РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 69, № 4, 2023

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4
http://journals.rudn.ru/cmfd

Научный журнал
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)
4 выпуска в год
http://journals.rudn.ru/cmfd
Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.
Включен в каталог подписных изданий агентства «Роспечать», индекс 36832.
Индексируется в РИНЦ и международных базах данных *MathSciNet* и *Zentralblatt Math*.
Полный текст журнала размещен в базах данных компании *EBSCO Publishing* на платформе *EBSCOhost*.
Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты.

Правила оформления статей, архив публикаций в открытом доступе и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала: http://journals.rudn.ru/cmfd, http://www.mathnet.ru/cmfd.

Редактор: *Е. М. Варфоломеев*
Компьютерная верстка: *Е. М. Варфоломеев*

Адрес редакции:
115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Подписано в печать 16.10.2023. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.
Усл. печ. л. 19,53. Тираж 100 экз. Заказ 1626.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» (РУДН)
117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН
115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 952-04-41; e-mail: publishing@rudn.ru

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 69, No. 4, 2023

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4
http://journals.rudn.ru/cmfd

Founded in 2003

Founder: Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

---

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS
Published by the Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba, Moscow, Russian Federation

ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)
4 issues per year
http://journals.rudn.ru/cmfd
Indexed by *Russian Index of Science Citation*, *MathSciNet*, *Zentralblatt Math*.
The full texts can be found in the *EBSCOhost* databases by *EBSCO Publishing*.
Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Aims and Scope

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results.

Guidelines for authors, free accessible archive of issues, and other information can be found at the journal's website: http://journals.rudn.ru/cmfd, http://www.mathnet.ru/eng/cmfd.

Editor: ***E. M. Varfolomeev***
Computer design: ***E. M. Varfolomeev***
Address of the Editorial Office:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru
Print run 100 copies.
Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba (RUDN University), Moscow, Russia
6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia
Printed at RUDN Publishing House:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 952-04-41; e-mail: publishing@rudn.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 4 (2023)

СОДЕРЖАНИЕ

CONTENTS

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 4 (2023). С. 565–577
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 515.168.5, 517.96
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-565-577
EDN: ECEVOW

ОБ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ ОПЕРАТОРОВ СО СКРУЧИВАНИЯМИ

А. В. Болтачев

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. Рассматриваются нелокальные краевые задачи, в которых основной оператор и операторы граничных условий включают дифференциальные операторы и операторы скручивания. Дано определение траекторных символов для этого класса краевых задач. Показано, что эллиптические задачи определяют фредгольмовы операторы в соответствующих пространствах Соболева. Дано условие эллиптичности таких нелокальных краевых задач.

Ключевые слова: эллиптичность, оператор скручивания, фредгольмов оператор, траекторный символ, нелокальная краевая задача.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта 21-51-12006-ННИО.

Для цитирования: *А. В. Болтачев.* Об эллиптичности операторов со скручиваниями// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 4. С. 565–577. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-565-577

Введение

Во многих разделах математической физики возникают нелокальные краевые задачи, которые содержат дифференциальные операторы и операторы сдвига, отвечающие дискретной группе, действующей на многообразии диффеоморфизмами, и требуется установить условия, при которых такие краевые задачи являются эллиптическими. Рассматриваются нелокальные краевые задачи двух типов: при которых диффеоморфизмы сохраняют область (см., напр., [5, 8, 9, 13]) или не сохраняют ее (см., напр., [4, 6, 15, 16, 18, 20, 21]).

Исследование классических краевых задач включает нахождение условий эллиптичности, т. е. условий, обеспечивающих фредгольмову разрешимость задачи. Эти условия состоят в требовании обратимости символа основного оператора краевой задачи как функции на косферическом расслоении многообразия с краем и условия Шапиро—Лопатинского на крае, которое накладывается в точках косферического расслоения края на символы основного оператора задачи и оператора, определяющего краевое условие (см., напр., [14]).

В том случае, когда краевые задачи включают операторы сдвига, такие задачи становятся нелокальными и условия их эллиптичности формулируются в терминах так называемых траекторных символов, которые учитывают коэффициенты оператора не в одной точке, а на всей траектории точки под действием группы. Далее, при изучении задач с операторами сдвига надо учитывать тот факт, что в случае бесконечной группы для доказательства фредгольмовости приходится привлекать методы теории C^*-алгебр (см. [8, 9]).

В данной работе проводится исследование краевых задач с операторами сдвига, отвечающими скручиванию конечного цилиндра $\mathbb{S}^1\times[0,1]$ с координатами (x,t). Скручивание определяется формулой $(x,t)\mapsto(x+\alpha t,t)$, где $\alpha>0$ — фиксированное число, а соответствующий оператор сдвига дается формулой $(Tu)(x,t)=u(x-\alpha t,t)$. Ранее такие операторы сдвига не рассматривались специалистами в области нелокальных задач, а потому им посвящена данная работа. Скручивание не является изометрическим, а также оно не сохраняет нормальную переменную к краю, поэтому результаты работ [8,9] в данном случае неприменимы. Для исследования таких нелокальных краевых задач используются результаты, полученные в статьях [2,10,11]. Даны явные формулы для траекторных символов задачи, и на основе этих формул предоставлены условия эллиптичности нелокальной краевой задачи для дифференциального оператора со скручиваниями.

Кратко остановимся на содержании работы. В первом разделе дается постановка краевой задачи со скручиваниями конечного цилиндра. Следуя [11], во втором разделе исследуется внутренний символ дифференциального оператора со сдвигами и даются условия его эллиптичности. Оказывается, что в ряде случаев исследование внутреннего символа сводится к исследованию дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами. Дальнейшее исследование состоит в получении условий эллиптичности граничного символа дифференциального оператора со скручиваниями. Левое основание цилиндра, в отличие от правого, является неподвижным при скручивании, поэтому отдельно вычисляются граничные траекторные символы на различных основаниях цилиндра. В третьем разделе данной работы исследуется граничный символ на левом основании цилиндра и дается условие его эллиптичности как условие обратимости оператора с периодическими коэффициентами на полуоси. В четвертом разделе вычисляется граничный символ на правом основании цилиндра, который является краевой задачей на полуоси с постоянными операторными коэффициентами. На основе этих формул сформулированы основные результаты работы. В заключительном разделе приводится пример, иллюстрирующий основные результаты работы, а именно, рассмотрена краевая задача для дифференциального оператора со сдвигами и постоянными коэффициентами, для которой условия эллиптичности даются как условия однозначной разрешимости некоторого уравнения Матьё.

1. Постановка задачи

Фиксируем число $\alpha>0$, несоизмеримое с π. Рассмотрим бесконечный цилиндр $Y=\mathbb{S}^1\times\mathbb{R}$, на котором группа $\Gamma=\mathbb{Z}$ действует скручиваниями перпендикулярно образующей цилиндра $(x,t)\mapsto(x+k\alpha t,t)$, $k\in\mathbb{Z}$. Определим оператор сдвига, отвечающий скручиваниям, формулой

$$(Tu)(x,t)=u(x-\alpha t,t).$$

На конечном цилиндре $M=\mathbb{S}^1\times[0,1]\subset Y$ рассмотрим нелокальную краевую задачу

$$\mathcal{D}=\begin{pmatrix}D\\ i^*B\end{pmatrix}:H^s(M)\longrightarrow\begin{matrix}H^{s-m}(M)\\ \oplus\\ H^{s-b-1/2}(\partial M,\mathbb{C}^N).\end{matrix}\tag{1.1}$$

Определим операторы, участвующие в краевой задаче (1.1). Во-первых,

$$D=D\left(e^{ix},t,-i\frac{\partial}{\partial x},-i\frac{\partial}{\partial t},T\right)=\sum_{l\in\mathbb{Z}}D_l\left(e^{ix},t,-i\frac{\partial}{\partial x},-i\frac{\partial}{\partial t}\right)T^l,\qquad \operatorname{ord}D=m,\tag{1.2}$$

— дифференциальный оператор со сдвигами на цилиндре M, а коэффициенты D_l в нем являются дифференциальными операторами порядка $\leqslant m$ с гладкими коэффициентами. Здесь и ниже для операторов со сдвигами предполагается, что операторы $D_l\neq0$ только для конечного числа l. Во-вторых, оператор $B=(B_0,B_1)$ в задаче (1.1) представляет собой пару операторов на левом/правом основании цилиндра, причем дифференциальный оператор на левом основании

$$B_0=B_0\left(e^{ix},-i\frac{\partial}{\partial x},-i\frac{\partial}{\partial t}\right)$$

имеет порядок $\operatorname{ord} B_0 = b_0$ и определяет $N_0 \in \mathbb{N}$ граничных условий, а дифференциальный оператор со сдвигами на правом основании

$$B_1 = B_1\left(e^{ix}, -i\frac{\partial}{\partial x}, -i\frac{\partial}{\partial t}, T\right) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} B_{1,l}\left(e^{ix}, -i\frac{\partial}{\partial x}, -i\frac{\partial}{\partial t}\right)T^l$$

имеет порядок $\operatorname{ord} B_1 = b_1$ и определяет $N_1 \in \mathbb{N}$ граничных условий, в то время как $B_{1,l}$ — дифференциальные операторы. Положим $b = (b_0, b_1)$, $N = (N_0, N_1)$ и обозначим

$$H^{s-b-1/2}(\partial M, \mathbb{C}^N) = H^{s-b_0-1/2}(\partial M|_{t=0}, \mathbb{C}^{N_0}) \oplus H^{s-b_1-1/2}(\partial M|_{t=1}, \mathbb{C}^{N_1}).$$

Вложение $i : \partial M \hookrightarrow M$ индуцирует отображение сужения $i^* : H^s(M) \longrightarrow H^{s-1/2}(\partial M)$ функций на границу при $s > 1/2$.

Замечание 1.1. Левое основание цилиндра M является неподвижным относительно скручиваний. Поэтому добавление к оператору B_0 операторов сдвига не приведет к новому классу операторов.

Цель данной работы — дать условия эллиптичности задачи (1.1) в явном виде, обеспечивающие ее фредгольмову разрешимость. Общая теория была построена в работах [2, 10, 11], в которых условие эллиптичности дается в терминах внутреннего и граничного символов оператора (1.1).

2. Эллиптичность внутреннего символа

Внутренний символ. Перед тем, как вычислить внутренний символ оператора $\mathcal{D}$ по формуле (16) из работы [11], сначала вычислим дифференциал $d\gamma : TM \longrightarrow TM$ и кодифференциал $\partial\gamma = ((d\gamma)^t)^{-1} : T^*M \longrightarrow T^*M$ диффеоморфизма

$$\gamma : M \longrightarrow M, \qquad \gamma(x,t) = (x + k\alpha t,\ t),$$

где T^*M — кокасательное расслоение многообразия M. Фиксируем точку $(x, t, \xi_1, \xi_2) \in T^*_0 M$. Поскольку диффеоморфизм γ линеен, $d\gamma$ и $\partial\gamma$ действуют как операторы умножения на матрицы

$$d\gamma = \begin{pmatrix} 1 & k\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & k\alpha \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \partial\gamma = \begin{pmatrix} 1 & k\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -k\alpha & 1 \end{pmatrix}.$$

Далее по формуле из [11, § 5] вычислим вес, который равен

$$\mu_s(k) = \frac{\gamma^{*-1}(dx\wedge dt)}{dx\wedge dt}\partial\gamma^{*-1}(|\xi|^{2s}) = \frac{d(x-k\alpha t)\wedge dt}{dx\wedge dt}(\xi_1^2 + (\xi_2 + k\alpha\xi_1)^2)^s \sim \begin{cases} 1, & \text{если } \xi_1 = 0, \\ |k|^{2s}, & \text{если } \xi_1 \neq 0. \end{cases} \tag{2.1}$$

Здесь символом «$\sim$» обозначается эквивалентность весов[1].

Получаем следующее описание весового пространства $\ell^2_s(\mathbb{Z})$:

$$\ell^2_s(\mathbb{Z}) := \Big\{ w : \mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{C} \Big| \sum_k |w(k)|^2 \mu_s(k) < \infty \Big\}.$$

Тогда в соответствии с формулой (16) из работы [11] внутренний символ оператора $\mathcal{D}$ в точке $(x, t, \xi_1, \xi_2) \in T^*_0 M$ по определению равен

$$\begin{aligned} \sigma_{\rm int}(\mathcal{D})(x,t,\xi_1,\xi_2) : \ell^2_s(\mathbb{Z}) &\longrightarrow \ell^2_{s-m}(\mathbb{Z}), \\ \sigma_{\rm int}(\mathcal{D})(x,t,\xi_1,\xi_2) &= D(e^{i(x-k\alpha t)}, t, \xi_1, \xi_2 + k\alpha\xi_1, \mathcal{T}), \end{aligned} \quad \text{где } (\mathcal{T}w)(k) = w(k+1), \tag{2.2}$$

и является конечно-разностным оператором с переменными коэффициентами:

$$D(e^{i(x-k\alpha t)}, t, \xi_1, k\alpha\xi_1 + \xi_2, \mathcal{T}) = \sum_l D_l\left(e^{i(x-k\alpha t)}, t, \xi_1, \xi_2 + k\alpha\xi_1\right)\mathcal{T}^l,$$

[1] Веса $\mu(k)$ и $\mu'(k)$, $k \in \mathbb{Z}$, называются *эквивалентными*, если существуют такие положительные константы C_1, C_2, что для любых $k \in \mathbb{Z}$ выполнены неравенства

$$C_1\mu(k) \leqslant \mu'(k) \leqslant C_2\mu(k).$$

где $D_l\left(e^{ix}, t, \xi_1, \xi_2\right)$ — главные символы слагаемых в операторе (1.2).

Отметим, что в частном случае, когда $\xi_1 = 0$, в соответствии с формулой (2.1) получаем $\mu_s(k) \sim 1$, и внутренний символ оператора $\mathcal{D}$ в точке $(x, t, 0, \xi_2) \in T_0^*M$ равен

$$\sigma_{\mathrm{int}}\left(\mathcal{D}\right)(x, t, 0, \xi_2) : \ell^2(\mathbb{Z}) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}), \qquad \sigma_{\mathrm{int}}\left(\mathcal{D}\right)(x, t, 0, \xi_2) = D(e^{i(x-k\alpha t)}, t, 0, \xi_2, \mathcal{T}). \tag{2.3}$$

Эллиптичность внутреннего символа. В дальнейшем изложении будем пользоваться обратным преобразованием Фурье

$$\begin{array}{rccc} \mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}: & \ell^2_s(\mathbb{Z}) & \longrightarrow & H^s(\mathbb{S}^1), \\ & \{w(k)\} & \longmapsto & \widetilde{w}(\varphi) = \sum\limits_{k\in\mathbb{Z}} w(k)e^{ik\varphi}, \end{array} \tag{2.4}$$

которое осуществляет изоморфизм весовых пространств на $\mathbb{Z}$ и пространств Соболева на окружности $\mathbb{S}^1$ с координатой φ. Следующее утверждение дает условия эллиптичности внутреннего символа оператора $\mathcal{D}$.

Утверждение 2.1. *Следующие условия эквивалентны*:

1) *внутренний символ* $\sigma_{\mathrm{int}}\left(\mathcal{D}\right)(x, t, \xi_1, \xi_2)$ *эллиптичен при любых значениях параметров* $(x, t, \xi_1, \xi_2) \in T_0^*M$;
2) *семейство дифференциально-разностных операторов на окружности* $\mathbb{S}^1$

$$\widetilde{\sigma}_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}) = \mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D})\mathcal{F}_{\varphi\to k} = D\left(e^{ix}\widetilde{T}_{\alpha t}, t, 1, \xi_2 - i\alpha\frac{d}{d\varphi}, e^{-i\varphi}\right) : H^s(\mathbb{S}^1) \longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{S}^1), \tag{2.5}$$

где $(\widetilde{T}_{\alpha t}u)(\varphi) = u(\varphi - \alpha t)$, *обратимо при любых значениях параметров* $(x, t) \in M$, $\xi_2 \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Для доказательства эквивалентности условий 1) и 2) преобразуем внутренний символ. Положим $\xi_1 \neq 0$ и рассмотрим следующую диаграмму:

$$\begin{tikzcd} \ell^2_s(\mathbb{Z}) \arrow[r, "\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D})"] \arrow[d, "\mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}"'] & \ell^2_{s-m}(\mathbb{Z}) \arrow[d, "\mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}"] \\ H^s(\mathbb{S}^1) \arrow[r, "\widetilde{\sigma}_{\mathrm{int}}(\mathcal{D})"] & H^{s-m}(\mathbb{S}^1). \end{tikzcd} \tag{2.6}$$

Здесь $\mathcal{F}_{k\to\varphi}$ — преобразования Фурье (2.4), а в нижней строке диаграммы (2.6) участвует оператор (2.5).

Коммутативность диаграммы (2.6) доказывается прямым вычислением. Приведем таблицу для операторов в k-пространстве и их образов в φ-пространстве под действием обратного преобразования Фурье $\mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}$:

Оператор в k-пространстве/ Operator in k-space	Оператор в φ-пространстве/ Operator in φ-space
$w(k) \mapsto kw(k)$	$u(\varphi) \mapsto -i\partial_\varphi u(\varphi)$
$w(k) \mapsto e^{-ika}w(k), a \in \mathbb{R}$	$u(\varphi) \mapsto u(\varphi - a)$
$w(k) \mapsto w(k+1)$	$u(\varphi) \mapsto e^{-i\varphi}u(\varphi)$

Теперь рассмотрим случай $\xi_1 = 0$. Для оператора (2.5) на окружности рассмотрим условие эллиптичности (см. [9]). Это условие состоит в требовании обратимости разностного оператора с переменными коэффициентами

$$D\left(e^{ix}\widetilde{T}_{\alpha t}, t, 0, \xi_2, e^{-i\varphi}\right) : L^2(\mathbb{S}^1) \longrightarrow L^2(\mathbb{S}^1) \qquad \forall (x, t) \in M, \xi_2 \neq 0, \tag{2.7}$$

обратимость которого эквивалентна обратимости оператора (2.3).

Эквивалентность условий 1) и 2) следует из диаграммы (2.6) и изоморфности обратного преобразования Фурье $\mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}$.

Утверждение доказано. □

Утверждение 2.2. *Пусть операторы D_l в формуле* (1.2) *имеют постоянные по x коэффициенты* (*всюду ниже опускаем первый аргумент операторов*). *Тогда условия* 1) *и* 2) *из утверждения* 2.1 *эквивалентны условию*

3) *обратимо семейство дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами на прямой*

$$D\left(t, 1, -i\alpha\frac{d}{d\psi}, e^{-i\psi}\right) : H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{R}), \quad \forall t \in [0,1]. \tag{2.8}$$

Доказательство. Для проверки эквивалентности условий 2) и 3) в этом случае воспользуемся преобразованием Фурье—Лапласа (см., напр., [22, § 4]). Преобразование Фурье—Лапласа дается формулой

$$\mathcal{F}_\theta : H^s(\mathbb{R}_\psi) \longrightarrow L^2(\mathbb{S}^1_\theta, H^s(\mathbb{S}^1_\varphi)),$$
$$(\mathcal{F}_\theta u)(\varphi, \theta) = e^{i\theta\varphi/2\pi} \sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{in\theta} u(\varphi + 2\pi n),$$

а обратное — формулой

$$u(\psi) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} e^{-i\theta\psi/2\pi}(\mathcal{F}_\theta u)(\psi, \theta)\, d\theta.$$

В работе [3] показано, что это преобразование определяет изоморфизм указанных пространств.

Теперь положим $\xi_2 = -\alpha\theta/(2\pi)$, $\theta \in [0, 2\pi]$, и семейству операторов (2.5) сопоставим оператор

$$a(\theta) = D\left(t, 1, \alpha(-i\partial_\varphi - \theta/(2\pi)), e^{-i\varphi}\right) : L^2(\mathbb{S}^1_\theta, H^s(\mathbb{S}^1_\varphi)) \longrightarrow L^2(\mathbb{S}^1_\theta, H^{s-m}(\mathbb{S}^1_\varphi)). \tag{2.9}$$

Применим к оператору (2.9) обратное преобразование Фурье—Лапласа и составим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} H^s(\mathbb{R}_\psi) \arrow[r, "\mathcal{F}_\theta^{-1} a(\theta) \mathcal{F}_\theta"] \arrow[d, "\mathcal{F}_\theta"'] & H^{s-m}(\mathbb{R}_\psi) \arrow[d, "\mathcal{F}_\theta"] \\ L^2(\mathbb{S}^1_\theta, H^s(\mathbb{S}^1_\varphi)) \arrow[r, "a(\theta)"] & L^2(\mathbb{S}^1_\theta, H^{s-m}(\mathbb{S}^1_\varphi)). \end{tikzcd} \tag{2.10}$$

Поскольку имеет место коммутационное соотношение

$$\left(-i\partial_\varphi - \frac{\theta}{2\pi}\right)(\mathcal{F}_\theta u(\psi)) = \left(-i\partial_\varphi - \frac{\theta}{2\pi}\right)\left(e^{i\theta\varphi/2\pi}\sum_{n\in\mathbb{Z}} e^{i\theta n} u(\varphi + 2\pi n)\right) = \mathcal{F}_\theta(-i\partial_\psi u(\psi)),$$

а экспоненты $e^{-i\psi}$ являются периодическими функциями, то оператор в верхней строчке диаграммы (2.10) совпадает с оператором (2.8).

В силу коммутативности диаграммы (2.10) эллиптичность внутреннего символа $\sigma_{\mathrm{int}}(\mathcal{D})(x, t, \xi_1, \xi_2)$ эквивалентна обратимости семейства операторов (2.8). $\square$

3. Граничный символ на левом основании цилиндра

Будем рассматривать граничные символы на разных основаниях цилиндра по отдельности. Рассмотрим сначала левое основание цилиндра $\mathbb{S}^1 \times \{0\}$. Фиксируем точку $(x, \xi_1) \in T_0^*\partial M$, т. е. $\xi_1 \neq 0$. Граничный символ на левом основании — это оператор, действующий по формуле (см. [11])

$$\sigma^L_\partial(\mathcal{D})(x,\xi_1) : H^s_+ \longrightarrow \begin{array}{c} H^{s-m}_+ \\ \oplus \\ \mathbb{C}^{N_0} \end{array}, \qquad w(\xi_2) \stackrel{\sigma^L_\partial(\mathcal{D})}{\longmapsto} \begin{pmatrix} \Pi_+ D(e^{ix}, 0, \xi_1, \xi_2, T_{\alpha\xi_1}) w(\xi_2) \\ \Pi'_{\xi_2}(B_0(x, \xi_1, \xi_2) w(\xi_2)) \end{pmatrix}. \tag{3.1}$$

Здесь

- $B_0(x, \xi_1, \xi_2)$ — главный символ оператора B_0 в задаче (1.1);
- $T : H^s_+ \longrightarrow H^s_+$ — оператор сдвига, действующий по формуле $(T_{\alpha\xi_1} w)(\xi_2) = w(\xi_2 + \alpha\xi_1)$;
- пространство $H^s_+ = \mathcal{F}_{t\to\xi_2}(H^s(\overline{\mathbb{R}}_+))$ означает пространство образов при преобразовании Фурье $\mathcal{F}_{t\to\xi_2}$ пространства Соболева $H^s(\overline{\mathbb{R}}_+)$ функций на полупрямой $\overline{\mathbb{R}}_+$;

- оператор $\Pi_+ : H^s_+ \oplus H^s_- \to H^s_+$ — проектор на первое слагаемое, где пространство H^s_- аналогично определяется как $H^s_- = \mathcal{F}_{t\to\xi_2}(H^s(\overline{\mathbb{R}}_-))$;
- Π' — непрерывный функционал

$$\begin{array}{rcl} \Pi' : H^s_+ \oplus H^s_- & \longrightarrow & \mathbb{C}, \\ u(\xi_2) & \longmapsto & \lim\limits_{t\to 0+} \mathcal{F}^{-1}_{\xi_2\to t}(u(\xi_2)). \end{array}$$

Более подробно, см., напр., в работах [12, 17, 19].

Воспользовавшись обратным преобразованием Фурье $\mathcal{F}^{-1}_{\xi_2\to t}$, перейдем от задачи (3.1) к краевой задаче для оператора с периодическими коэффициентами периода $2\pi/(\alpha\xi_1)$ на полуоси

$$\widetilde{\sigma}^L_\partial(\mathcal{D})(x,\xi_1) : H^s(\overline{\mathbb{R}}_+) \longrightarrow \begin{array}{c} H^{s-m}(\overline{\mathbb{R}}_+) \\ \oplus \\ \mathbb{C}^{N_0} \end{array}, \quad \text{где} \quad \widetilde{\sigma}^L_\partial(\mathcal{D})(x,\xi_1) = \begin{pmatrix} D(e^{ix}, 0, \xi_1, -i\partial_t, e^{-i\alpha\xi_1 t}) \\ j^* B_0(e^{ix}, \xi_1, -i\partial_t) \end{pmatrix}, \quad (3.2)$$

а j^* — сужение в точку $t = 0$. Получим условия однозначной разрешимости краевой задачи (3.2).

Пусть $\mathcal{M}$ — матрица монодромии при $t = 0$ оператора с периодическими коэффициентами

$$D(e^{ix}, 0, \xi_1, -i\partial_t, e^{-i\alpha\xi_1 t}) : H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{R}). \quad (3.3)$$

Напомним, что *матрица монодромии* — это квадратная матрица $\mathcal{M} \in \mathrm{Mat}_m(\mathbb{C})$, равная

$$\mathcal{M}(v_0, \ldots, v_{m-1}) = (u(t), u'(t), \ldots, u^{(m-1)}(t))\Big|_{t=2\pi/\alpha\xi_1}.$$

Здесь $u(t)$ — решение однородного уравнения

$$D(e^{ix}, 0, \xi_1, -i\partial_t, e^{-i\alpha\xi_1 t})u(t) = 0$$

с данными Коши в начальной точке $t = 0$

$$u(0) = v_0, \ldots, u^{(m-1)}(0) = v_{m-1}.$$

Из теории дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами (см., напр., [7, гл. 2]) известно, что оператор (3.3) обратим тогда и только тогда, когда спектр его матрицы монодромии не пересекает единичную окружность.

Составим матрицу монодромии $\mathcal{M}$ оператора (3.3) и обозначим через λ_k собственные значения этой матрицы. Обозначим через $L_+(x,\xi_1)$ пространство решений уравнения (3.3), стремящихся к нулю при $t \to +\infty$. Ясно, что имеет место изоморфизм конечномерных линейных пространств

$$L_+(x,\xi_1) \simeq \bigoplus_{k:|\lambda_k|<1} V_k,$$

где через V_k обозначено корневое подпространство, соответствующее собственному значению λ_k матрицы $\mathcal{M}$.

Утверждение 3.1. *Следующие условия эквивалентны*:

1) *граничный символ* $\sigma^L_\partial(\mathcal{D})(x,\xi_1)$ *на левом основании цилиндра* (*см.* (3.1)) *эллиптичен при любых значениях параметров* $(x,\xi_1) \in T^*_0\partial M|_{t=0}$;
2) *краевая задача* (3.2) *на* $\overline{\mathbb{R}}_+$ *с периодическими коэффициентами обратима при любых значениях параметров* $(x,\xi_1) \in T^*_0\partial M|_{t=0}$;
3) (*условие Шапиро—Лопатинского на левом основании цилиндра* $\mathbb{S}^1 \times [0,1]$) *обратим оператор*

$$j^*\left(B_0(e^{ix}, \xi_1, -i\partial_t)\right) : L_+(x,\xi_1) \longrightarrow \mathbb{C}^{N_0}, \quad (3.4)$$

где N_0 — *число граничных условий в задаче* (1.1) *на левом основании цилиндра.*

Доказательство. Эквивалентность условий 1) и 2) утверждения следует из изоморфности преобразования Фурье. Докажем эквивалентность условий 2) и 3), для чего воспользуемся следующей известной леммой.

Лемма 3.1. *Пусть дан ограниченный оператор*

$$A = \begin{pmatrix} A_1 \\ A_2 \end{pmatrix} : H_1 \longrightarrow \begin{matrix} H_2 \\ \oplus \\ H_3 \end{matrix}, \tag{3.5}$$

где пространства H_1, H_2, H_3 банаховы, а оператор $A_1 : H_1 \longrightarrow H_2$ сюръективен. Тогда оператор A является изоморфизмом тогда и только тогда, когда сужение оператора $A_2|_{\ker A_1} : \ker A_1 \longrightarrow H_3$ на ядро оператора A_1 является изоморфизмом.

Вернемся к доказательству утверждения 3.1. Утверждается, что оператор

$$D(e^{ix}, 0, \xi_1, -i\partial_t, e^{-i\alpha\xi_1 t}) : H^s(\overline{\mathbb{R}}_+) \longrightarrow H^{s-m}(\overline{\mathbb{R}}_+) \tag{3.6}$$

сюръективен. В самом деле, продолжим функцию $f \in H^{s-m}(\overline{\mathbb{R}}_+)$ на всю прямую $\mathbb{R}$ с помощью оператора продолжения $\mathcal{E} : H^s(\overline{\mathbb{R}}_+) \longrightarrow H^s(\mathbb{R})$ (см., напр., [1, с. 157]). Оператор

$$D(e^{ix}, 0, \xi_1, -i\partial_t, e^{-i\alpha\xi_1 t}) : H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow H^{s-m}(\mathbb{R})$$

является изоморфизмом на всей прямой (см. (2.8)). Применив оператор сужения на полупрямую $\overline{\mathbb{R}}_+$ к функции $u = (D^{-1}\mathcal{E})f$, получим функцию в $H^s(\overline{\mathbb{R}}_+)$, что доказывает сюръективность оператора (3.6) на полупрямой.

В силу приведенной леммы изоморфность оператора (3.4) эквивалентна обратимости краевой задачи (3.2) при любых значениях параметров $(x, \xi_1) \in T_0^*\partial M|_{t=0}$. Таким образом, условия 2) и 3) эквивалентны. Утверждение доказано. □

4. Граничный символ на правом основании цилиндра

Теперь рассмотрим правое основание $\mathbb{S}^1 \times \{1\}$ цилиндра. Фиксируем точку $(x, \xi_1) \in T_0^*\partial M|_{t=1}$. Граничный символ, обозначаемый через $\sigma_\partial^R(\mathcal{D})(x, \xi_1)$, согласно формуле (20) из [11], действует в пространствах

$$\sigma_\partial^R(\mathcal{D})(x, \xi_1) : \ell^2(\mathbb{Z}, H_-^s) \longrightarrow \ell^2(\mathbb{Z}, H_-^{s-m} \oplus \mathbb{C}) \tag{4.1}$$

по формуле

$$w(k, \xi_2) \longmapsto \begin{pmatrix} D(e^{i(x-k\alpha)}, 1, \xi_1, \xi_2 + k\alpha\xi_1, \mathcal{T})w(k, \xi_2) \\ \Pi'_{\xi_2}\left(B_1(e^{i(x-k\alpha)}, \xi_1, \xi_2 + k\alpha\xi_1, \mathcal{T})w(k, \xi_2)\right) \end{pmatrix},$$

где $(\mathcal{T}w)(k, \xi_2) = w(k+1, \xi_2 + \alpha\xi_1)$, и выражения

$$D(e^{i(x-k\alpha)}, 1, \xi_1, \xi_2 + k\alpha\xi_1, \mathcal{T}) = \sum_l D_l\left(e^{i(x-k\alpha)}, 1, \xi_1, \xi_2 + k\alpha\xi_1\right)\mathcal{T}^l,$$

$$B_1(e^{i(x-k\alpha)}, \xi_1, \xi_2 + k\alpha\xi_1, \mathcal{T}) = \sum_l B_{1,l}\left(e^{i(x-k\alpha)}, \xi_1, \xi_2 + k\alpha\xi_1\right)\mathcal{T}^l$$

определяются главными символами операторов D и B_1 в задаче (1.1). Дадим явные выражения для пространств в (4.1). Имеем пространство

$$\ell^2(\mathbb{Z}, H_-^s) = \left\{\{w(k)\} \,\middle|\, w(k) \in H_-^s \text{ и } \sum_k \|w(k)\|^2_{H_-^s} k^{2s} < \infty\right\}$$

с нормой

$$\|u\|^2_{H_-^s} = \int\limits_{\mathbb{R}} |\Pi_-(i\xi_2 + |\xi_1|)^s u(\xi_2)|^2 d\xi_2$$

и пространство

$$\ell^2(\mathbb{Z}, H^s(\overline{\mathbb{R}}_-) \oplus \mathbb{C}^{N_1}) = \Big\{(w, v) = \{(w(k), v(k))\} \,\Big|\, w(k) \in H^s(\overline{\mathbb{R}}_-),\ v(k) \in \mathbb{C}^{N_1} \text{ и } \sum_k \|(w(k), v(k))\|^2_{s,k} < \infty\Big\},$$

где в соответствии с формулой (19) из [11] семейство норм $\|(w, v)\|^2_{s,k}$ в последнем пространстве равно

$$\|(w,v)\|^2_{s,k} = \|\Pi_-\partial\gamma^{*-1}\ell^s_- w\|^2_{L^2}\frac{\partial\gamma^{*-1}\operatorname{vol} M}{\operatorname{vol} M} + |v|^2(\partial\gamma^{*-1}\sigma(\Delta_{X_M})^s)\left(\frac{\partial\gamma^{*-1}\operatorname{vol}_{X_M}}{\operatorname{vol}_{X_M}}\right) =$$
$$= \|\Pi_-\partial\gamma^{*-1}\ell^s_- w\|^2_{L^2} + |v|^2(\partial\gamma^{*-1}\sigma(\Delta_{X_M})^s) = \|\Pi_-(i(\xi_2+k\alpha\xi_1)+|\xi_1|)^s w\|^2_{L^2} + |v|^2\xi_1^{2s}. \quad (4.2)$$

Здесь

- $\ell_- : T^*_0 M \longrightarrow \mathbb{C}$ — эллиптические символы первого порядка, которые в окрестности края многообразия M равны $\ell_-(x,t,\xi_1,\xi_2) = i\xi_2 + |\xi_1|$;
- второе равенство в (4.2) справедливо в силу того, что формы объема $\operatorname{vol} M = dx\wedge dt$ и $\operatorname{vol}_{X_M} = dx$ не изменяются при скручиваниях цилиндра;
- в третьем равенстве в (4.2) мы учли, что $\gamma(x,t) = (x+k\alpha t, t)$, и сделали подстановки $\partial\gamma^{*-1}\ell_- = i(\xi_2+k\alpha\xi_1)+|\xi_1|$ и $\sigma(\Delta_{X_M}) = \xi_1^2$.

Далее для простоты будем полагать $\xi_1 = 1$ и приведем следующую лемму.

Лемма 4.1. *Справедлива коммутативная диаграмма*:

$$\begin{tikzcd}
\ell^2(\mathbb{Z}, H^s_-) \arrow[r, "\sigma^R_\partial(\mathcal{D})"] \arrow[d, "\mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}\otimes\mathcal{F}^{-1}_{\xi_2\to t}"'] & \ell^2(\mathbb{Z}, H^{s-m}_- \oplus \mathbb{C}^{N_1}) \arrow[d, "\mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}\otimes\mathcal{F}^{-1}_{\xi_2\to t}"] \\
H^s_a(\mathbb{S}^1\times\overline{\mathbb{R}}_-) \arrow[r, "\widetilde{\sigma}^R_\partial(\mathcal{D})"] & H^{s-m}_a(\mathbb{S}^1\times\overline{\mathbb{R}}_-)\oplus L^2(\mathbb{S}^1,\mathbb{C}^{N_1}),
\end{tikzcd} \quad (4.3)$$

где $\mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}$ и $\mathcal{F}^{-1}_{\xi_2\to t}$ — обратные преобразования Фурье, а в нижней строчке диаграммы участвует оператор, действующий по формуле

$$\widetilde{\sigma}^R_\partial(\mathcal{D})u(\varphi,t) = \begin{pmatrix} D(e^{ix}\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha, 1, 1, -i\partial_t - i\alpha\partial_\varphi, e^{-i(\varphi-\alpha t)})u(\varphi,t) \\ B_1(e^{ix}\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha, 1, -i\partial_t - i\alpha\partial_\varphi, e^{-i(\varphi-\alpha t)})u(\varphi,0)\end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

где $\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha u(\varphi,t) = u(\varphi-\alpha,t)$. Пространства H^s_a в диаграмме (4.3) *являются анизотропными пространствами Соболева с нормой*

$$\|w\|^2_{H^s_a(\mathbb{S}^1\times\overline{\mathbb{R}}_-)} = \int\limits_{\mathbb{S}^1}\int\limits_{\overline{\mathbb{R}}_-}\left[(1-(\partial_t+\alpha\partial_\varphi)^2)^s w(\varphi,t)\right]\overline{w(\varphi,t)}dtd\varphi. \quad (4.5)$$

Знак «$\otimes$» в диаграмме (4.3) *означает, что первое преобразование действует по первой переменной, а второе — по второй переменной.*

Доказательство. Для нахождения нормы в пространстве $H^s_a(\mathbb{S}^1\times\overline{\mathbb{R}}_-)$ вычислим второе вертикальное отображение в диаграмме. Введем обозначения $\hat{w}(k,\xi_2) = \mathcal{F}_{\varphi\to k}(w(\varphi,\xi_2))$ и $\hat{v}(k) = \mathcal{F}_{\varphi\to k}(v(\varphi))$ и выразим норму в пространстве $\ell^2(\mathbb{Z}, H^s_-\oplus\mathbb{C})$ в терминах обратных преобразований Фурье:

$$\|(\hat{w},\hat{v})\|^2_{\ell^2(\mathbb{Z},H^s_-\oplus\mathbb{C})} = \sum_k\int\limits_{\mathbb{R}}\Pi_-((\xi_2+k\alpha)^2+1)^s\hat{w}(k,\xi_2)\overline{\hat{w}(k,\xi_2)}d\xi_2 + |\hat{v}(k)|^2 =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{S}^1}\int\limits_{\mathbb{R}}\Pi_-((\xi_2-i\alpha\partial_\varphi)^2+1)^s w(\varphi,\xi_2)\overline{w(\varphi,\xi_2)}d\xi_2 d\varphi + \|v\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1)} =$$
$$= \int\limits_{\mathbb{S}^1}\int\limits_{\overline{\mathbb{R}}_-}(1-(\partial_t+\alpha\partial_\varphi)^2)^s w(\varphi,t)\overline{w(\varphi,t)}dtd\varphi + \|v\|^2_{L^2(\mathbb{S}^1)}.$$

Полученное выражение является квадратом нормы в пространстве $H^s_a(\mathbb{S}^1\times\overline{\mathbb{R}}_-)\oplus L^2(\mathbb{S}^1,\mathbb{C})$. В первом интеграле мы воспользовались обратным преобразованием Фурье $\mathcal{F}^{-1}_{k\to\varphi}$, а во втором — обратным преобразованием Фурье $\mathcal{F}^{-1}_{\xi_2\to t}$. Последнее равенство справедливо в силу того, что преобразование Фурье переводит проектор Π_- в отображение сужения на $\mathbb{R}_-$. $\square$

Воспользуемся в краевой задаче (4.4) следующей заменой переменных: $(\varphi, t) = (\psi + \alpha\tau, \tau)$ с соответствующей заменой производных $\partial_\psi = \partial_\varphi, \partial_\tau = \partial_t + \alpha\partial_\varphi$. Тогда задача (4.4) примет вид

$$\overline{\sigma}_\partial^R(\mathcal{D}) : H^s(\overline{\mathbb{R}}_-, L^2(\mathbb{S}^1)) \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-m}(\overline{\mathbb{R}}_-, L^2(\mathbb{S}^1)) \\ \oplus \\ L^2(\mathbb{S}^1, \mathbb{C}^{N_1}) \end{matrix}, \tag{4.6}$$

$$\overline{\sigma}_\partial^R(\mathcal{D})u(\tau, \psi) = \begin{pmatrix} D(e^{ix}\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha, 1, 1, -i\partial_\tau, e^{-i\psi})u(\tau, \psi) \\ B_1(e^{ix}\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha, 1, -i\partial_\tau, e^{-i\psi})u(0, \psi) \end{pmatrix},$$

где $\widetilde{\mathcal{T}}_\alpha u(\tau, \psi) = u(\tau, \psi - \alpha)$.

Следующее утверждение является аналогом утверждения 3.1 для граничного символа на правом основании цилиндра.

Утверждение 4.1. *Следующие условия эквивалентны*:

1) *граничный символ* $\sigma_\partial^R(\mathcal{D})(x, \xi_1)$ *на правом основании цилиндра* (*см.* (4.1)) *эллиптичен при любых значениях параметров* $x \in \mathbb{S}^1$, $\xi_1 \in \mathbb{R}$;
2) *оператор* (4.6) *обратим при любых* $x \in \mathbb{S}^1$;

Если операторы D_l *в формуле* (1.2) *имеют постоянные по* x *коэффициенты, то условия* 1) *и* 2) *эквивалентны условию*:

3) (*условие Шапиро—Лопатинского на правом основании цилиндра* $\mathbb{S}^1 \times [0, 1]$) *обратимо семейство краевых задач для дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами на полупрямой*:
$$\begin{pmatrix} D(1, 1, -i\partial_\tau, e^{-i\psi}) \\ j^*B_1(1, -i\partial_\tau, e^{-i\psi}) \end{pmatrix} : H^s(\overline{\mathbb{R}}_-) \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-m}(\overline{\mathbb{R}}_-) \\ \oplus \\ \mathbb{C}^{N_1} \end{matrix} \tag{4.7}$$
с параметром $\psi \in [0, 2\pi]$.

Доказательство. Аналогично утверждению 3.1 условия 1) и 2) эквивалентны в силу диаграммы (4.3) и изоморфности преобразования Фурье. В случае, когда оператор $\mathcal{D}$ имеет постоянные по x коэффициенты, оператор (4.6) отвечает семейству операторов (4.7) с параметром $\psi \in [0, 2\pi]$. В силу коммутативности диаграммы (4.3) и изоморфности преобразования Фурье условия 1) и 3) эквивалентны. ☐

Из утверждений 2.1, 3.1 и 4.1 получаем условие эллиптичности задачи (1.1), которое является основным результатом данной работы.

Теорема 4.1. *Краевая задача* (1.1) *эллиптична тогда и только тогда, когда выполнены следующие три условия*:

1) *внутренний символ оператора* $\mathcal{D}$ (*см.* (2.2)) *эллиптичен*;
2) *выполнено условие Шапиро—Лопатинского на левом основании цилиндра* M (*см. утверждение* 3.1);
3) *выполнено условие Шапиро—Лопатинского на правом основании цилиндра* M (*см. утверждение* 4.1).

Пусть α несоизмеримо с π. Применяя результаты из [2, следствие 2] и [11, § 4], получаем следствие.

Следствие 4.1. *Если выполнены условия теоремы* 4.1, *то краевая задача* (1.1) *фредгольмова.*

5. Пример

На цилиндре $M = \mathbb{S}^1 \times [0, 1]$ найдем условия эллиптичности задачи

$$\begin{cases} \partial_t^2 u + (1 + \varepsilon(T + T^*))\partial_x^2 u = f(x, t), \\ \quad u|_{t=0} = g_0(x), \quad u|_{t=1} = g_1(x), \end{cases} \tag{5.1}$$

где $u \in H^s(M)$, $(Tu)(x, t) = u(x - \alpha t, t)$, $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\varepsilon \in \mathbb{R}$. Нетрудно проверить, что оператор T является унитарным, т. е., $T^* = T^{-1}$.

Выпишем условия эллиптичности задачи (5.1).

1. В силу утверждения 2.1 обратимость внутреннего символа задачи (5.1) эквивалентна обратимости оператора Матьё (см., напр., [23])

$$\alpha^{-2}\widetilde{\sigma}_{\mathrm{int}}(\mathcal{D}) = -\frac{d^2}{d\varphi^2} + \left(\frac{1}{\alpha^2} + \frac{2\varepsilon}{\alpha^2}\cos\varphi\right) : H^s(\mathbb{R}) \longrightarrow H^{s-2}(\mathbb{R}). \tag{5.2}$$

2. В силу утверждения 3.1 граничному символу $\sigma_\partial^L(\mathcal{D})(\xi_1)$ соответствует краевая задача

$$\begin{cases} -u''(t) + \left(\dfrac{1}{\alpha^2} + \dfrac{2\varepsilon}{\alpha^2}\cos t\right) u(t) = 0, \quad u \in H^s(\overline{\mathbb{R}}_+), \\ u(0) = h_1. \end{cases} \tag{5.3}$$

Дифференциальный оператор в полученной краевой задаче является оператором Матьё, аналогичным оператору (5.2). Условие эллиптичности состоит в однозначной разрешимости задачи (5.3).

3. Теперь зафиксируем $\psi \in [0, 2\pi]$. В силу утверждения 4.1 обратимость граничного символа задачи (5.1) на правом основании цилиндра эквивалентна однозначной разрешимости краевой задачи

$$\begin{cases} -\alpha^2 u''(\tau) + (1 + 2\varepsilon\cos\psi)\, u(\tau) = 0, \quad u \in H^s(\overline{\mathbb{R}}_-), \\ u(0) = h_1. \end{cases} \tag{5.4}$$

Это условие легко проверить. Уравнение

$$-\alpha^2 u''(\tau) + (1 + 2\varepsilon\cos\psi)\, u(\tau) = 0$$

имеет решение $u(\tau) = C_1 e^{-\sqrt{\lambda}\tau} + C_2 e^{\sqrt{\lambda}\tau}$, где $\lambda = \alpha^{-2}(1+2\varepsilon\cos\psi)$. Для однозначной разрешимости задачи (5.4) необходимо выполнение условия $1+2\varepsilon\cos\psi > 0$ при всех $\psi \in [0, 2\pi]$, откуда получаем условие $|\varepsilon| < 1/2$.

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 5.1. *Задача* (5.1) *эллиптична, когда выполнены следующие условия*:

1) *уравнение Матьё* (5.2) *однозначно разрешимо*;
2) *краевая задача для уравнения Матьё* (5.4) *однозначно разрешима*;
3) *выполнено условие* $|\varepsilon| < 1/2$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. — М.: МЦНМО, 2013.
2. *Балдаре А., Назайкинский В. Е., Савин А. Ю., Шроэ Э.* C^*-алгебры задач сопряжения и эллиптические краевые задачи с операторами сдвига// Мат. заметки. — 2022. — *111*, № 5. — С. 692–716.
3. *Жуйков К. Н., Савин А. Ю.* Эта-инвариант эллиптических краевых задач с параметром// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2023. — *69*, № 4. — С. 600–621.
4. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *54*. — С. 3–138.
5. *Савин А. Ю., Стернин Б. Ю.* Об индексе эллиптических операторов для группы растяжений// Мат. сб. — 2011. — *202*, № 10. — С. 99–130.
6. *Тасевич А. Л.* Гладкость обобщенных решений задачи Дирихле для сильно эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями на границе соседних подобластей// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2023. — *69*, № 1. — С. 152–165.
7. *Якубович В. А., Старжинский В. М.* Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. — М.: Наука, 1972.
8. *Antonevich A., Belousov M., Lebedev A.* Functional differential equations: II. C^*-applications. Part 2: Equations with discontinuous coefficients and boundary value problems. — Harlow: Longman, 1998.
9. *Antonevich A. B., Lebedev A. V.* Functional equations and functional operator equations. A C^*-algebraic approach// В сб.: «Proc. SPb. Math. Soc. Vol. VI». — Providence: Am. Math. Soc., 2000. — С. 25–116.
10. *Baldare A., Nazaikinskii V. E., Savin A. Yu., Schrohe E.* C^*-algebras of transmission problems and elliptic boundary value problems with shift operators// Math. Notes. — 2022. — *111*, № 5. — С. 701–721.
11. *Boltachev A. V., Savin A. Yu.* Trajectory symbols and the Fredholm property of boundary value problems for differential operators with shifts// Russ. J. Math. Phys. — 2023. — *30*. — С. 135–151.

12. *Boutet de Monvel L.* Boundary problems for pseudodifferential operators// Acta Math. — 1971. — *126*. — C. 11–51.
13. *Connes A.* Noncommutative geometry. — San Diego: Academic Press, 1994.
14. *Hörmander L.* The analysis of linear partial differential operators. III. — Berlin—Heidelberg—New York—Tokyo: Springer, 1985.
15. *Onanov G. G., Skubachevskii A. L.* Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells// Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — *12*, № 6. — C. 192–207.
16. *Onanov G. G., Tsvetkov E. L.* On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory// Russ. J. Math. Phys. — 1995. — *3*, № 4. — C. 491–500.
17. *Rempel S., Schulze B.-W.* Index theory of elliptic boundary problems. — Berlin: Akademie, 1982.
18. *Savin A. Yu., Sternin B. Yu.* Elliptic differential dilation-contraction problems on manifolds with boundary// Differ. Equ. — 2017. — *53*, № 5. — C. 665–676.
19. *Schrohe E.* A short introduction to Boutet de Monvel's calculus// В сб.: «Approaches to singular analysis». — Basel: Birkhäuser, 2001. — C. 85–116.
20. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.
21. *Skubachevskii A. L.* Boundary-value problems for elliptic functional-differential equations and their applications// Russ. Math. Surv. — 2016. — *71*, № 5. — C. 801–906.
22. *Taubes C. H.* Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds// J. Differ. Geom. — 1987. — *25*. — C. 363–430.
23. *Van der Pol B., Strutt II M. J. O.* On the stability of the solutions of Mathieu's equation// Philos. Magazine — 1928. — *5*, № 27. — C. 18–38.

А. В. Болтачев
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: `boltachevandrew@gmail.com`

UDC 515.168.5, 517.96

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-565-577

EDN: ECEVOW

On ellipticity of operators with shear mappings

A. V. Boltachev

RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. The nonlocal boundary value problems are considered, in which the main operator and the operators in the boundary conditions include the differential operators and twisting operators. The definition of the trajectory symbols for this class of problems is given. We show that the elliptic problems define the Fredholm operators in the corresponding Sobolev spaces. The ellipticity condition of such nonlocal boundary value problem is given.

Keywords: ellipticity, twisting operator, Fredholm operator, trajectory symbol, nonlocal boundary-value problem.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The study was carried out with financial support from the Russian Foundation for Basic Research within the framework of the scientific project 21-51-12006-NNIO.

For citation: A. V. Boltachev, "On ellipticity of operators with shear mappings," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 4, 565–577. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-565-577

REFERENCES

1. M. C. Agranovich, *Sobolevskie prostranstva, ikh obobshcheniya i ellipticheskie zadachi v oblastyakh s gladkoy i lipshitsevoy granitsey* [Sobolev Spaces, Their Generalizations and Elliptic Problems in Domains with Smooth and Lipschitz Boundaries], MTsNMO, Moscow, 2013 (in Russian).
2. A. Baldare, V. E. Nazaikinskii, A. Yu. Savin, and E. Schrohe, "C^*-algebry zadach sopryazheniya i ellipticheskie kraevye zadachi s operatorami sdviga" [C^*-algebras of transmission problems and elliptic boundary value problems with shift operators], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2022, **111**, No. 5, 692–716 (in Russian).
3. K. N. Zhuikov and A. Yu. Savin, "Eta-invariant ellipticheskikh kraevykh zadach s parametrom" [Eta-invariant of elliptic parameter-dependent boundary-value problems], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2023, **69**, No. 4, 600–621 (in Russian).
4. L. E. Rossovskii, "Ellipticheskie funktsional'no-differentsial'nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii" [Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, 3–138 (in Russian).
5. A. Yu. Savin and B. Yu. Sternin, "Ob indekse ellipticheskikh operatorov dlya gruppy rastyazheniy" [On the index of elliptic operators for the group of dilations], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2011, **202**, No. 10, 99–130 (in Russian).
6. A. L. Tasevich, "Gladkost' obobshchennykh resheniy zadachi Dirikhle dlya sil'no ellipticheskikh funktsional'-no-differentsial'nykh uravneniy s ortotropnymi szhatiyami na granitse sosednikh podoblastey" [Smoothness of generalized solutions to the Dirichlet problem for strongly elliptic functional differential equations with orthotropic contractions on the boundary of adjacent subdomains], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2023, **69**, No. 1, 152–165 (in Russian).
7. V. A. Yakubovich and V. M. Starzhinskiy, *Lineynye differentsial'nye uravneniya s periodicheskimi koeffitsientami i ikh prilozheniya* [Linear Differential Equations with Periodic Coefficients and Their Applications], Nauka, Moscow, 1972 (in Russian).
8. A. Antonevich, M. Belousov, and A. Lebedev, *Functional Differential Equations: II. C^*-applications. Part 2: Equations with Discontinuous Coefficients and Boundary Value Problems*, Longman, Harlow, 1998.
9. A. B. Antonevich and A. V. Lebedev, "Functional equations and functional operator equations. A C^*-algebraic approach," In: *Proc. SPb. Math. Soc. Vol. VI*, Am. Math. Soc., Providence, 2000, pp. 25–116.
10. A. Baldare, V. E. Nazaikinskii, A. Yu. Savin, and E. Schrohe, "C^*-algebras of transmission problems and elliptic boundary value problems with shift operators," *Math. Notes*, 2022, **111**, No. 5, 701–721.
11. A. V. Boltachev and Savin A. Yu., "Trajectory symbols and the Fredholm property of boundary value problems for differential operators with shifts," *Russ. J. Math. Phys.*, 2023, **30**, 135–151.
12. L. Boutet de Monvel, "Boundary problems for pseudodifferential operators," *Acta Math.*, 1971, **126**, 11–51.
13. A. Connes, *Noncommutative Geometry*, Academic Press, San Diego, 1994.
14. L. Hörmander, *The Analysis of Linear Partial Differential Operators. III*, Springer, Berlin—Heidelberg—New York—Tokyo, 1985.
15. G. G. Onanov and A. L. Skubachevskii, "Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells," *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, **12**, No. 6, 192–207.
16. G. G. Onanov and E. L. Tsvetkov, "On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory," *Russ. J. Math. Phys.*, 1995, **3**, No. 4, 491–500.
17. S. Rempel and B.-W. Schulze, *Index Theory of Elliptic Boundary Problems*, Akademie, Berlin, 1982.
18. A. Yu. Savin and B. Yu. Sternin, "Elliptic differential dilation-contraction problems on manifolds with boundary," *Differ. Equ.*, 2017, **53**, No. 5, 665–676.
19. E. Schrohe, "A short introduction to Boutet de Monvel's calculus," In: *Approaches to Singular Analysis*, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 85–116.
20. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1997.
21. A. L. Skubachevskii, "Boundary-value problems for elliptic functional-differential equations and their applications," *Russ. Math. Surv.*, 2016, **71**, No. 5, 801–906.
22. C. H. Taubes, "Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds," *J. Differ. Geom.*, 1987, **25**, 363–430.

23. B. van der Pol and M. J. O. Strutt II, “On the stability of the solutions of Mathieu’s equation,” *Philos. Magazine*, 1928, **5**, No. 27, 18–38.

A. V. Boltachev
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: boltachevandrew@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 4 (2023). С. 578–587
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.968.4
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-578-587
EDN: WVMHMR

СТАЦИОНАРНЫЕ СОСТОЯНИЯ В ДИНАМИКЕ ПОПУЛЯЦИЙ С МИГРАЦИЕЙ И РАСПРЕДЕЛЕННЫМ ПОТОМСТВОМ

А. А. Давыдов[1], **Х. А. Хачатрян**[2,1]

[1] *Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия*
[2] *Ереванский государственный университет, Ереван, Армения*

Аннотация. Для интегрального уравнения, решения которого доставляют стационарные состояния популяции, распределенной в арифметическом пространстве, найдены условия существования его решения и условия, при которых у этого уравнения не более одного решения.

Ключевые слова: динамика популяций, стационарное состояние, миграция, распределенное потомство, интегральное уравнение.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 19-11-00223).

Для цитирования: *А. А. Давыдов, Х. А. Хачатрян.* Стационарные состояния в динамике популяций с миграцией и распределенным потомством// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 4. С. 578–587. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-578-587

1. Введение

Качественный анализ динамики распределенных популяций и их стационарных состояний является одной из востребованных задач прикладного характера. Если такое состояние является глобальным аттрактором нетривиальных динамик, то анализ изменения состояния популяции в долгосрочной перспективе при наличии внешнего воздействия, например, в силу появления эксплуатации популяции или изменений в экологии среды обитания, фактически сводится к анализу изменения этого стационарного состояния и оценки скорости сходимости к нему.

Для качественного анализа динамики популяций используются различные виды уравнений, включая исторически появившееся первыми модели типа Мальтуса и Ферхюльста [24, 26], затем модели динамики структурированных или распределенных популяций двадцатого века типа Мак-Кендрика (или Мак-Кендрика—фон Ферстера) [25, 27] или Колмогорова—Пискунова—Петровского и Фишера [19, 21], а также различные модификации этих моделей. При этом поиск стационарных или периодических решений и их анализ является важной составляющих таких исследований (см., например, [2, 6, 7, 9, 11–13, 15, 17, 18, 20, 23]). Для распределенных популяций поиск таких состояний нередко приводит к поиску решений интегральных уравнений (см., например, [3–7, 9, 13, 14, 17, 20, 23]). О разрешимости одного из таких уравнений и пойдет речь в настоящей работе.

Первоначальная форма уравнения, которое мы будем рассматривать, была получена при анализе модели распределенной популяции, в которой учитывалась различные естественные параметры типа плотности троек индивидуумов, вероятность миграции индивидуумов из одного положения в другое, а также появления у них потомства на удалении от их местоположения (см. [16, 22]). Несколько позже анализ этого уравнения показал, что с его разрешимостью есть проблемы, поэтому потребовалась корректировка модели. В итоге была предложена модификация этого уравнения с дополнительным параметром, что позволило устранить возникшее препятствие к разрешимости. Для новой модели был получен ряд результатов о существовании решений и их свойствах [3–5, 14]. Однако все эти результаты относились к случаю одномерной среды — вещественного арифметического пространства. В настоящей работе предложены условия разрешимости уравнения для случая арифметического пространства любой размерности в качестве среды обитания популяции. Отметим, что изучались и другие аналоги исходной модели [6, 7, 23].

А именно, мы рассматриваем следующее интегральное уравнение на n-мерном, $n > 1$, арифметическом пространстве:

$$(1+\omega(x))P(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^n} m(x-x')P(x'dx' + cm(x), \tag{1.1}$$

где x и x' — точки этого пространства, P — искомая функция, доставляющая плотность популяции в стационарном состоянии, $c \neq 0$ — произвольный числовой параметр; неотрицательные измеримые функции w и m — характеристики популяции, при этом вторая из них — распределение вероятностей. Таким образом, имеем

$$w \geqslant 0, \quad m \geqslant 0 \quad \text{и} \quad \int\limits_{\mathbb{R}^n} m(x)dx = 1. \tag{1.2}$$

Для j от 1 до n для интегрируемой на $\mathbb{R}^n_x$, $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, функции ϕ определим

$$\Phi_j(x_j) := \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \phi(x)d\bar{x}, \tag{1.3}$$

где интегрирование по $d\bar{x}$ — это интегрирование по всем координатам, кроме x_j (ниже, если не оговорено противное, мы используем обозначения $z := x_j$, $y := \bar{x}$). Например, для функций m и $g = cm/(1+w)$ имеем

$$M_1(x_1) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} m(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_2 \ldots dx_n, \qquad G_1(x_1) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x_1, x_2, \ldots, x_n)dx_2 \ldots dx_n.$$

Отметим, что все M_j и G_j — интегрируемые на прямой функции, к тому же первые из них являются распределениями вероятностей, что нетрудно видеть.

Основной результат настоящей работы — существование измеримого неотрицательного решения уравнения (1.1) при условии, что для некоторого $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ функция G_j ограничена, а распределение M_j имеет конечный первый момент и ненулевое матожидание (в частности, это распределение несимметрично), т. е.

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |z|M_j(z)dz < +\infty, \qquad \nu(M_j) := \int\limits_{-\infty}^{\infty} zM_j(z)dz \neq 0. \tag{1.4}$$

Условие конечности первого момента заведомо выполнено, если распределение m достаточно быстро убывает при удалении от начала координат, например, экспоненциально, когда имеет место оценка

$$m(x) \leqslant Ce^{-\alpha|x|}$$

с некоторыми константами $C > 0$ и $\alpha > 0$. Это вполне естественно, например, для распределения, моделирующего миграцию, при этом предположение о несимметричности также вполне разумно, поскольку процесс миграции в большей степени стимулируется предпочтениями индивидуумов, которые обычно несимметричны по направлению перемещения.

Мы также обсуждаем единственность решения уравнения (1.1) в этом случае и в случае симметричного ядра.

2. Основные результаты

Здесь приведены формулировки основных результатов и их доказательства.

2.1. Существование решения, несимметричный случай.

Теорема 2.1. *Уравнение* (1.1) *имеет измеримое неотрицательное решение, если для некоторого* $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ *функция* G_j *ограничена, а распределение* M_j *имеет конечный первый момент и ненулевое матожидание* (*см.* (1.4)).

Доказательство. Для упрощения записи координату x_j будем обозначать через z, совокупность остальных координат через y (о чем договорились выше), а функции M_j и G_j через M и G соответственно.

Теперь наряду с уравнением (1.1) рассмотрим также следующее интегральное уравнение на прямой:

$$f(z) = G(z) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} M(z-t) f(t) dt, \tag{2.1}$$

относительно неизвестной функции f. Как отмечено выше, G является интегрируемой функцией на прямой. По условию теоремы имеем (1.4) с $M_j = M$. Следовательно, по теореме Н. Б. Енгибаряна (см. [28]) существует неотрицательное ограниченное решение уравнения (2.1), при этом в силу теоремы Карлина (см. [8]) у этого решения есть конечные пределы на бесконечности и справедливо следующее равенство:

$$\lim_{z\to+\infty} f(z) - \lim_{z\to-\infty} f(z) = \frac{1}{\nu(M)} \int\limits_{-\infty}^{\infty} G(\tau) d\tau. \tag{2.2}$$

Теперь для поиска решения уравнения (1.1) положим $P_0 := g$ и определим последующие приближения к этому решению через итерации

$$P_{k+1}(x) = g(x) + \lambda(x) \int\limits_{\mathbb{R}^n} m(x-x') P_k(x') dx', \tag{2.3}$$

где $\lambda = 1/(1+w(x)) \leqslant 1$.

Лемма 2.1. *Приближения* $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$ *доставляют последовательность неубывающих интегрируемых функций на* $\mathbb{R}^n$, *при этом при всех* k *справедлива оценка*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} P_k(x) dy \leqslant f(z), \quad z \in \mathbb{R}. \tag{2.4}$$

Из этой леммы и теоремы Б. Леви (см. [10]) получаем, что при всяком фиксированном $z \in \mathbb{R}$ последовательность измеримых функций $\{P_k\}_{k=0}^{\infty}$ почти всюду (по $y \in \mathbb{R}^{n-1}$) имеет предел при $k \to \infty$, причем предельная функция P интегрируема, удовлетворяет уравнению (1.1) и следующим неравенствам:

$$P \geqslant g \quad \text{и} \quad \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} P(x) dy \leqslant f(z). \tag{2.5}$$

В частности, учитывая ограниченность функции f, имеем

$$\sup_{z\in\mathbb{R}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} P(x) dy < +\infty. \tag{2.6}$$

Теорема 2.1 доказана по модулю леммы 2.1.

Для завершения доказательства теоремы докажем эту лемму.

При $k = 0$ оценка (2.4) имеет место в силу следующих соотношений:

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} P_0(x)dy = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x)dy = G(z) \leqslant f(z),\ z \in \mathbb{R},$$

где последнее неравенство вытекает из (2.1) в силу неотрицательности M и f. Предположим теперь, что эта оценка имеет место при некотором целом $k \geqslant 0$. Тогда из (2.3), учитывая неотрицательность функций g и m, а также ограничение $0 < \lambda \leqslant 1$, в силу теоремы Фубини (см. [10]) имеем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} P_{k+1}(x)dy \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x)dy + \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n}} m(x-x')P_k(x')dx'dy =$$

$$= G(z) + \int\limits_{\mathbb{R}^{n}} P_k(x') \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} m(x-x')dydx' = G(z) + \int\limits_{\mathbb{R}^{n}} M(z-z')P_k(x')dx' =$$

$$= G(z) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} M(z-z') \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} P_k(x')dy'dz' \leqslant G(z) + \int\limits_{-\infty}^{\infty} M(z-z')f(z')dz' = f(z).$$

для $z \in \mathbb{R}$.

Лемма 2.1 доказана. □

2.2. О неединственности решения при суммируемой ω.

Теорема 2.2. *Если в условиях теоремы* 2.1 *функция ω является суммируемой, то решение уравнения* (1.1) *неединственно, более того, существует однопараметрическое семейство решений этого уравнения.*

Доказательство. Рассмотрим на $\mathbb{R}^n$ вспомогательное интегральное уравнение

$$\psi(x) = 1 - \lambda(x) + \lambda(x) \int\limits_{\mathbb{R}^{n}} m(x-x')\psi(x')dx' \tag{2.7}$$

относительно искомой функции ψ. Очевидно, что функция $\psi \equiv 1$ является решением этого уравнения.

В силу неотрицательности ω для $\lambda = 1/(1+\omega)$ имеем $0 < 1 - \lambda \leqslant \omega$ и, следовательно,

$$1 - \lambda \in L_1(\mathbb{R}^n), \tag{2.8}$$

поскольку $\omega \in L_1(\mathbb{R}^n)$ по условию.

Для поиска других решений рассмотрим итерации

$$\begin{gathered} \psi_{k+1}(x) = 1 - \lambda(x) + \lambda(x) \int\limits_{\mathbb{R}^{n}} m(x-x')\psi_k(x)dx', \\ \psi_0(x) = 1 - \lambda(x) \end{gathered} \tag{2.9}$$

для уравнения (2.7) при $k = 0, 1, 2, \ldots$

Как и в предыдущем пункте, доказывается, что эти итерации доставляют неубывающую последовательность измеримых функций, ограниченных сверху единицей. Кроме того, при условии (1.4) с некоторым j (от 1 до n) имеет место оценка

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \psi_k(x)dy \leqslant f(z), \tag{2.10}$$

где $z = x_j$, $y = (x_1, \ldots, x_{j-1}, x_{j+1}, \ldots x_n)$, а f — решение одномерного интегрального уравнения (2.1) со свободным членом g, где

$$g(z) = \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 - \lambda(x))dy. \tag{2.11}$$

Следовательно, существует поточечный предел ψ_∞ этой последовательности, который в силу теоремы Б. Леви удовлетворяет уравнению (2.7). Имеем

$$1-\lambda(x)\leqslant\psi_\infty\leqslant 1 \tag{2.12}$$

в силу неубывания членов этой последовательности и их ограниченности сверху единицей, и

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\psi_\infty(x)dy\leqslant f(z) \tag{2.13}$$

в силу (2.10). Следовательно, ψ_∞ отлично от единицы. Понятно, что функция $S(x):=1-\psi_\infty(x)$ будет неотрицательным нетривиальным и ограниченным сверху единицей решением однородного уравнения

$$S(x)=\lambda(x)\int\limits_{\mathbb{R}^n}m(x-x')S(x')dx' \tag{2.14}$$

на прямой. Таким образом, при наложенных условиях уравнение (1.1) обладает однопараметрическим семейством решений P_τ,

$$P_\tau(x)=P_\infty(x)+\tau S(x), \tag{2.15}$$

где P_∞ — решение этого уравнения, построенное при помощи последовательных приближений (2.3), и τ — вещественный параметр. □

Замечание 2.1. Отметим, что примененный подход построения нетривиального решения однородного уравнения в одномерном случае был впервые применен в работе [1].

Замечание 2.2. Понятно, что каждое из построенных решений (2.15) является ограниченной функцией на прямой.

2.3. О единственности решения в изучаемом случае. Пусть, как и выше в доказательстве, $z=x_j$, а y — остальные координаты. Справедлива

Теорема 2.3. *Если в условиях теоремы* 2.1 *функция* μ, $\mu(z)=\sup\limits_{y\in\mathbb{R}^{n-1}}\lambda(x)$ *интегрируема и удовлетворяет неравенству*

$$Q(z):=\int\limits_{\infty}^{\infty}\mu(z+t)M_j(t)dt<1, \tag{2.16}$$

то уравнение (1.1) *в классе измеримых неотрицательных функций с ограниченным интегралом* $\int\limits_{y\in\mathbb{R}^{n-1}}P(x)dy$ *имеет не более одного решения.*

Замечание 2.3. Следует отметить, что в известных случаях (см. [3, 14]) функция ω является суммируемой на $\mathbb{R}^n$ функцией, так что последняя теорема в этих случаях не работает.

Доказательство. Допустим противное, что в этом классе у уравнения (1.1) есть два решения P и $\tilde{P}$. Для их разности из (1.1) имеем

$$0\leqslant|P(x)-\tilde{P}(x)|\leqslant\lambda(x)\int\limits_{\mathbb{R}^n}m(x-x')|P(x')-\tilde{P}(x')|dx'. \tag{2.17}$$

Отсюда, интегрируя по y (что возможно в рассматриваемом классе решений), будем иметь

$$\begin{aligned}0\leqslant\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|P(x)-\tilde{P}(x)|dy&\leqslant\mu(z)\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}\int\limits_{\mathbb{R}^n}m(x-x')|P(x')-\tilde{P}(x')|dx'dy=\\&=\mu(z)\int\limits_{-\infty}^{\infty}M_j(z-z')\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|P(x')-\tilde{P}(x')|dydz'.\end{aligned} \tag{2.18}$$

Определим функцию R, $R(z):=\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}}|P(x)-\tilde{P}(x)|dy$. В силу условия (2.16), суммируемости функции μ и теоремы Фубини из (2.18) имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty}R(z)dz\leqslant\int\limits_{-\infty}^{\infty}R(z')Q(z')dz',\qquad\text{или}\qquad\int\limits_{-\infty}^{\infty}R(x)(1-Q(x))dx\leqslant 0.$$

Но $Q(x) < 1$ по условию, а $R \geqslant 0$ по определению. Следовательно, последнее неравенство возможно лишь при $R = 0$ почти всюду на прямой. Это влечёт $P = \tilde{P}$ почти всюду на прямой, а значит, решения совпадают почти всюду на прямой.

Теорема доказана. □

3. О разрешимости в случае с симметрией

Предположим теперь, что для некоторого $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ ядро M_j и свободный член G_j:

I) являются четными, при этом $M_j \geqslant 0$, $G_j > 0$;

II) образуют D-пару, т. е. $\alpha M_j \leqslant G_j$ с некоторым числом $\alpha > 0$;

III) ядро M_j является регулярным, т. е. существует число $\nu > 0$ такое, что для k-кратных ядер $M_j^k := M_j * \ldots * M_j$ (k раз) справедливы неравенства

$$\int\limits_{-\nu k}^{\nu k} M_j^k(z)dz \geqslant \frac{1}{2}, \quad k = 1, 2, \ldots$$

При таких ограничениях на M_j и G_j в работе [3] доказано, что уравнение (2.1) имеет неотрицательное и ограниченное решение и исследованы некоторые свойства этого решения.

Справедлива

Теорема 3.1. *Пусть для некоторого* $j \in \{1, 2, 3, \dots, n\}$, *функции* M_j *и* G_j *удовлетворяют условиям* I)–III). *Тогда уравнение* (1.1) *обладает неотрицательным измеримым решением* P. *Более того, если распределение* m *ограничено и существует измеримая интегрируемая функция* B, $B(x) = B(x_j)$ *такая, что*

$$m \leqslant B, \tag{3.1}$$

то решение P *ограничено и удовлетворяет неравенствам*

$$0 \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} P(x)dy \leqslant f(z), \tag{3.2}$$

где f — *решение уравнения* (2.1) *при* $G = G_j$ *и* $M = M_j$.

Доказательство. Снова рассматривая последовательные приближения (2.3) для уравнения (1.1) и проводя рассуждения, как в доказательстве теоремы 2.1, построим решение P этого уравнения в изучаемом случае, при этом построенное решение P будет удовлетворять неравенству (3.2).

Далее, при выполнении условий $I) - III)$, ограниченности распределения m и выполнении (3.1) при некоторой интегрируемой B получаем ограниченность построенного решения. □

В конце работы для иллюстрации полученных результатов приведем наглядные примеры функций m и ω.

Сперва приведем следующие примеры ядра m:

A): $m(x) = \dfrac{1}{\pi^{n/2}} e^{-|x|^2}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $|x|^2 = x_1^2 + \cdots + x_n^2$,

B): $m(x) = \int\limits_a^b e^{-(|x_1+c_1|+\cdots+|x_n+c_n|)s} d\sigma(s)$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$,

где $\sigma(s)$ — определенная на интервале $[a, b)$, $0 < a < b \leqslant +\infty$, монотонно возрастающая функция, причем

$$2^n \int\limits_a^b \frac{1}{s^n} d\sigma(s) = 1,$$

а $c_j \in \mathbb{R}$, $j = 1, 2, \dots, n$ — числовые параметры.

Теперь приведем несколько примеров функции ω:

1): $\omega(x) = \dfrac{\varepsilon_0 e^{-|x|^2}}{1 - \varepsilon_0 e^{-|x|^2}}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, а $\varepsilon_0 \in (0, 1)$ – числовой параметр,

2): $\omega(x) = \dfrac{\varepsilon_0 e^{-(|x_1|+\cdots+|x_n|)}}{1 - \varepsilon_0 e^{-(|x_1|+\cdots+|x_n|)}}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, $\varepsilon_0 \in (0, 1)$,

3): $\omega(x) = \dfrac{1}{\delta}e^{|x|} - 1$, $\delta \in (0,1)$ — параметр, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Заметим теперь, что если $c_j \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$, то для ядра m вида B) условия теорем 1, 2 и 3 автоматически выполняются. Примеры 1) и 2) для функции ω удовлетворяют соответствующим условиям теорем 1 и 2. Следует отметить, что условиям теоремы 3 удовлетворяют примеры B) (для $c_j \neq 0$, $j = 1, 2, \dots, n$) и 3).

Рассмотрим теперь примеры A) и 1). Подробно проверим условия $I) - III)$ для этих примеров. Условие $I)$ выполняется очевидным образом. Убедимся, что ядро M_j и свободный член G_j для некоторого $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ образует D-пару. Действительно, для примеров $A)$ и 1) имеем

$$M_j(x_j) = \frac{1}{\pi^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-|x|^2} dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_n = \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-x_j^2},$$

$$G_j(x_j) = \frac{c}{\pi^{n/2}} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} e^{-|x|^2}(1 - \varepsilon_0 e^{-|x|^2}) dx_1 \dots dx_{j-1} dx_{j+1} \dots dx_n = \frac{c}{\sqrt{\pi}} e^{-x_j^2} - \frac{\varepsilon_0 c}{\sqrt{\pi}\, 2^{\frac{n-1}{2}}} e^{-2x_j^2}.$$

Очевидно, что для $\alpha := c\left(1 - \dfrac{\varepsilon_0}{2^{\frac{n-1}{2}}}\right) > 0$ неравенство $\alpha M_j(x_j) \leqslant G_j(x_j)$ выполняется при всех $j = 1, 2, \dots, n$. Следовательно, условие $II)$ выполняется. Так как ядра M_j имеют конечные моменты любого порядка для примера A), то условие регулярности $III)$ также выполняется (см. [3,14]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арабаджян Л. Г.* Об одном интегральном уравнении теории переноса в неоднородной среде// Дифф. уравн. — 1987. — *23*, № 9. — С. 1618–1622.
2. *Беляков А. О., Давыдов А. А.* Оптимизация эффективности циклического использования возобновляемого ресурса// Тр. ИММ УрО РАН. — 2016. — *22*, № 2. — С. 38–46.
3. *Давыдов А. А., Данченко В. И., Звягин М. Ю.* Существование и единственность стационарного распределения биологического сообщества// Тр. МИАН. — 2009. — *267*. — С. 46–55.
4. *Давыдов А. А., Данченко В. И., Никитин А. А.* Об интегральном уравнении для стационарных распределений биологических сообществ// В сб.: «Проблемы динамического управления». — М.: МАКС Пресс, 2010. — С. 15–29.
5. *Данченко В. И., Рубай Р. В.* Об одном интегральном уравнении стационарного распределения биологических систем// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *36*. — С. 50–60.
6. *Николаев М. В., Дикман У., Никитин А. А.* Применение специальных функциональных пространств к исследованию нелинейных интегральных уравнений, возникающих в равновесной пространственной логистической динамике// Докл. РАН. — 2021. — *499*. — С. 35–39.
7. *Николаев М. В., Никитин А. А.* О существовании и единственности решения одного нелинейного интегрального уравнения// Докл. РАН. — 2019. — *488*. — С. 595–598.
8. *Рудин У.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1975.
9. *Сергеев А. Г., Хачатрян Х. А.* О разрешимости одного класса нелинейных интегральных уравнений в задаче распространения эпидемии// Тр. Моск. мат. об-ва. — 2019. — *80*, № 1. — С. 113–131.
10. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1981.
11. *Belyakov A. O., Davydov A. A.* Efficiency optimization for the cyclic use of a renewable resource// Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.). — 2017. — *299*, suppl. 1. — С. 14–21.
12. *Belyakov A. O., Davydov A. A., Veliov V. M.* Optimal cyclic exploitation of renewable resources// J. Dyn. Control Syst. — 2015. — *21*, № 3. — С. 475–494.
13. *Davydov A. A.* Existence of optimal stationary states of exploited populations with diffusion// Proc. Steklov Inst. Math. — 2020. — *310*. — С. 124–130.
14. *Davydov A. A., Danchenko V. I., Zvyagin M. Yu.* Existence and uniqueness of a stationary distribution of a biological community// Proc. Steklov Inst. Math. — 2009. — *267*. — С. 40–49.
15. *Davydov A. A., Platov A. S.* Optimal stationary solution in forest management model by accounting intraspecies competition// Mosc. Math. J. — 2012. — *12*, № 2. — С. 269–273.
16. *Dieckmann U., Law R.* Relaxation projections and the method of moments// В сб.: «The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity». — Cambridge: Cambridge University Press, 2000. — С. 412–455.

17. *Diekmann O.* Threshold and travelling waves for the geographical spread of infection// J. Math. Biol. — 1978. — *6.* — C. 109–130.
18. *Diekmann O., Gyllenberg M., Metz J. A. J.* Steady-state analysis of structured population models// Theor. Popul. Biol. — 2003. — *63.* — C. 309–338.
19. *Fisher R. A.* The wave of advance of advantageous genes// Ann. Eugenics. — 1937. — *7*, № 4. — C. 353–369.
20. *Khachatryan Kh. A., Petrosyan H. S.* On solvability of a class of multidimensional integral equations in the mathematical theory of geographic distribution of an epidemic// J. Contemp. Math. Anal. — 2021. — *56*, № 5. — C. 143–157.
21. *Kolmogorov A. N., Petrovskii I. G., Piskunov N. S.* A study of the diffusion equation with increase in the amount of substance, and its application to a biological problem// Bull. Moscow Univ. Math. Mech. — 1937. — *1.* — C. 1–25.
22. *Law R., Dieckmann U.* Moment approximations of individual-based models// В сб.: «The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity». — Cambridge: Cambridge University Press, 2000. — C. 252–270.
23. *Nikolaev M. V., Dieckmann U., Nikitin A. A.* Application of special function spaces to the study of nonlinear integral equations arising in equilibrium spatial logistic dynamics// Dokl. Math. — 2021. — *104*, № 1. — C. 188–192.
24. *Malthus T.* An essay on the principle of population. — London: St. Paul's Church-Yard, 1798.
25. *McKendrick A. G.* Applications of mathematics to medical problems// Proc. Edinb. Math. Soc. — 1926. — *44*, № 1. — C. 98–130.
26. *Verhulst P. F.* Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement// Corr. Math. Phys. — 1838. — *10.* — C. 113–121.
27. *Von Foerster H.* Some remarks on changing populations// В сб.: «The Kinetics of Cellular Proliferation». — New York: Grune and Stratton, 1959. — C. 382–407.
28. *Yengibarian N. B.* Renewal equation on the whole line// Stoch. Process Appl. — 2000. — *85*, № 2. — C. 237–247.

А. А. Давыдов
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: davydov@mi-ras.ru

Х. А. Хачатрян
Ереванский государственный университет, Ереван, Армения
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: khachatur.khachatryan@ysu.am

UDC 517.968.4
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-578-587
EDN: WVMHMR

Stationary states in population dynamics with migration and distributed offspring

A. A. Davydov[1] and Kh. A. Khachatryan[2,1]

[1] *Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*
[2] *Yerevan State University, Yerevan, Armenia*

Abstract. For an integral equation whose solutions provide stationary states of a population distributed in an arithmetic space, we find the conditions for the existence of its solution and conditions under which this equation has no more than one solution.

Keywords: population dynamics, stationary state, migration, distributed offspring, integral equation.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The research was supported by the Russian Science Foundation (project No. 19-11-00223).

