображения $(\operatorname{Re} P^l, \operatorname{Im} P^l) : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ в точке $\xi^0 \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, в которой $P^l(\xi^0) = 0$, равен единице. При этом условие $n \geqslant 2N + 1$ нарушается.

В следующей теореме приводятся широкие классы слабо коэрцитивных в $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, но не эллиптических систем.

Теорема 5.3 (см. [11–13]). *Пусть $\{P_j(D)\}$ — эллиптическая система операторов с постоянными коэффициентами порядка l, $R_{pq}(D)$ — операторы вида*

$$R_{pq}(D) := (D_p + i)(D_q + i), \qquad 1 \leqslant p < q \leqslant n. \tag{5.2}$$

Тогда система операторов

$$S_{jpq}(D) := P_j(D)R_{pq}(D), \quad j \in \{1, \dots, N\}, \quad p,\ q \in \{1, \dots, n\}, \quad p > q \tag{5.3}$$

слабо коэрцитивна в изотропном пространстве $W^{l+2}_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, но не эллиптична.

В доказательстве теоремы 5.3 используется теорема 2.5 о мультипликаторах в шкале L^p, $p \in [1, \infty]$. В частности, при $N = 1$ используются мультипликаторы вида

$$\Phi_\alpha(\xi) := \chi(\xi)\, \frac{\xi^\alpha}{P(\xi) \sum\limits_{k=2}^{n} (1 + \xi_k^2)}, \qquad |\alpha| \leqslant l + 1,$$

где $P(\xi)$ — эллиптический полином степени l, $\alpha_1 \leqslant l - 1$, а $\chi(\xi)$ — гладкая функция, такая, что $\operatorname{supp}(1 - \chi) \subset B_R$, где B_R — шар, содержащий нули полинома $P(\xi)$. Конструкция мультипликаторов для случая системы операторов ($N > 1$) более сложная и здесь опускается (см. детали в [13]).

При $N = 1$ из теоремы 5.3 получаем следующее утверждение.

Следствие 5.2 (см. [11–13]). *Пусть $P(D)$ — эллиптический оператор порядка l, $R_{pq}(D)$ — операторы вида (5.2). Тогда система $\{P(D)R_{pq}(D)\}_{p>q}$ слабо коэрцитивна в изотропном пространстве $W^{l+2}_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, но не эллиптична.*

Теорема 5.2 точна при $p = \infty$. Справедливо следующее утверждение.

Предложение 5.1 (см. [11–13]). *Система $\{P(D)R_{pq}(D)\}_{p>q}$, где $P(D)$ — эллиптический оператор порядка l, а $R_{pq}(D)$ — операторы вида (5.2), перестает быть слабо коэрцитивной в изотропном пространстве $W^{l+2}_{\infty,0}(\mathbb{R}^n)$ после удаления из нее любого оператора.*

5.2. Анизотропный случай. В следующей теореме предъявляются широкие классы слабо коэрцитивных операторов в шкале анизотропных пространств $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, не являющихся l-квазиэллиптическими. Это, в частности, показывает точность условий теоремы 3.5 при п. в. $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$.

Теорема 5.4 (см. [12]). *Пусть $n \geqslant 2$, $l := (2km_1, \dots, 2km_{n-1}, k)$; $k, m_1, \dots, m_{n-1} \in \mathbb{N}$, а $P(D)$ — l-квазиэллиптический оператор с постоянными коэффициентами вида (3.4). Пусть также выполнено одно из следующих двух условий:*

(i) *все коэффициенты оператора $P(D)$ вещественны*;

(ii) *все коэффициенты оператора $P(D)$, кроме коэффициента при D_n^k, вещественны.*

Тогда оператор

$$R(D) := P(D)\sum_{j=1}^{n-1} D_j^{2m_j} + bD_n^k$$

слабо коэрцитивен в шкале анизотропных пространств Соболева $W_{p,0}^{l_+}(\mathbb{R}^n)$, $p\in[1,\infty]$, где $l_+ := (2(k+1)m_1,\dots,2(k+1)m_{n-1},k+1)$, при $b\in\mathbb{C}\setminus\mathbb{R}$ в первом случае и $b\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$ во втором. При этом оператор $R(D)$ не является l_+-квазиэллиптическим.

В доказательстве теоремы 5.4 используется теорема 2.5, с помощью которой доказано, что функции вида

$$\Psi_\alpha(\xi) := \chi(\xi)\,\frac{\xi^\alpha}{P(\xi)\sum\limits_{j=1}^{n-1}\xi_j^{2m_j}+i\xi_n^k}, \qquad |\alpha : l_+| < 1,$$

являются мультипликаторами в $L^p(\mathbb{R}^n)$, $p\in[1,\infty]$. Здесь l и l_+ — векторы в условии теоремы 5.4, $P(\xi)$ — l-квазиэллиптический полином с вещественными коэффициентами, $\chi(\xi)$ — гладкая функция, удовлетворяющая условию $\operatorname{supp}(1-\chi)\subset B_r$, а B_r — шар, содержащий нули полинома $P(\xi)$.

Замечание 5.2. Из теоремы 5.4 при $l := (2,4,\dots,2n)$ вытекает, что оператор

$$P(D) = (D_1^2 + D_2^4 + \dots + D_{n-1}^{2(n-1)} + D_n^{2n})(D_1^2 + D_2^4 + \dots + D_{n-1}^{2(n-1)}) + iD_n$$

слабо коэрцитивен в $W_{p,0}^l(\mathbb{R}^n)$ при $p\in[1,\infty]$, но не является l-квазиэллиптическим.

6. Оценки для тензорного произведения эллиптических операторов в L^∞

В этом разделе рассмотрим случай, когда система состоит из одного дифференциального оператора $P(D)$ с постоянными коэффициентами.

Л. Хермандер [27] полностью описал пространство $L_{2,\Omega}^0(P)$ в случае $p=2$ и ограниченной области Ω для произвольного оператора $P(D)$ (см. теорему 1.1). Отправляясь от этого результата, в [27, теорема 2.5] показано, что для *тензорного произведения* дифференциальных полиномов

$$P(D) := P_1(D)\otimes P_2(D) := P_1(D_1,\dots,D_{p_1})\,P_2(D_{p_1+1},\dots,D_n), \qquad p_1\in[1,n), \tag{6.1}$$

т. е. произведения операторов, действующих по различным группам переменных, пространство $L_{2,\Omega}^0(P)$ совпадает с линейной оболочкой произведений Q_1Q_2 операторов $Q_k\in L_{2,\Omega}^0(P_k)$, т. е. оно изоморфно тензорному произведению пространств $L_{2,\Omega}^0(P_1)$ и $L_{2,\Omega}^0(P_2)$.

В связи с упомянутым результатом Хермандера возникает задача об описании пространства $L_{\infty,\mathbb{R}^n}^0(P)$ для тензорного произведения $P = P_1\otimes P_2$ двух эллиптических дифференциальных полиномов при $p=\infty$ и $\Omega=\mathbb{R}^n$. Как будет видно далее, результат существенно зависит от наличия младших членов в записи операторов P_j, $j=1,2$.

Назовем полный символ $P(\xi)$ оператора $P(D)$ *невырожденным*, если $P(\xi)\neq 0$ при всех $\xi\in\mathbb{R}^n$.

Теорема 6.1 (см. [13]). *Пусть $P(D) = P_1(D)\otimes P_2(D)$, где $P_1(D)$ и $P_2(D)$ — эллиптические операторы, символы $P_1(\xi)$ и $P_2(\xi)$ которых зависят от n_1 и n_2 переменных соответственно, $n_1+n_2=n$.*

(i) *Если полные символы операторов $P_1(D)$ и $P_2(D)$ невырождены, т. е. $P_1(\xi)\neq 0$, $\xi\in\mathbb{R}^{n_1}$ и $P_2(\xi)\neq 0$, $\xi\in\mathbb{R}^{n_2}$, то $L_{\infty,\mathbb{R}^n}^0(P)\simeq L_{\infty,\mathbb{R}^{n_1}}^0(P_1)\otimes L_{\infty,\mathbb{R}^{n_2}}^0(P_2)$. Другими словами, справедлива эквивалентность*

$$Q\in L_{\infty,\mathbb{R}^n}^0(P) \iff Q(\xi) = \sum_{k=1}^m Q_{k1}(\xi)\,Q_{k2}(\xi), \qquad Q_{kj}\in L_{\infty,\mathbb{R}^{n_j}}^0(P_j), \quad j\in\{1,2\}.$$

(ii) *Если символы операторов $P_1(D)$ и $P_2(D)$ однородны (т. е. не содержат младших членов), то $D^\alpha\notin L_{\infty,\mathbb{R}^n}^0(P)$ при каждом $\alpha\neq 0$, т. е. оценка (1.26) невозможна при $Q(D)=D^\alpha$, $\alpha\neq 0$.*

Результат теоремы 6.1 был впоследствии усилен одним из авторов.

Теорема 6.2 (см. [9]). *Пусть $P(D)$ — дифференциальный оператор вида* (6.1), *где $P_1(D)$ и $P_2(D)$ — однородные эллиптические операторы. Тогда включение $Q \in L^0_{\infty,\mathbb{R}^n}(P)$ эквивалентно равенству $Q(D) = c_1P(D) + c_2$ с некоторыми постоянными $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$.*

Отдельный интерес представляет случай оператора $P(D)$ от двух переменных, являющегося тензорным произведением двух обыкновенных дифференциальных операторов $P_1(D_1)$ и $P_2(D_2)$. В работе [10] было получено описание пространства $L^0_{\infty,\mathbb{R}^2}(P)$ для случая, когда один из сомножителей имеет специальный вид (все его нули — вещественные и простые), а второй произволен.

Теорема 6.3 (см. [10]). *Пусть $P(D) = P_1(D_1) \otimes P_2(D_2)$ — дифференциальный оператор, такой, что $P_1(\xi_1)$ — полином степени l, все нули которого вещественные и простые, а $P_2(\xi_2)$ — произвольный полином степени m. Тогда включение $Q \in L^0_{\infty,\mathbb{R}^2}(P)$ эквивалентно равенству*

$$Q(\xi) = P(\xi) \cdot \frac{q(\xi_2)}{p_{22}(\xi_2)} + r(\xi_1). \tag{6.2}$$

Здесь $p_{22}(\xi_2)$ — максимальный делитель $P_2(\xi_2)$, не имеющий вещественных нулей, $q(\xi_2)$ — произвольный полином степени $\leqslant s := \deg p_{22}$, а $r(\xi_1)$ — произвольный полином степени $\leqslant l-1$, если $s = m$, и произвольная постоянная, если $s < m$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бесов О. В.* О коэрцитивности в анизотропном пространстве С. Л. Соболева// Мат. сб. — 1967. — *73*, № 4. — С. 585–599.
2. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1996.
3. *Волевич Л. Р.* Локальные свойства решений квазиэллиптических систем// Мат. сб. — 1962. — *59*. — С. 3–52.
4. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Метод многогранника Ньютона в теории дифференциальных уравнений в частных производных. — М.: Эдиториал УРСС, 2002.
5. *Горин Е. А.* Об исследованиях Г. Е. Шилова по теории коммутативных банаховых алгебр и их дальнейшем развитии// Усп. мат. наук. — 1978. — *33*, № 4. — С. 169–188.
6. *Ильин В. П.* Об условиях справедливости неравенств между L_p-нормами частных производных функций многих переменных// Тр. МИАН. — 1968. — *96*. — С. 205–242.
7. *Казарян Г. Г.* Об оценках L_p-норм производных через нерегулярный набор дифференциальных операторов// Дифф. уравн. — 1969. — *5*, № 5. — С. 911–921.
8. *Лизоркин П. И.* Предельные случаи теорем о $\mathfrak{F}L_p$-мультипликаторах// Тр. МИАН. — 1986. — *173*. — С. 164–180.
9. *Лиманский Д. В.* Об оценках для тензорного произведения двух однородных эллиптических операторов// Укр. мат. вiсн. — 2011. — *8*, № 1. — С. 101–111.
10. *Лиманський Д. В.* Умови пiдпорядкованостi для тензорного добутку двох звичайних диференцiальних операторiв// Допов. НАН Укр. — 2012. — № 4. — С. 25–29.
11. *Лиманский Д. В., Маламуд М. М.* О слабой коэрцитивности систем дифференциальных операторов в L^1 и L^∞// Докл. РАН. — 2004. — *397*, № 4. — С. 453–458.
12. *Лиманский Д. В., Маламуд М. М.* Слабо коэрцитивные неквазиэллиптические системы дифференциальных операторов в $W^l_p(\mathbb{R}^n)$// Докл. РАН. — 2007. — *415*, № 5. — С. 583–588.
13. *Лиманский Д. В., Маламуд М. М.* Эллиптические и слабо коэрцитивные системы операторов в пространствах Соболева// Мат. сб. — 2008. — *199*, № 11. — С. 75–112.
14. *Лиманский Д. В., Маламуд М. М.* Об аналоге теоремы де Лю и Миркила для операторов с переменными коэффициентами// Мат. заметки. — 2008. — *83*, № 5. — С. 783–786.
15. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. Т. 1. — М.: Мир, 1971.
16. *Лопатинский Я. Б.* Об одном способе приведения граничных задач для системы дифференциальных уравнений эллиптического типа к регулярным интегральным уравнениям// Укр. мат. ж. — 1953. — *5*. — С. 123–151.
17. *Маламуд М. М.* Дифференциальные свойства функций и коэрцитивность в пространствах с равномерной нормой// Укр. мат. ж. — 1982. — *34*, № 5. — С. 553–558.
18. *Маламуд М. М.* Оценка для дифференциальных операторов в равномерной норме и коэрцитивность в пространствах С. Л. Соболева// Докл. АН СССР. — 1988. — *298*, № 1. — С. 32–36.
19. *Маламуд М. М.* Оценки для систем минимальных и максимальных дифференциальных операторов в $L_p(\Omega)$// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1995. — *56*. — С. 206–261.

20. *Митягин Б. С.* О второй смешанной производной// Докл. АН СССР. — 1958. — *123*, № 4. — С. 606–609.
21. *Митягин Б. С.* О некоторых свойствах функций двух переменных// Вестн. МГУ. Сер. мат. — 1959. — № 5. — С. 137–152.
22. *Михайлов В. П.* О поведении на бесконечности одного класса многочленов// Тр. МИАН. — 1967. — *91*. — С. 59–80.
23. *Михлин С. Г.* О мультипликаторах интегралов Фурье// Докл. АН СССР. — 1956. — *109*, № 4. — С. 701–703.
24. *Ниренберг Л.* Лекции по нелинейному функциональному анализу. — М.: Мир, 1977.
25. *Спеньер Э.* Алгебраическая топология. — М.: Мир, 1971.
26. *Стейн И.* Сингулярные интегралы и дифференциальные свойства функций. — М.: Мир, 1973.
27. *Хермандер Л.* К теории общих дифференциальных операторов в частных производных. — М.: Мир, 1959.
28. *Шилов Г. Е.* О некоторых задачах общей теории коммутативных нормированных колец// Усп. мат. наук. — 1957. — *12*, № 1. — С. 246–249.
29. *Юдович В. И.* О некоторых оценках, связанных с интегральными операторами и решениями эллиптических уравнений// Докл. АН СССР. — 1961. — *138*, № 4. — С. 805–808.
30. *Agmon S.* The coerciveness problem for integro-differential forms// J. Anal. Math. — 1958. — *6*. — С. 183–223.
31. *Aronszajn N.* On coercive integro-differential quadratic forms// В сб.: «Conference on Partial Differential Equations». — Lawrence: Univ. Kansas, 1954. — С. 94–106.
32. *Belinsky E. S., Dvejrin M. Z., Malamud M. M.* Multipliers in L_1 and estimates for systems of differential operators// Russ. J. Math. Phys. — 2005. — *12*, № 1. — С. 6–16.
33. *Boman J.* Supremum norms for partial derivatives of functrions of several real variables// Illinois J. Math. — 1972. — *16*. — С. 203–216.
34. *De Leeuw K., Mirkil H.* A priori estimates for differential operators in L_∞ norm// Illinois J. Math. — 1964. — *8*. — С. 112–124.
35. *Kazaniecki K., Stolyarov D. M., Wojciechowski M.* Anisotropic Ornstein non-inequalities// Anal. PDE. — 2017. — *10*, № 2. — С. 351—366.
36. *Kazaniecki K., Wojciechowski M.* On the analytic version of the Mityagin–de Leeuw–Mirkhil non-equality on bi-disc// ArXiv. — 2023. — 2301.09526 [math.FA].
37. *Kirchheim B., Kristensen J.* On rank one convex functions that are homogeneous of degree one// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2016. — *221*, № 1. — С. 527–558.
38. *Kislyakov S. V., Maksimov D. V., Stolyarov D. M.* Differential expressions with mixed homogeneity and spaces of smooth functions they generate in arbitrary dimension// J. Funct. Anal. — 2015. — *269*, № 10. — С. 3220–3263.
39. *Littman W.* The wave operator and L^p norms// J. Math. Mech. — 1963. — *12*, № 1. — С. 55–68.
40. *Nečas J.* Sur les normes équivalentes dans $W_p^k(\Omega)$ et sur la coercitivité des formes formellement positives// В сб.: «Séminaire Equations aux Dérivées partielles». — Montréal: Univ. Montréal, 1966. — С. 102–128.
41. *Ornstein D.* A non-equality for differential operators in the L_1 norm// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1962. — *11*. — С. 40–49.
42. *Schechter M.* Integral inequalities for partial differential operators and functions satisfying general boundary conditions// Commun. Pure Appl. Math. — 1959. — *12*. — С. 37–66.
43. *Smith K. T.* Inequalities for formally positive integro-differential forms// Bul. Am. Math. Soc. — 1961. — *67*. — С. 368–370.

Д. В. Лиманский
Донецкий государственный университет, Донецк, Россия
E-mail: `d.limanskiy.dongu@mail.ru`

М. М. Маламуд
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: `malamud3m@gmail.com`

UDC 517.946
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-121-149
EDN: YVHQAW

On subordination conditions for systems of minimal differential operators

D. V. Limanskii[1] **and M. M. Malamud**[2,3]

[1]*Donetsk State University, Donetsk, Russia*
[2]*RUDN University, Moscow, Russia*
[3]*Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia*

Abstract. In this paper, we provide a review of results on a priori estimates for systems of minimal differential operators in the scale of spaces $L^p(\Omega)$, where $p \in [1, \infty]$. We present results on the characterization of elliptic and l-quasielliptic systems using a priori estimates in isotropic and anisotropic Sobolev spaces $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$. For a given set $l = (l_1, \dots, l_n) \in \mathbb{N}^n$ we prove criteria for the existence of l-quasielliptic and weakly coercive systems and indicate wide classes of weakly coercive in $W^l_{p,0}(\mathbb{R}^n)$, $p \in [1, \infty]$, nonelliptic, and nonquasielliptic systems. In addition, we describe linear spaces of operators that are subordinate in the $L^\infty(\mathbb{R}^n)$-norm to the tensor product of two elliptic differential polynomials.

Keywords: differential operator, a priori estimate, quasi-ellipticity, coercivity.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. We are grateful to professors B. S. Mityagin and D. M. Stolyarov for useful discussions and comments that contributed to improving the text of the work. The study was conducted by the first author on the topic of the government assignment (reg. No. 124012400352-6). The second author's research was supported by the grant No. 23-11-00153 of the Russian Science Foundation.

For citation: D. V. Limanskii, M. M. Malamud, "On subordination conditions for systems of minimal differential operators," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 1, 121–149. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-121-149`

REFERENCES

1. O. V. Besov, "O koertsitivnosti v anizotropnom prostranstve S. L. Soboleva" [On coercivity in an anisotropic Sobolev space], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1967, **73**, No. 4, 585–599 (in Russian).
2. O. V. Besov, V. P. Il'in, and S. M. Nikol'skii, *Integral'nye predstavleniya funktsiy i teoremy vlozheniya* [Integral Representations of Functions and Embedding Theorems], Nauka, Moscow, 1996 (in Russian).
3. L. R. Volevich, "Lokal'nye svoystva resheniy kvaziellipticheskikh sistem" [Local properties of solutions of quasi-elliptic systems], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1962, **59**, 3–52 (in Russian).
4. L. R. Volevich and S. G. Gindikin, *Metod mnogogrannika N'yutona v teorii differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh* [Newton's Polyhedron Method in the Theory of Partial Differential Equations], Editorial URSS, Moscow, 2002 (in Russian).
5. E. A. Gorin, "Ob issledovaniyakh G. E. Shilova po teorii kommutativnykh banakhovykh algebr i ikh dal'neyshem razvitii" [On the research of G. E. Shilov on the theory of commutative Banach algebras and their further development], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1978, **33**, No. 4, 169–188 (in Russian).
6. V. P. Il'in, "Ob usloviyakh spravedlivosti neravenstv mezhdu L_p-normami chastnykh proizvodnykh funktsiy mnogikh peremennykh" [On conditions for the validity of inequalities between L_p-norms of partial derivatives of functions of several variables], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1968, **96**, 205–242 (in Russian).

