

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ



СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ  
НАПРАВЛЕНИЯ

Том 69, № 3, 2023

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-3

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Научный журнал  
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.

Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение  
высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

---

**Главный редактор**

*Р. В. Гамкрелидзе,*

д.ф.-м.н., профессор,

академик РАН,

Математический институт им.

В. А. Стеклова РАН, Москва,

Россия

**E-mail:** gam@mi.ras.ru

**Зам. главного редактора**

*А. Л. Скубачевский,*

д.ф.-м.н., профессор,

Российский университет

дружбы народов, Москва,

Россия

**E-mail:** skubachevskii-al@rudn.ru

**Ответственный секретарь**

*Е. М. Варфоломеев,*

к.ф.-м.н.,

Российский университет

дружбы народов, Москва,

Россия

**E-mail:** varfolomeev-em@rudn.ru

**Члены редакционной коллегии**

*А. А. Азрачев,* д.ф.-м.н., профессор, Международная школа передовых исследований (SISSA), Триест, Италия; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

*П. С. Красильников,* д.ф.-м.н., профессор, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

*А. Б. Муравник,* д.ф.-м.н., Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

*А. В. Овчинников,* к.ф.-м.н., доцент, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва, Россия

*В. Л. Попов,* д.ф.-м.н., профессор, член-корр. РАН, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

*А. В. Сарычев,* д.ф.-м.н., профессор, Флорентийский университет, Флоренция, Италия

## Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

4 выпуска в год

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.

Включен в каталог подписных изданий агентства «Роспечать», индекс 36832.

Индексируется в РИНЦ и международных базах данных *MathSciNet* и *Zentralblatt Math*.

Полный текст журнала размещен в базах данных компании *EBSCO Publishing* на платформе *EBSCOhost*.

Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences (New York)*.

### Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты.

Правила оформления статей, архив публикаций в открытом доступе и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала: <http://journals.rudn.ru/cmfd>, <http://www.mathnet.ru/cmfd>.

---

**Редактор: Е. М. Варфоломеев**

**Компьютерная верстка: Е. М. Варфоломеев**

**Адрес редакции:**

115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3  
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: [cmfdj@rudn.ru](mailto:cmfdj@rudn.ru)

Подписано в печать 10.07.2023. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.

Усл. печ. л. 21,86. Тираж 100 экз. Заказ 1143.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования  
«Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» (РУДН)

117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

**Отпечатано в типографии ИПК РУДН**

115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3  
тел. +7 495 952-04-41; e-mail: [publishing@rudn.ru](mailto:publishing@rudn.ru)

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba



CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 69, No. 3, 2023

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-3

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Founded in 2003

Founder: Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

---

**EDITOR-IN-CHIEF**

*Revaz Gamkrelidze*,  
Steklov Mathematical Institute  
of Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russia  
**E-mail:** gam@mi.ras.ru

**DEPUTY EDITOR**

*Alexander Skubachevskii*,  
RUDN University  
Moscow, Russia  
**E-mail:** skubachevskii-al@rudn.ru

**EXECUTIVE SECRETARY**

*Evgeniy Varfolomeev*,  
RUDN University  
Moscow, Russia  
**E-mail:** varfolomeev-em@rudn.ru

**EDITORIAL BOARD**

*Andrei Agrachev*, International School for Advanced Studies (SISSA), Trieste, Italy; Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*Pavel Krasil'nikov*, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

*Andrey Muravnik*, RUDN University, Moscow, Russia

*Alexey Ovchinnikov*, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; Russian Institute for Scientific and Technical Information of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*Vladimir Popov*, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*Andrei Sarychev*, University of Florence, Florence, Italy

**CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS**  
Published by the Peoples' Friendship University of Russia  
named after Patrice Lumumba, Moscow, Russian Federation

**ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)**

4 issues per year

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Indexed by *Russian Index of Science Citation*, *MathSciNet*, *Zentralblatt Math*.

The full texts can be found in the *EBSCOhost* databases by *EBSCO Publishing*.

Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences (New York)*.

**Aims and Scope**

*Contemporary Mathematics. Fundamental Directions* is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results.

Guidelines for authors, free accessible archive of issues, and other information can be found at the journal's website: <http://journals.rudn.ru/cmfd>, <http://www.mathnet.ru/eng/cmfd>.

---

**Editor: E. M. Varfolomeev**  
**Computer design: E. M. Varfolomeev**

**Address of the Editorial Office:**  
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia  
Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: [cmfdj@rudn.ru](mailto:cmfdj@rudn.ru)

Print run 100 copies.

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba (RUDN University), Moscow, Russia  
6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia

**Printed at RUDN Publishing House:**  
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia  
Tel. +7 495 952-04-41; e-mail: [publishing@rudn.ru](mailto:publishing@rudn.ru)

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Беляева Ю. О., Скубачевский А. Л.</i> О глобальных слабых решениях уравнений Власова—Пуассона с внешним магнитным полем . . . . .	383
<i>Иванов Н. О.</i> Гладкость обобщенных решений краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения второго порядка со смешанными граничными условиями . . . . .	399
<i>Лазарева Г. Г., Оксогоева И. П., Судников А. В.</i> Математическая модель переноса вещества в винтовом магнитном поле с использованием граничных условий на бесконечности . . . . .	418
<i>Махмуд Э. И.</i> Аналитическое решение пространственно-временного дробного уравнения реакции—диффузии с переменными коэффициентами . . . . .	430
<i>Солонуха О. В.</i> Нелинейные дифференциально-разностные уравнения эллиптического и параболического типа и их приложения к нелокальным задачам . . . . .	445

## CONTENTS

<i>Belyaeva Yu. O., Skubachevskii A. L.</i> On global weak solutions of the Vlasov–Poisson equations with external magnetic field . . . . .	383
<i>Ivanov N. O.</i> Smoothness of generalized solutions of a boundary-value problem for a second-order differential-difference equation with mixed boundary conditions . . . . .	399
<i>Lazareva G. G., Oksogoeva I. P., Sudnikov A. V.</i> Mathematical model of matter transfer in a helical magnetic field using boundary conditions at infinity . . . . .	418
<i>Mahmoud E. I.</i> Analytical solution of the space-time fractional reaction–diffusion equation with variable coefficients . . . . .	430
<i>Solonukha O. V.</i> Nonlinear differential-difference equations of elliptic and parabolic type and their applications to nonlocal problems . . . . .	445

УДК 517.95

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-3-383-398

EDN: FITUOA

## О ГЛОБАЛЬНЫХ СЛАБЫХ РЕШЕНИЯХ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА—ПУАССОНА С ВНЕШНИМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Ю. О. БЕЛЯЕВА, А. Л. СКУБАЧЕВСКИЙ

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

**Аннотация.** Рассматривается первая смешанная задача для системы уравнений Власова—Пуассона с заданным внешним магнитным полем в ограниченной области. Эта задача описывает кинетику высокотемпературной плазмы в установках управляемого термоядерного синтеза и рассматривается относительно неизвестных функций — потенциала электрического поля, функций распределения положительно заряженных ионов и электронов. Дополнительно предполагается, что функции распределения заряженных частиц удовлетворяют условию зеркального отражения от границы рассматриваемой области. В работе доказано существование глобальных слабых решений такой задачи.

**Ключевые слова:** уравнения Власова, слабые решения, внешнее магнитное поле.

**Заявление о конфликте интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Благодарности и финансирование.** Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-21-00392.

**Для цитирования:** Ю. О. Беляева, А. Л. Скубачевский. О глобальных слабых решениях уравнений Власова—Пуассона с внешним магнитным полем // *Соврем. мат. Фундам. направл.* 2023. Т. 69, № 3. С. 383–398. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-3-383-398>

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Идея использования термоядерного синтеза в качестве потенциальной основы энергетики будущего получила развитие еще в начале 50-х годов прошлого столетия и на сегодняшний день представляет собой важнейшее научное направление [3]. Физическая реализация этого процесса осуществляется в установках, принципом действия которых является удержание высокотемпературной плазмы строго внутри ректора за счет действия магнитных и электрических полей специальной конфигурации. Примерами таких установок являются токамаки, пробочные ловушки и др. Подробное описание принципов работы подобных установок можно найти в [3].

Математически, в зависимости от степени детализации, плазму можно описывать различными уравнениями. Для описания кинетики высокотемпературной плазмы используют систему уравнений Власова—Пуассона. Для каждого типа частиц (положительно заряженных ионов и электронов) рассматривается функция распределения, которая описывает число частиц в элементе объема пространства координат и скоростей (фазового пространства). Как в физике, так и в математике уравнениям Власова посвящено большое количество работ (см. [1–8, 10, 12–14]).

Основываясь на физическом смысле исследуемой задачи, важно учитывать следующие факторы. Высокотемпературная плазма обладает свойством квазинейтральности, поэтому естественно

рассматривать двухкомпонентную модель плазмы. В действующих установках, осуществляющих управляемый термоядерный синтез (пробочные ловушки, токамаки), удержание высокотемпературной плазмы строго внутри реактора достигается за счет действия магнитных полей особой конфигурации. Поэтому важно полагать их нетривиальными. Отметим, что *высокотемпературной* называют полностью ионизированную плазму с температурой миллион градусов Цельсия и выше. В отличие от работ других авторов, в данной работе учитываются перечисленные физические факторы.

Классические решения смешанных задач для уравнений Власова—Пуассона для двухкомпонентной плазмы с внешним магнитным полем и носителями функций распределения заряженных частиц, лежащими на расстоянии от границ рассматриваемых областей, в случае полупространства и бесконечного цилиндра впервые рассматривались в работах [4–6]. В общей постановке существование классических решений такой задачи является нерешенной проблемой.

Данная работа посвящена доказательству существования глобальных слабых решений первой смешанной задачи для системы уравнений Власова—Пуассона с условиями зеркального отражения на функции распределения заряженных частиц.

Слабые решения для однокомпонентной плазмы без учета действия магнитного поля рассматривались в работах [1, 13, 14]. В отличие от работ [13, 14], в данной работе рассматривается модель двухкомпонентной плазмы под действием заданного нетривиального внешнего магнитного поля. В отличие от [1], в работе дополнительно рассматриваются граничные условия вида (2.7).

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть  $Q \subset \mathbb{R}^3$  — ограниченная область с границей  $\partial Q \in C^\infty$ . Рассмотрим систему уравнений Власова—Пуассона:

$$-\Delta\varphi(x, t) = 4\pi e \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta} \beta f^\beta(x, v, t) dv, \quad x \in Q, \quad 0 < t < T, \quad \beta = \pm 1, \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial f^\beta}{\partial t} + \langle v, \nabla_x f^\beta \rangle + \frac{\beta e}{m_\beta} \left\langle -\nabla_x \varphi + \frac{1}{c} [v, B], \nabla_v f^\beta \right\rangle = 0, \quad (2.2)$$

$$x \in Q, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad 0 < t < T, \quad \beta = \pm 1,$$

где  $\varphi(x, t)$  и  $f^\beta(x, v, t)$  ( $\beta = \pm 1$ ) — неизвестные функции. Здесь  $\varphi = \varphi(x, t)$  — потенциал самосогласованного электрического поля;  $f^\beta = f^\beta(x, v, t)$  — функции распределения частиц: положительно заряженных ионов, если  $\beta = +1$ , и электронов, если  $\beta = -1$ , в точке  $x$  со скоростью  $v$  в момент времени  $t$ ;  $\nabla_x$  и  $\nabla_v$  — градиенты по  $x$  и  $v$ ;  $m_{+1}$  и  $m_{-1}$  — массы иона и электрона соответственно;  $e$  — заряд электрона;  $c$  — скорость света;  $B$  — индукция внешнего магнитного поля;  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^3$ ;  $[\cdot, \cdot]$  — векторное произведение в  $\mathbb{R}^3$ . Пусть  $n(x)$  — единичный вектор внешней нормали к  $\partial Q$  в точке  $x$ . Введем множества  $\Gamma_+$ ,  $\Gamma_-$ ,  $\Gamma_0$  следующим образом:

$$\Gamma_+ = \{(x, v) \in \partial Q \times \mathbb{R}^3 : \langle v, n(x) \rangle > 0\}, \quad (2.3)$$

$$\Gamma_- = \{(x, v) \in \partial Q \times \mathbb{R}^3 : \langle v, n(x) \rangle < 0\}, \quad (2.4)$$

$$\Gamma_0 = \{(x, v) \in \partial Q \times \mathbb{R}^3 : \langle v, n(x) \rangle = 0\}, \quad (2.5)$$

и рассмотрим биективное отображение  $\mathcal{R}(x, v, t) : \Gamma_+ \times (0, T) \rightarrow \Gamma_- \times (0, T)$ , действующее по формулам

$$\begin{cases} \mathcal{R}(x, v, t) := (x, R(x, v), t), \\ R(x, v) := (x, v - 2 \langle v, n(x) \rangle n(x)). \end{cases} \quad (2.6)$$

Отображение  $\mathcal{R}(x, v, t)$  называется *оператором зеркального отражения*.

Вместе с уравнениями (2.1)–(2.2) будем рассматривать следующие условия на функции распределения заряженных частиц  $f^\beta$ :

$$f^\beta(x, v, t) = f^\beta(x, R(x, v), t) \quad (x \in \partial Q, v \in \mathbb{R}^3, 0 < t < T : \langle n(x), v \rangle > 0, \beta = \pm 1), \quad (2.7)$$

$$f^\beta(x, v, t)|_{t=0} = \tilde{f}^\beta(x, v) \quad (x \in \bar{Q}, v \in \mathbb{R}^3, \beta = \pm 1), \quad (2.8)$$

где  $f^\beta(x, v)$ ,  $\beta = \pm 1$ , — заданные начальные функции распределения заряженных частиц. Кроме того, рассмотрим условия Дирихле для потенциала самосогласованного электрического поля:

$$\varphi(x, t) = 0 \quad (x \in \partial Q, 0 \leq t < T). \quad (2.9)$$

В работе используются следующие функциональные пространства. Пространство  $C(Q \times \mathbb{R}^3)$  состоит из непрерывных на  $Q \times \mathbb{R}^3$  функций. Обозначим через  $\dot{C}^k(Q \times \mathbb{R}^3)$  множество  $k$  раз непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем в  $Q \times \mathbb{R}^3$ , а множество бесконечно дифференцируемых функций с компактным в  $\mathbb{R}^3$  носителем будем обозначать  $\dot{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ .

Пусть  $E$  — измеримое подмножество пространства  $\mathbb{R}^3$ . Для  $p \geq 1$  введем банахово пространство  $L_p(E)$  всех классов измеримых функций  $f : E \rightarrow \mathbb{R}$ , совпадающих почти всюду, таких, что  $|f|^p \in L_1(E)$ , с нормой, определенной по формуле  $\|f\|_p = \left( \int_E |f(x)|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}$ . Будем рассматривать также банахово пространство  $L_\infty(E)$  классов измеримых функций, ограниченных почти всюду. Нормы в этом пространстве определяются по формуле:  $\|f\| = \operatorname{ess\,sup}_{x \in E} |f(x)|$ .

Пусть  $1 \leq p \leq \infty$  и  $1 \leq p' \leq \infty$  такие, что  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ . Для  $1 \leq p < \infty$  обозначим через  $\sigma(p, p')$  слабую топологию в  $L_p(Q \times \mathbb{R}^3)$  (или в  $L_p(\Omega)$ ), а через  $\sigma(\infty, 1)$  слабую-\* топологию в  $L_\infty(Q \times \mathbb{R}^3)$ .

### 3. ХАРАКТЕРИСТИКИ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА

Уравнения характеристик для уравнений (2.2) с фиксированным потенциалом  $\varphi$  имеют вид:

$$\frac{dX_\varphi^\beta}{d\tau} = V_\varphi^\beta, \quad 0 < \tau < T, \quad \beta = \pm 1, \quad (3.1)$$

$$\frac{dV_\varphi^\beta}{d\tau} = -\frac{\beta e}{m_\beta} \nabla_x \varphi(X_\varphi^\beta, \tau) + \frac{\beta e}{m_\beta c} [V_\varphi^\beta, B(X_\varphi^\beta)], \quad 0 < \tau < T, \quad \beta = \pm 1. \quad (3.2)$$

Будем предполагать, что функции  $E(x, t) := -\nabla_x \varphi(x, t)$  и  $B(x)$  удовлетворяют следующему условию.

**Условие 3.1.** Пусть вектор-функция  $E(x, t)$  непрерывна по  $x, t$ , и непрерывно дифференцируема по  $x$  в  $\bar{Q} \times [0, T)$ , а вектор-функция  $B(x)$  непрерывно дифференцируема в  $\bar{Q}$ . При этом  $E(x, t)$  и  $B(x)$  могут быть продолжены до непрерывной и непрерывно дифференцируемой по  $x$  функции в  $Q_1 \times [0, T)$  и в  $Q_1$  соответственно, где  $Q_1 \subset \mathbb{R}^3$  — ограниченная область,  $\bar{Q} \subset Q_1$ .

Мы хотим построить решения системы характеристик (3.1)-(3.2), которые будут учитывать действие оператора зеркального отражения  $\mathcal{R}(x, v, t)$ . Такие решения будут называться *порождающими характеристиками*, их подробное построение мы приводим ниже.

Рассмотрим систему (3.1)-(3.2) с начальными условиями вида

$$X_\varphi^\beta|_{\tau=t} = x, \quad V_\varphi^\beta|_{\tau=t} = v, \quad (3.3)$$

где  $(x, v) \in (Q \times \mathbb{R}^3) \cup \Gamma_-, t \in [0, T)$  (см. (2.4)).

Обозначим  $\Omega := Q \times \mathbb{R}^3 \times (0, T)$  и  $A_\pm := \Gamma_\pm \times (0, T)$ .

Условие 3.1 гарантирует, что для любых  $p = (x, v, t) \in \Omega \cup A_- \cup (Q \times \mathbb{R}^3 \times \{0\})$  существует единственное непродолжаемое решение задачи (3.1)-(3.3) на некотором полуинтервале  $[t, t_1^\beta(p))$ . Обозначим это решение через  $S_\varphi^\beta(\tau, p) := (X_\varphi^\beta(\tau, p), V_\varphi^\beta(\tau, p))$ .

Очевидно, существует предел

$$(x_1^\beta, v_1^\beta) := \lim_{\tau \rightarrow t_1^\beta - 0} (X_\varphi^\beta(\tau, p), V_\varphi^\beta(\tau, p)) \in \bar{Q} \times \mathbb{R}^3.$$

В силу [13, лемма 1.4] возможны следующие случаи:

- a)  $t_1^\beta = t_1^\beta(p) = T$ ;
- b)  $t_1^\beta < T$  и  $(x_1^\beta, v_1^\beta) \in \Gamma_+ = \{(x, v) \in \partial Q \times \mathbb{R}^3 : \langle v, n(x) \rangle > 0\}$ ;
- c)  $t_1^\beta < T$  и  $(x_1^\beta, v_1^\beta) \in \Gamma_0 = \{(x, v) \in \partial Q \times \mathbb{R}^3 : \langle v, n(x) \rangle = 0\}$ .

В случае а) мы получаем непродолжаемое решение на полуинтервале  $[t, T)$ . В случае б) мы рассмотрим задачу (3.1)-(3.2) с начальными условиями (3.3), в которых в соответствии с формулой (2.6), описывающей зеркальное отражение, положим

$$(x, v) = (x_1^\beta, R(x_1^\beta, v_1^\beta)) \in \Gamma_- = \{(x, v) \in \partial Q \times \mathbb{R}^3 : \langle v, n(x) \rangle < 0\}.$$

Поскольку вектор  $R(x_1^\beta, v_1^\beta)$  направлен внутрь области  $\Omega$ , в силу условия 3.1 на некотором полуинтервале  $[t_1^\beta, t_2^\beta)$  существует единственное непродолжаемое решение системы (3.1)-(3.2) с начальными условиями

$$X_\varphi^\beta|_{\tau=t_1^\beta} = x_1^\beta, \quad V_\varphi^\beta|_{\tau=t_1^\beta} = R(x_1^\beta, v_1^\beta). \tag{3.4}$$

Обозначим это решение по-прежнему через  $S_\varphi^\beta(\tau, p)$ . Очевидно,  $S_\varphi^\beta(\tau, p) \subset Q \times \mathbb{R}^3, t \in (t_1^\beta, t_2^\beta)$ .

Для  $t_2^\beta$  также возможны случаи а)-с). В случае  $t_2^\beta = T$  мы получаем непродолжаемое решение на полуинтервале  $[t_1^\beta, T)$ . Функция  $S_\varphi^\beta(\tau, p)$ , рассматриваемая на полуинтервале  $[t, T)$ , имеет разрывы первого рода в точках  $t_1^\beta$  и  $t_2^\beta$  и удовлетворяет системе уравнений (3.1)-(3.2) на интервалах  $(t, t_1^\beta)$  и  $(t_1^\beta, t_2^\beta)$ .

В случае  $t_2^\beta < T$  и

$$(x_2^\beta, v_2^\beta) := \lim_{\tau \rightarrow t_2^\beta - 0} (X_\varphi^\beta(\tau, p), V_\varphi^\beta(\tau, p)) \in \Gamma_+$$

мы опять рассмотрим систему (3.1)-(3.2) с начальными условиями

$$X_\varphi^\beta|_{\tau=t_2^\beta} = x_2^\beta, \quad V_\varphi^\beta|_{\tau=t_2^\beta} = R(x_2^\beta, v_2^\beta). \tag{3.5}$$

Существует единственное непродолжаемое решение задачи (3.1), (3.2), (3.5)  $S_\varphi^\beta(\tau, p)$  на некотором полуинтервале  $[t_2^\beta, t_3^\beta)$ , и т. д.

Если  $0 < t$ , то аналогичные построения мы можем провести для  $0 < \tau < t$ , последовательно находя непродолжаемые решения  $S_\varphi^\beta(\tau, p)$  системы (3.1), (3.2) с начальными условиями (3.3) на некотором интервале  $(t_{-1}^\beta, t]$  с начальными условиями

$$X_\varphi^\beta|_{\tau=t_{-1}^\beta} = x_{-1}^\beta, \quad V_\varphi^\beta|_{\tau=t_{-1}^\beta} = R^{-1}(x_{-1}^\beta, v_{-1}^\beta), \tag{3.6}$$

где  $(x_{-1}^\beta, v_{-1}^\beta) := \lim_{\tau \rightarrow t_{-1}^\beta + 0} S_\varphi^\beta(\tau, p)$ , и т. д.

Точки  $t_1^\beta, t_2^\beta, \dots, t_{-1}^\beta, t_{-2}^\beta, \dots$  мы назовем *моментами отражения*.

Обозначим через  $S$  множество точек  $p = (x, v, t) \in \Omega \cup A_- \cup (Q \times \mathbb{R}^3 \times \{0\})$ , для которых существует  $t < t_k^\beta < T, k \in \mathbb{N}$ , такое, что

$$(x_k^\beta, v_k^\beta) = \lim_{\tau \rightarrow t_k^\beta - 0} (X_\varphi^\beta(\tau, p), V_\varphi^\beta(\tau, p)) \in \Gamma_0, \tag{3.7}$$

или  $0 < t_{-j}^\beta < t, j \in \mathbb{N}$ , такое, что

$$(x_{-j}^\beta, v_{-j}^\beta) = \lim_{\tau \rightarrow t_{-j}^\beta + 0} (X_\varphi^\beta(\tau, p), V_\varphi^\beta(\tau, p)) \in \Gamma_0, \tag{3.8}$$

или число моментов отражения бесконечно.

Положим  $D = (\Omega \cup A_- \cup (Q \times \mathbb{R}^3 \times \{0\})) \setminus S$ . Очевидно, множество  $D$  состоит из всех точек  $p = (x, v, t) \in \Omega \cup A_- \cup (Q \times \mathbb{R}^3 \times \{0\})$  в начальных условиях (3.3), при которых построенные кусочно непрерывные  $\hat{S}_\varphi^\beta(\tau, p)$  существуют на всем интервале  $(0, T)$ , имеют конечное число моментов отражения, и множество моментов отражения  $t_k^\beta (0 < t_k^\beta < T, k = \pm 1, \pm 2, \dots)$  таких, что  $(x_k^\beta, v_k^\beta) \in \Gamma_0$ , является пустым.

Обозначим через  $\mu_n(\cdot)$   $n$ -мерную меру Лебега. Пусть  $\mathcal{B}(A_\pm)$  —  $\sigma$ -алгебра борелевских множеств на множестве  $A_\pm := \Gamma_\pm \times (0, T)$  с мерой  $\nu_\pm$ , определенной по формуле

$$\nu_\pm(B) := \int_{A_\pm} \chi_B(x, v, t) |\langle n(x), v \rangle| d\sigma(x) dv dt, \quad B \in \mathcal{B}(A_\pm), \tag{3.9}$$

где  $\chi_B(x, v, t)$  — характеристическая функция множества  $B$ .

Решения  $\hat{S}_\varphi^\beta(\tau, x, v, t)$ ,  $0 \leq t < T$ , при  $(x, v, t) \in D$  мы назовем *порождающими характеристиками*. Заметим, что при  $t \leq \tau < T$  порождающие характеристики  $\hat{S}_\varphi^\beta(\tau, x, v, t)$  непрерывны по  $\tau$  справа, а при  $0 < \tau \leq t$   $\hat{S}_\varphi^\beta(\tau, x, v, t)$  непрерывны по  $\tau$  слева.

Положим  $S_1 = S \cap \Omega$ ,  $D_1 = D \cap \Omega$ ,  $S_2 = S \cap A_-$ ,  $D_2 = D \cap A_-$ ,  $S_3 = S \cap (Q \times \mathbb{R}^3 \times \{0\})$ ,  $D_3 = D \cap (Q \times \mathbb{R}^3 \times \{0\})$ .

Из [13, лемма 1.34] следует

**Теорема 3.1.**  $\mu_7(S_1) = 0$ , множество  $D_1$  открыто в  $\mathbb{R}^7$ ,  $\nu_-(S_2) = 0$ ,  $\mu_6(S_3) = 0$ .

Обозначим  $\Gamma_t = \{(x, v, \tau) \in D_1 : \tau = t\}$ .

**Замечание 3.1.** Введем векторное поле  $\Psi^\beta : \bar{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0, T] \rightarrow \mathbb{R}^7$  по формуле

$$\Psi^\beta(x, v, t) := \left( v, -\frac{\beta e}{m_\beta} E(x, t) + \frac{\beta e}{m_\beta c} [v, B(x)], 1 \right).$$

Очевидно,  $\operatorname{div}_v \left( -\frac{\beta e}{m_\beta} E(x, t) + \frac{\beta e}{m_\beta c} [v, B(x)] \right) = 0$ ,  $(x, v, t) \in \bar{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0, T]$ .

Из замечания 3.1 следует

**Лемма 3.1.** Для  $0 \leq s, t < T$  отображение  $\hat{S}_\varphi^\beta(s, \dots, t) : \Gamma_t \rightarrow \Gamma_s$  биективно и сохраняет меру Лебега  $\mu_6(\cdot)$ .

Подробное доказательство см. в [13, предложение 3, с. 52].

#### 4. СТРУКТУРА СИЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА

Пусть  $w_\pm : A_\pm \rightarrow \mathbb{R}$  — измеримые по Борелю функции. Введем оператор  $\mathcal{K}$ , действующий по формуле

$$\mathcal{K}w_+(x, v, t) := w_+(\mathcal{R}^{-1}(x, v, t)) \text{ для п. в. } (x, v, t) \in A_- \quad (4.1)$$

Обозначим далее  $Vf^\beta := \frac{\partial f^\beta}{\partial t} + \langle v, \nabla_x f^\beta \rangle + \left\langle -\frac{\beta e}{m_\beta} \nabla_x \varphi + \frac{\beta e}{m_\beta c} [v, B(x)], \nabla_v f^\beta \right\rangle$  и рассмотрим следующую задачу:

$$Vf^\beta = 0, \quad x \in Q, v \in \mathbb{R}^3, t \in (0, T), \beta = \pm 1, \quad (4.2)$$

$$f^\beta(x, v, 0) = \mathring{f}^\beta(x, v), \quad x \in \bar{Q}, v \in \mathbb{R}^3, \beta = \pm 1, \quad (4.3)$$

$$f_-^\beta(x, v, t) = \mathcal{K}f_+^\beta(x, v, t) \quad (x, v, t) \in A_-, \beta = \pm 1. \quad (4.4)$$

Здесь  $\mathring{f}^\beta \in \mathring{C}(Q \times \mathbb{R}^3)$  — непрерывные функции с компактным носителем в  $Q \times \mathbb{R}^3$ ,  $\mathring{f}^\beta \geq 0$ , а функции  $f_\pm^\beta$ ,  $\beta = \pm 1$  задаются по формулам

$$f_+^\beta(x, v, t) := \lim_{\tau \rightarrow t-0} f^\beta \left( S_\varphi^\beta(\tau, x, v, t), \tau \right), \quad (x, v, t) \in A_+, \quad (4.5)$$

$$f_-^\beta(x, v, t) := \lim_{\tau \rightarrow t+0} f^\beta \left( S_\varphi^\beta(\tau, x, v, t), \tau \right), \quad (x, v, t) \in A_-. \quad (4.6)$$

Существование пределов (4.5)–(4.6) вытекает из результатов предыдущего раздела.

**Определение 4.1.** Функции  $\{f^\beta\}$ ,  $\beta = \pm 1$ , мы будем называть *сильным решением* задачи (4.2)–(4.4), если функции  $f^\beta(x, v, t)$  п. в. в  $\Omega$  являются константами вдоль порождающих характеристик, удовлетворяют начальному условию (4.3) для п.в.  $x \in \bar{Q}$  и  $v \in \mathbb{R}^3$ , а также краевому условию (4.4) для п.в.  $(x, v, t) \in A_-$ .

**Теорема 4.1.** Существует сильное решение задачи (4.2)–(4.4), которое задается по формуле

$$f^\beta(x, v, t) = \mathring{f}^\beta \left( \hat{S}_\varphi^\beta(0, x, v, t) \right), \quad (x, v, t) \in D_1, \quad (4.7)$$

и является единственным с точностью до множества меры нуль.

*Доказательство.* Используя групповое свойство порождающих характеристик при подстановке в формулу (4.7), а именно, равенство  $\hat{S}_\varphi^\beta(s, y, w, \tau) = \hat{S}_\varphi^\beta(s, \hat{S}_\varphi^\beta(t, y, w, \tau), t)$ , мы получим выражение, не зависящее от  $t$ , т. е. константу. Далее, в силу непрерывности порождающих характеристик справа в точке 0 мы получаем  $f^\beta(x, v, 0) = \hat{f}^\beta(\hat{S}_\varphi^\beta(0, x, v, 0)) = \hat{f}^\beta(x, v)$ , т. е. условия (4.3) выполняются. Условие (4.4) выполняется в силу определения порождающих характеристик. Единственность очевидна.  $\square$

**Следствие 4.1.** Пусть  $\hat{f}^\beta \in \dot{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$ . Тогда сильное решение задачи (4.2)–(4.4) непрерывно дифференцируемо в  $D_1$ .

**Лемма 4.1.** Пусть  $\hat{f}^\beta \in \dot{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$ ,  $\psi \in \dot{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$  и  $I := [0, T)$ , а  $\{f^\beta\}$ ,  $\beta = \pm 1$ , – сильное решение задачи (4.2)–(4.4). Тогда

$$\left( t \mapsto \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \psi(x, v) f^\beta(x, v, t) dx dv \right) \in C^1(I)$$

и

$$\begin{aligned} & \frac{d}{dt} \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \psi(x, v) f^\beta(x, v, t) dx dv = \\ & = \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \left( \langle v, \nabla_x \psi(x, v) \rangle + \left\langle -\frac{\beta e}{m_\beta} \varphi_x(x, t) + \frac{\beta e}{m_\beta c} [v, B(x)], \nabla_v \psi(x, v) \right\rangle \right) \times f^\beta(x, v, t) dx dv. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Доказательство аналогично доказательству [14, лемма 3.3].

Обозначим  $A_T := Q \times \mathbb{R}^3 \times \{T\}$  и  $A_0 := Q \times \mathbb{R}^3 \times \{0\}$ .

**Лемма 4.2.** Пусть  $\{f^\beta\}$ ,  $\beta = \pm 1$ , – сильное решение задачи (4.2)–(4.4), и пусть  $\psi \in \dot{C}^1(\bar{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0, T])$ . Тогда

$$\langle f^\beta, V\psi \rangle = \int_{A_+} \psi f_+^\beta d\nu_+ + \int_{A_T} \psi(x, v, T) f^\beta(x, v, T) dx dv - \int_{A_-} \psi f_-^\beta d\nu_- - \int_{A_0} \psi(x, v, 0) f^\beta(x, v, 0) dx dv, \quad (4.9)$$

см. (4.2).

Доказательство аналогично доказательству [13, лемма 2.5, с. 68] и использует лемму 3.1.

### 5. СИЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ СО СГЛАЖИВАЮЩИМ МНОЖИТЕЛЕМ

Рассмотрим теперь вопрос о существовании сильных решений для уравнений

$$\begin{aligned} & \frac{\partial f_\delta^\beta}{\partial t} + \langle v, \nabla_x f_\delta^\beta \rangle + \left\langle \frac{\beta e}{m_\beta} E_\delta + \frac{\beta e}{m_\beta c} [v, B(x)], \nabla_v f_\delta^\beta \right\rangle = 0, \\ & x \in Q, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad t \in (0, T), \quad \beta = \pm 1, \end{aligned} \quad (5.1)$$

где  $f_\delta^\beta$  – неизвестные функции, а функция  $E_\delta$  определяется из соотношений

$$E_\delta(x, t) = -\nabla_x \varphi_\delta(x, t), \quad \varphi_\delta = \int_Q G_\delta(x, y) \rho_\delta(y, t) dy, \quad (5.2)$$

$$G_\delta(x, y) = \int_Q G(x, \xi) \omega_\delta(y - \xi) d\xi, \quad (5.3)$$

$$\rho_\delta(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} (f_\delta^{+1}(x, v, t) - f_\delta^{-1}(x, v, t)) dv. \quad (5.4)$$

Здесь  $G = G(x, y)$  — функция Грина задачи Дирихле для уравнения Лапласа в  $Q$ , а  $\omega_\delta(x)$  — ядро усреднения, определенное по формуле  $\omega_\delta(x) := \frac{1}{\delta^3} \omega\left(\frac{|x|}{\delta}\right)$ , где

$$\omega(t) := \begin{cases} ce^{-\frac{1}{1-t^2}}, & |t| < 1, \\ 0, & |t| \geq 1, \end{cases} \quad (5.5)$$

а постоянная  $c > 0$  определяется из условия

$$\int_{\mathbb{R}^3} \omega(|x|) dx = 1. \quad (5.6)$$

**Замечание 5.1.** Поскольку рассматриваемая нами область  $Q$  ограничена и имеет гладкую границу, функция Грина такой задачи существует, а ее единственность следует из [9, теорема 2.4]. Результаты, посвященные функции Грина, подробно изложены в [9].

**Замечание 5.2.** Так как  $\omega \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$ ,  $\text{supp } \omega = \overline{B_1(0)}$ , то  $\omega_\delta \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$  и  $\text{supp } \omega_\delta = \overline{B_\delta(0)}$ , при этом в силу (5.5)-(5.6)

$$\int_{\mathbb{R}^3} \omega_\delta(x) dx = 1. \quad (5.7)$$

Вместе с уравнениями (5.1) будем рассматривать начальные условия

$$f_\delta^\beta(x, v, 0) = \mathring{f}^\beta(x, v), \quad x \in \bar{Q}, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad \beta = \pm 1, \quad (5.8)$$

и краевые условия вида

$$f_{\delta,-}^\beta(x, v, t) = \mathcal{K} f_{\delta,+}^\beta, \quad x \in A_-, \quad v \in \mathbb{R}^3, \quad t \in (0, T), \quad \beta = \pm 1. \quad (5.9)$$

Здесь  $\mathring{f}^\beta(x, v) \in \dot{C}(Q \times \mathbb{R}^3)$ , а функции  $f_{\delta,+}^\beta$  и  $f_{\delta,-}^\beta$  определены по формулам

$$f_{\delta,+}^\beta = \lim_{\tau \rightarrow t-0} f_\delta^\beta \left( S_\varphi^\beta(\tau, x, v, t), \tau \right), \quad (x, v, t) \in A_+, \quad (5.10)$$

$$f_{\delta,-}^\beta = \lim_{\tau \rightarrow t+0} f_\delta^\beta \left( S_\varphi^\beta(\tau, x, v, t), \tau \right), \quad (x, v, t) \in A_-. \quad (5.11)$$

Для  $X \subset \mathbb{R}^n$  и  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  обозначим через  $\tilde{f}$  продолжение  $f$  нулем на  $\mathbb{R}^n$ . Тогда в уравнении (5.1) при определении  $E_\delta(x, t)$  плотность заряда  $\rho_\delta(x, t)$  мы заменим на сглаженную плотность,  $\sigma_\delta = (\omega_\delta * \tilde{\rho}_\delta)(x, t)$ , и в силу (5.3) получим выражение

$$\varphi_\delta(x, t) = \int_Q G(x, y) (\omega_\delta * \tilde{\rho}_\delta)(y, t) dy,$$

где  $(\omega_\delta * \tilde{\rho}_\delta)(y, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \omega_\delta(y - \xi) \tilde{\rho}_\delta(\xi, t) d\xi$ .

Для фиксированных  $\delta > 0$  построим последовательность сильных решений уравнений Власова  $f_{\delta,n}^\beta$  по формуле

$$f_{\delta,n}^\beta(x, v, t) := \mathring{f}^\beta \left( (\hat{S}_{\varphi_{\delta,n-1}}^\beta(0, x, v, t))_{\delta,n} \right), \quad n \geq 1, \quad (5.12)$$

где  $(\hat{S}_{\varphi_{\delta,n-1}}^\beta(0, x, v, t))_{\delta,n}$  — порождающие характеристики уравнений (5.1) с функциями  $E_{\delta,n-1}$ , заданными по формуле  $E_{\delta,n-1}(x, t) := -\nabla_x \varphi_{\delta,n-1}(x, t)$ . Здесь функции  $\varphi_{\delta,n-1}(x, t)$  определяются как единственные классические решения задач

$$\begin{aligned} \Delta \varphi_{\delta,n-1}(x, t) &= -4\pi e \sigma_{\delta,n-1}(x, t), \\ \varphi_{\delta,n-1}|_{\partial Q} &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\rho_{\delta,n-1}(x, t) := \int_{\mathbb{R}^3} (f_{\delta,n-1}^{+1} - f_{\delta,n-1}^{-1}) dv, \quad \sigma_{\delta,n-1}(x, t) = \tilde{\rho}_{\delta,n-1} * \omega_\delta, \quad n \geq 1.$$

Функции  $f_{\delta,0}^\beta$  и  $\rho_{\delta,0}$  определяются по формулам

$$f_{\delta,0}^\beta(x, v) := \hat{f}^\beta(x, v), \quad \rho_{\delta,0}(x) := \int_{\mathbb{R}^3} (f_{\delta,0}^{+1} - f_{\delta,0}^{-1}) dv.$$

**Замечание 5.3.** По построению  $\sigma_{\delta,n-1}(\cdot, t)$  принадлежат пространству  $\dot{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$  для всех  $t \in [0, T]$ , а также являются непрерывными по  $(x, t)$  в  $\bar{Q} \times [0, T]$ . Существование порождающих характеристик  $(\hat{S}_{\varphi_{\delta,n-1}}^\beta(0, x, v, t))_{\delta,n}$  на каждом шаге гарантировано тем, что функции  $\varphi_{\delta,n-1}(x, t)$  и  $B(x)$  в уравнении (5.1) удовлетворяют условию 3.1. Отсюда и из теоремы 3.1 мы также получаем, что множества  $(D_1)_{\delta,n-1} \subset \Omega$  являются открытыми и  $\mu_7(\Omega \setminus (D_1)_{\delta,n-1}) = 0$ .

Из теоремы 4.2 (теорема Данфорда–Петтиса) и леммы 4.5 в [10], а также из предложения 5 в [13] вытекает, что существуют подпоследовательность  $f_{\delta,n_k}^\beta \subset f_{\delta,n}^\beta$  и функция  $f_\delta^\beta : I \rightarrow L_1(Q \times \mathbb{R}^3)$  такие, что для всех  $g \in L_\infty(\mathbb{R}^6)$  выполняется

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} \left| \int (\tilde{f}_{\delta,n_k}^\beta(x, v, t) - \tilde{f}_\delta^\beta(x, v, t)) g(x, v) dx dv \right| = 0, \quad (5.13)$$

а также отображение  $\tilde{f}_\delta^\beta : I \rightarrow L_1(\mathbb{R}^6)$  непрерывно в слабой топологии на  $L_1(\mathbb{R}^6)$ . Переобозначим подпоследовательность  $f_{\delta,n_k}^\beta$  снова как  $f_{\delta,n}^\beta$ . Положим теперь

$$\begin{aligned} \tilde{\rho}_\delta(y, t) &:= \int_{\mathbb{R}^3} (\tilde{f}_\delta^{+1}(y, v, t) - \tilde{f}_\delta^{-1}(y, v, t)) dv, & \sigma_\delta(x, t) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\rho}_\delta(y, t) \omega_\delta(x - y) dy, \\ \varphi_\delta(x, t) &:= \int_Q G(x, \xi) \sigma_\delta(\xi, t) d\xi, & E_\delta(x, t) &:= -\nabla_x \varphi_\delta(x, t), \quad x \in \bar{Q}, t \in I. \end{aligned}$$

Далее, аналогично 3 и 4 шагу доказательства теоремы 4 из [14], справедливы следующие утверждения.

**Замечание 5.4.**

- а) Отображения  $I \ni t \rightarrow \sigma_\delta(\cdot, t) \in L_1(Q) \cap L_\infty(Q)$  непрерывны, а также справедливо равенство  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|\sigma_{\delta,n}(\cdot, t) - \sigma_\delta(\cdot, t)\|_1 = 0$ , где  $K = [0, a] \subset I$ .
- б) Вектор-функции  $E_{\delta,n}$  и  $E_\delta$  удовлетворяют условиям леммы 2.1 в [14], отображение  $I \ni t \rightarrow E_\delta(\cdot, t) \in C(\bar{Q})$  непрерывно, а также выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in K} \|E_{\delta,n}(\cdot, t) - E_\delta(\cdot, t)\| = 0. \quad (5.14)$$

**Замечание 5.5.** Существует число  $N \in \mathbb{N}$  такое, что для любых  $(x, v, t) \in D_1$ ,  $s \neq t_k^\beta(x, v, t)$  ( $k \in \mathbb{Z}$ ) и  $n \geq N$  мы имеем  $(x, v, t) \in D_{1n}$  и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \hat{S}_{\delta,n}^\beta(s, x, v, t) = \hat{S}_\delta^\beta(s, x, v, t), \quad (5.15)$$

где  $D_{1n} \subset \Omega$  — открытое множество,  $\mu_7(\Omega \setminus D_{1n}) = 0$ .

Далее, повторяя рассуждения из доказательства теоремы 4 из [14], а именно, переходя к рассмотрению предела слабо сходящейся подпоследовательности сильных решений уравнений Власова  $f_{\delta,n}^\beta$ , мы получим, что функции  $g_\delta^\beta(x, v, t) := \hat{f}^\beta(\hat{S}_\delta^\beta(0, x, v, t))$  являются сильным решением задачи (5.1), (5.8), (5.9), где

$$\begin{aligned} \varphi_\delta(x, t) &:= \int_Q G(x, \xi) \sigma_\delta(\xi, t) d\xi, & E_\delta(x, t) &:= -\nabla_x \varphi_\delta(x, t), \\ \tilde{\rho}_\delta(y, t) &:= \int_{\mathbb{R}^3} (\tilde{f}_\delta^{+1}(y, v, t) - \tilde{f}_\delta^{-1}(y, v, t)) dv, & \sigma_\delta(x, t) &:= \int_{\mathbb{R}^3} \tilde{\rho}_\delta(y, t) \omega_\delta(x - y) dy, \quad x, y \in \bar{Q}, t \in I. \end{aligned}$$

Таким образом, справедлива следующая теорема.

**Теорема 5.1.** Пусть  $\hat{f}^\beta \in \dot{C}(Q \times \mathbb{R}^3)$ ,  $\hat{f}^\beta \geq 0$ . Тогда для любого  $\delta > 0$  существует сильное решение уравнений (5.1) с условиями (5.8), (5.9).

6. ТЕОРЕМА О СУЩЕСТВОВАНИИ ГЛОБАЛЬНЫХ СЛАБЫХ РЕШЕНИЙ СМЕШАННОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА—ПУАССОНА С ВНЕШНИМ МАГНИТНЫМ ПОЛЕМ

Пусть  $f^\beta \in L_p(\Omega)$ ,  $1 \leq p < \infty$ ,  $\Omega := Q \times \mathbb{R}^3 \times (0, T)$ , а функция  $E = E(x, t)$  такова, что  $f^\beta E$  локально интегрируема на  $\Omega$ .

Перепишем задачу (2.1)–(2.2), (2.7)–(2.9) следующим образом:

$$\frac{\partial f^\beta}{\partial t} + \langle v, \nabla_x f^\beta \rangle + \frac{\beta e}{m_\beta} \left\langle E + \frac{1}{c} [v, B], \nabla_v f^\beta \right\rangle = 0, \quad (6.1)$$

$$x \in Q, v \in \mathbb{R}^3, t \in (0, T), \beta = \pm 1,$$

$$E(x, t) = - \int_Q \nabla_x G(x, \xi) \rho(\xi, t) d\xi, \quad \rho(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_\beta \beta f^\beta(x, v, t) dv, \quad (6.2)$$

$$x \in \bar{Q}, t \in [0, T),$$

$$f^\beta(x, v, 0) = \mathring{f}^\beta(x, v), \quad x \in \bar{Q}, v \in \mathbb{R}^3, \quad (6.3)$$

$$f_-^\beta(x, v, t) = \mathcal{K} f_+^\beta(x, v, t), \quad (x, v, t) \in A_-, \beta = \pm 1. \quad (6.4)$$

**Определение 6.1.** Функции  $f^\beta$  назовем *слабо дифференцируемыми по направлению*

$$l^\beta := \left( v, \frac{\beta e}{m_\beta} E + \frac{\beta e}{m_\beta c} [v, B(x)], 1 \right) \quad (6.5)$$

если существуют функции  $h^\beta \in L_p(\Omega)$  такие, что для всех  $g^\beta \in \mathring{C}^1(\Omega)$

$$\langle h^\beta, g^\beta \rangle = - \langle f^\beta, L^\beta g^\beta \rangle := - \int_\Omega f^\beta L^\beta g^\beta dx dv dt, \quad (6.6)$$

где

$$L^\beta g^\beta := \langle v, \nabla_x g^\beta \rangle + \left\langle \frac{\beta e}{m_\beta} E + \frac{\beta e}{m_\beta c} [v, B(x)], \nabla_v g^\beta \right\rangle + \frac{\partial g^\beta}{\partial t}. \quad (6.7)$$

**Замечание 6.1.** В силу определения 4.1 и лемм 4.1, 4.2 любое сильное решение  $\{f^\beta\}$ ,  $\beta = \pm 1$ , задачи (2.1)–(2.2), (2.7)–(2.9) с начальными функциями  $\mathring{f}^\beta \in \mathring{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$  слабо дифференцируемо по направлению  $l^\beta$ , при этом  $L^\beta f^\beta = 0$ , следы  $f^\beta$  на  $A_\pm$  существуют и задаются формулами (4.5), (4.6).

Функции  $h^\beta \in L_p(\Omega)$  определены единственным образом и обозначаются через  $L^\beta f^\beta$ .

**Определение 6.2.** Пусть функции  $f^\beta \in L_p(\Omega)$  ( $1 \leq p < \infty$ ) слабо дифференцируемы по направлению  $l^\beta$ . Функции  $f_\pm^\beta \in L_{p,loc}(A_\pm)$  будем называть *следами*  $f^\beta$  на  $A_\pm$ , если

$$\langle L^\beta f^\beta, \psi^\beta \rangle + \langle f^\beta, L^\beta \psi^\beta \rangle = \int_{A_+} f_+^\beta \psi^\beta dv_+ - \int_{A_-} f_-^\beta \psi^\beta dv_- \quad (6.8)$$

для любых  $\psi^\beta \in \mathring{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3 \times (0, T))$ .

**Определение 6.3.** Функции  $\{f^\beta\}$ ,  $\beta = \pm 1$ , будем называть *слабым решением* системы уравнений (6.1)–(6.4), если выполняются следующие условия:

6.3.1. Отображения  $f^\beta : I \rightarrow (L_1(Q \times \mathbb{R}^3), \sigma(1, \infty)) \cap (L_\infty(Q \times \mathbb{R}^3), \sigma(\infty, 1))$  непрерывны,  $\beta = \pm 1$ .

6.3.2.  $f^\beta(x, v, 0) = \mathring{f}^\beta(x, v)$  для  $x \in \bar{Q}$ ,  $v \in \mathbb{R}^3$ ,  $\beta = \pm 1$ .

6.3.3. Для почти всех  $(x, t) \in Q \times [0, T)$  и  $\rho(x, t) = \int_{\mathbb{R}^3} \sum_\beta \beta f^\beta(x, v, t) dv$  положим  $E(x, t) :=$

$$- \int_Q \nabla_x G(x, \xi) \rho(\xi, t) d\xi; \text{ функции } f^\beta E \text{ локально интегрируемы на } \Omega.$$

6.3.4. Для всех  $\psi^\beta \in \dot{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$ ,  $\beta = \pm 1$ , мы имеем

$$\left( t \rightarrow \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \psi^\beta(x, v) f^\beta(x, v, t) dx dv \right) \in C^1(I),$$

$$\frac{d}{dt} \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \psi^\beta(x, v) f^\beta(x, v, t) dx dv = \int_{Q \times \mathbb{R}^3} (X^\beta \psi^\beta)(x, v, t) f^\beta(x, v, t) dx dv,$$

где

$$(X^\beta \psi^\beta)(x, v, t) := \left\langle v, \nabla_x \psi^\beta(x, v) \right\rangle + \left\langle \frac{\beta e}{m_\beta} E(x, t) + \frac{\beta e}{m_\beta c} [v, B(x)], \nabla_v \psi^\beta(x, v) \right\rangle.$$

6.3.5. Следы  $f^\beta$  на  $A_\pm$  существуют и  $f_-^\beta = \mathcal{K} f_+^\beta$  на  $A_-$ ,  $\beta = \pm 1$ .

Основным результатом работы является следующая теорема.

**Теорема 6.1.** Пусть  $f^\beta \in \dot{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$ ,  $f^\beta \geq 0$ . Тогда существует слабое решение  $\{f^\beta\}$ ,  $\beta = \pm 1$ , задачи (6.1)–(6.4).

Доказательство теоремы 6.1 опирается на следующие вспомогательные результаты.

**Лемма 6.1.** Пусть  $1 \leq r < 3$ ,  $r \leq q < \frac{3r}{3-r}$ , и пусть  $K \subset \mathbb{R}^3$  – область такая, что  $K \subset Q$ . Тогда оператор  $A_G : L_r(Q) \rightarrow L_q^3(Q)$ , определенный по формуле

$$(A_G \sigma)(x) = \chi_K(x) \int_Q \nabla_x G(x, y) \sigma(y) dy,$$

является компактным.

Доказательство см. в [13, лемма 4.3].

**Лемма 6.2.** Пусть выполнены условия теоремы 6.1, и пусть  $\{f_\delta^\beta\}$ ,  $\delta > 0$ , – сильное решение задачи (5.1), (5.8)–(5.9). Тогда для любой последовательности  $\{\delta_n\}$ ,  $\delta_n \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ ,  $\delta_n > 0$ , существуют подпоследовательность  $\{\delta_{n_k}\}$  и функции  $f^\beta \in C(I, (L_p(Q \times \mathbb{R}^3), \sigma(p, p')))$  такие, что для любых  $p, p' \in [1, \infty]$ ,  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ , справедливы утверждения:

- $f_{\delta_{n_k}}^\beta \rightharpoonup f^\beta$  в  $(L_p(Q \times \mathbb{R}^3), \sigma(p, p'))$  равномерно по  $t \in I$  при  $k \rightarrow \infty$ ;
- $f_{\delta_{n_k}}^\beta \rightharpoonup f^\beta$  в  $(L_p(\Omega), \sigma(p, p'))$  при  $k \rightarrow \infty$ ;
- существуют  $g_\pm^\beta \in L_\infty(A_\pm, d\nu_\pm)$  такие, что  $f_{\delta_{n_k}, \pm}^\beta \rightharpoonup^* g_\pm^\beta$  в  $L_\infty(A_\pm, d\nu_\pm)$  при  $k \rightarrow \infty$ .

Доказательство см. в [13, лемма 4.5].

В дальнейшем для простоты будем обозначать подпоследовательность  $\{\delta_{n_k}\}$  через  $\delta_n$ .

**Лемма 6.3.** Пусть выполнены условия теоремы 6.1.

- Пусть, кроме того,  $1 \leq p \leq \frac{5}{3}$ , а функции  $\rho_{\delta_n}^\beta : I \rightarrow L_p(Q)$  определены по формуле  $\rho_{\delta_n}^\beta(x, t) := \int_{\mathbb{R}^3} f_{\delta_n}^\beta(x, v, t) dv$ . Тогда  $\rho_{\delta_n}^\beta(x, t) \rightharpoonup \rho^\beta(x, t)$  при  $n \rightarrow \infty$  в  $(L_p(Q), \sigma(p, p'))$  равномерно по  $t \in I$ .
- Пусть  $1 \leq p \leq \infty$ ,  $\psi^\beta \in \dot{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$ . Тогда  $\int_{\mathbb{R}^3} \psi^\beta(\cdot, v) f_{\delta_n}^\beta(\cdot, v, t) dv \rightharpoonup \int_{\mathbb{R}^3} \psi^\beta(\cdot, v) f^\beta(\cdot, v, t) dv$  в  $(L_p(Q), \sigma(p, p'))$  при  $n \rightarrow \infty$  равномерно по  $t \in I$ .

Доказательство см. в [13, лемма 4.7].

Далее будет приведено доказательство теоремы 6.1.

*Доказательство теоремы 6.1.* Из леммы 4.1 следует, что любое сильное решение уравнений Власова также будет и слабым решением. Рассмотрим функции  $f^\beta, g_\pm^\beta$ ,  $\beta = \pm 1$ , из леммы 6.2. Покажем, что  $\{f^\beta\}$ ,  $\beta = \pm 1$ , – слабое решение задачи (6.1)–(6.4).

Нам нужно убедиться, что выполняются условия 6.3.1–6.3.5 в определении слабого решения 6.3. Выполнение условий 6.3.1–6.3.3 для функций  $\{f^\beta\}$  следует из леммы 6.2, равенства (5.8), а также соотношений (6.2) и (5.14). Для того, чтобы проверить выполнение пунктов 6.3.4 и 6.3.5, покажем сначала, что для любых  $\psi^\beta \in \dot{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$  выполняется равенство

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} \int_{Q \times \mathbb{R}^3} |A_{\delta_n}^\beta - A^\beta| dx dv = 0, \quad (6.9)$$

где

$$\begin{aligned} A_{\delta_n}^\beta &:= \langle v, \nabla_x \psi^\beta \rangle f_{\delta_n}^\beta + \left\langle \frac{\beta e}{m_\beta} E_{\delta_n} + \frac{\beta e}{m_\beta c} [v, B(x)], \nabla_v \psi^\beta \right\rangle f_{\delta_n}^\beta, \\ A^\beta &:= \langle v, \nabla_x \psi^\beta \rangle f^\beta + \left\langle \frac{\beta e}{m_\beta} E + \frac{\beta e}{m_\beta c} [v, B(x)], \nabla_v \psi^\beta \right\rangle f^\beta. \end{aligned}$$

Рассмотрим следующее выражение:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} \int_{Q \times \mathbb{R}^3} |A_{\delta_n}^\beta - A^\beta| dx dv \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} (I_1 + I_2 + I_3),$$

где

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \left| \langle v, \nabla_x \psi^\beta \rangle (f_{\delta_n}^\beta - f^\beta) \right| dx dv, \\ I_2 &= \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \left| \left\langle \frac{\beta e}{m_\beta c} [v, B(x)], \nabla_v \psi^\beta \right\rangle (f_{\delta_n}^\beta - f^\beta) \right| dx dv, \\ I_3 &= \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \left| \left\langle \frac{\beta e}{m_\beta} E_{\delta_n}, \nabla_v \psi^\beta \right\rangle f_{\delta_n}^\beta - \left\langle \frac{\beta e}{m_\beta} E(t), \nabla_v \psi^\beta \right\rangle f^\beta \right| dx dv. \end{aligned}$$

Поскольку  $\langle v, \nabla_x \psi^\beta \rangle \in L_\infty(Q \times \mathbb{R}^3) \cap L_1(Q \times \mathbb{R}^3)$ , из леммы 6.2 а) следует, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} I_1 = 0$ .

Аналогично,  $\left\langle \frac{\beta e}{m_\beta c} [v, B(x)], \nabla_v \psi^\beta \right\rangle \in L_\infty(Q \times \mathbb{R}^3) \cap L_1(Q \times \mathbb{R}^3)$ , поэтому из леммы 6.2 а) вытекает, что  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} I_2 = 0$ . Применяя оценки (4.9)–(4.10) из [13] и леммы 6.1–6.2, получим выполнение равенства  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{t \in I} I_3 = 0$ .

Обозначим  $(X_{\delta_n}^\beta \psi^\beta)(x, v, t) := \langle v, \nabla_x \psi^\beta(x, v) \rangle + \left\langle \frac{\beta e}{m_\beta} E_{\delta_n}(x, t) + \frac{\beta e}{m_\beta c} [v, B(x)], \nabla_v \psi^\beta(x, v) \right\rangle$ , тогда из (6.9) мы получим

$$\int_{Q \times \mathbb{R}^3} (X_{\delta_n}^\beta \psi^\beta)(x, v, t) f_{\delta_n}^\beta(x, v, t) dx dv \rightarrow \int_{Q \times \mathbb{R}^3} (X^\beta \psi^\beta)(x, v, t) f^\beta(x, v, t) dx dv \quad (6.10)$$

при  $n \rightarrow \infty$  равномерно по  $t \in I$ . С другой стороны, в силу леммы 6.2 а) имеем

$$\int_{Q \times \mathbb{R}^3} \psi^\beta(x, v) f_{\delta_n}^\beta(x, v, t) dx dv \rightarrow \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \psi^\beta(x, v) f^\beta(x, v, t) dx dv \quad (6.11)$$

при  $n \rightarrow \infty$  равномерно по  $t \in I$ , при этом из леммы 4.1 следует, что

$$\int_{Q \times \mathbb{R}^3} \psi^\beta(x, v) f_{\delta_n}^\beta(x, v, t) dx dv \in C^1(I), \quad (6.12)$$

$$\frac{d}{dt} \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \psi^\beta(x, v) f_{\delta_n}^\beta(x, v, t) dx dv = \int_{Q \times \mathbb{R}^3} (X_{\delta_n}^\beta \psi^\beta)(x, v, t) f_{\delta_n}^\beta(x, v, t) dx dv. \quad (6.13)$$

Из (6.10)–(6.13) и единственности предела мы заключаем, что последовательность

$$\left\{ \frac{d}{dt} \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \psi^\beta(x, v) f_{\delta_n}^\beta(x, v, t) dx dv \right\}$$

при  $n \rightarrow \infty$  сходится к

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \psi^\beta(x, v) f^\beta(x, v, t) dx dv \right) \in C^1(I)$$

равномерно по  $t \in I$ , при этом выполняется равенство

$$\frac{d}{dt} \left( \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \psi^\beta(x, v) f^\beta(x, v, t) dx dv \right) = \int_{Q \times \mathbb{R}^3} (X^\beta \psi^\beta)(x, v, t) f^\beta(x, v, t) dx dv$$

при  $t \in I$ .

Убедимся, что выполняется пункт 6.3.5 определения слабого решения. Для этого нужно показать, что функции  $f^\beta$  слабо дифференцируемы, при этом  $L^\beta f^\beta = 0$  и

$$\langle f^\beta, L^\beta \psi^\beta \rangle = \int_{A_+} g_+^\beta \psi^\beta d\nu_+ - \int_{A_-} g_-^\beta \psi^\beta d\nu_- = \quad (6.14)$$

$$= \int_{A_+} g_+^\beta \psi^\beta d\nu_+ - \int_{A_-} \mathcal{K} g_+^\beta \psi^\beta d\nu_-. \quad (6.15)$$

Тогда  $g_\pm^\beta = f_\pm^\beta$  и будет выполнено условие  $f_-^\beta = \mathcal{K} f_+^\beta$ .

Рассмотрим сначала функции  $\psi^\beta$  следующего вида:

$$\psi^\beta(x, v, t) = \psi_1^\beta(x, v) \psi_2^\beta(t), \quad \psi_1^\beta \in \dot{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3), \quad \psi_2^\beta \in \dot{C}^1(0, T). \quad (6.16)$$

Тогда

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \langle f_{\delta_n}^\beta, L_{\delta_n}^\beta \psi^\beta \rangle - \langle f^\beta, L^\beta \psi^\beta \rangle \right| = 0, \quad (6.17)$$

где  $L_{\delta_n}^\beta \psi^\beta := \langle v, \nabla_x \psi^\beta \rangle + \left\langle \frac{\beta e}{m_\beta} E_{\delta_n} + \frac{\beta e}{m_\beta c} [v, B(x)], \nabla_v \psi^\beta \right\rangle + \frac{\partial \psi^\beta}{\partial t}$ . Действительно, это следует из леммы 6.2 и равенства

$$\langle f_{\delta_n}^\beta, L_{\delta_n}^\beta \psi^\beta \rangle - \langle f^\beta, L^\beta \psi^\beta \rangle = \int_0^T \int_{Q \times \mathbb{R}^3} (f_{\delta_n}^\beta - f^\beta) \frac{\partial \psi^\beta}{\partial t} dx dv dt + \int_0^T \psi_2^\beta \left( \langle f_{\delta_n}^\beta, X_{\delta_n}^\beta \psi_1^\beta \rangle - \langle f^\beta, X^\beta \psi_1^\beta \rangle \right) dt.$$

Из леммы 4.2 вытекает равенство

$$\langle f_{\delta_n}^\beta, L_{\delta_n}^\beta \psi^\beta \rangle = \int_{A_+} f_{\delta_n, +}^\beta \psi^\beta d\nu_+ - \int_{A_-} f_{\delta_n, -}^\beta \psi^\beta d\nu_-.$$

Далее, поскольку  $\psi_1^\beta \in \dot{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3)$ , получаем  $\langle f_{\delta_n}^\beta, L_{\delta_n}^\beta \psi^\beta \rangle = 0$  для любых  $n \in \mathbb{N}$ . Действительно,

$$\begin{aligned} \langle f_{\delta_n}^\beta, L_{\delta_n}^\beta \psi^\beta \rangle &= \int_0^T \int_{Q \times \mathbb{R}^3} f_{\delta_n}^\beta \psi_1^\beta \frac{\partial \psi_2^\beta}{\partial t} dx dv dt + \int_0^T \int_{Q \times \mathbb{R}^3} \psi_2^\beta f_{\delta_n}^\beta X_{\delta_n}^\beta \psi_1^\beta dx dv dt = \\ &= \int_0^T \int_{Q \times \mathbb{R}^3} f_{\delta_n}^\beta \psi_1^\beta \frac{\partial \psi_2^\beta}{\partial t} dx dv dt + \int_0^T \psi_2^\beta \frac{d}{dt} \left( \int_{Q \times \mathbb{R}^3} f_{\delta_n}^\beta \psi_1^\beta dx dv \right) dt = \\ &= \int_0^T \int_{Q \times \mathbb{R}^3} f_{\delta_n}^\beta \psi_1^\beta \frac{\partial \psi_2^\beta}{\partial t} dx dv dt + \left( \psi_2^\beta(0) - \psi_2^\beta(T) \right) \left( \int_{Q \times \mathbb{R}^3} f_{\delta_n}^\beta X_{\delta_n}^\beta \psi_1^\beta dx dv \right) \Big|_0^T - \end{aligned}$$

$$-\int_0^T \int_{Q \times \mathbb{R}^3} f_{\delta_n}^\beta \psi_1^\beta \frac{\partial \psi_2^\beta}{\partial t} dx dv dt = 0.$$

Тогда из (6.17) следует, что  $\langle f^\beta, L^\beta \psi^\beta \rangle = 0$ . Кроме того,

$$\begin{aligned} & \left| \langle f^\beta, L^\beta \psi^\beta \rangle - \int_{A_+} g_+^\beta \psi^\beta dv_+ + \int_{A_-} g_-^\beta \psi^\beta dv_- \right| \leq \\ & \leq \left| \langle f^\beta, L^\beta \psi^\beta \rangle - \langle f_{\delta_n}^\beta, L_{\delta_n}^\beta \psi^\beta \rangle \right| + \left| \int_{A_+} f_{\delta_n,+}^\beta \psi^\beta dv_+ - \int_{A_+} g_+^\beta \psi^\beta dv_+ \right| + \\ & + \left| \int_{A_-} f_{\delta_n,-}^\beta \psi^\beta dv_- - \int_{A_-} g_-^\beta \psi^\beta dv_- \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

это доказывает (6.14) для функций  $\psi^\beta$  с разделенными переменными.

Пусть теперь  $\psi^\beta \in \dot{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3 \times (0, T))$ . По теореме о продолжении найдутся функции  $\xi^\beta \in \dot{C}^1(G)$  (где  $G \subset (\mathbb{R}^6 \times (0, T))$ ) — открытое множество такое, что  $(Q \times \mathbb{R}^3 \times (0, T)) \subset G$  такие, что

$$\xi^\beta|_{(Q \times \mathbb{R}^3 \times (0, T))} = \psi^\beta.$$

Из [11, предложение 1, с. 369] следует, что существуют функции  $\xi_k^\beta \in \dot{C}^1(G)$  вида

$$\xi_k^\beta(x, v, t) = \sum_{i=1}^{j_k} c_{k,i} \xi_{k,i}^{\beta,1}(x, v) \xi_{k,i}^{\beta,2}(t),$$

такие, что  $\xi_k^\beta \rightarrow \xi^\beta$  при  $k \rightarrow \infty$  в  $C^1(G)$  (здесь коэффициенты  $c_{k,i} \in \mathbb{R}$ ). Положим

$$\psi_k^\beta := \xi_k^\beta|_{Q \times \mathbb{R}^3 \times (0, T)},$$

таким образом,  $\psi_k^\beta$  являются линейными комбинациями произведений функций с разделенными переменными и принадлежат классу  $\dot{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3 \times (0, T))$ . Это верно для всех  $k \in \mathbb{N}$ , тогда для любых  $\psi_k^\beta \in \dot{C}^1(Q \times \mathbb{R}^3 \times (0, T))$  будет выполняться  $\langle f^\beta, L^\beta \psi_k^\beta \rangle = 0$ . Далее, для всех  $k \in \mathbb{N}$  будем считать, что  $\text{supp } \psi_k^\beta \subset B_R(0)$ , тогда

$$\left| \langle f^\beta, L^\beta \psi_k^\beta \rangle - \langle f^\beta, L^\beta \psi^\beta \rangle \right| \leq \int_{Q \times \mathbb{R}^3 \times (0, T)} |f^\beta| |L^\beta \psi_k^\beta - L^\beta \psi^\beta| dx dv dt.$$

Так как  $|f^\beta| |L^\beta \psi_k^\beta - L^\beta \psi^\beta| \in L_1(Q \times \mathbb{R}^3 \times (0, T))$  (см. [13, с. 104]), из поточечной сходимости  $L^\beta \psi_k^\beta \rightarrow L^\beta \psi^\beta$  при  $k \rightarrow \infty$  в  $Q \times \mathbb{R}^3 \times (0, T)$ , а также по теореме Лебега о мажорируемой сходимости получим, что

$$\left| \langle f^\beta, L^\beta \psi_k^\beta \rangle - \langle f^\beta, L^\beta \psi^\beta \rangle \right| \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \tag{6.18}$$

Поскольку для любых  $k \in \mathbb{N}$  выполняется равенство  $\langle f^\beta, L^\beta \psi_k^\beta \rangle = 0$ , то и  $\langle f^\beta, L^\beta \psi^\beta \rangle = 0$ . В силу неравенства

$$\left| \langle f^\beta, L^\beta \psi^\beta \rangle - \int_{A_+} g_+^\beta \psi^\beta dv_+ + \int_{A_-} g_-^\beta \psi^\beta dv_- \right| \leq \left| \langle f^\beta, L^\beta \psi^\beta \rangle - \langle f^\beta, L^\beta \psi_k^\beta \rangle \right| +$$

$$+ \left| \int_{A_+} g_+^\beta \psi^\beta d\nu_+ - \int_{A_+} g_+^\beta \psi_k^\beta d\nu_+ \right| + \left| \int_{A_-} g_-^\beta \psi^\beta d\nu_- - \int_{A_-} g_-^\beta \psi_k^\beta d\nu_- \right| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty,$$

мы получаем, что  $L^\beta f^\beta$  существует и  $L^\beta f^\beta = 0$ , а также выполняется (6.14). Для завершения доказательства нужно показать выполнение равенства (6.15). Это равенство следует из доказательства предложения 6 в [13, с. 102–106].  $\square$

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арсеньев А. А.* О существовании обобщенных и стационарных статистических решений системы уравнений Власова в ограниченной области // Дифф. уравн. — 1979. — 15, № 7. — С. 1253–1266.
2. *Беляева Ю. О., Скубачевский А. Л.* Об однозначной разрешимости первой смешанной задачи для системы уравнений Власова—Пуассона в бесконечном цилиндре // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2018. — 477. — С. 12–34.
3. *Ильгисонис В. В.* Классические задачи физики горячей плазмы. — М.: МЭИ, 2016.
4. *Скубачевский А. Л.* Об однозначной разрешимости смешанных задач для системы уравнений Власова—Пуассона в полупространстве // Докл. РАН. — 2012. — 443, № 4. — С. 431–434.
5. *Скубачевский А. Л.* Смешанные задачи для уравнений Власова—Пуассона в полупространстве // Тр. МИАН. — 2013. — 283. — С. 204–232.
6. *Скубачевский А. Л.* Уравнения Власова—Пуассона для двухкомпонентной плазмы в однородном магнитном поле // Усп. мат. наук. — 2014. — 69, № 2. — С. 107–148.
7. *Batt J.* Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics // J. Differ. Equ. — 1977. — 25, № 3. — С. 342–364.
8. *Belyaeva Yu. O., Gebhard B., Skubachevskii A. L.* A general way to confined stationary Vlasov–Poisson plasma configurations // Kinet. Relat. Models. — 2021. — 14, № 2. — С. 257–282.
9. *Gilbarg D., Trudinger N. S.* Elliptic Partial Differential Equations of Second Order. — Berlin–Heidelberg–New York: Springer, 1977.
10. *Horst E., Hunze R.* Weak solutions of the initial value problem for the unmodified non-linear Vlasov equation // Math. Methods Appl. Sci. — 1984. — 6. — С. 262–279.
11. *Horvath J.* Topological Vector Spaces and Distributions. Vol. 1. — Reading, etc.: Addison-Wesley, 1966.
12. *Knopf P.* Confined steady states of a Vlasov–Poisson plasma in an infinitely long cylinder // Math. Methods Appl. Sci. — 2019. — 42. — С. 6369–6384.
13. *Weckler J.* Zum Anfangs-Randwertproblem des Vlasov–Poisson-Systems // Dissertation. — Universität München, 1994.
14. *Weckler J.* On the initial-boundary-value problem for the Vlasov–Poisson system: existence of weak solutions and stability // Arch. Ration. Mech. Anal. — 1995. — 130, № 2. — С. 145–161.

Ю. О. Беляева

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: belyaeva-yuo@rudn.ru

А. Л. Скубачевский

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: skublector@gmail.com

UDC 517.95

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-3-383-398

EDN: FITUOA

## On global weak solutions of the Vlasov–Poisson equations with external magnetic field

Yu. O. Belyaeva and A. L. Skubachevskii

*RUDN University, Moscow, Russia*

**Abstract.** We consider the first mixed problem for the system of Vlasov–Poisson equations with a given external magnetic field in a bounded domain. This problem describes the kinetics of high-temperature plasma in controlled thermonuclear fusion plants and is considered with respect to unknown functions: electric field potential, distribution functions of positively charged ions and electrons. Additionally, we assumed that the distribution functions of charged particles satisfy the condition of mirror reflection from the boundary of the domain under consideration. We prove the existence of global weak solutions of such a problem.

**Keywords:** Vlasov equations, weak solutions, external magnetic field.

**Conflict-of-interest.** The authors declare no conflicts of interest.

**Acknowledgments and funding.** The study was supported by the grant No. 22-21-00392 from the Russian Science Foundation.

**For citation:** Yu. O. Belyaeva, A. L. Skubachevskii, “On global weak solutions of the Vlasov–Poisson equations with external magnetic field,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 3, 383–398. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-3-383-398>

### REFERENCES

1. A. A. Arsen'ev, “O sushchestvovanii obobshchennykh i statsionarnykh statisticheskikh resheniy sistemy uravneniy Vlasova v ogranichennoy oblasti” [On the existence of generalized and stationary statistical solutions of the Vlasov system of equations in a bounded domain], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1979, **15**, No. 7, 1253–1266 (in Russian).
2. Yu. O. Belyaeva and A. L. Skubachevskii, “Ob odnoznachnoy razreshimosti pervoy smeshannoy zadachi dlya sistemy uravneniy Vlasova–Puassona v beskonechnom tsilindre” [On the unique solvability of the first mixed problem for the system of Vlasov–Poisson equations in an infinite cylinder], *Zap. nauch. sem. POMI* [Notes Sci. Semin. St. Petersburg Dept. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2018, **477**, 12–34 (in Russian).
3. V. V. Il'gisonis, *Klassicheskie zadachi fiziki goryachey plazmy* [Classical Problems of Hot Plasma Physics], MEI, Moscow, 2016 (in Russian).
4. A. L. Skubachevskii, “Ob odnoznachnoy razreshimosti smeshannykh zadach dlya sistemy uravneniy Vlasova–Puassona v poluprostranstve” [On the unique solvability of mixed problems for the system of Vlasov–Poisson equations in a half-space], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2012, **443**, No. 4, 431–434 (in Russian).
5. A. L. Skubachevskii, “Smeshannye zadachi dlya uravneniy Vlasova–Puassona v poluprostranstve” [Mixed problems for the Vlasov–Poisson equations in a half-space], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2013, **283**, 204–232 (in Russian).
6. A. L. Skubachevskii, “Uravneniya Vlasova–Puassona dlya dvukomponentnoy plazmy v odnorodnom magnitnom pole” [Vlasov–Poisson equations for two-component plasma in a uniform magnetic field], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2014, **69**, No. 2, 107–148 (in Russian).



7. J. Batt, “Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics,” *J. Differ. Equ.*, 1977, **25**, No. 3, 342–364.
8. Yu. O. Belyaeva, B. Gebhard, and A. L. Skubachevskii, “A general way to confined stationary Vlasov–Poisson plasma configurations,” *Kinet. Relat. Models*, 2021, **14**, No. 2, 257–282.
9. D. Gilbarg and N. S. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, Berlin–Heidelberg–New York, 1977.
10. E. Horst and R. Hunze, “Weak solutions of the initial value problem for the unmodified non-linear Vlasov equation,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 1984, **6**, 262–279.
11. J. Horvath, *Topological Vector Spaces and Distributions. Vol. 1*, Addison-Wesley, Reading, etc., 1966.
12. P. Knopf, “Confined steady states of a Vlasov–Poisson plasma in an infinitely long cylinder,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2019, **42**, 6369–6384.
13. J. Weckler, “Zum Anfangs-Randwertproblem des Vlasov–Poisson-Systems,” *Dissertation*, Universität München, 1994.
14. J. Weckler, “On the initial-boundary-value problem for the Vlasov–Poisson system: existence of weak solutions and stability,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1995, **130**, No. 2, 145–161.

Yu. O. Belyaeva  
RUDN University, Moscow, Russia  
E-mail: belyaeva-yuo@rudn.ru

A. L. Skubachevskii  
RUDN University, Moscow, Russia  
E-mail: skublector@gmail.com

УДК 517.929

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-3-399-417

EDN: DXNBXR

## ГЛАДКОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Н. О. ИВАНОВ

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

**Аннотация.** Рассматривается краевая задача со смешанными граничными условиями для дифференциально-разностного уравнения второго порядка на интервале конечной длины  $(0, d)$ . Доказано существование обобщенного решения задачи, а также исследованы условия на правую часть дифференциально-разностного уравнения, обеспечивающие гладкость обобщенного решения на всем интервале.

**Ключевые слова:** краевая задача, дифференциально-разностные уравнения, обобщенные решения.

**Заявление о конфликте интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Благодарности и финансирование.** Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Мегагрант, соглашение № 075-15-2022-1115). Автор выражает благодарность своему научному руководителю А. Л. Скубачевскому за постановку задачи и внимание к работе, а также благодарность рецензенту за ряд предложений, позволивших улучшить статью. Автор также выражает благодарность В. В. Малыгиной за замечание к моему докладу на международной конференции The 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations (DFDE-2022), которое привлекло мое внимание к постановке краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения со смешанными граничными условиями.

**Для цитирования:** Н. О. Иванов. Гладкость обобщенных решений краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения второго порядка со смешанными граничными условиями // *Соврем. мат. Фундам. направл.* 2023. Т. 69, № 3. С. 399–417. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-3-399-417>

### ВВЕДЕНИЕ

Функционально-дифференциальные уравнения играют важную роль во многих приложениях, например, в теории систем управления с последействием [1, 2, 6, 7, 12, 13], в теории многомерных пластин и оболочек [11, 17–19], в теории диффузионных процессов [19].

Впервые вопросы существования и гладкости обобщенных решений первой краевой задачи для функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа на конечном интервале рассматривались в работах [3, 4]. Было показано, что гладкость обобщенных решений таких задач может нарушаться на сдвигах концов интервала внутрь интервала даже в случае бесконечно дифференцируемой правой части уравнения и сохраняться лишь на подынтервалах, образующихся выбрасыванием орбит концов этого интервала, порожденных группой целочисленных сдвигов



разностного оператора. Условие гладкости обобщенных решений на всем интервале в виде ортогональности правой части уравнения конечному числу линейно независимых функций в пространстве  $L_2(0, d)$  в случае первой краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения с постоянными коэффициентами получено в работах [5, 19]. Аналогичные условия в случае второй краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения с переменными коэффициентами на конечном интервале были получены в работах [14, 15]. В работах [10, 16] исследовались условия на коэффициенты разностного оператора, при которых гладкость обобщенных решений первой и второй краевых задач для дифференциально-разностного уравнения сохраняется при любой правой части. Смешанные задачи для дифференциально-разностных уравнений в цилиндрической области изучались в работах [8, 9]. Вопрос о гладкости обобщенных решений краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения со смешанными граничными условиями на конечном интервале в случае переменных коэффициентов ранее не рассматривался.