For citation: A. A. Davydov, Kh. A. Khachatryan, "Stationary states in population dynamics with migration and distributed offspring," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 4, 578–587. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-578-587

REFERENCES

1. L. G. Arabadzhyan, "Ob odnom integral'nom uravnenii teorii perenosa v neodnorodnoy srede" [On one integral equation of the theory of transport in an inhomogeneous medium], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1987, **23**, No. 9, 1618–1622 (in Russian).
2. A. O. Belyakov and A. A. Davydov, "Optimizatsiya effektivnosti tsiklicheskogo ispol'zovaniya vozobnovlyaemogo resursa" [Optimizing the efficiency of circular use of a renewable resource], *Tr. IMM UrO RAN* [Proc. Inst. Math. Mech. Ural Branch RAS], 2016, **22**, No. 2, 38–46 (in Russian).
3. A. A. Davydov, V. I. Danchenko, and M. Yu. Zvyagin, "Sushchestvovanie i edinstvennost' statsionarnogo raspredeleniya biologicheskogo soobshchestva" [Existence and uniqueness of a stationary distribution of a biological community], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2009, **267**, 46–55 (in Russian).
4. A. A. Davydov, V. I. Danchenko, and A. A. Nikitin, "Ob integral'nom uravnenii dlya statsionarnykh raspredeleniy biologicheskikh soobshchestv" [On the integral equation for stationary distributions of biological communities], In: *Problemy dinamicheskogo upravleniya* [Dynamic Control Problems], MAKS Press, Moscow, 2010, pp. 15–29 (in Russian).
5. V. I. Danchenko and R. V. Rubay, "Ob odnom integral'nom uravnenii statsionarnogo raspredeleniya biologicheskikh sistem" [On integral equations of stationary distributions for biological systems], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **36**, 50–60 (in Russian).
6. M. V. Nikolaev, U. Dieckmann, and A. A. Nikitin, "Primenenie spetsial'nykh funktsional'nykh prostranstv k issledovaniyu nelineynykh integral'nykh uravneniy, voznikayushchikh v ravnovesnoy prostranstvennoy logisticheskoy dinamike" [Application of special function spaces to the study of nonlinear integral equations arising in equilibrium spatial logistic dynamics], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2021, **499**, 35–39 (in Russian).
7. M. V. Nikolaev and A. A. Nikitin, "O sushchestvovanii i edinstvennosti resheniya odnogo nelineynogo integral'nogo uravneniya" [On the existence and uniqueness of a solution to a nonlinear integral equation], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2019, **488**, 595–598 (in Russian).
8. W. Rudin, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Mir, Moscow, 1975 (Russian translation).
9. A. G. Sergeev and Kh. A. Khachatryan, "O razreshimosti odnogo klassa nelineynykh integral'nykh uravneniy v zadache rasprostraneniya epidemii" [On the solvability of one class of nonlinear integral equations in the problem of epidemic spread], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 2019, **80**, No. 1, 113–131 (in Russian).
10. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of Function Theory and Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1981 (in Russian).
11. A. O. Belyakov and A. A. Davydov, "Efficiency optimization for the cyclic use of a renewable resource," *Proc. Steklov Inst. Math. (Suppl.)*, 2017, **299**, suppl. 1, 14–21.
12. A. O. Belyakov, A. A. Davydov, and V. M. Veliov, "Optimal cyclic exploitation of renewable resources," *J. Dyn. Control Syst.*, 2015, **21**, No. 3, 475–494.
13. A. A. Davydov, "Existence of optimal stationary states of exploited populations with diffusion," *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2020, **310**, 124–130.
14. A. A. Davydov, V. I. Danchenko, and M. Yu. Zvyagin, "Existence and uniqueness of a stationary distribution of a biological community," *Proc. Steklov Inst. Math.*, 2009, **267**, 40–49.
15. A. A. Davydov and A. S. Platov, "Optimal stationary solution in forest management model by accounting intra-species competition," *Mosc. Math. J.*, 2012, **12**, No. 2, 269–273.
16. U. Dieckmann and R. Law, "Relaxation projections and the method of moments," In: *The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000, pp. 412–455.
17. O. Diekmann, "Threshold and travelling waves for the geographical spread of infection," *J. Math. Biol.*, 1978, **6**, 109–130.

18. O. Diekmann, M. Gyllenberg, and J. A. Metz, "Steady-state analysis of structured population models," *Theor. Popul. Biol.*, 2003, **63**, 309–338.
19. R. A. Fisher, "The wave of advance of advantageous genes," *Ann. Eugenics*, 1937, **7**, No. 4, 353–369.
20. Kh. A. Khachatryan and H. S. Petrosyan, "On solvability of a class of multidimensional integral equations in the mathematical theory of geographic distribution of an epidemic," *J. Contemp. Math. Anal.*, 2021, **56**, No. 5, 143–157.
21. A. N. Kolmogorov, I. G. Petrovskii, and N. S. Piskunov, "A study of the diffusion equation with increase in the amount of substance, and its application to a biological problem," *Bull. Moscow Univ. Math. Mech.*, 1937, **1**, 1–25.
22. R. Law and U. Dieckmann, "Moment approximations of individual-based models," In: *The Geometry of Ecological Interactions: Simplifying Spatial Complexity*, Cambridge University Press, Cambridge, 2000, pp. 252–270.
23. M. V. Nikolaev, U. Dieckmann, and A. A. Nikitin, "Application of special function spaces to the study of nonlinear integral equations arising in equilibrium spatial logistic dynamics," *Dokl. Math.*, 2021, **104**, No. 1, 188–192.
24. T. Malthus, *An essay on the principle of population*, St. Paul's Church-Yard, London, 1798.
25. A. G. McKendrick, "Applications of mathematics to medical problems," *Proc. Edinb. Math. Soc.*, 1926, **44**, No. 1, 98–130.
26. P. F. Verhulst, "Notice sur la loi que la population poursuit dans son accroissement," *Corr. Math. Phys.*, 1838, **10**, 113–121.
27. H. von Foerster, "Some remarks on changing populations," In: *The Kinetics of Cellular Proliferation*, Grune and Stratton, New York, 1959, pp. 382–407.
28. N. B. Yengibarian, "Renewal equation on the whole line," *Stoch. Process Appl.*, 2000, **85**, No. 2, 237–247.

A. A. Davydov
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: davydov@mi-ras.ru

Kh. A. Khachatryan
Yerevan State University, Yerevan, Armenia
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: khachatur.khachatryan@ysu.am

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 4 (2023). С. 588–598
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.95
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-588-598
EDN: YFDPHA

ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ ПОТОКА ОБОБЩЕННОГО УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА НА ОКРУЖНОСТИ

А. Джурджевак[1], **А. Р. Ширикян**[2,3]

[1] *Freie Universität Berlin, Berlin, Germany*
[2] *CY Cergy Paris University, Cergy–Pontoise, France*
[3] *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

Аннотация. В статье рассматривается проблема устойчивости потока одномерного уравнения Бюргерса на окружности. Используя некоторые идеи из теории сохраняющих положительность полугрупп, мы устанавливаем строгое сжатие в норме L^1. Как следствие, доказано, что уравнение с ограниченной внешней силой имеет единственное ограниченное решение на $\mathbb{R}$, которое экспоненциально устойчиво в норме H^1 при $t \to +\infty$. В случае случайной внешней силы показано, что разность между двумя траекториями стремится к нулю с вероятностью 1.

Ключевые слова: уравнение Бюргерса, экспоненциальная устойчивость, ограниченная траектория.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследования первого автора были частично поддержаны Немецким фондом научных исследований (DFG) в рамках гранта CRC 1114 *Scaling Cascades in Complex Systems*, проекта № 235221301, проект C10 — Numerical analysis for nonlinear SPDE models of particle systems. Исследования второго автора были поддержаны *CY Initiative* через грант *Investissements d'Avenir* ANR-16-IDEX-0008 и Министерством науки и высшего образования Российской Федерации (Мегагрант, соглашение № 075-15-2022-1115).

Для цитирования: *А. Джурджевак, А. Р. Ширикян.* Экспоненциальная устойчивость потока обобщенного уравнения Бюргерса на окружности// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 4. С. 588–598. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-588-598

1. Введение

Рассмотрим обобщенное уравнение Бюргерса с вязкостью

$$\partial_t u - \nu \partial_x^2 u + \partial_x f(u) = h(t, x), \quad x \in \mathbb{S}. \tag{1.1}$$

Здесь $\mathbb{S} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ — окружность единичной длины, так что все функции предполагаются периодическими по x с периодом 1, $\nu > 0$ — фиксированный параметр, h — внешняя сила, а $f \in C^2(\mathbb{R})$ — заданная функция (называемая *потоком*), вторая производная которой удовлетворяет неравенству[1]

$$f''(u) \geqslant \sigma \quad \text{для всех } u \in \mathbb{R}, \tag{1.2}$$

[1]Неравенство (1.2) для потока не требуется, если внешняя сила является ограниченной функцией времени. В частности, теоремы 3.1 и 4.1 справедливы для любого потока f класса C^2.

где $\sigma > 0$ — некоторое число. Функция h предполагается локально ограниченной в области $\mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}$, что обеспечивает корректность задачи Коши для уравнения (1.1). А именно, для любого начального условия u_0 из класса Соболева $H^1(\mathbb{S})$ уравнение (1.1) имеет единственное решение $u(t,x)$ в подходящем функциональном пространстве, такое, что

$$u(0,x) = u_0(x) \tag{1.3}$$

(точную формулировку результата см. в разделе 2.1). Для простоты изложения мы будем предполагать во введении, что все функции, определенные на окружности $\mathbb{S}$, имеют *нулевое среднее значение*.

Простым следствием принципа максимума является невозрастание L^1-нормы разности двух решений уравнения (1.1). Сопоставляя это со сглаживающим свойством разрешающего оператора, легко показать, что поток, порожденный задачей (1.1), (1.3), является H^1-устойчивым в следующем смысле: если последовательность начальных условий (u_0^n) сходится к u_0 в H^1, то соответствующие решения (u^n) и u таковы, что

$$\sup_{t\geqslant 0} \|u^n(t) - u(t)\|_{H^1} \to 0 \quad \text{при } n \to \infty.$$

Цель настоящей статьи — доказать, что поток на самом деле асимптотически экспоненциально устойчив при $t \to \infty$. В частности, мы покажем, что имеют место следующие два свойства (подробности даны в разделе 4):

Глобальный аттрактор: *Если h — ограниченная функция от $t \in \mathbb{R}$ со значениями в H^1, то существует единственное H^1-ограниченное решение уравнения* (1.1)*, определенное на вещественной прямой, и любое другое решение экспоненциально сходится к нему в H^1 при $t \to +\infty$.*

Стохастическое уравнение: *Если h — случайный процесс с непрерывными траекториями со значениями в H^2* (*не обязательно ограниченный по времени, но удовлетворяющий некоторому условию роста*)*, то L^1-норма разности двух решений уравнения* (1.1) *сходится к нулю с вероятностью* 1 *при $t \to +\infty$.*

Доказательство обоих результатов основано на сжимающем свойстве потока, установленном в разделе 3. Последнее использует одну идею из теории положительных операторов, примененную в работе [20] для случая граничного условия Дирихле.

Отметим, что различные результаты об устойчивости потока уравнения Бюргерса были получены ранее как в детерминистской, так и в стохастической постановках, при периодических граничных условиях и условии Дирихле, а также для всего пространства. Один из первых математически строгих результатов был получен Синаем [21]. Он исследовал случаи, когда h — периодическая по времени детерминистская функция или гладкий по пространственным переменным белый шум, и доказал сходимость с вероятностью 1 траекторий со случайными начальными данными к предельному периодическому решению или мере, причем оба эти объекта не зависят от начального условия. Кифер [19] получил аналогичный результат для уравнения Бюргерса в $\mathbb{R}^d$ при условии, что и решение, и внешняя сила являются потенциальными полями. Хилл и Сули [15] исследовали вязкие скалярные законы сохранения в ограниченной области $\mathbb{R}^d$ с не зависящей от времени внешней силой и доказали существование, единственность и экспоненциальную устойчивость стационарного решения. Жослин, Крейс и Мозер [17] исследовали уравнение Бюргерса на $\mathbb{S}$ с периодической по времени внешней силой и доказали существование и асимптотическую устойчивость периодического по времени решения. Боричев [9] исследовал обобщенное уравнение Бюргерса на $\mathbb{S}$ и в предположении, что h — гладкий по пространству белый шум, доказал, что существует единственная стационарная мера и что любое другое решение сходится к ней со скоростью, не зависящей от вязкости $\nu > 0$. Чанг и Квон [10] рассмотрели уравнение Бюргерса на $\mathbb{R}$ с квадратичным потоком и неотрицательной внешней силой h, не зависящей от времени, и доказали существование и единственность неотрицательного стационарного решения и полиномиальную сходимость к нему. Калита и Згличинский [18] исследовали это же уравнение с периодическим граничным условием и условием Дирихле и доказали сходимость к предельной траектории. Они также установили экспоненциальную скорость сходимости в случае граничного условия Дирихле. Бахтин и Ли [8], а также Данлап, Грэхем и Рыжик [11] построили пространственно-временные стационарные решения стохастического уравнения Бюргерса на $\mathbb{R}$ и доказали их устойчивость при $t \to +\infty$. Наконец, в недавней статье [12] доказана экспоненциальная синхронизация скалярного вязкого закона сохранения в ограниченной области с граничным условием Дирихле как в детерминистской, так и в стохастической постановках.

В настоящей статье устанавливается экспоненциальная скорость сходимости в периодической постановке и упрощаются некоторые доказательства, полученные ранее. Отметим также, что результаты данной статьи могут быть распространены на вязкие скалярные законы сохранения в более высокой размерности. Однако поскольку соответствующие доказательства не содержат каких-либо новых идей и могут быть проведены с использованием методов, изложенных в статьях[1] [12, 13], мы не обсуждаем их в данной работе.

Статья организована следующим образом. В разделе 2 собраны различные результаты о задаче Коши для уравнения (1.1) и о линейных параболических уравнениях. В разделе 3 сформулирована и доказана основная теорема данной работы о строгом сжатии в L^1-норме для потока уравнения Бюргерса. Наконец, в разделе 4 мы приводим точную формулировку двух упомянутых выше утверждений и приводим их доказательства.

Обозначения и соглашения. Мы будем обозначать через $\mathbb{S} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ окружность единичной длины и отождествлять любую функцию на $\mathbb{S}$ с 1-периодической функцией на прямой $\mathbb{R}$. Лебеговские и соболевские пространства в области D обозначаются, соответственно, $L^p(D)$ и $H^s(D)$, и мы будем писать $|\cdot|_p$ и $\|\cdot\|_s$ для соответствующих норм и $(\cdot,\cdot)$ для скалярного произведения в L^2. В случае, когда $D = \mathbb{S}$, мы часто будем опускать $\mathbb{S}$ и писать просто L^p и H^s. Для заданной функции $g \in L^1(\mathbb{S})$ положим

$$\langle g\rangle = \int_{\mathbb{S}} g(x)\mathrm{d}x.$$

Если $J \subset \mathbb{R}$ — интервал (не обязательно ограниченный), а X — сепарабельное банахово пространство, то через $C_b(J,X)$ обозначается пространство ограниченных непрерывных функций $f : J \to X$ с естественной нормой, а через $L^2_{\mathrm{loc}}(J,X)$ — пространство измеримых по Борелю функций $f : J \to X$, таких, что для любого ограниченного интервала $I \subset J$

$$\|f\|^2_{L^2(I,X)} := \int_I \|f(t)\|^2_X \mathrm{d}t < \infty.$$

Пусть $\mathcal{X}(J)$ — пространство таких функций $f \in L^2_{\mathrm{loc}}(J,H^2)$, для которых $\partial_t f \in L^2_{\mathrm{loc}}(J,L^2)$. В случае, когда интервал J ограничен, $\mathcal{X}(J)$ является гильбертовым пространством с нормой $\|\cdot\|_{\mathcal{X}}$, определенной равенством

$$\|f\|^2_{\mathcal{X}} = \int_J \big(\|f(t)\|^2_2 + |\partial_t f(t)|^2_2\big)\,\mathrm{d}t.$$

Если $J = J_T := [0,T]$, то мы будем писать $\mathcal{X}_T$ вместо $\mathcal{X}(J_T)$, а если $J = \mathbb{R}_+$, то просто $\mathcal{X}$. Наконец, для банахова пространства X через $B_X(R)$ будем обозначать закрытый шар в X радиуса R с центром в нуле.

2. Предварительные сведения

2.1. Задача Коши. Зафиксируем константы $\nu > 0$, $T > 0$ и рассмотрим уравнение (1.1) в области $Q_T := J_T \times \mathbb{S}$. Следующий результат хорошо известен и устанавливается стандартными методами, основанными на априорных оценках и принципе неподвижной точки; см. [6, 14].

Теорема 2.1. *Пусть $f \in C^2(\mathbb{R})$ — произвольная функция, $u_0 \in H^1(\mathbb{S})$, а $h \in L^\infty(Q_T)$. Тогда задача* (1.1), (1.3) *имеет, и притом единственное, решение $u \in \mathcal{X}_T$, и найдется такая константа $K_T > 0$, зависящая*[2] *от ν, f, $|u_0|_{L^\infty}$, $|h|_{L^\infty(Q_T)}$, что*

$$|u|_{L^\infty(Q_T)} \leqslant |u_0|_{L^\infty(\mathbb{S})} + T\,|h|_{L^\infty(Q_T)}, \tag{2.1}$$

$$\|u\|_{\mathcal{X}_T} \leqslant K_T\big(\|u_0\|_1 + |h|_{L^2(Q_T)}\big). \tag{2.2}$$

[1] Препринт [13] был отозван из публикации, так как основной его результат покрывается работами [12, 15].

[2] Заметим, что никаких условий на среднее значение по x функции h не налагается, так что норма решений действительно может расти со временем T.

Доказательство. Для удобства читателя кратко изложим вывод априорных оценок. Чтобы установить неравенство (2.1), заметим, что функцию $u(t,x)$ можно рассматривать как решение линейного уравнения

$$\partial_t u - \nu\partial_x^2 u + b(t,x)\partial_x u = h(t,x),$$

где $b(t,x) = f'(u(t,x))$. Применяя принцип максимума к этому уравнению (см. [5, раздел 3.1]), получим (2.1). Для доказательства (2.2) возьмем сначала скалярное произведение в L^2 уравнения (1.1) с функцией $2u$. Используя периодичность и неравенство Коши—Шварца, получим

$$\partial_t|u|_2^2 + 2\nu\,|\partial_x u|_2^2 = 2(h,u) \leqslant |h|_2^2 + |u|_2^2. \tag{2.3}$$

Согласно неравенству Гронуола, отсюда следует, что

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(|u(t)|_2^2 + 2\nu\int_0^t |\partial_x u(s)|_2^2 \mathrm{d}s\right) \leqslant C(T)\big(|u_0|_2^2 + |h|_{L^2(Q_T)}^2\big),$$

где $C(T) > 0$ зависит только от T. Для получения оценок на соболевские нормы высокого порядка умножим уравнение (1.1) скалярно в L^2 на функцию $-2\partial_x^2 u$. После несложных преобразований получим

$$\partial_t|\partial_x u|_2^2 + 2\nu\,|\partial_x^2 u|_2^2 \leqslant 2|h|_2|\partial_x u|_2 + K_1(T)|\partial_x u|_2|\partial_x^2 u|_2.$$

Здесь и далее через $K_i(T)$ обозначаются числа, которые могут быть выражены в терминах величины $|f'(u)|_{L^\infty(Q_T)}$ (которая конечна ввиду неравенства (2.1)). Применяя неравенство Коши, получаем

$$\partial_t|\partial_x u|_2^2 + \nu\,|\partial_x^2 u|_2^2 \leqslant K_2(T)|\partial_x u|_2^2 + \nu^{-1}|h|_2^2.$$

Используя снова неравенство Гронуола, приходим к соотношению

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\left(|\partial_x u(t)|_2^2 + \nu\int_0^t |\partial_x^2 u(s)|_2^2 \mathrm{d}s\right) \leqslant K_3(T)\big(\|u_0\|_1^2 + |h|_{L^2(Q_T)}^2\big). \tag{2.4}$$

Наконец, решая уравнение (1.1) относительно $\partial_t u$ и беря L^2 норму в области Q_T, получаем

$$|\partial_t u|_2 \leqslant |h|_2 + K_4(T)\,|\partial_x u|_2 + \nu\,|\partial_x^2 u|_2.$$

Из неравенства (2.4) следует, что $|\partial_t u|_2$ также можно оценить через правую часть (2.2). Это завершает доказательство теоремы. □

2.2. Оценки диссипативности. В этом разделе мы будем предполагать, что $h : \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S} \to \mathbb{R}$ — локально интегрируемая функция, такая, что

$$\langle h(t,\cdot)\rangle = 0 \tag{2.5}$$

для почти всех $t \in \mathbb{R}$. Положим $Q = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}$. Наш первый результат касается диссипативности динамики для уравнения (1.1).

Теорема 2.2. *В дополнение к приведенным выше условиям предположим, что $h \in L^\infty(Q)$. Тогда для любого $c \in \mathbb{R}$ найдется такая константа $C > 0$, зависящая также от ν, f и $|h|_{L^\infty(Q)}$, что для любого начального условия $u_0 \in H^1(\mathbb{S})$, удовлетворяющего соотношению $\langle u_0\rangle = c$, для решения $u \in \mathcal{X}$ задачи* (1.1), (1.3) *при $t \geqslant C\ln(|u_0|_2 + 2)$ выполнено неравенство*

$$\|u(t)\|_1^2 + \int_t^{t+1}\big(\|u(s)\|_2^2 + |\partial_s u(s)|_2^2\big)\mathrm{d}s \leqslant C. \tag{2.6}$$

Доказательство. Заметим, что интегрируя уравнение (1.1) по $t \in J_T$ и $x \in \mathbb{S}$, получим $\langle u(T)\rangle = \langle u_0\rangle = c$ для любого $T \geqslant 0$. Подставляя $u = c + v$ в (1.1), для v получим уравнение такого же вида, как и для u, в котором функция f заменена на ее сдвиг. Поэтому с самого начала мы можем предполагать, что $\langle u_0\rangle = 0$ и рассматривать решения с нулевым средним значением. Более того, так как пространство $\mathcal{X}_1$ непрерывно вложено в $C(J_1, H^1)$ (см. [7, гл. I, теорема 3.1]), достаточно оценить интеграл в левой части неравенства (2.6).

Для этого заметим, что скалярное произведение в (2.3) не превосходит $\nu|\partial_x u|_2^2 + C_1\nu^{-1}|h|_2^2$, где через C_i обозначаются несущественные константы, которые не зависят от решения. Сопоставляя это наблюдение с неравенством (2.3), получим

$$\partial_t|u|_2^2 + \nu\,|\partial_x u|_2^2 \leqslant C_1\nu^{-1}|h|_2^2. \tag{2.7}$$

Вспомнив, что u имеет нулевое среднее значение по x, применяя неравенство Пуанкаре к $|\partial_x u|_2^2$ и используя неравенство Гронуола, приходим к соотношению

$$|u(t)|_2^2 \leqslant e^{-\gamma t}|u_0|_2^2 + C_2\sup_{s\geqslant 0}|h(s)|_2^2.$$

Сопоставляя это с (2.7), мы видим, что

$$\int\limits_t^{t+1} |\partial_x u(s)|_2^2\,\mathrm{d}s \leqslant C_3\Big(e^{-\gamma t}|u_0|_2^2 + \sup_{s\geqslant 0}|h(s)|_2^2\Big).$$

В частности, существует такая константа $C_4 > 0$, что

$$\int\limits_t^{t+1} |\partial_x u(s)|_2^2\,\mathrm{d}s \leqslant C_4 \quad \text{при } t \geqslant T := C_4\ln(|u_0|_2 + 2).$$

Так как u — непрерывная функция от времени со значениями в H^1, для любого $t \geqslant T+1$ найдется такое $t_0 \in [t-1, t]$, что $\|u(t_0)\|_1 \leqslant C_5$. Применяя неравенство (2.2) к задаче Коши для (1.1) на интервале $[t_0, t_0+2]$, мы видим, что интеграл в (2.6) ограничен абсолютной константой C. Это завершает доказательство теоремы. ☐

Следующий результат полезен, когда правая часть в (1.1) является неограниченной. Приведенное свойство связано с сильной нелинейной диссипацией уравнения Бюргерса со строго выпуклым потоком.

Теорема 2.3. *В дополнение к условиям теоремы* 2.2 *предположим, что* $h \in C_b(\mathbb{R}_+, H^2)$, *а* f *удовлетворяет* (1.2). *Тогда для любого* $c \in \mathbb{R}$ *найдется константа* $C > 0$, *зависящая также от* ν, f *и* $|h|_{L^\infty(\mathbb{R}_+, H^2)}$, *такая, что для любого начального условия* $u_0 \in H^1$, *удовлетворяющего соотношению* $\langle u_0\rangle = c$, *для решения* $u \in \mathcal{X}$ *задачи* (1.1), (1.3) *выполнено неравенство* (2.6) *при* $t \geqslant 1$.

Доказательство. Согласно принципу максимума Кружкова (см. [2] или [9, раздел 4.1]), найдется константа $C_1 > 0$, зависящая только от ν, f и h, такая, что для любого $t_0 \geqslant 1/2$ имеем

$$|u(t_0)|_\infty \leqslant C_1.$$

Ввиду неравенства (2.1) (которое остается справедливым для начальных условий класса L^∞), норма решения в пространстве $L^\infty((t_0, t_0+1)\times\mathbb{S})$ ограничена константой, зависящей только от h. Беря скалярное произведение в L^2 уравнения (1.1) с функцией $-(t-t_0)\partial_x^2 u$ и осуществляя некоторые простые преобразования, легко получаем универсальную оценку для H^1-нормы решения в момент времени $t = t_0 + 1/2$, так что

$$\sup_{t\geqslant 1}\|u(t)\|_1 \leqslant C_2,$$

где $C_2 > 0$ зависит от ν, f и h. Теперь доказательство можно завершить точно таким же рассуждением, как и для теоремы 2.2. ☐

Комбинируя теоремы 2.2 и 2.3 со сглаживающим свойством уравнения (1.1), мы получаем следующую оценку на высшие производные решений. Ее доказательство можно получить, взяв скалярное произведение в L^2 уравнения (1.1) с функциями $(t-t_0)\partial_x^4 u$ или $\partial_x^4 u$ и выполнив некоторые стандартные преобразования.

Следствие 2.1. *При условиях теоремы* 2.2 (*или теоремы* 2.3) *найдется такая константа* $C > 0$, *не зависящая от начального условия, что решение* $u \in \mathcal{X}$ *задачи* (1.1), (1.3) *удовлетворяет неравенству*

$$\|u(t)\|_2 \leqslant C, \tag{2.8}$$

где $t \geqslant 0$ *принадлежит тем же полупрямым, что и в упомянутых выше теоремах. Если к тому же начальное условие* u_0 *принадлежит* H^2, *то оценка* (2.8) *справедлива для всех* $t \geqslant 0$ *с некоторой константой* $C > 0$, *зависящей также от* $\|u_0\|_2$.

2.3. Некоторые свойства линейных параболических уравнений. Ключевым моментом нашего доказательства устойчивости потока уравнения Бюргерса является нижняя оценка для положительных решений параболических уравнений. Соответствующий результат выражается в терминах неравенства Харнака для линейного уравнения

$$\partial_t w - \nu\partial_x^2 w + \partial_x\big(a(t,x)w\big) = 0, \quad (t,x) \in Q_T, \tag{2.9}$$

где $a : Q_T \to \mathbb{R}$ — заданная функция. Доказательство следующего предложения можно найти в работе [4] (см. [3, раздел IV.2]).

Утверждение 2.1. *Пусть* ν, T *и* ρ — *положительные константы,* $a \in L^\infty(Q_T)$ — *некоторая функция, такая, что* $\partial_x a \in L^\infty(Q_T)$ *и*

$$|a|_{L^\infty(Q_T)} + |\partial_x a|_{L^\infty(Q_T)} \leqslant \rho. \tag{2.10}$$

Тогда для каждого $T' \in (0,T)$ *найдется такое* $\theta = \theta(T',T,\nu,\rho) > 0$, *что для любого неотрицательного решения* $w \in \mathcal{X}_T$ *уравнения* (2.9) *справедливо неравенство*

$$\theta \max_{x\in\mathbb{S}} w(T',x) \leqslant \min_{x\in\mathbb{S}} w(T,x). \tag{2.11}$$

Нам также понадобится свойство невозрастания L^1-нормы решений для уравнения (2.9). Оно сразу следует из принципа максимума по двойственности, см. [16, лемма 3.2.2].

Утверждение 2.2. *В условиях предложения* 2.1 *для любого решения* $w \in \mathcal{X}_T$ *уравнения* (2.9) *справедливо неравенство*

$$|w(t)|_1 \leqslant |w(s)|_1 \quad \textit{при } 0 \leqslant s \leqslant t \leqslant T. \tag{2.12}$$

3. Основной результат

Основным вспомогательным результатом для доказательства устойчивости потока уравнения Бюргерса является свойство сжатия L^1-нормы разности двух решений. Скорость сжатия зависит от нормы решений, которая, в свою очередь, определяется начальными условиями и правой частью. А именно, справедлив следующий результат.

Теорема 3.1. *Пусть* $f \in C^2(\mathbb{R})$ — *произвольная функция. Тогда для любого* $c \in \mathbb{R}$ *и любых положительных чисел* ν, R *и* T *найдется такое* $q \in (0,1)$, *что выполнено следующее свойство*: *для любой внешней силы* $h \in L^\infty(Q_T)$ *с* L^∞-*нормой, не превосходящей* R, *и средним значением, удовлетворяющем соотношению* (2.5) *для п. в.* $t \in J_T$, *и любых начальных условий* $u_0, v_0 \in B_{H^1}(R)$, *таких, что* $\langle u_0\rangle = \langle v_0\rangle = c$, *соответствующие решения удовлетворяют неравенству*

$$|u(T) - v(T)|_1 \leqslant q\,|u_0 - v_0|_1. \tag{3.1}$$

Доказательство. Обозначим через w разность $u - v$ и заметим, что она удовлетворяет уравнению (2.9), в котором

$$a(t,x) = \int_0^1 f'(v(t,x) + \tau w(t,x))\,\mathrm{d}\tau.$$

Более того, при всех $t \in J_T$ имеем $\langle w(t)\rangle = 0$, а ввиду неравенства (2.8), примененного к решениям u и v, найдется такое $\rho > 0$, зависящее только от ν, f, R, T, что выполнено (2.10). В частности, для любого положительного решения уравнения (2.9) справедливо неравенство Харнака (2.11).

Положим $w_0 = u_0 - v_0$ и обозначим через w_0^+ и w_0^-, соответственно, положительную и отрицательную части w_0; т. е. $w_0^\pm = \max\{\pm w_0, 0\}$. Пусть $w^\pm$ — решение уравнения (2.9), равное $w_0^\pm$ при $t = 0$, так что $w(t) = w^+(t) - w^-(t)$ для всех $t \in J_T$, и функции $w^\pm$ неотрицательны. Если $w^+(T/2,x) \leqslant \dfrac{1}{4}|w_0|_1$ для всех $x \in \mathbb{S}$, то $|w^+(T/2)|_1 \leqslant \dfrac{1}{4}|w_0|_1$. Так как среднее значение $w(t)$ равно нулю, L^1-нормы функций $w^+(t)$ и $w^-(t)$ равны, так что $|w^-(T/2)|_1 \leqslant \dfrac{1}{4}|w_0|_1$. Сопоставляя это с (2.12), выводим

$$|w(T)|_1 \leqslant |w(T/2)|_1 \leqslant |w^+(T/2)|_1 + |w^-(T/2)|_1 \leqslant \frac{1}{2}\,|w_0|_1.$$

Точно такие же рассуждения применимы, когда $w^-(T/2, x) \leqslant \dfrac{1}{4}|w_0|_1$ для всех $x \in \mathbb{S}$.

Предположим теперь, что

$$\max_{x\in\mathbb{S}} w^{\pm}(T/2, x) \geqslant \frac{1}{4}\,|w_0|_1.$$

Ввиду неравенства Харнака (2.11), существует такая константа $\theta > 0$, что

$$\min_{x\in\mathbb{S}} w^{\pm}(T, x) \geqslant \theta \max_{x\in\mathbb{S}} w^{\pm}(T/2, x) \geqslant \frac{\theta}{4}\,|w_0|_1.$$

Сопоставляя эту оценку с (2.12), выводим

$$\begin{aligned}
|w(T,x)|_1 &= \int\limits_{\mathbb{S}} \bigl|w^+(T,x) - w^-(T,x)\bigr|\,\mathrm{d}x = \\
&= \int\limits_{\mathbb{S}} \bigl|(w^+(T,x) - \tfrac{\theta}{4}|w_0|_1) - (w^-(T,x) - \tfrac{\theta}{4}|w_0|_1)\bigr|\,\mathrm{d}x \leqslant \\
&\leqslant \int\limits_{\mathbb{S}} \bigl(w^+(T,x) - \tfrac{\theta}{4}|w_0|_1\bigr)\,\mathrm{d}x + \int\limits_{\mathbb{S}} \bigl(w^-(T,x) - \tfrac{\theta}{4}|w_0|_1\bigr)\,\mathrm{d}x = \\
&= |w^+(T)|_1 + |w^-(T)|_1 - \tfrac{\theta}{2}\,|w_0|_1 \leqslant |w_0^+|_1 + |w_0^-|_1 - \tfrac{\theta}{2}\,|w_0|_1 = \bigl(1 - \tfrac{\theta}{2}\bigr)|w_0|_1.
\end{aligned}$$

Таким образом, мы получаем требуемое неравенство (3.1), в котором $q = \max\Bigl\{\dfrac{1}{2}, 1 - \dfrac{\theta}{2}\Bigr\}$. □

4. Приложения

4.1. Единственность и устойчивость ограниченной траектории. Рассмотрим уравнение (1.1), в котором $f \in C^2(\mathbb{R})$ — произвольная функция, а h принадлежит пространству $C_b(\mathbb{R}, H^1)$ и удовлетворяет (2.5) при всех $t \in \mathbb{R}$. Следующий результат описывает поведение решений уравнения (1.1) при больших временах.

Теорема 4.1. *При названных выше условиях для любого $c \in \mathbb{R}$ существует, и притом единственное, решение $v(t,x)$ для (1.1) в пространстве $\mathcal{X}(\mathbb{R}) \cap C_b(\mathbb{R}, H^1)$, такое, что*

$$\langle v(t,\cdot)\rangle = c \quad \text{при всех } t \in \mathbb{R}. \tag{4.1}$$

Более того, существует такое $\gamma > 0$, что для любого числа $R > 0$, достаточно большой константы $C_R > 0$ и любого начального условия $u_0 \in B_{H^1}(R)$, такого, что $\langle u_0\rangle = c$, соответствующее решение $u(t,x)$ удовлетворяет неравенству

$$\|u(t) - v(t)\|_1 \leqslant C_R\, e^{-\gamma t} |u_0 - v(0)|_1^{2/5}, \quad t \geqslant 1. \tag{4.2}$$

Доказательство.

Шаг 1: *экспоненциальная устойчивость*. Покажем сначала, что для любого $R > 0$ и любых начальных условий $u_{01}, u_{02} \in B_{H^1}(R)$, таких, что $\langle u_{01}\rangle = \langle u_{02}\rangle$, соответствующие решения удовлетворяют неравенству

$$\|u_1(t) - u_2(t)\|_1 \leqslant C_R\, e^{-\gamma t} |u_{01} - u_{02}|_1^{2/5}, \quad t \geqslant 1, \tag{4.3}$$

где $\gamma > 0$ не зависит от начальных условий. Для этого рассмотрим сначала случай, когда решения удовлетворяют неравенству (2.8) при всех $t \geqslant 0$. Согласно хорошо известному неравенству интерполяции (см. [1, раздел 15.1]), для любого $u \in H^2$ имеем $\|u\|_1 \leqslant C_1 \|u\|_2^{3/5} |u|_1^{2/5}$. Так как H^2-норма разности $u = u_1 - u_2$ ограничена, неравенство (4.3) будет установлено при $t \geqslant 0$, если мы покажем экспоненциальное убывание L^1-нормы $|u(t)|_1$.

Для этого заметим, что разность $u(t,x)$ удовлетворяет линейному уравнению (2.9). Ввиду невозрастания L^1-нормы (см. предложение 2.2), достаточно доказать, что $|u(k)|_1 \leqslant q^k |u(0)|_1$ для любого целого числа $k \geqslant 0$, где $q \in (0,1)$ не зависит от k. Последняя оценка является непосредственным следствием теоремы 3.1.

Для того, чтобы доказать (4.3) для произвольных начальных данных из $B_{H^1}(R)$, заметим, что решения u_i удовлетворяют неравенству (2.8) при $t \geqslant 1$ с некоторой константой $C = C(R)$. Используя неравенство интерполяции и невозрастание L^1-нормы, получаем, что $\|u(t)\|_1 \leqslant C_2(R)|u(0)|_1^{2/5}$ при $t \geqslant 1$. С другой стороны, решения $u_i \in \mathcal{X}$ удовлетворяют (2.8) при $t \geqslant t_0 = C_3 \ln(R+2)$, так что

$$\|u(t)\|_1 \leqslant C_4 e^{-\gamma(t-t_0)} |u(t_0)|_1^{2/5} \leqslant C_5 e^{-\gamma t} |u(t_0)|_1^{2/5}$$

при $t \geqslant t_0$. Сопоставляя это с полученной выше оценкой для $\|u(t)\|_1$, справедливой при $t \geqslant 1$, приходим к неравенству (4.3).

Шаг 2: ограниченное решение. Зафиксируем теперь число $c \in \mathbb{R}$ и построим ограниченное в H^1 решение $v \in \mathcal{X}(\mathbb{R})$ уравнения (1.1), определенное на действительной прямой и удовлетворяющее соотношению (4.1). Как только это будет установлено, неравенство устойчивости (4.2) будет следовать из (4.3).

Построение функции v основано на стандартной идее, использующей решения с начальными моментами времени, уходящими на $-\infty$. А именно, обозначим через u^n решение уравнения (1.1), удовлетворяющее начальному условию $u^n(-n) = c$. Тогда для любых $m < n$ и $T \geqslant 1 - m$ неравенство (4.3), примененное к полупрямой $[-m, +\infty)$, влечет, что

$$\sup_{|t| \leqslant T} \|u^m(t) - u^n(t)\|_1 \leqslant C_6 e^{-\gamma(T+m)}.$$

Переходя к пределу при $m \to +\infty$, мы видим, что последовательность (u^n) сходится в H^1 к некоторой функции $v \in C_b(\mathbb{R}, H^1)$ равномерно на любом конечном интервале. Далее, так как последовательность (u^n) ограничена в $\mathcal{X}([-T,T])$ для любого $T > 0$, слабая компактность единичного шара в гильбертовом пространстве влечет, что $v \in \mathcal{X}(\mathbb{R})$. Легко проверить, что v является решением уравнения (1.1), удовлетворяющим соотношению (4.1). Это завершает доказательство теоремы. $\square$

4.2. Уравнения со случайной правой частью. Рассмотрим теперь случай, когда внешняя сила h является случайным процессом. А именно, мы предполагаем, что почти каждая траектория h является непрерывной функцией времени со значениями в H^2, такой, что соотношение (2.5) выполняется при $t \geqslant 0$, а случайная величина

$$K := \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \max_{t \leqslant s \leqslant t+1} \|h(s)\|_2 \, \mathrm{d}t \tag{4.4}$$

конечна почти наверное. Например, в силу теоремы Биркгофа условие (4.4) заведомо выполняется, если h — стационарный случайный процесс в H^2 с непрерывными с вероятностью 1 траекториями, такой, что

$$M := \mathbb{E} \max_{0 \leqslant t \leqslant 1} \|h(t)\|_2 < \infty. \tag{4.5}$$

Теорема 4.2. *Предположим, что $f \in C^2(\mathbb{R})$ — произвольная функция, удовлетворяющая неравенству (1.2), упомянутые выше условия выполнены для h, а $u_0, v_0 \in H^1$ — произвольные начальные данные, такие, что $\langle u_0 \rangle = \langle v_0 \rangle$. Тогда с вероятностью 1 соответствующие решения принадлежат пространству $\mathcal{X}$ и таковы, что*

$$|u(t) - v(t)|_1 \to 0 \quad \text{при } t \to \infty. \tag{4.6}$$

Замечание 4.1. Теорема 4.2 не применима к случаю, когда внешняя сила в уравнении (1.1) имеет вид $h + \eta$, где $h = h(x)$ — детерминистская функция, а $\eta = \eta(t,x)$ — регулярный по пространственным переменным белый шум. Однако, комбинируя диссипативность динамики с марковским свойством, нетрудно построить возрастающую последовательность моментов остановки (t_k), такую, что разность $t_k - t_{k-1}$ имеет конечный экспоненциальный момент, а решения ограничены в пространстве H^2 на интервале $[t_k, t_k + 1]$. Повторяя затем рассуждения, использованные при доказательстве теоремы 4.2, можно установить экспоненциальную сходимость в (4.6) и единственность стационарной меры. Поскольку описанный выше подход хорошо известен и подробно изложен в [12, раздел 3], мы опускаем соответствующее доказательство.

Доказательство теоремы 4.2. Зафиксируем два начальных условия $u_0, v_0 \in B_{H^1}(R)$ с одним и тем же средним значением и обозначим через u, v соответствующие решения. Ввиду теоремы 2.1 они корректно определены и принадлежат пространству $\mathcal{X}$ с вероятностью 1. Из конечности почти наверное случайной величины (4.4) следует, что существует возрастающая случайная последовательность (t_k), стремящаяся к $+\infty$ вероятностью 1, такая, что

$$\sup_{t_k \leqslant t \leqslant t_k+2} \|h(t)\|_2 \leqslant 2K + 1.$$

Применяя следствие 2.1 к решениям u, v на интервалах $[t_k, t_k + 2]$, мы построим конечную с вероятностью 1 случайную константу $C > 0$, такую, что

$$\sup_{t_k+1 \leqslant t \leqslant t_k+2} (\|u(t)\|_2 + \|v(t)\|_2) \leqslant C.$$

Используя теперь теорему 3.1, находим случайную величину $q \in (0, 1)$, такую, что $|u(t_k + 2) - v(t_k + 2)|_1 \leqslant q\,|u(t_k + 1) - v(t_k + 1)|_1$ для любого $k \geqslant 1$. Сопоставляя это с неравенством (2.12), заключаем, что с вероятностью 1

$$|u(t_k + 2) - v(t_k + 2)|_1 \leqslant q^k |u_0 - v_0|_1 \quad \text{при всех } k \geqslant 1.$$

Используя снова (2.12), мы видим, что сходимость (4.6) имеет место почти наверное. □

Замечание 4.2. Теорема 4.2 не уточняет скорость сходимости в (4.6), и вряд ли можно сказать что-то еще о сходимости (4.6) без какой-либо дополнительной информации. С другой стороны, если h — перемешивающийся стационарный процесс, такой, что выполнено (4.5), то случайная величина K в (4.4) равна M почти наверное (по теореме Биркгофа). В этом случае любая информация о скорости перемешивания даст некоторые количественные оценки для случайных времен (t_k), использованных в приведенном выше доказательстве, а это позволяет описать скорость сходимости в (4.6).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бесов О. В., Ильин В. П., Никольский С. М.* Интегральные представления функций и теоремы вложения. — М.: Наука, 1975.
2. *Кружков С. Н.* О задаче Коши для некоторых классов квазилинейных параболических уравнений// Мат. заметки. — 1969. — *6*, № 3. — С. 295–300.
3. *Крылов Н. В.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения второго порядка. — М.: Наука, 1985.
4. *Крылов Н. В., Сафонов М. В.* Некоторое свойство решений параболических уравнений с измеримыми коэффициентами// Изв. АН СССР. Сер. мат. — 1980. — *44*, № 1. — С. 161–175.
5. *Ландис Е. М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. — М.: Наука, 1971.
6. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
7. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. Т. 1. — М.: Мир, 1971.
8. *Bakhtin Y., Li L.* Thermodynamic limit for directed polymers and stationary solutions of the Burgers equation// Commun. Pure Appl. Math. — 2019. — *72*, № 3. — С. 536–619.
9. *Boritchev A.* Sharp estimates for turbulence in white-forced generalised Burgers equation// Geom. Funct. Anal. — 2013. — *23*, № 6. — С. 1730–1771.
10. *Chung J., Kwon O.* Asymptotic behavior for the viscous Burgers equation with a stationary source// J. Math. Phys. — 2016. — *57*, № 10. — 101506.
11. *Dunlap A., Graham C., Ryzhik L.* Stationary solutions to the stochastic Burgers equation on the line// Commun. Math. Phys. — 2021. — *382*, № 2. — С. 875–949.
12. *Djurdjevac A., Rosati T.* Synchronisation for scalar conservation laws via Dirichlet boundary// ArXiv. — 2022. — 2211.05814.
13. *Djurdjevac A., Shirikyan A.* Stabilisation of a viscous conservation law by a one-dimensional external force// ArXiv. — 2022. — 2204.03427.
14. *Evans L. C.* Partial differential equations. — Providence: Am. Math. Soc., 2010.

15. *Hill A. T., Süli E.* Dynamics of a nonlinear convection-diffusion equation in multidimensional bounded domains// Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 1995. — *125*, № 2. — С. 439–448.
16. *Hörmander L.* Lectures on nonlinear hyperbolic differential equations. — Berlin: Springer, 1997.
17. *Jauslin H. R., Kreiss H. O., Moser J.* On the forced Burgers equation with periodic boundary conditions// В сб.: «Differential equations: La Pietra 1996». — Providence: Am. Math. Soc., 1999. — С. 133–153.
18. *Kalita P., Zgliczyński P.* On non-autonomously forced Burgers equation with periodic and Dirichlet boundary conditions// Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 2020. — *150*, № 4. — С. 2025–2054.
19. *Kifer Y.* The Burgers equation with a random force and a general model for directed polymers in random environments// Probab. Theory Related Fields. — 1997. — *108*, № 1. — С. 29–65.
20. *Shirikyan A.* Global exponential stabilisation for the Burgers equation with localised control// J. Éc. Polytech. Math. — 2017. — *4*. — С. 613–632.
21. *Sinaĭ Ya. G.* Two results concerning asymptotic behavior of solutions of the Burgers equation with force// J. Stat. Phys. — 1991. — *64*, № 1-2. — С. 1–12.

А. Джурджевак
Freie Universität Berlin, Berlin, Germany
E-mail: `adjurdjevac@zedat.fu-berlin.de`

А. Р. Ширикян
CY Cergy Paris University, Cergy–Pontoise, France
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: `Armen.Shirikyan@cyu.fr`

UDC 517.95
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-588-598
EDN: YFDPHA

Exponential stability of the flow for a generalized Burgers equation on a circle

A. Djurdjevac[1] and A. R. Shirikyan[2,3]

[1] *Freie Universität Berlin, Berlin, Germany*
[2] *CY Cergy Paris University, Cergy–Pontoise, France*
[3] *RUDN University, Moscow, Russia*

Abstract. The paper deals with the problem of stability for the flow of the 1D Burgers equation on a circle. Using some ideas from the theory of positivity preserving semigroups, we establish the strong contraction in the L^1 norm. As a consequence, it is proved that the equation with a bounded external force possesses a unique bounded solution on $\mathbb{R}$, which is exponentially stable in H^1 as $t \to +\infty$. In the case of a random external force, we show that the difference between two trajectories goes to zero with probability 1.

Keywords: Burgers equation, exponential stability, bounded trajectory.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The research of the first author has been partially supported by Deutsche Forschungsgemeinschaft (DFG) through grant CRC 1114 *Scaling Cascades in Complex Systems*, Project Number 235221301, Project C10 — Numerical analysis for nonlinear SPDE models of particle systems. The research of the second author has been supported by the *CY Initiative* through the grant *Investissements d'Avenir* ANR-16-IDEX-0008 and by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Megagrant, agreement No. 075-15-2022-1115).

For citation: A. Djurdjevac, A. R. Shirikyan, "Exponential stability of the flow for a generalized Burgers equation on a circle," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 4, 588–598. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-588-598`

REFERENCES

1. O. V. Besov, V. P. Il'in, and S. M. Nikol'skii, *Integral'nye predstavleniya funktsiy i teoremy vlozheniya* [Integral representations of functions and embedding theorems], Nauka, Moscow, 1975 (in Russian).
2. S. N. Kruzhkov, "O zadache Koshi dlya nekotorykh klassov kvazilineynykh parabolicheskikh uravneniy" [On the Cauchy problem for some classes of quasilinear parabolic equations], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1969, **6**, No. 3, 295–300 (in Russian).
3. N. V. Krylov, *Nelineynye ellipticheskie i parabolicheskie uravneniya vtorogo poryadka* [Nonlinear Second-Order Elliptic and Parabolic Equations], Nauka, Moscow, 1985 (in Russian).
4. N. V. Krylov and M. V. Safonov, "Nekotoroe svoystvo resheniy parabolicheskikh uravneniy s izmerimymi koeffitsientami" [A certain property of solutions to parabolic equations with measurable coefficients], *Izv. AN SSSR. Ser. mat.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Ser. Math.], 1980, **44**, No. 1, 161–175 (in Russian).
5. E. M. Landis, *Uravneniya vtorogo poryadka ellipticheskogo i parabolicheskogo tipov* [Second-Order Equations of Elliptic and Parabolic Type], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
6. J.-L. Lions, *Nekotorye metody resheniya nelineynykh kraevykh zadach* [Some Methods of Solving Non-Linear Boundary Value Problems], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
7. J.-L. Lions and E. Magenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya. T. 1* [Non-Homogeneous Boundary Value Problems and Applications. Vol. 1], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
8. Y. Bakhtin and L. Li, "Thermodynamic limit for directed polymers and stationary solutions of the Burgers equation," *Commun. Pure Appl. Math.*, 2019, **72**, No. 3, 536–619.
9. A. Boritchev, "Sharp estimates for turbulence in white-forced generalised Burgers equation," *Geom. Funct. Anal.*, 2013, **23**, No. 6, 1730–1771.
10. J. Chung and O. Kwon, "Asymptotic behavior for the viscous Burgers equation with a stationary source," *J. Math. Phys.*, 2016, **57**, No. 10, 101506.
11. A. Dunlap, C. Graham, and L. Ryzhik, "Stationary solutions to the stochastic Burgers equation on the line," *Commun. Math. Phys.*, 2021, **382**, No. 2, 875–949.
12. A. Djurdjevac and T. Rosati, "Synchronisation for scalar conservation laws via Dirichlet boundary," *ArXiv*, 2022, 2211.05814.
13. A. Djurdjevac and A. Shirikyan, "Stabilisation of a viscous conservation law by a one-dimensional external force," *ArXiv*, 2022, 2204.03427.
14. L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, Am. Math. Soc., Providence, 2010.
15. A. T. Hill and E. Süli, "Dynamics of a nonlinear convection-diffusion equation in multidimensional bounded domains," *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 1995, **125**, No. 2, 439–448.
16. L. Hörmander, *Lectures on Nonlinear Hyperbolic Differential Equations*, Springer, Berlin, 1997.
17. H. R. Jauslin, H. O. Kreiss, and J. Moser, "On the forced Burgers equation with periodic boundary conditions," In: *Differential Equations: La Pietra 1996*, Am. Math. Soc., Providence, 1999, pp. 133–153.
18. P. Kalita and P. Zgliczyński, "On non-autonomously forced Burgers equation with periodic and Dirichlet boundary conditions," *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 2020, **150**, No. 4, 2025–2054.
19. Y. Kifer, "The Burgers equation with a random force and a general model for directed polymers in random environments," *Probab. Theory Related Fields*, 1997, **108**, No. 1, 29–65.
20. A. Shirikyan, "Global exponential stabilisation for the Burgers equation with localised control," *J. Éc. Polytech. Math.*, 2017, **4**, 613–632.
21. Ya. G. Sinaĭ, "Two results concerning asymptotic behavior of solutions of the Burgers equation with force," *J. Stat. Phys.*, 1991, **64**, No. 1-2, 1–12.

A. Djurdjevac
Freie Universität Berlin, Berlin, Germany
E-mail: `adjurdjevac@zedat.fu-berlin.de`

A. R. Shirikyan
CY Cergy Paris University, Cergy–Pontoise, France
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: `Armen.Shirikyan@cyu.fr`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 4 (2023). С. 599–620
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.954
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-599-620
EDN: YQAARE

ЭТА-ИНВАРИАНТ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ С ПАРАМЕТРОМ

К. Н. Жуйков, А. Ю. Савин

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Аннотация. В работе исследуется эта-инвариант эллиптических краевых задач с параметром и его основные свойства. Используя подход Мельроуза, мы определяем эта-инвариант как регуляризацию числа вращения семейства. При этом регуляризация следа включает получение асимптотики следа композиций обратимых краевых задач с параметром при больших значениях параметра. Получение асимптотики использует аппарат псевдодифференциальных краевых задач и опирается на сведение краевых задач с параметром к краевым задачам без параметра.

Ключевые слова: эта-инвариант, эллиптическая краевая задача с параметром, псевдодифференциальная краевая задача, оператор Буте де Монвеля, регуляризованный след.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы благодарны В. Е. Назайкинскому за полезные замечания. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке конкурса «Молодая математика России» и РФФИ, проект № 21-51-12006.

Для цитирования: *К. Н. Жуйков, А. Ю. Савин.* Эта-инвариант эллиптических краевых задач с параметром// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 4. С. 599–620. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-599-620

Введение

Впервые η-инвариант появился в цикле работ Атьи, Патоди и Зингера [10–12] и выражал вклад границы в формулу индекса для оператора Дирака на многообразии с краем. Также в цитируемой серии работ было введено понятие η-инварианта эллиптических самосопряжённых псевдодифференциальных операторов на гладком замкнутом многообразии как регуляризации типа дзета-функции сигнатуры квадратичной формы, отвечающей оператору. η-Инвариант по определению является спектральным инвариантом и появляется во многих формулах индекса, а также имеет приложения в геометрии и анализе (см., напр., [15, 16, 27]).

Позднее Мельроуз [24] предложил использовать иной подход к построению η-инварианта. А именно, используя методы теории эллиптических псевдодифференциальных операторов (ПДО) с параметром (см. [2, 8]), Мельроуз определил η-инвариант как регуляризацию числа вращения и показал, что построенный η-инвариант в случае операторов первого порядка с параметром совпадает с η-инвариантом Атьи—Патоди—Зингера для некоторого обратимого самосопряжённого оператора (см. также [22, 23]). Более точно, число вращения обратимого эллиптического ПДО с параметром $D(p)$, $p \in \mathbb{R}$, формально вычисляется по формуле

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\mathbb{R}} \operatorname{tr}\left(D(p)^{-1}\frac{dD(p)}{dp}\right)dp,$$

где след существует только для операторов сильно отрицательного порядка, а интеграл может расходиться. Поэтому построение соответствующих регуляризаций играет ключевую роль при исследовании η-инварианта.

В дальнейшем η-инвариант использовался в формулах индекса на многообразиях с цилиндрическими концами и/или коническими точками (см. [17, 28]), на многообразиях с периодическими концами [26], также были определены η-формы [25]. Обобщение η-инварианта на случай некоторых классов нелокальных операторов и приложение к проблеме индекса были исследованы в недавних работах авторов [4, 30, 33]. Особый интерес в рамках текущего исследования представляет η-инвариант типа Атьи—Патоди—Зингера краевых задач, построенный в работе [18] (см. также [14, 21] в случае краевых задач для операторов Дирака).

Цель данной работы — рассмотреть η-инвариант Мельроуза для краевых задач с параметром [2] и исследовать его свойства. При этом регуляризация следа подразумевает получение асимптотики на бесконечности следа композиций обратимых краевых задач с параметром — основной технический результат работы (см. теорему 2.1 ниже). Доказательство этого результата задействует аппарат краевых задач для ПДО [6, 13] (см. также [9, 19]) и состоит в сведении краевых задач для ПДО с параметром к краевым задачам для ПДО (без параметра) на цилиндре.

Предполагается, что построенный таким образом η-инвариант будет участвовать в формулах индекса на многообразиях с цилиндрическими концами и на областях с угловыми точками на границе (см. [5]). Также к исследованию η-инварианта краевых задач с параметром приводит проблема индекса некоторых нелокальных задач (см. [7]).

Работа имеет следующую структуру. В разделе 1 напоминаются основные сведения из теории эллиптических краевых задач. Раздел 2 содержит формулировку основных результатов работы, доказательства которых приведены в разделе 7. В третьем разделе в качестве примеров приведены вычисления η-инварианта краевых задач для оператора второго порядка с параметром при различных краевых условиях. Раздел 6 посвящён сведению операторов Буте де Монвеля с параметром, построенных в разделе 4, к операторам Буте де Монвеля без параметра при помощи изоморфизма, построенного в разделе 5.

1. Эллиптические краевые задачи с параметром

Напомним понятие эллиптической краевой задачи с параметром из работы [2].

Краевые задачи с параметром. Пусть M — гладкое компактное многообразие с краем ∂M. Введём такие локальные координаты (x', x_n) в окрестности края, что многообразие локально определяется условием $M = \{x_n \geqslant 0\}$, а его край — условием $\partial M = \{x_n = 0\}$, т. е. x_n — определяющая функция края, а x' — координаты на крае. Двойственные координаты обозначаются (ξ', ξ_n). Семейство операторов вида

$$D(p) = \sum_{0\leqslant k\leqslant m} D_k p^k \colon C^\infty(M) \longrightarrow C^\infty(M),$$

где $D_k = D_k(x, -i\partial_x)$ — дифференциальные операторы на M порядка $\leqslant m-k$, будем называть *оператором с параметром порядка m на многообразии M*. Здесь и всюду далее используется обозначение $\partial_x = \partial/\partial x$.

Определение 1.1. Оператор вида

$$\mathcal{D}(p) = \begin{pmatrix} D(p) \\ \\ i^*B(p)\end{pmatrix} \colon C^\infty(M, E) \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(M, F) \\ \oplus \\ C^\infty(\partial M, G)\end{matrix}, \tag{1.1}$$

где $D(p)$ и $B(p)$ — семейства с параметром порядков m и b, соответственно, а $i^*\colon C^\infty(M,E) \to C^\infty(\partial M, E|_{\partial M})$ — оператор сужения сечений на край, индуцированный вложением $i\colon \partial M \hookrightarrow M$, будем называть *краевой задачей порядка* (m, b) *с параметром.* Здесь E и F — комплексные векторные расслоения на M, а G — комплексное векторное расслоение на ∂M.

В локальных координатах граничный оператор $i^*B(p)$ может быть записан в виде

$$C^\infty(M,E) \ni u \overset{i^*B(p)}{\longmapsto} \sum_{0\leqslant k\leqslant b} B_k(p)(-i\partial_{x_n})^k\Big|_{x_n=0} u \in C^\infty(\partial M, G),$$

где $B_j(p)$ — операторы с параметром порядка $\leqslant b-k$ на границе. Будем говорить, что краевая задача (1.1) имеет *тип* $d \in \mathbb{Z}$, если $B_k(p)=0$ при всех $k \geqslant d$, т. е. тип равен максимальному порядку нормальной производной в краевых условиях плюс один. В частности, тип задачи Дирихле равен 1, а задачи Неймана — 2. Будем предполагать, что тип $d \leqslant \operatorname{ord} D(p)$.

Эллиптичность с параметром. Для $s \in \mathbb{Z}_+$ через $H^s(M)$ обозначим пространство Соболева функций на M с нормой, обозначаемой $\|\cdot\|_s$. Введём семейство норм в $H^s(M)$, зависящих от параметра $p \in \mathbb{R}$:

$$|||u|||_s^2 = \|u\|_s^2 + |p|^{2s}\|u\|_0^2. \tag{1.2}$$

Аналогично определяются нормы с параметром в пространствах Соболева на границе. Известно, что краевая задача (1.1) определяет ограниченный оператор в пространствах Соболева

$$\mathcal{D}(p)\colon H^s(M,E) \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-m}(M,F) \\ \oplus \\ H^{s-b-1/2}(\partial M, G) \end{matrix} \tag{1.3}$$

при условии $s-d-1/2>0$, где d — тип граничного оператора. При этом нормы операторов (1.3), отвечающие нормам (1.2) в пространствах $H^s(M)$, ограничены равномерно по $p \in \mathbb{R}$.

Перейдём к условиям эллиптичности задачи (1.1). Гладкая функция

$$\sigma(D)(x,\xi,p) = \sum_{0\leqslant k\leqslant m} \sigma(D_k)(x,\xi)p^k \in C^\infty\big(T^*M\times\mathbb{R}, \operatorname{Hom}(E,F)\big),$$

где $\sigma(D_k)(x,\xi)$ — главные символы дифференциальных операторов D_k, называется *внутренним символом* краевой задачи с параметром. Фиксируем точку $(x',\xi') \in T^*\partial M$. Заморозим коэффициенты операторов $D(p)$ и $B(p)$ в точке x', отбросим младшие члены (т. е. в дифференциальных операторах D_k и B_k оставим только производные старших порядков $m-k$ и $b-k$, соответственно) и выполним преобразование Фурье по касательной переменной x'. Получим семейство краевых задач

$$\begin{cases} \sigma(D)\left(x',0,\xi',-i\partial_{x_n},p\right)u(x_n)=0, \quad x_n \geqslant 0, \\ \displaystyle\sum_{0\leqslant k\leqslant d-1} \sigma(B_k)(x',\xi',p)\left(-i\partial_{x_n}\right)^k u\Big|_{x_n=0} = g \end{cases} \tag{1.4}$$

для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами на полупрямой $\overline{\mathbb{R}}_+ = \{x_n \geqslant 0\}$.

Через $L_+(x',\xi',p) \subset C^\infty(\overline{\mathbb{R}}_+, E_{x'})$ обозначим пространство решений первого уравнения задачи (1.4), которые стремятся к нулю при $x_n \to +\infty$. Говорят, что краевая задача с параметром (1.3) удовлетворяет *условию Шапиро—Лопатинского*, если задача (1.4) имеет единственное решение $u \in L_+(x',\xi',p)$ для любой правой части $g \in G_{x'}$.

Теорема 1.1 (Агранович, Вишик [2]). *Пусть для задачи* (1.3) *выполнены условия эллиптичности с параметром*:

1) *внутренний символ* $\sigma(D)(x,\xi,p)$ *обратим при всех* $(x,\xi,p) \in T^*M \setminus \{|\xi|+|p|=0\}$;
2) *выполнено условие Шапиро—Лопатинского.*

Тогда оператор (1.3) *фредгольмов при всех* $p \in \mathbb{R}$ *и обратим при всех достаточно больших* p. *При этом норма обратного оператора* $\mathcal{D}(p)^{-1}$, *отвечающая семействам норм* (1.2) *в пространствах Соболева, равномерно ограничена по* p, *т. е. выполнена оценка*

$$\big|\big|\big|\mathcal{D}(p)^{-1}(f,g)\big|\big|\big|_s \leqslant C_1|||f|||_{s-m} + C_2|||g|||_{s-b-1/2}, \quad \text{где} \quad s-(d-1) > \frac{1}{2},$$

а константы C_1 *и* C_2 *не зависят от* f, g *и* p.

2. Формулировка основных результатов

Алгебра задач с параметром. Фиксируем числа m_0, b_0 и d_0. Через $\Psi_p(M)$ обозначим алгебру операторов с параметром

$$\mathcal{D}(p)\colon \begin{matrix} C^\infty(M,F) \\ \oplus \\ C^\infty(\partial M,G) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(M,F) \\ \oplus \\ C^\infty(\partial M,G), \end{matrix}$$

мультипликативно порождённую композициями вида $\mathcal{D}_1(p)\mathcal{D}_0(p)^{-1}$, где множители — краевые задачи с параметром

$$\mathcal{D}_0(p),\mathcal{D}_1(p)\colon C^\infty(M,E) \longrightarrow \begin{matrix} C^\infty(M,F) \\ \oplus \\ C^\infty(\partial M,G), \end{matrix} \tag{2.1}$$

причём задача $\mathcal{D}_0(p)$ имеет порядки (m_0,b_0) и тип d_0 и является эллиптической и обратимой при всех $p\in\mathbb{R}$, а задача $\mathcal{D}_1(p)$ имеет порядки (m_1,b_1) и тип d_1, подчинённые неравенствам

$$m_1\leqslant m_0,\quad b_1\leqslant b_0,\quad d_1\leqslant d_0.$$

Из этого определения следует, что алгебра $\Psi_p(M)$ состоит из линейных комбинаций произведений вида

$$\prod_{j=1}^N \mathcal{D}_j\mathcal{D}_{0j}^{-1}, \tag{2.2}$$

где порядки и тип операторов с параметром $\mathcal{D}_j$ удовлетворяют неравенствам

$$m_j\leqslant m_0,\quad b_j\leqslant b_0,\quad d_j\leqslant d_0 \qquad \forall j\geqslant 1, \tag{2.3}$$

а задачи $\mathcal{D}_{0j}$ являются эллиптическими с параметром и имеют порядки (m_0,b_0) и тип d_0.

Теорема 2.1. *Пусть для произведения*

$$\mathcal{D}(p)=\prod_{j=1}^N \mathcal{D}_j(p)\mathcal{D}_{0j}(p)^{-1} \tag{2.4}$$

выполнены неравенства (2.3) *и неравенства*

$$m_1-m_0+k<-\dim M,\quad b_1-b_0+k<-\dim M+1,\quad \text{где}\quad k=\sum_{j=2}^N \max(m_j-m_0,b_j-b_0). \tag{2.5}$$

Тогда семейство $\mathcal{D}(p)$ состоит из ядерных операторов (*т. е. операторов, для которых существует след*) *и для следа семейства существует асимптотическое разложение при $p\to\pm\infty$ вида*

$$\operatorname{tr}\mathcal{D}(p)\sim p^\ell\sum_{j\leqslant 0} c_j^\pm p^j,\quad \text{где}\quad \ell=\max(m_1-m_0+k+\dim M, b_1-b_0+k+\dim M-1), \tag{2.6}$$

причём разложение можно дифференцировать по параметру любое число раз.

Регуляризованный след и η-инвариант. Следуя методу из работы [24], определим регуляризованный след на алгебре $\Psi_p(M)$. Введём пространство $S_{as}(\mathbb{R})$, состоящее из функций $f(p)\in C^\infty(\mathbb{R})$, имеющих асимптотическое разложение

$$f(p)\sim\sum_{i\leqslant N} c_i^\pm p^i+\sum_{0\leqslant j\leqslant N} d_j^\pm p^j\ln|p| \quad \text{при } p\to\pm\infty,$$

где $N>0$ — некоторое целое число, а $c_j^\pm, d_j^\pm\in\mathbb{C}$. Причём это разложение можно дифференцировать произвольное число раз. Через $\mathcal{P}\subset S_{as}(\mathbb{R})$ обозначим подпространство многочленов.

Рассмотрим семейство $\mathcal{D}\in\Psi_p(M)$. Оно является линейной комбинацией произведений вида (2.2). Для краткости будем считать, что

$$\mathcal{D}=\prod_{j=1}^N \mathcal{D}_j\mathcal{D}_{0j}^{-1}. \tag{2.7}$$

Это произведение, вообще говоря, не имеет следа, поскольку для него неравенства (2.5) могут быть не выполнены. Рассмотрим производную семейства (2.7) по параметру

$$\partial_p \mathcal{D}(p) = (\partial_p \mathcal{D}_1)\mathcal{D}_{01}^{-1}\mathcal{D}_2\mathcal{D}_{02}^{-1}\ldots - \mathcal{D}_1\mathcal{D}_{01}^{-1}(\partial_p\mathcal{D}_{01})\mathcal{D}_{01}^{-1}\mathcal{D}_2\ldots + \mathcal{D}_1\mathcal{D}_{01}^{-1}(\partial_p\mathcal{D}_2)\ldots$$

Порядок при дифференцировании будет падать, как минимум, на единицу. Отсюда и из теоремы 2.1 следует, что при

$$\ell \geqslant \max(m_1 - m_0 + k + \dim M + 1,\ b_1 - b_0 + k + \dim M) \tag{2.8}$$

семейство $\partial_p^\ell \mathcal{D}(p)$ будет иметь след. Теперь можно дать определение регуляризованного следа.

Определение 2.1. *Регуляризованным следом* будем называть функционал

$$\mathrm{TR}\colon \Psi_p(M) \longrightarrow S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P},$$
$$(\mathrm{TR}\,\mathcal{D})(p) = \int_0^p \int_0^{q_{\ell-1}} \cdots \int_0^{q_1} \mathrm{tr}\big(\partial_q^\ell \mathcal{D}(q)\big)\,dq\,dq_1\ldots dq_{\ell-1},$$

где ℓ определяется из (2.8).

Из теоремы 2.1 следует, что это определение корректно, т. е. регуляризованный след действительно попадает в пространство $S_{as}(\mathbb{R})$, а выбор другого числа ℓ меняет регуляризованный след на многочлен. Так же, как в [24] (см. также [3]), доказывается, что регуляризованный след является следом, т. е. выполнено равенство

$$\mathrm{TR}\big(\mathcal{D}_1(p)\mathcal{D}_2(p)\big) = \mathrm{TR}\big(\mathcal{D}_2(p)\mathcal{D}_1(p)\big) \quad \forall\, \mathcal{D}_1(p), \mathcal{D}_2(p) \in \Psi_p(M). \tag{2.9}$$

Определим *регуляризованный интеграл*

$$⨍_{\mathbb{R}}\colon S_{as}(\mathbb{R})/\mathcal{P} \longrightarrow \mathbb{C}, \qquad ⨍_{\mathbb{R}} f(p)\,dp = c_0,$$

где c_0 — постоянный член в асимптотическом разложении интеграла

$$\int_{-T}^{T} f(p)\,dp \sim \sum_{j\leqslant N} c_j T^j + \sum_{0\leqslant j\leqslant N} d_j T^j \ln T \quad \text{при} \quad T \to +\infty,$$

где $N > 0$ — некоторое целое число, а $c_j, d_j \in \mathbb{C}$. Отметим, что регуляризованный интеграл нечётных функций равен нулю.

Дадим определение η-инварианта для краевой задачи. Пусть $\mathcal{D}(p)$ — задача с параметром вида (1.3), которая является эллиптической и обратимой при всех $p \in \mathbb{R}$. Для краткости введём следующее обозначение для композиции регуляризованных следа и интеграла:

$$\mathrm{Tr} \overset{\mathrm{def}}{=} ⨍_{\mathbb{R}} \circ\, \mathrm{TR}\,.$$

Определение 2.2. *η-Инвариантом* задачи $\mathcal{D}(p)$ с параметром называется число

$$\eta\big(\mathcal{D}(p)\big) = \frac{1}{2\pi i}\,\mathrm{Tr}\big(\partial_p \mathcal{D}(p)\mathcal{D}(p)^{-1}\big) \in \mathbb{C}. \tag{2.10}$$

Установим некоторые свойства η-инварианта.

Теорема 2.2.

1) (*Логарифмическое свойство.*) *Рассмотрим обратимые эллиптические задачи с параметром*

$$\mathcal{D}(p)=\begin{pmatrix}D_0(p)\\ \\ i^*B_0(p)\end{pmatrix},\quad \widetilde{\mathcal{D}}(p)=\begin{pmatrix}\widetilde{D}_0(p)\\ \\ i^*\widetilde{B}_0(p)\end{pmatrix}:C^\infty(M,E)\longrightarrow \begin{matrix}C^\infty(M,F)\\ \oplus\\ C^\infty(\partial M,G),\end{matrix}$$

где $\operatorname{ord}D_0=\operatorname{ord}\widetilde{D}_0$, $\operatorname{ord}B_0=\operatorname{ord}\widetilde{B}_0$ *и* тип $B_0=$ тип $\widetilde{B}_0$. *Имеет место равенство*

$$\eta\big(\mathcal{D}\big)-\eta\big(\widetilde{\mathcal{D}}\big)=\eta\big(\mathcal{D}\widetilde{\mathcal{D}}^{-1}\big),$$

где η*-инвариант семейства* $\mathcal{D}\widetilde{\mathcal{D}}^{-1}$ *определяется формулой* (2.10).

2) (*Формальный след.*) *Отображение*

$$\begin{aligned}\widetilde{\operatorname{Tr}}\colon \Psi_p(M)&\longrightarrow \mathbb{C},\\ \mathcal{D}(p)&\longmapsto \operatorname{Tr}\big(\partial_p\mathcal{D}(p)\big),\end{aligned}$$

называемое формальным следом, является следом на алгебре $\Psi_p(M)$, *т. е.* $\widetilde{\operatorname{Tr}}(AB)=\widetilde{\operatorname{Tr}}(BA)$ *для всех элементов* $A,B\in\Psi_p(M)$.

3) (*Вариация* η*-инварианта.*) *Пусть* $\mathcal{D}_t(p)$, $t\in[0,1]$, *есть гладкая гомотопия обратимых эллиптических задач с параметром. Тогда производная* η*-инварианта по параметру* t *равна*

$$\partial_t\eta(\mathcal{D}_t)=\frac{1}{2\pi i}\,\widetilde{\operatorname{Tr}}\big(\mathcal{D}_t^{-1}\partial_t\mathcal{D}_t\big).$$

Доказательство.

1) Пользуясь линейностью и циклическим свойством следа Tr, получаем

$$\begin{aligned}\eta\big(\mathcal{D}\widetilde{\mathcal{D}}^{-1}\big)&=\frac{1}{2\pi i}\Big(\operatorname{Tr}\big((\partial_p\mathcal{D})\mathcal{D}^{-1}\big)-\operatorname{Tr}\big(\mathcal{D}\widetilde{\mathcal{D}}^{-1}(\partial_p\widetilde{\mathcal{D}})\mathcal{D}^{-1}\big)\Big)=\\ &=\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Tr}\big((\partial_p\mathcal{D})\mathcal{D}^{-1}\big)-\frac{1}{2\pi i}\operatorname{Tr}\big((\partial_p\widetilde{\mathcal{D}})\widetilde{\mathcal{D}}^{-1}\big)=\eta\big(\mathcal{D}\big)-\eta\big(\widetilde{\mathcal{D}}\big).\end{aligned}$$

2) Очевидным образом следует из (2.9).

3) Доказательство аналогично случаю замкнутого многообразия [24, с. 554], см. также [3, предложение 7.2], и следует из циклического свойства следа Tr. □

Замечание 2.1. Формальный след может быть явно вычислен, см. теорему 7.1 ниже.

3. Примеры вычисления η-инварианта краевых задач

Пример 1. Краевые условия без параметра. На отрезке $[0,1]$ рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases}(\partial_x^2-p^2)u(x)=f(x),\\ u(0)=h_0,\quad u(1)=h_1.\end{cases}\tag{3.1}$$

Этой краевой задаче отвечает оператор

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}A\\ \\ B\end{pmatrix}:H^s[0,1]\longrightarrow \begin{matrix}H^{s-2}[0,1]\\ \oplus\\ \mathbb{C}^2\end{matrix},$$

где $A=\partial_x^2-p^2$, $Bu(x)=\big(u(0),u(1)\big)$. Нетрудно показать, что оператор $\mathcal{A}$ удовлетворяет условиям Шапиро—Лопатинского на обоих концах отрезка и является обратимым при всех $|p|\neq 0$. Имеем

$$\partial_p\mathcal{A}=\begin{pmatrix}-2p\\ 0\end{pmatrix},\quad \mathcal{A}^{-1}=(R,C),\quad \partial_p\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-2pR & -2pC\\ 0 & 0\end{pmatrix}.$$

Здесь Rf — решение задачи (3.1) с однородными краевыми условиями, а Ch — решение задачи при $f=0$ и $h=(h_0,h_1)$.

Общее решение уравнения $Au=f$ имеет вид

$$u(x)=\frac{1}{p}\int_0^x \operatorname{sh}p(x-y)f(y)dy+C_1e^{px}+C_2e^{-px}.\tag{3.2}$$

Из однородных граничных условий получаем

$$u(1) = \frac{1}{p}\int_0^1 \operatorname{sh} p(1-y) f(y)dy + 2C_1 \operatorname{sh} p = 0, \quad C_2 = -C_1.$$

Таким образом,

$$Rf(x) = \frac{1}{p}\int_0^x \operatorname{sh} p(x-y) f(y)dy - \frac{\operatorname{sh} px}{p \operatorname{sh} p}\int_0^1 \operatorname{sh} p(1-y) f(y)dy.$$

Ядро Шварца оператора $-2pR$ равно

$$K(x,y) = 2\operatorname{sh} p(y-x)\chi(y-x) + \frac{2}{\operatorname{sh} p}\operatorname{sh} px \operatorname{sh} p(1-y), \quad \text{где } \chi(y-x) = \begin{cases} 1 & \text{при } y-x \leqslant 0, \\ 0 & \text{при } y-x > 0. \end{cases}$$

Отсюда имеем

$$\operatorname{tr}\bigl(\partial_p \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\bigr) = \operatorname{tr}(-2pR) = \int_0^1 K(x,y)\Big|_{y=x} dx = \frac{1}{\operatorname{sh} p}\int_0^1 \bigl(\operatorname{ch} p - \operatorname{ch} p(2x-1)\bigr)dx =$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sh} p}\left(\operatorname{ch} p \cdot x - \frac{1}{2p}\operatorname{sh} p(2x-1)\right)\Big|_{x=0}^{x=1} = \frac{1}{\operatorname{sh} p}\left(\operatorname{ch} p - \frac{1}{p}\operatorname{sh} p\right) = \operatorname{cth} p - \frac{1}{p}. \quad (3.3)$$

Поскольку найденный след есть нечетная функция, то из свойств следа и регуляризованного интеграла следует, что

$$\eta(\mathcal{A}) = \frac{1}{2\pi i} \fint_{\mathbb{R}} \operatorname{tr}\bigl(\partial_p \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}\bigr)dp = 0.$$

Пример 2. Краевые условия нулевого порядка с параметром. На отрезке $[0,1]$ рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases} (\partial_x^2 - p^2)u(x) = f(x), \\ (p+i)u(0) = h_0, \quad u(1) = h_1. \end{cases} \quad (3.4)$$

Этой краевой задаче отвечает оператор

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A \\ \\ B \end{pmatrix} : H^s[0,1] \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-2}[0,1] \\ \oplus \\ \mathbb{C}^2 \end{matrix},$$

где $A = \partial_x^2 - p^2$, $Bu(x) = \bigl((p+i)u(0), u(1)\bigr)$.

Аналогично примеру 1 находим

$$\partial_p \mathcal{A} = \begin{pmatrix} -2p \\ i_0^* \end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}^{-1} = (R, C), \quad \partial_p \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1} = \begin{pmatrix} -2pR & -2pC \\ i_0^* R & i_0^* C \end{pmatrix},$$

где $i_0^* u(x) = (u(0), 0)$, Ch — решение задачи (3.4) при $f = 0$ и $h = (h_0, h_1)$, а оператор R такой же, как в (3). Из определения оператора C имеем

$$i_0^* Ch = \frac{h_0}{p+i}. \quad (3.5)$$

Далее, получаем

$$\operatorname{tr}(\partial_p \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}) = -2p \operatorname{tr} R + \operatorname{tr}(i_0^* C).$$

Выражение $-2p \operatorname{tr} R$ вычислено в (3.3). Наконец, из (3.3) и (3.5) получаем

$$\operatorname{tr}(\partial_p \mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}) = \operatorname{cth} p - \frac{1}{p} + \frac{1}{p+i}.$$

Таким образом,

$$\eta(\mathcal{A}) = \frac{1}{2\pi i}\fint_{\mathbb{R}} \frac{1}{p+i}dp = \frac{1}{2\pi i}\operatorname{reg-}\lim_{T\to\infty} \ln\left(\frac{T+i}{-T+i}\right) = \frac{1}{2\pi}\lim_{T\to\infty}\bigl(\arg(T+i) - \arg(-T+i)\bigr) = -\frac{1}{2}. \quad (3.6)$$

Пример 3. Краевые условия первого порядка с параметром. На отрезке $[0,1]$ рассмотрим краевую задачу

$$\begin{cases}(\partial_x^2-p^2)u(x)=f(x),\\ (p+i)u'(0)=h_0, \quad u(1)=h_1.\end{cases} \tag{3.7}$$

Этой краевой задаче отвечает оператор

$$\mathcal{A}=\begin{pmatrix}A\\ \\ B\end{pmatrix}\colon H^s[0,1]\longrightarrow \begin{matrix}H^{s-2}[0,1]\\ \oplus\\ \mathbb{C}^2\end{matrix}, \quad \text{где} \quad A=\partial_x^2-p^2, \quad Bu(x)=\big((p+i)u'(0),u(1)\big).$$

Аналогично предыдущему примеру находим

$$\partial_p\mathcal{A}=\begin{pmatrix}-2p\\ i_0^*\partial_x\end{pmatrix}, \quad \mathcal{A}^{-1}=(R,C), \quad \partial_p\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1}=\begin{pmatrix}-2pR & -2pC\\ i_0^*\partial_xR & i_0^*\partial_xC\end{pmatrix},$$

где $i_0^*u(x)=(u(0),0)$, Rf — решение задачи (3.7) с однородными краевыми условиями, а Ch — решение задачи (3.7) при $f=0$, $h=(h_0,h_1)$. Отсюда получаем

$$\operatorname{tr}(\partial_p\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})=-2p\operatorname{tr}R+\operatorname{tr}(i_0^*\partial_xC). \tag{3.8}$$

Из (3.2) имеем

$$Rf(x)=\frac{1}{p}\int\limits_0^x \operatorname{sh}p(x-y)f(y)dy-\frac{\operatorname{ch}px}{p\operatorname{ch}p}\int\limits_0^1 \operatorname{sh}p(1-y)f(y)dy. \tag{3.9}$$

Из определения оператора C имеем

$$i_0^*\partial_xCh=\frac{h_0}{p+i}. \tag{3.10}$$

Наконец, подставляя (3.9) и (3.10) в (3.8), имеем

$$\operatorname{tr}(\partial_p\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})=\frac{2}{\operatorname{ch}p}\int\limits_0^1 \operatorname{ch}px\operatorname{sh}p(1-x)dx+\frac{1}{p+i}=\operatorname{th}p+\frac{1}{p+i}.$$

Поскольку $\operatorname{th}p$ — нечетная функция, то аналогично (3.6) получаем

$$\eta(\mathcal{A})=\frac{1}{2\pi i}\;⨍\limits_{\mathbb{R}}\operatorname{tr}(\partial_p\mathcal{A}\mathcal{A}^{-1})dp=-\frac{1}{2}.$$

4. Определение операторов Буте де Монвеля с параметром

В этом разделе определяется класс операторов Буте де Монвеля (см. [6, 13, 31]), зависящих от параметра $p\in\mathbb{R}$. Рассматриваемый класс является более узким, чем классы из [19]. Мы используем схему определения псевдодифференциальных краевых задач из монографии [6].