7. G. G. Kazaryan, "Ob otsenkakh L_p-norm proizvodnykh cherez neregulyarnyy nabor differentsial'nykh operatorov" [On estimates of L_p-norms of derivatives through an irregular set of differential operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1969, **5**, No. 5, 911–921 (in Russian).
8. P. I. Lizorkin, "Predel'nye sluchai teorem o $\mathfrak{F}L_p$-mul'tiplikatorakh" [Limit cases of theorems on $\mathfrak{F}L_p$-multipliers], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1986, **173**, 164–180 (in Russian).
9. D. V. Limanskii, "Ob otsenkakh dlya tenzornogo proizvedeniya dvukh odnorodnykh ellipticheskikh operatorov" [On estimates for the tensor product of two homogeneous elliptic operators], *Ukr. mat. visn.* [Ukr. Math. Bull.], 2011, **8**, No. 1, 101–111 (in Russian).
10. D. V. Limans'kii, "Umovi pidporyadkovanosti dlya tenzornogo dobutku dvokh zvichaynikh diferentsial'nikh operatoriv" [Subordination conditions for the tensor product of two ordinary differential operators], *Dopov. NAN Ukr.* [Rep. Natl. Acad. Sci. Ukr.], 2012, No. 4, 25–29 (in Ukrainian).
11. D. V. Limanskii and M. M. Malamud, "O slaboy koertsitivnosti sistem differentsial'nykh operatorov v L^1 i L^∞" [On the weak coercivity of systems of differential operators in L^1 and L^∞], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2004, **397**, No. 4, 453–458 (in Russian).
12. D. V. Limanskii and M. M. Malamud, "Slabo koertsitivnye nekvaziellipticheskie sistemy differentsial'nykh operatorov v $W_p^l(\mathbb{R}^n)$" [Weakly coercive nonquasielliptic systems of differential operators in $W_p^l(\mathbb{R}^n)$], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2007, **415**, No. 5, 583–588 (in Russian).
13. D. V. Limanskii and M. M. Malamud, "Ellipticheskie i slabo koertsitivnye sistemy operatorov v prostranstvakh Soboleva" [Elliptic and weakly coercive systems of operators in Sobolev spaces], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2008, **199**, No. 11, 75–112 (in Russian).
14. D. V. Limanskii and M. M. Malamud, "Ob analoge teoremy de Lyu i Mirkila dlya operatorov s peremennymi koeffitsientami" [On an analog of de Leeuw and Mirkil theorem for operators with variable coefficients], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2008, **83**, No. 5, 783–786 (in Russian).
15. J.-L. Lions and E. Magenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya. T. 1* [Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. Vol. 1], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
16. Ya. B. Lopatinskii, "Ob odnom sposobe privedeniya granichnykh zadach dlya sistemy differentsial'nykh uravneniy ellipticheskogo tipa k regulyarnym integral'nym uravneniyam" [On one method of reducing boundary-value problems for a system of elliptic-type differential equations to regular integral equations], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 1953, **5**, 123–151 (in Russian).
17. M. M. Malamud, "Differentsial'nye svoystva funktsiy i koertsitivnost' v prostranstvakh s ravnomernoy normoy" [Differential properties of functions and coercivity in spaces with a uniform norm], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 1982, **34**, No. 5, 553–558 (in Russian).
18. M. M. Malamud, "Otsenka dlya differentsial'nykh operatorov v ravnomernoy norme i koertsitivnost' v prostranstvakh S. L. Soboleva" [Estimate for differential operators in the uniform norm and coercivity in Sobolev spaces], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1988, **298**, No. 1, 32–36 (in Russian).
19. M. M. Malamud, "Otsenki dlya sistem minimal'nykh i maksimal'nykh differentsial'nykh operatorov v $L_p(\Omega)$" [Estimates for systems of minimal and maximal differential operators in $L_p(\Omega)$], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1995, **56**, 206–261 (in Russian).
20. B. S. Mityagin, "O vtoroy smeshannoy proizvodnoy" [On the second mixed derivative], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1958, **123**, No. 4, 606–609 (in Russian).
21. B. S. Mityagin, "O nekotorykh svoystvakh funktsiy dvukh peremennykh" [On some properties of functions of two variables], *Vestn. MGU. Ser. mat.* [Bull. Moscow State Univ. Ser. Math.], 1959, No. 5, 137–152 (in Russian).
22. V. P. Mikhaylov, "O povedenii na beskonechnosti odnogo klassa mnogochlenov" [On the behavior at infinity of one class of polynomials], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1967, **91**, 59–80 (in Russian).
23. S. G. Mikhlin, "O mul'tiplikatorakh integralov Fur'e" [On multipliers of Fourier integrals], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1956, **109**, No. 4, 701–703 (in Russian).
24. L. Nirenberg, *Lektsii po nelineynomu funktsional'nomu analizu* [Topics in Nonlinear Functional Analysis], Mir, Moscow, 1977 (Russian translation).
25. E. H. Spanier, *Algebraicheskaya topologiya* [Algebraic Topology], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
26. E. Stein, *Singulyarnye integraly i differentsial'nye svoystva funktsiy* [Singular Integrals and Differentiability Properties of Functions], Mir, Moscow, 1973 (Russian translation).
27. L. Hörmander, *K teorii obshchikh differentsial'nykh operatorov v chastnykh proizvodnykh* [On the Theory of General Partial Differential Operators], Mir, Moscow, 1959 (Russian translation).
28. G. E. Shilov, "O nekotorykh zadachakh obshchey teorii kommutativnykh normirovannykh kolets" [On some problems of the general theory of commutative normalized rings], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1957, **12**, No. 1, 246–249 (in Russian).

29. V. I. Yudovich, “O nekotorykh otsenkakh, svyazannykh s integral’nymi operatorami i resheniyami ellipticheskikh uravneniy” [On some estimates related to integral operators and solutions of elliptic equations], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1961, **138**, No. 4, 805–808 (in Russian).
30. S. Agmon, “The coerciveness problem for integro-differential forms,” *J. Anal. Math.*, 1958, **6**, 183–223.
31. N. Aronszajn, “On coercive integro-differential quadratic forms,” In: *Conference on Partial Differential Equations*, Univ. Kansas, Lawrence, 1954, pp. 94–106.
32. E. S. Belinsky, M. Z. Dvejrin, and M. M. Malamud, “Multipliers in L_1 and estimates for systems of differential operators,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2005, **12**, No. 1, 6–16.
33. J. Boman, “Supremum norms for partial derivatives of functrions of several real variables,” *J. Illinois Math.*, 1972, **16**, 203–216.
34. K. De Leeuw and H. Mirkil, “A priori estimates for differential operators in L_∞ norm,” *J. Illinois Math.*, 1964, **8**, 112–124.
35. K. Kazaniecki, D. M. Stolyarov, and M. Wojciechowski, “Anisotropic Ornstein non-inequalities,” *Anal. PDE*, 2017, **10**, No. 2, 351—366.
36. K. Kazaniecki and M. Wojciechowski, “On the analytic version of the Mityagin–de Leeuw–Mirkhil non-equality on bi-disc,” *ArXiv*, 2023, 2301.09526 [math.FA].
37. B. Kirchheim and J. Kristensen, “On rank one convex functions that are homogeneous of degree one,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2016, **221**, No. 1, 527–558.
38. S. V. Kislyakov, D. V. Maksimov, and D. M. Stolyarov, “Differential expressions with mixed homogeneity and spaces of smooth functions they generate in arbitrary dimension,” *J. Funct. Anal.*, 2015, **269**, No. 10, 3220–3263.
39. W. Littman, “The wave operator and L^p norms,” *J. Math. Mech.*, 1963, **12**, No. 1, 55–68.
40. J. Nečas, “Sur les normes équivalentes dans $W_p^k(\Omega)$ et sur la coercitivité des formes formellement positives,” In: *Séminaire Equations aux Dérivées partielles*, Univ. Montréal, Montréal, 1966, pp. 102–128.
41. D. Ornstein, “A non-equality for differential operators in the L_1 norm,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1962, **11**, 40–49.
42. M. Schechter, “Integral inequalities for partial differential operators and functions satisfying general boundary conditions,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1959, **12**, 37–66.
43. K. T. Smith, “Inequalities for formally positive integro-differential forms,” *Bul. Am. Math. Soc.*, 1961, **67**, 368–370.

D. V. Limanskii
Donetsk State University, Donetsk, Russia
E-mail: d.limanskiy.dongu@mail.ru

M. M. Malamud
RUDN University, Moscow, Russia
Saint Petersburg State University, Saint Petersburg, Russia
E-mail: malamud3m@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 1 (2024). С. 150–162
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.547.2
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-150-162
EDN: YBRYQO

ОЦЕНКА СНИЗУ В СРЕДНЕМ МИНИМУМА МОДУЛЯ НА ОКРУЖНОСТЯХ ДЛЯ ЦЕЛОЙ ФУНКЦИИ НУЛЕВОГО РОДА

А. Ю. Попов[1,2], **В. Б. Шерстюков**[1,2]

[1] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия*

Аннотация. Статья написана по материалам совместного доклада авторов, сделанного ими на Шестой Международной конференции «Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. Проблемы математического образования», посвященной столетию со дня рождения члена-корреспондента РАН, академика Европейской академии наук Л. Д. Кудрявцева. Для целой функции, представленной каноническим произведением нулевого рода с положительными корнями, доказан следующий результат. При любом $\delta \in (0, 1/3]$ минимум модуля такой функции превосходит в среднем максимум ее модуля, возведенный в степень $-1-\delta$, на любом отрезке, отношение концов которого равно $\exp(2/\delta)$. Основная теорема проиллюстрирована двумя примерами. Первый из них показывает, что вместо показателя $-1-\delta$ нельзя взять -1. Второй пример демонстрирует невозможность замены в теореме при малых δ величины $\exp(2/\delta)$ величиной $28/(15\delta)$.

Ключевые слова: целая функция, минимум модуля, максимум модуля.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 22-11-00129) в МГУ имени М. В. Ломоносова.

Для цитирования: *А. Ю. Попов, В. Б. Шерстюков.* Оценка снизу в среднем минимума модуля на окружностях для целой функции нулевого рода// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 1. С. 150–162. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-150-162

1. Введение

Напомним теорему об оценке снизу минимума модуля целой функции порядка $\rho \in [0, 1]$ через степень максимума ее модуля. Обозначим

$$m(f; r) = \min_{|z|=r} |f(z)|, \qquad M(f; r) = \max_{|z|=r} |f(z)| = \max_{|z|\leqslant r} |f(z)|, \qquad r > 0.$$

Всюду в работе f — непостоянная целая функция.

Теорема 1.1. *Пусть $\rho \in [0, 1]$ и f — целая функция порядка ρ. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такая последовательность $r_n \uparrow +\infty$, что справедливы соотношения*

$$m(f; r_n) > \Big(M(f; r_n)\Big)^{\cos(\pi\rho)-\varepsilon}, \qquad \ln r_{n+1} = O(\ln r_n), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Известно также более сильное утверждение.

Теорема 1.2. *Пусть целая функция f имеет порядок $\rho \in [0,1]$. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует множество $E = E_{f,\varepsilon} \subset (1,+\infty)$ положительной нижней логарифмической плотности, т. е.*

$$\varliminf_{R\to+\infty} \frac{1}{\ln R} \int\limits_{E\cap[1,R]} \frac{dx}{x} > 0,$$

такое, что

$$m(f;r) > \Big(M(f;r)\Big)^{\cos(\pi\rho)-\varepsilon} \qquad \forall r \in E.$$

Свой окончательный облик теоремы 1.1 и 1.2 приобрели благодаря усилиям многих известных аналитиков (см. основополагающие работы [11, 12, 15, 16]). Эти теоремы в том или ином виде вошли в авторитетные руководства по теории аналитических функций [3, 4, 10, 13]. О развитии тематики можно узнать из обзоров [2, 14]. Много дополнительной информации содержится в недавних публикациях [6–9], где изложены свежие подходы к постановке задачи о связи минимума и максимума модуля целой функции и серия новых результатов.

Показатель $\cos(\pi\rho)$ является точным: на классе всех целых функций порядка ρ его нельзя заменить бо́льшим (каково бы ни было число $\rho \in [0,1]$), даже если в теореме 1.1 отказаться от ограничения $\ln r_{n+1} = O(\ln r_n)$, а в теореме 1.2 требовать лишь неограниченность множества E. Были построены примеры [12], показывающие, что последовательность r_n в теореме 1.1, вообще говоря, нельзя выбрать без больших лакун, т. е. добиться, например, асимптотик $\ln r_{n+1} \sim \ln r_n$ при $n \to \infty$.

Аналогичная ситуация в теореме 1.2: существуют такие функции f, что при достаточно малых $\varepsilon > 0$ дополнение $\mathbb{R}_+ \setminus E_{f,\varepsilon}$ содержит бесконечно много длинных отрезков вида $[R_n^{1-c}, R_n]$, $c > 0$. От подобных лакун нельзя избавиться, если даже, ограничившись функциями порядка $\rho \in (0,1)$, заменить показатель $\cos(\pi\rho) - \varepsilon$ меньшим числом -1. В подтверждение нами в заключительном разделе 4 (см. там пример 4.1) построен следующий пример.

Пусть $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — произвольная быстро растущая последовательность, удовлетворяющая условию

$$R_1 > 0, \qquad R_{n+1} \geqslant \exp(R_n), \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.1}$$

Тогда для любого $\rho \in (0,1)$ существует целая функция g нормального типа при порядке ρ, все корни которой лежат на $\mathbb{R}_+$ и для которой справедливо такое предельное соотношение:

$$\lim_{n\to\infty} \max\Big\{m(g;r)\,M(g;r) \;\Big|\; R_n^{1-\rho/2}\ln R_n \leqslant r \leqslant R_n\Big\} = 0. \tag{1.2}$$

Основным результатом статьи является следующее. Если мы хотим выполнения более слабой оценки минимума модуля через степень максимума модуля, меньшую -1, а именно

$$m(f;r_n) > M^{-1-\delta}(f;r_n), \qquad \delta > 0, \qquad n \in \mathbb{N}, \tag{1.3}$$

то для любой целой функции f, являющейся бесконечным произведением нулевого рода с корнями на одном луче, требуемую последовательность радиусов окружностей $r_n \uparrow +\infty$ можно подобрать, например, так, чтобы действовало ограничение

$$r_{n+1} < r_n \exp\left(\frac{2}{\delta}\right) + 1, \qquad 0 < \delta \leqslant 1/3, \qquad n \in \mathbb{N}. \tag{1.4}$$

Точнее говоря, имеет место более сильный факт.

Теорема 1.3. *Пусть целая функция f является бесконечным произведением нулевого рода*

$$f(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1 - \frac{z}{\lambda_n}\Big), \qquad z \in \mathbb{C}, \tag{1.5}$$

где $\{\lambda_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — произвольная числовая последовательность, удовлетворяющая условиям

$$0 < \lambda_n \leqslant \lambda_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}, \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n} < +\infty. \tag{1.6}$$

Тогда для любого $\delta \in (0, 1/3]$ при выборе $a = \exp(2/\delta)$ справедливо соотношение

$$\int_R^{aR} \frac{\ln\bigl(m(f;t)\, M^{1+\delta}(f;t)\bigr)}{t^2}\, dt > 0 \qquad \forall R > 0. \tag{1.7}$$

Функции (1.5) с условием (1.6) обладают тем легко проверяемым, но важным свойством, что

$$m(f;r) \equiv \min_{|z|=r} |f(z)| = |f(r)|, \qquad M(f;r) \equiv \max_{|z|=r} |f(z)| = f(-r), \qquad r > 0. \tag{1.8}$$

Как видно из (1.7), для целых функций изучаемого класса при указанном в теореме 1.3 сочетании параметров δ, a на каждом интервале вида (R, aR), где $R > 0$, найдется точка r, в которой верна оценка снизу

$$m(f;r) > M^{-1-\delta}(f;r).$$

Это обеспечивает выполнение оценки (1.3) на некоторой последовательности окружностей радиусов $r_n \uparrow +\infty$ с ограничением (1.4). Действительно, точку r_1, в которой выполняется неравенство (1.3), возьмем на интервале $\bigl(1, \exp(2/\delta)\bigr)$, а если имеется точка r_n, в которой верно неравенство (1.3), то r_{n+1} берется на интервале $\bigl(r_n + \exp(-2/\delta),\, r_n \exp(2/\delta) + 1\bigr)$, отношение концов которого равно $\exp(2/\delta)$. Отделенность от нуля разности $r_{n+1} - r_n$ обеспечивает условие $r_n \uparrow +\infty$.

Мы докажем теорему 1.3 в разделе 3. Затем, в самом конце работы, будет построен пример, показывающий, что выбрать в теореме 1.3 величину $a = a(\delta)$, растущую слишком медленно — как $(28/15)\,\delta^{-1}$, при малых δ уже нельзя (см. пример 4.2 в разделе 4).

Начнем со вспомогательных утверждений.

2. Леммы о специальных интегралах

В дальнейшем потребуются интегралы

$$F(y) = \int_0^y \frac{\ln|t^2-1|}{t^2}\, dt, \qquad F_1(y) = \int_0^y \frac{t - \ln(t+1)}{t^2}\, dt,$$

рассматриваемые при $y \geqslant 0$. Они выражаются через элементарные функции по формулам

$$F(y) = \ln\frac{|y-1|}{y+1} - \frac{\ln|y^2-1|}{y}, \quad y \in (0,1) \cup (1, +\infty), \qquad F(0) = 0, \quad F(1) = F(3) = -\ln 4,$$

$$F_1(y) = \left(1 + \frac{1}{y}\right)\ln(y+1) - 1, \quad y \in (0, +\infty), \qquad F_1(0) = 0.$$

Возрастание второго интеграла $F_1(y)$ при $y \geqslant 0$ от 0 до $+\infty$ очевидно. Отметим еще, что

$$F_1(y) = \ln(y+1) + \frac{\ln(y+1)}{y} - 1 < \ln\left(\frac{3}{2}\, y\right) + \frac{1}{2}\ln 3 - 1 = \ln y + \ln\frac{3\sqrt{3}}{2e} < \ln y$$

при всех $y > 2$. Нужные свойства первого интеграла $F(y)$ соберем в отдельное утверждение.

Лемма 2.1.

1. *Функция F непрерывна на луче $[0, +\infty)$, отрицательна на луче $(0, +\infty)$, убывает на отрезке $[0, \sqrt{2}]$, возрастает на луче $[\sqrt{2}, +\infty)$,* $\lim\limits_{y \to +\infty} F(y) = 0$,

$$\min_{y \geqslant 0} F(y) = F(\sqrt{2}) = -\ln(3 + \sqrt{8}) = -1{,}76274\ldots$$

2. *При $y \geqslant 3$ верна оценка снизу $F(y) > -4y^{-1}\ln y$.*
3. *Если числа x_0, y_0 таковы, что*

$$0 < x_0 < \sqrt{2} < y_0, \qquad \int_{x_0}^{y_0} \frac{\ln|t^2-1|}{t^2}\, dt = 0,$$

то при $a \geqslant y_0/x_0$ *имеем*

$$\int\limits_x^{ax} \frac{\ln|t^2-1|}{t^2}\,dt > 0, \qquad x \in (x_0, +\infty).$$

В частности, если $a \geqslant 148$, *то*

$$\int\limits_x^{ax} \frac{\ln|t^2-1|}{t^2}\,dt > 0, \qquad x \in (1/4, +\infty).$$

4. *Верна оценка* $F(e) > -1{,}5$.

Доказательство.

1. Первое свойство проверяется элементарно с использованием явного выражения для производной

$$F'(y) = \frac{\ln|y^2-1|}{y^2}, \quad y \in (0,1) \cup (1,+\infty).$$

2. Пусть $y \geqslant 3$. Требуется доказать положительность функции

$$F(y) + \frac{4\ln y}{y} = \ln\frac{y-1}{y+1} - \frac{\ln(y^2-1)}{y} + \frac{4\ln y}{y} = \left(1 - \frac{1}{y}\right)\ln(y-1) - \left(1 + \frac{1}{y}\right)\ln(y+1) + \frac{2}{y}\ln y^2.$$

Поскольку

$$\ln y^2 > \ln(y^2-1) = \ln(y-1) + \ln(y+1),$$

то достаточно доказать неравенство

$$\left(1 + \frac{1}{y}\right)\ln(y-1) \geqslant \left(1 - \frac{1}{y}\right)\ln(y+1), \qquad y \in [3, +\infty).$$

Другими словами, нужно при всех $y \geqslant 3$ проверить соотношение $h(y-1) \geqslant h(y+1)$ для элементарной функции $h(s) = (1/s)\ln s$. Но оно становится очевидным, если учесть, что эта функция возрастает на отрезке $[2, e]$, убывает на луче $[e, +\infty)$, и $h(2) = h(4)$.

3. Доказываемое свойство допускает эквивалентную переформулировку: если $F(x_0) = F(y_0)$ при $0 < x_0 < \sqrt{2} < y_0$, то $F(ax) > F(x)$ для всех $x > x_0$ и $a \geqslant y_0/x_0$. В таком виде оно сразу следует из общих фактов о поведении функции F, отмеченных в пункте 1.

Если теперь для значения $x_0 = 1/4$ выбрать $y_0 > \sqrt{2}$, исходя из условия

$$\int\limits_{1/4}^{y_0} \frac{\ln|t^2-1|}{t^2}\,dt = 0,$$

то окажется, что $36 < y_0 < 37$, поскольку

$$\int\limits_{1/4}^{36} \frac{\ln|t^2-1|}{t^2}\,dt = -0{,}0019\ldots < 0, \qquad \int\limits_{1/4}^{37} \frac{\ln|t^2-1|}{t^2}\,dt = 0{,}0034\ldots > 0.$$

Следовательно, $y_0/x_0 < 148$, и при любых $a \geqslant 148$ и $x > 1/4$ интеграл

$$\int\limits_x^{ax} \frac{\ln|t^2-1|}{t^2}\,dt$$

будет, как показано выше, положительным.

4. Учитывая, что $F(3) = -\ln 4$, запишем

$$F(e) = F(3) - \int\limits_e^3 \frac{\ln(t^2-1)}{t^2}\,dt > -\ln 4 - \ln 8 \int\limits_e^3 \frac{dt}{t^2} = -\left(\frac{3}{e} + 1\right)\ln 2 = -1{,}4581\ldots > -1{,}5.$$

Все пункты леммы 2.1 обоснованы. $\square$

Лемма 2.2. *При любых $x, y \in (0, +\infty)$, $x < y$, верно неравенство*

$$\int_x^y \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt > \ln\frac{y}{x} - F_1(y).$$

В частности, имеем

$$\int_x^y \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt > \ln\frac{1}{x} \qquad \forall y > 2, \qquad \int_x^y \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt > \ln\frac{y}{x} - 0{,}65, \qquad 0 < x < y \leqslant 2. \tag{2.1}$$

Доказательство. Ввиду положительности функции F_1 на луче $(0, +\infty)$ имеем

$$\int_x^y \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt = \ln\frac{y}{x} - \int_x^y \frac{t-\ln(1+t)}{t^2}\,dt = \ln\frac{y}{x} - F_1(y) + F_1(x) > \ln\frac{y}{x} - F_1(y),$$

если $0 < x < y < +\infty$. Основное неравенство леммы доказано. Два других (см. (2.1)) следуют из него и оценок

$$F_1(y) < \ln y, \quad y \in (2, +\infty), \qquad F_1(y) \leqslant F_1(2) = 1{,}5\ln 3 - 1 < 0{,}65, \quad y \in (0, 2].$$

Лемма 2.2 полностью доказана. □

3. Доказательство основного результата

Важную роль в дальнейшем играет следующее вспомогательное утверждение, установленное в нашей работе [8, лемма 3.1].