В настоящей работе исследуется краевая задача для дифференциально-разностного уравнения с условием первого рода на левом конце интервала  $(0, d)$  и условием второго рода на правом, а именно, рассматривается уравнение в дивергентном виде

$$-(R_Q u')' = f(t), \quad t \in (0, d), \quad (1)$$

с краевыми условиями

$$u(0) = 0, \quad (2)$$

$$(R_Q u')(d) = 0, \quad (3)$$

где  $f \in L_2(0, d)$ ,  $Q = (0, d)$ ,  $d = N + \theta$ ,  $N \in \mathbb{N}$ ,  $0 < \theta \leq 1$ . Оператор  $R_Q$  определен по формуле

$$R_Q = P_Q R I_Q : L_2(0, d) \rightarrow L_2(0, d),$$

где  $I_Q : L_2(0, d) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$  — оператор продолжения нулем функции из  $L_2(0, d)$  в  $\mathbb{R} \setminus (0, d)$ ,  $P_Q : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(0, d)$  — оператор сужения функции из  $L_2(\mathbb{R})$  на интервал  $(0, d)$ , а  $R : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$  — разностный оператор, определенный по формуле

$$(Ru)(t) = \sum_{k=-N}^N a_k(t)u(t+k),$$

где  $a_k(t) \in C^\infty(\mathbb{R})$  — комплекснозначные функции. Доказательства свойств оператора  $R_Q$ , сформулированных в разделе 1 в виде лемм, можно найти в [19, гл. 1].

В разделе 1 рассматриваются разностные операторы  $R_Q$  на интервале  $(0, d)$ . Раздел 2 посвящен вопросу существования обобщенного решения задачи (1)–(3). В разделах 3, 4 и 5 исследуется гладкость обобщенных решений рассматриваемой задачи на интервалах целой и нецелой длины.

### 1. РАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ НА ИНТЕРВАЛЕ $(0, d)$

Рассмотрим разбиение интервала  $(0, d)$  на подынтервалы, которые образуются выбрасыванием орбит концов интервала  $(0, d)$ , порождаемых группой целочисленных сдвигов на  $k$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ . Если  $\theta = 1$ , то мы получим один класс непересекающихся подынтервалов

$$Q_{1k} = (k-1, k), \quad k = 1, \dots, N+1.$$

Если же  $0 < \theta < 1$ , то мы получим два класса непересекающихся подынтервалов

$$\begin{aligned} Q_{1k} &= (k-1, k-1+\theta), & k &= 1, \dots, N+1, \\ Q_{2k} &= (k-1+\theta, k), & k &= 1, \dots, N. \end{aligned}$$

Всюду в дальнейшем будем обозначать  $N(s) = N+1$  при  $s = 1$  и  $N(s) = N$  при  $s = 2$ , где  $s$  — номер класса подынтервалов.

**Пример 1.1.** Пусть  $d = \frac{11}{5}$ . Тогда  $N = 2$ ,  $\theta = \frac{1}{5}$ , а интервал  $(0, \frac{11}{5})$  разбивается на два класса подынтервалов:  $Q_{11} = (0, \frac{1}{5})$ ,  $Q_{12} = (1, \frac{6}{5})$ ,  $Q_{13} = (2, \frac{11}{5})$  и  $Q_{21} = (\frac{1}{5}, 1)$ ,  $Q_{22} = (\frac{6}{5}, 2)$ .

**Пример 1.2.** Пусть  $d = 3$ . Тогда  $N = 2$ ,  $\theta = 1$ , при этом  $Q_{11} = (0, 1)$ ,  $Q_{12} = (1, 2)$ ,  $Q_{13} = (2, 3)$ .

Через  $P_s : L_2(0, d) \rightarrow L_2\left(\bigcup_k Q_{sk}\right)$ ,  $k = 1, \dots, N(s)$ , обозначим оператор ортогонального проектирования функций на  $L_2\left(\bigcup_k Q_{sk}\right)$  в пространстве  $L_2(0, d)$ , где  $L_2\left(\bigcup_k Q_{sk}\right)$  есть подпространство функций из  $L_2(0, d)$ , равных нулю вне  $\bigcup_k Q_{sk}$ ,  $k = 1, \dots, N(s)$ ,  $s = 1$ , если  $\theta = 1$ , и  $s = 1, 2$ , если  $0 < \theta < 1$ .

Очевидно,

$$L_2(0, d) = \bigoplus_s L_2\left(\bigcup_k Q_{sk}\right).$$

**Лемма 1.1.** Операторы  $R : L_2(\mathbb{R}) \rightarrow L_2(\mathbb{R})$  и  $R_Q : L_2(0, d) \rightarrow L_2(0, d)$  ограниченные, при этом

$$(R^*u)(t) = \sum_{k=-N}^N \overline{a_k(t-k)}u(t-k), \quad R_Q^* = P_Q R^* I_Q.$$

**Лемма 1.2.** Пространство функций  $L_2\left(\bigcup_k Q_{sk}\right)$ ,  $k = 1, \dots, N(s)$ , есть инвариантное подпространство оператора  $R_Q$ , где  $s = 1$ , если  $\theta = 1$ , и  $s = 1, 2$ , если  $0 < \theta < 1$ .

Рассмотрим изоморфизм гильбертовых пространств

$$U_s : L_2\left(\bigcup_k Q_{sk}\right) \rightarrow L_2^{N(s)}(Q_{s1}),$$

определив вектор-функцию  $(U_s u)(t)$  по формуле

$$(U_s u)_k(t) = u(t+k-1), \quad t \in Q_{sk}, \quad k = 1, \dots, N(s); \tag{1.1}$$

$$L_2^{N(s)}(Q_{s1}) = \prod_{k=1}^{N(s)} L_2(Q_{s1}).$$

Через  $R_s = R_s(t)$ ,  $t \in \overline{Q_{s1}}$ , обозначим матрицу порядка  $N(s) \times N(s)$  с элементами

$$r_{ij}^s(t) = a_{j-i}(t+i-1), \quad t \in \mathbb{R}; \quad i, j = 1, \dots, N(s). \tag{1.2}$$

Другими словами,

$$R_1(t) = \begin{pmatrix} a_0(t) & a_1(t) & \dots & a_N(t) \\ a_{-1}(1+t) & a_0(1+t) & \dots & a_{N-1}(1+t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-N}(N+t) & a_{-N+1}(N+t) & \dots & a_0(N+t) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R},$$

$$R_2(t) = \begin{pmatrix} a_0(t) & a_1(t) & \dots & a_{N-1}(t) \\ a_{-1}(1+t) & a_0(1+t) & \dots & a_{N-2}(1+t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-N+1}(N+t-1) & a_{-N+2}(N+t-1) & \dots & a_0(N+t-1) \end{pmatrix}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Лемма 1.3.** Оператор  $R_{Q_s} = U_s R_Q U_s^{-1} : L_2^{N(s)}(Q_{s1}) \rightarrow L_2^{N(s)}(Q_{s1})$  является оператором умножения на квадратную матрицу  $R_s(t)$ , где  $s = 1$ , если  $\theta = 1$ , и  $s = 1, 2$ , если  $0 < \theta < 1$ .

**Лемма 1.4.** Оператор  $R_Q + R_Q^* : L_2(0, d) \rightarrow L_2(0, d)$  является положительно определенным тогда и только тогда, когда матрицы  $R_s(t) + R_s^*(t)$  положительно определены для всех  $t \in \overline{Q_{s1}}$ ,  $s = 1$ , если  $\theta = 1$ , и  $s = 1, 2$ , если  $0 < \theta < 1$ ;  $R_s^*(t)$  – эрмитово сопряженные матрицы.

**Определение 1.1.** Будем говорить, что дифференциально-разностное уравнение (1) удовлетворяет условию сильной эллиптичности, если матрицы  $R_s(t) + R_s^*(t)$  положительно определены для всех  $t \in \overline{Q_{s1}}$ ,  $s = 1$ , если  $\theta = 1$ , и  $s = 1, 2$ , если  $0 < \theta < 1$ .

**Замечание 1.1.** Условие сильной эллиптичности для уравнения (1) эквивалентно выполнению неравенства

$$\operatorname{Re}(R_s(t)Y, Y)_{\mathbb{C}^{N(s)}} \geq k_0 \|Y\|_{\mathbb{C}^{N(s)}}^2 \quad (1.3)$$

для всех  $t \in \overline{Q}_{s1}$ ,  $s = 1$ , если  $\theta = 1$ , и  $s = 1, 2$ , если  $0 < \theta < 1$ ;  $Y \in \mathbb{C}^{N(s)}$ , где  $k_0 > 0$  не зависит от  $t$  и  $Y$ .

Далее будем предполагать, что уравнение (1) удовлетворяет условию сильной эллиптичности.

Обозначим через  $W_2^k(0, d)$  пространство Соболева комплекснозначных функций из  $L_2(0, d)$ , имеющих все обобщенные производные вплоть до  $k$ -го порядка из  $L_2(0, d)$ . Скалярное произведение для  $u, v \in W_2^k(0, d)$  определено по формуле

$$(u, v)_{W_2^k(0, d)} = \sum_{i=0}^k \int_0^d u^{(i)} \overline{v^{(i)}} dt.$$

**Лемма 1.5.** Пусть  $\det R_s(t) \neq 0$  при  $t \in \overline{Q}_{s1}$ ,  $s = 1$ , если  $\theta = 1$ , и  $s = 1, 2$ , если  $0 < \theta < 1$ . Тогда оператор  $R_Q : L_2(0, d) \rightarrow L_2(0, d)$  имеет ограниченный обратный. Пусть, кроме того,  $u \in W_2^k(Q_{si})$ ,  $s = 1, 2$ ,  $i = 1, \dots, N(s)$ . Тогда  $R_Q^{-1}u \in W_2^k(Q_{sj})$ ,  $j = 1, \dots, N(s)$ ,  $s = 1$ , если  $\theta = 1$ , и  $s = 1, 2$ , если  $0 < \theta < 1$ ; при этом

$$\|R_Q^{-1}u\|_{W_2^k(Q_{sj})} \leq k_1 \sum_{i=1}^{N(s)} \|u\|_{W_2^k(Q_{si})},$$

где  $k_1 > 0$  не зависит от  $u$ .

## 2. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННЫМИ ГРАНИЧНЫМИ УСЛОВИЯМИ

Через  $W_{2,0}^1(0, d)$  обозначим пространство функций  $u \in W_2^1(0, d)$  таких, что  $u(0) = 0$ . Введем неограниченный оператор  $\mathcal{A}_R : L_2(0, d) \supset D(\mathcal{A}_R) \rightarrow L_2(0, d)$  с областью определения

$$D(\mathcal{A}_R) = \{u \in W_{2,0}^1(0, d) : R_Q u' \in W_2^1(0, d)\},$$

действующий по формуле

$$\mathcal{A}_R u = -(R_Q u')', \quad u \in D(\mathcal{A}_R).$$

**Определение 2.1.** Функцию  $u \in D(\mathcal{A}_R)$  будем называть *обобщенным решением* задачи (1)–(3), если она удовлетворяет операторному уравнению

$$\mathcal{A}_R u = f. \quad (2.1)$$

Дадим эквивалентное определение.

**Определение 2.2.** Функцию  $u \in W_{2,0}^1(0, d)$  будем называть *обобщенным решением* задачи (1)–(3), если для всех  $v \in W_{2,0}^1(0, d)$  выполнено интегральное тождество

$$(R_Q u', v')_{L_2(0, d)} = (f, v)_{L_2(0, d)}. \quad (2.2)$$

Определяя эквивалентное скалярное произведение в пространстве  $W_{2,0}^1(0, d)$ , можно доказать следующую теорему.

**Теорема 2.1.** Пусть выполняется условие (1.3). Тогда для любой функции  $f \in L_2(0, d)$  существует единственное обобщенное решение  $u \in W_{2,0}^1(0, d)$  задачи (1)–(3), при этом имеет место оценка

$$\|u\|_{W_{2,0}^1(0, d)} \leq k_2 \|f\|_{L_2(0, d)}, \quad (2.3)$$

где  $k_2$  — постоянная, не зависящая от  $f$ .

**Следствие 2.1.** Пусть уравнение (1) удовлетворяет условию сильной эллиптичности. Тогда оператор  $\mathcal{A}_R$  фредгольмов,  $\operatorname{ind} \mathcal{A}_R = 0$  и  $\dim \mathcal{N}(\mathcal{A}_R) = 0$ .

3. ГЛАДКОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ НА ПОДЫНТЕРВАЛАХ

**Теорема 3.1.** Пусть выполнено условие сильной эллиптичности (1.3). Если  $u \in W_{2,0}^1(0, d)$  — обобщенное решение задачи (1)–(3), тогда  $u \in W_2^2(Q_{sk})$ , где  $k = 1, \dots, N(s)$ ,  $s = 1$ , если  $\theta = 1$ ,  $u \in W_2^2(Q_{sk})$ , если  $0 < \theta < 1$ ; при этом

$$\|u\|_{W_2^2(Q_{sk})} \leq k_3 \|f\|_{L_2(0,d)}, \tag{3.1}$$

где  $k_3 > 0$  не зависит от  $f$ .

*Доказательство.* Зафиксируем число  $s$ . Предположим в интегральном тождестве (2.2), что  $v \in C_0^\infty(\bigcup_k Q_{sk})$ , а также  $v(t) = 0$  при  $t \notin \bigcup_k Q_{sk}$ , если  $0 < \theta < 1$ . Из (1.1) и леммы 1.3 вытекает, что

$$\int_{Q_{s1}} (R_s U_s P_s u', U_s v') dt = \int_{Q_{s1}} (U_s P_s f, U_s v) dt,$$

где  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в  $\mathbb{C}^{N(s)}$ , а  $C_0^\infty(\bigcup_k Q_{sk}) = \{v \in C^\infty(0, d) : v(t) = 0 \text{ при } t \in (0, d) \setminus \bigcup_k Q_{sk}\}$ . Тогда вектор-функция

$$U_s P_s u \in W_2^{1,N(s)}(Q_{s1}) = \prod_{j=1}^{N(s)} W_2^1(Q_{s1})$$

является обобщенным решением системы  $N(s)$  обыкновенных дифференциальных уравнений

$$-(R_s U_s P_s u')'(t) = (U_s P_s f)(t), \quad t \in Q_{s1}.$$

Поскольку  $U_s P_s f \in L_2^{N(s)}(Q_{s1})$ , то  $R_s U_s P_s u' \in W_2^{1,N(s)}(Q_{s1})$ . По условию элементы матрицы  $R_s(t)$  — бесконечно дифференцируемые функции, а  $\det R_s(t) \neq 0$ ,  $t \in \overline{Q_{s1}}$ , в силу (1.3). Таким образом,  $U_s P_s u' \in W_2^{1,N(s)}(Q_{s1})$  и  $U_s P_s u \in W_2^{2,N(s)}(Q_{s1})$ , т. е.  $u \in W_2^2(Q_{sk})$ ,  $k = 1, \dots, N(s)$ .  $\square$

**Следствие 3.1.** Пусть выполняется неравенство (1.3), а  $u \in W_{2,0}^1(0, d)$  — обобщенное решение задачи (1)–(3), где  $f \in L_2(0, d)$ . Тогда уравнение (1) удовлетворяется почти всюду на  $(0, d)$ , при этом выполняется краевое условие (3).

*Доказательство.*

1. Возьмем произвольную функцию  $v \in C_0^\infty(0, d)$  в интегральном тождестве (2.2). Используя определение обобщенной производной в пространстве распределений  $D'(0, d)$ , получим

$$\langle -(R_Q u')', v \rangle = (f, v)_{L_2(0,d)}.$$

Так как  $f \in L_2(0, d)$ , то в силу произвольности выбора  $v \in C_0^\infty(0, d)$  имеем

$$-(R_Q u')'(t) = f(t) \tag{3.2}$$

почти всюду на  $(0, d)$  и  $R_Q u' \in W_2^1(0, d)$ .

2. Возьмем теперь произвольную функцию  $v \in W_{2,0}^1(0, d)$  в (2.2). Проинтегрировав по частям левую часть тождества (2.2), в силу равенства  $v(0) = 0$  получим

$$-\int_0^d (R_Q u')' \bar{v} dt + (R_Q u')(d) \bar{v}(d) = \int_0^d f \bar{v} dt.$$

Тогда из (3.2) следует, что

$$(R_Q u')(d) \bar{v}(d) = 0.$$

В силу произвольности выбора  $v \in W_{2,0}^1(0, d)$  из последнего вытекает равенство

$$(R_Q u')(d) = 0.$$

$\square$

**Замечание 3.1.** Из теоремы 3.1 и следствия 3.1 следует, что

$$D(\mathcal{A}_R) = \{u \in W_{2,0}^1(0, d) : R_Q u' \in W_2^1(0, d), (R_Q u')(d) = 0, u \in W_2^2(Q_{sk}), \\ k = 1, \dots, N(s), s = 1, \text{ если } \theta = 1, \text{ и } s = 1, 2, \text{ если } 0 < \theta < 1\}. \quad (3.3)$$

#### 4. ГЛАДКОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ НА ИНТЕРВАЛЕ ЦЕЛОЙ ДЛИНЫ

Для формулировки основных результатов о гладкости обобщенных решений задачи (1)–(3) на интервале целой длины введем некоторые обозначения и докажем вспомогательные результаты.

Рассмотрим блочную матрицу  $\mathbf{R}_1$  порядка  $(N + 1) \times (2N + 2)$  вида

$$\mathbf{R}_1 = \left( \tilde{R}_1 | \tilde{R}_2 \right),$$

где  $\tilde{R}_1, \tilde{R}_2$  — матрицы порядка  $(N + 1) \times (N + 1)$ , которые имеют вид

$$\tilde{R}_1 = \begin{pmatrix} a_{-1}(1) & a_0(1) & \dots & a_{N-2}(1) & a_{N-1}(1) \\ a_{-2}(2) & a_{-1}(2) & \dots & a_{N-3}(2) & a_{N-2}(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-N}(N) & a_{-N+1}(N) & \dots & a_{-1}(N) & a_0(N) \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\tilde{R}_2 = R_1(1).$$

Другими словами,

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} a_{-1}(1) & \dots & a_{N-1}(1) & a_0(1) & \dots & a_N(1) \\ a_{-2}(2) & \dots & a_{N-2}(2) & a_{-1}(2) & \dots & a_{N-1}(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-N}(N) & \dots & a_0(N) & a_{-N+1}(N) & \dots & a_1(N) \\ 0 & \dots & 0 & a_{-N}(N+1) & \dots & a_0(N+1) \end{pmatrix}.$$

Через  $\mathbf{R}_1^1$  ( $\mathbf{R}_1^2$ ) обозначим матрицу порядка  $(N + 1) \times (2N + 1)$ , полученную из матрицы  $\mathbf{R}_1$  вычеркиванием первого (последнего) столбца соответственно, а через  $\mathbf{R}_1^0$  матрицу порядка  $(N + 1) \times 2N$ , полученную из  $\mathbf{R}_1$  вычеркиванием первого и последнего столбцов. Введенные матрицы понадобятся для подсчета числа линейно независимых функций, которым должна быть ортогональна правая часть уравнения (1), чтобы обеспечить гладкость обобщенных решений на всем интервале при  $\theta = 1$ .

**Замечание 4.1.** Первые  $N + 1$  столбцов матрицы  $\mathbf{R}_1$  используются для описания линейных комбинаций правых производных решения в точках  $0, 1, \dots, N$ , а последние  $N + 1$  столбцов матрицы  $\mathbf{R}_1$  — для описания линейных комбинаций левых производных решения в точках  $1, 2, \dots, N + 1$ . Последняя строка матрицы  $\mathbf{R}_1$  задает линейную комбинацию значений левых производных в точках  $1, 2, \dots, N + 1$ , соответствующую краевому условию (3). Строки матрицы  $\mathbf{R}_1$  с номерами  $1, \dots, N$  задают равенства  $(R_Q u')(k + 0) = (R_Q u')(k - 0)$ ,  $k = 1, \dots, N$ , вытекающие из уравнения (1) и условия  $f \in L_2(0, d)$ , см. (4.6).

**Лемма 4.1.** Пусть выполнено условие сильной эллиптичности (1.3). Тогда

$$\text{rank } \mathbf{R}_1 = \text{rank } \mathbf{R}_1^1 = N + 1, \quad \text{rank } \mathbf{R}_1^0 = \text{rank } \mathbf{R}_1^2 \geq N.$$

*Доказательство.*

1. Так как последние  $N + 1$  столбцов матриц  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_1^1$  формируют невырожденную матрицу  $R_1(1)$  (см. (1.3)), то мы заключаем, что  $\text{rank } \mathbf{R}_1 = \text{rank } \mathbf{R}_1^1 = N + 1$ .

2. Докажем теперь, что  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = \text{rank } \mathbf{R}_1^2 \geq N$ . Рассмотрим матрицы  $\mathbf{R}_1^0$  и  $\mathbf{R}_1^2$ .

2а. Если найдется такое  $k$ ,  $1 \leq k \leq N$ , что  $a_{-k}(N + 1) \neq 0$ , то  $(N + 1)$ -я строка матрицы порядка  $(N + 1) \times N$ , полученной из матрицы  $R_1(1)$  вычеркиванием последнего столбца, равна нетривиальной линейной комбинации строк матрицы  $R_2(1)$  порядка  $N \times N$ . С другой стороны,  $(N + 1)$ -я строка матрицы порядка  $(N + 1) \times N$ , полученная из матрицы  $\tilde{R}_1$  вычеркиванием первого столбца равна тривиальной линейной комбинации строк матрицы  $R_2(1)$ . Таким образом,  $(N + 1)$ -я строка матрицы  $\mathbf{R}_1^0$  не может быть равна линейной комбинации 1-й, 2-й,  $\dots$ ,  $N$ -й строк этой матрицы. Таким образом,  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = N + 1$ .

2b. Если  $a_{-k}(N+1) = 0$ ,  $k = 1, \dots, N$ , то последняя строка матрицы  $\mathbf{R}_1^0$  является нулевой. С другой стороны, матрица  $\mathbf{R}_1^0$  содержит в себе невырожденную матрицу  $R_2(1)$  порядка  $N \times N$ . Следовательно, в этом случае  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = N$ .

2с. Матрица  $\mathbf{R}_1^0$  получается из матрицы  $\mathbf{R}_1^2$  вычеркиванием ее первого столбца. Поэтому из  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 \geq N$  следует  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = \text{rank } \mathbf{R}_1^2 \geq N$ .  $\square$

Рассмотрим ограниченный оператор  $A_R^0 : W_2^2(0, d) \supset D(A_R^0) \rightarrow L_2(0, d)$  с областью определения

$$D(A_R^0) = \{u \in W_2^2(0, d) : R_Q u' \in W_2^1(0, d), u(0) = (R_Q u')(d) = 0\},$$

действующий по формуле  $A_R^0 u = \mathcal{A}_R u$  при  $u \in D(A_R^0)$ .

Из (3.3) следует, что

$$D(A_R^0) = D(\mathcal{A}_R) \cap W_2^2(0, d). \quad (4.1)$$

В силу теоремы 2.1 операторное уравнение (2.1) имеет единственное решение  $u_f$  при любой правой части  $f \in L_2(0, d)$ . Из (4.1) следует, что  $u_f \in D(A_R^0)$  в том и только том случае, когда

$$u_f \in W_2^2(0, d). \quad (4.2)$$

Обозначим через  $G_j^1 = G_j^1(t)$  ( $G_j^2 = G_j^2(t)$ ),  $j = 1, \dots, N+1$ ,  $j$ -й столбец матрицы порядка  $N \times (N+1)$ , полученной из матрицы  $R_1(t)$  вычеркиванием первой (последней) строки.

Предположим, что выполняются условия

$$\sum_{k=1}^N |a_{-k}(k)| \neq 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^N |a_k(N+1-k)| \neq 0. \quad (4.3)$$

**Лемма 4.2.** Пусть  $\theta = 1$ , и пусть выполнены условия (1.3) и (4.3).

Если столбцы  $G_1^1(0)$  и  $G_{N+1}^2(1)$  линейно независимы, то обобщенное решение  $u$  задачи (1)–(3) принадлежит пространству  $W_2^2(0, d)$  тогда и только тогда, когда  $u'(0+0) = u'(N+1-0) = 0$ .

Если же существуют такие  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ , что  $\alpha_1 G_1^1(0) + \alpha_2 G_{N+1}^2(1) = 0$ , т. е. столбцы  $G_1^1(0)$  и  $G_{N+1}^2(1)$  линейно зависимы, то  $u \in W_2^2(0, d)$  тогда и только тогда, когда  $\alpha_2 u'(0+0) + \alpha_1 u'(N+1-0) = 0$ .

*Доказательство.*

1. Пусть столбцы  $G_1^1(0)$  и  $G_{N+1}^2(1)$  линейно независимы. Из теоремы 3.1 и вложения  $W_2^2(Q_{1k}) \subset C^1(\overline{Q}_{1k})$ ,  $k = 1, \dots, N+1$ , следует, что значения  $u'(t)$  определены на концах подынтервалов  $Q_{1k}$ . Таким образом, условие  $u \in W_2^2(0, d)$  можно представить в виде

$$u'(k+0) = u'(k-0), \quad k = 1, \dots, N. \quad (4.4)$$

С другой стороны, поскольку  $u \in D(\mathcal{A}_R)$ , то из (3.3) следует

$$(R_Q u')(k+0) = (R_Q u')(k-0), \quad k = 1, \dots, N. \quad (4.5)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \varphi_j &= (U_1 u')_{j+1}(0+0), & j &= 0, \dots, N, \\ \psi_j &= (U_1 u')_j(1-0), & j &= 1, \dots, N+1. \end{aligned}$$

В силу (1.1), (1.2) и леммы 1.3 равенства (4.5) можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^{N+1} r_{i+1,j}^1(0) \varphi_{j-1} = \sum_{j=1}^{N+1} r_{i,j}^1(1) \psi_j, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.6)$$

Из (1.2) вытекают равенства  $r_{i,j}^1(1) = r_{i+1,j+1}^1(0)$ ,  $i, j = 1, \dots, N$ . Следовательно, систему (4.6) можно переписать в виде

$$\sum_{j=1}^N r_{i,j}^1(1) (\varphi_j - \psi_j) = -r_{i+1,1}^1(0) \varphi_0 + r_{i,N+1}^1(1) \psi_{N+1}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (4.7)$$

Так как  $\det R_2(1) \neq 0$  (см. (1.3)), то при выполнении (4.4) система (4.7) имеет единственное решение  $\varphi_j - \psi_j = 0$ ,  $j = 1, \dots, N$ , если

$$\varphi_0 G_1^1(0) - \psi_{N+1} G_{N+1}^2(1) = 0. \quad (4.8)$$

Так как по условию столбцы  $G_1^1(0)$  и  $G_{N+1}^2(1)$  линейно независимы, то (4.8) справедливо при

$$\varphi_0 = u'(0+0) = 0, \quad (4.9)$$

$$\psi_{N+1} = u'(N+1-0) = 0. \quad (4.10)$$

Следовательно, из условия  $u \in W_2^2(0, d)$  вытекают равенства (4.9) и (4.10). Обратное, из (4.7), (4.9), (4.10) и невырожденности матрицы  $R_2(1)$  вытекают равенства (4.4).

2. Пусть теперь столбцы  $G_1^1(0)$  и  $G_{N+1}^2(1)$  линейно зависимы. В этом случае существуют  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ , такие, что  $\alpha_1 G_1^1(0) + \alpha_2 G_{N+1}^2(1) = 0$ . В силу (4.3), не ограничивая общности, предположим, что  $G_1^1(0) \neq 0$ . Следовательно,  $\alpha_2 \neq 0$  и

$$G_{N+1}^2(1) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2} G_1^1(0).$$

Таким образом, из (4.8) вытекает

$$\left( \varphi_0 + \frac{\alpha_1}{\alpha_2} \psi_{N+1} \right) G_1^1(0) = 0,$$

т. е.

$$\alpha_2 \varphi_0 + \alpha_1 \psi_{N+1} = \alpha_2 u'(0+0) + \alpha_1 u'(N+1-0) = 0. \quad (4.11)$$

□

Далее мы покажем, что обобщенное решение  $u(t)$  задачи (1)–(3) принадлежит пространству  $W_2^2(0, d)$  при условии ортогональности правой части уравнения (1) конечному числу линейно независимых функций в  $L_2(0, d)$ . Соответствующие результаты о гладкости обобщенного решения задачи (1)–(3) будут обобщены на случай  $0 < \theta < 1$  в разделе 5.

**Теорема 4.1.** Пусть  $\theta = 1$ , и пусть выполнены условия (1.3) и (4.3).

1. Если столбцы  $G_1^1(0)$  и  $G_{N+1}^2(1)$  линейно независимы, то оператор  $A_R^0 : W_2^2(0, d) \supset D(A_R^0) \rightarrow L_2(0, d)$  фредгольмов и  $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$ . Если к тому же  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = \text{rank } \mathbf{R}_1^1 = \text{rank } \mathbf{R}_1^2 = N+1$ , то  $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 2$ ; если же  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = \text{rank } \mathbf{R}_1^1 = N$ , то  $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 1$ .
2. Если  $\alpha_1 G_1^1(0) + \alpha_2 G_{N+1}^2(1) = 0$  и при этом  $\alpha_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2$ , т. е.  $G_1^1(0) \neq 0$  и  $G_{N+1}^2(1) \neq 0$ , то оператор  $A_R^0 : W_2^2(0, d) \supset D(A_R^0) \rightarrow L_2(0, d)$  фредгольмов,  $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$ , а  $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 1$ .
3. Если  $\alpha_1 G_1^1(0) + \alpha_2 G_{N+1}^2(1) = 0$  и при этом либо  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = \text{rank } \mathbf{R}_1^1 = N+1$  и  $G_1^1(0) = 0$  или  $G_{N+1}^2(1) = 0$ , либо  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = \text{rank } \mathbf{R}_1^2 = N$  и  $G_{N+1}^2(1) = 0$ , то оператор  $A_R^0 : W_2^2(0, d) \supset D(A_R^0) \rightarrow L_2(0, d)$  фредгольмов,  $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$ , а  $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 1$ .
4. Если  $G_1^1(0) = 0$  и  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = \text{rank } \mathbf{R}_1^2 = N$ , то оператор  $A_R^0 : W_2^2(0, d) \supset D(A_R^0) \rightarrow L_2(0, d)$  фредгольмов,  $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$ , а  $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 0$ .

*Доказательство.*

1. В силу следствия 2.1  $\dim \mathcal{N}(A_R) = 0$ . Поскольку  $D(A_R^0) \subset D(A_R)$ , то  $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$ .
2. Перепишем равенство  $(R_Q u')(d) = 0$  в виде

$$\sum_{j=1}^{N+1} r_{N+1,j}^1(1) \psi_j = 0. \quad (4.12)$$

В силу (3.3) функция  $u \in W_{2,0}^1(0, d)$  такая, что  $u \in W_2^2(Q_{1k})$ ,  $k = 1, \dots, N+1$ , принадлежит  $D(A_R)$  тогда и только тогда, когда выполняются равенства (4.6) и (4.12), которые можно переписать в виде матричного уравнения

$$\mathbf{R}_1 \Phi = 0, \quad (4.13)$$

где  $\Phi := (\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_N, -\psi_1, -\psi_2, \dots, -\psi_{N+1})^T$ .

3. Рассмотрим случай, когда столбцы  $G_1^1(0)$  и  $G_{N+1}^2(1)$  линейно независимы. В силу леммы 4.2 решение  $u_f$  операторного уравнения (2.1) принадлежит  $D(A_R^0)$  в том и только том случае, когда справедливы равенства (4.9) и (4.10). Из вложения  $W_2^2(Q_{1k}) \subset C^1(\overline{Q}_{1k})$ ,  $k = 1, N+1$ , и неравенства (3.1) следует, что  $u'_f(0+0)$  и  $u'_f(N+1-0)$  являются линейными ограниченными функционалами в  $L_2(0, d)$ . Таким образом, в силу теоремы Рисса об общем виде функционала в гильбертовом

пространстве существуют определенные единственным образом функции  $h_1, h_2 \in L_2(0, d)$  такие, что

$$\begin{aligned} u'_f(0+0) &= (f, h_1)_{L_2(0,d)}, \\ u'_f(N+1-0) &= (f, h_2)_{L_2(0,d)}. \end{aligned}$$

Следовательно, равенства (4.9) и (4.10) можно представить в виде

$$(f, h_i)_{L_2(0,d)} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Исследуем условия, при которых функции  $h_1$  и  $h_2$  линейно независимы, а также условия, при которых эти функции линейно зависимы, но  $|h_1(t)| + |h_2(t)| \neq 0$  на множестве положительной меры.

За. Рассмотрим случай  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = \text{rank } \mathbf{R}_1^1 = \text{rank } \mathbf{R}_1^2 = N + 1$ . Для доказательства линейной независимости функций  $h_1$  и  $h_2$  достаточно показать, что существуют функции  $f_1, f_2 \in L_2(0, d)$ , обладающие свойством

$$(f_j, h_i)_{L_2(0,d)} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2,$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Не ограничивая общности, докажем, что существует функция  $f_2 \in L_2(0, d)$ , для которой

$$(f_2, h_1)_{L_2(0,d)} = 0, \quad (f_2, h_2)_{L_2(0,d)} = 1,$$

т. е.

$$u'_{f_2}(0+0) := \tilde{\varphi}_0 = 0, \quad u'_{f_2}(N+1-0) := \tilde{\psi}_{N+1} = 1. \quad (4.14)$$

Подставляя  $\varphi_0 = \tilde{\varphi}_0 = 0$  и  $\psi_{N+1} = \tilde{\psi}_{N+1} = 1$  в систему уравнений (4.13), получим

$$\mathbf{R}_1^0 \Phi^0 = H_2, \quad (4.15)$$

где  $\Phi^0 = (\varphi_1, \dots, \varphi_N, -\psi_1, \dots, -\psi_N)^T - 2N$ -мерный вектор с неизвестными координатами,  $H_2 = (a_N(1), a_{N-1}(2), \dots, a_1(N), a_0(N+1))^T$ . Из условия  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = \text{rank } \mathbf{R}_1^1$  и теоремы Кронекера–Капелли следует, что система уравнений (4.15) разрешима. Обозначим решение этой системы через  $\tilde{\Phi}^0 := (\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_N, -\tilde{\psi}_1, \dots, -\tilde{\psi}_N)^T$ .

Докажем, что существует функция  $f_2 \in L_2(0, d)$  такая, что решение  $u_{f_2}$  операторного уравнения (2.1) удовлетворяет условию (4.14) и  $u'_{f_2}(j+0) = \tilde{\varphi}_j$ ,  $u'_{f_2}(j-0) = \tilde{\psi}_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ .

Введем функцию

$$v(t) := \begin{cases} \sum_{j=0}^N (t-j) \tilde{\varphi}_j \eta(t-j), & t \in \bigcup_{j=0}^N \left(j, j + \frac{1}{2}\right), \\ \sum_{j=1}^{N+1} (t-j) \tilde{\psi}_j \eta(t-j), & t \in \bigcup_{j=1}^{N+1} \left(j - \frac{1}{2}, j\right), \end{cases}$$

где  $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  — вещественнозначная функция,  $0 \leq \eta(t) \leq 1$ ,  $\eta(t) = 1$ ,  $t \in [-1/8, 1/8]$ ,  $\text{supp } \eta \subset [-1/4, 1/4]$ ,  $\tilde{\varphi}_0 = 0$ ,  $\tilde{\psi}_{N+1} = 1$ , числа  $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_N, \tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_N$  удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (4.15).

По построению  $v \in D(\mathcal{A}_R)$ . Положим  $f_2 := \mathcal{A}_R v$ . Следовательно, полагая  $u_{f_2} := v$ , получим равенства (4.14).

Используя условие  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = \text{rank } \mathbf{R}_1^2$ , аналогичным образом можно доказать существование функции  $f_1 \in L_2(0, d)$ , для которой

$$u'_{f_1}(0+0) := \tilde{\varphi}_0 = 1, \quad u'_{f_1}(N+1-0) := \tilde{\psi}_{N+1} = 0.$$

Таким образом, в случае  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = \text{rank } \mathbf{R}_1^1 = \text{rank } \mathbf{R}_1^2 = N + 1$  оператор  $A_R^0$  фредгольмов,  $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$  и  $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 2$ .

Зб. В силу леммы 4.1 кроме случая  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = \text{rank } \mathbf{R}_1^1 = \text{rank } \mathbf{R}_1^2 = N + 1$ , описанного в пункте За, возможен лишь случай  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = \text{rank } \mathbf{R}_1^2 = N$ . Рассмотрим этот случай. В силу теоремы Кронекера–Капелли система линейных алгебраических уравнений (4.13) несовместна, если для некоторого  $f_2 \in L_2(0, d)$  справедливы равенства  $u'_{f_2}(N+1-0) = (f_2, h_2) \neq 0$ , т. е. для

указанной функции  $f_2$  операторное уравнение (2.1) не имеет решения  $u_{f_2} \in D(A_R)$  такого, что  $u'_{f_2}(N+1-0) \neq 0$ . Следовательно, для всех  $f \in L_2(0, d)$  мы имеем

$$(f, h_2)_{L_2(0, d)} = u'_f(N+1-0) = 0,$$

т. е.  $h_2 = 0$ .

С другой стороны, по предположению  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = \text{rank } \mathbf{R}_1^2 = N$ . Поэтому в силу теоремы Кронекера–Капелли система уравнений (4.13) совместна для любых  $f \in L_2(0, d)$ . Аналогично части За доказательства можно построить такую функцию  $f_1 \in L_2(0, d)$ , что

$$(f_1, h_1)_{L_2(0, d)} = u'_{f_1}(0+0) = 1,$$

т. е.  $h_1 \neq 0$ .

Таким образом, оператор  $A_R^0$  фредгольмов,  $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$  и  $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 1$ .

4. Пусть теперь столбцы  $G_1^1(0)$  и  $G_{N+1}^2(1)$  линейно зависимы. Тогда существуют такие  $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ ,  $\alpha_1^2 + \alpha_2^2 \neq 0$ , что

$$\alpha_1 G_1^1(0) + \alpha_2 G_{N+1}^2(1) = 0.$$

В силу леммы 4.2 решение  $u_f$  операторного уравнения (2.1) принадлежит  $D(A_R^0)$  тогда и только тогда, когда справедливо (4.11). Таким образом, в силу теоремы Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве существует единственная функция  $h \in L_2(0, d)$  такая, что

$$\alpha_2 u'(0+0) + \alpha_1 u'(N+1-0) = \alpha_2 (f, h_1)_{L_2(0, d)} + \alpha_1 (f, h_2)_{L_2(0, d)} = (f, h)_{L_2(0, d)}.$$

Следовательно, равенство (4.11) можно переписать в виде

$$(f, h)_{L_2(0, d)} = 0.$$

Покажем, что существует такая функция  $f_0 \in L_2(0, d)$ , что выполнено равенство

$$(f_0, h)_{L_2(0, d)} = 1. \quad (4.16)$$

4а. Предположим вначале, что  $\alpha_i \neq 0$ ,  $i = 1, 2$ , при этом либо  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = \text{rank } \mathbf{R}_1^1 = N+1$ , либо  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = \text{rank } \mathbf{R}_1^2$ . Не ограничивая общности, рассмотрим случай  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = \text{rank } \mathbf{R}_1^2$ . Докажем, что  $h \neq 0$ . В силу (4.16) достаточно показать, что существует такая функция  $f_1 \in L_2(0, d)$ , что  $(f_1, h_1)_{L_2(0, d)} = \frac{1}{\alpha_2}$  и  $(f_1, h_2)_{L_2(0, d)} = 0$ , т. е.  $(f_1, h)_{L_2(0, d)} = 1$ . Другими словами, достаточно построить функцию  $f_1 \in L_2(0, d)$ , для которой

$$u'_{f_1}(0+0) := \tilde{\varphi}_0 = \frac{1}{\alpha_2}, \quad u'_{f_1}(N+1-0) := \tilde{\psi}_{N+1} = 0. \quad (4.17)$$

Полагая в (4.13)  $\varphi_0 = \tilde{\varphi}_0 = \frac{1}{\alpha_2}$  и  $\psi_{N+1} = \tilde{\psi}_{N+1} = 0$ , получим

$$\mathbf{R}_1^0 \Phi^0 = -H_1', \quad (4.18)$$

где  $\Phi^0 = (\varphi_1, \dots, \varphi_N, -\psi_1, \dots, -\psi_N)^T - 2N$ -мерный вектор с неизвестными координатами и  $H_1' = \left( \frac{a_{-1}(1)}{\alpha_2}, \dots, \frac{a_{-N}(N)}{\alpha_2}, 0 \right)^T$ .

В силу леммы 4.1  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = \text{rank } \mathbf{R}_1^2$ . Отсюда и из теоремы Кронекера–Капелли следует, что система уравнений (4.18) разрешима. Обозначим через  $\tilde{\Phi}^0 := (\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_N, -\tilde{\psi}_1, \dots, -\tilde{\psi}_N)^T$  решение этой системы.

Докажем существование функции  $f_1 \in L_2(0, d)$ , для которой решение  $u_{f_1}$  операторного уравнения (2.1) удовлетворяет условию (4.17) и  $u'_{f_1}(j+0) = \tilde{\varphi}_j$ ,  $u'_{f_1}(j-0) = \tilde{\psi}_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ .

Введем функцию

$$v(t) := \begin{cases} \sum_{j=0}^N (t-j) \tilde{\varphi}_j \eta(t-j), & t \in \bigcup_{j=0}^N \left( j, j + \frac{1}{2} \right), \\ \sum_{j=1}^{N+1} (t-j) \tilde{\psi}_j \eta(t-j), & t \in \bigcup_{j=1}^{N+1} \left( j - \frac{1}{2}, j \right), \end{cases}$$

где  $\tilde{\varphi}_0 = \frac{1}{\alpha_2}$ ,  $\tilde{\psi}_{N+1} = 0$ , а числа  $\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_N, \tilde{\psi}_1, \dots, \tilde{\psi}_N$  удовлетворяют системе линейных алгебраических уравнений (4.18).

По построению  $v \in D(\mathcal{A}_R)$ . Положим  $f_1 := \mathcal{A}_R v$ . Полагая  $u_{f_1} := v$ , получим равенства (4.17). Следовательно,  $h = \alpha_2 h_1 + \alpha_1 h_2 \neq 0$ . Таким образом, оператор  $A_R^0$  фредгольмов,  $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$  и  $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 1$ .

4б. Пусть теперь  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = \text{rank } \mathbf{R}_1^1 = N + 1$ , при этом либо  $\alpha_1 = 0$ , либо  $\alpha_2 = 0$ . Не ограничивая общности, предположим, что  $\alpha_1 \neq 0$  и  $\alpha_2 = 0$ . Тогда  $G_1^1(0) = 0$ . Для доказательства того, что  $h = \alpha_2 h_1 + \alpha_1 h_2 = \alpha_1 h_2 \neq 0$ , построим функцию  $f_2 \in L_2(0, d)$  такую, что  $(f_2, h_2)_{L_2(0, d)} = \frac{1}{\alpha_1}$ , т. е.  $(f_2, h)_{L_2(0, d)} = 1$ . Другими словами, требуется построить такую функцию  $f_2 \in L_2(0, d)$ , для которой

$$u'_{f_2}(N + 1 - 0) = \frac{1}{\alpha_1}. \tag{4.19}$$

Учитывая, что  $G_1^1(0) = 0$ , и подставляя  $\tilde{\psi}_{N+1} := u'_{f_2}(N + 1 - 0) = \frac{1}{\alpha_1}$  в систему уравнений (4.13), получим

$$\mathbf{R}_1^0 \Phi^0 = H'_2, \tag{4.20}$$

где  $\Phi^0 = (\varphi_1, \dots, \varphi_N, -\psi_1, \dots, -\psi_N)^T - 2N$ -мерный вектор с неизвестными координатами и  $H'_2 = \left( \frac{a_N(1)}{\alpha_1}, \frac{a_{N-1}(2)}{\alpha_1}, \dots, \frac{a_1(N)}{\alpha_1}, \frac{a_0(N+1)}{\alpha_1} \right)^T$ . В силу условия  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = \text{rank } \mathbf{R}_1^1 = N + 1$  и теоремы Кронекера–Капелли система уравнений (4.20) разрешима. Обозначим решение системы (4.20) через  $\tilde{\Phi}^0 := (\tilde{\varphi}_1, \dots, \tilde{\varphi}_N, -\tilde{\psi}_1, \dots, -\tilde{\psi}_N)^T$ .

Аналогично пункту 3а можно доказать существование такой функции  $f_2 \in L_2(0, d)$ , что при  $f = f_2$  решение  $u_{f_2}$  операторного уравнения (2.1) удовлетворяет условию (4.19) и  $u'_{f_2}(j + 0) = \tilde{\varphi}_j$ ,  $u'_{f_2}(j - 0) = \tilde{\psi}_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Таким образом, оператор  $A_R^0$  фредгольмов,  $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$  и  $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 1$ .

4с. Пусть  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = \text{rank } \mathbf{R}_1^2 = N$  и  $\alpha_1 = 0$ ,  $\alpha_2 \neq 0$ . В пункте 3б доказано, что из условия  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = \text{rank } \mathbf{R}_1^2 = N$  следует равенство  $h_2 = 0$ . Поэтому для доказательства того, что  $h \neq 0$  достаточно построить такую функцию  $f_1 \in L_2(0, d)$ , что  $(f_1, h_1)_{L_2(0, d)} = \frac{1}{\alpha_2}$ , т. е.  $(f_1, h)_{L_2(0, d)} = 1$ . Другими словами, функция  $f_1 \in L_2(0, d)$  такова, что

$$u'_{f_1}(0 + 0) = \frac{1}{\alpha_2}. \tag{4.21}$$

Учитывая, что  $h_2 = 0$ , т. е.  $u'_f(N + 1 - 0) = 0$  для всех  $f \in L_2(0, d)$ , и подставляя  $\tilde{\varphi}_0 := u'_{f_1}(0 + 0) = \frac{1}{\alpha_2}$  в систему уравнений (4.13), получим систему (4.18).

Аналогично пункту 3а можно доказать существование такой функции  $f_1 \in L_2(0, d)$ , что при  $f = f_1$  решение  $u_{f_1}$  операторного уравнения (2.1) удовлетворяет условию (4.21) и  $u'_{f_1}(j + 0) = \tilde{\varphi}_j$ ,  $u'_{f_1}(j - 0) = \tilde{\psi}_j$ ,  $j = 1, \dots, N$ . Таким образом, если  $G_1^1(0) \neq 0$  и  $G_{N+1}^2(1) = 0$  при  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = \text{rank } \mathbf{R}_1^2 = N$ , то оператор  $A_R^0$  фредгольмов,  $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$  и  $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 1$ .

4д. Остается рассмотреть случай, когда  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = \text{rank } \mathbf{R}_1^2 = N$  и  $\alpha_1 \neq 0$ ,  $\alpha_2 = 0$ . Из пункта 3б и условия  $\alpha_2 = 0$  следует, что  $h = \alpha_2 h_1 + \alpha_1 h_2 = 0$ . Таким образом, при  $G_1^1(0) = 0$  и  $G_{N+1}^2(1) \neq 0$  оператор  $A_R^0 : W_2^2(0, d) \supset D(A_R^0) \rightarrow L_2(0, d)$  фредгольмов,  $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$ , а  $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 0$ , если  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = \text{rank } \mathbf{R}_1^2 = N$ .  $\square$

**Пример 4.1.** Рассмотрим оператор  $R_Q : L_2(0, 3) \rightarrow L_2(0, 3)$ , где  $Q = (0, 3)$ ,

$$(Ru)(t) = 20u(t) + e^t u(t + 1) + e^t u(t - 1).$$

Тогда  $N = 2$ ,  $\theta = 1$ , а матрица  $R_1(t)$  принимает вид

$$R_1(t) = \begin{pmatrix} 20 & e^t & 0 \\ e^{t+1} & 20 & e^{t+1} \\ 0 & e^{t+2} & 20 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Матрица  $\mathbf{R}_1$  имеет вид

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} e & 20 & e & 20 & e & 0 \\ 0 & e^2 & 20 & e^2 & 20 & e^2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & e^3 & 20 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, матрица  $R_1(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , удовлетворяет условию (1.3), условие (4.3) выполнено, а столбцы  $G_1^1(0) = (e, 0)^T$  и  $G_3^2(1) = (0, e^2)^T$  линейно независимы.

Выпишем матрицу  $\mathbf{R}_1^0$

$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{pmatrix} 20 & e & 20 & e \\ e^2 & 20 & e^2 & 20 \\ 0 & 0 & 0 & e^3 \end{pmatrix}.$$

Так как  $a_{-1}(3) = e^3 \neq 0$ , то  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = \text{rank } \mathbf{R}_1^2 = 3$ . Таким образом, в силу части 1 теоремы 4.1 оператор  $A_R^0 : W_2^2(0, 3) \supset D(A_R^0) \rightarrow L_2(0, 3)$  фредгольмов,  $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$ , при этом  $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 2$ .

**Пример 4.2.** Рассмотрим оператор  $R_Q : L_2(0, 3) \rightarrow L_2(0, 3)$ , где  $Q = (0, 3)$ ,

$$(Ru)(t) = 2u(t) + (1 - e^{t-2})u(t+1) + (1 - e^{t-3})u(t-1) + (1 - e^{t-3})u(t+2).$$

Тогда  $N = 2$ ,  $\theta = 1$ , а матрица  $R_1(t)$  имеет вид

$$R_1(t) = \begin{pmatrix} 2 & 1 - e^{t-2} & 1 - e^{t-3} \\ 1 - e^{t-2} & 2 & 1 - e^{t-1} \\ 0 & 1 - e^{t-1} & 2 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq 1.$$

Матрица  $\mathbf{R}_1$  принимает вид

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 - e^{-2} & 2 & 1 - e^{-1} & 2 & 1 - e^{-1} & 1 - e^{-2} \\ 0 & 1 - e^{-1} & 2 & 1 - e^{-1} & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Матрица  $R_1(t)$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , удовлетворяет условию (1.3), условие (4.3), очевидно, выполнено, а столбцы  $G_1^1(0) = (1 - e^{-2}, 0)^T$  и  $G_3^2(1) = (1 - e^{-2}, 0)^T$  линейно зависимы, при этом  $\alpha_1 = 1$ ,  $\alpha_2 = -1$ .

Матрицы  $\mathbf{R}_1^0$  и  $\mathbf{R}_1^2$  имеют вид

$$\mathbf{R}_1^0 = \begin{pmatrix} 2 & 1 - e^{-1} & 2 & 1 - e^{-1} \\ 1 - e^{-1} & 2 & 1 - e^{-1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\mathbf{R}_1^2 = \begin{pmatrix} 1 - e^{-2} & 2 & 1 - e^{-1} & 2 & 1 - e^{-1} \\ 0 & 1 - e^{-1} & 2 & 1 - e^{-1} & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Очевидно,  $\text{rank } \mathbf{R}_1^0 = \text{rank } \mathbf{R}_1^2 = 2$ . Следовательно, в силу части 2 теоремы 4.1 оператор  $A_R^0 : W_2^2(0, 3) \supset D(A_R^0) \rightarrow L_2(0, 3)$  фредгольмов,  $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$ , при этом  $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 1$ .

## 5. ГЛАДКОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ НА ИНТЕРВАЛЕ НЕЦЕЛОЙ ДЛИНЫ

Рассмотрим матрицу  $\mathbf{R}_1$  порядка  $N \times (2N + 1)$  вида

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} a_{-1}(1) & \dots & a_{N-1}(1) & a_0(1) & \dots & a_{N-1}(1) \\ a_{-2}(2) & \dots & a_{N-2}(2) & a_{-1}(2) & \dots & a_{N-2}(2) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-N}(N) & \dots & a_0(N) & a_{-N+1}(N) & \dots & a_0(N) \end{pmatrix}$$

и матрицу  $\mathbf{R}_2$  порядка  $(N + 1) \times (2N + 1)$  вида

$$\mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} a_0(\theta) & \dots & a_{N-1}(\theta) & a_0(\theta) & \dots & a_N(\theta) \\ a_{-1}(1 + \theta) & \dots & a_{N-2}(1 + \theta) & a_{-1}(1 + \theta) & \dots & a_{N-1}(1 + \theta) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{-N+1}(N - 1 + \theta) & \dots & a_0(N - 1 + \theta) & a_{-N+1}(N - 1 + \theta) & \dots & a_1(N - 1 + \theta) \\ 0 & \dots & 0 & a_{-N}(N + \theta) & \dots & a_0(N + \theta) \end{pmatrix}.$$

Обозначим через  $\mathbf{R}_1^1$  матрицу порядка  $N \times 2N$ , полученную из матрицы  $\mathbf{R}_1$  вычеркиванием первого столбца, а через  $\mathbf{R}_2^2$  матрицу порядка  $(N + 1) \times 2N$ , полученную из матрицы  $\mathbf{R}_2$  вычеркиванием последнего столбца.

**Замечание 5.1.** Первые  $N + 1$  столбцов матрицы  $\mathbf{R}_1$  используются для описания линейных комбинаций правых производных решения в точках  $0, 1, \dots, N$ , а последние  $N$  столбцов матрицы  $\mathbf{R}_1$  — для описания линейных комбинаций левых производных решения в точках  $1, 2, \dots, N$ . В случае матрицы  $\mathbf{R}_2$  первые  $N$  столбцов необходимы для описания линейных комбинаций правых производных решения в точках  $k - 1 + \theta, k = 1, \dots, N$ , а последние  $N + 1$  столбцов — для описания линейных комбинаций левых производных решения в точках  $k - 1 + \theta, k = 1, \dots, N + 1$ . Последняя строка матрицы  $\mathbf{R}_2$  задает линейную комбинацию значений левых производных в точках  $k - 1 + \theta, k = 1, \dots, N + 1$ , соответствующую краевому условию (3). Вытекающие из уравнения (1) и условия  $f \in L_2(0, d)$  равенства  $(R_Q u')(k + 0) = (R_Q u')(k - 0), k = 1, \dots, N$  (см. (5.4)), задаются  $1, \dots, N$  строками матрицы  $\mathbf{R}_1$ , а равенства  $(R_Q u')(k - 1 + \theta + 0) = (R_Q u')(k - 1 + \theta - 0), k = 1, \dots, N$  (см. (5.5)), задаются строками матрицы  $\mathbf{R}_2$  с номерами  $1, \dots, N$ .

**Лемма 5.1.** Пусть выполнено условие (1.3). Тогда  $\text{rank } \mathbf{R}_1 = \text{rank } \mathbf{R}_1^1 = N, \text{rank } \mathbf{R}_2 = N + 1$  и  $\text{rank } \mathbf{R}_2^2 \geq N$ .

*Доказательство.* Справедливость  $\text{rank } \mathbf{R}_1 = \text{rank } \mathbf{R}_1^1 = N$  и  $\text{rank } \mathbf{R}_2^2 \geq N$  очевидна. Равенство  $\text{rank } \mathbf{R}_2 = N + 1$  вытекает из  $\text{Re } a_0(t) > 0$ , что следует из условия (1.3).  $\square$

Как и в разделе 4, обозначим через  $G_j^1 = G_j^1(t)$  ( $G_j^2 = G_j^2(t)$ ),  $j = 1, \dots, N + 1$ ,  $j$ -й столбец матрицы порядка  $N \times (N + 1)$ , полученной из матрицы  $R_1(t)$  вычеркиванием первой (последней) строки.

Предположим, что выполнены условия

$$\sum_{k=1}^N |a_{-k}(k)| \neq 0 \quad \text{или} \quad \sum_{k=1}^N |a_k(N - k + \theta)| \neq 0. \quad (5.1)$$

**Лемма 5.2.** Пусть  $0 < \theta < 1$ , и пусть выполнены условия (1.3) и (5.1).

Если  $G_1^1(0) \neq 0, G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$ , то обобщенное решение и задачи (1)–(3) принадлежит пространству  $W_2^2(0, d)$  тогда и только тогда, когда  $u'(0 + 0) = u'(N + \theta - 0) = 0$ .

Если  $G_1^1(0) = 0$  или  $G_{N+1}^2(\theta) = 0$ , то обобщенное решение и задачи (1)–(3) принадлежит пространству  $W_2^2(0, d)$  тогда и только тогда, когда  $u'(0 + 0) = 0$  в случае  $G_1^1(0) \neq 0$  и  $u'(N + \theta - 0) = 0$  в случае  $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$ .

*Доказательство.* В силу определения  $D(\mathcal{A}_R)$  (см. (3.3)), теоремы 3.1 и вложения  $W_2^2(Q_{sk}) \subset C^1(\overline{Q}_{sk}), k = 1, \dots, N(s), s = 1, 2$ , значения  $u'(t)$  определены на концах подынтервалов  $Q_{sk}$ . Таким образом, условие  $u \in W_2^2(0, d)$  можно переписать в виде

$$u'(k + 0) = u'(k - 0), \quad k = 1, \dots, N, \quad (5.2)$$

$$u'(k - 1 + \theta + 0) = u'(k - 1 + \theta - 0), \quad k = 1, \dots, N. \quad (5.3)$$

С другой стороны,  $u \in D(\mathcal{A}_R)$ , следовательно,

$$(R_Q u')(k + 0) = (R_Q u')(k - 0), \quad k = 1, \dots, N, \quad (5.4)$$

$$(R_Q u')(k - 1 + \theta + 0) = (R_Q u')(k - 1 + \theta - 0), \quad k = 1, \dots, N. \quad (5.5)$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} \varphi_{1,j} &= (U_1 P_1 u')_{j+1}(0 + 0), & j &= 0, \dots, N, \\ \psi_{1,j} &= (U_2 P_2 u')_j(1 - 0), & j &= 1, \dots, N, \\ \varphi_{2,j} &= (U_2 P_2 u')_j(\theta + 0), & j &= 1, \dots, N, \\ \psi_{2,j} &= (U_1 P_1 u')_j(\theta - 0), & j &= 1, \dots, N + 1. \end{aligned}$$

Не ограничивая общности, рассмотрим соотношения (5.4). В силу (1.1), (1.2) и леммы 1.3 равенства (5.4) можно представить в виде

$$\sum_{j=1}^N (r_{i+1,j+1}^1(0)\varphi_{1,j} - r_{i,j}^2(1)\psi_{1,j}) = \sum_{j=1}^N r_{i,j}^2(1)(\varphi_{1,j} - \psi_{1,j}) = -r_{i+1,1}^1(0)\varphi_{1,0}, \quad i = 1, \dots, N. \quad (5.6)$$

Так как  $\det R_2(1) \neq 0$  (см. (1.3)), то при условии выполнения равенств (5.2) система (5.6) имеет единственное решение  $\varphi_{1,j} - \psi_{1,j} = 0$ ,  $j = 1, \dots, N$ , если

$$\varphi_{1,0}G_1^1(0) = 0.$$

Пусть, например, выполнено первое из условий (5.1). Тогда  $G_1^1(0) \neq 0$ . Следовательно,

$$\varphi_{1,0} = u'(0+0) = 0. \quad (5.7)$$

Аналогичным образом можно показать, что при условии выполнения (5.3) вытекающая из равенств (5.5) система

$$\sum_{j=1}^N r_{i,j}^2(\theta)(\varphi_{2,j} - \psi_{2,j}) = r_{i,N+1}^1(\theta)\psi_{2,N+1}, \quad i = 1, \dots, N, \quad (5.8)$$

имеет единственное решение  $\varphi_{2,j} - \psi_{2,j} = 0$ ,  $j = 1, \dots, N$ , если  $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$  и

$$\psi_{2,N+1} = u'(N + \theta - 0) = 0. \quad (5.9)$$

□

**Теорема 5.1.** Пусть  $0 < \theta < 1$ , и пусть выполнены условия (1.3) и (5.1).

1. Если  $G_1^1(0) \neq 0$ ,  $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$  и  $\text{rank } \mathbf{R}_2^2 = \text{rank } \mathbf{R}_2 = N + 1$ , то оператор  $A_R^0 : W_2^2(0, d) \supset D(A_R^0) \rightarrow L_2(0, d)$  фредгольмов,  $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$  и  $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 2$ .
2. Если  $G_1^1(0) \neq 0$ ,  $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$  и  $\text{rank } \mathbf{R}_2^2 = N$ , то оператор  $A_R^0 : W_2^2(0, d) \supset D(A_R^0) \rightarrow L_2(0, d)$  фредгольмов,  $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$  и  $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 1$ .
3. Если  $G_{N+1}^2(\theta) = 0$  или  $G_1^1(0) = 0$  и  $\text{rank } \mathbf{R}_2^2 = \text{rank } \mathbf{R}_2 = N + 1$ , то оператор  $A_R^0 : W_2^2(0, d) \supset D(A_R^0) \rightarrow L_2(0, d)$  фредгольмов,  $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$  и  $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 1$ .
4. Если  $G_1^1(0) = 0$  и  $\text{rank } \mathbf{R}_2^2 = N$ , то оператор  $A_R^0 : W_2^2(0, d) \supset D(A_R^0) \rightarrow L_2(0, d)$  фредгольмов,  $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$  и  $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 0$ .

*Доказательство.*

1. Согласно части 1 доказательства теоремы 4.1 заключаем, что  $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$ .

2. В силу леммы 5.2 решение  $u_f$  операторного уравнения (2.1) принадлежит пространству  $W_2^2(0, d)$  в том и только том случае, когда справедливы равенства (5.7) и (5.9). Из неравенства (3.1) и вложения  $W_2^2(Q_{1k}) \subset C^1(\overline{Q}_{1k})$ ,  $k = 1, N + 1$ , вытекает, что  $u_f'(0+0)$  и  $u_f'(N + \theta - 0)$  являются линейными ограниченными функционалами в  $L_2(0, d)$ . Таким образом, в силу теоремы Рисса об общем виде функционала в гильбертовом пространстве существуют определенные единственным образом функции  $h_1, h_2 \in L_2(0, d)$  такие, что

$$\begin{aligned} u_f'(0+0) &= (f, h_1)_{L_2(0,d)}, \\ u_f'(N + \theta - 0) &= (f, h_2)_{L_2(0,d)}. \end{aligned}$$

Следовательно, равенства (5.7) и (5.9) можно представить в виде

$$(f, h_i)_{L_2(0,d)} = 0, \quad i = 1, 2.$$

Перепишем равенство  $(R_Q u')(d) = 0$  в виде

$$\sum_{j=1}^{N+1} r_{N+1,j}^1(\theta)\psi_{2,j} = 0. \quad (5.10)$$

В силу (3.3) функция  $u \in W_{2,0}^1(0, d)$  такая, что  $u \in W_2^2(Q_{sk})$ ,  $s = 1, 2$ ,  $k = 1, \dots, N(s)$ , принадлежит  $D(\mathcal{A}_R)$  тогда и только тогда, когда выполняются равенства (5.6), (5.8) и (5.10), которые можно представить в виде матричных уравнений

$$\mathbf{R}_1 \Phi_1 = 0, \tag{5.11}$$

$$\mathbf{R}_2 \Phi_2 = 0, \tag{5.12}$$

где  $\Phi_1 := (\varphi_{1,0}, \dots, \varphi_{1,N}, -\psi_{1,1}, \dots, -\psi_{1,N})^T$ ,  $\Phi_2 := (\varphi_{2,1}, \dots, \varphi_{2,N}, -\psi_{2,1}, \dots, -\psi_{2,N+1})^T$ .

3. Предположим вначале, что  $G_1^1(0) \neq 0$  и  $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$ .

За. Рассмотрим случай  $\text{rank } \mathbf{R}_2^2 = \text{rank } \mathbf{R}_2 = N+1$ . Для доказательства линейной независимости функций  $h_1$  и  $h_2$  достаточно показать, что существуют функции  $f_1, f_2 \in L_2(0, d)$ , обладающие свойством

$$(f_j, h_i)_{L_2(0,d)} = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, 2,$$

где  $\delta_{ij}$  — символ Кронекера.

Докажем, например, что существует функция  $f_2 \in L_2(0, d)$  такая, что

$$(f_2, h_1)_{L_2(0,d)} = 0,$$

$$(f_2, h_2)_{L_2(0,d)} = 1,$$

т. е. необходимо построить функцию  $f_2$ , для которой

$$u'_{f_2}(0+0) := \tilde{\varphi}_{1,0} = 0, \quad u'_{f_2}(N+\theta-0) := \tilde{\psi}_{2,N+1} = 1. \tag{5.13}$$

Подставляя  $\varphi_{1,0} = \tilde{\varphi}_{1,0} = 0$  и  $\psi_{2,N+1} = \tilde{\psi}_{2,N+1} = 1$  в системы уравнений (5.11) и (5.12) соответственно, получим

$$\mathbf{R}_1^1 \Phi_1^0 = 0, \tag{5.14}$$

$$\mathbf{R}_2^2 \Phi_2^0 = H_2, \tag{5.15}$$

где  $H_2 = (a_N(\theta), a_{N-1}(1+\theta), \dots, a_0(N+\theta))^T$ ,  $\Phi_1^0 := (\varphi_{1,1}, \dots, \varphi_{1,N}, -\psi_{1,1}, \dots, -\psi_{1,N})^T$ ,  $\Phi_2^0 := (\varphi_{2,1}, \dots, \varphi_{2,N}, -\psi_{2,1}, \dots, -\psi_{2,N})^T$ . В силу  $\text{rank } \mathbf{R}_2 = \text{rank } \mathbf{R}_2^2$  и теоремы Кронекера—Капелли система уравнений (5.15) разрешима. Обозначим через  $\tilde{\Phi}_2^0 := (\tilde{\varphi}_{2,1}, \dots, \tilde{\varphi}_{2,N}, -\tilde{\psi}_{2,1}, \dots, -\tilde{\psi}_{2,N})^T$  решение системы (5.15), а через  $\tilde{\Phi}_1^0$  — тривиальное решение системы (5.14).

Докажем, что существует функция  $f_2 \in L_2(0, d)$  такая, что решение  $u_{f_2}$  операторного уравнения (2.1) удовлетворяет условию (5.13) и  $u'_{f_2}(j-1+\theta+0) = \tilde{\varphi}_{2,j}$ ,  $u'_{f_2}(j-1+\theta-0) = \tilde{\psi}_{2,j}$ ,  $u'_{f_2}(j+0) = 0$ ,  $u'_{f_2}(j-0) = 0$ ,  $j = 1, \dots, N$ .

Введем функцию

$$v(t) := \begin{cases} 0, & t \in \bigcup_{j=0}^N \left(j, j + \frac{\theta_0}{2}\right), \\ 0, & t \in \bigcup_{j=1}^N \left(j - \frac{\theta_0}{2}, j\right), \\ \sum_{j=1}^N (t - (\theta - 1 + j)) \tilde{\varphi}_{2,j} \xi(t - (\theta - 1 + j)), & t \in \bigcup_{j=1}^N \left(j - 1 + \theta, j - 1 + \theta + \frac{\theta_0}{2}\right), \\ \sum_{j=0}^N (t - (\theta - 1 + j)) \tilde{\psi}_{2,j} \xi(t - (\theta - 1 + j)), & t \in \bigcup_{j=0}^N \left(j + \theta - \frac{\theta_0}{2}, j + \theta\right), \end{cases}$$

где  $\theta_0 = \min\{\theta, 1 - \theta\}$ ,  $\xi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  — вещественнозначная функция,  $0 \leq \xi(t) \leq 1$ ,  $\xi(t) = 1$ ,  $t \in [-\theta_0/8, \theta_0/8]$ ,  $\text{supp } \xi \subset [-\theta_0/4, \theta_0/4]$ ,  $\tilde{\varphi}_{1,0} = 0$ ,  $\tilde{\psi}_{2,N+1} = 1$ , числа  $\tilde{\varphi}_{1,1} = 0, \dots, \tilde{\varphi}_{1,N} = 0$ ,  $\tilde{\psi}_{1,1} = 0, \dots, \tilde{\psi}_{1,N} = 0$  и  $\tilde{\varphi}_{2,1}, \dots, \tilde{\varphi}_{2,N}, \tilde{\psi}_{2,1}, \dots, \tilde{\psi}_{2,N}$  удовлетворяют системам линейных алгебраических уравнений (5.14) и (5.15) соответственно. По построению  $v \in D(\mathcal{A}_R)$ . Положим  $f_2 := \mathcal{A}_R v$ . Тогда, полагая  $u_{f_2} := v$ , получим равенства (5.13).

Аналогично, используя очевидное равенство  $\text{rank } \mathbf{R}_1 = \text{rank } \mathbf{R}_1^1$ , можно построить функцию  $f_1 \in L_2(0, d)$ , для которой

$$u'_{f_1}(0+0) := \tilde{\varphi}_{1,0} = 1, \quad u'_{f_1}(N+\theta-0) := \tilde{\psi}_{2,N+1} = 0. \tag{5.16}$$

Следовательно, оператор  $A_R^0$  фредгольмов,  $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$  и  $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 2$ .

3б. Пусть теперь  $\text{rank } \mathbf{R}_2^2 = N$ . Тогда в силу теоремы Кронекера–Капелли система линейных алгебраических уравнений (5.12) несовместна, если для некоторого  $f_2 \in L_2(0, d)$  справедливо  $u'_{f_2}(N + \theta - 0) \neq 0$ ,  $u_{f_2} \in D(\mathcal{A}_R)$ . Следовательно, для всех  $f \in L_2(0, d)$  мы имеем  $(f, h_2)_{L_2(0, d)} = u'_{f_2}(N + \theta - 0) = 0$ , т. е.  $h_2 = 0$ . С другой стороны, в силу теоремы Кронекера–Капелли система уравнений (5.11) совместна для любых  $f \in L_2(0, d)$ , так как  $\text{rank } \mathbf{R}_1 = \text{rank } \mathbf{R}_1^1$ . Аналогично части 2а доказательства можно показать, что существует функция  $f_1 \in L_2(0, d)$  такая, что  $(f_1, h_1)_{L_2(0, d)} = u'_{f_1}(0 + 0) = 1$ , т. е.  $h_1 \neq 0$ . Таким образом, оператор  $A_R^0$  фредгольмов,  $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$  и  $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 1$ .

4. Предположим теперь, что  $G_1^1(0) \neq 0$  и  $G_{N+1}^2(\theta) = 0$ . В этом случае, исследуя только систему уравнений (5.11), аналогично части 3а можно показать, что оператор  $A_R^0$  фредгольмов,  $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$  и  $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 1$ .

5. Наконец, предположим, что  $G_1^1(0) = 0$  и  $G_{N+1}^2(\theta) \neq 0$ .

Если  $\text{rank } \mathbf{R}_2^2 = \text{rank } \mathbf{R}_2 = N + 1$ . Тогда, исследуя только систему уравнений (5.12), аналогично части 3а доказываем, что оператор  $A_R^0$  фредгольмов,  $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$  и  $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 1$ .

Если же  $\text{rank } \mathbf{R}_2^2 = N$ , мы также исследуем только систему уравнений (5.12). Однако в пункте 3б показано, что из условия  $\text{rank } \mathbf{R}_2^2 = N$  следует равенство  $h_2 = 0$ . Таким образом,  $h = h_2 = 0$  и мы заключаем, что оператор  $A_R^0$  фредгольмов,  $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$  и  $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 0$ .  $\square$

**Пример 5.1.** Рассмотрим оператор  $R_Q : L_2\left(0, \frac{11}{5}\right) \rightarrow L_2\left(0, \frac{11}{5}\right)$ , где  $Q = \left(0, \frac{11}{5}\right)$ ,

$$(Ru)(t) = 10u(t) + (1 + e^t)u(t + 1) + e^{t-1}u(t - 1).$$

Тогда  $N = 2$ ,  $\theta = \frac{1}{5}$ , а матрицы  $R_1(t)$  и  $R_2(t)$  принимают вид

$$R_1(t) = \begin{pmatrix} 10 & 1 + e^t & 0 \\ e^t & 10 & 1 + e^{t+1} \\ 0 & e^{t+1} & 10 \end{pmatrix}, \quad 0 \leq t \leq \frac{1}{5}, \quad R_2(t) = \begin{pmatrix} 10 & 1 + e^t \\ e^t & 10 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{5} \leq t \leq 1.$$

Матрицы  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$  имеют вид

$$\mathbf{R}_1 = \begin{pmatrix} 1 & 10 & 1 + e & 10 & 1 + e \\ 0 & e & 10 & e & 10 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{R}_2 = \begin{pmatrix} 10 & 1 + e^{\frac{1}{5}} & 10 & 1 + e^{\frac{1}{5}} & 0 \\ e^{\frac{1}{5}} & 10 & e^{\frac{1}{5}} & 10 & 1 + e^{\frac{6}{5}} \\ 0 & 0 & 0 & e^{\frac{6}{5}} & 10 \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $R_1(t)$  при  $0 \leq t \leq \frac{1}{5}$  и  $R_2(t)$  при  $\frac{1}{5} \leq t \leq 1$  удовлетворяют условию (1.3), при этом  $G_1^1(0) = (1, 0)^T$  и  $G_3^2(\theta) = (0, 1 + e^{6/5})^T$ , а условие (5.1), очевидно, выполнено.

Таким образом, в силу части 1 теоремы 5.1 оператор  $A_R^0 : W_2^2\left(0, \frac{11}{5}\right) \supset D(A_R^0) \rightarrow L_2\left(0, \frac{11}{5}\right)$  фредгольмов,  $\dim \mathcal{N}(A_R^0) = 0$  и  $\text{codim } \mathcal{R}(A_R^0) = 2$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л. Об одной задаче успокоения нестационарной системы управления с последствием // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2019. — 65, № 4. — С. 547–556.
2. Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л. Об успокоении системы управления с последствием нейтрального типа // Докл. РАН. Сер. Мат. Информ. Проц. Упр. — 2020. — 490. — С. 81–84.
3. Каменский А. Г. Краевые задачи для уравнений с формально симметричными дифференциально-разностными операторами // Дифф. уравн. — 1976. — 12, № 5. — С. 815–824.
4. Каменский Г. А., Мышкис А. Д. К постановке краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и несколькими старшими членами // Дифф. уравн. — 1974. — 10, № 3. — С. 409–418.
5. Каменский Г. А., Мышкис А. Д., Скубачевский А. Л. О гладких решениях краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа // Укр. мат. ж. — 1985. — 37, № 5. — С. 581–585.
6. Красовский Н. Н. Теория управления движением. Линейные системы. — М.: Наука, 1968.
7. Кряжмский А. В., Максимов В. И., Осипов Ю. С. О позиционном моделировании в динамических системах // Прикл. мат. мех. — 1983. — 47, № 6. — С. 883–890.

8. Лийко В. В., Скубачевский А. Л. Сильно эллиптические дифференциально-разностные уравнения со смешанными краевыми условиями в цилиндрической области // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2019. — 65, № 4. — С. 635–654.
9. Лийко В. В., Скубачевский А. Л. Смешанные задачи для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений в цилиндре // Мат. заметки. — 2020. — 107, № 5. — С. 693–716.
10. Неверова Д. А., Скубачевский А. Л. О классических и обобщенных решениях краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами // Мат. заметки. — 2013. — 94, № 5. — С. 702–719.
11. Онанов Г. Г., Скубачевский А. Л. Дифференциальные уравнения с отклоняющимися аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела // Прикл. мех. — 1979. — 15, № 5. — С. 39–47.
12. Осипов Ю. С. О стабилизации управляемых систем с запаздыванием // Дифф. уравн. — 1965. — 1, № 5. — С. 605–618.
13. Скубачевский А. Л. К задаче об успокоении системы управления с последействием // Докл. РАН. — 1994. — 335, № 2. — С. 157–160.
14. Скубачевский А. Л., Иванов Н. О. Об обобщенных решениях второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2021. — 67, № 3. — С. 576–595.
15. Скубачевский А. Л., Иванов Н. О. Об обобщенных решениях второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами на интервале нецелой длины // Мат. заметки. — 2022. — 111, № 6. — С. 873–886.
16. Neverova D. A. Generalized and classical solutions to the second and third boundary-value problem for differential-difference equations // Funct. Differ. Equ. — 2014. — 21. — С. 47–65.
17. Onanov G. G., Skubachevskii A. L. Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells // Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — 12, № 6. — С. 192–207.
18. Onanov G. G., Tsvetkov E. L. On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory // Russ. J. Math. Phys. — 1995. — 3, № 4. — С. 491–500.
19. Skubachevskii A. L. Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1997.

Н. О. Иванов

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: noivanov1@gmail.com

UDC 517.929

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-3-399-417

EDN: DXHBXR

## Smoothness of generalized solutions of a boundary-value problem for a second-order differential-difference equation with mixed boundary conditions

N. O. Ivanov

*RUDN University, Moscow, Russia*

**Abstract.** We consider a boundary-value problem with mixed boundary conditions for a second-order differential-difference equation on a finite interval  $(0, d)$ . We prove existence of a generalized solution of the problem and study the conditions on the right-hand side of the differential-difference equation ensuring the smoothness of the generalized solution over the entire interval.



**Keywords:** boundary-value problem, differential-difference equations, generalized solutions.

**Conflict-of-interest.** The authors declare no conflicts of interest.

**Acknowledgments and funding.** This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Megagrant, agreement No. 075-15-2022-1115). The author expresses gratitude to his scientific supervisor A. L. Skubachevskii for setting the problem and attention to the work, as well as gratitude to the reviewer for a number of suggestions that made it possible to improve the article. The author also expresses gratitude to Prof. V. V. Malygina for her comment on my report at the 9th International Conference on Differential and Functional Differential Equations (DFDE-2022) that drew my attention to the formulation of the boundary-value problem for the differential-difference equation with mixed boundary conditions.