Сглаживающие операторы с параметром. Рассмотрим следующие операторы с параметром на многообразии M:

- сглаживающий кограничный оператор $C\colon C^\infty(\partial M)\to C^\infty(M)$:

$$(Cu)(x)=\int\limits_{\partial M} c(x,y',p)u(y')dy', \quad \text{где} \quad u\in C^\infty(\partial M),\ c\in C^\infty\big(M\times\partial M,\mathcal{S}(\mathbb{R})\big); \tag{4.1}$$

- сглаживающий граничный оператор типа d, $B\colon C^\infty(M)\to C^\infty(\partial M)$:

$$(Bu)(x')=\sum_{k=0}^{d-1}\int\limits_{\partial M} b_k(x',y',p)\partial_{x_n}^k u(y',0)dy'+\int\limits_M b(x',y,p)u(y)dy, \tag{4.2}$$

  где $b_k\in C^\infty\big(\partial M\times\partial M,\mathcal{S}(\mathbb{R})\big)$, $b\in C^\infty\big(\partial M\times M,\mathcal{S}(\mathbb{R})\big)$;

- сглаживающий оператор Грина типа d, $G\colon C^\infty(M)\to C^\infty(M)$:

$$(Gu)(x',x_n)=\sum_{k=0}^{d-1}C_k\partial_{x_n}^k u(x',0)+\int\limits_M g(x,y,p)u(y)dy, \tag{4.3}$$

где C_k — сглаживающие кограничные операторы (см. (4.1)), а $g\in C^\infty\bigl(M\times M,\mathcal{S}(\mathbb{R})\bigr)$;

- сглаживающий оператор на границе, $D_X\colon C^\infty(\partial M)\to C^\infty(\partial M)$:

$$(D_Xu)(x')=\int\limits_{\partial M}d_X(x',y',p)u(y')dy',\quad \text{где}\quad d_X\in C^\infty\bigl(\partial M\times\partial M,\mathcal{S}(\mathbb{R})\bigr). \tag{4.4}$$

В этих формулах dy' и dy — гладкие меры на ∂M и M, соответственно. Тогда пространство $\Psi_p^{-\infty,d}(M)$ сглаживающих операторов с параметром по определению состоит из семейств операторов вида

$$\mathcal{D}=\begin{pmatrix}G & C\\ B & D_X\end{pmatrix}\colon \begin{matrix}C^\infty(M)\\ \oplus\\ C^\infty(\partial M)\end{matrix}\longrightarrow\begin{matrix}C^\infty(M)\\ \oplus\\ C^\infty(\partial M),\end{matrix}$$

где компоненты матрицы определяются формулами (4.1)–(4.4).

Непосредственно проверяется, что композиция сглаживающих операторов является сглаживающим оператором и имеет место соотношение

$$\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2\in\Psi_p^{-\infty,d_2}(M),\quad \text{где}\quad \mathcal{D}_j\in\Psi_p^{-\infty,d_j}(M),\ j=1,2.$$

Внутренний символ с параметром. Рассмотрим пространство $\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}=\mathbb{R}_{x'}^{n-1}\times\overline{\mathbb{R}}_{+,x_n}\times\mathbb{R}_t$. Его кокасательное расслоение равно $T^*\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}=\overline{\mathbb{R}}_+^{n+1}\times\mathbb{R}^{n+1}_{\xi',\xi_n,p}$. *Внутренним символом с параметром* будем называть функцию

$$a_{\mathrm{int}}=a_{\mathrm{int}}(x,\xi,p)\in C^\infty(T^*\overline{\mathbb{R}}_+^n\times\mathbb{R})$$

— классический символ, удовлетворяющий свойству трансмиссии, т. е. для него выполняются условия:

1) его порядок m является целым числом;
2) он имеет асимптотическое разложение

$$a_{\mathrm{int}}\sim a_{\mathrm{int},m}+a_{\mathrm{int},m-1}+\dots, \tag{4.5}$$

где компоненты $a_{\mathrm{int},j}$ являются однородными степени j по переменным (ξ,p) и удовлетворяют соотношениям (условия симметрии)

$$\partial_{x_n}^\alpha\partial_{\xi',p}^\beta a_{\mathrm{int},j}(x',0,0,1,0)=(-1)^{j+|\beta|}\partial_{x_n}^\alpha\partial_{\xi',p}^\beta a_{\mathrm{int},j}(x',0,0,-1,0).$$

Компоненту старшей степени в разложении (4.5) будем называть *внутренним главным символом с параметром.*

Граничный символ с параметром. Введем линейные пространства $H_+\overset{\mathrm{def}}{=}\mathcal{F}(\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_+))$ и $H_-\overset{\mathrm{def}}{=}\mathcal{F}(\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_-))$ Фурье-образов пространств Шварца на $\overline{\mathbb{R}}_+$ и $\overline{\mathbb{R}}_-$, соответственно. Эти пространства являются пространствами Фреше (топология переносится с пространств Шварца $\mathcal{S}(\overline{\mathbb{R}}_\pm)$). Определим проектор $\Pi_+\colon H_+\oplus H_-\to H_+$ на первое слагаемое и непрерывный функционал

$$\begin{aligned}\Pi'_{\xi_n}\colon\quad H_+\oplus H_-\quad &\longrightarrow\quad \mathbb{C},\\ u(\xi_n)\quad &\longmapsto\quad \lim_{x_n\to0+}\mathcal{F}^{-1}_{\xi_n\to x_n}u(\xi_n).\end{aligned}$$

Наконец, определим пространства $H'=\mathbb{C}[\xi_n]$ — пространство многочленов, $H=H_+\oplus H_-\oplus H'$, $H_m=H_+\oplus H_-\oplus\left\{\sum\limits_{j=0}^{m-1}c_j\xi_n^j\right\}$, а сумму пространства H_- и пространства многочленов степени $\leqslant d-1$ обозначим через H_-^d.

Граничным символом a_∂ с параметром в полупространстве $\overline{\mathbb{R}}_+^n=\{x\in\mathbb{R}^n\mid x_n\geqslant0\}$ будем называть граничный символ (т. е. граничный символ без параметра в смысле [2, § 2.2.5.2]) в $\overline{\mathbb{R}}^{n+1}_+ = \{(x,t)\in\mathbb{R}^{n+1}\mid x_n\geqslant 0\}$, который не зависит от переменной t. А именно, граничный символ a_∂ является оператор-функцией $a_\partial = a_\partial(x',\xi',p)$, $(x',\xi',p)\in\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$,

$$a_\partial(x',\xi',p)\colon \begin{matrix} H_+\\ \oplus\\ \mathbb{C}\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H_+\\ \oplus\\ \mathbb{C}\end{matrix},\quad a_\partial(x',\xi',p) = \begin{pmatrix}\Pi_+ a(\xi_n)+\Pi'_{\eta_n} g(\xi_n,\eta_n) & c(\xi_n)\\ \Pi'_{\xi_n} b(\xi_n) & d_X\end{pmatrix}, \tag{4.6}$$

и действует по формуле

$$a_\partial(x',\xi',p)\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Pi_+\big(a(x',\xi',\xi_n,p)u(\xi_n)\big)+\Pi'_{\eta_n}\big(g(x',\xi',\xi_n,\eta_n,p)u(\eta_n)\big)+c(x',\xi',\xi_n,p)v\\ \Pi'_{\xi_n}\big(b(x',\xi',\xi_n,p)u(\xi_n)\big)+d_X(x',\xi',p)v\end{pmatrix}.$$

В этих формулах функции a,b,c,d_X и g принадлежат пространствам

$$\begin{gathered} a\in C^\infty\big(T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R},H_{m+1}\big),\quad c\in C^\infty\big(T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R},H_+\big),\quad d_X\in C^\infty\big(T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}\big),\\ b\in C^\infty\big(T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R},H^d_-\big),\quad g\in C^\infty\big(T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R},H_+\otimes H^d_-\big)\end{gathered} \tag{4.7}$$

и являются классическими символами целых порядков m, $m-1$, m, m и $m-1$, соответственно. Будем предполагать, что функции a,b,c,g и d_X обращаются в нуль при $|x'|>R$ для некоторого R.

Напомним, что функции b,c и g в (4.7) называются *классическими* порядка m, если выполнены следующие условия:

1) для $\langle\xi',p\rangle = \big(1+\xi'^2+p^2\big)^{1/2}$ функции

$$\begin{aligned} b_{[0]} &= b(x',\xi',\langle\xi',p\rangle\xi_n,p)\in S^m(T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R},H^d_-),\\ c_{[0]} &= c(x',\xi',\langle\xi',p\rangle\xi_n,p)\in S^{m-1}(T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R},H_+),\\ g_{[0]} &= g(x',\xi',\langle\xi',p\rangle\xi_n,\langle\xi',p\rangle\eta_n,p)\in S^{m-1}(T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R},H_+\otimes H^d_-)\end{aligned} \tag{4.8}$$

суть символы со значениями в пространствах Фреше H^d_-, H_+ и $H_+\otimes H^d_-$, соответственно;

2) имеют место асимптотические разложения

$$b\sim\sum_{j\leqslant m}\widehat{b}_j,\quad c\sim\sum_{j\leqslant m-1}\widehat{c}_j,\quad g\sim\sum_{j\leqslant m-1}\widehat{g}_j, \tag{4.9}$$

где компоненты $\widehat{b}_j$, $\widehat{c}_j$ и $\widehat{g}_j$ разложений являются произведениями однородных функций степени j:

$$\begin{aligned} b_j(x',\lambda\xi',\lambda\xi_n,\lambda p) &= \lambda^j b_j(x',\xi',\xi_n,p),\\ c_j(x',\lambda\xi',\lambda\xi_n,\lambda p) &= \lambda^j c_j(x',\xi',\xi_n,p), \qquad \forall\,\lambda>0,\ |\xi'|^2+p^2>0,\\ g_j(x',\lambda\xi',\lambda\xi_n,\lambda\eta_n,\lambda p) &= \lambda^j b_j(x',\xi',\xi_n,\eta_n,p),\end{aligned}$$

на срезающую функцию $\chi\big(|\xi'|^2+p^2\big)$, где $\chi(\tau)=0$ при $\tau<\varepsilon$ и $\chi(\tau)=1$ при $\tau>2\varepsilon$;

3) разложения (4.9) являются асимптотическими в следующем смысле: для любого N разности

$$\widetilde{b}_N = b-\sum_{j>-N}^{m}\widehat{b}_j,\quad \widetilde{c}_N = c-\sum_{j>-N}^{m-1}\widehat{c}_j,\quad \widetilde{g}_N = g-\sum_{j>-N}^{m-1}\widehat{g}_j$$

удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} &\widetilde{b}_{N[0]}\in S^{-N}\big(T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R},H^d_-\big),\\ &\widetilde{c}_{N[0]}\in S^{-N}\big(T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R},H_+\big),\\ &\widetilde{g}_{N[0]}\in S^{-N}\big(T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R},H_+\otimes H^d_-\big)\end{aligned}$$

(здесь используются обозначения из формулы (4.8)).

Граничный символ (4.6), в котором функции a,g,c,b и d_X совпадают со старшими компонентами своих асимптотических разложений (см. (4.9), символ ПДО d_X имеет аналогичное разложение), называется *граничным главным символом с параметром.*

Операторы с параметром. Символу с параметром

$$a=(a_{\mathrm{int}},a_\partial)$$

сопоставим семейство операторов

$$\operatorname{Op}(a)\colon \begin{matrix} C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}}^n_+)\\ \oplus\\ C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1})\end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} C_c^\infty(\overline{\mathbb{R}}^n_+)\\ \oplus\\ C_c^\infty(\mathbb{R}^{n-1}),\end{matrix}$$

$$\operatorname{Op}(a)\begin{pmatrix}u\\ v\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}(2\pi)^{-n}\displaystyle\int\limits_{\mathbb{R}^n\times\overline{\mathbb{R}}^n_+} e^{i(x-y)\xi}a_{\mathrm{int}}(x,\xi,p)u(y)dyd\xi\\ 0\end{pmatrix}+ \tag{4.10}$$

$$+(2\pi)^{-(n-1)}\int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^{n-1}} e^{i(x'-y')\xi'}\begin{pmatrix}\mathcal{F}^{-1}_{\xi_n\to x_n} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}a_\partial(x',\xi')\begin{pmatrix}\mathcal{F}_{x_n\to\eta_n} & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u(x_n)\\ v(y')\end{pmatrix}dy'd\xi'.$$

При помощи разбиения единицы, подчинённого покрытию многообразия M с краем ∂M координатными картами, стандартным образом строится пространство $\Psi_p^{m,d}(M)$ псевдодифференциальных операторов с параметром на M. При этом бесконечно сглаживающие семейства из $\Psi_p^{-\infty,d}(M)$ образуют подпространство в $\Psi_p^{m,d}(M)$.

Теорема 4.1.

1) *Композиция операторов определяет отображение*

$$\begin{matrix}\Psi_p^{m_1,d_1}(M) & \times & \Psi_p^{m_2,d_2}(M) & \longrightarrow & \Psi_p^{m,d}(M)\\ \mathcal{D}_1 & & \mathcal{D}_2 & \longmapsto & \mathcal{D}_1\mathcal{D}_2,\end{matrix}$$

где $m=m_1+m_2$, $d=\max(d_2,d_1+m_2)$. *При этом главный символ композиции операторов равен композиции главных символов.*

2) *Пусть оператор* $\mathcal{D}(p)\in\Psi_p^{m,d}(M)$ *является эллиптическим, т. е. его внутренний главный символ обратим при* $|\xi|^2+p^2>0$, *и граничный главный символ обратим при* $|\xi'|^2+p^2>0$. *Тогда* $\mathcal{D}(p)$ *фредгольмов при всех* p *и обратим при достаточно больших значениях* $|p|$. *При этом имеем*

$$\mathcal{D}(p)^{-1}\in\Psi_p^{-m,0}(M). \tag{4.11}$$

Доказательство теоремы 4.1 основано на сведении операторов с параметром на многообразии M к операторам (без параметра) на произведении $M\times\mathbb{S}^1$. Это сведение отвечает специальному изоморфизму пространств Соболева на этих многообразиях, который мы сейчас опишем.

5. Изоморфизм пространств Соболева на $M\times\mathbb{R}$ и на $M\times\mathbb{S}^1\times\mathbb{S}^1$

Напомним [32, с. 375], что преобразование Фурье—Лапласа[1] задается формулой

$$\begin{matrix}\mathcal{F}_z\colon & L^2(\mathbb{R}_t) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{S}^1_t\times[0,2\pi]),\\ & u(t) & \longmapsto & (\mathcal{F}_zu)(t,\theta)=e^{i\theta t/2\pi}\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{i\theta n}u(t+2\pi n),\end{matrix} \tag{5.1}$$

где $\theta=-i\ln z\in[0,2\pi]$, $|z|=1$. Обратное преобразование Фурье—Лапласа задается формулой

$$u(t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}e^{-it\theta/2\pi}(\mathcal{F}_zu)(t,\theta)d\theta.$$

Обозначим через

$$\begin{matrix}\mathcal{L}=\mathcal{F}_z\circ\mathcal{F}^{-1}_{p\to t}\colon & L^2(\mathbb{R}_p) & \longrightarrow & L^2(\mathbb{S}^1_t\times[0,2\pi]),\\ & u(p) & \longmapsto & (\mathcal{L}u)(t,\theta)=\dfrac{1}{2\pi}e^{it\theta/2\pi}\displaystyle\sum_{n\in\mathbb{Z}}e^{i\theta n}\int\limits_{\mathbb{R}}e^{i(t+2\pi n)p}u(p)dp\end{matrix} \tag{5.2}$$

[1] В литературе встречаются различные названия этого преобразования, см. историческую справку в [20, с. 359]

композицию обратного преобразования Фурье

$$[\mathcal{F}^{-1}_{p\to t}u](t)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{itp}u(p)dp$$

и преобразования Фурье—Лапласа (5.1). Пользуясь равенством

$$\sum_n e^{in(\theta+2\pi p)}=2\pi\sum_n \delta(\theta+2\pi(p-n)),$$

из (5.2) получаем явную формулу для преобразования $\mathcal{L}$:

$$(\mathcal{L}u)(t,\theta)=\sum_n e^{itn}u(-\theta/2\pi+n). \tag{5.3}$$

Обратное к преобразованию $\mathcal{L}$ задается формулой

$$u(p)=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{\mathbb{R}}\int\limits_0^{2\pi} e^{-it(p+\theta/2\pi)}(\mathcal{L}u)(t,\theta)d\theta dt.$$

Через $\widetilde{H}^s(\mathbb{R})$ обозначим весовое L^2-пространство функций на прямой с нормой

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^s}=\int\limits_{\mathbb{R}}|u(p)|^2(1+|p|)^{2s}dp.$$

Лемма 5.1. *Преобразование* (5.3) *осуществляет изоморфизм пространств*

$$\mathcal{L}\colon \widetilde{H}^s(\mathbb{R}_p)\longrightarrow H^s(\mathbb{S}^1_t)\otimes L^2[0,2\pi].$$

Доказательство. Для $u\in\widetilde{H}^s(\mathbb{R}_p)$ имеем

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^s}=\int\limits_{\mathbb{R}}|u(p)|^2(1+|p|)^{2s}dp,\quad \|\mathcal{L}u\|^2_s=\int\limits_0^{2\pi}\sum_n\left|u\left(-\frac{\theta}{2\pi}+n\right)\right|^2(1+|n|)^{2s}d\theta,$$

где $\|\mathcal{L}u\|_s$ — норма в пространстве $H^s(\mathbb{S}^1_t)\otimes L^2[0,2\pi]$. Поскольку $1+|n|\sim 1+|-\theta/2\pi+n|$ равномерно по $n\in\mathbb{Z}$ и $\theta\in[0,2\pi]$, то получаем двустороннюю оценку

$$\|\mathcal{L}u\|_s\leqslant C\|u\|_{\widetilde{H}^s}\leqslant C'\|\mathcal{L}u\|_s,$$

где C и C' — некоторые константы. Из последней оценки следует, что отображение (5.3) — изоморфизм. □

Результаты этого раздела непосредственно переносятся на случай, когда функция u зависит от дополнительной переменной, пробегающей гладкое компактное многообразие M (возможно, с краем). В этом случае оператор $\mathcal{L}$ осуществляет изоморфизм пространств

$$\mathcal{L}\colon \widetilde{H}^s(M\times\mathbb{R}_p)\longrightarrow H^s(M\times\mathbb{S}^1_t)\otimes L^2(\mathbb{S}^1),$$

где $\widetilde{H}^s(M\times\mathbb{R}_p)=\mathcal{F}_{t\to p}H^s(M\times\mathbb{R}_t)$ — Фурье-образ пространства Соболева на бесконечном цилиндре, и норма в $\widetilde{H}^s(M\times\mathbb{R}_p)$ равна $\|u\|^2_{\widetilde{H}^s}=\int\limits_{\mathbb{R}}\|\!|u(p)|\!\|^2_s dp$.

6. Сведение операторов с параметром к операторам на цилиндре

Оператору с параметром $\mathcal{D}(p)\in\Psi^{m,d}_p(M)$ сопоставим ограниченный оператор, действующий в пространствах

$$\mathcal{D}=\mathcal{D}(p)\colon \begin{matrix}\widetilde{H}^s(M\times\mathbb{R}_p)\\ \oplus\\ \widetilde{H}^{s-1/2}(\partial M\times\mathbb{R}_p)\end{matrix}\longrightarrow\begin{matrix}\widetilde{H}^{s-m}(M\times\mathbb{R}_p)\\ \oplus\\ \widetilde{H}^{s-m-1/2}(\partial M\times\mathbb{R}_p).\end{matrix} \tag{6.1}$$

Используем преобразование $\mathcal{L}$ (см. (5.2)) и перейдём к изоморфному оператору

$$\widetilde{\mathcal{D}} \overset{\text{def}}{=} \mathcal{L}\mathcal{D}\mathcal{L}^{-1}\colon \begin{matrix} H^s(M\times\mathbb{S}^1_t)\otimes L^2[0,2\pi] \\ \oplus \\ H^{s-1/2}(\partial M\times\mathbb{S}^1_t)\otimes L^2[0,2\pi] \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-m}(M\times\mathbb{S}^1_t)\otimes L^2[0,2\pi] \\ \oplus \\ H^{s-m-1/2}(\partial M\times\mathbb{S}^1_t)\otimes L^2[0,2\pi]. \end{matrix}$$

Из определения (5.2) преобразования $\mathcal{L}$ следует, что последний оператор представляет собой семейство операторов, обозначаемых $\widetilde{\mathcal{D}}(\theta)$, действующих на произведении $M\times\mathbb{S}^1_t$:

$$\widetilde{\mathcal{D}}(\theta)\colon \begin{matrix} H^s(M\times\mathbb{S}^1_t) \\ \oplus \\ H^{s-1/2}(\partial M\times\mathbb{S}^1_t) \end{matrix} \longrightarrow \begin{matrix} H^{s-m}(M\times\mathbb{S}^1_t) \\ \oplus \\ H^{s-m-1/2}(\partial M\times\mathbb{S}^1_t). \end{matrix} \tag{6.2}$$

Поскольку преобразование $\mathcal{L}$ является изоморфизмом (см. лемму 5.1), то оператор (6.1) обратим тогда и только тогда, когда семейство (6.2) обратимо при всех $\theta\in[0,2\pi]$. Ниже мы покажем, что операторы $\widetilde{\mathcal{D}}(\theta)$ являются операторами Буте де Монвеля на произведении $M\times\mathbb{S}^1$ при всех $\theta\in[0,2\pi]$ и опишем, какие операторы Буте де Монвеля при этом получаются.

Предложение 6.1. *Отображение*

$$\begin{aligned} \Psi^{m,d}_p(M) \quad &\longrightarrow \qquad C^\infty\bigl(\mathbb{R}_\theta, \Psi^{m,d}(M\times\mathbb{S}^1_t)\bigr), \\ \mathcal{D}(p) \quad &\longmapsto \quad \widetilde{D}(\theta) = \mathcal{L}\mathcal{D}(p)\mathcal{L}^{-1} = \mathcal{D}\left(-i\partial_t - \frac{\theta}{2\pi}\right), \end{aligned} \tag{6.3}$$

(*сопоставляющее семейству $\mathcal{D}(p)$ ПДО с параметром $p\in\mathbb{R}$ на M ПДО на $M\times\mathbb{S}^1_t$, который гладко зависит от θ*) *корректно определено. При этом образ отображения* (6.3) *состоит из гладких семейств $\mathcal{A}(\theta)\in C^\infty\bigl(\mathbb{R}_\theta,\Psi^{m,d}(M\times\mathbb{S}^1_t)\bigr)$ ПДО на $M\times\mathbb{S}^1_t$, удовлетворяющих условиям:*

1) *оператор $\mathcal{A}(\theta)$ инвариантен относительно вращений*

$$(x,t)\mapsto(x,t+t') \qquad \forall\, t'\in\mathbb{R},\ (x,t)\in M\times\mathbb{S}^1;$$

2) *выполнено условие скрученной периодичности*

$$\mathcal{A}(\theta+2\pi) = e^{-it}A(\theta)e^{it};$$

3) *полный символ $\sigma\bigl(\mathcal{A}(\theta)\bigr)$ семейства $\mathcal{A}(\theta)$ удовлетворяет соотношению*

$$\sigma\bigl(\mathcal{A}(\theta)\bigr)(x,\xi,\tau) = \sigma\bigl(\mathcal{A}(0)\bigr)\left(x,\xi,\tau-\frac{\theta}{2\pi}\right) \sim \sum_{j\geqslant 0}\frac{1}{j!}\left(\frac{-\theta}{2\pi}\right)^j \partial^j_\theta\sigma\bigl(\mathcal{A}(0)\bigr)(x,\xi,\tau). \tag{6.4}$$

Доказательство.

1. Сначала рассмотрим сглаживающие операторы, т. е. случай, когда $m=-\infty$. Из определения отображения $\mathcal{L}$ следует равенство

$$\widetilde{\mathcal{D}}(\theta) = \mathcal{D}\left(-i\partial_t-\frac{\theta}{2\pi}\right) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{F}^{-1}_{k\to t}\mathcal{D}\left(k-\frac{\theta}{2\pi}\right)\mathcal{F}_{t\to k}, \tag{6.5}$$

где $\mathcal{F}_{t\to k}$ — преобразование Фурье на $\mathbb{S}^1_t$ (т. е. переход от функции переменной t к её коэффициентам Фурье). Поскольку семейство $\mathcal{D}(p)$ быстро убывает при $p\to\infty$, то каждый оператор $\widetilde{\mathcal{D}}(\theta)$ является сглаживающим, и эти операторы гладко зависят от θ. При этом из формулы (6.5) очевидно, что полученное семейство будет инвариантно относительно вращений и будет скрученно периодическим. Обратно, если семейство $A(\theta)\in C^\infty\bigl(\mathbb{R}_\theta,\Psi^{-\infty,d}(M\times\mathbb{S}^1_t)\bigr)$ состоит из сглаживающих операторов Буте де Монвеля на $M\times\mathbb{S}^1_t$, инвариантно относительно вращений и является скрученно-периодическим, то оно имеет вид (6.5) для некоторого сглаживающего семейства с параметром $\mathcal{D}(p)\in\Psi^{-\infty,d}_p(M)$. В самом деле, поскольку семейство $A(\theta)$ инвариантно относительно вращений, то оно имеет вид

$$A(\theta)u(t) = \mathcal{F}^{-1}_{k\to t}A(\theta,k)\mathcal{F}_{t\to k}u,$$

где семейство $A(\theta,k)\in\Psi^{-\infty,d}(M)$ гладко зависит от $\theta\in\mathbb{R}$ и быстро убывает при $k\to\infty$. При этом условие скрученной периодичности для всех θ и k имеет вид

$$A(\theta+2\pi,k) = A(\theta,k-1). \tag{6.6}$$

Теперь определим функцию $p \mapsto A(-2\pi p, 0) \in \Psi^{-\infty,d}(M)$. Из (6.6) следует равенство

$$A(-2\pi p, 0) = A\big((-2\pi\{p\}, [p]\big),$$

где $p = [p] + \{p\}$ — разложение на целую и дробную части числа p. Поэтому рассматриваемая функция быстро убывает при $p \to \infty$. Функции $A(-2\pi p, 0)$ отвечает оператор

$$\widetilde{A} = \mathcal{F}^{-1}_{k\to t} A\left(-2\pi(k - \theta/2\pi), 0\right) \mathcal{F}_{t\to k} = \mathcal{F}^{-1}_{k\to t} A(\theta, k)\mathcal{F}_{t\to k} = A(\theta).$$

Здесь второе равенство выполнено в силу скрученной периодичности.

Итак, мы показали, что семейство $A(\theta)$ лежит в образе отображения (6.3).

2. Докажем, что отображение (6.3) корректно определено, т. е. оператор $\widetilde{D}(\theta)$ является ПДО на произведении $M \times \mathbb{S}^1_t$, гладко зависящим от параметра θ. Это утверждение является обобщением известного результата о псевдодифференциальности операторов на окружности, определяемых при помощи рядов Фурье (см., напр., [1,29]). В силу доказанного п. 1 достаточно рассмотреть случай полупространства $M = \overline{\mathbb{R}}^n_+$. Мы приведём доказательство для ПДО $\mathcal{D}(p) = A(p)$ со свойством трансмиссии

$$\big(A(p)u\big)(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^n} \int\limits_{\overline{\mathbb{R}}^n_+ \times \mathbb{R}^n} e^{i(x-x')\xi} a(x, \xi, p)u(x')dx'd\xi.$$

Для остальных компонент оператора Буте де Монвеля доказательство аналогично, поэтому мы его опускаем.

С одной стороны, соответствующий оператор $\widetilde{A}(\theta)\colon C^\infty_c(\overline{\mathbb{R}}^n_+ \times \mathbb{S}^1_t) \to C^\infty_c(\overline{\mathbb{R}}^n_+ \times \mathbb{S}^1_t)$ равен

$$\big(\widetilde{A}(\theta)u\big)(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \int\limits_{\overline{\mathbb{R}}^n_+ \times \mathbb{R}^{n+2}} e^{i[(x-x')\xi + (t-t')p]} a\left(x, \xi, p - \frac{\theta}{2\pi}\right) u(x', t')dx'dt'd\xi dp.$$

Здесь мы рассматриваем функции на произведении $\overline{\mathbb{R}}^n_+ \times \mathbb{S}^1_t$ как функции на произведении $\overline{\mathbb{R}}^n_+ \times \mathbb{R}_t$, которые являются периодическими по переменной t с периодом 2π. Это определение даёт тот же оператор, что и применение формулы (6.5).

С другой стороны, по символу $a(x, \xi, p - \theta/2\pi)$ можно построить ПДО на цилиндре $\overline{\mathbb{R}}_+ \times \mathbb{S}^1_t$, пользуясь разбиением единицы на $\mathbb{S}^1_t$. А именно, рассмотрим

- покрытие $\mathbb{S}^1 = U_1 \cup U_2$, где $U_1 = \mathbb{S}^1 \setminus \{t = 0\}$ и $U_2 = \mathbb{S}^1 \setminus \{t = \pi\}$;
- функции $\rho_k \in C^\infty_c(U_k)$, $k = 1, 2$, — разбиение единицы, подчинённое покрытию;
- функции $\chi_k \in C^\infty_c(U_k)$ со свойством $\chi_k(t) \equiv 1$ для всех t из малой окрестности носителя функции ρ_k;
- функции $\rho_{kj}, \chi_{kj} \in C^\infty_c(\mathbb{R}_t)$, где $\rho_{1j} = \rho_1(t)$ при $|t - (\pi + 2\pi j)| < \pi$, $\rho_{2j}(t) = \rho_2(t)$ при $|t - 2\pi j| < \pi$ и нулю иначе.

Определим оператор $\overline{A}(\theta)\colon C^\infty_c(\overline{\mathbb{R}}^n_+ \times \mathbb{S}^1_t) \to C^\infty_c(\overline{\mathbb{R}}^n_+ \times \mathbb{S}^1_t)$ по формуле

$$\big(\overline{A}(\theta)u\big)(x, t) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \sum_{k,j} \int\limits_{\overline{\mathbb{R}}^n_+ \times \mathbb{R}^{n+2}} e^{i[(x-x')\xi + (t-t')p]} a\left(x, \xi, p - \frac{\theta}{2\pi}\right) \chi_{kj}(t)\rho_{kj}(t')u(x', t')dx'dt'd\xi dp.$$

Покажем, что разность $\widetilde{A}(\theta) - \overline{A}(\theta)$ является гладким семейством сглаживающих операторов. Имеем

$$\begin{aligned}
&\big(\widetilde{A}(\theta) - \overline{A}(\theta)\big)u = \\
&\quad = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \sum_{k,j} \int\limits_{\overline{\mathbb{R}}^n_+ \times \mathbb{R}^{n+2}} e^{i[(x-x')\xi + (t-t')p]} a\left(x, \xi, p - \frac{\theta}{2\pi}\right) \big(1 - \chi_{kj}(t)\big)\rho_{kj}(t')u(x', t')dx'dt'd\xi dp = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \sum_{k,j} \int\limits_{\overline{\mathbb{R}}^n_+ \times \mathbb{R}^{n+2}} L^N\big(e^{i[(x-x')\xi + (t-t')p]}\big) a\left(x, \xi, p - \frac{\theta}{2\pi}\right) \big(1 - \chi_{kj}(t)\big)\rho_{kj}(t')u(x', t')dx'dt'd\xi dp = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \sum_{k,j} \int\limits_{\overline{\mathbb{R}}^n_+ \times \mathbb{R}^{n+2}} e^{i[(x-x')\xi + (t-t')p]} \left(L^N a\left(x, \xi, p - \frac{\theta}{2\pi}\right)\right) \big(1 - \chi_{kj}(t)\big)\rho_{kj}(t')u(x', t')dx'dt'd\xi dp.
\end{aligned}$$

Здесь число N достаточно велико, а $L = L^* = -i(t-t')^{-1}\partial_p$ — симметрический дифференциальный оператор первого порядка.

Поскольку оператор рассматривается в пространстве периодических функций, то его ядро Шварца равно

$$K(x,t,x',t') = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \sum_{k,j,\ell} \bigl(1-\chi_{kj}(t)\bigr)\rho_{kj}(t'+2\pi\ell) \int_{\mathbb{R}^{n+1}} e^{i[(x-y)\xi+(t-t'-2\pi\ell)p]} \left(L^N a\left(x,\xi,p-\frac{\theta}{2\pi}\right)\right) d\xi dp.$$

Пусть $t, t' \in [0,2\pi]$. Тогда в последней сумме мы можем учитывать только слагаемые, для которых $|\ell - j| \leqslant 1$, поскольку остальные слагаемые равны нулю в силу свойств носителя функций ρ_{kj}. Ядро Шварца оценивается равномерно следующим образом:

$$|K(x,t,x',t')| \leqslant C \sum_{k,|\ell-j|\leqslant 1} \bigl(1-\chi_{kj}(t)\bigr)\rho_{kj}(t'+2\pi\ell)|t-t'-2\pi\ell|^{m-N} \leqslant C + C\sum_{|\ell|\geqslant 2} |\ell|^{m-N} < C,$$

где через C обозначаем произвольные константы. Здесь мы сначала воспользовались символьными оценками для символа $a(x,\xi,p)$, а затем воспользовались свойствами функций χ_{kj}. Аналогичным образом оцениваются производные ядра Шварца. Поскольку число N можно выбрать произвольно большим, отсюда следует искомая гладкость ядра Шварца оператора $\widetilde{A}(\theta) - \overline{A}(\theta)$.

Итак, мы установили, что оператор $\widetilde{A}(\theta)$ — ПДО на цилиндре с полным символом

$$\sigma_{\mathrm{int}}\bigl(\widetilde{A}(\theta)\bigr) = a\left(x,\xi,p-\frac{\theta}{2\pi}\right) \sim \sum_{j\geqslant 0} \frac{1}{j!}\left(-\frac{\theta}{2\pi}\right)^j \partial_p^j a(x,\xi,p).$$

В частности, отсюда следует искомое равенство (6.4). Таким образом, мы доказали корректность определения отображения (6.3) и свойств 1)–3) в случае ПДО $A(p)$ в операторе Буте де Монвеля. Доказательство для остальных компонент проводится аналогично.

3. Осталось доказать, что образ отображения (6.3) состоит в точности из семейств, которые удовлетворяют условиям 1)–3). Пусть $A(\theta) \in C^\infty\bigl(\mathbb{R}_\theta, \Psi^{m,d}(M\times\mathbb{S}^1_t)\bigr)$ — гладкое семейство операторов на торе, удовлетворяющее свойствам 1)–3). Через $\sigma(A(\theta))$ обозначим полный символ этого семейства. В силу условий 1) и 3) этот полный символ равен $a(x,\xi,p-\theta/2\pi)$ для некоторого полного символа с параметром $a(x,\xi,p)$. Через $A_0(p) \in \Psi_p^{m,d}(M)$ обозначим какое-нибудь семейство с параметром с полным символом $a(x,\xi,p)$. Тогда разность операторов на торе $A(\theta) - \widetilde{A}_0(\theta)$ будет иметь нулевой полный символ, т. е. мы будем иметь $A(\theta) - \widetilde{A}_0(\theta) \in \Psi^{-\infty,d}(M\times\mathbb{S}^1)$. Поэтому последняя разность лежит в образе отображения (6.3) в силу доказанного выше п. 1. Следовательно, семейство $A(\theta) = (A(\theta) - \widetilde{A}_0(\theta)) + \widetilde{A}_0(\theta)$ также лежит в образе этого отображения (как сумма элементов из образа).

Предложение доказано. □

Вернёмся к доказательству теоремы 4.1.

Доказательство.

1. Рассмотрим операторы $\mathcal{D}_j \in \Psi_p^{m_j,d_j}(M)$, $j=1,2$, и их композицию $\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2$. Тогда имеем

$$\widetilde{\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2} = \widetilde{\mathcal{D}}_1\widetilde{\mathcal{D}}_2.$$

Теперь $\widetilde{\mathcal{D}}_1$ и $\widetilde{\mathcal{D}}_2$ — гладкие семейства задач Буте де Монвеля на $M\times\mathbb{S}^1$, $\widetilde{\mathcal{D}}_j \in C^\infty\bigl(\mathbb{R}_\theta, \Psi^{m_j,d_j}(M\times\mathbb{S}^1)\bigr)$. Поэтому в силу теоремы о композиции операторов Буте де Монвеля (см. [6,13]) имеем

$$\widetilde{\mathcal{D}}_1\widetilde{\mathcal{D}}_2 \in C^\infty\bigl(\mathbb{R}_\theta, \Psi^{m,d}(M\times\mathbb{S}^1)\bigr),$$

где показатели m и d такие же, как в теореме 4.1. При этом последняя композиция состоит из операторов, инвариантных относительно вращений и скрученно периодических, а их полные символы удовлетворяют соотношению (6.4). Следовательно, семейство $\widetilde{\mathcal{D}_1\mathcal{D}_2}$ является образом семейства операторов с параметром, т. е. мы получаем искомое соотношение $\mathcal{D}_1(p)\mathcal{D}_2(p) \in \Psi_p^{m,d}(M)$. Первое утверждение теоремы 4.1 доказано.

2. Пусть $\mathcal{D}(p) \in \Psi_p^{m,d}(M)$ — эллиптическое семейство с параметром. Из доказанного п. 1 следует, что оператор $\widetilde{\mathcal{D}}(\theta)$ является эллиптическим. Отсюда и из результатов работы [6] следует,

что оператор $\widetilde{\mathcal{D}}(\theta)$ обратим с точностью до сглаживающих операторов. Следовательно, семейство $\mathcal{D}(p)$ обратимо с точностью до сглаживающего семейства, т. е. существует такое семейство $\mathcal{D}'(p) \in \Psi^{-m,0}(M)$, что выполнены равенства

$$\mathcal{D}(p)\mathcal{D}'(p) - 1 \in \Psi_p^{-\infty,0}(M) \quad \text{и} \quad \mathcal{D}'(p)\mathcal{D}(p) - 1 \in \Psi_p^{-\infty,d}(M). \tag{6.7}$$

Поскольку семейства из $\Psi_p^{-\infty,d}(M)$ определяют операторы в пространствах Соболева с нормой, быстро стремящейся к нулю при $p \to \infty$, то из (6.7) следует обратимость семейства $\mathcal{D}(p)$ при больших значениях $|p|$ и соотношение (4.11). Второе утверждение теоремы 4.1 доказано. □

7. Доказательства основных результатов

Докажем теорему 2.1. Заметим сначала, что композиция (2.4) является оператором Буте де Монвеля с параметром. В следующей лемме даются оценки порядков и типов его компонент.

Лемма 7.1. *Рассмотрим произведение вида* (2.2), *в котором множители* $\mathcal{D}_j$ *и* $\mathcal{D}_{0j}$ *являются псевдодифференциальными операторами-столбцами вида* (2.1), *порядки и типы которых связаны неравенствами* (2.3). *Тогда произведение* (2.2) *является оператором типа Буте де Монвеля*

$$\begin{pmatrix} A+G & C \\ B & D \end{pmatrix},$$

где операторы B и G имеют тип, равный нулю, а порядки компонент оцениваются следующим образом:

$$\begin{matrix} \operatorname{ord} A, \operatorname{ord} G \leqslant m_1 - m_0 + k, & \operatorname{ord} D \leqslant b_1 - b_0 + k, \\ \operatorname{ord} B \leqslant b_1 - m_0 + k, & \operatorname{ord} C \leqslant m_1 - b_0 + k, \end{matrix} \quad \text{где} \quad k = \sum_{j=2}^{N} \max(m_j - m_0, b_j - b_0). \tag{7.1}$$

Доказательство. Лемма доказывается индукцией по числу множителей.

1. При $N = 1$ имеем

$$\mathcal{D}_1 \mathcal{D}_{01}^{-1} = \begin{pmatrix} A_1 + G_1 & C_1 \\ B_1 & D_1 \end{pmatrix},$$

где $\operatorname{ord} A_1$, $\operatorname{ord} G_1 \leqslant m_1 - m_0$, $\operatorname{ord} C_1 \leqslant m_1 - b_0$, $\operatorname{ord} B_1 \leqslant b_1 - m_0$, $\operatorname{ord} D_1 \leqslant b_1 - b_0$ и тип равен нулю. Получаем, что оценки (7.1) верны.

2. Пусть для произведения $\prod\limits_{j=1}^{N-1} \mathcal{D}_j \mathcal{D}_{0j}^{-1}$ справедливы оценки (7.1), т. е.

$$\prod_{j=1}^{N-1} \mathcal{D}_j \mathcal{D}_{0j}^{-1} = \begin{pmatrix} A+G & C \\ B & D \end{pmatrix}, \tag{7.2}$$

причём выполнены оценки порядков операторов

$$\begin{gathered} \operatorname{ord} A,\ \operatorname{ord} G \leqslant m_1 - m_0 + k_{N-1}, \quad \operatorname{ord} C \leqslant m_1 - b_0 + k_{N-1}, \\ \operatorname{ord} B \leqslant b_1 - m_0 + k_{N-1}, \quad \operatorname{ord} D \leqslant b_1 - b_0 + k_{N-1}, \\ k = k_{N-1} = \sum_{j=2}^{N-1} \max(m_j - m_0, b_j - b_0) \end{gathered}$$

и тип равен нулю. Получим аналогичные оценки для композиции

$$\prod_{j=1}^{N} \mathcal{D}_j \mathcal{D}_{0j}^{-1} = \left(\prod_{j=1}^{N-1} \mathcal{D}_j \mathcal{D}_{0j}^{-1} \right) \left(\mathcal{D}_N \mathcal{D}_{0N}^{-1} \right) = \begin{pmatrix} A+G & C \\ B & D \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_N + G_N & C_N \\ B_N & D_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A' + G' & C' \\ B' & D' \end{pmatrix}, \tag{7.3}$$

где $\mathrm{ord} A_N$, $\mathrm{ord} G_N \leqslant m_N - m_0$, $\mathrm{ord} C_N \leqslant m_N - b_0$, $\mathrm{ord} B_N \leqslant b_N - m_0$, $\mathrm{ord} D_N \leqslant b_N - b_0$ и тип равен нулю. Тогда из (7.2) и (7.3) получаем оценки для порядков компонент A', G', B', C' и D':

$$\begin{aligned}
\mathrm{ord}\, A',\ \mathrm{ord}\, G' &\leqslant \max(\mathrm{ord}\, A + \mathrm{ord}\, A_N, \mathrm{ord}\, C + \mathrm{ord}\, B_N) \leqslant \\
&\leqslant \max(m_1 - m_0 + k_{N-1} + m_N - m_0, m_1 - b_0 + k_{N-1} + b_N - m_0) = \\
&= m_1 - m_0 + k_{N-1} + \max(m_N - m_0, b_N - b_0) = m_1 - m_0 + k_N; \\
\mathrm{ord}\, C' &\leqslant \max(\mathrm{ord}\, A + \mathrm{ord}\, C_N, \mathrm{ord}\, C + \mathrm{ord}\, D_N) \leqslant \\
&\leqslant \max(m_1 - m_0 + k_{N-1} + m_N - b_0, m_1 - b_0 + k_{N-1} + b_N - b_0) = \\
&= m_1 - b_0 + k_{N-1} + \max(m_N - m_0, b_N - b_0) = m_1 - b_0 + k_N; \\
\mathrm{ord}\, B' &\leqslant \max(\mathrm{ord}\, B + \mathrm{ord}\, A_N, \mathrm{ord}\, D + \mathrm{ord}\, B_N) \leqslant \\
&\leqslant \max(b_1 - m_0 + k_{N-1} + m_N - m_0, b_1 - b_0 + k_{N-1} + b_N - m_0) = \\
&= b_1 - m_0 + k_{N-1} + \max(m_N - m_0, b_N - b_0) = m_1 - b_0 + k_N; \\
\mathrm{ord}\, D' &\leqslant \max(\mathrm{ord}\, B + \mathrm{ord}\, C_N, \mathrm{ord}\, D + \mathrm{ord}\, D_N) \leqslant \\
&\leqslant \max(b_1 - m_0 + k_{N-1} + m_N - b_0, b_1 - b_0 + k_{N-1} + b_N - b_0) = \\
&= b_1 - b_0 + k_{N-1} + \max(m_N - m_0, b_N - b_0) = b_1 - b_0 + k_N.
\end{aligned}$$

При этом для типов получаем

$$\text{тип}\, G' \leqslant \max(\text{тип}\, G_N, \text{тип}\, G + \mathrm{ord}\, A_N, \text{тип}\, B_N) = \max(0, \mathrm{ord}\, A_N, 0) = 0, \quad \text{поскольку} \quad \mathrm{ord}\, A_N \leqslant 0;$$
$$\text{тип}\, B' \leqslant \max(\text{тип}\, G_N, \text{тип}\, B + \mathrm{ord}\, A_N, \text{тип}\, B_N) = \max(0, \mathrm{ord}\, A_N, 0) = 0.$$

Лемма доказана. □

Продолжим доказательство теоремы 2.1. Из леммы 7.1 следует, что композиция (2.4) является оператором Буте де Монвеля вида

$$\mathcal{D}(p) = \begin{pmatrix} A(p) + G(p) & C(p) \\ B(p) & D(p) \end{pmatrix}, \quad \text{где} \quad \begin{gathered} A \in \Psi_p^{m_1 - m_0 + k}(M), G \in \Psi_p^{m_1 - m_0 + k, 0}(M), C \in \Psi_p^{m_1 - b_0 + k}(M), \\ B \in \Psi_p^{b_1 - m_0 + k, 0}(M), D \in \Psi_p^{b_1 - b_0 + k}(\partial M). \end{gathered} \tag{7.4}$$

Покажем, что из условий (2.5) и формулы (4.10) следует, что оператор $\mathcal{D}(p)$ имеет непрерывное ядро Шварца и, следовательно, имеет след. В самом деле, порядки псевдодифференциальных операторов A и D удовлетворяют неравенствам (в силу (2.5))

$$\mathrm{ord}\, A \leqslant m_1 - m_0 + k < -\dim M, \quad \mathrm{ord}\, D \leqslant b_1 - b_0 + k < -\dim \partial M.$$

Следовательно, эти операторы имеют непрерывные ядра Шварца и являются ядерными. Аналогично проверяется, что операторы B, C и G в (7.4) также имеют непрерывные ядра Шварца.

Для получения асимптотического разложения (2.6) представим оператор $\mathcal{D}(p)$ с точностью до сглаживающих операторов в виде (4.10) в локальной карте в окрестности края ∂M. Имеем выражение для следа

$$\mathrm{tr}\, \mathrm{Op}(a) = (2\pi)^{-n} \int\limits_{T^*\overline{\mathbb{R}}^n_+} a_{\mathrm{int}}(x, \xi, p) dx d\xi + \\ + (2\pi)^{-(n-1)} \int\limits_{T^*\mathbb{R}^{n-1}} \big(\Pi'_{\xi_n} g(x', \xi', \xi_n, \xi_n, p) + d_X(x', \xi', p)\big) dx' d\xi'. \tag{7.5}$$

Символы a_{int} и d_X являются классическими и имеют порядки $\leqslant m_1 - m_0 + k$ и $b_1 - b_0 + k$, соответственно. Поэтому их интегралы имеют асимптотику вида (2.6) с показателями ℓ, равными $m_1 - m_0 + k + \dim M$ и $b_1 - b_0 + k + \dim M - 1$, соответственно, и при $p \to \pm\infty$ имеют искомый вид (2.6) (ср. [24], см. также [3]).

Наконец, поскольку порядок символа g удовлетворяет оценке $\leqslant m_1 - m_0 + k < -1$, то в (7.5) мы можем заменить функционал Π'_{ξ_n} на интегрирование $(2\pi)^{-1} \int\limits_{\mathbb{R}} \cdot \, d\xi_n$ и получить интеграл

$$\int\limits_{T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}} g(x', \xi', \xi_n, \xi_n, p) dx' d\xi' d\xi_n. \tag{7.6}$$

Утверждается, что интеграл (7.6) имеет асимптотическое разложение вида (2.6) при $p \to \infty$. В самом деле, так как функция g является классической, то достаточно рассмотреть два случая.

1. Пусть $g = \chi(\xi', p) g_j(x', \xi', \xi_n, \eta_n, p)$, где $\chi \equiv 0$ в окрестности нуля $\xi' = 0$, $p = 0$, и $\chi \equiv 1$ в окрестности бесконечности, а функция g_j — однородная степени j по переменным (ξ', ξ_n, η_n, p). В этом случае при больших p получаем $g = g_j$. Поэтому интеграл в (7.6) равен

$$\int\limits_{T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}} g_j(x', \xi', \xi_n, \xi_n, p) dx' d\xi' d\xi_n = |p|^{j+n} \int\limits_{T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}} g_j\left(x', \eta', \eta_n, \eta_n, \frac{p}{|p|}\right) dx' d\eta' d\eta_n$$

(здесь мы воспользовались однородностью функции g_j) и является однородной функцией степени $j + n$ при больших p, т. е. имеет асимптотику вида (2.6).

2. Пусть функция $g(x', \xi', \xi_n, \eta_n, p)$ такова, что выполнено условие

$$g_{[0]} = g(x', \xi', \langle \xi', p\rangle \xi_n, \langle \xi', p\rangle \eta_n, p) \in S^j\big(T^*\mathbb{R}^{n-1} \times \mathbb{R}, H_+ \otimes H_-^0\big), \tag{7.7}$$

где j — достаточное большое по модулю отрицательное число, а $\langle \xi', p\rangle = \sqrt{1 + |\xi'|^2 + p^2}$. Из соотношения (7.7) получаем оценку

$$|g_{[0]}| \leqslant C \langle \xi', p\rangle^j \langle \xi_n\rangle^{-1} \langle \eta_n\rangle^{-1}.$$

Это даёт оценку для функции g:

$$|g(x', \xi', \xi_n, \xi_n, p)| \leqslant C \langle \xi', p\rangle^j \langle \xi_n \langle \xi', p\rangle^{-1}\rangle^{-2}.$$

Это позволяет оценить интеграл от этой функции:

$$\begin{aligned}\left| \int\limits_{T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}} g(x', \xi' \xi_n, \xi_n, p) dx' d\xi' d\xi_n \right| &\leqslant C \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}} \langle \xi', p\rangle^j \langle \xi_n \langle \xi', p\rangle^{-1}\rangle^{-2} dx' d\xi' d\xi_n = \\ &= C \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \langle \xi', p\rangle^j \left(\int\limits_{\mathbb{R}} \langle \xi_n \langle \xi', p\rangle^{-1}\rangle^{-2} d\xi_n \right) dx' d\xi' = C \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \langle \xi', p\rangle^{j+1} \pi \leqslant \\ &\leqslant C' \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}} \big(|\xi'|^2 + p^2\big)^2 d\xi' = C'' |p|^{j+1+n-1} = C'' |p|^{j+n}.\end{aligned}$$

Из выражения в п. 1 и оценки в п. 2 следует, что интеграл (7.6) имеет искомое асимптотическое разложение (2.6).

Наконец, асимптотическое разложение можно дифференцировать по параметру p, поскольку коэффициенты в асимптотическом разложении (2.6) являются суммами интегралов от однородных компонент полного символа. Доказательство теоремы 2.1 завершено.

Дадим явную формулу для формального следа (см. теорему 2.2).

Теорема 7.1. *Для оператора Буте де Монвеля $\mathcal{D}(p)$ вида* (7.4) *имеет место равенство*

$$\widetilde{\operatorname{Tr}}\, \mathcal{D}(p) = \widetilde{\operatorname{Tr}}\, A(p) + \widetilde{\operatorname{Tr}}\, G(p) + \widetilde{\operatorname{Tr}}\, D(p),$$

где

$$\widetilde{\operatorname{Tr}}\, A(p) = \int\limits_{T^*M} \sigma(A)_{-\dim M}(x, \xi, p)\Big|_{p=-1}^{p=1} dx d\xi, \tag{7.8}$$

$$\widetilde{\operatorname{Tr}}\, G(p) = \int\limits_{T^*\partial M\times\mathbb{R}} \sigma(G)_{-\dim M}(x', \xi', \xi_n, \xi_n, p)\Big|_{p=-1}^{p=1} dx' d\xi' d\xi_n, \tag{7.9}$$

$$\widetilde{\operatorname{Tr}}\, D(p) = \int\limits_{T^*\partial M} \sigma(D)_{-\dim \partial M}(x', \xi', p)\Big|_{p=-1}^{p=1} dx' d\xi'. \tag{7.10}$$

Здесь $\sigma(\cdot)_j$ — однородная компонента степени j полного символа соответствующего оператора.

Доказательство. Равенства (7.8) и (7.10) установлены в [24, Proposition 6]. Докажем равенство (7.9). Для оператора $G(p)$, отвечающего функции $g = \chi g_j$, где g_j — однородная функция степени j (см. п. 1 доказательства теоремы 2.1), имеем

$$\widetilde{\operatorname{Tr}}\, G(p) = \operatorname{reg-}\lim_{T\to\infty} \int\limits_{-T}^{T} \operatorname{TR} \partial_p G(p) dp =$$

$$= \operatorname{reg-}\lim_{T\to\infty} \int\limits_{-T}^{T} \int\limits_{\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}^n} \left(\partial_p g(x', \xi', \xi_n, \xi_n, p) - \sum_{\ell=0}^{N-1} \frac{1}{\ell!} \partial_p^{\ell+1} g(x', \xi', \xi_n, \xi_n, 0) p^\ell \right) dx' d\xi' d\xi_n =$$

$$= \begin{cases} \displaystyle\int\limits_{T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}} g(x', \xi', \xi_n, \xi_n, p)\Big|_{p=-1}^{p=1} \frac{\omega^n}{n!} & \text{при} \quad j = n = \dim M, \\ 0 & \text{при} \quad j \neq \dim M. \end{cases} \tag{7.11}$$

Здесь ω — стандартная симплектическая форма на $T^*\mathbb{R}^{n-1}\times\mathbb{R}$. Второе равенство в (7.11) получено прямым вычислением, а третье — следует из [24, Proposition 6]. ☐

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агранович М. С.* Об эллиптических псевдодифференциальных операторах на замкнутой кривой// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1984. — *47*. — С. 22–67.
2. *Агранович М. С., Вишик М. И.* Эллиптические задачи с параметром и параболические задачи общего вида// Усп. мат. наук. — 1964. — *19*, № 3. — С. 53–161.
3. *Жуйков К. Н. Савин А. Ю.* Эта-инвариант для семейств с параметром и периодическими коэффициентами// Уфимск. мат. ж. — 2022. — *14*, № 2. — С. 37–57.
4. *Жуйков К. Н., Савин А. Ю.* Эта-инварианты для операторов с параметром, ассоциированных с действием дискретной группы// Мат. заметки. — 2022. — *112*, № 5. — С. 705–717.
5. *Кондратьев В. А.* Краевые задачи для эллиптических уравнений в областях с коническими и угловыми точками// Тр. Моск. мат. об-ва. — 1967. — *16*. — С. 209–292.
6. *Ремпель Ш., Шульце Б.-В.* Теория индекса эллиптических краевых задач. — М.: Москва, 1986.
7. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5. — С. 801–906.
8. *Шубин М. А.* Псевдодифференциальные операторы и спектральная теория. — М: Наука, 1978.
9. *Эскин Г. И.* Краевые задачи для эллиптических псевдодифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1973.
10. *Atiyah M., Patodi V., Singer I.* Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1975. — *77*. — С. 43–69.
11. *Atiyah M., Patodi V., Singer I.* Spectral asymmetry and Riemannian geometry. II// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1976. — *78*. — С. 405–432.
12. *Atiyah M., Patodi V., Singer I.* Spectral asymmetry and Riemannian geometry. III// Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1976. — *79*. — С. 71–99.
13. *Boutet de Monvel L.* Boundary problems for pseudodifferential operators// Acta Math. — 1971. — *126*. — С. 11–51.
14. *Bunke U.* On the gluing problem for the η-invariant// J. Differ. Geom. — 1995. — *41*. — С. 397–488.
15. *Dai X.* Adiabatic limits, non-multiplicativity of signature and the Leray spectral sequence// J. Am. Math. Soc. — 1991. — *4*. — С. 265–321.
16. *Donnelly H.* Eta-invariants for G-spaces// Indiana Univ. Math. J. — 1978. — *27*. — С. 889–918.
17. *Fedosov B. V., Schulze B.-W., Tarkhanov N.* The index of higher order operators on singular surfaces// Pacific J. Math. — 1999. — *191*, № 1. — С. 25–48.
18. *Gilkey P. B., Smith L.* The eta invariant for a class of elliptic boundary value problems// Commun. Pure Appl. Math. — 1983. — *36*. — С. 85–132.
19. *Grubb G.* Functional calculus of pseudodifferential boundary problems. — Boston: Birkhäuser, 1996.

20. *Kuchment P.* An overview of periodic elliptic operators// Bull. Am. Math. Soc. — 2016. — *53*, № 3. — С. 343–414.
21. *Lesch M.* Differential operators of Fuchs type, conical singularities, and asymptotic methods. — Stuttgart—Leipzig: B. G. Teubner Verlag, 1997.
22. *Lesch M., Moscovici H., Pflaum M. J.* Connes—Chern character for manifolds with boundary and eta cochains// Mem. Am. Math. Soc. — 2012. — *220*, № 1036. — С. viii+92.
23. *Lesch M., Pflaum M.* Traces on algebras of parameter dependent pseudodifferential operators and the eta-invariant// Trans. Am. Math. Soc. — 2000. — *352*, № 11. — С. 4911–4936.
24. *Melrose R.* The eta invariant and families of pseudodifferential operators// Math. Res. Lett. — 1995. — *2*, № 5. — С. 541–561.
25. *Melrose R., Rochon F.* Eta forms and the odd pseudodifferential families index// В сб.: «Perspectives in mathematics and physics: Essays dedicated to Isadore Singer's 85th birthday». — Somerville: Int. Press, 2011. — С. 279–322.
26. *Mrowka T., Ruberman D., Saveliev N.* An index theorem for end-periodic operators// Composю Math. — 2016. — *152*, № 2. — С. 399–444.
27. *Müller W.* Eta-invariants and manifolds with boundary// J. Differ. Geom. — 1994. — *40*. — С. 311–377.
28. *Nazaikinskii V., Savin A., Schulze B.-W., Sternin B.* Elliptic theory on singular manifolds. — Boca Raton: CRC-Press, 2005.
29. *Ruzhansky M., Turunen V.* Global quantization of pseudo-differential operators on compact Lie groups, SU(2), 3-sphere, and homogeneous spaces// Int. Math. Res. Not. — 2013. — *2013*, № 11. — С. 2439–2496.
30. *Savin A. Yu., Zhuikov K. N.* η-invariant and index for operators on the real line periodic at infinity// Eurasian Math. J. — 2021. — *12*, № 3. — С. 57–77.
31. *Schrohe E.* A short introduction to Boutet de Monvel's calculus// В сб.: «Approaches to singular analysis. Based on the workshop, Berlin, Germany, April 8–10, 1999». — Basel: Birkhäuser, 2001. — С. 85–116.
32. *Taubes C. H.* Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds// J. Differ. Geom. — 1987. — *25*, № 3. — С. 363–430.
33. *Zhuikov K. N.* Index of differential-difference operators on an infinite cylinder// Russ. J. Math. Phys. — 2022. — *29*, № 2. — С. 280–290.

К. Н. Жуйков
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: `zhuykovcon@gmail.com`

А. Ю. Савин
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: `a.yu.savin@gmail.com`

UDC 517.954
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-599-620
EDN: YQAARE

Eta-invariant of elliptic parameter-dependent boundary-value problems

K. N. Zhuikov and A. Yu. Savin

RUDN University, Moscow, Russia

Abstract. In this paper, we study the eta-invariant of elliptic parameter-dependent boundary value problems and its main properties. Using Melrose's approach, we define the eta-invariant as a regularization of the winding number of the family. In this case, the regularization of the trace requires obtaining the asymptotics of the trace of compositions of invertible parameter-dependent boundary value problems for large values of the parameter. Obtaining the asymptotics uses the apparatus of pseudodifferential boundary value problems and is based on the reduction of parameter-dependent boundary value problems to boundary value problems with no parameter.

Keywords: eta-invariant, elliptic parameter-dependent boundary value problem, pseudodifferential boundary value problem, Boutet de Monvel operator, regularized trace

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors are grateful to V. E. Nazaikinskii for useful comments. This work was supported in part by the Young Russian Mathematics award and by RFBR and DFG, project No. 21-51-12006.

For citation: K. N. Zhuikov, A. Yu. Savin, "Eta-invariant of elliptic parameter-dependent boundary-value problems," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 4, 599–620. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-599-620`

REFERENCES

1. M. S. Agranovich, "Ob ellipticheskih psevdodifferencial'nyh operatorah na zamknutoy krivoy" [Elliptic pseudodifferential operators on a closed curve], *Tr. Mosk. Mat. Obs.* [Trans. Moscow Math. Soc.], 1984, **47**, 22–67 (in Russian).
2. M. S. Agranovich and M. I. Vishik, "Ellipticheskie zadachi s parametrom i parabolicheskie zadachi obshchego vida" [Elliptic problems with parameter and parabolic problems of general type], *Usp. Mat. Nauk* [Russ. Math. Surv.], 1964, **19**, No. 3, 53–161 (in Russian).
3. K. N. Zhuikov and A. Yu. Savin, "Eta-invariant dlya semeystv s parametrom i periodicheskimi koefficientami" [Eta-invariant for parameter-dependent families with periodic coefficients], *Ufimsk. mat. zh.* [Ufa Math. J.], 2022, **14**, No. 2, 35–55 (in Russian).
4. K. N. Zhuikov and A. Yu. Savin, "Eta-invarianty dlya operatorov s parametrom, associirovannyh s deystviem diskretnoy gruppy" [Eta-invariants for parameter-dependent operators associated with an action of a discrete group], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2022, **112**, No. 5, 685–696 (in Russian).
5. V. A. Kondratiev, "Kraevye zadachi dlya ellipticheskih uravneniy v oblastyah s konicheskimi i uglovymi tochkami" [Boundary-value problems for elliptic equations in domains with conical or angular points], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Trans. Moscow Math. Soc.], 1967, **16**, 209–292 (in Russian).
6. S. Rempel and B.-W. Schulze, *Teoriya indeksa ellipticheskih kraevyh zadach* [Index Theory of Elliptic Boundary Problems], Mir, Moscow, 1986 (Russian translation).
7. A. L. Skubachevskii, "Kraevye zadachi dlya ellipticheskih funkcional'no-differencial'nyh uravneniy i ih prilozheniya" [Boundary-value problems for elliptic functional-differential equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Russ. Math. Surv.], 2016, **71**, No. 5, 801–906 (in Russian).

8. M. A. Shubin, *Psevdodifferencial'nye operatory i spektral'naya teoriya* [Pseudodifferential operators and spectral theory], Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).
9. G. I. Eskin, *Kraevye zadachi dlya ellipticheskih psevdodifferencial'nyh uravneniy* [Boundary-Value Problems for Elliptic Pseudodifferential Equations], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
10. M. Atiyah, V. Patodi, and I. Singer, "Spectral asymmetry and Riemannian geometry. I," *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1975, **77**, 43–69.
11. M. Atiyah, V. Patodi, and I. Singer, "Spectral asymmetry and Riemannian geometry. II," *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1976, **78**, 405–432.
12. M. Atiyah, V. Patodi, and I. Singer, "Spectral asymmetry and Riemannian geometry. III," *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1976, **79**, 71–99.
13. L. Boutet de Monvel, "Boundary problems for pseudodifferential operators," *Acta Math.*, 1971, **126**, 11–51.
14. U. Bunke, "On the gluing problem for the η-invariant," *J. Differ. Geom.*, 1995, **41**, 397–488.
15. X. Dai, "Adiabatic limits, non-multiplicativity of signature and the Leray spectral sequence," *J. Am. Math. Soc.*, 1991, **4**, 265–321.
16. H. Donnelly, "Eta-invariants for G-spaces," *Indiana Univ. Math. J.*, 1978, **27**, 889–918.
17. B. V. Fedosov, B.-W. Schulze, and N. Tarkhanov, "The index of higher order operators on singular surfaces," *Pacific J. Math.*, 1999, **191**, No. 1, 25–48.
18. P. B. Gilkey and L. Smith, "The eta invariant for a class of elliptic boundary value problems," *Commun. Pure Appl. Math.*, 1983, **36**, 85–132.
19. G. Grubb, *Functional Calculus of Pseudodifferential Boundary Problems*, Birkhäuser, Boston, 1996.
20. P. Kuchment, "An overview of periodic elliptic operators," *Bull. Am. Math. Soc.*, 2016, **53**, No. 3, 343–414.
21. M. Lesch, *Differential Operators of Fuchs Type, Conical Singularities, and Asymptotic Methods*, B. G. Teubner Verlag, Stuttgart–Leipzig, 1997.
22. M. Lesch, H. Moscovici, and M. J. Pflaum, "Connes–Chern character for manifolds with boundary and eta cochains," *Mem. Am. Math. Soc.*, 2012, **220**, No. 1036, viii+92.
23. M. Lesch and M. Pflaum, "Traces on algebras of parameter dependent pseudodifferential operators and the eta-invariant," *Trans. Am. Math. Soc.*, 2000, **352**, No. 11, 4911–4936.
24. R. Melrose, "The eta invariant and families of pseudodifferential operators," *Math. Research Letters*, 1995, **2**, No. 5, 541–561.
25. R. Melrose and F. Rochon, "Eta forms and the odd pseudodifferential families index," In: *Perspectives in Mathematics and Physics: Essays Dedicated to Isadore Singer's 85th Birthday*, Int. Press, Somerville, 2011, pp. 279–322.
26. T. Mrowka, D. Ruberman, and N. Saveliev, "An index theorem for end-periodic operators," *Compositio Math.*, 2016, **152**, No. 2, 399–444.
27. W. Müller, "Eta-invariants and manifolds with boundary," *J. Differ. Geom.*, 1994, **40**, 311–377.
28. V. Nazaikinskii, A. Savin, B.-W. Schulze, and B. Sternin, *Elliptic Theory on Singular Manifolds*, CRC-Press, Boca Raton, 2005.
29. M. Ruzhansky and V. Turunen, "Global quantization of pseudo-differential operators on compact Lie groups, SU(2), 3-sphere, and homogeneous spaces," *Int. Math. Res. Not.*, 2013, **2013**, No. 11, 2439–2496.
30. A. Yu. Savin and K. N. Zhuikov, "η-invariant and index for operators on the real line periodic at infinity," *Eurasian Math. J.*, 2021, **12**, No. 3, 57–77.
31. E. Schrohe, "A short introduction to Boutet de Monvel's calculus," In: *Approaches to Singular Analysis. Based on the Workshop, Berlin, Germany, April 8–10, 1999*, Birkhäuser, Basel, 2001, pp. 85–116.
32. C. H. Taubes, "Gauge theory on asymptotically periodic 4-manifolds," *J. Differ. Geom.*, 1987, **25**, No. 3, 363–430.
33. K. N. Zhuikov, "Index of differential-difference operators on an infinite cylinder," *Russ. J. Math. Phys.*, 2022, **29**, No. 2, 280–290.

K. N. Zhuikov
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: `zhuykovcon@gmail.com`

A. Yu. Savin
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: `a.yu.savin@gmail.com`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 4 (2023). С. 621–642
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.977.5
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-621-642
EDN: YRJVVX

ЗАДАЧА СУЩЕСТВОВАНИЯ УПРАВЛЕНИЯ С ОБРАТНОЙ СВЯЗЬЮ ДЛЯ ОДНОЙ ДРОБНОЙ МОДЕЛИ ФОЙГТА

А. В. Звягин, Е. И. Костенко

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. В статье исследуется задача управления с обратной связью для одной математической модели, описывающей движение вязкоупругой жидкости с памятью вдоль траекторий поля скоростей. Доказывается существование оптимального управления, дающего минимум заданному ограниченному и полунепрерывному снизу функционалу качества. При доказательстве используется аппроксимационно-топологический подход, теория регулярных лагранжевых потоков и теория топологической степени для многозначных векторных полей.

Ключевые слова: дробная модель Фойгта, вязкоупругая жидкость, движение с памятью, оптимальное управление, аппроксимационно-топологический подход, регулярный лагранжев поток, топологическая степень, многозначное векторное поле.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 23-71-10026, `https://rscf.ru/project/23-71-10026/`.

Для цитирования: *А. В. Звягин, Е. И. Костенко.* Задача существования управления с обратной связью для одной дробной модели Фойгта// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 4. С. 621–642. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-621-642`

1. Введение

Задачам оптимального управления в механике жидкости посвящено большое число работ (см., например, [16] и имеющуюся там литературу). Однако в большинстве из них изучаются различные задачи оптимального управления для системы Навье—Стокса. Но в природе существует огромное число жидкостей, которые описываются более сложными системами уравнений (такие жидкости называются «неньютоновские жидкости»). Список работ, изучающих задачи оптимального управления, в том числе и задачи с обратной связью для подобных моделей движения жидкости, намного беднее. В настоящей работе изучается задача оптимального управления с обратной связью для одной такой модели, описывающей движение вязкоупругой среды с памятью. Вначале опишем изучаемую модель.

В ограниченной области $Q_T = [0, T] \times \Omega$, где $T \geqslant 0$, а $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, с границей $\partial\Omega \subset C^2$ рассматривается задача

$$\frac{\partial v}{\partial t} + \sum_{i=1}^{n} v_i \frac{\partial v}{\partial x_i} - \mu_0 \triangle v - \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \mathrm{Div} \int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) ds + \nabla p = f(t, x); \quad (1.1)$$

$$\operatorname{div} v(t,x) = 0, \qquad (t,x) \in Q_T; \tag{1.2}$$

$$z(\tau; t, x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s; t, x))ds, \qquad t, \tau \in [0, T], \quad x \in \bar{\Omega}; \tag{1.3}$$

$$v(t,x) \mid_\Gamma = 0, \qquad (t,x) \in \Gamma = [0,T] \times \partial\Omega; \qquad v(0,x) = v_0(x), \qquad x \in \Omega. \tag{1.4}$$

Здесь $v(t,x) = (v_1(t,x), \dots, v_n(t,x))$ и $p(t,x)$ — искомые скорость и давление рассматриваемой среды, $\mathcal{E}(v) = \{\mathcal{E}_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — тензор скоростей деформации с элементами

$$\mathcal{E}_{ij} = \frac{1}{2}\Big(\frac{\partial v_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v_j}{\partial x_i}\Big),$$

$\mu_0 > 0$, $\mu_1 \geqslant 0$, $0 < \alpha < 1$, $\lambda > 0$ — константы, отвечающие за вязкоупругие свойства изучаемой жидкости, а $z(\tau; t, x)$ — траектория движения частицы жидкости, $\Gamma(\beta)$ — гамма-функция Эйлера, определяемая через абсолютно сходящийся интеграл $\Gamma(\beta) = \int\limits_0^\infty t^{\beta-1}e^{-t}\,dt$ (см. [15]). Знак Div обозначает дивергенцию матрицы, т. е. вектор, координатами которого являются дивергенции векторов-столбцов матрицы.

Начально-краевая задача (1.1)–(1.4) описывает математическую модель, изучающую движение вязкоупругой жидкости с памятью вдоль траектории движения частицы среды (см. работы [8, 9, 12, 24, 26, 27], в которых изучался вопрос слабой разрешимости частных случаев рассматриваемой модели). История возникновения данной модели тесно связана с потребностью изучения большого класса полимеров, в которых необходимо учитывать эффекты ползучести и релаксации. Оказывается, что подходящими для этого являются модели с дробными производными (см. [19]), что превращает их в задачи интегро-дифференциального вида. Интегральная модель учитывает все предшествующие состояния вязкоупругой среды, как бы далеко ни отстояли они от текущего момента времени. Такие модели используются при значительном влиянии эффектов памяти и большом времени релаксации. В [23] дана механическая интерпретация этих моделей и приведен хороший библиографический обзор.

Наличие интегрального слагаемого в (1.1) отражает учет памяти сплошной среды. Различные модели с памятью возникали и изучались в большом числе работ (см., например, [1]). Но, как правило, математические постановки рассматривали вклад памяти при постоянном значении пространственной переменной x (см. [10, 17]). На практике такие модели абсолютно «не физичны». Память среды необходимо учитывать вдоль траектории движения частицы. Таким образом, в (1.1) появляется $z(s; t, x)$ — траектория частицы среды, указывающая в момент времени s расположение частицы среды, находящейся в момент времени t в точке x. Данная траектория определяется полем скоростей v.

Заметим, что для корректной постановки задачи необходимо, чтобы траектории z однозначно определялись полем скоростей v, другими словами, чтобы уравнение (1.3) имело единственное решение для поля скоростей v. Для этого в случае, когда скорость v принадлежит пространству Соболева, в работах [20, 22] была исследована разрешимость интегральной задачи Коши (1.3) и установлены существование, единственность и устойчивость регулярных лагранжевых потоков (РЛП) — обобщения понятия классического решения. Эти результаты дают возможность корректно рассмотреть поставленную задачу.

Из-за сложности моделей такого типа известно крайне мало математических результатов для них. Одним из первых, кто смог доказать теоремы существования решений для ряда математических моделей такого типа, был профессор В. Г. Звягин (см. [10, 12, 24, 26, 27]). В данной статье продолжается использование предложенных им идей и подходов для моделей исследуемого типа, и изучается задача управления с обратной связью для одной модели, описывающей движение вязкоупругой среды с памятью вдоль траектории поля скоростей.

2. Постановка задачи и основной результат

Через $L_p(\Omega)$, $1 \leqslant p < \infty$, будем обозначать множество измеримых вектор-функций $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$, суммируемых с p-ой степенью. Через $W_p^m(\Omega)$, $m \geqslant 1$, $p \geqslant 1$, будем обозначать пространства Соболева. Рассмотрим пространство $C_0^\infty(\Omega)$ бесконечно-дифференцируемых вектор-функций из

Ω в $\mathbb{R}^n$ с компактным носителем в Ω. Обозначим $\mathcal{V} = \{v \in C_0^\infty(\Omega),\ \operatorname{div} v = 0\}$. Через V^0 мы обозначим замыкание $\mathcal{V}$ по норме $L_2(\Omega)$, через V^1 — замыкание по норме $W_2^1(\Omega)$ и через V^2 — пространство $W_2^2(\Omega) \cap V^1$.

Введем шкалу пространств V^β, $\beta \in \mathbb{R}$. Для этого рассмотрим проектор Лере $P : L_2(\Omega) \to V^0$ и оператор $A = -P\Delta$, определенный на $D(A) = V^2$. Этот оператор может быть продолжен в V^0 до замкнутого оператора, который является самосопряженным положительным оператором с компактным обратным. Пусть $0 < \lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \dots \leqslant \lambda_k \leqslant \dots$ — собственные значения оператора A. В силу теоремы Гильберта о спектральном разложении компактных операторов, собственные функции $\{e_j\}$ оператора A образуют ортонормированный базис в V^0. Обозначим через

$$E_\infty = \Big\{ v = \sum_{j=1}^{N} v_j e_j :\ v_j \in \mathbb{R},\, N \in \mathbb{N} \Big\},$$

множество конечных линейных комбинаций, составленных из e_j, и определим пространство V^β, $\beta \in \mathbb{R}$, как пополнение E_∞ по норме

$$\|v\|_{V^\beta} = \Big(\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k^\beta |v_k|^2 \Big)^{\frac{1}{2}}, \qquad \text{где } v = \sum_{k=1}^{\infty} v_k e_k. \tag{2.1}$$

На пространстве V^β, $\beta > -1/2$, норма (2.1) эквивалентна обычной норме $\|\cdot\|_{W_2^\beta(\Omega)}$ пространства $W_2^\beta(\Omega)$ (см. [16]). Кроме того, нормы в пространствах V^1, V^2 и V^3 могут быть заданы следующим образом:

$$\|v\|_{V^1} = \left(\int_\Omega \nabla v(x) : \nabla v(x)\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \|v\|_{V^2} = \left(\int_\Omega \Delta v(x) \Delta v(x)\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}},$$

$$\|v\|_{V^3} = \left(\int_\Omega \nabla \Delta v(x) : \nabla \Delta v(x)\,\mathrm{d}x \right)^{\frac{1}{2}}.$$

Здесь символ «:» обозначает покомпонентное матричное произведение.

Далее, через $V^{-\beta} = (V^\beta)^{-1}$, $\beta \in \mathbb{N}$, будем обозначать сопряженное пространство к V^β.

Введем пространство, в котором будет доказана разрешимость изучаемой задачи:

$$W_1 = \{ v \in L_2(0,T;V^1) \cap L_\infty(0,T;V^0),\ v' \in L_{4/3}(0,T;V^{-1}) \}$$

с нормой $\|v\|_{W_1} = \|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|v\|_{L_\infty(0,T;V^0)} + \|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}$.

Как было описано выше, по скорости $v \in W_1$ требуется найти траекторию движения частицы z. Для этого потребуется понятие регулярного лагранжева потока (см. [20–22]).

Определение 2.1. *Регулярным лагранжевым потоком* (РЛП), порожденным v, называется функция $z(\tau;t,x)$, $(\tau;t,x) \in [0,T] \times [0,T] \times \bar{\Omega}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1. при п.в. x и любом $t \in [0,T]$ функция $\gamma(t) = z(\tau;t,x)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет уравнению

$$z(\tau;t,x) = x + \int_t^\tau v(s, z(s;t,x))ds, \qquad t,\tau \in [0,T];$$

2. для любых $t,\tau \in [0,T]$ и произвольного измеримого по Лебегу множества $B \subset \bar{\Omega}$ с лебеговой мерой $m(B)$ справедливо соотношение $m(z(\tau;t,B)) = m(B)$;
3. при всех $t_i \in [0,T], i = \overline{1,3}$, и п.в. $x \in \bar{\Omega}$

$$z(t_3;t_1,x) = z(t_3;t_2,z(t_2;t_1,x)).$$

Приведем также следующие необходимые в дальнейшем результаты о РЛП (см. [20–22]).

Теорема 2.1. *Пусть* $v \in L_1(0,T;W_p^1(\Omega)), 1 \leqslant p \leqslant +\infty$, $\operatorname{div} v(t,x) = 0$ *и* $v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0$. *Тогда существует единственный РЛП* $z \in C(D;L)$, *порожденный* v, *и*

$$z(\tau;t,\bar{\Omega}) \subset \bar{\Omega}, \qquad \frac{\partial}{\partial\tau} z(\tau;t,x) = v(\tau, z(\tau;t,x)), \qquad \tau \in [0,T], \quad x \in \Omega,$$

где $C(D,L)$ — *банахово пространство непрерывных функций на* $D = [0,T]\times[0,T]$ *со значениями в* L — *метрическом пространстве измеримых на* Ω *вектор-функций.*

Теорема 2.2. *Пусть* $v, v^m \in L_1(0,T;W_1^p(\Omega))$, $m = 1,2,\dots$, *при некотором* $p > 1$. *Пусть* $\operatorname{div} v(t,x) = 0$, $\operatorname{div}^m v(t,x) = 0$, $v|_{[0,T]\times\partial\Omega} = v^m|_{[0,T]\times\partial\Omega} = 0$. *Пусть выполняются неравенства*

$$\|v_x\|_{L_1(0,T;L_p(\Omega))} + \|v\|_{L_1(0,T;L_1(\Omega))} \leqslant C_1, \qquad \|v_x^m\|_{L_1(0,T;L_p(\Omega))} + \|v^m\|_{L_1(0,T;L_1(\Omega))} \leqslant C_2.$$

Пусть v^m *сходится к* v *в* $L_1(Q_T)$ *при* $m \to +\infty$. *Пусть* $z(\tau;t,x)$ *и* $z^m(\tau;t,x)$ — *РЛП, порожденные* v *и* v^m, *соответственно. Тогда последовательность* z^m *сходится к* z *по мере Лебега на множестве* $[0,T]\times\Omega$ *при* $t \in [0,T]$.

Здесь v_x — матрица Якоби вектор-функции v.

Таким образом, в силу теоремы 2.2 для каждого $v \in L_2(0,T;V^1)$ и для почти всех $x \in \Omega$ уравнение (1.3) имеет единственное решение $z(v)$.

Перейдем к описанию задачи управления для изучаемой математической модели. Для этого рассмотрим многозначное отображение $\Psi : W_1 \multimap L_2(0,T;V^{-1})$, которое будет использовано для определения обратной связи и задания ограничений на управление. Будем предполагать, что Ψ удовлетворяет следующим условиям:

(Ψ1) отображение Ψ определено на пространстве W_1 и имеет непустые, компактные, выпуклые значения;
(Ψ2) отображение Ψ полунепрерывно сверху[1] и компактно[2];
(Ψ3) отображение Ψ глобально ограничено, т. е. существует константа $M > 0$ такая, что

$$\|\Psi(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} := \sup\Big\{\|u\|_{L_2(0,T;V^{-1})} : u \in \Psi(v)\Big\} \leqslant M \quad \text{для всех } v \in W_1;$$

(Ψ4) Ψ слабо замкнуто в следующем смысле:

$$\text{если } \{v_l\}_{l=1}^{\infty} \subset W_1,\ v_l \rightharpoonup v_0,\ u_l \in \Psi(v_l) \text{ и } u_l \to u_0 \text{ в } L_2(0,T;V^{-1}), \text{ тогда } u_0 \in \Psi(v_0).$$

Мы будем рассматривать слабую постановку задачи управления с обратной связью для начально-краевой задачи (1.1)–(1.4). Под обратной связью мы понимаем следующее условие:

$$f \in \Psi(v). \tag{2.2}$$

Отметим, что в последнее десятилетие при исследовании различных аспектов теории управляемых систем классическое понятие обратной связи в литературе используется и в расширенном смысле: отображение обратной связи понимается многозначным, ставящим в соответствие состоянию системы целое множество допустимых значений. При этом это множество может определяться как в каждый момент времени функционирования системы, так и на всем временном промежутке. Этот подход позволяет эффективно использовать для описания управляемых систем теорию дифференциальных включений, основываясь на известной лемме А. Ф. Филиппова о неявной функции и теории степени многозначных отображений. Познакомиться с данным подходом можно, например, в монографиях [3, 18], обзорной статье [25] или работах [6, 7, 11, 28].