Лемма 3.1. *Если числа $a > 1$, $b > 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$ таковы, что функция*

$$\Phi(x;\, a,\, b,\, \alpha) \equiv \int_x^{ax} t^\alpha \Big(\ln|1-t| + b\ln(1+t)\Big)\,dt$$

положительна всюду на луче $x \in (0, +\infty)$, то при любом $R > 0$ для произвольного канонического произведения (1.5) *с условием на корни* (1.6) *справедливо неравенство*

$$\int_R^{aR} t^\alpha \ln\Big(m(f;\, t)\, M^b(f;\, t)\Big)\,dt > 0.$$

Пусть $\delta \in (0, 1/3]$, $a = \exp(2/\delta)$. Заметим, что $a \geqslant e^6$. Согласно лемме 3.1 оценка (1.7), составляющая содержание теоремы 1.3, будет гарантирована, если мы докажем неравенство

$$\int_x^{ax} \frac{\ln|t^2-1| + \delta\ln(1+t)}{t^2}\,dt > 0, \qquad x \in (0, +\infty). \tag{3.1}$$

При $x > 1/4$ оно сразу же следует из второго утверждения пункта 3 леммы 2.1.

Далее $0 < x \leqslant 1/4$. Перепишем неравенство (3.1) в равносильной форме

$$\delta\int_x^{ax} \frac{\ln(1+t)}{t^2}\,dt > F(x) - F(ax).$$

С учетом отрицательности $F(x)$, оценок (2.1) леммы 2.2 и равенства $\delta = 2/\ln a$ достаточно доказать, что

$$\frac{2(\ln a - 0{,}65)}{\ln a} > -F(ax), \qquad 0 < x \leqslant \frac{2}{a}, \tag{3.2}$$

$$\frac{2\ln(1/x)}{\ln a} > -F(ax), \qquad \frac{2}{a} < x \leqslant \frac{1}{4}. \tag{3.3}$$

Неравенство (3.2) следует из ограниченности снизу функции F числом $-1{,}77$ (см. пункт 1 леммы 2.1). Действительно, достаточно проверить справедливость неравенства

$$2-\frac{1{,}3}{\ln a}>1{,}77 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{1{,}3}{\ln a}<0{,}23 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{130}{23}<\ln a.$$

Последнее неравенство верно в силу ограничения $\ln a\geqslant 6$.

Докажем неравенство (3.3). Если $2/a<x<e/a$, то $2<ax$ и ввиду возрастания функции F на луче $[\sqrt{2},+\infty)$ (снова см. пункт 1 леммы 2.1) имеем $-F(ax)<-F(2)=1{,}5\ln 3<1{,}65$. В то же время $\ln(1/x)>\ln(a/e)=\ln a-1$. Поэтому достаточно доказать, что

$$\frac{2(\ln a-1)}{\ln a}>1{,}65 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2}{\ln a}<0{,}35,$$

а это верно, так как $\ln a\geqslant 6$. Если $e/a\leqslant x<4/a$, то $-F(ax)\leqslant -F(e)<1{,}5$ (см. пункт 4 леммы 2.1) и одновременно $\ln(1/x)>\ln a-\ln 4>\ln a-1{,}4$. Поэтому достаточно доказать, что

$$\frac{2(\ln a-1{,}4)}{\ln a}>1{,}5 \quad\Leftrightarrow\quad \frac{2{,}8}{\ln a}<0{,}5.$$

Последнее верно при $\ln a>5{,}6$.

Осталось доказать неравенство (3.3) для значений $x\in[4/a,1/4]$. Положим $x=a^{-s}$. Тогда

$$s=\frac{\ln(1/x)}{\ln a}\in I_a\equiv\left[\frac{\ln 4}{\ln a},\ 1-\frac{\ln 4}{\ln a}\right]. \tag{3.4}$$

Из (3.4) и пункта 2 леммы 2.1 видно, что достаточно установить справедливость неравенства

$$2s>\frac{4\ln(ax)}{ax} \quad\Leftrightarrow\quad \frac{sa^{1-s}}{1-s}>2\ln a,\qquad s\in I_a. \tag{3.5}$$

Ниже (чтобы не разбивать изложение) мы покажем убывание функции $s\mapsto sa^{1-s}/(1-s)$ на отрезке I_a, точнее — ее логарифма $\varphi(s)=\ln s-\ln(1-s)+(1-s)\ln a$. Таким образом, остается проверить справедливость (3.5) только при $s=1-\ln 4/\ln a$, а именно — доказать неравенство

$$\left(1-\frac{\ln 4}{\ln a}\right)\frac{\ln a}{\ln 4}\,a^{\ln 4/\ln a}>2\ln a \quad\Leftrightarrow\quad \frac{\ln a}{\ln 4}-1>\frac{1}{2}\ln a \quad\Leftrightarrow\quad \ln a>\frac{\ln 4}{1-\ln 2}$$

(здесь мы учли тождество $a^{\ln 4/\ln a}=4$). Но последнее неравенство очевидно выполнено, так как $\ln 4/(1-\ln 2)<1{,}4/0{,}3=14/3<5<\ln a$.

Для того, чтобы соотношение (3.3) было полностью обосновано, проверим отрицательность производной

$$\varphi'(s)=\frac{1}{s(1-s)}-\ln a,\qquad s\in I_a.$$

Поскольку минимум выражения $s(1-s)$ на отрезке I_a достигается на концах этого отрезка, то

$$\max\left\{\varphi'(s)\mid s\in I_a\right\}=\left(\frac{\ln 4}{\ln a}\left(1-\frac{\ln 4}{\ln a}\right)\right)^{-1}-\ln a=\frac{\ln^2 a}{\ln 4\,(\ln a-\ln 4)}-\ln a. \tag{3.6}$$

Отрицательность величины (3.6) следует из неравенства $\ln a<\ln 4\,(\ln a-\ln 4)$, которое равносильно неравенству $\ln a>\ln^2 4/(\ln 4-1)$, заведомо верному при $\ln a\geqslant 6$, так как $\ln^2 4/(\ln 4-1)<5{,}2$.

Справедливость неравенства (3.1) установлена. Теорема 1.3 доказана.

4. Примеры

Этот раздел посвящен примерам, которые выявляют дополнительные обстоятельства, связанные как с классическими $\cos(\pi\rho)$-теоремами 1.1, 1.2, так и с новой теоремой 1.3 (см. короткое обсуждение во введении к работе).

Пример 4.1. Пусть $\rho\in(0,1)$. Зафиксируем какую-нибудь последовательность (1.1) и построим целую функцию g с положительными корнями, имеющую нормальный тип при порядке ρ и подчиненную предельному соотношению (1.2).

Проверим, что всем перечисленным требованиям удовлетворяет бесконечное произведение

$$g(z)=\prod_{n=1}^{\infty}\Bigl(1-\frac{z}{R_n}\Bigr)^{\nu_n},\qquad z\in\mathbb{C},\qquad \text{где}\qquad \nu_n=[R_n^{\rho}] \tag{4.1}$$

(квадратные скобки обозначают целую часть). Равномерная сходимость произведения (4.1) на компактах плоскости $\mathbb{C}$ обеспечивается условием

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\nu_n}{R_n}\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}R_n^{\rho-1}<+\infty.$$

Тем самым g — целая функция. Множество корней функции g есть последовательность, состоящая из чисел R_n, $n\in\mathbb{N}$, и каждая точка R_n в этой последовательности записана ν_n раз. Обозначив $n(r)$ считающую функцию такой последовательности, т. е. количество корней функции (4.1) в круге $|z|\leqslant r$, имеем равенства

$$n(r)=\sum_{k=1}^{n}\nu_k=\sum_{k=1}^{n}\left[R_k^{\rho}\right],\qquad R_n\leqslant r<R_{n+1}. \tag{4.2}$$

Очевидно, что $n(R_n)>R_n^{\rho}-1$. Поэтому

$$D\;\equiv\;\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{n(r)}{r^{\rho}}\geqslant 1.$$

С другой стороны, ввиду сильной лакунарности последовательности $\{R_n\}$ (см. (1.1)) из (4.2) находим

$$n(R_n)\leqslant R_n^{\rho}+O\left(R_{n-1}^{\rho}\right)=R_n^{\rho}+O\left(\ln^{\rho}R_n\right),\qquad n\to\infty. \tag{4.3}$$

Соотношение (4.3) показывает, что

$$\frac{n(r)}{r^{\rho}}\;\leqslant\;1+O\left(\frac{\ln^{\rho}r}{r^{\rho}}\right),\qquad r\in[R_n,\,R_{n+1}).$$

Это влечет за собой равенство $D=1$. Отсюда и из двусторонней оценки Валирона [15]

$$\frac{D}{e\rho}\;\leqslant\;\sigma\;\leqslant\;\frac{\pi D}{\sin(\pi\rho)},\qquad \rho\in(0,1),$$

для типа

$$\sigma\;\equiv\;\varlimsup_{r\to+\infty}\frac{\ln M(f;r)}{r^{\rho}}$$

произвольной целой функции f конечного порядка $\rho>0$ через верхнюю ρ-плотность D множества ее корней получаем, что тип функции (4.1) при порядке ρ конечен и положителен. (Мы не ставим сейчас вопрос о точном вычислении ρ-типа функции (4.1). Подобные вопросы в увязке с точными оценками типа целой функции через плотностные характеристики распределения ее корней рассмотрены в обзорах [1, 5].)

Перейдем к доказательству соотношения (1.2). В силу (4.1) и отмеченных выше равенств (1.8) имеем

$$M(g;r)\,m(g;r)=|g(r)|\,g(-r)=\prod_{k=1}^{\infty}\left|1-\frac{r^2}{R_k^2}\right|^{\nu_k},\qquad r>0. \tag{4.4}$$

Очевидно, что при $r\in(0,\,R_n]$ все сомножители произведения (4.4) с номерами $k\geqslant n$ меньше 1. Поэтому при любом $r\in(0,\,R_n]$ верно неравенство

$$M(g;r)\,m(g;r)<\left(1-\frac{r^2}{R_n^2}\right)^{\nu_n}\Pi_n(r),\qquad \text{где}\qquad \Pi_n(r)=\prod_{k=1}^{n-1}\left|1-\frac{r^2}{R_k^2}\right|^{\nu_k}. \tag{4.5}$$

Поскольку нас интересуют значения $r\in[\sqrt{R_n},\,R_n]$, а величина $\sqrt{R_n}$ согласно (1.1) с ростом n значительно превосходит R_{n-1}, то грубая оценка сверху

$$\left|1-\frac{r^2}{R_k^2}\right|^{\nu_k}<r^{2\nu_k}$$

сомножителей произведения Π_n вполне достаточна. Применив ее, получим неравенство

$$\Pi_n(r) < r^{\,2\sum\limits_{k=1}^{n-1} R_k^\rho} = r^{\,2R_{n-1}^\rho + o(R_{n-1}^\rho)}, \qquad n \to \infty, \tag{4.6}$$

действующее при достаточно больших $r \in [\sqrt{R_n},\, R_n]$. Имеем также $1 - u < e^{-u}$ для $u \neq 0$. Следовательно,

$$\left(1 - \frac{r^2}{R_n^2}\right)^{\nu_n} < \exp\left(-\frac{\nu_n\, r^2}{R_n^2}\right) = \exp\left(-\frac{[R_n^\rho]\, r^2}{R_n^2}\right) < \exp\left(-\frac{(R_n^\rho - 1)\, r^2}{R_n^2}\right) \leqslant e^{\,1 - r^2 R_n^{\rho-2}} \tag{4.7}$$

при всех $r \in (0,\, R_n]$. Из (4.5)–(4.7) находим

$$M(g;r)\, m(g;r) < \exp\left\{-r^2 R_n^{\rho-2} + O(R_{n-1}^\rho \ln R_n)\right\}, \qquad r \in [\sqrt{R_n},\, R_n]. \tag{4.8}$$

При $n \to \infty$ правая часть неравенства (4.8) стремится к нулю равномерно по r на отрезках $R_n^{1-\rho/2} \ln R_n \leqslant r \leqslant R_n$. Действительно, на таких отрезках $r^2 R_n^{\rho-2}$ минорируется величиной $\ln^2 R_n$, которая благодаря условию $R_{n-1} \leqslant \ln R_n$ по порядку больше, чем $R_{n-1}^\rho \ln R_n \leqslant \ln^{1+\rho} R_n$. Соотношение (1.2) доказано. Обсуждение примера 4.1 завершено.

Пример 4.2. Пусть P — многочлен степени $p \in \mathbb{N}$, все корни которого $x_1, \ldots, x_p$ действительны и положительны, но не обязательно различны. Предположим, что $P(0) = 1$, и запишем многочлен P в виде произведения

$$P(z) = \prod_{k=1}^{p} \left(1 - \frac{z}{x_k}\right).$$

В работе [8, лемма 2.1] нами получен следующий результат.

Лемма 4.1. *Пусть $a > 1$, $d > 0$ и выполняется неравенство*

$$\mu \equiv \max_{1 \leqslant x \leqslant a} \Big(|P(x)|\; P^{\,d}(-x)\Big) < 1, \tag{4.9}$$

a $\{R_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ — произвольная возрастающая и столь быстро стремящаяся к $+\infty$ последовательность положительных чисел, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{R_n}{R_{n+1}} = 0.$$

Тогда для любого $\rho \in (0,\, 1)$ существует целая функция G нормального типа при порядке ρ, являющаяся каноническим произведением нулевого рода с корнями, лежащими на луче $(0, +\infty)$ действительной оси, такая, что выполнено предельное соотношение

$$\lim_{n\to\infty}\; \max\, \Big\{m(G;\, r)\, M^d(G;\, r) \,|\, R_n \leqslant r \leqslant aR_n\Big\} = 0. \tag{4.10}$$

Неравенство (4.9) с максимумом по отрезку $[1, a]$ после соответствующей замены переменной может быть переписано как условие, в котором максимум берется по произвольному наперед заданному отрезку положительной полуоси с отношением концов, равным a. Этим обстоятельством мы воспользуемся ниже.

Рассмотрим специальный многочлен пятой степени

$$P(z) = \left(1 - \frac{8z}{7}\right)^3 \left(1 - \frac{4z}{7}\right)^2 \tag{4.11}$$

с положительными корнями $x_1 = x_2 = x_3 = 7/8$ и $x_4 = x_5 = 7/4$. Покажем, что при заданном $\delta \in (0,\, 1/33]$ условие (4.9) будет выполнено для многочлена $P(\delta z)$, если выбрать $a = (28/15)\, \delta^{-1}$ и $d = 1 + \delta$. Иными словами, требуется убедиться в справедливости неравенства

$$\mu(\delta) \equiv \max_{\delta \leqslant x \leqslant 28/15} \Big(|P(x)|\; P^{\,1+\delta}(-x)\Big) < 1, \qquad \delta \in (0,\, 1/33], \tag{4.12}$$

с многочленом $P(z)$ из формулы (4.11). Для этого потребуются следующие две леммы.

Лемма 4.2. *Пусть параметры α, δ связаны условием*

$$0 < \delta < \alpha \leqslant 2 + \delta. \tag{4.13}$$

Тогда функция

$$H_{\alpha,\delta}(x) \equiv \left(1 - \frac{x}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{1+\delta} \tag{4.14}$$

убывает на отрезке $x \in [\delta, \alpha]$, а в точке $x = \delta$ мажорируется величиной

$$\exp\left\{\delta^2\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right) - \frac{\delta^4}{4\alpha^4}\right\}.$$

Доказательство. Производная функции (4.14) имеет вид

$$\frac{1}{\alpha}\left(1 + \frac{x}{\alpha}\right)^{\delta}\left(\delta - \frac{2+\delta}{\alpha}\,x\right)$$

и отрицательна при всех $x \in (\delta, \alpha]$ в силу (4.13).

Осталось обосновать неравенство

$$\left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right)\left(1 + \frac{\delta}{\alpha}\right)^{1+\delta} < \exp\left\{\delta^2\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right) - \frac{\delta^4}{4\alpha^4}\right\},$$

равносильное неравенству

$$\ln\left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) + (1+\delta)\ln\left(1 + \frac{\delta}{\alpha}\right) - \delta^2\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right) + \frac{\delta^4}{4\alpha^4} < 0. \tag{4.15}$$

Воспользуемся тем, что

$$\ln\left(1 - \frac{\delta}{\alpha}\right) < -\frac{\delta}{\alpha} - \frac{\delta^2}{2\alpha^2} - \frac{\delta^3}{3\alpha^3} - \frac{\delta^4}{4\alpha^4},$$

$$\ln\left(1 + \frac{\delta}{\alpha}\right) < \frac{\delta}{\alpha} - \frac{\delta^2}{2\alpha^2} + \frac{\delta^3}{3\alpha^3},$$

и оценим сверху левую часть (4.15) величиной

$$-\frac{\delta}{\alpha} - \frac{\delta^2}{2\alpha^2} - \frac{\delta^3}{3\alpha^3} - \frac{\delta^4}{4\alpha^4} + (1+\delta)\left(\frac{\delta}{\alpha} - \frac{\delta^2}{2\alpha^2} + \frac{\delta^3}{3\alpha^3}\right) - \delta^2\left(\frac{1}{\alpha} - \frac{1}{\alpha^2}\right) + \frac{\delta^4}{4\alpha^4} = -\frac{\delta^3}{2\alpha^2} + \frac{\delta^4}{3\alpha^3}.$$

Поскольку $0 < \delta < \alpha$, то

$$-\frac{\delta^3}{2\alpha^2} + \frac{\delta^4}{3\alpha^3} < -\frac{\delta^3}{2\alpha^2} + \frac{\delta^3}{3\alpha^2} = -\frac{\delta^3}{6\alpha^2} < 0,$$

и неравенство (4.15) выполнено. Лемма 4.2 доказана. □

Лемма 4.3. *Пусть параметры α, β связаны условием $0 < \alpha < \beta$. Тогда многочлен*

$$Q_{\alpha,\beta}(x) \equiv \left(\frac{x^2}{\alpha^2} - 1\right)^3\left(1 - \frac{x^2}{\beta^2}\right)^2 \tag{4.16}$$

на отрезке $x \in [\alpha, \beta]$ достигает максимума в точке

$$x_* = \sqrt{\frac{3\beta^2 + 2\alpha^2}{5}} \in (\alpha, \beta),$$

и значение этого максимума есть

$$\frac{108}{3125}\,\frac{(\beta^2 - \alpha^2)^5}{\alpha^6\beta^4}.$$

В частном случае $\beta = 2\alpha$ величина указанного максимума выражается числом $6561/12500$.

Доказательство леммы 4.3 не приводим ввиду его полной элементарности.

Вернемся к обоснованию неравенства (4.12). Зафиксируем произвольное $\delta \in (0,\ 1/33]$.