**For citation:** N. O. Ivanov, “Smoothness of generalized solutions of a boundary-value problem for a second-order differential-difference equation with mixed boundary conditions,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. 69, No. 3, 399–417. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-3-399-417>

## REFERENCES

1. A. Sh. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, “Ob odnoy zadache uspokoeniya nestatsionarnoy sistemy upravleniya s posledeystviem” [On one damping problem for a nonstationary control system with aftereffect], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2019, **65**, No. 4, 547–556 (in Russian).
2. A. Sh. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, “Ob uspokoenii sistemy upravleniya s posledeystviem neytral'nogo tipa” [On the damping of a control system with aftereffect of a neutral type], *Dokl. RAN. Ser. Mat. Inform. Prots. Upr.* [Rep. Russ. Acad. Sci. Math. Inform. Control Sys.], 2020, **490**, 81–84 (in Russian).
3. A. G. Kamenskii, “Kraevye zadachi dlya uravneniy s formal'no simmetrichnymi differentsial'no-raznostnymi operatorami” [Boundary-value problems for equations with formally symmetric differential-difference operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1976, **12**, No. 5, 815–824 (in Russian).
4. G. A. Kamenskii and A. D. Myshkis, “K postanovke kraevykh zadach dlya differentsial'nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom i neskol'kimi starshimi chlenami” [On the formulation of boundary-value problems for differential equations with deviating argument and several higher-order terms], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1974, **10**, No. 3, 409–418 (in Russian).
5. G. A. Kamenskii, A. D. Myshkis, and A. L. Skubachevskii, “O gladkikh resheniyakh kraevoy zadachi dlya differentsial'no-raznostnogo uravneniya neytral'nogo tipa” [On smooth solutions of a boundary value problem for a differential-difference equation of neutral type], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 1985, **37**, No. 5, 581–585 (in Russian).
6. N. N. Krasovskii, *Teoriya upravleniya dvizheniem. Lineynye sistemy* [Theory of Motion Control. Linear Systems], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).
7. A. V. Kryazhinskii, V. I. Maksimov, and Yu. S. Osipov, “O pozitsionnom modelirovanii v dinamicheskikh sistemakh” [About positional modeling in dynamic systems], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1983, **47**, No. 6, 883–890 (in Russian).
8. V. V. Liiko and A. L. Skubachevskii, “Sil'no ellipticheskie differentsial'no-raznostnye uravneniya so smeshannymi kraevymi usloviyami v tsilindrcheskoy oblasti” [Strongly elliptic differential-difference equations with mixed boundary conditions in a cylindrical domain], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2019, **65**, No. 4, 635–654 (in Russian).
9. V. V. Liiko and A. L. Skubachevskii, “Smeshannye zadachi dlya sil'no ellipticheskikh differentsial'no-raznostnykh uravneniy v tsilindre” [Mixed problems for strongly elliptic differential-difference equations in a cylinder], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2020, **107**, No. 5, 693–716 (in Russian).
10. D. A. Neverova and A. L. Skubachevskii, “O klassicheskikh i obobshchennykh resheniyakh kraevykh zadach dlya differentsial'no-raznostnykh uravneniy s peremennymi koeffitsientami” [On classical and generalized solutions of boundary-value problems for differential-difference equations with variable coefficients], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2013, **94**, No. 5, 702–719 (in Russian).
11. G. G. Onanov and A. L. Skubachevskii, “Differentsial'nye uravneniya s otklonyayushchimisya argumentami v statsionarnykh zadachakh mekhaniki deformiruемого tela” [Differential equations with deviating arguments in stationary problems of mechanics of a deformable body], *Prikl. mekh.* [Appl. Mech.], 1979, **15**, No. 5, 39–47 (in Russian).
12. Yu. S. Osipov, “O stabilizatsii upravlyaemykh sistem s zapazdyvaniem” [On stabilization of controllable systems with delay], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1965, **1**, No. 5, 605–618 (in Russian).

13. A. L. Skubachevskii, “K zadache ob uspokoienii sistemy upravleniya s posledeystviem” [To the damping problem for a control system with aftereffect], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1994, **335**, No. 2, 157–160 (in Russian).
14. A. L. Skubachevskii and N. O. Ivanov, “Ob obobshchennykh resheniyakh vtoroy kraevoy zadachi dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy s peremennymi koeffitsientami” [On generalized solutions of the second boundary-value problem for differential-difference equations with variable coefficients], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2021, **67**, No. 3, 576–595 (in Russian).
15. A. L. Skubachevskii and N. O. Ivanov, “Ob obobshchennykh resheniyakh vtoroy kraevoy zadachi dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy s peremennymi koeffitsientami na intervale netseloy dliny” [On generalized solutions of the second boundary-value problem for differential-difference equations with variable coefficients on an interval of noninteger length], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2022, **111**, No. 6, 873–886 (in Russian).
16. D. A. Neverova, “Generalized and classical solutions to the second and third boundary-value problem for differential-difference equations,” *Funct. Differ. Equ.*, 2014, **21**, 47–65.
17. G. G. Onanov and A. L. Skubachevskii, “Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, **12**, No. 6, 192–207.
18. G. G. Onanov and E. L. Tsvetkov, “On the minimum of the energy functional with respect to functions with deviating argument in a stationary problem of elasticity theory,” *Russ. J. Math. Phys.*, 1995, **3**, No. 4, 491–500.
19. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997.

N. O. Ivanov  
RUDN University, Moscow, Russia  
E-mail: [noivanov1@gmail.com](mailto:noivanov1@gmail.com)

УДК 519.63

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-3-418-429

EDN: DXYLTV

## МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПЕРЕНОСА ВЕЩЕСТВА В ВИНТОВОМ МАГНИТНОМ ПОЛЕ С ИСПОЛЬЗОВАНИЕМ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Г. Г. ЛАЗАРЕВА<sup>1</sup>, И. П. ОКСОГОВА<sup>1</sup>, А. В. СУДНИКОВ<sup>2</sup><sup>1</sup>Российский университет дружбы народов, Москва, Россия<sup>2</sup>Институт ядерной физики имени Г. И. Будкера СО РАН, Новосибирск, Россия

**Аннотация.** В работе представлена математическая модель переноса плазмы в открытой магнитной ловушке с использованием условия равенства нулю концентрации плазмы на бесконечности. Используются новые экспериментальные данные, полученные на установке СМОЛА в ИЯФ им. Г. И. Будкера СО РАН. Удержание плазмы в установке осуществляется за счёт передачи импульса от магнитного поля с винтовой симметрией вращающейся плазме. Математическая модель основана на стационарном уравнении переноса плазмы в аксиально-симметричной постановке. Стационарное уравнение переноса вещества в содержит вторые производные по пространству. Выбран оптимальный шаблон для аппроксимации смешанной производной на основе тестовой задачи. Проведено сравнение численной реализации модели методом установления и методом Зейделя.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, уравнение переноса, винтовое магнитное поле.

**Заявление о конфликте интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Благодарности и финансирование.** Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках государственного задания (проект № FSSF-2023-0016).

**Для цитирования:** Г. Г. Лазарева, И. П. Оксогова, А. В. Судников. Математическая модель переноса вещества в винтовом магнитном поле с использованием граничных условий на бесконечности // Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. 69, № 3. С. 418–429. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-3-418-429>

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Для проектировщиков установок для удержания плазмы основным источником информации о динамике вещества является вычислительный эксперимент. Разнообразие и сложность параметров течения плазмы определяют необходимость создания специализированных моделей различных процессов [5]. Исследования течения плазмы в магнитном поле представляют существенный интерес для управляемого термоядерного синтеза [9], изучения стойкости материалов под воздействием мощных тепловых нагрузок [18], лабораторного моделирования астрофизических процессов [16] и ряда других фундаментальных и прикладных научных задач. Наибольшие успехи математики достигнуты в области моделирования систем с тороидальной топологией магнитного поля [1, 4, 15]. Альтернативным подходом является удержание плазмы в открытых магнитных системах, где поле близко к осесимметричному, а его силовые линии пересекают границу области



удержания в двух точках [2, 12]. Большой вклад в развитие этого направления внесло математическое моделирование установок, основанных на принципе многопробочного удержания. В качестве развития метода было предложено [13] удержание плазмы магнитным полем с винтовой симметрией. Установка СМОЛА (Спиральная Магнитная Открытая Ловушка) разработана и построена в 2017 году в Институте ядерной физики СО РАН им. Г.И. Будкера для экспериментальной проверки этой идеи [19, 22]. Область, в которой удерживается плазма в установке СМОЛА, с одной стороны ограничена классической пробкой, с другой — многопробочной секцией с винтовым магнитным полем. Установка СМОЛА предназначена для моделирования эффектов винтового удержания при низкой (а потому легко достижимой) температуре плазмы. Для масштабирования винтового удержания на системы термоядерного класса необходимо детальное сравнение экспериментально наблюдаемых потоков вещества с модельными и дальнейший расчёт эффективности системы большего масштаба на основе математической модели. В настоящее время показано соответствие наблюдаемых результатов приближённым теоретическим оценкам. Точного аналитического решения для теории винтового удержания не построено, поэтому востребованы результаты численного решения уравнения переноса плазмы. Рассматриваемая в статье математическая модель переноса вещества в винтовом магнитном поле построена на основе уравнений из работ [14, 19, 22] и параметров установки СМОЛА. Проведена валидация математической модели [17], определено влияние на эффект удержания глубины гофрировки магнитного поля, диффузии и потенциала плазмы. Расчёты показали эффект пинчевания (уменьшения среднего радиуса) плазменной струи, проявляющийся и в эксперименте. Для расширения области параметров, при которых модель будет обладать достаточной предсказательной силой, потребовалось изменения граничных условий. В статье представлены результаты расчётов для условия нулевой концентрации плазмы на большом расстоянии от её источника. Цель работы состоит в предсказании параметров удержания установок на стадии их проектирования.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим движение плазмы в центральной части ловушки, имеющей форму цилиндра. Вещество входит в область удержания из источника плазмы через левый торец цилиндра и выходит в расширитель через правую границу. Рассмотрим поперечное сечение цилиндра в плоскости  $(r, z)$ . В статье [14] получены выражения для компонентов радиального и продольного переноса частиц в винтовом магнитном поле. Система уравнений описывает динамику плазмы в МГД-приближении в аксиально-симметричной постановке. Различия в движении запертых и пролётных ионов учитываются в виде эффективной силы трения, зависящей от взаимной скорости компонент и доли запертых частиц. Продольная сила, действующая на плазму, возникает в результате взаимодействия радиального электрического тока захваченных ионов с азимутальной компонентой винтового магнитного поля. Учитывается диффузия плазмы поперёк магнитного поля. Исключение зависимых переменных сводит систему уравнений к уравнению неразрывности потока:

$$lr \frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{\Lambda} \frac{\partial(Tu)}{\partial z} + lr\kappa(r)(1 + \kappa(r)) \frac{\partial u}{\partial z} \left( \zeta(r) \frac{\partial \phi(r)}{\partial r} \right) + r\kappa(r) \frac{\partial}{\partial r} l \frac{1}{Z} \zeta(r) \frac{\partial(Tu)}{\partial z} + \kappa(r) \frac{\partial}{\partial r} Dlr \frac{\partial u}{\partial r} = 0, \quad (2.1)$$

где  $u$  — концентрация вещества,  $T = T_i + T_e$ ,  $T_i = 4$  Эв и  $T_e = 30(1 - (r/r_0)^2)$  — ионная и электронная температуры,  $\Lambda$  — отношение длины системы к длине свободного пробега  $\lambda$  иона,  $\kappa(r, R_m)$  — доля запертых частиц,  $l = 216$  см — длина системы вдоль силовой линии,  $Z$  — среднее зарядовое число одного иона,  $D$  — коэффициент диффузии в поперечном поле. Доля запертых частиц  $\kappa(r, R_m) = 1 - 1/R(r, R_m)$ ,  $R(r, R_m) = 2(R_m - 1)(r/a)^2 + 1$  где  $R_m = 1,52$  — глубина гофрировки. Параметр  $\zeta = c/V_z$  является отношением скорости звука  $c_s = (T_e/M)^{1/2}$  и продольной скорости  $V_z$  движения магнитных возмущений при вращении плазмы в собственном амбиполярном электрическом поле. В уравнении (2.1) физические величины обезразмерены на:  $r_0 = a$ ,  $z_0 = l$ ,  $\phi_0 = T_e/e$ ,  $u_0 = u_{max}$ ,  $T_0 = T_e$ , где  $a = 8$  см — граница камеры, в которой может существовать плазма. Потенциал электрического поля  $\phi(r)$  введён в виде полинома, интерполирующего экспериментальные данные [22]:

$$\phi(r) = -2,21776 + 1,31r - 7,79r^2 + 31,18r^3 - 33,43r^4 + 10,94r^5.$$

В моделируемом эксперименте происходит установление параметров плазмы и электромагнитного поля в течении 40 мс, и затем наступает фаза, когда процесс стационарен в течении 120 мс, после чего разряд отключается. Основная задача экспериментов и математического моделирования состоит в исследовании удержания плазмы, при которых все параметры постоянны. Измеряемый с помощью зондов потенциал плазмы в экспериментах на установке СМОЛА зависит от параметров эксперимента. Максимум  $\phi$  варьируется в пределах от  $2T_e/e$  до  $3T_e/e$ . Максимальное значение безразмерного потенциала  $\phi$  для установок следующего поколения, в которых возможно использование принципа винтового удержания, также лежит в этих же пределах [10, 21]. Экспериментально наблюдаемое распределение потенциала в центральной области плазмы (при значениях радиуса, меньших 0,6 в безразмерных величинах) близко к квадратичному, далее в периферийной области плазмы производная потенциала по радиусу снижается. Погрешность измерения потенциала в эксперименте составляет около 5%. Степень и коэффициенты аппроксимирующего полинома подобраны таким образом, чтобы его отклонение от экспериментально измеренных в референсном эксперименте значений было сопоставимым с экспериментальной погрешностью.

Для задания влияния поля в радиальном направлении в модели используется производная абсолютной величины электрического поля:

$$q(r) = \frac{\partial|\phi(r)|}{\partial r} = |1,31 - 7,79r + 31,18r^2 - 33,43r^3 + 10,94r^4|.$$

Известно, что величина потенциала снижается с увеличением  $z$  за счёт наличия поперечной проводимости плазмы. Его распределение в пространстве задается следующим образом:

$$\Phi(r, z) = \left(1 - \frac{0,002z}{h}\right)q(r).$$

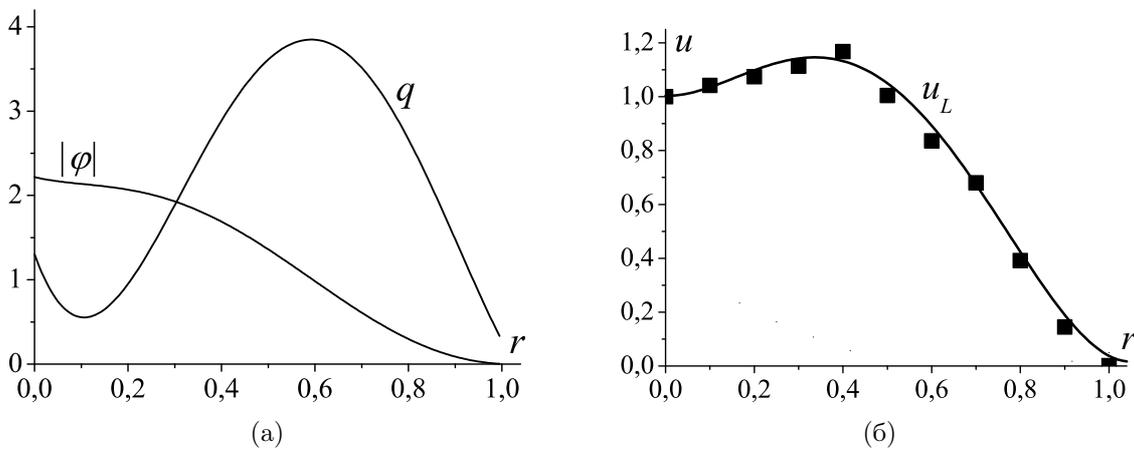


Рис. 1: Зависимости от радиуса установки модуля потенциала электрического поля и его производной (а) и граничного распределения плазмы (б).

Fig. 1: Dependences on the radius of the plant: electric field potential module and its derivative (a) and the boundary plasma distribution (b).

Рассмотрим область  $[0, r_{max}] \times [0, z_{max}]$  в поперечном сечении центральной части установки. В безразмерных величинах область центральной части установки является единичным квадратом. Рассмотрим расширенную область, имеющую длину, которая в несколько раз превышает длину ловушки. Это позволит использовать условие равенства нулю концентрации плазмы на бесконечности. Теоретические оценки и расчёты показали, что при трехкратном и выше превышении длины центральной части установки результаты расчётов практически не изменяются. Считаем, что вещество не достигает стенок ловушки, на оси  $z$  ставим условие симметрии, на входе вещества в расчётную область задаем граничное распределение концентрации вещества  $u(r, 0) = u^L(r)$ , на выходе  $u(r, z_{max}) = 0$ ,  $z_{max} = 4$ . Для расчётов использованы экспериментальные данные [15] для

распределения концентрации на границе. На рис. 1(б) приведено экспериментальное значение концентрации плазмы на входе и интерполяция вида:

$$u^L(r) = 1,03 + 0,46r - 1,52r^2 + 14,48r^3 - 44,17r^4 + 43,77r^5 - 14,05r^6.$$

Таким образом, стационарная задача имеет вид:

$$\begin{cases} C^1(r) \frac{\partial^2 u(r, z)}{\partial z^2} + C^2(r) \frac{\partial(\Phi(r, z)u(r, z))}{\partial z} + C^3(r) \frac{\partial}{\partial r} C^4(r) \frac{\partial u(r, z)}{\partial z} + C^5(r) \frac{\partial}{\partial r} C^6(r) \frac{\partial u(r, z)}{\partial r} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial r}(0, z) = 0, \quad u(r, 0) = u^L(r), \quad \frac{\partial u}{\partial r}(1, z) = 0, \quad u(r, 4) = 0, \end{cases} \quad (2.2)$$

где коэффициенты уравнения:

$$\begin{aligned} C^1(r) &= lrT(r)/\Lambda, & C^2(r) &= lr\kappa(r)(1 + \kappa(r))\zeta(r), & C^3(r) &= r\kappa(r), \\ C^4(r) &= l\zeta(r)T(r)/Z, & C^5(r) &= \kappa(r), & C^6(r) &= lrD. \end{aligned}$$

### 3. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Задача (2.2) была реализована методом установления [6] и более экономичным методом Зейделя [11]. Зададим на сетке с узлами  $r_i = ih$ ,  $i = 1, \dots, N_r$ ,  $z_k = kh$ ,  $k = 1, \dots, N_z$  сеточные функции  $u_{i,k}^n = (u(r_i, z_k))^n$ ,  $\Phi_{i,k} = \Phi(r_i, z_k)$ ,  $C_i^1 = C^1(r_i)$ ,  $C_i^2 = C^2(r_i)$ ,  $C_i^3 = C^3(r_i)$ ,  $C_i^4 = C^4(r_i)$ ,  $C_i^5 = C^5(r_i)$ ,  $C_i^6 = C^6(r_i)$ ,  $u_i^L = u^L(r_i)$ . Критерий сходимости  $|u_{i,k}^{n+1} - u_{i,k}^n| \leq \varepsilon$ ,  $\varepsilon = 10^{-8}$ .

Для реализации задачи (2.2) методом установления при  $\tau = 10^{-4}$  использована безусловно устойчивая схема стабилизирующей поправки и метод прогонки [8]. Новый вариант разностной схемы имеет вид:

$$\begin{cases} \frac{u_{i,k}^* - u_{i,k}^n}{\tau} = C_i^1(u_{i,k+1}^* - 2u_{i,k}^* + u_{i,k-1}^*)/h^2 + C_i^2(\Phi_{i,k+1}u_{i,k+1}^* - \Phi_{i,k-1}u_{i,k-1}^*)/2h + \\ + C_i^3(C_{i+1/2}^4(u_{i+1,k}^n - u_{i,k}^n - u_{i+1,k-1}^n + u_{i,k-1}^n) + \\ + C_{i-1/2}^4(u_{i,k+1}^n - u_{i,k}^n - u_{i-1,k+1}^n + u_{i-1,k}^n))/2h^2 + C_i^5(C_{i+1/2}^6(u_{i+1,k}^n - u_{i,k}^n) - \\ - C_{i-1/2}^6(u_{i,k}^n - u_{i-1,k}^n))/h^2, \\ i = 1, \dots, N_r, \quad k = 2, \dots, N_z - 1, \quad u_{1,k}^* = u_{2,k}^*, \quad u_{N_r,k}^* = u_{N_r-1,k}^*, \\ \frac{u_{i,k}^{n+1} - u_{i,k}^*}{\tau} = C_i^1(u_{i+1,k}^{n+1} - 2u_{i,k}^{n+1} + u_{i-1,k}^{n+1})/h^2 - C_i^1(u_{i+1,k}^n - 2u_{i,k}^n + u_{i-1,k}^n)/h^2, \\ i = 2, \dots, N_r - 1, \quad k = 1, \dots, N_z, \quad u_{i,1}^{n+1} = u_i^L, \quad u_{i,N_z}^{n+1} = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Решение уравнения (2.2) методом Зейделя на каждом шаге по времени позволяет построить более экономичный алгоритм. Разностная схема, основанная на методе Зейделя, имеет вид:

$$\begin{cases} u_{i,k}^{n+1} = (\beta_+^1 u_{i+1,k}^n + \beta_-^1 u_{i-1,k}^{n+1} + \beta_+^2 u_{i,k+1}^n + \beta_-^2 u_{i,k-1}^{n+1} + \beta_+^3 u_{i+1,k-1}^n + \beta_-^3 u_{i-1,k+1}^n)/\beta, \\ \beta = 2C_i^1 - C_i^5(C_{i+1/2}^6 + C_{i-1/2}^6) + C_i^3(C_{i+1/2}^4 + C_{i-1/2}^4)/2, \\ \beta_{\pm}^1 = C_i^5 C_{i\pm 1/2}^6 + (C_i^3 C_{i\pm 1/2}^4)/2, \\ \beta_{\pm}^2 = C_i^1 \pm (hC_i^2 \Phi_{i,k\pm 1} + C_i^3 C_{i\mp 1/2}^4)/2, \\ \beta_{\pm}^3 = -(C_i^3 C_{i\pm 1/2}^4)/2, \\ i = 2, \dots, N_r - 1, \quad k = 2, \dots, N_z - 1, \quad u_{1,k}^{n+1} = u_{2,k}^{n+1}, \\ u_{N_r,k}^{n+1} = u_{N_r-1,k}^{n+1}, \quad u_{i,1}^{n+1} = u_i^L, \quad u_{i,N_z}^{n+1} = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Можно заметить, что задача (3.1) и алгоритм решения (3.2) содержит параметр  $\zeta(r) = 1/Ar$ , полученный аппроксимацией экспериментальных данных, здесь  $A = 20$ . На оси при  $r = 0$  параметр  $\zeta$  ограничен значением при  $r = \rho_B$ , где  $\rho_B = V_{T_i} \cdot \text{мс}/\text{еВ}$  — ларморовский радиус. Для параметров установки СМОЛА  $\rho_B \approx 0,3-0,4$  см. Это обусловлено тем, что ион движется по ларморовской орбите (вращается в магнитном поле), поэтому его радиальная координата осциллирует. В рассматриваемой модели все воздействия осредняются, иону приписывается координата центра окружности, по которой он движется в магнитном поле. То есть, координата равна нулю для ионов, которые облетают ось вокруг и находятся на расстоянии ларморовского радиуса от

неё. Поэтому для исключения особенностей решения при расчётах в окрестности оси симметрии безразмерный параметр  $\zeta$  задается следующим образом:

$$\zeta(r) = \begin{cases} 1/Ar, & r > \rho_B, \\ 1/A\rho_B, & \rho_B \geq r \geq 0. \end{cases} \quad (3.3)$$

Наряду с другими преимуществами, метод Зейделя интересен удобством использования в цилиндрических координатах. Принцип выражения искомого элемента через соседние по схеме точек вида «крест» универсален и не зависит от выбора системы координат.

В ходе расчётов выяснилось, что выбор шаблона (рис. 2) при аппроксимации смешанной производной влияет на решение.

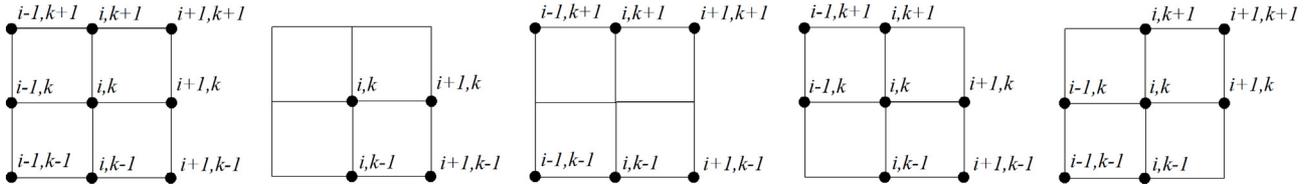


Рис. 2: Шаблоны для аппроксимации смешанных производных.

Fig. 2: Stencils for approximation of mixed derivatives.

Для  $\Lambda_{r,z} = C^3(r) \frac{\partial}{\partial r} C^4(r) \frac{\partial u(r,z)}{\partial z}$  рассмотрены следующие шаблоны:

1. Девятиточечный шаблон [20]:

$$\begin{aligned} \Lambda_{rz} &= \Lambda_{zr} = C^3(r) ((C^{4-}(r)u_{\bar{z}})_r + (C^{4-}(r)u_z)_{\bar{r}} + (C^{4+}(r)u_z)_r + (C^{4+}(r)u_{\bar{z}})_{\bar{r}}) / 4, \\ C^{4\pm}(r) &= C^4(r) \pm |C^4(r)|, \\ \Lambda_{rz} &= C_i^3 (u_{i+1,k} (-2|C_{i-1/2}^4|) + u_{i-1,k} (-2|C_{i+1/2}^4|) + u_{i,k} (2|C_{i-1/2}^4| + 2|C_{i+1/2}^4|) + \\ &+ u_{i+1,k-1} (-C_{i-1/2}^4 + |C_{i-1/2}^4|) + u_{i,k-1} (C_{i-1/2}^4 - |C_{i-1/2}^4| - C_{i+1/2}^4 - |C_{i+1/2}^4|) + \\ &+ u_{i,k+1} (-C_{i-1/2}^4 - |C_{i-1/2}^4| + C_{i+1/2}^4 - |C_{i+1/2}^4|) + u_{i-1,k+1} (C_{i+1/2}^4 - |C_{i+1/2}^4|) + \\ &+ u_{i+1,k+1} (C_{i-1/2}^4 + |C_{i-1/2}^4|) + u_{i-1,k-1} (C_{i+1/2}^4 + |C_{i+1/2}^4|)) / 4h^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для тестовой задачи:

$$\begin{aligned} \Lambda_{rz} &= C^3(r) ((C^{4-}(r)u_{\bar{z}})_r + (C^{4-}(r)u_z)_{\bar{r}} + (C^{4+}(r)u_z)_r + (C^{4+}(r)u_{\bar{z}})_{\bar{r}}) / 4, \\ C^{4\pm}(r) &= C^4(r) \pm |C^4(r)|, \\ \Lambda_{rz} &= C_i^3 (-2u_{i+1,k} - 2u_{i-1,k} + 4u_{i,k} - 2u_{i,k-1} - 2u_{i,k+1} + 2u_{i+1,k+1} + 2u_{i-1,k-1}) / 4h^2. \end{aligned} \quad (3.5)$$

2. Четырехточечный шаблон [17]:

$$\begin{aligned} \Lambda_{rz} &= C^3(r) ((C^4(r)u_{\bar{z}})_r), \\ \Lambda_{rz} &= C_i^3 (C_i^4 (u_{i,k} - u_{i,k-1})_r) / h = C_i^3 (C_{i+1/2}^4 (u_{i+1,k} - u_{i,k}) - C_{i-1/2}^4 (u_{i+1,k-1} - u_{i,k-1})) / h^2. \end{aligned} \quad (3.6)$$

3. Шеститочечный шаблон [3]:

$$\Lambda_{rz} = C_i^3 (C_{i+1/2}^4 (u_{i+1,k+1} - u_{i+1,k-1} + u_{i,k+1} - u_{i,k-1}) - C_{i-1/2}^4 (u_{i,k+1} - u_{i,k-1} + u_{i-1,k+1} - u_{i-1,k-1})) / 4h^2. \quad (3.7)$$

4. Семиточечный левый шаблон [7]:

$$\begin{aligned} \Lambda_{rz} &= \Lambda_{zr} = C^3(r) ((C^4(r)u_{\bar{z}})_r + C^4(r)u_z)_{\bar{r}} / 2 = C_i^3 (C_i^4 (u_{i,k} - u_{i,k-1})_r + \\ &+ C_i^4 (u_{i,k+1} - u_{i,k})_{\bar{r}}) / 2h = C_i^3 (C_{i+1/2}^4 (u_{i+1,k} - u_{i,k} - u_{i+1,k-1} + u_{i,k-1}) + \\ &+ C_{i-1/2}^4 (u_{i,k+1} - u_{i,k} - u_{i-1,k+1} + u_{i-1,k})) / 2h^2. \end{aligned} \quad (3.8)$$

5. Семиточечный правый шаблон [7]:

$$\begin{aligned} \Lambda_{rz} &= \Lambda_{zr} = C^3(r) ((C^4(r)u_z)_r + C^4(r)u_{\bar{z}})_{\bar{r}} / 2 = C_i^3 (C_i^4 (u_{i,k+1} - u_{i,k})_r + \\ &+ C_i^4 (u_{i,k} - u_{i,k-1})_{\bar{r}}) / 2h = C_i^3 (C_{i+1/2}^4 (u_{i+1,k+1} - u_{i,k+1} - u_{i+1,k} + u_{i,k}) + \\ &+ C_{i-1/2}^4 (u_{i,k} - u_{i,k-1} - u_{i-1,k} + u_{i-1,k-1})) / 2h^2. \end{aligned} \quad (3.9)$$

В тестовой задаче все коэффициенты равны единице. Результаты применения различных способов взятия смешанной производной можно разделить на три группы: сокращение конечно-разностной аппроксимации смешанных производных, возникновение осцилляций, и сходимость к точному решению (см. таб. 1). В случае, когда конечно-разностная аппроксимация смешанных производных для тестовой задачи сокращается, расчёт сводится к решению уравнения Лапласа. Наилучший результат дает использование семиточечных левого для смешанной производной  $\Lambda_{rz}$  и правого шаблонов для  $\Lambda_{zr}$ .

Номер шаблона	1	2	3	4	5	4-5
Сокращаются смешанные производные	+	-	-	+	+	-
Осцилляция решения	-	+	+	-	-	-
Сходится к точному решению	-	-	-	-	-	+

Таб. 1: Результат использования шаблонов для аппроксимации смешанной производной для тестовой задачи.

Stencil No.	1	2	3	4	5	4-5
Mixed derivatives are reduced	+	-	-	+	+	-
Oscillation of solution	-	+	+	-	-	-
Converges to the exact solution	-	-	-	-	-	+

Tab. 1: Results of using stencils to approximate the mixed derivative for the test problem.

В случае расчёта задачи о переносе плазмы сокращения симметричной конечно-разностной аппроксимации смешанных производных не происходит, так как в уравнении (2.2) есть только одна смешанная производная и одна первая производная по  $z$ . При использовании сеточного оператора для смешанной производной на девятиточечном, четырехточечном и шеститочечном шаблоне возникали осцилляции при коэффициенте диффузии  $D$  меньшем, чем 0,001 (см. таб. 2). При использовании семиточечных шаблонов осцилляций не возникает, был выбран левый шаблон.

Номер шаблона	1	2	3	4	5
Осцилляция решения	-	+	+	-	-
Согласуется с экспериментальными данными	-	-	-	+	+

Таб. 2: Результат использования шаблонов для аппроксимации смешанной производной для расчёта концентрации плазмы.

Stencil No.	1	2	3	4	5
Oscillation of solution	-	+	+	-	-
Consistent with experimental data	-	-	-	+	+

Tab. 2: Results of using stencils to approximate the mixed derivative in calculation of plasma concentration.

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЁТОВ

В качестве тестовой задачи рассмотрено уравнение:

$$\begin{cases} \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z \partial r} - \frac{\partial^2 u}{\partial r \partial z} = 0, \\ u(r, 0) = 0, \quad u(0, z) = 0, \quad u(r, 4) = \sin\left(\frac{\pi r}{2}\right), \quad \frac{\partial u}{\partial r}(1, z) = 0, \end{cases} \quad (4.1)$$

Задача (4.1) имеет аналитическое решение (рис. 4(a)):

$$u_{ex}(r, z) = \frac{\exp\left(\frac{\pi}{2}z\right) - \exp\left(-\frac{\pi}{2}z\right)}{\exp\left(\frac{\pi}{2}\right) - \exp\left(-\frac{\pi}{2}\right)} \sin\left(\frac{\pi r}{2}\right).$$

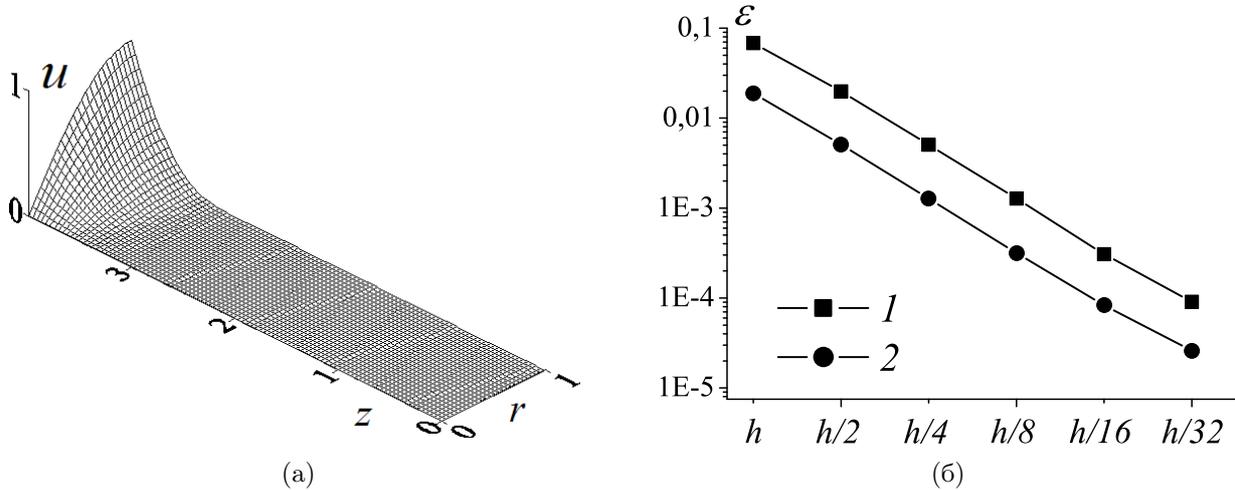


Рис. 3: Решение тестовой задачи (а) и точность сходимости к решению (б) при использовании метода Зейделя (2) и метода установления (1).

Fig. 3: Solution of the test problem (a) and the accuracy of convergence to the solution (b) using the Seidel method (2) and the establishment method (1).

Методы решения (метод установления и метод Зейделя) потребовали тщательного подбора шаблона для аппроксимации смешанной производной

$$\frac{\partial}{\partial r} l(r) Z^{-1} \zeta(r) \frac{\partial (Tu(r, z))}{\partial z}$$

конечными разностями. Получены графики (рис. 4(б)) относительной погрешности

$$\varepsilon = \frac{\|u^{n+1} - u_{ex}\|}{\|u_{ex}\|}$$

для достижения критерия сходимости итерационного процесса  $\varepsilon_n = 10^{-8}$  на последовательности измельчающихся сеток. Метод Зейделя более экономичен и прост в реализации, чем метод установления. Необходимое число итераций метода установления превышает 4000. Метод Зейделя требует до 1000 итераций, причём в случае предлагаемого шаблона для аппроксимации смешанной производной сходимость происходит в два раза быстрее.

Распределение концентрации плазмы показано в расчётной области, имеющей в безразмерном виде форму прямоугольника (рис. 4(a)). Для дальнейшего анализа результатов расчётов планируется сравнение с данными экспериментов в сечениях  $z = 0,4$  и  $z = 1$ . Расчёты показали (рис. 4(б)), что норма разности решения  $\delta(r) = |u(r, 1)|_{z=10} - u(r, 1)|_{z=k}$ ,  $k = 2, 3, 4$ , меньше  $10^{-4}$  при размере расчётной области по оси  $z$  более, чем  $z = 4$ . Для прогноза результатов работы проектируемых установок для удержания плазмы в винтовом магнитном поле необходимо определить более точно коэффициент диффузии. Диффузию можно определить, как ту, при которой расчётные и экспериментальные распределения концентрации плазмы при  $z = 0,4$  и  $z = 1$  совпадают с экспериментальными данными при малых значениях потенциала плазмы.

Тестовая задача выбрана с граничными условиями, близкими к условиям в задаче (2.2). На входе в область задается близкое к экспериментальным данным условие (см. рис. 5(a)), в результате получена близкая картина убывания искомой функции вдоль оси (см. рис. 5(a)).

Цель работы — это прогноз результатов экспериментов на проектируемых установках для удержания плазмы в винтовом магнитном поле.

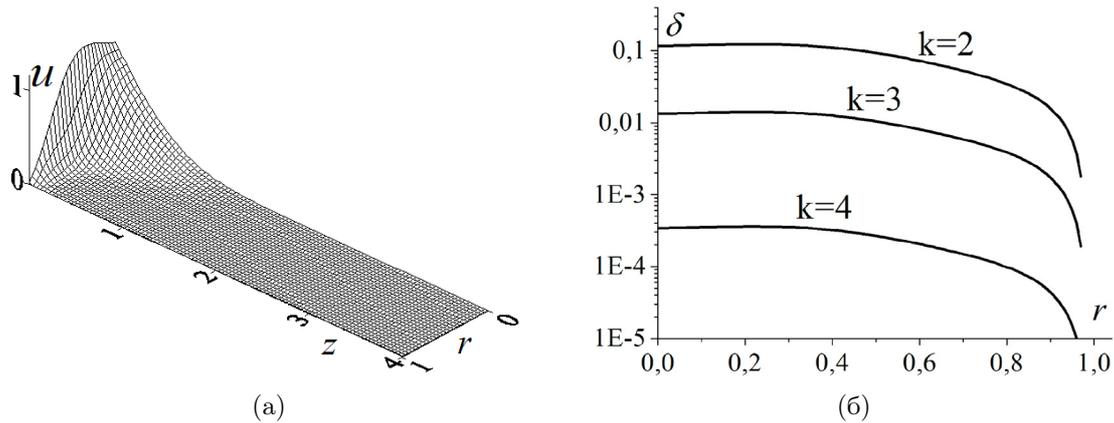


Рис. 4: Распределение концентрации плазмы в винтовом магнитном поле (а) и зависимость нормы разности решения (б) от размера расчётной области по оси  $z$ .

Fig. 4: Distribution of plasma concentration in a helical magnetic field (a) and dependence of the norm of the solution difference (b) on the size of the computational domain along the  $z$  axis.

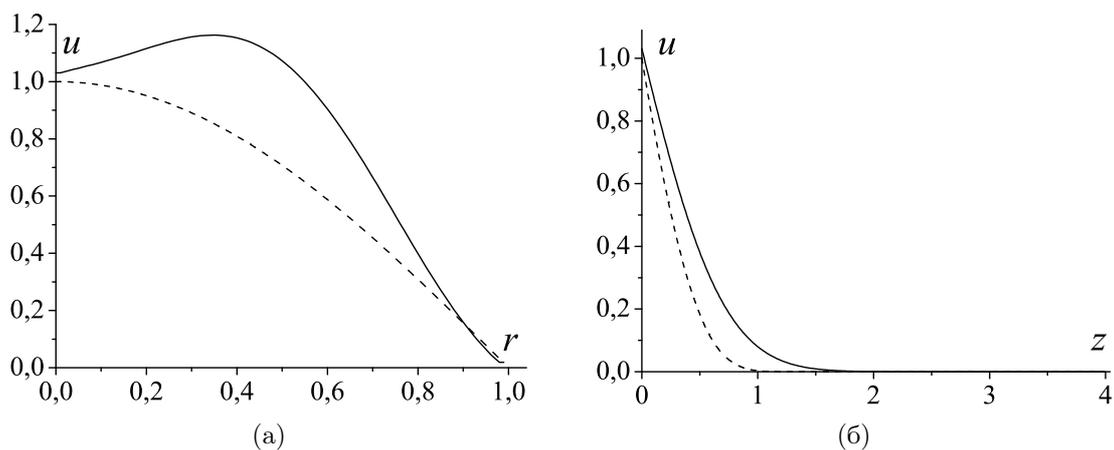


Рис. 5: Граничное условие (а) и значение искомой функции на оси  $z$  (б) для тестовой задачи (пунктир) и задачи (2.2) (сплошная линия).

Fig. 5: Boundary condition (a) and the value of the unknown function on the  $z$  axis (b) for the test problem (dashed line) and problem (2.2) (solid line).

## 5. ВЫВОДЫ

В работе представлена математическая модель переноса плазмы в спиральном магнитном поле с использованием условия равенства нулю концентрации плазмы на бесконечности. Стационарное уравнение переноса вещества в аксиально-симметричной постановке содержит вторые производные по пространству. Выбран оптимальный шаблон для аппроксимации смешанной производной на основе тестовой задачи с близкими граничными условиями. Используется безусловно устойчивая схема стабилизирующей поправки и более экономичный метод Зейделя, который интересен удобством использования в цилиндрических координатах. Принцип выражения искомого элемента через соседние по схеме точки вида «крест» универсален и не зависит от выбора системы координат. Такая постановка задачи (магнитное поле новой сложной конфигурации) и математическая модель (учёт параметров удержания через задание коэффициентов) используется впервые, возможно в дальнейшем её сравнение с другими моделями (МГД, кинетические модели), которые, возможно, будут развиваться для этой задачи.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брушлинский К. В., Кондратьев И. А.* Математические модели равновесия плазмы в тороидальных и цилиндрических магнитных ловушках// Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2018. — 20. — С. 1–20.
2. *Бурдаков А. В., Поступаев В. В.* Многопробочная ловушка: путь от пробкотрона Будкера к линейному термоядерному реактору// Усп. физ. наук. — 2018. — 188, № 6. — С. 651–671.
3. *Волков В. М., Прокопчина Е. В.* Разностные схемы и итерационные методы для многомерных эллиптических уравнений со смешанными производными// Вест. НАН Беларуси. Сер. Физ. Мат. — 2018. — 54, № 4. — С. 454–459.
4. *Грубер Р., Дегтярев Л. М., Купер А., Мартынов А. А., Медведев С. Ю., Шафранов В. Д.* Трехмерная модель равновесия плазмы с полоидальным представлением магнитного поля// Физ. плазмы. — 1996. — 22, № 3. — С. 204.
5. *Калиткин Н. Н., Костомаров Д. П.* Математические модели физики плазмы (обзор)// Мат. модел. — 2006. — 18, № 11. — С. 67–94.
6. *Самарский А. А., Гулин А. Л.* Численные методы. — М.: Наука, 1989.
7. *Самарский А. А., Мажукин В. И., Матус П. П., Шишкин Г. И.* Монотонные разностные схемы для уравнений со смешанными производными// Мат. модел. — 2001. — 13, № 2. — С. 17–26.
8. *Самарский А. А., Николаев Е. С.* Методы решения сеточных уравнений. — М.: Наука, 1978.
9. *Сковорода А. А.* Магнитные ловушки для удержания плазмы. — М.: Физматлит, 2009.
10. *Сковородин Д. И., Черноштанов И. С., Амиров В. Х., Астрелин В. Т., Багрянский П. А., Беклемисhev А. Д., Бурдаков А. В., Горбовский А. И., Котельников И. А., Магоммедов Э. М., Полосаткин С. В., Поступаев В. В., Приходько В. В., Савкин В. Я., Солдаткина Е. И., Соломахин А. Л., Сорокин А. В., Судников А. В., Христо М. С., Шиянков С. В., Яковлев Д. В., Щербаков В. И.* Газодинамическая многопробочная ловушка ГДМЛ// Препринт ИЯФ. — 2023. — 2023-02. — С. 1–74.
11. *Яненко Н. Н.* Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. — М.: Новосибирск, 1989.
12. *Bagryansky P. A., Beklemishev A. D., Postupaev V. V.* Encouraging results and new ideas for fusion in linear traps// J. Fusion Energy. — 2019. — 38. — С. 162–181.
13. *Beklemishev A. D.* Helicoidal system for axial plasma pumping in linear traps// Fusion Sci. Technol. — 2013. — 63, № 1. — С. 355–357.
14. *Beklemishev A. D.* Radial and axial transport in trap sections with helical corrugation// AIP Conference Proceedings. — 2016. — 1771. — 040006.
15. *Cohen B., Barnes D., Dawson J., Hammett G., Lee W., Kerbel G., Leboeuf J., Liewer P., Tajima T., Waltz R.* The numerical tokamak project: simulation of turbulent transport// Comput. Phys. Commun. — 1995. — 87. — С. 1–15.
16. *Forest C. B., Flanagan K., Brookhart M., Clark M., Cooper C. M., Dsangles V., Egedal J., Endrizzi D., Khalzov I. V., Li H., Miesch M., Milhone J., Nornberg M., Olson J., Peterson E., Roesler F., Schekochihin A., Schmitz O., Siller R., Spitkovsky A., Stemo A., Wallace J., Weisberg D., Zweibel E.* The Wisconsin Plasma Astrophysics Laboratory// J. Plasma Phys. — 2015. — 81, № 5. — 345810501.
17. *Lazareva G. G., Oksogoeva I. P., Sudnikov A. V.* Mathematical modeling of plasma transport in a helical magnetic field// Lobachevskii J. Math. — 2022. — 43, № 10. — С. 2685–2691.
18. *Linsmeier C., Unterberg B., Coenen J. W., Doerner R. P., Greuner H., Kreter A., Maier. H* Material testing facilities and programs for plasma-facing component testing// Nucl. Fusion. — 2017. — 57, № 9. — 092012.
19. *Postupaev V. V., Sudnikov A. V., Beklemishev A. D., Ivanov I. A.* Helical mirrors for active plasma flow suppression in linear magnetic traps// Fusion Eng. Des. — 2016. — 106. — С. 29–31.
20. *Rybak I.* Monotone and conservative difference schemes for elliptic equations with mixed derivatives// Math. Model. Anal. — 2005. — 9, № 2. — С. 169–178.
21. *Sudnikov A. V., Beklemishev A. D., Postupaev V. V., Burdakov A. V., Ivanov I. A., Vasilyeva N. G., Kuklin K. N., Sidorov E. N.* SMOLA device for helical mirror concept exploration// Fusion Eng. Des. — 2017. — 122. — С. 86–93.
22. *Sudnikov A. V., Ivanov I. A., Inzhevatkina A. A., Larichkin M. V., Lomov K. A., Postupaev V. V., Tolkachev M. S., Ustyuzhanin V. O.* Plasma flow suppression by the linear helical mirror system// J. Plasma Phys. — 2022. — 88, № 1. — 905880102.

Г. Г. Лазарева

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: lazareva-gg@rudn.ru

И. П. Оксогоева

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: oksogi@mail.ru

А. В. Судников

Институт ядерной физики имени Г. И. Будкера СО РАН, Новосибирск, Россия

E-mail: a.v.sudnikov@inp.nsk.su

UDC 519.63

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-3-418-429

EDN: DXYLTB

## Mathematical model of matter transfer in a helical magnetic field using boundary conditions at infinity

G. G. Lazareva<sup>1</sup>, I. P. Oksogoeva<sup>1</sup>, and A. V. Sudnikov<sup>2</sup>

<sup>1</sup>*RUDN University, Moscow, Russia*

<sup>2</sup>*Budker Institute of Nuclear Physics of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, Russia*

**Abstract.** The paper presents a mathematical model of plasma transfer in an open magnetic trap using the condition of zero plasma concentration at infinity. New experimental data obtained at the SMOLA trap at the Budker Institute of Nuclear Physics SB RAS were used. Plasma confinement in the plant is carried out by transmitting a pulse from a magnetic field with helical symmetry to a rotating plasma. The mathematical model is based on a stationary plasma transfer equation in an axially symmetric formulation. The stationary equation of the transfer of matter contains second spatial derivatives. The optimal template for the approximation of the mixed derivative based on the test problem is selected. The numerical implementation of the model by the establishment method and the method of successive over-relaxation is compared.

**Keywords:** mathematical modeling, transport equation, helical magnetic field.

**Conflict-of-interest.** The authors declare no conflicts of interest.

**Acknowledgments and funding.** The work was financially supported by the Ministry of Education and Science of the Russian Federation within the framework of a state assignment (project № FSSF-2023-0016).

**For citation:** G. G. Lazareva, I. P. Oksogoeva, A. V. Sudnikov, “Mathematical model of matter transfer in a helical magnetic field using boundary conditions at infinity,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. 69, No. 3, 418–429. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-3-418-429>

## REFERENCES

1. K. V. Brushlinskii and I. A. Kondrat'ev, “Matematicheskie modeli ravnovesiya plazmy v toroidal'nykh i tsilindricheskikh magnitnykh lovushkakh” [Mathematical models of plasma equilibrium in toroidal and cylindrical magnetic traps], *Preprinty IPM im. M. V. Keldysha* [Preprints Keldysh Inst. Appl. Math.], 2018, **20**, 1–20 (in Russian).
2. A. V. Burdakov and V. V. Postupaev, “Mnogoprobochnaya lovushka: put' ot probkotrona Budkera k lineynomu termoyadernomu reaktoru” [Multi-mirror trap: the path from the Budker mirror chamber to a linear thermonuclear reactor], *Usp. fiz. nauk* [Progr. Phys. Sci.], 2018, **188**, No. 6, 651–671 (in Russian).



3. V. M. Volkov and E. V. Prokonina, “Raznostnye skhemy i iteratsionnye metody dlya mnogomernykh ellipticheskikh uravneniy so smeshannymi proizvodnymi” [Difference schemes and iterative methods for multidimensional elliptic equations with mixed derivatives], *Vest. NAN Belarusi. Ser. Fiz. Mat.* [Bull. Belarus. Nat. Acad. Sci. Phys. Math.], 2018, **54**, No. 4, 454–459 (in Russian).
4. R. Gruber, L. M. Degtyarev, A. Kuper, A. A. Martynov, S. Yu. Medvedev, and V. D. Shafranov, “Trehmernaya model’ ravnovesiya plazmy s poloidal’nym predstavleniem magnitnogo polya” [Three-dimensional plasma equilibrium model with poloidal representation of the magnetic field], *Fiz. plazmy* [Plasma Phys.], 1996, **22**, No. 3, 204 (in Russian).
5. N. N. Kalitkin and D. P. Kostomarov, “Matematicheskie modeli fiziki plazmy (obzor)” [Mathematical models of plasma physics (survey)], *Mat. model.* [Math. Model.], 2006, **18**, No. 11, 67–94 (in Russian).
6. A. A. Samarskii and A. L. Gulin, *Chislennye metody* [Numerical Methods], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
7. A. A. Samarskii, V. I. Mazhukin, P. P. Matus, and G. I. Shishkin, “Monotonnye raznostnye skhemy dlya uravneniy so smeshannymi proizvodnymi” [Monotone difference schemes for equations with mixed derivatives], *Mat. model.* [Math. Model.], 2001, **13**, No. 2, 17–26 (in Russian).
8. A. A. Samarskii and E. S. Nikolaev, *Metody resheniya setochnykh uravneniy* [Methods for Solving Mesh Equations], Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).
9. A. A. Skovoroda, *Magnitnye lovushki dlya uderzhaniya plazmy* [Magnetic Traps for Plasma Containment], Fizmatlit, Moscow, 2009 (in Russian).
10. D. I. Skovorodin, I. S. Chernoshtanov, V. Kh. Amirov, V. T. Astrelin, P. A. Bagryanskii, A. D. Beklemishev, A. V. Burdakov, A. I. Gorbovskii, I. A. Kotel’nikov, E. M. Magommedov, S. V. Polosatkin, V. V. Postupaev, V. V. Prikhod’ko, V. Ya. Savkin, E. I. Soldatkina, A. L. Solomakhin, A. V. Sorokin, A. V. Sudnikov, M. S. Khristo, S. V. Shiyankov, D. V. Yakovlev, and V. I. Shcherbakov, “Gazodinamicheskaya mnogoprobochnaya lovushka GDML” [Gas-dynamic multi-mirror trap GDML], *Preprint IYaF* [Preprint Inst. Nucl. Phys.], 2023, **2023-02**, 1–74 (in Russian).
11. N. N. Yanenko, *Metod drobnykh shagov resheniya mnogomernykh zadach matematicheskoy fiziki* [Method of Fractional Steps for Solving Multidimensional Problems of Mathematical Physics], Novosibirsk, Moscow, 1989 (in Russian).
12. P. A. Bagryansky, A. D. Beklemishev, and V. V. Postupaev, “Encouraging results and new ideas for fusion in linear traps,” *J. Fusion Energy*, 2019, **38**, 162–181.
13. A. D. Beklemishev, “Helicoidal system for axial plasma pumping in linear traps,” *Fusion Sci. Technol.*, 2013, **63**, No. 1, 355–357.
14. A. D. Beklemishev, “Radial and axial transport in trap sections with helical corrugation,” *AIP Conference Proceedings*, 2016, **1771**, 040006.
15. B. Cohen, D. Barnes, J. Dawson, G. Hammett, W. Lee, G. Kerbel, J. Leboeuf, P. Liewer, T. Tajima, and R. Waltz, “The numerical tokamak project: simulation of turbulent transport,” *Comput. Phys. Commun.*, 1995, **87**, 1–15.
16. C. B. Forest, K. Flanagan, M. Brookhart, M. Clark, C. M. Cooper, V. Dsangles, J. Egedal, D. Endrizzi, I. V. Khalzov, H. Li, M. Miesch, J. Milhone, M. Nornberg, J. Olson, E. Peterson, F. Roesler, A. Schekochihin, O. Schmitz, Siller R, A. Spitkovsky, A. Stemo, J. Wallace, D. Weisberg, and E. Zweibel, “The Wisconsin Plasma Astrophysics Laboratory,” *J. Plasma Phys.*, 2015, **81**, No. 5, 345810501.
17. G. G. Lazareva, I. P. Oksogoeva, and A. V. Sudnikov, “Mathematical modeling of plasma transport in a helical magnetic field,” *Lobachevskii J. Math.*, 2022, **43**, No. 10, 2685–2691.
18. C. Linsmeier, B. Unterberg, J. W. Coenen, R. P. Doerner, H. Greuner, A. Kreter, and Maier. H, “Material testing facilities and programs for plasma-facing component testing,” *Nucl. Fusion*, 2017, **57**, No. 9, 092012.
19. V. V. Postupaev, Sudnikov A. V., A. D. Beklemishev, and I. A. Ivanov, “Helical mirrors for active plasma flow suppression in linear magnetic traps,” *Fusion Eng. Des.*, 2016, **106**, 29–31.
20. I. Rybak, “Monotone and conservative difference schemes for elliptic equations with mixed derivatives,” *Math. Model. Anal.*, 2005, **9**, No. 2, 169–178.
21. A. V. Sudnikov, A. D. Beklemishev, V. V. Postupaev, A. V. Burdakov, I. A. Ivanov, N. G. Vasilyeva, K. N. Kuklin, and E. N. Sidorov, “SMOLA device for helical mirror concept exploration,” *Fusion Eng. Des.*, 2017, **122**, 86–93.
22. A. V. Sudnikov, I. A. Ivanov, A. A. Inzhevatkina, M. V. Larichkin, K. A. Lomov, V. V. Postupaev, M. S. Tolkachev, and V. O. Ustyuzhanin, “Plasma flow suppression by the linear helical mirror system,” *J. Plasma Phys.*, 2022, **88**, No. 1, 905880102.

G. G. Lazareva  
RUDN University, Moscow, Russia  
E-mail: [lazareva-gg@rudn.ru](mailto:lazareva-gg@rudn.ru)

I. P. Oksogoeva  
RUDN University, Moscow, Russia  
E-mail: [oksogi@mail.ru](mailto:oksogi@mail.ru)

A. V. Sudnikov  
Budker Institute of Nuclear Physics of Siberian Branch of Russian Academy of Sciences, Novosibirsk,  
Russia  
E-mail: [a.v.sudnikov@inp.nsk.su](mailto:a.v.sudnikov@inp.nsk.su)

УДК 517.927.2

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-3-430-444

EDN: FKQFNA

## АНАЛИТИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО ДРОБНОГО УРАВНЕНИЯ РЕАКЦИИ—ДИФФУЗИИ С ПЕРЕМЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Э. И. МАХМУД

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

**Аннотация.** В статье решена задача неоднородного одномерного дробного дифференциального уравнения реакции—диффузии с переменными коэффициентами (1.1)–(1.2) методом разделения переменных (метод Фурье). Производная Капуто и производная Римана—Лиувилля рассматриваются во временном и пространственном направлениях соответственно. Приведено доказательство того, что найденное решение краевой задачи удовлетворяет заданным краевым условиям, и обосновывается сходимость рядов, определяющих предложенное решение.

**Ключевые слова:** уравнение реакции—диффузии, адвективная диффузия, краевая задача, дробная производная, производная Капуто, производная Римана—Лиувилля, метод разделения переменных, метод Фурье.

**Заявление о конфликте интересов.** Автор заявляет об отсутствии конфликта интересов.

**Благодарности и финансирование.** Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки.

**Для цитирования:** Э. И. Махмуд. Аналитическое решение пространственно-временного дробного уравнения реакции—диффузии с переменными коэффициентами // *Соврем. мат. Фундам. направл.* 2023. Т. 69, № 3. С. 430–444. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-3-430-444>

### 1. Постановка задачи для уравнения дробной реакции—диффузии

В области  $\Omega = [0, 1] \times [0, T]$ ,  $T < \infty$ , рассмотрим следующую модель адвективной диффузии с переменными коэффициентом диффузии

$${}^C D_t^\alpha w(x, t) = -D_x^\beta (A(x)w(x, t)) + \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + g(x, t), \quad 0 < \alpha, \quad \beta < 1, \quad (1.1)$$

с начальным и граничным условиями

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= \Phi(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ w(0, t) = w(1, t) &= 0, & 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (1.2)$$

Здесь:

- $A(x) = x^\beta$  — пространственный непостоянный коэффициент диффузии;
- $g(x, t)$  — источник;

© Э. И. Махмуд, 2023



This work is licensed under a Creative Commons Attribution 4.0 International License  
<https://creativecommons.org/licenses/by-nc/4.0/legalcode>

- $D_x^\beta w(x, t)$  — дробная производная Римана–Лиувилля, которая определяется в виде

$$D_x^\beta w(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)} \frac{d}{dx} \int_0^x (x - \nu)^{-\beta} w(\nu, t) d\nu, \quad 0 < \beta < 1; \quad (1.3)$$

- ${}^C D_t^\alpha w(x, t)$  — дробная производная Капуто, которая определяется в виде

$${}^C D_t^\alpha w(x, t) = \frac{1}{\Gamma(1 - \alpha)} \int_0^t (t - \xi)^{-\alpha} \frac{dw(x, \xi)}{d\xi} d\xi, \quad 0 < \alpha < 1. \quad (1.4)$$

Многие авторы исследовали уравнение адвективной диффузии дробного порядка [2, 3, 5, 8, 10, 11], которое возникает при описании физических процессов (например, стохастического переноса при изучении фильтрации жидкости в сильно пористой (фрактальной) среде). Мы решаем первую краевую задачу для уравнения (1.1) методом разделения переменных (метод Фурье). Производная Капуто и производная Римана–Лиувилля рассматриваются во временном и пространственном направлениях соответственно. Приведено доказательство того, что найденное решение краевой задачи удовлетворяет заданным краевым условиям.

## 2. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ

**Определение 2.1** (см. [10, с. 3]). Для  $\beta \in \mathbb{R}$  определим пространство *непрерывных функций со степенным весом*

$$C_\beta[0, \infty) = \{ \Psi(x) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{C} \mid \exists q > \beta : x^q \Psi(x) \in C[0, \infty) \},$$

с нормой

$$\| \Psi(x) \|_{C_\beta[0, \infty)} = \| x^\beta \Psi(x) \|_{C[0, \infty)} = \sup_x | x^\beta \Psi(x) |.$$

**Определение 2.2** (см. [10, с. 3]). Говорят, что вещественнозначная функция  $\Psi(x)$  *содержится в пространстве*  $C_\beta^m[0, \infty)$ ,  $\beta \in \mathbb{R}$ ,  $m \in \mathbb{N} \cup 0$ , если  $\Psi^{(m)} \in C_\beta[0, \infty)$ , т. е.

$$C_\beta^m[0, \infty) = \{ \Psi(x) : \Psi^{(m)}(x) \in C_\beta[0, \infty) \}.$$

Определим пространство функций в области  $\Omega$

$$C_{\beta, \alpha}^{m, n}(\Omega) = \{ w(x, t) : \Omega \rightarrow \mathbb{C} \mid w^{(m)}(x, \cdot) \in C_\beta[0, 1], w^{(n)}(\cdot, t) \in C_\alpha[0, T] \}.$$

**Определение 2.3** (см. [7]). *Функция Миттаг-Леффлера* с двумя параметрами определяется как

$$E_{\alpha, \beta}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^k}{\Gamma(\alpha k + \beta)}, \quad \operatorname{Re}(\alpha) > 0, \quad z, \beta \in \mathbb{C}. \quad (2.1)$$

Функция Миттаг-Леффлера является обобщением экспоненциальной, гиперболической и тригонометрической функций, поскольку  $E_{1,1}(z) = e^z$ ,  $E_{2,2}(-z^2) = \sin(z)/z$ ,  $E_{2,1}(-z^2) = \cos(z)$ ,  $E_{2,1}(z^2) = \operatorname{ch}(z)$ . Для функций Миттаг-Леффлера справедливы следующие формулы [7, с. 70]:

$$\int_0^t \nu^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda \nu^\alpha) (t - \nu)^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(-\mu (t - \nu)^\alpha) d\nu = \quad (2.2)$$

$$= \begin{cases} t^{\alpha+\beta-1} \frac{E_{\alpha, \beta}(-\mu t^\alpha) - E_{\alpha, \beta}(-\lambda t^\alpha)}{\lambda - \mu}, & \lambda \neq \mu, \\ t^{\alpha+\beta-1} \left( \frac{1}{\alpha} E_{\alpha, \alpha+\beta-1}(-\lambda t^\alpha) + \left( \frac{1-\beta}{\alpha} \right) E_{\alpha, \alpha+\beta}(-\lambda t^\alpha) \right) & \lambda = \mu, \end{cases}$$

$$\int_0^t (t - \tau)^{\rho-1} \tau^{\beta-1} E_{\alpha, \beta}(\lambda \tau^\alpha) d\tau = \Gamma(\rho) t^{\rho+\beta-1} E_{\alpha, \beta+\rho}(\lambda t^\alpha), \quad (2.3)$$

$${}^C D_t^\alpha E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) = -\lambda E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha), \quad (2.4)$$

$$\frac{d}{dt} E_{\alpha,1}(-\lambda t^\alpha) = -\lambda t^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda t^\alpha). \quad (2.5)$$

**Лемма 2.1** (см. [3]). Пусть выбраны числа  $\alpha, \beta, \theta$  так, что  $\alpha < 2, \beta \in \mathbb{R}$  и  $\pi\alpha/2 < \theta < \min(\pi, \pi\alpha)$ . Тогда в секторе  $\theta \leq |\arg(z)| \leq \pi$  выполнено неравенство

$$|E_{\alpha,\beta}(z)| \leq \frac{C}{1+|z|}. \quad (2.6)$$

**Лемма 2.2** (см. [12, с. 278]). Пусть для последовательности функций  $g_n, n \in \mathbb{N}$ , определенных на интервале  $[t_1 + \varepsilon, t_2]$  для каждого  $\varepsilon > 0$ , выполняются следующие условия:

- а) для  $\alpha > 0$  существуют дробные производные Капуто  ${}^C D_t^\alpha g_n(t)$ ;  
 б) как ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)$ , так и ряд  $\sum_{n=1}^{\infty} {}^C D_t^\alpha g_n(t)$  равномерно сходятся.

Тогда функция  $\sum_{n=1}^{\infty} g_n(t)$  является  $\alpha$ -дифференцируемой (т. е. для неё существует производная Капуто), и выполнено соотношение

$${}^C D_t^\alpha \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) = \sum_{n=1}^{\infty} {}^C D_t^\alpha g_n(t), \quad \alpha > 0, \quad t_1 < t < t_2. \quad (2.7)$$

**Лемма 2.3** (см. [12]). Для  $f_1(t), f_2(t) \in C^1[a, b]$  выполняется следующее соотношение:

$$\frac{d}{dt} \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = f_1(t) f_2(0) + \int_0^t f_1(\tau) \frac{d}{dt} f_2(t-\tau) d\tau. \quad (2.8)$$

### 3. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Для решения уравнения дробной адвекции—диффузии (1.1) с условиями (1.2) мы используем метод разделения переменных (метод Фурье).

Представим функцию  $w(x, t)$  в виде

$$w(x, t) = W_1(x, t) + W_2(x, t). \quad (3.1)$$

Тогда задачу (1.1)-(1.2) можно разделить на две задачи следующим образом — первая задача:

$${}^C D_t^\alpha W_1(x, t) = -D_x^\beta (x^\beta W_1(x, t)) + \frac{\partial^2 W_1(x, t)}{\partial x^2}, \quad (3.2)$$

с начальным и граничным условиями

$$\begin{aligned} W_1(x, 0) &= \Phi(x), & 0 \leq x \leq 1, \\ W_1(0, t) &= W_1(1, t) = 0, & 0 \leq t \leq T; \end{aligned} \quad (3.3)$$

и вторая:

$${}^C D_t^\alpha W_2(x, t) = -D_x^\beta (x^\beta W_2(x, t)) + \frac{\partial^2 W_2(x, t)}{\partial x^2} + g(x, t), \quad (3.4)$$

с начальным и граничным условиями

$$\begin{aligned} W_2(x, 0) &= 0, & 0 \leq x \leq 1, \\ W_2(0, t) &= W_2(1, t) = 0, & 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Как принято при решении подобных задач методом Фурье, сначала рассмотрим вспомогательную задачу. Суть этой вспомогательной задачи заключается в нахождении нетривиального решения уравнения (3.2), удовлетворяющего однородным граничным условиям (3.3). Представим искомое решение  $W_1(x, t)$  в виде произведения

$$W_1(x, t) = X(x)T(t).$$

Отсюда следует

$$\frac{{}^C D_t^\alpha T(t)}{T(t)} = \frac{X''(x) - D_x^\beta(x^\beta X(x))}{X(x)} = -\lambda.$$

Из последних соотношений получим

$$X''(x) - D_x^\beta(x^\beta X(x)) = -\lambda X(x), \quad X(0) = X(1) = 0, \tag{3.6}$$

$${}^C D_t^\alpha T(t) = -\lambda T(t). \tag{3.7}$$

Таким образом, для определения функций  $X(x)$  мы получили задачу Штурма—Лиувилля (задачу на собственные значения). Собственные значения и собственные функции описываются в следующей лемме.

**Лемма 3.1.** *Собственные функции  $X_n(x)$  задачи Штурма—Лиувилля (3.6), соответствующие собственным значениям  $\lambda_n$  будут равны*

$$X_n(x) = x + \sum_{s=1}^{\infty} x^{2s+1} \prod_{k=1}^s \frac{\Gamma(2k + \beta) - \lambda_n \Gamma(2k)}{\Gamma(2k + 2)}. \tag{3.8}$$

*Доказательство.* Будем доказывать эту лемму, используя определение дробного дифференцирования Римана—Лиувилля (1.3) и интегрирование уравнения (3.6). Получим

$$\int_0^x X''(x) dx + \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)} \int_0^x \frac{d}{dx} \int_0^x \frac{\nu^\beta X(\nu)}{(x - \nu)^\beta} d\nu = -\lambda \int_0^x X(\nu) d\nu;$$

$$X'(x) - X'(0) + \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)} \int_0^x \frac{\nu^\beta X(\nu)}{(x - \nu)^\beta} d\nu = -\lambda \int_0^x X(\nu) d\nu.$$

Затем снова интегрируем по  $x$ :

$$X(x) - X(0) - xX'(0) + \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)} \int_0^x \int_0^\nu \frac{\xi^\beta X(\xi)}{(\nu - \xi)^\beta} d\xi d\nu = -\lambda \int_0^x \int_0^\nu X(\xi) d\xi d\nu.$$

Повторный интеграл в левой части равенства равен

$$\frac{1}{\Gamma(1 - \beta)} \int_0^x \int_0^\nu \frac{\xi^\beta X(\xi)}{(\nu - \xi)^\beta} d\xi d\nu = \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)} \int_0^x \nu^\beta X(\nu) \int_\nu^x \frac{1}{(\nu - \xi)^\beta} d\xi d\nu = \frac{1}{\Gamma(2 - \beta)} \int_0^x \nu^\beta (x - \nu)^{1-\beta} X(\nu) d\nu.$$

Используя формулу Коши для повторного интегрирования, получим

$$\int_0^x \int_0^\nu X(\xi) d\xi d\nu = \int_0^x (x - \nu) X(\nu) d\nu.$$

Таким образом, в силу начальных условий (3.6) и условия  $X'(0) = 1$ , получаем, что задача Штурма—Лиувилля (3.6) эквивалентна интегральному уравнению Фредгольма

$$X(x) = x + \int_0^x \left( \frac{\nu^\beta (x - \nu)^{1-\beta}}{\Gamma(2 - \beta)} - \lambda(x - \nu) \right) X(\nu) d\nu. \tag{3.9}$$

С помощью метода последовательных приближений решение уравнения (3.9) представим в виде

$$X(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \bar{X}_s,$$

где

$$\bar{X}_s(x) = \int_0^x \left( \frac{\nu^\beta (x - \nu)^{1-\beta}}{\Gamma(2 - \beta)} - \lambda(x - \nu) \right) \bar{X}_{s-1}(\nu) d\nu, \quad s \geq 1.$$

Пусть  $\bar{X}_0 = x$  и

$$\begin{aligned}\bar{X}_1(x) &= \int_0^x \left( \frac{\nu^\beta (x-\nu)^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} - \lambda(x-\nu) \right) \bar{X}_0(\nu) d\nu = \\ &= \int_0^x \left( \frac{\nu^{\beta+1} (x-\nu)^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} - \lambda\nu(x-\nu) \right) d\nu = x^3 \frac{\Gamma(2+\beta) - \lambda}{\Gamma(4)}, \\ \bar{X}_2(x) &= \int_0^x \left( \frac{\nu^\beta (x-\nu)^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} - \lambda(x-\nu) \right) \bar{X}_1(\nu) d\nu = \\ &= \frac{\Gamma(2+\beta) - \lambda}{\Gamma(4)} \int_0^x \left( \frac{\nu^{\beta+3} (x-\nu)^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} - \lambda\nu^3(x-\nu) \right) d\nu = \\ &= x^5 \left( \frac{\Gamma(2+\beta) - \lambda}{\Gamma(4)} \right) \left( \frac{\Gamma(4+\beta) - \lambda\Gamma(4)}{\Gamma(6)} \right), \\ &\vdots \\ \bar{X}_s(x) &= x^{2s+1} \prod_{k=1}^s \frac{\Gamma(2k+\beta) - \lambda\Gamma(2k)}{\Gamma(2k+2)}.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что

$$X(x) = \sum_{s=0}^{\infty} \bar{X}_s = x + \sum_{s=1}^{\infty} x^{2s+1} \prod_{k=1}^s \frac{\Gamma(2k+\beta) - \lambda\Gamma(2k)}{\Gamma(2k+2)},$$

тогда мы можем получить собственную функцию  $X_n(x)$  задачи Штурма—Лиувилля (3.6), соответствующую собственному значению  $\lambda_n$ :

$$X_n(x) = x + \sum_{s=1}^{\infty} x^{2s+1} \prod_{k=1}^s \frac{\Gamma(2k+\beta) - \lambda_n\Gamma(2k)}{\Gamma(2k+2)}.$$

□

**Лемма 3.2.** Все собственные значения  $\lambda_n$  задачи Штурма—Лиувилля (3.6) положительны при  $\lambda_{n+1} > \lambda_n$  и представляют собой нули следующей функции:

$$\omega(\lambda) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \prod_{k=1}^s \frac{\Gamma(2k+\beta) - \lambda\Gamma(2k)}{\Gamma(2k+2)} = 0. \quad (3.10)$$

*Доказательство.* Используем эквивалентное интегральное уравнение (3.9) для задачи (3.6) и обозначим

$$\mathbb{K}(x, \nu) = \begin{cases} \frac{\nu^\beta (x-\nu)^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} - \lambda(x-\nu), & 0 \leq \nu < x < 1, \\ 0, & 0 < x < \nu \leq 1. \end{cases}$$

Можно легко получить резольвентное ядро уравнения (3.9), задав последовательность ядер  $\{\mathbb{K}_n(x, \nu)\}_{n=1}^{\infty}$  с помощью рекуррентных равенств

$$\mathbb{K}_1(x, \nu) = \mathbb{K}(x, \nu),$$

$$\mathbb{K}_{n+1}(x, \nu) = \int_{\nu}^x \mathbb{K}_n(x, \xi) \mathbb{K}(\xi, \nu) d\xi.$$

Элементарные вычисления показывают, что

$$\mathbb{K}_2(x, \nu) = \int_{\nu}^x \mathbb{K}_1(x, \xi) \mathbb{K}(\xi, \nu) d\xi = \int_{\nu}^x \left( \frac{\xi^\beta (x-\xi)^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} - \lambda(x-\xi) \right) \left( \frac{\nu^\beta (\xi-\nu)^{1-\beta}}{\Gamma(2-\beta)} - \lambda(\xi-\nu) \right) d\xi =$$

$$= \frac{\Gamma(1 + \beta)}{\Gamma(4 - \beta)} \nu^\beta (x - \nu)^{3-\beta} - \lambda \left( \frac{1 - \beta}{\Gamma(4 - \beta)} \nu^\beta (x - \nu)^{3-\beta} + \frac{(1 - \beta)\Gamma(1 + \beta)}{\Gamma(4)} (x - \nu)^3 \right) + \lambda^2 \left( \frac{1}{\Gamma(4)} (x - \nu)^3 \right).$$

Индукцией по  $n$  получаем

$$\mathbb{K}_{n+1}(x, \nu) = \mathcal{F}_{0,n+1}(x, \nu) - \lambda \mathcal{F}_{1,n+1}(x, \nu) + \lambda^2 \mathcal{F}_{2,n+1}(x, \nu) - \dots + (-1)^{n+1} \lambda^{n+1} \mathcal{F}_{n+1,n+1}(x, \nu).$$

Элементарные вычисления показывают, что  $\mathcal{F}_{i,n+1}(x, \nu) > 0$  для любого  $i > 0$  при  $x > \nu$ . Отсюда для резольвенты уравнения (3.9) имеем формулу

$$R(x, \nu, \lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{K}_{n+1}(x, \nu) = \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_{0,n+1}(x, \nu) - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_{1,n+1}(x, \nu) + \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_{2,n+1}(x, \nu) - \dots + (-1)^i \lambda^i \sum_{n=0}^{\infty} \mathcal{F}_{i,n+1}(x, \nu) + \dots.$$

Решение интегрального уравнения (3.9) представим в виде

$$X(x) = x + \int_0^x R(x, \nu, \lambda) \nu d\nu = x + \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \mathcal{F}_{0,n+1}(x, \nu) \nu d\nu - \lambda \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \mathcal{F}_{1,n+1}(x, \nu) \nu d\nu + \lambda^2 \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \mathcal{F}_{2,n+1}(x, \nu) \nu d\nu - \dots + (-1)^i \lambda^i \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^x \mathcal{F}_{i,n+1}(x, \nu) \nu d\nu + \dots. \quad (3.11)$$

Получаем, что

$$X(1) = 1 + \tilde{\mathcal{F}}_0 - \lambda \tilde{\mathcal{F}}_1 + \lambda^2 \tilde{\mathcal{F}}_2 - \dots + (-1)^i \lambda^i \tilde{\mathcal{F}}_i + \dots = 0, \quad (3.12)$$

где  $\tilde{\mathcal{F}}_i = \sum_{n=0}^{\infty} \int_0^1 \mathcal{F}_{i,n+1}(1, \nu) \nu d\nu > 0$  для  $\forall i > 0$ .

По правилу знака Декарта [6] количество положительных корней полинома меньше или равно количеству перемен знаков между последовательными (ненулевыми) коэффициентами. Все коэффициенты  $\lambda$  в (3.12) ненулевые, чередуются по знаку. Тогда (3.12) не имеет отрицательных корней. Из уравнения (3.8) и граничного условия задачи Штурма–Лиувилля (3.6) следует, что собственное значение является нулём функции

$$\omega(\lambda) = X_n(1) = 1 + \sum_{s=1}^{\infty} \prod_{k=1}^s \frac{\Gamma(2k + \beta) - \lambda \Gamma(2k)}{\Gamma(2k + 2)}.$$

□

**Лемма 3.3.** *Последовательность собственных функций  $\{X_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$  задачи Штурма–Лиувилля (3.6) сходится в пространстве  $L_2[0, 1]$ , то есть удовлетворяет соотношению  $\lim_{n \rightarrow \infty} \max_x |X_n(x)| \rightarrow 0$ .*

*Доказательство.* Из отношений (3.8) для  $0 < x \leq 1$  получим

$$\begin{aligned} |X_n(x)| &\leq \left| x + \sum_{s=1}^{\infty} x^{2s+1} \prod_{k=1}^s \frac{\Gamma(2k + \beta) - \lambda_n \Gamma(2k)}{\Gamma(2k + 2)} \right| \leq \left| x + \sum_{s=1}^{\infty} x^{2s+1} \prod_{k=1}^s \frac{\Gamma(2k)(1 - \lambda_n)}{\Gamma(2k + 2)} \right| \leq \\ &\leq \left| x + \sum_{s=1}^{\infty} x^{2s+1} \prod_{k=1}^s \frac{(1 - \lambda_n)}{2k(2k + 1)} \right| = \left| x + \sum_{s=1}^{\infty} x^{2s+1} \frac{(-1)^s (\lambda_n - 1)^s}{\Gamma(2s + 2)} \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_n - 1}} \left| \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (x\sqrt{\lambda_n - 1})^{2s+1}}{\Gamma(2s + 2)} \right| = \frac{1}{\sqrt{\lambda_n - 1}} \left| \sin(x\sqrt{\lambda_n - 1}) \right| \leq \frac{1}{\sqrt{\lambda_n - 1}}. \end{aligned}$$

Известно из (3.12), леммы 3.2, таб. 1 и [1, теорема 3.2, с. 308], что  $\lim_{\beta \rightarrow 0} \lambda_n(\beta) = \lambda_n(\beta)|_{\beta=0} = (2\pi n)^2 + 1$  (т. е.  $\lambda_n \equiv O(n^2)$ ). Тогда получаем  $\frac{1}{\sqrt{\lambda_n - 1}} \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ , что приводит к  $|X_n(x)| \rightarrow 0$  при  $n \rightarrow \infty$ . □

Используя лемму 3.3, легко доказать следующую лемму.