Таким образом, в работе рассматривается задача управления с обратной связью (1.1)–(1.4), (2.2). Сформулируем определение слабого решения задачи управления с обратной связью (1.1)–(1.4), (2.2). Будем предполагать, что начальное условие v_0 принадлежит пространству V^0.

---

[1] То есть для каждого $v \in W_1$ и открытого множества $V \subset L_2(0,T;V^{-1})$ такого, что $\Psi(v) \subset V$, существует окрестность $U(v)$ такая, что $\Psi(U(v)) \subset V$.

[2] То есть образ Ψ относительно компактен в $L_2(0,T;V^{-1})$.

Определение 2.2. *Слабым решением* задачи управления с обратной связью (1.1)–(1.4), (2.2) называется пара функций $(v, f) \in W_1 \times L_2(0, T; V^{-1})$, удовлетворяющая a) условию обратной связи (2.2), b) при любой $\varphi \in V^1$ и п.в. $t \in (0, T)$ тождеству

$$\langle v', \varphi \rangle - \int\limits_{\Omega} \sum_{i=1}^{n} v_i v \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx + \mu_0 \int\limits_{\Omega} \nabla v : \nabla \varphi \, dx +$$

$$+ \mu_1 \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_{\Omega} \int\limits_{0}^{t} e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s; t, x)) \, ds \, \varepsilon(\varphi) \, dx = \langle f, \varphi \rangle, \tag{2.3}$$

и c) начальному условию $v(0) = v_0$. Здесь z — РЛП, порожденный v.

Первым результатом настоящей работы является следующая теорема.

Теорема 2.3. *Пусть многозначное отображение* Ψ *удовлетворяет условиям* (Ψ1)–(Ψ4). *Тогда существует хотя бы одно слабое решение задачи управления с обратной связью* (1.1)–(1.4), (2.2).

Обозначим через $\Sigma \subset W_1 \times L_2(0, T; V^{-1})$ множество всех слабых решений задачи (1.1)–(1.4), (2.2). Рассмотрим произвольный функционал качества $\Phi : \Sigma \to \mathbb{R}$, удовлетворяющий следующим условиям:

(Φ1) существует число γ такое, что $\Phi(v, f) \geqslant \gamma$ для всех $(v, f) \in \Sigma$;
(Φ2) если $v_m \rightharpoonup v_*$ в W_1 и $f_m \to f_*$ в $L_2(0, T; V^{-1})$, то $\Phi(v_*, f_*) \leqslant \varliminf\limits_{m \to \infty} \Phi(v_m, f_m)$.

В качестве примера такого функционала можно привести следующий функционал качества:

$$\Phi(v, f) = \int\limits_{0}^{T} \|v(t) - u_*(t)\|_{V^1}^2 \, dt + \int\limits_{0}^{T} \|f(t)\|_{V^{-1}}^2 \, dt.$$

Здесь u_* — некоторое заданное поле скоростей. Данный функционал характеризует отклонение имеющейся скорости от требуемой скорости. Его минимум даст нам минимальное отклонение скорости от заданной при минимальном управлении. Таким образом, мы перешли к задаче оптимального управления с обратной связью.

Основным результатом работы является следующая теорема.

Теорема 2.4. *Если отображение* Ψ *удовлетворяет условиям* (Ψ1)–(Ψ4), *а функционал* Φ *удовлетворяет условиям* (Φ1)-(Φ2), *тогда задача оптимального управления с обратной связью* (1.1)–(1.4), (2.2) *имеет хотя бы одно слабое решение* (v_*, f_*) *такое, что*

$$\Phi(v_*, f_*) = \inf_{(v,f) \in \Sigma} \Phi(v, f).$$

Доказательство данных результатов состоит из нескольких частей. Сначала на основе аппроксимационно-топологического подхода к исследованию математических задач гидродинамики, разработанного В. Г. Звягиным (см. [5, 13]), доказывается существование слабых решений исследуемой задачи управления с обратной связью. Для этого вводится семейство $(0 \leqslant \xi \leqslant 1)$ вспомогательных включений, зависящих от малого параметра $\varepsilon > 0$, доказываются априорные оценки решений и на основе теории топологической степени для многозначных векторных полей доказывается существование слабых решений вспомогательной задачи управления с обратной связью при $\xi = 1$. Далее, для доказательства разрешимости исходной задачи управления с обратной связью на основе необходимых оценок устанавливается предельный переход. В заключение показывается, что во множестве решений найдется хотя бы одно решение, дающее минимум заданному функционалу качества.

3. Аппроксимационная задача

На протяжение этого раздела будем предполагать, что $v_0 \in V^3$. Рассмотрим следующее семейство вспомогательных задач $(0 \leqslant \xi \leqslant 1)$ с малым параметром $\theta > 0$. Для данного семейства введем еще одно функциональное пространство $W_2 = \{v \in C([0, T]; V^3),\ v' \in L_2(0, T; V^3)\}$.

Задача 3.1. Найти пару функций $(v,f)\in W_2\times L_2(0,T;V^{-1})$, удовлетворяющих: a) условию обратной связи (2.2), b) при любой $\varphi\in V^1$ и п.в. $t\in(0,T)$ тождеству

$$\langle v',\varphi\rangle-\xi\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n v_iv_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx+\mu_0\int\limits_\Omega\nabla v:\nabla\varphi dx-\xi\theta\int\limits_\Omega\nabla\Delta v':\nabla\varphi\,dx+$$
$$+\frac{\mu_1\xi}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_\Omega\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\mathcal{E}(\varphi)\,ds\,dx=\xi\langle f,\varphi\rangle \tag{3.1}$$

и c) начальному условию $v(0,\cdot)=\xi v_0$. Здесь z — РЛП, порожденный v.

Далее будет доказано существование решения аппроксимационной задачи при $\xi=1$ и показано, что из последовательности ее решений можно выделить подпоследовательность, сходящуюся к слабому решению задачи (1.1)–(1.4), (2.2) при стремлении параметра аппроксимации θ к нулю. Для этого перейдем к операторной трактовке задачи 3.1. Введем операторы:

$$J:V^3\to V^{-1},\quad \langle Jv,\varphi\rangle=\int\limits_\Omega v\varphi\,dx,\quad v\in V^3,\quad \varphi\in V^1;$$
$$A:V^1\to V^{-1},\quad \langle Av,\varphi\rangle=\int\limits_\Omega \nabla v:\nabla\varphi\,dx,\quad v\in V^1,\quad \varphi\in V^1;$$
$$A_2:V^3\to V^{-1},\quad \langle A_2v,\varphi\rangle=-\int\limits_\Omega \nabla\Delta v:\nabla\varphi\,dx,\quad v\in V^3,\quad \varphi\in V^1;$$
$$B:V^1\times[0,T]\times[0,T]\times\overline{\Omega}\to V^{-1},$$
$$(B(v,z)(t),\varphi)=\left(\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))\,ds,\ \mathcal{E}(\varphi)\right),$$
$$v\in V^1,\qquad z\in[0,T]\times[0,T]\times\overline{\Omega},\qquad \varphi\in V^1,\qquad t\in(0,T);$$
$$K:L_4(\Omega)\to V^{-1},\quad \langle K(v),\varphi\rangle=\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n v_iv_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx,\quad v\in L_4(\Omega),\qquad \varphi\in V^1.$$

Поскольку в равенстве (3.1) функция $\varphi\in V^1$ произвольна, оно эквивалентно в $L_2(0,T;V^{-1})$ следующему операторному уравнению:

$$Jv'-\theta A_2v'+\mu_0Av+\frac{\mu_1\xi}{\Gamma(1-\alpha)}B(v,z)-\xi K(v)=\xi f. \tag{3.2}$$

Таким образом, задача 3.1 существования слабого решения аппроксимационной задачи при $\xi=1$ эквивалентна задаче существования решения $v\in W_2$ следующего операторного включения:

$$Jv'-\theta A_2v'+\mu_0Av+\frac{\mu_1\xi}{\Gamma(1-\alpha)}B(v,z)-\xi K(v)=\xi f\in\Psi(v), \tag{3.3}$$

удовлетворяющего начальному условию $v(0,\cdot)=\xi v_0$.

Также определим операторы при помощи следующих равенств:

$$L:W_2\to L_2(0,T;V^{-1})\times V^3,\qquad L(v)=((J+\theta A_2)v'+\mu_0Av,v|_{t=0});$$
$$C:W_2\to L_2(0,T;V^{-1})\times V^3,\qquad C(v)=(K(v),0);$$
$$G:W_2\to L_2(0,T;V^{-1})\times V^3,\qquad G(v)=(\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}B(v,z),0).$$

Тогда задача о нахождении решения операторного уравнения (3.2) при фиксированном $0\leqslant\xi\leqslant1$, удовлетворяющего начальному условию $v(0,\cdot)=\xi v_0$, эквивалентна задаче о нахождении решения при фиксированном $0\leqslant\xi\leqslant1$ операторного уравнения

$$L(v)=\xi(C(v)-G(v)+(f,v_0)).$$

Рассмотрим свойства введенных выше операторов.

Лемма 3.1.

1. *Для любого* $v \in L_2(0,T;V^1)$ *функция* Av *принадлежит* $L_2(0,T;V^{-1})$, *оператор* $A : L_2(0,T;V^1) \to L_2(0,T;V^{-1})$ *непрерывен и справедливы оценки*
$$\|Av\|_{V^{-1}} \leqslant \|v\|_{V^1}; \qquad \|Av\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant \|v\|_{L_2(0,T;V^1)}.$$
2. *Для любой функции* $v \in L_p(0,T;V^3)$, $1 \leqslant p < \infty$, *функция* $(J+\theta A_2)v$ *принадлежит* $L_p(0,T;V^{-1})$ *и оператор* $(J+\theta A_2) : L_p(0,T;V^3) \to L_p(0,T;V^{-1})$ *непрерывен и обратим. Кроме того, имеет место оценка*
$$\theta\|v\|_{L_p(0,T;V^3)} \leqslant \|(J+\theta A_2)v\|_{L_p(0,T;V^{-1})} \leqslant C_3(1+\theta)\|v\|_{L_p(0,T;V^3)}.$$
Причем обратный к нему оператор $(J+\theta A_2)^{-1} : L_p(0,T;V^{-1}) \to L_p(0,T;V^3)$ *непрерывен и для любого* $w \in L_p(0,T;V^{-1})$ *имеет место оценка*
$$\|(J+\theta A_2)^{-1}w\|_{L_p(0,T;V^3)} \leqslant \frac{1}{\theta}\|w\|_{L_p(0,T;V^{-1})}.$$
3. *Оператор* $L : W_2 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3$ *обратим и обратный к нему оператор* $L^{-1} : L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3 \to W_2$ *является непрерывным оператором.*
4. *Для любой функции* $v \in W_2$ *функция* $K(v) \in L_2(0,T;V^{-1})$, *отображение* $K : W_2 \to L_2(0,T;V^{-1})$ *является компактным и для него имеет место оценка*
$$\|K(v)\|_{V^{-1}} \leqslant C_4\|v\|^2_{L_4(\Omega)}. \tag{3.4}$$

Доказательство данной леммы является достаточно стандартным и проводится аналогично леммам 2.5.4, 4.4.1–4.4.3 и 7.7.6 в монографии [13].

Перейдем к изучению свойств оператора B. Введем норму $\|v\|_{k,L_2(0,T;V^{-1})}$, равную норме $\|\overline{v}\|_{L_2(0,T;V^{-1})}$, где $\overline{v}(t) = e^{-kt}v(t)$, $k \geqslant 0$. Тогда имеет место следующая лемма.

Лемма 3.2. *Для любых* $v \in L_2(0,T;V^1)$ *и* $z^m \in [0,T]\times[0,T]\times\bar\Omega$ *выполнено* $B(v,z) \in L_2(0,T;V^{-1})$ *и отображение* $B : L_2(0,T;V^1)\times[0,T]\times[0,T]\times\bar\Omega \to L_2(0,T;V^{-1})$ *непрерывно и ограничено. Кроме того, для любого фиксированного* $z \in [0,T]\times[0,T]\times\bar\Omega$, *для любых* $u, v \in L_2(0,T;V^1)$ *справедлива оценка*
$$\|B(v,z) - B(u,z)\|_{k,L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant C_5 T^{1/2-\alpha}\sqrt{\frac{\lambda}{2+2k\lambda}}\|v-u\|_{k,L_2(0,T;V^1)}. \tag{3.5}$$

Доказательство. Первая часть данной леммы доказывается аналогично лемме 2.2 из статьи [10]. Докажем необходимую оценку (3.5).

Пусть $\overline{v}(t) = e^{-kt}v(t)$, $\overline{u}(t) = e^{-kt}u(t)$. Для любого $\varphi \in L_2(0,T,V^1)$ имеем:
$$\langle e^{-kt}B(v,z)(t) - e^{-kt}B(u,z)(t), \varphi(t)\rangle =$$
$$= \int_0^T\int_\Omega\int_0^t e^{-(t-s)(1/\lambda+k)}(t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}_{ij}(\overline{v}-\overline{u})(s,z(s;t,x))\,ds\,\mathcal{E}_{ij}(\varphi)(t)\,dx\,dt.$$

Тогда с помощью неравенства Гёльдера:
$$\langle e^{-kt}B(v,z)(t) - e^{-kt}B(u,z)(t), \varphi(t)\rangle \leqslant$$
$$\leqslant \int_0^T\int_0^t e^{-(t-s)(1/\lambda+k)}(t-s)^{-\alpha}\left(\int_\Omega \mathcal{E}^2(\overline{v}-\overline{u})(s,z(s;t,x))\,dx\right)^{1/2}\left(\int_\Omega \mathcal{E}^2(\varphi)(t,x)\,dx\right)^{1/2} ds\,dt =$$
$$= \int_0^T\int_0^t e^{-(t-s)(1/\lambda+k)}(t-s)^{-\alpha}\left(\int_\Omega \mathcal{E}^2(\overline{v}-\overline{u})(s,z(s;t,x))\,dx\right)^{1/2}\|\varphi\|_{V^1}\,ds\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T \int_0^t e^{-(t-s)(1/\lambda+k)}(t-s)^{-\alpha}\|\overline{v}-\overline{u}\|_{V^1}\|\varphi\|_{V^1}\,ds\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^T \left(\int_0^t e^{-2(t-s)(1/\lambda+k)}\,ds\right)^{1/2} \left(\int_0^t [(t-s)^{-\alpha}\|\overline{v}-\overline{u}\|_{V^1}]^2\,ds\right)^{1/2} \|\varphi\|_{V^1}\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_0^T \int_0^t e^{-2(t-s)(1/\lambda+k)}\,ds\|\varphi\|^2_{V^1}\,dt\right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_0^t (t-s)^{-2\alpha}\|\overline{v}-\overline{u}\|^2_{V^1}\,ds\,dt\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{C_5}T^{1/2-\alpha}\left(\int_0^T \|\overline{v}-\overline{u}\|^2_{V^1}\,dt\right)^{1/2} \left(\int_0^T \int_0^t e^{-2(t-s)(1/\lambda+k)}\,ds\|\varphi\|^2_{V^1}\,dt\right)^{1/2} =$$

$$= \sqrt{C_5}T^{1/2-\alpha}\|\overline{v}-\overline{u}\|_{L_2(0,T;V^1)} \left(\int_0^T \int_0^t e^{-2(t-s)(1/\lambda+k)}\,ds\|\varphi\|^2_{V^1}\,dt\right)^{1/2}.$$

Здесь мы воспользовались оценкой (см. [15])

$$\left\|\int_0^t (t-s)^{-\alpha}\varphi(s)\,ds\right\|_{L_p(0,T)} \leqslant C_5T^{1-\alpha}\|\varphi(s)\|_{L_p(0,T)}, \quad \varphi(s)\in L_p(0,T), \quad 1\leqslant p<\infty.$$

Оценим последний интеграл:

$$\left(\int_0^T \int_0^t e^{-2(t-s)(1/\lambda+k)}\,ds\|\varphi(t,\cdot)\|^2_{V^1}\,dt\right)^{1/2} = \left(\frac{\lambda}{2(1+k\lambda)}\int_0^T 1-e^{-2t(1/\lambda+k)}\|\varphi(t,\cdot)\|^2_{V^1}\,dt\right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \left(\frac{\lambda}{2(1+k\lambda)}\int_0^T \|\varphi(t,\cdot)\|^2_{V^1}\,dt\right)^{1/2} = \left(\frac{\lambda}{2(1+k\lambda)}\right)^{1/2}\|\varphi\|_{L_2(0,T;V^1)}.$$

Таким образом, получили оценку:

$$\langle e^{-kt}B(v,z)(t)-e^{-kt}B(u,z)(t),\varphi(t)\rangle \leqslant C_5T^{1/2-\alpha}\sqrt{\frac{\lambda}{2+2k\lambda}}\|\overline{v}-\overline{u}\|_{L_2(0,T;V^1)}\|\varphi\|_{L_2(0,T;V^1)},$$

откуда следует оценка (3.5). □

Напомним несколько понятий, касающихся меры некомпактности и L-уплотняющих операторов (см. [4, 14]).

Определение 3.1. Неотрицательная вещественная функция ψ, определенная на подмножестве банахова пространства F, называется *мерой некомпактности*, если для любого подмножества $\mathcal{M}$ этого пространства выполнены следующие свойства:

1. $\psi(\overline{co}\,\mathcal{M})=\psi(\mathcal{M})$;
2. для любых двух множеств $\mathcal{M}_1$ и $\mathcal{M}_2$ из того, что $\mathcal{M}_1\subset\mathcal{M}_2$, следует, что $\psi(\mathcal{M}_1)\leqslant\psi(\mathcal{M}_2)$.

В качестве примера меры некомпактности возьмем *меру некомпактности Куратовского*: точная нижняя граница $d>0$, для которой множество $\mathcal{M}$ допускает разбиение на конечное число подмножеств, диаметры которых меньше d. Приведем некоторые важные свойства меры некомпактности Куратовского:

3. $\psi(\mathcal{M})=0$, если $\mathcal{M}$ — относительно компактное подмножество;
4. $\psi(\mathcal{M}\cup K)=\psi(\mathcal{M})$, если K — относительно компактное множество.

Определение 3.2. Пусть X — ограниченное подмножество банахова пространства и $L : X \to F$ — отображение X в банахово пространство F. Отображение $g : X \to F$ называется *L-уплотняющим*, если $\psi(g(\mathcal{M})) < \psi(L(\mathcal{M}))$ для любого множества $\mathcal{M} \subseteq X$ такого, что $\psi(g(\mathcal{M})) \neq 0$.

Пусть γ_k — мера некомпактности Куратовского в пространстве $L_2(0,T;V^{-1})$ с нормой

$$\|v\|_{k,L_2(0,T;V^{-1})} = \left(\int\limits_0^T \|v\|^2_{V^{-1}} e^{-kt} dt\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Тогда имеет место следующая лемма.

Лемма 3.3. *Отображение $B : W_2 \to L_2(0,T;V^{-1})$ является L-уплотняющим по мере некомпактности Куратовского γ_k.*

Доказательство. Пусть $M \subset W_2 \subset L_2(0,T;V^1)$ — произвольное ограниченное множество. В силу теоремы 2.1 множество $z(M)$ — множество траекторий z, однозначно определяемых по скоростям $v \in M$, — относительно компактно. Тогда множество $B(v, z(M))$ относительно компактно для любого фиксированного $v \in W_2$. Кроме того, для любых $z \in z(M)$ отображение $B(\cdot, z)$ удовлетворяет условию Липшица с константой $C_5 T^{1/2-\alpha}\sqrt{\dfrac{\lambda}{2+2k\lambda}}$ в нормах $\|\cdot\|_{k,L_2(0,T,V^1)}$ и $\|\cdot\|_{k,L_2(0,T,V^{-1})}$. Тогда отображение $B(v,z)$ (см. [2, теорема 1.5.7]), а следовательно, и отображение G является ограниченным относительно меры некомпактности Хаусдорфа χ_k. Известно, что меры некомпактности Хаусдорфа и Куратовского удовлетворяют неравенствам $\chi_k(M) \leqslant \gamma_k(M) \leqslant 2\chi_k(M)$ (см. [2, теорема 1.1.7]). Поэтому справедлива оценка

$$\gamma_k(G(M)) \leqslant C_5 T^{1/2-\alpha}\sqrt{\frac{\lambda}{2+2k\lambda}}\gamma_k(L(M)).$$

Выбирая k так, чтобы $C_5 T^{1/2-\alpha}\sqrt{\dfrac{\lambda}{2+2k\lambda}} < 1$, получаем утверждение леммы. □

Используя полученные выше свойства операторов, докажем следующие априорные оценки для семейства вспомогательных задач 3.1.

4. Априорные оценки

Лемма 4.1. *Решения семейства включений* (3.3) *удовлетворяют следующим оценкам:*

$$\|v\|_{L_2(0,T;V^1)} \leqslant C_6(\|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2} + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}); \tag{4.1}$$

$$\|v\|_{C([0,T];V^0)} \leqslant C_7(\|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2} + \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}); \tag{4.2}$$

$$\theta\|v\|^2_{C([0,T];V^2)} \leqslant C_8(\|v_0\|^2_{V^0} + \theta\|v_0\|^2_{V^2} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}), \tag{4.3}$$

где постоянные C_6, C_7, C_8 не зависят от θ и ξ.

Доказательство. Пусть $v \in W_2$ — решение операторного включения (3.3) для некоторого $\xi \in [0,1]$. Тогда для любого $\varphi \in V^1$ и почти всех $t \in (0,T)$ имеет место равенство (3.1). Поскольку оно справедливо при всех $\varphi \in V^1$, возьмем $\varphi = \overline{v}$, где $\overline{v}(t) = e^{-kt}v$. Тогда

$$\int\limits_\Omega v'\overline{v}\,dx - \xi\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \overline{v}_j}{\partial x_i}dx + \mu_0\int\limits_\Omega \nabla(v) : \nabla(\overline{v})dx +$$

$$+\frac{\mu_1\xi}{\Gamma(1-\alpha)}\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}(\mathcal{E}(v)(s,z(s;t,x))ds, \mathcal{E}(\overline{v})) - \theta\int\limits_\Omega \nabla\Delta v'(t) : \nabla\overline{v}(t)\,dx = \xi\langle f, \overline{v}\rangle.$$

Выполним замену $v = e^{kt}\overline{v}$ и отдельно преобразуем слагаемые в левой части:

$$\int\limits_\Omega v'\overline{v}\,dx = \int\limits_\Omega (e^{kt}\overline{v})'\overline{v}\,dx = e^{kt}\int\limits_\Omega \overline{v}'\overline{v}\,dx + ke^{kt}\int\limits_\Omega \overline{v}\overline{v}\,dx =$$

$$= \frac{e^{kt}}{2} \int\limits_\Omega \frac{\partial(\overline{v}\overline{v})}{\partial t}\, dx + ke^{kt}\|\overline{v}\|^2_{V^0} = \frac{e^{kt}}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{v}\|^2_{V^0} + ke^{kt}\|\overline{v}\|^2_{V^0};$$

$$\int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \overline{v_j}}{\partial x_i} dx = \frac{e^{kt}}{2} \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n \overline{v_i} \frac{\partial \overline{v_j v_j}}{\partial x_i} dx = -\frac{e^{kt}}{2} \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial \overline{v_i}}{\partial x_i} \sum_{j=1}^n \overline{v_j v_j} = -\frac{e^{kt}}{2} \int\limits_\Omega \mathrm{div} v \sum_{j=1}^n \overline{v_j v_j} = 0.$$

Преобразуем следующее слагаемое:

$$-\theta \int\limits_\Omega \nabla\Delta v' : \nabla\overline{v}\, dx = -\theta \int\limits_\Omega \nabla\Delta(e^{kt}\overline{v})' : \nabla\overline{v}\, dx = -\theta k e^{kt} \int\limits_\Omega \nabla\Delta\overline{v} : \nabla\overline{v}\, dx - \theta e^{kt} \int\limits_\Omega \nabla\Delta\overline{v}' : \nabla\overline{v}\, dx =$$

$$= \theta k e^{kt} \int\limits_\Omega \Delta\overline{v}\Delta\overline{v}\, dx + \frac{\theta e^{kt}}{2} \int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial t}\Big(\Delta\overline{v}\Delta\overline{v}\Big)\, dx = \theta k e^{kt}\|\overline{v}\|^2_{V^2} + \frac{\theta e^{kt}}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{v}\|^2_{V^2}.$$

Наконец, преобразуем последнее слагаемое:

$$e^{kt}\mu_0 \int\limits_\Omega \nabla(\overline{v}) : \nabla(\overline{v}) dx = e^{kt}\mu_0\|\overline{v}\|^2_{V^1}.$$

В итоге получаем:

$$\frac{e^{kt}}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{v}\|^2_{V^0} + ke^{kt}\|\overline{v}\|^2_{V^0} + \mu_0 e^{kt}\|\overline{v}\|^2_{V^1} + \theta k e^{kt}\|\overline{v}\|^2_{V^2} + \frac{\theta e^{kt}}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{v}\|^2_{V^2} =$$

$$= -\frac{\mu_1\xi}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} (\mathcal{E}(\overline{v})(s, z(s;t,x)) ds, \mathcal{E}(\overline{v})) = e^{kt}\xi\langle f, \overline{v}\rangle.$$

Оценим по модулю правую часть полученного равенства. Воспользовавшись неравенством Коши $bc \leqslant \dfrac{\delta b^2}{2} + \dfrac{c^2}{2\delta}$ для $\delta = 1/\mu_0$, мы получим:

$$\xi e^{kt}\langle f, \overline{v}\rangle \leqslant e^{kt}\|f\|_{V^{-1}}\|\overline{v}\|_{V^1} \leqslant \frac{e^{kt}}{2\mu_0}\|f\|^2_{V^{-1}} + \frac{\mu_0 e^{kt}}{2}\|\overline{v}\|^2_{V^1}.$$

Умножая обе части равенства на e^{-kt}, при почти всех $t \in (0, T)$ имеем

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{v}\|^2_{V^0} + k\|\overline{v}\|^2_{V^0} + \frac{\mu_0}{2}\|\overline{v}\|^2_{V^1} + \frac{\theta}{2}\frac{d}{dt}\|\overline{v}\|^2_{V^2} + \theta k\|\overline{v}\|^2_{V^2} \leqslant$$

$$\leqslant -\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left| \left(e^{-kt} \int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} (\mathcal{E}(e^{-kt}\overline{v})(s, z(s;t,x)) ds,\ \mathcal{E}(\overline{v})) \right) \right| + \frac{1}{2\mu_0}\|f\|^2_{V^{-1}}.$$

Проинтегрируем последнее неравенство по t от 0 до τ, где $\tau \in [0, T]$. Тогда

$$\frac{1}{2}\|\overline{v}\|^2_{V^0} + \frac{\theta}{2}\|\overline{v}\|^2_{V^2} + k\int\limits_0^\tau \|\overline{v}\|^2_{V^0}\, dt + \frac{\mu_0}{2}\int\limits_0^\tau \|\overline{v}\|^2_{V^1}\, dt + \theta k \int\limits_0^\tau \|\overline{v}\|^2_{V^2}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{1}{2\mu_0}\int\limits_0^\tau \|f\|^2_{V^{-1}}\, dt + \frac{\theta}{2}\|v_0\|^2_{V^2} +$$

$$+ \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \int\limits_0^\tau \left| \left(e^{-kt} \int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} (\mathcal{E}(e^{-kt}\overline{v})(s, z(s;t,x)) ds,\ \mathcal{E}(\overline{v})) \right) \right| dt.$$

Используя оценку (3.5) для $u = 0$, получаем:

$$\frac{1}{2}\|\overline{v}\|^2_{V^0} + \frac{\theta}{2}\|\overline{v}\|^2_{V^2} + k\int\limits_0^\tau \|\overline{v}\|^2_{V^0}\, dt + \frac{\mu_0}{2}\int\limits_0^\tau \|\overline{v}\|^2_{V^1}\, dt + \theta k \int\limits_0^\tau \|\overline{v}\|^2_{V^2}\, dt \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\mu_1 C_5 T^{1/2-\alpha}\sqrt{\frac{\lambda}{2+2k\lambda}}}{\Gamma(1-\alpha)}\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,T;V^1)} + \frac{1}{2\mu_0}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\theta}{2}\|v_0\|^2_{V^2}.$$

Возьмем k достаточно большим, чтобы $\dfrac{\mu_1 C_5 T^{1/2-\alpha}\sqrt{\frac{\lambda}{2+2k\lambda}}}{\Gamma(1-\alpha)} \leqslant \mu_0/4$. Оценим каждый член левой части отдельно:

$$\frac{\mu_0}{2}\int_0^\tau \|\overline{v}\|^2_{V^1}\,dt \leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\theta}{2}\|v_0\|^2_{V^2} + \frac{1}{2\mu_0}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_0}{4}\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,T;V^1)},$$

$$\frac{\theta}{2}\|\overline{v}\|^2_{V^2} \leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\theta}{2}\|v_0\|^2_{V^2} + \frac{1}{2\mu_0}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_0}{4}\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,T;V^1)},$$

$$\frac{1}{2}\|\overline{v}\|^2_{V^0} \leqslant \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\theta}{2}\|v_0\|^2_{V^2} + \frac{1}{2\mu_0}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_0}{4}\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,T;V^1)}.$$

Так как правая часть во всех приведенных неравенствах не зависит от τ, то в левой части возьмем максимум по $\tau \in [0,T]$:

$$\frac{\mu_0}{2}\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,T;V^1)} \leqslant \frac{1}{2\mu_0}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_0}{4}\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,T;V^1)} + \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\theta}{2}\|v_0\|^2_{V^2},$$

$$\frac{\theta}{2}\|\overline{v}\|^2_{C([0,T];V^2)} \leqslant \frac{1}{2\mu_0}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_0}{4}\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,T;V^1)} + \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\theta}{2}\|v_0\|^2_{V^2},$$

$$\frac{1}{2}\|\overline{v}\|^2_{C([0,T];V^0)} \leqslant \frac{1}{2\mu_0}\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_0}{4}\|\overline{v}\|^2_{L_2(0,T;V^1)} + \frac{1}{2}\|v_0\|^2_{V^0} + \frac{\theta}{2}\|v_0\|^2_{V^2}.$$

Отсюда непосредственно следуют требуемые оценки (4.1)–(4.3). □

Лемма 4.2. *Если $v \in W_2$ — решение операторного включения* (3.3) *для некоторого $\xi \in [0,1]$, то для него имеют место следующие оценки*:

$$\theta\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)} \leqslant C_9\Big(1+\frac{1}{\theta}\Big)\Big(\|v_0\|^2_{V^0} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}\Big) + C_9\sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2} + C_9\|v_0\|^2_{V^2}; \tag{4.4}$$

$$\|v\|_{C([0,T];V^3)} \leqslant \|v_0\|_{V^3} + \frac{C_9 T^{\frac{1}{2}}}{\theta}\Big(1+\frac{1}{\theta}\Big)\Big(\|v_0\|^2_{V^0} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}\Big) + \frac{C_9 T^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\theta}}\Big(\|v_0\|_{V^2} + \frac{\|v_0\|^2_{V^2}}{\sqrt{\theta}}\Big); \tag{4.5}$$

$$\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant C_{10}(\|v_0\|^2_{V^0} + \theta\|v_0\|^2_{V^2} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1); \tag{4.6}$$

$$\theta\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)} \leqslant C_{11}(\|v_0\|^2_{V^0} + \theta\|v_0\|^2_{V^2} + \|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1), \tag{4.7}$$

где постоянные C_9, C_{10}, C_{11} не зависят от θ, v, ξ.

Доказательство. Пусть $v \in W_2$ — решение (3.3). Тогда оно удовлетворяет следующему равенству

$$\|(J+\theta A_2)v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})} = \Big\|\xi f - \mu_0 Av - \frac{\xi\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}B(v,z) - \xi K(v)\Big\|_{L_2(0,T;V^{-1})}.$$

Оценим правую часть, используя оценку (3.5) при $u=0$.

$$\Big\|\xi f - \mu_0 Av - \frac{\xi\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}B(v,z) + \xi K(v)\Big\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant$$

$$\leqslant \|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_1 C_5 T^{1/2-\alpha}}{\Gamma(1-\alpha)}\|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + \mu_0\|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|K(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}. \tag{4.8}$$

Отдельно оценим величину $\|K(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})}$. Используя (3.4), а также непрерывность вложения $V^2 \subset L_4(\Omega)$, имеем:

$$\|K(v)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} = \left(\int_0^T \|K(v)\|^2_{V^{-1}}\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant C_4\left(\int_0^T \|v(t)\|^4_{L_4(\Omega)}\,dt\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant$$

$$\leqslant C_{12}\left(\int\limits_0^T \|v(t)\|^4_{V^2}\,dt\right)^{\frac12} \leqslant C_{12}T^{\frac12}\max_{t\in[0,T]}\|v(t)\|^2_{V^2} = C_{12}T^{\frac12}\|v\|^2_{C([0,T];V^2)}.$$

Перепишем (4.8) в виде:

$$\left\|\xi f-\mu_0 Av-\frac{\xi\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}B(v,z)+\xi K(v)\right\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant$$
$$\leqslant C_{13}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}+\|v\|_{L_2(0,T;V^1)}+C_{12}T^{\frac12}\|v\|^2_{C([0,T];V^2)}).$$

Из априорных оценок (4.1) и (4.3) следует, что

$$\|(J+\theta A_2)v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant C_9\Big(1+\frac1\theta\Big)(\|v_0\|^2_{V^0}+\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})})+C_9\sqrt\theta\|v_0\|_{V^2}+C_9\|v_0\|^2_{V^2}.$$

Для того, чтобы получить оценку снизу, воспользуемся оценкой на $(J+\theta A_2)^{-1}$. Получим:

$$\theta\|v'\|_{L_2(0,T;V^3)}\leqslant\|(J+\theta A_2)v'\|_{L_2(0,T;V^{-1})}\leqslant$$
$$\leqslant C_9\Big(1+\frac1\theta\Big)(\|v_0\|^2_{V^0}+\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})})+C_9\sqrt\theta\|v_0\|_{V^2}+C_9\|v_0\|^2_{V^2}.$$

Следовательно, доказано неравенство (4.4).

Перейдем к оценке (4.5). Представим функцию $v\in W_2$ в виде $v=v_0-\int\limits_0^t v'(s)\,ds$. Тогда

$$\|v\|_{V^1}\leqslant\left\|v_0-\int\limits_0^t v'(s)\right\|_{V^1} ds\leqslant\|v_0\|_{V^3}+\sqrt T\|v'\|_{L_2(0,T;V^1)}.$$

Так как правая часть полученного неравенства не зависит от t, то перейдем к максимуму по $\tau\in[0,T]$ в левой части. Тогда с учетом оценки (4.4) получим

$$\max_{t\in[0,T]}\|v(t)\|_{V^3}\leqslant\|v_0\|_{V^3}+\frac{C_9T^{\frac12}}{\theta}\Big(1+\frac1\theta\Big)\Big(\|v_0\|^2_{V^0}+\|f\|^2_{L_2(0,T;V^{-1})}\Big)+\frac{C_9T^{\frac12}}{\sqrt\theta}\|v_0\|_{V^2}+\frac{C_9T^{\frac12}}{\theta}\|v_0\|^2_{V^2}.$$

Таким образом, установлена оценка (4.5).

Теперь мы докажем (4.6). Как и ранее, $v\in W_2$ — решение операторного уравнения (3.3). Тогда

$$\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}\leqslant\left\|\xi f-\mu_0Av-\frac{\xi\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}B(v,z)-\theta A^2v'+K(v)\right\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}\leqslant$$
$$\leqslant\|f\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}+\mu_0\|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}+\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}\|B(v,z)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}+$$
$$+\theta\|A^2v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}+\|K(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}. \tag{4.9}$$

Отдельно рассмотрим слагаемые в правой части последнего неравенства. Сначала установим оценку на $\|K(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}$. Учитывая известное неравенство для $n=3$

$$\|u\|_{L_4(\Omega)}\leqslant 2^{\frac12}\|u\|^{\frac14}_{L_2(\Omega)}\|\nabla u\|^{\frac34}_{L_2(\Omega)},\quad u\in V^1,$$

и оценку (3.4), мы получим (для случая $n=2$ доказательство аналогично):

$$\|K(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}=\left(\int\limits_0^T\|K(v)\|^{\frac43}_{V^{-1}}\,dt\right)^{\frac34}\leqslant C_4\left(\int\limits_0^T\|v\|^{\frac83}_{L_4(\Omega)}\,dt\right)^{\frac34}\leqslant$$
$$\leqslant 2C_4\left(\int\limits_0^T\|v\|^{\frac23}_{L_2(\Omega)}\|\nabla v\|^2_{L_2(\Omega)}\,dt\right)^{\frac34}\leqslant C_{14}\left(\int\limits_0^T\|v\|^{\frac23}_{V^0}\|v\|^2_{V^1}\,dt\right)^{\frac34}\leqslant$$
$$\leqslant C_{14}\|v\|^{\frac12}_{C([0,T];V^0)}\left(\int\limits_0^T\|v\|^2_{V^1}\,dt\right)^{\frac34}=C_{14}\|v\|^{\frac12}_{C([0,T];V^0)}\|v\|^{\frac32}_{L_2(0,T;V^1)}.$$

Используя неравенство Гёльдера:

$$\|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} = \left(\int\limits_0^T \|Av\|_{V^{-1}}^{\frac{4}{3}}\,dt\right)^{\frac{3}{4}} \leqslant \left(\int\limits_0^T \|v\|_{V^1}^{\frac{4}{3}}\,dt\right)^{\frac{3}{4}} \leqslant T^{\frac{1}{4}}\left(\int\limits_0^T \|v\|_{V^1}^{2}\,dt\right)^{\frac{1}{2}} = T^{\frac{1}{4}}\|v\|_{L_2(0,T;V^1)}.$$

Аналогичным образом с помощью неравенства Гёльдера и оценки (3.5) для $u = 0$ получим:

$$\|B(v,z)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} = \left(\int\limits_0^T \|B(v,z)\|_{V^{-1}}^{\frac{4}{3}}\,dt\right)^{\frac{3}{4}} \leqslant T^{\frac{1}{4}}\left(\int\limits_0^T \|B(v,z)\|_{V^{-1}}^{2}\,dt\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= T^{\frac{1}{4}}\|B(v,z)\|_{L_2(0,T;V^{-1})} \leqslant T^{\frac{1}{4}}T^{1/2-\alpha}C_5\|v\|_{L_2(-0,T;V^1)}.$$

Наконец, рассмотрим последнее слагаемое:

$$\theta\|A^2v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} = \theta\left(\int\limits_0^T \|A^2v'\|_{V^{-1}}^{\frac{4}{3}}\,dt\right)^{\frac{3}{4}} \leqslant \theta\left(\int\limits_0^T \|v'\|_{V^3}^{\frac{4}{3}}\,dt\right)^{\frac{3}{4}} \leqslant \theta\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)}.$$

Оценим правую часть для $p = 4/3$:

$$\theta\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)} \leqslant \|f\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} - \mu_0\|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} +$$
$$+ \|K(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \mu_1\|B(v,z)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}.$$

Таким образом,

$$\theta\|A^2v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant \theta\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)} \leqslant \|f\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} +$$
$$+ \mu_0\|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}\|B(v,z)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \|K(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}.$$

Итак, из (4.9), оценок наших операторов выше и априорных оценок (4.1) и (4.2), получим

$$\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant 2(\|f\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \mu_0\|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} +$$
$$+ \|K(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}\|B(v,z)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}) \leqslant$$
$$\leqslant C_{15}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|v\|_{C([0,T];V^0)}^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L_2(0,T;V^1)}^{\frac{3}{2}}) \leqslant$$
$$\leqslant C_{16}((\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2}) + (\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v_0\|_{V^0} +$$
$$+ \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2})^{\frac{1}{2}}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2})^{\frac{3}{2}}) \leqslant$$
$$\leqslant C_{17}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1 + \|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2})^2 \leqslant 4C_{17}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + 1 + \|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2}).$$

Тогда получаем неравенство (4.6), где $C_{10} = 4C_{17}$.

Наконец, вновь применяя оценки на наши операторы, для правой части (4.9), а также априорные оценки (4.1) и (4.2), получим

$$\theta\|v'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)} \leqslant 2(\|f\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} + \mu_0\|Av\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} +$$
$$+ \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}\|B(v,z)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}) + \|K(v)\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant$$
$$\leqslant C_{18}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v\|_{L_2(0,T;V^1)} + \|v\|_{C([0,T];V^0)}^{\frac{1}{2}}\|v\|_{L_2(0,T;V^1)}^{\frac{3}{2}}) \leqslant$$
$$\leqslant C_{19}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2} +$$
$$+ (\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2})^{\frac{1}{2}}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + \|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2})^{\frac{3}{2}}) \leqslant$$
$$\leqslant C_{19}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})} + 1 + \|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2})^2 \leqslant 4C_{19}(\|f\|_{L_2(0,T;V^{-1})}^2 + 1 + \|v_0\|_{V^0} + \sqrt{\theta}\|v_0\|_{V^2}).$$

Таким образом, установлено неравенство (4.7), где $C_{11} = 4C_{19}$. □

Из лемм 4.1 и 4.2 непосредственно вытекает следствие.

Следствие 4.1. *Если $v \in W_2$ — решение* (3.3) *для некоторого $\xi \in [0,1]$, то для него имеет место оценка*

$$\|v\|_{W_2} \leqslant C_{20},$$

где константа C_{20} зависит от θ.

Теперь мы готовы сформулировать и доказать теорему о существовании решений вспомогательной задачи (3.1) при $\xi = 1$.

5. Существование решения аппроксимационной задачи

Теорема 5.1. *Операторное включение* (3.3) *при $\xi = 1$ имеет хотя бы одно решение $v \in W_2$.*

Доказательство. Для доказательства данной теоремы воспользуемся теорией топологической степени для многозначных векторных полей (см., например, [3]).

Введем оператор $\mathcal{Y} : W_2 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3$ следующим образом: $\mathcal{Y}(v) = (\Psi(v), v_0)$. Тогда задача существования решения $(v,f) \in W_2 \times L_2(0,T;V^{-1})$ задачи 3.1 эквивалентна задаче существования решения $v \in W_2$ для следующего операторного включения:

$$v \in \xi\mathcal{M}, \quad \text{где } \mathcal{M} = L^{-1}(\mathcal{Y} + C(v) - G(v)). \tag{5.1}$$

Из следствия 4.1 следует, что все решения уравнения (5.1) лежат в шаре $B_R \subset W_2$ с центром в нуле и радиусом $R = C_{20} + 1$. Согласно утверждению 3) леммы 3.1 оператор $L : W_2 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3$ является обратимым. Тогда ни одно решение $v \in \xi\mathcal{M}$ не принадлежит границе шара B_R.

В силу части 3) леммы 3.1 оператор $L^{-1} : L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3 \to W_2$ является непрерывным. Согласно части 4) леммы 3.1 и лемме 3.3 отображение $(\mathcal{Y}+C(v)-G(v)) : W_2 \to L_2(0,T;V^{-1}) \times V^3$ является L-уплотняющим относительно меры некомпактности Куратовского γ_k. Следовательно, оператор $\mathcal{M} : W_2 \to W_2$ является уплотняющим относительно меры некомпактности Куратовского γ_k.

Таким образом, векторное поле $v - \xi\mathcal{M}$ невырождено на границе шара B_R, а значит, для этого векторного поля определена топологическая степень $\deg(I - \xi\mathcal{M}, B_R, 0)$. По свойствам гомотопической инвариантности и нормировки степени получим, что

$$\deg(I - \mathcal{M}, B_R, 0) = \deg(I, B_R, 0) = 1.$$

Отличие от нуля, степень отображения обеспечивает существование хотя бы одного решения $v \in W_2$ включения (3.3) при $\xi = 1$, а следовательно, и вспомогательной задачи 3.1 при $\xi = 1$. $\square$

6. Предельный переход

Перейдем к доказательству разрешимости исходной задачи управления. Для этого осуществим предельный переход во вспомогательной задаче 3.1 при $\xi = 1$. Поскольку пространство V^3 плотно в V^0, то для каждого $v_0^* \in V^0$ существует последовательность $v_0^m \in V^3$, сходящаяся к v_0^* в V^0. Если $v_0^* \equiv 0$, то положим $v_0^m \equiv 0$, $\theta_m = 1/m$. Если же $\|v_0^*\|_{V^0} \neq 0$, то начиная с некоторого номера $\|v_0^m\|_{V^2} \neq 0$. Тогда положим $\theta_m = 1/(m\|v_0^m\|_{V^2}^2)$. В силу нашего выбора полученная последовательность $\{\theta_m\}$ сходится к нулю при $m \to \infty$. При этом $\theta_m \|v_0^m\|_{V^2}^2 \leqslant 1$.

По теореме 5.1 при каждом θ_m и v_0^m существует решение $v_m \in W_2 \subset W_1$ вспомогательной задачи 3.1 при $\xi = 1$. Таким образом, каждое решение v_m для всех $\varphi \in V^1$ при почти всех $t \in (0,T)$ удовлетворяет равенству

$$\langle (v^m)', \varphi\rangle - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i^m v_j^m \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \mu_0 \int\limits_\Omega \nabla v^m : \nabla\varphi\, dx - \theta_m \int\limits_\Omega \nabla\Delta(v^m)' : \nabla\varphi\, dx +$$

$$+ \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v^m)(s, z^m(s;t,x))\, ds, \mathcal{E}(\varphi) \right) = \langle f, \varphi\rangle \tag{6.1}$$

и начальному условию $v(0,x) = v_0^m$. Таким образом, из оценок (4.1), (4.2), (4.6) и (4.7) получаем, что

$$\|v^m\|^2_{L_2(0,T;V^1)} \leqslant C_{21}, \quad \|v^m\|^2_{C([0,T];V^0)} \leqslant C_{22}, \tag{6.2}$$

$$\|(v^m)'\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})} \leqslant C_{23}, \quad \theta\|(v^m)'\|_{L_{4/3}(0,T;V^3)} \leqslant C_{24}, \tag{6.3}$$

где константы C_{21}–C_{24} не зависят от θ. В силу непрерывности вложения $C([0,T];V^0) \subset L_\infty(0,T;V^0)$ и оценок (6.2)-(6.3), без ограничения общности (если необходимо, переходя к подпоследовательности) получим, что $v^m \to v^*$ слабо в $L_2(0,T;V^1)$ при $m \to \infty$, $v^m \to v^*$ *-слабо в $L_\infty(0,T;V^0)$ при $m \to \infty$, $(v^m)' \to (v^*)'$ слабо в $L_{4/3}(0,T;V^{-1})$ при $m \to \infty$, и что предельная функция v^* принадлежит пространству W_1.

Принимая во внимание априорные оценки (6.2)-(6.3) и условия (Ψ1)–(Ψ4), без ограничения общности можем предположить, что существует $f^* \in L_2(0,T;V^{-1})$ такое, что $f^m \to f^* \in \Psi(v^*)$ при $m \to \infty$.

Рассмотрим задачу Коши (1.3) для предельной функции v^*. Так как $v^* \in W_1$, тогда v^* удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Поэтому в $[0,T] \times [0,T] \times \overline{\Omega}$ существует РЛП $z^*(\tau;t,x)$, порожденный v^*. Обозначим через $z^m(\tau;t,x)$ РЛП, порожденный v^m.

Лемма 6.1. *Последовательность $z^m(\tau;t,x)$ сходится по мере Лебега на $[0,T] \times \Omega$ по (τ,x) к $z(\tau;t,x)$ для $t \in [0,T]$.*

Данная лемма следует из априорной оценки леммы 4.2 и теоремы 2.2.

Доказательство разрешимости задачи управления (1.1)–(1.4), (2.2) разделим на две части. В первой части перейдем к пределу в задаче 3.1 при $\xi = 1$ с гладкой пробной функцией φ из V^1, во второй части — для производной функции $\varphi \in V^1$.

I часть. Пусть пробная функция φ из V^1 — гладкая. Перейдем к пределу в каждом слагаемом (6.1). При $m \to \infty$ для любого $\varphi \in V^1$ по определению слабой сходимости $v^m \to v^*$ в $L_2(0,T;V^1)$ получим

$$\mu_0 \int_\Omega \nabla v^m : \nabla\varphi\, dx \to \mu_0 \int_\Omega \nabla v^* : \nabla\varphi\, dx.$$

В силу слабой сходимости $(v^m)' \to (v^*)'$ в $L_{4/3}(0,T;V^{-1})$ при $m \to \infty$ получим, что $\langle (v^m)', \varphi\rangle \to \langle (v^*)', \varphi\rangle$ для любого $\varphi \in V^1$. Далее, используя оценку (6.3), без ограничения общности (в случае необходимости переходя к подпоследовательности) мы имеем, что существует функция $u \in L_{4/3}(0,T;V^3)$ такая, что $\theta_m(v^m)' \to u$ слабо в $L_{4/3}(0,T;V^3)$ при $m \to \infty$. Тогда

$$\theta_m\langle \nabla\Delta(v^m)', \nabla\varphi\rangle \to \langle \nabla\Delta u, \nabla\varphi\rangle \quad \text{при} \quad m \to \infty.$$

Однако последовательность $\theta_m(v^m)'$ сходится к нулю в смысле распределений на отрезке $[0,T]$ со значениями в V^{-3}. Действительно, для любой гладкой скалярной функции ψ с компактным носителем и $\varphi \in V^3$ мы получим

$$\lim_{m\to\infty}\left|\theta_m \int_0^T \int_\Omega \nabla\Delta(v^m)' : \nabla\varphi\, dx\psi(t)\, dt\right| = \lim_{m\to\infty}\theta_m\left|\int_0^T \int_\Omega \Delta(v^m)'\Delta\varphi\, dx\psi(t)\, dt\right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\theta_m\left|\int_0^T \int_\Omega \nabla(v^m)' : \nabla\Delta\varphi\, dx\psi(t)\, dt\right| = \lim_{m\to\infty}\theta_m \lim_{m\to\infty}\left|\int_0^T \int_\Omega \nabla(v^m)' : \nabla\Delta\varphi\, dx\psi(t)\, dt\right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\theta_m \lim_{m\to\infty}\left|\int_\Omega \left(\int_0^T \nabla(v^m)'\psi(t)\, dt\right) : \nabla\Delta\varphi\, dx\right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\theta_m \lim_{m\to\infty}\left|\int_\Omega \left(\int_0^T \nabla v^m \frac{\partial\psi(t)}{\partial t}\, dt\right) : \nabla\Delta\varphi\, dx\right| =$$

$$= \lim_{m\to\infty}\theta_m \lim_{m\to\infty}\left|\int_0^T\int_\Omega \nabla v^m : \nabla\Delta\varphi\, dx \frac{\partial\psi(t)}{\partial t}\, dt\right|.$$

Так как v^m слабо сходится к v^* в $L_2(0,T;V^1)$ и, следовательно, сходится к v^* в смысле распределений, то

$$\lim_{m\to\infty}\theta_m \lim_{m\to\infty}\left|\int_0^T\int_\Omega \nabla v^m : \nabla\Delta\varphi\, dx \frac{\partial\psi(t)}{\partial t}\, dt\right| = \left|\int_0^T\int_\Omega \nabla v^* : \nabla\Delta\varphi\, dx \frac{\partial\psi(t)}{\partial t}\, dt\right| \lim_{m\to\infty}\theta_m = 0.$$

Таким образом, в силу единственности слабого предела $\theta_m\langle\nabla\Delta(v^m)', \nabla\varphi\rangle \to 0$ при $m\to\infty$.

Теперь покажем, что

$$\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v^m)(s,\, z^m(s;t,x))\, ds, \mathcal{E}(\varphi)\right) \to$$
$$\to \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v^*)(s, z^*(s;t,x))\, ds, \mathcal{E}(\varphi)\right). \quad (6.4)$$

Рассмотрим разность

$$\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v^m)(s,\, z^m(s;t,x))\, ds, \mathcal{E}(\varphi)\right) -$$
$$- \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v^*)(s, z^*(s;t,x))\, ds, \mathcal{E}(\varphi)\right) =$$
$$= \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\int_\Omega [\mathcal{E}(v^m)(s,\, z^m(s;t,x)) - \mathcal{E}(v^*)(s,\, z^m(s;t,x))] : \mathcal{E}(\varphi)\, dx\, ds\right) +$$
$$+ \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\int_\Omega [\mathcal{E}(v^*)(s,\, z^m(s;t,x)) - \mathcal{E}(v^*)(s, z^*(s;t,x))] : \mathcal{E}(\varphi)\, dx\, ds\right) =$$
$$= Z_1^m + Z_2^m.$$

1. Покажем сначала, что $Z_1^m \to 0$ при $m\to\infty$.

Обозначим интеграл по области Ω в Z_1^m через I:

$$I = \int_\Omega [\mathcal{E}(v^m)(s,\, z^m(s;t,x)) - \mathcal{E}(v^*)(s,\, z^m(s;t,x))] : \mathcal{E}(\varphi)\, dx.$$

Сделаем в I замену переменных $x = z^m(t;s,y)$ (где обратная замена $y = z^m(s;t,x)$):

$$I = \int_\Omega [\mathcal{E}(v^m)(s,y) - \mathcal{E}(v^*)(s,y)] : \mathcal{E}(\varphi)(z^m(t;s,y))\, dy.$$

Перепишем Z_1^m и продолжим разложение:

$$Z_1^m = \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\int_\Omega [\mathcal{E}(v^m)(s,y) - \mathcal{E}(v^*)(s,y)] : \mathcal{E}(\varphi)(z^m(t;s,y))\, dy\, ds\right) =$$
$$= \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\int_\Omega [\mathcal{E}(v^m)(s,y) - \mathcal{E}(v^*)(s,y)] :\right.$$

$$: [\mathcal{E}(\varphi)(z^m(t;s,y)) - \mathcal{E}(\varphi)(z^*(t;s,y))]\, dy\, ds \Bigg) +$$

$$+ \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \int\limits_\Omega [\mathcal{E}(v^m)(s,y) - \mathcal{E}(v^*)(s,y)] : \mathcal{E}(\varphi)(z^*(t;s,y))\, dy\, ds \right) = Z_{11}^m + Z_{12}^m.$$

a) Получаем, что $Z_{12}^m \to 0$ при $m \to \infty$ в силу слабой сходимости v^m к v^* в пространстве $L_2(0,T;V^1)$.

b) Применяя неравенства Гёльдера и Коши—Буняковского, получим

$$|Z_{11}^m|^2 \leqslant C_{25} \left(\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \|v^m(s,\cdot) - v^*(s,\cdot)\|_{V^1} \|\varphi_x(z^m(t;s,\cdot)) - \varphi_x(z^*(t;s,\cdot))\|_{V^0}\, ds \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant C_{26} \|v^m(s,\cdot) - v^*(s,\cdot)\|_{L_2(0,T;V^1)} \int\limits_0^T \|\varphi_x(z^m(t;s,\cdot)) - \varphi_x(z^*(t;s,\cdot))\|_{V^0}\, ds. \tag{6.5}$$

Обозначим второй сомножитель в последнем неравенстве через $\Phi_m(s)$:

$$\Phi_m(s) = \int\limits_0^T \|\varphi_x(z^m(t;s,\cdot)) - \varphi_x(z^*(t;s,\cdot))\|_{V^0}\, ds.$$

Покажем сходимость $\Phi_m(s) \to 0$ при $m \to \infty$ для всех $s \in [0,T]$. Заметим, что

$$\Phi_m(s) = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega |\varphi_x(z^m(t;s,y)) - \varphi_x(z^*(t;s,y))|^2\, dy\, ds.$$

Пусть $\varepsilon > 0$ будет достаточно малым числом. Непрерывность функции φ_x в $\overline{\Omega}$ означает, что существует $\delta(\varepsilon)$ такое, что если $|x'' - x'| \leqslant \delta(\varepsilon)$, то

$$|\varphi_x(x'') - \varphi_x(x')| \leqslant \varepsilon. \tag{6.6}$$

Так как последовательность $z^m(t;s,y)$ сходится к $z^*(t;s,y)$ по мере Лебега по (t,y), то для $\delta(\varepsilon)$ существует такое число $N = N(\delta(\varepsilon))$, что для $m \geqslant N$ выполнено неравенство

$$m(\{(t,y):\ |z^m(t;s,y) - z^*(t;s,y)| \geqslant \delta(\varepsilon)\}) \leqslant \varepsilon. \tag{6.7}$$

Обозначим

$$Q(>\delta(\varepsilon)) = \{(t,y) \in Q_T:\ |z^m(t;s,y) - z^*(t;s,y)| > \delta(\varepsilon)\};$$
$$Q(\leqslant\delta(\varepsilon)) = \{(t,y) \in Q_T:\ |z^m(t;s,y) - z^*(t;s,y)| \leqslant \delta(\varepsilon)\}.$$

Тогда

$$\Phi_m(s) \leqslant C_{27} \Bigg(\int\limits_{Q(>\delta(\varepsilon))} |\varphi_x(z^m(t;s,y)) - \varphi_x(z^*(t;s,y))|^2\, dy\, ds +$$

$$+ \int\limits_{Q(\leqslant\delta(\varepsilon))} |\varphi_x(z^m(t;s,y)) - \varphi_x(z^*(t;s,y))|^2\, dy\, ds \Bigg) = C_{27}(\Phi_m^1(s) + \Phi_m^2(s)). \tag{6.8}$$

Для $\Phi_m^2(s)$ в силу (6.6) имеем $|z^m(t;s,y) - z^*(t;s,y)| \leqslant \delta(\varepsilon)$. Следовательно,

$$\Phi_m^2(s) \leqslant \int\limits_{Q(\leqslant\delta(\varepsilon))} \varepsilon^2\, dy\, ds = C_{28}\varepsilon^2. \tag{6.9}$$

Для $\Phi^1_m(s)$ в силу (6.7) имеем $m(Q(>\delta(\varepsilon)))\leqslant\varepsilon$. Следовательно,

$$\Phi^1_m(s)\leqslant C_{29}\|\varphi_x\|_{C(\Omega)}\int\limits_{Q(>\delta(\varepsilon))}dy\,ds=C_{29}\varepsilon\|\varphi_x\|_{C(\Omega)}. \tag{6.10}$$

Таким образом, из (6.8), (6.9) и (6.10) следует, что для малого $\varepsilon>0$ и $m\geqslant N(\delta(\varepsilon))$ выполнено неравенство $\Phi_m(s)\leqslant C_{30}\varepsilon$. Следовательно, получена сходимость $\Phi_m(s)\to 0$ при $m\to\infty$ для всех $s\in[0,T]$. Рассмотрим правую часть неравенства (6.5). В силу ограниченности первого сомножителя (т. к. $v^m\in L_2(0,T;V^1)$) и сходимости к 0 второго сомножителя при $m\to\infty$, получаем, что $Z^m_{11}\to 0$ при $m\to\infty$.

Таким образом, доказано, что $Z^m_1\to 0$ при $m\to\infty$.

2. Теперь покажем, что $Z^m_2\to 0$ при $m\to\infty$. Рассмотрим вспомогательную гладкую и конечную на $[0,T]\times\Omega$ функцию $\widetilde{v}(t,x)$ такую, что $\|v^*-\widetilde{v}\|_{L_2(0,T;V^1)}\leqslant\varepsilon$ для достаточно малого $\varepsilon>0$. Оценим теперь Z^m_2 через три интеграла:

$$|Z^m_2|\leqslant C_{31}\left(\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\int\limits_\Omega\|v^*(s,\,z^m(s;t,x))-\widetilde{v}(s,z^m(s;t,x))\|_{V^1}\,ds+\right.$$

$$+\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\int\limits_\Omega\|\widetilde{v}(s,\,z^m(s;t,x))-\widetilde{v}(s,z^*(s;t,x))\|_{V^1}\,ds+$$

$$\left.+\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\int\limits_\Omega\|\widetilde{v}(s,\,z^*(s;t,x))-v^*(s,z^*(s;t,x))\|_{V^1}\,ds\right)=C_{31}(Z^m_{21}+Z^m_{22}+Z^m_{23}).$$

Сделаем замену переменных в нормах под интегралами Z^m_{21} и Z^m_{23}:

$$\|v^*(s,\,z_m(s;t,x))-\widetilde{v}(s,z^m(s;t,x))\|_{V^1}=\|v^*(s,y)-\widetilde{v}(s,y)\|_{V^1};$$
$$\|\widetilde{v}(s,\,z^*(s;t,x))-v^*(s,z^*(s;t,x))\|_{V^1}=\|\widetilde{v}(s,y)-v^*(s,y)\|_{V^1}.$$

Тогда получим $Z^m_{21}+Z^m_{23}=C_{32}\left(\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\|v^*(s,\cdot)-\widetilde{v}(s,\cdot)\|_{V^1}\,ds\right)\leqslant C_{32}\varepsilon$. Оценим также Z^m_{22}:

$$Z^m_{22}\leqslant C_{32}\left(\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\left(\int\limits_\Omega|\widetilde{v}_x(s,\,z^m(s;t,\cdot))-\widetilde{v}_x(s,z^*(s;t,\cdot))|^2\,dx\right)^{1/2}ds\right).$$

В силу леммы 6.1 $z^m(s;t,x)$ сходится к $z(s;t,x)$, а функция $\widetilde{v}_x(t,x)$ — ограниченная и гладкая, поэтому по теореме Лебега получим сходимость $Z^m_2\to 0$ при $m\to\infty$. Таким образом, доказали сходимость (6.4).

В итоге показали, что функция v^* при гладкой пробной функции φ из V^1 удовлетворяет равенству:

$$\langle(v^*)',\varphi\rangle-\int\limits_\Omega\sum_{i,j=1}^n v^*_i v^*_j\frac{\partial\varphi_j}{\partial x_i}dx+\mu_0\int\limits_\Omega\nabla v^*:\nabla\varphi\,dx+$$

$$+\frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)}\left(\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}}(t-s)^{-\alpha}\mathcal{E}(v^*)(s,z^*(s;t,x))\,ds,\mathcal{E}(\varphi)\right)=\langle f^*,\varphi\rangle. \tag{6.11}$$

Так как для последовательности $\{v^m\}$ имеют место априорные оценки (6.2)-(6.3), то в силу свойств слабой сходимости для v^* непосредственно получаем оценку:

$$\|v^*\|_{L_\infty(0,T;V^0)}+\|v^*\|_{L_2(0,T;V^1)}+\|v^*\|_{L_{4/3}(0,T;V^{-1})}\leqslant C_{33}.$$

Таким образом, доказали предельный переход при гладкой пробной функции φ из V^1.

II часть. Докажем данный предельный переход для произвольной пробной функции φ из V^1. Перепишем (6.11) для гладкой φ в виде:

$$[G_1, \varphi] - [G_2, \varphi] = 0, \tag{6.12}$$

где

$$[G_1, \varphi] = \langle v', \varphi \rangle - \int\limits_\Omega \sum_{i,j=1}^n v_i v_j \frac{\partial \varphi_j}{\partial x_i} dx + \mu_0 \int\limits_\Omega \nabla v : \nabla \varphi \, dx +$$

$$+ \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} \left(\int\limits_0^t e^{\frac{-(t-s)}{\lambda}} (t-s)^{-\alpha} \mathcal{E}(v)(s, z(s;t,x)) \, ds, \mathcal{E}(\varphi) \right);$$

$$[G_2, \varphi] = \langle f, \varphi \rangle.$$

Лемма 6.2. *Пусть пробная функция φ — гладкая. Тогда*

$$|[G_1, \varphi]| \leqslant C_{41} \|\varphi\|_{V^1}, \quad |[G_2, \varphi]| \leqslant C_{42} \|\varphi\|_{V^1}. \tag{6.13}$$

Так как множество гладких функций плотно в V^1, для $\varphi \in V^1$ существует последовательность гладких функций $\varphi^l \in V^1$ таких, что $|\varphi^l - \varphi|_{V^1} \to 0$ при $l \to \infty$. В силу (6.12) получим

$$[G_1, \varphi] - [G_2, \varphi] = [G_1, \varphi - \varphi^l] - [G_2, \varphi - \varphi^l] + [G_1, \varphi^l] - [G_2, \varphi^l] = [G_1, \varphi - \varphi^l] - [G_2, \varphi - \varphi^l].$$

Из последнего равенства и оценок (6.13) получим $|[G_1, \varphi] - [G_2, \varphi]| \leqslant C_{43} |\varphi - \varphi^l|$. Принимая во внимание последнее неравенство и переходя к пределу при $l \to \infty$ в равенстве (6.11) для $\varphi = \varphi^l$, получим равенство (6.11) для произвольной $\varphi \in V^1$, что и завершает доказательство теоремы 2.3 о существовании слабых решений задачи управления с обратной связью (1.1)–(1.4), (2.2).

7. Существование оптимального управления с обратной связью

Из теоремы 2.3 мы получаем, что множество решений Σ непусто. Следовательно, существует минимизирующая последовательность $(v_l, f_l) \in \Sigma$ такая, что

$$\lim_{l \to \infty} \Phi(v_l, f_l) = \inf_{(v,f,) \in \Sigma} \Phi(v, f).$$

Как и ранее, используя оценку (6.2)-(6.3), мы без ограничения общности и в случае необходимости переходя к подпоследовательности, можем предположить, что: $v_l \rightharpoonup v_*$ *-слабо в $L_\infty(0,T;V^0)$; $v_l \to v_*$ сильно в $L_2(0,T;L_4(\Omega))$; $v_l \rightharpoonup v_*$ слабо в $L_2(0,T;V^1)$; $z_l(\tau;t,x) \to z_*(\tau;t,x)$ по норме Лебега относительно $(\tau, x) \in [0,T] \times \Omega$; $f_l \to f_* \in \Psi(v^*)$ сильно в $L_2(0,T;V^{-1})$ при $m \to +\infty$.

Аналогично предыдущему разделу, переходя к пределу во включении

$$Jv_l' + \mu_0 A v_l + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v_l, z_l) - K(v_l) = f_l \in \Psi(v_l),$$

мы получим следующее включение:

$$Jv_*' + \mu_0 A v_* + \frac{\mu_1}{\Gamma(1-\alpha)} B(v_*, z_*) - K(v_*) = f_* \in \Psi(v_*).$$

Следовательно $(v_*, f_*) \in \Sigma$. Поскольку функционал Φ полунепрерывен снизу относительно слабой топологии, мы имеем

$$\Phi(v_*, f_*) \leqslant \inf_{(v,f) \in \Sigma} \Phi(v, f),$$

что доказывает, что (v_*, f_*) — требуемое решение. Это и завершает доказательство теоремы 2.4.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Астарита Дж., Маруччи Дж.* Основы гидродинамики неньютоновских жидкостей. — М.: Мир, 1979.
2. *Ахмеров Р. Р., Каменский М. И., Потапов А. С., Родкина А. Е., Садовский Б. Н.* Меры некомпактности и уплотняющие операторы. — Новосибирск: Наука, 1986.
3. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. — М.: Либроком, 2011.
4. *Дмитриенко В. Т., Звягин В. Г.* Гомотопическая классификация одного класса непрерывных отображений// Мат. заметки. — 1982. — *31*, № 5. — С. 801–812.

5. *Звягин В. Г.* Аппроксимационно-топологический подход к исследованию математических задач гидродинамики// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2012. — *46*. — С. 92–119.
6. *Звягин А. В.* Задача оптимального управления для стационарной модели слабо концентрированных водных растворов полимеров// Дифф. уравн. — 2013. — *49*, № 2. — С. 245–249.
7. *Звягин А. В.* Оптимальное управление с обратной связью для альфа-модели Лере и альфа-модели Навье—Стокса// Докл. РАН. — 2019. — *486*, № 5. — С. 527–530.
8. *Звягин А. В.* О слабой разрешимости и сходимости решений дробной альфа-модели Фойгта движения вязкоупругой среды// Усп. мат. наук. — 2019. — *74*, № 3. — С. 189–190.
9. *Звягин А. В.* Исследование слабой разрешимости дробной альфа-модели Фойгта// Изв. РАН. Сер. мат. — 2021. — *85*, № 1. — С. 66–97.
10. *Звягин В. Г., Дмитриенко В. Т.* О слабых решениях регуляризованной модели вязкоупругой жидкости// Дифф. уравн. — 2002. — *38*, № 12. — С. 1633–1645.
11. *Звягин В. Г., Звягин А. В., Турбин М. В.* Оптимальное управление с обратной связью для модели Бингама с периодическими условиями по пространственным переменным// Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2018. — *477*. — С. 54–86.
12. *Звягин В. Г., Орлов В. П.* О регулярности слабых решений обобщенной модели вязкоупругости Фойгта// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2020. — *60*, № 11. — С. 1933–1949.
13. *Звягин В. Г., Турбин М. В.* Математические вопросы гидродинамики вязкоупругих сред. — М.: Красанд, 2012.
14. *Садовский Б. Н.* Предельно компактные и уплотняющие операторы// Усп. мат. наук. — 1972. — *27*, № 1. — С. 81–146.
15. *Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. И.* Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. — Минск: Наука и техника, 1987.
16. *Фурсиков А. В.* Оптимальное управление распределенными системами. Теория и приложения. — Новосибирск: Научная книга, 1999.
17. *Agranovich Yu. Ya., Sobolevskii P. E.* Motion of nonlinear visco-elastic fluid// Nonlinear Anal. — 1998. — *32*, № 6. — С. 755–760.
18. *Aubin J. P., Cellina A.* Differential inclusions. Set valued maps and viability theory. — Berlin: Springer, 1984.
19. *Bagley R. L., Torvik P. J.* A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity// J. Rheol. — 1983. — *27*. — С. 201–210.
20. *Crippa G.* The ordinary differential equation with non-Lipschitz vector fields// Boll. Unione Mat. Ital. (9). — 2008. — *1*, № 2. — С. 333–348.
21. *Crippa G., de Lellis C.* Estimates and regularity results for the diPerna—Lions flow// J. Reine Angew. Math. — 2008. — *616*. — С. 15–46.
22. *DiPerna R. J., Lions P. L.* Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces// Invent. Math. — 1989. — *98*, № 3. — С. 511–547.
23. *Mainardi F., Spada G.* Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology// Eur. Phys. J. Spec. Topics. — 2011. — *193*. — С. 133–160.
24. *Zvyagin V. G., Kostenko E. I.* Investigation of the weak solvability of one fractional model with infinite memory// Lobachevskii J. Math. — 2023. — *44*, № 3. — С. 969–988.
25. *Zvyagin V., Obukhovskii V., Zvyagin A.* On inclusions with multivalued operators and their applications to some optimization problems// J. Fixed Point Theory Appl. — 2014. — *16*. — С. 27–82.
26. *Zvyagin V., Orlov V.* Weak solvability of fractional Voigt model of viscoelasticity// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2018. — *38*, № 12. — С. 6327–6350.
27. *Zvyagin V., Orlov V.* Weak solvability of one viscoelastic fractional dynamics model of continuum with memory// J. Math. Fluid Mech. — 2021. — *23*, № 1. — Article 9.
28. *Zvyagin V., Zvyagin A., Ustiuzhaninova A.* Optimal feedback control problem for the fractional Voigt-α model// Mathematics. — 2020. — *8*, № 7. — С. 1197.

А. В. Звягин
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: `zvyagin.a@mail.ru`

Е. И. Костенко
Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия
E-mail: `ekaterinalarshina@mail.ru`

UDC 517.977.5
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-621-642
EDN: YRJVVX

The existence problem of feedback control for one fractional Voigt model

A. V. Zvyagin and E. I. Kostenko

Voronezh State University, Voronezh, Russia

Abstract. In this paper, we study the feedback control problem for a mathematical model that describes the motion of a viscoelastic fluid with memory along velocity field trajectories. We prove the existence of an optimal control that gives a minimum to a given bounded and semi-continuous from below quality functional. The proof uses the approximation-topological approach, the theory of regular Lagrangian flows, and the theory of topological degree for multivalued vector fields.

Keywords: fractional Voigt model, viscoelastic fluid, motion with memory, optimal control, approximation-topological approach, regular Lagrangian flow, topological degree, multivalued vector field.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The research was supported by the Russian Science Foundation, grant № 23-71-10026, `https://rscf.ru/project/23-71-10026/`.

For citation: A. V. Zvyagin, E. I. Kostenko, "The existence problem of feedback control for one fractional Voigt model," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 4, 621–642. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-621-642`

REFERENCES

1. G. Astarita and G. Marrucci, *Osnovy gidrodinamiki nen'yutonovskikh zhidkostey* [Principles of Non-Newtonian Fluid Mechanics], Mir, Moscow, 1979 (Russian translation).
2. R. R. Akhmerov, M. I. Kamenskii, A. S. Potapov, A. E. Rodkina, and B. N. Sadovskii, *Mery nekompaktnosti i uplotnyayushchie operatory* [Non-Compactness Measures and Condensing Operators], Nauka, Novosibirsk, 1986 (in Russian).
3. Yu. G. Borisovich, B. D. Gel'man, A. D. Myshkis, and V. V. Obukhovskiy, *Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otobrazheniy i differentsial'nykh vklyucheniy* [Introduction to the Theory of Multivalued Mappings and Differential Inclusions], Librokom, Moscow, 2011 (in Russian).
4. V. T. Dmitrienko and V. G. Zvyagin, "Gomotopicheskaya klassifikatsiya odnogo klassa nepreryvnykh otobrazheniy" [Homotopy classification of one class of continuous mappings], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1982, **31**, No. 5, 801–812 (in Russian).
5. V. G. Zvyagin, "Approksimatsionno-topologicheskiy podkhod k issledovaniyu matematicheskikh zadach gidrodinamiki" [Topological approximation approach to study of mathematical problems of hydrodynamics], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2012, **46**, 92–119 (in Russian).
6. A. V. Zvyagin, "Zadacha optimal'nogo upravleniya dlya statsionarnoy modeli slabo kontsentrirovannykh vodnykh rastvorov polimerov" [Optimal control problem for a stationary model of weakly concentrated water solutions of polymers], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2013, **49**, No. 2, 245–249 (in Russian).
7. A. V. Zvyagin, "Optimal'noe upravlenie s obratnoy svyaz'yu dlya al'fa-modeli Lere i al'fa-modeli Nav'e—Stoksa" [Optimal feedback control for the Leray alpha model and the Navier–Stokes alpha model], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2019, **486**, No. 5, 527–530 (in Russian).
8. A. V. Zvyagin, "O slaboy razreshimosti i skhodimosti resheniy drobnoy al'fa-modeli Foygta dvizheniya vyazkouprugoy sredy" [On the weak solvability and convergence of solutions to the fractional alpha Voigt

model of motion of a viscoelastic medium], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2019, **74**, No. 3, 189–190 (in Russian).

9. A. V. Zvyagin, "Issledovanie slaboy razreshimosti drobnoy al'fa-modeli Foygta" [Investigation of the weak solvability of the fractional alpha Voigt model], *Izv. RAN. Ser. mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2021, **85**, No. 1, 66–97 (in Russian).
10. V. G. Zvyagin and V. T. Dmitrienko, "O slabykh resheniyakh regulyarizovannoy modeli vyazkouprugoy zhidkosti" [On weak solutions of a regularized model of a viscoelastic fluid], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2002, **38**, No. 12, 1633–1645 (in Russian).
11. V. G. Zvyagin, A. V. Zvyagin and M. V. Turbin, "Optimal'noe upravlenie s obratnoy svyaz'yu dlya modeli Bingama s periodicheskimi usloviyami po prostranstvennym peremennym" [Optimal feedback control for the Bingham model with periodic conditions in spatial variables], *Zap. nauch. sem. POMI* [Notes Sci. Semin. St. Petersburg Dept. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2018, **477**, 54–86 (in Russian).
12. V. G. Zvyagin and V. P. Orlov, "O regulyarnosti slabykh resheniy obobshchennoy modeli vyazkouprugosti Foygta" [On the regularity of weak solutions of the generalized Voigt viscoelasticity model], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2020, **60**, No. 11, 1933–1949 (in Russian).
13. V. G. Zvyagin and M. V. Turbin, *Matematicheskie voprosy gidrodinamiki vyazkouprugikh sred* [Mathematical Problems of Hydrodynamics of Viscoelastic Media], Krasand, Moscow, 2012 (in Russian).
14. B. N. Sadovskii, "Predel'no kompaktnye i uplotnyayushchie operatory" [Limit-compact and condensing operators], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1972, **27**, No. 1, 81–146 (in Russian).
15. S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Integraly i proizvodnye drobnogo poryadka i nekotorye ikh prilozheniya* [Integrals and Derivatives of Fractional Order and Some of Their Applications], Nauka i Tekhnika, Minsk, 1987 (in Russian).
16. A. V. Fursikov, *Optimal'noe upravlenie raspredelennymi sistemami. Teoriya i prilozheniya* [Optimal Control of Distributed Systems. Theory and Applications], Nauchnaya Kniga, Novosibirsk, 1999 (in Russian).
17. Yu. Ya. Agranovich and P. E. Sobolevskii, "Motion of nonlinear visco-elastic fluid," *Nonlinear Anal.*, 1998, **32**, No. 6, 755–760.
18. J. P. Aubin and A. Cellina, *Differential Inclusions. Set Valued Maps and Viability Theory*, Springer, Berlin, 1984.
19. R. L. Bagley and P. J. Torvik, "A theoretical basis for the application of fractional calculus to viscoelasticity," *J. Rheol.*, 1983, **27**, 201–210.
20. G. Crippa, "The ordinary differential equation with non-Lipschitz vector fields," *Boll. Unione Mat. Ital. (9)*, 2008, **1**, No. 2, 333–348.
21. G. Crippa and C. de Lellis, "Estimates and regularity results for the diPerna—Lions flow," *J. Reine Angew. Math.*, 2008, **616**, 15–46.
22. R. J. DiPerna and P. L. Lions, "Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces," *Invent. Math.*, 1989, **98**, No. 3, 511–547.
23. F. Mainardi and G. Spada, "Creep, relaxation and viscosity properties for basic fractional models in rheology," *Eur. Phys. J. Spec. Topics*, 2011, **193**, 133–160.
24. V. G. Zvyagin and E. I. Kostenko, "Investigation of the weak solvability of one fractional model with infinite memory," *Lobachevskii J. Math.*, 2023, **44**, No. 3, 969–988.
25. V. Zvyagin, V. Obukhovskii, and A. Zvyagin, "On inclusions with multivalued operators and their applications to some optimization problems," *J. Fixed Point Theory Appl.*, 2014, **16**, 27–82.
26. V. Zvyagin and V. Orlov, "Weak solvability of fractional Voigt model of viscoelasticity," *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2018, **38**, No. 12, 6327–6350.
27. V. Zvyagin and V. Orlov, "Weak solvability of one viscoelastic fractional dynamics model of continuum with memory," *J. Math. Fluid Mech.*, 2021, **23**, No. 1, article 9.
28. V. Zvyagin, A. Zvyagin, and A. Ustiuzhaninova, "Optimal feedback control problem for the fractional Voigt-α model," *Mathematics*, 2020, **8**, No. 7, 1197.

A. V. Zvyagin
Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: zvyagin.a@mail.ru

E. I. Kostenko
Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: ekaterinalarshina@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 4 (2023). С. 643–663
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.958+519.63
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-643-663
EDN: YWEHJV

МАТЕРИАЛЬНЫЙ БАЛАНС ЭЙНШТЕЙНА И МОДЕЛИРОВАНИЕ ТЕЧЕНИЯ СЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ ВБЛИЗИ ГРАНИЦЫ

А. Ибрагимов[1,2], Э. Закиров[2], И. Индрупский[2], Д. Аникеев[2], А. Жаглова[2]

[1] *Texas Tech University, Lubbock, USA*
[2] *Институт проблем нефти и газа РАН, Москва, Россия*

Аннотация. Мы рассматриваем технику «сшивания» численного решения конечноразностной задачи и аналитического решения, определенных на разных масштабах: вдали и вблизи границы (источника) области течения. Суть подхода заключается в том, что грубая конечноразностная задача и краевая задача в приближении исходной модели математически моделируют два разных режима течения. В своей замечательной статье Писман предлагает схему, позволяющую работать с решениями, определенными на разных масштабах, для линейных *стационарных* задач, вводя знаменитый радиус блока скважины Писмана. В данной статье предлагается новый подход к решению этой проблемы для неустановившегося течения, обусловленного сжимаемостью жидкости. Мы предлагаем метод склеивания решений через суммарные потоки, заданные на крупной сетке, и изменения давления, обусловленные сжимаемостью, в блоке, содержащем добывающую (нагнетательную) скважину. Важно отметить, что грубое решение «не видит» границы.

С прикладной точки зрения наш отчет предоставляет математический аппарат для аналитической интерпретации смоделированных данных течения сжимаемой жидкости в пористой среде вблизи скважины. Его можно рассматривать как математическую «обертку» известной формулы радиуса блока скважины Писмана для линейного (Дарси) неустановившегося течения, но его можно применять и в гораздо более общем сценарии. В статье мы используем подход Эйнштейна для вывода уравнения материального баланса, ключевого инструмента для определения R_0 для трех режимов течений сжимаемой жидкости (зависящих от времени):

I. стационарный;
II. псевдостационарный;
III. с доминированием граничного условия.

Отметим, что в известных авторам работах соответствующая задача фактически не зависит от времени.

Ключевые слова: сжимаемая жидкость, радиус Писмана, материальный баланс Эйнштейна.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Настоящее исследование является вкладом в выполнение государственного задания Института проблем нефти и газа РАН (проект 122022800272-4).

Для цитирования: *А. Ибрагимов, Э. Закиров, И. Индрупский, Д. Аникеев, А. Жаглова.* Материальный баланс Эйнштейна и моделирование течения сжимаемой жидкости вблизи границы// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 4. С. 643–663. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-643-663

1. Предисловие

Радиус блока скважины Писмана [7, 13–17] рутинно используется инженерами, моделирующими процесс добычи для интерпретации расчетных данных на блоке B_0, который содержит скважину. Целью является сравнение численного значения функции давления, полученного на расчетном блоке B_0, с фактическим значением давления на скважине. При этом суммарный дебит скважины считается заданным.