Пусть сначала $x \in [\delta, 7/8]$. Используя обозначения (4.11), (4.14), запишем для таких x представление

$$|P(x)|\, P^{\,1+\delta}(-x) = \left(\left(1-\frac{8x}{7}\right)\left(1+\frac{8x}{7}\right)^{1+\delta}\right)^3 \left(\left(1-\frac{4x}{7}\right)\left(1+\frac{4x}{7}\right)^{1+\delta}\right)^2 = H^3_{7/8,\,\delta}(x)\; H^2_{7/4,\,\delta}(x).$$

Для каждой из фигурирующих здесь функций семейства (4.14) условие (4.13) выполнено с очевидным запасом. По лемме 4.2 справедливы оценки

$$H_{\,7/8,\,\delta}(x) \leqslant \exp\left\{\left(\frac{8}{7}-\frac{8^2}{7^2}\right)\delta^2 - \frac{8^4}{4\cdot 7^4}\,\delta^4\right\}, \qquad H_{\,7/4,\,\delta}(x) \leqslant \exp\left\{\left(\frac{4}{7}-\frac{4^2}{7^2}\right)\delta^2 - \frac{4^4}{4\cdot 7^4}\,\delta^4\right\}.$$

Учтем равенство

$$3\left(\frac{8}{7}-\frac{8^2}{7^2}\right) + 2\left(\frac{4}{7}-\frac{4^2}{7^2}\right) = 0$$

и получим, что

$$\max_{\delta\leqslant x\leqslant 7/8}\Big(|P(x)|\ P^{\,1+\delta}(-x)\Big) \leqslant \exp\left\{-\left(\frac{3\cdot 8^4}{4\cdot 7^4}+\frac{2\cdot 4^4}{4\cdot 7^4}\right)\delta^4\right\} = \exp\left\{-\frac{3200}{2401}\,\delta^4\right\} < 1. \tag{4.17}$$

Пусть теперь $x \in [7/8, 7/4]$. Тогда

$$|P(x)|\, P^{\,1+\delta}(-x) = Q_{7/8,\,7/4}(x)\,\left(\left(\frac{8x}{7}+1\right)^3\left(\frac{4x}{7}+1\right)^2\right)^{\delta}, \tag{4.18}$$

если принять обозначение (4.16). По лемме 4.2 для рассматриваемых x имеем

$$Q_{7/8,\,7/4}(x) \equiv \left(\frac{x^2}{(7/8)^2}-1\right)^3\left(1-\frac{x^2}{(7/4)^2}\right)^2 \leqslant \frac{6561}{12500}.$$

Кроме того,

$$\left(\left(\frac{8x}{7}+1\right)^3\left(\frac{4x}{7}+1\right)^2\right)^{\delta} \leqslant 108^{\,\delta} \leqslant 108^{\,1/33}.$$

Следовательно,

$$\max_{7/8\leqslant x\leqslant 7/4}\Big(|P(x)|\ P^{\,1+\delta}(-x)\Big) \leqslant \frac{6561}{12500}\,108^{\,1/33} = 0{,}60489\ \ldots < 1. \tag{4.19}$$

Пусть, наконец, $x \in [7/4,\ 28/15]$. На таком отрезке функция $|P(x)|\, P^{\,1+\delta}(-x)$ по-прежнему имеет вид (4.18), но теперь возрастает, достигая своего максимума в точке $x = 28/15$. Прямой подсчет дает для этого максимума выражение

$$\frac{17^3}{15^5}\left(\frac{47^3\cdot 31^2}{15^5}\right)^{1+\delta}.$$

Тем самым при условии $\delta \leqslant 1/33$ имеем

$$\max_{7/4\leqslant x\leqslant 28/15}\Big(|P(x)|\ P^{\,1+\delta}(-x)\Big) \leqslant \frac{17^3}{15^5}\left(\frac{47^3\cdot 31^2}{15^5}\right)^{34/33} = 0{,}98548\ \ldots < 1. \tag{4.20}$$

Окончательно из (4.17), (4.19), (4.20) получим соотношение (4.12). В свете леммы 4.1 это позволяет утверждать следующее. Если мы выберем какую-нибудь возрастающую к $+\infty$ последовательность положительных чисел R_n со свойством $R_n = o(R_{n+1})$ при $n \to \infty$, то для любых $\rho \in (0,1)$ и $\delta \in (0,\ 1/33]$ найдется целая функция G нормального типа при порядке ρ с положительными корнями, такая, что предельное соотношение (4.10) выполнено с $d = 1+\delta$

и $a = (28/15)\,\delta^{-1}$. При таком выборе параметров, как показывает обсуждаемый пример, утверждение (1.7) теоремы 1.3 теряет силу. Подчеркнем, что функция G предъявляется как каноническое произведение нулевого рода, общая конструкция которого предложена в [8, доказательство леммы 2.1]. Применительно к нашей ситуации имеем

$$G(z) = G\left(z;\, \rho, \delta, \{R_n\}\right) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(\left(1 - \frac{8\delta z}{7R_n}\right)^3 \left(1 - \frac{4\delta z}{7R_n}\right)^2 \right)^{[R_n^\rho]}, \qquad z \in \mathbb{C}.$$

Построение примера 4.2 завершено.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брайчев Г. Г., Шерстюков В. Б.* Точные оценки асимптотических характеристик роста целых функций с нулями на заданных множествах// Фундам. и прикл. мат. — 2018. — *22*, № 1. — С. 51–97.
2. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Новые исследования о росте и распределении значений целых и мероморфных функций рода нуль// Усп. мат. наук. — 1961. — *16*, № 4. — С. 51–62.
3. *Гольдберг А. А., Островский И. В.* Распределение значений мероморфных функций. — М.: Наука, 1970.
4. *Левин Б. Я.* Распределение корней целых функций. — М.: Гостехиздат, 1956.
5. *Попов А. Ю.* Развитие теоремы Валирона—Левина о наименьшем возможном типе целой функции с заданной верхней ρ-плотностью корней// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2013. — *49*. — С. 132–164.
6. *Попов А. Ю.* Новая оценка снизу минимума модуля аналитической функции// Челяб. физ.-мат. ж. — 2019. — *4*, № 2. — С. 155–164.
7. *Попов А. Ю.* Оценка снизу минимума модуля аналитической функции на окружности через отрицательную степень ее нормы на большей окружности// Тр. МИАН. — 2022. — *319*. — С. 223–250.
8. *Попов А. Ю., Шерстюков В. Б.* Оценка снизу минимума модуля целой функции рода нуль с положительными корнями через степень максимума модуля в частой последовательности точек// Уфимский мат. ж. — 2022. — *14*, № 4. — С. 80–99.
9. *Попов А. Ю., Шерстюков В. Б.* Усиление леммы Гайсина о минимуме модуля четных канонических произведений// Чебышевский сб. — 2023. — *24*, № 1. — С. 127–138.
10. *Boas R. P. Jr.* Entire Functions. — New York: Academic Press, 1954.
11. *Cartwright M. L.* On the minimum modulus of integral functions// Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1934. — *30*. — С. 412–420.
12. *Hayman W. K.* The minimum modulus of large integral functions// Proc. London Math. Soc. — 1952. — *2*, № 3. — С. 469–512.
13. *Hayman W. K.* Subharmonic functions. Vol. 2. — London–New York: Academic Press, 1989.
14. *Hayman W. K., Lingham E. F.* Research problems in function theory. — Cham: Springer, 2019.
15. *Valiron G.* Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulièr// Ann. Fac. Sci. Toulouse. — 1913. — *5*. — С. 117–257.
16. *Wiman A.* Über eine Eigenschaft der ganzen Functionen von der Höhe Null// Math. Ann. — 1915. — *76*. — С. 197–211.

А. Ю. Попов
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия
E-mail: aypopov.msu@yandex.ru

В. Б. Шерстюков
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
Московский центр фундаментальной и прикладной математики, Москва, Россия
E-mail: shervb73@gmail.com

UDC 517.547.2
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-150-162
EDN: YBRYQO

Lower average estimate for the minimum modulus on circles for an entire function of genus zero

A. Yu. Popov[1,2] **and V. B. Sherstyukov**[1,2]

[1]*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
[2]*Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia*

Abstract. The article was written based on the materials of the joint report of the authors, made by them at the Sixth International Conference "Functional spaces. Differential operators. Problems of mathematical education," dedicated to the centenary of the birth of Corresponding Member of the Russian Academy of Sciences, Academician of the European Academy of Sciences L. D. Kudryavtsev. For an entire function represented by a canonical product of genus zero with positive roots, the following result is proved. For any $\delta \in (0, 1/3]$, the minimum modulus of such a function exceeds on average the maximum of its modulus raised to the power $-1-\delta$, on any segment whose end ratio is equal to $\exp(2/\delta)$. The main theorem is illustrated by two examples. The first of them shows that instead of the exponent $-1-\delta$ it is impossible to take -1. The second example demonstrates the impossibility of replacing the value $\exp(2/\delta)$ by the value $28/(15\delta)$ in the theorem for small δ.

Keywords: entire function, minimum modulus, maximum modulus.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The research was supported by the grant of the Russian Science Foundation (project No. 22-11-00129) at Lomonosov Moscow State University.

For citation: A. Yu. Popov, V. B. Sherstyukov, "Lower average estimate for the minimum modulus on circles for an entire function of genus zero," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 1, 150–162. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-150-162`

REFERENCES

1. G. G. Braichev and V. B. Sherstyukov, "Tochnye otsenki asimptoticheskikh kharakteristik rosta tselykh funktsiy s nulyami na zadannykh mnozhestvakh" [Accurate estimates of the asymptotic growth characteristics of entire functions with zeros on given sets], *Fundam. i prikl. mat.* [Fundam. Appl. Math.], 2018, **22**, No. 1, 51–97 (in Russian).
2. A. A. Gol'dberg and I. V. Ostrovskii, "Novye issledovaniya o roste i raspredelenii znacheniy tselykh i meromorfnykh funktsiy roda nul"' [New studies on the growth and distribution of values of entire and meromorphic functions of the genus zero], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1961, **16**, No. 4, 51–62 (in Russian).
3. A. A. Gol'dberg and I. V. Ostrovskii, *Raspredelenie znacheniy meromorfnykh funktsiy* [Distribution of Values of Meromorphic Functions], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
4. B. Ya. Levin, *Raspredelenie korney tselykh funktsiy* [Distribution of Roots of Entire Functions], Gostekhizdat, Moscow, 1956 (in Russian).
5. A. Yu. Popov, "Razvitie teoremy Valirona—Levina o naimen'shem vozmozhnom tipe tseloy funktsii s zadannoy verkhney ρ-plotnost'yu korney" [Development of the Valiron–Levin theorem on the smallest possible type of an entire function with a given upper ρ-density of roots], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2013, **49**, 132–164 (in Russian).

6. A. Yu. Popov, "Novaya otsenka snizu minimuma modulya analiticheskoy funktsii" [A new estimate from below of the minimum of the modulus of an analytic function], *Chelyab. fiz.-mat. zh.* [Chelyabinsk Phys. Math. J.], 2019, **4**, No. 2, 155–164 (in Russian).
7. A. Yu. Popov, "Otsenka snizu minimuma modulya analiticheskoy funktsii na okruzhnosti cherez otritsatel'-nuyu stepen' ee normy na bol'shey okruzhnosti" [Estimate from below the minimum of the modulus of an analytic function on a circle through the negative degree of its norm on a larger circle], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2022, **319**, 223–250 (in Russian).
8. A. Yu. Popov and V. B. Sherstyukov, "Otsenka snizu minimuma modulya tseloy funktsii roda nul' s polozhitel'nymi kornyami cherez stepen' maksimuma modulya v chastoy posledovatel'nosti tochek" [The estimate from below of the minimum of the modulus of an entire function of genus zero with positive roots through the power of the maximum of the modulus in a frequent sequence of points], *Ufimskiy mat. zh.* [Ufa Math. J.], 2022, **14**, No. 4, 80–99 (in Russian).
9. A. Yu. Popov and V. B. Sherstyukov, "Usilenie lemmy Gaysina o minimume modulya chetnykh kanonicheskikh proizvedeniy" [Strengthening of Gaisin's lemma on the minimum modulus of even canonical products], *Chebyshevskiy sb.* [Chebyshev Digest], 2023, **24**, No. 1, 127–138 (in Russian).
10. R. P. Boas Jr., *Entire Functions*, Academic Press, New York, 1954.
11. M. L. Cartwright, "On the minimum modulus of integral functions," *Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1934, **30**, 412–420.
12. W. K. Hayman, "The minimum modulus of large integral functions," *Proc. London Math. Soc.*, 1952, **2**, No. 3, 469–512.
13. W. K. Hayman, *Subharmonic functions. Vol. 2*, Academic Press, London–New York, 1989.
14. W. K. Hayman and E. F. Lingham, *Research problems in function theory*, Springer, Cham, 2019.
15. G. Valiron, "Sur les fonctions entières d'ordre nul et d'ordre fini et en particulier les fonctions à correspondance régulièr," *Ann. Fac. Sci. Toulouse*, 1913, **5**, 117–257.
16. A. Wiman, "Über eine Eigenschaft der ganzen Functionen von der Höhe Null," *Math. Ann.*, 1915, **76**, 197–211.

A. Yu. Popov
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia
E-mail: aypopov.msu@yandex.ru

V. B. Sherstyukov
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
Moscow Center of Fundamental and Applied Mathematics, Moscow, Russia
E-mail: shervb73@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 1 (2024). С. 163–172
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 514.85; 517.9; 531.01
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-163-172
EDN: YCNSKX

К ГЕОМЕТРИЧЕСКИМ АСПЕКТАМ БЕСКОНЕЧНОМЕРНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

В. М. Савчин

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. Основная цель работы — построить аналоги символов Кристоффеля для бесконечномерных систем и на этой основе получить уравнения геодезических для таких систем. Указанные аналоги представляют особый интерес в плане выявления взаимосвязи между динамикой систем с бесконечным числом степеней свободы и геометрией Римана, а также геометрией, определяемой псевдоримановой метрикой.

Ключевые слова: символы Кристоффеля, ковариантная производная, геодезическая.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при поддержке Российского университета дружбы народов имени Патриса Лумумбы, проект № 002092-0-000.

Для цитирования: *В. М. Савчин.* К геометрическим аспектам бесконечномерных динамических систем// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 1. С. 163–172. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-163-172

1. Введение

Предмет настоящей статьи находится между аналитической механикой и римановой геометрией. Тензорные методы давно начали применять в динамике конечномерных систем [5]. Первоначально они были направлены на использование в динамике идей римановой геометрии. В свою очередь, задачи механики способствовали развитию геометрии. За более чем сто лет были получены значительные результаты (см., например, [2, 5, 8] и имеющиеся там ссылки). В частности, было показано, что кривизна многообразия — инвариант, различающий римановы метрики $a_{ij}\left(u^1,\dots,u^n\right),\ i,j=\overline{1,n}$, существенно влияет на вид геодезических на нем, т. е. на движение в соответствующей динамической системе [1].

Геодезическими называются линии $u^i=u^i\left(t\right),\ t\in\left[t_0,t_1\right],\ i=\overline{1,n}$, являющиеся решениями уравнений

$$\frac{d^2u^j}{dt^2}+\Gamma^j_{ki}\frac{du^k}{dt}\frac{du^i}{dt}=0,\ j=\overline{1,n},$$

где Γ^j_{ki} — символы Кристоффеля второго рода.

Здесь и далее по повторяющимся индексам сомножителей, расположенным на разных уровнях, подразумевается суммирование.

Если метрика $a_{ij}\left(u^1,\dots,u^n\right)$ невырождена (т. е. $\det\left(a_{ij}\right)\neq 0$), то

$$\Gamma_{ij}^k=\frac{1}{2}a^{kl}\left(\frac{\partial a_{lj}}{\partial u^i}+\frac{\partial a_{il}}{\partial u^j}-\frac{\partial a_{ij}}{\partial u^l}\right), \tag{1.1}$$

где $\left(a^{kl}\right)$ — матрица, обратная к $\left(a_{lk}\right)$.

Символы Кристоффеля первого рода находятся через компоненты метрического тензора по формулам

$$\Gamma_{k,ij}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial u^i}+\frac{\partial a_{ik}}{\partial u^j}-\frac{\partial a_{ji}}{\partial u^k}\right). \tag{1.2}$$

Как отмечено в работе [3], в задачах механики в качестве римановой метрики естественно выбрать метрику, которая определяет кинетическую энергию системы.

Наша основная цель — построить аналоги символов Кристоффеля (1.1), (1.2) для бесконечномерных систем и на этой основе получить уравнения геодезических для таких систем.

2. Постановка задачи. Уравнения геодезических

Обозначим $U=C^2\left([t_0,t_1],U_1\right)$, $V=C\left([t_0,t_1],U_1\right)$, где U_1, V_1 — линейные нормированные пространства над полем действительных чисел $\mathbb{R}$, $U_1\subseteq V_1$.

Пусть состояние бесконечномерной динамической системы определяется функцией $u\in U$, удовлетворяющей условиям $u|_{t=t_0}=u_0$, $u|_{t=t_1}=u_1$, где u_0, u_1 — заданные элементы из U_1. *Кривой* u в U_1 назовем отображение $u:[t_0,t_1]\to U_1$.

Будем следовать обозначениям и терминологии работ [2, 7].

Пусть задана симметрическая невырожденная билинейная форма $\langle\cdot,\cdot\rangle: V_1\times V_1\to\mathbb{R}$ и кинетическая энергия системы $T\left[u,u_t\right]=\dfrac{1}{2}\left\langle u_t,A_u u_t\right\rangle$, где A_u — линейный дифференцируемый по Гато оператор, в общем случае, зависящий нелинейно от u; $u_t=\dfrac{du}{dt}=\lim\limits_{\Delta t\to 0}\dfrac{u\left(t+\Delta t\right)-u(t)}{\Delta t}\in U_1$.

Обозначим $A'_u\left(h;g\right)=\left(\dfrac{d}{d\varepsilon}A_{u+\varepsilon g}h\right)\Big|_{\varepsilon=0}$; $f\left(t,u,u_t\right)$ — плотность действующих на систему сил; $F[u]=\int\limits_{t_0}^{t_1}T\left[u,u_t\right]dt$, $u\in D\left(F\right)=\left\{u\in U: u|_{t=t_0}=u_0, u|_{t=t_1}=u_1\right\}$; дифференциал Гато $\delta F[u,h]=\dfrac{d}{d\varepsilon}F[u+\varepsilon h]\big|_{\varepsilon=0}$. Построение в работе сопряженных операторов основано на тождестве Лагранжа [4].

Определение 2.1. Функция $u\in D\left(F\right)$ называется *стационарной* для функционала F, если $\delta F[u,h]=0$ $\forall h\in D\left(F'_u\right)$.

Теорема 2.1. *Стационарная функция функционала $F[u]$ является решением операторного уравнения*

$$\frac{1}{2}\left(A_u+A_u^*\right)u_{tt}+\frac{1}{2}\left[A'_u\left(u_t;u_t\right)+A_u^{*\prime}\left(u_t;u_t\right)-A_u^{\prime *}\left(u_t;u_t\right)\right]=0, \tag{2.1}$$

где $\left(\dots\right)^*$ — оператор, сопряжённый к оператору $\left(\dots\right)$ относительно заданной билинейной формы, $u_{tt}=\dfrac{d^2u}{dt^2}$, $A_u^{\prime *}\left(u_t;u_t\right)=\left(A'_u\left(u_t;\cdot\right)\right)^*u_t$.

Доказательство. Для дальнейшего использования отметим, что при существовании производной Гато N'_u оператора N имеет место равенство [9]

$$N(u+\varepsilon h)=N(u)+\varepsilon N'_u h+r(u,\varepsilon h),\ \ u\in D(N), \tag{2.2}$$

где

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{r(u,\varepsilon h)}{\varepsilon}=0.$$

Используя равенство (2.2), получаем

$$F[u+\varepsilon h]=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle u_t+\varepsilon h_t, A_{u+\varepsilon h}(u_t+\varepsilon h_t)\rangle\,dt=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle u_t+\varepsilon h_t, A_{u+\varepsilon h}u_t+A_{u+\varepsilon h}\varepsilon h_t\rangle\,dt$$

$$=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big\langle u_t+\varepsilon h_t, A_u u_t+A'_u(u_t;\varepsilon h)+A_u\varepsilon h_t+A'_u(\varepsilon h_t;\varepsilon h)+r(u,\varepsilon h)\Big\rangle\,dt.$$

Отсюда находим

$$\delta F[u,h]=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\langle h_t, A_u u_t\rangle+\big\langle u_t, A'_u(u_t;h)+A_u h_t\big\rangle\right]dt=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big[D_t\langle h, A_u u_t\rangle-\langle h, D_t(A_u u_t)\rangle+$$

$$+\Big\langle A'^{*}_u(u_t;\cdot)\,u_t, h\Big\rangle+\langle A^*_u u_t, h_t\rangle\Big]\,dt\ \forall u\in D(F), \forall h\in D\left(F'_u\right). \tag{2.3}$$

Поскольку

$$\langle A^*_u u_t, h_t\rangle=D_t\langle A^*_u u_t, h\rangle-\langle D_t(A^*_u u_t), h\rangle,$$

то из (2.3) получаем

$$\begin{aligned}\delta F[u,h]&=\frac{1}{2}\left\langle(A_u+A^*_u)\,u_t, h\right\rangle\Big|_{t=t_0}^{t=t_1}+\\&+\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big[\Big\langle A'^{*}_u(u_t;\cdot)\,u_t-A^{*\prime}_u(u_t;u_t)-A'_u(u_t;u_t)-(A_u+A^*_u)\,u_{tt}, h\Big\rangle\Big]\,dt.\end{aligned} \tag{2.4}$$

Принимая во внимание, что

$$h\big|_{t=t_0}=h\big|_{t=t_1}=0,$$

из (2.4) находим

$$\delta F[u,h]=-\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\Big[\Big\langle(A_u+A^*_u)\,u_{tt}+A'_u(u_t;u_t)+A^{*\prime}_u(u_t;u_t)-$$

$$-A'^{*}_u(u_t;u_t)\,,h\Big\rangle\Big]\,dt\ \forall u\in D(F), \forall h\in D\left(F'_u\right).$$

Из условия $\delta F[u,h]=0$, $u\in D(F)$, $\forall h\in D(F'_u)$ получаем операторное уравнение (2.1).

Теорема доказана. □

Следствие 2.1. *Если* $A^*_u=A_u$, *то уравнение* (2.1) *принимает вид*

$$A_u u_{tt}+\frac{1}{2}\Big[A'_u(u_t;u_t)+A^{*\prime}_u(u_t;u_t)-A'^{*}_u(u_t;u_t)\Big]=0. \tag{2.5}$$

При отсутствии сил движение системы с кинетической энергией $T[u,u_t]$ можно интерпретировать как движение в U по инерции при метрике

$$ds^2=\langle u_t, A_u u_t\rangle\,dt^2. \tag{2.6}$$

Заимствуя терминологию в механике, при таком движении траектории (кривые) называют *геодезическими линиями* относительно метрики (2.6). Таким образом, задача о движении по инерции сводится к нахождению геодезических линий. Операторное уравнение (2.5) выражает далеко идущее обобщение этого факта.

Следствие 2.2. *Если* $A^*_u=A_u$ *и существует обратный оператор* A^{-1}_u, *то уравнение* (2.1) *представимо в виде*

$$u_{tt}+\frac{1}{2}A^{-1}_u\Big[A'_u(u_t;u_t)+A^{*\prime}_u(u_t;u_t)-A'^{*}_u(u_t;u_t)\Big]=0. \tag{2.7}$$

Рассмотрим конечномерную систему с координатами $\left(u^1,\ldots,u^n\right)$, $u^i\left(t_0\right)=u_0^i$, $u^i\left(t_1\right)=u_1^i$, $t\in\left[t_0,t_1\right]$, $i=\overline{1,n}$ и кинетической энергией $T=\dfrac{1}{2}\dot u^i a_{ij}(u)\dot u^j$, где $(a_{ij})_{i,j=1}^n$ — симметрическая матрица, $\det\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^n\neq 0$, $\dot u^i=\dfrac{du^i}{dt}$.

Теорема 2.2. *Если* $T=\dfrac{1}{2}\dot u^i a_{ij}(u)\dot u^j$, *то уравнение* (2.7) *совпадает с уравнениями геодезических*

$$\frac{d^2u^j}{dt^2}+\Gamma^j_{ik}\dot u^i\dot u^k=0,\ \ j=\overline{1,n}, \tag{2.8}$$

где

$$\Gamma^j_{ik}=\frac{1}{2}a^{jl}\left(\frac{\partial a_{lk}}{\partial u^i}+\frac{\partial a_{il}}{\partial u^k}-\frac{\partial a_{ik}}{\partial u^l}\right)$$

— символы Кристоффеля.