**Лемма 3.4.** Система собственных функций  $\{X_n(x)\}_{n=1}^\infty$  задачи Штурма–Лиувилля (3.6) полна в  $L_2(0, 1)$ .

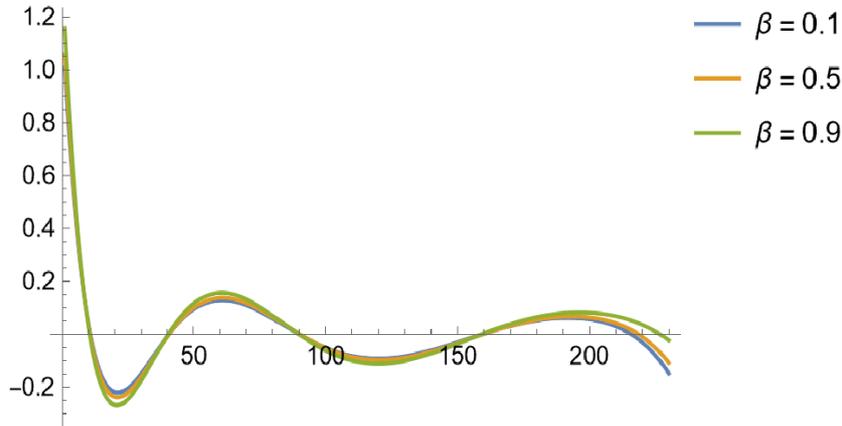


Рис. 1: График функции  $\omega(\lambda)$  для  $\beta = 0,1; 0,5; 0,9$ .

Fig. 1: Graph of the function  $\omega(\lambda)$  for  $\beta = 0.1; 0.5; 0.9$ .

$\lambda_1$	$\lambda_2$	$\lambda_3$	$\lambda_4$	$\lambda_5$	$\lambda_6$
10,719	40,667	90,275	159,587	247,917	356,506

Таб. 1: Первые шесть собственных значений уравнения (3.6) при  $\beta = 0,5$ .

Tab. 1: The first six eigenvalues of the equation (3.6) for  $\beta = 0.5$ .

Система функций  $\{X_n\}_{n=1}^\infty$  является не ортогональной в  $L^2(0, 1)$ . Таким образом, мы создаем систему, которая будет биортогональна системе (3.8).

Рассмотрим оператор

$$K(f(x)) = f''(x) - D_x^\beta(x^\beta f(x)) \tag{3.13}$$

с областью определения

$$\Omega(K) = \left\{ f \in L_2(0, 1) : \sum_{n=1}^\infty |\langle K(f), X_n(x) \rangle|^2 < \infty \right\}.$$

Предположим, что оператор  $\tilde{K}$  сопряжен с оператором  $K$  (см. [4]) таким образом, что

$$\langle K(f), h \rangle = \langle f, \tilde{K}(h) \rangle, \quad \forall f, h \in \Omega(K),$$

$\langle f, h \rangle = \int_0^1 f(x)h(x)dx$  — скалярное произведение и

$$\tilde{K}(h) = h''(x) - {}_x D_1^\beta(x^\beta h(x)), \tag{3.14}$$

где

$${}_x D_1^\beta(h(x)) = \frac{1}{\Gamma(1 - \beta)} \frac{d}{dx} \int_x^1 (\nu - x)^{-\beta} h(\nu) d\nu, \quad 0 < \beta < 1.$$

Поэтому мы рассматриваем следующую сопряженную задачу, связанную с задачей (3.6):

$$\tilde{X}''(x) - D_{1-x}^\beta(x^\beta \tilde{X}(x)) = -\lambda \tilde{X}(x), \quad \tilde{X}(0) = \tilde{X}(1) = 0, \quad 0 < \beta < 1, \tag{3.15}$$

с соответствующими собственными функциями

$$\tilde{X}_n(x) = X_n(1-x) = (1-x) + \sum_{s=1}^{\infty} (1-x)^{2s+1} \prod_{k=1}^s \frac{\Gamma(2k+\beta) - \lambda_n \Gamma(2k)}{\Gamma(2k+2)}. \quad (3.16)$$

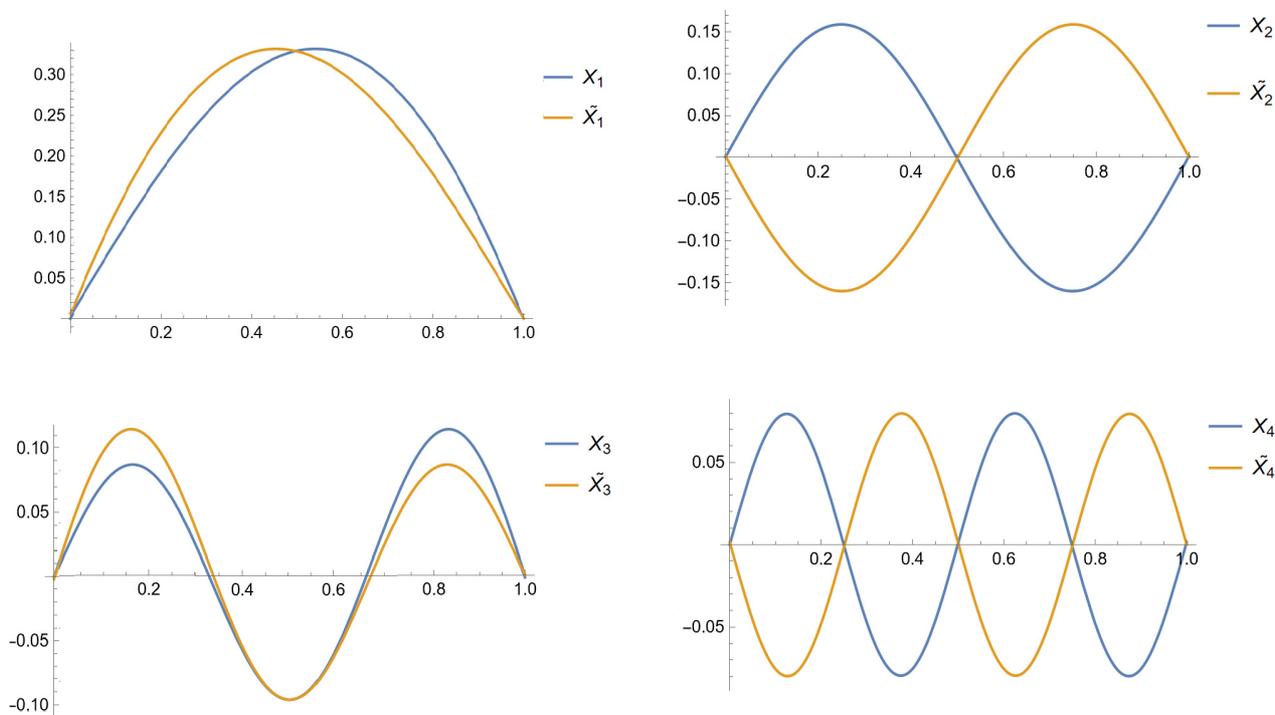


Рис. 2: Графики функций  $X_n(x), \tilde{X}_n(x)$  для  $\beta = 0,5$ .

Fig. 2: Graphs of functions  $X_n(x), \tilde{X}_n(x)$  for  $\beta = 0.5$ .

Уравнение (3.7) изучено в [9, 10], где показано, что собственные функции выражаются через функции Миттаг-Леффлера как  $T_n = \Phi_n E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha)$ , а коэффициенты  $\Phi_n$  можно определить с помощью системы функций  $\tilde{X}_n$ :

$$\Phi_n = \frac{\langle \Phi(x), \tilde{X}_n(x) \rangle}{\langle X_n(x), \tilde{X}_n(x) \rangle}. \quad (3.17)$$

Пусть функция  $\Phi(x)$  непрерывна, имеет кусочно-непрерывную производную и удовлетворяет условиям  $\Phi(0) = \Phi(1) = 0$ . Отсюда следует, что  $\Phi(x)$  ограничена (т. е.  $|\Phi(x)| \leq C$ ). Тогда из ограниченности  $X_n$  получаем

$$|\Phi_n| \leq C \int_0^1 |\Phi(\nu) X_n(1-\nu)| d\nu \leq C^*. \quad (3.18)$$

Если вернуться к вспомогательной задаче (3.2)-(3.3), то видно, что выполнено равенство

$$W_1(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \Phi_n E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha) \right) \cdot \left( x + \sum_{s=1}^{\infty} x^{2s+1} \prod_{k=1}^s \frac{\Gamma(2k+\beta) - \lambda_n \Gamma(2k)}{\Gamma(2k+2)} \right). \quad (3.19)$$

Теперь будем искать решение задачи (3.4)-(3.5). Решение этой задачи может быть найдено с использованием полного базиса собственных функций  $X_n$  в виде ряда

$$W_2(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(t) X_n(x). \quad (3.20)$$

Также функция  $g(x, t)$  может быть разложена с использованием полного базиса собственных функций  $X_n$  в виде

$$g(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} g_n(t) X_n(x), \tag{3.21}$$

где коэффициенты  $g_n(t)$  можно определить с помощью системы функций  $\widetilde{X}_n$ :

$$g_n(t) = \frac{\langle g(x, t), \widetilde{X}_n(x) \rangle}{\langle X_n(x), \widetilde{X}_n(x) \rangle}. \tag{3.22}$$

Подставив разложение (3.21) в (3.4), получим задачи

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha u_n(t) + \lambda_n u_n(t) &= g_n(t), \quad 0 < \alpha < 1, \\ u_n(0) &= 0. \end{aligned} \tag{3.23}$$

Применяя преобразование Лапласа  $L$  к каждой части уравнения (3.23), мы получаем

$$L(u_n(t)) = \frac{1}{s^\alpha + \lambda_n} L(g_n(t)) = L(t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha} - (\lambda_n t^\alpha)) L(g_n(t)).$$

Это даёт

$$u_n(t) = \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) g_n(t - \tau) d\tau.$$

Теперь мы получаем

$$W_2(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) g_n(t - \tau) d\tau \right) \cdot \left( x + \sum_{s=1}^{\infty} x^{2s+1} \prod_{k=1}^s \frac{\Gamma(2k + \beta) - \lambda_n \Gamma(2k)}{\Gamma(2k + 2)} \right). \tag{3.24}$$

**Теорема 3.1.** Пусть  $g(x, t) \in C_{\beta, \alpha}^{2,1}(\Omega)$ ,  $\Phi(x) \in C_{\beta}^2[0, 1]$ . Тогда решение  $w(x, t) \in C_{\beta, \alpha}^{2,1}(\Omega)$  краевой задачи (1.1)-(1.2) существует и может быть представлено в виде ряда

$$\begin{aligned} w(x, t) &= \sum_{n=1}^{\infty} \left( \Phi_n E_{\alpha, 1}(-\lambda_n t^\alpha) + \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) g_n(t - \tau) d\tau \right) \times \\ &\quad \times \left( x + \sum_{s=1}^{\infty} x^{2s+1} \prod_{k=1}^s \frac{\Gamma(2k + \beta) - \lambda_n \Gamma(2k)}{\Gamma(2k + 2)} \right), \end{aligned} \tag{3.25}$$

где  $\Phi_n, g_n(t)$  – коэффициенты разложения Фурье функций  $\Phi(x), g(x, t)$ , соответственно, по функциям

$$\left\{ x + \sum_{s=1}^{\infty} x^{2s+1} \prod_{k=1}^s \frac{\Gamma(2k + \beta) - \lambda_n \Gamma(2k)}{\Gamma(2k + 2)} \right\}_{n=1}^{\infty},$$

$E_{\alpha, \beta}(z)$  – функция Миттаг-Леффлера и  $\lambda_n$  – собственные значения задачи.

*Доказательство.* Из (3.1), (3.19), (3.24) получаем (3.25). □

Теперь (3.25) определяет классическое решение задачи (1.1)-(1.2), а поточечное дифференцирование слагаемых в (3.25) даёт формулы бесконечных рядов для производных, которые мы хотим оценить. Эти результаты могут быть получены при соответствующих гипотезах о данных, обеспечивающих сходимость каждого ряда  $W_1(x, t), W_2(x, t)$ . Подробно обсудим сходимость рядов.

Предположим, что  $\Phi(x) \in C_{\beta}^2[0, 1]$  и  $g(x, t) \in C_{\beta, \alpha}^{2,1}(\Omega)$  для каждого  $t \in [\varepsilon, T]$ ,  $\varepsilon > 0$ , причём  $|g(x, t)| \leq C_1$  с некоторой константой  $C_1$ , не зависящей от  $t$ . Рассмотрим сходимость ряда для  $W_1(x, t)$  из (3.19). Мы учитываем тот факт, что  $|X_n(x)| < C_2$  для любого  $n$ . Применяя к (3.18) лемму 2.1, получаем оценку

$$|W_1(x, t)| \leq \sum_{n=1}^{\infty} |\Phi_n E_{\alpha, 1}(-\lambda_n t^\alpha) X_n(x)| \leq C C_2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1 + \lambda_n t^\alpha} \leq C_3 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n t^\alpha} \leq C_4, \tag{3.26}$$

где  $\lambda_n \geq Cn^2, t \in [\varepsilon, T], \varepsilon > 0$ . Отсюда следует абсолютная сходимость ряда  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n t^\alpha}$  в  $C_\alpha[0, 1]$ .

Теперь оценим функцию  $W_2(x, t)$ :

$$\sum_{n=1}^{\infty} |g_n(t - \tau)| \leq \frac{1}{C} \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^1 |g(x, t - \tau) X_n(1 - x)| dx \leq C_5, \quad 0 < \tau < t. \quad (3.27)$$

Пользуясь (3.24), получаем

$$\begin{aligned} |W_2(x, t)| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left( \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) g_n(t - \tau) d\tau \right) X_n(x) \right| \leq \\ &\leq C C_2 \int_0^t \tau^{\alpha-1} \sum_{n=1}^{\infty} |g_n(t - \tau)| d\tau \leq C_3 C_5 \int_0^t \tau^{\alpha-1} d\tau \leq C_3 C_5 T^\alpha \leq C_6. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Таким образом, ряды (3.19) и (3.24) абсолютно и равномерно сходятся на  $\Omega$ . Из (3.1), (3.26), (3.28), получаем  $|w(x, t)| \leq C_4 + C_6$  при всех  $x \in [0, 1], t \in [\varepsilon, T]$ .

Покажем, что решение (3.25) является непрерывно дифференцируемой функцией по переменной  $t$  на интервале  $[\varepsilon, T], \varepsilon > 0$  с использованием (2.5) и леммы 2.1:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial W_1(x, t)}{\partial t} \right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \Phi_n \left( \frac{d}{dt} E_{\alpha, 1}(-\lambda_n t^\alpha) \right) X_n(x) \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \left| \Phi_n \left( -\lambda_n t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n t^\alpha) \right) X_n(x) \right| \leq \\ &\leq \tilde{C}_3 \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_n t^{\alpha-1}}{1 + \lambda_n t^\alpha} X_n(x) \right| \leq \frac{\tilde{C}_3}{t} \sum_{n=1}^{\infty} |X_n(x)| \leq \tilde{C}_4, \quad \varepsilon < t < T. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Из равенства (3.24), леммы 2.3, и того факта, что  $\frac{\partial}{\partial t} g(\cdot, t) \in C_\alpha[0, T]$ , следует, что  $\left| \frac{\partial}{\partial t} g_n(t) \right| \leq C$ . Тогда

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial W_2(x, t)}{\partial t} \right| &= \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left( \frac{\partial}{\partial t} \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) g_n(t - \tau) d\tau \right) X_n \right| \leq \\ &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \left( g_n(0) t^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n t^\alpha) + \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) \frac{\partial}{\partial t} g_n(t - \tau) d\tau \right) X_n \right| \leq \\ &\leq \tilde{C}_5 t^{\alpha-1} + \sum_{n=1}^{\infty} \left| X_n \left( \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha, \alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) \frac{\partial}{\partial t} g_n(t - \tau) d\tau \right) \right| \leq \\ &\leq \tilde{C}_5 t^{\alpha-1} + C C_2 \int_0^t \tau^{\alpha-1} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\partial}{\partial t} g_n(t - \tau) \right| d\tau \leq \tilde{C}_5 t^{\alpha-1} + \tilde{C}_6 t^\alpha \leq \frac{\tilde{C}_7}{t} \leq C, \quad \varepsilon < t < T. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Комбинируя (3.29) и (3.30), мы видим, что при каждом фиксированном  $t \in [\varepsilon, T], \varepsilon > 0$ ,  $\frac{\partial}{\partial t} w(x, t)$  сходится абсолютно и равномерно при  $(x, t) \in \Omega$  для каждого  $\varepsilon > 0$ .

Аналогичным образом можно доказать, что частное решение (3.25) дважды дифференцируемо по пространственной переменной и

$$\left| \frac{\partial^2}{\partial x^2} w(x, t) \right| \leq M^*, \quad M^* = \text{const}, \quad (x, t) \in \Omega. \quad (3.31)$$

Теперь обсудим  $\alpha$ -дифференцируемость решения (3.25) по переменной  $t$ , используя результат леммы 2.2. Эти результаты могут быть получены при соответствующих гипотезах о данных, обеспечивающих сходимость каждого ряда  $W_1(x, t), W_2(x, t)$ .

Применим почленно дробную производную порядка  $\alpha$  по переменной  $t$  к ряду из левой части формулы (3.19) и построим ряд производных:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n {}^C D_t^\alpha E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha) X_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(-\lambda_n) E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha) X_n(x). \quad (3.32)$$

Затем получим

$$\begin{aligned} \left| {}^C D_t^\alpha W_1(x, t) \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} \left| \Phi_n(-\lambda_n) E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha) X_n \right| \leq \\ &\leq \tilde{C}_3 \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{\lambda_n}{1 + \lambda_n t^\alpha} X_n(x) \right| \leq \frac{\tilde{C}_3}{t^\alpha} \sum_{n=1}^{\infty} |X_n(x)| \leq \tilde{C}_8, \quad \varepsilon < t < T. \end{aligned} \quad (3.33)$$

Из равенства (3.24), (1.4), леммы 2.3, и того факта, что  ${}^C D_t^\alpha g(\cdot, t) \in C_\alpha[0, T]$ , следует, что  $|{}^C D_t^\alpha g_n(t)| \leq C$ . Тогда

$$\begin{aligned} {}^C D_t^\alpha \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) g_n(t-\tau) d\tau &= \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{-\alpha} \left( \frac{d}{d\xi} \int_0^\xi \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) g_n(\xi-\tau) d\tau \right) d\xi = \\ &= \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{-\alpha} \left( \xi^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \xi^\alpha) g_n(0) + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^\xi \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) \frac{d}{d\xi} g_n(\xi-\tau) d\tau \right) d\xi = \\ &= \frac{-g_n(0)}{\lambda_n} \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t (t-\xi)^{-\alpha} \frac{d}{d\xi} E_{\alpha,1}(-\lambda_n \xi^\alpha) d\xi + \\ &\quad + \frac{1}{\Gamma(1-\alpha)} \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) \int_0^t (t-\xi)^{-\alpha} \frac{d}{d\xi} g_n(\xi-\tau) d\xi d\tau = \\ &= \frac{-g_n(0)}{\lambda_n} {}^C D_t^\alpha E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha) + \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) {}^C D_t^\alpha g_n(t-\tau) d\tau = \\ &= g_n(0) E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha) + \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) {}^C D_t^\alpha g_n(t-\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.34)$$

С учетом (3.34) и леммы 2.3 для ряда (3.24) получаем:

$$\begin{aligned} \left| {}^C D_t^\alpha W_2(x, t) \right| &\leq \sum_{n=1}^{\infty} |g_n(0) E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha) X_n(x)| + \\ &\quad + \sum_{n=1}^{\infty} \left| X_n(x) \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) {}^C D_t^\alpha g_n(t-\tau) d\tau \right| \leq \\ &\leq \tilde{C}_4 + C \tilde{C} \int_0^t \tau^{\alpha-1} \sum_{n=0}^{\infty} \left| {}^C D_t^\alpha g_n(t-\tau) \right| d\tau \leq \tilde{C}_4 + C \tilde{C} C_1 \int_0^t \tau^{\alpha-1} d\tau \leq \tilde{C}_4 + C \tilde{C} C_1 T^\alpha \leq \tilde{C}_5. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Комбинируя (3.33) и (3.35), мы видим, что для каждого фиксированного  $t$   $\alpha$ -производная ряда (3.25) сходится абсолютно и равномерно при  $(x, t) \in [0, 1] \times [\varepsilon, T]$  для каждого  $\varepsilon > 0$ . Поэтому она равна  ${}^C D_t^\alpha w(x, t)$  на  $\Omega$ , и мы получаем

$$\left| {}^C D_t^\alpha w(x, t) \right| \leq \tilde{C}_3 + \tilde{C}_5 \leq \tilde{M}, \quad \tilde{M} = \text{const}, \quad (x, t) \in \Omega. \quad (3.36)$$

Доказательство теоремы 3.1 завершено.

#### 4. ПРИМЕРЫ

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$${}^C D_t^\alpha w(x, t) = -D_x^\beta (x^\beta w(x, t)) + \frac{\partial^2 w(x, t)}{\partial x^2} + x^{2+\beta} \sin(\pi x) t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-t^\alpha), \quad 0 < \alpha, \beta < 1, \quad (4.1)$$

с начальным и граничным условиями

$$\begin{aligned} w(x, 0) &= x^\beta (1-x), & 0 < x < 1, \\ w(0, t) &= w(1, t) = 0, & 0 \leq t \leq T. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Если в (1.1)-(1.2) подставить

$$g(x, t) = x^{2+\beta} \sin(\pi x) t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-t^\alpha), \quad \Phi(x) = x^\beta (1-x),$$

то мы получаем (4.1)-(4.2). Поэтому аналитическое решение уравнения (4.1) может быть получено с использованием теоремы 3.1, и

$$\begin{aligned} \langle X_n(x), \tilde{X}_n(x) \rangle &= \int_0^1 X_n(x) X_n(1-x) dx = \\ &= \frac{1}{\Gamma(4)} + \sum_{s=1}^{\infty} \left( 2B(2s+2, 2) \sum_{m=1}^{\infty} B(2s+2, 2m+2) \prod_{l=1}^m \Lambda_l(\lambda_n) \right) \prod_{k=1}^s \Lambda_k(\lambda_n), \end{aligned} \quad (4.3)$$

где  $B(s, m)$  – бета-функция,  $\Lambda_k(\lambda_n) = \frac{\Gamma(2k+\beta) - \lambda_n \Gamma(2k)}{\Gamma(2k+2)}$ .

$$\langle \Phi(x), \tilde{X}_n(x) \rangle = \int_0^1 x(1-x) \cdot X_n(1-x) dx = B(3, \beta+1) + \sum_{s=1}^{\infty} \left( B(2s+3, \beta+1) \prod_{k=1}^s \Lambda_k(\lambda_n) \right), \quad (4.4)$$

$$\begin{aligned} \langle g(x, t), \tilde{X}_n(x) \rangle &= t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-t^\alpha) \int_0^1 x^{2+\beta} \sin(\pi x) \cdot X_n(1-x) dx = \\ &= t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-t^\alpha) \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\pi^{2l+1}}{\Gamma(2l+2)} \left( B(2, 2l+\beta+4) + \sum_{s=1}^{\infty} \left( B(2s+2, 2l+\beta+4) \prod_{k=1}^s \Lambda_k(\lambda_n) \right) \right). \end{aligned} \quad (4.5)$$

Из соотношений (3.17), (4.3), (4.4) получаем

$$\Phi_n = \frac{B(3, \beta+1) + \sum_{s=1}^{\infty} \left( B(2s+3, \beta+1) \prod_{k=1}^s \Lambda_k(\lambda_n) \right)}{\frac{1}{\Gamma(4)} + \sum_{s=1}^{\infty} \left( 2B(2s+2, 2) + \sum_{m=1}^{\infty} B(2s+2, 2m+2) \prod_{l=1}^m \Lambda_l(\lambda_n) \right) \prod_{k=1}^s \Lambda_k(\lambda_n)}. \quad (4.6)$$

Обозначим

$$\tilde{G}_n = \frac{\sum_{l=0}^{\infty} \frac{\pi^{2l+1}}{\Gamma(2l+2)} \left( B(2, 2l+\beta+4) + \sum_{s=1}^{\infty} \left( B(2s+2, 2l+\beta+4) \prod_{k=1}^s \Lambda_k(\lambda_n) \right) \right)}{\frac{1}{\Gamma(4)} + \sum_{s=1}^{\infty} \left( 2B(2s+2, 2) + \sum_{m=1}^{\infty} B(2s+2, 2m+2) \prod_{l=1}^m \Lambda_l(\lambda_n) \right) \prod_{k=1}^s \Lambda_k(\lambda_n)}. \quad (4.7)$$

Тогда из соотношений (3.22), (4.5), (4.7) получаем

$$g_n(t) = \tilde{G}_n t^\alpha E_{\alpha, \alpha+1}(-t^\alpha). \quad (4.8)$$

Следовательно, из (2.2), (2.3), (3.25) получаем

$$\int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) g_n(t-\tau) d\tau = \tilde{G}_n \int_0^t \tau^{\alpha-1} E_{\alpha,\alpha}(-\lambda_n \tau^\alpha) (t-\tau)^\alpha E_{\alpha,\alpha+1}(-(t-\tau)^\alpha) d\tau = \frac{\tilde{G}_n t^{2\alpha+2}}{\lambda_n - 1} \left( E_{\alpha,\alpha+1}(-t^\alpha) - E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_n t^\alpha) \right). \quad (4.9)$$

Таким образом, из соотношений (3.25) мы получаем аналитическое решение  $w(x, t)$  уравнения (4.1)-(4.2):

$$w(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left( \Phi_n E_{\alpha,1}(-\lambda_n t^\alpha) + \frac{\tilde{G}_n t^{2\alpha+2}}{\lambda_n - 1} \left( E_{\alpha,\alpha+1}(-t^\alpha) - E_{\alpha,\alpha+1}(-\lambda_n t^\alpha) \right) \right) \left( x + \sum_{s=1}^{\infty} x^{2s+1} \prod_{k=1}^s \Lambda_k(\lambda_n) \right). \quad (4.10)$$

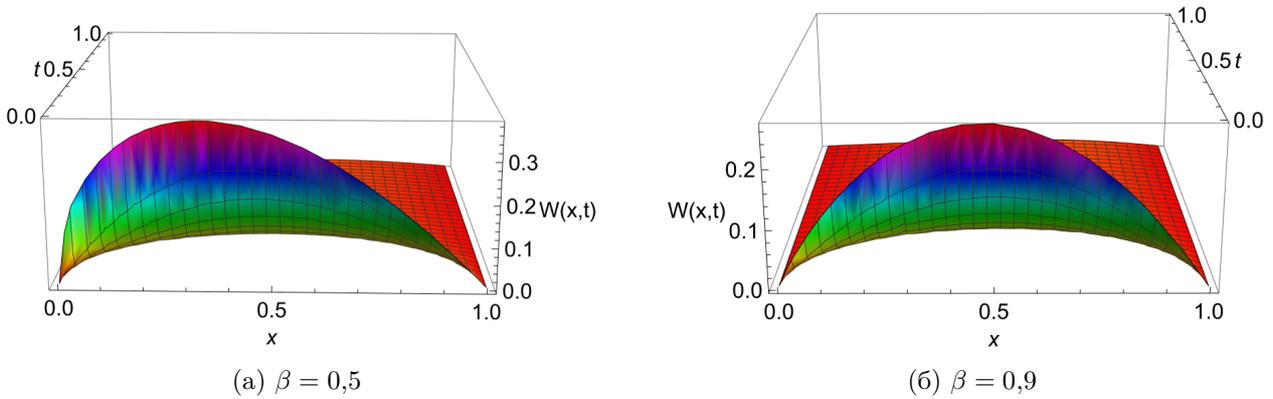


Рис. 3: Решение краевой задачи (4.1)-(4.2) при различных  $\beta$ ,  $\alpha = 0,8$ ,  $T = 1$ .  
 Fig. 3: Solution of the boundary-value problem (4.1)-(4.2) for various  $\beta$ ,  $\alpha = 0.8$ ,  $T = 1$ .

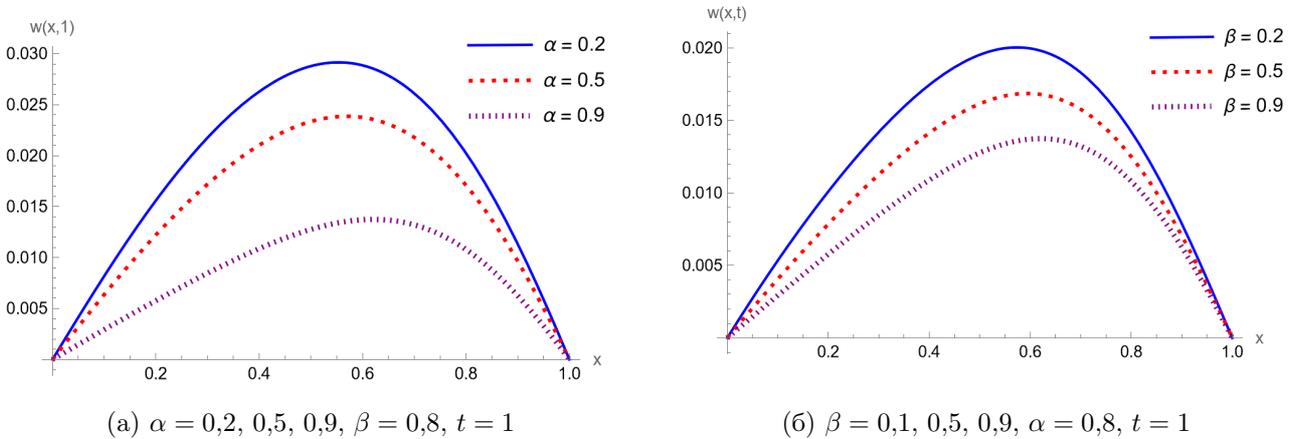


Рис. 4: Решение краевой задачи (4.1)-(4.2) при различных  $\beta$  и  $\alpha$ ,  $T = 1$ .  
 Fig. 4: Solution of the boundary-value problem (4.1)-(4.2) for various  $\beta$  and  $\alpha$ ,  $T = 1$ .

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Алероев Т. С., Алероева Х. Т.* Об одном классе несамосопряженных операторов, сопутствующих дифференциальным уравнениям дробного порядка// Укр. мат. вісн. — 2015. — 12, № 3. — С. 293–310.
2. *Нахушев А. М.* Дробное исчисление и его применение. — М.: Физматлит, 2003.
3. *Aleroev T. S.* Solving the boundary value problems for differential equations with fractional derivatives by the method of separation of variables// Mathematics. — 2020. — 8. — 1877.
4. *Aleroev T. S., Elsayed A. M., Mahmoud E. I.* Solving one dimensional time-space fractional vibration string equation// Conf. Ser. Mater. Sci. Eng. — 2021. — 1129. — С. 20–30.
5. *Aleroev T. S., Kirane M., Malik S. A.* Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determining condition// Electron. J. Differ. Equ. — 2013. — 270. — С. 1–16.
6. *Curtiss D. R.* Recent extensions of Descartes' rule of signs// Ann. Math. — 1918. — 19, № 4. — С. 251–278.
7. *Gorenflo R., Kilbas A. A., Mainardi F., Rogosin S. V.* Mittag-Leffler Functions Related Topics and Applications. — New York: Springer, 2014.
8. *Gorenflo R., Mainardi F.* Random walk models for space fractional diffusion processes// Fract. Calc. Appl. Anal. — 1998. — 1. — С. 167–191.
9. *Hu Z., Liu W., Liu J.* Boundary value problems for fractional differential equations// Tijdschrift voor Urologie. — 2014. — 2014, № 1. — С. 1–11.
10. *Luchko Y., Gorenflo R.* An operational method for solving fractional differential equations// Acta Math. — 1999. — 24. — С. 207–234.
11. *Plociniczak L.* Eigenvalue asymptotics for a fractional boundary-value problem// Appl. Math. Comput. — 2014. — 241. — С. 125–128.
12. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications. — New York: Gordon and Breach, 1993.

Э. И. Махмуд

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: ei\_abdelgalil@yahoo.com

UDC 517.927.2

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-3-430-444

EDN: FKQFNA

## Analytical solution of the space-time fractional reaction–diffusion equation with variable coefficients

E. I. Mahmoud

*RUDN University, Moscow, Russia*

**Abstract.** In this paper, we solve the problem of an inhomogeneous one-dimensional fractional differential reaction–diffusion equation with variable coefficients (1.1)–(1.2) by the method of separation of variables (the Fourier method). The Caputo derivative and the Riemann–Liouville derivative are considered in the time and space directions, respectively. We prove that the obtained solution of the boundary-value problem satisfies the given boundary conditions. We discuss the convergence of the series defining the proposed solution.

**Keywords:** reaction–diffusion equation, advective diffusion, boundary-value problem, fractional derivative, Caputo derivative, Riemann–Liouville derivative, separation of variables method, Fourier method.



**Conflict-of-interest.** The authors declare no conflicts of interest.

**Acknowledgments and funding.** The authors declare that no financial support was received.

**For citation:** E. I. Mahmoud, “Analytical solution of the space-time fractional reaction–diffusion equation with variable coefficients,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 3, 430–444. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-3-430-444>

## REFERENCES

1. T. S. Aleroev and Kh. T. Aleroeva, “Ob odnom klasse nesamosopryazhennykh operatorov, soputstvuyushchikh differentsial’nym uravneniyam drobnogo poryadka” [On a class of non-self-adjoint operators accompanying differential equations of fractional order], *Ukr. mat. visn.* [Ukr. Math. Bull.], 2015, **12**, No. 3, 293–310 (in Russian).
2. A. M. Nakhshev, *Drobnoe ischislenie i ego primeneniye* [Fractional Calculus and Its Applications], Fizmatlit, Moscow, 2003 (in Russian).
3. T. S. Aleroev, “Solving the boundary value problems for differential equations with fractional derivatives by the method of separation of variables,” *Mathematics*, 2020, **8**, 1877.
4. T. S. Aleroev, A. M. Elsayed, and E. I. Mahmoud, “Solving one dimensional time-space fractional vibration string equation,” *Conf. Ser. Mater. Sci. Eng.*, 2021, **1129**, 20–30.
5. T. S. Aleroev, M. Kirane, and S. A. Malik, “Determination of a source term for a time fractional diffusion equation with an integral type over-determining condition,” *Electron. J. Differ. Equ.*, 2013, **270**, 1–16.
6. D. R. Curtiss, “Recent extensions of Descartes’ rule of signs,” *Ann. Math.*, 1918, **19**, No. 4, 251–278.
7. R. Gorenflo, A. A. Kilbas, F. Mainardi, and S. V. Rogosin, *Mittag-Leffler Functions Related Topics and Applications*, Springer, New York, 2014.
8. R. Gorenflo and F. Mainardi, “Random walk models for space fractional diffusion processes,” *Fract. Calc. Appl. Anal.*, 1998, **1**, 167–191.
9. Z. Hu, W. Liu, and J. Liu, “Boundary value problems for fractional differential equations,” *Tijdschrift voor Urologie*, 2014, **2014**, No. 1, 1–11.
10. Y. Luchko and R. Gorenflo, “An operational method for solving fractional differential equations,” *Acta Math.*, 1999, **24**, 207–234.
11. L. Plociniczak, “Eigenvalue asymptotics for a fractional boundary-value problem,” *Appl. Math. Comput.*, 2014, **241**, 125–128.
12. S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Fractional Integrals and Derivatives. Theory and Applications*, Gordon and Breach, New York, 1993.

E. I. Mahmoud  
 RUDN University, Moscow, Russia  
 E-mail: ei\_abdelgalil@yahoo.com

УДК 517.9

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-3-445-563

EDN: EANPTD

## НЕЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО И ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К НЕЛОКАЛЬНЫМ ЗАДАЧАМ

О. В. Солонуха

*Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия*

**Аннотация.** В настоящем обзоре изучаются краевые задачи для нелинейных дифференциально-разностных уравнений эллиптического и параболического типов, а также связанные с ними нелинейные уравнения с нелокальными краевыми условиями. Главной особенностью рассматриваемых уравнений является то, что разностный оператор находится в главной части нелинейного оператора, содержащей старшие производные.

**Ключевые слова:** нелинейные дифференциально-разностные уравнения, нелокальные краевые условия, сдвиг по пространственным переменным, эллиптическое уравнение, параболическое уравнение, начально-краевая задача, периодические решения, псевдомонотонный оператор, оператор с полуограниченной вариацией, условие эллиптичности, условие сильной эллиптичности.

**Заявление о конфликте интересов.** Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

**Благодарности и финансирование.** Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Мегагрант, соглашение № 075-15-2022-1115), Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы.

**Для цитирования:** О. В. Солонуха. Нелинейные дифференциально-разностные уравнения эллиптического и параболического типа и их приложения к нелокальным задачам // Современ. мат. Фундам. направл. 2023. Т. 69, № 3. С. 445–563. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-3-445-563>

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Введение . . . . .	446
Глава 1. Квазилинейные эллиптические дифференциально-разностные уравнения . . . . .	447
1.1. Постановка задачи . . . . .	447
1.2. Разбиение области $Q \subset \mathbb{R}^n$ и свойства разностных операторов . . . . .	449
1.3. Квазилинейные уравнения с сильно монотонным оператором. Существование и единственность обобщенного решения . . . . .	454
1.4. Операторы с полуограниченной вариацией и $(S_+)$ -операторы. Существование обобщенного решения . . . . .	457
1.5. Условие сильной эллиптичности для симметрического разностного оператора . . . . .	463
Глава 2. Существенно нелинейные эллиптические дифференциально-разностные уравнения . . . . .	466
2.1. Алгебраическое условие эллиптичности и существование решения . . . . .	466
2.2. Алгебраическое условие сильной эллиптичности и существование решения . . . . .	472



2.3. Уравнения с $p$ -лапласианом . . . . .	477
Глава 3. Квазилинейные параболические дифференциально-разностные уравнения . . . . .	490
3.1. Постановка начально-краевой задачи. Операторное уравнение . . . . .	490
3.2. Разбиение области $\Omega_T$ и свойства разностного оператора . . . . .	492
3.3. Квазилинейные параболические уравнения с сильно монотонным дифференциально-разностным оператором. Существование и единственность обобщенного решения . . . . .	494
3.4. Операторы с $(\mathcal{V}; W)$ -полуограниченной вариацией и обладающие свойством $(S_+)$ на $W$ операторы. Существование обобщенного решения . . . . .	497
3.5. Существование периодических решений параболического дифференциально-разностного уравнения . . . . .	504
Глава 4. Существенно нелинейные параболические дифференциально-разностные уравнения . . . . .	506
4.1. Параболические уравнения с дифференциально-разностным оператором, обладающим свойством $(S_+)$ на $W$ . . . . .	506
4.2. Параболические уравнения с оператором с $(\mathcal{V}, W)$ -полуограниченной вариацией . . . . .	512
4.3. Параболическое уравнение с $p$ -лапласианом и разностным оператором . . . . .	518
4.4. Существование периодических решений . . . . .	520
Глава 5. Дифференциальные уравнения с нелокальными краевыми условиями типа Бицадзе—Самарского . . . . .	522
5.1. Разностный оператор и изоморфизм соболевских пространств . . . . .	522
5.2. Существование решения эллиптического дифференциального уравнения с нелокальными краевыми условиями . . . . .	527
5.3. Существование решения начально-краевой задачи для параболического дифференциального уравнения с нелокальными краевыми условиями типа Бицадзе—Самарского . . . . .	534
5.4. Существование периодических по $t$ решений параболических дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями типа Бицадзе—Самарского . . . . .	549
Список литературы . . . . .	553

## ВВЕДЕНИЕ

Дифференциально-разностные уравнения являются одним из направлений функционально-дифференциальных уравнений и нелокальных задач. Изучение нелокальных задач было начато еще в классических работах А. Зоммерфельда [113], Я. Д. Тамаркина [84] и М. Пиконе [99, 100] для обыкновенных дифференциальных уравнений. Теория функционально-дифференциальных уравнений (в частности дифференциально-разностных уравнений) получила развитие в трудах А. Д. Мышкиса и многих других математиков, см. монографии [2, 12, 41, 85, 106] и имеющуюся там библиографию. При этом в настоящее время наиболее хорошо изучены функционально-дифференциальные уравнения с запаздыванием по времени и задачи с интегро-дифференциальными членами.

Общая теория линейных эллиптических и параболических функционально-дифференциальных уравнений и линейных нелокальных эллиптических задач (разрешимость, априорные оценки, гладкость обобщенных решений, спектральные свойства операторов) достаточно развита, см. [10–14, 17, 32, 38–40, 45, 46, 53, 54, 58–71, 104, 106, 107] и приведенную там библиографию. Задачи с нелинейными младшими членами рассмотрены, например, в [51, 101, 107]. Многие математики изучали задачи с абстрактными нелокальными граничными условиями и абстрактными функциональными возмущениями дифференциального оператора, как линейные, так и нелинейные, см. [6, 86, 87, 89, 91, 92, 103]. При этом, в абстрактных нелинейных задачах рассматривались монотонные и псевдомонотонные операторы.

Рассмотрение эллиптических дифференциальных уравнений со сдвигами по пространственным переменным вызвано рядом приложений. В 1969 г. такая задача была поставлена в работе А. В. Бицадзе и А. А. Самарского [3] в связи с приложениями в теории плазмы. Такого типа задачи возникают также в теории многомерных диффузионных процессов [5, 60, 94, 95, 102, 106, 114].

Исследованию этой задачи был посвящен целый ряд работ, см. [1, 18, 21, 22, 28, 37, 52, 73, 83] и библиографию. В 1980 г. исследование задачи Бицадзе—Самарского в случае произвольного эллиптического уравнения с переменными коэффициентами и произвольной структуры носителя нелокальных членов было сформулировано как нерешенная проблема [55]. Теория линейных нелокальных эллиптических краевых задач с условиями типа Бицадзе—Самарского была построена в работах А. Л. Скубачевского [59, 61–63, 67, 68, 105, 106]. Одним из методов исследования этих задач является сведение нелокальных эллиптических задач к эллиптическим дифференциально-разностным уравнениям, см. [61, 106].

Для исследования нелинейных задач начиная с 60-х годов прошлого века применяется теория операторов монотонного (псевдомонотонного) типа, см. [4, 27, 97]. В работах М. И. Вишика и других советских математиков основным элементом исследования являлись краевые и смешанные задачи для уравнений эллиптического, параболического и гиперболического типов, эллиптический оператор которых задан в дивергентной или недивергентной форме. Такими уравнениями занимались М. И. Вишик, О. Ф. Ладыженская, С. И. Похожаев, Ю. А. Дубинский и др., см. [7–9, 19, 20, 30, 31, 47, 48] и библиографию. Также такие уравнения активно исследовались в других странах Х. Брезисом, Ф. Браудером, Ж.-Л. Лионсом и многими другими, см. [15, 33, 88, 90] и библиографию. Западные математики ввели понятие псевдомонотонного оператора, см. [33, 88]. Основное условие, которому удовлетворяли дифференциальные операторы, получившие название псевдомонотонных, — условие эллиптичности. В 60-е годы также Ю. А. Дубинский ввел понятие алгебраического условия сильной эллиптичности и рассмотрел уравнения с операторами с полуограниченной вариацией [19, 20]. Позже было доказано, что операторы с полуограниченной вариацией являются псевдомонотонными, а операторы, удовлетворяющие условию эллиптичности и коэрцитивности, являются не только псевдомонотонными, но и обладают свойством  $(S_+)$ , см. работы И. В. Скрышника [57] и др. Класс оператора определяет свойства решения (множества решений) операторного уравнения. В нелинейном анализе сформулированы теоремы существования решений для уравнений с операторами разных классов псевдомонотонного типа и изучены свойства решений, см. [15, 20, 33, 57] и др. Однако до сих пор эти теоремы применялись только для исследования дифференциальных уравнений.

С 60-х годов математики полагали, что при исследовании нелинейных функционально-дифференциальных и нелокальных задач также следует использовать теорию операторов псевдомонотонного типа, см. [87, 89, 91], однако рассмотрены были только достаточно абстрактные задачи.

В данной работе нелинейные дифференциально-разностные уравнения и нелинейные уравнения с краевыми условиями типа Бицадзе—Самарского рассмотрены с помощью теории операторов псевдомонотонного типа и метода разбиения области, разработанного в линейной теории дифференциально-разностных уравнений. При этом условия на дифференциально-разностный оператор или нелокальные краевые условия типа Бицадзе—Самарского конструктивны и содержат условия на коэффициенты разностного оператора и коэффициенты дифференциального оператора.

## ГЛАВА 1

### КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

#### 1.1. Постановка задачи

Рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение вида

$$ARu(x) = f(x) \quad (x \in Q) \quad (1.1)$$

с краевым условием

$$u(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus Q). \quad (1.2)$$

Здесь  $Q \subset \mathbb{R}^n$  — ограниченная область с границей  $\partial Q$  класса  $C^\infty$  или  $Q = (0, d) \times G$ ,  $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$  — ограниченная область (с границей  $\partial G$  класса  $C^\infty$ , если  $n \geq 3$ ). В случае  $n = 1$  мы полагаем<sup>1</sup>  $Q = (0, d)$ . Полагаем также, что оператор  $A$  задан формулой

$$Au(x) = - \sum_{1 \leq i \leq n} \partial_i A_i(x, u, \nabla u) + A_0(x, u, \nabla u), \quad (1.3)$$

функции вещественнозначны, а ограниченный разностный оператор  $R$  определяется по формуле

$$Ru(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_h u(x+h), \quad (1.4)$$

где  $a_h \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$  — конечное множество векторов с целочисленными (или соизмеримыми) координатами,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Разностный оператор  $R$  является нелокальным: сдвиги на векторы  $h \in \mathcal{M}$  могут отображать точки  $x \in Q$  в точки  $x+h \in \mathbb{R}^n \setminus Q$ . Поэтому краевые условия должны задавать значения неизвестной функции не только на границе  $\partial Q$ , но и на некотором множестве вне  $Q$ . Для простоты в дальнейшем будем считать, что это множество совпадает с  $\mathbb{R}^n \setminus Q$ .

Пусть<sup>2</sup>  $p \in (1, \infty)$  и  $1/p + 1/q = 1$ .

Введем оператор  $R_Q = P_Q R I_Q : L_p(Q) \rightarrow L_p(Q)$ , где  $I_Q : L_p(Q) \rightarrow L_p(\mathbb{R}^n)$  — оператор продолжения функций из  $L_p(Q)$  нулем в  $\mathbb{R}^n \setminus Q$ ,  $P_Q : L_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_p(Q)$  — оператор сужения функций из  $L_p(\mathbb{R}^n)$  на  $Q$ . Таким образом, функция  $u(x)$ , определенная на  $Q$ , отображается в функцию  $(I_Q u)(x)$ , определенную на всем пространстве  $\mathbb{R}^n$ . После действия оператора  $R$  на  $I_Q u$  мы получаем функцию, определенную на  $\mathbb{R}^n$ . Оператор  $P_Q$  вводится, чтобы получить сужение функции  $(R I_Q u)(x)$  на область  $Q$ .

Обозначим через  $W_p^1(Q)$  множество функций  $u \in L_p(Q)$  таких, что их частные производные 1-го порядка также являются функциями из  $L_p(Q)$ . При  $p \in (1, \infty)$  соболевские пространства  $W_p^1(Q)$  банаховы и рефлексивны относительно нормы

$$\|u\|_{W_p^1(Q)} = \left\{ \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q |\partial_i u|^p dx + \int_Q |u|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}. \quad (1.5)$$

Через  $\dot{W}_p^1(Q)$  обозначается замыкание множества финитных бесконечно дифференцируемых в  $Q$  функций  $\dot{C}^\infty(Q)$  в пространстве  $W_p^1(Q)$ . Как известно, эквивалентной нормой в пространстве  $\dot{W}_p^1(Q)$  является норма

$$\|y\|_{\dot{W}_p^1(Q)} = \left\{ \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q |\partial_i y|^p dx \right\}^{\frac{1}{p}}$$

(следствие из неравенства Фридрихса, см. [15, гл. II, §1]), сопряженным пространством к  $\dot{W}_p^1(Q)$  является  $W_q^{-1}(Q)$ .

Для определения корректной интегральной формы рассматриваемые в теории уравнений в частных производных дифференциальные операторы должны удовлетворять условию интегрируемости: коэффициенты оператора  $A$ , заданного в (1.3), являются функциями типа Каратеодори (т. е. измеримы по  $x \in Q$  и непрерывны по остальным переменным для п.в.  $x \in Q$ ), а также удовлетворяют оценке

$$|A_i(x, \xi)| \leq g(x) + c_1 \sum_{0 \leq i \leq n} |\xi_i|^{p-1}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \quad (1.6)$$

где  $c_1 > 0$  и  $g \in L_q(Q)$ . Условие интегрируемости (1.6) является стандартным (с небольшими вариациями) для построения интегрального представления дифференциального оператора, см. [29,

<sup>1</sup>Эти условия могут быть ослаблены, достаточно выполнения условий 5.1 и 5.2 из главы 5.

<sup>2</sup>Квазилинейные уравнения будут рассмотрены при  $p \in [2, \infty)$ .

гл. 1, §2], а также [15, 20, 33] и др. Если через  $\langle \cdot, \cdot \rangle : W_q^{-1}(Q) \times \dot{W}_p^1(Q) \rightarrow \mathbb{R}$  обозначить спаривание в соответствующих банаховых пространствах, то для оператора  $AR_Q : \dot{W}_p^1(Q) \rightarrow W_q^{-1}(Q)$ , заданного формулами (1.3) и (1.4), для любых  $\xi \in \dot{W}_p^1(Q)$  имеем

$$\langle AR_Q u, \xi \rangle := \sum_{0 \leq i \leq n} \int_Q A_i(x, R_Q u, \partial_1 R_Q u, \dots, \partial_n R_Q u) \partial_i \xi \, dx; \tag{1.7}$$

здесь и ниже  $\partial_0 u := u$ . Далее будем обозначать  $A_R := AR_Q$ .

**Определение 1.1.** Пусть  $f \in W_q^{-1}(Q)$ . Функция  $u \in \dot{W}_p^1(Q)$  называется *обобщенным решением задачи* (1.1), (1.2), если для любого  $\xi \in \dot{W}_p^1(Q)$  справедливо интегральное тождество

$$\sum_{0 \leq i \leq n} \int_Q A_i(x, R_Q u, \partial_1 R_Q u, \dots, \partial_n R_Q u) \partial_i \xi \, dx = \int_Q f \xi \, dx. \tag{1.8}$$

1.2. РАЗБИЕНИЕ ОБЛАСТИ  $Q \subset \mathbb{R}^n$  И СВОЙСТВА РАЗНОСТНЫХ ОПЕРАТОРОВ

Через  $M$  обозначим аддитивную группу, порожденную множеством  $\mathcal{M}$ , а через  $Q_r$  — открытые связные компоненты множества  $Q \setminus (\bigcup_{h \in M} (\partial Q + h))$ .

**Определение 1.2.** Множество  $Q_r$  называется *подобластью*. Семейство  $\mathcal{R}$  всех подобластей  $Q_r$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) называется *разбиением* области  $Q$ .

Легко видеть, что множество  $\mathcal{R}$  не более чем счетно, при этом

$$\bigcup_r \partial Q_r = \left( \bigcup_{h \in M} (\partial Q + h) \right) \cap \bar{Q} \quad \text{и} \quad \bigcup_r \bar{Q}_r = \bar{Q}.$$

Известно, что для любой подобласти  $Q_{r_1}$  и произвольного вектора  $h \in M$  либо найдется подобласть  $Q_{r_2}$  такая, что  $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$ , либо  $Q_{r_1} + h \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{Q}$ , см. [106, лемма 7.1]. Таким образом, семейство  $\mathcal{R}$  можно разбить на непересекающиеся классы следующим образом: подобласти  $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathcal{R}$  принадлежат одному классу, если  $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$  для некоторого  $h \in M$ . Будем обозначать подобласти  $Q_r$  через  $Q_{sl}$ , где  $s$  — номер класса, а  $l$  — номер подобласти в  $s$ -м классе. Очевидно, каждый класс состоит из конечного числа  $N = N(s)$  подобластей  $Q_{sl}$  и  $N(s) \leq ([\text{diam} Q] + 1)^n$  для целочисленных сдвигов. Множество классов может быть конечным или счетным, см. примеры в [106, гл. II, §7].

**Лемма 1.1.** Операторы  $I_Q : L_p(Q) \rightarrow L_p(\mathbb{R}^n)$ ,  $P_Q : L_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_p(Q)$ ,  $R : L_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_p(\mathbb{R}^n)$  и  $R_Q : L_p(Q) \rightarrow L_p(Q)$  ограничены,  $1 < p < \infty$ .

Обозначим через  $L_p(\bigcup_l Q_{sl})$  подпространство функций из  $L_p(Q)$ , обращающихся в нуль вне  $\bigcup_l Q_{sl}$  ( $l = 1, \dots, N(s)$ ). Введем ограниченный оператор  $P_s : L_p(Q) \rightarrow L_p(\bigcup_l Q_{sl})$  по формуле  $P_s u(x) = u(x)$  ( $x \in \bigcup_l Q_{sl}$ ),  $P_s u(x) = 0$  ( $x \in Q \setminus \bigcup_l Q_{sl}$ ). Очевидно, что  $P_s$  является оператором проектирования на  $L_p(\bigcup_l Q_{sl})$ . Поскольку  $\text{mes}_n(\partial Q_{sl}) = 0$ , имеем прямую сумму

$$L_p(Q) = \dot{+}_s L_p \left( \bigcup_l Q_{sl} \right). \tag{1.9}$$

**Лемма 1.2.**  $L_p \left( \bigcup_l Q_{sl} \right)$  является инвариантным подпространством оператора  $R_Q$  для любого  $1 < p < \infty$ .

Изоморфизм рефлексивных банаховых пространств

$$U_s : L_p \left( \bigcup_l Q_{sl} \right) \rightarrow L_p^N(Q_{s1})$$

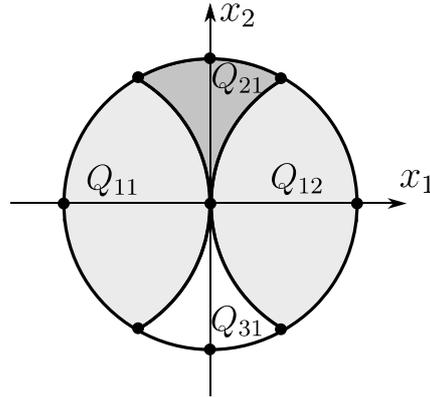


РИС. 1.1. Разбиение области  $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ .  
 FIG. 1.1. Partition of the domain  $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ .

определяется по формуле

$$(U_s u)_l(x) = u(x + h_{sl}) \quad (x \in Q_{s1}), \tag{1.10}$$

где  $l = 1, \dots, N = N(s)$ , а вектор  $h_{sl}$  таков, что

$$Q_{s1} + h_{sl} = Q_{sl} \quad (h_{s1} = 0), \quad L_p^N(Q_{s1}) = \prod_l L_p(Q_{s1}).$$

**Лемма 1.3.** Оператор  $R_{Q_s} : L_p^{N(s)}(Q_{s1}) \rightarrow L_p^{N(s)}(Q_{s1})$ , заданный соотношением

$$R_{Q_s} = U_s R_Q U_s^{-1}, \tag{1.11}$$

есть оператор умножения на матрицу  $R_s$  порядка  $N(s) \times N(s)$  с элементами

$$r_{ij}^s = \begin{cases} a_h, & h = h_{sj} - h_{si} \in \mathcal{M}, \\ 0, & h_{sj} - h_{si} \notin \mathcal{M}. \end{cases} \tag{1.12}$$

Доказательство совпадает с доказательством для операторов  $R_{Q_s} : L_2^{N(s)}(Q_{s1}) \rightarrow L_2^{N(s)}(Q_{s1})$  (см. [106, лемма 8.6]). Для удобства читателей приведем его полностью.

*Доказательство.* Пусть  $V \in L_p^{N(s)}(Q_{s1})$ . Обозначим  $u = U_s^{-1}V \in L_p(\bigcup_l Q_{sl})$ . В силу формулы (1.10) и определения оператора  $R_Q$  для всех  $x \in Q_{s1}$

$$(R_{Q_s} V)_i(x) = (U_s R_Q u)_i(x) = (R_Q u)(x + h_{si}) = \sum_h a_h u(x + h_{si} + h).$$

Здесь суммирование ведется по всем  $h \in \mathcal{M}$  таким, что  $h + h_{si} = h_{sj}$  для некоторого  $1 \leq j \leq N(s)$ . Тогда

$$(R_{Q_s} V)_i(x) = \sum_{j=1}^{N(s)} r_{ij}^s (U_s u)_j(x) = \sum_{j=1}^{N(s)} r_{ij}^s V_j(x),$$

где  $r_{ij}^s(x)$  определены по формуле (1.12). □

Из ограниченности области  $Q$  и формул (1.11)-(1.12) следует, что в случае постоянных коэффициентов  $a_h$  число различных матриц  $R_s$  конечно. Обозначим это число  $n_1$ , и пусть  $R_{s_\nu}$  обозначают все различные матрицы  $R_s$  ( $\nu = 1, \dots, n_1$ ).

**Пример 1.1.** Пусть  $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 < 1\}$ . Рассмотрим оператор  $R : L_p(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_p(\mathbb{R}^2)$ , определенный по формуле

$$Ru(x_1, x_2) = a_0 u(x_1, x_2) + a_1 u(x_1 + 1, x_2) + a_{-1} u(x_1 - 1, x_2).$$

Тогда разбиение  $\mathcal{R}$  состоит из трех классов подобластей, в первом классе — две подобласти, а в остальных по одной (см. рис. 1.1), оператору  $R_Q$  соответствуют матрицы

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_{-1} & a_0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = a_0, \quad R_3 = a_0.$$

**Пример 1.2.** Рассмотрим оператор  $R : L_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_p(\mathbb{R}^n)$ , определенный по формуле

$$Ru(x) = \sum_{-k \leq i \leq k} a_i u(x_1 + i, x_2, \dots, x_n). \tag{1.13}$$

Пусть  $Q = (0, d) \times G$ ,  $k$  — натуральное число,  $d = k + \theta$ ,  $0 < \theta \leq 1$ ,  $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$  — ограниченная область (с границей  $\partial G \in C^\infty$ , если  $n \geq 3$ ),  $a_i \in \mathbb{R}$  — постоянные.

а) Пусть  $\theta = 1$ . Тогда разбиение  $\mathcal{R}$  состоит из одного класса подобластей

$$Q_{1l} = (l - 1, l) \times G \quad (l = 1, \dots, k + 1).$$

Кроме того,  $h_{1l} = (l - 1, 0, \dots, 0)$ ,  $l = 1, \dots, k + 1$ , и

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_k \\ a_{-1} & a_0 & \dots & a_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-k} & a_{-k+1} & \dots & a_0 \end{pmatrix}. \tag{1.14}$$

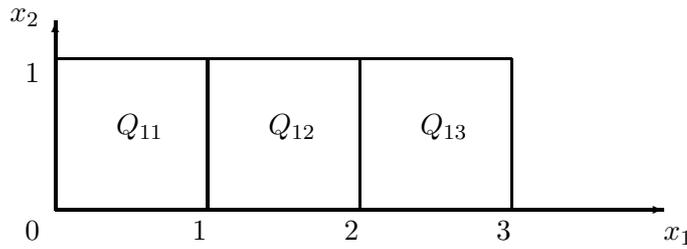


Рис. 1.2. Разбиение области  $Q = (0, 3) \times (0, 1)$ .

FIG. 1.2. Partition of the domain  $Q = (0, 3) \times (0, 1)$ .

б) Пусть  $\theta < 1$ . Тогда разбиение  $\mathcal{R}$  состоит из двух классов подобластей

$$Q_{1l} = (l - 1, l - 1 + \theta) \times G \quad (l = 1, \dots, k + 1), \quad Q_{2l} = (l - 1 + \theta, l) \times G \quad (l = 1, \dots, k).$$

Кроме того,  $h_{1l} = (l - 1, 0, \dots, 0)$  ( $l = 1, \dots, k + 1$ ),  $h_{2l} = (l - 1 + \theta, 0, \dots, 0)$  ( $l = 1, \dots, k$ ) и

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_k \\ a_{-1} & a_0 & \dots & a_{k-1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-k} & a_{-k+1} & \dots & a_0 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & \dots & a_{k-1} \\ a_{-1} & a_0 & \dots & a_{k-2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{-k+1} & a_{-k+2} & \dots & a_0 \end{pmatrix}. \tag{1.15}$$

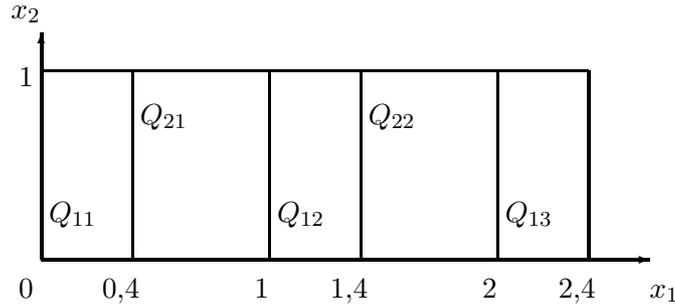
**Лемма 1.4.** Спектр оператора  $\sigma(R_Q) = \bigcup_{\nu}^{n_1} \sigma(R_{s_\nu})$ .

Доказательство совпадает с доказательством [106, лемма 8.7].

**Лемма 1.5.** Оператор  $R_Q$  непрерывно отображает  $\dot{W}_p^1(Q)$  в  $W_p^1(Q)$ ,

$$(R_Q u)_{x_i} = R_Q u_{x_i}. \tag{1.16}$$

Утверждение леммы следует из равенства (1.16) для функций  $u \in \dot{C}^\infty(Q)$  и плотности подпространства  $\dot{C}^\infty(Q)$  в  $\dot{W}_p^1(Q)$ .

Рис. 1.3. Разбиение области  $Q = (0, 2,4) \times (0, 1)$ .FIG. 1.3. Partition of the domain  $Q = (0, 2,4) \times (0, 1)$ .

**Лемма 1.6.**  $R_Q u \in W_p^1(Q_{sl})$  для всех  $u \in W_p^1(Q)$ , а также

$$\|R_Q u\|_{W_p^1(Q_{sl})} \leq c_2 \sum_{j=1}^{N(s)} \|u\|_{W_p^1(Q_{sj})} \quad (s = 1, 2, \dots; l = 1, \dots, N(s)). \quad (1.17)$$

Более того, если  $\det R_{s\nu} \neq 0$  ( $\nu = 1, \dots, n_1$ ), то существует обратный оператор  $R_Q^{-1} : L_p(Q) \rightarrow L_p(Q)$ , причем

$$R_Q^{-1} = \sum_s U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s, \quad (1.18)$$

$R_Q^{-1} w \in W_p^1(Q_{sl})$  для всех  $w \in W_p^1(Q)$  и

$$\|R_Q^{-1} w\|_{W_p^1(Q_{sl})} \leq c_3 \sum_{j=1}^{N(s)} \|w\|_{W_p^1(Q_{sj})} \quad (s = 1, 2, \dots; l = 1, \dots, N(s)). \quad (1.19)$$

Здесь константы  $c_2, c_3 > 0$  не зависят от  $s$ ,  $u$  и  $w$ . При этом

$$\partial_i (R_Q^{-1} w)(x) = R_Q^{-1} \partial_i w(x) \quad (x \in Q_{sl}; s = 1, 2, \dots; l = 1, \dots, N(s)).$$

*Доказательство.* Докажем сначала справедливость оценки (1.17):

$$\|R_Q u\|_{W_p^1(Q_{sl})} \leq \sum_{h \in \mathcal{M}} |a_h| \| (I_Q u)(\cdot + h) \|_{W_p^1(Q_{sl})} \leq \max_h |a_h| \sum_{j=1}^{N(s)} \|u\|_{W_p^1(Q_{sj})}.$$

Перейдем ко второй части утверждения. Согласно условиям леммы  $0 \notin \bigcup_{\nu} \sigma(R_{s\nu})$ . Следовательно, линейный оператор

$$\widehat{A}_0 = \sum_s U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s : L_p(Q) \rightarrow L_p(Q)$$

ограничен. В силу леммы 1.2

$$P_s R_Q = R_Q P_s.$$

Воспользуемся этой коммутативностью и разложением (1.9). Тогда

$$\widehat{A}_0 R_Q = \sum_s U_s^{-1} R_s^{-1} U_s R_Q P_s = I$$

в силу леммы 1.3, где  $I$  — единичный оператор в  $L_p(Q)$ .

Аналогично доказывается, что  $R_Q \widehat{A}_0 = I$ . Следовательно, оператор  $R_Q$  имеет ограниченный обратный, определяемый по формуле (1.18). Из равенства (1.18) получаем

$$U_s P_s R_Q^{-1} = R_s^{-1} U_s P_s. \quad (1.20)$$

Пусть  $w \in W_p^1(Q)$ . Тогда из (1.20) следует принадлежность  $R_Q^{-1} w \in W_p^1(Q_{sl})$  ( $s = 1, 2, \dots; l = 1, \dots, N(s)$ ), неравенство (1.19) и коммутативность с оператором  $\partial_i$  на  $Q_{sl}$ .  $\square$

Ниже нам необходимы несколько свойств для оценки матричных форм.

**Лемма 1.7.** Пусть матрица  $R_s$  размерности  $N(s) \times N(s)$  такова, что  $R_s + R_s^* > 0$ . Тогда существует константа  $c_4 > 0$  такая, что

$$\sum_{1 \leq i \leq N(s)} |(R_s v)_i|^{p-2} |v_i|^2 \geq c_4 \sum_{1 \leq i \leq N(s)} |v_i|^p \quad \forall v \in \mathbb{R}^{N(s)}. \quad (1.21)$$

Здесь  $(R_s v)_i$  —  $i$ -я координата вектора  $R_s v$ .

*Доказательство.* Рассмотрим  $v$  как элемент банахова пространства  $\{\mathbb{R}^{N(s)}, \|\cdot\|_p\}$  с нормой

$$\|v\|_p = \left( \sum_{1 \leq i \leq N(s)} |v_i|^p \right)^{1/p}.$$

Предположим, что оценка (1.21) не верна. Тогда для любого  $k \in \mathbb{N}$  существует вектор  $v^k \neq 0$  такой, что

$$\sum_{1 \leq i \leq N(s)} |(R_s v^k)_i|^{p-2} |v_i^k|^2 < \frac{1}{k} \|v^k\|_p^p.$$

Обозначим  $u^k := \frac{v^k}{\|v^k\|_p}$ . Поскольку  $\|u^k\|_p = 1 \forall k \in \mathbb{N}$ , то ограниченная в конечномерном пространстве последовательность  $\{u^k\}$  имеет предел  $u^0$  такой, что  $\|u^0\|_p = 1$  и

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq N(s)} |(R_s u^0)_i|^{p-2} |u_i^0|^2 &= \lim_{k \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i \leq N(s)} |(R_s u^k)_i|^{p-2} |u_i^k|^2 = \\ &= \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{\|v^k\|_p^p} \sum_{1 \leq i \leq N(s)} |(R_s v^k)_i|^{p-2} |v_i^k|^2 \leq \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} = 0. \end{aligned}$$

В левой части полученной формулы стоит сумма произведений неотрицательных величин. Равенство нулю возможно, если  $(R_s u^0)_i u_i^0 = 0$  для всех  $i = 1, \dots, N(s)$ . То есть,  $(R_s u^0, u^0) = 0$ . Однако это противоречит условию положительности симметрической части матрицы  $R_s + R_s^* > 0$ . Полученное противоречие доказывает оценку (1.21).  $\square$

**Лемма 1.8.** Пусть  $\det R_{s_\nu} \neq 0$  ( $\nu = 1, \dots, n_1$ ). Тогда

$$c_5^{-1} \|u\|_{L_p(Q)} \leq \|R_Q u\|_{L_p(Q)} \leq c_5 \|u\|_{L_p(Q)} \quad (1.22)$$

для некоторой константы  $c_5 > 0$ , причем  $c_5$  не зависит от  $u$ , но зависит от  $p$ .

*Доказательство.* Доказательство следует из равенства  $\sigma(R_Q) = \bigcup_{1 \leq \nu \leq n_1} \sigma(R_{s_\nu})$  в лемме 1.4 и дискретности спектра разностного оператора.  $\square$

**Замечание 1.1.** Подчеркнем основную идею рассмотрения нелинейных дифференциально-разностных уравнений методами теории операторов монотонного типа. Для этого рассмотрения необходимо понятие обобщенного решения, т. е. наличие корректной интегральной формы (1.8), существование которой гарантирует условие интегрируемости (1.6). Кроме того, структурирование условий требует, как и в линейном случае, см. [69, 106] и др., разбиения области. Но в отличие от линейного случая разностный оператор оказывается под знаком нелинейного дифференциального оператора, т. е. нельзя, как в линейном случае, применить свойство аддитивности интеграла Лебега непосредственно. Для того, чтобы это сделать, необходимо использовать невырожденность разностного оператора, существование обратного к нему, а также вспомогательные функции. В случае квазилинейных уравнений активное использование этих объектов идет в доказательствах утверждений, а для существенно нелинейных уравнений матрицы, соответствующие обратному оператору  $R_Q^{-1}$ , участвуют в формулировке условий для дифференциально-разностного оператора.

1.3. КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ УРАВНЕНИЯ С СИЛЬНО МОНОТОННЫМ ОПЕРАТОРОМ.  
СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ

Обозначим через  $X$  и  $Y$  абстрактные рефлексивные банаховы пространства,  $X^*$  — сопряженное к  $X$  пространство.

**Определение 1.3.** Оператор  $A : X \rightarrow Y$  деминепрерывен, если из сходимости  $u_m \rightarrow u$  в  $X$  следует слабая сходимость  $Au_m \rightharpoonup Au$  в  $Y$ . Оператор  $A : X \rightarrow Y$  ограничен, если образ ограниченного множества из  $X$  ограничен в  $Y$ .

**Лемма 1.9.** Пусть коэффициенты оператора  $A : W_p^1(Q) \rightarrow W_q^{-1}(Q)$ , заданного в (1.3), являются функциями типа Каратеодори (т. е. измеримы по  $x \in Q$  и непрерывны по остальным переменным для п.в.  $x \in Q$ ), а также удовлетворяют оценке (1.6). Тогда оператор  $A_R : \dot{W}_p^1(Q) \rightarrow W_q^{-1}(Q)$  деминепрерывен и ограничен.

*Доказательство.* В силу леммы 1.6 линейный оператор  $R_Q : \dot{W}_p^1(Q) \rightarrow W_p^1(Q)$  ограничен. Линейный ограниченный оператор непрерывен. Дифференциальный оператор  $A : W_p^1(Q) \rightarrow W_q^{-1}(Q)$  деминепрерывен и ограничен в силу условия (1.6), см., например, [29, гл. 1, §2]. Композиция  $A_R = AR_Q$  является деминепрерывным, ограниченным оператором. □

**Определение 1.4.** Оператор  $\mathcal{A} : X \rightarrow X^*$  называется монотонным, если

$$\langle \mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(y), u - y \rangle \geq 0 \quad \forall u, y \in X.$$

Монотонный оператор строго монотонен, если

$$\langle \mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(y), u - y \rangle > 0 \quad \forall u \neq y.$$

**Определение 1.5.** Оператор  $\mathcal{A} : X \rightarrow X^*$  называется сильно монотонным<sup>1</sup>, если для любых  $u, y \in X$  существуют константы  $c_e > 0$  и  $\alpha > 0$  такие, что<sup>2</sup>

$$\langle \mathcal{A}(u) - \mathcal{A}(y), u - y \rangle \geq c_e \|u - y\|_X^{1+\alpha}. \tag{1.23}$$

Напомним, что в случае линейности дифференциального  $\mathcal{M}$ -периодического оператора  $A$  положительная определенность симметрической части разностного оператора  $R_Q$  гарантирует сильную эллиптичность дифференциально-разностного оператора, см. [106]. Для квазилинейных дифференциальных операторов существует алгебраическое условие сильной эллиптичности, см. [20, гл. 2, §2]. В этом разделе будет сформулировано алгебраическое условие сильной эллиптичности для квазилинейного дифференциально-разностного оператора.

Введем матрицу  $\zeta \in \mathbb{R}^{N(s) \times (n+1)}$

$$\zeta := \begin{pmatrix} \zeta_{10} & \zeta_{11} & \zeta_{12} & \cdots & \zeta_{1n} \\ \zeta_{20} & \zeta_{21} & \zeta_{22} & \cdots & \zeta_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \zeta_{N(s)0} & \zeta_{N(s)1} & \zeta_{N(s)2} & \cdots & \zeta_{N(s)n} \end{pmatrix}. \tag{1.24}$$

Будем обозначать через  $\zeta_i$   $i$ -й столбец  $\zeta$ , через  $\zeta_l$  —  $l$ -ю строку  $\zeta$ .

**Лемма 1.10.** Пусть  $p \in [2, \infty)$ ,  $\{R_s\}$  — матрицы, соответствующие оператору  $R_Q$ ,  $R_s = \{r_{ml}^s\}_{1 \leq m, l \leq N(s)}$ ,  $R_s + R_s^* > 0$ . Мы предполагаем, что оператор  $A : W_p^1(Q) \rightarrow W_q^{-1}(Q)$ , заданный формулой (1.3), имеет измеримые по  $x \in Q$  и дифференцируемые по  $\xi_j \in \mathbb{R}$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) коэффициенты  $A_i(x, \xi)$ ,  $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , причем производные  $A_{ij}(x, \xi) = \frac{\partial A_i(x, \xi)}{\partial \xi_j}$  таковы, что для любых  $s = 1, 2, \dots$ ,  $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{N(s) \times (n+1)}$  и почти всех  $x \in \overline{Q_{s1}}$  справедливо алгебраическое условие сильной эллиптичности

$$\sum_{1 \leq m, l \leq N(s)} \sum_{0 \leq i, j \leq n} r_{ml}^s A_{ij}(x + h_{sm}, \zeta_m) \eta_{lj} \eta_{mi} \geq c_6 \sum_{1 \leq m \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} |\zeta_{mi}|^{p-2} |\eta_{mi}|^2, \tag{1.25}$$

<sup>1</sup>Употребляется также термин *сильно эллиптический* оператор (нелинейный), однако в этой работе мы оставим этот термин для рассмотрения линейных операторов, см. раздел 5.3, так как определения имеют различия.

<sup>2</sup>Чаще всего в соболевских пространствах рассматривают  $\alpha = p - 1$ .

а для всех  $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$  и почти всех  $x \in \bar{Q}$  выполнена оценка роста

$$|A_{ij}(x, \xi)| \leq g_1(x) + c_7 \sum_{0 \leq k \leq n} |\xi_k|^{p-2} \quad (i, j = 0, \dots, n), \quad (1.26)$$

где  $g_1 \in L_{p/(p-2)}(Q)$ ,  $c_6, c_7 > 0$  не зависят от  $x, \zeta$  и  $\eta$ .

Тогда оператор  $A_R : \dot{W}_p^1(Q) \rightarrow W_q^{-1}(Q)$ , заданный формулой (1.7), сильно монотонен.