В приложениях считается, что радиус Писмана не зависит от радиуса скважины, а определяется размером блока B_0, и задача стационарна. Условия применимости такого подхода, к сожалению, не обоснованы математически строго, и поэтому формулу Писмана трудно обобщать даже для установившихся течений. Подробный обзор основных принципов для построения писмановского радиуса для линейных и нелинейных стационарных течений в пористых средах представлен в статье, принятой к публикации в журнале «Applied and Computational Mathematics» (vol. 23, № 1, 2024) и опубликован в 2022 г. в работе [11] (см. также [4]). Здесь мы хотим отметить следующее: насколько нам известно, понятие эквивалентного радиуса было введено в первые в России (см. [1,3]), но соответствующие работы не были переведены, а потому не цитируются в современной западной литературе.

В основе идеи радиуса блока скважины Писмана лежит уравнение материального баланса, которое позволяет «сшить» аналитическое решение с численным (дискретным), а также интерпретировать результат расчета значения давления в блоке, содержащем скважину. Обычно в блоках, не содержащих скважину, численное решение мало отличается от фактического при малых размерах блока и для строго эллиптических задач. В настоящей статье мы рассматриваем этот вопрос для нестационарных задач двух типов:

1. с заданным дебитом скважины;
2. заданным давлением на скважине в условиях непротекания на границе дренирования.

Рассматриваемый подход является общим с математической точки зрения, а потому применим к задачам разного происхождения.

В этом разделе мы опишем парадигму материального баланса как систему алгебраических уравнений и укажем предполагаемое применение этого подхода для нашей задачи фильтрации в пористых средах. Чтобы представить систему уравнений материального баланса, сначала рассмотрим следующий набор зависимых переменных:

$$\mathcal{P} = \left\{p_{\pm r_0,0}(s); p_{0,\pm r_0}(s); p_{\pm 1,0}(s); p_{0,\pm 1}(s); q_x^{\pm}(s); q_y^{\pm}(s)\right\}. \tag{1.1}$$

Предположим, что входные параметры алгебраической модели постоянны:

$$\mathcal{K} = \left\{K_x^{\pm}; K_y^{\pm}\right\} \quad \text{и} \quad \mathcal{Q} = \left\{Q_x^{\pm}; Q_y^{\pm}\right\}. \tag{1.2}$$

Как уже отмечалось, мы рассматриваем задачу о течении жидкости к скважине в пористой среде. А именно, рассмотрим диффузионный процесс в области, содержащей центр 0: $U \ni 0$. Предположим, что диффузионный процесс инициирован источником (стоком), расположенным в центре 0. Пусть $U_N = \sum\limits_{i=1}^{N} B_i$ — численная сетка, аппроксимирующая U, такая, что $U_N \supset B_0 \ni 0$ и квадратные блоки B_i имеют характерный размер Δ (см. рис. 1).

Главное предположение о параметрах заключается в том, что процесс течения жидкости в среде несравненно быстрее, чем изменения в жидкости и в пористой среде, потому изменениями в $\mathbf{K}$ и $\mathcal{Q}$ пренебрегают. Предположим, что проводимость по отношению к течению, генерируемому источником, в интересующих нас блоках не зависит от Δ.

Пусть набор $\mathcal{P}$ содержит параметры, определенные только в центре $B_0 = B_{0,0}$ (область значений параметров $p_{\pm r_0,0}(s)$, $p_{0,\pm r_0}(s), \ldots$ находится в B_0) и ближайших четырех блоках $B_{i,J}$ (области значений параметров $p_{\pm r_0,0}(s)$, $p_{0,\pm r_0}(s)$ находятся в $B_{\pm 1,0}$, $B_{0,\pm 1}$.). Рассмотрим фильтрацию, описываемую уравнением материального баланса, как алгебраическое уравнение относительно неизвестной переменной $p_{a,b}(s)$, зависящей от параметра s и входной переменной $q_a^b(s)$, которая также зависит от параметра s. Параметр s моделирует время. Система также характеризуется параметром τ, который связан с изменением свойств переменных p на интервале времени $[s, s+\tau]$. Этот параметр τ в некотором смысле связывает наше уравнение материального баланса (алгебраическое) с уравнением баланса Эйнштейна (см. [8, 10]).

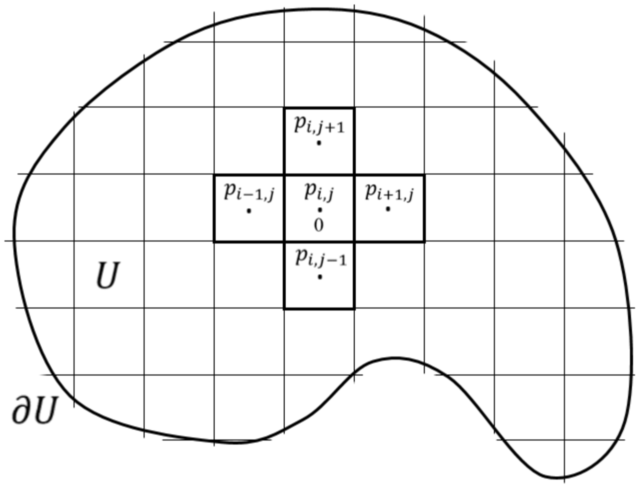

Рис. 1. Дискретная сетка. Блоки расположены в тех же областях, что и $p_{i,j}$; $p_{i,i}$ ассоциируется с B_0, U_N аппроксимирует область U.

Fig. 1. Discrete grid. Blocks are located in the same areas as $p_{i,j}$; $p_{i,i}$ is associated with B_0, U_N approximates the area U.

В статье τ фиксировано и предполагается очень маленьким.

Замечание 1.1. Обратим внимание, что уравнение материального баланса Эйнштейна естественно является детерминированным, но с коэффициентом, зависящим от плотности вероятности и интервала τ. Поэтому мы считаем, что подход Эйнштейна можно распространить на случайные процессы, определенные на стохастической сетке. Мы оставим этот вопрос для дальнейших исследований.

Зависимые переменные из множества $\mathcal{P}$ по отношению к независимым (заданным) параметрам $\mathcal{K}$, $\mathcal{Q}$, и τ удовлетворяют системе алгебраических уравнений:

$$\tau K_x^- \left(p_{-r_0,0}(s) - p_{-1,0}(s)\right) = \tau q_x^-(s) + Q_x^- \left(p_{-r_0,0}(s+\tau) - p_{-r_0,0}(s)\right), \tag{1.3}$$

$$\tau K_x^+ \left(p_{r_0,0}(s) - p_{1,0}(s)\right) = \tau q_x^+(s) + Q_x^+ \left(p_{-r_0,0}(s+\tau) - p_{-r_0,0}(s)\right), \tag{1.4}$$

$$\tau K_y^- \left(p_{0,-r_0}(s) - p_{0,-1}(s)\right) = \tau q_y^-(s) + Q_y^- \left(p_{-r_0,0}(s+\tau) - p_{-r_0,0}(s)\right), \tag{1.5}$$

$$\tau K_y^+ \left(p_{0,r_0}(s) - p_{0,1}(s)\right) = \tau q_y^+(s) + Q_y^+ \left(p_{0,r_0}(s+\tau) - p_{0,r_0}(s)\right). \tag{1.6}$$

Введем обозначения:

$$q_x(s) = q_x^-(s) + q_x^+(s), \quad q_y(s) = q_y^-(s) + q_y^+(s), \quad Q_x = Q_x^- + Q_x^+ Q_y = Q_y^- + Q_y^+, \tag{1.7}$$

$$q(s) = q_x(s) + q_y(s), \quad Q = Q_x + Q_y. \tag{1.8}$$

Введем базовые предположения с целью получения аналитических явных решений. Пусть имеет место симметрия относительно «+» и «−», определяемая следующим образом.

Определение 1.1. *Структурная симметрия относительно «+» и «−».*

1. Коэффициенты K:

$$K_x^- = K_x^+ = K_x, \quad K_y^- = K_y^+ = K_y. \tag{1.9}$$

2. Параметры q:

$$q_x^-(s) = q_x^+(s) = \frac{q_x(s)}{2}, \quad q_y^-(s) = q_y^+(s) = \frac{q_y(s)}{2}. \tag{1.10}$$

3. Коэффициенты Q:

$$Q_x^- = Q_x^+ = \frac{Q_x}{2}, \quad Q_y^- = Q_y^+ = \frac{Q_y}{2}. \tag{1.11}$$

4. Переменные p по первому индексу:

$$p_{-r_0,0}(s) = p_{r_0,0}(s) = p_{r_0}^x(s), \quad p_{-1,0}(s) = p_{1,0}(s) = p_1^x(s). \tag{1.12}$$

5. Переменные p по второму индексу:

$$p_{0,-r_0}(s) = p_{0,r_0}(s) = p^y_{r_0}(s), \quad p_{0,-1}(s) = p_{0,1}(s) = p^y_1(s). \tag{1.13}$$

Из вышеприведенных предположений о симметрии из уравнений (1.3)–(1.6) после небольших модификаций следует

$$\tau \cdot 2 \cdot K_x \left(p^x_{r_0}(s) - p^x_1(s)\right) = \tau q_x(s) + Q_x \cdot 2 \cdot \left(p^x_{r_0}(s+\tau) - p^x_{r_0}(s)\right), \tag{1.14}$$

$$\tau \cdot 2 \cdot K_y \left(p^y_{r_0}(s) - p^y_1(s)\right) = \tau q_y(s) + Q_y \cdot 2 \cdot \left(p^y_{r_0}(s+\tau) - p^y_{r_0}(s)\right). \tag{1.15}$$

Предположим, что $(p^y_{r_0}(s) - p^y_1(s) = 0$ $(p^y_{r_0}(s+\tau) - p^y_{r_0}(s))$ и $q_y(s) = 0$. Это условие представляет собой прототип 1-мерного уравнения материального баланса, которое примет в случае *симметрии* в направлении x следующий вид:

$$\tau \cdot 2 \cdot K_x \left(p^x_{r_0}(s) - p^x_1(s)\right) = \tau q_x(s) + Q_x \cdot 2 \cdot \left(p^x_{r_0}(s+\tau) - p^x_{r_0}(s)\right). \tag{1.16}$$

В 2-мерном случае как прототип для *радиально-симметричного течения* в уравнении материального баланса мы положим $p_{r_0} = p^x_{r_0} = p^y_{r_0}, \ldots$, а для *изотропного течения* положим: $K_x = K_y$, $q(s) = q_x(s) + q_y(s)$ и $Q(s) = Q_x(s) + Q_y(s)$. Соответствующее уравнение примет вид:

$$\tau \cdot 4 \cdot K \left(p_{r_0}(s) - p_1(s)\right) = \tau q(s) + Q(s) \cdot 4 \cdot \left(p_{r_0}(s+\tau) - p_{r_0}(s)\right). \tag{1.17}$$

В динамической постановке искомые алгебраические переменные $p^{x,y,\ldots}_i$, $i = 0, 1, 2, \ldots$, зависят также от параметра s (прототип времени), и это достаточно общее обстоятельство для структур в алгебраической геометрии.

Замечание 1.2. Структура алгебраических зависимостей абстрактна, хотя в этой статье мы применяем эту конструкцию к задачам подземной гидромеханики. В этом смысле мы отметим общие характеристики уравнения материального баланса. С учетом алгебраической структуры уравнения параметры $p_i(s)$ являются зависимыми переменными. Положим $i = 0, 1$; тогда, применяя ранее приведенные рассуждения, мы можем использовать параметрическую алгебраическую структуру как технику сшивания (усреднения) между аналитическим и численным решением. Это весьма общее обстоятельство, которое может быть использовано для разных задач. С этой целью мы перепишем уравнения материального баланса с общими коэффициентами:

$$\tau \left(J^p_{1,0}\left(p_0(s) - p_1(s)\right) - I_q q(s)\right) = L^{p_0}_q \left(p_0(s+\tau) - p_0(s)\right). \tag{1.18}$$

В дальнейшем мы выберем их в специальном виде, связанном с размерностью и областью дискретизации.

Значения коэффициентов и их зависимость от входных параметров могут варьироваться в зависимости от предполагаемого применения, размерности, геометрии и динамики процесса, дискретности и т. д.

В уравнении (1.18) функция $q(s)$ — это основная *функция, определяющая процесс*, и три других коэффициента $J^p_{1,0}$, I_q, и $L^{p_0}_q$ содержат существенные характеристики алгебраической и геометрической структуры среды течения и ее дискретизации по области U_N. Эти коэффициенты мы выберем в следующем разделе.

2. Коэффициенты в уравнении материального баланса с точки зрения конечноразностной схемы

Рассмотрим течение слабосжимаемой жидкости в области U и соответствующую модель в форме краевой задачи без начальных условий. Известно, что численное моделирование течения дает три базовые характеристики процесса:

1. геометрическую аппроксимацию области фильтрации композитной жидкости;
2. численные значения таких функций, как давление или скорость и т. д.;
3. величины основных параметров, характеризующих область фильтрации по отношению к химическим и физическим свойствам жидкостей в пористой среде.

Чтобы объяснить алгебраическую структуру уравнения материального баланса (1.18), рассмотрим ортогональную сетку размерности $M \times N$ и размеров Δ_x и Δ_y. Пусть $P_{(M,N)}$ — матрица размерности $M \times N$ значений давления с элементами $p_{i,j}(t)$, которые привязаны к блоку $B_{i,j}$.

В этом разделе мы явно определим коэффициенты в системе уравнений материального баланса в зависимости от Δ_x и Δ_y на пятиточечной ортогональной сетке. Предположим, что блок $B_{0,0}$ содержит источник в центре $(0,0)$, и этот источник порождает конечные разности функции $p_{i,j}(t)$ для различных i и j. Здесь $D = \Omega \times (0,h)$ — трёхмерная цилиндрическая область, и отсутствует поток в направлении z. Предположим, что функция типа Грина $p(x,y,t)$ является решением базовой задачи моделирования:

$$L\frac{\partial p(x,y,t)}{\partial t} - J\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right)p = I\delta(x,y) \quad \text{в} \quad (U \setminus (0,0)) \times (-\infty,\infty)\ , \tag{2.1}$$

$$B(p) = 0 \quad \text{на} \quad \partial U \times (-\infty,\infty). \tag{2.2}$$

Здесь B — граничный оператор, которым в нашем случае будет оператор Дирихле или Ньюмана. Для аппроксимации функции $p(x,y,t)$ рассмотрим конечно-разностное решение задачи в прямоугольной области:

$$L\frac{p_{i,i}(t+\tau) - p_{i,i}(t)}{\tau} - J\left(\frac{p_{i-1,j}(t) - 2p_{i,j}(t) + p_{i+1,j}(t)}{\Delta_x^2} + \frac{p_{i,j-1}(t) - 2p_{i,j}(t) + p_{i,j+1}(t)}{\Delta_y^2}\right) =$$
$$= I\frac{\delta_{i,j}}{\Delta_x\Delta_y h} \quad \text{в} \quad \Omega_N \setminus (0,0), \tag{2.3}$$
$$B(p) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega_N \times (-\infty,\infty),$$

или

$$L(\Delta_x\Delta_y h)\left(p_{i,j}(t+\tau) - p_{i,j}(t)\right) =$$
$$= \tau\left[Jh\left(\frac{\Delta_y}{\Delta_x}(p_{i-1,j}(t) - 2p_{i,j}(t) + p_{i+1,j}(t)) + \frac{\Delta_x}{\Delta_y}(p_{i,j-1}(t) - 2p_{i,j}(t) + p_{i,j+1}(t))\right) + I\delta_{i,j}\right], \tag{2.4}$$
$$B(p) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega_N \times (-\infty,\infty).$$

Здесь $\delta_{i,j}$ — символ Кронекера. Приведенное выше уравнение является основным и может применяться как в 1-мерном, так и в 2-мерном случае. Хотя в обоих случаях есть много общего, мы будем рассматривать их отдельно. А именно:

1. 1-*мерный материальный баланс в «последних блоках»* B_0, B_1.
   В случае 1-мерной симметрии естественно предположить, что $\Delta_y h = 1$ при любых $\Delta = \Delta_x$. Тогда уравнение материального баланса примет вид

$$L\cdot\Delta\cdot 1\cdot(p_0(t+\tau) - p_0(t)) =$$
$$= \tau\left(2\cdot J\cdot 1\cdot\frac{(p_1(t) - p_0(t))}{\Delta} + I\delta_{0,0}\right) = \tau\left(2\cdot J\cdot 1\cdot\frac{(p_1(t) - p_0(t))}{\Delta} + q\delta_{0,0}\right). \tag{2.5}$$

2. *Радиально-симметричный материальный баланс для «последних блоков»* $B_0, B_{pm1,0}, B_{0,pm1}$.
   В предположении 2-мерной симметрии имеем

$$\Delta = \Delta_x = \Delta_y. \tag{2.6}$$

   Напомним, что толщина скважины постоянна, а потому

$$I = q. \tag{2.7}$$

   Тогда уравнение (2.4) может быть упрощено:

$$L\Delta^2 h\,(p_0(t+\tau) - p_0(t)) = \tau\,(4Jh\,(p_1(t) - p_0(t)) + I\delta_{i,j}) = \tau\,(4(Jh)\,(p_1(t) - p_0(t)) + q\delta_{i,j})\,. \tag{2.8}$$

Замечание 2.1. Для удобства суммируем комментарии о свойствах среды по отношению к потоку жидкости в виде списка примечаний.

1. Всюду выше q — это общий расход скважины (дебит скважины), который зависит от времени, $q = q(s)$, для псевдостационарного режима и режима с доминированием граничного условия.
2. В этой статье в случае 2-мерных потоков предполагаются условия симметричности и изотропии в следующем виде:

$$K = K_x^- = K_x^+ = K_y^- = K_y^+, \quad q_x^- = q_x^+ = q_y^- = q_y^+, \quad Q_x^- = Q_x^+ = Q_y^- = Q_y^+. \tag{2.9}$$

3. В этой статье в случае 1-мерных потоков предполагаются условия симметричности и изотропии в следующем виде:
$$K = K_x^- = K_x^+, \quad q = q_x^- = q_x^+ q_y^- = q_y^+ = 0, \quad Q = Q_x^- = Q_x^+ Q_y^- = Q_y^+ = 0. \tag{2.10}$$
4. Все приведенные выше предположения позволяют получить аналитическое решение, которое можно построить явно. В случае, когда явное аналитическое решение недоступно для «склеивания», можно использовать численное решение на мелком масштабе для соответствующего параболического уравнения с граничными условиями. В этом смысле задача Писмана является задачей усреднения.
5. Уравнение материального баланса «не видит» границы (внутренней) Ω_N и используется для склеивания аналитического решения путем решения задачи Писмана. Но аналитическое решение будет учитывать влияние граничных условий на значение радиуса Писмана как на самой скважине (внутренней границе) так и на границе области дренирования (внешней границе). Мы увидим, что в линейном случае в нестационарной задаче R_0 будет зависеть только от размера области. В случае стационарной задачи, как было показано Писманом, R_0 не зависит от размера области дренирования, и это весьма примечательное открытие. Этот вопрос подробно обсуждался в нашей статье [11].

3. 1-мерное уравнение материального баланса

Рассмотрим сетку, определенную на рис. 2 при отсутствии течения в направлении вертикальной оси y. Пусть $h\Delta_y = 1$ и $\Delta_x = \Delta$. Материальный баланс в вертикальном направлении (направлении y) для 1-мерного уравнения материального баланса предполагается тривиальным. Определим в уравнении (1.18) соответствующие коэффициенты следующим образом:
$$I_q(s) = q\frac{1}{1 \cdot \Delta_x}, \tag{3.1}$$
$$J_{1,0}^p = 2K\frac{1}{\Delta_x^2}, \tag{3.2}$$
$$C^0 = L_q^{p_0} = \phi C_p. \tag{3.3}$$
Тогда уравнение материального баланса (1.18) можно переписать в виде
$$2K\left(p_0(s) - p_1(s)\right) = -q\Delta + C^0\frac{p_0(s+\tau) - p_0(s)}{\tau}\Delta^2. \tag{3.4}$$
Отметим, что если мы будем использовать конечноразностную аппроксимацию в качестве уравнение материального баланса (2.8), мы получим
$$L\Delta \cdot 1 \cdot (p_0(t+\tau) - p_{i,i}(t)) = \tau\left(2(J \cdot 1 \cdot \frac{(p_1(t) - p_0(t))}{\Delta} + q\delta_{i,j}\right), \tag{3.5}$$
$$B(p) = 0 \quad \text{на} \quad \partial U \times (-\infty, \infty),$$
что эквивалентно уравнению (3.4) при $J = K$ и $L = C^0$.

3.1. 1-мерная стационарная задача. В данном разделе мы рассмотрим элементарную задачу, в которой p не зависит от s. А именно, рассмотрим случай, когда p_i, $i = 0, 1$ не зависят от s. Для этого достаточно член в левой части уравнения (3.4) положить равным нулю:
$$\phi C_p \Delta^2 \frac{p_0(s+\tau) - p_0(s)}{\tau} \equiv 0. \tag{3.6}$$
С физической точки зрения (см. (3.6)), это означает следующее:
1. интервал времени τ с точки зрения сжатия фиксированного объема $V_0 = \Delta^2$ относительно объема всей области течения достаточно велик;
2. пористость ϕ незначительна;
3. сжимаемость C_p незначительна;
4. изменение давления в блоке V_0 за время τ пренебрежимо мало.

Определение 3.1. Будем говорить, что уравнение материального баланса является *установившимся*, если условие (3.6) выполняется для всех s и τ.

Тогда симметричное, изотропное и стационарное 1-мерное уравнение баланса имеет вид

$$2K(p_0 - p_1) = q\Delta. \tag{3.7}$$

Замечание 3.1. Обратим внимание, что для стационарной задачи в уравнении материального баланса p_i не зависит от параметра s (времени в нашем предполагаемом приложении).

Чтобы согласовать значение p_0 с профилем давления гидродинамической задачи на границе области течения, порожденного заданным дебитом q, рассмотрим 1-мерное течение несжимаемой жидкости в направлении слоя $x = 0$. На поток воздействуют:

1. силы, порождающие линейное уравнение Дарси — связи скорости и градиента фильтрации;
2. независимое от s давление $p = p_e$ на границе резервуара $x = r_e$;
3. дебит q на слое $x = 0$ в качестве внутренней границы потока.

Соответствующая аналитическая модель для 1-мерного давления имеет вид

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{d}{dx}p_{an}(x)\right) = 0; \tag{3.8}$$

$$p_{an}(x)\Big|_{x=R_e} = p_e; \tag{3.9}$$

$$-K\frac{dp_{an}}{dx}\Big|_{x=0} = q. \tag{3.10}$$

Определение 3.2. Пусть на 1-мерной области $(0; R_e)$ задана сетка $[0, \Delta, 2\Delta, \dots, N\Delta]$, где $N\Delta = r_e$. Мы говорим, что проблема Писмана корректно определена относительно материального баланса (3.7) для 1-мерных потоков, если для любого заданного Δ существует такое R_0, зависящее только от Δ, что аналитическое решение 1-мерной стационарной задачи (3.8)–(3.10) удовлетворяет уравнению:

$$-2K\left(p_{an}(\Delta) - p_{an}(R_0)\right) = q\Delta. \tag{3.11}$$

Теорема 3.1. *Чтобы проблема Писмана была корректно определена относительно уравнения материального баланса* (3.7) *для* 1*-мерных потоков, необходимо и достаточно, чтобы*

$$R_0 = \frac{\Delta}{2}. \tag{3.12}$$

Доказательство. Очевидно, что аналитическое решение $p_{an}(x)$ имеет вид

$$p_{an}(x) = Ax + B, \quad A = -\frac{q}{K}, \quad B = p_e + \frac{q}{K}r_e. \tag{3.13}$$

Подставив $p_{an}(x)$ в уравнение (3.11), получим

$$2KA((\Delta) - R_0 + (B - B)) = q\Delta, \quad \text{или} \quad 2(\Delta) = \Delta + 2R_0, \quad \text{или} \quad \Delta = 2R_0. \tag{3.14}$$

Отсюда следует формула (3.12) в утверждении теоремы. □

Замечание 3.2. Теорема 3.1 элементарна, но мы привели ее здесь, чтобы подчеркнуть, почему формула Писмана для R_0 в случае стационарного режима зависит только от размера блока Δ, но не зависит от размера области, проводимости и суммарной скорости потока. Фактически это следует из теоремы Лагранжа о среднем значении, закона Дарси и теоремы о дивергенции (закона сохранения) для несжимаемой жидкости (т. е. формула 1-мерна по самой природе).

3.2. Линейный 1-мерный псевдостационарный материальный баланс (алгебраический) и соответствующий радиус R_0. Для псевдостационарного материального баланса определим дополнительные ограничения на решение алгебраического уравнения материального баланса, предполагая, что на p_0 p_1 и q наложены следующие условия.

Определение 3.3. Будем говорить, что материальный баланс является *установившимся относительно к псевдостационарного режима*, если

$$q(s) = q \text{ не зависит от } s, \tag{3.15}$$

$$p_0(s+\tau) - p_0(s) = qC_0\tau \ \text{ и } \ C_0 \text{ зависят от } s. \tag{3.16}$$

Из этого очевидно следует, что разность

$$p_1(s) - p_0(s) \text{ не зависит от } s. \tag{3.17}$$

Тогда уравнение линейного 1-мерного псевдостационарного материального баланса будет иметь вид

$$2K\left(p_1 - p_0\right) = q\Delta\left(1 - \phi c_p \cdot 1 \cdot C_0\Delta\right) = q\Delta\left(1 - C_1\Delta\right). \tag{3.18}$$

Для простоты положим $C_1 = 1$, $\Delta < 1$.

3.3. Аналитическая модель для 1-мерной псевдостационарной задачи. Аналитическая модель для 1-мерного псевдостационарного течения Дарси слабосжимаемой жидкости при естественных предположениях о пористости и проницаемости аппроксимируется как начально-краевая задача для скалярной функции давления $p(x,t)$ (см [6]):

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial}{\partial x}p(x,t)\right) = \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{на} \quad (0; r_e)\times(0,\infty), \tag{3.19}$$

$$\left.\frac{\partial p}{\partial x}\right|_{x=r_e} = 0, \tag{3.20}$$

$$-K\left.\frac{\partial p_{an}}{\partial x}\right|_{x=0} = q, \tag{3.21}$$

$$p(x,0) = p_{an}(x). \tag{3.22}$$

Положим в задаче (3.22) начальную функцию $p_{an}(x)$ решением стационарной задачи

$$\frac{d}{dx}\left(K\frac{d}{dx}p_{an}(x)\right) = Q = \frac{q}{r_e} \quad \text{на} \quad (0; r_e), \tag{3.23}$$

$$K\left.\frac{dp_{an}}{dx}\right|_{x=r_e} = 0, \tag{3.24}$$

$$-K\left.\frac{dp_{an}}{dx}\right|_{x=0} = q. \tag{3.25}$$

Очевидно, что аналитическое решение начально-краевой задачи для псевдостационарного режима течения имеет вид

$$p_{pss}(x,t) = w(x) + A_0 t, \quad \text{где} \quad w(x) = p_{an}(x) \tag{3.26}$$

и $A_0 = \dfrac{1}{r_e}q$. Решение $p_{an}(x)$ краевой задачи (3.23)–(3.25) для удобства обозначается через $w(x)$. Псевдостационарный режим порождает давление $p_{ss}(x,t)$, которое называется *псевдостационарным давлением.*

Стационарная часть общего решения $p_{an}(x)$ представляется в виде

$$p_{an}(x) = w(x) = Ax^2 + Bx. \tag{3.27}$$

Константы A и B определяются из задачи непосредственно формулами

$$B = \frac{q}{K}, \tag{3.28}$$

$$A = \frac{B}{2r_e} = -\frac{q}{2Kr_e}. \tag{3.29}$$

Замечание 3.3. Заметим, что вспомогательная функция $w(x)$ по построению обращается в нуль при $x = 0$ («на скважине»).

По аналогии со стационарной задачей дадим определение «корректности» для псевдостационарного режима, зависящего от времени.

Определение 3.4. Будем говорить, что задача Писмана для псевдостационарного режима *корректно определена* относительно уравнения материального баланса (3.4) для 1-мерных потоков, зависящего от времени, если для любых заданных Δ и r_e существует $R_0^{pss}(\Delta, r_e)$ (зависящее от Δ и r_e) такое, что аналитическое решение 1-мерной псевдостационарной задачи (3.23)–(3.25) удовлетворяет уравнению, а также условиям (3.15) и (3.16).

Теорема 3.2. *Проблема Писмана корректно определена для* 1*-мерного уравнения материального баланса, зависящего от времени. А именно, существует* $R_0^{pss}(\Delta, r_e)$ *такое, что* $p_1(t) = p(\Delta, t)$, $p_0(t) = p(R_0, t)$ *и* q *удовлетворяет уравнению материального баланса, зависящему от времени, и обоим ограничениям в определении* 3.3.

Более того, справедлив следующий предельный результат:

$$\lim_{r_e \to \infty} R_0^{pss}(\Delta, r_e) = R_0. \tag{3.30}$$

Доказательство. Для доказательства подставим явную формулу для аналитического псевдостационарного решения в уравнение материального баланса (3.18):

$$2K\left(p_{pss}(\Delta, t) - p_{pss}(R_0, t)\right) = 2K\left(w(\Delta) - w(R_0)\right) = q\Delta\left(1 - \phi c_p \cdot 1 \cdot C_2 \frac{\Delta}{r_e}\right). \tag{3.31}$$

Из явного представления для $w(x)$ следует, что R_0 должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\Delta^2}{2r_e} + \Delta - \frac{(R_0^{pss})^2}{2r_e} - R_0^{pss} = \frac{\Delta}{2} - C_3 \frac{\Delta^2}{2r_e}, \tag{3.32}$$

при этом константа C_3 зависит только от c_p, C_2. Отсюда явно следует формула для R_0^{PSS}:

$$(1 + C_3)\frac{\Delta^2}{2r_e} + \frac{\Delta}{2} = R_0^{pss} + \frac{(R_0^{pss})^2}{2r_e}. \tag{3.33}$$

Полагая для простоты $C_3 = 0$, нетрудно видеть, что

$$\frac{(R_0^{pss})^2}{1} + 2r_e R_0^{pss} - \left(r_e \frac{\Delta}{1} + \frac{\Delta^2}{1}\right) = 0. \tag{3.34}$$

Отсюда следует, что положительная ветвь корня удовлетворяет цепочке равенств

$$R_0^{pss} = \frac{-2r_e + \sqrt{4r_e^2 + 4\Delta r_e + 8\Delta^2}}{2} = \frac{\Delta}{1 + \sqrt{1 + \frac{\Delta}{r_e} + 2\frac{\Delta^2}{r_e^2}}} + \frac{2\Delta^2}{r_e}. \tag{3.35}$$

Из этой цепочки следует утверждение теоремы 3.2. □

Следующая теорема получается непосредственно с помощью неявного дифференцирования равенства (3.32) и критерия монотонности.

Теорема 3.3. *Пусть фиксированы* Δ *и все параметры задачи, кроме* r_e*. Тогда при достаточно больших* r_e *величина* R_0^{pss} *убывает как функция от* r_e.

3.4. Линейное 1-мерное уравнение материального баланса для режима фильтрации с доминированием граничного условия и соответствующий радиус Писмана R_0. Для определения не зависящего от времени приведенного радиуса Писмана в задаче фильтрации с доминирующим на границе давлением нам понадобятся вспомогательные ограничения. Их удобно сформулировать в виде определения терминах ограничений на входные ключевые характеристики уравнения материального баланса: $q(s)$, $p_i(s)$, $i = 1, 0$, и $p_0(s + \tau)$.

Определение 3.5. Алгебраические ограничения на уравнения материального баланса для течения с доминирующим давлением на границе (режим с доминированием граничного условия) формулируются следующим образом.

Существуют константы Q_0, $\mathbf{P}_1$, $\mathbf{P}_0$, такие, что для переменных p_i и q в уравнении материального баланса выполняются соотношения:

1. $\dfrac{q(s)}{p_0(s)} = Q_0(r_e)$, где $Q_0(r_e)$ не зависит от Δ и s;
2. $\dfrac{p_1(s)}{p_0(s)} = \mathbf{P}_1(\Delta, r_e)$, где $\mathbf{P}_1(\Delta, r_e)$ является функцией только от Δ и r_e, но не от s;
3. $\dfrac{p_0(s+\tau)}{p_0(s)} = \mathbf{P}_0(\Delta, r_e)\dfrac{e^{-C(K, r_e)\tau} - 1}{\tau}$ где, как и в предыдущем пункте, величина $\mathbf{P}_0(\Delta, r_e)$ является функцией от Δ и r_e, но не зависит от s.

3.4.1. 1-мерная аналитическая задача с доминированием давления на границе. Рассмотрим аналитическую начально-краевую задачу

$$Lu_0(x,t) = \frac{\partial}{\partial x}\left(K\frac{\partial}{\partial x}u_0(x,t)\right) = c_0\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial t}, \tag{3.36}$$

$$K\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=r_e} = 0, \tag{3.37}$$

$$u_0(x,t)\Big|_{t=0} = \phi_0(x), \tag{3.38}$$

где $\phi_0(x)$ и λ_0 — первая собственная функция и первое собственное значение задачи

$$L\phi_0(x) = -\lambda_0\phi_0(x), \quad \phi(0) = 0, \quad \phi_x(r_e) = 0.$$

Полагая для простоты $c_0 = 1$, нетрудно доказать следующее утверждение.

Предложение 3.1. *Пусть $u_0(x,t)$ — аналитическое решение начально-краевой задачи* (3.36)–(3.38):

$$u_0(x,t) = e^{-K\lambda_0 t}\sin(\lambda_0 x). \tag{3.39}$$

Определим переменные в уравнении материального баланса посредством функции $u_0(x,t)$:

$$p_0(s) = u_0(R_0, s), \tag{3.40}$$

$$p_1(s) = u_0(\Delta, s), \tag{3.41}$$

$$q(s) = K\frac{\partial u_0}{\partial x}\Big|_{x=0}. \tag{3.42}$$

Тогда все соотношения в определении 3.5 *корректно определены для некоторых констант Q_0, $\mathbf{P}_0$, $\mathbf{P}_1$ для любых R_0 и Δ, а также*

$$\lambda_0 = \frac{\pi}{2r_e}. \tag{3.43}$$

Замечание 3.4. Заметим, что все исходные данные для всех трех аналитических задач задаются таким образом, что соответствующие значения для коэффициента продуктивности (см. [9]) не зависят от времени.

Важно отметить, что существование констант из предложения 3.1 представляет основной интерес и будет рассмотрено ниже. Мы сформулировали это предложение, чтобы мотивировать следующее определение корректности по Писману для режима с доминированием граничных условий.

Определение 3.6. Будем говорить, что проблема Писмана для режима, определяемого граничным давлением на скважине, *корректно определена* относительно зависящего от времени материального баланса (3.36)–(3.38) для 1-мерных потоков, если для любых заданных Δ и r_e существует $R_0^{BD}(\Delta, r_e)$, зависящее от Δ и r_e, такое, что аналитическое решение 1-мерной задачи с доминированием граничных условий (3.36)–(3.38) удовлетворяет уравнению и, кроме того, выполняются ограничения из определения (3.5).

Лемма 3.1. *Предположим, что $R_0^{bd} < \Delta$, тогда режим фильтрации Писмана корректен в случае доминирования граничных условий, если*

$$\sin(\lambda_0 R_0^{bd}) - \sin(\lambda_0\Delta) + \frac{\lambda_0\Delta}{2} = \sin(\lambda_0 R_0^{bd})\frac{1}{2K}\frac{e^{-\lambda_0^2\tau} - 1}{\tau}. \tag{3.44}$$

Более того, при $r_e \to \infty$ и $\tau \to 0$ величина $R_0^{bd}(\lambda_0, \tau)$ сходится к стационарному радиусу Писмана R_0. Здесь λ_0 — первое собственное значение, а R_0^{bd}, удовлетворяющее трансцендентному уравнению (3.44), *зависит от Δ, а также от r_e, τ, K, c_p.*

Доказательство. Для доказательства теоремы достаточно вычислить решение задачи (3.36)–(3.38) при $x = 0$:

$$q(s) = K\frac{\partial u_0(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0} = e^{-K\lambda_0 s}\lambda_0\cos(\lambda_0 x)\Big|_{x=0} = Ke^{-K\lambda_0 s}\lambda_0. \tag{3.45}$$

Здесь λ_0 — первое собственное значение соответствующей краевой задачи со смешанными граничными условиями (см. последнюю строку в (3.36)–(3.38)).

Для удобства перепишем еще раз уравнение материального баланса:

$$2K\left(p_0(s) - p_1(s)\right) = -q(s)\Delta + 1 \cdot \frac{p_0(s+\tau) - p_0(s)}{\tau}\Delta. \tag{3.46}$$

Полагая $R_0 = R_0^{bd} < \Delta$ неизвестным, получим

$$p_0(s) = e^{-K\lambda_0^2 s}\sin(\lambda_0 R_0^{bd}), \tag{3.47}$$

$$p_1(s) = e^{-K\lambda_0^2 s}\sin(\lambda_0^2 \Delta), \tag{3.48}$$

$$p_0(s+\tau) = e^{-K\lambda_0^2 (s+\tau)}\sin(\lambda_0 R_0^{bd}), \tag{3.49}$$

$$q(s) = Ke^{-K\lambda_0^2 s}\lambda_0. \tag{3.50}$$

С учетом (3.47)–(3.50) уравнение материального баланса (3.46) примет вид

$$2Ke^{-\lambda^2 s}\Big(\sin(\lambda R_0^{bd} - \sin(\lambda\Delta)\Big) = -K\lambda\Delta e^{-\lambda^2 s} + 1 \cdot \sin(\lambda R_0^{bd})\frac{e^{-\lambda^2(s+\tau)} - e^{-\lambda^2 s}}{\tau}\Delta. \tag{3.51}$$

Здесь $\lambda = \lambda_0$. После деления на $e^{-\lambda^2 s}$ уравнение (3.51) примет вид

$$2K\Big(\sin(\lambda R_0^{bd} - \sin(\lambda\Delta)\Big) = -K\lambda\Delta + 1 \cdot 1 \cdot \sin(\lambda R_0^{bd})\frac{e^{-\lambda^2 \tau} - 1}{\tau}\Delta. \tag{3.52}$$

Разделив (3.52) на $2K$, получим (3.44).

Чтобы аналитическое решение удовлетворяло уравнению материального баланса, достаточно, чтобы $R_0^{bd}(\Delta, r_e, \tau)$ являлось решением уравнения (3.44). Чтобы «явно» найти решение, удобно работать с уравнением (3.52), которое эквивалентно

$$2K \cdot 2\left(\sin\frac{\lambda(R_0^{bd} - \Delta)}{2}\cos\frac{\lambda(R_0^{bd} + \Delta)}{2}\right) = -K\lambda\Delta + 1 \cdot \sin(\lambda R_0^{bd})\lambda^2\frac{e^{-\lambda^2\tau} - 1}{\lambda^2\tau}\Delta. \tag{3.53}$$

При $\tau \to 0$ из (3.53) получим, что

$$4K\left(\sin\frac{\lambda(R_0^{bd} - \Delta)}{2}\cos\frac{\lambda(R_0^{bd} + \Delta)}{2}\right) = -K\lambda\Delta + 1 \cdot \sin(\lambda R_0^{bd})\lambda^2 \cdot (-1) \cdot \Delta. \tag{3.54}$$

Положим, что λ таково, что $\cos\dfrac{\lambda(R_0^{bd} + \Delta)}{2} \approx 1$. Для получения простой формулы для R_0^{bd}, предположим, что R_0^{bd} достаточно мало:

$$R_0^{bd} \approx \frac{\Delta}{2} - \frac{1}{2K}\lambda^2 R_0^{bd}\Delta, \tag{3.55}$$

то есть

$$R_0^{bd} \approx \frac{\frac{\Delta}{2}}{1 + \frac{1}{2K}\lambda^2\Delta}. \tag{3.56}$$

Принимая во внимание, что в 1-мерном случае $\lambda = \dfrac{\pi}{2r_e}$, и предполагая, что $\dfrac{\Delta}{8K}\dfrac{\pi^2}{r_e^2}$ достаточно мало, мы получим простую аппроксимацию для формулы расчета радиуса Писмана для режима с заданным давлением на границе области течения:

$$R_0^{bd} \approx \frac{\frac{\Delta}{2}}{1 + \frac{1}{8K}\frac{\pi^2}{r_e^2}\Delta}. \tag{3.57}$$

$\square$

Замечание 3.5. Отметим, что для достаточно малого τ, малого $\lambda\Delta$ и малого частного $\dfrac{\phi c_p}{2K}$ соответствующее решение R_0^{BD} для (3.52) существует.

Рис. 2. Материальный баланс Эйнштейна для 1-мерного потока

Fig. 2. Einstein material balance for 1D flow

Обратим также внимание на следующее. Используя теорему Лагранжа о среднем, из рассуждений выше можно показать, что если область течения «не ограничена», то получим такой же радиус Писмана, как и в стационарном (классическом) случае. Мы приводим формулировку и доказательство следующей теоремы для будущего более общего рассмотрения с учетом многомерной теоремы Ландиса о среднем значении [2].

Теорема 3.4. *Полученный радиус $R_0^{bd}(r_e,\Delta)$ в 1-мерной постановке, при котором задача Писмана корректно определена в псевдостационарном случае, асимптотически сходится к радиусу Писмана для стационарной задачи, который не зависит от размеров области фильтрации:*

$$\lim_{r_e\to\infty} R_0^{bd}(r_e,\Delta)=\frac{\Delta}{2}=R_0 \tag{3.58}$$

для любого фиксированного τ.

Доказательство. Сначала заметим, что из теоремы Лагранжа о среднем значении следует, что

$$\cos\xi\lambda\left(R_0^{bd}-\Delta\right)+\frac{\lambda\Delta}{2}=\sin(\lambda R_0^{bd})\frac{1}{2K}\frac{e^{-\lambda^2\tau}-1}{\tau}. \tag{3.59}$$

Здесь

$$\lambda R_0^{bd}<\xi<\lambda\Delta \quad \text{и, следовательно,} \quad \cos\xi=1+O(\lambda). \tag{3.60}$$

После деления на λ в (3.59) получим

$$(\cos\xi)\left(R_0^{bd}-\Delta\right)+\frac{\Delta}{2}=\lambda\sin(\lambda R_0^{bd})\frac{1}{2K}\frac{e^{-\lambda^2\tau}-1}{\lambda^2\tau}, \tag{3.61}$$

или, предполагая, как и раньше, что λ таково, что $\cos\xi\approx 1$, получим

$$R_0^{bd}-\frac{\Delta}{2}=\lambda\sin(\lambda R_0^{bd})\frac{1}{2K}\frac{e^{-\lambda^2\tau}-1}{\lambda^2\tau}+O(\lambda). \tag{3.62}$$

Очевидно, в правой части (3.63) имеем $-1\cdot\dfrac{e^{-\lambda^2\tau}-1}{\lambda^2\tau}=O(1)$ и $\sin(\lambda R_0^{bd})=o(\lambda)$, поэтому формулировка теоремы следует из (3.43) и равенства

$$R_0^{bd}-\frac{\Delta}{2}=O(\lambda). \tag{3.63}$$

□

4. Псевдостационарный материальный баланс и соответствующая аналитическая модель

Рассмотрим 2-мерное течение к скважине Γ_w в изолированном резервуаре U с границей $\partial U=\Gamma_w\cup\Gamma_e$, высотой $h=1$ и $\phi c_p=1$. Пусть V — объем области дренирования U. Уравнение материального баланса для нестационарного течения слабосжимаемой жидкости в блоке размерами $\Delta\times\Delta\cdot 1$ с объемом $V_0=\Delta^2\cdot 1$ и давлением p_0, содержащем скважину Γ_w (источник или сток) с дебитом q (положительным для источника и отрицательным для стока) имеет вид:

$$-4K(p_0(s)-p_1(s))+\frac{q}{h}=\Delta^2\cdot 1\cdot\frac{1}{\tau}\left(p_0(s+\tau)-p_0(s)\right). \tag{4.1}$$

Приведем уравнение материального баланса для слабосжимаемой жидкости с коэффициентом сжимаемости c_p, ассоциированное с псевдостационарным течением в терминах следующих предположений.

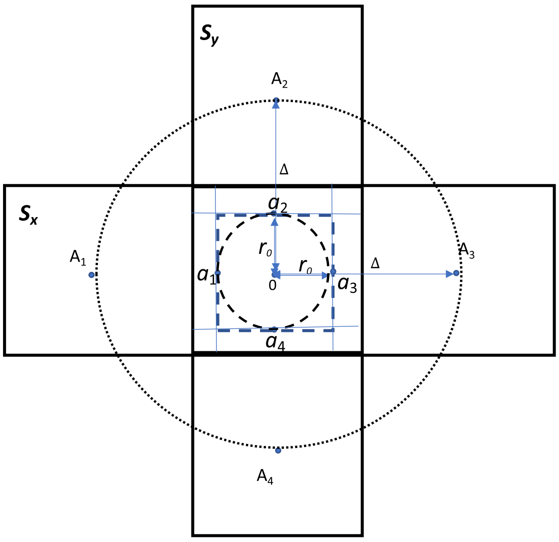

Рис. 3. Уравнение материального баланса Эйнштейна на сетке из 5 точек, 2-мерный случай

Fig. 3. Einstein material balance equation on the 5 spots grid, 2D case

Предположение 4.1. *Предположим, что*

$$p_0(s+\tau) - p_0(s) = q\frac{\tau}{1 \cdot V}, \tag{4.2}$$

$$\textit{разность}\ \ p_0(s) - p_1(s) = \text{const}\ \ (\textit{не зависит от } s)\,. \tag{4.3}$$

При этих предположениях уравнение (4.1) *принимает вид*

$$4K(p_0(s) - p_1(s)) = \frac{q}{1}\left(1 - \frac{\Delta^2}{V}\right), \tag{4.4}$$

где q — заданная константа по времени и характеризует суммарную на Γ_w скорость потока при любом s.

Замечание 4.1. Важно отметить, что $p_i(s)$ зависят от параметра s (времени в нашем приложении), и это принципиальное отличие по сравнению со стационарным режимом (уравнения материального баланса). В тоже время разность в псевдостационарном уравнении материального баланса не зависит от s, и мы это существенно используем.

4.1. Аналитическое решение, соответствующее 2-мерному течению. Рассмотрим диффузионную модель неустановившегося 2-мерного радиального течения в изолированной области U для слабо сжимаемой жидкости в направлении скважины Γ_w с заданным дебитом и отсутствием потока на внешней границе Γ_e.

Как известно, при этом функция давления $p(x,t)$ аппроксимируется решением начально-краевой задачи:

$$K\Delta p = 1 \cdot \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{в} \quad U = U(0, r_w, r_e), \tag{4.5}$$

$$K\frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_e, \tag{4.6}$$

$$K \int\limits_{\Gamma_w} \frac{\partial p}{\partial \nu} ds = -\tilde{q} \quad \text{на} \quad \Gamma_w. \tag{4.7}$$

Здесь

$$U(0, r_w, r_e) = \{x : r_w < |x| < r_e\}, \quad \Gamma_w = \{x : |x| = r_w,\}, \quad \Gamma_e = \{x : |x| = r_e\}, \quad x = (x_1, x_2),$$

$\tilde{q} = \dfrac{q}{1}$, $V = 1 \cdot |U|$, $K = \dfrac{k}{\mu}$, $\dfrac{\partial p}{\partial \nu}$ — «внешняя» производная в конормальном направлении.

В общем случае для решения задачи естественно рассмотреть смешанную краевую задачу для параболического уравнения, которая с математической точки зрения четко корректно определена и может быть обобщена для различных сценариев.

Чтобы писмановский радиус R_0 не зависел от времени, мы воспользуемся псевдостационарной начально-краевой задачей. А именно, рассмотрим псевдостационарное решение задачи (5.2)–(4.7) в виде суммы:

$$p_{pss}(x, t) = w(x) + At, \tag{4.8}$$

где

$$A = \frac{\tilde{q}}{1 \cdot |U|}, \tag{4.9}$$

а $w(x)$ — решение смешанной краевой задачи для уравнения Пуассона:

$$\nabla \left(K \nabla w(x)\right) = \frac{\tilde{q}}{|U|} \quad \text{в} \quad U, \tag{4.10}$$

$$w(x) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_w, \tag{4.11}$$

$$K \frac{\partial w}{\partial \vec{\nu}} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_e. \tag{4.12}$$

В радиально-симметричном случае, обозначая $r = |x|$, псевдостационарное решение удобно записать в виде

$$p_{pss}(r, t) = w(r) + At. \tag{4.13}$$

Нетрудно видеть, что эта функция удовлетворяет условиям (4.2) и (4.3). Далее, подставляя эту функцию в уравнение материального баланса (4.1), нетрудно получить в общем виде теорему для нахождения радиуса Писмана для псевдостационарной задачи.

Теорема 4.1. *Радиус Писмана* $\left[R_0^{PSS}(r_e, \Delta)\right]$ *для псевдостационарной задачи можно найти из уравнения*

$$4K \left(w(\Delta) - w([R_0^{pss}(r_e, \Delta)])\right) = -\frac{q}{1 \cdot V}\left(V - \Delta^2\right). \tag{4.14}$$

Из явной формы решения задачи (4.10)–(4.12) можно выразить такой $[R_0^{pss}(r_e, \Delta)]$.

Мы воспользуемся другим подходом, основанным на постановке задачи в терминах поля скоростей. Этот подход поможет в будущем работать с нелинейными потоками, а в некоторых случаях — явно получить соответствующий радиус блока скважины Писмана. Начнем с технического замечания.

Замечание 4.2. В общем случае U — область кусочной границей $\partial U = \Gamma_e \cup \Gamma_w$, и

$$\Gamma_e \cap \Gamma_w = \varnothing.$$

Будем говорить, что поле скоростей $v(x)$ имеет *псевдостационарный профиль*, если выполнено следующее предположение.

Предположение 4.2. *Будем говорить, что поле скорости соответствует псевдостационарному режиму потоков, если скорость не зависит от времени и является решением следующей краевой задачи*:

$$\nabla \vec{v} = C \quad \text{в} \quad U, \tag{4.15}$$

$$\vec{v}\vec{\nu} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_e. \tag{4.16}$$

Заметим, что по теореме о дивергенции константа C из уравнения (4.15) удовлетворяет

$$\int\limits_{\Gamma_w} \vec{v}\vec{\nu} ds = \tilde{q} = C|U|. \tag{4.17}$$

Замечание 4.3. Обратим внимание, что в нашем исходном исследовании псевдостационарные режимы [9] определялись через функцию давления. А именно, мы предполагали, что течение является псевдостационарным, если $\dfrac{\partial p}{\partial t} = \text{const}$, и нет условий течения на внешней границе. В рассматриваемом приложении оба определения эквивалентны друг другу.

4.2. Формула приведенного радиуса Писмана для 2-мерного симметричного течения (радиального). Начнем этот пункт с формулировки общей теоремы о формуле Писмана для псевдостационарного режима в радиальной постановке.

Теорема 4.2. *Существует решение задачи Писмана для нестационарного псевдостационарного режима течения, и соответствующий радиумс $R_0^{PSS}(r_e, \Delta)$ определяется уравнением*

$$-\pi + \frac{\left[R_0^{PSS}(r_e, \Delta)\right]^2}{r_e^2} + \pi\frac{r_w^2}{r_e^2} = -2\left(\ln\frac{\Delta}{\left[R_0^{PSS}(r_e, \Delta)\right]}\right). \tag{4.18}$$

Более того,

$$\lim_{r_e\to\infty}\left[R_0^{PSS}(r_e, \Delta)\right] = R_0^{SS} = R_{Peaceman}. \tag{4.19}$$

Доказательство. В общем случае решение краевой задачи для вектора скорости (4.15)-(4.16) не является единственным, но в радиальном случае однозначно определено:

$$-\frac{1}{r}(rv(r))_r = C = \frac{\tilde{q}}{|U|}, \tag{4.20}$$

$$\vec{v}\vec{r}\big|_{r=r_e} = 0. \tag{4.21}$$

Тогда для $r_w \leqslant r \leqslant r_e$:

$$v(r) = -\frac{C}{2}r + \frac{C_1}{r}. \tag{4.22}$$

Указанные выше постоянные могут быть выбраны так, что

$$C = \frac{q}{\pi(r_e^2 - r_w^2)} = \frac{q}{|U|} \quad \text{и} \quad C_1 = \frac{C}{2}r_e^2. \tag{4.23}$$

Вспомним, что скорость и градиент давления в случае, рассматриваемом в статье, связаны законом Дарси, а потому псевдостационарное решение для функции давления имеет вид

$$w(r) = -\frac{\mu}{k}\int v(r)dr$$

и, соответственно

$$w(r) = -K^{-1}\left[-\frac{C}{4}r^2 + C_1\ln r + C_2\right]. \tag{4.24}$$

Выше постоянная C_2 выбрана так, что $w(r)|_{r=r_w} = 0$, и потому

$$C_2 = \left[\frac{C}{4}r_w^2 - C_1\ln r_w\right]. \tag{4.25}$$

Соответственно, выражение для выбора $R_0^{PSS}(r_e, \Delta)$ с использованием псевдостационарного материального баланса в форме, представленной в теореме 4.1, принимает вид:

$$-\tilde{q}\left(1 - \frac{\Delta^2}{V}\right) = 4K(p_1 - p_0) = 4K[w(\Delta) - w(R_0)]. \tag{4.26}$$

Тогда в силу (4.24) и (4.23) нетрудно видеть, что

$$-\tilde{q}\left(1 - \frac{\Delta^2}{|U|}\right) = 4KK^{-1}\left[\left(C\frac{\Delta^2}{4} - C_1\ln(\Delta) - C_2\right) - \right.$$

$$-\left(C\frac{\left[R_0^{PSS}(r_e,\Delta)\right]^2}{4}-C_1\ln(\left[R_0^{PSS}(r_e,\Delta)\right])-C_2\right)\Bigg]=$$

$$=\left[C\left(\Delta^2-R_0^2\right)-4\left(C_1\ln\frac{\Delta}{\left[R_0^{PSS}(r_e,\Delta)\right]}\right)\right]=$$

$$=C\left[\left(\Delta^2-\left[R_0^{PSS}(r_e,\Delta)\right]^2\right)-2\left(r_e^2\ln\frac{\Delta}{\left[R_0^{PSS}(r_e,\Delta)\right]}\right)\right]. \quad (4.27)$$

После упрощений получим

$$\Delta^2-|U|=\left(\Delta^2-\left[R_0^{PSS}(r_e,\Delta)\right]^2\right)-2\left(r_e^2\ln\frac{\Delta}{\left[R_0^{PSS}(r_e,\Delta)\right]}\right), \quad (4.28)$$

или

$$\left[R_0^{PSS}(r_e,\Delta)\right]^2-\pi\left(r_e^2-r_w^2\right)=\left[R_0^{PSS}(r_e,\Delta)\right]^2-|U|=-2\left(r_e^2\ln\frac{\Delta}{\left[R_0^{PSS}(r_e,\Delta)\right]}\right). \quad (4.29)$$

Отсюда следует основное уравнение (4.18). Второе утверждение теоремы следует из (4.18). □

По теореме 4.2 из формулы (4.18) следует свойство монотонности псевдостационарного радиуса Писмана $R_0^{PSS}(r_e,\Delta)$ относительно внешнего радиуса r_e.

Теорема 4.3. *При условии применимости формул для псевдостационарной задачи выполяется* $r_e \geqslant R_0^{PSS}(r_e,\Delta)$ *и функция* $R_0^{PSS}(r_e,\Delta)$ *монотонно убывает.*

Доказательство. Взяв производную от левой и правой части уравнения (4.18), можно получить

$$2\frac{\left[r_e^2-\left(R_0^{PSS}(r_e,\Delta)\right)^2\right]}{R_0^{PSS}(r_e,\Delta)r_e^2}\frac{d}{dr_e}R_0^{PSS}(r_e,\Delta)=-2\left[\frac{\left(R_0^{PSS}(r_e,\Delta)\right)^2}{r_e^3}+\pi\frac{r_w^2}{r_e^3}\right]<0. \quad (4.30)$$

Но с точки зрения применимости подхода выражение $\left[r_e^2-\left(R_0^{PSS}(r_e,\Delta)^2\right)\right]>0$, поэтому утверждение теоремы следует из (4.30). □

Замечание 4.4. Очевидно, что при $r_e \gg R_0$ можно получить хорошее приближение, используя выражение для радиуса блока скважины Писмана

$$\frac{\pi}{2}\approx\left(\ln\frac{\Delta}{R_0}\right). \quad (4.31)$$

5. Радиус Писмана для режима с доминированием граничного условия

Уравнение линейного материального баланса (4.1) для слабосжимаемой жидкости такое же, как и раньше для потока в сторону скважины Γ_w в изолированном резервуаре V высотой $h=1$ и $\phi c_p=1$. Предположим, что ограничение для доминирования граничного условия в случае слабосжимаемой жидкости такое же, как и для псевдостационарного случая. А именно,

$$-4K(p_0(s)-p_1(s))+\frac{q(s)}{h}=1\cdot\frac{V_0}{1}\frac{1}{\tau}\left(p_0(s+\tau)-p_0(s)\right). \quad (5.1)$$

Снова пусть V — объем области-резервуара U с границей $\partial U=\Gamma_e\cup\Gamma_w$. Чтобы радиус Писмана для режима с доминированием границы был независимым от времени, введем следующее предположение.

Предположение 5.1. *Предположим, что*:

(A_1) $\dfrac{q(s)}{p_1(s)}=C_1$, *где постоянная* C_1 *is не зависит от* s;

(A_2) $\dfrac{p_0(s)}{p_1(s)}=C_2$ *где постоянная* C_2 *is не зависит от* s;

(A_3) $\tau^{-1}\left(\dfrac{p_0(s+\tau)}{p_0(s)}-1\right)\approx C_3$ *при* $\tau<<1$, *где постоянная* C_3 *не зависит от* s *и* τ.

Аналитическая модель для режима с доминированием граничного условия определяется как динамическая краевая задача без начальных условий

$$K\Delta p = c_p \phi \frac{\partial p}{\partial t} \quad \text{в} \quad U = U(0, r_e, r_w) = B(0, r_e) \setminus B(0, r_w); \tag{5.2}$$

$$K\frac{\partial p}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_e, \quad r = r_e; \tag{5.3}$$

$$p(x) = p_w \quad \text{на} \quad \Gamma_w, \ r = r_w. \tag{5.4}$$

Для простоты положим $p_w = 0$.

Снова предполагая, что радиальный поток направлен к скважине радиуса r_w, будем искать базовое решение вышеприведенной задачи в виде

$$p(x,t) = u_0(x,t) = e^{-\lambda_0 t \frac{K}{1}} \varphi_0(x). \tag{5.5}$$

Здесь $\varphi_0(x)$ — первая собственная функция, соответствующая первому собственному значению λ_0 задачи в области U с кусочной границей $\partial U = \Gamma_w \cup \Gamma_e$. Тогда:

$$-\Delta\varphi_0(x) = \lambda_0 \varphi_0(x) \quad \text{в} \quad U, \tag{5.6}$$

$$\varphi_0(x) = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_w, \quad r = r_w, \tag{5.7}$$

$$\frac{\partial \varphi_0(x)}{\partial \nu} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_e, \quad r = r_e. \tag{5.8}$$

Замечание 5.1. Мотивацией к рассмотрению такого вида решения послужила статья [9], в которой нами было доказано, что соответствующий индекс коэффициента продуктивности для такого режима с доминированием граничного условия не зависит от времени.

Проверим что такое аналитическое решение (5.5) удовлетворяет всем ограничениям.

Действительно, нетрудно увидеть, что все три условия: (A_1), (A_2) и (A_3) в предположении 5.1 удовлетворяются:

$$C_1(\Delta, R_0) = \frac{\varphi_0(\Delta)}{\varphi_0(R_0)}, \quad C_2 = \Lambda \frac{\int \varphi_0 dx}{\varphi_0(R_0)}, \quad C_3 = \phi V_0 c_p \Lambda.$$

Наконец, предположив, что $c_p = 1$ для заданного Δ, получим уравнение для R_0^{bd}:

$$\frac{\varphi_0(\Delta)}{\varphi_0(R_0)} + \lambda_0 \frac{\int \varphi_0 dx}{\varphi_0(R_0)} = \lambda_0 V_0, \quad \text{или} \quad \frac{\varphi_0(\Delta)}{\Delta^2} + \frac{1}{c_p} \frac{\int_{\Gamma_w} \frac{\partial \varphi_0}{\partial \nu} ds}{\Delta^2} = \lambda_0 \varphi_0(R_0). \tag{5.9}$$

Функция $\varphi_0(r)$, удовлетворяющая условиям (5.7)-(5.8), является решением задачи Штурма—Лиувилля для уравнения Гельмгольца в кольцевой области с условиями Дирихле и Неймана:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{r\partial r} + \lambda_0 \varphi_0(r) = 0, \quad r_w < r < r_e; \tag{5.10}$$

$$\varphi_0(r_w) = 0, \quad \frac{\partial \varphi_0(r)}{\partial r}\Big|_{r=r_e} = 0. \tag{5.11}$$

Нас интересует неотрицательное решение указанной краевой задачи, которое имеет вид (см. [5])

$$\varphi_0(r) = J_0(\sqrt{\lambda_0} r_w) N_0(\sqrt{\lambda_0} r) - N_0(\sqrt{\lambda_0} r_w) J_0(\sqrt{\lambda_0} r), \tag{5.12}$$

где λ_0 — первое собственное значение, которое представляет собой решение трансцендентного уравнения:

$$N_0(\sqrt{\lambda_0} r_w) J_0'(\sqrt{\lambda_0} r_e) - N_0'(\sqrt{\lambda_0} r_e) J_0(\sqrt{\lambda_0} r_w) = 0 \tag{5.13}$$

Следовательно, решение задачи (5.2)–(5.4) имеет вид

$$u_0(r,t) = e^{-\lambda_0 t \frac{K}{1}} \Big[J_0(\sqrt{\lambda_0} r_w) N_0(\sqrt{\lambda_0} r) - N_0(\sqrt{\lambda_0} r_w) J_0(\sqrt{\lambda_0} r) \Big] \tag{5.14}$$

Можно непосредственно проверить все ограничения из предположения 5.1, полагая

$$p_1(s) = u_0(\Delta, s), \quad p_0(s) = u_0(R_0, s), \quad p_0(s+\tau) = u_0(R_0, s+\tau), \quad q(s) = -2\pi r_w K \frac{\partial u_0(r,s)}{\partial r}\Big|_{r=r_w}. \tag{5.15}$$

В данной статье мы не приводим доказательства существования радиуса блока скважины Писмана для режима с доминированием граничного условия в радиальном случае и не исследуем его свойства в зависимости от параметров радиуса области дренирования. Вместо этого мы сформулируем утверждение в форме замечания, оставив подробности для последующей публикации.

Замечание 5.2. Подставив $p_0(s)$, $p_1(s)$, $p_0(s+\tau)$ и $q(s)$ в уравнение материального баланса (5.1), мы получим трансцендентное уравнение для нахождения $R_0^{BD}(r_e,\Delta)$ вида

$$\varphi_0(R_0^{BD}(r_e,\Delta)) - \varphi_0(\Delta) = -\frac{2}{\pi}\ln\frac{\Delta}{R_0^{BD}(r_e,\Delta)}, \tag{5.16}$$

где $\varphi_0(r)$ — первая собственная функция задачи (5.10)-(5.11), определяемая уравнением (5.12).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вахитов Г. Г.* Решение задач подземной гидродинамики методом конечных разностей// Тр. ВНИИнефть. — 1957. — *10*. — С. 53–88.
2. *Ландис Е. М.* Уравнения второго порядка эллиптического и параболического типов. — М.: Наука, 1971.
3. *Толстов Ю. Г.* Применение метода электрического моделирования физических явлений к решению некоторых задач подземной гидравлики// Ж. техн. физ. — 1942. — *12*, № 10. — С. 20–25.
4. *Anikeev D. P., Ibragimov A. I., Indrupskiy I. M.* Non-linear flow simulations with corrected Peaceman formula for well pressure calculation// AIP Conf. Proc. — 2023. — *2872*. — 120053.
5. *Budak B. M., Samarskii A. A., Tikhonov A. N.* A collection of problems on mathematical physics. — Oxford—London—Edinburgh—New York—Paris—Frankfurt: Pergamon Press, 1964.
6. *Dake L. P.* Fundamentals of reservoir engineering. — Amsterdam—London—New York—Tokyo: Elsevier, 1978.
7. *Ding Y., Renard G., Weill L.* Representation of wells in numerical reservoir simulation// SPE Res. Eval. Engrg. — 1998. — *1*. — С. 18–23.
8. *Einstein A.* Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen// Ann. Phys. — 1905. — *322*, № 8. — С. 549–560.
9. *Ibragimov A., Khalmanova D., Valko P. P., Walton J. R.* On a mathematical model of the productivity index of a well from reservoir engineering// SIAM J. Appl. Math. — 2005. — *65*. — С. 1952.
10. *Ibragimov A., Sobol Z., Hevage I.* Einstein's model of "the movement of small particles in a stationary liquid" revisited: finite propagation speed// Turkish J. Math. — 2023. — *47*, № 4. — Article 4.
11. *Ibragimov A., Zakirov E., Indrupskiy I., Anikeev D.* Fundamentals in Peaceman model for well-block radius for non-linear flows near well// ArXiv. — 2022. — 2203.10140.
12. *Klausen R. A., Aavatsmark I.* Connection transmissibility factors in reservoir simulation for slanted wells in 3D grids// В сб.: « Proc. of the 7th European Conf. on the Mathematics of Oil Recovery, Baveno, Italy, 5-8 September 2000». — cp-57-00032.
13. *Mochizuki S.* Well productivity for arbitrarily inclined well// SPE Reservoir Simulation Symposium. — 1995. — SPE-29133-MS.
14. *Ouyang L. B., Aziz K.* A general single-phase wellbore/reservoir coupling model for multilateral wells// SPE Res. Eval. Engrg. — 2001. — *4*. — С. 327–335.
15. *Peaceman D. W.* Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation// SPE Journal. — 1978. — *18*. — С. 183–194.
16. *Peaceman D. W.* Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability// SPE Journal. — 1983. — *23*. — С. 531–543.
17. *Peaceman D. W.* Representation of a horizontal well in numerical reservoir simulation//SPE Adv. Tech. Ser. — 1993. — *1*. — С. 7–16.

А. Ибрагимов
Texas Tech University, Lubbock, USA
Институт проблем нефти и газа РАН, Москва, Россия
E-mail: `akif.ibraguimov@ttu.edu`

Э. Закиров
Институт проблем нефти и газа РАН, Москва, Россия
E-mail: `ezakirov@ogri.ru`

И. Индрупский
Институт проблем нефти и газа РАН, Москва, Россия
E-mail: i-ind@ipng.ru

Д. Аникеев
Институт проблем нефти и газа РАН, Москва, Россия
E-mail: anikeev@ogri.ru

А. Жаглова
Институт проблем нефти и газа РАН, Москва, Россия
E-mail: azhalova90@gmail.com

UDC 517.958+519.63
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-643-663
EDN: YWEHJV

Einstein material balance and modeling of the flow of compressible fluid near the boundary

A. Ibraguimov[1,2], E. Zakirov[2], I. Indrupskiy[2], D. Anikeev[2], and A. Zhaglova[2]

[1] *Texas Tech University, Lubbock, USA*
[2] *Oil and Gas Research Institute of the RAS, Moscow, Russia*

Abstract. We consider sewing machinery between finite difference and analytical solutions defined at different scales: far away and near the source of the perturbation of the flow. One of the essences of the approach is that the coarse problem and the boundary-value problem in the proxy of the source model two different flows. In his remarkable paper, Peaceman proposes a framework for dealing with solutions defined on different scales for linear *time independent* problems by introducing the famous Peaceman well block radius. In this article, we consider a novel problem: how to solve this issue for transient flow generated by the compressibility of the fluid. We are proposing a method to glue solution via total fluxes, which are predefined on coarse grid, and changes in pressure, due to compressibility, in the block containing production (injection) well. It is important to mention that the coarse solution "does not see" the boundary. From an industrial point of view, our report provides a mathematical tool for the analytical interpretation of simulated data for compressible fluid flow around a well in a porous medium. It can be considered a mathematical "shirt" on the Peaceman well-block radius formula for linear (Darcy) transient flow but can be applied in much more general scenarios. In the article, we use the Einstein approach to derive the material balance equation, a key instrument to define R_0. We will expand the Einstein approach for three regimes of Darcy and non-Darcy flows for compressible fluids (time-dependent):

I. stationary;
II. pseudostationary;
III. boundary dominated.

Note that in all known authors literature, the rate of production on the well is time-independent.

Keywords: compressible fluid, Peaceman radius, Einstein material balance.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. This study is a contribution to fulfillment of the state assignment of Oil and Gas Research Institute RAS (project 122022800272-4).

For citation: A. Ibraguimov, E. Zakirov, I. Indrupskiy, D. Anikeev, A. Zhaglova, "Einstein material balance and modeling of the flow of compressible fluid near the boundary," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 4, 643–663. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-643-663

REFERENCES

1. G. G. Vakhitov, "Reshenie zadach podzemnoy gidrodinamiki metodom konechnykh raznostey" [Solving problems of underground hydrodynamics by the finite difference method], *Tr. VNIIneft'* [Proc. VNIIneft], 1957, **10**, 53–88 (in Russian).
2. E. M. Landis, *Uravneniya vtorogo poryadka ellipticheskogo i parabolicheskogo tipov* [Second-Order Equations of Elliptic and Parabolic Type], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
3. Yu. G. Tolstov, "Primenenie metoda elektricheskogo modelirovaniya fizicheskikh yavleniy k resheniyu nekotorykh zadach podzemnoy gidravliki" [Application of the method of electrical modeling of physical phenomena to solving some problems of underground hydraulics], *Zh. tekhn. fiz.* [J. Techn. Phys.], 1942, **12**, No. 10, 20–25 (in Russian).
4. D. P. Anikeev, A. I. Ibragimov, and I. M. Indrupskiy, "Non-linear flow simulations with corrected Peaceman formula for well pressure calculation," *AIP Conf. Proc.*, 2023, **2872**, 120053.
5. B. M. Budak, A. A. Samarskii, and A. N. Tikhonov, *A collection of problems on mathematical physics*, Pergamon Press, Oxford–London–Edinburgh–New York–Paris–Frankfurt, 1964.
6. L. P. Dake, *Fundamentals of reservoir engineering*, Elsevier, Amsterdam—London—New York—Tokyo, 1978.
7. Y. Ding, G. Renard, and L. Weill, "Representation of wells in numerical reservoir simulation," *SPE Res. Eval. Engrg.*, 1998, **1**, 18–23.
8. A. Einstein, "Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen," *Ann. Phys.*, 1905, **322**, No. 8, 549–560.
9. A. Ibragimov, D. Khalmanova, P. P. Valko, and J. R. Walton, "On a mathematical model of the productivity index of a well from reservoir engineering," *SIAM J. Appl. Math.*, 2005, **65**, 1952.
10. A. Ibragimov, Z. Sobol, and I. Hevage, "Einstein's model of "the movement of small particles in a stationary liquid" revisited: finite propagation speed," *Turkish J. Math.*, 2023, **47**, No. 4, article 4.
11. A. Ibragimov, E. Zakirov, I. Indrupskiy, and D. Anikeev, "Fundamentals in Peaceman model for well-block radius for non-linear flows near well," *ArXiv*, 2022, 2203.10140.
12. R. A. Klausen and I. Aavatsmark, "Connection transmissibility factors in reservoir simulation for slanted wells in 3D grids," In: *Proc. of the 7th European Conf. on the Mathematics of Oil Recovery, Baveno, Italy, 5-8 September 2000*, cp-57-00032.
13. S. Mochizuki, "Well productivity for arbitrarily inclined well," *SPE Reservoir Simulation Symposium*, 1995, SPE-29133-MS.
14. L. B. Ouyang and K. Aziz, "A general single-phase wellbore/reservoir coupling model for multilateral wells," *SPE Res. Eval. Engrg.*, 2001, **4**, 327–335.
15. D. W. Peaceman, "Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation," *SPE Journal*, 1978, **18**, 183–194.
16. D. W. Peaceman, "Interpretation of well-block pressures in numerical reservoir simulation with nonsquare grid blocks and anisotropic permeability," *SPE Journal*, 1983, **23**, 531–543.
17. D. W. Peaceman, "Representation of a horizontal well in numerical reservoir simulation," *SPE Adv. Tech. Ser.*, 1993, **1**, 7–16.

A. Ibraguimov
Texas Tech University, Lubbock, USA
Oil and Gas Research Institute of the RAS, Moscow, Russia
E-mail: akif.ibraguimov@ttu.edu

E. Zakirov
Oil and Gas Research Institute of the RAS, Moscow, Russia
E-mail: ezakirov@ogri.ru

I. Indrupskiy
Oil and Gas Research Institute of the RAS, Moscow, Russia
E-mail: i-ind@ipng.ru

D. Anikeev

Oil and Gas Research Institute of the RAS, Moscow, Russia
E-mail: anikeev@ogri.ru

A. Zhaglova
Oil and Gas Research Institute of the RAS, Moscow, Russia
E-mail: azhalova90@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 4 (2023). С. 664–675
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.929
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-664-675
EDN: ZDAWGY

КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С КОНЕЧНЫМИ И БЕСКОНЕЧНЫМИ ОРБИТАМИ ГРАНИЦ

Е. П. Иванова

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

Аннотация. Рассматриваются краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений, содержащих несоизмеримые сдвиги аргументов в старших членах. Показано, что для случая, когда орбиты границы области, сгенерированные множеством сдвигов разностного оператора, конечны, исходная задача аналогична краевой задаче для дифференциально-разностных уравнений с целочисленными сдвигами аргументов. Исследуется также случай бесконечной орбиты границы.

Ключевые слова: дифференциально-разностное уравнение, краевая задача, несоизмеримые сдвиги аргументов.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор выражает благодарность А. Л. Скубачевскому за постановку задачи и интерес к работе. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *Е. П. Иванова.* Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с конечными и бесконечными орбитами границ// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 4. С. 664–675. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-664-675

1. Введение

Рассматриваются краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений

$$A_R u = -\sum_{i,j=1}^{n} (R_{ijQ} u_{x_j})_{x_i} = f(x), \quad x \in Q, \tag{1.1}$$

$$u(x) = 0, \quad x \notin Q. \tag{1.2}$$

Здесь $R_{ij} : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ — разностные операторы, определяемые формулами:

$$R_{ij} u(x) = \sum_{h \in M_{ij}} a_{ijh} u(x+h), \quad a_{ijh} \in \mathbb{R}, \tag{1.3}$$

где $M_{ij} \subset M$ — конечное множество сдвигов $h \in \mathbb{R}^n$, $h_0 = 0 \in M$. Координаты векторов h не предполагаются соизмеримыми между собой. То есть нельзя сформировать нетривиальную линейную комбинацию этих векторов с целыми коэффициентами, равную нулевому вектору. Здесь Q — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с границей $\partial Q \in C^\infty$ или цилиндр $Q = (0,d) \times G$, $G \in \mathbb{R}^{n-1}$, $\partial G \in C^\infty$, $f \in L_2(Q)$.

Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с целочисленными сдвигами исследовались в работах [2,8] А. Л. Скубачевского. Получены условия сильной эллиптичности, разрешимости и гладкости решений таких задач. В частности, было показано, что в случае невырожденного разностного оператора краевая задача для дифференциально-разностного уравнения эквивалентна задаче с нелокальными краевыми условиями.

В работах [1, 6] Л. Е. Россовского исследовались краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений с растяжениями и сжатиями аргументов. В частности, были получены условия равномерной сильной эллиптичности таких уравнений. Дифференциальные уравнения с несоизмеримыми сжатиями аргументов рассматривались в [6]. Эллиптическое функционально-дифференциальное уравнение, содержащее комбинацию сжатия и сдвигов аргумента, изучено Л. Е. Россовским и А. А. Товсултановым в [7].

Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов обладают рядом особенностей по сравнению с задачами для уравнений с целочисленными сдвигами. Однако в случае, когда орбита границы заданной области, индуцированная сдвигами разностного оператора, состоит из конечного числа компонент, исходная краевая задача может быть исследована аналогичными методами. Для этого строится специальное разбиение области на непересекающиеся подобласти, основанное не на аддитивной группе сдвигов, как в работах А. Л. Скубачевского, а на графе, ассоциированном с множеством сдвигов.

Это разбиение описано в работах автора [3, 4]; оно применяется для исследования гладкости решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами [4] и получения условий сильной эллиптичности [3] (выполнения неравенства Гординга), а также для сведения исходной задачи к нелокальной [5].

В разделе 2 описан способ построения орбиты границы исходной области. Если орбита границы конечна, область может быть разбита на непересекающиеся подобласти, и исходное уравнение сводится к системе дифференциальных уравнений на этих подобластях.

Для случая бесконечной орбиты границы излагается метод определения положительной определенности разностных операторов, использующий цепочки последовательных разбиений области.

В разделе 3 рассматриваются краевые задачи для случая конечной орбиты границы области.

Для этих краевых задач условия сильной эллиптичности, разрешимости и гладкости решений аналогичны условиям для краевых задач с целочисленными сдвигами, полученным в работах А. Л. Скубачевского.

В разделе 4 рассматриваются краевые задачи для случая бесконечной орбиты границы области. Получены условия равномерной сильной эллиптичности дифференциально-разностных операторов для несоизмеримых сдвигов аргументов.

2. Разностные операторы и орбиты границ

Рассмотрим разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$

$$(Ru)(x) = \sum_{h \in M} a_h u(x+h), \tag{2.1}$$

где $a_h \in \mathbb{R}$, $h \in \mathbb{R}^n$, M — конечное множество несоизмеримых между собой сдвигов h, $h_0 = 0 \in M$.

Будем рассматривать действия операторов R на функциях $u \in L_2(\mathbb{R}^n)$, для которых

$$u(x) = 0, \quad x \notin Q. \tag{2.2}$$

Для учета однородных краевых условий (2.2) используем операторы I_Q и P_Q, где оператор $I_Q : L_2(Q) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ — оператор продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем вне Q, а оператор $P_Q : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(Q)$ — оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q. Введем также оператор $R_Q = P_Q R I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$.

Замечание 2.1. В работе А. Л. Скубачевского [2] для исследования свойств дифференциально-разностных операторов с соизмеримыми сдвигами и гладкости решений соответствующих краевых задач строится разбиение области Q на непересекающиеся подобласти с использованием аддитивной абелевой группы, порожденной множеством сдвигов M. Для множества, содержащего несоизмеримые сдвиги, такого разбиения не существует.

Будем использовать разбиение, построенное без использования группы и описанное в [3].

Обозначим $\tilde{M} := M \cup (-M)$.

Определение 2.1. Назовем $\mathcal{R}_0$ *регулярным разбиением* области Q на непересекающиеся подобласти Q_r $(r = 1,2,\dots)$, если:

1) $\bigcup\limits_r \overline{Q}_r = \overline{Q}$;
2) для любой Q_{r_1} и $h \in \tilde{M}$ либо найдется Q_{r_2} такое, что $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, либо $Q_{r_1} + h \in \mathbb{R}^n \backslash \overline{Q}$.

Для построения регулярного разбиения введем множества: $S_0 = \partial Q$, $S_1 = \bigcup\limits_{h \in \tilde{M}} (S_0 + h) \bigcap \overline{Q}$, $S_k = \bigcup\limits_{h \in \tilde{M}} (S_{k-1} + h) \bigcap \overline{Q}, \dots$ В силу построения $S_{k-1} \subseteq S_k$. Обозначим $S = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} S_k$.

Определение 2.2. Множество S назовем *орбитой границы* ∂Q под действием сдвигов разностного оператора R.

Возможны 2 случая.

1. На некотором шаге $S_{k+1} = S_k$. Тогда и все $S_{k+p} = S_k$ $(p \geqslant 1)$, и процесс построения орбиты прервется. В этом случае орбита S состоит из конечного числа компонент множества S_k. Будем называть такую орбиту *конечной.*
2. Для любого k имеем $S_{k+1} \neq S_k$. Тогда орбита S состоит из бесконечного числа компонент. Будем называть эту орбиту *бесконечной.*

Замечание 2.2. Для бесконечной орбиты, когда число различных множеств S_k счетно, множество S может быть даже всюду плотным в $\bar{Q}$ (см. [8, пример 3.10]).

Исследуем сначала случай конечной орбиты границы.

Рассмотрим открытое множество $G = \bar{Q} \backslash S$. Оно состоит из конечного числа непересекающихся связных компонент Q_r $(r = 1, 2 \dots)$ и $G = \bigcup\limits_r Q_r$, $S = \bigcup\limits_r \partial Q_r$.

В силу [3, теорема 2.1] справедлива лемма.

Лемма 2.1. *Совокупность всех непересекающихся связных компонент множества G является регулярным разбиением $\mathcal{R}_0$ области Q.*

Разбиению $\mathcal{R}_0$ поставим в соответствие ориентированный граф. Вершины графа — это подобласти Q_r, дуги графа — это сдвиги $h \in M$. Если $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, то вершины графа, ассоциированные с подобластями Q_{r_2}, Q_{r_1}, соединяем ориентированной дугой $h = \langle Q_{r_1}, Q_{r_2} \rangle$. На дугах задана числовая функция $\varphi(h) = a_h$, где a_h— коэффициенты разностного оператора из формулы (2.1). Введем на множестве подобластей (вершин графа) бинарное отношение π: пусть подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathcal{R}_0$ находятся в отношении π, если существует цепь в графе, соединяющая вершины Q_{r_1} и Q_{r_2}. В цепи движение может осуществляться как по направлению дуги, так и против. Это отношение является отношением эквивалентности и порождает разбиение множества $\mathcal{R}_0$ на классы эквивалентности. Обозначим подобласти Q_{sl}, где s — номер класса эквивалентности и l — номер области в этом классе. Каждый класс s в силу ограниченности области Q состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl}.