Доказательство. В рассматриваемом частном случае

$$\langle u_t, A_u u_t\rangle=\dot u^i a_{ij}(u)\dot u^j,\qquad F[u]=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\dot u^i a_{ij}(u)\dot u^j dt.$$

Имеем

$$F\left[u+\varepsilon h\right]=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\left(\dot u^i+\varepsilon\dot h^i\right)\left(a_{ij}(u+\varepsilon h)\right)\left(\dot u^j+\varepsilon\dot h^j\right)dt.$$

Отсюда находим

$$\delta F[u,h]=\frac{d}{d\varepsilon}F[u+\varepsilon h]\big|_{\varepsilon=0}=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\dot h^i\dot u^j a_{ij}(u)+\dot u^i\dot h^j a_{ij}(u)+\dot u^i\dot u^j\frac{\partial a_{ij}(u)}{\partial u^k}h^k\right]dt.$$

Интегрируя по частям, получаем

$$\delta F[u,h]=\frac{1}{2}\left[h^i\dot u^j a_{ij}+h^j\dot u^i a_{ij}\right]\Bigg|_{t=t_0}^{t=t_1}+$$
$$+\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[\dot u^i\dot u^j\frac{\partial a_{ij}}{\partial u^k}h^k-h^i\left(\ddot u^j a_{ij}+\dot u^j\frac{\partial a_{ij}}{\partial u^k}\dot u^k\right)-h^j\left(\ddot u^i a_{ij}+\dot u^i\frac{\partial a_{ij}}{\partial u^k}\ddot u^k\right)\right]dt.$$

Поскольку $h^i\left(t_0\right)=h^i\left(t_1\right)=0$, $i=\overline{1,n}$, то поменяв индексы суммирования в слагаемых под знаком интеграла, находим

$$\delta F[u,h]=\frac{1}{2}\int\limits_{t_0}^{t_1}\left[-h^k\ddot u^j\left(a_{kj}+a_{jk}\right)+h^k\dot u^i\dot u^j\left(\frac{\partial a_{ij}}{\partial u^k}-\frac{\partial a_{kj}}{\partial u^i}-\frac{\partial a_{ik}}{\partial u^j}\right)\right]dt.$$

Учитывая симметричность матрицы $(a_{ij})_{i,j=1}^n$, приходим к равенству

$$\delta F[u,h]=-\int\limits_{t_0}^{t_1}h^k\left[a_{kj}\ddot u^j+\frac{1}{2}\left(\frac{\partial a_{kj}}{\partial u^i}+\frac{\partial a_{ik}}{\partial u^j}-\frac{\partial a_{ij}}{\partial u^k}\right)\dot u^i\dot u^j\right]dt.$$

Из условия $\delta F[u,h]=0$, $u\in D\left(F\right)$, $\forall h\in D\left(F'_u\right)$ заключаем, что u является решением системы уравнений

$$a_{kj}\ddot u^j+\Gamma_{k,ij}\dot u^i\dot u^j=0, \tag{2.9}$$

где $\Gamma_{k,ij}$ — символы Кристоффеля первого рода (1.2).

Поскольку $\det\left(a_{ij}\right)_{i,j=1}^{n} \neq 0$, то систему уравнений (2.9) можно разрешить относительно $\ddot{u}^j$ ($j=\overline{1,n}$). В результате приходим к системе уравнений (2.8).

Таким образом, получены уравнения геодезических (2.8).

Теорема доказана. □

Сопоставляя уравнения (2.7), (2.8), из изложенного выше заключаем, что справедливо

Следствие 2.3. *Уравнение* (2.7) — *операторный аналог уравнений геодезических* (2.8), *при этом оператор*

$$K_{1u}[\cdot] = \frac{1}{2}\left[A'_u(\cdot;\cdot) + A^{*\prime}_u(\cdot;\cdot) - A'^{*}_u(\cdot;\cdot)\right] \tag{2.10}$$

определяет аналог символов Кристоффеля первого рода $\Gamma_{k,ij}$, *а*

$$K_{2u}[\cdot] = A_u^{-1}K_{1u}[\cdot]$$

— *аналог символов Кристоффеля второго рода* Γ^k_{ij}.

Оператор $\dfrac{D}{dt}$, определённый формулой

$$\frac{Du_t}{dt} = u_{tt} + A_u^{-1}K_{1u}\left[u_t\right],$$

является аналогом ковариантной производной u_t по t.

Указанные выше аналоги представляют особый интерес в плане взаимосвязи с геометрией Римана, а также геометрией, определяемой псевдоримановой метрикой.

3. Движение системы с потенциальными силами

Рассмотрим теперь случай, когда на систему с кинетической энергией $T[u,u_t] = \dfrac{1}{2}\langle u_t, A_u u_t\rangle$ действуют силы с плотностью $\mathcal{F}(u) = P_u u_t + Q(t,u)$.

Здесь $\forall t \in [t_0,t_1]$ и $\forall u \in U_1$ оператор $P_u : U_1 \to V_1$ является линейным и в общем случае нелинейно зависящим от t, u; $Q : [t_0,t_1]\times U_1 \to V_1$ — произвольный оператор, вообще говоря, нелинейный.

Будем предполагать, что при каждых $t\in[t_0,t_1]$ и $g(t)$, $u(t)\in U_1$ функция $P_u g(t)$ со значениями в V_1 непрерывно дифференцируема.

Тогда уравнения движения заданной динамической системы могут быть представлены в операторном виде

$$N(u) \equiv \frac{1}{2}\left(A_u + A_u^*\right)u_{tt} + K_{1u}\left[u_t\right] - \mathcal{F}(u) = 0,\ u\in D\left(N\right)\equiv D\left(F\right).$$

Определение 3.1. Силы с плотностью $\mathcal{F}(u)$ называются *потенциальными* на $D\left(N\right)$ относительно билинейной формы

$$\Phi(v,u) = \int\limits_{t_0}^{t_1}\langle v,u\rangle\,dt,$$

если существует функционал $\Pi[u]$ такой, что его дифференциал Гато

$$\delta\Pi[u,h] = -\int\limits_{t_0}^{t_1}\langle\mathcal{F}(u),h\rangle\,dt \equiv \int\limits_{t_0}^{t_1}\langle\operatorname{grad}\Pi[u],h\rangle\,dt\ \forall u\in D(N), \forall h\in D\left(N'_u\right).$$

Если $D(N)$ — выпуклое множество, то для этого необходимо и достаточно выполнения критерия потенциальности [7]

$$\Phi\left(\mathcal{F}'_u h, g\right) = \Phi\left(\mathcal{F}'_u g, h\right)\ \ \forall u\in D(N), \forall h,g\in D\left(N'_u\right). \tag{3.1}$$

При этом искомый потенциал $\Pi[u]$ может быть найден по формуле

$$\Pi[u] = -\int\limits_0^1 \int\limits_{t_0}^{t_1} \langle \mathcal{F}(\hat{u} + \lambda(u - \hat{u})), u - \hat{u} \rangle \, dt d\lambda + \text{const},$$

где $\hat{u}$ — произвольный фиксированный элемент из $D(N)$.

Теорема 3.1. *Если $D_t^* = -D_t$ и силы с плотностью $\mathcal{F}(u) = P_u u_t + Q(t,u)$ потенциальны, то существуют операторы $R(t,u)$ и $B[u]$ такие, что*

$$\Pi[u] = \int\limits_{t_0}^{t_1} \{\langle R(t,u), u_t \rangle - B[u]\} \, dt, \ \ u \in D(N).$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{F}(u + \varepsilon h) &= P_{u+\varepsilon h}(u_t + \varepsilon h_t) + Q(t, u + \varepsilon h) = P_{u+\varepsilon h} u_t + P_{u+\varepsilon h} \varepsilon h_t + Q(t, u + \varepsilon h) = \\ &= P_u u_t + \varepsilon P'_u(u_t; h) + \varepsilon P_u h_t + \varepsilon^2 P'_u(h_t; h) + Q(t,u) + \varepsilon Q'_u h + r(u, \varepsilon h). \end{aligned}$$

Отсюда получаем

$$\frac{d}{d\varepsilon} \mathcal{F}(u + \varepsilon h)\Big|_{\varepsilon=0} = \mathcal{F}'_u h = P_u h_t + P'_u(u_t; h) + Q'_u h.$$

Теперь условие (3.1) может быть представлено в виде

$$\int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle P_u h_t + P'_u(u_t; h) + Q'_u h, g \right\rangle dt = \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle P_u g_t + P'_u(u_t; g) + Q'_u g, h \right\rangle dt$$
$$\forall u \in D(N), \forall h, g \in D(N'_u).$$

Преобразуя, получаем

$$\begin{aligned} &\int\limits_{t_0}^{t_1} \big\{ \big\langle \big[P_u D_t + P'_u(u_t; \cdot) + Q'_u \big] h, g \big\rangle - \\ &- \left\langle \left[P'^*_u(u_t; \cdot) - \frac{\partial P^*_u}{\partial t} - P^{*'}_u(\cdot; u_t) - P^*_u D_t + Q'^*_u \right] h, g \right\rangle \right\} dt = \\ &= \int\limits_{t_0}^{t_1} \Big\langle (P_u + P^*_u) D_t h + \Big[P'_u(u_t; \cdot) - P'^*_u(u_t; \cdot) + P^{*'}_u(\cdot; u_t) \Big] h + \\ &+ \left(\frac{\partial P^*_u}{\partial t} + Q'_u - Q'^*_u \right) h, g \Big\rangle \, dt \ \forall u \in D(N), \forall g, h \in D\left(N'_u\right). \end{aligned}$$

В силу невырожденности рассматриваемый билинейной формы и произвольности $g, h \in D(N'_u)$ отсюда получаем условия потенциальности сил с плотностью $\mathcal{F}(u) = P_u u_t + Q(t,u)$ в виде

$$\begin{aligned} &P^*_u = -P_u, \\ &\frac{\partial P^*_u}{\partial t} + Q'_u - Q'^*_u = 0, \\ &P'_u(u_t; \cdot) + P^{*'}_u(\cdot; u_t) - \left(P'_u(u_t; \cdot)\right)^* = 0 \ \forall u \in D(N). \end{aligned}$$

При их выполнении искомый потенциал $\Pi[u]$ находится по формуле

$$\Pi[u] = -\int\limits_0^1 \int\limits_{t_0}^{t_1} \left\langle P_{\tilde{u}} \tilde{u}_t + Q(t, \tilde{u}), \frac{\partial \tilde{u}}{\partial \lambda} \right\rangle \Bigg|_{\tilde{u} = \hat{u} + \lambda(u - \hat{u})} dt d\lambda + \text{const}.$$

Определим искомые операторы R и B соответственно формулами

$$\Phi\left(R(t,u),u_t\right)=\int\limits_0^1 \Phi\left(P_{\tilde u}\frac{\partial \tilde u}{\partial\lambda},\tilde u_t\right)\Big|_{\tilde u=\hat u+\lambda(u-\hat u)}d\lambda+\mathrm{const},$$

$$B[u]=\int\limits_0^1\left\langle Q(t,\tilde u)+\lambda\frac{\partial P_{\tilde u}}{\partial t}\left(u-\hat u\right),\frac{\partial\tilde u}{\partial\lambda}\right\rangle\Big|_{\tilde u=\hat u+\lambda(u-\hat u)}d\lambda+\mathrm{const}.$$

Найденные так операторы R и B позволяют записать функционал

$$\Pi[u]=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left\{\langle R(t,u),u_t\rangle-B[u]\right\}dt,\ \ u\in D(N).$$

Отметим, что

$$\delta\Pi[u,h]=\int\limits_{t_0}^{t_1}\left\langle\left[R_u'^{*}-R_u'\right]u_t-\left(\operatorname{grad}B[u]+\frac{\partial R}{\partial t}\right),h\right\rangle dt$$

$$\forall u\in D(N),\forall h\in\left(N_u'\right).$$

Таким образом, для потенциальности сил с линейной по скорости u_t плотностью $\mathcal{F}(u)=P_uu_t+Q(t,u)$ необходимо и достаточно, чтобы имело место представление

$$-\mathcal{F}(u)=\left(R_u'^{*}-R_u'\right)u_t-\left(\operatorname{grad}B[u]+\frac{\partial R}{\partial t}\right)\ \forall u\in D(N).$$

Теорема доказана. □

4. Пример

Обозначим $U=C^2\left([t_0,t_1],U_1\right)$, $V=C\left([t_0,t_1],V_1\right)$; Ω — ограниченная область в R^3 с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, $U_1=C^2\left(\overline{\Omega}\right)$, $V_1=C\left(\overline{\Omega}\right)$, $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\left(\partial x^1\right)^2}+\dfrac{\partial^2}{\left(\partial x^2\right)^2}+\frac{\partial^2}{\left(\partial x^3\right)^2}$ — оператор Лапласа, $x=\left(x^1,x^2,x^3\right)$. Положим $A_u=-\Delta+\alpha u+\beta u^2$, где α, β — постоянные. Будем считать, что область определения $D\left(A_u\right)$ оператора A_u состоит из тех функций $u\in U$, которые удовлетворяют условиям

$$u|_{t=t_0}=u_0,u|_{t=t_1}=u_1,$$
$$u|_{\Gamma}=\psi(t,x),$$

где $\Gamma=[t_0,t_1]\times\partial\Omega$, $u_i\in C^2\left(\overline{\Omega}\right)\ (i=0,1)$, $\psi\in C(\Gamma)$.

Зададим билинейную форму

$$\langle v,g\rangle=\int\limits_{\Omega}v(t,x)g(t,x)dx.$$

Определим квадратичную форму по u_t

$$T=\frac{1}{2}\left\langle u_t,A_uu_t\right\rangle,$$

которую будем трактовать как кинетическую энергию некоторой системы.

Найдем вид уравнения (2.1) для этого случая.

С этой целью получаем

$$A_uv=-\Delta v+\alpha uv+\beta u^2v,$$

$$A_{u+\varepsilon h}v=-\Delta v+\alpha v\left(u+\varepsilon h\right)+\beta v\left(u+\varepsilon h\right)^2,$$

$$A_u'(v;h)=\frac{d}{d\varepsilon}A_{u+\varepsilon h}v\Big|_{\varepsilon=0}=\alpha vh+2\beta vuh=\left(\alpha v+2\beta vu\right)h.$$

Найдем A_u^*.

Имеем

$$\int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega} h\cdot A_u g dxdt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega} h\left(-\Delta g + \alpha u g + \beta u^2 g\right) dxdt =$$

$$= \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega} g\left(-\Delta h + \alpha u h + \beta u^2 h\right) dxdt = \int_{t_0}^{t_1}\int_{\Omega} g\cdot A_u h dxdt \ \forall u\in D(A_u), \forall g,h\in D(A'_u).$$

Таким образом,

$$A_u^* = A_u \ \forall u \in D\left(A_u\right).$$

Далее получаем

$$A_u^{\prime *}(v;\cdot)h = (\alpha v + 2\beta u v)h.$$

Согласно формуле (2.10) находим

$$K_{1u}\left[u_t\right] = \frac{1}{2}\left[\alpha u_t + 2\beta u u_t\right]u_t + \frac{1}{2}\left[\alpha u_t + 2\beta u u_t\right]u_t - \frac{1}{2}\left[\alpha u_t + 2\beta u u_t\right]u_t = \frac{1}{2}\left[\alpha + 2\beta u\right]u_t^2.$$

Таким образом, в рассматриваемом случае уравнение (2.1) принимает вид

$$\left(-\Delta + \alpha u + \beta u^2\right)u_{tt} + \frac{1}{2}\left(\alpha + 2\beta u\right)u_t^2 = 0.$$

Если предположить, что на систему действуют силы с плотностью $\dfrac{\partial^2 u}{\left(\partial x^3\right)^2}$, то получаем уравнение

$$\left(-\Delta + \alpha u + \beta u^2\right)u_{tt} + \frac{1}{2}\left(\alpha + 2\beta u\right)u_t^2 - \frac{\partial^2 u}{\left(\partial x^3\right)^2} = 0.$$

При $\alpha = \beta = 0$ отсюда приходим к уравнению Соболева [6]

$$\frac{\partial^2 \Delta u}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 u}{\left(\partial x^3\right)^2} = 0, \tag{4.1}$$

связанному с исследованиями колебаний жидкости во вращающемся сосуде.

Нетрудно проверить, что для уравнения (4.1) при соответствующих граничных условиях существует первый интеграл

$$\int_{\Omega}\left[\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial t \partial x^i}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial x^3}\right)^2\right]dx = \mathrm{const}.$$

5. Заключение

Уравнения движения вида (2.1), (2.7) допускают содержательную интерпретацию в терминах римановой геометрии. При этом определяющими являются полученные операторные аналоги символов Кристоффеля первого и второго рода, а также обобщенная ковариантная производная. На их основе составляются уравнения геодезических для бесконечномерных систем. Изложенный операторный подход позволяет рассматривать задачи как с римановыми, так и псевдоримановыми метриками.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арнольд В. И.* Математические методы классической механики. — М.: Эдиториал УРСС, 2000.
2. *Дубровин Б. А., Новиков С. П., Фоменко А. Т.* Современная геометрия. Методы и приложения. — М.: Наука, 1986.
3. *Козлов В. В.* Об интегрируемости уравнений динамики в непотенциальном силовом поле// Усп. мат. наук. — 2022. — *77*, № 6. — С. 137–158.
4. *Марчук Г. И.* Сопряженные уравнения и анализ сложных систем. — М.: Наука, 1992.
5. *Синдж Дж. Л.* Тензорные методы в динамике. — М.: Иностр. лит., 1947.

6. *Соболев С. Л.* Об одной новой задаче математической физики// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1954. — *18*, № 1. — С. 3–50.
7. *Филиппов В. М., Савчин В. М., Шорохов С. Г.* Вариационные принципы для непотенциальных операторов// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. — 1992. — *40*. — С. 3–176.
8. *Lovelock D., Rund H.* Tensors, differential forms, and variational principles. — New York: Willey, 1975.
9. *Nashed M. Z.* Differentiability and related properties of nonlinear operators: Some aspects of the role of differentials in nonlinear functional analysis// В сб.: «Nonlinear Functional Analysis and Applications». — New York–Lodon: Academic Press, 1975. — С. 103–310.

В. М. Савчин
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: savchin-vm@rudn.ru

UDC 514.85; 517.9; 531.01
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-163-172
EDN: YCNSKX

To geometric aspects of infinite-dimensional dynamical systems

V. M. Savchin

RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. The main goal of the work is to construct analogues of Christoffel symbols for infinite-dimensional systems and on this basis to obtain geodesic equations for such systems. These analogies are of particular interest in terms of identifying the relationship between the dynamics of systems with an infinite number of degrees of freedom and Riemannian geometry, as well as geometry defined by the pseudo-Riemannian metric.

Keywords: Christoffel symbols, covariant derivative, geodesic.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The paper was supported by the People's Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, project № 002092-0-000.

For citation: V. M. Savchin, "To geometric aspects of infinite-dimensional dynamical systems," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 1, 163–172. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-163-172

REFERENCES

1. V. I. Arnol'd, *Matematicheskie metody klassicheskoy mekhaniki* [Mathematical Methods of Classical Mechanics], Editorial URSS, Moscow, 2000 (in Russian).
2. B. A. Dubrovin, S. P. Novikov, and A. T. Fomenko, *Sovremennaya geometriya. Metody i prilozheniya* [Modern Geometry. Methods and Applications], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
3. V. V. Kozlov, "Ob integriruemosti uravneniy dinamiki v nepotentsial'nom silovom pole" [On the integrability of dynamics equations in a potential force field], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2022, **77**, No. 6, 137–158 (in Russian).
4. G. I. Marchuk, *Sopryazhennye uravneniya i analiz slozhnykh sistem* [Coupled Equations and Analysis of Complex Systems], Nauka, Moscow, 1992 (in Russian).

5. J. L. Synge, *Tenzornye metody v dinamike* [Tensor Methods in Dynamics], Inostr. lit., Moscow, 1947 (in Russian).
6. S. L. Sobolev, "Ob odnoy novoy zadache matematicheskoy fiziki" [On one new problem of mathematical physics], *Izv. AN SSSR. Ser. mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1954, **18**, No. 1, 3–50 (in Russian).
7. V. M. Filippov, V. M. Savchin, and S. G. Shorokhov, "Variatsionnye printsipy dlya nepotentsial'nykh operatorov" [Variational principles for nonpotential operators], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. mat.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math.], 1992, **40**, 3–176 (in Russian).
8. D. Lovelock and H. Rund, *Tensors, differential forms, and variational principles*, Willey, New York, 1975.
9. M. Z. Nashed, "Differentiability and related properties of nonlinear operators: Some aspects of the role of differentials in nonlinear functional analysis," In: *Nonlinear Functional Analysis and Applications*, Academic Press, New York–Lodon, 1975, pp. 103–310.

V. M. Savchin
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: savchin-vm@rudn.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 70, № 1 (2024). С. 173–187
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.444, 517.957.7, 517.951.9, 51-7
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-173-187
EDN: XLJEFP

О ВОССТАНОВЛЕНИИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОШИ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО УРАВНЕНИЯ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

С. М. Ситник[1], **М. В. Половинкина**[2], **И. П. Половинкин**[3,1]

[1] *Белгородский государственный национальный исследовательский университет (НИУ «БелГУ»), Белгород, Россия*
[2] *Воронежский государственный университет инженерных технологий, Воронеж, Россия*
[3] *Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*

Аннотация. Излагаются результаты, связанные с решением проблемы о наилучшем восстановлении решения задачи Коши для уравнения теплопроводности с B-эллиптическим оператором Лапласа—Бесселя по пространственным переменным по точно или приближенно известному конечному набору температурных профилей.