*Доказательство.* Пусть  $w = R_Q(u - y)$  и  $v = R_Q y$ , где  $u, y \in \dot{W}_p^1(Q)$ . Согласно лемме 1.6 существует ограниченный обратный оператор  $R_Q^{-1} : L_p(Q) \rightarrow L_p(Q)$ . Из равенства (1.7) и леммы 1.5 следует, что

$$\begin{aligned} \langle A_R u - A_R y, u - y \rangle &= \sum_{0 \leq i \leq n} \int_Q (A_i(x, R_Q u, \nabla R_Q u) - A_i(x, R_Q y, \nabla R_Q y)) (\partial_i u - \partial_i y) dx = \\ &= \sum_{0 \leq i \leq n} \int_Q (A_i(x, v + w, \nabla v + \nabla w) - A_i(x, v, \nabla v)) R_Q^{-1} \partial_i w dx = I_1. \end{aligned} \quad (1.27)$$

Тогда, используя формулу (1.18), имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{i,s} \int_{\bigcup_l Q_{sl}} P_s (A_i(x, v + w, \nabla(v + w)) - A_i(x, v, \nabla v)) U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w dx = \\ &= \sum_{i,s} \int_{Q_{s1}} \left( U_s P_s (A_i(x, v + w, \nabla(v + w)) - A_i(x, v, \nabla v)), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w \right) dx, \end{aligned}$$

где  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^{N(s)}$ . Используем дифференцируемость коэффициентов  $A_i$  и формулу Тейлора:

$$I_1 = \sum_s \sum_{i,j} \int_{Q_{s1}} \left( U_s P_s \left( \int_0^1 A_{ij}(x, v + \tau w, \nabla v + \tau \nabla w) d\tau \partial_j w \right), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w \right) dx. \quad (1.28)$$

Заметим, что в (1.28) интегралы по  $Q_{s1}$  существуют в силу условия (1.26). Распишем подынтегральное выражение:

$$\begin{aligned} &\left( U_s P_s \left( \int_0^1 A_{ij}(x, v + \tau w, \nabla v + \tau \nabla w) d\tau \partial_j w \right), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w \right) = \\ &= \left( \text{diag} \left\{ U_s P_s \int_0^1 A_{ij}(x, v + \tau w, \nabla v + \tau \nabla w) d\tau \right\} R_s R_s^{-1} (U_s P_s \partial_j w), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w \right) = \\ &= \left( \text{diag} \left\{ U_s P_s \int_0^1 A_{ij}(x, v + \tau w, \nabla v + \tau \nabla w) d\tau \right\} R_s (U_s P_s \partial_j (u - y)), U_s P_s \partial_i (u - y) \right) = \\ &= \sum_{l,m} r_{ml}^s \left( \int_0^1 A_{ij}(x + h_{sm}, (v + \tau w), (\nabla v + \tau \nabla w)) d\tau \right) \partial_j (u - y)(x + h_{sl}) \partial_i (u - y)(x + h_{sm}), \end{aligned}$$

где

$$\text{diag} \left\{ U_s P_s \int_0^1 A_{ij}(x, v + \tau w, \nabla v + \tau \nabla w) d\tau \right\}$$

— диагональная матрица порядка  $N(s) \times N(s)$  с диагональными элементами

$$\int_0^1 A_{ij}(x + h_{sm}, (v + \tau w)(x + h_{sm}), (\nabla v + \tau \nabla w)(x + h_{sm})) d\tau.$$

Используем алгебраическое условие сильной эллиптичности (1.25):

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_s \int_{Q_{s1}} \sum_{\substack{1 \leq l, \\ m \leq N(s)}} \sum_{\substack{0 \leq i, \\ j \leq n}} r_{ml}^s \int_0^1 A_{ij}(x + h_{sm}, v + \tau w, \nabla v + \tau \nabla w) d\tau \partial_j(u-y)(x+h_{sl}) \partial_i(u-y)(x+h_{sm}) dx \geq \\ &\geq c_6 \sum_s \int_{Q_{s1}} \sum_{1 \leq m \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} \int_0^1 |(\partial_i v + \tau \partial_i w)(x + h_{sm})|^{p-2} d\tau |\partial_i(u-y)(x + h_{sm})|^2 dx. \end{aligned}$$

Согласно известной оценке  $\int_0^1 |a + \tau b|^{p-2} d\tau \geq c_8 |b|^{p-2}$  имеем

$$\int_0^1 |(\partial_i v + \tau \partial_i w)(x + h_{sm})|^{p-2} d\tau \geq c_8 |\partial_i w(x + h_{sm})|^{p-2}.$$

По построению  $w = R_Q(u - y)$ . В силу положительности симметрической части матрицы  $R_s$  справедлива оценка (1.21), т. е.

$$\begin{aligned} I_1 &\geq c_6 c_8 \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{s, m} \int_{Q_{s1}} |\partial_i w(x + h_{sm})|^{p-2} |\partial_i(u-y)(x + h_{sm})|^2 dx \\ &= c_6 c_8 \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{s, m} \int_{Q_{s1}} |\partial_i R_Q(u-y)(x + h_{sm})|^{p-2} |\partial_i(u-y)(x + h_{sm})|^2 dx \geq \\ &\geq c_6 c_8 c_4 \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{s, m} \|\partial_i(u-y)(\cdot + h_{sm})\|_{L_p(Q_{s1})}^p = c_9 \|u - y\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^p. \quad (1.29) \end{aligned}$$

Сильная монотонность оператора  $A_R$  доказана.  $\square$

**Теорема 1.1.** Пусть  $R_s^* + R_s > 0$  для всех  $s$ , а также выполнены условия интегрируемости (1.6), дифференцируемости (1.26) для  $i, j = 0, 1, \dots, n$  и сильной эллиптичности (1.25),  $p \in [2, \infty)$ . Тогда для любого  $f \in W_q^{-1}(Q)$  существует единственное обобщенное решение задачи (1.1), (1.2), причем

$$\|u_1 - u_2\|_{\dot{W}_p^1(Q)} \leq c_{10} \|f_1 - f_2\|_{W_q^{-1}(Q)}^{1/(p-1)}, \quad (1.30)$$

где  $u_1$  и  $u_2$  — обобщенные решения задачи (1.1)-(1.2) при правых частях  $f_1$  и  $f_2$  соответственно. Здесь  $c_{10} > 0$  не зависит от  $u_k$  и  $f_k$ .

<sup>1</sup>Эта оценка была использована в [20]. Для удобства читателей докажем ее. Очевидно, что оценка справедлива при  $p = 2$ . При  $p > 2$  предположим, что  $a \geq 0$  (если это не так, можно умножить формулу под знаком модуля на  $-1$ ). Тогда  $\int_0^1 |a + \tau b|^{p-2} d\tau = \frac{(a+b)^{p-1} - a^{p-1}}{b(p-1)} := \psi_1(a, b)$  при  $a + b \geq 0$ . Функция  $\psi_1(\cdot, b)$  возрастает по первому

аргументу на  $[0, \infty)$ , т.е.  $\psi_1(a, b) \geq \psi_1(0, b) = \frac{|b|^{p-2}}{p-1}$ . Если  $a + b < 0$ , то  $\int_0^1 |a + \tau b|^{p-2} d\tau = \frac{|a+b|^{p-1} + a^{p-1}}{|b|(p-1)} := \psi_2(a, b)$ .

То есть  $\psi_2(a, b) \geq \min_a \psi_2(a, b) = \psi_2\left(\frac{|b|}{2}, b\right) = \frac{|b|^{p-2}}{2^{p-2}(p-1)}$ . Таким образом,

$$\int_0^1 |a + \tau b|^{p-2} d\tau \geq \frac{|b|^{p-2}}{2^{p-2}(p-1)}.$$

*Доказательство.* Согласно лемме 1.9 оператор  $A_R$  деминепрерывен и ограничен. Деминепрерывный, сильно монотонный оператор  $A_R : \dot{W}_p^1(Q) \rightarrow W_q^{-1}(Q)$  является гомеоморфизмом, см. [20, следствие 1.1.1]. Существование и единственность обобщенного решения задачи (1.1)-(1.2) доказаны.

Пусть  $u_1 \in \dot{W}_p^1(Q)$  и  $u_2 \in \dot{W}_p^1(Q)$  — обобщенные решения задачи (1.1), (1.2) при правых частях  $f_1$  и  $f_2 \in W_q^{-1}(Q)$ , соответственно. Тогда

$$\langle A_R u_1 - A_R u_2, u_1 - u_2 \rangle = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle.$$

Используем оценку сильной монотонности оператора (1.29):

$$c_9 \|u_1 - u_2\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^p \leq \langle A_R u_1 - A_R u_2, u_1 - u_2 \rangle = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle \leq \|f_1 - f_2\|_{W_q^{-1}(Q)} \|u_1 - u_2\|_{\dot{W}_p^1(Q)},$$

т. е.

$$\|u_1 - u_2\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^{p-1} \leq \frac{1}{c_9} \|f_1 - f_2\|_{W_q^{-1}(Q)}.$$

Из этой оценки следует (1.30). □

#### 1.4. ОПЕРАТОРЫ С ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИЕЙ И $(S_+)$ -ОПЕРАТОРЫ. СУЩЕСТВОВАНИЕ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ

В этом разделе рассмотрим ситуацию, когда алгебраическому условию сильной эллиптичности удовлетворяет только «главная часть» оператора, содержащая производные только старшего порядка. Дифференциальные квазилинейные уравнения с подобными операторами были рассмотрены в 60-е годы XX-го века Ю. А. Дубинским, он же сформулировал для них алгебраическое условие сильной эллиптичности и рассмотрел, каким условиям должна удовлетворять остальная часть квазилинейного дифференциального оператора. Построенное в этом разделе условие сильной эллиптичности для квазилинейного дифференциально-разностного оператора при отсутствии сдвигов вырождается в условие, предложенное Ю. А. Дубинским, см. [20]. Позже алгебраическое условие сильной эллиптичности было использовано для изучения дифференциальных операторов, обладающих свойством  $(S_+)$ , см. [57] и библиографию. Слабо непрерывные операторы<sup>1</sup> с полуограниченной вариацией и  $(S_+)$ -операторы являются псевдомонотонными, см. [57, гл. I, §1]. Сильно монотонный оператор является оператором с полуограниченной вариацией. Кроме того, сильно монотонный оператор обладает свойством  $(S_+)$ , см., например, [15, 57].

**Определение 1.6.** Оператор  $\mathcal{A} : X \rightarrow X^*$  называется *оператором с полуограниченной вариацией*, если существует непрерывная функция  $C$  такая, что для всех  $u, y \in X$  таких, что  $\|u\|_X \leq r_1, \|y\|_X \leq r_1$ ,

$$\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}y, u - y \rangle \geq -C(r_1; \|u - y\|'_X), \tag{1.31}$$

где  $\tau^{-1}C(r_1, \tau r_2) \rightarrow +0$  при  $\tau \rightarrow 0$  для всех  $r_1, r_2 > 0$ ,  $\|\cdot\|'_X$  — компактная полунорма относительно  $\|\cdot\|_X$ .

При  $X = \dot{W}_p^1(Q)$  в качестве  $\|\cdot\|'_X$  удобно рассматривать  $\|\cdot\|_{L_p(Q)}$ .  $\dot{W}_p^1(Q) \subset L_p(Q)$  компактно, см. [72, гл. I, §8, пп. 2].

**Определение 1.7.** Оператор  $\mathcal{A} : X \rightarrow X^*$  называется *коэрцитивным*, если существует непрерывная функция  $c : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}$  такая, что

$$\langle \mathcal{A}u, u \rangle \geq c(\|u\|_X) \|u\|_X, \tag{1.32}$$

и  $c(s) \rightarrow \infty$  при  $s \rightarrow \infty$ .

<sup>1</sup>В [57, гл. I, §1] под общим термином «слабо непрерывные» понимают «деминепрерывные» для операторов, обладающих свойством  $(S_+)$ , и «радиально непрерывные» для операторов с полуограниченной вариацией. Напомним,  $\mathcal{A}$  радиально непрерывен, если для любых  $u, y, v \in X$  непрерывна функция  $\tau \mapsto \langle \mathcal{A}(u + \tau y), v \rangle$ . Подробное доказательство свойств операторов с полуограниченной вариацией см. в [24].

**Определение 1.8.** Оператор  $\mathcal{A} : X \rightarrow X^*$  называется *псевдомонотонным*, если для любой слабо сходящейся в  $X$  последовательности  $u_m \rightharpoonup u$  в  $X$  при выполнении оценки

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}u_m, u_m - u \rangle \leq 0 \quad (1.33)$$

справедливо неравенство

$$\underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}u_m, u_m - \xi \rangle \geq \langle \mathcal{A}u, u - \xi \rangle \quad \forall \xi \in X. \quad (1.34)$$

**Определение 1.9.** Пусть  $u_m \rightharpoonup u$  слабо в  $X$  и справедлива оценка (1.33). Если при этом мы имеем сильную сходимости  $u_m \rightarrow u$  в  $X$ , то  $\mathcal{A} : X \rightarrow X^*$  обладает свойством  $(S_+)$ .

**Лемма 1.11.** Пусть  $p \in [2, \infty)$  и  $R_s + R_s^* > 0$ . Пусть также оператор  $A$ , заданный формулой (1.3), имеет измеримые по  $x \in Q$  и непрерывные по  $\xi_j \in \mathbb{R}$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) коэффициенты  $A_i(x, \xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ , удовлетворяющие оценке (1.6). Более того, пусть существуют производные  $A_{ij}(x, \xi)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , удовлетворяющие оценке (1.26), а также алгебраическому условию сильной эллиптичности для всех  $s, \zeta \in \mathbb{R}^{N(s) \times (n+1)}$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^{N(s) \times n}$  и почти всех  $x \in \overline{Q_{s1}}$ :

$$\sum_{1 \leq m, l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i, j \leq n} r_{ml}^s A_{ij}(x + h_{sm}, \zeta_{m \cdot}) \eta_{lj} \eta_{mi} \geq c_{11} \sum_{1 \leq m \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} |\zeta_{mi}|^{p-2} |\eta_{mi}|^2, \quad (1.35)$$

где  $c_{11} > 0$  не зависит от  $x, \zeta$  и  $\eta$ .

Тогда  $A_R : \dot{W}_p^1(Q) \rightarrow W_q^{-1}(Q)$  обладает свойством  $(S_+)$ .

*Доказательство.* Сначала покажем, что «главная часть» оператора  $A_R$ , содержащая слагаемые со старшими производными, сильно монотонна. Выделим три слагаемых:

$$\begin{aligned} \langle A_R u - A_R y, u - y \rangle &= \langle \mathcal{A}_R^1(u, u) - \mathcal{A}_R^1(u, y), u - y \rangle + \\ &+ \langle \mathcal{A}_R^1(u, y) - \mathcal{A}_R^1(y, y), u - y \rangle + \langle \mathcal{A}_R^0 u - \mathcal{A}_R^0 y, u - y \rangle, \end{aligned} \quad (1.36)$$

где

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_R^0 u, y \rangle &= \int_Q A_0(x, R_Q u, \nabla R_Q u) y \, dx, \\ \langle \mathcal{A}_R^1(u, y), v \rangle &= \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q A_i(x, R_Q u, \nabla R_Q y) \partial_i v \, dx. \end{aligned}$$

Заметим, что в силу условий (1.35), (1.26) оператор  $\mathcal{A}_R^1(u, \cdot) : \dot{W}_p^1(Q) \rightarrow W_q^{-1}(Q)$  удовлетворяет условиям леммы 1.10 (с нулевыми функциональными коэффициентами при  $i = 0$ ). То есть, аналогично (1.29) получаем

$$\langle \mathcal{A}_R^1(u, u) - \mathcal{A}_R^1(u, y), u - y \rangle \geq c_{11} c_8 c_4 \|u - y\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^p = c_{12} \|u - y\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^p. \quad (1.37)$$

Пусть  $u_m \rightharpoonup u$  слабо в  $\dot{W}_p^1(Q)$  и  $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \langle A_R u_m, u_m - u \rangle \leq 0$ . В силу компактности вложения  $\dot{W}_p^1(Q) \subset L_p(Q)$ ,  $u_m \rightarrow u$  в  $L_p(Q)$ . В силу непрерывности оператора  $R_Q$ ,  $R_Q u_m \rightharpoonup R_Q u$  в  $W_p^1(Q)$  и  $R_Q u_m \rightarrow R_Q u$  в  $L_p(Q)$ . Из сходимости  $R_Q u_m \rightarrow R_Q u$  в  $L_p(Q)$  и условия (1.6) следует, что

$$A_i(\cdot, R_Q u_m, \nabla R_Q u) \rightarrow A_i(\cdot, R_Q u, \nabla R_Q u)$$

в  $L_q(Q)$ , см. [29, гл. 1, §2, п. 4]. Так как  $u_m \rightharpoonup u$  слабо в  $\dot{W}_p^1(Q)$ , то  $\lim_{m \rightarrow \infty} \langle A_R u, u_m - u \rangle = 0$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \langle A_R u_m, u_m - u \rangle &= \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \langle A_R u_m - A_R u, u_m - u \rangle = \\ &= \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \left\{ \langle \mathcal{A}_R^1(u_m, u_m) - \mathcal{A}_R^1(u_m, u), u_m - u \rangle + \langle \mathcal{A}_R^1(u_m, u) - \mathcal{A}_R^1(u, u), u_m - u \rangle + \langle \mathcal{A}_R^0 u_m - \mathcal{A}_R^0 u, u_m - u \rangle \right\}. \end{aligned}$$

Рассмотрим второе слагаемое под знаком предела:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}_R^1(u_m, u) - \mathcal{A}_R^1(u, u), u_m - u \rangle =$$

$$= \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q (A_i(x, R_Q u_m, \nabla R_Q u) - A_i(x, R_Q u, \nabla R_Q u)) \partial_i (u_m - u) dx = 0,$$

так как подынтегральными функциями являются произведения, первый сомножитель которых принадлежит последовательности функций, сходящихся к нулю в пространстве  $L_q(Q)$ , а второй — последовательности функций, слабо сходящихся к нулю в  $L_p(Q)$ . Для третьего слагаемого

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}_R^0 u_m - \mathcal{A}_R^0 u, u_m - u \rangle &= \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_Q (A_0(x, R_Q u_m, \nabla R_Q u_m) - A_0(x, R_Q u, \nabla R_Q u)) (u_m - u) dx = 0, \end{aligned}$$

поскольку подынтегральной функцией является произведение, первый сомножитель которого принадлежит ограниченной в  $L_q(Q)$  последовательности, а второй — последовательности функций, сходящихся к нулю в  $L_p(Q)$ . То есть,

$$0 \geq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \langle A_R u_m, u_m - u \rangle = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}_R^1(u_m, u_m) - \mathcal{A}_R^1(u_m, u), u_m - u \rangle.$$

Воспользуемся оценкой (1.37):

$$0 \geq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \langle A_R u_m, u_m - u \rangle = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}_R^1(u_m, u_m) - \mathcal{A}_R^1(u_m, u), u_m - u \rangle \geq \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} c_{12} \|u_m - u\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^p \geq 0,$$

т. е.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} c_{12} \|u_m - u\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^p = 0.$$

Доказана сходимость по норме последовательности  $u_m \rightarrow u$  в  $\dot{W}_p^1(Q)$ , т. е. оператор  $A_R$  обладает свойством  $(S_+)$ .  $\square$

**Лемма 1.12.** Пусть выполнены условия леммы 1.11 и

$$|A_i(x, \xi_0, 0, \dots, 0)| \leq g_2(x) + c_{13} |\xi_0|^{p'-1} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.38)$$

$$|A_0(x, \xi)| \leq g_2(x) + c_{13} \sum_{0 \leq i \leq n} |\xi_i|^{p'-1}, \quad (1.39)$$

где  $2 - 1/p < p' < p$ ,  $g_2 \in L_q(Q)$ ,  $c_{13} > 0$ . Тогда оператор  $A_R : \dot{W}_p^1(Q) \rightarrow W_q^{-1}(Q)$  коэрцитивный.

*Доказательство.* Распишем выражение

$$\begin{aligned} \langle A_R u, u \rangle &= \sum_{0 \leq i \leq n} \int_Q A_i(x, R_Q u, \nabla R_Q u) \partial_i u dx = \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q (A_i(x, R_Q u, \nabla R_Q u) - A_i(x, R_Q u, 0)) \partial_i u dx + \\ &\quad + \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q A_i(x, R_Q u, 0) \partial_i u dx + \int_Q A_0(x, R_Q u, \nabla R_Q u) u dx. \end{aligned} \quad (1.40)$$

Для первого слагаемого в силу (1.35) получена оценка (1.37):

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q (A_i(x, R_Q u, \nabla R_Q u) - A_i(x, R_Q u, 0)) \partial_i u dx \geq c_{12} \|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^p. \quad (1.41)$$

Оценим второе слагаемое, используя (1.38) и неравенство Гёльдера:

$$\left| \int_Q A_i(x, R_Q u, 0) \partial_i u dx \right| \leq \int_Q |g_2(x) + c_{15} |R_Q u|^{p'-1}| |\partial_i u| dx \leq \int_Q |g_2(x)| |\partial_i u| dx +$$

$$\begin{aligned}
& + c_{13} \int_Q |R_Q u|^{p'-1} |\partial_i u| dx \leq c_{13} \left( \int_Q |R_Q u|^{(p'-1)q} dx \right)^{1/q} \left( \int_Q |\partial_i u|^p dx \right)^{1/p} + \\
& + \|g_2\|_{L_q(Q)} \|\partial_i u\|_{L_p(Q)} = c_{13} \|R_Q u\|_{L_{\frac{(p'-1)p}{p-1}}(Q)}^{p'-1} \|\partial_i u\|_{L_p(Q)} + \|g_2\|_{L_q(Q)} \|\partial_i u\|_{L_p(Q)}.
\end{aligned}$$

Заметим, что  $1 < (p' - 1)p/(p - 1) = (p' - 1)q < p$  при  $(2 - 1/p) < p' < p$ . Используем непрерывность вложения пространств Лебега  $L_{\frac{(p'-1)p}{p-1}}(Q) \subset L_p(Q)$ , а также непрерывность оператора  $R_Q : L_{\frac{(p'-1)p}{p-1}}(Q) \rightarrow L_{\frac{(p'-1)p}{p-1}}(Q)$ :

$$\begin{aligned}
\left| \int_Q A_i(x, R_Q u, 0) \partial_i u dx \right| & \leq c_{14} \|R_Q u\|_{L_p(Q)}^{p'-1} \|\partial_i u\|_{L_p(Q)} + \|g_2\|_{L_q(Q)} \|\partial_i u\|_{L_p(Q)} \leq \\
& \leq c_{15} \|u\|_{L_p(Q)}^{p'-1} \|\partial_i u\|_{L_p(Q)} + \|g_2\|_{L_q(Q)} \|\partial_i u\|_{L_p(Q)} \leq \\
& \leq \frac{c_{15} \varepsilon^p}{p} \|\partial_i u\|_{L_p(Q)}^p + \frac{c_{15}}{\varepsilon^q q} \|u\|_{L_p(Q)}^{(p'-1)q} + c_{16} \|\partial_i u\|_{L_p(Q)}.
\end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\left| \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q A_i(x, R_Q u, 0) \partial_i u dx \right| & \leq \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{c_{15} \varepsilon^p}{p} \|\partial_i u\|_{L_p(Q)}^p + c_{16} \sum_{1 \leq i \leq n} \|\partial_i u\|_{L_p(Q)} + \frac{c_{15} n}{\varepsilon^q q} \|u\|_{L_p(Q)}^{(p'-1)q} = \\
& = \frac{c_{15} \varepsilon^p}{p} \|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^p + c_{16} \|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)} + c_{17} \|u\|_{L_p(Q)}^{(p'-1)q} \leq \\
& \leq \frac{c_{15} \varepsilon^p}{p} \|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^p + c_{16} \|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)} + c_{17} c_{18}^{(p'-1)q} \|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^{(p'-1)q}, \quad (1.42)
\end{aligned}$$

где  $c_{17} = n c_{15} / (\varepsilon^q q)$ , и в силу неравенства Фридрикса

$$\|u\|_{L_p(Q)} \leq c_{18} \|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)}. \quad (1.43)$$

Аналогично для последнего слагаемого (1.40), используем непрерывность вложения  $L_{p'}(Q) \subset L_p(Q)$  для  $1 < p' < p$ , а также непрерывность оператора  $R_Q : L_{p'}(Q) \rightarrow L_{p'}(Q)$ :

$$\begin{aligned}
\left| \int_Q A_0(x, R_Q u, \nabla R_Q u) u dx \right| & \leq \int_Q |A_0(x, R_Q u, \nabla R_Q u)| |u| dx \leq \\
& \leq \int_Q \left| g_2(x) + c_{13} |R_Q u|^{p'-1} + c_{13} \sum_{1 \leq i \leq n} |\partial_i R_Q u|^{p'-1} \right| |u| dx \leq \\
& \leq \int_Q |g_2| |u| dx + c_{13} \int_Q |R_Q u|^{p'-1} |u| dx + c_{13} \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q |\partial_i R_Q u|^{p'-1} |u| dx \leq \\
& \leq c_{16} \|u\|_{L_p(Q)} + c_{13} \|u\|_{L_{p'}(Q)} \|R_Q u\|_{L_{p'}(Q)}^{p'-1} + c_{13} \sum_{1 \leq i \leq n} \|\partial_i R_Q u\|_{L_{p'}(Q)}^{p'-1} \|u\|_{L_{p'}(Q)} \leq \\
& \leq c_{16} \|u\|_{L_p(Q)} + c_{19} \|u\|_{L_p(Q)}^{p'} + c_{20} \sum_{1 \leq i \leq n} \|\partial_i u\|_{L_p(Q)}^{p'-1} \|u\|_{L_p(Q)} \leq \\
& \leq c_{16} \|u\|_{L_p(Q)} + c_{19} \|u\|_{L_p(Q)}^{p'} + \frac{c_{20}(p' - 1)}{p'} \sum_{1 \leq i \leq n} \|\partial_i u\|_{L_p(Q)}^{p'} + \frac{c_{20}}{p'} \|u\|_{L_p(Q)}^{p'} \leq \\
& \leq c_{16} c_{18} \|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)} + c_{21} \|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^{p'}, \quad (1.44)
\end{aligned}$$

где  $\|u\|_{L_{p'}(Q)} \leq c_{22}\|u\|_{L_p(Q)}$  в силу непрерывности вложения пространств Лебега при  $p' < p$  и  $c_{21} = c_{18}^{p'} c_{22}^{p'} (c_{19} + c_{20}/p') + c_{20}(p' - 1)/p'$ , использовано также неравенство Фридрихса (1.43). Выберем  $\varepsilon$  таким образом, что  $c_{15}\varepsilon^p/p = c_{12}/2$ , и подставим оценки (1.41), (1.42) и (1.44) в (1.40):

$$\begin{aligned} \langle A_R u, u \rangle &\geq c_{12}\|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^p - \frac{c_{15}\varepsilon^p}{p}\|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^p - c_{16}\|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)} - c_{17}c_{18}^{(p'-1)q}\|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^{(p'-1)q} - c_{16}c_{18}\|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)} - \\ &- c_{21}\|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^{p'} \geq \frac{c_{12}}{2}\|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^p - c_{16}(1 + c_{18})\|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)} - c_{23}\|u\|_{L_p(Q)}^{(p'-1)q} - c_{21}\|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^{p'}. \end{aligned} \quad (1.45)$$

Первое слагаемое в правой части неравенства (1.45) положительно и имеет степенной рост порядка  $p$ , а остальные (отрицательные) слагаемые имеют степенной рост порядков меньше  $p$ . Оператор  $A_R$  коэрцитивен.  $\square$

**Теорема 1.2.** Пусть  $R_s^* + R_s > 0$  для всех  $s$ , а также выполнены условия интегрируемости (1.6), дифференцируемости (1.26) для  $i, j = 1, \dots, n$ , сильной эллиптичности (1.35) и коэрцитивности (1.38)-(1.39),  $p \in [2, \infty)$ . Тогда для любого  $f \in W_q^{-1}(Q)$  существует обобщенное решение задачи (1.1), (1.2)  $u \in \dot{W}_p^1(Q)$ , множество решений задачи (1.1), (1.2) слабо компактно.

*Доказательство.* Из условий теоремы следует, что  $A_R$  — деминепрерывный (см. лемму 1.9) и коэрцитивный (см. лемму 1.12) оператор, обладающий свойством  $(S_+)$  (см. лемму 1.11), т. е. псевдомонотонный. Согласно [33, теорема 2.7, гл. 2] существует обобщенное решение задачи (1.1), (1.2)  $u \in \dot{W}_p^1(Q)$ .

Ограниченность множества решений следует из коэрцитивности оператора  $A_R$ , поскольку для всех решений выполняется неравенство:

$$\|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^{-1} \langle A_R u, u \rangle \leq \|f\|_{W_q^{-1}(Q)}.$$

Слабая компактность множества решений следует из того, что оператор в рассматриваемом уравнении обладает свойством  $(S_+)$ . Докажем это. Пусть последовательность  $\{u_n\}$  принадлежит множеству решений. Пусть  $u$  — предельная точка множества  $\{u_n\}$  в слабой топологии  $\dot{W}_p^1(Q)$ . С точностью до подпоследовательностей,  $u_n \rightharpoonup u$  в  $\dot{W}_p^1(Q)$ . В то же время,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle A_R u_n, u_n - u \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, u_n - u \rangle = 0.$$

Согласно свойству  $(S_+)$ ,  $u_n \rightarrow u$  в  $\dot{W}_p^1(Q)$ . Из деминепрерывности оператора следует, что  $A_R u_n \rightharpoonup A_R u$  в  $W_q^{-1}(Q)$ ,  $u$  удовлетворяет интегральному тождеству (1.8).  $\square$

**Лемма 1.13.** Пусть  $p \geq 2$ ,  $R_s^* + R_s > 0$ , а также существуют непрерывные производные  $A_{ij}(x, \xi)$ , удовлетворяющие алгебраическому условию сильной эллиптичности (1.35) и оценке (1.26) для всех  $i, j = 0, 1, \dots, n$ . Тогда  $A_R : \dot{W}_p^1(Q) \rightarrow W_q^{-1}(Q)$  — оператор с полуограниченной вариацией.

*Доказательство.* Как и в доказательстве леммы 1.12, разобьем оператор на три слагаемых, см. (1.36), и получим для первого слагаемого правой части (1.36) оценку (1.37).

Оценим второе слагаемое правой части (1.36). Воспользуемся дифференцируемостью коэффициентов, формулой Тейлора и теоремой о среднем:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_R^1(u, y) - \mathcal{A}_R^1(y, y), u - y \rangle &= \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q (A_i(x, R_Q u, \nabla R_Q y) - A_i(x, R_Q y, \nabla R_Q y)) \partial_i(u - y) dx = \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q \int_0^1 A_{i0}(x, R_Q u + \tau R_Q(y - u), \nabla R_Q y) d\tau R_Q(u - y) \partial_i(u - y) dx = \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q A_{i0}(x, R_Q u + \hat{\tau} R_Q(y - u), \nabla R_Q y) R_Q(u - y) \partial_i(u - y) dx \end{aligned} \quad (1.46)$$

для некоторого  $\hat{\tau} \in [0, 1]$ . Заметим, что интегралы по  $Q$  существуют в силу условия (1.26). Оценим подинтегральное выражение, используя (1.26):

$$A_{i0}(x, R_Q u + \hat{\tau} R_Q(y - u), \nabla R_Q y) \leq g_1(x) + c_7 |R_Q u + \hat{\tau} R_Q(y - u)|^{p-2} + c_7 \sum_{1 \leq j \leq n} |\partial_j R_Q y|^{p-2}.$$

Подставим полученное выражение в (1.46) и применим неравенство Гёльдера:

$$\begin{aligned} & \langle \mathcal{A}_R^1(u, y) - \mathcal{A}_R^1(y, y), u - y \rangle \leq \\ & \leq \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q \left( g_1(x) + c_7 |R_Q u + \hat{\tau} R_Q(y - u)|^{p-2} + c_7 \sum_{1 \leq j \leq n} |\partial_j R_Q y|^{p-2} \right) R_Q(u - y) \partial_i(u - y) dx \leq \\ & \leq \sum_{1 \leq i \leq n} \|R_Q(u - y)\|_{L_p(Q)} \|\partial_i(u - y)\|_{L_p(Q)} \times \\ & \times \left( \|g_1\|_{L_{p/(p-2)}(Q)} + c_7 \left( \|R_Q u\|_{L_p(Q)}^{p-2} + \|R_Q y\|_{L_p(Q)}^{p-2} + \|R_Q y\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^{p-2} \right) \right). \end{aligned}$$

Здесь учтено, что  $|R_Q u + \hat{\tau} R_Q(y - u)|^{p-2} \leq |R_Q u|^{p-2} + |R_Q y|^{p-2}$  при  $p \geq 2$ . Используем также неравенства Фридрикса (1.43) и ограниченность оператора  $R_Q$  (1.22):

$$\|R_Q u\|_{L_p(Q)} \leq c_{18} c_5 \|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)} \leq c_{18} c_5 r_1, \quad \|R_Q y\|_{L_p(Q)} \leq c_{18} c_5 r_1.$$

Тогда

$$\|R_Q u\|_{L_p(Q)}^{p-2} + \|R_Q y\|_{L_p(Q)}^{p-2} + \|R_Q y\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^{p-2} \leq c_5^{p-2} (2c_{18}^{p-2} + 1) r_1^{p-2}.$$

Для вспомогательной функции

$$\hat{c}_1(r_1) := \|g_1\|_{L_{p/(p-2)}(Q)} + 2c_7 c_5^{p-2} (c_{18}^{p-2} + 1) r_1^{p-2}$$

имеем, что

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_R^1(u, y) - \mathcal{A}_R^1(y, y), u - y \rangle & \leq \hat{c}_1(r_1) \sum_{1 \leq i \leq n} \|R_Q(u - y)\|_{L_p(Q)} \|\partial_i(u - y)\|_{L_p(Q)} \leq \\ & \leq c_5 \hat{c}_1(r_1) \|u - y\|_{L_p(Q)} \|u - y\|_{\dot{W}_p^1(Q)}. \end{aligned} \quad (1.47)$$

Аналогично оценим третье слагаемое правой части (1.36):

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_R^0 u - \mathcal{A}_R^0 y, u - y \rangle & = \int_Q A_{00}(x, R_Q u + \hat{\tau}_0 R_Q(y - u), \nabla R_Q u) R_Q(u - y) (u - y) dx + \\ & + \sum_{1 \leq j \leq n} \int_Q A_{0j}(x, R_Q u, \nabla R_Q u + \hat{\tau}_j \partial_i R_Q(y - u)) \partial_j R_Q(u - y) (u - y) dx. \end{aligned}$$

Поскольку

$$|A_{0j}(x, R_Q y, \nabla(R_Q u + \hat{\tau}_j R_Q(y - u)))| \leq g_1(x) + c_7 |\partial_j R_Q u|^{p-2} + c_7 \sum_{0 \leq k \leq n} |\partial_k R_Q y|^{p-2},$$

то

$$\begin{aligned} \|A_{0j}(x, R_Q y, \nabla(R_Q u + \hat{\tau}_j R_Q(y - u)))\|_{L_{p/(p-2)}(Q)} & \leq \\ & \leq \|g_1\|_{L_{p/(p-2)}(Q)} + c_7 \|R_Q u\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^{p-2} + c_7 \|R_Q y\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^{p-2} \leq \hat{c}_1(r_1). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{A}_R^0 u - \mathcal{A}_R^0 y, u - y \rangle| & \leq \sum_{0 \leq j \leq n} \hat{c}_1(r_1) \|\partial_i R_Q(u - y)\|_{L_p(Q)} \|u - y\|_{L_p(Q)} \leq \\ & \leq c_5 \hat{c}_1(r_1) \|u - y\|_{\dot{W}_p^1(Q)} \|u - y\|_{L_p(Q)} + c_5 \hat{c}_1(r_1) \|u - y\|_{L_p(Q)}^2. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Подставляя оценки (1.37), (1.47) и (1.48) в (1.36), получаем

$$\begin{aligned} \langle A_R u - A_R y, u - y \rangle &\geq c_{12} \|u - y\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^p - c_5 \widehat{c}_1(r_1) \|u - y\|_{L_p(Q)} \|u - y\|_{\dot{W}_p^1(Q)} - \\ &- c_5 \widehat{c}_1(r_1) \|u - y\|_{\dot{W}_p^1(Q)} \|u - y\|_{L_p(Q)} - c_5 \widehat{c}_1(r_1) \|u - y\|_{L_p(Q)}^2 \geq c_{12} \|u - y\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^p - \\ &- 2c_5 \widehat{c}_1(r_1) \frac{\varepsilon^p}{p} \|u - y\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^p - 2c_5 \widehat{c}_1(r_1) \frac{1}{\varepsilon^q q} \|u - y\|_{L_p(Q)}^q - c_5 \widehat{c}_1(r_1) \|u - y\|_{L_p(Q)}^2. \end{aligned}$$

Пусть  $\varepsilon^p = \frac{c_{12} p}{4c_5 \widehat{c}_1(r_1)}$ . Тогда

$$\langle A_R u - A_R y, u - y \rangle \geq \frac{c_{12}}{2} \|u - y\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^p - 2c_5 \widehat{c}_1(r_1) \frac{1}{\varepsilon^q q} \|u - y\|_{L_p(Q)}^q - c_5 \widehat{c}_1(r_1) \|u - y\|_{L_p(Q)}^2. \quad (1.49)$$

То есть

$$\begin{aligned} \langle A_R u - A_R y, u - y \rangle &\geq -2c_5 \widehat{c}_1(r_1) \frac{1}{\varepsilon^q q} \|u - y\|_{L_p(Q)}^q - c_5 \widehat{c}_1(r_1) \|u - y\|_{L_p(Q)}^2 = \\ &= -\frac{2}{q} \left( \frac{4}{c_{12} p} \right)^{1/(p-1)} (c_5 \widehat{c}_1(r_1))^q \|u - y\|_{L_p(Q)}^q - c_5 \widehat{c}_1(r_1) \|u - y\|_{L_p(Q)}^2 =: -C(r_1; \|u - y\|_{L_p(Q)}). \end{aligned}$$

Полученная функция удовлетворяет требованиям определения оператора с полуограниченной вариацией.  $\square$

**Теорема 1.3.** Пусть  $R_s^* + R_s > 0$  для всех  $s$ , а также оператор  $A$ , заданный формулой (1.3), имеет измеримые по  $x \in Q$  и непрерывные по  $\xi_j \in \mathbb{R}$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) коэффициенты  $A_i(x, \xi)$ ,  $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ , удовлетворяющие оценке интегрируемости (1.6), дифференцируемости (1.26) для  $i, j = 0, \dots, n$ , условию сильной эллиптичности (1.35) и условию коэрцитивности (1.38)-(1.39),  $p \in [2, \infty)$ .

Тогда для любого  $f \in W_q^{-1}(Q)$  существует обобщенное решение задачи (1.1), (1.2)  $u \in \dot{W}_p^1(Q)$ , множество решений задачи (1.1), (1.2) ограничено и слабо замкнуто.

*Доказательство.* Из условий теоремы следует, что  $A_R$  — деминепрерывный (см. лемму 1.9), коэрцитивный оператор с полуограниченной вариацией (см. лемму 1.13). Следовательно, обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) существует, см. [20, теорема 3.1, гл. 2, §3].

С другой стороны, из условий теоремы 1.3 следует выполнение условий теоремы 1.2, что также доказывает данное утверждение.  $\square$

**Замечание 1.2.** При рассмотрении дифференциальных уравнений с оператором с полуограниченной вариацией в работе [20] вместо условий (1.38)-(1.39) рассматривались оценки

$$|A_{i0}(x, \xi)| \leq g_1(x) + c_{19} \sum_{0 \leq i \leq n} |\xi_i|^{p'-2} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (1.50)$$

$$|A_{0j}(x, \xi)| \leq g_1(x) + c_{19} \sum_{0 \leq i \leq n} |\xi_i|^{p'-2} \quad (j = 0, 1, \dots, n), \quad (1.51)$$

где  $g_1 \in L_{p/(p-2)}(Q)$ ,  $c_{19} > 0$ ,  $p' < p$ . Очевидно, что при выполнении этих оценок справедливы оценки (1.38)-(1.39), оператор  $A_R$  коэрцитивен.

### 1.5. УСЛОВИЕ СИЛЬНОЙ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ ДЛЯ СИММЕТРИЧЕСКОГО РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА

Для дифференциальных операторов рассматривались также условия сильной эллиптичности при другой правой части, чем в (1.25), см., например, [57]. Аналогичные условия можно построить для дифференциально-разностных операторов. При этом могут измениться условия, гарантирующие коэрцитивность оператора  $A_R$ .

В самом общем случае в условии сильной эллиптичности для дифференциально-разностного оператора обязательно присутствуют коэффициенты матрицы  $R_s$  или  $R_s^{-1}$ , см. далее. Поскольку каждую матрицу можно неединственным способом разложить на сумму произведений матриц, то и левая часть в условии сильной эллиптичности может быть модифицирована в соответствии с дополнительными данными о разностном операторе. Тогда в формулах будут коэффициенты

матриц, использованных в разложении. В качестве иллюстрации этого построим условие сильной эллиптичности для симметрического разностного оператора.

Для упрощения изложения рассмотрим дифференциальный оператор, содержащий только старшие производные:

$$Au(x) = - \sum_{1 \leq i \leq n} \partial_i A_i(x, \partial_1 u, \dots, \partial_n u). \quad (1.52)$$

Введем вспомогательные матрицы, существующие в силу симметричности и положительности матриц  $R_s$ :

$$T_s = \sqrt{R_s} \equiv \{t_{ml}^s\}_{m,l=1}^{N(s)}, \quad \widehat{T}_s = \sqrt{R_s^{-1}} \equiv \{\widehat{t}_{ml}^s\}_{m,l=1}^{N(s)}.$$

**Лемма 1.14.** Пусть  $p \in [2, \infty)$ ,  $R_s > 0$  — симметрические матрицы, соответствующие разностному оператору  $R_Q$ . Пусть дифференциальный оператор  $A$ , см. (1.52), задан дифференцируемыми коэффициентами  $A_i(x, \xi)$ , измеримыми для п.в.  $x \in \overline{Q}$ , непрерывными по всем  $\xi \in \mathbb{R}^n$ , для производных справедлива оценка роста (1.26) и для любых  $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{N(s) \times n}$  выполнено алгебраическое условие сильной эллиптичности

$$\sum_{1 \leq m, l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \widehat{t}_{lm}^s A_{ij}(x + h_{sm}, \zeta_m) t_{ml}^s \eta_j \eta_{mi} \geq c_{20} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} \left| \sum_{1 \leq m \leq N(s)} \widehat{t}_{lm}^s \zeta_{mi} \right|^{p-2} |\eta_i|^2, \quad (1.53)$$

где  $c_{20} > 0$  не зависит от  $x, \zeta$  и  $\eta$ . Тогда оператор  $A_R : \mathring{W}_p^1(Q) \rightarrow W_q^{-1}(Q)$  сильно монотонен.

*Доказательство.* Сначала отметим, что в силу оценки (1.26) справедлива оценка (1.6), т. е.  $A_R$  — деминепрерывный, см. лемму 1.9.

Пусть  $w = R_Q(u - y)$  и  $v = R_Q y$ , где  $u, y \in \mathring{W}_p^1(Q)$ . Согласно лемме 1.6 существует ограниченный обратный оператор  $R_Q^{-1} : L_p(Q) \rightarrow L_p(Q)$ . Из равенства (1.7) и леммы 1.5 следует, что

$$\begin{aligned} \langle A_R u - A_R y, u - y \rangle &= \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q (A_i(x, \nabla R_Q u) - A_i(x, \nabla R_Q y)) (\partial_i u - \partial_i y) dx = \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q (A_i(x, \nabla v + \nabla w) - A_i(x, \nabla v)) R_Q^{-1} \partial_i w dx = I_1. \end{aligned} \quad (1.54)$$

Используя формулу (1.18), распишем

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_{i,s} \int_{\bigcup_l Q_{sl}} P_s (A_i(x, \nabla(v+w)) - A_i(x, \nabla v)) U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w dx = \\ &= \sum_{i,s} \int_{Q_{s1}} \left( U_s P_s (A_i(x, \nabla(v+w)) - A_i(x, \nabla v)), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w \right) dx, \end{aligned}$$

где  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^{N(s)}$ . В силу дифференцируемости коэффициентов  $A_i$  и справедливости формулы Тейлора

$$I_1 = \sum_{s,i,j} \int_{Q_{s1}} \left( U_s P_s \int_0^1 A_{ij}(x, \nabla v + \tau \nabla w) d\tau \partial_j w, R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w \right) dx.$$

Заметим, что интегралы по  $Q_{s1}$  существуют в силу (1.26). Распишем подынтегральное выражение, учитывая симметричность и положительную определенность матриц  $R_s$  и  $R_s^{-1}$ :

$$\begin{aligned} & \left( U_s P_s \int_0^1 A_{ij}(x, \nabla v + \tau \nabla w) d\tau \partial_j w, R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w \right) = \\ & = \left( \sqrt{R_s^{-1}} U_s P_s \int_0^1 A_{ij}(x, \nabla v + \tau \nabla w) d\tau \partial_j w, \sqrt{R_s^{-1}} U_s P_s \partial_i w \right). \end{aligned}$$

По правилу умножения матриц левая часть подынтегрального скалярного произведения может быть представлена в виде

$$\widehat{T}_s U_s P_s \int_0^1 A_{ij}(x, \nabla v + \tau \nabla w) d\tau \partial_j w = \widehat{T}_s \text{diag} \left\{ U_s P_s \int_0^1 A_{ij}(x, \nabla v + \tau \nabla w) d\tau \right\} T_s \left( \widehat{T}_s U_s P_s \partial_j w \right),$$

где

$$\text{diag} \left\{ U_s P_s \int_0^1 A_{ij}(x, \nabla v + \tau \nabla w) d\tau \right\}$$

— диагональная матрица порядка  $N(s) \times N(s)$  с диагональными элементами

$$\int_0^1 A_{ij}(x + h_{sl}, (\nabla v + \tau \nabla w)(x + h_{sl})) d\tau.$$

Обозначим

$$\widehat{\omega}_{lj}^s(x) = \sum_{1 \leq m \leq N(s)} \widehat{t}_{lm}^s \partial_j w(x + h_{sm}) \quad (x \in Q_{s1}; l = 1, \dots, N(s); j = 1, \dots, n). \quad (1.55)$$

Используем алгебраическое условие сильной эллиптичности (1.53):

$$\begin{aligned} I_2 &= \sum_{1 \leq l, m \leq N(s)} \sum_{1 \leq i, j \leq n} \widehat{t}_{lm}^s \int_0^1 A_{ij}(x + h_{sm}, (\nabla v + \tau \nabla w)(x + h_{sm})) d\tau t_{ml}^s \widehat{\omega}_{mj}^s \widehat{\omega}_{li}^s \geq \\ &\geq c_{20} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} \int_0^1 \left| \sum_{1 \leq m \leq N(s)} \widehat{t}_{lm}^s (\partial_i v + \tau \partial_i w)(x + h_{sm}) \right|^{p-2} d\tau |\widehat{\omega}_{li}^s|^2. \end{aligned}$$

Поскольку  $\int_0^1 |a + \tau b|^{p-2} d\tau \geq c_8 |b|^{p-2}$ , то

$$\int_0^1 \left| \sum_{1 \leq m \leq N(s)} \widehat{t}_{lm}^s (\partial_i v + \tau \partial_i w)(x + h_{sm}) \right|^{p-2} d\tau \geq c_8 \left| \sum_{1 \leq m \leq N(s)} \widehat{t}_{lm}^s \partial_i w(x + h_{sm}) \right|^{p-2} = c_8 |\widehat{\omega}_{li}^s|^{p-2}.$$

Следовательно,

$$I_1 \geq c_8 c_{20} \sum_{s,l,i} \int_{Q_{s1}} |\widehat{\omega}_{li}^s|^{p-2} |\widehat{\omega}_{li}^s|^2 dx = c_8 c_{20} \sum_{s,l,i} \|\widehat{\omega}_{li}^s\|_{L_p(Q_{s1})}^p.$$

Дискретный спектр матриц  $\widehat{T}_s$  и  $R_Q$  не содержит 0, т. е.

$$\begin{aligned} c_8 c_{20} \sum_{s,l,i} \|\widehat{\omega}_{li}^s\|_{L_p(Q_{s1})}^p &\geq c_{21} \sum_{s,l,i} \int_{Q_{s1}} |\partial_i w(x + h_{sl})|^p dx = \\ &= c_{25} \|w\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^p = c_{21} \|R_Q(u - y)\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^p \geq c_{21} c_5^{-p} \|u - y\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^p, \quad (1.56) \end{aligned}$$

см. (1.22). Сильная монотонность оператора  $A_R$  доказана.  $\square$

**Теорема 1.4.** Пусть выполнены условия леммы 1.14. Тогда для любого  $f \in W_q^{-1}(Q)$  существует единственное обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) с дифференциальным оператором  $A$ , заданным в (1.52), причем

$$\|u_1 - u_2\|_{\dot{W}_p^1(Q)} \leq c_{10} \|f_1 - f_2\|_{W_q^{-1}(Q)}^{1/(p-1)}, \quad (1.57)$$

где  $u_1$  и  $u_2$  — обобщенные решения задачи (1.1)-(1.2) при правых частях  $f_1$  и  $f_2$  соответственно. Здесь  $c_{10} > 0$  не зависит от  $u_k$  и  $f_k$ ,  $k = 1, 2$ .

Доказательство совпадает с доказательством теоремы 1.1.

Очевидно, что при наличии младших производных в дифференциальном операторе мы получим результаты, аналогичные полученным в разделе 1.4.

## ГЛАВА 2

### СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этой главе задача (1.1)-(1.2), см. раздел 1.1, исследуется при условии, что дифференциальный оператор может являться существенно нелинейным. Будут использованы свойства разбиения области и разностного оператора, см. раздел 1.2. Константы  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 > 0$  определены в разделах 1.1-1.2. Нумерация остальных констант соответствует этой главе, если нет ссылки на формулы из главы 1.

#### 2.1. АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ И СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ

Пусть функции  $A_i, i = 0, 1, \dots, n$ , и матрицы  $R_s$  удовлетворяют следующим условиям:

**(A0) Условие невырожденности:**  $\det R_{s\nu} \neq 0$  ( $\nu = 1, \dots, n_1$ ).

**(A1) Условие интегрируемости:**  $A_i$  — функции типа Каратеодори, т.е.  $A_i(x, \xi)$  измеримы по  $x$  для всех  $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$  и непрерывны по  $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$  для п.в.  $x \in \bar{Q}$ ; более того, для п.в.  $x \in \bar{Q}$  и любых  $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$|A_i(x, \xi)| \leq g(x) + c_1 \sum_{0 \leq i \leq n} |\xi_i|^{p-1}, \quad i = 0, \dots, n, \quad (1.6)$$

где  $c_1 > 0$ ,  $g \in L_q(\Omega_T)$ .

**(A2) Условие коэрцитивности:** для всех  $s$ , п.в.  $x \in \bar{Q}_{s1}$  и любых  $\zeta \in \mathbb{R}^{N(s) \times (n+1)}$ , существуют  $p' \in (1, p)$ ,  $c_6 > 0$  и  $c_7, c_8 \in \mathbb{R}$  такие, что

$$\sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{0 \leq i \leq n} A_i(x + h_{sl}, \zeta_l) (R_s^{-1} \zeta_i)_l \geq c_6 \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} |\zeta_{li}|^p - c_7 \sum_{1 \leq l \leq N(s)} |\zeta_{l0}|^{p'} - c_8. \quad (2.1)$$

**(A3) Условие эллиптичности:** для всех  $s$ , п.в.  $x \in \bar{Q}_{s1}$  и любых  $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{N(s) \times (n+1)}$  таких, что  $\eta_0 = \zeta_0$  и  $\eta \neq \zeta$ , справедлива оценка

$$\sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} (A_i(x + h_{sl}, \zeta_l) - A_i(x + h_{sl}, \eta_l)) (R_s^{-1}(\zeta_i - \eta_i))_l > 0. \quad (2.2)$$

Заметим также, что в случае отсутствия сдвигов (т. е. при  $R_Q = \mathbb{I}$ ) условие **(A2)** трансформируется в условие коэрцитивности для дифференциальных операторов (см. [20, 93], например), а условие **(A3)** является стандартным при исследовании псевдомонотонных дифференциальных операторов (см. [33, 57] и др.), а также дифференциальных операторов, обладающих свойством  $(S_+)$  (см. [57] и др.).

**Лемма 2.1.** Пусть выполнены условия **(A0)**–**(A2)**. Тогда оператор  $A_R : \dot{W}_p^1(Q) \rightarrow W_q^{-1}(Q)$ , заданный формулой (1.7), коэрцитивен.

*Доказательство.* Пусть  $u \in \dot{W}_p^1(Q)$ ,  $w = R_Q u$ . Вследствие условия **(A0)** разностный оператор  $R_Q$  невырожден, т. е. существует ограниченный обратный оператор  $R_Q^{-1} : L_p(Q) \rightarrow L_p(Q)$ , см. лемму 1.6. Следовательно,

$$\begin{aligned} \langle A_R u, u \rangle &= \sum_{0 \leq i \leq n} \int_Q A_i(x, R_Q u, \partial_1 R_Q u, \dots, \partial_n R_Q u) \partial_i u \, dx = \\ &= \sum_{0 \leq i \leq n} \int_Q A_i(x, w, \partial_1 w, \dots, \partial_n w) \partial_i R_Q^{-1} w \, dx = \\ &= \sum_s \sum_{0 \leq i \leq n} \int_{\bigcup_l Q_{sl}} A_i(x, P_s w, P_s \nabla w) (U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w) \, dx = \\ &= \sum_s \sum_{0 \leq i \leq n} \int_{Q_{s1}} (U_s A_i(x, P_s w, P_s \nabla w), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w) \, dx = \\ &= \sum_{s,l} \sum_{0 \leq i \leq n} \int_{Q_{s1}} A_i(x + h_{sl}, (U_s P_s w)_l, \nabla (U_s P_s w)_l) (R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w)_l \, dx. \end{aligned} \quad (2.3)$$

Подставив оценку (2.1) в формулу (2.3), в силу утверждений леммы 1.6 получим, что

$$\begin{aligned} \langle A_R u, u \rangle &= \sum_{0 \leq i \leq n} \int_Q A_i(x, R_Q u, \partial_1 R_Q u, \dots, \partial_n R_Q u) \partial_i u \, dx \geq \\ &\geq c_6 \sum_i \int_Q |\partial_i w|^p \, dx - c_7 \int_Q |w|^{p'} \, dx - c_8 \text{mes}(Q). \end{aligned}$$

Воспользуемся равенством (1.16), оценкой (1.22) для оператора  $R_Q : L_p(Q) \rightarrow L_p(Q)$  и оценкой (1.17) для оператора  $R_Q : L_{p'}(Q) \rightarrow L_{p'}(Q)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \langle A_R u, u \rangle &\geq c_6 c_5^{-p} \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q |\partial_i u|^p \, dx - c_7 c_2^{p'} \int_Q |u|^{p'} \, dx - c_8 \text{mes}(Q) \geq \\ &\geq c_9 \|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^p - c_{10} \|u\|_{L_p(Q)}^{p'} - c_{11}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Из неравенства Фридрихса  $\|u\|_{L_p(Q)} \leq c_{12} \|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)}$  и оценки (2.4) получаем

$$\langle A_R u, u \rangle \geq c_9 \|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^p - c_{10} c_{12} \|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^{p'} - c_{11}, \quad (2.5)$$

где  $c_9 > 0$ , константы  $c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}$  не зависят от  $u$ . И поскольку  $1 < p' < p$ , а  $p > 1$ , то для достаточно больших  $\|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)}$  полученное в правой части (2.5) выражение монотонно возрастает к  $+\infty$  при  $\|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)} \rightarrow \infty$ , степень роста  $p > 1$ . Коэрцитивность доказана.  $\square$

Построим вспомогательные функции  $H_s : Q_{s1} \times \mathbb{R}^{2N(s) \times (n+1)} \rightarrow \mathbb{R}^1$ :

$$H_s(x, \zeta, \eta) = \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} (A_i(x + h_{sl}, \zeta_l + \eta_l) - A_i(x + h_{sl}, \zeta_l)) (R_s^{-1} \eta_l)_l, \quad (2.6)$$

определенные для всех  $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{N(s) \times (n+1)}$  таких, что  $\eta_0 = 0$ ,  $l = 1, \dots, N(s)$ . Введем также обозначение

$$|\zeta_0| := \sum_{1 \leq l \leq N(s)} |\zeta_{l0}|, \quad |\zeta| := \sum_{\substack{1 \leq l \leq N(s), \\ 0 \leq i \leq n}} |\zeta_{li}|.$$

**Лемма 2.2.** Для любых  $\varkappa, C, C_1 > 0$  существует положительная функция  $c_s(x)$  такая, что для всех  $\zeta \in U(C, C_1)$ , где

$$U(C, C_1) = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^{N(s) \times (n+1)} : |\zeta_{\cdot 0}| \leq C, |\zeta| \leq C_1 \right\}$$

и  $\eta \in \mathbb{R}^{N(s) \times (n+1)}$  таких, что  $\eta_{l0} = 0$ ,  $l = 1, \dots, N(s)$ , справедлива оценка

$$H_s(x, \zeta, \eta) \geq c_s(x)|\eta| \quad \forall |\eta| \geq \varkappa > 0. \quad (2.7)$$

Здесь  $c_s(x) > 0$  определена для почти всех  $x \in \overline{Q_{s1}}$ , зависит от  $\varkappa, C, C_1$  и не зависит от  $\zeta$  и  $\eta$ .

*Доказательство.* Пусть  $U_\varkappa := \{\eta \in \mathbb{R}^{N(s) \times (n+1)} : |\eta| = \varkappa, \eta_{l0} = 0\}$ . При фиксированных  $x \in \overline{Q_{s1}}$ ,  $\zeta \in U(C, C_1)$  и  $\eta \in U_\varkappa$  определим функцию одной переменной  $h_s(\chi) := H_s(x, \zeta, \chi\eta)$ ,  $\chi \in \mathbb{R}_+$ . Тогда

$$\begin{aligned} h_s(\chi) &= \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} (A_i(x + h_{sl}, (\zeta + \chi\eta)_{l\cdot}) - A_i(x + h_{sl}, \zeta_{l\cdot})) \chi (R_s^{-1}\eta_{\cdot i})_l = \\ &= \sum_{l,i} \left( A_i(x + h_{sl}, (\zeta + \chi\eta)_{l\cdot}) - A_i(x + h_{sl}, (\zeta + \eta)_{l\cdot}) \right) \chi (R_s^{-1}\eta_{\cdot i})_l + \\ &+ \chi \sum_{l,i} \left( A_i(x + h_{sl}, (\zeta + \eta)_{l\cdot}) - A_i(x + h_{sl}, \zeta_{l\cdot}) \right) (R_s^{-1}\eta_{\cdot i})_l =: \sigma_s(\chi) + \chi h_s(1). \end{aligned}$$

Согласно условию эллиптичности (2.2),  $h_s(1) > 0$ . Кроме того,  $(\zeta + \chi\eta) - (\zeta + \eta) = (\chi - 1)\eta$ , т. е. в силу того же условия для любого  $\chi > 1$

$$\sigma_s(\chi) = \frac{\chi}{\chi - 1} \sum_{l,i} \left( A_i(x + h_{sl}, (\zeta + \chi\eta)_{l\cdot}) - A_i(x + h_{sl}, \zeta_{l\cdot}) \right) (R_s^{-1}((\chi - 1)\eta_{\cdot i}))_l > 0.$$

Заметим, что  $\sigma_s(1) = 0$  по построению. Таким образом,

$$h_s(\chi) = \sigma_s(\chi) + \chi h_s(1) \geq \chi h_s(1) \quad \text{для любого } \chi \geq 1.$$

Перепишем этот результат в следующем виде:

$$H_s(x, \zeta, \hat{\eta}) = H_s(x, \zeta, \chi\eta) = h_s(\chi) \geq \chi h_s(1) = \chi H_s(x, \zeta, \eta),$$

поскольку для произвольного  $\hat{\eta} \in \mathbb{R}^{N(s) \times (n+1)}$  ( $|\hat{\eta}| \geq \varkappa$  и  $\hat{\eta}_{l0} = 0$ ) существуют  $\eta \in U_\varkappa$  и  $\chi \geq 1$  такие, что  $\hat{\eta} = \chi\eta$  и  $\chi = \varkappa^{-1}|\hat{\eta}|$ . Следовательно,

$$H_s(x, \zeta, \hat{\eta}) \geq \varkappa^{-1}|\hat{\eta}| H_s(x, \zeta, \eta).$$

Определим функцию

$$c_s(x) = \varkappa^{-1} \min_{\substack{\zeta \in U(C, C_1), \\ \eta \in U_\varkappa}} H_s(x, \zeta, \eta).$$

Поскольку множества  $U(C, C_1)$  и  $U_\varkappa$  ограничены и замкнуты, то минимум существует. Более того, этот минимум строго положителен, поскольку  $|\eta| = \varkappa > 0$  и справедлива оценка (2.2). Оценка (2.7) доказана.  $\square$

**Лемма 2.3.** Пусть справедливы условия (A0)–(A3). Тогда оператор  $A : \mathring{W}_p^1(Q) \rightarrow W_q^{-1}(Q)$ , заданный в (1.7), обладает свойством  $(S_+)$ .

*Доказательство.* Пусть  $u_j \rightharpoonup u$  слабо в  $\mathring{W}_p^1(Q)$  и

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \langle A_R u_j, u_j - u \rangle \leq 0. \quad (2.8)$$

1. Сначала докажем, что  $\lim_{j \rightarrow \infty} \langle A_R u_j, u_j - u \rangle = 0$ . В силу компактности вложения  $\mathring{W}_p^1(Q) \subset L_p(Q)$ ,  $u_m \rightarrow u$  в  $L_p(Q)$ , см. [72, гл. I, §8, пп. 2]. Используя лемму 1.6, условие (A1) и теорему [29, теорема 2.1, гл. 1, §2] о непрерывном отображении получим, что

$$A_i(x, R_Q u_j, \nabla R_Q u) \rightarrow A_i(x, R_Q u, \nabla R_Q u) \quad \text{в } L_q(Q),$$

т. е. в силу слабой сходимости  $\partial_i u_j \rightharpoonup \partial_i u$  в  $L_p(Q)$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q A_i(x, R_Q u_j, \nabla R_Q u) \partial_i (u_j - u) dx = 0.$$

В силу условия **(A1)** и ограниченности слабо сходящейся последовательности  $\{u_j\}$  множество  $\{A_0(x, R_Q u_j, \nabla R_Q u_j)\}$  ограничено в  $L_q(Q)$ , т. е.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_Q A_0(x, R_Q u_j, \nabla R_Q u_j) (u_j - u) dx = 0,$$

поскольку  $u_j \rightarrow u$  в  $L_p(Q)$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \langle A_R u_j, u_j - u \rangle &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q (A_i(x, R_Q u_j, \nabla R_Q u_j) - A_i(x, R_Q u_j, \nabla R_Q u)) \partial_i (u_j - u) dx + \right. \\ &+ \left. \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q A_i(x, R_Q u_j, \nabla R_Q u) \partial_i (u_j - u) dx + \int_{\Omega_T} A_0(x, R_Q u_j, \nabla R_Q u_j) (u_j - u) dx \right) = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q (A_i(x, R_Q u_j, \nabla R_Q u_j) - A_i(x, R_Q u_j, \nabla R_Q u)) \partial_i (u_j - u) dx. \quad (2.9) \end{aligned}$$

Для изучения правой части (2.9) введем вспомогательные функции  $w = R_Q u$  и  $w_j = R_Q u_j$ . Согласно лемме 1.6 существует ограниченный обратный оператор  $R_Q^{-1}$ . Воспользуемся формулой (1.18) и коммутативностью операторов  $R_Q^{-1}$  и  $\partial_i$  на  $Q_{sl}$ :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q \left( A_i(x, R_Q u_j, \nabla R_Q u_j) - A_i(x, R_Q u_j, \nabla R_Q u) \right) \partial_i (u_j - u) dx &= \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q \left( A_i(x, w_j, \nabla w_j) - A_i(x, w_j, \nabla w) \right) \partial_i R_Q^{-1} (w_j - w) dx = \\ &= \sum_s \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\bigcup_l Q_{sl}} P_s \left( A_i(x, w_j, \nabla w_j) - A_i(x, w_j, \nabla w) \right) U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s \partial_i (w_j - w) dx = \\ &= \sum_s \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{Q_{s1}} \left( U_s (A_i(x, w_j, \nabla w_j) - A_i(x, w_j, \nabla w)), R_s^{-1} U_s \partial_i (w_j - w) \right) dx = \sum_s \int_{Q_{s1}} I_s^j dx, \end{aligned}$$

т. е. мы обозначили

$$\begin{aligned} I_s^j &= \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_l \left( A_i(x + h_{sl}, w_j(x + h_{sl}), \nabla w_j(x + h_{sl})) - \right. \\ &\quad \left. - A_i(x + h_{sl}, w_j(x + h_{sl}), \nabla w(x + h_{sl})) \right) (R_s^{-1} U_s P_s \partial_i (w_j - w))_l. \end{aligned}$$

Введем матрицы  $\zeta^j = \{\zeta_{li}^j\}$  и  $\eta^j = \{\eta_{li}^j\}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \zeta_{l0}^j &= \eta_{l0}^j = w_j(x + h_{sl}), & l &= 1, \dots, N(s), \\ \zeta_{li}^j &= \partial_i w_j(x + h_{sl}), & \eta_{li}^j &= \partial_i w(x + h_{sl}), & l &= 1, \dots, N(s), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Заметим, что при этом  $\zeta^j \neq \eta^j$ . Из условия **(A3)** следует, что  $I_s^j > 0$  для всех  $j$ . Подставим эту оценку в (2.9). Тогда

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle A_R u_j, u_j - u \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_s \int_{Q_{s1}} I_s^j dx \geq 0.$$

Сопоставив это неравенство с неравенством (2.8), получаем, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle A_R u_j, u_j - u \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_{Q_{s1}} I_s^j dx = 0. \quad (2.10)$$

2. Следующим шагом докажем, что при этом  $u_j \rightarrow u$  в  $\dot{W}_p^1(Q)$ , т. е.  $\partial_i u_j \rightarrow \partial_i u$  в  $L_p(Q)$ . Для этого достаточно показать сходимость по мере последовательностей  $\{\partial_i u_j\}$  и их равностепенную непрерывность в целом в  $L_p(Q)$ , см. теорему о сильной сходимости [72, гл. 1, п. 3].

2.1. Для доказательства сходимости по мере используем функцию  $H_s$ , определенную в (2.6). Из равенства (2.10) получаем, что

$$0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_s \int_{Q_{s1}} I_s^j dx = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_s \int_{Q_{s1}} H_s(x, \zeta^j, \zeta^j - \eta^j) dx.$$

Воспользуемся оценкой (2.7). Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_s \int_{Q_{s1}} H_s(x, \zeta^j, \zeta^j - \eta^j) dx \geq \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \sum_s \int_{Q_{s1}} c_s(x) |\zeta^j - \eta^j| dx = \\ &= \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \sum_s \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{Q_{sl}} c_s(x) |\zeta_{li}^j - \eta_{li}^j| dx = \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \sum_s \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\bigcup_l Q_{sl}} c_s(x) |\partial_i R_Q u_j - \partial_i R_Q u| dx, \end{aligned}$$

здесь  $c_s(x + h_{sl}) = c_s(x)$  для любого  $h_{sl}$ . Поскольку  $c_s(x) > 0$ , а оператор  $R_Q$  невырожден, то данное равенство возможно лишь при сходимости  $\partial_i u_j \rightarrow \partial_i u$  по мере для всех  $i = 1, \dots, n$ .

2.2. Для доказательства равностепенной непрерывности достаточно показать, что

$$\lim_{\text{mes} E \rightarrow 0} \int_E \sum_{1 \leq i \leq n} |\partial_i u_j|^p dx = 0, \quad E \subset Q, \quad (2.11)$$

и стремление к пределу в (2.11) равномерно относительно  $j$ .

Заметим, что

$$\begin{aligned} I_s^j &= \sum_l \sum_{1 \leq i \leq n} \left( A_i(x + h_{sl}, \zeta_l^j) - A_i(x + h_{sl}, \eta_l^j) \right) \left( R_s^{-1}(\zeta_i^j - \eta_i^j) \right)_l = \\ &= \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{0 \leq i \leq n} A_i(x + h_{sl}, \zeta_l^j) \left( R_s^{-1} \zeta_i^j \right)_l - \sum_{1 \leq l \leq N(s)} A_0(x + h_{sl}, \zeta_l^j) \left( R_s^{-1} \zeta_0^j \right)_l - \\ &- \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} A_i(x + h_{sl}, \zeta_l^j) \left( R_s^{-1} \eta_i^j \right)_l - \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} A_i(x + h_{sl}, \eta_l^j) \left( R_s^{-1}(\zeta_i^j - \eta_i^j) \right)_l. \quad (2.12) \end{aligned}$$

Первое слагаемое правой части (2.12) оценим, исходя из условия коэрцитивности (2.2), а остальные — применяя условие **(A1)** и неравенство Гёльдера, также будет применена оценка из условия интегрируемости (1.6):

$$\begin{aligned} I_s^j &\geq c_6 \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} |\zeta_{li}^j|^p - c_7 \sum_{1 \leq l \leq N(s)} |\zeta_{l0}^j|^{p'} - c_8 - \\ &- \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{0 \leq i \leq n} \left| g(x + h_{sl}) + c_1 \sum_{0 \leq k \leq n} |\zeta_{lk}^j|^{p-1} \right| \left| \left( R_s^{-1} \eta_i^j \right)_l \right| - \\ &- \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} \left| g(x + h_{sl}) + c_1 \sum_{0 \leq k \leq n} |\eta_{lk}^j|^{p-1} \right| \left| \left( R_s^{-1} \zeta_i^j \right)_l \right| - \\ &- \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} \left| g(x + h_{sl}) + c_1 \sum_{0 \leq k \leq n} |\eta_{lk}^j|^{p-1} \right| \left| \left( R_s^{-1} \eta_i^j \right)_l \right|. \quad (2.13) \end{aligned}$$

Здесь вторая и третья сумма правой части (2.12) оценены вместе в четвертом слагаемом правой части (2.13) с учетом того, что  $\zeta_{l_0}^j = \eta_{l_0}^j$ . Очевидно, что  $|(R_s^{-1}\zeta_i)_l| \leq c_{13} \sum_{1 \leq m \leq N(s)} |\zeta_{mi}|$ . Для сокращения записи введем обозначение  $g_{sl}^j = g(x + h_{sl}) + c_1 \sum_{0 \leq k \leq n} |\eta_{lk}^j|^{p-1}$ . Скомпонуем слагаемые и оценим с помощью неравенства Юнга:

$$\begin{aligned} I_s^j &\geq c_6 \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} |\zeta_{li}^j|^p - c_1 \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq k \leq n} |\zeta_{lk}^j|^{p-1} \sum_{0 \leq i \leq n} |(R_s^{-1}\eta_i^j)_l| - c_8 - \\ &\quad - c_{13} \sum_{1 \leq l, m \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} |g_{sl}^j| |\zeta_{mi}^j| - c_7 \sum_{1 \leq l \leq N(s)} |\zeta_{l_0}^j|^{p'} - 2 \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{0 \leq i \leq n} |g_{sl}^j| |(R_s^{-1}\eta_i^j)_l| \geq \\ &\geq c_6 \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} |\zeta_{li}^j|^p - \frac{c_1(n+1)\varepsilon_1^q}{q} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} |\zeta_{li}^j|^p - \frac{c_1 n}{\varepsilon_1^p} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{0 \leq i \leq n} |(R_s^{-1}\eta_i^j)_l|^p - \\ &\quad - \frac{c_{13}N(s)\varepsilon_2^p}{p} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} |\zeta_{li}^j|^p - \frac{c_{13}nN(s)}{\varepsilon_2^q q} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} |g_{sl}^j|^q - c_7 \sum_{1 \leq l \leq N(s)} |\zeta_{l_0}^j|^{p'} - c_8 - \\ &\quad - \frac{2(n+1)}{q} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} |g_{sl}^j|^q - \frac{2}{p} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{0 \leq i \leq n} |(R_s^{-1}\eta_i^j)_l|^p. \end{aligned} \quad (2.14)$$

Выберем  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$  такими, что  $\frac{c_1(n+1)\varepsilon_1^q}{q} + \frac{c_{13}N(s)\varepsilon_2^p}{p} \leq \frac{c_6}{2}$ . Тогда

$$I_s^j \geq \frac{c_6}{2} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} |\zeta_{li}^j|^p - \tilde{g}_s^j, \quad (2.15)$$

где  $\tilde{g}_s^j \in L_1(Q_{s1})$  — функция, равная сумме третьего и последних пяти слагаемых правой части (2.14):

$$\begin{aligned} \tilde{g}_s^j &= \frac{c_1 n}{\varepsilon_1^p} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{0 \leq i \leq n} |(R_s^{-1}\eta_i^j)_l|^p + \frac{c_{13}nN(s)}{\varepsilon_2^q q} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} |g_{sl}^j|^q + c_8 + \\ &\quad + c_7 \sum_{1 \leq l \leq N(s)} |\zeta_{l_0}^j|^{p'} + \frac{2(n+1)}{q} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} |g_{sl}^j|^q + \frac{2}{p} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{0 \leq i \leq n} |(R_s^{-1}\eta_i^j)_l|^p. \end{aligned}$$

Следовательно, для любого  $s$  и любого  $E \subset Q_{s1}$

$$\frac{c_6}{2} \lim_{\text{mes} E \rightarrow 0} \int_E \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} |\partial_i w_j(x + h_{sl})|^p dx \leq \lim_{\text{mes} E \rightarrow 0} \int_E I_s^j dx + \lim_{\text{mes} E \rightarrow 0} \int_E \tilde{g}_s^j dx. \quad (2.16)$$

Сходимость первого интеграла в правой части (2.16) к нулю при  $j \rightarrow \infty$  на любом множестве  $E \subset Q_{s1}$  доказана выше, см. (2.10). Сходимость второго интеграла в правой части (2.16) к нулю следует из абсолютной непрерывности интеграла и того, что множество  $\{\tilde{g}_s^j\} \subset L_1(Q_{s1})$  компактно, поскольку при формировании функций  $\tilde{g}_s^j$  участвовали фиксированные функции и функции из компактных множеств  $\{w_j\} \subset L_p(Q)$  и  $\{u_j\} \subset L_p(Q)$ :

$$\begin{aligned} \tilde{g}_s^j &= \left( \frac{c_1 n}{\varepsilon_1^p} + \frac{2}{p} \right) \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \left( |u_j(x + h_{sl})|^p + \sum_{1 \leq i \leq n} |\partial_i u(x + h_{sl})|^p \right) + c_7 \sum_{1 \leq l \leq N(s)} |w_j(x + h_{sl})|^{p'} + c_8 + \\ &\quad + \left( \frac{c_{13}nN(s)}{\varepsilon_2^q q} + \frac{2(n+1)}{q} \right) \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \left| g(x + h_{sl}) + c_1 |w_j(x + h_{sl})|^{p-1} + c_1 \sum_{1 \leq i \leq n} |\partial_i w(x + h_{sl})|^{p-1} \right|^q. \end{aligned}$$

Таким образом, сходимость в (2.16) равномерна по  $j$  для всех  $s$ , множества  $\{\partial_i w_j\}$  компактны в  $L_p\left(\bigcup_{sl} Q_{sl}\right)$ . В силу непрерывности оператора  $R_Q$  это возможно тогда и только тогда, когда

множества  $\{\partial_i u_j\}$  компактны в  $L_p \left( \bigcup_{sl} Q_{sl} \right)$ . Так как  $\text{mes} \left( Q \setminus \left( \bigcup_{sl} Q_{sl} \right) \right) = 0$ , то равенство (2.11) доказано.

Слабо сходящаяся в  $\dot{W}_p^1(Q)$  последовательность  $\{u_j\}$  принадлежит компактному множеству. Двух пределов существовать не может, т. о. данная последовательность сходится к  $u$  в  $\dot{W}_p^1(Q)$ .  $\square$

**Лемма 2.4.** *Если справедливы условия (A0)–(A3), то оператор  $A : \dot{W}_p^1(Q) \rightarrow W_q^{-1}(Q)$ , заданный формулой (1.7), псевдомонотонен.*

Это следует из леммы 2.3, так как деминепрерывный оператор, обладающий свойством  $(S_+)$ , является псевдомонотонным.

**Теорема 2.1.** *Пусть справедливы условия (A0)–(A3). Тогда для любого  $f \in W_q^{-1}(Q)$  существует обобщенное решение задачи (1.1)–(2.2) и  $u \in \dot{W}_p^1(Q)$ . Более того, множество решений задачи (1.1), (1.2) ограничено и слабо замкнуто.*

*Доказательство.* Из условий теоремы следует, что  $A_R$  — деминепрерывный, см. лемму 1.9, коэрцитивный (см. лемму 2.1), оператор, обладающий свойством  $(S_+)$  (см. лемму 2.3), т. е. псевдомонотонный (см. лемму 2.4). Следовательно, обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) существует, см. [33, теорема 2.7, гл. 2]. Ограниченность и слабая замкнутость множества решений следует из того, что оператор в рассматриваемом уравнении коэрцитивен и обладает свойством  $(S_+)$ , см. доказательство в теореме 1.2.  $\square$

2.2. АЛГЕБРАИЧЕСКОЕ УСЛОВИЕ СИЛЬНОЙ ЭЛЛИПТИЧНОСТИ И СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ

В предыдущей главе построено алгебраическое условие сильной эллиптичности для квазилинейных дифференциально-разностных операторов. Близкую конструкцию можно построить для существенно нелинейных дифференциально-разностных операторов. Для существенно нелинейных дифференциальных операторов аналогичное условие рассмотрено в работах автора, см. [75].

**Лемма 2.5.** *Пусть  $p \in [2, \infty)$ , справедливы условия (A0), (A1), а также*

**(A4) Условие сильной эллиптичности:** *для всех  $s$ , п.в.  $x \in \overline{Q_{s1}}$  и любых  $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{N(s) \times (n+1)}$  таких, что  $\eta_0 = \zeta_0 \neq 0$  и  $\eta \neq \zeta$ , существует  $\hat{\Upsilon} > 0$  такая, что*

$$\sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} (A_i(x + h_{sl}, \zeta_l) - A_i(x + h_{sl}, \eta_l)) (R_s^{-1}(\zeta_i - \eta_i))_l \geq \hat{\Upsilon} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} |\zeta_{li} - \eta_{li}|^p. \quad (2.17)$$

**(A5) Условие локальной липшицевости:** *функции  $A_i(x, \xi)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) локально липшицевы по  $\xi_0$ ,  $A_0(x, \xi)$  локально липшицева по  $\xi_j$  ( $j = \overline{0, n}$ ), т. е. существуют  $\varepsilon > 0$  и функция типа Каратеодори<sup>1</sup>  $\Psi$  такие, что для любых  $\delta \in \mathbb{R}^{n+1}$ ,  $|\delta| = \sum_{0 \leq j \leq n} |\delta_j| < \varepsilon$ ,  $\delta$  имеет единственную ненулевую координату,*

$$|A_i(x, \xi + \delta) - A_i(x, \xi)| \leq \Psi(x, \xi) |\delta|, \quad (2.18)$$

$$|\Psi(x, \xi)| \leq g_\Psi(x) + \hat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\xi_k|^{p-2}, \quad (2.19)$$

где  $\hat{\Psi} > 0$ ,  $g_\Psi \in L_{q'}(Q)$ ,  $q' = p/(p-2)$ .

Тогда оператор  $A_R : \dot{W}_p^1(Q) \rightarrow W_q^{-1}(Q)$ , заданный формулой (1.17), обладает полуограниченной вариацией.

При доказательстве леммы 2.5 нам понадобятся повторяющиеся вычисления:

**Лемма 2.6.** *В силу непрерывности функции  $\Psi$  из условий (2.18)–(2.19) следует, что для всех  $\xi, \hat{\xi} \in \mathbb{R}^{n+1}$  таких, что  $\xi_j \neq \hat{\xi}_j$  и  $\xi_k = \hat{\xi}_k$  при  $k \neq j$ , справедлива оценка*

$$\left| A_i(x, \hat{\xi}) - A_i(x, \xi) \right| \leq \left( \hat{\Psi} |\hat{\xi}_j|^{p-2} + \hat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\xi_k|^{p-2} + g_\Psi(x) \right) |\hat{\xi}_j - \xi_j|. \quad (2.20)$$

<sup>1</sup> $\Psi(x, \xi)$  измерима по  $x$  для всех  $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$  и непрерывна по  $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$  для п.в.  $x \in \overline{Q}$ .