Обозначим через $L_2\Bigl(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Bigr)$ подпространство функций из $L_2(Q)$, обращающихся в нуль вне $\Bigl(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Bigr)$ $(l = 1, \dots, N(s))$. Обозначим через $P_s : L_2(Q) \to L_2\Bigl(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Bigr)$ оператор ортогонального проектирования на $L_2\Bigl(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Bigr)$. В силу [8, лемма 8.5] пространство $L_2\Bigl(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Bigr)$ является инвариантным подпространством оператора R_Q, при этом $L_2(Q) = \bigoplus\limits_s L_2\Bigl(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Bigr)$.

Введем изоморфизм гильбертовых пространств $U_s : L_2\Bigl(\bigcup\limits_l Q_{sl}\Bigr) \to L_2^N(Q_{s1})$ по формуле

$$(U_s u)_l(x) \ = u(x + h_{sl}) \quad (x \in Q_{s1}),$$

где $l = 1, \dots, N = N(s)$, h_{sl} такое, что $Q_{s1} + h_{sl} = Q_{sl}$ $(h_{s1} = 0)$, $L_2^N(Q_{s1}) = \prod\limits_{l=1}^{N} L_2(Q_{s1})$.

Аналогично доказательству [8, лемма 8.6] можно показать, что оператор $R_s : L_2^N(Q_{s1}) \to L_2^N(Q_{s1})$, заданный формулой $R_s = U_s R_Q {U_s}^{-1}$, является оператором умножения на матрицу R_s порядка $N(s) \times N(s)$, где элементы r^s_{km} этой матрицы вычисляются по формуле

$$r^s_{km} = \begin{cases} a_h, & h = h_{sm} - h_{sk} \in M, \\ 0, & h = h_{sm} - h_{sk} \notin M. \end{cases} \tag{2.3}$$

Если для построения матрицы R_s использовать ассоциированный с разбиением $\mathcal{R}_0$ граф, то для вершин Q_{sk}, Q_{sm}, связанных дугой $h = \langle Q_{sk}, Q_{sm} \rangle$, положим $r^s_{km} = \varphi(h) = a_h$, в противном случае $r^s_{km} = 0$. Введем также операторы $R^* : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$,

$$R^* u(x) = \sum_{h \in M} a_h u(x - h),$$

$R^*_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$, $R^*_Q = P_Q R^* I_Q$. Оператор R^*_Q является сопряженным к R_Q. Действию оператора R^*_Q будет соответствовать умножение на матрицы R^*_s, где R^*_s — эрмитово сопряженные с R_s матрицы.

Определение 2.3. Самосопряженный оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ будем называть *положительно определенным*, если найдется $c > 0$ такое, что для всех $u \in L_2(Q)$, $u \neq 0$, выполнено неравенство

$$(R_Q u, u)_{L_2(Q)} > c(u, u)_{L_2(Q)}.$$

Здесь $(u, u)_{L_2(Q)}$ — скалярное произведение в пространстве $L_2(Q)$.

В силу [8, лемма 8.7] спектр $\sigma(R_Q)$ оператора R_Q совпадает с объединением спектров всех матриц $\sigma(R_Q) = \bigcup\limits_s \sigma(R_s)$. Отсюда следует лемма.

Лемма 2.2. *Самосопряженный оператор $R_Q + R^*_Q$ положительно определен тогда и только тогда, когда все матрицы $R_{s_\nu} + R^*_{s_\nu}$ $(\nu = 1, \dots, n_1)$ положительно определены.*

Пример 2.1. Пусть разностный оператор $R : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ имеет вид

$$Ru(x) = a_0 u(x_1, x_2) + a_\varepsilon (u(x_1 + 1 + \varepsilon, x_2) + u(x_1 - 1 - \varepsilon, x_2)) + + a_1 (u(x_1 + 1, x_2) + u(x_1 - 1, x_2)). \tag{2.4}$$

Здесь $\varepsilon > 0$ — малый иррациональный параметр. Сдвиги $h_\varepsilon = (1 + \varepsilon, 0)$, $h_1 = (1, 0)$ несоизмеримы.

Для некоторого натурального N справедливы неравенства $N\varepsilon < 1$, $(N + 1)\varepsilon > 1$. Обозначим $\theta = 1 - N\varepsilon < \varepsilon$. Рассмотрим оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$, $R_Q = P_Q R I_Q$, где $Q = \{(x_1, x_2)|$ $x_1 \in (0, 2),\ x_2 \in (0, 1)\}$.

Нетрудно убедиться, что $S = S_{N+1}$ и число компонент орбиты границы конечно.

Орбита границы: $S = (\{0, \theta, \varepsilon, \varepsilon + \theta, 2\varepsilon, 2\varepsilon + \theta, \dots, (N-1)\varepsilon + \theta, N\varepsilon, 1, 1 + \theta, 1 + \varepsilon, \dots, 2 - \varepsilon, 2 - \theta, 2\} \times [0, 1]) \cup \partial Q$.

Существует конечное регулярное разбиение $\mathcal{R}_0$ области Q, состоящее из двух классов подобластей.

Первый класс содержит $2N + 2$ подобласти: $Q_{11} = (0, \theta) \times (0, 1)$, $Q_{12} = (\varepsilon, \varepsilon + \theta) \times (0, 1), \dots,$ $Q_{1,N+1} = (N\varepsilon, 1) \times (0, 1)$, $Q_{1,N+2} = (1, 1 + \theta) \times (0, 1), \dots, Q_{1,2N+2} = (1 + N\varepsilon, 2) \times (0, 1)$. На этом классе действию оператора R_Q соответствует умножение на блочную матрицу $R_1 = ||R_{ij}||^2_{i,j=1}$, где R_{ij} — матрицы размерности $(N + 1) \times (N + 1)$: $R_{11} = R_{22} = \operatorname{diag}\{a_0\}$, $R_{12} = ||r_{ij}||^{N+1}_{i,j=1}$, $r_{ii} = a_1$, $i = 1, \dots, N + 1$, $r_{i,i+1} = a_\varepsilon$, $i = 1, \dots, N$; остальные элементы $r_{ij} = 0$; $R_{21} = R^T_{12}$.

Во втором классе $2N$ подобластей: $Q_{21} = (\theta, \varepsilon) \times (0, 1)$, $Q_{22} = (\varepsilon + \theta, 2\varepsilon) \times (0, 1), \dots,$ $Q_{2,N} = ((N-1)\varepsilon + \theta, N\varepsilon) \times (0, 1)$, $\dots, Q_{2,2N} = (2 - \varepsilon, 2 - \theta)$. Матрица R_2 для этого класса аналогична матрице R_1, имеет размерность $2N \times 2N$ и состоит из $(N \times N)$ блоков R_{ij}.

Пусть $N = 1$. Тогда $S = S_2 = (\{0, \theta, \varepsilon, 1, 2 - \varepsilon, 2 - \theta, 2\} \times [0, 1]) \cup \partial Q$.

Для первого класса $(s = 1)$ подобластей имеем оператор $R_1 : L_2^4(Q_{11}) \to L_2^4(Q_{11})$, где $R_1 = U_1 R_Q {U_1}^{-1}$, $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$. Действию оператора R_1 в силу формулы (2.3) соответствует умножение на матрицу

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & a_1 & a_\varepsilon \\ 0 & a_0 & 0 & a_1 \\ a_1 & 0 & a_0 & 0 \\ a_\varepsilon & a_1 & 0 & a_0 \end{pmatrix}. \tag{2.5}$$

Для второго класса ($s = 2$) подобластей получим оператор $R_2 : L_2^2(Q_{21}) \to L_2^2(Q_{21})$, где $R_2 = U_2 R_Q {U_2}^{-1}$. Действию этого оператора соответствует умножение на матрицу

$$R_2 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}. \tag{2.6}$$

Для положительной определенности оператора R_Q в силу леммы 2.2 необходимо и достаточно, чтобы матрицы R_1, R_2 были положительно определенными, т. е. были выполнены условия:

$$a_0 > 0, \quad |a_1| < a_0, \quad a_0|a_\varepsilon| < a_0^2 - a_1^2. \tag{2.7}$$

В случае $N = 2$ матрица R_1 имеет вид

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & 0 & 0 & a_1 & a_\varepsilon & 0 \\ 0 & a_0 & 0 & 0 & a_1 & a_\varepsilon \\ 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 & a_1 \\ a_1 & 0 & 0 & a_0 & 0 & 0 \\ a_\varepsilon & a_1 & 0 & 0 & a_0 & 0 \\ 0 & a_\varepsilon & a_1 & 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь орбита S границы ∂Q под действием сдвигов разностного оператора R бесконечна. При этом

$$R = R^1 + R^2,$$

$$R^1 u(x) = a_0 u(x) + \sum_{h \in M_1} a_h (u(x+h) + u(x-h)) \quad (a_h \in \mathbb{R}),$$

$$R^2 u(x) = b_0 u(x) + \sum_{p \in M_2} b_p (u(x+p) + u(x-p)) \quad (b_p \in \mathbb{R}),$$

и орбиты границы для каждого из операторов R^1, R^2 конечны.

Введем операторы

$$R_Q = P_Q R I_Q, \quad R_Q^i = P_Q R^i I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q), \quad i = 1, 2.$$

Для оператора R_Q^1 построим регулярное разбиение области Q на подобласти Q_{sl} по методу, описанному выше для случая конечной орбиты. Действию разностного оператора R_Q^1 на подобластях Q_{sl} будет соответствовать умножение на матрицы, определенные формулой (2.3). Через $\lambda_{\min}$ обозначим минимальное собственное значение всего семейства этих матриц $R_{s_\nu}^1 (\nu = 1, \ldots, n_1)$.

Введем контрольные операторы $R^C : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ и $R_Q^C : L_2(Q) \to L_2(Q)$, определенные формулами

$$R^C = R^2 + \lambda_{\min} I, \quad R_Q^C = P_Q R^C I_Q.$$

Здесь $I : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ — тождественный оператор.

Теорема 2.1. *Если оператор R_Q^C является положительно определенным, то оператор R_Q также положительно определен.*

Доказательство. Пусть оператор R_Q^C является положительно определенным, т. е.

$$(R_Q^C u, u)_{L_2(Q)} \geqslant c_1 (u, u)_{L_2(Q)} \quad (c_1 > 0, \ \forall u \in L_2(Q)). \tag{2.8}$$

Тогда в силу неравенств (2.8),

$$\begin{aligned} (R_Q u, u)_{L_2(Q)} &= ((R_Q^1 + R_Q^2) u, u)_{L_2(Q)} = ((R_Q^1 - \lambda_{\min} I u) + (\lambda_{\min} I u + R_Q^2) u, u)_{L_2(Q)} = \\ &= ((R_Q^1 - \lambda_{\min} I u), u)_{L_2(Q)} + (R_Q^C u, u)_{L_2(Q)} \geqslant (R_Q^C u, u)_{L_2(Q)} \geqslant c_1 (u, u)_{L_2(Q)} \quad (c_1 > 0, \ \forall u \in L_2(Q)). \end{aligned}$$

□

Пример 2.2. Рассмотрим разностный оператор

$$Ru(x) = R^1u(x) + R^2u(x),$$

$$R^1u(x) = a_\tau(u(x_1+\tau, x_2) + u(x_1-\tau, x_2)),$$

$$R^2u(x) = a_0u(x_1, x_2) + a_1(u(x_1+1, x_2) + u(x_1-1, x_2)).$$

Здесь τ — иррациональное, $\frac{2}{3} < \tau < 1$. Обозначим $\theta = 2 - 2\tau$, $0 < \theta < \tau$. Рассмотрим оператор $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$, $R_Q = P_Q R I_Q$, где $Q = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in (0,2), x_2 \in (0,1)\}$.

Орбита S границы под действием оператора R_Q бесконечна, и невозможно построить регулярное конечное разбиение области Q. Для оператора $R^1_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$, $R^1_Q = P_Q R^1 I_Q$, соответствующее разбиение Q существует и состоит из двух классов подобластей.

Первый класс содержит области: $Q_{11} = (0, \theta) \times (0,1)$, $Q_{12} = (\tau, \tau+\theta) \times (0,1)$, $Q_{13} = (2\tau, 2\tau + \theta) \times (0,1)$. Для этого класса действию разностного оператора R^1_Q соответствует умножение на матрицу R^1_1:

$$R^1_1 = \begin{pmatrix} 0 & a_\tau & 0 \\ a_\tau & 0 & a_\tau \\ 0 & a_\tau & 0 \end{pmatrix}.$$

Ее минимальное собственное значение $\lambda^1_{\min} = -\sqrt{2}\,|a_\tau|$.

Второй класс состоит из подобластей: $Q_{21} = (\theta, \tau) \times (0,1)$, $Q_{12} = (\tau+\theta, 2\tau) \times (0,1)$. На этом классе подобластей действию разностного оператора соответствует умножение на матрицу R^1_2:

$$R^1_2 = \begin{pmatrix} 0 & a_\tau \\ a_\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad \lambda^2_{\min} = -|a_\tau|.$$

Обозначим $\lambda_{\min} := \min(\lambda^1_{\min}, \lambda^2_{\min}) = -\sqrt{2}|a_\tau|$.

Сформируем контрольный оператор R^C:

$$R^C u(x) = \tilde{a}_0 u(x_1, x_2) + a_1(u(x_1+1, x_2) + u(x_1-1, x_2)),$$

где $\tilde{a}_0 = a_0 + \lambda_{\min} = a_0 - \sqrt{2}\,|a_\tau|$. Оператор R^C_Q генерирует разбиение Q на подобласти $G_1 = (0,1) \times (0,1)$, $G_2 = (1,2) \times (0,1)$.

В силу леммы 2.1 оператор R^C_Q положительно определен $\Leftrightarrow$

$$\begin{pmatrix} \tilde{a}_0 & a_1 \\ a_1 & \tilde{a}_0 \end{pmatrix} > 0 \Leftrightarrow$$

$$a_0 - \sqrt{2}\,|a_\tau| - |a_1| > 0. \tag{2.9}$$

В силу теоремы 2.1 при выполнении условия (2.9) оператор R_Q также положительно определен.

Предложенный метод может быть обобщен на случай, когда разностный оператор разбивается на сумму нескольких операторов с конечными орбитами границы.

Пусть разностный оператор $R^i : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ имеет вид

$$R^i u(x) = a^i_0 u(x) + \sum_{h \in M_i} a^i_h (u(x+h) + u(x-h)) \quad (\, a^i_h \in \mathbb{R}).$$

Здесь M_i $(i = 1, .., N)$ — множества векторов, для каждого из которых отдельно орбита границы области Q конечна. Получим условия положительной определенности оператора $R_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$, $R_Q = P_Q R I_Q$, $R = \sum\limits_{i=1}^{N} R^i$, используя теорему 2.1.

Построим разбиение области Q и соответствующие матрицы, порожденные оператором R^1_Q. Найдем минимальное собственное значение $\lambda^1_{\min}$ для всего этого семейства матриц. Далее мы рассмотрим оператор $R^{C,1}_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$,

$$R^{C,1}_Q = P_Q R^{C,1} I_Q, \quad R^{C,1} = \lambda^1_{\min} I + \sum_{i=2}^{N} R^i.$$

В силу теоремы 2.1 оператор R_Q положительно определен, если положительно определен оператор $R_Q^{C,1}$. Для исследования положительной определенности оператора $R_Q^{C,1}$ введем оператор $\tilde{R}_Q^2 : L_2(Q) \to L_2(Q)$ по формуле:

$$\tilde{R}_Q^2 = P_Q \tilde{R}^2 I_Q, \quad \tilde{R}^2 = \lambda_{\min}^1 I + R^2.$$

Построим разбиение области Q для оператора $\tilde{R}_Q^2$ и найдем минимальное из собственных значений $\lambda_{\min}^2$ для всех соответствующих матриц.

Далее определяем оператор $R_Q^{C,2} : L_2(Q) \to L_2(Q)$,

$$R_Q^{C,2} = P_Q R^{C,2} I_Q, \quad R^{C,2} = \lambda_{\min}^2 I + \sum_{i=3}^{N} R^i.$$

Из теоремы 2.1 следует, что положительной определенности оператора $R_Q^{C,2}$ достаточно для положительной определенности оператора $R_Q^{C,1}$. По индукции получим: если оператор $R_Q^{C,N-1} : L_2(Q) \to L_2(Q)$, определенный формулой

$$R_Q^{C,N-1} = P_Q R^{C,N-1} I_Q, \quad R^{C,N-1} = \lambda_{\min}^{N-1} I + R^N,$$

положительно определен, то исходный оператор R_Q также положительно определен.

3. Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с конечной орбитой границы

Рассмотрим краевую задачу для дифференциально-разностного уравнения

$$A_R u = -\sum_{i,j=1}^{n} \left(R_{ijQ} u_{x_j}\right)_{x_i} = f(x), \quad x \in Q, \tag{3.1}$$

$$u|_{\partial Q} = 0. \tag{3.2}$$

Здесь Q — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$ с кусочно-гладкой границей ∂Q, $f \in L_2(Q)$. Операторы $R_{ijQ} = P_Q R_{ij} I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$, где R_{ij} имеют вид:

$$R_{ij} u(x) = \sum_{h \in M_{ij}} a_{ijh} u(x+h), \quad a_{ijh} \in \mathbb{R}. \tag{3.3}$$

Здесь $M_{ij} \subseteq M$, где M — конечное множество векторов с несоизмеримыми координатами.

Определение 3.1. *Решением* краевой задачи (3.1)-(3.2) будем называть функцию $u \in \mathring{H}^1(Q)$, если для любого $v \in \mathring{H}^1(Q)$ выполнено интегральное тождество

$$(A_R u, v)_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}, \quad f \in L_2(Q). \tag{3.4}$$

Здесь $\mathring{H}^1(Q)$ — пространство Соболева функций $v \in H^1(Q)$, у которых $v|_{\partial Q} = 0$, где равенство понимается в смысле следов. В пространстве $\mathring{H}^1(Q)$ будем использовать эквивалентное скалярное произведение:

$$(u, v)_{\mathring{H}^1(Q)} = \int_Q \nabla u \nabla \bar{v} dx.$$

Определение 3.2. Назовем уравнение (3.1) *сильно эллиптическим* в $\bar{Q}$, если для всех $u \in C_0^\infty(Q)$ выполнено неравенство типа Гординга:

$$\operatorname{Re}\,(A_R u, u)_{L_2(Q)} \geqslant c \|u\|^2_{\mathring{H}^1(Q)}, \tag{3.5}$$

где $c > 0$ не зависит от u.

Определение 3.3. Задача (3.1)-(3.2) называется *первой краевой задачей.*

В этом разделе мы будем рассматривать случай конечной орбиты S границы ∂Q.

Необходимые условия и достаточные условия сильной эллиптичности для дифференциально-разностных уравнений с целочисленными сдвигами получены А. Л. Скубачевским [8].

Применим метод разбиения области, изложенный в разделе 2. Для операторов R_{ijQ} построим орбиту границы и регулярное разбиение $\Re_0$ области Q на непересекающиеся подобласти Q_{sk}, где s — номер класса разбиения и $k = 1, \dots, N = N(s)$ — номер области в этом классе. Оператор $R_{ijs}: L_2^N(Q_{s1}) \to L_2^N(Q_{s1})$, заданный формулой $R_{ijs} = U_s R_{ijQ} {U_s}^{-1}$, является оператором умножения на матрицу R_{ijs} порядка $N(s) \times N(s)$, элементы r_{km}^{ijs} матрицы вычисляются по формуле (2.3).

Следующая теорема доказывается аналогично [2, теорема 3.1].

Теорема 3.1. *Пусть уравнение* (3.1) *сильно эллиптическое в* $\bar{Q}$. *Тогда матрицы*

$$\sum_{i,j=1}^{n} (R_{ijs} + R_{ijs}^*)\xi_i\xi_j \tag{3.6}$$

положительно определены для всех $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ *и* $s = 1, 2, \dots, n_1$.

Для формулировки достаточных условий сильной эллиптичности в работе [2] используются матрицы A_{ijs}^a. Эти матрицы могут либо совпадать с матрицами R_{ijs}^a, либо иметь бóльшую размерность и окаймлять матрицы R_{ijs}^a. Предположим, что область Q и операторы таковы, что все матрицы $R_{ijs} = A_{ijs}$. Это выполняется, если найдется область $\Omega \in \mathbb{R}^n$ такая, что $\bar{Q} \subset \Omega$ и матрицы R_{ijs}, построенные для области Ω, совпадают с аналогичными матрицами для области Q. Тогда справедлива теорема, аналогичная [2, теорема 3.2].

Теорема 3.2. *Пусть матрицы*

$$\sum_{i,j=1}^{n} \big(R_{ijs} + R_{ijs}^*\big)\xi_i\xi_j \tag{3.7}$$

положительно определены для всех $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ *и* $s = 1, 2, \dots, n_2$. *Тогда уравнение* (3.1) *сильно эллиптическое в* $\bar{Q}$.

С использованием неравенства (3.5) стандартным методом доказывается фредгольмовость и дискретность спектра оператора A_R (см. [8, теорема 10.1]). Также в силу [2, теорема 8.3] оператор A_R является регулярно аккретивным оператором, для которого выполняется гипотеза Т. Като (см. [2]).

Пусть разностные операторы являются самосопряженными: $R_{ij} = R_{ij}^*$. Из [8, теорема 10.1] получим следующую теорему.

Теорема 3.3. *Пусть выполнены условия теоремы* 3.2. *Тогда уравнение* (3.1) *является сильно эллиптическим в* $\bar{Q}$ *и для любой функции* $f \in L_2(Q)$ *краевая задача* (3.1)-(3.2) *имеет единственное решение* $u \in \mathring{H}^1(Q)$.

В работе [4] исследуются гладкость решений краевой задачи (3.1)-(3.2) в подобластях разбиения и вблизи границ.

Теорема 3.4. *Пусть уравнение* (3.1) *является сильно эллиптическим в* Q. *Тогда для любой функции* $f \in L_2(Q)$ *краевая задача* (3.1)-(3.2) *имеет единственное решение* $u \in \mathring{H}^1(Q)$. *При этом, если* $f \in L_2(Q) \bigcap H_{loc}^k(Q_{sl})$ $(s = 1, 2, \dots,\ l = 1, \dots, N(s))$, *то* $u \in H_{loc}^{k+2}(Q_{sl})$ $(s = 1, 2, \dots, l = 1, \dots, N(s))$.

Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами в случае конечной орбиты границы могут быть сведены к нелокальным задачам так же, как и задачи для уравнений с целочисленными сдвигами аргументов (см. [5]).

Замечание 3.1. Свойства краевых задач для уравнений с несоизмеримыми сдвигами в случае конечной орбиты границы аналогичны свойствам задач с целочисленными сдвигами.

Рассмотрим краевую задачу для дифференциально-разностного уравнения

$$-\Delta(R_Q u(x)) = f(x), \quad x \in Q, \tag{3.8}$$

$$u|_{\partial Q} = 0. \tag{3.9}$$

Оператор $R_Q = P_Q R I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$; $R : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$,

$$Ru(x) = a_0 u(x) + \sum_{h \in M} a_h(u(x+h) + u(x-h)), \quad a_h \in \mathbb{R}. \tag{3.10}$$

Здесь M — множество векторов с несоизмеримыми координатами, при этом орбита границы под действием сдвигов множества M конечна.

Эта краевая задача является частным случаем задачи (3.1)-(3.2). Из теоремы 3.4 следует

Теорема 3.5. *Пусть оператор R_Q является положительно определенным. Тогда уравнение* (3.8) *является сильно эллиптическим в Q и для любой функции $f \in L_2(Q)$ краевая задача* (3.8)-(3.9) *имеет единственное решение $u \in \mathring{H}(Q)$. При этом, если $f \in L_2(Q) \bigcap H^k_{loc}(Q_{sl})$ $(s = 1, 2, \dots, l = 1, \dots, N(s))$, то $u \in H^{k+2}_{loc}(Q_{sl})$ $(s = 1, 2, \dots, l = 1, \dots, N(s))$.*

Пример 3.1. Рассмотрим краевую задачу (3.8)-(3.9) для разностного оператора R_Q из примера 2.1 при $N = 1$. Если выполнены условия (2.7), оператор R_Q является положительно определенным, и в силу теоремы 3.5 решение существует и сохраняет гладкость в подобластях разбиения.

4. Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с бесконечной орбитой границы

Рассмотрим краевую задачу (3.1)-(3.2) для случая, когда орбита S границы состоит из бесконечного числа компонент.

Получим условия сильной эллиптичности оператора A_R. Предположим, что разностные операторы $R_{ijQ} = P_Q R_{ij} I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$ можно разбить на суммы операторов: $R_{ij} = R^a_{ij} + R^b_{ij}$, $R^a_{ij} : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$, $R^b_{ij} : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$, которые имеют вид

$$R^a_{ij} u(x) = \sum_{h \in M^1_{ij}} a_{ijh} u(x+h), \quad a_{ijh} \in \mathbb{R}, \tag{4.1}$$

$$R^b_{ij} u(x) = \sum_{p \in M^2_{ij}} b_{ijp} x u(x+p), \quad b_{pij} \in \mathbb{R}. \tag{4.2}$$

Здесь $M^k_{ij} \subseteq M^k$ $(k = 1, 2)$, где M^k — конечные множества векторов, при этом орбиты границы под действием сдвигов только из множества M^1 и только из множества M^2 конечны.

Введем вспомогательный дифференциально-разностный оператор

$$A^a_R u = -\sum_{i,j=1}^{n} (R^a_{ijQ} u_{x_j})_{x_i}, \quad x \in Q. \tag{4.3}$$

Этот оператор имеет конечную орбиту границы. Для его исследования применим метод, изложенный в разделе 2.

Для операторов R^a_{ijQ} построим орбиту границы и соответствующее регулярное разбиение $\mathcal{R}^a_0$ области Q на непересекающиеся подобласти Q_{sk}, где s — номер класса разбиения, а $k = 1, \dots, N = N(s)$ — номер области в этом классе. В силу формулы (1.3) оператор $R^a_{ijs} : L^N_2(Q_{s1}) \to L^N_2(Q_{s1})$, заданный формулой $R^a_{ijs} = U_s R^a_{ijQ} {U_s}^{-1}$, является оператором умножения на матрицу R^a_{ijs} порядка $N(s) \times N(s)$.

Для разностных операторов R^b_{ijQ} построим разбиение $\mathcal{R}^b_0$ области Q на непересекающиеся подобласти $G_{\alpha k}$, где α — номер класса разбиения, а $k = 1, \dots, N = N(\alpha)$ — номер области в этом классе. Оператор $R^b_{ij\alpha} : L^N_2(G_{\alpha 1}) \to L^N_2(G_{\alpha 1})$, заданный формулой $R^b_{ij\alpha} = U_\alpha R^b_{ijQ} {U_\alpha}^{-1}$, является оператором умножения на матрицу $R^b_{ij\alpha}$ порядка $N(\alpha) \times N(\alpha)$.

Как и в предыдущем разделе, будем предполагать, что область Q и разностные операторы таковы, что все матрицы $R_{ijs} = A_{ijs}$.

Теорема 4.1. *Пусть для вектора* $k = (k_1, \ldots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ *матрицы*

$$K_s = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (R^a_{ijs} + R^{a*}_{ijs}) \xi_i \xi_j - E \sum_{i=1}^{n} k_i \xi_i^2 \tag{4.4}$$

неотрицательно определены для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ *и* $s = 1, 2, \ldots, n_1$. *При этом матрицы*

$$K_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} (R^b_{ija} + R^{b*}_{ija}) \xi_i \xi_j + E \sum_{i=1}^{n} k_i \xi_i^2 \tag{4.5}$$

положительно определены для всех $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ *и* $\alpha = 1, 2, \ldots, n_2$.

Тогда уравнение (3.1) — *сильно эллиптическое в* $\bar{Q}$. *Здесь* E — *единичные матрицы размерности* $N(s)$ *или* $N(\alpha)$.

Доказательство этой теоремы приведено в работе [3].

В общем случае, если множество сдвигов M разностного оператора разбивается на несколько (более двух) подмножеств, для каждого из которых орбита конечна, условия сильной эллиптичности можно получить, используя метод, аналогичный методу, описанному в разделе 2.

Пусть $R_{ij} = R^*_{ij}$. Аналогично [8, теорема 10.1] доказывается следующая теорема.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены условия теоремы* 4.1. *Тогда уравнение* (3.1) *является сильно эллиптическим в* $\bar{Q}$, *и для любой функции* $f \in L_2(Q)$ *краевая задача* (3.1)-(3.2) *имеет единственное решение* $u \in \mathring{H}^1(Q)$.

Рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta(R_Q u(x)) = f(x), \quad x \in Q, \tag{4.6}$$

$$u|_{\partial Q} = 0. \tag{4.7}$$

Оператор $R_Q = P_Q R I_Q : L_2(Q) \to L_2(Q)$, где $R = R^1 + R^2$, а разностные операторы $R^1 : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ и $R^2 : L_2(\mathbb{R}^n) \to L_2(\mathbb{R}^n)$ имеют вид:

$$R^1 u(x) = a_0 u(x) + \sum_{h \in M^1} a_h (u(x+h) + u(x-h)), \quad a_h \in \mathbb{R}, \tag{4.8}$$

$$R^2 u(x) = b_0 u(x) + \sum_{p \in M^2} b_p (u(x+p) + u(x-p)), \quad b_p \in \mathbb{R}. \tag{4.9}$$

Здесь M^k $(k = 1, 2)$ — множества векторов, для каждого из которых в отдельности орбиты границы конечны.

Используя теорему 4.2, получим следующую теорему.

Теорема 4.3. *Пусть оператор* R^C_Q *является положительно определенным. Тогда уравнение* (4.6) *является сильно эллиптическим в* Q *и для любой функции* $f \in L_2(Q)$ *краевая задача* (4.6)-(4.7) *имеет единственное решение* $u \in \mathring{H}^1(Q)$.

Пример 4.1. Рассмотрим краевую задачу (4.6)-(4.7) для разностного оператора R_Q из примера 2.2. Если выполнены условия (2.9), то операторы R^C_Q, R_Q являются положительно определенными, и в силу теоремы 4.3 решение $u \in \mathring{H}^1(Q)$ существует для любой $f \in L_2(Q)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *54*, № 2. — С. 3–138.
2. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — *32*, № 2. — С. 261–278.
3. *Ivanova E. P.* On coercivity of differential-difference equations with incommensurable translations of arguments// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2019. — *239*, № 6. — С. 802–816.
4. *Ivanova E. P.* On smooth solutions of differential-difference equations with incommensurable shifts of arguments// Math. Notes. — 2019. — *105*, № 1. — С. 140–144.

5. *Ivanova E. P.* Boundary-value problems for differential-difference equations with incommensurable shifts of arguments reducible to nonlocal problems// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2022. — *265*, № 5. — C. 781–790.
6. *Rossovskii L. E.* Elliptic functional differential equations with incommensurable contractions// Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — *12*. — C. 226–239.
7. *Rossovskii L. E., Tovsultanov A. A.* Elliptic functional differential equations with affine transformations// J. Math. Anal. Appl. — 2019. — *480*. — 123403.
8. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and aplications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 1997.

Е. П. Иванова

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

E-mail: elpaliv@yandex.ru

UDC 517.929

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-664-675

EDN: ZDAWGY

Boundary-value problems for differential-difference equations with finite and infinite orbits of boundaries

E. P. Ivanova

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

Abstract. We consider boundary-value problems for differential-difference equations containing incommensurable shifts of arguments in the higher-order terms. We show that for the case when the orbits of the domain boundary generated by the set of shifts of the difference operator are finite, the original problem is similar to the boundary-value problem for differential-difference equations with integer shifts of arguments. The case of an infinite boundary orbit is also studied.

Keywords: differential-difference equation, boundary-value problem, incommensurable shifts of arguments.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author expresses gratitude to A. L. Skubachevskii for posing the problem and interest in this work. The author declares that no financial support was received.

For citation: E. P. Ivanova, "Boundary-value problems for differential-difference equations with finite and infinite orbits of boundaries," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 4, 664–675. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-664-675

REFERENCES

1. L. E. Rossovskii, "Ellipticheskie funktsional'no-differentsial'nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii" [Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, No. 2, 3–138 (in Russian).

2. A. L. Skubachevskii, “Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh differentsial’no-raznostnykh uravneniy i ikh prilozheniya” [Boundary-value problems for elliptic differential-difference equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **32**, No. 2, 261–278 (in Russian).
3. E. P. Ivanova, “On coercivity of differential-difference equations with incommensurable translations of arguments,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2019, **239**, No. 6, 802–816.
4. E. P. Ivanova, “On smooth solutions of differential-difference equations with incommensurable shifts of arguments,” *Math. Notes*, 2019, **105**, No. 1, 140–144.
5. E. P. Ivanova, “Boundary-value problems for differential-difference equations with incommensurable shifts of arguments reducible to nonlocal problems,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2022, **265**, No. 5, 781–790.
6. L. E. Rossovskii, “Elliptic functional differential equations with incommensurable contractions,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, **12**, 226–239.
7. L. E. Rossovskii and A. A. Tovsultanov, “Elliptic functional differential equations with affine transformations,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2019, **480**, 123403.
8. A. L. Skubachevskii, *Elliptic functional differential equations and aplications*, Birkhauser, Basel—Boston—Berlin, 1997.

E. P. Ivanova
Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia
E-mail: elpaliv@yandex.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 4 (2023). С. 676–684
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.957
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-676-684
EDN: ZEGDSE

О СТРУКТУРЕ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ РИМАНА ДЛЯ ВЫРОЖДАЮЩЕГОСЯ НЕЛИНЕЙНОГО УРАВНЕНИЯ ДИФФУЗИИ

Е. Ю. Панов[1,2]

[1]*Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Великий Новгород, Россия*
[2]*Центр научных исследований и разработок, Великий Новгород, Россия*

Аннотация. Найден явный вид слабых решений задачи Римана для вырождающегося нелинейного параболического уравнения с кусочно постоянным коэффициентом диффузии. Показано, что линии фазовых переходов (свободные границы) соответствуют точке минимума некоторой строго выпуклой и коэрцитивной функции конечного числа переменных. Аналогичный результат верен и для задачи Стефана. В пределе, когда число фаз стремится к бесконечности, возникает вариационная формулировка автомодельных решений уравнения с произвольной неотрицательной функцией диффузии.

Ключевые слова: вырождающееся нелинейное параболическое уравнение, задача Римана, задача Стефана, слабое решение, фазовый переход, автомодельное решение.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор благодарен Е. В. Радкевичу за ценные замечания по содержанию работы. Работа выполнена при поддержке РНФ, грант № 22-21-00344.

Для цитирования: *Е. Ю. Панов.* О структуре слабых решений задачи Римана для вырождающегося нелинейного уравнения диффузии// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 4. С. 676–684. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-676-684

1. Введение

В полуплоскости $\Pi = \{(t,x) \in \mathbb{R}^2 \mid t > 0\}$ рассмотрим нелинейное параболическое уравнение диффузии

$$u_t = (a^2(u)u_x)_x = A(u)_{xx}, \tag{1.1}$$

где $A'(u) = a^2(u)$ (в смысле распределений), $a(u) \in L^2_{loc}(\mathbb{R})$, $a(u) \geqslant 0$. Поскольку коэффициент диффузии $a(u)$ может принимать и нулевое значение, уравнение (1.1) является вырождающимся. Будем рассматривать слабые решения этого уравнения, понимаемые в смысле распределений.

Определение 1.1. Функция $u = u(t,x) \in L^\infty(\Pi)$ называется *слабым решением* уравнения (1.1), если $u_t - A(u)_{xx} = 0$ в пространстве распределений на Π (в $\mathcal{D}'(\Pi)$), т. е. для всех пробных функций $f = f(t,x) \in C_0^2(\Pi)$

$$\int\limits_\Pi [uf_t + A(u)f_{xx}]dtdx = 0.$$

При замене $U = A(u)$ уравнение (1.1) сводится к уравнению

$$b(U)_t = U_{xx},$$

в котором $b(U) = A^{-1}(U)$ — строго возрастающая и возможно разрывная функция. Похожая замена применялась в [3, гл. 5, § 9] при исследовании задачи Стефана. Рассуждения, аналогичные используемым в [3], позволяют установить существование и единственность слабого решения задачи Коши для уравнения (1.1) с произвольными начальными данными

$$u(0, x) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}), \tag{1.2}$$

понимаемыми в смысле следующего соотношения:

$$\operatorname*{ess\,lim}_{t\to 0+} u(t, \cdot) = u_0 \quad \text{в} \quad L^1_{loc}(\mathbb{R}).$$

Конечно, эти результаты известны и в случае многих пространственных переменных. Заметим, что для более общих уравнений конвекции—диффузии

$$u_t + \varphi(u)_x = (A(u))_{xx} \tag{1.3}$$

свойство единственности слабого решения задачи Коши может нарушаться, и необходимо рассматривать более узкий класс энтропийных решений, введённый в работе [4]. В гиперболическом случае (когда $A(u) = 0$) понятие энтропийного решения совпадает с хорошо известным понятием обобщённого энтропийного решения в смысле Кружкова [2] для скалярных законов сохранения $u_t + \varphi(u)_x = 0$. В случае, когда диффузия невырождена (т. е. когда функция $A(u)$ строго возрастает), энтропийная формулировка решений уравнения (1.3) не нужна, см. [5, Remark 3].

Для кусочно-гладкого слабого решения уравнения (1.1) следующие условия (типа Ранкина—Гюгонио) должны выполняться на линиях разрыва $x = x(t)$:

$$[A(u)] = 0, \quad [u]x'(t) + [A(u)_x] = 0, \tag{1.4}$$

где

$$[v] = v(t, x(t)+) - v(t, x(t)-)$$

обозначает скачок функции $v = v(t, x)$ на линии разрыва. Для вывода этих условий нужно применить распределение $0 = u_t - A(u)_{xx}$ к произвольной пробной функции $f = f(t, x)$ и проинтегрировать по частям с помощью формулы Грина. В результате возникнет соотношение

$$\int\limits_{x=x(t)} \big[([u]x'(t) + [A(u)_x])f - [A(u)]f_x\big]dt = 0.$$

Из произвольности и независимости f и f_x на линии $x = x(t)$ и следуют соотношения (1.4). Ясно, что эти соотношения вместе с требованием, что в областях гладкости $u(t, x)$ является классическим решением уравнения (1.1), эквивалентны утверждению, что $u = u(t, x)$ — слабое решение этого уравнения.

Мы будем изучать задачу Коши для уравнения (1.1) с начальными данными Римана

$$u(0, x) = \begin{cases} u_-, & x < 0, \\ u_+, & x > 0. \end{cases} \tag{1.5}$$

Из единственности слабого решения задачи (1.1), (1.5) и инвариантности этой задачи относительно преобразований $(t, x) \to (\lambda^2 t, \lambda x)$, $\lambda > 0$, слабое решение задачи (1.1), (1.5) автомодельно: $u(t, x) = v(\xi)$, $\xi = x/\sqrt{t}$. Для уравнения теплопроводности $u_t = a^2 u_{xx}$ автомодельное решение $u = v(\xi)$ определяется из линейного обыкновенного дифференциального уравнения $a^2 v'' = -\xi v'/2$, общее решение которого $v = C_1 F(\xi/a) + C_2$, $C_1, C_2 = \text{const}$, где

$$F(\xi) = \frac{1}{2\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{\xi} e^{-s^2/4} ds$$

— функция ошибок (немного изменённая). В частности, решение задачи Римана (1.1), (1.5) получится при выборе $C_2 = u_-$, $C_1 = u_+ - u_-$.

Перейдём теперь к нелинейному случаю, предполагая, что коэффициент диффузии кусочно постоянен: $a(u) = a_k$ при $u_k < u < u_{k+1}$, $k = 0, \ldots, n$, где

$$u_- = u_0 < u_1 < \ldots < u_n < u_{n+1} = u_+$$

(так как уравнение (1.1) инвариантно относительно замены $x \to -x$, можно считать, что $u_+ > u_-$) и $a_{k+1} \neq a_k$, $k = 0, \ldots, n-1$. В этом случае наша задача моделирует динамику многофазной среды, так что коэффициент диффузии a_k соответствует k-ой фазе, которая существует в температурном диапазоне $[u_k, u_{k+1}]$.

Целью настоящей работы является описание структуры слабого решения и нахождение неизвестных параметров (свободных границ). При этом мы не будем опираться на общие результаты о существовании и единственности слабого решения, а выведем эти свойства из анализа нелинейной алгебраической системы, задающей параметры свободных границ. Рассмотрим сначала невырожденный случай.

2. Невырожденный случай

В невырожденном случае при $a_k > 0$, $k = 0, \ldots, n$, решение естественно искать, склеивая указанные во введении решения уравнений теплопроводности $u_t = a_k^2 u_{xx}$. В результате получим следующую форму слабого решения $u = v(\xi)$ задачи (1.1), (1.5):

$$v(\xi) = u_k + \frac{u_{k+1} - u_k}{F(\xi_{k+1}/a_k) - F(\xi_k/a_k)}(F(\xi/a_k) - F(\xi_k/a_k)), \quad \xi_k < \xi < \xi_{k+1},\ k = 0, \ldots, n, \tag{2.1}$$

где

$$-\infty = \xi_0 < \xi_1 < \ldots < \xi_n < \xi_{n+1} = +\infty$$

и считается, что $F(-\infty) = 0$, $F(+\infty) = 1$. Неизвестные параболы $\xi = x/\sqrt{t} = \xi_k$, $k = 1, \ldots, n$, на которых $u = u_k$, подлежат определению из условий (1.4). Заметим, что кусочно линейная функция $A(u)$ строго возрастает и условие $[A(u)] = 0$ сводится к требованию непрерывности $[u] = 0$. Ясно, что это требование выполнено для решения (2.1), $u = u_k$ на линиях $\xi = \xi_k$ (фазового перехода), и эти линии являются слабыми разрывами $u(t, x)$. Второе условие в (1.4) сводится к требованию $[A(u)'_\xi] = 0$ непрерывности $A(u)'$. Ввиду (2.1) эти условия превращаются в равенства

$$\frac{a_k(u_{k+1} - u_k)F'(\xi_k/a_k)}{F(\xi_{k+1}/a_k) - F(\xi_k/a_k)} = \frac{a_{k-1}(u_k - u_{k-1})F'(\xi_k/a_{k-1})}{F(\xi_k/a_{k-1}) - F(\xi_{k-1}/a_{k-1})}, \quad k = 1, \ldots, n. \tag{2.2}$$

Это нелинейная алгебраическая система n уравнений с n неизвестными ξ_k, $k = 1, \ldots, n$. Разрешив (2.2), мы получим решение (2.1) нашей задачи. Для анализа разрешимости нелинейной системы (2.2) ключевую роль играет наблюдение, что эта система градиентна и совпадает с равенством $\nabla E(\bar\xi) = 0$, где функция $E(\bar\xi)$ (потенциал) явно выписывается:

$$E(\bar\xi) = -\sum_{k=0}^{n}(a_k)^2(u_{k+1} - u_k)\ln(F(\xi_{k+1}/a_k) - F(\xi_k/a_k)), \quad \bar\xi = (\xi_1, \ldots, \xi_n) \in \Omega, \tag{2.3}$$

она определена в открытом выпуклом конусе Ω, задаваемом неравенствами $\xi_1 < \ldots < \xi_n$. Ясно, что $E(\bar\xi) \in C^\infty(\Omega)$. Заметим также, что при всех $k = 0, \ldots, n$

$$\ln(F(\xi_{k+1}/a_k) - F(\xi_k/a_k)) < 0 \tag{2.4}$$

и, в частности, $E(\bar\xi) > 0$. Назовём функцию $E(\bar\xi) > 0$ *энтропией*, поскольку она зависит только от разрывов функции $v(\xi)$.

Предложение 2.1 (коэрцитивность энтропии)**.** *Множества подуровня*

$$\Omega_c = \{\bar\xi \in \Omega \mid E(\bar\xi) \leqslant c\}$$

компактны для всех $c > 0$.

Доказательство. Если $E(\bar\xi) \leqslant c$, то ввиду (2.4) для всех $k = 0, \ldots, n$

$$-(a_k)^2(u_{k+1} - u_k)\ln(F(\xi_{k+1}/a_k) - F(\xi_k/a_k)) \leqslant E(\bar\xi) \leqslant c,$$

откуда следует оценка

$$F(\xi_{k+1}/a_k) - F(\xi_k/a_k) \geqslant \delta \doteq \exp(-c/m) > 0, \tag{2.5}$$

где $m = \min\limits_{k=0,\dots,n}(a_k)^2(u_{k+1}-u_k) > 0$. При $k=0,n$ из этих неравенств следует, что

$$F(\xi_1/a_0) \geqslant \delta, \quad F(-\xi_n/a_n) = 1 - F(\xi_n/a_n) \geqslant \delta,$$

откуда $-r \leqslant \xi_1 < \xi_n \leqslant r$, где константа $r>0$ находится из условий $\max(F(-r/a_0), F(-r/a_n)) \leqslant \delta$. Поскольку остальные координаты точки $\bar\xi$ расположены между ξ_1 и ξ_n, получаем оценку

$$|\bar\xi|_\infty \doteq \max_{k=1,\dots,n}|\xi_k| \leqslant r.$$

Далее, так как $F'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-x^2/4} < 1$, то функция $F(x)$ удовлетворяет условию Липшица с константой 1, и из (2.5) следует, что

$$(\xi_{k+1}-\xi_k)/a_k \geqslant F(\xi_{k+1}/a_k) - F(\xi_k/a_k) \geqslant \delta, \quad k=1,\dots,n-1.$$

Поэтому, $\xi_{k+1}-\xi_k \geqslant \delta_1 = \delta\min a_k$ при всех $k=1,\dots,n-1$. Таким образом, множество Ω_c лежит в компакте

$$K = \{\bar\xi = (\xi_1,\dots,\xi_n) \in \mathbb{R}^n \mid |\bar\xi|_\infty \leqslant r,\ \xi_{k+1}-\xi_k \geqslant \delta_1\ \forall k=1,\dots,n-1\}.$$

Ввиду непрерывности $E(\bar\xi)$ множество Ω_c является замкнутым подмножеством K и потому компактно. $\square$

Возьмём $c > N \doteq \inf E(\bar\xi)$. Тогда множество Ω_c непусто. По предложению 2.1 это множество компактно, и значит, непрерывная функция $E(\bar\xi)$ достигает на нём минимального значения, очевидно равного N. Итак, существует точка $\bar\xi_0 \in \Omega$ глобального минимума, $E(\bar\xi_0) = \min E(\bar\xi)$. Ясно, что эта точка является критической, $\nabla E(\bar\xi_0) = 0$, и значит, система (2.2) имеет решение. Итак, доказана следующая теорема.

Теорема 2.1. *Слабое решение* (2.1) *задачи* (1.1), (1.5) *существует.*

Единственность этого решения будет следовать из строгой выпуклости энтропии $E(\bar\xi)$ (тогда эта функция имеет не более одной критической точки и решение (2.1) единственно). Для доказательства строгой выпуклости нам потребуется следующая лемма.

Лемма 2.1. *Функция $P(x,y) = -\ln(F(x)-F(y))$ строго выпукла в полуплоскости $x>y$.*

Доказательство. Функция $P(x,y)$ бесконечно дифференцируема в области $x>y$. Для доказательства леммы нужно установить положительную определённость гессиана D^2P в любой фиксированной точке (x,y), $x>y$. Прямые вычисления дают

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}P(x,y) = \frac{(F'(x))^2 - F''(x)(F(x)-F(y))}{(F(x)-F(y))^2},$$

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2}P(x,y) = \frac{(F'(y))^2 - F''(y)(F(y)-F(x))}{(F(x)-F(y))^2}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x\partial y}P(x,y) = -\frac{F'(x)F'(y)}{(F(x)-F(y))^2}.$$

Достаточно доказать положительную определённость матрицы $Q = (F(x)-F(y))^2D^2P(x,y)$ с компонентами

$$Q_{11} = (F'(x))^2 - F''(x)(F(x)-F(y)),$$

$$Q_{22} = (F'(y))^2 - F''(y)(F(y)-F(x)), \qquad Q_{12} = Q_{21} = -F'(x)F'(y).$$

Поскольку $F'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{\pi}}e^{-x^2/4}$, то $F''(x) = -\dfrac{x}{2}F'(x)$, и диагональные элементы этой матрицы можно переписать в виде

$$Q_{11} = F'(x)\Big(\frac{x}{2}(F(x)-F(y)) + F'(x)\Big) = F'(x)\Big(\frac{x}{2}(F(x)-F(y)) + (F'(x)-F'(y))\Big) + F'(x)F'(y),$$

$$Q_{22} = F'(y)\Big(\frac{y}{2}(F(y)-F(x)) + (F'(y)-F'(x))\Big) + F'(x)F'(y).$$

По теореме Коши найдётся такое значение $z \in (y,x)$, что

$$\frac{F'(x)-F'(y)}{F(x)-F(y)} = \frac{F''(z)}{F'(z)} = -z/2.$$

Поэтому

$$Q_{11} = F'(x)(F(x) - F(y))(x - z)/2 + F'(x)F'(y),$$
$$Q_{22} = F'(y)(F(x) - F(y))(z - y)/2 + F'(x)F'(y),$$

и матрица Q допускает представление $Q = R_1 + F'(x)F'(y)R_2$, где R_1 — диагональная матрица с положительными диагональными элементами

$$F'(x)(F(x) - F(y))(x - z)/2, \qquad F'(y)(F(x) - F(y))(z - y)/2,$$

а $R_2 = \left(\begin{smallmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{smallmatrix}\right)$. Так как $R_1 > 0$, $R_2 \geqslant 0$, заключаем, что $Q > 0$. Лемма доказана. □

Замечание 2.1. В дополнение к лемме 2.1 покажем, что функции $P(x, -\infty)$, $P(+\infty, x)$ одной переменной являются строго выпуклыми. Так как $P(+\infty, x) = P(-x, -\infty)$, то достаточно доказать строгую выпуклость функции $P(x, -\infty) = -\ln F(x)$. Из предложения 2.2 в пределе при $y \to -\infty$ следует, что эта функция выпукла,

$$(F(x))^2 \frac{d^2}{dx^2} P(x, -\infty) = F'(x)\Big(\frac{x}{2}F(x) + F'(x)\Big) = \lim_{y\to-\infty} Q_{11} \geqslant 0.$$

Поскольку $F'(x) > 0$, мы видим, что $\dfrac{x}{2}F(x) + F'(x) \geqslant 0$. Если $\dfrac{d^2}{dx^2}P(x, -\infty) = 0$ в некоторой точке $x = x_0$, то $0 = \dfrac{x_0}{2}F(x_0) + F'(x_0)$ — минимум неотрицательной функции $\dfrac{x}{2}F(x) + F'(x)$. Поэтому $\Big(\dfrac{x}{2}F + F'\Big)'(x_0) = 0$. Снова используя тождество $F''(x) = -\dfrac{x}{2}F'(x)$, получим, что

$$0 = \Big(\frac{x}{2}F + F'\Big)'(x_0) = F(x_0)/2 + \frac{x_0}{2}F'(x_0) + F''(x_0) = F(x_0)/2 > 0.$$

Полученное противоречие показывает, что $\dfrac{d^2}{dx^2}P(x, -\infty) > 0$, и значит, функция $P(x, -\infty)$ строго выпукла.

Мы готовы установить строгую выпуклость функции $E(\bar\xi)$.

Предложение 2.2 (строгая выпуклость энтропии)**.** *Функция $E(\bar\xi)$ строго выпукла на Ω.*

Доказательство. При $k = 0, \ldots, n$ обозначим $P_k(\bar\xi) = -\ln(F(\xi_{k+1}/a_k) - F(\xi_k/a_k))$. Как следует из леммы 2.1 и замечания 2.1, функции P_k выпуклы на Ω. Ввиду (2.3) энтропия $E(\bar\xi)$ является линейной комбинацией выпуклых функций P_k с положительными коэффициентами и потому выпукла. Для доказательства строгой выпуклости нужно установить положительную определённость гессиана $D^2E(\bar\xi)$. Заметим, что $D^2E(\bar\xi) \geqslant 0$ по выпуклости $E(\bar\xi)$. Предположим, что для некоторого вектора $\zeta = (\zeta_1, \ldots, \zeta_n) \in \mathbb{R}^n$

$$D^2E(\bar\xi)\zeta\cdot\zeta = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 E(\bar\xi)}{\partial\xi_i\partial\xi_j}\zeta_i\zeta_j = 0. \tag{2.6}$$

Так как $D^2E(\bar\xi)\zeta\cdot\zeta$ является линейной комбинацией неотрицательных значений $D^2P_k(\bar\xi)\zeta\cdot\zeta$ с положительными коэффициентами, приходим к соотношениям

$$D^2P_k(\bar\xi)\zeta\cdot\zeta = 0, \quad k = 0, \ldots, n.$$

Из этих соотношений (при $k = 1, \ldots, n-1$) и леммы 2.1 следует, что $\zeta_k = \zeta_{k+1} = 0$, $k = 1, \ldots, n-1$. Итак, $\zeta_1 = \ldots = \zeta_n = 0$ и (2.6) выполнено только при $\zeta = 0$. Это означает положительную определённость гессиана $D^2E(\bar\xi)$ и строгую выпуклость энтропии. □

Как уже обсуждалось выше, из строгой выпуклости энтропии следует единственность слабого решения (2.1).

Теорема 2.2. *Слабое решение* (2.1) *задачи* (1.1), (1.5) *единственно.*

3. Вырожденный случай

Рассмотрим теперь случай, когда некоторые из коэффициентов $a_k = 0$. Если $k = 0$ или $k = n$, вид решения (2.1) сохранится, но при $\xi < \xi_1$ (соответственно, при $\xi > \xi_n$) решение становится постоянным: $v \equiv u_-$ (соответственно, $v \equiv u_+$). При этом разрыв $\xi = \xi_1$ ($\xi = \xi_n$) становится сильным и требование (1.4) приводит к следующему условию типа Стефана:

$$-(u_1 - u_-)\xi_1/2 = \frac{a_1(u_2 - u_1)F'(\xi_1/a_1)}{F(\xi_2/a_1) - F(\xi_1/a_1)},$$

соответственно, к условию

$$(u_+ - u_n)\xi_n/2 = \frac{a_{n-1}(u_n - u_{n-1})F'(\xi_n/a_{n-1})}{F(\xi_n/a_{n-1}) - F(\xi_{n-1}/a_{n-1})}.$$

Эти условия заменяют, соответственно, первое и последнее равенство в (2.2). Заметим также, что первое из требований $[A(u)] = 0$ в (1.4) выполнено, так как функция $A(u)$ постоянна на отрезке $[u_-, u_1]$ (на $[u_n, u_+]$). Заменив первый член в сумме (2.3) на $(u_1 - u_-)(\xi_1)^2/4$ (соответственно, заменив последний член в этой сумме на $(u_+ - u_n)(\xi_n)^2/4$), получим, что условия на линиях $\xi = \xi_k$, $k = 1, \dots, n$, снова сводятся к равенству $\nabla E = 0$ и искомое решение определяется точкой минимума энтропии $E(\bar{\xi})$. Заметим, что после описанной коррекции свойства коэрцитивности и строгой выпуклости энтропии сохраняются.

Случай, когда диффузия вырождается на внутреннем интервале, т. е. когда $a_k = 0$ при некотором $0 < k < n$, более сложный. В этом случае линии $\xi = \xi_k$, $\xi = \xi_{k+1}$ сливаются в одну линию $\xi = \xi_k$ сильного разрыва с предельными значениями $v(\xi_k-) = u_k$, $v(\xi_k+) = u_{k+1}$ (нужно положить $\xi_{k+1} = \xi_k$ в формуле (2.1)). Условие (1.4) на линии $\xi = \xi_k$ сводится к равенству

$$-(u_{k+1} - u_k)\xi_k/2 = \frac{a_{k+1}(u_{k+2} - u_{k+1})F'(\xi_k/a_{k+1})}{F(\xi_{k+2}/a_{k+1}) - F(\xi_k/a_{k+1})} - \frac{a_{k-1}(u_k - u_{k-1})F'(\xi_k/a_{k-1})}{F(\xi_k/a_{k-1}) - F(\xi_{k-1}/a_{k-1})}.$$

Это равенство заменяет два уравнения с номерами $k, k+1$ в системе (2.2), где мы полагаем всюду $\xi_{k+1} = \xi_k$. В общем случае (2.2) заменяется на систему $n - l$ уравнений с $n - l$ неизвестными, где l — число внутренних интервалов (u_k, u_{k+1}) с нулевой диффузией ($a_k = 0$). Нетрудно проверить, что решения этой системы совпадают с критическими точками функции $E(\bar{\xi})$, определённой следующим выражением:

$$E(\xi_1, \dots, \xi_n) = -\sum_{k=0,\dots,n, a_k>0} (a_k)^2(u_{k+1} - u_k)\ln(F(\xi_{k+1}/a_k) - F(\xi_k/a_k)) + \\ + \sum_{k=0,\dots,n, a_k=0} (u_{k+1} - u_k)(\xi_k)^2/4. \quad (3.1)$$

Эта функция задана на множестве

$$\Gamma = \{\bar{\xi} = (\xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^n \mid \xi_{k+1} > \xi_k \text{ при } a_k > 0, \xi_{k+1} = \xi_k \text{ при } a_k = 0,\ k = 1, \dots, n-1\}.$$

Заметим, что Γ — это $(n - l)$-мерный выпуклый конус, который является гранью замкнутого конуса $Cl\,\Omega$. Точно так же, как и в невырожденном случае, доказывается коэрцитивность и строгая выпуклость энтропии $E(\bar{\xi})$ на конусе Γ. Координаты точки минимума энтропии определяют единственное слабое решение задачи (1.1), (1.5). Таким образом, теоремы 2.1, 2.2 справедливы и в вырожденном случае.

4. О задаче Стефана

Решение многофазной задачи Стефана для уравнений теплопроводности $u_t = a_k^2 u_{xx}$ с начальными данными Римана (1.5) имеет вид (2.1) (мы предполагаем, что $a_k > 0$, $k = 0, \dots, n$), но для определения линий $x = x_k(t) = \xi_k\sqrt{t}$ фазового перехода вместо условий Ранкина—Гюгонио (1.4) задаётся условие Стефана

$$d_k x_k'(t) + h_k u_x(t, x_k(t)+) - h_{k-1} u_x(t, x_k(t)-), \quad k = 1, \dots, n, \quad (4.1)$$

где $h_k > 0$ — коэффициент теплопроводности для k-ой фазы, а $d_k \geqslant 0$ — скрытая удельная теплота k-ого фазового перехода (между фазами с номерами $k-1$ и k). Из (4.1) вытекает следующая алгебраическая система:

$$d_k\xi_k/2 + \frac{h_k(u_{k+1}-u_k)F'(\xi_k/a_k)}{a_k(F(\xi_{k+1}/a_k)-F(\xi_k/a_k))} - \frac{h_{k-1}(u_k-u_{k-1})F'(\xi_k/a_{k-1})}{a_{k-1}(F(\xi_k/a_{k-1})-F(\xi_{k-1}/a_{k-1}))} = 0, \quad k=1,\dots,n,$$

см., например, [1, гл. XI]. Оказалось, что эта система является градиентной: нетрудно проверить, что она совпадает с равенством $\nabla E(\bar\xi)=0$, где функция

$$E(\bar\xi) = -\sum_{k=0}^{n} h_k(u_{k+1}-u_k)\ln(F(\xi_{k+1}/a_k)-F(\xi_k/a_k)) + \sum_{k=1}^{n} d_k\xi_k^2/4, \quad \bar\xi=(\xi_1,\dots,\xi_n)\in\Omega, \tag{4.2}$$

определена в открытом конусе Ω из раздела 2 и имеет вид (3.1) (только с другими коэффициентами). Коэрцитивность и строгая выпуклость $E(\bar\xi)$ непосредственно вытекают из коэрцитивности и строгой выпуклости функции

$$\tilde E(\bar\xi) = -\sum_{k=0}^{n} h_k(u_{k+1}-u_k)\ln(F(\xi_{k+1}/a_k)-F(\xi_k/a_k)),$$

доказанной в предложениях 2.1, 2.2. Таким образом, решение задачи Стефана имеет вид (2.1) и однозначно определяется по координатам точки минимума энтропии (4.2). Поэтому справедлива следующая теорема.

Теорема 4.1. *Решение* (2.1) *задачи Стефана существует, единственно и соответствует точке глобального минимума энтропии* (4.2).

Следует отметить, что в недавней статье [6] исследовалась некорректная задача Стефана, в которой условие неотрицательности значений d_k может нарушаться. В этой работе было найдено необходимое и достаточное условия коэрцитивности функции (4.2) и более сильное достаточное условие её строгой выпуклости.

5. Вариационная формулировка

Вернёмся к изучению слабых решений задачи (1.1), (1.5). Добавив к энтропии (3.1) константу

$$\sum_{\substack{k=0,\dots,n,\\ a_k>0}} (a_k)^2(u_{k+1}-u_k)\ln((u_{k+1}-u_k)/a_k),$$

получим эквивалентную её форму

$$E_1(\bar\xi) = -\sum_{\substack{k=0,\dots,n,\\ a_k>0}} (a_k)^2(u_{k+1}-u_k)\ln\left(\frac{F(\xi_{k+1}/a_k)-F(\xi_k/a_k)}{(u_{k+1}-u_k)/a_k}\right) + \\ + \sum_{\substack{k=0,\dots,n,\\ a_k=0}} (u_{k+1}-u_k)(\xi_k)^2/4. \tag{5.1}$$

Пусть кусочно постоянные коэффициенты диффузии аппроксимируют в пределе, когда ранг разбиения $\max\limits_{k=0,\dots,n}(u_{k+1}-u_k)$ отрезка $[u_-,u_+]$ стремится к нулю, произвольную функцию $a(u)\in L^2([u_-,u_+])$, $a(u)\geqslant 0$. Тогда соответствующие кусочно-линейные функции $A=A_r(u)$ (для простоты предположим, что они образуют последовательность $\{A_r\}$, $r\in\mathbb{N}$) сходятся равномерно на отрезке $[u_-,u_+]$ к функции $A(u)=\int a^2(u)du$. Как установлено в [5], соответствующая последовательность $u_r=u_r(t,x)$ слабых решений $*$-слабо в $L^\infty(\Pi)$ сходится к слабому решению предельной задачи, причём в случае, когда функция $A(u)$ строго возрастает, сходимость сильная — в $L^1_{loc}(\Pi)$. На самом деле, указанное свойство установлено в [5] в более общем случае энтропийных решений уравнения (1.3). В частности, это свойство обосновывает законность кусочно-постоянной аппроксимации коэффициентов.

Переходя формально к пределу при $\max\limits_{k=0,\dots,n}(u_{k+1}-u_k)\to 0$ в выражении (5.1), получим интегральный функционал

$$J(\xi)=-\int\limits_{\substack{\{u\in[u_-,u_+],\\ a(u)>0\}}}(a(u))^2\ln(F'(\xi(u)/a(u))\xi'(u))du+\int\limits_{\substack{\{u\in[u_-,u_+],\\ a(u)=0\}}}(\xi(u))^2/4du,$$

зависящий от возрастающей функции $\xi(u)$ на отрезке $[u_-,u_+]$, обратной к искомому автомодельному решению $u=u(\xi)$ задачи (1.1), (1.5). Учитывая, что

$$\ln(F'(\xi(u)/a(u))\xi'(u))=\ln F'(\xi(u)/a(u))+\ln\xi'(u)=-\frac{(\xi(u))^2}{4a^2(u)}+\ln\xi'(u),$$

мы можем упростить выражение для функционала $J(\xi)$:

$$J(\xi)=\int\limits_{u_-}^{u_+}\left[-(a(u))^2\ln(\xi'(u))+(\xi(u))^2/4\right]du. \tag{5.2}$$

Ясно, что этот функционал строго выпуклый. Соответствующее уравнение Эйлера—Лагранжа имеет вид

$$\xi(u)/2+((a(u))^2/\xi'(u))'=0. \tag{5.3}$$

Так как $u'(\xi)=1/\xi'(u)$, $u=u(\xi)$, можно переписать (5.3) в форме

$$\xi(u)/2+((a(u))^2u'(\xi))'_u=0.$$

Умножив это равенство на $u'(\xi)$, придём к уравнению

$$(a^2u')'=-\xi u'/2,\quad u=u(\xi),$$

которое совпадает с уравнением (1.1) в классе автомодельных функций. Таким образом, функционал $J(\xi)$ даёт вариационную формулировку автомодельных решений задачи (1.1), (1.5). Конечно, эта формулировка является формальной, её обоснование является отдельной задачей, выходящей за рамки данного исследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Карслоу Г., Егер Дж.* Теплопроводность твёрдых тел. — М.: Наука, 1964.
2. *Кружков С. Н.* Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными// Мат. сб. — 1970. — *81*, № 2. — С. 228–255.
3. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
4. *Carrillo J.* Entropy solutions for nonlinear degenerate problems// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1999. — *147*. — С. 269–361.
5. *Panov E. Yu.* On weak completeness of the set of entropy solutions to a degenerate non-linear parabolic equation// SIAM J. Math. Anal. — 2012. — *44*, № 1. — С. 513–535.
6. *Panov E. Yu.* Solutions of an ill-posed Stefan problem// J. Math. Sci. (N. Y.) — 2023. — *274*, № 4. — С. 534–543.

Е. Ю. Панов
Новгородский государственный университет, Великий Новгород, Россия
Центр научных исследований и разработок, Великий Новгород, Россия
E-mail: eugeny.panov@novsu.ru

UDC 517.957
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-676-684
EDN: ZEGDSE

On the structure of weak solutions of the Riemann problem for a degenerate nonlinear diffusion equation

E. Yu. Panov[1,2]

[1] *Yaroslav-the-Wise Novgorod State University, Novgorod the Great, Russia*
[2] *Research and Development Center, Novgorod the Great, Russia*

Abstract. An explicit form of weak solutions to the Riemann problem for a degenerate nonlinear parabolic equation with a piecewise constant diffusion coefficient is found. It is shown that the lines of phase transitions (free boundaries) correspond to the minimum point of some strictly convex and coercive function of a finite number of variables. A similar result is true for Stefan's problem. In the limit, when the number of phases tends to infinity, there arises a variational formulation of self-similar solutions to the equation with an arbitrary nonnegative diffusion function.

Keywords: degenerate nonlinear parabolic equation, Riemann problem, Stefan problem, weak solution, phase transition, self-similar solution.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author is grateful to E. V. Radkevich for valuable comments on this work. The work was supported by the Russian Science Foundation, grant No. 22-21-00344.

For citation: E. Yu. Panov, "On the structure of weak solutions of the Riemann problem for a degenerate nonlinear diffusion equation," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 4, 676–684. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-676-684

REFERENCES

1. H. S. Carslaw and J. C. Jaeger, *Teploprovodnost' tverdykh tel* [Conduction of Heat in Solids], Nauka, Moscow, 1964 (Russian translation).
2. S. N. Kruzhkov, "Kvazilineynye uravneniya pervogo poryadka so mnogimi nezavisimymi peremennymi" [First-order quasilinear equations with many independent variables], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1970, **81**, No. 2, 228–255 (in Russian).
3. O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'tseva, *Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
4. J. Carrillo, "Entropy solutions for nonlinear degenerate problems," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1999, **147**, 269–361.
5. E. Yu. Panov, "On weak completeness of the set of entropy solutions to a degenerate non-linear parabolic equation," *SIAM J. Math. Anal.*, 2012, **44**, No. 1, 513–535.
6. E. Yu. Panov, "Solutions of an ill-posed Stefan problem," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2023, **274**, No. 4, 534–543.

E. Yu. Panov
Yaroslav-the-Wise Novgorod State University, Novgorod the Great, Russia
Research and Development Center, Novgorod the Great, Russia
E-mail: eugeny.panov@novsu.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 4 (2023). С. 685–696
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.956
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-685-696
EDN: ZKHDVY

О ПЛОСКИХ КОЛЕБАНИЯХ ХОЛОДНОЙ ПЛАЗМЫ В ПОСТОЯННОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ

О. С. Розанова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Аннотация. Рассматривается класс двумерных решений уравнений модели холодной плазмы, совместимых с постоянным магнитным и постоянным электрическим полем. Для этого класса при различных предположениях об электрическом поле изучаются условия на начальные данные, гарантирующие глобальное существование классического решения задачи Коши для заданного периода времени или разрушение решения за конечное время. Особое внимание уделено классу решений с осевой симметрией.

Ключевые слова: модель холодной плазмы, постоянное магнитное поле, постоянное электрическое поле, задача Коши, классическое решение, глобальная разрешимость, разрушение решения.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при поддержке гранта РНФ № 23-11-00056 в Российском университете дружбы народов.

Для цитирования: *О. С. Розанова.* О плоских колебаниях холодной плазмы в постоянном магнитном поле// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 4. С. 685–696. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-685-696

1. Введение

Плазма фактически представляет собой двухфазную среду, состоящую из ионов и электронов, взаимодействующих друг с другом. Существует множество моделей, описывающих ее поведение в различных режимах (см., например, [2, 9]). Среди них выделяется модель так называемой холодной (или электронной) плазмы, включающая движение только электронов. Считается, что плазма при низких температурах подчиняется такой модели, что оправдывает термин «холодная плазма». В настоящее время холодная плазма интенсивно исследуется в связи с ускорителями электронов в следе мощного лазерного импульса [7].

Уравнения гидродинамики холодной плазмы в нерелятивистском приближении в безразмерных величинах принимают вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + \operatorname{div}(n\mathbf{V}) = 0, \quad \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V}\cdot\nabla)\,\mathbf{V} = -\mathbf{E} - [\mathbf{V}\times\mathbf{B}], \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = n\mathbf{V} + \operatorname{rot}\mathbf{B}, \qquad \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = -\operatorname{rot}\mathbf{E}, \qquad \operatorname{div}\mathbf{B} = 0, \tag{1.2}$$

где n и $\mathbf{V} = (V_1, V_2, V_3)$ — плотность и скорость электронов, а $\mathbf{E} = (E_1, E_2, E_3)$ и $\mathbf{B} = (B_1, B_2, B_3)$ — векторы электрических и магнитных полей. Все компоненты решения зависят от $t \in \mathbb{R}_+$ и $x \in \mathbb{R}^3$. Ионы в этой модели предполагаются неподвижными.

Основная проблема, которая интересует физиков в связи с уравнениями, описывающими холодную плазму, — это определение условий на начальные данные, при которых решение сохраняет исходную гладкость как можно дольше (в идеале — всегда). Считается, что при возникновении особенности гладкого решения выделяется энергия, нагревающая плазму, так что предположение о неподвижности ионов перестает быть справедливым.

Для модельного случая одной пространственной переменной, который тем не менее очень важен для тестирования численных методов [3], исходная система уравнений существенно упрощается. Проблема возникновения особенностей в этом случае в настоящее время достаточно хорошо изучена [14], включая специальные упрощения, позволяющие проследить влияние магнитного поля в так называемой модели Дэвидсона (см. [6, 15]).

Однако система (1.1), (1.2) в пространстве многих пространственных переменных чрезвычайно сложна и включает множество мод колебаний. В частности, двумерный случай важен с точки зрения физических экспериментов. Что касается численных исследований, получены результаты, подтверждающие сложное поведение среды (см. [4]).

До настоящего времени для случая многих пространственных измерений существуют теоретические результаты только для случая электростатических колебаний [13] (т. е. $\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0$), для решения с радиальной симметрией [12] или для случая линейной зависимости от пространственных переменных [16]. В этих случаях $\mathbf{B} = 0$.

В данной работе изучается частный случай двумерных (плоских) колебаний, для которых магнитное поле является ненулевой константой. Другими словами, $\mathbf{V} = (V_1, V_2, 0)$, $\mathbf{E} = (E_1, E_2, 0)$, $\mathbf{B}_0 = (0, 0, B_0)$ и V_1, V_2, E_1, E_2, n зависят от x_1, x_2, t. Если магнитное поле постоянно, тогда

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = 0, \quad \operatorname{rot}(n\mathbf{V}) = 0.$$

Если условие $\operatorname{rot}(n\mathbf{V}) = \nabla n \times \mathbf{V} + n \operatorname{rot}\mathbf{V} = 0$ выполняется изначально, то оно, вообще говоря, не выполняется при всех $t \geqslant 0$ (существует соответствующий пример).

Однако для классов радиально-симметричных или аффинных решений, где $\nabla n \times \mathbf{V} = 0$, достаточно потребовать $B_0 = 0$. Действительно, как следует из второго уравнения (1.1),

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} \quad + \quad (\mathbf{V} \cdot \nabla)\xi = -\mathcal{D}(\xi + B_0), \tag{1.3}$$

где $\mathcal{D} = \operatorname{div}\mathbf{V}$, $\operatorname{rot}\mathbf{V} = (0, 0, \xi)$. Таким образом, если ограничиться классом радиально-симметричных или аффинных решений, положить $B_0 = 0$ и выбрать данные такие, что $\xi = 0$, то $\operatorname{rot}(n\mathbf{V}) = 0$ для всех $t > 0$. Для произвольных исходных данных условие $\operatorname{rot}(n\mathbf{V}) = 0$ вместе с требованием $B_0 = \text{const}$ делают систему (1.1), (1.2) переопределенной. Другими словами, для общего решения компонента $\mathbf{B}$ не может быть константой.

Однако если предположить, что $n = 0$, то можно рассмотреть константу $B_0 \neq 0$ и более широкий класс решений. Действительно, если $n = 0$, то условие $\operatorname{rot}(n\mathbf{V}) = 0$ выполняется тождественно. Далее, первые уравнения в (1.1) и (1.2) выполняются тождественно для любого стационарного $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0(x_1, x_2)$ такого, что $\operatorname{rot}\mathbf{E}_0 = 0$.

Конечно, можно спорить о том, имеет ли рассмотренный класс решений уравнений холодной плазмы физический смысл. Однако с математической точки зрения исследование движения в заданном ландшафте электрических и магнитных полей чрезвычайно интересно. В некотором смысле эта задача напоминает задачу о движении жидкости на вращающейся плоскости, возникающую в геофизических приложениях [1], но значительно сложнее.

Таким образом, рассматриваемая система имеет вид

$$\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\,\mathbf{V} = -\mathbf{E}_0 - [\mathbf{V} \times \mathbf{B}_0] \tag{1.4}$$

с начальными данными

$$\mathbf{V}|_{t=0} = \mathbf{V}_0(x_1, x_2) \in C^2(\mathbb{R}^2). \tag{1.5}$$

Для простоты предположим, что $B_0 > 0$.

Из векторного уравнения (1.4) вытекают следующие дифференциальные уравнения.

1. Матричное уравнение для неизвестной матрицы производных Q:

$$\frac{\partial \mathcal{V}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla)\,\mathcal{V} = -\mathcal{V}^2 - B_0 L \mathcal{V} - S_0(x_1, x_2),$$

где

$$\mathcal{V} = (v_{ij}) = (\partial_{x_i} V_j), \quad S_0 = (s_{ij}) = (\partial_{x_i} E_{0j}), \quad \partial_{x_i} E_{0j} = \partial_{x_j} E_{0i}, \quad i,j = 1,2, \quad L = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \tag{1.6}$$

2. Пара скалярных уравнений для $\mathcal{D}$ и ξ:

$$\frac{\partial \mathcal{D}}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla \mathcal{D}) = -\mathcal{D}^2 + 2J - \lambda(x_1, x_2) - B_0 \xi, \tag{1.7}$$

где $J = \det(\|\partial_{x_i} V_j\|)$, $i, j = 1, 2$, $\lambda = \operatorname{div} \mathbf{E}$ и выполнено (1.3).

Мы видим, что уравнения (1.4), (1.6), (1.7), (1.3) записаны вдоль одного и того же поля характеристик

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} + (\mathbf{V} \cdot \nabla) x_i = V_i, \quad i = 1, 2, \quad (x_1(0), x_2(0)) = (x_{01}, x_{02}), \tag{1.8}$$

поэтому для $\dfrac{d}{dt} = \dfrac{\partial}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla$ гиперболическую систему (1.4), (1.6), (1.8) можно рассматривать как замкнутую квадратично-нелинейную систему ОДУ для векторов $\mathbf{V}$, $\mathbf{x} = (x_1, x_2)$ и матрицы $\mathcal{V}$. Возникновение особенности означает разрушение компоненты Q за конечное время хотя бы для одной начальной точки (x_{01}, x_{02}).

Очевидно, для произвольного $\mathbf{E}_0$ система из 8 уравнений

$$\frac{d\mathbf{V}}{dt} = -B_0 L \mathbf{V} - E_0(x_1, x_2), \tag{1.9}$$

$$\frac{d\mathbf{x}}{dt} = \mathbf{V},$$

$$\frac{d\mathcal{V}}{dt} = -\mathcal{V}^2 - B_0 L \mathcal{V} - S_0(x_1, x_2), \tag{1.10}$$

$$((V_1(0), V_2(0), x_1(0), x_2(0), Q(0)) = (V_1(x_{01}, x_{02}), V_2(x_{01}, x_{02}), x_{01}, x_{02}, (\partial_{x_i} V_j(x_{01}, x_{02}))), \quad i, j = 1, 2,$$

может быть решена только численно.

Тем не менее, при определенном выборе $\mathbf{E}_0 = \mathcal{S}_0 \mathbf{x}$ с постоянной симметричной матрицей $\mathcal{S}_0 = (s_{ij})$, $i, j = 1, 2$, можно получить критерий возникновения особенностей и достаточное условие глобальной по t гладкости решения в терминах начальных данных $\mathbf{V}_0$ и входных параметров s_{ij} и B_0, см. раздел 2, теорема 2.2.

В общем случае достаточные условия гладкости выглядят громоздко, поэтому приведем их следствие для случая осевой симметрии:

$$\mathbf{V} = U(r)\,\mathbf{x} + V(r)\,\mathbf{x}_\perp, \quad \mathbf{E}_0 = S(r)\,\mathbf{x}, \quad r = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}, \quad \mathbf{x}_\perp = (x_2, -x_1), \tag{1.11}$$

см. раздел 2.1.

В разделе 3 мы изучаем осесимметричный случай с переменной $\mathbf{E}_0$ такой, что $S_- \leqslant S(r) \leqslant S_+$ и $\lambda_- \leqslant \operatorname{div}\mathbf{E}_0(r) \leqslant \lambda_+$ с константами $S\pm$ и $\lambda\pm$, и находим достаточные условия на $\mathbf{V}_0$, гарантирующие классическую гладкость задачи Коши на периоде, зависящем от B_0 и $S(r)$, см. теорему 3.1.

2. Случай аффинного $\mathbf{E}_0$

Легко видеть, что в случае аффинного $\mathbf{E}_0$ (линейная зависимость $\mathbf{E}_0$ от пространственных переменных) матрицы $S(x_1, x_2) = \mathcal{S}_0$ не зависят от (x_1, x_2), поэтому систему (1.10) можно рассматривать отдельно.

Покажем, что систему (1.10) можно линеаризовать. Нам понадобится следующая версия леммы Радона 1927 г. (см. [8, теорема 3.1], а также [11]).

Теорема 2.1 (лемма Радона). *Матричное уравнение Риккати*

$$\dot{W} = M_{21}(t) + M_{22}(t) W - W M_{11}(t) - W M_{12}(t) W \tag{2.1}$$

(*где* $W = W(t)$ — *матрица размера* $(n \times m)$, M_{21} — *матрица размера* $(n \times m)$, M_{22} — *матрица размера* $(m \times m)$, M_{11} — *матрица размера* $(n \times n)$, M_{12} — *матрица размера* $(m \times n)$) *эквивалентно* *линейному однородному матричному уравнению*

$$\dot{Y} = M(t)Y, \quad M = \begin{pmatrix} M_{11} & M_{12} \\ M_{21} & M_{22} \end{pmatrix} \tag{2.2}$$

(где $Y = Y(t)$ *— матрица размера* $(n \times (n+m))$*,* M *— матрица размера* $(n+m) \times (n+m))$ *в следующем смысле.*

Пусть на некотором интервале $\mathcal{J} \in \mathbb{R}$ *матрица-функция* $Y(t) = \begin{pmatrix} Q(t) \\ P(t) \end{pmatrix}$ *(где* Q *— матрица размера* $(n \times n)$*,* P *— матрица размера* $(n \times m)$*) является решением уравнения* (2.2) *с исходными данными*

$$Y(0) = \begin{pmatrix} I \\ W_0 \end{pmatrix}$$

(где I *— единичная матрица размера* $(n \times n)$*,* W_0 *— постоянная матрица размера* $(n \times m)$*) и* $\det Q \neq 0$ *на* $\mathcal{J}$*. Тогда* $W(t) = P(t)Q^{-1}(t)$ *является решением уравнения* (2.1) *с* $W(0) = W_0$ *на* $\mathcal{J}$*.*

Система (1.6) может быть записана как уравнение (2.1), в котором

$$W = \mathcal{V}, \quad M_{11} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad M_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad M_{21} = -\mathcal{S}_0, \quad M_{22} = -B_0 L.$$

Таким образом, мы получаем линейную задачу Коши

$$\begin{pmatrix} \dot{q}_{11} & \dot{q}_{12} \\ \dot{q}_{21} & \dot{q}_{22} \\ \dot{p}_{11} & \dot{p}_{12} \\ \dot{p}_{21} & \dot{p}_{22} \end{pmatrix} = M \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \\ p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}, \quad M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ -s_{11} & -s_{12} & 0 & -B_0 \\ -s_{21} & -s_{22} & B_0 & 0 \end{pmatrix}, \tag{2.3}$$

с начальными условиями

$$\begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \\ p_{11} & p_{12} \\ p_{21} & p_{22} \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ v_{11}(0) & v_{12}(0) \\ v_{21}(0) & v_{22}(0) \end{pmatrix}. \tag{2.4}$$

Здесь $Q = \{q_{ij}\}$, $P = \{p_{ij}\}$, $i, j = 1, 2$. Система (2.3) представляет собой линейную систему ОДУ с постоянными коэффициентами, которая может быть решена в явном виде стандартным способом. Однако, поскольку порядок системы высок, решение очень громоздко и удобнее всего использовать пакеты компьютерной алгебры (например, MAPLE). Ниже с помощью компьютерных вычислений получено и преобразовано выражение для $\det Q$ в (2.7), а также найдена асимптотика в разделе 2.1.