Ключевые слова: оператор Лапласа—Бесселя, оптимальное восстановление, преобразование Фурье—Бесселя, уравнение теплопроводности, сингулярное уравнение.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *С. М. Ситник, М. В. Половинкина, И. П. Половинкин.* О восстановлении решения задачи Коши для сингулярного уравнения теплопроводности// Соврем. мат. Фундам. направл. 2024. Т. **70**, № 1. С. 173–187. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-173-187

1. Введение

Известно, что распределение температуры в $\mathbb{R}^N$ описывается уравнением

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta u + f(x,t),$$

где $\Delta = \partial^2/\partial x_1^2 + \ldots \partial^2/\partial x_n^2$ — оператор Лапласа в $\mathbb{R}^N$.

Авторы работы [12] поставили следующую задачу. Пусть известны температурные распределения $u(\cdot,t_1),\ldots,u(\cdot,t_p)$ в моменты времени $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_p$, заданные приближенно. Точнее, мы знаем такие функции $y_j(\cdot) \in L_2(\mathbb{R}^N)$, что $\|u(\cdot,t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2(\mathbb{R}^N)} \leqslant \varepsilon_j$, где $\varepsilon_j > 0$, $j = 1,\ldots,p$. Для каждого набора таких функций мы хотим найти функцию в $L_2(\mathbb{R}^N)$, которая наилучшим образом аппроксимирует реальное распределение температуры в $\mathbb{R}^N$ в фиксированный момент времени τ в некотором смысле. В работе [13] рассматривалась задача о восстановлении температуры трубы по неточным измерениям, тесно связанная с описанной выше.

Мы исследуем аналогичную задачу для уравнения сингулярного теплового типа с оператором Бесселя [4–11,16,17,19–21]. Особенности вышеуказанного типа возникают в моделях математической физики в таких случаях, когда характеристики сред (например, характеристики диффузии или характеристики теплопроводности) имеют вырожденные степенные неоднородности. Кроме того, к таким уравнениям приводят ситуации, когда исследуются изотропные диффузионные процессы с осевой или сферической симметрией.

Следует отметить тесную связь рассматриваемой задачи с задачей восстановления степеней оператора Лапласа по неполному спектру, рассмотренной в работах [14, 15], результаты которых перенесены на случай оператора Лапласа–Бесселя в [22, 24].

2. Необходимые сведения

Пусть $\mathbb{R}^N_+ = \{x = (x', x''),\ x'=(x_1,\ldots,x_n),\ x''=(x_{n+1},\ldots,x_N),\ x_1>0,\ldots,x_n>0\}$, $\gamma = (\gamma_1,\ldots,\gamma_n)$, $\nu_\kappa = (\gamma_\kappa - 1)/2$, $(x')^\gamma = \prod\limits_{\kappa=1}^{n} x_\kappa^{\gamma_\kappa}$, $\gamma_\kappa > 0$, $\kappa = 1,\ldots,n$. Через Ω^+ будем обозначать область, прилегающую к гиперплоскостям $x_1 = 0,\ldots,x_n = 0$. Граница области Ω^+ состоит из двух частей: Γ^+, расположенной в части пространства $\mathbb{R}^+_N$, и Γ_0, принадлежащей гиперплоскостям $x_1 = 0,\ldots,x_n = 0$.

Через $L_p^\gamma(\Omega^+)$ будем обозначать линейное пространство функций, для которых

$$\|f\|_{L_p^\gamma(\Omega^+)} = \left(\int\limits_{\Omega^+} |f(x)|^p\ (x')^\gamma\, dx \right)^{1/p} < +\infty.$$

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ — объединение множества Ω^+ и множества Ω^-, полученного из Ω^+ симметрией относительно пространства $x' = 0$.

Пусть Ω^+_ε — прилегающая к границе Γ_0 внутренняя подобласть области Ω^+, все точки которой находятся на расстоянии более чем ε от части границы Γ^+ области Ω^+. Тогда область Ω^+_ε будем называть *симметрично внутренней* (*s-внутренней*) подобластью области Ω^+.

Через $L^\gamma_{p,loc}(\Omega^+)$ будем обозначать линейное пространство функций, для которых

$$\int\limits_{\Omega^+_\varepsilon} |f(x)|^p\ (x')^\gamma\, dx < +\infty$$

для любой s-внутренней подобласти Ω^+_ε области Ω^+.

Через $\mathcal{D}_{ev}(\Omega^+)$ $(\mathcal{E}_{ev}(\Omega^+))$ будем обозначать множество всех сужений четных по переменным x' функций из пространства $\mathcal{D}(\Omega)$ (пространства $\mathcal{E}(\Omega)$) на множество Ω^+. Топология в пространстве $\mathcal{D}_{ev}(\Omega^+)$ (в пространстве $\mathcal{E}_{ev}(\Omega^+)$) индуцирована топологией пространства $\mathcal{D}(\Omega)$ (пространства $\mathcal{E}(\Omega)$). По определению $\mathcal{D}_{ev} = \mathcal{D}_{ev}(R^N_+)$. Через $\mathcal{S}_{ev}$ обозначим линейное пространство функций $\varphi(x) \in C^\infty_{ev}(R^N_+)$, убывающих при $|x| \to \infty$ вместе со своими производными быстрее любой степени $|x|^{-1}$. Топология в $\mathcal{S}_{ev}$ вводится таким же образом, как и в пространстве $\mathcal{S}$ (см. [3, 8]). Сопряженное к $\mathcal{D}_{ev}(\Omega^+)$ $(\mathcal{E}_{ev}(\Omega^+),\ \mathcal{S}_{ev})$ пространство со своей слабой топологией будем обозначать $\mathcal{D}'_{ev}(\Omega^+)$ $(\mathcal{E}'_{ev}(\Omega^+),\ \mathcal{S}'_{ev})$. Имеют место следующие соотношения: $\mathcal{D}_{ev} \subset \mathcal{S}_{ev} \subset \mathcal{S}'_{ev} \subset \mathcal{D}'_{ev}$.

Действие функционала (распределения, обобщенной функции) f на пробную (основную) функцию φ во всех трех случаях будем обозначать как

$$\langle f(x), \varphi(x) \rangle_\gamma = \langle f(x), \varphi(x) \rangle\,. \tag{2.1}$$

Индекс γ иногда опускается, если это не вызывает недоразумений.

Будем отождествлять каждую функцию $f(x) \in L^\gamma_{1,loc}(\Omega^+)$ с функционалом $f \in \mathcal{D}'_{ev}(\Omega^+)$, действующим по формуле

$$\langle f(x), \varphi(x) \rangle = \int\limits_{\Omega^+} f(x)\varphi(x)\ (x')^\gamma\, dx, \tag{2.2}$$

который мы будем называть *регулярным*. Все остальные функционалы из пространства $\mathcal{D}'_{ev}(\Omega^+)$ будем называть *сингулярными*. Однако, хотя на сингулярные функционалы нельзя распространить равенство (2.2), следуя [2], кроме обозначения (2.1), можно для всех функционалов (в том числе и сингулярных) использовать обозначение (2.2).

Важным примером сингулярного функционала в $\mathcal{D}'_{ev}(\Omega^+)$ является весовая *δ-функция* $\delta_\gamma(x)$, которая определяется равенством

$$\langle \delta_\gamma(x),\ \varphi \rangle_\gamma = \varphi(0).$$

Смешанный обобщенный сдвиг определим формулой

$$T^y f(x) = \prod_{i=1}^{n} T_{x_i}^{y_i} f(x', x'' - y''),$$

где каждый из обобщенных сдвигов $T_{x_i}^{y_i}$ определен по формуле (см. [10])

$$(T_{x_i}^{y_i} f)(x) = \frac{\Gamma(\frac{\gamma_i+1}{2})}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\gamma_i}{2}\right)} \int\limits_0^{\pi} f\left(x_1, \ldots, x_{i-1}, \sqrt{x_i^2 + y_i^2 - 2x_i y_i \cos\alpha}, x_{i+1}, \ldots, x_N\right) \sin^{\gamma_i - 1}\alpha\, d\alpha, \quad (2.3)$$

$i = 1, \ldots, n,$ а произведение $\prod\limits_{k=1}^{n} T_{x_k}^{y_k}$ понимается как произведение (суперпозиция) операторов.

Обобщенная свертка функций $f,\ g \in L_p^\gamma(R_N^+)$ определяется формулой

$$(f * g)_\gamma(x) = \int\limits_{R_N^+} f(y) T_x^y g(x) (y')^\gamma dy. \quad (2.4)$$

Если $f \in \mathcal{D}'_{ev},\ g \in \mathcal{E}'_{ev}$, то *обобщенную свертку* $(f * g)_\gamma$ таких распределений определим равенством

$$\langle (f * g)_\gamma(x), \varphi(x)\rangle_\gamma = \langle f(y), \langle g(x), T_x^y \varphi(x)\rangle_\gamma\rangle_\gamma,\ \varphi(x) \in \mathcal{D}_{ev}. \quad (2.5)$$

j-функция Бесселя порядка ν определяется формулой

$$j_\nu(z) = \frac{2^\nu \Gamma(\nu+1)}{z^\nu} J_\nu(z) = \Gamma(\nu+1) \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m}}{2^{2m}\, m! \Gamma(m+\nu+1)},$$

где $\Gamma(\cdot)$ — *гамма-функция Эйлера*,

$$J_\nu(z) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m z^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu}\, m! \Gamma(m+\nu+1)},$$

— *функция Бесселя* первого рода порядка ν.

Прямое $F_{B,\gamma} = F_B = F_\gamma$ и обратное $F_{B,\gamma}^{-1} = F_B^{-1} = F_\gamma^{-1}$ смешанные *преобразования Фурье—Бесселя* определим формулами

$$F_{B,\gamma}[\varphi(x', x'')](\xi) = \int\limits_{R_N^+} \varphi(x) \prod_{k=1}^{n} j_{\nu_k}(\xi_k x_k) e^{-ix''\cdot\xi''} (x')^\gamma\, dx =$$

$$= (2\pi)^{N-n} 2^{2|\nu|} \prod_{k=1}^{n} \Gamma^2(\nu_k + 1) F_{B,\gamma}^{-1}[\psi(x', -x'')](\xi), \quad (2.6)$$

где

$$x' \cdot \xi' = x_1\xi_1 + \ldots + x_n\xi_n, \quad x'' \cdot \xi'' = x_{n+1}\xi_{n+1} + \ldots + x_N\xi_N, |\nu| = \nu_1 + \ldots + \nu_n,$$

Для преобразования Фурье—Бесселя справедлива *формула Парсеваля—順Планшереля* (см. [6]):

$$\|\varphi\|_{L_2^\gamma} = (2\pi)^{N-n} 2^{2|\nu|} \prod_{k=1}^{n} \Gamma^2(\nu_k + 1) \|\widehat{\varphi}\|_{L_2^\gamma}, \quad \widehat{\varphi} = F_B[\varphi].$$

На функциях из $S_{ev}(R_+^N)$ преобразование Фурье—Бесселя определено и обратимо (см. [6]).

Далее иногда будем пользоваться обозначением

$$\mathbf{\Pi} = (2\pi)^{N-n} 2^{2|\nu|} \prod_{k=1}^{n} \Gamma^2(\nu_k + 1). \quad (2.7)$$

B-эллиптический оператор Δ_B (термин и обозначения введены И. А. Киприяновым [7]), называемый также *оператором Лапласа—Бесселя*, определяется формулой

$$\Delta_B u = \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \frac{\gamma_k}{x_k}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right) + \sum_{k=n+1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} = \sum_{k=1}^{n} B_{x_k} u + \sum_{k=n+1}^{N} \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2}, \quad (2.8)$$

где $B_{x_k} = B_{x_k,\gamma_k}$ — *оператор Бесселя*, действующий по переменной x_k по формуле

$$B_{x_k} u = B_{x_k,\gamma_k} u = \frac{\partial^2 u}{\partial x_k^2} + \frac{\gamma_k}{x_k}\frac{\partial u}{\partial x_k} = x_k^{-\gamma_k}\frac{\partial}{\partial x_k}\left(x_k^{\gamma_k}\frac{\partial u}{\partial x_k}\right). \tag{2.9}$$

Отметим также полезные соотношения, в которые входят преобразование Фурье—Бесселя и оператор обобщенного сдвига (также см. [6]).

$$F_B\left[T_x^y \varphi(x)\right](\xi) = \prod_{k=1}^{n} j_{\nu_k}(\xi_k y_k) e^{-iy''\dot{\xi}''} F_B[\varphi(x)](\xi), \tag{2.10}$$

$$T_x^y F_B\left[\psi(\xi)\right](x) = F_B\left[\prod_{k=1}^{n} j_{\nu_k}(\xi_k y_k) e^{iy''\dot{\xi}''}\psi(\xi)\right](x). \tag{2.11}$$

$$T_x^y \delta_\gamma(x) = \delta_\gamma(y), \tag{2.12}$$

$$F_B\left[\Delta_B u(\cdot)\right](\xi) = -|\xi|^2 F_B\left[u(\cdot)\right](\xi). \tag{2.13}$$

3. Постановка задачи

Рассмотрим задачу Коши для уравнения

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \Delta_B u, \quad x \in \mathbb{R}_+^N,\ t > 0, \tag{3.1}$$

с начальным условием

$$u(x,0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}_+^N. \tag{3.2}$$

Мы предполагаем, что $u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)$. Единственное решение этой задачи для случая $N = n = 1$ было получено в [4]. Оно выражается следующей формулой, обобщающей хорошо известную формулу Пуассона:

$$u(x,t) = P_t\, u_0(\cdot)(x,t) = \frac{1}{2tx^\nu}\int\limits_{\mathbb{R}_+} \eta^{\nu+1}\, u_0(\eta)\, I_\nu\left(\frac{\eta x}{2t}\right)\exp\left(-\frac{\eta^2+x^2}{4t}\right) d\eta, \tag{3.3}$$

где

$$I_\nu(z) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{z^{2m+\nu}}{2^{2m+\nu} m!\,\Gamma(m+\nu+1)}$$

— *модифицированная функция Бесселя* первого рода порядка ν, $\Gamma(\cdot)$ — гамма-функция Эйлера. При $N \geqslant n \geqslant 1$ явное представление единственного решения задачи (3.1)-(3.2) имеет вид

$$u(x,t) = P_t\, u_0(\cdot)(x,t) =$$
$$= \frac{1}{2^N \pi^{(N-n)/2} t^{(N+n)/2} x^\nu}\int\limits_{\mathbb{R}_+^N} \exp\left(-\frac{|x-\eta|^2 - 2x''\cdot\eta''}{4t}\right)\prod_{\kappa=1}^{n}\left(\eta_\kappa^{\nu_\kappa+1}\ I_{\nu_\kappa}\left(\frac{\eta_\kappa x_\kappa}{2t}\right)\right) u_0(\eta)\, d\eta. \tag{3.4}$$

Формула (3.4) может быть получена с помощью применения преобразования Фурье—Бесселя. Однако нет смысла приводить здесь метод получения этой формулы, поскольку в работе [21] получена более общая формула для дифференциально-разностного уравнения.

Поставим следующую задачу. Пусть функции $y_j(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)$ известны в моменты $0 \leqslant t_1 < \cdots < t_p$ и

$$\|u(\cdot,t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)} \leqslant \varepsilon_j,\ j = 1,\ldots,p,$$

где $\varepsilon_j > 0,\ j = 1,\ldots,p$. Требуется каждому такому набору функций поставить в соответствие функцию из $L_2^\gamma(\mathbb{R}_+)$, которая в некотором смысле наилучшим образом аппроксимировала бы истинное распределение температуры в $\mathbb{R}_+^N$ в фиксированный момент времени τ. Для случая $N = n = 1$ эта задача рассмотрена в [23]. Здесь мы полагаем $N \geqslant n \geqslant 1$.

Следуя [12], любое отображение $m : L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)\times\cdots\times L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N) \longrightarrow L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)$ мы называем *методом восстановления* (температуры в $\mathbb{R}_+^N$ в момент τ согласно этой информации). Значение

$$e(\tau,\overline{\varepsilon},m) = \sup_{U}\|u(\cdot,\tau) - m(\overline{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)},$$

где $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \dots, y_p(\cdot))$, $\overline{\varepsilon} = (\varepsilon_1, \dots, \varepsilon_p)$,

$$U = \{(u_0(\cdot), \overline{y}(\cdot)) : u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N),\ \overline{y}(\cdot) \in (L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N))^p,\ \ \|u(\cdot, t_j) - y_j(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)} \leqslant \varepsilon_j,\ j = 1, \dots, p\},$$

называется *ошибкой* этого метода. Значение

$$E(\tau, \overline{\varepsilon}) = \inf_{m:(L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N))^p \longrightarrow L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)} e(\tau, \overline{\varepsilon}, m)$$

называется *ошибкой оптимального восстановления.* Метод $\widehat{m}$, для которого

$$E(\tau, \overline{\varepsilon}) = e(\tau, \overline{\varepsilon}, \widehat{m}),$$

называется *оптимальным методом восстановления.*

4. Решение задачи

Пусть $P_t : L_2^\gamma(\mathbb{R}) \longrightarrow L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)$ — оператор, определенный формулой (3.4):

$$P_t u_0(\cdot)(x,t) = \frac{1}{2^N \pi^{(N-n)/2} t^{(N+n)/2} x^\nu} \int\limits_{\mathbb{R}_+^N} u_0(\eta) \exp\left(-\frac{|x-\eta|^2 - 2x'' \cdot \eta''}{4t}\right) \prod_{\kappa=1}^{n} \left(\eta_\kappa^{\nu_\kappa+1} I_{\nu_\kappa}\left(\frac{\eta_\kappa x_\kappa}{2t}\right)\right) d\eta,$$

$t > 0$ — фиксированное значение, P_0 — тождественный оператор.

Пусть $\tau \geqslant 0$. Рассмотрим следующую задачу.

$$\|P_\tau u_0(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)} \longrightarrow \max, \tag{4.1}$$

$$\|P_{t_j} u_0(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)} \leqslant \varepsilon_j, \quad j = 1, \dots, p,\ u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N). \tag{4.2}$$

Функция, удовлетворяющая условию (4.2), называется *допустимой функцией* задачи (4.1)-(4.2).

Пусть S означает верхнюю границу $\|P_\tau u_0(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)}$ с условиями (4.2).

Лемма 4.1.

$$E(\tau, \overline{\varepsilon}) \geqslant S.$$

Доказательство. Пусть $\overline{u}_0(\cdot)$ — допустимая функция задачи (4.1)-(4.2). Тогда $-\overline{u}_0(\cdot)$ — допустимая функция задачи (4.1)-(4.2). Для всякого метода $m : (L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N))^p \longrightarrow L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)$, имеем:

$$2\|P_\tau \overline{u}_0(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)} = \|P_\tau \overline{u}_0(\cdot) - m(0)(\cdot) + m(0)(\cdot) - P_\tau(-\overline{u}_0(\cdot))\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)} \leqslant$$

$$\leqslant \|P_\tau \overline{u}_0(\cdot) - m(0)(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)} + \|m(0)(\cdot) - P_\tau(-\overline{u}_0(\cdot))\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)} \leqslant$$

$$\leqslant 2 \sup_{\substack{u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N) \\ \|P_{t_j} u_0(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R})} \leqslant \varepsilon_j,\ j=1,\dots,p}} \|P_\tau u_0(\cdot) - m(0)(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)} \leqslant 2 \sup_U \|P_\tau u_0(\cdot) - m(\overline{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)}.$$

В левой части полученного неравенства мы переходим к верхней границе допустимых функций, а в правой — к нижней границе всех методов. Этот шаг завершает доказательство леммы. □

С помощью формулы 6.633 (4) из книги [18] легко убедиться в справедливости равенства

$$F_\gamma[P_t u_0(\cdot)](\xi) = \exp(-|\xi|^2 t) F_\gamma u_0(\xi).$$

Следовательно, по теореме Парсеваля—順順 Планшереля для преобразования Фурье—Бесселя квадрат значения задачи (4.1)-(4.2) равен значению следующей задачи

$$: \frac{1}{\mathbf{\Pi}} \int\limits_{\mathbb{R}_+^N} \xi^\gamma e^{-2|\xi|^2 \tau} |F_\gamma u_0(\xi)|^2 \, d\xi \longrightarrow \max, \quad u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N), \tag{4.3}$$

$$\frac{1}{\mathbf{\Pi}} \int\limits_{\mathbb{R}_+^N} \xi^\gamma e^{-2|\xi|^2 t_j} |F_\gamma u_0(\xi)|^2 \, d\xi \leqslant \varepsilon_j^2,\ j = 1, \dots, p. \tag{4.4}$$

Перейдем от задачи (4.3)-(4.4) к расширенной задаче (согласно терминологии [12]). Для этого заменим $\mathbf{\Pi}^{-1}\,|F_\gamma u_0(\xi)|^2\xi^{2\nu+1}\,d\xi$ на положительную меру $d\mu(\xi)$. В результате получим следующую задачу:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2\tau}\,d\mu(\xi) \longrightarrow \max, \tag{4.5}$$

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2 t_j}\,d\mu(\xi) \leqslant \varepsilon_j^2,\ j = 1,\dots,p. \tag{4.6}$$

Всякую меру, удовлетворяющую ограничениям (4.6), будем называть *допустимой* в задаче (4.5)-(4.6). Допустимую меру $d\widehat{\mu}(\xi)$, для которой

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2\tau}\,d\widehat{\mu}(\xi) = \max \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2\tau}\,d\mu(\xi), \tag{4.7}$$

где максимум берется по всем допустимым мерам, будем называть *решением* задачи (4.5)-(4.6).