*Доказательство.* Очевидно, что существуют  $n_2 \in \mathbb{N}$  и  $\delta \in \mathbb{R}^{n+1}$  ( $|\delta| < \varepsilon$ ) такие, что  $\xi = \widehat{\xi} + n_2\delta$ . Тогда

$$\begin{aligned} |A_i(x, \widehat{\xi}) - A_i(x, \xi)| &= \left| \sum_{1 \leq k \leq n_2} (A_i(x, \widehat{\xi} + k\delta) - A_i(x, \widehat{\xi} + (k-1)\delta)) \right| \leq \\ &\leq \sum_{1 \leq k \leq n_2} |A_i(x, \widehat{\xi} + k\delta) - A_i(x, \widehat{\xi} + (k-1)\delta)|. \end{aligned}$$

Воспользуемся оценкой (2.18):

$$|A_i(x, \widehat{\xi} + k\delta) - A_i(x, \widehat{\xi} + (k-1)\delta)| \leq \Psi\left(x, \widehat{\xi} + (k-1)\delta\right) |\delta| = \Psi\left(x, \widehat{\xi} + \frac{k-1}{n_2}(\xi - \widehat{\xi})\right) \frac{|\widehat{\xi} - \xi|}{n_2}.$$

То есть

$$|A_i(x, \widehat{\xi}) - A_i(x, \xi)| \leq \frac{1}{n_2} \sum_{1 \leq k \leq n_2} \Psi\left(x, \widehat{\xi} + \frac{k-1}{n_2}(\xi - \widehat{\xi})\right) |\widehat{\xi} - \xi|.$$

Переходя к пределу при  $n_2 \rightarrow \infty$ , в силу непрерывности функции  $\Psi$  получаем, что

$$|A_i(x, \widehat{\xi}) - A_i(x, \xi)| \leq \int_0^1 \Psi(x, \widehat{\xi} + \tau(\xi - \widehat{\xi})) d\tau |\xi - \widehat{\xi}|. \quad (2.21)$$

Оценим теперь интеграл по  $\tau$  из формулы (2.21). Для этого подставим в (2.21) оценку (2.19) и используем известное неравенство  $\int_0^1 |a + \tau(b-a)|^\alpha d\tau \leq |a|^\alpha + |b|^\alpha$  при  $\alpha \geq 0$ . Поскольку мы считаем, что  $\xi$  и  $\widehat{\xi}$  отличаются только в одной координате  $j$ , то

$$\begin{aligned} \int_0^1 \Psi(x, \widehat{\xi} + \tau(\xi - \widehat{\xi})) d\tau &\leq \int_0^1 \left( \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\widehat{\xi}_k + \tau(\xi_k - \widehat{\xi}_k)|^{p-2} + g_\Psi(x) \right) d\tau = \\ &= \widehat{\Psi} \int_0^1 |\widehat{\xi}_j + \tau(\xi_j - \widehat{\xi}_j)|^{p-2} d\tau + \widehat{\Psi} \sum_{k \neq j} |\xi_k|^{p-2} + g_\Psi(x) \leq \widehat{\Psi} |\widehat{\xi}_j|^{p-2} + \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\xi_k|^{p-2} + g_\Psi(x). \end{aligned}$$

Подставив это выражение в (2.21), получаем оценку (2.20). □

*Доказательство леммы 2.5.* Обозначим  $w = R_Q u$  и  $v = R_Q y$ ,  $u, y \in \dot{W}_p^1(Q)$ , причем в силу невырожденности оператора  $R_Q$  существует обратный оператор  $R_Q^{-1} : L_p(Q) \rightarrow L_p(Q)$ , см. лемму 1.6. По определению оператора  $A_R$  и в силу формулы (1.18)

$$\begin{aligned} \langle A_R u - A_R y, u - y \rangle &= \sum_{0 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} (A_i(x, R_Q u, \nabla R_Q u) - A_i(x, R_Q y, \nabla R_Q y)) \partial_i (u - y) dx = \\ &= \sum_{0 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} (A_i(x, w, \nabla w) - A_i(x, v, \nabla v)) R_Q^{-1} \partial_i (w - v) dx dt = \\ &= \sum_s \int_{\bigcup_l Q_{sl}} \sum_{0 \leq i \leq n} P_s (A_i(x, w, \nabla w) - A_i(x, v, \nabla v)) U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s \partial_i (w - v) dx = \\ &= \sum_s \int_{Q_{s1}} \sum_{0 \leq i \leq n} \left( U_s P_s (A_i(x, w, \nabla w) - A_i(x, v, \nabla v)), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i (w - v) \right) dx = \\ &= \sum_s \int_{Q_{s1}} (I_{s1} + I_{s2} + I_{s3}) dx, \quad (2.22) \end{aligned}$$

где  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^{N(s)}$ . Очевидно, что при  $u(x) = y(x)$  для почти всех  $x \in Q$  значение данного интеграла неотрицательно. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что  $u(x) \neq y(x)$  для почти всех  $x \in Q$ . Очевидно, что при этом  $w(x) \neq v(x)$  и существует  $\lambda \in [0, 1]$  такое, что  $\lambda w(x) + (1 - \lambda)v(x) \neq 0$ , возможно,  $\lambda = \lambda(x)$ .

Введем матрицы порядка  $N(s) \times (n + 1)$

$$\zeta = (U_s P_s w, U_s P_s \partial_1 w \dots, U_s P_s \partial_n w), \quad \eta = (U_s P_s v, U_s P_s \partial_1 v \dots, U_s P_s \partial_n v),$$

а также матрицы  $\widehat{\zeta}$  и  $\widehat{\eta}$  такие, что

$$\widehat{\zeta}_{\cdot i} = \zeta_{\cdot i}, \quad \widehat{\eta}_{\cdot i} = \eta_{\cdot i}, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (2.23)$$

$$\widehat{\zeta}_{l0} = \widehat{\eta}_{l0} = \lambda \zeta_{l0} + (1 - \lambda) \eta_{l0}, \quad \forall l = 1, \dots, N(s). \quad (2.24)$$

По построению  $\widehat{\zeta}_{l0} = \widehat{\eta}_{l0} \neq 0$ . В то же время  $\widehat{\zeta}_{\cdot i} - \widehat{\eta}_{\cdot i} \equiv \zeta_{\cdot i} - \eta_{\cdot i} \forall i = 1, \dots, n$ . Сначала оценим часть подынтегральной суммы правой части (2.22)

$$\begin{aligned} I_{s1} + I_{s2} &= \sum_{1 \leq i \leq n} \left( U_s P_s (A_i(x, w, \nabla w) - A_i(x, v, \nabla v)), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i (w - v) \right) = \\ &= \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} (A_i(x + h_{sl}, \zeta_{l\cdot}) - A_i(x + h_{sl}, \eta_{l\cdot})) (R_s^{-1} (\zeta_{\cdot i} - \eta_{\cdot i}))_l = \\ &= \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} \left( A_i(x + h_{sl}, \widehat{\zeta}_{l\cdot}) - A_i(x + h_{sl}, \widehat{\eta}_{l\cdot}) \right) \left( R_s^{-1} (\widehat{\zeta}_{\cdot i} - \widehat{\eta}_{\cdot i}) \right)_l + \\ &+ \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} \left( A_i(x + h_{sl}, \zeta_{l\cdot}) - A_i(x + h_{sl}, \widehat{\zeta}_{l\cdot}) \right) (R_s^{-1} (\zeta_{\cdot i} - \eta_{\cdot i}))_l + \\ &+ \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} (A_i(x + h_{sl}, \widehat{\eta}_{l\cdot}) - A_i(x + h_{sl}, \eta_{l\cdot})) (R_s^{-1} (\zeta_{\cdot i} - \eta_{\cdot i}))_l. \quad (2.25) \end{aligned}$$

Первую сумму правой части (2.25) оценим с помощью условия сильной эллиптичности (2.17):

$$\begin{aligned} I_{s1} &= \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} \left( A_i(x + h_{sl}, \widehat{\zeta}_{l\cdot}) - A_i(x + h_{sl}, \widehat{\eta}_{l\cdot}) \right) \left( R_s^{-1} (\widehat{\zeta}_{\cdot i} - \widehat{\eta}_{\cdot i}) \right)_l \geq \\ &\geq \widehat{\Upsilon} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} |\widehat{\zeta}_{li} - \widehat{\eta}_{li}|^p = \widehat{\Upsilon} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} |\partial_i w(x + h_{sl}) - \partial_i v(x + h_{sl})|^p. \end{aligned}$$

То есть

$$\sum_s \int_{Q_{s1}} I_{s1} dx \geq \widehat{\Upsilon} \|w - v\|_{\widehat{W}_p^1(Q)}^p. \quad (2.26)$$

Рассмотрим вторую и третью суммы правой части (2.25):

$$\begin{aligned} I_{s2} &\leq \left| \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} \left( A_i(x + h_{sl}, \zeta_{l\cdot}) - A_i(x + h_{sl}, \widehat{\zeta}_{l\cdot}) \right) (R_s^{-1} (\zeta_{\cdot i} - \eta_{\cdot i}))_l + \right. \\ &+ \left. \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} (A_i(x + h_{sl}, \widehat{\eta}_{l\cdot}) - A_i(x + h_{sl}, \eta_{l\cdot})) (R_s^{-1} (\zeta_{\cdot i} - \eta_{\cdot i}))_l \right| \leq \\ &\leq \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} \left| A_i(x + h_{sl}, \zeta_{l\cdot}) - A_i(x + h_{sl}, \widehat{\zeta}_{l\cdot}) \right| \left| (R_s^{-1} (\zeta_{\cdot i} - \eta_{\cdot i}))_l \right| + \\ &+ \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} \left| A_i(x + h_{sl}, \widehat{\eta}_{l\cdot}) - A_i(x + h_{sl}, \eta_{l\cdot}) \right| \left| (R_s^{-1} (\zeta_{\cdot i} - \eta_{\cdot i}))_l \right|. \quad (2.27) \end{aligned}$$

Исходя из условия липшицевости **(A4)** и непрерывности функции Липшица  $\Psi$ , воспользуемся оценкой (2.20), см. лемму 2.6:

$$\left| A_i(x + h_{sl}, \widehat{\zeta}_l) - A_i(x + h_{sl}, \zeta_l) \right| \leq \left( \widehat{\Psi} |\widehat{\zeta}_{l0}|^{p-2} + \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\zeta_{lk}|^{p-2} + g_{\Psi}(x + h_{sl}) \right) |\zeta_{l0} - \widehat{\zeta}_{l0}|. \quad (2.28)$$

Аналогично для второй группы слагаемых правой части (2.27) имеем

$$\left| A_i(x + h_{sl}, \widehat{\eta}_l) - A_i(x + h_{sl}, \eta_l) \right| \leq \left( \widehat{\Psi} |\widehat{\eta}_{l0}|^{p-2} + \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\eta_{lk}|^{p-2} + g_{\Psi}(x + h_{sl}) \right) |\eta_{l0} - \widehat{\eta}_{l0}|. \quad (2.29)$$

Подставим (2.28) и (2.29) в (2.27); учитывая, что  $\eta_{l0} - \widehat{\eta}_{l0} = \lambda(\eta_{l0} - \zeta_{l0})$  и  $\zeta_{l0} - \widehat{\zeta}_{l0} = (1 - \lambda)(\zeta_{l0} - \eta_{l0})$ , см. (2.24), получаем оценку

$$\begin{aligned} I_{s2} \leq & \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} \left( \widehat{\Psi} |\lambda \zeta_{l0} + (1 - \lambda) \eta_{l0}|^{p-2} + (1 - \lambda) \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\zeta_{lk}|^{p-2} + \right. \\ & \left. + \lambda \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\eta_{lk}|^{p-2} + g_{\Psi}(x + h_{sl}) \right) |\zeta_{l0} - \eta_{l0}| |(R_s^{-1}(\zeta_i - \eta_i))_l|. \quad (2.30) \end{aligned}$$

Заметим, что  $|\lambda \zeta_{l0} + (1 - \lambda) \eta_{l0}|^{\alpha} \leq |\zeta_{l0}|^{\alpha} + |\eta_{l0}|^{\alpha}$  для всех  $\lambda \in [0, 1]$  при  $\alpha \geq 0$ , а также в силу ограниченности и невырожденности матриц  $R_s^{-1}$

$$\sum_{1 \leq i \leq n} |(R_s^{-1}(\zeta_i - \eta_i))_l| \leq c_{13} \sum_{1 \leq i \leq n} |\zeta_{li} - \eta_{li}|$$

для некоторого  $c_{13} > 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} I_{s2} \leq & c_{13} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \left( \widehat{\Psi} |\zeta_{l0}|^{p-2} + \widehat{\Psi} |\eta_{l0}|^{p-2} + (1 - \lambda) \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\zeta_{lk}|^{p-2} + \right. \\ & \left. + \lambda \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\eta_{lk}|^{p-2} + g_{\Psi}(x + h_{sl}) \right) |\zeta_{l0} - \eta_{l0}| \sum_{1 \leq i \leq n} |\zeta_{li} - \eta_{li}|. \quad (2.31) \end{aligned}$$

Перейдем к переменным  $w$  и  $v$ :

$$\begin{aligned} \sum_s \int_{Q_{s1}} I_{s2} dx \leq & c_{13} \left( \widehat{\Psi} \|w\|_{L_p(Q)}^{p-2} + \widehat{\Psi} \|v\|_{L_p(Q)}^{p-2} + (1 - \lambda) \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} \|\partial_i w\|_{L_p(Q)}^{p-2} + \right. \\ & \left. + \lambda \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} \|\partial_i v\|_{L_p(Q)}^{p-2} + \|g_{\Psi}\|_{L_{q'}(Q)} \right) \|w - v\|_{L_p(Q)} \sum_{1 \leq i \leq n} \|\partial_i w - \partial_i v\|_{L_p(Q)} \leq \\ & \leq c_{13} \left( c_{14} r_1^{p-2} + \|g_{\Psi}\|_{L_{q'}(Q)} \right) \|w - v\|_{L_p(Q)} \sum_{1 \leq i \leq n} \|\partial_i w - \partial_i v\|_{L_p(Q)}, \quad (2.32) \end{aligned}$$

где  $\|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)} \leq r_1$  и  $\|y\|_{\dot{W}_p^1(Q)} \leq r_1$ . В этой оценке учтено, что  $\|w\|_{L_p(Q)} = \|R_Q u\|_{L_p(Q)} \leq c_5 \|u\|_{L_p(Q)}$  (см. (1.22)) и  $\|u\|_{L_p(Q)} \leq c_{15} \|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)} \leq c_{15} r_1$  (неравенство Фридрихса), для  $v = R_Q y$  оценки аналогичны. Для сокращения записи введем функцию  $\widehat{c}_1(r_1) = c_{13} \left( c_{14} r_1^{p-2} + \|g_{\Psi}\|_{L_{q'}(Q)} \right)$ . В силу неравенства Юнга из (2.32) следует, что

$$\sum_s \int_{Q_{s1}} I_{s2} dx \leq \frac{\widehat{\Upsilon}}{p} \|w - v\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^p + \frac{1}{q} \left( \frac{\widehat{c}_1(r_1)}{\widehat{\Upsilon}} \right)^{q/p} \|w - v\|_{L_p(Q)}^q. \quad (2.33)$$

Осталось оценить слагаемое при  $i = 0$  в подынтегральной сумме правой части (2.22):

$$I_{s3} \leq \left| \left( U_s P_s (A_0(x, w, \nabla w) - A_0(x, v, \nabla v)), R_s^{-1} U_s P_s (w - v) \right) \right| =$$

$$\begin{aligned}
&= \left| \sum_{1 \leq l \leq N(s)} (A_0(x + h_{sl}, \zeta_l) - A_0(x + h_{sl}, \eta_l)) (R_s^{-1}(\zeta_0 - \eta_0))_l \right| \leq \\
&\leq \sum_{1 \leq l \leq N(s)} |A_0(x + h_{sl}, \zeta_l) - A_0(x + h_{sl}, \eta_l)| |(R_s^{-1}(\zeta_0 - \eta_0))_l|. \quad (2.34)
\end{aligned}$$

Исходя из условия липшицевости **(A4)** и непрерывности функции Липшица  $\Phi$ , воспользуемся оценкой (2.20), см. лемму 2.6, и подставим в (2.34) аналогично выводу формулы (2.31) из (2.27):

$$I_{s3} \leq \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{0 \leq j \leq n} \left( \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} (|\zeta_{lk}|^{p-2} + |\eta_{lk}|^{p-2}) + g_{\Psi}(x + h_{sl}) \right) |\zeta_{lj} - \eta_{lj}| |(R_s^{-1}(\zeta_0 - \eta_0))_l|.$$

Вернемся к функциям  $w, v, u$  и  $y$  и воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$\begin{aligned}
\sum_s \int_{Q_{s1}} I_{s3} dx &\leq \sum_s \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{0 \leq j \leq n} \int_{Q_{s1}} \left( \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\partial_k v(x + h_{sl})|^{p-2} + \sum_{0 \leq k \leq n} |\partial_k w(x + h_{sl})|^{p-2} + \right. \\
&\quad \left. + g_{\Psi}(x + h_{sl}) \right) |\partial_j w(x + h_{sl}) - \partial_j v(x + h_{sl})| |u(x + h_{sl}) - y(x + h_{sl})| dx = \\
&= \sum_{0 \leq j \leq n} \int_Q \left( \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\partial_k v|^{p-2} + \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\partial_k w|^{p-2} + g_{\Psi} \right) |\partial_j w - \partial_j v| |u - y| dx \leq \\
&\leq \left\| \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\partial_k v|^{p-2} + \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\partial_k w|^{p-2} + g_{\Psi} \right\|_{L_{q'}(Q)} \sum_{0 \leq j \leq n} \|\partial_j w - \partial_j v\|_{L_p(Q)} \|u - y\|_{L_p(Q)}.
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
&\left\| \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\partial_k v|^{p-2} + \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\partial_k w|^{p-2} + g_{\Psi} \right\|_{L_{q'}(Q)} \leq \\
&\leq c_{16} \left( \|v\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^{p-2} + \|w\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^{p-2} \right) + \|g_{\Psi}\|_{L_{q'}(Q)} \leq c_{17} r_1^{p-2} + \|g_{\Psi}\|_{L_{q'}(Q)} =: \widehat{c}_2(r_1).
\end{aligned}$$

Здесь, как и выше, были учтены оценки  $\|w\|_{L_p(Q)} = \|R_Q u\|_{L_p(Q)} \leq c_5 \|u\|_{L_p(Q)}$  и  $\|u\|_{L_p(Q)} \leq c_{15} \|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)} \leq c_{15} r_1$ , а также аналогичные оценки для  $v = R_Q y$ . Осталось воспользоваться известным неравенством  $ab \leq \frac{(\varepsilon a)^p}{p} + \frac{1}{q} \left(\frac{b}{\varepsilon}\right)^q$ :

$$\begin{aligned}
\sum_s \int_{Q_{s1}} I_{s3} dx &\leq \widehat{c}_2(r_1) \|u - y\|_{L_p(Q)} \sum_{0 \leq j \leq n} \|\partial_j w - \partial_j v\|_{L_p(Q)} = \\
&= \widehat{c}_2(r_1) \|u - y\|_{L_p(Q)} \|w - v\|_{L_p(Q)} + \widehat{c}_2(r) \|u - y\|_{L_p(Q)} \|w - v\|_{\dot{W}_p^1(Q)} \leq \\
&\leq c_5 \widehat{c}_2(r_1) \|u - y\|_{L_p(Q)}^2 + \frac{\widehat{\Upsilon}}{p} \|w - v\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^p + \frac{1}{q} \left( \frac{\widehat{c}_2(r_1)}{\widehat{\Upsilon}} \right)^{q/p} \|u - y\|_{L_p(Q)}^q. \quad (2.35)
\end{aligned}$$

Подставляя (2.26), (2.33) и (2.35) в (2.22), получим

$$\begin{aligned}
\langle A_R u - A_R y, u - y \rangle &\geq \sum_s \int_{Q_{s1}} I_{s1} - |I_{s2}| - |I_{s3}| dx \geq \left( \widehat{\Upsilon} - 2 \frac{\widehat{\Upsilon}}{p} \right) \|w - v\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^p - \\
&\quad - \frac{1}{q} \left( \frac{\widehat{c}_1(r_1)}{\widehat{\Upsilon}} \right)^{q/p} \|w - v\|_{L_p(Q)}^q - c_5 \widehat{c}_2(r_1) \|u - y\|_{L_p(Q)}^2 - \frac{1}{q} \left( \frac{\widehat{c}_2(r_1)}{\widehat{\Upsilon}} \right)^{q/p} \|u - y\|_{L_p(Q)}^q \geq \\
&\geq -\frac{1}{q} \left( c_5^q \left( \frac{\widehat{c}_1(r_1)}{\widehat{\Upsilon}} \right)^{q/p} + \left( \frac{\widehat{c}_2(r_1)}{\widehat{\Upsilon}} \right)^{q/p} \right) \|u - y\|_{L_p(Q)}^q - c_5 \widehat{c}_2(r_1) \|u - y\|_{L_p(Q)}^2 =
\end{aligned}$$

$$=: -C(r_1; \|u - y\|_{L_p(Q)}), \quad (2.36)$$

поскольку  $\left(1 - \frac{2}{p}\right) \widehat{\Upsilon} > 0$ . Так как  $q > 1$  и  $\mathring{W}_p^1(Q) \subset L_p(Q)$  компактно, то  $A_R$  — оператор с полуограниченной вариацией.  $\square$

**Теорема 2.2.** Пусть выполнены условия (A0)–(A2) и (A4)–(A5). Тогда для любого  $f \in W_q^{-1}(Q)$  существует непустое, ограниченное, слабо замкнутое множество обобщенных решений задачи (1.1), (1.2).

*Доказательство.* Из условий теоремы следует, что  $A_R$  — деминепрерывный (см. лемму 1.9) оператор с полуограниченной вариацией (см. лемму 2.5), причем  $A_R$  коэрцитивен (см. лемму 2.1). Следовательно, обобщенное решение задачи (1.1), (1.2) существует, см. [20, теорема 3.1, гл. 2, §3], множество решений ограничено в силу коэрцитивности  $A_R$  и слабо замкнуто, см. [24, следствие 4.1, гл. 1, §4].  $\square$

**Замечание 2.1.** Вместо условия (A2) в теореме 2.2 может быть использовано другое условие, гарантирующее коэрцитивность задачи. Например, если при  $p \in [2, \infty)$  кроме условий (A0), (A1), (A4), (A5) справедливы более сильные оценки для слагаемых с младшими членами:

$$|A_i(x, \xi_0 + \delta_0, \xi_1, \dots, \xi_n) - A_i(x, \xi)| \leq \Psi_1(x, \xi) |\delta_0|, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (2.37)$$

$$|\Psi_1(x, \xi)| \leq g_\Psi(x) + \widehat{\Psi}_1 \sum_{0 \leq k \leq n} |\xi_k|^{p'-2}, \quad (2.38)$$

$$|A_0(x, \xi)| \leq \widehat{g}(x) + \widehat{c}_1 \sum_{0 \leq k \leq n} |\xi_k|^{p'-1}, \quad (2.39)$$

где  $p' \in (1, p)$ ,  $\widehat{\Psi}_1 > 0$ ,  $g_\Psi \in L_{q'}(Q)$ ,  $q' = p/(p-2)$ ,  $\widehat{g} \in L_q(Q)$ ,  $\widehat{c}_1 > 0$ .

### 2.3. УРАВНЕНИЯ С $p$ -ЛАПЛАСИАНОМ

Рассмотрим существенно нелинейное функционально-дифференциальное уравнение с дифференциальным оператором, заданным  $p$ -лапласианом:

$$\Delta_p R u(x) = f(x) \quad (x \in Q) \quad (2.40)$$

с краевым условием

$$u(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R} \setminus Q). \quad (2.41)$$

Здесь  $p > 2$ ,  $f \in W_q^{-1}(Q)$  и  $\Delta_p$  —  $p$ -лапласиан, задаваемый формулой

$$\Delta_p u(x) = - \sum_{1 \leq i \leq n} \partial_i \left( |\partial_i u|^{p-2} \partial_i u \right). \quad (2.42)$$

**Определение 2.1.** Функция  $u \in \mathring{W}_p^1(Q)$  называется обобщенным решением задачи (2.40), (2.41), если для любого  $\xi \in \mathring{W}_p^1(Q)$  справедливо интегральное тождество

$$\langle \Delta_p u, \xi \rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q |\partial_i R_Q u|^{p-2} \partial_i R_Q u \partial_i \xi \, dx = \int_Q f \xi \, dx. \quad (2.43)$$

Как известно [15, 33],  $p$ -лапласиан  $\Delta_p : \mathring{W}_p^1(Q) \rightarrow W_q^{-1}(Q)$  является ограниченным, максимально сильно монотонным оператором, деминепрерывным и коэрцитивным, удовлетворяющим условию сильной эллиптичности. Особенностью рассмотрения данной задачи является то, что благодаря наличию разностного оператора дифференциально-разностный оператор  $\Delta_p R$  в отличие от дифференциального оператора  $\Delta_p$  не только не обладает свойством монотонности, но и затруднительно предложить условия на  $R$ , когда этот оператор удовлетворяет условию эллиптичности, см. пример 2.1 ниже. Поэтому рассмотрение данного уравнения методами предыдущих разделов весьма проблематично.

В этом разделе будут использована связь  $p$ -лапласиана с оператором двойственности в  $L_p$ . Благодаря этому удастся сформулировать достаточные условия существования обобщенного решения

задачи (2.40), (2.41) в терминах сильной аккретивности оператора  $R_Q^{-1}$ , см. определение 2.3. Заметим, что как и в предыдущей главе, в отличие от линейной теории важное значение имеют свойства не оператора  $R_Q$ , а оператора  $R_Q^{-1}$ . Ниже будет доказано, что сильная аккретивность оператора  $R_Q^{-1}$  гарантирует псевдомонотонность оператора  $\Delta_p R_Q$ .

Для простоты изложения будет рассмотрен  $p$ -лапласиан без младших членов. При наличии младших членов, определяемых непрерывными функциями типа Каратеодори, очевидно, что псевдомонотонность оператора  $\Delta R_Q + \mathcal{A}^0 R_Q$  сохраняется: в лемме 1.11 показано, что при  $u_m \rightharpoonup m$  в  $\dot{W}(Q)$

$$\begin{aligned} \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}^0 R_Q u_m - \mathcal{A}^0_R u, u_m - u \rangle &= \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} \int_Q (A_0(x, R_Q u_m, \nabla R_Q u_m) - A_0(x, R_Q u, \nabla R_Q u)) (u_m - u) dx = 0, \end{aligned}$$

что и доказывает псевдомонотонность оператора  $\Delta_p R_Q + \mathcal{A}^0 R_Q$  при псевдомонотонности  $\Delta_p R_Q$ . Сохранение условия коэрцитивности может потребовать дополнительных условий, например, если  $\langle \mathcal{A}^0 R_Q u, u \rangle \geq 0$  или выполнено условие (1.39) из леммы 1.12.

**2.3.1. Примеры при  $Q \subset \mathbb{R}$ .** Проиллюстрируем некоторые особенности дифференциально-разностного оператора с  $p$ -лапласианом на примерах при  $Q \subset \mathbb{R}$ .

Первый пример показывает, что даже при «хорошем» разностном операторе дифференциально-разностный оператор с  $p$ -лапласианом может не удовлетворять алгебраическому условию эллиптичности. При этом будет рассмотрен симметрический положительно определенный разностный оператор  $R_Q$  с  $\dim R_1 = 2$ , который сохраняет сильную эллиптичность дифференциально-разностного оператора с лапласианом, см. [69, 106].

**Пример 2.1.** Пусть  $Q = (0, 2)$ ,  $Ru(x) = u(x) + 0,9u(x + 1) + 0,9u(x - 1)$ ,  $p = 4$ . Разностному оператору соответствует матрица

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0,9 \\ 0,9 & 1 \end{pmatrix}.$$

В терминах разделов 1.1-2.2  $p$ -лапласиан как дифференциальный оператор определяется функциями  $A_i(x, \xi) = A_i(\xi) = |\xi_i|^{p-2} \xi_i$ . Классическое условие эллиптичности для оператора  $\Delta_p R_Q$  будет иметь вид

$$\sum_{i=1; l=1,2} [A_i((R_s \zeta)_i) - A_i((R_s \eta)_i)] (\zeta_i - \eta_i) > 0,$$

где  $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{N(s) \times n}$ ,  $\zeta \neq \eta$ . В нашем примере  $n = 1$ ,  $N(1) = 2$ . Рассмотрим  $\zeta = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$ ,  $\eta = \begin{pmatrix} 4 \\ -4 \end{pmatrix}$ . Тогда  $R_1 \zeta = \begin{pmatrix} -0,8 \\ -1,1 \end{pmatrix}$ ,  $R_1 \eta = \begin{pmatrix} 0,4 \\ -0,4 \end{pmatrix}$ . Нетрудно посчитать, что

$$\sum_{l=1,2} [A_1((R_1 \zeta)_l) - A_1((R_1 \eta)_l)] (\zeta_l - \eta_l) = -0,806 < 0.$$

Условие эллиптичности нарушено.

Далее построим явные решения некоторых дифференциально-разностных уравнений с  $p$ -лапласианом. Будет показано, что такие уравнения могут иметь неединственное решение, более того, множество решений может быть не конечно.

**Пример 2.2.** Пусть  $p \in (2, \infty)$ ,  $Q = (0, 3)$ ,

$$Ru(x) = u(x) + u(x + 1) + u(x + 2). \tag{2.44}$$

Рассмотрим задачу

$$- (|Ru'|^{p-2} Ru')'(x) = 1 \quad (x \in (0, 3)), \tag{2.45}$$

$$u(x) = 0 \quad (x \in [-1, 0] \cup [3, 4]). \tag{2.46}$$

Этому разностному оператору соответствует матрица  $R_1$ :

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2} (R_1 + R_1^*) = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} > 0.$$

Введем функции

$$\begin{aligned} v_1(x) &= u(x) & (x \in (0, 1)), \\ v_2(x) &= u(x + 1) & (x \in (0, 1)), \\ v_3(x) &= u(x + 2) & (x \in (0, 1)). \end{aligned}$$

Из уравнения (2.45) получим систему уравнений при  $x \in (0, 1)$ :

$$- (|v_1'(x) + v_2'(x) + v_3'(x)|^{p-2} (v_1'(x) + v_2'(x) + v_3'(x)))' = 1, \quad (2.47)$$

$$- (|v_2'(x) + v_3'(x)|^{p-2} (v_2'(x) + v_3'(x)))' = 1, \quad (2.48)$$

$$- (|v_3'(x)|^{p-2} (v_3'(x)))' = 1. \quad (2.49)$$

Общее решение системы уравнений (2.47)-(2.49) имеет вид

$$v_1(x) + v_2(x) + v_3(x) = \tilde{v}_1(x) = \frac{p-1}{p} \left( k_1 - |x - k_2|^{\frac{p}{p-1}} \right),$$

$$v_2(x) + v_3(x) = \tilde{v}_2(x) = \frac{p-1}{p} \left( k_3 - |x - k_4|^{\frac{p}{p-1}} \right),$$

$$v_3(x) = \tilde{v}_3(x) = \frac{p-1}{p} \left( k_5 - |x - k_6|^{\frac{p}{p-1}} \right),$$

т. е.

$$v_1(x) = \frac{p-1}{p} \left( k_1 - k_3 - |x - k_2|^{\frac{p}{p-1}} + |x - k_4|^{\frac{p}{p-1}} \right),$$

$$v_2(x) = \frac{p-1}{p} \left( k_3 - k_5 - |x - k_4|^{\frac{p}{p-1}} + |x - k_6|^{\frac{p}{p-1}} \right).$$

Запишем уравнения для определения констант  $k_i$ . Из краевых условий (2.46) имеем, что  $u(0) = v_1(0) = 0$ ,  $u(3) = v_3(1) = 0$ . То есть

$$k_1 - k_3 - |k_2|^{\frac{p}{p-1}} + |k_4|^{\frac{p}{p-1}} = 0, \quad (2.50)$$

$$k_5 - |1 - k_6|^{\frac{p}{p-1}} = 0. \quad (2.51)$$

Из вложения  $\dot{W}_4^1(0, 2) \subset C[0, 2]$  следует, что  $v_1(1) = u(1-0) = u(1+0) = v_2(0)$  и  $v_2(1) = u(2-0) = u(2+0) = v_3(0)$ , т. е.

$$k_1 - k_3 - |1 - k_2|^{\frac{p}{p-1}} + |1 - k_4|^{\frac{p}{p-1}} = k_3 - k_5 - |k_4|^{\frac{p}{p-1}} + |k_6|^{\frac{p}{p-1}}, \quad (2.52)$$

$$k_3 - k_5 - |1 - k_4|^{\frac{p}{p-1}} + |1 - k_6|^{\frac{p}{p-1}} = k_5 - |k_6|^{\frac{p}{p-1}}. \quad (2.53)$$

Поскольку правая часть уравнения (2.45) — регулярная функция, то

$$Ru'|_{x=1-0} = Ru'|_{x=1+0}, \quad Ru'|_{x=2-0} = Ru'|_{x=2+0}. \quad (2.54)$$

Равенства (2.54) эквивалентны равенствам  $\tilde{v}_1'(1) = \tilde{v}_2'(0)$  и  $\tilde{v}_2'(1) = \tilde{v}_3'(0)$ , т. е.

$$|1 - k_2| = |0 - k_4|, \quad |1 - k_4| = |0 - k_6|. \quad (2.55)$$

С учетом равенств (2.55) и (2.52) получаем  $k_1 - k_3 = k_3 - k_5$ . А соотношения (2.53), (2.51) и (2.55) дают, что  $k_1 = k_3 = k_5$ . То есть,

$$k_1 = k_3 = k_5 = |1 - k_6|^{\frac{p}{p-1}}, \quad |k_2| = |k_4| = |1 - k_6|, \quad k_2 = \frac{1}{2}.$$

Существуют по меньшей мере два набора констант, соответствующих этим условиям. Выпишем решения, соответствующие этим наборам.

Если  $k_2 = k_4 = k_6 = \frac{1}{2}$ ,  $k_1 = k_3 = k_5 = \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}}$ , то

$$u(x) = \frac{p-1}{p} \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}} - \left|x - \frac{5}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}, & x \in [2, 3], \\ 0, & x \notin (2, 3). \end{cases}$$

Если  $k_2 = k_4 = \frac{1}{2}$ ,  $k_6 = -\frac{1}{2}$ ,  $k_1 = k_3 = k_5 = \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}}$ , то

$$u(x) = \frac{p-1}{p} \begin{cases} \left|x - \frac{1}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}} - \left|x - \frac{3}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}, & x \in [1, 2], \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}} - \left|x - \frac{3}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}, & x \in [2, 3], \\ 0, & x \notin (1, 3). \end{cases}$$

При этом

$$R_Q u(x) = \frac{p-1}{p} \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}} - \left|x - \frac{1}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}, & x \in (0, 1], \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}} - \left|x - \frac{3}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}, & x \in [1, 2], \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}} - \left|x - \frac{5}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}, & x \in [2, 3). \end{cases}$$

и

$$R_Q u(x) = \frac{p-1}{p} \begin{cases} \left|x - \frac{1}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}} - \left|x - \frac{3}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}, & x \in [1, 2], \\ \left(\frac{3}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}} - \left|x - \frac{3}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}, & x \in [2, 3), \\ 0, & x \notin (1, 3). \end{cases}$$

Задача (2.45), (2.46) с разностным оператором из (2.44) имеет два решения.

**Пример 2.3.** Пусть  $p \in (2, \infty)$ ,  $Q = (0, 3)$ . Рассмотрим задачу (2.45), (2.46) при

$$Ru(x) = u(x) + u(x+2). \quad (2.56)$$

Этому разностному оператору соответствует матрица  $R_1$ :

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{2}(R_1 + R_1^*) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/2 & 0 & 1 \end{pmatrix} > 0.$$

Как и в предыдущем примере, введем функции

$$v_1(x) = u(x) \quad (x \in (0, 1)),$$

$$v_2(x) = u(x+1) \quad (x \in (0, 1)),$$

$$v_3(x) = u(x+2) \quad (x \in (0, 1)).$$

Из уравнения (2.45) получим систему уравнений при  $x \in (0, 1)$ :

$$- (|v_1'(x) + v_2'(x) + v_3'(x)|^{p-2} (v_1'(x) + v_2'(x) + v_3'(x)))' = 1, \quad (2.57)$$

$$- (|v_2'(x)|^{p-2} v_2'(x))' = 1, \quad (2.58)$$

$$- (|v_3'(x)|^{p-2} v_3'(x))' = 1. \quad (2.59)$$

Общее решение системы уравнений (2.57)–(2.59) имеет вид

$$v_1(x) + v_3(x) = \tilde{v}_1(x) = \frac{p-1}{p} \left( k_1 - |x - k_2|^{\frac{p}{p-1}} \right),$$

$$v_2(x) = \tilde{v}_2(x) = \frac{p-1}{p} \left( k_3 - |x - k_4|^{\frac{p}{p-1}} \right),$$

$$v_3(x) = \tilde{v}_3(x) = \frac{p-1}{p} \left( k_5 - |x - k_6|^{\frac{p}{p-1}} \right),$$

т. е.

$$v_1(x) = \frac{p-1}{p} \left( k_1 - k_5 - |x - k_2|^{\frac{p}{p-1}} + |x - k_6|^{\frac{p}{p-1}} \right).$$

Запишем уравнения для определения констант  $k_i$ . Из краевых условий (2.46) имеем, что  $u(0) = v_1(0) = 0$  и  $u(3) = v_3(1) = 0$ , т. е.

$$k_1 - k_5 - |k_2|^{\frac{p}{p-1}} + |k_6|^{\frac{p}{p-1}} = 0, \tag{2.60}$$

$$k_5 - |1 - k_6|^{\frac{p}{p-1}} = 0. \tag{2.61}$$

Из вложения  $\mathring{W}_4^1(0, 2) \subset C[0, 2]$  следует, что  $v_1(1) = u(1-0) = u(1+0) = v_2(0)$  и  $v_2(1) = u(2-0) = u(2+0) = v_3(0)$ , т. е.

$$k_1 - k_5 - |1 - k_2|^{\frac{p}{p-1}} + |1 - k_6|^{\frac{p}{p-1}} = k_3 - |k_4|^{\frac{p}{p-1}}, \tag{2.62}$$

$$k_3 - |1 - k_4|^{\frac{p}{p-1}} = k_5 - |k_6|^{\frac{p}{p-1}}. \tag{2.63}$$

Далее, поскольку правая часть уравнения (2.45) — регулярная функция, то должно выполняться (2.54), т. е.  $|1 - k_2| = |0 - k_4|$ ,  $|1 - k_4| = |0 - k_6|$ . Таким образом, получаем соотношения для коэффициентов:

$$k_1 = k_3 = k_5 = |1 - k_6|^{\frac{p}{p-1}}, \quad |k_2| = |k_6| = |1 - k_4|. \tag{2.64}$$

Этим условиям, например, удовлетворяют наборы:

$$k_2 = k_4 = k_6 = \frac{1}{2}, \quad k_1 = k_3 = k_5 = \left| \frac{1}{2} \right|^{\frac{p}{p-1}};$$

$$k_2 = k_6 = z (z \in \mathbb{R}_+), \quad k_4 = -(z - 1), \quad k_1 = k_3 = k_5 = |1 - z|^{\frac{p}{p-1}}.$$

Следовательно, задача (2.45), (2.46) с разностным оператором из (2.56) имеет бесконечное множество решений, в частности,

$$u(x) = \frac{p-1}{p} \begin{cases} 0, & x \notin [1, 3], \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}} - \left|x - \frac{3}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}, & x \in [1, 2], \\ \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p}{p-1}} - \left|x - \frac{5}{2}\right|^{\frac{p}{p-1}}, & x \in [2, 3], \end{cases}$$

и

$$u(x) = \frac{p-1}{p} \begin{cases} 0, & x \notin (0, 3), \\ |x + z|^{\frac{p}{p-1}} - |x - z|^{\frac{p}{p-1}}, & x \in [0, 1], \\ |1 + z|^{\frac{p}{p-1}} - |x + z - 2|^{\frac{p}{p-1}}, & x \in [1, 3], \end{cases}$$

где  $z \in \mathbb{R}_+$ .

### 2.3.2. Достаточное условие сильной аккретивности.

**Определение 2.2** (см. [33, гл. 2, п. 2.2]). Отображение  $J : X \rightarrow X^*$  из банахова пространства  $X$  в сопряженное ему  $X^*$  называется *отображением двойственности относительно функции  $\Phi$* , если

$$\langle Ju, u \rangle_X = \|Ju\|_{X^*} \|u\|_X \quad \text{и} \quad \|Ju\|_{X^*} = \Phi(\|u\|_X) \quad \forall u \in X.$$

Учтем, что стандартным оператором двойственности пространства Лебега  $L_p(Q)$  является оператор  $J$  относительно функции  $\Phi(r) = r^{p-1}$ , заданный формулой  $Ju = |u|^{p-2}u$ , а для пространства  $\mathring{W}_p^1(Q)$  оператор двойственности задан  $p$ -лапласианом.

**Определение 2.3.** Линейный оператор  $\widehat{R}_Q : L_p(Q) \rightarrow L_p(Q)$  называется *аккретивным*, если  $\langle Ju, \widehat{R}_Q u \rangle \equiv \int_Q Ju \widehat{R}_Q u \, dx \geq 0$  для любого  $u \in L_p(Q)$ . Аккретивный линейный оператор  $\widehat{R}_Q : L_p(Q) \rightarrow L_p(Q)$  *сильно аккретивен*, если

$$\langle Ju, \widehat{R}_Q u \rangle \equiv \int_Q Ju \widehat{R}_Q u \, dx \geq c_a \|u\|_{L_p(Q)}^p. \quad (2.65)$$

В дальнейшем под  $\widehat{R}_Q$  мы будем понимать либо оператор  $R_Q^{-1}$ , либо его часть  $R_{Q_{s_\nu}}^{-1}$  в предположении, что  $\det R_{s_\nu} \neq 0$  ( $\nu = 1, \dots, n_1$ ).

Очевидно, что если оператору  $\widehat{R}_Q$  соответствуют диагональные матрицы, то  $\widehat{R}_Q$  сильно аккретивен тогда и только тогда, когда диагональные элементы этих матриц строго положительны, причем константа  $c_a$  определена минимальным диагональным элементом. Заметим также, что по построению сумма аккретивных операторов является аккретивным оператором. Для сильной аккретивности суммы аккретивных операторов достаточно сильной аккретивности одного из элементов суммы.

Докажем вспомогательную оценку.

**Лемма 2.7.** Пусть  $\lambda, a, b \in \mathbb{R}_+$ ,  $p > 2$ . Тогда

$$a^p \pm \lambda ab (a^{p-2} - b^{p-2}) + b^p > 0 \quad \forall a, b \in \mathbb{R}_+, \quad (2.66)$$

если  $\lambda \in \mathbb{R}_+$  удовлетворяет оценке

$$\frac{\lambda^p}{\lambda + 1} < \frac{p^p}{(p-1)^{p-1}}. \quad (2.67)$$

В частности, оценка (2.66) справедлива, если

$$\lambda < \frac{p}{p-1} p^{-1} \sqrt[p]{p} = qp^{1/q}. \quad (2.68)$$

Если в оценке (2.67) или (2.68) неравенство нестрогое, то в оценке (2.66) неравенство тоже нестрогое.

*Доказательство.* В силу вида формулы (2.66), не нарушая общности, будем считать, что  $a \geq b$  (иначе поменяем  $a$  и  $b$  местами). Оценим сначала

$$a^p + \lambda ab (a^{p-2} - b^{p-2}) + b^p = a^p \left( 1 + \lambda \frac{b}{a} - \lambda \left( \frac{b}{a} \right)^{p-1} + \left( \frac{b}{a} \right)^p \right).$$

Из неравенств  $p > 2$  и  $b/a \leq 1$  следует, что  $b/a \geq (b/a)^{p-1}$  и

$$1 + \lambda \frac{b}{a} - \lambda \left( \frac{b}{a} \right)^{p-1} + \left( \frac{b}{a} \right)^p \geq 1 + \left( \frac{b}{a} \right)^p > 0 \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}_+.$$

Теперь рассмотрим (2.66), если при  $\lambda$  мы имеем противоположный знак. Поскольку  $(b/a)^{p-1} \geq (b/a)^p$ , то

$$1 - \lambda \frac{b}{a} + \lambda \left( \frac{b}{a} \right)^{p-1} + \left( \frac{b}{a} \right)^p \geq 1 - \lambda \frac{b}{a} + (\lambda + 1) \left( \frac{b}{a} \right)^p.$$

Используя известную формулу  $ab \leq a^p/p + b^q/q$ , получим, что

$$1 - \lambda \frac{b}{a} + (\lambda + 1) \left( \frac{b}{a} \right)^p \geq 1 - \frac{\lambda^q}{q\varepsilon^q} - \frac{\varepsilon^p}{p} \left( \frac{b}{a} \right)^p + (\lambda + 1) \left( \frac{b}{a} \right)^p > 0$$

при  $1 - \frac{\lambda^q}{q\varepsilon^q} \geq 0$  и  $(\lambda + 1) > \frac{\varepsilon^p}{p}$ . Пусть  $\varepsilon = \frac{\lambda}{q^{1/q}}$ . Тогда  $(\lambda + 1) > \frac{\varepsilon^p}{p} = \lambda^p p^{-1} q^{-p/q}$ . Следовательно,

$$\frac{\lambda^p}{\lambda + 1} < pq^{p/q} = \frac{p^p}{(p-1)^{p-1}}.$$

Рассмотрим оценку (2.68). Если  $\lambda < \frac{p}{p-1} p^{-1/\sqrt{p}}$ , то  $\lambda^{p-1} < p \left( \frac{p}{p-1} \right)^{p-1}$ , т. е.  $\frac{\lambda^p}{\lambda+1} < \frac{p^p}{(p-1)^{p-1}}$ .

Для нестрогих оценок доказательство аналогично.  $\square$

**Лемма 2.8.** Пусть оператору  $\widehat{R}_Q : L_p(Q) \rightarrow L_p(Q)$  соответствуют матрицы  $\widehat{R}_s = \{\widehat{r}_{ml}^s\}$  такие, что для всех  $s = 1, \dots, n_1$  и любых  $m = 1, 2, \dots, N(s)$  справедлива оценка

$$2\widehat{r}_{mm}^s > \lambda^{-1} \sum_{l \neq m} |\widehat{r}_{ml}^s - \widehat{r}_{lm}^s| + \sum_{l \neq m} |\widehat{r}_{ml}^s + \widehat{r}_{lm}^s|, \quad (2.69)$$

где  $\lambda$  удовлетворяет (2.67) или (2.68). Тогда  $\widehat{R}_Q$  сильно аккретивен. Если в (2.69) равенство нестрогое для какого-то  $s$  или  $m$ , то  $\widehat{R}_Q$  аккретивен.

*Доказательство.* В силу представления (1.18),

$$\begin{aligned} \langle Ju, \widehat{R}_Q u \rangle &= \sum_s \int_{Q_s} |P_s u|^{p-2} (P_s u) \left( U_s^{-1} \widehat{R}_s U_s P_s u \right) dx = \\ &= \sum_s \int_{Q_{s1}} \left( U_s (|P_s u|^{p-2} (P_s u)), \widehat{R}_s U_s P_s u \right) dx = \\ &= \sum_s \sum_{1 \leq m, l \leq N(s)} \int_{Q_{s1}} \widehat{r}_{ml}^s |u(x+h_{sm})|^{p-2} u(x+h_{sm}) u(x+h_{sl}) dx. \end{aligned} \quad (2.70)$$

Оценим подынтегральное выражение в (2.70). Пусть  $\xi \in \mathbb{R}^{N(s)}$  — произвольный вектор. Обозначим через  $\widehat{r}_{ml}^{s, sym} = \frac{1}{2}(\widehat{r}_{ml}^s + \widehat{r}_{lm}^s)$  и  $\widehat{r}_{ml}^{s, sk} = \frac{1}{2}(\widehat{r}_{ml}^s - \widehat{r}_{lm}^s)$  коэффициенты симметрической и кососимметрической частей матрицы  $\widehat{R}_s$ . Тогда

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq m, l \leq N(s)} \widehat{r}_{ml}^s |\xi_m|^{p-2} \xi_m \xi_l &= \sum_{1 \leq m, l \leq N(s)} \widehat{r}_{ml}^{s, sk} |\xi_m|^{p-2} \xi_m \xi_l + \sum_{1 \leq m, l \leq N(s)} \widehat{r}_{ml}^{s, sym} |\xi_m|^{p-2} \xi_m \xi_l \geq \\ &\geq \lambda^{-1} \sum_{1 \leq m < l \leq N(s)} |\widehat{r}_{ml}^{s, sk}| (|\xi_m|^p - \lambda |\xi_m \xi_l| | |\xi_m|^{p-2} - |\xi_l|^{p-2} | + |\xi_l|^p) + \\ &+ \sum_{1 \leq m < l \leq N(s)} |\widehat{r}_{ml}^{s, sym}| (|\xi_m|^p + \text{sign}(\widehat{r}_{ml}^{s, sym}) (|\xi_m|^{p-2} + |\xi_l|^{p-2}) \xi_m \xi_l + |\xi_l|^p) + \sum_{1 \leq m \leq N(s)} \widehat{r}_{mm}^s |\xi_m|^p - \\ &- \lambda^{-1} \sum_{1 \leq m < l \leq N(s)} |\widehat{r}_{ml}^{s, sk}| (|\xi_m|^p + |\xi_l|^p) - \sum_{1 \leq m < l \leq N(s)} |\widehat{r}_{ml}^{s, sym}| (|\xi_m|^p + |\xi_l|^p). \end{aligned} \quad (2.71)$$

Первое слагаемое правой части (2.71) неотрицательно в силу оценки (2.66). Второе слагаемое правой части (2.71) неотрицательно, поскольку

$$|\xi_m|^p \pm |\xi_m|^{p-2} \xi_m \xi_l \pm |\xi_l|^{p-2} \xi_m \xi_l + |\xi_l|^p \geq (|\xi_m|^{p-1} - |\xi_l|^{p-1})(|\xi_m| - |\xi_l|) \geq 0.$$

Следовательно,

$$\sum_{1 \leq m, l \leq N(s)} \widehat{r}_{ml}^s |\xi_m|^{p-2} \xi_m \xi_l \geq \sum_{1 \leq m \leq N(s)} \left( \widehat{r}_{mm}^s - \lambda^{-1} \sum_{l \neq m} |\widehat{r}_{ml}^{s, sk}| - \sum_{l \neq m} |\widehat{r}_{ml}^{s, sym}| \right) |\xi_m|^p. \quad (2.72)$$

Подставляя оценку (2.72) в (2.70), получаем, что

$$\begin{aligned} \langle Ju, \widehat{R}_Q u \rangle &= \sum_s \int_{Q_s} |P_s u|^{p-2} (P_s u) \left( U_s^{-1} \widehat{R}_s U_s P_s u \right) dx \geq \\ &\geq \sum_s \int_{Q_{s1}} \sum_{1 \leq m \leq N(s)} \left( \widehat{r}_{mm}^s - \lambda^{-1} \sum_{l \neq m} |\widehat{r}_{ml}^{s, sk}| - \sum_{l \neq m} |\widehat{r}_{ml}^{s, sym}| \right) |u(x+h_{sm})|^p dx = \end{aligned}$$

$$= \sum_s \sum_{1 \leq m \leq N(s)} \left( \widehat{r}_{mm}^s - \lambda^{-1} \sum_{l \neq m} |\widehat{r}_{ml}^{s,sk}| - \sum_{l \neq m} |\widehat{r}_{ml}^{s,sym}| \right) \|u\|_{L_p(Q_{sm})}^p. \quad (2.73)$$

Таким образом, если справедлива оценка (2.67), то оператор  $\widehat{R}_Q$  сильно аккретивен с константой

$$c_a = \min_m \left\{ \widehat{r}_{mm}^s - \lambda^{-1} \sum_{l \neq m} |\widehat{r}_{ml}^{s,sk}| - \sum_{l \neq m} |\widehat{r}_{ml}^{s,sym}| \right\}. \quad (2.74)$$

Очевидно, что если для некоторого  $s$  или  $m$  в (2.69) неравенство нестрогое, то из (2.73) следует, что  $\langle Ju, \widehat{R}_Q u \rangle \geq 0$ , оператор  $\widehat{R}_Q$  аккретивен.  $\square$

**Замечание 2.2.** Пусть  $\lambda_{max}(p)$  удовлетворяет соотношению  $\frac{\lambda_{max}(p)^p}{\lambda_{max}(p) + 1} = \frac{p^p}{(p-1)^{p-1}}$ . В силу неравенства (2.67)  $\lambda_{max}(p)$  монотонно убывает при росте  $p$ ,  $\lambda_{max}(p) \in (1, 2 + 2\sqrt{2}]$  для  $p \geq 2$  и  $\lambda_{max}(p) \rightarrow 1$  при  $p \rightarrow \infty$ .

**Пример 2.4.** Пусть  $Q = (0, 2) \times (0, 1)$  и

$$Ru(x) = 4u(x_1, x_2) + 4u(x_1 + 1, x_2) - 3u(x_1 - 1, x_2).$$

Этому оператору соответствует матрица

$$R_1 = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Обратной к ней является матрица

$$R_1^{-1} = \frac{1}{28} \begin{pmatrix} 4 & -4 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Для любого  $p \in (2, \infty)$  существует  $\varepsilon > 0$  такое, что  $\lambda = 1 + \varepsilon$  удовлетворяет условию (2.67). Тогда

$$2 \cdot \frac{4}{28} > \frac{1}{1 + \varepsilon} \left| -\frac{4}{28} - \frac{3}{28} \right| + \left| -\frac{4}{28} + \frac{3}{28} \right| \Leftrightarrow 8 > \frac{7}{1 + \varepsilon} + 1.$$

Условие (2.69) удовлетворено, оператор  $R_Q^{-1}$  сильно аккретивен.

**Пример 2.5.** Пусть  $Q = (0, 2) \times (0, 1)$  и

$$Ru(x) = u(x_1, x_2) + 5u(x_1 + 1, x_2) - 5u(x_1 - 1, x_2).$$

Этому оператору соответствует матрица

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратной к ней является матрица

$$R_1^{-1} = \frac{1}{26} \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 5 & 1 \end{pmatrix}.$$

Симметрические части матриц  $R_1$  и  $R_1^{-1}$  положительно определены, т. е. при  $p = 2$  разностный оператор  $R_Q$  сохраняет сильную эллиптичность оператора  $\Delta R_Q$ , см. примеры из [106, §9]. Легко проверить, что условие (2.69) нарушено:

$$\frac{1}{26} < \lambda^{-1} \frac{5}{26} \quad \forall \lambda \in (1, 2 + 2\sqrt{2}),$$

мы не можем гарантировать сильную аккретивность оператора  $R_Q^{-1}$ .

**Пример 2.6.** Пусть  $Q = (0, 2) \times (0, 1)$  и

$$Ru(x) = u(x_1, x_2) - 2u(x_1 + 1, x_2) + u(x_1 - 1, x_2).$$

Тогда  $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$  и  $R_1^{-1} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ . Условие (2.69) удовлетворено, если

$$2 \cdot \frac{1}{3} > \lambda^{-1} \left| \frac{2}{3} - \frac{-1}{3} \right| + \left| \frac{2}{3} + \frac{-1}{3} \right| \Rightarrow \lambda < 3.$$

Оператор  $R_Q^{-1}$  сильно аккретивен при  $p \in (2, 3)$ .

**Пример 2.7.** Пусть  $Q = (0, 3) \times (0, 1)$  и

$$Ru(x) = u(x_1, x_2) - u(x_1 + 1, x_2) + u(x_1 + 2, x_2).$$

Тогда  $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  и  $R_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Для любого  $p \in (2, \infty)$  существует  $\varepsilon > 0$  такое, что  $\lambda = 1 + \varepsilon$  удовлетворяет условию (2.65):

$$2 \cdot 1 > (1 + \varepsilon)^{-1} |1 - 0| + |1 + 0|, \quad 2 \cdot 1 > (1 + \varepsilon)^{-1} |0 - 1| + |0 + 1|.$$

Условие (2.69) удовлетворено, оператор  $R_Q^{-1}$  сильно аккретивен.

**2.3.3. Свойства оператора  $\Delta_p R_Q$  и существование обобщенного решения.** Сначала сформулируем несколько свойств оператора двойственности, действующего в сепарабельном, рефлексивном, банаховом пространстве.

**Лемма 2.9.** Пусть  $u_m \rightharpoonup u$  в  $L_p(Q)$ . Тогда

$$\varliminf_{m \rightarrow \infty} \langle Ju_m, u_m \rangle \geq \langle Ju, u \rangle. \tag{2.75}$$

*Доказательство.* Согласно определению оператора двойственности, неравенство (2.75) следует из свойства предела норм слабо сходящихся последовательностей: так как  $\varliminf_{m \rightarrow \infty} \|u_m\| \geq \|u\|$ , то  $\varliminf_{m \rightarrow \infty} \|u_m\|^p = \varliminf_{m \rightarrow \infty} \langle Ju_m, u_m \rangle \geq \langle Ju, u \rangle = \|u\|^p$ , см., например, [15, лемма 5.3, гл. 1].  $\square$

Для двух следующих лемм потребуется покоординатное представление элементов пространств Лебега  $L_p(Q)$  и  $L_q(Q)$ . Введем биортогональный базис пары пространств  $L_p(Q)$  и  $L_q(Q)$ . Поскольку эти пространства рефлексивны, сепарабельны и банаховы, то существует<sup>1</sup> базис  $\{e_i, g_i\}$  такой, что  $\{e_i\}$  — базис в  $L_p(Q)$ ,  $\{g_i = J(e_i)\}$  — базис в  $L_q(Q)$ , а  $\langle e_i, J(e_j) \rangle = \delta_{ij}$ . При этом каждому элементу  $u \in L_p(Q)$  ставится в соответствие ряд Фурье

$$u = \sum_{1 \leq i < \infty} \langle g_i, u \rangle e_i \equiv \sum_{1 \leq i < \infty} u^{(i)} e_i, \tag{2.76}$$

соответственно, элементы  $J(u)$  имеют разложение в ряд Фурье

$$J(u) = \sum_{1 \leq i < \infty} \langle J(u), e_i \rangle g_i \equiv \sum_{1 \leq i < \infty} (Ju)^{(i)} g_i. \tag{2.77}$$

Распишем формально:

$$\begin{aligned} J(u) &= |u|^{p-2} u = \left| \sum_{1 \leq i < \infty} u^{(i)} e_i \right|^{p-2} \sum_{1 \leq i < \infty} u^{(i)} e_i = \\ &= \sum_{1 \leq i < \infty} |u^{(i)}|^{p-2} u^{(i)} |e_i|^{p-2} e_i + \sum_{1 \leq i < \infty} \sum_{j_1 j_2 \dots : \exists j_k \neq i} c_{j_1 j_2 \dots} \prod_{\sum p_{j_l} = p-2} |e_{j_l}|^{p_{j_l}} e_{j_l}, \end{aligned}$$

т. е. в первой сумме участвуют слагаемые с одинаковыми функциями  $|e_i|^{p-2} e_i$ , а во второй сумме — в произведении обязательно будут участвовать не менее двух различных функций  $e_{j_k}$  и  $e_{j_l}$ ,

<sup>1</sup>В общем случае переход к покоординатному представлению с использованием биортогонального базиса описан, например, в [35].

$k \neq l$ . По определению биортогональной системы,  $\left\langle \prod_{\sum p_{j_i} = p-2; j_k \neq i} |e_{j_i}|^{p_{j_i}} e_i, e_j \right\rangle = 0$ . Таким образом,

$$\begin{aligned} \langle J(u), e_i \rangle &= \sum_{1 \leq j < \infty} |u^{(j)}|^{p-2} u^{(j)} \langle |e_j|^{p-2} e_j, e_i \rangle = |u^{(i)}|^{p-2} u^{(i)} \langle |e_i|^{p-2} e_i, e_i \rangle = |u^{(i)}|^{p-2} u^{(i)}, \\ J(u) &= \sum_{1 \leq i < \infty} |u^{(i)}|^{p-2} u^{(i)} g_i. \end{aligned} \quad (2.78)$$

Поскольку ряд коэффициентов  $u$  суммируем в степени  $p$  ( $\sum_{1 \leq i < \infty} |u^{(i)}|^p < \infty$ ), то ряд коэффициентов  $Ju$  суммируем в степени  $q$ :

$$\sum_{1 \leq i < \infty} |(Ju)^{(i)}|^q = \sum_{1 \leq i < \infty} \left( |u^{(i)}|^{p-1} \right)^q = \sum_{1 \leq i < \infty} |u^{(i)}|^p < \infty.$$

**Лемма 2.10.** Пусть  $u_m \rightharpoonup u$  в  $L_p(Q)$ . Тогда  $J(u_m) \rightharpoonup J(u)$  в  $L_q(Q)$ .

*Доказательство.* В силу слабой сходимости последовательности  $\{u_m\}$ , эта последовательность сходится покоординатно:  $u_m^{(i)} \rightarrow u^{(i)}$  для всех  $i$ . Но тогда имеем сходимость  $|u_m^{(i)}|^{p-2} u_m^{(i)} \rightarrow |u^{(i)}|^{p-2} u^{(i)}$ . С учетом связи покоординатного представления элементов  $u_m, u$  и  $J(u_m), J(u)$ , см. (2.78), получена покоординатная сходимость  $J(u_m) \rightarrow J(u)$ . Покоординатная сходимость в рефлексивном банаховом пространстве эквивалентна слабой, а двух различных слабых пределов не существует, т. е.  $J(u_m) \rightharpoonup J(u)$  в  $L_q(Q)$ .  $\square$

**Лемма 2.11.** Пусть  $u_m \rightharpoonup u$  в  $L_p(Q)$ . Тогда для произвольного сильно аккретивного оператора  $\widehat{R}_Q$  справедливо, что

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \langle Ju_m, \widehat{R}_Q u_m \rangle \geq \langle Ju, \widehat{R}_Q u \rangle. \quad (2.79)$$

*Доказательство.* Пусть  $u_m \rightharpoonup u$  в  $L_p(Q)$ . Тогда  $Ju_m \rightharpoonup Ju$  в  $L_q(Q)$  (см. лемму 2.10) и  $\widehat{R}_Q u_m \rightharpoonup \widehat{R}_Q u$  (в силу непрерывности оператора  $\widehat{R}_Q$ ). Поскольку  $\langle Ju_m, \widehat{R}_Q u_m \rangle \geq 0$  в силу аккретивности оператора  $\widehat{R}_Q$ , то в случае, когда  $u_m \rightarrow 0$ , выражение (2.79) справедливо. Поэтому рассмотрим случай, когда  $u \neq 0$ . Тогда  $\|u\| \neq 0$  и, с точностью до подпоследовательности,  $\|u_m\| \neq 0$ , а также  $\langle J(u_m), \widehat{R}_Q u_m \rangle \geq c_a \|u_m\|^p > 0$ . Распишем данное выражение с помощью соответствующих рядов Фурье. Поскольку

$$u_m = \sum_{1 \leq i < \infty} u_m^{(i)} e_i, \quad Ju_m = \sum_{1 \leq i < \infty} (Ju_m)^{(i)} g_i = \sum_{1 \leq i < \infty} |u_m^{(i)}|^{p-2} u_m^{(i)} g_i,$$

$$\widehat{R}_Q u_m = \widehat{R}_Q \left( \sum_{1 \leq i < \infty} u_m^{(i)} e_i \right) = \sum_{1 \leq i < \infty} u_m^{(i)} \widehat{R}_Q(e_i)$$

(в силу линейности оператора  $\widehat{R}_Q$ ), то

$$\langle Ju_m, \widehat{R}_Q u_m \rangle = \left\langle \sum_{1 \leq j < \infty} (Ju_m)^{(j)} g_j, \sum_{1 \leq i < \infty} u_m^{(i)} \widehat{R}_Q(e_i) \right\rangle = \sum_{1 \leq i, j < \infty} |u_m^{(j)}|^{p-2} u_m^{(j)} u_m^{(i)} \langle g_j, \widehat{R}_Q(e_i) \rangle > 0.$$

То есть для достаточно больших значений  $\widehat{N} \in \mathbb{N}$  с точностью до подпоследовательностей

$$\sum_{1 \leq i, j \leq \widehat{N}} |u_m^{(j)}|^{p-2} u_m^{(j)} u_m^{(i)} \langle g_j, \widehat{R}_Q(e_i) \rangle > 0.$$

Теперь можно использовать теорему о минимаксе и поменять порядок перехода к пределам в следующей формуле:

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \langle Ju_m, \widehat{R}_Q u_m \rangle = \liminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i, j < \infty} |u_m^{(j)}|^{p-2} u_m^{(j)} u_m^{(i)} \langle g_j, \widehat{R}_Q(e_i) \rangle =$$

$$\begin{aligned}
 &= \varliminf_{m \rightarrow \infty} \lim_{\widehat{N} \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i, j \leq \widehat{N}} |u_m^{(j)}|^{p-2} u_m^{(j)} u_m^{(i)} \langle g_j, \widehat{R}_Q(e_i) \rangle \geq \\
 &\geq \lim_{\widehat{N} \rightarrow \infty} \varliminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i, j \leq \widehat{N}} |u_m^{(j)}|^{p-2} u_m^{(j)} u_m^{(i)} \langle g_j, \widehat{R}_Q(e_i) \rangle = \\
 &= \lim_{\widehat{N} \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i, j \leq \widehat{N}} |u^{(j)}|^{p-2} u^{(j)} u^{(i)} \langle g_j, \widehat{R}_Q(e_i) \rangle = \langle Ju, \widehat{R}_Q u \rangle.
 \end{aligned}$$

□

**Лемма 2.12.** *Оператор  $\Delta_p R_Q : \dot{W}_p^1(Q) \rightarrow W_q^{-1}(Q)$ , заданный формулой (2.43), ограничен и деминепрерывен.*

*Доказательство.*  $p$ -Лапласиан удовлетворяет условию интегрируемости с  $A_i(x, \xi) = |\xi_i|^{p-2} \xi_i$ . Поэтому утверждение леммы 2.12 следует из леммы 1.9.

Можно привести непосредственное доказательство. В силу леммы 1.6 линейный оператор  $R_Q : \dot{W}_p^1(Q) \rightarrow W_p^1(Q)$  ограничен;  $p$ -лапласиан ограничен и деминепрерывен как отображение двойственности в  $\dot{W}_p^1(Q)$ , см. [33, гл. II, пп. 2.2]; следовательно  $\Delta_p R_Q$  также ограничен и деминепрерывен. □

**Лемма 2.13.** *Пусть  $W_p^1(Q) \ni u_m \rightharpoonup u_0 \in W_p^1(Q)$  и*

$$\varliminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i \leq n} \langle J \partial_i u_m, \widehat{R}_Q \partial_i (u_m - u_0) \rangle \leq 0. \tag{2.80}$$

*Тогда, если  $\widehat{R}_Q$  сильно аккретивен, то*

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i \leq n} \langle J \partial_i u_m, \widehat{R}_Q \partial_i u_m \rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} \langle J \partial_i u_0, \widehat{R}_Q \partial_i u_0 \rangle. \tag{2.81}$$

*Доказательство.* Так как  $u_m \rightharpoonup u_0$  в  $W_p^1(Q)$ , то, по определению слабой сходимости в пространстве  $W_p^1(Q)$ ,  $\partial_i u_m \rightharpoonup \partial_i u_0$  в  $L_p(Q)$  для любого  $i = 1, \dots, n$ . Исходя из оценки (2.80), существует индекс  $i = i_1$  такой, что

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \langle J \partial_i u_m, \widehat{R}_Q \partial_i (u_m - u_0) \rangle \leq 0. \tag{2.82}$$

В силу свойств оператора двойственности,  $J(\partial_i u_m) \rightharpoonup J(\partial_i u_0)$  в  $L_q(Q)$  при  $\partial_i u_m \rightharpoonup \partial_i u_0$  в  $L_p(Q)$ , см. лемму 2.10. Кроме того, линейный оператор  $\widehat{R}_Q$  непрерывен, т. е.  $\widehat{R}_Q \partial_i u_m \rightharpoonup \widehat{R}_Q \partial_i u_0$  в  $L_p(Q)$ . Воспользуемся линейностью оператора  $\widehat{R}_Q \partial_i$  и распишем (2.82):

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \langle J \partial_i u_m, \widehat{R}_Q \partial_i u_m \rangle \leq \lim_{m \rightarrow \infty} \langle J \partial_i u_m, \widehat{R}_Q \partial_i u_0 \rangle = \langle J \partial_i u_0, \widehat{R}_Q \partial_i u_0 \rangle \tag{2.83}$$

для  $i = i_1$ . Но в лемме 2.11 доказано, что

$$\varliminf_{m \rightarrow \infty} \langle J \partial_i u_m, \widehat{R}_Q \partial_i u_m \rangle \geq \langle J \partial_i u_0, \widehat{R}_Q \partial_i u_0 \rangle$$

в силу сильной аккретивности  $\widehat{R}_Q$ . Таким образом, для  $i = i_1$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle J \partial_i u_m, \widehat{R}_Q \partial_i u_m \rangle = \langle J \partial_i u_0, \widehat{R}_Q \partial_i u_0 \rangle. \tag{2.84}$$

Из (2.80) и (2.84) следует, что

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \sum_{i \neq i_1} \langle J \partial_i u_m, \widehat{R}_Q \partial_i u_m - \partial_i u_0 \rangle \leq 0. \tag{2.85}$$

Повторяя рассуждения, использованные при выводе (2.84), из (2.85) получим, что существует индекс  $i = i_2 \neq i_1$  такой, что  $\lim_{m \rightarrow \infty} \langle J \partial_i u_m, \widehat{R}_Q \partial_i u_m \rangle = \langle J \partial_i u_0, \widehat{R}_Q \partial_i u_0 \rangle$ . Следовательно, за конечное число шагов мы докажем равенство (2.81). □

**Лемма 2.14.** Пусть разностному оператору  $R_Q : \dot{W}_p^1(Q) \rightarrow W_p^1(Q)$  соответствуют невырожденные матрицы  $R_s, a_h \in \mathbb{R}^1$ . Кроме того, пусть обратный оператор  $R_Q^{-1}$  сильно аккретивен<sup>2</sup>. Тогда оператор  $\Delta_p R_Q : \dot{W}_p^1(Q) \rightarrow W_q^{-1}(Q)$ , заданный формулой (2.43), псевдомонотонен и коэрцитивен.

*Доказательство.* Поскольку разностному оператору  $R_Q : \dot{W}_p^1(Q) \rightarrow W_p^1(Q)$  соответствуют невырожденные матрицы  $R_s$ , то существует обратный оператор  $R_Q^{-1}$ , причем для любых  $u, \xi \in \dot{W}_p^1(Q)$

$$\langle \Delta_p R_Q u, \xi \rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} \langle J \partial_i R_Q u, \partial_i \xi \rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} \langle J \partial_i w, R_Q^{-1} \partial_i \psi \rangle,$$

где  $w = R_Q u$ ,  $\psi = R_Q \xi$ . Здесь было учтена коммутативность разностного оператора  $R_Q$  и оператора дифференцирования  $\partial_i$  (см. лемму 1.5):

$$R_Q^{-1} \partial_i \psi = R_Q^{-1} \partial_i R_Q \xi = R_Q^{-1} R_Q \partial_i \xi = \partial_i \xi.$$

Покажем псевдомонотонность  $\Delta_p R_Q$ . Пусть  $u_m \rightharpoonup u$  слабо в  $\dot{W}_p^1(Q)$  и

$$\varliminf_{m \rightarrow \infty} \langle \Delta_p R_Q u_m, u_m - u \rangle \leq 0.$$

Рассмотрим последовательность  $\{w_m = R_Q u_m\}$ . В силу непрерывности оператора  $R_Q$  данная последовательность  $w_m \rightharpoonup w = R_Q u$  слабо в  $W_p^1(Q)$ . Кроме того,

$$\varliminf_{m \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i \leq n} \langle J \partial_i w_m, R_Q^{-1} \partial_i (w_m - w) \rangle = \varliminf_{m \rightarrow \infty} \langle \Delta_p R_Q u_m, u_m - u \rangle \leq 0.$$

Поскольку  $R_Q^{-1}$  — линейный, сильно аккретивный оператор, то справедливо равенство (2.81), см. лемму 2.13:

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle \Delta_p R_Q u_m, u_m \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle J \partial_i w_m, R_Q^{-1} \partial_i w_m \rangle = \langle J \partial_i w, R_Q^{-1} \partial_i w \rangle = \langle \Delta_p R_Q u, u \rangle.$$

Псевдомонотонность оператора  $\Delta_p R_Q$  доказана.

Покажем, что оператор  $\Delta_p R_Q$  коэрцитивен. В силу коммутативности  $R_Q$  и  $\partial_i$ , а также сильной аккретивности оператора  $R_Q^{-1}$  получаем, что

$$\langle \Delta_p R_Q u, u \rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} \langle J \partial_i R_Q u, R_Q^{-1} \partial_i R_Q u \rangle \geq c_a \sum_{1 \leq i \leq n} \|\partial_i R_Q u\|_{L_p(Q)}^p,$$

см. (2.65). Осталось использовать невырожденность  $R_Q$  и оценку (1.22):

$$\begin{aligned} \langle \Delta_p R_Q u, u \rangle &\geq c_a \sum_{1 \leq i \leq n} \|\partial_i R_Q u\|_{L_p(Q)}^p = c_a \sum_{1 \leq i \leq n} \|R_Q \partial_i u\|_{L_p(Q)}^p \geq \\ &\geq c_5^{-p} c_a \sum_{1 \leq i \leq n} \|\partial_i u\|_{L_p(Q)}^p = c_5^{-p} c_a \|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^p. \end{aligned} \quad (2.86)$$

Коэрцитивность доказана.  $\square$

**Теорема 2.3.** Пусть разностному оператору  $R_Q : \dot{W}_p^1(Q) \rightarrow W_p^1(Q)$  соответствуют невырожденные матрицы  $R_s, a_h \in \mathbb{R}^1$ . Кроме того, пусть обратный оператор  $R_Q^{-1}$  сильно аккретивен. Тогда задача (2.40), (2.41) имеет непустое, ограниченное, слабо замкнутое множество обобщенных решений. Кроме того, решения задачи (2.40), (2.41) удовлетворяют оценке

$$\|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)} \leq \text{const} \|f\|_{W_q^{-1}(Q)}^{1/(p-1)}. \quad (2.87)$$

*Доказательство.* Вследствие лемм 2.12 и 2.14 при указанных выше условиях оператор  $\Delta_p R_Q : \dot{W}_p^1(Q) \rightarrow W_q^{-1}(Q)$ , заданный формулой (2.43), деминепрерывен, ограничен, коэрцитивен и псевдомонотонен. Эти свойства гарантируют существование элемента  $u \in \dot{W}_p^1(Q)$ , удовлетворяющего тождеству (2.43), см. [33, теорема 2.7, гл. 2].

<sup>1</sup>Здесь  $R_Q^{-1}$  существует в силу невырожденности матриц  $R_s$ .

<sup>2</sup>В предыдущем разделе доказаны достаточные, но не необходимые условия сильной аккретивности.

Ограниченность множества решений следует из коэрцитивности оператора. Докажем это, одновременно доказывая оценку (2.87). Пусть  $u$  — обобщенное решение задачи (2.40), (2.41). Тогда из оценки коэрцитивности (2.86) и интегрального тождества (2.43) следует, что

$$c_5^{-p} c_a \|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^p \leq \langle \Delta_p R_Q u, u \rangle = \langle f, u \rangle \leq \|f\|_{W_q^{-1}(Q)} \|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)},$$

что и доказывает оценку (2.87).

Покажем, что из псевдомонотонности  $\Delta_p R_Q$  следует слабая замкнутость множества решений. Пусть последовательность  $\{u_m\}$  принадлежит множеству решений,  $\dot{W}_p^1(Q) \ni u_m \rightharpoonup u$  слабо в  $\dot{W}_p^1(Q)$ . Поскольку

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \langle \Delta_p R_Q u_m, u_m - u \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle f, u_m - u \rangle = 0,$$

то в силу псевдомонотонности оператора  $\Delta_p R_Q$  для любого  $\xi \in \dot{W}_p^1(Q)$

$$\langle f, u - \xi \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle f, u_m - \xi \rangle = \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \Delta_p R_Q u_m, u_m - \xi \rangle \geq \langle \Delta_p R_Q u, u - \xi \rangle.$$

Из этого следует, что  $u$  удовлетворяет интегральному тождеству (2.43). □

**Пример 2.8.** Пусть  $Q = (0, 2,4) \times (0, 1)$  и

$$Ru(x) = u(x_1, x_2) - u(x_1 + 1, x_2) + u(x_1 + 2, x_2).$$

Область разбивается на два класса подмножеств, см. рис. 2.1.

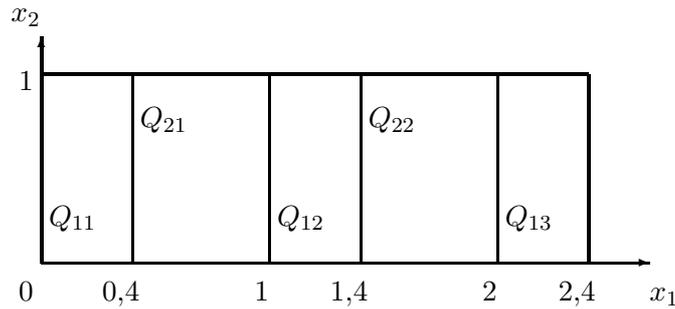


Рис. 2.1. Разбиение области  $Q = (0, 2,4) \times (0, 1)$ .

FIG. 2.1. Partition of the domain  $Q = (0, 2,4) \times (0, 1)$ .

Оператору  $R_Q$  соответствуют две матрицы  $R_1$  и  $R_2$ :

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратными к ним являются матрицы

$$R_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

В примере 2.7 доказано, что матрица  $R_1^{-1}$  соответствует сильно аккретивному оператору для любого  $p \in (2, \infty)$ . Вторая матрица также соответствует сильно аккретивному оператору

$$2 \cdot 1 > \lambda^{-1} |1 - 0| + |1 + 0|,$$

см. лемму 2.8 и оценку (2.69). Следовательно, оператор  $\Delta_p R_Q$  деминепрерывен, ограничен, коэрцитивен и псевдомонотонен. Решение задачи (2.40), (2.41) существует для любого  $f \in W_q^{-1}(Q)$ ,  $1/q + 1/p = 1$ ,  $p \in (2, \infty)$ .