Напомним, что $\det Q(0) = 1$. Таким образом, производные $v_{ij} = (\partial_{x_i} V_j)$, $i, j = 1, 2$, остаются ограниченными при всех $t > 0$ тогда и только тогда, когда $\det Q > 0$ при всех $t > 0$. Если $\det Q > 0$ при всех $t > 0$ для любой характеристики, начинающейся в $(x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$, то решение задачи Коши сохраняет гладкость при всех $t > 0$.

Тем не менее, этот критерий неявный, и было бы удобнее найти достаточное условие, гарантирующее глобальную гладкость, т. е. исследовать, когда $\det Q > 0$ при всех $t > 0$.

Собственные значения M следующие:

$$\begin{aligned} \mu_{1234} &= \pm \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\pm\sqrt{(B_0^2 + \lambda)^2 - 4K} - (B_0^2 + \lambda)}, \\ \lambda &= \operatorname{div} \mathbf{E}_0 = s_{11} + s_{22}, \quad K = \det(\partial_{x_i} E_{0j}) = s_{11} s_{22} - s_{12}^2. \end{aligned}$$

Прежде всего заметим, что если $\operatorname{Re} \mu_i \neq 0$, $i = 1, \ldots, 4$, то нельзя выбрать $P = (v_{ij}(0), s_{ij}(0)) \in \mathbb{R}^8$ так, чтобы гарантировалась положительность $\det Q$ и эта положительность имела место и в окрестности P. Действительно, для случая $\operatorname{Re} \mu_i \neq 0$ решение $q_{ij}(t)$, вообще говоря, содержит возрастающий показатель.

Поэтому для нахождения достаточного условия гладкости, устойчивого по начальным данным, остановимся на случае $\operatorname{Re}\mu_i = 0$. Легко проверить, что оно выполняется тогда и только тогда, когда

$$4K < (B_0^2+\lambda)^2, \quad K > 0. \tag{2.5}$$

Следующее условие, необходимое для ограниченности $\det Q$, состоит в том, что частоты $|\mu_i|$ нерезонансны, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{|\omega_-|}{|\omega_+|} &\neq \frac{m}{n}, \qquad m,n\in\mathbb{N}, \\ \omega_\pm &= \frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{B_0^2+\lambda\pm\sqrt{(B_0^2+\lambda)^2-4K}}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Можно явно вычислить, что

$$\det Q = \frac{1}{k}\left[C + A_-\sin(\omega_+-\omega_-)t + B_-\cos(\omega_+-\omega_-)t + A_+\sin(\omega_++\omega_-)t + B_+\cos(\omega_+-\omega_-)t\right], \tag{2.7}$$

где константы $k, C, A_\pm, B_\pm$ зависят от $v_{ij}(0), s_{ij}(0), B_0$ (довольно громоздким образом). Очевидно, что $C + A_- + A_+ = k$. Здесь

$$\begin{aligned} C = B_0K\sqrt{(B_0^2+\lambda)^2-4K}[B_0^3 + (v_{12}-v_{21})B_0^2 + (\lambda+2J(0))B_0 + 2s_{12}(v_{11}-v_{22}) - \\ - (v_{12}-v_{21})(s_{11}-s_{22})], \end{aligned}$$

$$A_- = \lambda(\lambda+2B_0^2)\left[a_-(\omega_-+\omega_+) + b_-(\omega_--\omega_+)\right], \quad B_- = \lambda(\lambda+2B_0^2)\left[b_-(\omega_-+\omega_+) + a_-(\omega_--\omega_+)\right],$$

$$A_+ = \frac{1}{2}\sqrt{(B_0^2+\lambda)^2-4K}\left[a_+ + b_+\omega_-\omega_+\right], \qquad B_+ = \frac{1}{2}\sqrt{(B_0^2+\lambda)^2-4K}\left[a_+ - b_+\omega_-\omega_+\right],$$

$$k = ((B_0^2+\lambda)^2-4K)^{\frac{3}{2}}K.$$

Мы не выписываем длинные выражения для $a_\pm$, $b_\pm$.

Если предположить, что для характеристики, начинающейся из (x_{01}, x_{02})

$$C^2 > A_-^2 + B_-^2 + A_+^2 + B_+^2, \tag{2.8}$$

тогда компоненты Q ограничены. Таким образом, мы получаем сравнительно простое достаточное условие сохранения гладкости, не совпадающее с необходимым.

Таким образом, мы получаем следующую теорему.

Теорема 2.2.

1. *Решение задачи Коши* (1.4), (1.5) *сохраняет классическую гладкость для всех* $t > 0$ *тогда и только тогда, когда начальные данные* $\mathbf{E}_0 = \mathcal{S}_0\,\mathbf{x}$ *и* B_0 *таковы, что для всех* $(x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$ *выполняется свойство* $\det Q(t) > 0$, *где матричную компоненту* $Q = (q_{ij})$ *можно найти как часть решения задачи Коши* (2.3), (2.4) *для линейной системы с постоянными коэффициентами.*
2. *Если для всех* $(x_{01}, x_{02}) \in \mathbb{R}^2$ *начальные данные* (1.5), $\mathbf{E}_0 = \mathcal{S}_0\,\mathbf{x}$ *и* B_0 *таковы, что выполняются условия* (2.5), (2.6), (2.8), *то решение задачи Коши* (1.4), (1.5) *сохраняет классическую гладкость для всех* $t > 0$.

Замечание 2.1. Поскольку в случае 2 теоремы 2.2 функция $\det Q(t)$ является суперпозицией двух периодических движений с периодами $T_1 = \dfrac{2\pi}{\omega_+-\omega_-}$ и $T_2 = \dfrac{2\pi}{\omega_++\omega_-}$, $T_2 < T_1$ (см. (2.7)), то если $\det Q(t) > 0$ для $t \in (0, T_1]$, то $\det Q(t) > 0$ для всех $t > 0$.

2.1. Анализ влияния напряженности магнитного поля. Напомним, что в случае $\mathbf{E}_0 = 0$ необходимое и достаточное условие сохранения начальной гладкости выглядит очень элегантно:

$$(\mathcal{D}^2 - 4J + 2B_0\xi - B_0^2)\Big|_{t=0} < 0,$$

см. [1, 10]. Таким образом, если мы зафиксируем исходные данные (1.5) и увеличим $|B_0|$, мы всегда получим глобально гладкое решение.

Для случая $\mathbf{E}_0 \neq 0$ мы заметим, что если увеличить $|B_0|$, мы получим выполнение условия (2.5), т. е. получим случай 2 теоремы 2.2.

Чтобы проследить влияние B_0 в условии (2.8) и избежать громоздких формул, рассмотрим осесимметричный случай (1.11), в котором $s_{11} = s_{22}$, $s_{12} = 0$, $v_{11} = v_{22}$, $v_{12} = -v_{21}$. Здесь константы в (2.8) выглядят проще:

$$\begin{aligned}
&C = 2Fs_{11}^2 B_0^2 (1 + v_{11}^2 + v_{12}^2 + v_{12}B_0 + B_0^2), \quad F = B_0\sqrt{B_0^2 + 4s_{11}},\\
&A_- = s_{11}v_{11}(B_0^2 + 4s_{11})B_0^2(F(\omega_- - \omega_+) + B_0^2(\omega_- + \omega_+)),\\
&B_- = s_{11}v_{11}(B_0^2 + 4s_{11})B_0^2(B_0^2(\omega_- - \omega_+) - F(\omega_- + \omega_+)),\\
&A_+ = FB_0^2 s_{11}(s_{11}(1 - v_{11}^2 - v_{12}^2) - v_{12}B_0)(s_{11} + \omega_-\omega_+),\\
&B_+ = FB_0^2 s_{11}(s_{11}(1 - v_{11}^2 - v_{12}^2) - v_{12}B_0)(-s_{11} + \omega_-\omega_+),\\
&k = (B_0^2 + 4s_{11})^{\frac{3}{2}}\, B_0^3 s_{11}^2.
\end{aligned}$$

Легко посчитать, что при $B_0 \to \infty$ имеем $C \sim B_0^6$, а $A_\pm, B_\pm \sim B_0^5$, поэтому мы можем получить глобальную гладкость, увеличивая B_0. Тот же эффект мы получаем и в общем случае, без предположения осевой симметрии.

Отметим также, что для $\lambda \to \infty$ (в осесимметричном случае $\lambda = 2s_{11}$) имеем $C \sim \lambda^{\frac{7}{2}}$, а $A_\pm, B_\pm \sim \lambda^{\frac{5}{2}}$, поэтому другим способом добиться глобальной гладкости является увеличение λ.

3. Произвольное $\mathbf{E}_0$, осесимметричный случай

Для осесимметричного решения (1.11) уравнение (1.9) преобразуется к виду

$$\dot U = -U^2 + V^2 - B_0 V - S(r), \tag{3.1}$$

$$\dot V = (B_0 - 2V)U, \tag{3.2}$$

$$\dot r = rU. \tag{3.3}$$

Далее, поскольку $J = \mathcal{D}U + \xi V U^2 + V^2 + rUU' + rVV'$, $\mathcal{D} = 2U + rU'$, $\xi = 2V + rV'$, мы имеем

$$J = \mathcal{D}U + \xi V - U^2 - V^2,$$

и уравнения (1.7), (1.3) могут быть записаны в виде

$$\dot{\mathcal{D}} = -\mathcal{D}^2 + 2\mathcal{D}U + 2\xi V - 2U^2 - 2V^2 - \lambda(r) - B_0\xi, \tag{3.4}$$

$$\dot\xi = -\mathcal{D}(\xi - B_0). \tag{3.5}$$

В этом случае $\lambda(r) = rS'(r) + 2S(r)$. Предположим, что

$$S_- \leqslant S(r) \leqslant S_+, \tag{3.6}$$

где $S_\pm$ — константы.

3.1. Поведение решения.

1. Если $S(r) = S_0 = \mathrm{const}$, т. е. в случае аффинного $\mathbf{E}_0$, рассмотренного в предыдущем разделе, система уравнений (3.1), (3.2) может быть явно проинтегрирована. А именно, фазовая кривая на плоскости (U, V) представляет собой окружность

$$U^2 + \left(V + \left(C_1 - \frac{B_0^2}{4}\right)\right)^2 = \left(C_1 + \frac{B_0^2}{4}\right)^2 - S_0 - \frac{B_0^2}{4}, \tag{3.7}$$

$$C_1 = \frac{1}{4}\left(\frac{4S_0 + B_0^2 + 4U_0^2 + 4V_0^2 - 2B_0V_0}{B_0 - 2V_0}\right), \quad U_0 = U(0),\ V_0 = V(0),\ V_0 \neq \frac{B_0}{2}.$$

Система (3.1), (3.2) в случае $S(r) = S_0 = \mathrm{const}$ имеет следующие состояния равновесия:

- $U = 0$, $V = \dfrac{1}{2}B_0 \pm \dfrac{1}{2}\sqrt{4S_0 + B_0^2}$ при $4S_0 + B_0^2 = 2\lambda + B_0^2 > 0$ — центры, период вращения вдоль каждой фазовой кривой равен $T = \dfrac{2\pi}{\sqrt{4S_0 + B_0^2}}$;

- $U = \frac{1}{2}\sqrt{4S_0 + B_0^2}$, $V = \frac{1}{2}B_0$ при $4S_0 + B_0^2 = 2\lambda + B_0^2 < 0$ — устойчивые и неустойчивые узлы (вырождающиеся при $4S_0 + B_0^2 = 0$).

2. Для произвольных гладких $S(r)$ из уравнений (3.2), (3.3) следует

$$r = \frac{C_2}{\sqrt{|-2V + B_0|}}, \quad C_2 = r_0\sqrt{|-2V + B_0|}, \tag{3.8}$$

поэтому $S(r) = S(V)$ и фазовая кривая системы (3.1), (3.2) принимает вид

$$U^2 + (B_0 - 2V)\left(-\frac{1}{2}V + C_3\right) + G(V) = \frac{B_0^2}{4}, \tag{3.9}$$

$$G(V) = 2(B_0 - 2V)\int\limits_{\infty}^{V} \frac{S(\nu)}{(B_0 - 2\nu)^2}\,d\nu.$$

Поскольку при $S(r) \in [S_-, S_+]$

$$S_- \leqslant G(V) \leqslant S_+,$$

то видим, что фазовая кривая системы (3.1), (3.2) лежит между двумя кругами, соответствующими S_- и S_+, заданными в виде (3.7), где константы C_1 и C_3 вычислены с теми же исходными данными (U_0, V_0).

Замечание 3.1. Интеграл $G(V)$ можно найти явно для многих важных вариантов выбора $S(r)$, например, $\sin r$, $\cos r$, $\dfrac{1}{1 + r^\alpha}$ при $\alpha = 1, 2, 3, 4$, и т. д.

Поскольку мы хотим получить аналог теоремы 2.2, остановимся на первом случае $2\lambda + B_0^2 > 4S_- + B_0^2 > 0$ (этому условию соответствует (2.5)).

Лемма 3.1. *Пусть условие* (3.6) *выполнено и* $4S_- + B_0^2 > 0$. *Тогда решение* (U, V, r) *задачи Коши* (3.1), (3.2), (3.3)

$$(U, V, r)\Big|_{t=0} = (U_0, V_0, r_0),$$

ограничено сверху и снизу константами, зависящими от начальных данных. А именно,

$$U_- \leqslant U \leqslant U_+, \quad V_- \leqslant V \leqslant V_+, \tag{3.10}$$

где

$$U_\pm = \pm\max\{R_-, R_+\}, \qquad V_\pm = \frac{1}{4}B_0 \pm \max\{-c_- \pm R_-, -c_+ \pm R_+\},$$

$$c_\pm = \frac{1}{4}\left(\frac{4S_\pm + B_0^2 + 4U_0^2 + 4V_0^2 - 2B_0V_0}{B_0 - 2V_0}\right),$$

$$R_\pm^2 = \left(c_\pm + \frac{B_0^2}{4}\right)^2 - S_\pm - \frac{B_0^2}{4}, \quad R_\pm > 0.$$

Доказательство. Прежде всего отметим, что (3.9) подразумевает, что проекция фазовой кривой системы (3.1), (3.2), (3.2) на плоскость (U, V) симметрична относительно оси $U = 0$ и оси $V = \frac{1}{2}B_0$ (уравнения не меняются при $U_1 = -U$ и $V_1 = B_0 - V$, см. (3.8)), поэтому мы можем рассматривать только квадрант $U \geqslant 0$, $V > \frac{1}{2}B_0$.

Из уравнений (3.1), (3.2) мы имеем

$$\frac{dU}{dV} = \frac{-U^2 + V^2 - B_0V - S(r)}{-U(2V - B_0)} = \Psi(Z, V, t),$$

или

$$\frac{dZ}{dV} = \frac{-Z^2 + V^2 - B_0V - S(r)}{-(2V - B_0)}, \quad Z = \frac{1}{2}U^2. \tag{3.11}$$

Обозначим
$$\Psi_\pm(Z,V,t)=\frac{-Z^2+V^2-B_0V-S_\pm}{-(2V-B_0)}.$$
Поскольку $V>\dfrac{1}{2}B_0$,
$$\Psi_-(Z,V,t)\leqslant\Psi(Z,V,t)\leqslant\Psi_+(Z,V,t).$$
Теперь мы можем применить теорему Чаплыгина о дифференциальных неравенствах, согласно которой решение $Z(V)$ задачи Коши для (3.11) с начальными условиями $Z(V_0)=Z_0$ при $V>V_0$ удовлетворяет неравенству
$$Z_-(V)\leqslant Z(V,t)\leqslant Z_+(V),$$
а при $V<V_0$ — обратному неравенству
$$Z_-(V)\leqslant Z(V,t)\leqslant Z_+(V),$$
где $Z_\pm(s)$ — решения задач $\dfrac{dZ}{dV}=\Psi_\pm(Z,V)$, $Z(V_0)=Z_0$.

Таким образом, при $V<V_0$ имеем $Z(V,t)\geqslant Z_-(V)$, при $V>V_0$ имеем $Z(V,t)\geqslant Z_+(V)$, $U=\sqrt{2Z}\geqslant 0$. Период T движения по проекции фазовой кривой на (U,V) можно оценить как
$$\frac{2\pi}{\sqrt{4S_++B_0^2}}\leqslant T\leqslant\frac{2\pi}{\sqrt{4S_-+B_0^2}}.$$
Поведение проекции фазовых кривых показано на рис. 1. □

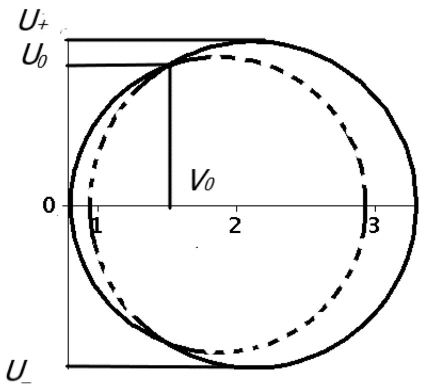

Рис. 1. Графики для $U=\pm\sqrt{2Z_\pm}$. Совокупность графиков, ограничивающих проекцию фазовой кривой — сплошная линия, для $1<S(r)<2$, $B_0=1$, $U_0=1$, $V_0=1{,}5$.

Fig. 1. Graphs for $U=\pm\sqrt{2Z_\pm}$. Combination of graphs limiting the projection of the phase curve, a solid line, for $1<S(r)<2$, $B_0=1$, $U_0=1$, $V_0=1.5$.

3.2. Поведение производных. Теперь мы можем изучить поведение расходимости и завихренности решения. Напомним, что в силу свойств гиперболических систем из ограниченности $\mathcal{D}$ и ξ следует, что решение задачи Коши (1.4), (1.5) сохраняет исходную гладкость [5].

Осуществляя замену $\eta=\xi-B_0$, систему (3.4), (3.5) можно переписать в виде
$$\dot{\mathcal{D}}=Y(\mathcal{D},\eta,U,V,\lambda)=-\mathcal{D}^2+2\mathcal{D}U+\eta(2V-B_0)-2U^2-2V^2-2B_0V-B_0^2-\lambda, \quad (3.12)$$
$$\dot\eta=-\mathcal{D}\eta. \quad (3.13)$$
Как следует из результатов раздела 3.1, $\lambda(r)=\lambda(V)$ — периодическая функция. Предположим, что
$$\lambda_-\leqslant\lambda(r)\leqslant\lambda_+, \quad (3.14)$$

где $\lambda_\pm$ — константы.

1. Систему (3.12), (3.13) можно линеаризовать с помощью леммы Радона (теорема 2.1). Действительно, здесь

$$W = \begin{pmatrix} \mathcal{D} \\ \eta \end{pmatrix}, \quad M_{11} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}, \quad M_{12} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix},$$
$$M_{21} = \begin{pmatrix} G \\ 0 \end{pmatrix}, \quad M_{22} = \begin{pmatrix} 2UF & 2V - B_0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$G = -2U^2 - 2V^2 - 2B_0 V - B_0^2 - \lambda.$$

Таким образом, мы получаем линейную задачу Коши

$$\begin{pmatrix} \dot q \\ \dot p_1 \\ \dot p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ G & 2U & 2V - B_0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} q \\ p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ \mathcal{D}_0 \\ \eta_0 \end{pmatrix}, \tag{3.15}$$

с периодическими коэффициентами, известными из (3.1)–(3.3). Из системы (3.15) следует

$$\ddot q - 2U\dot q - Gq = (2V - B_0)\eta_0, \quad q(0) = 1,\ \dot q(0) = \mathcal{D}_0, \tag{3.16}$$

что можно переписать в виде

$$\ddot y + (3V^2 + VB_0 + 2B_0^2 - S(V) + 2\lambda(V))y = (2V - B_0)\eta_0 e^{-\int_0^t U(\tau)d\tau}, \tag{3.17}$$
$$y(0) = 1, \quad \dot y(0) = \mathcal{D}_0 - U_0, \quad y = qe^{-\int_0^t U(\tau)d\tau},$$

и решение задачи (3.12), (3.13) разрушается тогда и только тогда, когда решение задачи (3.16) (и (3.17)) обращается в нуль.

Как следует из результатов раздела 2, при $S = S_0 = \mathrm{const}$ если происходит разрушение, то оно происходит на первом периоде колебаний, однако в случае общего вида $S(r)$ решение (3.17) может быть резонансным, и амплитуда колебаний может расти.

2. Найдем достаточное условие сохранения гладкости в первом периоде колебаний $T \leqslant \dfrac{2\pi}{\sqrt{4S_+ + B_0^2}}$.

Предположим, что $V_0 > \dfrac{B_0}{2}$, $\eta > 0$, и получим двусторонние оценки:

$$Y \leqslant Y_{1+} = -\frac{3}{4}\mathcal{D}^2 + \eta^2 + K_{11}, \qquad K_{11} = 2(U_+^2 + V_+^2 - B_0 V_-) - \lambda_-,$$
$$Y \leqslant Y_{2+} = -\frac{3}{4}\mathcal{D}^2 + a_+\eta + K_{12}, \qquad K_{12} = 3U_+^2 - 2V_+^2 - 2B_0V_+ - B_0^2 - \lambda_+, \quad a = 2V_- - B_0,$$
$$Y \geqslant Y_- = -\frac{5}{4}\mathcal{D}^2 + a_-\eta + K_2, \qquad K_2 = -6U_+^2 - 2V_+^2 - 2B_0V_- - B_0^2 - \lambda_+, \quad a = 2V_- - B_0.$$

Таким образом, после замены $\mathcal{Z} = \dfrac{1}{2}\mathcal{D}^2$ будем иметь

$$\frac{d\mathcal{Z}}{d\eta} = \frac{Y}{-\eta} = \Phi(\mathcal{Z}, \eta, U, V, \lambda). \tag{3.18}$$

Аналогично разделу 3.1 обозначим $\Phi_\pm(\mathcal{Z}, \eta) = \dfrac{Y_\mp}{-\eta}$, следовательно,

$$\Phi_-(\mathcal{Z}, \eta) \leqslant \Phi(\mathcal{Z}, \eta, t) \leqslant \Phi_+(\mathcal{Z}, \eta).$$

Таким образом, из теоремы Чаплыгина следует, что решение $\mathcal{Z}(V)$ задачи Коши для (3.18) с начальными условиями $\mathcal{Z}(\eta_0) = \mathcal{Z}_0$ при $\eta > \eta_0$ удовлетворяет неравенству

$$\mathcal{Z}_-(\eta) \leqslant \mathcal{Z}(\eta, t) \leqslant \mathcal{Z}_+(\eta),$$

а при $\eta < \eta_0$ — обратному неравенству

$$\mathcal{Z}_+(\eta) \leqslant \mathcal{Z}(\eta, t) \leqslant \mathcal{Z}_-(\eta),$$

где $\mathcal{Z}_\pm(\eta)$ — решения задач $\dfrac{d\mathcal{Z}_\pm}{d\eta} = \Phi_\pm(\mathcal{Z},\eta)$, $\mathcal{Z}_\pm(\eta_0) = \mathcal{Z}_0$.

При $\eta_0 > 0$, $\mathcal{D}_0 = \sqrt{2\mathcal{Z}_0} \geqslant 0$ получим, что $\mathcal{Z}$ уменьшается, поэтому $\eta < \eta_0$ и $\mathcal{Z}_+(V) \leqslant \mathcal{Z}(\eta,t) \leqslant \mathcal{Z}_-(V)$ вплоть до точки $0 < \eta_{00} \leqslant \eta_+$, где η_+ — меньшее из решений $\mathcal{Z}_+(\eta) = 0$. Тогда в качестве новых исходных данных возьмем точку $(\eta_{00}, 0)$, в полуплоскости $\mathcal{D} < 0$ значение η возрастает и $\mathcal{Z}(\eta,t) \leqslant \mathcal{Z}_+(\eta)$, $\mathcal{D}_0 = -\sqrt{2\mathcal{Z}_0} \leqslant 0$.

Легко видеть, что кривая $\mathcal{D}_+ = \mathcal{D}_+(\eta)$, ограничивающая проекцию фазовой кривой системы (3.12), (3.13) на плоскость $(\mathcal{D},\eta)$ сверху при $\mathcal{D} > 0$ (с оценкой через Y_{1+}), имеет вид

$$\mathcal{D}_+^2 + 4\eta^2 - C_+\eta^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}K_1,$$

где константа C_+ определяется начальной точкой ($\mathcal{D}_0 > 0$, $\eta_0 > 0$), и она ограничена при любом C_+ (старшая степень η равна 2). Это означает, что дивергенция $\mathcal{D}$ не может разрушаться в верхней полуплоскости. С другой стороны, кривая $\mathcal{D}_- = \mathcal{D}_-(\eta)$, ограничивающая проекцию фазовой кривой системы (3.12), (3.13) на плоскость $(\mathcal{D},\eta)$ снизу при $\mathcal{D} < 0$, определяется выражением

$$\mathcal{D}_-^2 - \frac{4}{3}a_-\eta - C_-\eta^{\frac{5}{2}} = \frac{4}{5}K_2,$$

где константа C_- определяется начальной точкой ($\mathcal{D}_0 \leqslant 0$, $\eta_0 > 0$), и она ограничена только в том случае, если $C_- < 0$ (старшая степень η равна $\dfrac{5}{2}$.) Таким образом, начальные данные, соответствующие условию $C_- < 0$, выражаются в виде

$$\mathcal{D}_0^2 - \frac{4}{3}(2V_- - B_0)\eta_0 < -6U_+^2 - 2V_+^2 - 2B_0V_+ - B_0^2 - \lambda_+, \quad \mathcal{D}_0 < 0, \tag{3.19}$$

где величины U_+, $V_\pm$ даны в (3.10), лемма 3.1.

Случай $\xi < 0$ рассматривается аналогично.

Следующая теорема подводит итог нашим рассуждениям.

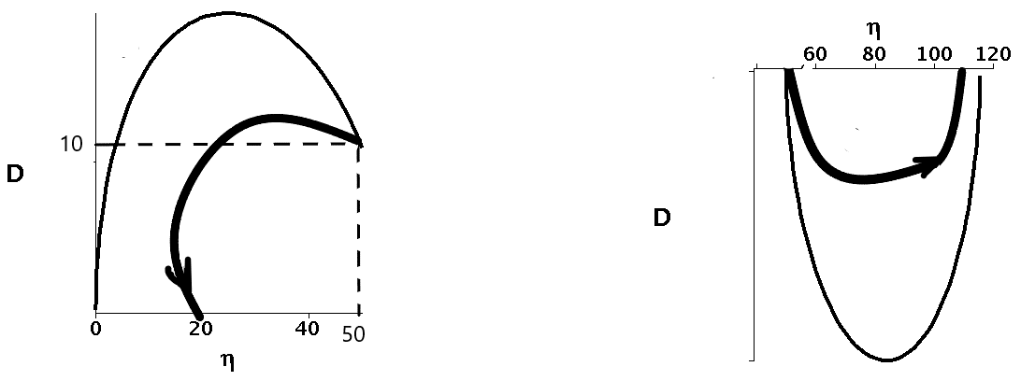

Рис. 2. Слева: графики для $\mathcal{D} = \sqrt{2\mathcal{Z}_-}(\eta)$, верхняя граница проекции фазовой траектории, $\mathcal{D} > 0$, начальная точка $\mathcal{D}_0 = 10$, $\eta_0 = 50$. Справа: графики для $\mathcal{D} = -\sqrt{2\mathcal{Z}_+}(\eta)$, нижняя граница проекции фазовой траектории, $\mathcal{D} < 0$, начальная точка $\mathcal{D}_0 = 0$, $\eta_0 = 50$; траектория (толстая линия) возвращается в верхнюю полуплоскость. Здесь $U_+ = 1$, $V_+ = 5$, $V_- = 1$, $B_0 = 1$, $\lambda_- = -1$, $\lambda_+ = 1$.

Fig. 2. Left: graphs for $\mathcal{D} = \sqrt{2\mathcal{Z}_-}(\eta)$, upper bound for the projection of the phase trajectory, $\mathcal{D} > 0$, the initial point is $\mathcal{D}_0 = 10$, $\eta_0 = 50$. Right: graphs for $\mathcal{D} = -\sqrt{2\mathcal{Z}_+}(\eta)$, lower bound for the projection of the phase trajectory, $\mathcal{D} < 0$, the initial point is $\mathcal{D}_0 = 0$, $\eta_0 = 50$; the trajectory (the thick line) returns to the upper half-plane. Here $U_+ = 1$, $V_+ = 5$, $V_- = 1$, $B_0 = 1$, $\lambda_- = -1$, $\lambda_+ = 1$.

Теорема 3.1. *Рассмотрим задачу Коши* (1.4), (1.5) *для осесимметричного класса решений* (1.11) *и предположим, что фиксированное поле* $\mathbf{E}_0$ *таково, что условия* (3.6) *и* (3.14) *справедливы для всех* $r_0 \in \overline{\mathbb{R}}_+$, *при этом* $U_0(r)$, $V_0(r)$, $\operatorname{div}\mathbf{V}_0 = \mathcal{D}_0(r)$, $\operatorname{rot}\mathbf{V}_0 = \xi_0(r) = \eta_0(r) + B_0$ *таковы, что условие* (3.19) *справедливо для всех* $r_0 \in \overline{\mathbb{R}}_+$. *Тогда время* T *существования классического решения задачи Коши можно оценить снизу*:

$$T \geqslant \frac{2\pi}{\sqrt{4S_+ + B_0^2}}. \tag{3.20}$$

На рис. 2 показаны оценки фазовых траекторий в верхней и нижней полуплоскостях по $\mathcal{D}$.

Замечание 3.2. При доказательстве теоремы 3.1 используются грубые и простые оценки $Y(\mathcal{D}, \eta, U, V, \lambda)$, поэтому достаточное условие сохранения гладкости далеко не точно. Отсутствие ограниченной кривой $\mathcal{Z}_+$ для конкретных начальных данных в нижней полуплоскости $\mathcal{D} < 0$ не означает, что фазовая траектория уходит в бесконечность. Нижняя оценка (3.20) также очень груба, и мы можем продолжить подсчет количества оборотов, следуя алгоритму [13].

Замечание 3.3. Обратите внимание, что большая начальная завихренность помогает реализовать (3.19) с фиксированными всеми остальными параметрами.

Замечание 3.4. Очень интересная задача, которую, кажется, можно решить только численно, — это вычисление множителей Флоке для линейной системы (3.15) (см. [16]) для различных ландшафтов $\mathbf{E}_0$. Это помогло бы ответить на вопрос, можем ли мы контролировать гладкость решения и устойчивость равновесий с помощью $\mathbf{E}_0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Розанова О. С., Успенская О. В.* О свойствах решения задачи Коши для двумерного уравнения переноса на вращающейся плоскости// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2021. — № 1. — С. 3–10.
2. *Alexandrov A. F., Bogdankevich L. S., Rukhadze A. A.* Principles of plasma electrodynamics. — Berlin—Heidelberg: Springer, 1984.
3. *Chizhonkov E. V.* Mathematical aspects of modelling oscillations and wake waves in plasma. — Boca Raton: CRC Press, 2019.
4. *Gorbunov L. M., Frolov A. A., Chizhonkov E. V., Andreev N. E.* Breaking of nonlinear cylindrical plasma oscillations// Plasma Phys. Rep. — 2010. — *36*, № 4. — С. 345–356.
5. *Dafermos C. M.* Hyperbolic conservation laws in continuum physics. — Berlin—Heidelberg: Springer, 2016.
6. *Davidson R. C.* Methods in nonlinear plasma theory. — New York: Acad. Press, 1972.
7. *Esarey E., Schroeder C. B., Leemans W. P.* Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators// Rev. Mod. Phys. — 2009. — *81*. — С. 1229–1285.
8. *Freiling G.* A survey of nonsymmetric Riccati equations// Linear Algebra Appl. — 2002. — *351-352*. — С. 243–270.
9. *Ginzburg V. L.* Propagation of electromagnetic waves in plasma. — New York: Pergamon, 1970.
10. *Liu H., E. Tadmor* Rotation prevents finite-time breakdown// Phys. D. Nonlinear Phenom. — 2004. — *188*. — С. 262–276.
11. *Reid W. T.* Riccati differential equations. — New York: Academic Press, 1972.
12. *Rozanova O. S.* On the behavior of multidimensional radially symmetric solutions of the repulsive Euler—Poisson equations// Phys. D: Nonlinear Phenom. — 2022. — *443*. — 133578.
13. *Rozanova O. S.* On the properties of multidimensional electrostatic oscillations of an electron plasma// Math. Meth. Appl. Sci. — 2023. — *46*. — С. 7557–7571.
14. *Rozanova O. S., Chizhonkov E. V.* On the conditions for the breaking of oscillations in a cold plasma// Z. Angew. Math. Phys. — 2021. — *72*. — 13.
15. *Rozanova O. S., Chizhonkov E. V.* The influence of an external magnetic field on cold plasma oscillations// Z. Angew. Math. Phys. — 2022. — *73*. — С. 249.
16. *Rozanova O., Turzynsky M.* On the properties of affine solutions of cold plasma equations// Commun. Math. Sci. — 2024. — *22*. — в печати.
17. *Sheppard C. J. R.* Cylindrical lenses — focusing and imaging: a review// Appl. Optics. — 2013. — *52*. — С. 538–545.

О. С. Розанова
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: rozanova@mech.math.msu.su

UDC 517.956
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-685-696
EDN: ZKHDVY

On plane oscillations of the cold plasma in a constant magnetic field

O. S. Rozanova

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

For citation: O. S. Rozanova, "On plane oscillations of the cold plasma in a constant magnetic field," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 4, 685–696. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-685-696

REFERENCES

1. O. S. Rozanova and O. V. Uspenskaya, "O svoystvakh resheniya zadachi Koshi dlya dvumernogo uravneniya perenosa na vrashchayushcheysya ploskosti" [On properties of solutions of the Cauchy problem for two-dimensional transport equations on a rotating plane] *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Moscow Univ. Math. Bull.], 2021, **76**, No. 1, 1–8 (in Russian).
2. A. F. Alexandrov, L. S. Bogdankevich, and A. A. Rukhadze, *Principles of Plasma Electrodynamics*, Springer, Berlin–Heidelberg, 1984.
3. E. V. Chizhonkov, *Mathematical Aspects of Modelling Oscillations and Wake Waves in Plasma*, CRC Press, Boca Raton, 2019.
4. L. M. Gorbunov, A. A. Frolov, E. V. Chizhonkov, and N. E. Andreev, "Breaking of nonlinear cylindrical plasma oscillations," *Plasma Phys. Rep.*, 2010, **36**, No. 4, 345–356.
5. C. M. Dafermos, *Hyperbolic Conservation Laws in Continuum Physics*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2016.
6. R. C. Davidson, *Methods in Nonlinear Plasma Theory*, Acad. Press, New York, 1972.
7. E. Esarey, C. B. Schroeder, and W. P. Leemans, "Physics of laser-driven plasma-based electron accelerators," *Rev. Mod. Phys.*, 2009, **81**, 1229–1285.
8. G. Freiling, "A survey of nonsymmetric Riccati equations," *Linear Algebra Appl.*, 2002, **351-352**, 243–270.
9. V. L. Ginzburg, *Propagation of Electromagnetic Waves in Plasma*, Pergamon, New York, 1970.
10. H. Liu and E. Tadmor, "Rotation prevents finite-time breakdown," *Phys. D. Nonlinear Phenom.*, 2004, **188**, 262–276.
11. W. T. Reid, *Riccati Differential Equations*, Academic Press, New York, 1972.
12. O. S. Rozanova, "On the behavior of multidimensional radially symmetric solutions of the repulsive Euler–Poisson equations," *Phys. D: Nonlinear Phenom.*, 2022, **443**, 133578.
13. O. S. Rozanova, "On the properties of multidimensional electrostatic oscillations of an electron plasma," *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2023, **46**, 7557–7571.
14. O. S. Rozanova and E. V. Chizhonkov, "On the conditions for the breaking of oscillations in a cold plasma," *Z. Angew. Math. Phys.*, 2021, **72**, 13.
15. O. S. Rozanova and E. V. Chizhonkov, "The influence of an external magnetic field on cold plasma oscillations," *Z. Angew. Math. Phys.*, 2022, **73**, 249.
16. O. Rozanova and M. Turzynsky, "On the properties of affine solutions of cold plasma equations," *Commun. Math. Sci.*, 2024, **22**, in press.
17. C. J. R. Sheppard, "Cylindrical lenses — focusing and imaging: a review," *Appl. Optics*, 2013, **52**, 538–545.

O. S. Rozanova
Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: rozanova@mech.math.msu.su

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 4 (2023). С. 697–711
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.95+517.929
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-697-711
EDN: ZCQCLC

КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С РАСТЯЖЕНИЕМ И ПОВОРОТОМ АРГУМЕНТОВ

Л. Е. Россовский[1], **А. А. Товсултанов**[2,3]

[1] *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*
[2] *Чеченский государственный университет имени А. А. Кадырова, Грозный, Россия*
[3] *Северо-Кавказский центр математических исследований ВНЦ РАН, Владикавказ, Россия*

Аннотация. Статья посвящена задаче Дирихле в плоской ограниченной области для линейного функционально-дифференциального уравнения второго порядка в дивергентной форме с растяжением, сжатием и поворотом аргумента старших производных искомой функции. Вопросы существования, единственности и гладкости обобщенного решения исследованы при всевозможных значениях коэффициентов и параметров преобразований в уравнении.

Ключевые слова: эллиптическое функционально-дифференциальное уравнение, краевая задача.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания (проекта № FSSF-2023-0016).

Для цитирования: *Л. Е. Россовский, А. А. Товсултанов.* Краевая задача для эллиптического функционально-дифференциального уравнения с растяжением и поворотом аргументов// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 4. С. 697–711. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-697-711`

1. Введение. Основные обозначения

В теории упругости [4, 19, 23], теории многомерных диффузионных процессов [12], а также в связи с нелокальными краевыми задачами типа А. В. Бицадзе, А. А. Самарского [2, 10, 11] возникает необходимость рассматривать эллиптические функционально-дифференциальные уравнения с преобразованиями аргументов старших производных, которые могут отображать некоторые точки границы внутрь области. Так, например, упругие модели конструкций, содержащих многослойные оболочки и пластины с гофрированным заполнителем, могут быть сведены к сильно эллиптическим системам дифференциально-разностных уравнений. В работах А. Л. Скубачевского была построена общая теория краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений: получены необходимые и достаточные условия выполнения неравенства типа Гординга, исследованы вопросы однозначной и фредгольмовой разрешимости в пространствах Соболева и весовых пространствах, а также гладкости обобщенных решений. Показано, что гладкость обобщенных решений может нарушаться в области даже при бесконечно дифференцируемой правой части и сохраняется лишь в некоторых подобластях. Был обнаружен эффект появления степенных особенностей у производных решений в некоторых точках как на границе, так и внутри области. Наиболее полно эти результаты представлены в [13, 22]. Кроме того, в [13] обсуждаются приложения эллиптических функционально-дифференциальных уравнений к лазерным системам с обратной связью, а также к известной гипотезе Т. Като о квадратном корне из оператора.

Краевые задачи для эллиптических уравнений, содержащих в старшей части сжатия и растяжения независимых переменных, рассматривались в работах [5, 20] (изотропные, т. е. одинаковые по всем координатам, сжатия или растяжения), а также в [6, 7] (ортотропные сжатия: например, сжатие по одной координате и растяжение по другой). При этом краевые задачи рассматривались в областях, содержащих начало координат — неподвижную точку преобразования сжатия. Это предположение не позволяло воспользоваться уже имеющейся теорией нелокальных задач, например, свести задачу к нелокальной краевой задаче для эллиптического уравнения, а также напрямую переносить методы, развитые для дифференциально-разностных уравнений. Кроме того, в указанной ситуации не работает известный принцип локализации, основанный на разбиении единицы и широко используемый в теории краевых задач для исследования гладкости решений, доказательства априорных оценок, «замораживания» переменных коэффициентов. Переход от уравнений с изотропными сжатиями к уравнениям с ортотропными сжатиями также потребовал применения существенно иной техники. У таких уравнений был обнаружен ряд новых свойств в зависимости от структуры орбит точек области под действием соответствующей группы преобразований.

Эллиптическое функционально-дифференциальное уравнение, содержащее комбинацию сжатия и сдвигов аргумента, было изучено в [8]. Уравнениям, содержащим комбинацию сжатий (растяжений) и поворотов аргумента в старших производных искомой функции, посвящены работы [9, 14]. В статье [14] рассматривалась краевая задача

$$\mu u + \operatorname{div}(T(P, R_\alpha)\nabla u) = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{1.1}$$

$$u|_{\partial\Omega} = 0, \tag{1.2}$$

где Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, $\mu \in \mathbb{C}$, $f \in L_2(\Omega)$, а $T(P, R_\alpha)$ — функциональный оператор с растяжениями (сжатиями) и поворотами. Он определяется следующим образом. Вводятся унитарные в $L_2(\mathbb{R}^2)$ оператор P, действующий по формуле

$$Pu(x) = p^{-1}u(p^{-1}x) = p^{-1}u(p^{-1}x_1, p^{-1}x_2)$$

при $p > 1$, и оператор R_α, определенный при $\alpha \in \mathbb{R}$ формулой

$$R_\alpha u(x) = u(x_\alpha) = u(x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha, x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha).$$

Если число α несоизмеримо с π, то полагаем $T(P, R_\alpha) = \sum a_{mk}P^m R_\alpha^k$, где суммирование производится по произвольному конечному набору целых индексов m и k (которые могут принимать значения обоих знаков) Если же α соизмеримо с π и n — наименьшее натуральное число такое, что $n\alpha$ кратно 2π, то полагаем

$$T(P, R_\alpha) = \sum a_{m0}P^m + \sum a_{m1}P^m R_\alpha + \ldots + \sum a_{m,n-1}P^m R_\alpha^{n-1},$$

где суммы берутся по произвольным конечным наборам целых индексов m. Коэффициенты a_{mk} в суммах — комплексные числа. Для корректного определения оператора $T(P, R_\alpha)$ функция, на которую действует оператор, считается продолженной нулем в $\mathbb{R}^2 \setminus \Omega$.

Обозначим $\tilde{a}_{mk} = a_{mk}\cos k\alpha$ и введем функцию

$$\tilde{t}(\lambda, w) = \sum \tilde{a}_{mk}\lambda^m w^k \quad (\lambda, w \in \mathbb{C})$$

в случае, если число α несоизмеримо с π, либо функции

$$\tilde{t}_k(\lambda) = \sum \tilde{a}_{m0}\lambda^m + \sum \tilde{a}_{m1}e^{i2\pi k/n}\lambda^m + \ldots + \sum \tilde{a}_{m,n-1}e^{i2\pi(n-1)k/n}\lambda^m$$

$$(\lambda \in \mathbb{C};\ k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

если α соизмеримо с π.

Был получен следующий результат: *для всякой ограниченной области* Ω, *содержащей начало координат, условие*

$$\operatorname{Re}\tilde{t}(\lambda, w) > 0 \quad (|\lambda| = |w| = 1) \quad (\alpha \text{ несоизмеримо с } \pi)$$

либо

$$\operatorname{Re}\tilde{t}_k(\lambda) > 0 \quad (|\lambda| = 1;\ k = 0, 1, \ldots, n-1) \quad (\alpha \text{ соизмеримо с } \pi)$$

является необходимым и достаточным для существования постоянных $c_1 > 0$, $c_2 \geqslant 0$ *таких, что при всех* $u \in C_0^\infty(\Omega)$ *выполнено неравенство*

$$\operatorname{Re}\,(T(P, R_\alpha)\nabla u, \nabla u)_{L_2^2(\Omega)} \geqslant c_1\|u\|^2_{H^1(\Omega)} - c_2\|u\|^2_{L_2(\Omega)}. \tag{1.3}$$

Неравенства, подобные (1.3), принято называть *неравенствами типа Гординга*, а соответствующие уравнения в этом случае *сильно эллиптическими.*

Пространство Соболева $H^s(\Omega)$ для натурального s состоит из всех (комплекснозначных) функций, принадлежащих $L_2(\Omega)$ вместе с обобщенными производными до порядка s включительно. Это гильбертово пространство со скалярным произведением

$$(u, v)_{H^s(\Omega)} = \sum_{|\alpha| \leqslant s} \int_\Omega D^\alpha u(x)\overline{D^\alpha v(x)}\,dx,$$

где $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ — мультииндекс,

$$|\alpha| = \alpha_1 + \ldots + \alpha_n, \quad D^\alpha = (-i\partial/\partial x_1)^{\alpha_1} \ldots (-i\partial/\partial x_n)^{\alpha_n}.$$

Через $\mathring{H}^s(\Omega)$ обозначается замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций в $H^s(\Omega)$. В $\mathring{H}^s(\Omega)$ можно ввести эквивалентное скалярное произведение по формуле

$$(u, v)'_{\mathring{H}^s(\Omega)} = \sum_{|\alpha| = s} \int_\Omega D^\alpha u(x)\overline{D^\alpha v(x)}\,dx.$$

В частности, при $s = 1$ и $n = 2$,

$$(u, v)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega \Big(u\bar{v} + \sum_{j=1}^2 u_{x_j}\bar{v}_{x_j}\Big)\,dx, \quad (u, v)_{\mathring{H}^1(\Omega)} = \int_\Omega \sum_{j=1}^2 u_{x_j}\bar{v}_{x_j}\,dx.$$

Обобщенным решением задачи (1.1), (1.2) называется функция $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$, удовлетворяющая при всех $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ интегральному тождеству

$$\mu(u, v)_{L_2(\Omega)} - (T(P, R_\alpha)\nabla u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Для сильно эллиптического уравнения (1.1) краевая задача (1.1), (1.2) фредгольмова, а ее спектр состоит из изолированных собственных значений конечной кратности и располагается внутри симметричного угла с вершиной в нуле, охватывающего положительную вещественную полуось, раствора меньше π. Доказательство этих фактов, опирающееся на неравенство (1.3), проводится стандартными методами функционального анализа (подобного сорта рассуждения можно найти, например, в [5, с. 78]). Иллюстрируя полученный результат на примере уравнения

$$-\sum_{j=1}^2 \Big(u_{x_j}(x) + ap^{-1}u_{x_j}(p^{-1}x) + bu_{x_j}(-(x_1 + \sqrt{3}x_2)/2, (\sqrt{3}x_1 - x_2)/2)\Big)_{x_j} = f(x) \quad (x \in \Omega),$$

или, коротко,

$$-\operatorname{div}((I + aP + bR_\alpha)\nabla u) = f(x) \quad (x \in \Omega),$$

в котором $\alpha = 2\pi/3$, а $b \in \mathbb{R}$, получаем существование и единственность обобщенного решения задачи Дирихле при условии $|a| - b/4 < 1$, если $b < 0$, и при условии $|a| + b/2 < 1$, если $b > 0$. Таким образом, условия однозначной разрешимости могут быть связаны не только с абсолютной величиной коэффициента в уравнении, но и с его сигнатурой.

Для уравнения

$$-\sum_{j=1}^2 (u_{x_j}(x) + ap^{-1}u_{x_j}(p^{-1}(x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha), p^{-1}(x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha))_{x_j} = f(x) \quad (x \in \Omega),$$

или, коротко,

$$-\mathrm{div}((I + aPR_\alpha)\nabla u) = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{1.4}$$

получаем следующее: каков бы ни был угол α, если $|a\cos\alpha| < 1$, то задача Дирихле имеет единственное обобщенное решение при всех $f \in L_2(\Omega)$. В частности, при $\alpha = \pi/2$ задача однозначно разрешима для любых $p > 1$ и $a \in \mathbb{C}$. То, что в данном случае условие на a и p пропадает, имеет элементарное объяснение: при формальном дифференцировании получаем

$$\sum_{j=1}^{2}(u_{x_j}(x) + ap^{-1}u_{x_j}(-x_2/p, x_1/p))_{x_j} = \Delta u(x).$$

Настоящая статья посвящена уравнению (1.4) и некоторым его модификациям. Эти уравнения будут рассмотрены более подробно и при всех значениях коэффициентов, не только в условиях сильной эллиптичности. Однако на область Ω будет наложено дополнительное условие геометрического характера. Отметим, что при отсутствии поворотов (есть только сжатия и растяжения аргументов) соответствующие результаты приведены в [5, гл. 1].

В классе функционально-дифференциальных уравнений с аффинными преобразованиями имеется прототип: уравнение пантографа $\dot{y} = ay(\lambda t) + by(t)$. Это уравнение и различные его обобщения в одномерном случае находят применение в самых разных областях: астрофизике [1], нелинейных колебаниях [18], биологии [15] и др. Они активно изучаются, начиная с 1970-х годов, см., например, [3, 16, 17].

2. Уравнение со сжатием и поворотом аргумента

Композицию PR_α, являющуюся унитарным оператором в $L_2(\mathbb{R}^2)$, будем обозначать P_α,

$$P_\alpha u(x) = p^{-1}u(p^{-1}x_\alpha) = p^{-1}u(p^{-1}(x_1\cos\alpha - x_2\sin\alpha), p^{-1}(x_1\sin\alpha + x_2\cos\alpha)).$$

Очевидно,

$$P_\alpha^* u(x) = P_\alpha^{-1}u(x) = pu(px_{-\alpha}).$$

Кроме того, для функций в $\mathbb{R}^2$ имеют место соотношения

$$\nabla P_\alpha u = p^{-1}P_\alpha \nabla_{-\alpha} u, \tag{2.1}$$

$$\mathrm{div}(P_\alpha \nabla u) = p\cos\alpha\,\Delta P_\alpha u = p^{-1}\cos\alpha\,P_\alpha \Delta u. \tag{2.2}$$

В формуле (2.1) используется краткое обозначение $\nabla_{-\alpha}u$ для операции поворота вектора градиента на угол $(-\alpha)$:

$$\nabla_{-\alpha}u = \begin{pmatrix} u_{x_1}\cos\alpha + u_{x_2}\sin\alpha \\ -u_{x_1}\sin\alpha + u_{x_2}\cos\alpha \end{pmatrix}.$$

Равенства (2.1), (2.2) можно понимать как для гладких функций, так и в смысле обобщенных функций. Они проверяются непосредственно. Формула (2.2), в частности, выражает тот факт, что оператор Лапласа инвариантен относительно ортогональных преобразований вектора независимых переменных. Аналогичные формулы справедливы с участием P_α^{-1} вместо P_α:

$$\nabla P_\alpha^{-1} u = pP_\alpha^{-1}\nabla_\alpha u, \tag{2.3}$$

$$\mathrm{div}(P_\alpha^{-1}\nabla u) = p^{-1}\cos\alpha\,\Delta P_\alpha^{-1}u = p\cos\alpha\,P_\alpha^{-1}\Delta u. \tag{2.4}$$

Лемма 2.1. *Обобщенное решение $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ однородной задачи Дирихле для уравнения*

$$-\mathrm{div}((I + aP_\alpha)\nabla u) = f(x) \quad (x \in \Omega) \tag{2.5}$$

— то же, что обобщенное решение однородной задачи Дирихле для уравнения

$$-\Delta(I + ap\cos\alpha\,P_\alpha)u = f(x) \quad (x \in \Omega).$$

Доказательство. Действительно, при $u \in C_0^\infty(\Omega)$ и $v \in C_0^\infty(\Omega)$, интегрируя по частям и используя формулу (2.4), будем иметь

$$((I + aP_\alpha)\nabla u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (\nabla u, (I + \overline{a}P_\alpha^{-1})\nabla v)_{L_2^2(\Omega)} =$$

$$= -(u, \mathrm{div}((I + \overline{a}P_\alpha^{-1})\nabla v))_{L_2(\Omega)} = -(u, (I + \overline{a}p\cos\alpha\,P_\alpha^{-1})\Delta v))_{L_2(\Omega)}.$$

В силу плотности $C_0^\infty(\Omega)$ в $H^1(\Omega)$ это равенство распространяется, очевидно, на все функции $\in \mathring{H}^1(\Omega)$. С другой стороны,

$$(\nabla(I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = -((I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)u, \Delta v))_{L_2(\Omega)} = -(u, (I + \overline{a}p\cos\alpha\, P_\alpha^{-1})\Delta v))_{L_2(\Omega)}$$

при всех $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ и $v \in C_0^\infty(\Omega)$. Остается полученное для $v \in C_0^\infty(\Omega)$ равенство

$$((I + aP_\alpha)\nabla u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (\nabla(I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)}$$

продолжить на все функции $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$. $\square$

Спектр оператора $P_\alpha : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$, так же, как и оператора P, совпадает со всей единичной окружностью [5, с. 17]. При $|\lambda| > 1$ для его резольвенты справедливо представление

$$(\lambda I - P_\alpha)^{-1} = \lambda^{-1}(I - \lambda^{-1}P_\alpha)^{-1} = \lambda^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-k}P_\alpha^k = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-(k+1)}P_\alpha^k,$$

поскольку $\|\lambda^{-1}P_\alpha\| < 1$. Таким образом,

$$(\lambda I - P_\alpha)^{-1}u(x) = \sum_{k=0}^{\infty}\lambda^{-(k+1)}p^{-k}u(p^{-k}x_{k\alpha}), \text{ если } |\lambda| > 1. \tag{2.6}$$

При $|\lambda| < 1$, наоборот, имеем

$$(\lambda I - P_\alpha)^{-1} = -P_\alpha^{-1}(I - \lambda P_\alpha^{-1})^{-1} = -P_\alpha^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda^k P_\alpha^{-k} = -\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}P_\alpha^{-k},$$

поскольку $\|\lambda P_\alpha^{-1}\| < 1$. Получаем

$$(\lambda I - P_\alpha)^{-1}u(x) = -\sum_{k=1}^{\infty}\lambda^{k-1}p^k u(p^k x_{-k\alpha}), \text{ если } |\lambda| < 1. \tag{2.7}$$

На основе формул (2.6), (2.7) может быть получен следующий результат, связанный с действием оператора $\lambda I - P_\alpha$ в пространствах Соболева $H^s(\Omega)$.

Лемма 2.2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область, инвариантная относительно преобразования координат $x \mapsto p^{-1}x_\alpha$, а именно,*

$$\Omega \subset p\Omega_{-\alpha} = \{px_{-\alpha} \in \mathbb{R}^2 : x \in \Omega\}. \tag{2.8}$$

Тогда:

а) *если $|\lambda| > 1$, то оператор $\lambda I - P_\alpha : H^s(\Omega) \to H^s(\Omega)$ является изоморфизмом (линейным гомеоморфизмом) для всех $s = 0, 1, \ldots$;*

б) *если $|\lambda| < p^{-s}$ для некоторого $s = 0, 1, \ldots$, то изоморфизмом будет оператор $\lambda I - P_\alpha : \mathring{H}^s(\Omega) \to \mathring{H}^s(p\Omega_{-\alpha})$.*

Доказательство.

а) Очевидно, оператор $\lambda I - P_\alpha : H^s(\mathbb{R}^2) \to H^s(\mathbb{R}^2)$ ограничен для любого $s = 0, 1, \ldots$. Рассмотрим ограниченный обратный оператор $(\lambda I - P_\alpha)^{-1} : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$, действующий на функции $u \in L_2(\mathbb{R}^2)$ по формуле (2.6). При $u \in H^1(\mathbb{R}^2)$ первые производные общего члена ряда (2.6) имеют вид $\lambda^{-(k+1)}\nabla P_\alpha^k u = \lambda^{-(k+1)}p^{-k}P_\alpha^k\nabla_{-k\alpha}u$. Получаем

$$\left\||\lambda^{-(k+1)}\nabla P_\alpha^k u|\right\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} = |\lambda|^{-(k+1)}p^{-k}\left\||P_\alpha^k\nabla u|\right\|_{L_2(\mathbb{R}^2)} = |\lambda|^{-(k+1)}p^{-k}\,\||\nabla u|\|_{L_2(\mathbb{R}^2)},$$

откуда следует, что оператор в (2.6) является ограниченным и в $H^1(\mathbb{R}^2)$. Аналогично обстоит дело с производными высших порядков: при каждом следующем дифференцировании члена ряда (2.6) возникает улучшающий сходимость ряда множитель p^{-k}. Итак, $\lambda I - P_\alpha$ непрерывно и взаимно однозначно отображает пространство $H^s(\mathbb{R}^2)$ на себя для любого $s = 0, 1, \ldots$ при $|\lambda| > 1$. Далее, для $u \in H^s(\mathbb{R}^2)$ положим $v = (\lambda I - P_\alpha)u \in H^s(\mathbb{R}^2)$. Благодаря условию (2.8) сужение образа $v|_\Omega$ однозначно определяется сужением $u|_\Omega$, так что $\lambda I - P_\alpha$ корректно определен и как ограниченный линейный оператор в $H^s(\Omega)$ для таких областей Ω. При этом формула (2.6), построенная лишь на неотрицательных степенях оператора P_α, показывает, что сужение прообраза $u|_\Omega$ также однозначно определяется сужением $v|_\Omega$. Тем самым показано, что ограниченный оператор в (2.6) является обратным к оператору $\lambda I - P_\alpha : H^s(\Omega) \to H^s(\Omega)$.

б) Условие $|\lambda| < p^{-s}$, в свою очередь, обеспечивает возможность s-кратного почленного дифференцирования ряда в формуле (2.7). Для таких λ оператор $\lambda I - P_\alpha$ также непрерывно и взаимно однозначно отображает пространство $H^s(\mathbb{R}^2)$ на себя. Далее, если функция $u \in \mathring{H}^s(\Omega)$ продолжена нулем в $\mathbb{R}^2$, то она принадлежит $H^s(\mathbb{R}^2)$, ее образ $v = (\lambda I - P_\alpha)u$ из $H^s(\mathbb{R}^2)$ равен нулю вне $p\Omega_{-\alpha}$, а сужение v на $p\Omega_{-\alpha}$ принадлежит $\mathring{H}^s(p\Omega_{-\alpha})$ в силу условия (2.8). Наоборот, если v — продолженная нулем в $\mathbb{R}^2$ функция из $\mathring{H}^s(p\Omega_{-\alpha})$, то, как показывает формула (2.7), ее прообраз u из $H^s(\mathbb{R}^2)$ равен нулю вне Ω (суммирование в (2.7) начинается с $k = 1$) и сужение u на Ω принадлежит $\mathring{H}^s(\Omega)$. Лемма доказана. $\square$

При $|\lambda| = 1$, как показывает следующее утверждение, свойства оператора $\lambda I - P_\alpha$, действующего на функции в ограниченной области, близки в некотором смысле к ситуации, описанной в пункте а) леммы 2.2 (случай $|\lambda| > 1$).

Лемма 2.3. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область, удовлетворяющая условию* (2.8), $|\lambda| = 1$, $u \in L_2(\Omega)$ *и* $v = (\lambda I - P_\alpha)u$. *Тогда для функции $u(x)$ в Ω справедливо представление*

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)} p^{-k} v(p^{-k} x_{k\alpha}) \quad (x \in \Omega), \tag{2.9}$$

где ряд сходится в $L_2(\Omega)$. При этом, если $v \in H^s(\Omega)$, то и $u \in H^s(\Omega)$.

Доказательство. Запишем частичную сумму ряда (2.9), подставляя вместо $v(x)$ выражение $\lambda u(x) - p^{-1}u(p^{-1}x_\alpha)$:

$$\lambda^{-1}(\lambda u(x) - p^{-1}u(p^{-1}x_\alpha)) + \lambda^{-2}p^{-1}(\lambda u(p^{-1}x_\alpha) - p^{-1}u(p^{-2}x_{2\alpha})) + \ldots$$
$$\ldots + \lambda^{-M}p^{-M+1}(\lambda u(p^{-M+1}x_{(M-1)\alpha}) - p^{-1}u(p^{-M}x_{M\alpha})) = u(x) - (p\lambda)^{-M}u(p^{-M}x_{M\alpha}).$$

Оценим второе слагаемое:

$$\|\lambda^{-M}P_\alpha^M u\|^2_{L_2(\Omega)} = p^{-2M}\int\limits_\Omega |u(p^{-M}x_{M\alpha})|^2\,dx = \int\limits_{p^{-M}\Omega_{M\alpha}} |u(y)|^2\,dy \to 0, \quad M \to \infty,$$

в силу абсолютной непрерывности интеграла Лебега и очевидного соотношения $\operatorname{mes}(p^{-M}\Omega_{M\alpha}) = p^{-2M}\operatorname{mes}(\Omega)$. Второе утверждение леммы получается почленным дифференцированием ряда (2.9). $\square$

Нам понадобится также векторный вариант части утверждений леммы 2.3 и пункта а) леммы 2.2.

Лемма 2.4. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область, удовлетворяющая условию* (2.8). *Тогда*:

a) *если $|\lambda| > 1$, то оператор $\mathbf{u} \mapsto \lambda\mathbf{u} - P_\alpha\mathbf{u}_{-\alpha}$ является изоморфизмом пространства вектор-функций $L_2^2(\Omega)$;*

b) *если $|\lambda| = 1$, $\mathbf{u} \in L_2^2(\Omega)$ и $\mathbf{v} = \lambda\mathbf{u} - P_\alpha\mathbf{u}_{-\alpha} \in L_2^2(\Omega)$, то $\mathbf{u}$ представляется сходящимся в $L_2^2(\Omega)$ рядом*

$$\mathbf{u}(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)} P_\alpha^k \mathbf{v}_{-k\alpha}(x) \quad (x \in \Omega).$$

Доказательство. Достаточно заметить, что и в этом случае при $|\lambda| > 1$ оператор $\mathbf{u} \mapsto \mathbf{v} := \lambda\mathbf{u} - P_\alpha\mathbf{u}_{-\alpha}$ имеет ограниченный обратный в $L_2^2(\mathbb{R}^2)$, действующий по формуле

$$\mathbf{u} = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{-(k+1)} P_\alpha^k \mathbf{v}_{-k\alpha}$$

($\|P_\alpha\mathbf{u}_{-\alpha}\|_{L_2^2(\mathbb{R}^2)} = \|\mathbf{u}\|_{L_2^2(\mathbb{R}^2)}$). Переход от $\mathbb{R}^2$ к области Ω, а также к значениям $|\lambda| = 1$ вполне аналогичен изложенному при доказательстве лемм 2.2 и 2.3. $\square$

Приведенное ниже утверждение уточняет полученный в [14] для уравнения (1.1) результат и, кроме того, содержит алгоритм решения краевой задачи. Формально, решение сводится к тому, что в уравнении (2.5) следует «продифференцировать» функциональный оператор $I + aP_\alpha$, а затем применить к обеим частям ограниченный оператор $(I + ap^{-1}\cos\alpha P_\alpha)^{-1}$. Однако, имея дело с обобщенным решением, соответствующие выкладки приходится проводить в интегральном тождестве.

Предложение 2.1. *Пусть Ω — ограниченная область, удовлетворяющая условию* (2.8) *и* $0 \neq |a\cos\alpha| \leqslant 1$. *Тогда задача Дирихле для уравнения* (2.5) *имеет единственное обобщенное решение $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ при любой функции $f \in L_2(\Omega)$. Это решение является обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона*

$$-\Delta u(x) = (I + ap^{-1}\cos\alpha P_\alpha)^{-1} f(x) \quad (x \in \Omega), \qquad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Доказательство. В силу леммы (2.1) обобщенное решение $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ задачи Дирихле для уравнения (2.5) определяется из интегрального тождества

$$(\nabla(I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \mathring{H}^1(\Omega)). \tag{2.10}$$

Обозначим $\omega = (I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)u$, тогда $\nabla\omega = \nabla u + a\cos\alpha P_\alpha \nabla_{-\alpha} u$. По лемме 2.4 с учетом неравенства $0 \neq |a\cos\alpha| \leqslant 1$ будем иметь

$$\nabla u = \sum_{k=0}^{\infty} (-a\cos\alpha)^k P_\alpha^k \nabla_{-k\alpha}\, \omega. \tag{2.11}$$

Вместе с каждой функцией $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ подставим в интегральное тождество (2.10) функцию $P_\alpha^{-k} v$ $(k = 1, 2, \ldots)$: в силу условия (2.8) последняя также принадлежит $\mathring{H}^1(\Omega)$. В соответствии с (2.3) получим

$$(\nabla\omega, p^k P_\alpha^{-k} \nabla_{k\alpha} v)_{L_2^2(\Omega)} = (f, P_\alpha^{-k} v)_{L_2(\Omega)},$$

или, перенося вращение вектора градиента и функциональный оператор P_α^{-k} с ∇v на $\nabla\omega$ (в виде сопряженных преобразований),

$$(P_\alpha^k \nabla_{-k\alpha}\, \omega, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = p^{-k}(P_\alpha^k f, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Умножая полученные равенства на $(-a\cos\alpha)^k$, суммируя по всем индексам $k = 0, 1, \ldots$ и принимая во внимание (2.11), приходим к тождеству

$$(\nabla u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (g, v)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \mathring{H}^1(\Omega)), \tag{2.12}$$

определяющему обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона $-\Delta u = g$ в области Ω с функцией

$$g = \sum_{k=0}^{\infty} (-ap^{-1}\cos\alpha)^k P_\alpha^k f = (I + ap^{-1}\cos\alpha P_\alpha)^{-1} f \in L_2(\Omega).$$

В обратную сторону при помощи подобных выкладок тождество (2.10) выводится из тождества (2.12). Утверждение теоремы следует теперь из существования и единственности обобщенного решения задачи Дирихле для уравнения Пуассона с правой частью из $L_2(\Omega)$. $\square$

Замечание 2.1. В предложении 2.1 неявно содержится и утверждение о гладкости обобщенного решения u, поскольку исходная задача сведена к задаче Дирихле для уравнения Пуассона. В условиях предложения 2.1 функциональный оператор $(I + ap^{-1}\cos\alpha P_\alpha)^{-1}$ ограничен по лемме 2.2 не только в $L_2(\Omega)$, но и во всей шкале пространств Соболева $H^s(\Omega)$ $(s \geqslant 0)$, так что для гладкости u в Ω остается наложить соответствующие требования на $\partial\Omega$. Так, хорошо известно, что если $g \in H^s(\Omega)$ и $\partial\Omega \in C^{s+2}$, то $u \in H^{s+2}(\Omega)$ и выполняется оценка

$$\|u\|_{H^{s+2}(\Omega)} \leqslant c_1 \|g\|_{H^s(\Omega)} \leqslant c_2 \|f\|_{H^s(\Omega)}.$$

Стоит отметить также, что при $|a\cos\alpha| = 1$ уравнение (2.5) уже не является сильно эллиптическим. Тем не менее, как показывает предложение 2.1, и в этом случае краевая задача однозначно разрешима. Существенным дополнением к предложению 2.1 является результат ниже. Оказывается, при $|a\cos\alpha| > 1$ краевая задача перестает быть корректной и становится «сильно» недоопределенной.

Предложение 2.2. *Пусть Ω — ограниченная область, удовлетворяющая усиленному условию инвариантности*

$$\overline{\Omega} \subset p\Omega_{-\alpha} \tag{2.13}$$

и $|a\cos\alpha| > 1$. *Тогда задача Дирихле для уравнения* (2.5) *имеет обобщенные решения для любой функции $f \in L_2(\Omega)$, причем при $f = 0$ существует бесконечно много линейно независимых обобщенных решений соответствующей однородной задачи.*

Доказательство. С учетом леммы 2.1 речь идет об обобщенных решениях задачи Дирихле для уравнения

$$-\Delta(I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)u = f(x) \quad (x \in \Omega).$$

Поскольку в условиях теоремы $|ap\cos\alpha|^{-1} < p^{-1}$, оператор

$$I + ap\cos\alpha\, P_\alpha = ap\cos\alpha\,((ap\cos\alpha)^{-1}I + P_\alpha)$$

в силу пункта б) леммы 2.2 непрерывно и взаимно однозначно отображает пространство $\mathring{H}^1(\Omega)$ на все пространство $\mathring{H}^1(p\Omega_{-\alpha})$.

Построим теперь функцию ω в $p\Omega_{-\alpha} \supset \overline{\Omega}$ следующим образом. Пусть $\omega_1 \in \mathring{H}^1(\Omega)$ — решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона $-\Delta\omega_1 = f$ в Ω, а ω_2 — произвольная функция из $\mathring{H}^1(p\Omega_{-\alpha} \setminus \overline{\Omega})$. Положим

$$\omega(x) = \begin{cases} \omega_1(x), & x \in \Omega, \\ \omega_2(x), & x \in p\Omega_{-\alpha} \setminus \overline{\Omega}. \end{cases}$$

Очевидно, что $w \in \mathring{H}^1(p\Omega_{-\alpha})$. Проверим, что лежащая в $\mathring{H}^1(\Omega)$ функция $u = (I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)^{-1}\omega$ есть обобщенное решение рассматриваемой задачи. Действительно, для любой функции $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ справедлива цепочка

$$(\nabla(I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (\nabla\omega, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (\nabla\omega_1, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Предпоследнее равенство следует из того, что на Ω функция ω совпадает с ω_1. Мы показали, что для всякой функции f существует как минимум целое семейство обобщенных решений рассматриваемой задачи, «параметризованное» произвольной функцией из $\mathring{H}^1(p\Omega_{-\alpha} \setminus \overline{\Omega})$. $\square$

Замечание 2.2. В отличие от ситуации, описанной в предложении 2.1, построенные в предложении 2.2 решения не обязаны быть гладкими. Действительно, если посмотреть в этом случае на вид обратного оператора

$$(I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}(ap\cos\alpha)^{-k}P_\alpha^{-k},$$

то получается, что в части $\Omega \setminus p^{-1}\overline{\Omega}_\alpha$ области Ω построенное обобщенное решение $u = (I + ap\cos\alpha\, P_\alpha)^{-1}\omega$ совпадает с функцией $(ap\cos\alpha)^{-1}\omega_2(px_{-\alpha})$. Таким образом, если $\omega_2 \notin H^2(p\Omega_{-\alpha} \setminus \overline{\Omega})$ (локально), то и сужение u на $\Omega \setminus p^{-1}\overline{\Omega}_\alpha$ не принадлежит $H^2(\Omega \setminus p^{-1}\overline{\Omega}_\alpha)$ (локально). То же самое относится к сужению u на $p^{-1}\overline{\Omega}_\alpha \setminus p^{-2}\overline{\Omega}_{2\alpha}$ и т. д.

Такое «щепетильное» отношение к вопросу о перестановке операции дивергенции и функционального оператора в уравнении (2.5) обосновано. Так, предположим, что $|a\cos\alpha| \leqslant p$, но нас интересуют только гладкие решения краевой задачи, $u \in \mathring{H}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$. Такие решения удовлетворяют уравнению (2.5) почти всюду, и его теперь можно переписать в виде

$$-(I + ap^{-1}\cos\alpha P_\alpha)\Delta u = f(x) \quad (x \in \Omega).$$

В силу неравенства на коэффициенты по-прежнему существует ограниченный обратный оператор $(I + ap^{-1}\cos\alpha P_\alpha)^{-1} : L_2(\Omega) \to L_2(\Omega)$, и мы приходим к эквивалентному уравнению $-\Delta u = (I + ap^{-1}\cos\alpha P_\alpha)^{-1}f$, для которого задача Дирихле имеет единственное решение $u \in$

$\mathring{H}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$ и $\|u\|_{H^2(\Omega)} \leqslant c\|f\|_{L_2(\Omega)}$ (считаем, что граница области обладает нужной гладкостью). Получается, что при $1 < |a\cos\alpha| \leqslant p$ одновременно с бесконечномерным многообразием негладких обобщенных решений существует единственное гладкое решение краевой задачи для уравнения 2.5, непрерывно зависящее от правой части f.

3. Уравнение с растяжением, сжатием и поворотом аргумента

Рассмотрим теперь аналогичную задачу Дирихле для уравнения

$$-\mathrm{div}((I + bP_\alpha^{-1})\nabla u) = f(x) \quad (x \in \Omega), \tag{3.1}$$

$b \in \mathbb{C}$, с оператором P_α^{-1} вместо оператора P_α. Необходимое и достаточное условие сильной эллиптичности уравнения (3.1) выглядит следующим образом: $|b\cos\alpha| < 1$. Эквивалентной (с точки зрения обобщенного решения) записью уравнения (3.1) будет

$$-\Delta(I + bp^{-1}\cos\alpha P_\alpha^{-1})u = f(x) \quad (x \in \Omega)$$

(проверяется аналогично лемме 2.1). Здесь ситуация с разрешимостью в определенном смысле обратная по отношению к уравнению (2.5): обобщенное решение всегда единственно, но при $|b\cos\alpha| \geqslant 1$ задача становится «сильно» переопределенной.

Предложение 3.1. *Пусть Ω — ограниченная область, удовлетворяющая условию* (2.13). *Обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения* (3.1) *единственно, при этом*

а) *если $0 < |b\cos\alpha| < 1$, то всякое обобщенное решение имеет вид*

$$u(x) = \sum_{k=0}^{\infty} (-b\cos\alpha)^k \omega(p^k x_{-\alpha}), \tag{3.2}$$

где w есть решение задачи Дирихле для уравнения $-\Delta\omega(x) = f(x)$ в Ω;

б) *если $|b\cos\alpha| \geqslant 1$, то задача разрешима тогда и только тогда, когда функция f ортогональна бесконечномерному подпространству в $L_2(\Omega)$.*

Отметим, что при использовании формулы (3.2) функцию ω следует считать продолженной нулем вне Ω.

Доказательство.

а) Рассмотрим оператор

$$I + bp^{-1}\cos\alpha\, P_\alpha^{-1} = P_\alpha^{-1}(bp^{-1}\cos\alpha\, I + P_\alpha).$$

По лемме 2.2, пункт б), оператор $bp^{-1}\cos\alpha I + P_\alpha$ осуществляет изоморфизм пространства $\mathring{H}^1(\Omega)$ на пространство $\mathring{H}^1(p\Omega_{-\alpha})$. Но в таком случае, очевидно, сам оператор $I + bp^{-1}\cos\alpha P_\alpha^{-1}$ является изоморфизмом пространства $\mathring{H}^1(\Omega)$, а обратный имеет вид

$$(I + bp^{-1}\cos\alpha P_\alpha^{-1})^{-1} = (bp^{-1}\cos\alpha I + P_\alpha)^{-1}P_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} (-bp^{-1}\cos\alpha)^k P_\alpha^{-k},$$

что соответствует формуле (3.2). Итак, замена $(I + bp^{-1}\cos\alpha P_\alpha^{-1})u = \omega$ сводит исходную задачу к эквивалентной задаче Дирихле для уравнения Пуассона $-\Delta\omega(x) = f(x)$ в Ω.

б) В этой ситуации замена $P_\alpha^{-1}u = \omega$ сводит вопрос нахождения обобщенного решения $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ задачи Дирихле для уравнения (3.1) к определению функции $\omega \in \mathring{H}^1(p^{-1}\Omega_\alpha)$ из интегрального тождества

$$(\nabla(I + p(b\cos\alpha)^{-1}P_\alpha)\omega, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = p(b\cos\alpha)^{-1}(f, v)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \mathring{H}^1(\Omega)),$$

которое, как видно из доказательства предложения 2.1, равносильно тождеству

$$(\nabla\omega, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (g, v)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \mathring{H}^1(\Omega))$$

с новой функцией $g = p^2(pb\cos\alpha\, I + P_\alpha)^{-1}f \in L_2(\Omega)$. Здесь мы учли, что $|b\cos\alpha|^{-1} \leqslant 1$. Стоит подчеркнуть, что функция ω, являющаяся обобщенным решением задачи Дирихле для уравнения Пуассона $-\Delta\omega = g$ в Ω, принадлежит пространству $\mathring{H}^1(p^{-1}\Omega_\alpha)$ и тождественно равна нулю вне $p^{-1}\Omega_\alpha$. Тогда, очевидно, и функция g должна обращаться в ноль в $\Omega\setminus p^{-1}\overline{\Omega}_\alpha$. Кроме того, равенство

$$(\nabla\omega,\nabla v)_{L_2^2(p^{-1}\Omega_\alpha)}=(g,v)_{L_2(p^{-1}\Omega_\alpha)} \tag{3.3}$$

фактически выполнено уже для любой функции $v\in H^1(p^{-1}\Omega_\alpha)$. Нетрудно видеть (см., например, [5, с. 30]), что для существования функции $\omega\in\mathring{H}^1(p^{-1}\Omega_\alpha)$, удовлетворяющей (3.3) при любой $v\in H^1(p^{-1}\Omega_\alpha)$, необходимо и достаточно, чтобы функция g была ортогональна в скалярном произведении в $L_2(p^{-1}\Omega_\alpha)$ всем гармоническим функциям, принадлежащим $H^1(p^{-1}\Omega_\alpha)$. Итак, в случае $|b\cos\alpha|\geqslant 1$ задача Дирихле для уравнения (3.1) разрешима при тех и только тех $f\in L_2(\Omega)$, для которых функция $g=p^2(pb\cos\alpha\, I+P_\alpha)^{-1}f\in L_2(\Omega)$ обращается в нуль вне $p^{-1}\Omega_\alpha$, а в $L_2(p^{-1}\Omega_\alpha)$ ортогональна всем гармоническим функциям из $H^1(p^{-1}\Omega_\alpha)$. Понятно, что для функции f это означает выполнение бесконечного числа условий ортогональности в $L_2(\Omega)$ (их можно записать при помощи сопряженного к $p^2(pb\cos\alpha\, I+P_\alpha)^{-1}$ оператора).

При $f=0$ имеем $g=0$, а значит, и ω вместе с $u=P_\alpha\omega$ равны нулю, т. е. обобщенное решение для уравнения (3.1) всегда единственно. □

Замечание 3.1. В условиях пункта а) предложения 3.1 обобщенное решение существует и единственно, но не обязательно принадлежит $H^2(\Omega)$, и непрерывная зависимость решения от правой части гарантируется лишь относительно H^1-нормы, поскольку обратный оператор $(I+bp^{-1}\cos\alpha P_\alpha^{-1})^{-1}$ (формула (3.2)), вообще говоря, неограничен в $H^2(\Omega)$.

Наконец, в области Ω, удовлетворяющей усиленному условию инвариантности (2.13), рассмотрим уравнение

$$-\mathrm{div}\,\big((I+\gamma_1P_\alpha+\gamma_{-1}P_\alpha^{-1})\nabla u\big)=f(x)\quad(x\in\Omega), \tag{3.4}$$

естественным образом обобщающее уравнения (2.5) и (3.1). По аналогии с предыдущим уравнение (3.4) можно записывать в виде

$$-\Delta(I+\gamma_1p\cos\alpha\,P_\alpha+\gamma_{-1}p^{-1}\cos\alpha\,P_\alpha^{-1})u=f(x)\quad(x\in\Omega).$$

Считаем, что $0\neq\gamma_{\pm1}\in\mathbb{C}$ и $\cos\alpha\neq0$. Согласно сказанному во введении, уравнение (3.4) является сильно эллиптическим тогда и только тогда, когда

$$\mathrm{Re}(1+\gamma_1\cos\alpha\,z+\gamma_{-1}\cos\alpha\,z^{-1})>0\quad(z\in\mathbb{C},\ |z|=1)$$

(через z мы обозначили произведение λw; z также пробегает всю единичную окружность). Отметим, что из условия (2.13) вытекает $0\in\Omega$.

Нетрудно выписать соответствующие ограничения на коэффициенты в явном виде ($\varphi_1:=\arg\gamma_1$, $\varphi_{-1}:=\arg\gamma_{-1}$):

$$\mathrm{Re}\,(1+\gamma_1\cos\alpha\,z+\gamma_{-1}\cos\alpha\,z^{-1})=1+\cos\alpha\big[|\gamma_1|\cos(\varphi+\varphi_1)+|\gamma_{-1}|\cos(\varphi-\varphi_{-1})\big]=$$

$$=1+\cos\alpha\big[(|\gamma_1|\cos\varphi_1+|\gamma_{-1}|\cos\varphi_{-1})\cos\varphi+(|\gamma_{-1}|\sin\varphi_{-1}-|\gamma_1|\sin\varphi_1)\sin\varphi\big]=$$

$$=1+\cos\alpha\sqrt{|\gamma_1|^2+|\gamma_{-1}|^2+2|\gamma_1\gamma_{-1}|\cos(\varphi_1+\varphi_{-1})}\,\sin(\varphi+\varphi_0)>0$$

для всех $\varphi\in\mathbb{R}$ (здесь φ_0 — некоторый фиксированный угол, зависящий от $\gamma_{\pm1}$). Таким образом, необходимым и достаточным условием сильной эллиптичности уравнения (3.4) будет неравенство

$$|\cos\alpha|\sqrt{|\gamma_1|^2+|\gamma_{-1}|^2+2\,\mathrm{Re}\,(\gamma_1\gamma_{-1})}<1.$$

Для более детального изучения уравнения (3.4) факторизуем функциональный оператор под знаком лапласиана:

$$I+\gamma_1p\cos\alpha\,P_\alpha+\gamma_{-1}p^{-1}\cos\alpha\,P_\alpha^{-1}=\gamma_1p\cos\alpha(\lambda_1I-P_\alpha)(\lambda_2I-P_\alpha)P_\alpha^{-1}.$$

Здесь λ_1,λ_2 — корни квадратного уравнения

$$(\gamma_1p\cos\alpha)\lambda^2+\lambda+\gamma_{-1}p^{-1}\cos\alpha=0.$$

Без ограничения общности считаем $0<|\lambda_2|\leqslant|\lambda_1|$. Поведение решений краевой задачи для уравнения (3.4) описывается в терминах этих корней: все зависит от расположения $\lambda_{1,2}$ на комплексной плоскости относительно окружности $|\lambda|=p^{-1}$.

Теорема 3.1.

а) *Пусть* $|\lambda_1| \geqslant p^{-1}$, $|\lambda_2| < p^{-1}$. *Тогда для любой функции* $f \in L_2(\Omega)$ *существует единственное обобщенное решение* $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ *задачи Дирихле для уравнения* (3.4) (*корректная задача*).