Функция Лагранжа для этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}(d\mu(\cdot),\lambda) = \lambda_0 \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2\tau}\,d\mu(\xi) + \sum_{j=1}^{p}\lambda_j\left(\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2 t_j}\,d\mu(\xi) - \varepsilon_j^2\right),$$

где $\lambda = (\lambda_0,\lambda_1,\dots,\lambda_p)$ — набор множителей Лагранжа. Расширенная проблема (4.5)-(4.6) была решена в [12]. Для полноты повествования нам нужно будет переписать это решение, слегка изменив конкретные значения в соответствии с нашими потребностями. На двумерной плоскости (t,y) построим множество

$$M = \mathrm{co}\left\{\left(t_j, \ln\left(\frac{1}{\varepsilon_j}\right)\right) j = 1,\dots,p\right\} + \{(t,0) : t \geqslant 0\},$$

где $\mathrm{co}\,A$ означает выпуклую оболочку множества A. Введем функцию $\theta(t)$ на луче $[0,+\infty)$ с помощью формулы

$$\theta(t) = \max\{y : (t,y) \in M\},$$

предполагая, что $\theta(t) = -\infty$, если $(t,y) \notin M$ при всех y. На луче $[t_1,+\infty)$ график функции $\theta(t)$ — направленная вверх выпуклая (вогнутая) ломаная линия. Пусть $t_1 = t_{s_1} < t_{s_2} < \dots < t_{s_\varrho}$ суть точки ее изломов. Очевидно, $\{t_{s_1} < t_{s_2} < \dots < t_{s_\varrho}\} \subseteq \{t_1 < t_2 < \dots < t_p\}$.

Нам нужно рассмотреть три случая.

(a) Пусть $\tau \geqslant t_1$, в то время как справа от τ имеется точка излома функции $\theta(t)$. Предположим, что $\tau \in [t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$. Пусть $d\widehat{\mu}(\xi) = x^\gamma T_\xi^{\xi_0}\delta_\gamma$, где параметры A и ξ_0 определяются из условий

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+} e^{-2|\xi|^2\tau}\,d\widehat{\mu}(\xi) = Ae^{-2|\xi_0|^2 t_k} = \varepsilon_k^2, \quad k = s_j, s_{j+1}. \tag{4.8}$$

Из условия (4.8) мы получим:

$$A = \varepsilon_{s_j}^{2t_{s_{j+1}}/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})}\varepsilon_{s_{j+1}}^{-2t_{s_j}/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})},$$

$$|\xi_0|^2 = \frac{\ln \varepsilon_{s_j}/\varepsilon_{s_{j+1}}}{t_{s_{j+1}}-t_{s_j}} = \frac{\ln(1/\varepsilon_{s_{j+1}}) - \ln(1/\varepsilon_{s_j})}{t_{s_{j+1}}-t_{s_j}}.$$

Пусть $\widehat{\lambda}_0 = -1$, $\widehat{\lambda}_k = 0$, $k \neq s_j$, s_{j+1}. Чтобы найти числа λ_{s_j}, $\lambda_{s_{j+1}}$, сделаем некоторые приготовления. Пусть

$$f(v) = \lambda_0 + \sum_{j=1}^{p}\lambda_j e^{-2v(t_j-\tau)}.$$

Потребуем, чтобы $f(|\xi_0|^2) = f'(|\xi_0|^2) = 0$. Отсюда мы получаем систему линейных уравнений относительно λ_{s_j}, $\lambda_{s_{j+1}}$

$$\lambda_{s_j} e^{-2|\xi_0|^2(t_{s_j}-\tau)} + \lambda_{s_{j+1}} e^{-2|\xi_0|^2(t_{s_{j+1}}-\tau)} = 1,$$
$$\lambda_{s_j}(t_{s_j}-\tau) e^{-2|\xi_0|^2(t_{s_j}-\tau)} + \lambda_{s_{j+1}}(t_{s_{j+1}}-\tau) e^{-2|\xi_0|^2(t_{s_{j+1}}-\tau)} = 0.$$

Решив эту систему, мы получаем

$$\lambda_{s_j} = \frac{t_{s_{j+1}}-\tau}{t_{s_{j+1}}-t_{s_j}} \left(\frac{\varepsilon_{s_{j+1}}}{\varepsilon_{s_j}}\right)^{2(\tau-t_{s_j})/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})},$$
$$\lambda_{s_{j+1}} = \frac{\tau-t_{s_j}}{t_{s_{j+1}}-t_{s_j}} \left(\frac{\varepsilon_{s_j}}{\varepsilon_{s_{j+1}}}\right)^{2(t_{s_{j+1}}-\tau)/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})}.$$

Для меры $d\widehat{\mu}(\xi)$ мы имеем:

$$\min_{d\mu(\cdot)\geqslant 0} \mathcal{L}(d\mu(\cdot), \widehat{\lambda}) = \mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot), \widehat{\lambda}), \tag{4.9}$$

$$\widehat{\lambda}_j \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^N} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\widehat{\mu}(\xi) - \varepsilon_j^2 \right) = 0,\ j = 1, \ldots, p. \tag{4.10}$$

Отсюда для всякой допустимой меры $d\mu(\xi)$

$$\widehat{\lambda}_0 \int\limits_{\mathbb{R}_+^N} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\mu \geqslant \widehat{\lambda}_0 \int\limits_{\mathbb{R}_+^N} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\mu + \widehat{\lambda}_j \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^N} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\mu(\xi) - \varepsilon_j^2 \right) \geqslant$$

$$\geqslant \widehat{\lambda}_0 \int\limits_{\mathbb{R}_+^N} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\widehat{\mu} + \widehat{\lambda}_j \left(\int\limits_{\mathbb{R}_+^N} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\widehat{\mu}(\xi) - \varepsilon_j^2 \right) = \widehat{\lambda}_0 \int\limits_{\mathbb{R}_+^N} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\widehat{\mu}.$$

Разделив на $\widehat{\lambda}_0 < 0$, получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^N} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\mu \leqslant \widehat{\lambda}_0 \int\limits_{\mathbb{R}_+^N} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\widehat{\mu}. \tag{4.11}$$

Пусть

$$\rho(t) = \frac{\ln(1/\varepsilon_{s_{j+1}}) - \ln(1/\varepsilon_{s_j})}{t_{s_{j+1}} - t_{s_j}}(t - t_{s_j}) + \ln(1/\varepsilon_{s_j}).$$

Прямая $y = \rho(t)$ проходит через точки $(t_{s_j}, \ln(1/\varepsilon_{s_j}))$ и $(t_{s_{j+1}}, \ln(1/\varepsilon_{s_{j+1}}))$ и лежит, по крайней мере, ниже графика функции $y = \theta(t)$. Для найденных значений A и $|\xi_0|^2$, мы имеем:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^N} e^{-2|\xi|^2 t_i}\, d\widehat{\mu}(\xi) = A e^{-2|\xi_0|^2 t_i} = \varepsilon_{s_j}^{2(t_{s_{j+1}}-t_i)/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})} \varepsilon_{s_{j+1}}^{2(t_i-t_{s_j})/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})} =$$
$$= e^{-2\rho(t_i)} \leqslant e^{-2\ln(1/\varepsilon_i)} = \varepsilon_i^2, \quad i = 1, \ldots, p.$$

Это означает, что $d\widehat{\mu}(\xi)$ является допустимой мерой в расширенной задаче (4.5)-(4.6) и является ее решением. Если мы подставим $d\widehat{\mu}(\xi)$ в функционал, определенный в (4.5), мы получим значение задачи (4.5)-(4.6), которое также является решением задачи (4.3)-(4.4):

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^N} e^{-2|\xi|^2\tau}\, d\widehat{\mu}(\xi) = A e^{-2|\xi_0|^2\tau} = \varepsilon_{s_j}^{2(t_{s_{j+1}}-\tau)/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})} \varepsilon_{s_{j+1}}^{2(\tau-t_{s_j})/(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})} = e^{-2\rho(\tau)} = e^{-2\theta(\tau)}.$$

Это означает, что значение задачи (4.1)-(4.2) равно $S = e^{-\theta(\tau)}$.

(b) Пусть $\tau \geqslant t_{s_\varrho}$. Если график функции $y = \theta(t)$ представляет собой прямую линию, то $t_{s_\varrho} = t_1$. На этот раз положим $\widehat{\lambda}_0 = -1$, $\widehat{\lambda}_{s_\varrho} = 1$, $\widehat{\lambda}_{s_j} = 0$, где $j \neq \varrho$, $d\widehat{\mu}(\xi) = x^\gamma \varepsilon_{s_\varrho} \delta_\gamma(\xi)$. Выполнение условия (4.10) совершенно очевидно. Кроме того, для всех $\xi \in \mathbb{R}_+^N$ выполняется неравенство

$$f(|\xi|^2) = -1 + e^{-2|\xi|^2(t_{s_\varrho} - \tau)} \geqslant 0$$

и имеет место равенство $f(0) = 0$. Следовательно, условие (4.9) также выполняется. На луче $[t_{s_\varrho}, +\infty)$ равенство $\theta(t) \equiv \ln(1/\varepsilon_{s_\varrho})$ выполняется тождественно. Следовательно, $\ln(1/\varepsilon_j) \leqslant \ln(1/\varepsilon_{s_\varrho})$, $j = 1, \ldots, p$. Отсюда

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^N} e^{-2|\xi|^2 t_j}\, d\widehat{\mu}(\xi) = \varepsilon_{s_\varrho}^2 = e^{-2\ln(1/\varepsilon_{s_\varrho})}.$$

Таким образом, мера $d\widehat{\mu}(\xi)$ допустима в задаче (4.5)-(4.6) и является ее решением. Значение этой задачи вычисляется следующим образом:

$$\int\limits_{\mathbb{R}_+^N} e^{-2|\xi|^2 \tau}\, d\widehat{\mu}(\xi) = \varepsilon_{s_\varrho}^2 = e^{-2\ln(1/\varepsilon_{s_\varrho})} = e^{-2\theta(t)}.$$

Это снова означает, что решение проблемы (4.1)-(4.2) равно $S = e^{-\theta(\tau)}$.

(c) Пусть $\tau < t_1$. Для произвольного $y_0 > 0$ существует прямая линия, заданная уравнением $y = at + b$, $a > 0$, разделяющая точку $(\tau, -y_0)$ и множество M. В то же время

$$-a\tau - y_0 \geqslant b \geqslant -at_j + \ln(1/\varepsilon_{s_j}),\ j = 1, \ldots, p.$$

Пусть $A = e^{-2b}$. Выберем $\xi_0 \in \mathbb{R}_+^N$, чтобы обеспечить $|\xi_0|^2 = a$. Тогда

$$Ae^{-2|\xi_0|^2 t_j} \leqslant \varepsilon_j^2,\ j = 1, \ldots, p.$$

Это значит, что мера $d\widehat{\mu}(\xi) = x^\gamma T_\xi^{\xi_0} \delta_\gamma(\xi)$ допустима в задаче (4.5)-(4.6) и $Ae^{-2|\xi_0|^2\tau} \geqslant e^{2y_0}$. В силу произвольности $y_0 > 0$ значение задачи (4.5)-(4.6), а вместе с ним и решение задачи (4.1)-(4.2) равно $+\infty$.

Во всех трех случаях, для всех $\tau \geqslant 0$, ошибка оптимального восстановления оценивается снизу $E(\tau, \overline{\varepsilon}) \geqslant e^{-\theta(\tau)}$.

Пусть $\tau \geqslant t_1$ и $\widehat{\lambda}_1, \ldots, \widehat{\lambda}_p$ — множители Лагранжа из случаев (a), (b) для таких значений τ.

Лемма 4.2. *Пусть для множества функций $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \ldots, y_p(\cdot)) \in (L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N))^p$ задача*

$$\sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \|P_{t_j} u_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)} \longrightarrow \min, \quad u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N), \tag{4.12}$$

имеет решение $\widehat{u}_0(\cdot) = \widehat{u}_0(\cdot, \overline{y}(\cdot))$. Тогда для любого $\sigma_1, \ldots, \sigma_p$ значение задачи

$$\|P_\tau u_0(\cdot) - P_\tau \widehat{u}_0(\cdot)\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)} \longrightarrow \max, \quad u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N), \tag{4.13}$$

$$\|P_{t_j} u_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)} \leqslant \sigma_j\ j = 1, \ldots, p, \tag{4.14}$$

не превосходит значения задачи

$$\|P_\tau u_0(\cdot)\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)} \longrightarrow \max, \quad u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N), \tag{4.15}$$

$$\sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \|P_{t_j} u_0(\cdot)\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}_+^N)} \leqslant \sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \sigma_j^2. \tag{4.16}$$

Доказательство. Равенство нулю дифференциала Фреше выпуклого гладкого целевого функционала из (4.12) в точке $\widehat{u}_0(\cdot)$, т. е. равенство

$$2\sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \int\limits_{\mathbb{R}_+^N} x^\gamma (P_{t_j} \widehat{u}_0(x) - y_j(x)) P_{t_j} u_0(x) dx = 0, \tag{4.17}$$

является необходимым и достаточным условием для достижения минимума этого функционала на функции $\widehat{u}_0(\cdot)$. Принимая во внимание это равенство, легко получить, что

$$\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\|P_{t_j}u_0(\cdot)-y_j(\cdot)\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}=\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\|P_{t_j}u_0(\cdot)-P_{t_j}\widehat{u}_0(\cdot)\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}+\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\|P_{t_j}\widehat{u}_0(\cdot)-y_j(\cdot)\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}.$$

Пусть функция $u_0(\cdot)$ действительна для задачи (4.13)-(4.14). Тогда

$$\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\|P_{t_j}\widehat{u}_0(\cdot)-y_j(\cdot)\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}=\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\|P_{t_j}u_0(\cdot)-y_j(\cdot)\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}-\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\|P_{t_j}\widehat{u}_0(\cdot)-y_j(\cdot)\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}\leqslant$$

$$\leqslant\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\|P_{t_j}u_0(\cdot)-y_j(\cdot)\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}\leqslant\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\sigma_j.$$

Это означает, что функция $u_0(\cdot)-\widehat{u}_0(\cdot)$ допустима в задаче (4.15)-(4.16). Значение функционала (4.13) на функции $u_0(\cdot)$ равно значению функционала (4.15). □

Лемма 4.3. *Значения задач* (4.1)-(4.2) *и* (4.15)-(4.16) *при* $\sigma_j=\varepsilon_j$, $j=1,\dots,p$, *совпадают.*

Доказательство. С помощью равенства Парсеваля—Планшереля перейдем от задачи (4.15)-(4.16) к задаче

$$\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}e^{-2|\xi|^2\tau}\,d\mu(\xi)\longrightarrow\max, \tag{4.18}$$

$$\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}e^{-2|\xi|^2t_j}d\mu(\xi)\leqslant\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\varepsilon_j^2, \tag{4.19}$$

где

$$d\mu(\xi)=\frac{1}{2^{2\nu}\Gamma^2(\nu+1)}\,|F_\gamma u_0(\xi)|^2\xi^{2\nu+1}\,d\xi\geqslant0.$$

Функция Лагранжа этой задачи имеет вид

$$\mathcal{L}_1(d\mu(\cdot),\nu)=\nu_0\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}e^{-2|\xi|^2\tau}\,d\mu(\xi)+\nu_1\left(\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}e^{-2|\xi|^2t_j}d\mu(\xi)-\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\varepsilon_j^2\right),$$

где множество ν множителей Лагранжа теперь имеет вид $\nu=(\nu_0,\nu_1)$. Из того, что мера $d\widehat{\mu}(\xi)$, которая является решением проблемы (4.15)-(4.16), допустима в этой задаче, следует, что она также допустима в задаче (4.18)-(4.19). Пусть $\nu_0=\widehat{\nu}_0=-1$, $\nu_1=\widehat{\nu}_1=1$. Тогда

$$\min_{d\mu(\cdot)\geqslant0}\mathcal{L}_1(d\mu(\cdot),\widehat{\nu})=\mathcal{L}_1(d\widehat{\mu}(\cdot),\widehat{\nu})=\mathcal{L}(d\widehat{\mu}(\cdot),\widehat{\lambda})=\min_{d\mu(\cdot)\geqslant0}\mathcal{L}(d\mu(\cdot),\widehat{\lambda}), \tag{4.20}$$

где $\widehat{\nu}=(\widehat{\nu}_0,\widehat{\nu}_1)$; с учетом (4.10) мы имеем

$$\widehat{\nu}_1\left(\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\int\limits_{\mathbb{R}^N_+}e^{-2|\xi|^2t_j}d\widehat{\mu}(\xi)-\sum_{j=1}^{p}\widehat{\lambda}_j\varepsilon_j^2\right)=0. \tag{4.21}$$

Это значит, что $d\widehat{\mu}(\xi)$ является решением задачи (4.18)-(4.19). Следовательно, значение этой задачи равно значению задачи (4.18)-(4.19). Отсюда следует, что возведенное в квадрат значение задачи (4.5)-(4.6) равно решению задачи (4.15)-(4.16). Следовательно, значения задач (4.5)-(4.6) и (4.15)-(4.16) совпадают. □

Сформулируем теперь и докажем основной результат.

Теорема 4.1. *Для любого* $\tau>0$ *равенство*

$$E(\tau,\overline{\varepsilon})=e^{-\theta(\tau)}$$

имеет место.

1. *Если* $0 \leqslant \tau < t_1$, *то* $\theta(\tau) = -\infty$.
2. *Если* $\tau = t_{s_j}$, $j = 1, \ldots, \varrho$ *то метод* $\widehat{m}$, *определенный формулой* $\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = y_{s_j}(\cdot)$, *является оптимальным.*
3. *Если* $\varrho \geqslant 2$, $\tau \in (t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$, *то метод* $\widehat{m}$, *определенный формулой*
$$\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = (\Psi_{s_j} * y_{s_j})_\gamma(\cdot) + (\Phi_{s_{j+1}} * y_{s_{j+1}})_\gamma(\cdot), \tag{4.22}$$
где $\Psi_{s_j}(\cdot)$, $\Phi_{s_{j+1}}(\cdot)$ — *функции, образы Фурье—Бесселя которых имеют вид*
$$F_\gamma \Psi_{s_j}(\xi) = \frac{(t_{s_{j+1}} - \tau)\varepsilon^2_{s_{j+1}} e^{-|\xi|^2(\tau - t_{s_j})}}{(t_{s_{j+1}} - \tau)\varepsilon^2_{s_{j+1}} + (\tau - t_{s_j})\varepsilon^2_{s_j} e^{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})}}, \tag{4.23}$$
$$F_\gamma \Phi_{s_{j+1}}(\xi) = \frac{(\tau - t_{s_j})\varepsilon^2_{s_j} e^{-|\xi|^2(\tau + t_{s_{j+1}} - 2t_{s_j})}}{(t_{s_{j+1}} - \tau)\varepsilon^2_{s_{j+1}} + (\tau - t_{s_j})\varepsilon^2_{s_j} e^{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}} - t_{s_j})}}, \tag{4.24}$$
является оптимальным.
4. *Если* $\tau > t_{s_\varrho}$, *то метод* $\widehat{m}$, *определенный формулой* $\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = P_{\tau - t_{s_\varrho}} y_{s_\varrho}(\cdot)$, *является оптимальным.*

Доказательство. Пусть $\tau \in [t_{s_j}, t_{s_{j+1}})$. Выше было показано, что можно было бы выбрать набор множителей Лагранжа, в котором только множители $\widehat{\lambda}_{s_j}$ и $\widehat{\lambda}_{s_{j+1}}$ не равны нулю. Следовательно, проблема (4.12) принимает вид
$$\widehat{\lambda}_{s_j} \|P_{t_{s_j}} u_0(\cdot) - y_{s_j}(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)} + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}} \|P_{t_{s_{j+1}}} u_0(\cdot) - y_{s_{j+1}}(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)} \longrightarrow \min,$$
$$u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+).$$
Пусть $\widehat{u}_0(\cdot) = \widehat{u}_0(\cdot, y(\cdot))$ — решение этой задачи. Тогда условие (4.17) выполнено. В образах Фурье—Бесселя это условие может быть записано в виде
$$\sum_{\kappa=j}^{j+1} \int\limits_{\mathbb{R}^N_+} \xi^\gamma (e^{-|\xi|^2 t_{s_\kappa}} F_\gamma \widehat{u}_0(\xi) - F_\gamma y_{s_\kappa}(\xi)) e^{-|\xi|^2 t_{s_\kappa}} F_\gamma u_0(\xi)\, d\xi = 0. \tag{4.25}$$

Пусть
$$F_\gamma \widehat{u}_0(\xi) = \frac{\widehat{\lambda}_{s_j} e^{-|\xi|^2 t_{s_j}} F_\gamma y_{s_j} + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}} e^{-|\xi|^2 t_{s_{j+1}}} F_\gamma y_{s_{j+1}}}{\widehat{\lambda}_{s_j} e^{-2|\xi|^2 t_{s_j}} + \widehat{\lambda}_{s_{j+1}} e^{-2|\xi|^2 t_{s_{j+1}}}}. \tag{4.26}$$
Тогда равенство (4.25) выполняется для всех $u_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)$. Пусть для множества $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \ldots, y_p(\cdot)) \in (L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+))^p$ функции $F_\gamma y_j(\cdot)$, $j = 1, \ldots, p$, финитны. Тогда функция (4.26) принадлежит пространству $L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)$. Тогда функция $\widehat{u}_0(\cdot) = \widehat{u}_0(\cdot, y(\cdot))$, определенная формулой (4.26), также принадлежит пространству $L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)$ и является решением задачи (4.12). Финитные функции плотны в $L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)$. Следовательно, функции с финитными образами Фурье—Бесселя являются плотными в $L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)$.

Пусть функции $\widetilde{u}_0(\cdot) \in L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)$, $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \ldots, y_p(\cdot)) \in (L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+))^p$ удовлетворяют неравенствам
$$\|P_{t_{s_j}} \widetilde{u}_0(\cdot) - y_{s_j}(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)} \leqslant \varepsilon_j,\ j = 1, \ldots, p.$$
Выберем последовательность $\overline{y}^{(k)}(\cdot) = (y_1^{(k)}(\cdot), \ldots, y_p^{(k)}(\cdot)) \in (L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+))^p$, $k \in \mathbb{N}$, для которой функции $F_\gamma y_j^{(k)}(\cdot)$, $j = 1, \ldots, p$, финитны и $\|y_j(\cdot) - y_j^{(k)}(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)} \leqslant 1/k$, $j = 1, \ldots, p$, $k \in \mathbb{N}$. Зафиксируем число $k \in \mathbb{N}$. Существует решение $\widehat{u}_0(\cdot, y^{(k)}(\cdot))$ задачи (4.12). В силу неравенств
$$\|P_{t_j} \widetilde{u}_0(\cdot) - y_j^{(k)}(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)} \leqslant \|P_{t_j} \widetilde{u}_0(\cdot) - y_j(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)} + \|y_j(\cdot) - y_j^{(k)}(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)} \leqslant \varepsilon_j + 1/k,\ j = 1, \ldots, p,$$
функция $\widetilde{u}_0(\cdot)$ допустима в задаче (4.13)-(4.14) с $\sigma_j = \sigma_j(k) = \varepsilon_j + 1/k$. Пусть
$$a(k) = \sqrt{\sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \sigma_j^2(k) \bigg/ \sum_{j=1}^p \widehat{\lambda}_j \varepsilon_j^2}.$$

В силу леммы 4.2 значение задачи (4.13)-(4.14) не превышает значения задачи (4.15)-(4.16).