## ГЛАВА 3

## КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

### 3.1. ПОСТАНОВКА НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ. ОПЕРАТОРНОЕ УРАВНЕНИЕ

В цилиндре  $\Omega_T = Q \times (0, T)$  рассмотрим функционально-дифференциальное уравнение со сдвигами по пространственным переменным

$$\partial_t u(x, t) + ARu(x, t) = f(x, t) \quad ((x, t) \in \Omega_T) \quad (3.1)$$

с начальным условием

$$u(x, 0) = \varphi(x) \quad (x \in Q) \quad (3.2)$$

и краевым условием

$$u(x, t) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus Q, 0 < t < T). \quad (3.3)$$

Здесь  $Q \subset \mathbb{R}^n$  — ограниченная область с границей  $\partial Q$  класса  $C^\infty$  или  $Q = (0, d) \times G$ ,  $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$  — ограниченная область (с границей  $\partial G$  класса  $C^\infty$ , если  $n \geq 3$ ,  $G = (0, \hat{d})$  при  $n = 2$ ). В случае  $n = 1$  мы полагаем  $Q = (0, d)$ . Пусть дифференциальный оператор  $A$  задан формулой

$$Au(x, t) = - \sum_{1 \leq i \leq n} \partial_i A_i(x, t, u, \nabla u) + A_0(x, t, u, \nabla u). \quad (3.4)$$

Все функции полагаем вещественнозначными. Определим ограниченный разностный оператор  $R : L_p(\mathbb{R}^{n+1}) \rightarrow L_p(\mathbb{R}^{n+1})$  по формуле

$$Ru(x, t) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_h u(x + h, t), \quad (3.5)$$

где  $a_h \in \mathbb{R}$ ,  $\mathcal{M} \subset \mathbb{R}^n$  — конечное множество векторов с целочисленными (или соизмеримыми) координатами,  $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ . Поскольку разностный оператор  $R$  является нелокальным, сдвиги на вектора  $h \in \mathcal{M}$  могут отображать точки  $x \in Q$  в точки  $x + h \in \mathbb{R}^n \setminus Q$ . Поэтому краевые условия должны задавать значения неизвестной функции не только на границе цилиндра  $\Gamma_T = \partial Q \times (0, T)$ , но и на некотором множестве, лежащем в  $(\mathbb{R}^n \setminus Q) \times (0, T)$ . Для простоты в дальнейшем мы можем считать, что это множество совпадает с  $(\mathbb{R}^n \setminus Q) \times (0, T)$ . Поэтому краевые условия (3.3) задаются на всем множестве  $(\mathbb{R}^n \setminus Q) \times (0, T)$ .

Будем искать обобщенные решения данной задачи в соболевских пространствах. Линейные пространства

$$L_p(0, T; X) := \left\{ u : [0, T] \rightarrow X : \int_0^T \|u\|_X^p dt < \infty \right\}$$

с нормой

$$\|u\|_{L_p(0, T; X)} = \left( \int_0^T \|u\|_X^p dt \right)^{1/p}$$

являются рефлексивными банаховыми при  $1 < p < \infty$ , если этими свойствами обладало пространство  $X$ , см., например [15]. В данной работе в качестве  $X$  рассматриваются пространства  $W_p^1(Q)$  и  $\dot{W}_p^1(Q)$ , обладающие данными свойствами; определения этих соболевских пространств приведены в разделе 1.1.

Пусть  $1/p + 1/q = 1$  и

$$\mathcal{V} := L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q)) \cap L_2(\Omega_T).$$

Таким образом,  $\mathcal{V} = L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))$  при  $p \in [2, \infty)$ , а сопряженным к нему является пространство  $\mathcal{V}^* := L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$ . При  $p \in (1, 2)$  сопряженным к  $\mathcal{V}$  является пространство

$\mathcal{V}^* := L_q(0, T; W_q^{-1}(Q)) + L_2(\Omega_T)$ . При этом если  $f = f_1 + f_2$ , где  $f_1 \in L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$  и  $f_2 \in L_2(\Omega_T)$ , то для любого  $\xi \in \mathcal{V}$  положим

$$\langle f, \xi \rangle = \int_0^T \langle f_1(t), \xi(t) \rangle_p dt + \int_0^T (f_2(t), \xi(t)) dt,$$

где  $\langle \cdot, \cdot \rangle_p : W_q^{-1}(Q) \times \dot{W}_p^1(Q) \rightarrow \mathbb{R}$  — спаривание,  $(\cdot, \cdot) : L_2(Q) \times L_2(Q) \rightarrow \mathbb{R}$  — скалярное произведение, норма в  $\mathcal{V}^*$  определена по формуле

$$\|f\|_{\mathcal{V}^*} := \inf_{\substack{f_1 \in L_q(0, T; W_q^{-1}(Q)), \\ f_2 \in L_2(\Omega_T), \\ f = f_1 + f_2}} \max \left( \|f_1\|_{L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))}, \|f_2\|_{L_2(\Omega_T)} \right).$$

Подробнее (и в более общей постановке) эти пространства описаны в [15, гл. IV, §1, п. 5], а также в [20, 33] и др.<sup>1</sup>

Также будем рассматривать рефлексивное банахово пространство

$$W = \{u \in \mathcal{V} : \partial_t u \in \mathcal{V}^*\} \tag{3.6}$$

с нормой  $\|u\|_W = \|u\|_{\mathcal{V}} + \|\partial_t u\|_{\mathcal{V}^*}$ , где  $\partial_t u$  — производная элемента  $u \in \mathcal{V}$  в смысле распределений со значениями в  $\mathcal{V}^*$ . Как известно, пространство  $W \subset C(0, T; L_2(Q))$ , см. [15, теорема 1.17, гл. IV], поэтому  $u|_{t=0}$  имеет смысл. Будем предполагать, что правая часть в (3.1)  $f \in \mathcal{V}^*$  и начальные условия в (3.2)  $\varphi \in L_2(Q)$ .

Поскольку оператор  $R$  нелокальный, введем оператор  $R_Q = P_Q R I_Q : L_p(\Omega_T) \rightarrow L_p(\Omega_T)$ , где  $I_Q : L_p(\Omega_T) \rightarrow L_p(\mathbb{R}^n \times (0, T))$  — оператор продолжения функций из  $L_p(\Omega_T)$  нулем в  $(\mathbb{R}^n \setminus Q) \times (0, T)$ ,  $P_Q : L_p(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \rightarrow L_p(\Omega_T)$  — оператор сужения функций из  $L_p(\mathbb{R}^n \times (0, T))$  на  $\Omega_T$ . Функция  $u(x, t)$ , определенная на  $\Omega_T$ , отображается в функцию  $(I_Q u)(x, t)$ , определенную на множестве  $\mathbb{R}^n \times (0, T)$ . После действия оператора  $R$  на  $I_Q u$  мы вновь получаем функцию, определенную на множестве  $\mathbb{R}^n \times (0, T)$ . Оператор  $P_Q$  вводится для того, чтобы получить сужение функции  $(R I_Q u)(x, t)$  на область  $\Omega_T$ . Поскольку вышесказанное справедливо для всех  $p \in (1, \infty)$ , то получаем, что

$$R_Q : L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q)) \cap L_2(\Omega_T) \rightarrow L_p(0, T; W_p^1(Q)) \cap L_2(\Omega_T).$$

Задача (3.1)–(3.3) рассматривается как операторное уравнение

$$\partial_t u + A_R u = f \tag{3.7}$$

в пространстве  $W$  с начальным условием (3.3), где  $A_R := A R_Q$ . Ниже будут наложены стандартные условия, гарантирующие, что дифференциальный оператор  $A$  действует из пространства  $L_p(0, T; W_p^1(Q)) \cap L_2(\Omega_T)$  в  $\mathcal{V}^*$ , см. [15, 29, 72]. Таким образом,

$$A_R : \mathcal{V} = L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q)) \cap L_2(\Omega_T) \rightarrow \mathcal{V}^*.$$

**Определение 3.1.** Будем называть функцию  $u \in W$  *обобщенным решением задачи* (3.1)–(3.3), если она удовлетворяет операторному уравнению (3.7) и начальному условию (3.2).

Для определения корректной интегральной формы дифференциальные операторы должны удовлетворять условию интегрируемости: коэффициенты оператора  $A$ , заданного в (3.4), являются функциями типа Каратеодори (т. е. измеримы по  $(x, t) \in \Omega_T$  и непрерывны по остальным переменным для п.в.  $(x, t) \in \Omega_T$ ), а также удовлетворяют оценке

$$|A_i(x, t, \xi)| \leq g(x, t) + c_1 \sum_{0 \leq i \leq n} |\xi_i|^{p-1}, \quad i = 0, 1, \dots, n, \tag{3.8}$$

где  $c_1 > 0$  и  $g \in L_q(\Omega_T)$ . Тогда для любого  $v \in \mathcal{V}$

$$\langle A_R u, v \rangle := \sum_{0 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} A_i(x, t, R_Q u, \partial_1 R_Q u, \dots, \partial_n R_Q u) \partial_i v \, dx \, dt, \tag{3.9}$$

<sup>1</sup>В более общем случае  $\mathcal{V} = L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q)) \cap L_{p_0}(0, T; L_2(Q))$ , где  $1 < p \leq p_0 < \infty$  и  $1/p + 1/q = 1/p_0 + 1/q_0 = 1$ . При рассмотрении в таком пространстве несколько усложнится ряд формул, но общие результаты будут аналогичны изложенным в работе.

здесь и ниже  $\partial_0 u := u$ .

**Определение 3.2.** Функция  $u \in \mathcal{V}$  называется *слабым обобщенным решением задачи* (3.1)–(3.3), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$\begin{aligned} - \int_{\Omega_T} u \partial_t v \, dx \, dt + \sum_{0 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} A_i(x, t, R_Q u, \partial_1 R_Q u, \dots, \partial_n R_Q u) \partial_i v \, dx \, dt = \\ = \int_{\Omega_T} f v \, dx \, dt + \int_Q \varphi \xi|_{t=0} \, dx \end{aligned} \quad (3.10)$$

для всех  $\xi \in W$  таких, что  $\xi|_{t=T} = 0$ .

### 3.2. РАЗБИЕНИЕ ОБЛАСТИ $\Omega_T$ И СВОЙСТВА РАЗНОСТНОГО ОПЕРАТОРА

Отметим, что рассматривается оператор со сдвигами только по пространственным переменным. Поэтому можно воспользоваться результатами эллиптической теории, см. 1.2. В этом разделе будут сформулированы свойства оператора

$$R_Q : L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q)) \rightarrow L_p(0, T; W_p^1(Q)).$$

**Лемма 3.1.** Операторы  $I_Q : L_p(\Omega_T) \rightarrow L_p(\mathbb{R}^n \times (0, T))$  и  $P_Q : L_p(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \rightarrow L_p(\Omega_T)$ , а также  $R : L_p(\mathbb{R}^n \times (0, T)) \rightarrow L_p(\mathbb{R}^n \times (0, T))$  и  $R_Q : L_p(\Omega_T) \rightarrow L_p(\Omega_T)$  ограничены,  $1 < p < \infty$ .

Обозначим через  $L_p\left(\bigcup_l Q_{sl} \times (0, T)\right)$  подпространство функций из  $L_p(\Omega_T)$ , обращающихся в нуль при  $x \notin \bigcup_l Q_{sl}$  ( $l = 1, \dots, N(s)$ ). Введем ограниченный оператор

$$P_s : L_p(\Omega_T) \rightarrow L_p\left(\bigcup_l Q_{sl} \times (0, T)\right)$$

по формуле

$$P_s u(x, t) = \begin{cases} u(x, t), & x \in \bigcup_l Q_{sl}, \\ 0, & x \in Q \setminus \bigcup_l Q_{sl}, \end{cases} \quad t \in (0, T).$$

Очевидно, что  $P_s$  является оператором проектирования на  $L_p\left(\bigcup_l Q_{sl} \times (0, T)\right)$ . Поскольку  $\text{mes}_n(\partial Q_{sl}) = 0$ , пространства Лебега  $L_p(Q)$  и  $L_p(\Omega_T)$  можно рассматривать как прямые суммы соответствующих пространств над классами подобластей:

$$L_p(Q) = \dot{\bigoplus}_s L_p\left(\bigcup_l Q_{sl}\right); \quad L_p(\Omega_T) = \dot{\bigoplus}_s L_p\left(\bigcup_l Q_{sl} \times (0, T)\right). \quad (3.11)$$

**Лемма 3.2.**  $L_p\left(\bigcup_l Q_{sl} \times (0, T)\right)$  является инвариантным подпространством оператора  $R_Q$  для любого  $1 < p < \infty$ .

Изоморфизм рефлексивных банаховых пространств

$$U_s : L_p\left(\bigcup_l Q_{sl} \times (0, T)\right) \rightarrow L_p^{N(s)}\left(Q_{s1} \times (0, T)\right) \equiv L_p\left(Q_{s1} \times (0, T)\right) \times \dots \times L_p\left(Q_{s1} \times (0, T)\right)$$

определяется по формуле

$$(U_s u)_l(x, t) = u(x + h_{sl}, t) \quad (x \in Q_{s1}, t \in (0, T), l = 1, \dots, N(s)), \quad (3.12)$$

где  $h_{s1} = 0$ .

**Лемма 3.3.** Оператор  $R_{Q_s} : L_p^{N(s)}(Q_{s1} \times (0, T)) \rightarrow L_p^{N(s)}(Q_{s1} \times (0, T))$ , заданный соотношением

$$R_{Q_s} = U_s R_Q U_s^{-1}, \tag{3.13}$$

является оператором умножения на матрицу  $R_s$  порядка  $N(s) \times N(s)$  с элементами

$$r_{ij}^s = \begin{cases} a_h, & h = h_{sj} - h_{si} \in \mathcal{M}, \\ 0, & h_{sj} - h_{si} \notin \mathcal{M}. \end{cases} \tag{3.14}$$

Доказательство повторяет доказательство леммы 1.3; для  $p = 2$  ср. с [106, лемма 8.9].

Из ограниченности области  $Q$  и формул (3.14) следует, что в случае постоянных коэффициентов  $a_h$  число различных матриц  $R_s$  конечно. Обозначим это число  $n_1$ , и пусть  $R_{s_\nu}$  обозначают все различные матрицы  $R_s$  ( $\nu = 1, \dots, n_1$ ).

**Лемма 3.4.** Спектр оператора  $R_Q$

$$\sigma(R_Q) = \bigcup_{1 \leq \nu \leq n_1} \sigma(R_{s_\nu}).$$

**Лемма 3.5.** Отображение  $R_Q : L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q)) \rightarrow L_p(0, T; W_p^1(Q))$  непрерывно, причем

$$\partial_i(R_Q u)(x, t) = R_Q \partial_i u(x, t) \quad ((x, t) \in \Omega_T). \tag{3.15}$$

Утверждение леммы следует из равенства (3.15) для функций  $u \in \dot{C}^\infty(\Omega_T)$  и плотности подпространства  $\dot{C}^\infty(\Omega_T)$  в  $L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))$ .

**Лемма 3.6.** Для всех  $u \in L_p(0, T; W_p^1(Q))$  имеем  $R_Q u \in L_p(0, T; W_p^1(Q_{sl}))$ , более того, для любых  $s = 1, 2, \dots, l = 1, \dots, N(s)$

$$\|R_Q u\|_{L_p(0, T; W_p^1(Q_{sl}))} \leq c_2 \sum_{j=1}^{N(s)} \|u\|_{L_p(0, T; W_p^1(Q_{sj}))}. \tag{3.16}$$

Кроме того, если  $\det R_{s_\nu} \neq 0$  ( $\nu = 1, \dots, n_1$ ), то существует обратный оператор  $R_Q^{-1} : L_p(\Omega_T) \rightarrow L_p(\Omega_T)$  и  $R_Q^{-1} w \in L_p(0, T; W_p^1(Q_{sl}))$  для всех  $w \in L_p(0, T; W_p^1(Q))$ , при этом для всех  $s = 1, 2, \dots$  и  $l = 1, \dots, N(s)$

$$\partial_i(R_Q^{-1} w)(x, t) = R_Q^{-1} \partial_i w(x, t), \quad ((x, t) \in Q_{sl} \times (0, T)). \tag{3.17}$$

Обратный оператор определен формулой

$$R_Q^{-1} = \sum_s U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s, \tag{3.18}$$

при этом для всех  $s = 1, 2, \dots$  и  $l = 1, \dots, N(s)$  справедлива оценка

$$\|R_Q^{-1} w\|_{L_p(0, T; W_p^1(Q_{sl}))} \leq c_3 \sum_{j=1}^{N(s)} \|w\|_{L_p(0, T; W_p^1(Q_{sj}))}. \tag{3.19}$$

Здесь константы  $c_2, c_3 > 0$  не зависят от  $u, w$ , а также от  $s$ .

Доказательство совпадает с доказательством леммы 1.6.

Заметим, что свойства, указанные в леммах 3.4–3.6 справедливы для всех  $p \in (1, \infty)$ . Таким образом, леммы 3.4–3.6 справедливы не только для оператора  $R_Q : \mathcal{V} = L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q)) \rightarrow L_p(0, T; W_p^1(Q))$  при  $p \in [2, \infty)$ , но и для  $R_Q : \mathcal{V} = L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q)) \cap L_2(\Omega_T) \rightarrow L_p(0, T; W_p^1(Q)) \cap L_2(\Omega_T)$  при  $p \in (1, 2)$ .

**Лемма 3.7.** Пусть  $\det R_{s_\nu} \neq 0$  ( $\nu = 1, \dots, n_1$ ). Тогда

$$c_5^{-1} \|u\|_{L_p(\Omega_T)} \leq \|R_Q u\|_{L_p(\Omega_T)} \leq c_5 \|u\|_{L_p(\Omega_T)} \tag{3.20}$$

для некоторой константы  $c_5 > 0$ , причем  $c_5$  не зависит от  $u$ , но зависит от  $p$ .

Доказательство следует из равенства  $\sigma(R_Q) = \bigcup_{1 \leq \nu \leq n_1} \sigma(R_{s_\nu})$  в лемме 3.4 и дискретности спектра разностного оператора.

3.3. КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С СИЛЬНО МОНОТОННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫМ ОПЕРАТОРОМ. СУЩЕСТВОВАНИЕ И ЕДИНСТВЕННОСТЬ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ

Ряд определений и конструкций, используемых в этом разделе, сформулированы в разделе 1.2.

**Лемма 3.8.** Пусть разностный оператор  $R_Q : \mathcal{V} \rightarrow L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q)) \cap L_2(\Omega_T)$  имеет постоянные коэффициенты  $a_h$ , коэффициенты дифференциального оператора  $A$ , заданного в (3.4), являются функциями типа Каратеодори и удовлетворяют оценке (3.8). Тогда оператор  $A_R : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$  деминепрерывен и ограничен.

*Доказательство.* В силу леммы 3.6 линейный оператор  $R_Q$  ограничен. Линейный ограниченный оператор непрерывен. Оператор  $A$  деминепрерывен и ограничен в силу условия (3.8), см., например, [29, гл. 1, §2]. Композиция  $A_R = AR_Q$  является деминепрерывным, ограниченным оператором.  $\square$

**Лемма 3.9.** Пусть  $p \in [2, \infty)$ ,  $\{R_s\}$  — матрицы, соответствующие оператору  $R_Q$ ,  $R_s = \{r_{ml}^s\}_{1 \leq m, l \leq N(s)}$ ,  $R_s + R_s^* > 0$ . Мы предполагаем, что оператор  $A$ , заданный формулой (3.4), имеет измеримые по  $(x, t) \in \Omega_T$  и дифференцируемые по  $\xi_j \in \mathbb{R}$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) коэффициенты  $A_i(x, t, \xi)$ ,  $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , причем производные  $A_{ij}(x, t, \xi) = \frac{\partial A_i(x, t, \xi)}{\partial \xi_j}$  удовлетворяют оценкам

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq m, l \leq N(s)} \sum_{0 \leq i, j \leq n} r_{ml}^s A_{ij}(x + h_{sm}, t, \zeta_m) \eta_j \eta_{mi} &\geq \\ &\geq c_6 \sum_{1 \leq m \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} |\zeta_{mi}|^{p-2} |\eta_{mi}|^2 \quad (x \in Q_{s1}, t \in (0, T)), \end{aligned} \quad (3.21)$$

$$|A_{ij}(x, t, \xi)| \leq g_1(x, t) + c_7 \sum_{0 \leq k \leq n} |\xi_k|^{p-2} \quad (i, j = 0, \dots, n, (x, t) \in \Omega_T) \quad (3.22)$$

для любых  $s = 1, 2, \dots$ ,  $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{N(s) \times (n+1)}$  и  $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$ ; здесь  $g_1 \in L_{p/(p-2)}(\Omega_T)$ ,  $c_6 > 0$  и  $c_7 \geq 0$  не зависят от  $x, t, \zeta$  и  $\eta$ .

Тогда оператор  $A_R : L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q)) \rightarrow L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$ , заданный формулой (3.4), сильно монотонен.

*Доказательство.* Пусть  $w = R_Q(u - y)$  и  $v = R_Q y$ , где  $u, y \in L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))$ . Согласно лемме 3.6 существует ограниченный обратный оператор  $R_Q^{-1} : L_p(\Omega_T) \rightarrow L_p(\Omega_T)$ . Из равенства (3.4) и леммы 3.5 следует, что

$$\begin{aligned} \langle A_R u - A_R y, u - y \rangle &= \sum_{0 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} (A_i(x, t, R_Q u, \nabla R_Q u) - A_i(x, t, R_Q y, \nabla R_Q y)) (\partial_i u - \partial_i y) dx dt = \\ &= \sum_{0 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} (A_i(x, t, v + w, \nabla v + \nabla w) - A_i(x, t, v, \nabla v)) R_Q^{-1} \partial_i w dx dt = I_1. \end{aligned} \quad (3.23)$$

Тогда, используя формулу (3.13), имеем

$$\begin{aligned} I_1 &= \sum_i \sum_s \int_0^T \int_{\cup_t Q_{sl}} P_s (A_i((x, t, v + w, \nabla(v + w)) - A_i((x, t, v, \nabla v))) U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w dx dt = \\ &= \sum_{i, s} \int_0^T \int_{Q_{s1}} \left( U_s P_s (A_i((x, t, v + w, \nabla(v + w)) - A_i((x, t, v, \nabla v))), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w \right) dx dt, \end{aligned}$$

где  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^{N(s)}$ . Используем дифференцируемость коэффициентов  $A_i$  и формулу Тейлора:

$$\begin{aligned}
 I_1 &= \sum_{i,j,s} \int_0^T \int_{Q_{s1}} \left( U_s P_s \int_0^1 A_{ij}(x, t, v + \tau w, \nabla v + \tau \nabla w) d\tau \partial_j w, R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w \right) dx dt = \\
 &= \sum_{i,j,s} \int_0^T \int_{Q_{s1}} I_2 dx dt. \quad (3.24)
 \end{aligned}$$

Заметим, что интегралы по  $Q_{s1}$  и  $(0, T)$  существуют в силу (3.22). Пусть

$$\mathbb{A}_{ij}(v, w, \tau) := \text{diag} \left\{ U_s P_s \int_0^1 A_{ij}(x, t, v + \tau w, \nabla v + \tau \nabla w) d\tau \right\}$$

определяет диагональную матрицу размерности  $N(s) \times N(s)$  с диагональными элементами

$$\int_0^1 A_{ij}(x + h_{sm}, t, (v + \tau w)(x + h_{sm}), (\nabla v + \tau \nabla w)(x + h_{sm})) d\tau.$$

Распишем подынтегральное выражение в (3.24):

$$\begin{aligned}
 I_2 &= \left( \mathbb{A}_{ij}(v, w, \tau) R_s R_s^{-1} (U_s P_s \partial_j w), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w \right) = \\
 &= \left( \mathbb{A}_{ij}(v, w, \tau) R_s (U_s P_s \partial_j (u - y)), U_s P_s \partial_i (u - y) \right) = \\
 &= \sum_{l,m} r_{ml}^s \int_0^1 A_{ij}(x + h_{sm}, t, (v + \tau w)(t, x + h_{sm}), (\nabla v + \tau \nabla w)(x + h_{sm}, t)) d\tau \times \\
 &\quad \times \partial_j (u - y)(x + h_{sl}, t) \partial_i (u - y)(x + h_{sm}, t)
 \end{aligned}$$

для почти всех  $t \in (0, T)$  и  $x \in Q_{s1}$ . Используя алгебраическое условие сильной эллиптичности (3.21) получим, что

$$\begin{aligned}
 &\sum_{1 \leq l, m \leq N(s)} \sum_{0 \leq i, j \leq n} r_{ml}^s \int_0^1 A_{ij}(x + h_{sm}, t, (v + \tau w)(t, x + h_{sm}), (\nabla v + \tau \nabla w)(t, x + h_{sm})) d\tau \times \\
 &\quad \times \partial_j (u - y)(x + h_{sl}, t) \partial_i (u - y)(x + h_{sm}, t) \geq \\
 &\geq c_6 \sum_{1 \leq m \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} \int_0^1 |(\partial_i v + \tau \partial_i w)(x + h_{sm}, t)|^{p-2} d\tau |\partial_i (u - y)(x + h_{sm}, t)|^2.
 \end{aligned}$$

Согласно известной оценке  $\int_0^1 |a + \tau b|^{p-2} d\tau \geq c_8 |b|^{p-2}$ ,

$$\int_0^1 |(\partial_i v + \tau \partial_i w)(x + h_{sm}, t)|^{p-2} d\tau \geq c_8 |\partial_i w(x + h_{sm}, t)|^{p-2}$$

(доказательство оценки см. в ссылке к лемме 1.10). По построению  $w = R_Q(u - y)$ . В силу невырожденности матрицы  $R_s$  справедлива оценка (3.20), т. е.

$$I_1 \geq c_5 c_8 \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{s,m} \int_0^T \int_{Q_{s1}} |\partial_i w(x + h_{sm}, t)|^{p-2} |\partial_i (u - y)(x + h_{sm}, t)|^2 dx dt =$$

$$\begin{aligned}
 &= c_5 c_8 \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{s,m} \int_0^T \int_{Q_{s1}} \left| \sum_k r_{mk} \partial_i(u-y)(x+h_{sk},t) \right|^{p-2} |\partial_i(u-y)(x+h_{sm},t)|^2 dx dt \geq \\
 &\geq c_9 \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{s,m} \int_0^T \int_{Q_{s1}} |\partial_i(u-y)(x+h_{sm},t)|^p dx dt = c_9 \|u-y\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))}^p. \quad (3.25)
 \end{aligned}$$

Сильная монотонность оператора  $A_R$  доказана. □

**Замечание 3.1.** Аналогично доказывается, что при выполнении условий леммы 3.9

$$\begin{aligned}
 \langle A_R u - A_R v, u - v \rangle_t &= \sum_{0 \leq i \leq n} \int_0^t \int_Q (A_i(x, \tau, R_Q u, \nabla R_Q u) - A_i(x, \tau, R_Q v, \nabla R_Q v)) \partial_i(u - v) dx d\tau \geq \\
 &\geq c_9 \|u - v\|_{L_p(0,t;\dot{W}_p^1(Q))}^p. \quad (3.26)
 \end{aligned}$$

**Теорема 3.1.** Пусть выполнены условия интегрируемости (3.8), дифференцируемости (3.22) для  $i, j = 0, 1, \dots, n$  и сильной эллиптичности (3.21),  $p \in [2, \infty)$ . Тогда для любых  $f \in L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$  и  $\varphi \in L_2(Q)$ , существует единственное обобщенное решение задачи (3.1)–(3.3), более того, справедливы следующие оценки:

$$\|u_1 - u_2\|_{C(0,T;L_2(Q))} \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2(Q)} + c_{10} \|f_1 - f_2\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}^{q/2}, \quad (3.27)$$

$$\|u_1 - u_2\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))} \leq c_{11} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2(Q)}^{2/p} + c_{12} \|f_1 - f_2\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}^{1/(p-1)}, \quad (3.28)$$

где  $u_1$  и  $u_2$  — обобщенные решения задачи (3.1)–(3.3) при правых частях  $f_1$  и  $f_2$  и начальных условиях  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , соответственно;  $c_{10}, c_{11}, c_{12} > 0$  не зависят от  $u_k, f_k$  и  $\varphi_k$ .

*Доказательство.* Согласно лемме 3.8 оператор  $A_R$  деминепрерывен и ограничен. Согласно лемме 3.9 оператор  $A_R$  сильно монотонен. Сильно монотонный оператор строго монотонен и коэрцитивен. Следовательно, решение операторного уравнения (3.7) с начальным условием (3.3) существует и единственно, см. [15, теорема 1.1, гл. VI, §1].

Докажем оценки (3.27) и (3.28). Пусть  $u_1 \in W$  и  $u_2 \in W$  — обобщенные решения задачи (3.1)–(3.3) при правых частях  $f_1$  и  $f_2$ , а также начальных условиях  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , соответственно. Тогда для всех  $t \in (0, T]$  имеем, что

$$\frac{1}{2} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{L_2(Q)}^2 + \langle A_R u_1 - A_R u_2, u_1 - u_2 \rangle_t = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle_t + \frac{1}{2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2(Q)}^2. \quad (3.29)$$

Здесь использована известная оценка

$$\int_{\Omega_t} \partial_t u \cdot u dx dt = \frac{1}{2} \|u(t)\|_{L_2(Q)}^2 - \frac{1}{2} \|u(0)\|_{L_2(Q)}^2$$

(см., например, [15, замечание 1.22, гл. IV, §2]).

Пусть также  $u_3 \in W$  — обобщенное решение задачи (3.1)–(3.3) при  $\varphi = \varphi_1$  и  $f = f_2$ . Тогда для всех  $t \in (0, T]$

$$\frac{1}{2} \|u_1(t) - u_3(t)\|_{L_2(Q)}^2 + \langle A_R u_1 - A_R u_3, u_1 - u_3 \rangle_t = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_3 \rangle_t, \quad (3.30)$$

$$\frac{1}{2} \|u_3(t) - u_2(t)\|_{L_2(Q)}^2 + \langle A_R u_3 - A_R u_2, u_3 - u_2 \rangle_t = \frac{1}{2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2(Q)}^2. \quad (3.31)$$

Используем оценку (3.26) и неотрицательность первого слагаемого левой части равенства (3.30):

$$\begin{aligned}
 c_9 \|u_1 - u_3\|_{L_p(0,t;\dot{W}_p^1(Q))}^p &\leq \langle A_R u_1 - A_R u_3, u_1 - u_3 \rangle_t = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_3 \rangle_t - \frac{1}{2} \|u_1(T) - u_3(T)\|_{L_2(Q)}^2 \leq \\
 &\leq \langle f_1 - f_2, u_1 - u_3 \rangle_t \leq \|f_1 - f_2\|_{L_q(0,t;W_q^{-1}(Q))} \|u_1 - u_3\|_{L_p(0,t;\dot{W}_p^1(Q))},
 \end{aligned}$$

т. е.

$$\|u_1 - u_3\|_{L_p(0,t;\dot{W}_p^1(Q))}^{p-1} \leq \frac{1}{c_9} \|f_1 - f_2\|_{L_q(0,t;W_q^{-1}(Q))}. \quad (3.32)$$

Кроме того, в силу монотонности  $A_R$  из (3.30) следует, что

$$\frac{1}{2} \|u_1(t) - u_3(t)\|_{L_2(Q)}^2 \leq \|f_1 - f_2\|_{L_q(0,t;W_q^{-1}(Q))} \|u_1 - u_3\|_{L_p(0,t;\dot{W}_p^1(Q))}.$$

Подставив оценку  $\|u_1 - u_3\|_{L_p(0,t;\dot{W}_p^1(Q))}$  из (3.32), мы получим, что

$$\|u_1(t) - u_3(t)\|_{L_2(Q)}^2 \leq \frac{2}{c_9} \|f_1 - f_2\|_{L_q(0,t;W_q^{-1}(Q))}^q. \quad (3.33)$$

В то же время, из неотрицательности второго слагаемого левой части равенства (3.31) следует, что

$$\|u_3(t) - u_2(t)\|_{L_2(Q)}^2 \leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2(Q)}^2. \quad (3.34)$$

С другой стороны, из (3.26) и (3.31) следует, что

$$\begin{aligned} c_9 \|u_3 - u_2\|_{L_p(0,t;\dot{W}_p^1(Q))}^p &\leq \langle A_R u_3 - A_R u_2, u_3 - u_2 \rangle_t \leq \frac{1}{2} \|u_3(t) - u_2(t)\|_{L_2(Q)}^2 + \\ &+ \langle A_R u_3 - A_R u_2, u_3 - u_2 \rangle_t = \frac{1}{2} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2(Q)}^2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

Используя неравенство треугольника, из (3.32)–(3.35) получаем, что

$$\begin{aligned} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{L_2(Q)} &\leq \|u_1(t) - u_3(t)\|_{L_2(Q)} + \|u_3(t) - u_2(t)\|_{L_2(Q)} \leq \\ &\leq \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2(Q)} + c_{10} \|f_1 - f_2\|_{L_q(0,t;W_q^{-1}(Q))}^{q/2}, \\ \|u_1 - u_2\|_{L_p(0,t;\dot{W}_p^1(Q))} &\leq \|u_1 - u_3\|_{L_p(0,t;\dot{W}_p^1(Q))} + \|u_3 - u_2\|_{L_p(0,t;\dot{W}_p^1(Q))} \leq \\ &\leq c_{11} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2(Q)}^{2/p} + c_{12} \|f_1 - f_2\|_{L_q(0,t;W_q^{-1}(Q))}^{1/(p-1)}. \end{aligned}$$

Оценки (3.27) и (3.28) доказаны. □

### 3.4. ОПЕРАТОРЫ С $(\mathcal{V}; W)$ -ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИЕЙ И ОБЛАДАЮЩИЕ СВОЙСТВОМ $(S_+)$ НА $W$ ОПЕРАТОРЫ. СУЩЕСТВОВАНИЕ ОБОБЩЕННОГО РЕШЕНИЯ

В этом разделе рассмотрим ситуацию, когда алгебраическому условию сильной эллиптичности удовлетворяет только «главная часть» оператора  $A_R$ , содержащая производные только старшего порядка. Как и в эллиптическом случае, построенное в этом разделе условие сильной эллиптичности для параболического квазилинейного дифференциально-разностного оператора при отсутствии сдвигов вырождается в условие, предложенное Ю. А. Дубинским, см. [20].

Напомним, что в общем случае банахово пространство  $W \subset X$  определено по формуле

$$W = \{u \in X : \partial_t u \in X^*\}.$$

**Определение 3.3.** Оператор  $\mathcal{A} : W \rightarrow X^*$  называется *оператором с  $(X; W)$ -полуограниченной вариацией*, если существует непрерывная функция  $C$ , для которой при всех  $u, y \in X$  таких, что  $\|u\|_X \leq r_1, \|y\|_X \leq r_1$ , выполняется условие

$$\langle \mathcal{A}u - \mathcal{A}y, u - y \rangle \geq -C(r_1; \|u - y\|'_W), \quad (3.36)$$

где  $\tau^{-1}C(r_1, \tau r_2) \rightarrow +0$  при  $\tau \rightarrow 0$  для всех  $r_1, r_2 > 0$ ,  $\|\cdot\|'_W$  — полунорма, компактная относительно  $\|\cdot\|_W$  и непрерывная относительно  $\|\cdot\|_X$ .

При  $X = L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))$  удобно рассматривать в качестве  $\|\cdot\|'_W := \|\cdot\|_{L_p(\Omega_T)}$ . Как известно,

$$W = \{u \in L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q)) : \partial_t u \in L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))\}$$

вложено в  $L_p(\Omega_T)$  компактно, см., например, [33, (2.16), гл. 3, п. 2] и [33, теорема 5.1, гл. 1, п. 5].

**Определение 3.4.** Говорят, что оператор  $\mathcal{A} : \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset X \rightarrow X^*$  с линейной областью определения  $\mathcal{D}(\mathcal{A})$  радиально непрерывен<sup>1</sup>, если для любых  $u, y \in \mathcal{D}(\mathcal{A}), v \in X$  непрерывна функция  $\tau \mapsto \langle \mathcal{A}(u + \tau y), v \rangle$ .

**Определение 3.5.** Оператор  $\mathcal{A} : W \rightarrow X^*$  называется псевдомонотонным на  $W$ , если для любой последовательности  $u_m \rightharpoonup u$ , сходящейся слабо в  $W$ , при выполнении оценки

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}u_m, u_m - u \rangle \leq 0 \tag{3.37}$$

справедливо соотношение

$$\underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}u_m, u_m - \xi \rangle \geq \langle \mathcal{A}u, u - \xi \rangle \quad \forall \xi \in X. \tag{3.38}$$

Как известно, радиально непрерывный оператор с  $(X; W)$ -полуограниченной вариацией является псевдомонотонным на  $W$ , см. [36, предложение 4.2.2, гл. 4, §4.2].

**Определение 3.6.** Пусть  $u_m \rightharpoonup u$  слабо в  $W$  и справедлива оценка (3.37). Если при этом  $u_m \rightarrow u$  в  $X$ , то  $\mathcal{A} : W \rightarrow X^*$  обладает свойством  $(S_+)$  на  $W$ .

Деминепрерывный оператор, обладающий свойством  $(S_+)$  на  $W$ , псевдомонотонен на  $W$ , доказательство аналогично приведенному в [57, с. 11]. Для удобства читателей докажем это. Пусть  $u_j \rightharpoonup u$  слабо в  $W$  и справедлива оценка (3.37). Тогда  $u_j \rightarrow u$  в  $X$  согласно свойству  $(S_+)$  на  $W$  и  $\mathcal{A}u_j \rightharpoonup \mathcal{A}u$  слабо в  $X$  в силу деминепрерывности оператора  $\mathcal{A}$ . Следовательно,  $\lim_{j \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}u_j, u_j - \xi \rangle = \langle \mathcal{A}u, u - \xi \rangle$  для всех  $\xi \in X$ .

**Лемма 3.10.** Пусть  $p \in [2, \infty)$  и  $R_s + R_s^* > 0$ . Пусть также оператор  $A$ , заданный формулой (3.4), имеет измеримые по  $(x, t) \in \Omega_T$  и непрерывные по  $\xi_j \in \mathbb{R}$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) коэффициенты  $A_i(x, t, \xi)$ ,  $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , удовлетворяющие оценке (3.8). Более того, пусть существуют непрерывные производные  $A_{ij}(x, t, \xi)$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, n$ , удовлетворяющие оценке (3.22) и алгебраическому условию сильной эллиптичности

$$\sum_{1 \leq m, l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i, j \leq n} r_{ml}^s A_{ij}(x + h_{sm}, t, \zeta_{m \cdot}) \eta_{lj} \eta_{mi} \geq c_{13} \sum_{1 \leq m \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} |\zeta_{mi}|^{p-2} |\eta_{mi}|^2 \tag{3.39}$$

для всех  $s$  и почти всех  $(x, t) \in \overline{Q_{s1}} \times [0, T]$ ,  $\zeta \in \mathbb{R}^{N(s) \times (n+1)}$ ,  $\eta \in \mathbb{R}^{N(s) \times n}$ , где  $c_{13} > 0$  не зависит от  $x, \zeta$  и  $\eta$ .

Тогда  $A_R : L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q)) \rightarrow L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$  обладает свойством  $(S_+)$  на  $W$ .

*Доказательство.* Сначала покажем, что «главная часть» оператора  $A_R$ , содержащая слагаемые со старшими производными, сильно эллиптична. Выделим три слагаемых:

$$\begin{aligned} \langle A_R u - A_R y, u - y \rangle &= \langle \mathcal{A}_R^1(u, u) - \mathcal{A}_R^1(u, y), u - y \rangle + \\ &+ \langle \mathcal{A}_R^1(u, y) - \mathcal{A}_R^1(y, y), u - y \rangle + \langle \mathcal{A}_R^0 u - \mathcal{A}_R^0 y, u - y \rangle, \end{aligned} \tag{3.40}$$

где

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_R^0 u, y \rangle &= \int_{\Omega_T} A_0(x, t, R_Q u, \nabla R_Q u) y \, dx \, dt, \\ \langle \mathcal{A}_R^1(u, y), v \rangle &= \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} A_i(x, t, R_Q u, \nabla R_Q u) \partial_i v \, dx \, dt. \end{aligned}$$

Заметим, что в силу условий (3.39), (3.22) оператор  $\mathcal{A}_R^1(u, \cdot)$  удовлетворяет условиям леммы 3.9 (с нулевыми функциональными коэффициентами при  $i = 0$ ). Аналогично (3.25) получаем, что

$$\langle \mathcal{A}_R^1(u, u) - \mathcal{A}_R^1(u, y), u - y \rangle \geq c_{14} \|u - y\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^p. \tag{3.41}$$

Пусть  $u_m \rightharpoonup u$  слабо в  $W$  и  $\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \langle A_R u_m, u_m - u \rangle \leq 0$ . В силу компактности вложения  $W \subset L_p(\Omega_T)$ ,  $u_m \rightarrow u$  в  $L_p(\Omega_T)$ . В силу непрерывности оператора  $R_Q$ ,  $R_Q u_m \rightharpoonup R_Q u$  в  $L_p(0, T; W_p^1(Q))$

<sup>1</sup>Очевидно, что при сужении деминепрерывного оператора на некую линейную область определения получаем радиально непрерывный оператор.

и  $R_Q u_m \rightarrow R_Q u$  в  $L_p(\Omega_T)$ . Из сходимости  $R_Q u_m \rightarrow R_Q u$  в  $L_p(\Omega_T)$  и условия (3.8) следует, что  $A_i(\cdot, \cdot, R_Q u_m, \nabla R_Q u) \rightarrow A_i(\cdot, \cdot, R_Q u, \nabla R_Q u)$  в  $L_q(\Omega_T)$ , см. [29, гл. 1, §2, п. 4]. Кроме того, так как  $u_m \rightharpoonup u$  слабо в  $W$ , то  $\lim_{m \rightarrow \infty} \langle A_R u, u_m - u \rangle = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} & \liminf_{m \rightarrow \infty} \langle A_R u_m, u_m - u \rangle = \liminf_{m \rightarrow \infty} \langle A_R u_m - A_R u, u_m - u \rangle = \\ & = \liminf_{m \rightarrow \infty} \{ \langle \mathcal{A}_R^1(u_m, u_m) - \mathcal{A}_R^1(u_m, u), u_m - u \rangle + \langle \mathcal{A}_R^1(u_m, u) - \mathcal{A}_R^1(u, u), u_m - u \rangle + \langle \mathcal{A}_R^0 u_m - \mathcal{A}_R^0 u, u_m - u \rangle \}. \end{aligned}$$

Рассмотрим второе слагаемое под знаком предела:

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}_R^1(u_m, u) - \mathcal{A}_R^1(u, u), u_m - u \rangle = \\ & = \lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} (A_i(x, t, R_Q u_m, \nabla R_Q u) - A_i(x, t, R_Q u, \nabla R_Q u)) \partial_i (u_m - u) dx dt = 0, \end{aligned}$$

так как подынтегральными функциями являются произведения, первый сомножитель которых принадлежит последовательности функций, сходящихся к нулю в пространстве  $L_q(\Omega_T)$ , а второй — последовательности функций, слабо сходящихся к нулю в  $L_p(\Omega_T)$ . Для третьего слагаемого

$$\begin{aligned} & \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}_R^0 u_m - \mathcal{A}_R^0 u, u_m - u \rangle = \\ & = \lim_{m \rightarrow \infty} \int_Q \left( A_0(x, t, R_Q u_m, \nabla R_Q u_m) - A_0(x, t, R_Q u, \nabla R_Q u) \right) (u_m - u) dx dt = 0, \end{aligned}$$

поскольку подынтегральной функцией является произведение, первый сомножитель которого принадлежит ограниченной в  $L_q(\Omega_T)$  последовательности, а второй — последовательности функций, сходящихся к нулю в  $L_p(\Omega_T)$ . То есть,

$$\liminf_{m \rightarrow \infty} \langle A_R u_m, u_m - u \rangle = \liminf_{m \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}_R^1(u_m, u_m) - \mathcal{A}_R^1(u_m, u), u_m - u \rangle.$$

Воспользуемся оценкой (3.41):

$$\begin{aligned} 0 \geq \liminf_{m \rightarrow \infty} \langle A_R u_m, u_m - u \rangle & = \liminf_{m \rightarrow \infty} \langle \mathcal{A}_R^1(u_m, u_m) - \mathcal{A}_R^1(u_m, u), u_m - u \rangle \geq \\ & \geq \liminf_{m \rightarrow \infty} c_{14} \|u_m - u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^p \geq 0, \end{aligned}$$

что доказывает сходимость  $\liminf_{m \rightarrow \infty} \|u_m - u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^p = 0$ . Сходимость по норме последовательности  $u_m \rightarrow u$  в  $L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))$  доказана, оператор  $A_R$  обладает свойством  $(S_+)$  на  $W$ .  $\square$

**Лемма 3.11.** Пусть выполнены условия леммы 3.10 и

$$|A_i(x, t, \xi_0, 0, \dots, 0)| \leq g_2(x) + c_{15} |\xi_0|^{p'-1} \quad (i = 1, \dots, n), \quad (3.42)$$

$$|A_0(x, t, \xi)| \leq g_2(x) + c_{15} \sum_{0 \leq i \leq n} |\xi_i|^{p'-1}, \quad (3.43)$$

где  $2 - 1/p < p' < p$ ,  $g_2 \in L_q(\Omega_T)$ ,  $c_{15} > 0$ .

Тогда оператор  $A_R : L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q)) \rightarrow L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$  коэрцитивный.

*Доказательство.*

$$\begin{aligned} \langle A_R u, u \rangle & = \sum_{0 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} A_i(x, t, R_Q u, \nabla R_Q u) \partial_i u dx dt = \\ & = \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} (A_i(x, t, R_Q u, \nabla R_Q u) - A_i(x, t, R_Q u, 0)) \partial_i u dx dt + \\ & \quad + \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} A_i(x, t, R_Q u, 0) \partial_i u dx dt + \int_{\Omega_T} A_0(x, t, R_Q u, \nabla R_Q u) u dx dt. \quad (3.44) \end{aligned}$$

Для первого слагаемого в силу (3.39) получена оценка (3.41):

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} (A_i(x, t, R_Q u, \nabla R_Q u) - A_i(x, t, R_Q u, 0)) \partial_i u \, dx \, dt \geq c_{14} \|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^p. \quad (3.45)$$

Оценим второе слагаемое, используя (3.42) и неравенство Гельдера:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_T} A_i(x, t, R_Q u, 0) \partial_i u \, dx \, dt \right| &\leq \int_{\Omega_T} |A_i(x, t, R_Q u, 0)| |\partial_i u| \, dx \, dt \leq \\ &\leq \int_{\Omega_T} |g_2(x, t) + c_{15} |R_Q u|^{p'-1}| |\partial_i u| \, dx \, dt \leq \\ &\leq \|g_2\|_{L_q(\Omega_T)} \|\partial_i u\|_{L_p(\Omega_T)} + c_{15} \left( \int_{\Omega_T} |R_Q u|^{(p'-1)q} \, dx \, dt \right)^{1/q} \left( \int_{\Omega_T} |\partial_i u|^p \, dx \, dt \right)^{1/p} = \\ &= \|g_2\|_{L_q(\Omega_T)} \|\partial_i u\|_{L_p(\Omega_T)} + c_{15} \|R_Q u\|_{L_{\frac{(p'-1)p}{p-1}}(\Omega_T)}^{p'-1} \|\partial_i u\|_{L_p(\Omega_T)}. \end{aligned}$$

Заметим, что  $1 < (p' - 1)p/(p - 1) = (p' - 1)q < p$  при  $(2 - 1/p) < p' < p$ . Поскольку в силу непрерывности вложения пространств Лебега  $L_{\frac{(p'-1)p}{p-1}}(\Omega_T) \subset L_p(\Omega_T)$  и непрерывности оператора

$$R_Q : L_{\frac{(p'-1)p}{p-1}}(\Omega_T) \rightarrow L_{\frac{(p'-1)p}{p-1}}(\Omega_T)$$

$$\|R_Q u\|_{L_{\frac{(p'-1)p}{p-1}}(\Omega_T)}^{p'-1} \leq c_{16} \|u\|_{L_p(\Omega_T)}^{p'-1},$$

то

$$\begin{aligned} \left| \int_{\Omega_T} A_i(x, t, R_Q u, 0) \partial_i u \, dx \, dt \right| &\leq \|g_2\|_{L_q(\Omega_T)} \|\partial_i u\|_{L_p(\Omega_T)} + c_{17} \|u\|_{L_p(\Omega_T)}^{p'-1} \|\partial_i u\|_{L_p(\Omega_T)} \leq \\ &\leq c_{18} \|\partial_i u\|_{L_p(\Omega_T)} + \frac{c_{17} \varepsilon^p}{p} \|\partial_i u\|_{L_p(\Omega_T)}^p + \frac{c_{17}}{\varepsilon^q q} \|u\|_{L_p(\Omega_T)}^{(p'-1)q}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \left| \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} A_i(x, t, R_Q u, 0) \partial_i u \, dx \, dt \right| &\leq \\ &\leq c_{18} \sum_{1 \leq i \leq n} \|\partial_i u\|_{L_p(\Omega_T)} + \sum_{1 \leq i \leq n} \frac{c_{17} \varepsilon^p}{p} \|\partial_i u\|_{L_p(\Omega_T)}^p + \frac{c_{17} n}{\varepsilon^q q} \|u\|_{L_p(\Omega_T)}^{(p'-1)q} = \\ &= c_{18} \|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))} + \frac{c_{17} \varepsilon^p}{p} \|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^p + \frac{c_{17} n}{\varepsilon^q q} c_{19}^{(p'-1)q} \|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^{(p'-1)q}, \quad (3.46) \end{aligned}$$

где в силу неравенства Фридрихса

$$\|u\|_{L_p(\Omega)} \leq c_{19} \|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}. \quad (3.47)$$

Аналогично, для последнего слагаемого правой части (3.44) используем непрерывность вложения  $L_{p'}(\Omega_T) \subset L_p(\Omega_T)$  для  $1 < p' < p$ , а также непрерывность оператора  $R_Q : L_{p'}(\Omega_T) \rightarrow L_{p'}(\Omega_T)$ :

$$\left| \int_{\Omega_T} A_0(x, t, R_Q u, \nabla R_Q u) u \, dx \, dt \right| \leq \int_{\Omega_T} |A_0(x, t, R_Q u, \nabla R_Q u)| |u| \, dx \, dt \leq$$

$$\begin{aligned}
 & \leq \int_{\Omega_T} \left| g_2(x, t) + c_{15} |R_Q u|^{p'-1} + c_{15} \sum_{1 \leq i \leq n} |\partial_i R_Q u|^{p'-1} \right| |u| dx dt \leq \\
 & \leq c_{18} \|u\|_{L_p(\Omega_T)} + c_{15} \|u\|_{L_{p'}(\Omega_T)} \|R_Q u\|_{L_{p'}(\Omega_T)}^{p'-1} + c_{15} \sum_{1 \leq i \leq n} \|\partial_i R_Q u\|_{L_{p'}(\Omega_T)}^{p'-1} \|u\|_{L_{p'}(\Omega_T)} \leq \\
 & \leq c_{18} \|u\|_{L_p(\Omega_T)} + c_{20} \|u\|_{L_p(\Omega_T)}^{p'} + c_{21} \sum_{1 \leq i \leq n} \|\partial_i u\|_{L_p(\Omega_T)}^{p'-1} \|u\|_{L_p(\Omega_T)} \leq \\
 & \leq c_{18} \|u\|_{L_p(\Omega_T)} + c_{20} \|u\|_{L_p(\Omega_T)}^{p'} + \frac{c_{21}(p'-1)}{p'} \sum_{1 \leq i \leq n} \|\partial_i u\|_{L_p(\Omega_T)}^{p'} + \frac{c_{21}}{p'} \|u\|_{L_p(\Omega_T)}^{p'} \leq \\
 & \leq c_{18} c_{19} \|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))} + c_{22} \|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}, \quad (3.48)
 \end{aligned}$$

где  $\|u\|_{L_{p'}(Q)} \leq c_{23} \|u\|_{L_p(Q)}$  в силу непрерывности вложения пространств Лебега при  $p' < p$  и  $c_{22} = c_{19}^{p'} c_{23}^{p'} (c_{20} + c_{21}/p') + c_{21}(p'-1)/p'$ ; использовано также неравенство Фридрихса (3.47). Выберем  $\varepsilon$  таким образом, что  $c_{17}\varepsilon^p/p = c_{14}/2$ , и подставим оценки (3.45), (3.46) и (3.48) в (3.44):

$$\begin{aligned}
 \langle A_R u, u \rangle & \geq c_{14} \|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^p - c_{18} \|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))} - \frac{c_{17}\varepsilon^p}{p} \|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^p - \\
 & - \frac{c_{17}n}{\varepsilon^q q} c_{19}^{(p'-1)q} \|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^{(p'-1)q} - c_{18} c_{19} \|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))} - c_{22} \|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^{p'} \geq \\
 & \geq \frac{c_{14}}{2} \|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^p - c_{18}(1 + c_{19}) \|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))} - c_{23} \|u\|_{L_p(\Omega_T)}^{(p'-1)q} - c_{21} \|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^{p'}. \quad (3.49)
 \end{aligned}$$

Первое слагаемое в правой части неравенства (3.49) положительно и имеет степенной рост порядка  $p$ , а остальные (отрицательные) слагаемые имеют степенной рост порядков меньше  $p$ . Оператор  $A_R$  коэрцитивен.  $\square$

**Теорема 3.2.** Пусть выполнены условия интегрируемости (3.8), дифференцируемости (3.22) для  $i, j = 1, \dots, n$ , сильной эллиптичности (3.39) и коэрцитивности (3.42)–(3.43),  $\varphi \in L_2(Q)$ ,  $f \in L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$ ,  $p \in [2, \infty)$ . Тогда существует непустое, ограниченное и слабо замкнутое в  $W$  множество обобщенных решений задачи (3.1)–(3.3).

*Доказательство.* Из условий теоремы следует, что  $A_R$  — деминепрерывный (см. лемму 3.9), коэрцитивный (см. лемму 3.11) оператор, обладающий свойством  $(S_+)$  на  $W$  (см. лемму 3.10), т. е. псевдомонотонный на  $W$ . Согласно [33, теорема 1.2, гл. 3, §1.4], существует обобщенное решение задачи (3.1)–(3.3)  $u \in W$ .

Ограниченность множества решений следует из коэрцитивности оператора  $A_R$ . Докажем это. Пусть  $u$  — решение,  $u \neq 0$  (иначе оценка тривиальна). Тогда

$$\begin{aligned}
 \langle \partial_t u + A_R u, u \rangle & = \langle f, u \rangle, \\
 \frac{1}{2} \|u(T)\|_{L_2(Q)}^2 + \langle A_R u, u \rangle & = \langle f, u \rangle + \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L_2(Q)}^2, \quad (3.50)
 \end{aligned}$$

$$\|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^{-1} \langle A_R u, u \rangle \leq \|f\|_{L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))} + \frac{\|\varphi\|_{L_2(Q)}^2}{2\|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}}. \quad (3.51)$$

С правой стороны неравенства (3.51) стоит ограниченное значение. Ограничение левой части (3.51) в силу коэрцитивности оператора  $A_R$  гарантирует ограниченность  $\|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}$ , причем можно определить константу, которой ограничена эта норма, так, что данная константа зависит только от  $\|f\|_{L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))}$ ,  $\|\varphi\|_{L_2(Q)}$  и от функции, оценивающей коэрцитивность оператора  $A_R$ , но не зависит от  $u$ . В то же время из формулы (3.50) и ограниченности  $\|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}$  следует, что ограничена  $\|u(T)\|_{L_2(Q)}$ . Доказана ограниченность обобщенных решений задачи (3.1)–(3.3) в пространстве  $W$ .

Слабая компактность множества решений следует из того, что оператор в рассматриваемом уравнении обладает свойством  $(S_+)$  на  $W$ . Докажем это. Пусть  $u_n \rightharpoonup u$  в  $W$ ,  $u_n$  принадлежат множеству решений для каждого  $n$ . При этом, по определению,  $u_n \rightharpoonup u$  в  $L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))$  и

$\partial_t u_n \rightharpoonup \partial_t u$  в  $L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$ , кроме того,  $u|_{t=0} = \varphi$  в силу непрерывности вложения  $W \subset C(0, T; L_2(Q))$ . Поскольку  $u_n$  — решение (3.7), то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle A_R u_n, u_n - u \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, u_n - u \rangle - \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle \partial_t u_n, u_n - u \rangle. \quad (3.52)$$

Первое слагаемое (3.52)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, u_n - u \rangle = 0$ , так как  $u_n \rightharpoonup u$  в  $L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))$ . Распишем второе слагаемое (3.52):  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \partial_t u_n, u \rangle = \langle \partial_t u, u \rangle$  в силу слабой сходимости  $\partial_t u_n \rightharpoonup \partial_t u$  в  $L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$ , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \partial_t u_n, u \rangle = \frac{1}{2} \|u(T)\|_{L_2(Q)}^2 - \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L_2(Q)}^2.$$

С другой стороны,

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle \partial_t u_n, u_n \rangle = \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{2} \|u_n(T)\|_{L_2(Q)}^2 - \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L_2(Q)}^2 \right) \geq \frac{1}{2} \|u(T)\|_{L_2(Q)}^2 - \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L_2(Q)}^2$$

в силу свойства норм слабо сходящихся последовательностей. То есть, если  $u_n \rightharpoonup u$  в  $W$ , то

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle \partial_t u_n, u_n - u \rangle \geq 0. \quad (3.53)$$

Подставив это выражение в (3.52) получим, что  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle A_R u_n, u_n - u \rangle \leq 0$ . Согласно свойству  $(S_+)$  на  $W$ ,  $u_n \rightarrow u$  в  $L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))$ . Из деминепрерывности оператора следует, что  $A_R u_n \rightharpoonup A_R u$  в  $L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$ . Следовательно,  $u$  удовлетворяет операторному уравнению (3.7).  $\square$

Если условие дифференцируемости справедливо для всех  $i, j = 0, 1, \dots, n$ , то можно доказать более сильное свойство для квазилинейного дифференциально-разностного оператора.

**Лемма 3.12.** Пусть  $p \in [2, \infty)$ , выполнены условия леммы 3.10 и существуют непрерывные производные  $A_{ij}(x, t, \xi)$ , удовлетворяющие оценке (3.22) для всех  $i, j = 0, 1, \dots, n$ . Тогда  $A_R : L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q)) \rightarrow L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$  — оператор с  $(\mathcal{V}, W)$ -полуограниченной вариацией.

*Доказательство.* Как и в доказательстве леммы 3.10, разобьем оператор на три слагаемых, см. (3.40), и получим для первого слагаемого правой части (3.40) оценку (3.41).

Оценим второе слагаемое правой части (3.40). Воспользуемся дифференцируемостью коэффициентов, формулой Тейлора и теоремой о среднем:

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_R^1(u, y) - \mathcal{A}_R^1(y, y), u - y \rangle &= \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} (A_i(x, t, R_Q u, \nabla R_Q y) - A_i(x, t, R_Q y, \nabla R_Q y)) \partial_i(u - y) dx dt = \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} \int_0^1 A_{i0}(x, t, R_Q u + \tau R_Q(y - u), \nabla R_Q y) d\tau R_Q(u - y) \partial_i(u - y) dx dt = \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} A_{i0}(x, t, R_Q u + \hat{\tau} R_Q(y - u), \nabla R_Q y) R_Q(u - y) \partial_i(u - y) dx dt \end{aligned} \quad (3.54)$$

для некоторого  $\hat{\tau} \in [0, 1]$ . Заметим, что интегралы по  $\Omega_T$  существуют в силу условия (3.22). Оценим подынтегральное выражение, используя (3.22):

$$A_{i0}(x, t, R_Q u + \hat{\tau} R_Q(y - u), \nabla R_Q y) \leq g_1(x, t) + c_7 |R_Q u + \hat{\tau} R_Q(y - u)|^{p-2} + c_7 \sum_{1 \leq j \leq n} |\partial_j R_Q y|^{p-2}.$$

Подставим полученное выражение в (3.54) и применим неравенство Гёльдера:

$$\begin{aligned} &|\langle \mathcal{A}_R^1(u, y) - \mathcal{A}_R^1(y, y), u - y \rangle| \leq \\ &\leq \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} \left( g_1(x, t) + c_7 |R_Q u + \hat{\tau} R_Q(y - u)|^{p-2} + c_7 \sum_{1 \leq j \leq n} |\partial_j R_Q y|^{p-2} \right) |R_Q(u - y) \partial_i(u - y)| dx dt \leq \\ &\leq \sum_{1 \leq i \leq n} \left( \|g_1\|_{L_{p/(p-2)}(\Omega_T)} + c_7 \left( \|R_Q u\|_{L_p(\Omega_T)}^{p-2} + \|R_Q y\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^{p-2} \right) \right) \times \end{aligned}$$

$$\times \|R_Q(u - y)\|_{L_p(\Omega_T)} \|\partial_i(u - y)\|_{L_p(\Omega_T)};$$

здесь учтено, что  $|R_Q u + \hat{\tau} R_Q(y - u)|^{p-2} \leq |R_Q u|^{p-2} + |R_Q y|^{p-2}$  при  $p > 2$ . Используем также неравенства Фридрихса (3.47) и ограниченности оператора  $R_Q(3.20)$ :  $\|R_Q u\|_{L_p(\Omega_T)} \leq c_{19} c_5 \|u\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))} \leq c_{19} c_5 r_1$ ;  $\|R_Q y\|_{L_p(\Omega_T)} \leq c_{19} c_5 \|y\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))} \leq c_{19} c_5 r_1$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|R_Q u\|_{L_p(\Omega_T)}^{p-2} + \|R_Q y\|_{L_p(\Omega_T)}^{p-2} + \|R_Q y\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))}^{p-2} &\leq (c_{19} c_5)^{p-2} \|u\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))}^{p-2} + \\ &+ (c_{19} c_5)^{p-2} \|y\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))}^{p-2} + c_5^{p-2} \|y\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))}^{p-2} \leq c_5^{p-2} (2c_{19}^{p-2} + 1) r_1^{p-2}. \end{aligned}$$

Введем вспомогательную функцию

$$\hat{c}_1(r_1) := \|g_1\|_{L_{p/(p-2)}(\Omega_T)} + 2c_7 c_5^{p-2} (c_{18}^{p-2} + 1) r_1^{p-2}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_R^1(u, y) - \mathcal{A}_R^1(y, y), u - y \rangle &\leq \hat{c}_1(r_1) \sum_{1 \leq i \leq n} \|R_Q(u - y)\|_{L_p(\Omega_T)} \|\partial_i(u - y)\|_{L_p(\Omega_T)} \leq \\ &\leq c_5 \hat{c}_1(r_1) \|u - y\|_{L_p(\Omega_T)} \|u - y\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))}. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Аналогично оценим третье слагаемое правой части (3.40):

$$\begin{aligned} \langle \mathcal{A}_R^0 u - \mathcal{A}_R^0 y, u - y \rangle &= \int_{\Omega_T} A_{00}(x, t, R_Q u + \hat{\tau}_0 R_Q(y - u), \nabla R_Q u) R_Q(u - y) (u - y) dx dt + \\ &+ \sum_{1 \leq j \leq n} \int_Q A_{0j}(x, t, R_Q u, \nabla R_Q u + \hat{\tau}_j \partial_i R_Q(y - u)) \partial_j R_Q(u - y) (u - y) dx dt. \end{aligned}$$

Поскольку

$$|A_{0j}(x, t, R_Q y, \nabla(R_Q u + \hat{\tau}_j R_Q(y - u)))| \leq g_1(x, t) + c_7 |\partial_j R_Q u|^{p-2} + c_7 \sum_{0 \leq k \leq n} |\partial_k R_Q y|^{p-2},$$

то

$$\begin{aligned} \|A_{0j}(x, R_Q y, \nabla(R_Q u + \hat{\tau}_j R_Q(y - u)))\|_{L_{p/p-2}(\Omega_T)} &\leq \\ &\leq \|g_1\|_{L_{p/(p-2)}(\Omega_T)} + c_7 \|\partial_j R_Q u\|_{L_p(\Omega_T)}^{p-2} + c_7 \|R_Q y\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))}^{p-2} \leq \hat{c}_1(r_1). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} |\langle \mathcal{A}_R^0 u - \mathcal{A}_R^0 y, u - y \rangle| &\leq \sum_{0 \leq j \leq n} \hat{c}_1(r_1) \|\partial_i R_Q(u - y)\|_{L_p(\Omega_T)} \|u - y\|_{L_p(\Omega_T)} \leq \\ &\leq c_5 \hat{c}_1(r_1) \|u - y\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))} \|u - y\|_{L_p(\Omega_T)} + c_5 \hat{c}_1(r_1) \|u - y\|_{L_p(\Omega_T)}^2. \end{aligned} \quad (3.56)$$

Подставляя оценки (3.41), (3.55) и (3.56) в (3.40), получаем

$$\begin{aligned} \langle A_R u - A_R y, u - y \rangle &\geq c_{14} \|u - y\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))}^p - 2c_5 \hat{c}_1(r_1) \|u - y\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))} \|u - y\|_{L_p(\Omega_T)} - \\ &- c_5 \hat{c}_1(r_1) \|u - y\|_{L_p(\Omega_T)}^2 \geq c_{14} \|u - y\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))}^p - c_5 \hat{c}_1(r_1) \|u - y\|_{L_p(\Omega_T)}^2 - \\ &- \frac{\varepsilon^p}{p} \|u - y\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))}^p - \frac{(c_5 \hat{c}_1(r_1))^q}{\varepsilon^q q} \|u - y\|_{L_p(\Omega_T)}^q. \end{aligned}$$

Пусть  $\frac{\varepsilon^p}{p} = \frac{c_{14}}{2}$ . Тогда

$$\begin{aligned} \langle A_R u - A_R y, u - y \rangle &\geq \frac{c_{14}}{2} \|u - y\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))}^p - \frac{(c_5 \hat{c}_1(r_1))^q}{q(p c_{14}/2)^{1/(p-1)}} \|u - y\|_{L_p(\Omega_T)}^q - \\ &- c_5 \hat{c}_1(r_1) \|u - y\|_{L_p(\Omega_T)}^2. \end{aligned} \quad (3.57)$$

Два последних слагаемых правой части (3.57) удовлетворяют условиям функции  $-C(r_1; \|u - y\|_{L_p(\Omega_T)})$ , определяющей  $(\mathcal{V}, W)$ -полуограниченность вариации оператора  $A_R$ , см. (3.36).  $\square$

**Теорема 3.3.** Пусть выполнены условия интегрируемости (3.8), дифференцируемости (3.22) для  $i, j = 0, 1, \dots, n$ , сильной эллиптичности (3.39) и коэрцитивности (3.42)-(3.43),  $\varphi \in L_2(Q)$ ,  $f \in L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$ ,  $p \in [2, \infty)$ . Тогда существует непустое, ограниченное и слабо замкнутое в  $W$  множество обобщенных решений задачи (3.1)-(3.3).

Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.2, только вместо теоремы о существовании решения параболического уравнения с псевдомонотонным на  $W$  оператором (см. [33, теорема 1.2, гл. 3, §1]) мы можем использовать теорему о существовании решения параболического уравнения с оператором с  $(\mathcal{V}, W)$ -полуограниченной вариацией (см. [20, теорема 3.2, гл. 3]).

**Теорема 3.4.** Пусть  $p = 2$ , а также выполнены условия интегрируемости (3.8), дифференцируемости (3.22) для  $i, j = 0, 1, \dots, n$ , сильной эллиптичности (3.39) и коэрцитивности (3.42)-(3.43). Тогда для любых  $f \in L_2(\Omega_T)$  и  $\varphi \in L_2(Q)$  существует обобщенное решение задачи (3.1)-(3.3), причем  $\partial_t u \in L_2(\Omega_T)$ .

*Доказательство.* При  $p = 2$  можно рассматривать рефлексивное банахово пространство

$$\widetilde{W} = \{u \in L_2(0, T; \dot{W}_2^1(Q)) : \partial_t u \in L_2(\Omega_T)\}.$$

Как известно,  $\widetilde{W} \subset L_2(\Omega_T)$  компактно, см. [33, теорема 5.1, гл. 1, §5]. Согласно оценке (3.57) оператор  $A_R$  является оператором с  $(\mathcal{V}, \widetilde{W})$ -полуограниченной вариацией. Оценки (3.42)-(3.43) гарантируют коэрцитивность оператора, см. лемму 3.11. Следовательно, существует решение операторного уравнения (3.7), см. [20, теорема 3.2, гл. 3] или [33, теорема 1.2, гл. 3, §1]. При этом решение  $u \in \widetilde{W}$ , т. е.  $\partial_t u \in L_2(\Omega_T)$ .  $\square$

### 3.5. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ

Помимо начально-краевой задачи, полученные выше результаты позволяют доказать существование периодических по  $t$  решений параболической задачи (3.1), (3.3).

В цилиндре  $Q \times \mathbb{R}$  рассмотрим уравнение

$$\partial_t u(x, t) + A_R u(x, t) = f(x, t) \quad ((x, t) \in Q \times \mathbb{R}) \quad (3.58)$$

с краевым условием

$$u(x, t) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus Q),$$

если  $f(x, t)$  и коэффициенты дифференциального оператора  $A$  периодичны по  $t$  с периодом  $T$ . То есть достаточно рассмотреть уравнение (3.1) с краевым условием (3.3) при условии периодичности

$$u(x, 0) = u(x, T) \quad (x \in Q). \quad (3.59)$$

Введем рефлексивное банахово пространство

$$\widehat{W} = \{u \in \mathcal{V} : \partial_t u \in \mathcal{V}^*, u|_{t=0} = u|_{t=T}\}$$

с нормой  $\|u\|_{\widehat{W}} = \|u\|_{\mathcal{V}} + \|\partial_t u\|_{\mathcal{V}^*}$ , где  $\partial_t u$  — производная элемента  $u \in \mathcal{V}$  в смысле распределений со значениями в  $\mathcal{V}^*$ . Обозначим через  $\widehat{A}_R$  сужение оператора  $A_R$  на пространство  $\widehat{W}$ :

$$\widehat{A}_R u := A_R u \quad \forall u \in \widehat{W}.$$

**Определение 3.7.** Будем называть функцию  $u \in \widehat{W}$  обобщенным решением задачи (3.58), (3.3), (3.59), если она удовлетворяет операторному уравнению

$$\partial_t u + \widehat{A}_R u = f. \quad (3.60)$$

Очевидно, что  $\widehat{W} \subset W$  непрерывно. Более того, оператор  $\widehat{A}_R : \widehat{W} \rightarrow \mathcal{V}^*$  наследует свойства оператора  $A_R : W \rightarrow \mathcal{V}^*$ . Используя это, сформулируем теоремы существования решения.

**Теорема 3.5.** Пусть  $p \in [2, \infty)$ ,  $R_s + R_s^* > 0$ , коэффициенты дифференциального оператора  $A$  периодичны по  $t$  с периодом  $T$ , а также выполнены условия дифференцируемости (3.22) для  $i, j = 0, 1, \dots, n$  и сильной эллиптичности (3.21),  $p \in [2, \infty)$ . Тогда для любого  $f \in L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$  существует единственное обобщенное решение задачи (3.58), (3.3), (3.59), более того, справедлива следующая оценка:

$$\|u_1 - u_2\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))} \leq c_{24} \|f_1 - f_2\|_{L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))}^{1/(p-1)}, \quad (3.61)$$

где  $u_1$  и  $u_2$  — обобщенные решения задачи (3.58), (3.3), (3.59) при правых частях  $f_1$  и  $f_2$ ;  $c_{24} > 0$  не зависит от  $u_k$  и  $f_k$ .

*Доказательство.* В силу условия интегрируемости (3.8) оператор  $\widehat{A}_R$  деминепрерывен и ограничен, см. лемму 3.8. В силу условий дифференцируемости (3.22) и сильной эллиптичности (3.21) оператор  $A_R$  сильно монотонен, см. лемму 3.9. Сильно монотонный оператор строго монотонен и коэрцитивен. Следовательно, решение операторного уравнения (3.60) существует и единственно, см. [15, теорема 1.4, гл. VI, §1].

Докажем оценку (3.61). Пусть  $u_1 \in \widehat{W}$  и  $u_2 \in \widehat{W}$  — обобщенные решения задачи (3.58), (3.3), (3.59) при правых частях  $f_1$  и  $f_2$ . Тогда

$$\langle A_R u_1 - A_R u_2, u_1 - u_2 \rangle = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle. \quad (3.62)$$

Здесь использована известная оценка для любого  $u \in W$ :

$$\langle \partial_t u, u \rangle = \int_{\Omega_T} \partial_t u \cdot u \, dx \, dt = \frac{1}{2} \|u(T)\|_{L_2(Q)}^2 - \frac{1}{2} \|u(0)\|_{L_2(Q)}^2,$$

см., например, [15, замечание 1.22, гл. IV, §2]. То есть  $\langle \partial_t u, u \rangle = 0$  для любого  $u \in \widehat{W}$ . Используем оценку сильной монотонности оператора (3.26):

$$\begin{aligned} c_9 \|u_1 - u_2\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^p &\leq \langle A_R u_1 - A_R u_2, u_1 - u_2 \rangle = \\ &= \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle \leq \|f_1 - f_2\|_{L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))} \|u_1 - u_2\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}, \end{aligned}$$

т. е.

$$\|u_1 - u_2\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^{p-1} \leq \frac{1}{c_9} \|f_1 - f_2\|_{L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))}. \quad (3.63)$$

Оценка (3.61) доказана.  $\square$

**Теорема 3.6.** Пусть  $p \in [2, \infty)$ ,  $R_s + R_s^* > 0$ , коэффициенты дифференциального оператора  $A$  периодичны по  $t$  с периодом  $T$ , а также выполнены условия интегрируемости (3.8), дифференцируемости (3.22) для  $i, j = 1, \dots, n$ , сильной эллиптичности (3.39) и коэрцитивности (3.42)–(3.43),  $f \in L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$ ,  $p \in [2, \infty)$ . Тогда существует непустое, ограниченное и слабо замкнутое в  $\widehat{W}$  множество обобщенных решений задачи (3.58), (3.3), (3.59).

*Доказательство.* В силу условия интегрируемости (3.8) оператор  $\widehat{A}_R$  деминепрерывен и ограничен, см. лемму 3.8. В силу условий дифференцируемости (3.22) и сильной эллиптичности (3.39) оператор  $\widehat{A}_R$  обладает свойством  $(S_+)$  на  $\widehat{W}$ , см. лемму 3.10, т. е. псевдомонотонен на  $\widehat{W}$ . В силу условий (3.42)–(3.43) оператор  $\widehat{A}_R$  коэрцитивен, см. лемму 3.11. Согласно [33, теорема 1.1, гл. 3, §1.3], где  $L := \partial_t : \widehat{W} \rightarrow \mathcal{V}^*$ , существует обобщенное решение задачи (3.58), (3.3), (3.59)  $u \in \widehat{W}$ .

Ограниченность множества решений следует из коэрцитивности оператора  $\widehat{A}_R$ . Докажем это. Пусть  $u$  — решение,  $u \neq 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \langle \partial_t u + \widehat{A}_R u, u \rangle &= \langle f, u \rangle, \\ \langle \widehat{A}_R u, u \rangle &= \langle f, u \rangle, \\ \|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^{-1} \langle \widehat{A}_R u, u \rangle &\leq \|f\|_{L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))}. \end{aligned} \quad (3.64)$$

С правой стороны неравенства (3.64) стоит ограниченное значение, причем ограничение зависит только от  $\|f\|_{L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))}$  и от функции, оценивающей коэрцитивность оператора  $\widehat{A}_R$ , но не

зависит от  $u$ . При этом существует  $t_1 \in [0, T]$  такое, что  $\|u(t_1)\|_{L_2(Q)}^2 < \infty$ . Но тогда для любого  $t_2 \neq t_1, t_2 \in [0, T]$ ,

$$\frac{1}{2} \left| \|u(t_2)\|_{L_2(Q)}^2 - \|u(t_1)\|_{L_2(Q)}^2 \right| = \left| \int_{t_1}^{t_2} \int_Q (f - \widehat{A}_R u) u \, dx \, dt \right| \leq \\ \leq \|f - A_R u\|_{L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))} \|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))} < +\infty,$$

что доказывает ограниченность множества решений в пространстве  $W$ .

Слабая компактность множества решений следует из того, что оператор в рассматриваемом уравнении обладает свойством  $(S_+)$  на  $\widehat{W}$ . Докажем это. Пусть  $u_n \rightharpoonup u$  в  $\widehat{W}$ ,  $u_n$  принадлежат множеству решений для каждого  $n$ . При этом, по определению,  $u_n \rightharpoonup u$  в  $L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))$  и  $\partial_t u_n \rightharpoonup \partial_t u$  в  $L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$ , причем  $u|_{t=0} = u|_{t=T}$ . Поскольку  $u_n$  — решение операторного уравнения (3.60), то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle \widehat{A}_R u_n, u_n - u \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, u_n - u \rangle - \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle \partial_t u_n, u_n - u \rangle. \quad (3.65)$$

Первое слагаемое (3.65)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, u_n - u \rangle = 0$ , так как  $u_n \rightharpoonup u$  в  $L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))$ . Распишем второе слагаемое (3.65):  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \partial_t u_n, u \rangle = \langle \partial_t u, u \rangle$  в силу слабой сходимости  $\partial_t u_n \rightharpoonup \partial_t u$  в  $L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$ , т. е.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \partial_t u_n, u_n - u \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \partial_t (u_n - u), u_n - u \rangle = \\ = \frac{1}{2} \|u_n(T) - u(T)\|_{L_2(Q)}^2 - \frac{1}{2} \|u_n(0) - u(0)\|_{L_2(Q)}^2 = 0. \quad (3.66)$$

Подставив это выражение в (3.65), получим, что  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle A_R u_n, u_n - u \rangle \leq 0$ . Согласно свойству  $(S_+)$  на  $\widehat{W}$ ,  $u_n \rightarrow u$  в  $L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))$ . Из деминепрерывности оператора следует, что  $\widehat{A}_R u_n \rightharpoonup \widehat{A}_R u$  в  $L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$ . Следовательно,  $u$  удовлетворяет операторному уравнению (3.60).  $\square$

## ГЛАВА 4

### СУЩЕСТВЕННО НЕЛИНЕЙНЫЕ ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ

В этой главе задача (3.1)–(3.3) (см. раздел 3.1) исследуется при условии, что дифференциальный оператор может являться существенно нелинейным. Будут использованы свойства разбиения области и разностного оператора (см. раздел 3.2). Константы  $c_1, c_2, c_3, c_4, c_5 > 0$  были определены в разделах 3.1–3.2. Нумерация остальных констант будет соответствовать этой главе, если нет ссылки на формулы из главы 3. Также будут использованы определения из главы 3.