б) *Пусть* $|\lambda_2| \leqslant |\lambda_1| < p^{-1}$. *Тогда обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения* (3.4) *существует для любой функции* $f \in L_2(\Omega)$, *при этом соответствующая однородная задача имеет бесконечно много линейно независимых обобщенных решений* (*недоопределенная задача*).

в) *Пусть* $p^{-1} \leqslant |\lambda_2| \leqslant |\lambda_1|$. *Тогда обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения* (2.5) *единственно, а для существования решения необходимо и достаточно, чтобы функция* f *была ортогональна некоторому бесконечномерному подпространству в пространстве* $L_2(\Omega)$ (*переопределенная задача*).

Доказательство.

а) По лемме 2.2 оператор $(\lambda_2 I - P_\alpha)P_\alpha^{-1}$ есть изоморфизм пространства $\mathring{H}^1(\Omega)$. Поэтому замена $(\lambda_2 I - P_\alpha)P_\alpha^{-1}u = \omega$ сводит исходную задачу к интегральному тождеству

$$(\nabla(\lambda_1 I - P_\alpha)\omega, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (\gamma_1 p \cos\alpha)^{-1}(f, v)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \mathring{H}^1(\Omega)),$$

которое при $|\lambda_1| \geqslant p^{-1}$ равносильно тождеству

$$(\nabla\omega, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = p(\gamma_1 \cos\alpha)^{-1}\left((p^2\lambda_1 I - P_\alpha)^{-1}f, v\right)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \mathring{H}^1(\Omega))$$

(см. доказательство предложения 2.1). Последнее единственным образом определяет $\omega \in \mathring{H}^1(\Omega)$ с оценкой $\|\omega\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_1\|(p^2\lambda_1 I - P_\alpha)^{-1}f\|_{L_2(\Omega)}$. Тогда для единственного обобщенного решения $u = P_\alpha(\lambda_2 I - P_\alpha)^{-1}\omega \in \mathring{H}^1(\Omega)$ рассматриваемой задачи имеет место оценка

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_2\|\omega\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_3\|f\|_{L_2(\Omega)}$$

(регулярность границы гарантирует для функции ω и более сильную оценку $\|\omega\|_{H^2(\Omega)} \leqslant c_4\|f\|_{L_2(\Omega)}$, но для функции u соответствующую оценку в H^2-норме записать уже нельзя).

б) В этом случае по лемме 2.2 весь оператор $\gamma_1 p\cos\alpha(\lambda_1 I - P_\alpha)(\lambda_2 I - P_\alpha)P_\alpha^{-1}$ осуществляет изоморфизм пространства $\mathring{H}^1(\Omega)$ на пространство $\mathring{H}^1(p\Omega_{-\alpha})$. Поэтому исходная задача сводится к нахождению функции

$$\omega = \gamma_1(\lambda_1 I - P_\alpha)(\lambda_2 I - P_\alpha)P_\alpha^{-1}u \in \mathring{H}^1(p\Omega_{-\alpha})$$

в области $p\Omega_{-\alpha} \supset \overline{\Omega}$ из интегрального тождества

$$(\nabla\omega, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (f, v)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \mathring{H}^1(\Omega)),$$

которое отвечает строго внутренней подобласти Ω более широкой области $p\Omega_{-\alpha}$. Получается недоопределенная задача. Построение бесконечномерного нуль-пространства такой задачи проведено в предложении 2.2.

в) Здесь мы осуществляем замену $P_\alpha^{-1}u = \omega \in \mathring{H}^1(p^{-1}\Omega_\alpha)$, и для функции ω, равной нулю вне $p^{-1}\overline{\Omega}_\alpha \subset \Omega$, имеем тождество

$$(\nabla(\lambda_1 I - P_\alpha)(\lambda_2 I - P_\alpha)\omega, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = (\gamma_1 p \cos\alpha)^{-1}(f, v)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \mathring{H}^1(\Omega)),$$

эквивалентное тождеству

$$(\nabla\omega, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} = p^4(\gamma_1 p\cos\alpha)^{-1}\left((p^2\lambda_2 I - P_\alpha)^{-1}(p^2\lambda_1 I - P_\alpha)^{-1}f, v\right)_{L_2(\Omega)} =$$

$$= p^3\left((\gamma_1\cos\alpha\, P_\alpha^2 + pP_\alpha + p^2\gamma_{-1}\cos\alpha I)^{-1}f, v\right)_{L_2(\Omega)} \quad (v \in \mathring{H}^1(\Omega)).$$

Получается, что обобщенное решение задачи Дирихле для уравнения Пуассона в Ω тождественно равно нулю в части $\Omega \setminus p^{-1}\Omega_\alpha$. Это переопределенная задача. Бесконечномерное ортогональное дополнение к (замкнутому) образу оператора такой краевой задачи построено в доказательстве пункта б) предложения 3.1. □

Непосредственным вычислением можно убедиться, что сильно эллиптическому уравнению (3.4) отвечает следующее расположение корней $\lambda_{1,2}$: $|\lambda_1| > p^{-1}$, $|\lambda_2| < p^{-1}$.

Источником краевой задачи в обобщенной постановке для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения в дивергентной форме с симметричным оператором может быть задача на поиск минимума квадратичного функционала. Проиллюстрируем подобную связь на примере.

Пример 3.1. Рассмотрим задачу поиска минимума функционала

$$J(u) = \int\limits_{\Omega} ((T\nabla u, \nabla u) - 2fu)\, dx$$

на пространстве функций $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$. Здесь Ω — произвольная ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, $T = I + aP_\alpha$, скобки $(.,.)$ означают скалярное произведение векторов в $\mathbb{R}^2$, $f \in L_2(\Omega)$, а функция u считается продолженной нулем вне Ω. Коэффициент a и все пространства в этом примере — вещественные.

Из вышеизложенного следует, что условие $|a\cos\alpha| < 1$ обеспечивает оценку (коэрцитивность функционала)

$$J_0(u) := \int\limits_{\Omega} (T\nabla u, \nabla u)\, dx \geqslant (1 - |a\cos\alpha|) \int\limits_{\Omega} |\nabla u|^2\, dx \quad (u \in \mathring{H}^1(\Omega)).$$

Запишем первую вариацию (производную Гато) функционала J в элементе u. Для этого зафиксируем произвольную функцию $v \in \mathring{H}^1(\Omega)$ и подставим $u + \tau v$, $\tau \in \mathbb{R}$, вместо u в функционал J. Получим

$$J(u + \tau v) = J(u) + \tau B(u, v) + \tau^2 J_0(v),$$

где билинейная форма $B(u, v)$ на $\mathring{H}^1(\Omega)$ имеет вид

$$\int\limits_{\Omega} ((T\nabla u, \nabla v) + (T\nabla v, \nabla u) - 2fv)\, dx = ((T + T^*)\nabla u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} -$$

$$- 2(f, v)_{L_2(\Omega)} = ((2I + aP_\alpha + aP_\alpha^{-1})\nabla u, \nabla v)_{L_2^2(\Omega)} - 2(f, v)_{L_2(\Omega)}.$$

Условие

$$\frac{d}{d\tau} J(u + \tau v)\Big|_{\tau=0} = B(u, v) = 0 \quad (v \in \mathring{H}^1(\Omega))$$

является необходимым, а при $|a\cos\alpha| < 1$, очевидно, и достаточным условием строгого глобального минимума функционала J. С другой стороны, это условие определяет обобщенное решение $u \in \mathring{H}^1(\Omega)$ краевой задачи

$$-\mathrm{div}\,\big((I + (a/2)(P_\alpha + P_\alpha^{-1}))\nabla u\big) = f(x) \quad (x \in \Omega), \qquad u|_{\partial\Omega} = 0.$$

Эта задача при дополнительном условии (2.13) на область исследована в теореме 3.1 для всевозможных значений параметров, но сильно эллиптическим соответствующее уравнение будет только при $|a\cos\alpha| < 1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Амбарцумян В. А.* К теории флуктуаций яркости в млечном пути// Докл. АН СССР. — 1944. — *44*. — С. 244–247.
2. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач// Докл. АН СССР. — 1969. — *185*, № 4. — С. 739–740.
3. *Дерфель Г. А., Молчанов С. А.* Спектральные методы в теории дифференциально-функциональных уравнений// Мат. заметки. — 1990. — *47*. — С. 42–51.
4. *Онанов Г. Г., Скубачевский А. Л.* Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела// Прикл. мех. — 1979. — *15*, № 5. — С. 39–47.
5. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *54*. — С. 3–138.

6. *Россовский Л. Е., Тасевич А. Л.* Первая краевая задача для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями// Мат. заметки. — 2015. — *97*, № 5. — С. 733–748.
7. *Россовский Л. Е., Тасевич А. Л.* Об однозначной разрешимости функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями в весовых пространствах// Дифф. уравн. — 2017. — *53*, № 12. — С. 1679–1692.
8. *Россовский Л. Е., Товсултанов А. А.* О задаче Дирихле для эллиптического функционально-дифференциального уравнения с аффинным преобразованием аргумента// Докл. РАН. — 2019. — *489*, № 4. — С. 347–350.
9. *Россовский Л. Е., Товсултанов А. А.* Функционально-дифференциальные уравнения с растяжением и симметрией// Сиб. мат. ж. — 2022. — *63*, № 4. — С. 911–923.
10. *Скубачевский А. Л.* О спектре некоторых нелокальных эллиптических краевых задач// Мат. сб. — 1982. — *117*, № 4. — С. 548–558.
11. *Скубачевский А. Л.* Нелокальные краевые задачи со сдвигом// Мат. заметки. — 1985. — *38*, № 4. — С. 587–598.
12. *Скубачевский А. Л.* О некоторых задачах для многомерных диффузионных процессов// Докл. АН СССР. — 1989. — *307*, № 2. — С. 287–292.
13. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5. — С. 3–112.
14. *Товсултанов А. А.* Функционально-дифференциальное уравнение с растяжением и поворотом// Владикавказ. мат. ж. — 2021. — *23*, № 1. — С. 77–87.
15. *Hall A. J., Wake G. C.* A functional differential equation arising in the modeling of cell growth// J. Aust. Math. Soc. Ser. B. — 1989. — *30*. — С. 424–435.
16. *Iserles A.* On neutral functional-differential equation with proportional delays// J. Math. Anal. Appl. — 1997. — *207*. — С. 73–95.
17. *Kato T., McLeod J. B.* Functional differential equation $\dot{y} = ay(\lambda t) + by(t)$// Bull. Am. Math. Soc. — 1971. — *77*. — С. 891–937.
18. *Ockendon J. R., Tayler A. B.* The dynamics of a current collection system for an electric locomotive// Proc. Roy. Soc. Lond. A. — 1971. — *322*. — С. 447–468.
19. *Onanov G. G., Tsvetkov E. L.* On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory// Russ. J. Math. Phys. — 1996. — *3*. — С. 491–500.
20. *Rossovskii L.* Elliptic functional differential equations with incommensurable contractions// Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — *12*. — С. 226–239.
21. *Rossovskii L. E., Tovsultanov A. A.* Elliptic functional differential equations with affine transformations// J. Math. Anal. Appl. — 2019. — *480*. — 123403.
22. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional-Differential Equations and Applications. — Basel: Birkhäuser, 1997.
23. *Skubachevskii A. L.* Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells// Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — *12*. — С. 192–207.

Л. Е. Россовский
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: lrossovskii@gmail.com

А. А. Товсултанов
Чеченский государственный университет имени А. А. Кадырова, Грозный, Россия;
Северо-Кавказский центр математических исследований ВНЦ РАН, Владикавказ, Россия
E-mail: a.tovsultanov@mail.ru

UDC 517.95+517.929
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-697-711
EDN: ZCQCLC

Boundary-value problem for an elliptic functional differential equation with dilation and rotation of arguments

L. E. Rossovskii[1] **and A. A. Tovsultanov**[2,3]

[1]*RUDN University, Moscow, Russia*
[2]*Kadyrov Chechen State University, Grozny, Russia*
[3]*North Caucasus Center for Mathematical Research VSC RAS, Vladikavkaz, Russia*

Abstract. The paper is devoted to the Dirichlet problem in a flat bounded domain for a linear second-order functional differential equation in the divergent form with dilation, contraction and rotation of the argument of the higher-order derivatives of the unknown function. We study the existence, the uniqueness and the smoothness of the generalized solution for all possible values of the coefficients and parameters of transformations in the equation.

Keywords: elliptic functional differential equation, boundary-value problem.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was financially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the framework of a state assignment (project № FSSF-2023-0016).

For citation: L. E. Rossovskii, A. A. Tovsultanov, "Boundary-value problem for an elliptic functional differential equation with dilation and rotation of arguments," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 4, 697–711. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-697-711`

REFERENCES

1. V. A. Ambartsumyan, "K teorii fluktuatsiy yarkosti v mlechnom puti" [To the theory of brightness fluctuations in the Milky Way], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1944, **44**, 244–247 (in Russian).
2. A. V. Bitsadze and A. A. Samarskii, "O nekotorykh prosteyshikh obobshcheniyakh lineynykh ellipticheskikh kraevykh zadach" [On some simple generalizations of linear elliptic boundary-value problems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1969, **185**, No. 4, 739–740 (in Russian).
3. G. A. Derfel' and S. A. Molchanov, "Spektral'nye metody v teorii differentsial'no-funktsional'nykh uravneniy" [Spectral methods in the theory of differential-functional equations], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1990, **47**, 42–51 (in Russian).
4. G. G. Onanov and A. L. Skubachevskii, "Differentsial'nye uravneniya s otklonyayushchimisya argumentami v statsionarnykh zadachakh mekhaniki deformiruemogo tela" [Differential equations with deviating arguments in stationary problems of mechanics of deformable body], *Prikl. mekh.* [Appl. Mech.], 1979, **15**, No. 5, 39–47 (in Russian).
5. L. E. Rossovskii, "Ellipticheskie funktsional'no-differentsial'nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii" [Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, 3–138 (in Russian).
6. L. E. Rossovskii and A. L. Tasevich, "Pervaya kraevaya zadacha dlya sil'no ellipticheskogo funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya s ortotropnymi szhatiyami" [The first boundary-value problem for a strongly

elliptic functional differential equation with orthotropic compressions], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2015, **97**, No. 5, 733–748 (in Russian).

7. L. E. Rossovskii and A. L. Tasevich, "Ob odnoznachnoy razreshimosti funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya s ortotropnymi szhatiyami v vesovykh prostranstvakh" [On the unique solvability of a functional differential equation with orthotropic contractions in weighted spaces], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2017, **53**, No. 12, 1679–1692 (in Russian).
8. L. E. Rossovskii and A. A. Tovsultanov, "O zadache Dirikhle dlya ellipticheskogo funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya s affinnym preobrazovaniem argumenta" [On the Dirichlet problem for an elliptic functional differential equation with an affine transformation of the argument], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2019, **489**, No. 4, 347–350 (in Russian).
9. L. E. Rossovskii and A. A. Tovsultanov, "Funktsional'no-differentsial'nye uravneniya s rastyazheniem i simmetriey" [Functional differential equations with dilation and symmetry], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 2022, **63**, No. 4, 911–923 (in Russian).
10. A. L. Skubachevskii, "O spektre nekotorykh nelokal'nykh ellipticheskikh kraevykh zadach" [On the spectrum of some nonlocal elliptic boundary-value problems], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1982, **117**, No. 4, 548–558 (in Russian).
11. A. L. Skubachevskii, "Nelokal'nye kraevye zadachi so sdvigom" [Nonlocal boundary-value problems with shift], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1985, **38**, No. 4, 587–598 (in Russian).
12. A. L. Skubachevskii, "O nekotorykh zadachakh dlya mnogomernykh diffuzionnykh protsessov" [On some problems for multidimensional diffusion processes], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1989, **307**, No. 2, 287–292 (in Russian).
13. A. L. Skubachevskii, "Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy i ikh prilozheniya" [Boundary-value problems for elliptic functional differential equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 3–112 (in Russian).
14. A. A. Tovsultanov, "Funktsional'no-differentsial'noe uravnenie s rastyazheniem i povorotom" [Functional differential equation with dilation and rotation], *Vladikavkaz. mat. zh.* [Vladikavkaz. Math. J.], 2021, **23**, No. 1, 77–87 (in Russian).
15. A. J. Hall and G. C. Wake, "A functional differential equation arising in the modeling of cell growth," *J. Aust. Math. Soc. Ser. B*, 1989, **30**, 424–435.
16. A. Iserles, "On neutral functional-differential equation with proportional delays," *J. Math. Anal. Appl.*, 1997, **207**, 73–95.
17. T. Kato and J. B. McLeod, "Functional differential equation $\dot{y} = ay(\lambda t) + by(t)$," *Bull. Am. Math. Soc.*, 1971, **77**, 891–937.
18. J. R. Ockendon and A. B. Tayler, "The dynamics of a current collection system for an electric locomotive," *Proc. Roy. Soc. Lond. A*, 1971, **322**, 447–468.
19. G. G. Onanov and E. L. Tsvetkov, "On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory," *Russ. J. Math. Phys.*, 1996, **3**, 491–500.
20. L. Rossovskii, "Elliptic functional differential equations with incommensurable contractions," *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, **12**, 226–239.
21. L. E. Rossovskii and A. A. Tovsultanov, "Elliptic functional differential equations with affine transformations," *J. Math. Anal. Appl.*, 2019, **480**, 123403.
22. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional-Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel, 1997.
23. A. L. Skubachevskii, "Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells," *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, **12**, 192–207.

L. E. Rossovskii
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: `lrossovskii@gmail.com`

A. A. Tovsultanov
Kadyrov Chechen State University, Grozny, Russia
North Caucasus Center for Mathematical Research VSC RAS, Vladikavkaz, Russia
E-mail: `a.tovsultanov@mail.ru`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 4 (2023). С. 712–725
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.9
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-712-725
EDN: ZSASZP

О СУЩЕСТВОВАНИИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА БИЦАДЗЕ—САМАРСКОГО

О. В. Солонуха

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия

Аннотация. Исследуется нелинейное параболическое дифференциальное уравнение в ограниченной многомерной области с нелокальными краевыми условиями типа Бицадзе—Самарского. Доказаны теоремы существования периодического по времени обобщенного решения. Достаточные условия существования обобщенных решений содержат либо алгебраическое условие эллиптичности, либо алгебраическое условие сильной эллиптичности для вспомогательного дифференциально-разностного оператора.

Ключевые слова: параболическое дифференциальное уравнение, нелокальные краевые условия типа Бицадзе—Самарского, оператор сдвигов по пространственным переменным, псевдомонотонный оператор.

Заявление о конфликте интересов. Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор благодарит рецензента за замечания, способствовавшие улучшению работы. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: *О. В. Солонуха.* О существовании периодических по времени решений нелинейных параболических дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями типа Бицадзе—Самарского// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 4. С. 712–725. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-712-725`

Введение

Краевые задачи с нелокальными условиями на границе области рассматриваются с 30-х годов XX века, см. работы Т. Карлемана [19] и др. В данной работе рассмотрено параболическое дифференциальное уравнение с нелокальными краевыми условиями типа Бицадзе—Самарского: нелокальные краевые условия заданы с помощью сдвигов по пространственным переменным в ограниченной области многомерного пространства. Впервые дифференциальные уравнения с подобными нелокальными условиями были рассмотрены в [2]. С использованием метода компактности для модельной задачи было доказано существование единственного решения. В дальнейшем задачей Бицадзе—Самарского занимались многие математики, в частности, с помощью метода компактности были получены регулярные решения задач Бицадзе—Самарского для ряда линейных параболических уравнений (со многими пространственными переменными) и систем (с одной пространственной переменной) в цилиндрических областях с негладкими боковыми границами, даны интегральные представления решений, см., например, [1,6,18] и библиографию. Однако в ряде случаев требовался иной метод исследования. В 80-е годы проблема Бицадзе—Самарского [10] для линейных эллиптических уравнений была изучена А. Л. Скубачевским с помощью перехода к эквивалентному дифференциально-разностному уравнению, см. [11, 20]. Используя дополнительно к методу А. Л. Скубачевского метод монотонности, можно исследовать нелинейные эллиптические уравнения с нелокальными краевыми условиями, см. [12, 15], а также линейные и нелинейные параболические уравнения с нелокальными краевыми условиями типа Бицадзе—Самарского, см. [13–15,21,23]. В данной работе более подробно рассмотрим вопрос существования периодического по времени решения параболического нелинейного уравнения с нелокальными краевыми условиями типа Бицадзе—Самарского.

1. Постановка задачи

Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с границей ∂Q класса C^∞ или $Q = (0,d) \times G$, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей ∂G класса C^∞, если $n \geqslant 3$); $Q = (0,d)$ для $n = 1$. Определим цилиндр $\Omega_T := Q \times (0,T)$. Все функции действительнозначные. В цилиндре Ω_T рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\partial_t w(x,t) - \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \partial_i A_i(x,t,w,\nabla w) + A_0(x,t,w,\nabla w) = f(x,t) \quad ((x,t)\in\Omega_T), \tag{1.1}$$

где A_i, $i = 0,1,\dots,n,$ — вещественнозначные нелинейные[1] функции, с нелокальными краевыми условиями

$$\left.\begin{aligned} w|_{\Gamma^T_{rl}} &= \sum_{j=1}^{J_0} \gamma^r_{lj} w|_{\Gamma^T_{rj}} && (r \in B,\ l = J_0+1,\dots,J), \\ w|_{\Gamma^T_{rl}} &= 0 && (r \notin B,\ l = 1,\dots,J), \end{aligned}\right\} \tag{1.2}$$

где множество $\Gamma^T = \{\Gamma^T_{rl}\}$ определено следующим образом.

Пусть $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$ — конечное множество векторов $\{h\}$ с целочисленными (или соизмеримыми) координатами. Через M обозначим аддитивную группу, порожденную множеством $\mathcal{M}$, через Q_r — открытые связные компоненты множества $Q \setminus \Big(\bigcup_{h\in M} (\partial Q + h)\Big)$. Множество Q_r называется *подобластью.* Семейство $\mathcal{R}$ всех подобластей Q_r $(r = 1,2,\dots)$ называется *разбиением* области Q.

Условие 1. *Пусть* $\mathcal{K} = \bigcup_{h_1,h_2\in M} \Big\{\overline{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap \overline{[(\partial Q + h_2)\setminus(\partial Q + h_1)]}\Big\}$ *удовлетворяет условию* $\operatorname{mes}_{n-1}(\mathcal{K}\cap\partial Q) = 0$.

Обозначим через Γ_ρ открытые, связные в топологии ∂Q компоненты множества $\partial Q \setminus \mathcal{K}$. Если $(\Gamma_\rho + h) \cap \overline{Q} \neq \varnothing$ для некоторого $h \in M$, то или $\Gamma_\rho + h \subset Q$, или существует $\Gamma_r \subset \partial Q \setminus \mathcal{K}$ такое, что $\Gamma_\rho + h = \Gamma_r$, см. [20, § 7]. То есть множества $\big\{\Gamma_\rho + h : \Gamma_\rho + h \subset \overline{Q},\ \rho = 1,2,\dots,\ h \in M\big\}$ могут быть разбиты на классы. Множества $\Gamma_{\rho_1} + h_1$ и $\Gamma_{\rho_2} + h_2$ принадлежат одному классу, если

1) существует вектор $h \in M$ такой, что $\Gamma_{\rho_1} + h_1 = \Gamma_{\rho_2} + h_2 + h$;
2) для любых $\Gamma_{\rho_1} + h_1, \Gamma_{\rho_2} + h_2 \subset \partial Q$ нормали к ∂Q в точках $x \in \Gamma_{\rho_1} + h_1$ и $x - h \in \Gamma_{\rho_2} + h_2$ однонаправлены.

Обозначим множество $\Gamma_\rho + h$ через Γ_{rj}, где r — номер класса, j — номер элемента в классе $(1 \leqslant j \leqslant J = J(r))$. Обозначим теперь $\Gamma^T_{rl} := \Gamma_{rl} \times (0,T)$.

Обозначим через B множество индексов тех классов множеств, которые имеют элементы внутри области, т. е. если $r \in B$, то существует $\Gamma_{rj} \subset Q$, $\Gamma^T_{rj} \subset \Omega_T$. Соответственно, если $r \notin B$, то $\Gamma_{rj} \subset \partial Q$, $\Gamma^T_{rj} \subset \partial Q \times (0,T)$. Не нарушая общности, будем считать, что $\Gamma_{r1},\dots,\Gamma_{rJ_0} \subset Q$, $\Gamma_{r,J_0+1},\dots,\Gamma_{rJ} \subset \partial Q$ $(0 \leqslant J_0 = J_0(r) < J(r))$. Как известно, см. [20, § 7], для любого $\Gamma_{rj} \subset \partial Q$ существует подобласть Q_{sl} такая, что $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{sl}$. Более того, если $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{sl}$, то $\Gamma_{rj} \cap \partial Q_{s_1 l_1} = \varnothing$ для любых пар $(s_1,l_1) \neq (s,l)$; и для каждого $r = 1,2,\dots$ существует единственный номер $s = s(r)$ такой, что $N(s) = J(r)$ и $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$ $(l = 1,\dots,N(s))$ (с точностью до перенумеровки).

[1] Если A_i линейны, то в случае их M-периодичности теоремы существования и единственности решения см. в [14, 21]. Напомним, A_i *M-периодичны,* если $A_i(x+h,t,\xi) = A_i(x,t,\xi)$ для всех $h \in M$, $x \in Q$, $x+h \in Q$. Если условие M-периодичности не выполнено, то можно применять [14, теорема 2] или результаты этой работы.

Условие 2. *Для каждой подобласти* Q_{sl} $(s = 1, 2, \ldots,\ l = 1, \ldots, N(s))$ *и для любого* $\varepsilon > 0$ *существует открытое множество* $G_{sl} \subset Q_{sl}$ *с границей* $\partial G_{sl} \in C^1$ *такое, что* $\mathrm{mes}_n(Q_{sl} \setminus G_{sl}) < \varepsilon$, $\mathrm{mes}_{n-1}(\partial G_{sl} \Delta \partial Q_{sl}) < \varepsilon$.

Пусть $1/p + 1/q = 1$, $p \in (1, \infty)$. $L_p(0, T; W_p^1(Q))$ — соболевское пространство функций, интегрируемых в степени p вместе с 1-ми производными. Обозначим

$$L_p(0, T; \mathring{W}_p^1(Q)) := \left\{u \in L_p(0, T; W_p^1(Q)) : u|_{x\in\partial Q} = 0 \,\text{для п. в.}\, t \in (0, T)\right\},$$

$$\mathcal{V} := L_p(0, T; \mathring{W}_p^1(Q)) \cap L_2(\Omega_T), \qquad \|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} = \left(\sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_{\Omega_T} |\partial_i u(x, t)|^p \, dxdt\right)^{1/p}.$$

Тогда $\mathcal{V}$ — рефлексивное банахово пространство, причем при $p \in [2, \infty)$ $\mathcal{V} = L_p(0, T; \mathring{W}_p^1(Q))$, а сопряженным к нему является пространство $\mathcal{V}^* = L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$. При $p \in (1, 2)$

$$\|u\|_{\mathcal{V}} = \|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} + \|u\|_{L_2(\Omega_T)},$$

а сопряженным к $\mathcal{V}$ является пространство $\mathcal{V}^* = L_q(0, T; W_q^{-1}(Q)) + L_2(\Omega_T)$. Подробнее эти пространства описаны в [5, п. 5, § 1, гл. IV] и др. Также будем рассматривать рефлексивное банахово пространство

$$W = \{u \in \mathcal{V} : \partial_t u \in \mathcal{V}^*\} \tag{1.3}$$

с нормой $\|u\|_W = \|u\|_{\mathcal{V}} + \|\partial_t u\|_{\mathcal{V}^*}$, где $\partial_t u$ — производная элемента $u \in \mathcal{V}$ в смысле распределений со значениями в $\mathcal{V}^*$. Аналогично введем пространство

$$W_\gamma = \{w \in \mathcal{V}_\gamma : \partial_t w \in \mathcal{V}^*\}, \quad \text{где} \quad \mathcal{V}_\gamma := L_p(0, T; W_{p,\gamma}^1(Q)) \cap L_2(\Omega_T), \tag{1.4}$$
$$L_p(0, T; W_{p,\gamma}^1(Q)) := \left\{w \in L_p(0, T; W_p^1(Q)) : w \text{ удовлетворяет (1.2)}\right\}.$$

Как известно, $W \subset C(0, T; L_2(Q))$, см. [5, теорема 1.17, гл. IV], аналогично, $W_\gamma \subset C(0, T; L_2(Q))$, поэтому $w|_t$ имеет смысл, $w|_t \in L_2(Q)$. Будем также полагать, что $f \in \mathcal{V}^*$.

Периодические по t решения (1.1), (1.2) должны удовлетворять условию

$$w|_{t=0} = w|_{t=T}. \tag{1.5}$$

Рассматривая производную по t как распределение, введем неограниченный оператор $\partial_t : \mathcal{D}(\partial_t) \to \mathcal{V}^*$ с областью определения

$$\mathcal{D}(\partial_t) = W_\gamma(T) := \{w \in \mathcal{V}_\gamma : \partial_t w \in \mathcal{V}^*,\ w|_{t=0} = w|_{t=T}\}. \tag{1.6}$$

Определим оператор $A : \mathcal{V}_\gamma \to \mathcal{V}^*$ по формуле

$$\langle Aw, v\rangle = \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \int\limits_{\Omega_T} A_i(x, t, w, \nabla w)\, \partial_i v(t, x)\, dx\, dt \quad \forall v \in \mathcal{V}, \tag{1.7}$$

здесь и ниже $\partial_0 v := v$.

Определение 1.1. Функция w называется *обобщенным решением* задачи (1.1), (1.2), (1.5), если она удовлетворяет операторному уравнению

$$\partial_t w + Aw = f, \qquad w \in W_\gamma(T). \tag{1.8}$$

2. Разностный оператор и изоморфизм пространств

Рассмотрим набор вещественных постоянных коэффициентов $\{a_h : h \in \mathcal{M}\}$. Определим разностный оператор $R : L_p(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \to L_p(\mathbb{R}^n \times (0, T))$:

$$Ru(t, x) = \sum_{h\in\mathcal{M}} a_h u(x + h, t), \tag{2.1}$$

а также оператор $R_Q = P_Q R I_Q : L_p(\Omega_T) \to L_2(\Omega_T)$, здесь $I_Q : L_2(\Omega_T) \to L_p(\mathbb{R}^n \times (0, T))$ — оператор продолжения функций из $L_2(\Omega_T)$ нулем в $(\mathbb{R}^n \setminus Q) \times (0, T)$, $P_Q : L_p(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \to L_p(\Omega_T)$ —

оператор сужения функций из $L_p(\mathbb{R}^n \times (0,T))$ на Ω_T. Для исследования свойств оператора R_Q введем матрицы $R_s = \{r^s_{ml}\}_{1\leqslant m,l\leqslant N(s)}$:

$$r^s_{ml} = \begin{cases} a_h & (h = h_{sl} - h_{sm} \in \mathcal{M}), \\ 0 & (h_{sl} - h_{sm} \notin \mathcal{M}), \end{cases} \tag{2.2}$$

где h_{sm} определяется условием[1] $Q_{sm} = Q_{s1} + h_{sm}$. Из ограниченности области Q и формулы (2.2) следует, что множество различных матриц R_s конечно, $\dim R_s = N(s) < \infty$.

Пусть $\Omega_{s1} = Q_{s1} \times (0,T)$. Изоморфизм $U_s : L_p(\Omega_T) \to L^N_p(\Omega_{s1})$ задан по формуле $(U_s u)_l(x,t) = u(x+h_{sl},t)$. Оператор $R_{Qs} : L^N_p(\Omega_{s1}) \to L^N_p(\Omega_{s1})$, определяемый соотношением $R_{Qs} = U_s R_Q U_s^{-1}$, является оператором умножения на матрицу R_s, при этом $R_Q = \sum\limits_s U_s^{-1} R_s U_s P_s$, где P_s — проектор на $\bigcup\limits_l Q_{sl} \times (0,T)$, см. [20, лемма 8.6] (или [11, лемма 2.6]). Более подробно построение и свойства операторов R_Q и R_{Qs} см. в [11, 13, 20, 23].

Обозначим через $R_{s(r)}$ матрицы, полученные из R_s $(s = s(r))$ путем перенумерования соответствующих столбцов и строк. Пусть e^r_j $(j = 1, \dots, J(r))$ — j-ая строка матрицы размерности $J \times J_0$, полученной путем вычеркивания последних $J - J_0$ столбцов из матрицы $R_{s(r)}$.

Определение 2.1. Мы говорим, что матрицы R_s *соответствуют краевым условиям* (1.2), если выполнено условие 3.

Условие 3. *Существует набор $\{a_h \in \mathbb{R} : h \in \mathcal{M}\}$ такой, что для любого $s = 1, 2, \dots$ матрицы R_s невырождены, а также для всех $r \in B$ и $s = s(r)$ имеют решения системы линейных уравнений*

$$e^r_l = \sum_{1\leqslant j\leqslant J_0} \gamma^r_{lj} e^r_j \qquad (l = J_0 + 1, \dots, J). \tag{2.3}$$

Кроме того, обозначим через R_{s0} матрицу порядка $J_0 \times J_0$, полученную из матрицы R_s вычеркиванием последних $N(s) - J_0$ строк и столбцов.

Теорема 2.1 (см. [23, теорема 1])**.** *Предположим, что выполнены условия* 1–3, *а соответствующие матрицы R_s и R_{s0} $(s = s(r),\ r \in B)$ невырождены. Тогда существует множество $\gamma = \{\gamma^r_{ml}\}$ такое, что оператор $R_Q : L_p(0,T; \mathring{W}^1_p(Q)) \to L_2(0,T; W^1_{p,\gamma}(Q))$ — изоморфизм.*

Теорема 2.2. *Предположим, что выполнены условия* 1–3, *а соответствующие матрицы R_s и R_{s0} $(s = s(r),\ r \in B)$ невырождены. В этом случае $w \in W_\gamma(T)$ является обобщенным решением задачи* (1.1), (1.2), (1.5) *тогда и только тогда, когда существует решение операторного уравнения*

$$\partial_t R_Q u + A R_Q u = f, \qquad u \in W(T) := \{u \in \mathcal{V} : \partial_t u \in \mathcal{V}^*,\ u|_{t=0} = u|_{t=T}\}, \tag{2.4}$$

причем $w = R_Q u$.

Доказательство. Так как выполнены условия 1–3, то существует разностный оператор $R_Q : L_p(0,T; \mathring{W}^1_p(Q)) \to L_p(0,T; W^1_{p,\gamma}(Q))$, являющийся изоморфизмом, см. теорему 2.1. Кроме того, $R_Q : L_2(\Omega_T) \to L_2(\Omega_T)$ невырожденный, т. е. $R_Q : \mathcal{V} \to \mathcal{V}_\gamma$ — также изоморфизм. Таким образом, для каждого $w \in W_\gamma$ существует единственный элемент $u \in \mathcal{V}$ такой, что $w = R_Q u$, $u = R_Q^{-1} w$.

Покажем, что $\partial_t R_Q u = R_Q \partial_t u \in \mathcal{V}^*$ при $\partial_t u \in \mathcal{V}^*$. Сначала покажем, что если $u \in L_p(0,T; \mathring{W}^1_p(Q))$, $\partial_t u \in L_q(0,T; W^{-1}_q(Q))$, то $\partial_t R_Q u = R_Q \partial_t u \in L_q(0,T; W^{-1}_q(Q))$. Линейный оператор $R_Q : L_q(\Omega_T) \to L_q(\Omega_T)$ ограничен, см. [22, лемма 4]. Для любого $u \in L_p(0,T; \mathring{W}^1_p(Q))$ такого, что $\partial_t u \in L_q(\Omega_T)$, имеем, что $R_Q \partial_t u \in L_q(\Omega_T)$. Выполнено $\partial_t R_Q u = R_Q \partial_t u$ по построению. В силу непрерывности вложения пространств $L_q(\Omega_T) \subset L_q(0,T; W^{-1}_q(Q))$ для любого $u \in W$ получаем, что существует последовательность $\{u_n\} \subset W$ такая, что $L_q(\Omega_T) \ni \partial_t u_n \to \partial_t u$ в $L_q(0,T; W^{-1}_q(Q))$. Кроме того, $R_Q \partial_t u = \lim\limits_{n\to\infty} R_Q \partial_t u_n = \lim\limits_{n\to\infty} \partial_t R_Q u_n = \partial_t R_Q u$ в силу замкнутости графика линейного ограниченного оператора R_Q.

---

[1]Напомним, что разбиение $\overline{Q} = \bigcup\limits_{s,m} \overline{Q_{sm}}$ и множество сдвигов $\{h_{sm}\}$ согласовано с краевыми условиями (1.2).

Рассмотрим общий случай. Если $\partial_t u \in \mathcal{V}^*$, то существуют $f_1 \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$ и $f_2 \in L_2(\Omega_T)$ такие, что $\partial_t u = f_1 + f_2$. Тогда $\partial_t R_Q u = R_Q \partial_t u = R_Q f_1 + R_Q f_2 \in \mathcal{V}^*$, поскольку $R_Q f_1 \in L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))$, см. выше, и $R_Q f_2 \in L_2(\Omega_T)$ по построению оператора $R_Q : L_2(\Omega_T) \to L_2(\Omega_T)$. То есть $R_Q \partial_t u = \partial_t w \in \mathcal{V}^* = L_q(0,T;W_q^{-1}(Q)) + L_2(\Omega_T)$.

Поскольку оператор $R_Q : C(0,T;L_2(Q)) \to C(0,T;L_2(Q))$ также невырожден, то значения функций $u|_{t=0} = R_Q^{-1} w|_{t=0}$ и $u|_{t=T} = R_Q^{-1} w|_{t=T}$ определены однозначно, т. е. $w|_{t=0} = w|_{t=T}$ тогда и только тогда, когда $u|_{t=0} = u|_{t=T}$. □

3. Максимальная монотонность оператора $\partial_t R_Q$

Определение 3.1. Оператор $\Lambda : \mathcal{V} \supset \mathcal{D}(\Lambda) \to \mathcal{V}^*$ *монотонен*, если

$$\langle \Lambda u - \Lambda v, u - v \rangle \geqslant 0 \qquad \forall u, v \in \mathcal{D}(\Lambda).$$

Плотно определенный, монотонный оператор Λ *максимально монотонен*, если не существует нетривиального расширения данного оператора, сохраняющего монотонность.

Как известно, линейный оператор ∂_t с областью определения $\mathcal{D}(\partial_t) = W(T)$ максимально монотонен, и $\partial_t^* = -\partial_t$, см. [8, гл. 3, п. 2.2]. Для доказательства максимальной монотонности оператора $\partial_t R_Q$ используем критерий, доказанный, в частности, в [8, лемма 1.1, гл. 3]: в рефлексивных, строго выпуклых со своим сопряженным пространствах максимальная монотонность линейного оператора Λ эквивалентна условию

$$\langle \Lambda u, u \rangle \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathcal{D}(\Lambda), \qquad \langle \Lambda^* u, u \rangle \geqslant 0 \quad \forall u \in \mathcal{D}(\Lambda^*). \tag{3.1}$$

Обозначим через R_Q^* сопряженный R_Q оператор. Выделим симметрическую и кососимметрическую части оператора: $R_Q^{sym} = \dfrac{1}{2}(R_Q + R_Q^*)$ и $R_Q^{sk} = \dfrac{1}{2}(R_Q - R_Q^*)$.

Лемма 3.1. *Оператор $\partial_t R_Q : W(T) \to \mathcal{V}^*$ максимально монотонен.*

Доказательство. По построению $\mathcal{D}(\partial_t R_Q) = W(T) \subset W$, $\mathcal{D}(R_Q^*) = \mathcal{D}(R_Q)$. Кроме того,

$$(\partial_t R_Q)^* = R_Q^* \partial_t^* = \partial_t^* R_Q^* = -\partial_t R_Q^*.$$

То есть $\mathcal{D}(\partial_t R_Q^*) = W(T)$. Заметим, что

$$\left(R_Q u(t), u(t)\right)_{L_2(Q)} = \left(u(t), R_Q^* u(t)\right)_{L_2(Q)} = \left(R_Q^{sym} u(t), u(t)\right)_{L_2(Q)}.$$

Более того, согласно правилам дифференцирования,

$$\begin{aligned}\partial_t \left(R_Q u(t), u(t)\right)_{L_2(Q)} &= \left(\partial_t R_Q u(t), u(t)\right)_{L_2(Q)} + \left(R_Q u(t), \partial_t u(t)\right)_{L_2(Q)} = \\ &= \left(R_Q \partial_t u(t), u(t)\right)_{L_2(Q)} + \left(u(t), R_Q^* \partial_t u(t)\right)_{L_2(Q)} = 2\left(\partial_t R_Q^{sym} u(t), u(t)\right)_{L_2(Q)}.\end{aligned}$$

Поскольку $\langle \partial_t R_Q^{sk} u, u \rangle = 0$ и $u|_{t=T} = u|_{t=0}$, получаем, что

$$\begin{aligned}\langle \partial_t R_Q u, u \rangle = \langle \partial_t R_Q^{sym} u, u \rangle = \int_0^T \left(\partial_t R_Q^{sym} u(t), u(t)\right)_{L_2(Q)} dt = \frac{1}{2}\int_0^T \partial_t \left(R_Q u(t), u(t)\right)_{L_2(Q)} dt = \\ = \frac{1}{2}\left(R_Q u(T), u(T)\right)_{L_2(Q)} - \frac{1}{2}\left(R_Q u(0), u(0)\right)_{L_2(Q)} = 0.\end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\langle (\partial_t R_Q)^* u, u \rangle = -\langle \partial_t R_Q^* u, u \rangle = -\langle \partial_t R_Q^{sym} u, u \rangle = 0.$$

Условие (3.1) для оператора $\partial_t R_Q$ выполнено. □

4. Существование обобщенного решения. Условие эллиптичности

С 60-х годов прошлого века многими математиками рассматривались нелинейные дифференциальные уравнения в частных производных, см. [8] и библиографию. При этом ключевую роль играли псевдомонотонные операторы, принадлежность к классу которых определяли условия эллиптичности и коэрцитивности нелинейного дифференциального оператора. В данной работе мы рассматриваем уравнение с нелинейным дифференциально-разностным оператором и будем использовать условия эллиптичности и коэрцитивности для этого оператора. Подробно доказательства свойств нелинейных дифференциально-разностных операторов, удовлетворяющих алгебраическому условию эллиптичности, см. в [16].

Определение 4.1. Оператор $\mathcal{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ *деминепрерывен*, если он непрерывен из сильной топологии $\mathcal{V}$ в слабую топологию $\mathcal{V}^*$. Оператор $\mathcal{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ *ограничен*, если образ ограниченного множества ограничен.

Оператор $\mathcal{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ *коэрцитивен*, если существует элемент $u_0 \in \mathcal{V}$ такой, что
$$\lim_{\|u\|_{\mathcal{V}}\to\infty} \|u\|_{\mathcal{V}}^{-1}\langle \mathcal{A}u, u-u_0\rangle = \infty. \tag{4.1}$$

Определение 4.2. Пусть $u_n \rightharpoonup u$ слабо в W и
$$\varlimsup_{n\to\infty} \langle \mathcal{A}u_n, u_n - u\rangle \leqslant 0. \tag{4.2}$$
Если при этом
$$\varliminf_{n\to\infty} \langle \mathcal{A}u_n, u_n - \xi\rangle \geqslant \langle \mathcal{A}u, u-\xi\rangle \quad \forall \xi \in \mathcal{V}, \tag{4.3}$$
то оператор $\mathcal{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ называется *псевдомонотонным*[1] *на* W.

Будем использовать матрицы $\zeta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$; обозначим через $\zeta_{\cdot i}$ i-й столбец ζ, а через $\zeta_{l\cdot}$ обозначим l-ю строку ζ.

Теорема 4.1. *Пусть* $p \in (1,\infty)$, R_s *и* R_{s0} $(s = s(r), r \in B)$ *невырождены. Предположим, что справедливы условия*:

(A1) **Условие интегрируемости**[2]. $A_i(x,t,\xi)$, $i = 0,1,\dots,n$, *— функции типа Каратеодори, т. е.* A_i *измеримы по* x *и* t *для всех* $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ *и непрерывны по* $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ *для п. в.* $(x,t) \in \overline{\Omega_T}$; *более того, для п. в.* $(x,t) \in \overline{\Omega_T}$ *и любых* $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ *существуют* $c_1 > 0$, $g_1 \in L_q(\Omega_T)$ *такие, что*
$$|A_i(x,t,\xi)| \leqslant g_1(x,t) + c_1 \sum_{0\leqslant i\leqslant n} |\xi_i|^{p-1}, \qquad i = 0,\dots,n. \tag{4.4}$$

(A2) **Условие коэрцитивности.** *Для всех* s, *п. в.* $(x,t) \in \overline{Q_{s1}} \times [0,T]$ *и любых* $\zeta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$ *существуют* $\hat{p} \in (1,p)$, $c_2 > 0$ *и* $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$ *такие, что*
$$\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{0\leqslant i\leqslant n} A_i(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot})\left(R_s^{-1}\zeta_{\cdot i}\right)_l \geqslant c_2 \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\zeta_{li}|^p - c_3 \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} |\zeta_{l0}|^{\hat{p}} - c_4. \tag{4.5}$$

(A3) **Условие эллиптичности.** *Для всех* s, *п. в.* $(x,t) \in \overline{Q_{s1}} \times [0,T]$ *и любых* $\zeta,\eta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$
$$\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \left(A_i\left(x+h_{sl},t,\zeta_{l\cdot}\right) - A_i\left(x+h_{sl},t,\eta_{l\cdot}\right)\right)\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i}-\eta_{\cdot i})\right)_l > 0 \qquad \text{при} \quad \eta \neq \zeta. \tag{4.6}$$

Тогда для любого $f \in \mathcal{V}^*$ *существует обобщенное решение* $u \in W(T)$ *задачи* (1.1), (1.2), (1.5), *а множество решений слабо компактно в* $W(T)$.

---

[1] В [8] используется термин *псевдомонотонный на* $\mathcal{D}(\Lambda)$, где $\Lambda = \partial_t$.

[2] Условие интегрируемости (A1) является стандартным (с небольшими вариациями) для построения интегрального представления дифференциального оператора, см. [5, 7, 8] и др. Благодаря этому условию корректно задана интегральная форма
$$\langle A_R u, v\rangle = \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \int_{\Omega_T} A_i(x,t,R_Q u, \partial_1 R_Q u, \dots, \partial_n R_Q u)\partial_i v\, dx\, dt \qquad \forall u,v \in \mathcal{V};$$
здесь и ниже $\partial_0 v := v$.

Доказательство. В силу невырожденности оператора R_Q и условий (A1)–(A3) оператор A_R ограничен, деминепрерывен, коэрцитивен и псевдомонотонен на W, см. [16, леммы 4, 5 и 8]. Кроме того, оператор $\partial_t R_Q : W(T) \to \mathcal{V}^*$ максимально монотонен, см. лемму 3.1. Согласно [8, теорема 1.1, гл. 3] существует решение $u \in W(T)$ операторного уравнения (2.4). Множество решений уравнения (2.4) ограничено в силу коэрцитивности оператора $\partial_t R_Q + A_R$ и слабо компактно в $W(T)$ в силу псевдомонотонности на W оператора $\partial_t R_Q + A_R$. Значит, в силу ограниченности оператора R_Q и согласно теореме 2.2, множество решений $\{w = R_Q u\} \subset W_\gamma(T)$ операторного уравнения (1.8) непусто и слабо компактно. $\square$

5. Существование обобщенного решения. Условия сильной эллиптичности

В этом разделе будут рассмотрены дифференциально-разностные операторы, удовлетворяющие более сильному условию: алгебраическому условию сильной эллиптичности. С алгебраическим условием сильной эллиптичности связывают классы сильно монотонных операторов, а также операторов с полуограниченной вариацией, см. [3, 4]. Эти свойства важны при изучении проблем гладкости решения, единственности решения, а также используются в регуляризационных схемах. Условие сильной эллиптичности более вариативно, поскольку в правой части, в частности, может стоять достаточно произвольный положительно определенный полином, а левую часть можно выбирать в зависимости от дифференцируемости функций A_i. В данной работе будут рассмотрены наиболее простые варианты[1] условия сильной эллиптичности при $p \in [2, \infty)$.

Определение 5.1. Оператор $\mathcal{A} : \mathcal{V} \to \mathcal{V}^*$ называется *оператором с $(\mathcal{V}, W)$-полуограниченной вариацией*, если существует непрерывная функция C такая, что для любых $u, y \in W$, $\|u\|_\mathcal{V} \leqslant r$, $\|y\|_\mathcal{V} \leqslant r$, справедливо неравенство

$$\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}y, u - y\rangle \geqslant -C(r; \|u - y\|'_W), \tag{5.1}$$

где $\tau^{-1}C(r, \tau h) \to +0$ при $\tau \to 0$ для всех $r, h > 0$, а $\|\cdot\|'_W$ — компактная полунорма относительно $\|\cdot\|_W$ и непрерывная относительно $\|\cdot\|_\mathcal{V}$.

В качестве $\|\cdot\|'_W$ удобно рассмотреть $\|\cdot\|_{L_p(\Omega_T)}$. Компактность вложения $W \subset L_p(\Omega_T)$ известна, см., например, [8, гл. 3, п. 2, (2.16)] и [8, гл. 1, п. 5, теорема 5.1].

Теорема 5.1. *Пусть $p \in [2, \infty)$, R_s и R_{s0} $(s = s(r), r \in B)$ невырождены. Предположим, что справедливы условия интегрируемости и коэрцитивности* (A1)-(A2)*, а также выполнены:*

(A3) **Условие сильной эллиптичности.** *Для всех s, п. в. $(x, t) \in \overline{Q_{s1}} \times [0, T]$ и любых $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$ таких, что $\eta_{l0} = \zeta_{l0} \neq 0$, существует константа $\hat{\Upsilon} > 0$ такая, что*

$$\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \left(A_i\left(x + h_{sl}, t, \zeta_{l\cdot}\right) - A_i\left(x + h_{sl}, t, \eta_{l\cdot}\right)\right)\left(R_s^{-1}(\zeta_{\cdot i} - \eta_{\cdot i})\right)_l \geqslant \hat{\Upsilon} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\zeta_{li} - \eta_{li}|^p. \tag{5.2}$$

(A4) **Условие локальной липшицевости.** *Функции $A_i(x, t, \xi)$ $(i = \overline{1, n})$ локально липшицевы по ξ_0, $A_0(x, t, \xi)$ локально липшицева по ξ_j $(j = \overline{0, n})$ с константами Липшица Ψ, т. е. существует $\varepsilon > 0$ и функция типа Каратеодори[2] Ψ такие, что для любых $\delta \in \mathbb{R}^{n+1}$ $(|\delta| = \sum\limits_{0\leqslant j\leqslant n} |\delta_j| = |\delta_k| < \varepsilon)$*

$$|A_i(x, t, \xi + \delta) - A_i(x, t, \xi)| \leqslant \Psi(x, t, \xi)|\delta_k|, \tag{5.3}$$

$$|\Psi(x, t, \xi)| \leqslant g_\Psi(x, t) + \widehat{\Psi} \sum_{0\leqslant j\leqslant n} |\xi_j|^{p-2}, \tag{5.4}$$

где $\widehat{\Psi} > 0$, $g_\Psi \in L_{q'}(\Omega_T)$, $q' = p/(p-2)$ при $p > 2$ и $q' = \infty$ при $p = 2$.

Тогда для любого $f \in \mathcal{V}^* = L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$ существует обобщенное решение $u \in W(T)$ задачи (1.1), (1.2), (1.5)*, а множество решений слабо компактно в $W(T)$.*

[1] Случай $p \in (1, 2)$ позволяет упростить некоторые условия, но требует более сложного доказательства.

[2] $\Psi(x, t, \xi)$ измерима по x и t для всех $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ и непрерывна по $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ для п. в. $(x, t) \in \overline{\Omega_T}$.

Доказательство. В силу невырожденности оператора R_Q и условий (A1)–(A3) оператор A_R ограничен, деминепрерывен и коэрцитивен, см. [16, леммы 4 и 5]. Кроме того, A_R — оператор с $(\mathcal{V}, W)$-полуограниченной вариацией, см. [17, лемма 4.1], т. е. является псевдомонотонным на W, см. [9, предложение 4.2.2], например. Кроме того, оператор $\partial_t R_Q : W(T) \to \mathcal{V}^*$ максимально монотонен, см. лемму 3.1. Согласно [8, гл. 3, теорема 1.1], существует решение $u \in W(T)$ операторного уравнения (2.4). Множество решений уравнения (2.4) ограничено в силу коэрцитивности оператора $\partial_t R_Q + A_R$ и слабо компактно в $W(T)$ в силу псевдомонотонности на W оператора $\partial_t R_Q + A_R$. Значит, в силу ограниченности оператора R_Q и согласно теореме 2.2, множество решений $\{w = R_Q u\} \subset W_\gamma(T)$ операторного уравнения (1.8) непусто и слабо компактно. □

От условия коэрцитивности (A2) можно отказаться, если ограничить рост функций с производными младшего порядка.

Теорема 5.2. *Пусть* $p \in [2, \infty)$, R_s *и* R_{s0} $(s = s(r),\ r \in B)$ *невырождены. Пусть справедливы условия* (A3)-(A4). *Кроме того, предположим что справедливо условие*:

(A1') **Условие роста.** $A_i(x, t, \xi)$, $i = 0, 1, \ldots, n$ — *функции типа Каратеодори*; *более того, для п. в.* $(x, t) \in \overline{\Omega_T}$ *и любых* $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ *существуют* $p' \in (1, p)$, $c_1 > 0$ *и* $g_1 \in L_q(\Omega_T)$ *такие, что*

$$|A_i(x,t,\xi)| \leqslant g_1(x,t) + c_1|\xi_0|^{p'-1} + c_1 \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\xi_i|^{p-1}, \qquad i = 1, \ldots, n, \tag{5.5}$$

$$|A_0(x,t,\xi)| \leqslant g_1(x,t) + c_1 \sum_{0\leqslant i\leqslant n} |\xi_i|^{p'-1}. \tag{5.6}$$

Тогда для любого $f \in \mathcal{V}^* = L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$ *существует обобщенное решение* $u \in W(T)$ *задачи* (1.1), (1.2), (1.5), *а множество решений слабо компактно в* $W(T)$.

Доказательство. Из условия (A1') следует выполнение условия (A1), т. е. оператор A_R ограничен и деминепрерывен, см. [16, лемма 4]. Кроме того, A_R — оператор с $(\mathcal{V}, W)$-полуограниченной вариацией, см. [17, лемма 4.1]. Таким образом, доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 5.1, если показать, что A_R коэрцитивен. Это доказано в лемме 5.1, см. ниже. □

Лемма 5.1. *Пусть* $p \in [2, \infty)$, R_Q *невырожден и справедливы условия* (A1'), (A2) *и* (A4). *Тогда дифференциально-разностный оператор* $A_R : L_p(0, T; \mathring{W}_p^1(Q)) \to L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$ *коэрцитивен.*

Доказательство. Обозначим $w = R_Q u$, $u \in L_p(0, T; \mathring{W}_p^1(Q))$, причем в силу невырожденности оператора R_Q существует обратный оператор R_Q^{-1}. По определению оператора A_R

$$\langle A_R u, u\rangle = \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \int\limits_{\Omega_T} A_i(x,t,R_Q u, \nabla R_Q u)\partial_i u dx dt = \sum_{0\leqslant i\leqslant n} \int\limits_{\Omega_T} A_i(x,t,w,\nabla w) R_Q^{-1} \partial_i w dx dt =$$

$$= \sum_s \int\limits_0^T \int\limits_{\bigcup\limits_l Q_{sl}} \sum_{0\leqslant i\leqslant n} P_s A_i(x,t,w,\nabla w) U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w \, dx\, dt =$$

$$= \sum_s \int\limits_0^T \int\limits_{Q_{s1}} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \Big(U_s P_s \left(A_i(x,t,w,\nabla w) - A_i(x,w,\nabla 0)\right), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i (w - 0) \Big) \, dx\, dt +$$

$$+ \sum_s \int\limits_0^T \int\limits_{Q_{s1}} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \left(U_s P_s A_i(x,t,w,\nabla 0), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w \right) \, dx\, dt +$$

$$+ \sum_s \int\limits_0^T \int\limits_{Q_{s1}} \left(U_s P_s A_0(x,t,w,\nabla w), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w \right) \, dx\, dt = \sum_s \int\limits_0^T \int\limits_{Q_{s1}} (I_{s1} + I_{s2} + I_{s3}) \, dx\, dt, \tag{5.7}$$

где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $\mathbb{R}^{N(s)}$. Поскольку нас интересует поведение данного интеграла при $\|u\|_{\mathcal{V}} \to \infty$, то, не ограничивая общности, будем считать, что $u(x) \neq 0$ для почти всех $x \in Q$, т. е. $w(x) \neq 0$ для почти всех $x \in Q$.

Введем матрицу порядка $N(s) \times (n+1)$

$$\zeta = (U_s P_s w, U_s P_s \partial_1 w \ldots, U_s P_s \partial_n w),$$

а также матрицу η такую, что $\eta_{\cdot 0} = \zeta_{\cdot 0}$ и $\eta_{\cdot i} = 0 \ \forall i = 1, \ldots, n$.

Первую сумму правой части (5.7) оценим с помощью условия сильной эллиптичности:

$$I_{s1} = \sum_{1 \leqslant l \leqslant N(s)} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(A_i\left(x + h_{sl}, t, \zeta_{l\cdot}\right) - A_i\left(x + h_{sl}, t, \eta_{l\cdot}\right)\right) \left(R_s^{-1} \zeta_{\cdot i}\right)_l \geqslant$$
$$\geqslant \hat{\Upsilon} \sum_{1 \leqslant l \leqslant N(s)} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |\zeta_{li}|^p = \hat{\Upsilon} \sum_{1 \leqslant l \leqslant N(s)} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} |\partial_i w(x + h_{sl}, t)|^p .$$

То есть

$$\sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} I_{s1}\, dx\, dt \geqslant \hat{\Upsilon} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \|\partial_i w\|^p_{L_p(\Omega_T)} = \hat{\Upsilon} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \|R_Q \partial_i u\|^p_{L_p(\Omega_T)} \geqslant c_5 \hat{\Upsilon} \|u\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))}, \tag{5.8}$$

где $\|R_Q \partial_i u\|^p_{L_p(\Omega_T)} \geqslant c_5 \|\partial_i u\|^p_{L_p(\Omega_T)}$ в силу невырожденности линейного оператора R_Q.

Рассмотрим вторую сумму правой части (5.7) с учетом оценки роста (A1'):

$$\sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} |I_{s2}|\, dx\, dt \leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \int_{\Omega_T} |A_i(x, t, w, \nabla 0) \partial_i u|\, dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \int_{\Omega_T} \left(g_1(x,t) + c_1 |w(x,t)|^{p'-1}\right) |\partial_i u(x,t)|\, dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \left(\|g_1\|_{L_q(\Omega_T)} + c_6 \|w\|^{p'-1}_{L_p(\Omega_T)}\right) \|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} \leqslant$$
$$\leqslant \|g_1\|_{L_q(\Omega_T)} \|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} + c_6 c_7^{p'-1} \|u\|^{p'-1}_{L_p(\Omega_T)} \|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} \leqslant$$
$$\leqslant \|g_1\|_{L_q(\Omega_T)} \|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} + \frac{c_6 c_7^{p'-1}}{p'} \left(\|u\|^{p'}_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} + (p'-1) \|u\|^{p'}_{L_p(\Omega_T)}\right), \tag{5.9}$$

где $\|w\|_{L_p(\Omega_T)} = \|R_Q u\|_{L_p(\Omega_T)} \leqslant c_7 \|u\|_{L_p(\Omega_T)}$ в силу ограниченности оператора R_Q.

Аналогично для третьего слагаемого правой части (5.7) имеем

$$\sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} |I_{s3}|\, dx\, dt \leqslant \int_{\Omega_T} |A_0(x, t, w, \nabla w) u|\, dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \int_{\Omega_T} \left(g_1(x,t) + c_1 |w(x,t)|^{p'-1} + c_1 \sum_{1 \leqslant j \leqslant n} |\partial_j w(x,t)|^{p'-1}\right) |u(x,t)|\, dx\, dt \leqslant$$
$$\leqslant \left(\|g_1\|_{L_q(\Omega_T)} + c_6 \|w\|^{p'-1}_{L_p(0,T;W_p^1(Q))}\right) \|u\|_{L_p(\Omega_T)} \leqslant$$
$$\leqslant \|g_1\|_{L_q(Q)} \|u\|_{L_p(\Omega_T)} + c_6 c_7^{p'-1} \|u\|^{p'}_{L_p(\Omega_T)} + c_6 c_7^{p'-1} \|u\|^{p'-1}_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} \|u\|_{L_p(\Omega_T)} \leqslant$$
$$\leqslant \|g_1\|_{L_q(Q)} \|u\|_{L_p(\Omega_T)} + c_6 c_7^{p'-1} \|u\|^{p'}_{L_p(\Omega_T)} + \frac{c_6 c_7^{p'-1}}{p'} \left((p'-1) \|u\|^{p'}_{L_p(0,T;\mathring{W}_p^1(Q))} + \|u\|^{p'}_{L_p(\Omega_T)}\right). \tag{5.10}$$

Таким образом, подставляя оценки (5.8)–(5.10) в (5.7), мы имеем:

$$\langle A_R u, u\rangle \geqslant c_2 \hat{\Upsilon} \|u\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} - \|g_1\|_{L_q(\Omega_T)} \|u\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} - \\ - c_6 c_7^{p'-1} \|u\|^{p'}_{L_p(\Omega_T)} - c_6 c_7^{p'-1} \|u\|^{p'}_{L_p(0,T;W^1_p(Q))}. \quad (5.11)$$

Первое слагаемое правой части (5.11) строго положительно и имеет степень роста $p > 1$. Остальные слагаемые имеют степень роста 1 и $p' < p$. Следовательно, A_R коэрцитивен. □

Пусть коэффициенты A_i дифференцируемы, $p \in [2, \infty)$, т. е. существуют производные $A_{ij}(x,t,\xi) := \dfrac{\partial A_i(x,t,\xi)}{\partial \xi_j}$, $i,j = 0,\dots,n$, интегрируемые в соответствующих пространствах:

$$|A_{ij}(x,t,\xi)| \leqslant g_2(x,t) + c_8 \sum_{0\leqslant i\leqslant n} |\xi_i|^{p-2}, \qquad i = 0,\dots,n, \quad (5.12)$$

где $c_8 > 0$, $g_2 \in L_{q'}(\Omega_T)$, $\dfrac{1}{q'} + \dfrac{2}{p} = 1$. Тогда можно сформулировать теорему существования решения для случая, когда дифференциально-разностный оператор удовлетворяет другому условию сильной эллиптичности.

Теорема 5.3. *Пусть $p \in [2,\infty)$, R_s и R_{s0} ($s = s(r)$, $r \in B$) невырождены. Пусть коэффициенты дифференциального оператора удовлетворяют условиям роста* (A1’) *и оценке дифференцируемости* (5.12). *Кроме того, пусть справедливо следующее алгебраическое условие сильной эллиптичности: для любого класса s, п. в. $(x,t) \in \overline{Q_{s1}} \times [0,T]$ и любых $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{N(s)\times(n+1)}$:*

$$\sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} r^s_{lm} A_{ij}\left(x + h_{sl}, t, \zeta_{l\cdot}\right) \eta_{mj} \eta_{li} \geqslant \hat{\Upsilon} \sum_{1\leqslant l\leqslant N(s)} \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\zeta_{li}|^{p-2} |\eta_{li}|^2. \quad (5.13)$$

Тогда для любого $f \in \mathcal{V}^* = L_q(0,T; W^{-1}_q(Q))$ существует обобщенное решение $u \in W(T)$ задачи (1.1), (1.2), (1.5), *а множество решений слабо компактно в $W(T)$.*

Доказательство. Очевидно, что доказательство теоремы аналогично доказательству теоремы 5.2, если показать, что A_R — оператор с $(\mathcal{V}, W)$-полуограниченной вариацией. Это доказано в лемме 5.2, см. ниже. □

Лемма 5.2. *Пусть $p \in [2,\infty)$, R_Q невырожден и справедливы условия* (A1), (5.12) *и* (5.13). *Тогда A_R — оператор с $(\mathcal{V}, W)$-полуограниченной вариацией.*

Доказательство. Разобъем интегральную форму на три слагаемых:

$$\langle A_R u - A_R y, u - y\rangle = \langle \mathcal{A}^1_R(u,u) - \mathcal{A}^1_R(u,y), u - y\rangle + \\ + \langle \mathcal{A}^1_R(u,y) - \mathcal{A}^1_R(y,y), u - y\rangle + \langle \mathcal{A}^0_R u - \mathcal{A}^0_R y, u - y\rangle, \quad (5.14)$$

где

$$\langle \mathcal{A}^0_R u, y\rangle = \int_{\Omega_T} A_0(x,t,R_Q u, \nabla R_Q u) y \, dx\, dt,$$

$$\langle \mathcal{A}^1_R(u,y), v\rangle = \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int_{\Omega_T} A_i(x,t,R_Q u, \nabla R_Q y)\, \partial_i v \, dx\, dt.$$

Заметим, что в силу условий (5.13), (5.12) оператор $\mathcal{A}^1_R(u,\cdot)$ («главная часть» оператора A_R, содержащая слагаемые со старшими производными) сильно монотонен, причем

$$\langle \mathcal{A}^1_R(u,u) - \mathcal{A}^1_R(u,y), u - y\rangle \geqslant c_9 \hat{\Upsilon} \|u - y\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))}, \quad (5.15)$$

см. [22, теорема 1]. Для оценки остальных слагаемых воспользуемся оценками интегрируемости (A1) и дифференцируемости (5.12). Второе слагаемое правой части (5.14) оценивается как

$$\left|\langle \mathcal{A}^1_R(u,y) - \mathcal{A}^1_R(y,y), u - y\rangle\right| \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_{\Omega_T} |A_i(x,t,R_Qu,\nabla R_Qy) - A_i(x,t,R_Qy,\nabla R_Qy)\,\partial_i(u-y)|\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{1\leqslant i\leqslant n} \int\limits_{\Omega_T} \left| \int\limits_0^1 A_{i0}(x,t,\tau R_Qu + (1-\tau)R_Qy, \nabla R_Qy)\,d\tau \right| |u-y|\;|\partial_i(u-y)|\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{\Omega_T} \left(g_2(x,t) + c_8 \int\limits_0^1 |\tau R_Qu + (1-\tau)R_Qy|^{p-2}\,d\tau + c_8 \sum_{1\leqslant k\leqslant n} |\partial_k R_Qy|^{p-2} \right) \times$$

$$\times |R_Qu - R_Qy| \sum_{1\leqslant i\leqslant n} |\partial_i(u-y)|\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\|g_2\|_{L_{q'}(\Omega_T)} + c_8\|R_Qu\|^{p-2}_{L_p(\Omega_T)} + c_8\|R_Qy\|^{p-2}_{L_p(\Omega_T)} + c_8\|R_Qy\|^{p-2}_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} \right) \times$$

$$\times \|R_Qu - R_Qy\|_{L_p(\Omega_T)}\|u-y\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))},$$

т. к.

$$\|R_Qu\|^{p-2}_{L_p(\Omega_T)} \leqslant c_7\|u\|^{p-2}_{L_p(\Omega_T)}$$

в силу ограниченности оператора R_Q и

$$\|u\|^{p-2}_{L_p(\Omega_T)} \leqslant c_{10}\|u\|^{p-2}_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))},$$

см. неравенство Фридрихса. То есть для всех y и u из шара радиуса r_1

$$\|g_2\|_{L_{q'}(\Omega_T)} + c_8\|R_Qu\|^{p-2}_{L_p(\Omega_T)} + c_8\|R_Qy\|^{p-2}_{L_p(\Omega_T)} + c_8\|R_Qy\|^{p-2}_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} \leqslant \hat{c}_1(r_1) < \infty,$$

где $\hat{c}_(r_1) = \|g_2\|_{L_{q'}(\Omega_T)} + c_8c_7^{p-2}(1+2c_{10})r_1^{p-2}$. Таким образом,

$$\left|\langle \mathcal{A}^1_R(u,y) - \mathcal{A}^1_R(y,y), u-y\rangle\right| \leqslant \hat{c}_1(r_1)\,\|R_Qu - R_Qy\|_{L_p(\Omega_T)}\|u-y\|_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{\varepsilon^p}{p}\|u-y\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} + \frac{c_7^q\hat{c}_1^q(r_1)}{\varepsilon^q q}\|u-y\|^q_{L_p(\Omega_T)}. \quad (5.16)$$

Аналогично для третьего слагаемого правой части (5.14) имеем

$$\left|\langle \mathcal{A}^0_Ru - \mathcal{A}^0_Ry, u-y\rangle\right| \leqslant \int\limits_{\Omega_T} |A_0(x,t,R_Qu,\nabla R_Qu) - A_0(x,t,R_Qy,\nabla R_Qy)\,(u-y)|\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{0\leqslant j\leqslant n} \int\limits_{\Omega_T} \left(g_2(x,t) + c_8 \sum_{1\leqslant k\leqslant j} |\partial_k R_Qu|^{p-2} + c_8 \sum_{j\leqslant k\leqslant n} |\partial_k R_Qy|^{p-2} \right) |\partial_j(R_Qu - R_Qy)|\;|u-y|\,dx\,dt \leqslant$$

$$\leqslant \left(\|g_2\|_{L_{q'}(\Omega_T)} + c_8\|R_Qu\|^{p-2}_{L_p(0,T;W^1_p(Q))} + c_8\|R_Qy\|^{p-2}_{L_p(0,T;W^1_p(Q))} \right) \times$$

$$\times \|R_Qu - R_Qy\|_{L_p(0,T;W^1_p(Q))}\,\|u-y\|_{L_p(\Omega_T)} \leqslant$$

$$\leqslant \hat{c}_2(r_1)c_7\,\|u-y\|_{L_p(0,T;W^1_p(Q))}\,\|u-y\|_{L_p(\Omega_T)},$$

где $\hat{c}_2(r_1) = \|g_2\|_{L_{q'}(\Omega_T)} + 2c_8c_7^{p-2}(1+c_{10})r_1^{p-2}$. То есть

$$\left|\langle \mathcal{A}^0_Ru - \mathcal{A}^0_Ry, u-y\rangle\right| \leqslant \hat{c}_2(r_1)c_7\,\|u-y\|^2_{L_p(\Omega_T)} + \frac{\varepsilon^p}{p}\|u-y\|^p_{L_p(0,T;\mathring{W}^1_p(Q))} + \frac{c_7^q\hat{c}_2^q(r_1)}{\varepsilon^q q}\|u-y\|^q_{L_p(\Omega_T)}. \quad (5.17)$$

Выбрав $\varepsilon^p = c_9\hat{\Upsilon}p/2$ и подставив оценки (5.15), (5.16), (5.17) в (5.14) мы получим, что

$$\langle A_Ru - A_Ry, u-y\rangle \geqslant -\frac{c_7^q}{\varepsilon^q q}\left(\hat{c}_1^q(r_1) + \hat{c}_2^q(r_1)\right)\|u-y\|^q_{L_p(\Omega_T)} - \hat{c}_2(r_1)c_7\,\|u-y\|^2_{L_p(\Omega_T)}.$$

Поскольку $q>1$, $2>1$ и $W \subset L_p(\Omega_T)$ компактно, то A_R — оператор с $(\mathcal{V},W)$-полуограниченной вариацией. $\square$

Замечание. В работе рассмотрено уравнение с неклассическими краевыми условиями. Для определения типа уравнения были использованы методы нелинейного анализа. Поскольку доказано, что в уравнении (2.4) в первом слагаемом левой части стоит линейный, плотно определенный, максимально монотонный оператор, а во втором — оператор псевдомонотонного типа, то это позволяет определить уравнение (2.4) как уравнение параболического типа, см. [8]. Следовательно, эквивалентное уравнение (1.8) также будет уравнением параболического типа, что и определяет исходную задачу (1.1), (1.2), (1.5) как параболическую.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бадерко Е. А., Черепова М. Ф.* Смешанная задача для параболической системы на плоскости и граничные интегральные уравнения// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2018. — *64*, № 1. — С. 20–36.
2. *Бицадзе А. В., Самарский А. А.* О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических задач// Докл. АН СССР. — 1969. — *185*, № 4. — С. 739–740.
3. *Дубинский Ю. А.* Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка// Усп. мат. наук. — 1968. — *23*, № 1. — С. 45–90.
4. *Дубинский Ю. А.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. — 1976. — *9*. — С. 5–130.
5. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторно-дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978.
6. *Камынин Л. И.* О единственности решения краевой задачи с граничными условиями А. А. Самарского для параболического уравнения второго порядка // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1976. — *16*, № 6. — С. 1480–1488.
7. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. — М.: Гостехиздат, 1956.
8. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.
9. *Мельник В. С., Згуровский М. З.* Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. — Киев: Наукова думка, 1999.
10. *Самарский А. А.* О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений// Дифф. уравн. — 1980. — *16*, № 1. — С. 1925–1935.
11. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5. — С. 3–112.
12. *Солонуха О. В.* Об одной нелинейной нелокальной задаче эллиптического типа// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2017. — *57*, № 3. — С. 60–72.
13. *Солонуха О. В.* О разрешимости линейной параболической задачи с нелокальными краевыми условиями// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2021. — *67*, № 2. — С. 349–362.
14. *Солонуха О. В.* О периодических решениях параболических квазилинейных уравнений с краевыми условиями типа Бицадзе—Самарского// Докл. РАН. — 2022. — *503*. — С. 83–86.
15. *Солонуха О. В.* Нелинейные дифференциально-разностные уравнения эллиптического и параболического типа и их приложения к нелокальным задачам// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2023. — *69*, № 3. — С. 445–563.
16. *Солонуха О. В.* О разрешимости нелинейных параболических функционально-дифференциальных уравнений со сдвигами по пространственным переменным// Мат. заметки. — 2023. — *113*, № 5. — С. 757–773.
17. *Солонуха О. В.* О разрешимости параболических уравнений с существенно нелинейными дифференциально-разностными операторами// Сиб. мат. ж. — 2023. — *64*, № 5. — С. 1094–1113.
18. *Baderko E. A., Cherepova M. F.* Bitsadze-Samarskii problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients// Complex Var. Elliptic Equ. — 2019. — *64*, № 5. — С. 753–765.
19. *Carleman T.* Sur la theorie des equations integrales et ses applications// Verhandlungen des Internat. Math. Kongr., Zürich. — 1932. — *1*. — С. 138–151.
20. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.
21. *Solonukha O. V.* On periodic solutions of linear parabolic problems with nonlocal boundary conditions// Тавр. вестн. информ. и мат. — 2021. — *51*, № 2. — С. 7–11.
22. *Solonukha O. V.* The first boundary value problem for quasilinear parabolic differential-difference equations// Lobachevskii J. Math. — 2021. — *42*, № 5. — С. 1067–1077.
23. *Solonukha O. V.* On nonlinear nonlocal parabolic problem// Russ. J. Math. Phys. — 2022. — *29*, № 1. — С. 121–140.

О. В. Солонуха
Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия
E-mail: solonukha@yandex.ru

UDC 517.9
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-4-712-725
EDN: ZSASZP

On the existence of time-periodic solutions of nonlinear parabolic differential equations with nonlocal boundary conditions of the Bitsadze–Samarskii type

O. V. Solonukha

Federal Research Center "Computer Science and Control" of the RAS, Moscow, Russia

Abstract. We study a nonlinear parabolic differential equation in a bounded multidimensional domain with nonlocal boundary conditions of the Bitsadze–Samarskii type. We prove existence theorems for a periodic in time generalized solution. Sufficient conditions for the existence of generalized solutions contain either an algebraic ellipticity condition or an algebraic strong ellipticity condition for the auxiliary differential-difference operator.

Keywords: parabolic differential equation, nonlocal boundary conditions of the Bitsadze–Samarskii type, operator of shifts in spatial variables, pseudomonotone operator.

Conflict-of-interest. The author declares no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The author thanks the reviewer for comments that helped to improve this paper. The author declares that no financial support was received.

For citation: O. V. Solonukha, "On the existence of time-periodic solutions of nonlinear parabolic differential equations with nonlocal boundary conditions of the Bitsadze–Samarskii type," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 4, 712–725. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-4-712-725

REFERENCES

1. E. A. Baderko and M. F. Cherepova, "Smeshannaya zadacha dlya parabolicheskoy sistemy na ploskosti i granichnye integral'nye uravneniya" [Mixed problems for plane parabolic systems and boundary integral equations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2018, **64**, No. 1, 20–36 (in Russian).
2. A. V. Bitsadze and A. A. Samarskiy, "O nekotorykh prosteyshikh obobshcheniyakh lineynykh ellipticheskikh zadach" [On some simple generalizations of linear elliptic problems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1969, **185**, No. 4, 739–740 (in Russian).
3. Yu. A. Dubinskiy, "Kvazilineynye ellipticheskie i parabolicheskie uravneniya lyubogo poryadka" [Quasilinear elliptic and parabolic equations of any order], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1968, **23**, No. 1, 45–90 (in Russian).
4. Yu. A. Dubinskiy, "Nelineynye ellipticheskie i parabolicheskie uravneniya" [Nonlinear elliptic and parabolic equations], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. mat.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math.], 1976, **9**, 5–130 (in Russian).

5. H. Gajewski, K. Groeger, and K. Zacharias, *Nelineynye operatornye uravneniya i operatorno-differentsial'-nye uravneniya* [Nonlinear Operator Equations and Operator Differential Equations], Mir, Moscow, 1978 (Russian translation).
6. L. I. Kamynin, "O edinstvennosti resheniya kraevoy zadachi s granichnymi usloviyami A. A. Samarskogo dlya parabolicheskogo uravneniya vtorogo poryadka" [On the uniqueness of the solution to a boundary-value problem with A. A. Samarsky boundary conditions for a second-order parabolic equation], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 1976, **16**, No. 6, 1480–1488 (in Russian).
7. M. A. Krasnosel'skii, *Topologicheskie metody v teorii nelineynykh integral'nykh uravneniy* [Topological methods in the theory of nonlinear integral equations], Gostekhizdat, Moscow, 1956 (in Russian).
8. J.-L. Lions, *Nekotorye metody resheniya nelineynykh kraevykh zadach* [Some Methods of Solving Non-Linear Boundary Value Problems], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
9. V. S. Mel'nik and M. Z. Zgupovskii, *Nelineynyy analiz i uppavlenie beskonechnomepnymi sistemami* [Nonlinear Analysis and Control for Infinite-Dimensional Systems], Naukova Dumka, Kiev, 1999 (in Russian).
10. A. A. Samarskii, "O nekotorykh problemakh teorii differentsial'nykh uravneniy" [On some problems of the theory of differential equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1980, **16**, No. 1, 1925–1935 (in Russian).
11. A. L. Skubachevskii, "Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy i ikh prilozheniya" [Boundary-value problems for elliptic functional differential equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 3–112 (in Russian).
12. O. V. Solonukha, "Ob odnoy nelineynoy nelokal'noy zadache ellipticheskogo tipa" [On one nonlinear nonlocal problem of elliptic type], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2017, **57**, No. 3, 60–72 (in Russian).
13. O. V. Solonukha, "O razreshimosti lineynoy parabolicheskoy zadachi s nelokal'nymi kraevymi usloviyami" [On solvability of a linear parabolic problem with nonlocal boundary conditions], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2021, **67**, No. 2, 349–362 (in Russian).
14. O. V. Solonukha, "O periodicheskikh resheniyakh parabolicheskikh kvazilineynykh uravneniy s kraevymi usloviyami tipa Bitsadze—Samarskogo" [On periodic solutions of parabolic quasilinear equations with boundary conditions of Bitsadze–Samarsky type], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2022, **503**, 83–86 (in Russian).
15. O. V. Solonukha, "Nelineynye differentsial'no-raznostnye uravneniya ellipticheskogo i parabolicheskogo tipa i ikh prilozheniya k nelokal'nym zadacham" [Nonlinear differential-difference equations of elliptic and parabolic type and their applications to nonlocal problems], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2023, **69**, No. 3, 445–563 (in Russian).
16. O. V. Solonukha, "O razreshimosti nelineynykh parabolicheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy so sdvigami po prostranstvennym peremennym" [On the solvability of nonlinear parabolic functional differential equations with shifts in spatial variables], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2023, **113**, No. 5, 757–773 (in Russian).
17. O. V. Solonukha, "O razreshimosti parabolicheskikh uravneniy s sushchestvenno nelineynymi differentsial'no-raznostnymi operatorami" [On the solvability of parabolic equations with essentially nonlinear differential-difference operators], *Sib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 2023, **64**, No. 5, 1094–1113 (in Russian).
18. E. A. Baderko and M. F. Cherepova, "Bitsadze-Samarskii problem for parabolic systems with Dini continuous coefficients," *Complex Var. Elliptic Equ.*, 2019, **64**, No. 5, 753–765.
19. T. Carleman, "Sur la theorie des equations integrales et ses applications," *Verhandlungen des Internat. Math. Kongr., Zürich*, 1932, **1**, 138–151.
20. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1997.
21. O. V. Solonukha, "On periodic solutions of linear parabolic problems with nonlocal boundary conditions," *Tavr. vestn. inform. i mat.* [Tavricheskiy Bull. Inform. Math.], 2021, **51**, No. 2, 7–11.
22. O. V. Solonukha, "The first boundary value problem for quasilinear parabolic differential-difference equations," *Lobachevskii J. Math.*, 2021, **42**, No. 5, 1067–1077.
23. O. V. Solonukha, "On nonlinear nonlocal parabolic problem," *Russ. J. Math. Phys.*, 2022, **29**, No. 1, 121–140.

O. V. Solonukha
Federal Research Center "Computer Science and Control" of the RAS, Moscow, Russia
E-mail: `solonukha@yandex.ru`