Произведем замену функции $u_0(\cdot)=a(k)v_0(\cdot)$ для задачи (4.15)-(4.16). Эта задача примет вид

$$a(k)\|P_\tau v_0(\cdot)-P_\tau\widehat{u}_0(\cdot)\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}\longrightarrow\max,\quad u_0(\cdot)\in L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+),\tag{4.27}$$

$$\sum_{j=1}^p\widehat{\lambda}_j\|P_{t_j}v_0(\cdot)\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}\leqslant\sum_{j=1}^p\widehat{\lambda}_j\sigma_j^2.\tag{4.28}$$

Значение задачи (4.27)-(4.28) совпадает со значением задачи (4.1)-(4.2), умноженным на $a(k)$, и оно равно $a(k)e^{-\theta(\tau)}$. Поскольку функция $\widetilde{u}_0(\cdot)$ допустима в задаче (4.13)-(4.14), мы имеем:

$$\|P_\tau\widetilde{u}_0(\cdot)-P_\tau\widehat{u}_0(\cdot,y^{(k)}(\cdot))\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}\leqslant a(k)e^{-\theta(\tau)}.\tag{4.29}$$

Пусть $\Psi_{s_j}(\cdot)$, $\Phi_{s_{j+1}}(\cdot)$ — функции, образы Фурье—Бесселя которых имеют вид в соответствии с (4.23)–(4.24):

$$F_\gamma\Psi_{s_j}(\xi)=\frac{(t_{s_{j+1}}-\tau)\varepsilon^2_{s_{j+1}}e^{-|\xi|^2(\tau-t_{s_j})}}{(t_{s_{j+1}}-\tau)\varepsilon^2_{s_{j+1}}+(\tau-t_{s_j})\varepsilon^2_{s_j}e^{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})}},$$

$$F_\gamma\Phi_{s_{j+1}}(\xi)=\frac{(\tau-t_{s_j})\varepsilon^2_{s_j}e^{-|\xi|^2(\tau+t_{s_{j+1}}-2t_{s_j})}}{(t_{s_{j+1}}-\tau)\varepsilon^2_{s_{j+1}}+(\tau-t_{s_j})\varepsilon^2_{s_j}e^{-2|\xi|^2(t_{s_{j+1}}-t_{s_j})}}.$$

Пусть $\tau\in(t_{s_j},t_{s_{j+1}})$. Образы Фурье—Бесселя (4.23) и (4.24) функций $\Psi_{s_j}(\cdot)$ и $\Phi_{s_{j+1}}(\cdot)$ принадлежат пространству четных бесконечно дифференцируемых быстро убывающих функций. Следовательно, функции $\Psi_{s_j}(\cdot)$ и $\Phi_{s_{j+1}}(\cdot)$ принадлежат этому пространству. В рассматриваемом случае мы определяем метод восстановления с использованием обобщенной свертки в соответствии с (4.22):

$$\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot)=(\Psi_{s_j}*y_{s_j})_\gamma(\cdot)+(\Phi_{s_{j+1}}*y_{s_{j+1}})_\gamma(\cdot).$$

Тогда

$$F_\gamma\widehat{m}(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\xi)=F_\gamma\Psi_{s_j}(\xi)F_\gamma y^{(k)}_{s_j}(\xi)+F_\gamma\Phi_{s_{j+1}}(\xi)F_\gamma y^{(k)}_{s_{j+1}}(\xi)=e^{-|\xi|^2\tau}F_\gamma\widetilde{u}_0(\cdot,\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\xi).\tag{4.30}$$

Это значит, что

$$\widehat{m}(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\cdot)=P_\tau\widetilde{u}_0(\cdot,\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\cdot).\tag{4.31}$$

Если $\tau=t_{s_j}$, включая случай $\tau=t_{s_\varrho}$, то

$$F_\gamma\widehat{m}(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\xi)=F_\gamma y^{(k)}_{s_j}(\xi)=e^{-|\xi|^2\tau}F_\gamma\widetilde{u}_0(\cdot,\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\xi)=F_\gamma(P_\tau\widetilde{u}_0(\cdot,\overline{y}^{(k)}(\cdot)))(\xi),$$

так что в случае (4.31) тоже верно.

Пусть снова функции $\widetilde{u}_0(\cdot)\in L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)$, $\overline{y}(\cdot)=(y_1(\cdot),\dots,y_p(\cdot))\in(L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+))^p$ удовлетворяют неравенствам

$$\|P_{t_{s_j}}\widetilde{u}_0(\cdot)-y_{s_j}(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}\leqslant\varepsilon_j,\ j=1,\dots,p.$$

Тогда для любого $k\in\mathbb{N}$

$$\begin{aligned}&\|P_\tau\widetilde{u}_0(\cdot)-\widehat{m}\,(\overline{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}\leqslant\\ &\leqslant\|P_\tau\widetilde{u}_0(\cdot)-\widehat{m}\,(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}+\|\widehat{m}\,(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\cdot)-\widehat{m}\,(\overline{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}\leqslant\\ &\leqslant\|P_\tau\widetilde{u}_0(\cdot)-P_\tau\widetilde{u}_0(\cdot,\overline{y}^{(k)}(\cdot))\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}+\|\widehat{m}\,(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\cdot)-\widehat{m}\,(\overline{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}\leqslant\\ &\leqslant a(k)e^{-\theta(\tau)}+\|\widehat{m}\,(\overline{y}^{(k)}(\cdot)-\overline{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}.\end{aligned}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу в $k\to\infty$, мы получаем

$$\|P_\tau\widetilde{u}_0(\cdot)-\widehat{m}\,(\overline{y}(\cdot))(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}\leqslant e^{-\theta(\tau)}.$$

В этом неравенстве перейдем к верхней грани по всем $\widetilde{u}_0(\cdot)\in L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)$ и $\overline{y}(\cdot)=(y_1(\cdot),\dots,y_p(\cdot))\in(L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+))^p$, для которых $\|P_{t_{s_j}}\widetilde{u}_0(\cdot)-y_{s_j}(\cdot)\|_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)}\leqslant\varepsilon_j,\ j=1,\dots,p$. Тогда мы получим $e(\tau,\overline{\varepsilon},\widehat{m})\leqslant e^{-\theta(\tau)}$. Учитывая нижнюю оценку, доказанную ранее, мы получаем

$$e^{-\theta(\tau)}\leqslant E(\tau,\overline{\varepsilon})\leqslant e(\tau,\overline{\varepsilon},\widehat{m})\leqslant e^{-\theta(\tau)},$$

из чего следует, что $E(\tau,\overline{\varepsilon})=e^{-\theta(\tau)}$, и что $\widehat{m}$ — оптимальный метод.

Пусть $\tau > t_{s_\varrho}$. Тогда $\widehat{\lambda}_{s_\varrho} = 1$, остальные множители Лагранжа равны нулю. Задача (4.12) примет вид

$$\|P_{t_{s_\varrho}}\widetilde{u}_0(\cdot) - y_{s_\varrho}(\cdot)\|^2_{L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+)} \Longrightarrow \min .$$

Пусть для заданного множества $\overline{y}(\cdot) = (y_1(\cdot), \ldots, y_p(\cdot)) \in (L_2^\gamma(\mathbb{R}^N_+))^p$ функции $F_\gamma y_j$, $j = 1, \ldots, p$, финитны. Тогда решение $\widetilde{u}_0(\cdot) = \widetilde{u}_0(\cdot, \overline{y}(\cdot))$ этой задачи существует и $F_\gamma \widetilde{u}_0(\xi) = e^{|\xi|^2 t_{s_\varrho}} F_\gamma y_{s_\varrho}$. Неравенство (4.29) в этом случае доказывается по-прежнему. Теперь мы определяем метод $\widehat{m}$ посредством равенства

$$\widehat{m}(\overline{y}(\cdot))(\cdot) = P_{\tau - t_{s_\varrho}}. \tag{4.32}$$

Тогда

$$F_\gamma \widehat{m}(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\xi) = e^{-|\xi|^2(\tau - t_{s_\varrho})} F_\gamma y_{s_\varrho}(\xi) = e^{-|\xi|^2\tau} F_\gamma \widehat{u}_0(\cdot, \overline{y}^{(k)}(\cdot)).$$

Это означает, что

$$\widehat{m}(\overline{y}^{(k)}(\cdot))(\cdot) = P_\tau \widehat{u}_0(\cdot, \overline{y}^{(k)}(\cdot)).$$

Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям в предыдущем случае. □

5. Заключение

В настоящей работе мы перенесли на случай сингулярного уравнения теплопроводности результаты работы [12], применив методы, разработанные в статьях [1,12–15]. В работах [1,13] был модифицирован метод установления нижней оценки ошибки оптимального восстановления. Есть основания полагать, что этот метод также может быть перенесен на рассматриваемый случай сингулярного уравнения теплопроводности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамова Е. В., Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О.* Наилучшее восстановление решения задачи Дирихле для полупространства по ее неточным измерениям// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2020. — *60*, № 10. — С. 1711–1720.
2. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Обобщенные функции и действия над ними. — М.: Физматгиз, 1958.
3. *Гельфанд И. М., Шилов Г. Е.* Пространства основных и обобщенных функций. — М.: Физматгиз, 1958.
4. *Житомирский Я. И.* Задача Коши для систем линейных уравнений в частных производных с дифференциальными операторами типа Бесселя// Мат. сб. — 1955. — *36*, № 2. — С. 299–310.
5. *Катрахов В. В., Ситник С. М.* Метод операторов преобразования и краевые задачи для сингулярных эллиптических уравнений// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2018. — *64*, № 2. — С. 211–426.
6. *Киприянов И. А.* Преобразование Фурье—Бесселя и теоремы вложения для весовых классов// Тр. МИАН. — 1967. — *89*. — С. 130–213.
7. *Киприянов И. А.* Сингулярные эллиптические краевые задачи. — М.: Наука, 1997.
8. *Киприянов И. А., Засорин Ю. В.* О фундаментальном решении волнового уравнения с многими особенностями// Дифф. уравн. — 1992. — *28*, № 3. — С. 452–462.
9. *Киприянов И. А., Куликов А. А.* Теорема Пэли—Винера—Шварца для преобразования Фурье—Бесселя// Докл. АН СССР. — 1988. — *298*, № 1. — С. 13–17.
10. *Левитан Б. М.* Разложение в ряды и интегралы Фурье по функциям Бесселя// Усп. мат. наук. — 1951. — *6*, № 2. — С. 102–143.
11. *Ляхов Л. Н.* В-гиперсингулярные интегралы и их приложения к описанию функциональных классов Киприянова и к интегральным уравнениям с В-потенциальными ядрами. — Липецк: ЛГПУ, 2007.
12. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю.* Оптимальное восстановление решения уравнения теплопроводности по неточным измерениям// Мат. сб. — 2009. — *200*, № 5. — С. 37–54.
13. *Магарил-Ильяев Г. Г., Осипенко К. Ю., Сивкова Е. О.* Оптимальное восстановление температуры трубы по неточным измерениям// Тр. МИАН. — 2021. — *312*. — С. 216–223.
14. *Магарил-Ильяев Г. Г., Сивкова Е. О.* Наилучшее восстановление оператора Лапласа функции по ее неточно заданному спектру// Мат. сб. — 2012. — *203*, № 4. — С. 119–130.
15. *Сивкова Е. О.* Об оптимальном восстановлении лапласиана функции по ее неточно заданному преобразованию Фурье// Владикавказ. мат. ж. — 2012. — *14*, № 4. — С. 63–72.
16. *Ситник С. М., Шишкина Э. Л.* Метод операторов преобразования для дифференциальных уравнений с операторами Бесселя. — Москва: Физматлит, 2019.
17. *Alzamili K., Shishkina E.* On a singular heat equation and parabolic Bessel potential// J. Math. Sci. — 2024. — DOI: 10.1007/s10958-024-06911-w.

18. *Gradshteyn I. S., Ryzhik I. M.* Table of Integrals, Series, and Products. — Amsterdam, etc.: Academic Press, 2007.
19. *Matiychuk M. I.* Parabolic Singular Boundary-Value Problems [in Ukrainian]. — Kiev: Inst. Mat. NAN Ukr., 1999.
20. *Muravnik A. B.* Fourier–Bessel transformation of compactly supported non-negative functions and estimates of solutions of singular differential equations// Funct. Differ. Equ. — 2001. — *8*, № 3-4. — С. 353–363.
21. *Muravnik A. B.* Functional differential parabolic equations: integral transformations and qualitative properties of solutions of the Cauchy problem// J. Math. Sci. (N.Y.) — 2016. — *216*. — С. 345–496.
22. *Polovinkina M. V.* Recovery of the operator Δ_B from its incomplete Fourier–Bessel image// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 5. — С. 839–852.
23. *Polovinkina M. V., Polovinkin I. P.* Recovery of the solution of the singular heat equation from measurement data// Bol. Soc. Mat. Mexicana. — 2023. — *29*, № 41. — DOI: 10.1007/s40590-023-00513-3.
24. *Sitnik S. M., Fedorov V. E., Polovinkina M. V., Polovinkin I. P.* On recovery of the singular differential Laplace–Bessel operator from the Fourier–Bessel transform// Mathematics. — 2023. — *11*. — DOI: 10.3390/math11051103.

Ситник Сергей Михайлович
Белгородский государственный национальный исследовательский университет (НИУ «БелГУ»), Белгород, Россия
E-mail: `sitnik@bsu.edu.ru`

Половинкина Марина Васильевна
Воронежский государственный университет инженерных технологий, Воронеж, Россия
E-mail: `polovinkina-marina@yandex.ru`

Половинкин Игорь Петрович
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
Белгородский государственный национальный исследовательский университет (НИУ «БелГУ»), Белгород, Россия
E-mail: `polovinkin@yandex.ru`

UDC 517.444, 517.957.7, 517.951.9, 51-7
DOI: 10.22363/2413-3639-2024-70-1-173-187
EDN: XLJEFP

On recovery of the solution to the Cauchy problem for the singular heat equation

S. M. Sitnik[1], M. V. Polovinkina[2], and I. P. Polovinkin[3,1]

[1] *Belgorod State National Research University ("BelGU"), Belgorod, Russia*
[2] *Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia*
[3] *Voronezh State University, Voronezh, Russia*

Abstract. We present the results related to the solution of the problem of the best recovery of the solution to the Cauchy problem for the heat equation with the B-elliptic Laplace–Bessel operator in spatial variables from an exactly or approximately known finite set of temperature profiles.

Keywords: Laplace–Bessel operator, optimal recovery, Fourier–Bessel transform, heat equation, singular equation.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare no financial support.

For citation: S. M. Sitnik, M. V. Polovinkina, I. P. Polovinkin, "On recovery of the solution to the Cauchy problem for the singular heat equation," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2024, vol. **70**, No. 1, 173–187. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2024-70-1-173-187`

REFERENCES

1. E. V. Abramova, G. G. Magaril-Il'yaev, and E. O. Sivkova, "Nailuchshee vosstanovlenie resheniya zadachi Dirikhle dlya poluprostranstva po ee netochnym izmereniyam" [Best recovery of the solution of the Dirichlet problem in a half-space from inaccurate data], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2020, **60**, No. 10, 1711–1720 (in Russian).
2. I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, *Obobshchennye funktsii i deystviya nad nimi* [Generalized Functions and Operations on Them], Fizmatgiz, Moscow, 1958 (in Russian).
3. I. M. Gel'fand and G. E. Shilov, *Prostranstva osnovnykh i obobshchennykh funktsiy* [Spaces of Fundamental and Generalized Functions], Fizmatgiz, Moscow, 1958 (in Russian).
4. Ya. I. Zhitomirskii, "Zadacha Koshi dlya sistem lineynykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh s differentsial'nymi operatorami tipa Besselya" [The Cauchy problem for systems of linear partial differential equations with Bessel-type differential operators], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1955, **36**, No. 2, 299–310 (in Russian).
5. V. V. Katrakhov and S. M. Sitnik, "Metod operatorov preobrazovaniya i kraevye zadachi dlya singulyarnykh ellipticheskikh uravneniy" [The transmutation method and boundary-value problems for singular elliptic equations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2018, **64**, No. 2, 211–426 (in Russian).
6. I. A. Kipriyanov, "Preobrazovanie Fur'e—Besselya i teoremy vlozheniya dlya vesovykh klassov" [Fourier–Bessel transforms and embedding theorems for weight classes], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1967, **89**, 130–213 (in Russian).
7. I. A. Kipriyanov, *Singulyarnye ellipticheskie kraevye zadachi* [Singular Elliptic Boundary-Value Problems], Nauka, Moscow, 1997 (in Russian).
8. I. A. Kipriyanov and Yu. V. Zasorin, "O fundamental'nom reshenii volnovogo uravneniya s mnogimi osobennostyami" [On the fundamental solution of the wave equation with many singularities], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1992, **28**, No. 3, 452–462 (in Russian).
9. I. A. Kipriyanov and A. A. Kulikov, "Teorema Peli—Vinera—Shvartsa dlya preobrazovaniya Fur'e—Besselya" [Paley–Wiener–Schwartz theorem for the Fourier–Bessel transform], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1988, **298**, No. 1, 13–17 (in Russian).
10. B. M. Levitan, "Razlozhenie v ryady i integraly Fur'e po funktsiyam Besselya" [Expansion into Fourier series and integrals by Bessel functions], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1951, **6**, No. 2, 102–143 (in Russian).
11. L. N. Lyakhov, *V-gipersingulyarnye integraly i ikh prilozheniya k opisaniyu funktsional'nykh klassov Kipriyanova i k integral'nym uravneniyam s V-potentsial'nymi yadrami* [B-Hypersingular Integrals and Their Applications to the Description of Kipriyanov Functional Classes and to Integral Equations with B-Potential Kernels], LGPU, Lipetsk, 2007 (in Russian).
12. G. G. Magaril-Il'yaev and K. Yu. Osipenko, "Optimal'noe vosstanovlenie resheniya uravneniya teploprovodnosti po netochnym izmereniyam" [Optimal recovery of the solution of the heat equation from inaccurate data], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2009, **200**, No. 5, 37–54 (in Russian).
13. G. G. Magaril-Il'yaev, K. Yu. Osipenko, and E. O. Sivkova, "Optimal'noe vosstanovlenie temperatury truby po netochnym izmereniyam" [Optimal recovery of pipe temperature from inaccurate measurements], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2021, **312**, 216–223 (in Russian).
14. G. G. Magaril-Il'yaev and E. O. Sivkova, "Nailuchshee vosstanovlenie operatora Laplasa funktsii po ee netochno zadannomu spektru" [Best recovery of the Laplace operator of a function from incomplete spectral data], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2012, **203**, No. 4, 119–130 (in Russian).
15. E. O. Sivkova, "Ob optimal'nom vosstanovlenii laplasiana funktsii po ee netochno zadannomu preobrazovaniyu Fur'e" [On optimal recovery of the Laplacian of a function from its inaccurately given Fourier transform], *Vladikavkaz. mat. zh.* [Vladikavkaz Math. J.], 2012, **14**, No. 4, 63–72 (in Russian).
16. S. M. Sitnik and E. L. Shishkina, *Metod operatorov preobrazovaniya dlya differentsial'nykh uravneniy s operatorami Besselya* [The Transmutation Operators Method for Differential Equations with Bessel Operators], Fizmatlit, Moskva, 2019 (in Russian).

17. K. Alzamili and E. Shishkina, “On a singular heat equation and parabolic Bessel potential,” *J. Math. Sci.*, 2024, DOI: 10.1007/s10958-024-06911-w.
18. I. S. Gradshteyn and I. M. Ryzhik, *Table of Integrals, Series, and Products*, Academic Press, Amsterdam, etc., 2007.
19. M. I. Matiychuk, *Parabolic Singular Boundary-Value Problems [in Ukrainian]*, Inst. Mat. NAN Ukr., Kiev, 1999.
20. A. B. Muravnik, “Fourier–Bessel transformation of compactly supported non-negative functions and estimates of solutions of singular differential equations,” *Funct. Differ. Equ.*, 2001, **8**, No. 3-4, 353–363.
21. A. B. Muravnik, “Functional differential parabolic equations: integral transformations and qualitative properties of solutions of the Cauchy problem,” *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2016, **216**, 345–496.
22. M. V. Polovinkina, “Recovery of the operator Δ_B from its incomplete Fourier–Bessel image,” *Lobachevskii J. Math.*, 2020, **41**, No. 5, 839–852.
23. M. V. Polovinkina and I. P. Polovinkin, “Recovery of the solution of the singular heat equation from measurement data,” *Bol. Soc. Mat. Mexicana*, 2023, **29**, No. 41, DOI: 10.1007/s40590-023-00513-3.
24. S. M. Sitnik, V. E. Fedorov, M. V. Polovinkina, and I. P. Polovinkin, “On recovery of the singular differential Laplace–Bessel operator from the Fourier–Bessel transform,” *Mathematics*, 2023, **11**, DOI: 10.3390/math11051103.

Sergey Mikhailovich Sitnik
Belgorod State National Research University (“BelGU”), Belgorod, Russia
E-mail: sitnik@bsu.edu.ru

Marina Vasilyevna Polovinkina
Voronezh State University of Engineering Technologies, Voronezh, Russia
E-mail: polovinkina-marina@yandex.ru

Igor Petrovich Polovinkin
Voronezh State University, Voronezh, Russia
Belgorod State National Research University (BelGU), Belgorod, Russia
E-mail: polovinkin@yandex.ru