#### 4.1. ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫМ ОПЕРАТОРОМ, ОБЛАДАЮЩИМ СВОЙСТВОМ $(S_+)$ НА $W$

Предположим, что для любого класса  $s$  функции  $A_i, i = 0, 1, \dots, n$ , и матрицы  $R_s$  удовлетворяют следующим условиям:

**(A0) Условие невырожденности:**  $\det R_{s_\nu} \neq 0$  ( $\nu = 1, \dots, n_1$ ).

**(A1) Условие интегрируемости:**  $A_i$  — функции типа Каратеодори, т.е.  $A_i(x, t, \xi)$  измеримы по  $x$  и  $t$  для всех  $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$  и непрерывны по  $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$  для п.в.  $(x, t) \in \overline{\Omega_T}$ ; более того, для п.в.  $(x, t) \in \overline{\Omega_T}$  и любых  $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$

$$|A_i(x, t, \xi)| \leq g(x, t) + c_5 \sum_{0 \leq i \leq n} |\xi_i|^{p-1}, \quad i = 0, \dots, n, \quad (3.8)$$

где  $c_5 > 0, g \in L_q(\Omega_T)$ .

**(A2) Условие коэрцитивности:** для всех  $s$ , п.в.  $(x, t) \in \overline{Q_{s1}} \times [0, T]$  и любых  $\zeta \in \mathbb{R}^{N(s) \times (n+1)}$ , существуют  $p' \in (1, p)$ ,  $c_6 > 0$  и  $c_7, c_8 \in \mathbb{R}$  такие, что

$$\sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{0 \leq i \leq n} A_i(x + h_{sl}, t, \zeta_l) (R_s^{-1} \zeta_i)_l \geq c_6 \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} |\zeta_{li}|^p - c_7 \sum_{1 \leq l \leq N(s)} |\zeta_{l0}|^{p'} - c_8. \quad (4.1)$$

**(A3) Условие эллиптичности:** для всех  $s$ , п.в.  $(x, t) \in \overline{Q_{s1}} \times [0, T]$  и любых  $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{N(s) \times (n+1)}$  таких, что  $\eta_{l0} = \zeta_{l0}$  и  $\eta \neq \zeta$ , справедлива оценка

$$\sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} (A_i(x + h_{sl}, t, \zeta_l) - A_i(x + h_{sl}, t, \eta_l)) (R_s^{-1}(\zeta_i - \eta_i))_l > 0. \quad (4.2)$$

Условие интегрируемости **(A1)** является стандартным (с небольшими вариациями) для построения интегрального представления дифференциального оператора, см. [20, 29, 33] и др. Благодаря этому условию для любых  $v \in \mathcal{V}$

$$\langle A_R u, v \rangle = \sum_{0 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} A_i(x, t, R_Q u, \partial_1 R_Q u, \dots, \partial_n R_Q u) \partial_i v \, dx \, dt, \quad (4.3)$$

здесь и ниже  $\partial_0 v := v$ , см. (3.9).

Заметим также, что в случае отсутствия сдвигов (т. е. при  $R_Q = \mathbb{I}$ ) условие **(A2)** трансформируется в условие коэрцитивности для дифференциальных операторов (см. [20, 93], например), а условие **(A3)** является стандартным при исследовании псевдомонотонных на  $W$  дифференциальных операторов, см. [33] и др., а также дифференциальных операторов, обладающих свойством  $(S_+)$  на  $W$ , см. [93] и др.

**Лемма 4.1.** Пусть выполнены условия **(A0)–(A2)**. Тогда оператор  $A_R : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$ , заданный формулой (4.3), коэрцитивен.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.1. Для удобства читателей приведем его полностью.

*Доказательство.* Пусть  $u \in \mathcal{V}$ ,  $w = R_Q u$ . Вследствие условия **(A0)** разностный оператор  $R_Q$  невырожден, т. е. существует ограниченный обратный оператор  $R_Q^{-1} : L_p(\Omega_T) \rightarrow L_p(\Omega_T)$ , см. лемму 3.6. Следовательно,

$$\begin{aligned} \langle A_R u, u \rangle &= \sum_{0 \leq i \leq n} \int_0^T \int_Q A_i(x, t, R_Q u, \partial_1 R_Q u, \dots, \partial_n R_Q u) \partial_i u \, dx \, dt = \\ &= \sum_{0 \leq i \leq n} \int_0^T \int_Q A_i(x, t, w, \partial_1 w, \dots, \partial_n w) \partial_i R_Q^{-1} w \, dx \, dt = \\ &= \sum_s \sum_{0 \leq i \leq n} \int_0^T \int_{\bigcup_l Q_{sl}} A_i(x, t, P_s w, P_s \nabla w) (U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w) \, dx \, dt = \\ &= \sum_s \sum_{0 \leq i \leq n} \int_0^T \int_{Q_{s1}} (U_s A_i(x, t, P_s w, P_s \nabla w), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w) \, dx \, dt = \\ &= \sum_{s,l} \sum_{0 \leq i \leq n} \int_0^T \int_{Q_{s1}} A_i(x + h_{sl}, t, (U_s P_s w)_l, \nabla (U_s P_s w)_l) (R_s^{-1} U_s P_s \partial_i w)_l \, dx \, dt. \quad (4.4) \end{aligned}$$

Подставив оценку (4.1) в формулу (4.4), в силу утверждений леммы 3.6 получим, что

$$\langle A_R u, u \rangle \geq c_6 \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} |\partial_i w|^p \, dx \, dt - c_7 \int_{\Omega_T} |w|^{p'} \, dx \, dt - c_8 \text{mes}(\Omega_T).$$

Воспользуемся равенством (3.15), оценкой (3.20) для оператора  $R_Q : L_p(\Omega_T) \rightarrow L_p(\Omega_T)$  и оценкой (3.16) для оператора  $R_Q : L_{p'}(\Omega_T) \rightarrow L_{p'}(\Omega_T)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \langle A_R u, u \rangle &\geq c_6 c_3^p \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} |\partial_i u|^p dx dt - c_7 c_1^{p'} \int_{\Omega_T} |u|^{p'} dx - c_8 \text{mes}(\Omega_T) \geq \\ &\geq c_9 \|u\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))}^p - c_{10} \|u\|_{L_p(\Omega_T)}^{p'} - c_{11}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Очевидно,  $\|u\|_{L_p(\Omega_T)} \leq c_{12} \|u\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))}$ . Отсюда и из (4.5) получим

$$\langle A_R u, u \rangle \geq c_9 \|u\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))}^p - c_{10} c_{12} \|u\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))}^{p'} - c_{11}, \quad (4.6)$$

где константы  $c_9, c_{10}, c_{11}, c_{12}$  не зависят от  $u$ ,  $c_9 > 0$ . И поскольку  $1 < p' < p$ , а  $p > 1$ , то для достаточно больших  $\|u\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))}$  полученное в правой части (4.5) выражение строго положительно и монотонно возрастает при  $\|u\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))} \rightarrow \infty$ , степень роста  $p > 1$ .  $\square$

Построим вспомогательные функции

$$H_s(x, t, \zeta, \eta) = \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} (A_i(x + h_{sl}, t, \zeta_l + \eta_l) - A_i(x + h_{sl}, t, \zeta_l)) (R_s^{-1} \eta_l)_i, \quad (4.7)$$

определенные для всех  $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{N(s) \times (n+1)}$  таких, что  $\eta_{l0} = 0$ ,  $l = 1, \dots, N(s)$ . Введем также обозначение

$$|\zeta_0| := \sum_{1 \leq l \leq N(s)} |\zeta_{l0}|, \quad |\zeta| := \sum_{\substack{1 \leq l \leq N(s), \\ 0 \leq i \leq n}} |\zeta_{li}|.$$

**Лемма 4.2.** Для любых  $\varkappa, C, C_1 > 0$  существует положительная функция  $c_s(x, t)$  такая, что для всех  $\zeta \in U(C, C_1)$ , где

$$U(C, C_1) = \left\{ \zeta \in \mathbb{R}^{N(s) \times (n+1)} : |\zeta_0| \leq C, |\zeta| \leq C_1 \right\}$$

и  $\eta \in \mathbb{R}^{N(s) \times (n+1)}$  таких, что  $\eta_{l0} = 0$ ,  $l = 1, \dots, N(s)$ , справедлива оценка

$$H_s(x, t, \zeta, \eta) \geq c_s(x, t) |\eta| \quad \forall |\eta| \geq \varkappa > 0. \quad (4.8)$$

Здесь  $c_s(x, t) > 0$  определена для почти всех  $(x, t) \in \overline{Q_{s1}} \times [0, T]$ , зависит только от  $\varkappa, C, C_1$  и не зависит от  $\zeta$  и  $\eta$ .

Доказательство совпадает с доказательством леммы 2.2. В лемме 2.2 рассмотрена функция  $H_s$  на ограниченном множестве  $\overline{Q_{s1}}$ , а в лемме 4.2 функция  $H_s$  рассматривается на ограниченном множестве  $\overline{Q_{s1}} \times [0, T]$ .

**Лемма 4.3.** Пусть справедливы условия **(A0)–(A3)**. Тогда оператор  $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$ , заданный формулой (4.3), обладает свойством  $(S_+)$  на  $W$ .

*Доказательство.* Пусть  $u_j \rightharpoonup u$  слабо в  $W$  и

$$\overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \langle A_R u_j, u_j - u \rangle \leq 0. \quad (4.9)$$

1. Сначала докажем, что  $\lim_{j \rightarrow \infty} \langle A_R u_j, u_j - u \rangle = 0$ . Так как  $u_j \rightharpoonup u$  слабо в  $W$ , то  $u_j \rightarrow u$  в пространстве  $L_p(\Omega_T)$ , см., например, [33, (2.16), гл. 3, п. 2] и [33, теорема 5.1, гл. 1, п. 5]. Используя лемму 3.6, условие **(A1)** и [29, теорема 2.1, гл. 1, §2] о непрерывном отображении получим, что

$$A_i(x, t, R_Q u_j, \nabla R_Q u) \rightarrow A_i(x, t, R_Q u, \nabla R_Q u) \quad \text{в } L_q(\Omega_T),$$

т. е. в силу слабой сходимости  $\partial_i u_j \rightharpoonup \partial_i u$  в  $L_p(\Omega_T)$

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} A_i(x, t, R_Q u_j, \nabla R_Q u) \partial_i (u_j - u) dx dt = 0.$$

Кроме того, в силу условия **(A1)** и ограниченности слабо сходящейся последовательности  $\{u_j\}$  множество  $\{A_0(x, t, R_Q u_j, \nabla R_Q u_j)\}$  ограничено в  $L_q(\Omega_T)$ , т. е.

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \int_{\Omega_T} A_0(x, t, R_Q u_j, \nabla R_Q u_j) (u_j - u) dx dt = 0,$$

поскольку  $u_j \rightarrow u$  в  $L_p(\Omega_T)$ . Следовательно,

$$\begin{aligned} \lim_{j \rightarrow \infty} \langle A_R u_j, u_j - u \rangle &= \lim_{j \rightarrow \infty} \left( \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} A_i(x, t, R_Q u_j, \nabla R_Q u) \partial_i (u_j - u) dx dt + \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega_T} A_0(x, t, R_Q u_j, \nabla R_Q u_j) (u_j - u) dx dt + \right. \\ &\quad \left. + \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} \left( A_i(x, t, R_Q u_j, \nabla R_Q u_j) - A_i(x, t, R_Q u_j, \nabla R_Q u) \right) \partial_i (u_j - u) dx dt \right) = \\ &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} \left( A_i(x, t, R_Q u_j, \nabla R_Q u_j) - A_i(x, t, R_Q u_j, \nabla R_Q u) \right) \partial_i (u_j - u) dx dt. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Для изучения правой части (4.10) введем вспомогательные функции  $w = R_Q u$  и  $w_j = R_Q u_j$ . Согласно лемме 3.6 существует ограниченный обратный оператор  $R_Q^{-1}$ . Воспользуемся формулой (3.18), а также коммутативностью операторов  $R_Q^{-1}$  и  $\partial_i$  на  $Q_{sl} \times (0, T)$ :

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} \left( A_i(x, t, R_Q u_j, \nabla R_Q u_j) - A_i(x, t, R_Q u_j, \nabla R_Q u) \right) \partial_i (u_j - u) dx dt &= \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} \left( A_i(x, t, w_j, \nabla w_j) - A_i(x, t, w_j, \nabla w) \right) \partial_i R_Q^{-1} (w_j - w) dx dt = \\ &= \sum_s \sum_{1 \leq i \leq n} \int_0^T \int_{\bigcup_l Q_{sl}} P_s \left( A_i(x, t, w_j, \nabla w_j) - A_i(x, t, w_j, \nabla w) \right) U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s \partial_i (w_j - w) dx dt = \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} \left( U_s (A_i(x, t, w_j, \nabla w_j) - A_i(x, t, w_j, \nabla w)), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i (w_j - w) \right) dx dt = \\ &= \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{s,l} \int_0^T \int_{Q_{s1}} \left( A_i(x + h_{sl}, t, w_j(x + h_{sl}, t), \nabla w_j(x + h_{sl}, t)) - \right. \\ &\quad \left. - A_i(x + h_{sl}, t, w_j(x + h_{sl}, t), \nabla w(x + h_{sl}, t)) \right) (R_s^{-1} U_s P_s \partial_i (w_j - w))_l dx dt = \sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} I_s^j dx dt. \end{aligned}$$

Введем матрицы  $\zeta^j = \{\zeta_{li}^j\}$  и  $\eta^j = \{\eta_{li}^j\}$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \zeta_{l0}^j &= \eta_{l0}^j = w_j(x + h_{sl}, t), & l &= 1, \dots, N(s), \\ \zeta_{li}^j &= \partial_i w_j(x + h_{sl}, t), & \eta_{li}^j &= \partial_i w(x + h_{sl}, t), & l &= 1, \dots, N(s), \quad i = 1, \dots, n. \end{aligned}$$

Заметим, что при этом  $\zeta^j \neq \eta^j$  для всех  $j$ . Из условия **(A3)** следует, что  $I_s^j > 0$  для всех  $j$ . Подставим эту оценку в (4.10). Тогда

$$\liminf_{j \rightarrow \infty} \langle A_R u_j, u_j - u \rangle = \liminf_{j \rightarrow \infty} \sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} I_s^j dx dt \geq 0.$$

Сопоставив это неравенство с неравенством (4.9), получаем, что

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \langle A_R u_j, u_j - u \rangle = \lim_{j \rightarrow \infty} \int_0^T \int_{Q_{s1}} I_s^j dx dt = 0. \quad (4.11)$$

2. Следующим шагом докажем, что при этом  $u_j \rightarrow u$  в  $L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))$ , т. е.  $\partial_i u_j \rightarrow \partial_i u$  в  $L_p(\Omega_T)$ . Для этого достаточно показать сходимость по мере последовательностей  $\{\partial_i u_j\}$  и их равномерную непрерывность в целом в  $L_p(\Omega_T)$ , см. теорему о сильной сходимости в [72, гл. 1, п. 3].

2.1. Для доказательства сходимости по мере используем функцию  $H_s$ , определенную в (4.7). Из условия (4.9) и равенства (4.11) получаем, что

$$0 = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} I_s^j dx dt = \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} H_s(x, t, \zeta^j, \zeta^j - \eta^j) dx dt.$$

Воспользуемся оценкой (4.8). Тогда

$$\begin{aligned} 0 &= \lim_{j \rightarrow \infty} \sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} H_s(x, t, \zeta^j, \zeta^j - \eta^j) dx dt \geq \liminf_{j \rightarrow \infty} \sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} c_s(x, t) |\zeta^j - \eta^j| dx dt = \\ &= \liminf_{j \rightarrow \infty} \sum_s \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} \int_0^T \int_{Q_{s1}} c_s(x, t) |\zeta_{li}^j - \eta_{li}^j| dx dt = \\ &= \liminf_{j \rightarrow \infty} \sum_s \sum_{1 \leq i \leq n} \int_0^T \int_{\bigcup_l Q_{sl}} c_s(x, t) |\partial_i R_Q u_j - \partial_i R_Q u| dx dt, \end{aligned}$$

здесь  $c_s(x + h_{sl}, t) = c_s(x, t)$  для любого  $h_{sl}$ . Поскольку  $c_s(x, t) > 0$ , а оператор  $R_Q$  невырожден, то данное равенство возможно лишь при сходимости  $\partial_i u_j \rightarrow \partial_i u$  по мере для всех  $i = 1, \dots, n$ .

2.2. Для доказательства равномерной непрерывности достаточно показать, что

$$\lim_{\text{mes} E \rightarrow 0} \int_E \sum_{1 \leq i \leq n} |\partial_i u_j|^p dx dt = 0, \quad E \subset \Omega_T, \quad (4.12)$$

и стремление к пределу в (4.12) равномерно относительно  $j$ .

Заметим, что

$$\begin{aligned} I_s^j &= \sum_l \sum_{1 \leq i \leq n} \left( A_i(x + h_{sl}, t, \zeta_{li}^j) - A_i(x + h_{sl}, t, \eta_{li}^j) \right) \left( R_s^{-1}(\zeta_{li}^j - \eta_{li}^j) \right)_l = \\ &= \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{0 \leq i \leq n} A_i(x + h_{sl}, t, \zeta_{li}^j) \left( R_s^{-1} \zeta_{li}^j \right)_l - \sum_{1 \leq l \leq N(s)} A_0(x + h_{sl}, t, \zeta_{li}^j) \left( R_s^{-1} \zeta_{li}^j \right)_l - \\ &- \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} A_i(x + h_{sl}, t, \zeta_{li}^j) \left( R_s^{-1} \eta_{li}^j \right)_l - \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} A_i(x + h_{sl}, t, \eta_{li}^j) \left( R_s^{-1}(\zeta_{li}^j - \eta_{li}^j) \right)_l. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Первое слагаемое правой части (4.13) оценим, исходя из условия коэрцитивности (4.1), а остальные — применяя условие **(A1)** и неравенство Гёльдера:

$$\begin{aligned}
 I_s^j \geq & c_6 \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} |\zeta_{li}^j|^p - c_7 \sum_{1 \leq l \leq N(s)} |\zeta_{l0}^j|^{p'} - c_8 - \\
 & - \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{0 \leq i \leq n} \left| g_0(x + h_{sl}, t) + c_5 \sum_{0 \leq k \leq n} |\zeta_{lk}^j|^{p-1} \right| \left| (R_s^{-1} \eta_{.i}^j)_l \right| - \\
 & - \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} \left| g_0(x + h_{sl}, t) + c_5 \sum_{0 \leq k \leq n} |\eta_{lk}^j|^{p-1} \right| \left| (R_s^{-1} \zeta_{.i}^j)_l \right| - \\
 & - \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} \left| g_0(x + h_{sl}, t) + c_5 \sum_{0 \leq k \leq n} |\eta_{lk}^j|^{p-1} \right| \left| (R_s^{-1} \eta_{.i}^j)_l \right|. \quad (4.14)
 \end{aligned}$$

Здесь вторая и третья сумма правой части (4.13) оценены вместе в четвертом слагаемом правой части (4.14) с учетом того, что  $\zeta_{l0}^j = \eta_{l0}^j$ . Очевидно, что

$$\left| (R_s^{-1} \zeta_{.i})_l \right| \leq c_{13} \sum_{1 \leq m \leq N(s)} |\zeta_{mi}|.$$

Для сокращения записи введем функцию  $g_{sl}^j = g_0(x + h_{sl}, t) + c_5 \sum_{0 \leq k \leq n} |\eta_{lk}^j|^{p-1}$ . Скомпонуем слагаемые и оценим с помощью неравенства Юнга:

$$\begin{aligned}
 I_s^j \geq & c_6 \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} |\zeta_{li}^j|^p - c_7 \sum_{1 \leq l \leq N(s)} |\zeta_{l0}^j|^{p'} - c_8 - c_5 \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq k \leq n} |\zeta_{lk}^j|^{p-1} \sum_{0 \leq i \leq n} \left| (R_s^{-1} \eta_{.i}^j)_l \right| - \\
 & - c_{13} \sum_{1 \leq l, m \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} |g_{sl}^j| |\zeta_{mi}^j| - 2 \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{0 \leq i \leq n} |g_{sl}^j| \left| (R_s^{-1} \eta_{.i}^j)_l \right| \geq \\
 \geq & c_6 \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} |\zeta_{li}^j|^p - c_7 \sum_{1 \leq l \leq N(s)} |\zeta_{l0}^j|^{p'} - c_8 - \frac{c_5(n+1)\varepsilon_1^q}{q} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} |\zeta_{li}^j|^p - \\
 & - \frac{c_5 n}{\varepsilon_1^p} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{0 \leq i \leq n} \left| (R_s^{-1} \eta_{.i}^j)_l \right|^p - \frac{c_{13} N(s) \varepsilon_2^p}{p} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} |\zeta_{li}^j|^p - \\
 & - \frac{c_{13} n N(s)}{\varepsilon_2^q q} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} |g_{sl}^j|^q - \frac{2(n+1)}{q} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} |g_{sl}^j|^q - \frac{2}{p} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{0 \leq i \leq n} \left| (R_s^{-1} \eta_{.i}^j)_l \right|^p. \quad (4.15)
 \end{aligned}$$

Выберем  $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$  такими, что  $\frac{c_5(n+1)\varepsilon_1^q}{q} + \frac{c_{13} N(s) \varepsilon_2^p}{p} \leq \frac{c_6}{2}$ . Тогда

$$I_s^j \geq \frac{c_6}{2} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} |\zeta_{li}^j|^p - \widehat{g}_s^j, \quad (4.16)$$

где  $\widehat{g}_s^j \in L_1(Q_{s1} \times (0, T))$  — функция, равная сумме третьего и последних пяти слагаемых правой части (4.15):

$$\begin{aligned}
 \widehat{g}_s^j = & \frac{c_5 n}{\varepsilon_1^p} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{0 \leq i \leq n} \left| (R_s^{-1} \eta_{.i}^j)_l \right|^p + \frac{c_{13} n N(s)}{\varepsilon_2^q q} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} |g_{sl}^j|^q + \\
 & + c_7 \sum_{1 \leq l \leq N(s)} |\zeta_{l0}^j|^{p'} + c_8 + \frac{2(n+1)}{q} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} |g_{sl}^j|^q + \frac{2}{p} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{0 \leq i \leq n} \left| (R_s^{-1} \eta_{.i}^j)_l \right|^p.
 \end{aligned}$$

Следовательно, для любого  $s$  и любого  $E \subset Q_{s1} \times (0, T)$

$$\frac{c_6}{2} \lim_{\text{mes} E \rightarrow 0} \int_E \sum_{1 \leq i \leq n} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} |\partial_i w_j(x + h_{sl}, t)|^p dx dt \leq \lim_{\text{mes} E \rightarrow 0} \int_E I_s^j dx dt + \lim_{\text{mes} E \rightarrow 0} \int_E \widehat{g}_s^j dx dt. \quad (4.17)$$

Сходимость первого интеграла в правой части (4.17) к нулю при  $j \rightarrow \infty$  на любом множестве  $E \subset Q_{s1} \times (0, T)$  доказана выше, см. (4.11). Сходимость второго интеграла в правой части (4.17) к нулю следует из абсолютной непрерывности интеграла и того, что множество  $\{\widehat{g}_s^j\} \subset L_1(Q_{s1} \times (0, T))$  компактно, поскольку при формировании функций  $\widehat{g}_s^j$  участвовали фиксированные функции и функции из компактных множеств  $\{w_j\} \subset L_p(\Omega_T)$  и  $\{u_j\} \subset L_p(\Omega_T)$ :

$$\begin{aligned} \widehat{g}_s^j = & \left( \frac{c_5 n}{\varepsilon_1^p} + \frac{2}{p} \right) \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \left( |u_j(x + h_{sl}, t)|^p + \sum_{1 \leq i \leq n} |\partial_i u(x + h_{sl}, t)|^p \right) + \left( \frac{c_{13} n N(s)}{\varepsilon_2^q} + \frac{2(n+1)}{q} \right) \times \\ & \times \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \left| g_0(x + h_{sl}, t) + c_5 |w_j(x + h_{sl}, t)|^{p-1} + c_5 \sum_{1 \leq i \leq n} |\partial_i w(x + h_{sl}, t)|^{p-1} \right|^q + \\ & + c_7 \sum_{1 \leq l \leq N(s)} |w_j(x + h_{sl}, t)|^{p'} + c_8. \end{aligned}$$

Таким образом, сходимость в (4.17) равномерна по  $j$  для всех  $s$ , множества  $\{\partial_i w_j\}$  компактны в  $L_p\left(\bigcup_{sl} Q_{sl} \times (0, T)\right)$ . В силу непрерывности оператора  $R_Q$  это возможно тогда и только тогда, когда множества  $\{\partial_i u_j\}$  компактны в  $L_p\left(\bigcup_{sl} Q_{sl} \times (0, T)\right)$ . Так как

$$\text{mes} \left( \Omega_T \setminus \left( \bigcup_{sl} Q_{sl} \times (0, T) \right) \right) = 0,$$

то равенство (4.12) доказано.

Слабо сходящаяся в  $\mathcal{V}$  последовательность  $\{u_j\}$  принадлежат компактному множеству. Поскольку двух пределов существовать не может, то данная последовательность сходится к  $u$  в  $\mathcal{V}$ . Свойство  $(S_+)$  на  $W$  доказано.  $\square$

**Следствие 4.1.** Пусть справедливы условия **(A0)**–**(A3)**. Тогда оператор  $A : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}^*$ , заданный формулой (2.40), псевдомонотонен<sup>1</sup> на  $W$ .

**Теорема 4.1.** Пусть справедливы условия **(A0)**–**(A3)**. Тогда для любых  $f \in \mathcal{V}^*$  и  $\varphi \in L_2(Q)$  существует непустое, ограниченное и слабо замкнутое в  $W$  множество обобщенных решений задачи (3.1)–(3.3).

*Доказательство.* Из условий теоремы следует, что  $A_R$  — деминепрерывный (см. лемму 3.8), коэрцитивный (см. лемму 4.1) оператор, обладающий свойством  $(S_+)$  на  $W$  (см. лемму 4.3), т. е. псевдомонотонный на  $W$ . Согласно [33, теорема 1.2, гл. 3, §1.4] существует обобщенное решение задачи (3.1)–(3.3)  $u \in W$ . Ограниченность множества решений следует из коэрцитивности оператора  $A_R$ , слабая замкнутость множества решений — из свойства  $(S_+)$  на  $W$ , полное доказательство приведено в теореме 3.2.  $\square$

#### 4.2. ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ С $(\mathcal{V}, W)$ -ПОЛУОГРАНИЧЕННОЙ ВАРИАЦИЕЙ

Как и в эллиптическом случае (см. разделы 2.2 и 2.3), для существенно нелинейного дифференциально-разностного оператора можно построить условие сильной эллиптичности и доказать свойство  $(\mathcal{V}, W)$ -полуограниченной вариации.

**Лемма 4.4.** Пусть  $p \in [2, \infty)$ , справедливы условия **(A0)**, **(A1)**, а также

**(A4) Условие сильной эллиптичности:** для всех  $s$ , п.в.  $(x, t) \in \overline{Q_{s1}} \times [0, T]$  и любых  $\zeta, \eta \in \mathbb{R}^{N(s) \times (n+1)}$  таких, что  $\eta_0 = \zeta_0 \neq 0$ , существует  $\widehat{\Upsilon} > 0$  такая, что справедлива оценка

$$\sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} (A_i(x + h_{sl}, t, \zeta_i) - A_i(x + h_{sl}, t, \eta_i)) (R_s^{-1}(\zeta_i - \eta_i))_l \geq \widehat{\Upsilon}$$

<sup>1</sup>В [33] псевдомонотонность на  $W$  дифференциального оператора доказана без доказательства свойства  $(S_+)$  на  $W$  и при более сложном условии на коэрцитивность.

$$\geq \widehat{Y} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} |\zeta_{li} - \eta_{li}|^p. \quad (4.18)$$

(A5) **Условие локальной липшицевости:** функции  $A_i(x, t, \xi)$  ( $i = \overline{1, n}$ ) локально липшицевы по  $\xi_0$ , функция  $A_0(x, t, y, \xi)$  локально липшицева по  $\xi_j$  ( $j = \overline{0, n}$ ), т. е. существует  $\varepsilon > 0$  и функция типа Каратеодори<sup>1</sup>  $\Psi$  такие, что для любых  $\delta \in \mathbb{R}^{n+1}$  ( $|\delta| = \sum_{0 \leq j \leq n} |\delta_j| < \varepsilon$ )

$$|A_i(x, t, \xi + \delta) - A_i(x, t, \xi)| \leq \Psi(x, t, \xi)|\delta|, \quad (4.19)$$

$$|\Psi(x, t, \xi)| \leq g_\Psi(x, t) + \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\xi_k|^{p-2}, \quad (4.20)$$

где  $\widehat{\Psi} > 0$ ,  $g_\Psi \in L_{q'}(\Omega_T)$ ,  $q' = p/(p-2)$  при  $p > 2$ , и  $q' = \infty$  при  $p = 2$ .

Тогда оператор  $A_R : L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q)) \rightarrow L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$ , заданный в (4.3), обладает  $(\mathcal{V}; W)$ -полуограниченной вариацией.

*Доказательство.* Обозначим  $w = R_Q u$  и  $v = R_Q y$ ,  $u, y \in L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))$ , причем в силу невырожденности оператора  $R_Q$  существует обратный оператор  $R_Q^{-1} : L_p(\Omega_T) \rightarrow L_p(\Omega_T)$ , см. лемму 3.6. По определению оператора  $A_R$  и в силу формулы (3.18)

$$\begin{aligned} \langle A_R u - A_R y, u - y \rangle &= \sum_{0 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} (A_i(x, t, R_Q u, \nabla R_Q u) - A_i(x, t, R_Q y, \nabla R_Q y)) \partial_i (u - y) dx dt = \\ &= \sum_{0 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} (A_i(x, t, w, \nabla w) - A_i(x, t, w, \nabla v)) R_Q^{-1} \partial_i (w - v) dx dt = \\ &= \sum_s \sum_{0 \leq i \leq n} \int_0^T \int_{\bigcup_i Q_{s1}} P_s (A_i(x, t, w, \nabla w) - A_i(x, t, v, \nabla v)) U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s \partial_i (w - v) dx dt = \\ &= \sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} \sum_{0 \leq i \leq n} \left( U_s P_s (A_i(x, t, w, \nabla w) - A_i(x, t, v, \nabla v)), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i (w - v) \right) dx dt = \\ &= \sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} (I_{s1} + I_{s2} + I_{s3}) dx dt, \quad (4.21) \end{aligned}$$

где  $(\cdot, \cdot)$  — скалярное произведение в  $\mathbb{R}^{N(s)}$ . Очевидно, что при  $u(x, t) = y(x, t)$  для почти всех  $(x, t) \in \Omega_T$  значение данного интеграла неотрицательно. Поэтому, не ограничивая общности, будем считать, что  $u(x, t) \neq y(x, t)$  для почти всех  $(x, t) \in \Omega_T$ . Очевидно, что при этом  $w(x, t) \neq v(x, t)$  и существует  $\lambda \in [0, 1]$  такое, что  $\lambda w(x, t) + (1 - \lambda)v(x, t) \neq 0$  для почти всех  $(x, t) \in \Omega_T$ , возможно  $\lambda = \lambda(x, t)$ .

Введем матрицы порядка  $N(s) \times (n + 1)$

$$\zeta = (U_s P_s w, U_s P_s \partial_1 w \dots, U_s P_s \partial_n w), \quad \eta = (U_s P_s v, U_s P_s \partial_1 v \dots, U_s P_s \partial_n v),$$

а также матрицы  $\widehat{\zeta}$  и  $\widehat{\eta}$  такие, что

$$\widehat{\zeta}_i = \zeta_i, \quad \widehat{\eta}_i = \eta_i, \quad \forall i = 1, \dots, n, \quad (4.22)$$

$$\widehat{\zeta}_{l0} = \widehat{\eta}_{l0} = \lambda \zeta_{l0} + (1 - \lambda) \eta_{l0}, \quad \forall l = 1, \dots, N(s). \quad (4.23)$$

По построению  $\widehat{\zeta}_{l0} = \widehat{\eta}_{l0} \neq 0$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ . В то же время  $\widehat{\zeta}_i - \widehat{\eta}_i \equiv \zeta_i - \eta_i \forall i = 1, \dots, n$ . Сначала оценим часть подынтегральной суммы правой части (4.21)

<sup>1</sup> $\Psi(x, t, \xi)$  измерима по  $x$  и  $t$  для всех  $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$  и непрерывна по  $\xi \in \mathbb{R}^{n+1}$  для п.в.  $(x, t) \in \overline{\Omega_T}$ .

$$\begin{aligned}
I_{s1} + I_{s2} &= \sum_{1 \leq i \leq n} \left( U_s P_s (A_i(x, t, w, \nabla w) - A_i(x, t, v, \nabla v)), R_s^{-1} U_s P_s \partial_i (w - v) \right) = \\
&= \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} (A_i(x + h_{sl}, t, \zeta_l) - A_i(x + h_{sl}, t, \eta_l)) (R_s^{-1} (\zeta_i - \eta_i))_l = \\
&= \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} (A_i(x + h_{sl}, t, \widehat{\zeta}_l) - A_i(x + h_{sl}, t, \widehat{\eta}_l)) (R_s^{-1} (\widehat{\zeta}_i - \widehat{\eta}_i))_l + \\
&+ \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} (A_i(x + h_{sl}, t, \zeta_l) - A_i(x + h_{sl}, t, \widehat{\zeta}_l)) (R_s^{-1} (\zeta_i - \eta_i))_l + \\
&\quad + \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} (A_i(x + h_{sl}, t, \widehat{\eta}_l) - A_i(x + h_{sl}, t, \eta_l)) (R_s^{-1} (\zeta_i - \eta_i))_l. \quad (4.24)
\end{aligned}$$

Первую сумму правой части (4.24) оценим с помощью (4.18):

$$\begin{aligned}
I_{s1} &= \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} (A_i(x + h_{sl}, t, \widehat{\zeta}_l) - A_i(x + h_{sl}, t, \widehat{\eta}_l)) (R_s^{-1} (\widehat{\zeta}_i - \widehat{\eta}_i))_l \geq \\
&\geq \widehat{\Upsilon} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} |\widehat{\zeta}_{li} - \widehat{\eta}_{li}|^p = \widehat{\Upsilon} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} |\partial_i w(x + h_{sl}, t) - \partial_i v(x + h_{sl}, t)|^p. \quad (4.25)
\end{aligned}$$

То есть

$$\sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} I_{s1} dx dt \geq \widehat{\Upsilon} \|w - v\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^p. \quad (4.26)$$

Рассмотрим вторую и третью суммы правой части (4.24):

$$\begin{aligned}
|I_{s2}| &\leq \left| \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} (A_i(x + h_{sl}, t, \zeta_l) - A_i(x + h_{sl}, t, \widehat{\zeta}_l)) (R_s^{-1} (\zeta_i - \eta_i))_l + \right. \\
&\quad \left. + \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} (A_i(x + h_{sl}, t, \widehat{\eta}_l) - A_i(x + h_{sl}, t, \eta_l)) (R_s^{-1} (\zeta_i - \eta_i))_l \right| \leq \\
&\leq \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i(x + h_{sl}, t, \zeta_l) - A_i(x + h_{sl}, t, \widehat{\zeta}_l)| |(R_s^{-1} (\zeta_i - \eta_i))_l| + \\
&\quad + \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} |A_i(x + h_{sl}, t, \widehat{\eta}_l) - A_i(x + h_{sl}, t, \eta_l)| |(R_s^{-1} (\zeta_i - \eta_i))_l| \quad (4.27)
\end{aligned}$$

Исходя из условия локальной липшицевости

$$\left| A_i(x + h_{sl}, t, \widehat{\zeta}_l) - A_i(x + h_{sl}, t, \zeta_l) \right| \leq \int_0^1 \Psi(x + h_{sl}, t, \widehat{\zeta}_l + \tau(\zeta_l - \widehat{\zeta}_l)) d\tau |\zeta_l - \widehat{\zeta}_l|.$$

Применим оценку (4.20) и неравенство  $\int_0^1 |a + \tau(b - a)|^{p-2} d\tau \leq |a|^{p-2} + |b|^{p-2}$ :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \Psi(x + h_{sl}, t, \widehat{\zeta}_l + \tau(\zeta_l - \widehat{\zeta}_l)) d\tau &\leq \int_0^1 \left( \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\zeta_{lk} + \tau(\eta_{lk} - \zeta_{lk})|^{p-2} + g_\Psi(x + h_{sl}, t) \right) d\tau \leq \\
&\leq \widehat{\Psi} \int_0^1 |\widehat{\zeta}_{l0} + \tau(\zeta_{l0} - \widehat{\zeta}_{l0})|^{p-2} d\tau + \widehat{\Psi} \sum_{1 \leq i \leq n} |\zeta_{li}|^{p-2} + g_\Psi(x + h_{sl}, t) \leq \\
&\leq \widehat{\Psi} |\widehat{\zeta}_{l0}|^{p-2} + \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\zeta_{lk}|^{p-2} + g_\Psi(x + h_{sl}, t),
\end{aligned}$$

т. е.

$$\begin{aligned} \left| A_i(x + h_{sl}, t, \widehat{\zeta}_l) - A_i(x + h_{sl}, t, \zeta_l) \right| &\leq \\ &\leq \left( \widehat{\Psi} |\widehat{\zeta}_{l0}|^{p-2} + \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\zeta_{lk}|^{p-2} + g_{\Psi}(x + h_{sl}, t) \right) |\zeta_{l0} - \widehat{\zeta}_{l0}|. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Аналогично для второй группы слагаемых правой части (4.27) имеем

$$\begin{aligned} |A_i(x + h_{sl}, t, \widehat{\eta}_l) - A_i(x + h_{sl}, t, \eta_l)| &\leq \\ &\leq \left( \widehat{\Psi} |\widehat{\eta}_{l0}|^{p-2} + \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\eta_{lk}|^{p-2} + g_{\Psi}(x + h_{sl}, t) \right) |\eta_{l0} - \widehat{\eta}_{l0}|. \end{aligned} \quad (4.29)$$

Подставим (4.28) и (4.29) в (4.27); учитывая, что  $\eta_{l0} - \widehat{\eta}_{l0} = \lambda(\eta_{l0} - \zeta_{l0})$  и  $\zeta_{l0} - \widehat{\zeta}_{l0} = (1 - \lambda)(\zeta_{l0} - \eta_{l0})$ , см. (4.23), получаем оценку

$$\begin{aligned} |I_{s2}| &\leq \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{1 \leq i \leq n} \left( \widehat{\Psi} |\lambda \zeta_{l0} + (1 - \lambda) \eta_{l0}|^{p-2} + (1 - \lambda) \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\zeta_{lk}|^{p-2} + \lambda \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\eta_{lk}|^{p-2} + \right. \\ &\quad \left. + g_{\Psi}(x + h_{sl}, t) \right) |\zeta_{l0} - \eta_{l0}| |(R_s^{-1}(\zeta_i - \eta_i))_l|. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Заметим, что  $|\lambda \zeta_{l0} + (1 - \lambda) \eta_{l0}|^{p-2} \leq |\zeta_{l0}|^{p-2} + |\eta_{l0}|^{p-2}$  для всех  $\lambda \in [0, 1]$ , а также в силу ограниченности и невырожденности матриц  $R_s^{-1}$

$$\sum_{1 \leq i \leq n} |(R_s^{-1}(\zeta_i - \eta_i))_l| \leq c_{13} \sum_{1 \leq i \leq n} |\zeta_{li} - \eta_{li}|$$

для некоторого  $c_{13} > 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} |I_{s2}| &\leq c_{13} \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \left( \widehat{\Psi} |\zeta_{l0}|^{p-2} + \widehat{\Psi} |\eta_{l0}|^{p-2} + (1 - \lambda) \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\zeta_{lk}|^{p-2} + \right. \\ &\quad \left. + \lambda \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\eta_{lk}|^{p-2} + g_{\Psi}(x + h_{sl}, t) \right) |\zeta_{l0} - \eta_{l0}| \sum_{1 \leq i \leq n} |\zeta_{li} - \eta_{li}|. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Перейдем к переменным  $w$  и  $v$ :

$$\begin{aligned} \sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} |I_{s2}| dx dt &\leq c_{13} \left( \widehat{\Psi} \|w\|_{L_p(\Omega_T)}^{p-2} + \widehat{\Psi} \|v\|_{L_p(\Omega_T)}^{p-2} + (1 - \lambda) \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} \|\partial_i w\|_{L_p(\Omega_T)}^{p-2} + \right. \\ &\quad \left. + \lambda \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} \|\partial_i v\|_{L_p(\Omega_T)}^{p-2} + \|g_{\Psi}\|_{L_{q'}(\Omega_T)} \right) \|w - v\|_{L_p(\Omega_T)} \sum_{1 \leq i \leq n} \|\partial_i w - \partial_i v\|_{L_p(\Omega_T)} \leq \\ &\leq c_{13} \left( c_{14} r^{p-2} + \|g_{\Psi}\|_{L_{q'}(\Omega_T)} \right) \|w - v\|_{L_p(\Omega_T)} \sum_{1 \leq i \leq n} \|\partial_i w - \partial_i v\|_{L_p(\Omega_T)}, \end{aligned} \quad (4.32)$$

где  $\|u\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))} \leq r_1$  и  $\|y\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))} \leq r_1$ . В этой оценке учтено, что  $\|w\|_{L_p(\Omega_T)} = \|R_Q u\|_{L_p(\Omega_T)} \leq c_5 \|u\|_{L_p(\Omega_T)}$  (см. (3.20)) и вследствие неравенства Фридрихса  $\|u\|_{L_p(\Omega_T)} \leq c_{16} \|u\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))} \leq c_{16} r_1$ ; для  $v = R_Q y$  оценки аналогичны. Для сокращения записи введем функцию  $\widehat{c}_1(r_1) = c_{13} \left( c_{14} r_1^{p-2} + \|g_{\Psi}\|_{L_{q'}(\Omega_T)} \right)$ . В силу неравенства Юнга из (4.32) следует, что

$$\sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} |I_{s2}| dx dt \leq \frac{\widehat{\Upsilon}}{p} \|w - v\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))}^p + \frac{(\widehat{c}_1(r_1))^q}{q \widehat{\Upsilon}^{q/p}} \|w - v\|_{L_p(\Omega_T)}^q. \quad (4.33)$$

Осталось оценить слагаемое при  $i = 0$  в подынтегральной сумме правой части (4.21):

$$\begin{aligned}
|I_{s3}| &\leq \left| \left( U_s P_s (A_0(x, t, w, \nabla w) - A_0(x, t, v, \nabla v)), R_s^{-1} U_s P_s (w - v) \right) \right| = \\
&= \left| \sum_{1 \leq l \leq N(s)} (A_0(x + h_{sl}, t, \zeta_l) - A_0(x + h_{sl}, t, \eta_l)) (R_s^{-1}(\zeta_0 - \eta_0))_l \right| \leq \\
&\leq \sum_{1 \leq l \leq N(s)} |A_0(x + h_{sl}, t, \zeta_l) - A_0(x + h_{sl}, t, \eta_l)| |(R_s^{-1}(\zeta_0 - \eta_0))_l|. \quad (4.34)
\end{aligned}$$

Исходя из условия локальной липшицевости **(A5)**,

$$|A_i(x + h_{sl}, t, \zeta_l) - A_i(x + h_{sl}, t, \eta_l)| \leq \int_0^1 \Psi(x + h_{sl}, t, \zeta_l + \tau(\eta_l - \zeta_l)) d\tau |\zeta_l - \eta_l|. \quad (4.35)$$

Оценим интеграл, применив оценку (4.20):

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \Psi_{0j}(x, t, \zeta_l + \tau(\eta_l - \zeta_l)) d\tau &\leq \int_0^1 \left( \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\zeta_{lk} + \tau(\eta_{lk} - \zeta_{lk})|^{p-2} + g_{\Psi}(x + h_{sl}, t) \right) d\tau \leq \\
&\leq \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} (|\zeta_{lk}|^{p-2} + |\eta_{lk}|^{p-2}) + g_{\Psi}(x + h_{sl}, t). \quad (4.36)
\end{aligned}$$

Подставляя (4.35) и (4.36) в (4.34), получим, что

$$|I_{s3}| \leq \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \left( \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} (|\zeta_{lk}|^{p-2} + |\eta_{lk}|^{p-2}) + g_{\Psi}(x + h_{sl}, t) \right) \sum_{0 \leq j \leq n} |\zeta_{lj} - \eta_{lj}| |(R_s^{-1}(\zeta_0 - \eta_0))_l|.$$

Вернемся к функциям  $w, v, u$  и  $y$  и воспользуемся неравенством Гёльдера:

$$\begin{aligned}
\sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} |I_{s3}| dx dt &\leq \sum_s \sum_{1 \leq l \leq N(s)} \sum_{0 \leq j \leq n} \int_0^T \int_{Q_{s1}} \left( \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\partial_k v(x + h_{sl}, t)|^{p-2} + \right. \\
&\quad \left. + \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\partial_k w(x + h_{sl}, t)|^{p-2} + g_{\Psi}(x + h_{sl}, t) \right) |\partial_j w(x + h_{sl}, t) - \partial_j v(x + h_{sl}, t)| \times \\
&\quad \times |u(x + h_{sl}, t) - y(x + h_{sl}, t)| dx dt = \\
&= \sum_{0 \leq j \leq n} \int_{\Omega_T} \left( \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\partial_k v|^{p-2} + \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\partial_k w|^{p-2} + g_{\Psi} \right) |\partial_j w - \partial_j v| |u - y| dx dt \leq \\
&\leq \sum_{0 \leq j \leq n} \left\| \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\partial_k v|^{p-2} + \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\partial_k w|^{p-2} + g_{\Psi} \right\|_{L_{q'}(\Omega_T)} \times \|\partial_j w - \partial_j v\|_{L_p(\Omega_T)} \|u - y\|_{L_p(\Omega_T)}.
\end{aligned}$$

Заметим, что

$$\begin{aligned}
&\left\| \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\partial_k v|^{p-2} + \widehat{\Psi} \sum_{0 \leq k \leq n} |\partial_k w|^{p-2} + g_{\Psi} \right\|_{L_{q'}(\Omega_T)} \leq \\
&\leq c_{17} \left( \|v\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))}^{p-2} + \|w\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))}^{p-2} \right) + \|g_{\Psi}\|_{L_{q'}(\Omega_T)} \leq c_{18} r_1^{p-2} + \|g_{\Psi}\|_{L_{q'}(\Omega_T)} = \widehat{c}_2(r_1).
\end{aligned}$$

Здесь, как и выше,  $\|w\|_{L_p(\Omega_T)} = \|R_Q u\|_{L_p(\Omega_T)} \leq c_5 \|u\|_{L_p(\Omega_T)}$  (см. (3.20)) и  $\|u\|_{L_p(\Omega_T)} \leq c_{16} \|u\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))} \leq c_{16} r_1$  (см. неравенство Фридрихса), а также учтены аналогичные оценки для  $v = R_Q u$ . Осталось воспользоваться неравенством Гёльдера:

$$\begin{aligned} \sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} |I_{s3}| dx dt &\leq \widehat{c}_2(r_1) \|u - y\|_{L_p(\Omega_T)} \sum_{0 \leq j \leq n} \|\partial_j w - \partial_j v\|_{L_p(\Omega_T)} = \\ &= \widehat{c}_2(r_1) \|u - y\|_{L_p(\Omega_T)} \|w - v\|_{L_p(\Omega_T)} + \widehat{c}_2(r_1) \|u - y\|_{L_p(\Omega_T)} \|w - v\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))} \leq \\ &\leq c_5 \widehat{c}_2(r_1) \|u - y\|_{L_p(\Omega_T)}^2 + \frac{\widehat{\Upsilon}}{p} \|w - v\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))}^p + \frac{(\widehat{c}_2(r_1))^q}{q \widehat{\Upsilon}^{q/p}} \|u - y\|_{L_p(\Omega_T)}^q. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Подставляя (4.26), (4.33) и (4.37) в (4.23), получим

$$\begin{aligned} \langle A_R u - A_R y, u - y \rangle &\geq \sum_s \int_0^T \int_{Q_{s1}} (I_{s1} - |I_{s2}| - |I_{s3}|) dx dt \geq \left( \widehat{\Upsilon} - 2 \frac{\widehat{\Upsilon}}{p} \right) \|w - v\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))}^p - \\ &\quad - \frac{\widehat{c}_1^q(r_1)}{q \widehat{\Upsilon}^{q/p}} \|w - v\|_{L_p(\Omega_T)}^q - c_5 \widehat{c}_2(r_1) \|u - y\|_{L_p(\Omega_T)}^2 - \frac{\widehat{c}_2^q(r_1)}{q \widehat{\Upsilon}^{q/p}} \|u - y\|_{L_p(\Omega_T)}^q \geq \\ &\geq - \frac{c_5^q \widehat{c}_1^q(r_1) + \widehat{c}_2^q(r_1)}{q \widehat{\Upsilon}^{q/p}} \|u - y\|_{L_p(\Omega_T)}^q - c_5 \widehat{c}_2(r_1) \|u - y\|_{L_p(\Omega_T)}^2 =: -C(r_1; \|u - y\|_{L_p(\Omega_T)}), \end{aligned} \quad (4.38)$$

поскольку  $\left(1 - \frac{2}{p}\right) \widehat{\Upsilon}(u, y) \geq 0$ . Так как  $q > 1$  и  $W \subset L_p(\Omega_T)$  компактно, то  $A_R$  — оператор с  $(\mathcal{V}; W)$ -полуограниченной вариацией.  $\square$

**Теорема 4.2.** Пусть  $p \in [2, \infty)$  и справедливы условия **(A0)**–**(A1)** и **(A4)**–**(A5)**. Кроме того, пусть выполнено либо условие коэрцитивности **(A2)**, либо оценки (3.42)–(3.43). Тогда для любых  $f \in L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$  и  $\varphi \in L_2(Q)$  существует обобщенное решение задачи (3.1)–(3.3) и  $u \in W$ , множество решений ограничено и слабо замкнуто в  $W$ .

*Доказательство.* В силу условий **(A0)**–**(A1)**  $A_R$  — ограниченный, деминепрерывный оператор (см. лемму 3.8), а в силу **(A4)**–**(A5)**  $A_R$  — оператор с  $(\mathcal{V}; W)$ -полуограниченной вариацией (см. лемму 4.4). Кроме того,  $A_R$  коэрцитивен либо в силу условия **(A2)** (см. лемму 4.1), либо в силу выполнения оценок (3.42)–(3.43) (см. лемму 3.11). Согласно [20, теорема 3.2, гл. 3] существует обобщенное решение  $u \in W$  задачи (3.1)–(3.3). Множество решений ограничено (см. доказательство в теореме 3.2) и слабо замкнуто в силу свойства  $(\mathcal{V}, W)$ -полуограниченной вариации (см. [36, теорема 4.2.1, гл. 4, §2]).  $\square$

**Замечание 4.1.** Вместо условия **(A2)** в теореме 4.2 может быть использовано другое условие, гарантирующее коэрцитивность задачи. Например, если при  $p \in [2, \infty)$  кроме условий **(A0)**, **(A1)**, **(A4)**, **(A5)** справедливы более сильные оценки для слагаемых с младшими членами:

$$|A_i(x, t, \xi_0 + \delta_0, \xi_1, \dots, \xi_n) - A_i(x, t, \xi)| \leq \Psi_1(x, t, \xi) |\delta_0|, \quad (i = 1, \dots, n), \quad (4.39)$$

$$|\Psi_1(x, \xi)| \leq g_\Psi(x, t) + \widehat{\Psi}_1 \sum_{0 \leq k \leq n} |\xi_k|^{p'-2}, \quad (4.40)$$

$$|A_0(x, t, \xi)| \leq \widehat{g}(x, t) + \widehat{c}_1 \sum_{0 \leq k \leq n} |\xi_k|^{p'-1}, \quad (4.41)$$

где  $p' \in [2, p)$ ,  $\widehat{\Psi}_1 > 0$ ,  $g_\Psi \in L_{q'}(\Omega_T)$ ,  $q' = p/(p - 2)$ ,  $\widehat{g} \in L_q(\Omega_T)$ ,  $\widehat{c}_1 > 0$ .

**Теорема 4.3.** Пусть  $p = 2$  и справедливы условия невырожденности **(A0)**, интегрируемости **(A1)**, коэрцитивности **(A2)**, сильной эллиптичности **(A4)** и локальной липшицевости **(A5)**. Тогда для любых  $f \in L_2(\Omega_T)$  и  $\varphi \in L_2(Q)$  существует обобщенное решение задачи (3.1)–(3.3), причем  $\partial_t u \in L_2(\Omega_T)$ .

*Доказательство.* При  $p = 2$  можно рассматривать рефлексивное банахово пространство

$$\widetilde{W} = \{u \in L_2(0, T; \dot{W}_2^1(Q)) : \partial_t u \in L_2(\Omega_T)\}.$$

Как известно,  $\widetilde{W} \subset L_2(\Omega_T)$  компактно, см. [33, теорема 5.1, гл. 1, §5]. Согласно оценке (4.38) оператор  $A_R$  является коэрцитивным оператором с  $(\mathcal{V}, \widetilde{W})$ -полуограниченной вариацией. Следовательно, существует решение операторного уравнения (3.7), см. [20, теорема 3.2, гл. 3] или [33, теорема 1.2, гл. 3, §1]. При этом решение  $u \in \widetilde{W}$ , т. е.  $\partial_t u \in L_2(\Omega_T)$ .  $\square$

**Замечание 4.2.** При  $p = 2$  утверждения теорем 4.2 и 4.3 сохраняются, если отказаться от условий коэрцитивности (A2), (3.42)–(3.43) или (4.39)–(4.41). В этом случае нужные ограничения получаем благодаря наличию в уравнении оператора  $\partial_t$  и оценке полуограниченности вариации оператора  $A_R$  (4.38) (следствие из [36, замечание 4.2.3]).

#### 4.3. ПАРАБОЛИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ С $p$ -ЛАПЛАСИАНОМ И РАЗНОСТНЫМ ОПЕРАТОРОМ

В этом разделе рассмотрим задачу (3.1)–(3.3), когда дифференциальный оператор задан  $p$ -лапласианом. Как и в разделе 2.3, для исследования дифференциально-разностного оператора

$$\Delta_p R_Q : L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q)) \rightarrow L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$$

будем использовать свойства оператора двойственности.

**Определение 4.1.** Функция  $u \in W$  называется *обобщенным решением задачи* (3.1)–(3.3) с дифференциальным оператором

$$\Delta_p R u = - \sum_{1 \leq i \leq n} \partial_i (|\partial_i u|^{p-2} \partial_i u), \quad (4.42)$$

если этот элемент удовлетворяет операторному уравнению

$$\partial_t u + \Delta_p R_Q u = f, \quad (4.43)$$

и  $u|_{t=0} = \varphi$ .

**Определение 4.2.** Линейный оператор  $\widehat{R}_Q : L_p(\Omega_T) \rightarrow L_p(\Omega_T)$  называется *аккретивным*, если

$$\langle Ju, \widehat{R}_Q u \rangle \equiv \int_{\Omega_T} Ju \widehat{R}_Q u \, dx \, dt \geq 0$$

для любого  $u \in L_p(Q)$ . Аккретивный линейный оператор  $\widehat{R}_Q : L_p(Q) \rightarrow L_p(Q)$  *сильно аккретивен*, если

$$\langle Ju, \widehat{R}_Q u \rangle \equiv \int_{\Omega_T} Ju \widehat{R}_Q u \, dx \, dt \geq c_a \|u\|_{L_p(\Omega_T)}^p. \quad (4.44)$$

Заметим, что оператор  $J : L_p(\Omega_T) \rightarrow L_q(\Omega_T)$ , действующий по формуле  $Ju = |u|^{p-2}u$ , обладает свойствами, аналогичными свойствам оператора  $J : L_p(Q) \rightarrow L_q(Q)$ , см. леммы 2.9–2.11. Очевидно также, что если оператор  $\widehat{R}_Q : L_p(Q) \rightarrow L_p(Q)$  аккретивен (сильно аккретивен), то и оператор  $\widehat{R}_Q : L_p(\Omega_T) \rightarrow L_p(\Omega_T)$  аккретивен (сильно аккретивен), поскольку в нем нет явной зависимости от  $t$ . Критерий сильной аккретивности, доказанный в лемме 2.8 для эллиптического случая, будет справедлив и при рассмотрении в цилиндре. Ниже воспользуемся результатами раздела 2.3.

**Лемма 4.5.** Оператор  $\Delta_p R_Q : L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q)) \rightarrow L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$  ограничен и деминепрерывен.

*Доказательство.*  $p$ -Лапласиан удовлетворяет условию интегрируемости с  $A_i(x, t, \xi) = |\xi_i|^{p-2} \xi_i$ . Утверждение леммы 4.5 следует из леммы 3.8.  $\square$

**Лемма 4.6.** Пусть  $L_p(0, T; W_p^1(Q)) \ni u_m \rightharpoonup u_0 \in L_p(0, T; W_p^1(Q))$  и

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i \leq n} \langle J \partial_i u_m, \widehat{R}_Q \partial_i (u_m - u_0) \rangle \leq 0. \quad (4.45)$$

Тогда, если  $\widehat{R}_Q$  сильно аккретивен, то

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{1 \leq i \leq n} \langle J \partial_i u_m, \widehat{R}_Q \partial_i u_m \rangle = \sum_{1 \leq i \leq n} \langle J \partial_i u_0, \widehat{R}_Q \partial_i u_0 \rangle. \quad (4.46)$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.13.

**Лемма 4.7.** Пусть разностному оператору  $R_Q$  соответствуют невырожденные матрицы  $R_s$ ,  $a_h \in \mathbb{R}^1$ . Кроме того, пусть обратный оператор  $R_Q^{-1}$  сильно аккретивен с константой  $c_a$ , см. (4.44). Тогда оператор  $\Delta_p R_Q : L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q)) \rightarrow L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$  псевдомонотонен<sup>1</sup> и коэрцитивен, причем

$$\langle \Delta_p R_Q u, u \rangle \geq c_5^{-p} c_a \|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^p. \quad (4.47)$$

Доказательство аналогично доказательству леммы 2.14.

**Теорема 4.4.** Пусть оператор  $R_Q^{-1}$  сильно аккретивен. Тогда для любых  $f \in L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$  и  $\varphi \in L_2(Q)$  задача (3.1)–(3.3) с  $A = \Delta_p$  имеет непустое, ограниченное, слабо замкнутое множество обобщенных решений, причем для каждого решения справедливы оценки:

$$\|u(T)\|_{L_2(Q)}^2 \leq c_{30} \|f\|_{L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))}^q + c_{31} \|\varphi\|_{L_2(Q)}^2, \quad (4.48)$$

$$\|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^p \leq c_{32} \|f\|_{L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))}^q + c_{33} \|\varphi\|_{L_2(Q)}^2, \quad (4.49)$$

где  $c_{30}, c_{31}, c_{32}, c_{33} > 0$  не зависят от  $u, f$  и  $\varphi$ .

*Доказательство.* Вследствие лемм 4.5 и 4.7 при указанных выше условиях оператор  $\Delta_p R_Q$  деминепрерывен, ограничен, коэрцитивен и псевдомонотонен. Следовательно, решение операторного уравнения (4.43) существует при  $\varphi = 0$ , см. [33, теорема 1.1, гл. 3, §1]. Для произвольного  $\varphi \in L_2(Q)$  в силу непрерывности и плотности вложений  $C^1(0, T; \dot{W}_p^1(Q)) \cap W \subset W \subset C(0, T; L_2(Q))$  (см. [15, леммы 1.12, 1.17, гл. IV, §1]) существует элемент  $v \in W$  такой, что  $v|_{t=0} = \varphi$ . Поскольку оператор  $\Delta_p R_Q(\cdot + v)$  деминепрерывен, ограничен, коэрцитивен и псевдомонотонен, то существует решение уравнения

$$\partial_t(u + v) + \Delta_p R_Q(u + v) = f, \quad u|_{t=0} = 0,$$

см. [33, теорема 1.1, гл. 3, §1]. Это доказывает существование обобщенного решения задачи (3.1)–(3.3) с  $A = \Delta_p$ .

Ограниченность множества решений следует из коэрцитивности оператора. Докажем это, одновременно доказывая оценки (4.48), (4.49). Пусть  $u$  — решение операторного уравнения (4.43),  $u|_{t=0} = \varphi$ . Тогда

$$\langle \partial_t u, u \rangle + \langle \Delta_p R_Q u, u \rangle = \langle f, u \rangle. \quad (4.50)$$

Используем оценку коэрцитивности (4.47) и распишем первое слагаемое левой части:

$$\frac{1}{2} \|u(T)\|_{L_2(Q)}^2 - \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L_2(Q)}^2 + c_5^{-p} c_a \|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^p \leq \langle f, u \rangle. \quad (4.51)$$

Оценим правую часть (4.50) с помощью неравенства Гёльдера и формулы  $ab \leq a^p/p + b^q/q$ :

$$\langle f, u \rangle \leq \|f\|_{L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))} \|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))} \leq \frac{1}{q\varepsilon^q} \|f\|_{L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))}^q + \frac{\varepsilon^p}{p} \|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^p.$$

Пусть  $\varepsilon^p/p = c_5^{-p} c_a/2$ . В силу неотрицательности нормы отбросим первое слагаемое в левой части (4.51)

$$\frac{c_5^{-p} c_a}{2} \|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^p \leq \frac{1}{q\varepsilon^q} \|f\|_{L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))}^q + \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L_2(Q)}^2.$$

Оценка (4.49) доказана. С другой стороны, третье слагаемое в левой части (4.51) также неотрицательно, следовательно

$$\frac{1}{2} \|u(T)\|_{L_2(Q)}^2 \leq \langle f, u \rangle + \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L_2(Q)}^2 \leq \frac{1}{q} \|f\|_{L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))}^q + \frac{1}{p} \|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^p + \frac{1}{2} \|\varphi\|_{L_2(Q)}^2.$$

Подставив в это неравенство оценку (4.49), мы получим оценку (4.48).

<sup>1</sup>Очевидно, что псевдомонотонный оператор является псевдомонотонным на  $W$ .

Слабая замкнутость множества решений следует из псевдомонотонности оператора  $\Delta_p R_Q$ . Покажем это. Пусть  $\{u_m\}$  — решения,  $u_m \rightharpoonup u$  в  $L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))$ . Заметим, что  $u|_{t=0} = u_m|_{t=0} = \varphi$ . Поскольку в силу слабой сходимости

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \langle f, u_m - u \rangle = 0 \quad \text{и} \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \langle \partial_t u, u_m - u \rangle = 0,$$

то воспользуемся монотонностью оператора  $\partial_t$  на множествах с фиксированными начальными условиями:

$$\overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \langle \Delta_p R_Q u_m, u_m - u \rangle = \overline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \langle f - \partial_t u_m, u_m - u \rangle \leq 0.$$

В силу псевдомонотонности  $\Delta_p R_Q$  из последнего неравенства следует, что

$$\langle \Delta_p R_Q u, u - \xi \rangle \leq \underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \langle \Delta_p R_Q u_m, u_m - \xi \rangle = \underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \langle f - \partial_t u_m, u_m - \xi \rangle \leq \langle f - \partial_t u, u - \xi \rangle \quad (4.52)$$

для любого  $\xi \in L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))$ . Неравенство (4.52) означает, что  $u$  — решение операторного уравнения (4.43), причем по построению  $u|_{t=0} = \varphi$ .  $\square$

Заметим, что в этом разделе для простоты изложения рассмотрен  $p$ -лапласиан без младших членов. Младшие члены, определяемые непрерывными функциями типа Каратеодори, составляют ограниченный, деминепрерывный и псевдомонотонный на  $W$  оператор. Обозначим его по аналогии с ранее введенными обозначениями  $\mathcal{A}_R^0$ . Таким образом, сумма ограниченного псевдомонотонного оператора  $\Delta_p R_Q$  и ограниченного псевдомонотонного на  $W$  оператора  $\mathcal{A}_R^0$  даст псевдомонотонный на  $W$  оператор. Сохранение условия коэрцитивности может потребовать дополнительных условий, например, если  $\langle \mathcal{A}_R^0 u, u \rangle \geq 0$  или выполнено условие (3.43) из леммы 3.11.

#### 4.4. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ

В этом разделе сформулируем теоремы существования периодических по  $t$  решений существенно нелинейных параболических дифференциально-разностных уравнений; квазилинейные уравнения см. в разделе 3.5.

В цилиндре  $Q \times \mathbb{R}$  рассмотрим уравнение (3.58). Поскольку нас интересуют периодические по  $t$  решения с периодом  $T$ , то уравнение будем рассматривать в рефлексивном банаховом пространстве

$$\widehat{W} = \{u \in \mathcal{V} : \partial_t u \in \mathcal{V}^*, u|_{t=0} = u|_{t=T}\}$$

с нормой  $\|u\|_{\widehat{W}} = \|u\|_{\mathcal{V}} + \|\partial_t u\|_{\mathcal{V}^*}$ . Обозначим через  $\widehat{A}_R$  сужение оператора  $A_R$  на пространство  $\widehat{W}$ :

$$\widehat{A}_R u := A_R u \quad \forall u \in \widehat{W}.$$

Очевидно, что  $\widehat{W} \subset W$  непрерывно. Более того, оператор  $\widehat{A}_R : \widehat{W} \rightarrow \mathcal{V}^*$  наследует свойства оператора  $A_R : W \rightarrow \mathcal{V}^*$ . Используя это, сформулируем теоремы существования решения.

**Теорема 4.5.** Пусть коэффициенты дифференциального оператора  $A$  периодичны по  $t$  с периодом  $T$ , а также выполнены условия невырожденности (A0), интегрируемости (A1), коэрцитивности (A2) и эллиптичности (A3). Тогда для любого  $f \in L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$  множество периодических обобщенных решений задачи (3.58), (3.3), (3.59) непусто и слабо компактно.

*Доказательство.* В силу условий теоремы оператор  $\widehat{A}_R$  деминепрерывен и ограничен, см. лемму 3.8, а также коэрцитивен (лемма 4.1) и обладает свойством  $(S_+)$  на  $W$  (лемма 4.3), т. е. псевдомонотонен на  $\widehat{W}$ . Следовательно, решение операторного уравнения (3.60) существует, см. [33, теорема 1.2, гл. 3, §1].

Ограниченность множества решений следует из коэрцитивности оператора, слабая компактность в  $\widehat{W}$  следует из свойства  $(S_+)$  на  $W$ , полное доказательство приведено в теореме 3.6.  $\square$

**Теорема 4.6.** Пусть коэффициенты дифференциального оператора  $A$  периодичны по  $t$  с периодом  $T$ , а также выполнены условия невырожденности (A0), интегрируемости (A1), сильной эллиптичности (A4), локальной липшицевости (A5) и коэрцитивности (3.42)-(3.43),  $p \in [2, \infty)$ . Тогда множество периодических обобщенных решений задачи (3.58), (3.3), (3.59) непусто и слабо компактно для любого  $f \in L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$ .

*Доказательство.* В силу условий **(A0)**-**(A1)**  $A_R$  — ограниченный, деминепрерывный оператор (см. лемму 3.8), в силу условий (3.42)-(3.43) — коэрцитивный (см. лемму 3.11), а в силу **(A4)**-**(A5)**  $A_R$  — оператор с  $(\mathcal{V}; W)$ -полуограниченной вариацией (см. лемму 4.4). Следовательно,  $\widehat{A}_R$  — псевдомонотонный на  $\widehat{W}$  оператор, см. [36, предложение 4.2.2, гл. 4, §4.2]. Согласно [33, теорема 1.2, гл. 3, §1] существует обобщенное решение задачи (3.58), (3.3)  $u \in \widehat{W}$ .

Ограниченность множества решений следует из коэрцитивности оператора  $\widehat{A}_R$ , см. доказательство в доказательстве теоремы 3.6. Слабая компактность множества решений следует из псевдомонотонности на  $W$  оператора. Для удобства читателей приведем это доказательство полностью. Пусть  $\{u_m\}$  — решения,  $u_m \rightharpoonup u$  в  $\widehat{W}$ . Заметим, что при этом  $u_m \rightharpoonup u$  в  $\mathcal{V}$ ,  $\partial_t u_m \rightharpoonup \partial_t u$  в  $\mathcal{V}^*$ ,  $u_m|_{t=0} = u_m|_{t=T}$  и  $u|_{t=0} = u|_{t=T}$ . Кроме того,

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle \widehat{A}_R u_n, u_n - u \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, u_n - u \rangle - \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle \partial_t u_n, u_n - u \rangle = 0,$$

так как первое слагаемое правой части стремится к нулю из-за слабой сходимости  $\{u_m\}$ , второе слагаемое правой части стремится к нулю вследствие монотонности оператора  $\partial_t$ , см. (3.66). В силу псевдомонотонности на  $W$  оператора  $\widehat{A}_R$  из последнего неравенства следует, что

$$\langle \widehat{A}_R u, u - \xi \rangle \leq \underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \langle \widehat{A}_R u_m, u_m - \xi \rangle = \underline{\lim}_{m \rightarrow \infty} \langle f - \partial_t u_m, u_m - \xi \rangle \leq \langle f - \partial_t u, u - \xi \rangle \quad \forall \xi \in \mathcal{V}. \quad (4.53)$$

Неравенство (4.53) означает, что  $u$  — решение операторного уравнения (4.43), причем по построению  $u|_{t=0} = u|_{t=T}$ .  $\square$

**Теорема 4.7.** Пусть оператор  $R_Q^{-1}$  сильно аккретивен. Тогда для любого  $f \in L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$  существует непустое, ограниченное и слабо замкнутое в  $\widehat{W}$  множество периодических обобщенных решений задачи (3.58), (3.3), (3.59) с  $A = \Delta_p$ ,  $p \in (2, \infty)$ , причем решения удовлетворяют оценке

$$\|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))} \leq c_{34} \|f\|_{L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))}^{1/(p-1)}, \quad (4.54)$$

где  $c_{34} > 0$  не зависит от  $u$  и  $f$ .

*Доказательство.* Вследствие лемм 4.5 и 4.7 при указанных выше условиях оператор  $\Delta_p R_Q$  деминепрерывен, ограничен, коэрцитивен и псевдомонотонен. Следовательно, справедливо также свойство псевдомонотонности на  $\widehat{W}$ . Согласно [33, теорема 1.2, гл. 3, §1] существует обобщенное решение задачи (3.58), (3.3)  $u \in \widehat{W}$ .

Ограниченность множества решений следует из коэрцитивности оператора. Докажем это, одновременно доказывая оценку (4.54). Пусть  $u$  — решение операторного уравнения (4.43),  $u|_{t=0} = u|_{t=T}$ . Тогда

$$\langle \partial_t u, u \rangle + \langle \Delta_p R_Q u, u \rangle = \langle f, u \rangle.$$

В силу периодичности решения  $\langle \partial_t u, u \rangle = 0$ . Используем оценку коэрцитивности (4.47) для левой части и неравенства Гёльдера для правой:

$$c_5^{-p} c_a \|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^p \leq \langle \Delta_p R_Q u, u \rangle = \langle f, u \rangle \leq \|f\|_{L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))} \|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}. \quad (4.55)$$

Из этого неравенства непосредственно следует оценка (4.54).

Слабая компактность множества решений следует из псевдомонотонности на  $W$  оператора  $\Delta_p R_Q$ , см. доказательство теоремы 4.6.  $\square$

## ГЛАВА 5

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ  
КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА БИЦАДЗЕ—САМАРСКОГО

В 1969 г. А. В. Бицадзе и А. А. Самарский сформулировали новую нелокальную краевую задачу, возникающую в теории плазмы, см. [3]:

$$-\Delta w(x) = f(x) \quad (x = (x_1, x_2) \in Q = (0, 2) \times (0, 1)), \quad (5.1)$$

$$\left. \begin{aligned} w(x_1, 0) = w(x_1, 1) = 0 & \quad (0 \leq x_1 \leq 2), \\ w(0, x_2) = \gamma_1 w(1, x_2), \quad w(2, x_2) = \gamma_2 w(1, x_2) & \quad (0 < x_2 < 1) \end{aligned} \right\} \quad (5.2)$$

при  $\gamma_1 = 0$  и  $\gamma_2 = 1$ . Разрешимость задачи в случае произвольного эллиптического уравнения с переменными коэффициентами и произвольной структуры носителя нелокальных членов была сформулирована как нерешенная задача, см. [55]. В конце 80-х годов была построена общая теория линейных нелокальных эллиптических краевых задач, в рамках которой была решена указанная проблема, см. [59, 67, 68, 106]. Вопрос о нелинейных эллиптических нелокальных задачах, а также о линейных и нелинейных параболических задачах с нелокальными краевыми условиями оставался открытым. В этой главе будут рассмотрены данные задачи с использованием метода разбиения области и границы, а также теории операторов псевдомонотонного типа. Поскольку в главе будут использованы оценки, полученные в предыдущих главах, то нумерация констант в этой главе будет  $k_1, k_2, \dots$ , а также будут использованы константы из предыдущих глав  $c_j$  с указанием формул, где они определены.

## 5.1. РАЗНОСТНЫЙ ОПЕРАТОР И ИЗОМОРФИЗМ СОБОЛЕВСКИХ ПРОСТРАНСТВ

Вначале рассмотрим эллиптические задачи. Будет использовано разбиение области, см. раздел 1.2. Кроме разбиения области, необходимо рассмотреть свойства разбиения границы  $\partial Q$ , определяемое тем же множеством сдвигов  $M \subset \mathbb{R}^n$ , см. раздел 1.2. По-прежнему,  $M$  — аддитивная группа, порожденная  $M$ .

**Условие 5.1.** Пусть множество  $\mathcal{K}$ , заданное формулой

$$\mathcal{K} = \bigcup_{h_1, h_2 \in M} \left\{ \overline{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap \overline{[(\partial Q + h_2) \setminus (\partial Q + h_1)]} \right\}, \quad (5.3)$$

удовлетворяет условию

$$\text{mes}_{n-1}(\mathcal{K} \cap \partial Q) = 0. \quad (5.4)$$

Обозначим через  $\Gamma_\rho$  открытые, связные в топологии  $\partial Q$  компоненты множества  $\partial Q \setminus \mathcal{K}$ . В [106, §7] получен следующий результат:

**Лемма 5.1.** Если  $(\Gamma_\rho + h) \cap \overline{Q} \neq \emptyset$  для некоторого  $h \in M$ , то или  $\Gamma_\rho + h \subset Q$ , или существует  $\Gamma_r \subset \partial Q \setminus \mathcal{K}$  такое, что  $\Gamma_\rho + h = \Gamma_r$ .

Согласно этому свойству множества  $\{\Gamma_\rho + h : \Gamma_\rho + h \subset \overline{Q}, \rho = 1, 2, \dots, h \in M\}$  могут быть разбиты на классы. Множества  $\Gamma_{\rho_1} + h_1$  и  $\Gamma_{\rho_2} + h_2$  принадлежат одному классу, если

- 1) существует вектор  $h \in M$  такой, что  $\Gamma_{\rho_1} + h_1 = \Gamma_{\rho_2} + h_2 + h$ ;
- 2) для любых  $\Gamma_{\rho_1} + h_1, \Gamma_{\rho_2} + h_2 \subset \partial Q$  нормали к  $\partial Q$  в точках  $x \in \Gamma_{\rho_1} + h_1$  и  $x - h \in \Gamma_{\rho_2} + h_2$  одинаково направлены.

Обозначим множество  $\Gamma_\rho + h$  через  $\Gamma_{rj}$ , где  $r$  — номер класса,  $j$  — номер элемента в классе ( $1 \leq j \leq J = J(r)$ ). Не нарушая общности, будем считать, что  $\Gamma_{r1}, \dots, \Gamma_{rJ_0} \subset Q$ ,  $\Gamma_{r, J_0+1}, \dots, \Gamma_{rJ} \subset \partial Q$  ( $0 \leq J_0 = J_0(r) < J(r)$ ).

Как известно (см. [106, §7]), данное разбиение обладает следующими свойствами:

**Лемма 5.2** (см. [106, лемма 7.6]). Для любого  $\Gamma_{rj} \subset \partial Q$  существует подобласть  $Q_{sl}$  такая, что  $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{sl}$ . Более того, если  $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{sl}$ , то  $\Gamma_{rj} \cap \partial Q_{s_1 l_1} = \emptyset$  для любых пар  $(s_1, l_1) \neq (s, l)$ .

**Лемма 5.3** (см. [106, лемма 7.7]). *Для каждого  $r = 1, 2, \dots$  существует единственный номер  $s = s(r)$  такой, что  $N(s) = J(r)$  и  $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$  ( $l = 1, \dots, N(s)$ ) (с точностью до перенумеровки).*

Рассмотрим изоморфизм между подпространствами Соболева, порожденный разностным оператором. При этом предполагается выполненным следующее условие:

**Условие 5.2.** *Для каждой подобласти  $Q_{sl}$  ( $s = 1, 2, \dots, l = 1, \dots, N(s)$ ) и для любого  $\varepsilon > 0$  существует открытое множество  $G_{sl} \subset Q_{sl}$  с границей  $\partial G_{sl} \in C^1$  такое, что  $\text{mes}_n(Q_{sl} \setminus G_{sl}) < \varepsilon$ ,  $\text{mes}_{n-1}(\partial G_{sl} \Delta \partial Q_{sl}) < \varepsilon$ .*

Обозначим  $W_{p,\gamma}^1(Q)$  ( $\gamma = \{\gamma_{ij}^r\}$ ) подпространство функций из  $W_p^1(Q)$ , удовлетворяющих *нелокальным краевым условиям*

$$\left. \begin{aligned} w|_{\Gamma_{rl}} &= \sum_{1 \leq j \leq J_0} \gamma_{lj}^r w|_{\Gamma_{rj}}, \quad r \in B, \quad l = J_0 + 1, \dots, J, \\ w|_{\Gamma_{rl}} &= 0, \quad r \notin B, \quad l = 1, \dots, J, \end{aligned} \right\} \quad (5.5)$$

где  $J_0 = J_0(r)$ ,  $J = J(r)$ ,  $\gamma_{lj}^r$  — вещественные числа,  $B = \{r : J_0 > 0\}$ .

Рассмотрим набор вещественных постоянных коэффициентов  $\widehat{\Lambda} = \{a_h : h \in \mathcal{M}\}$ . Определим разностный оператор  $R : L_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_p(\mathbb{R}^n)$ :

$$Ru(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_h u(x + h), \quad (5.6)$$

а также оператор  $R_Q = P_Q R I_Q : L_p(Q) \rightarrow L_p(Q)$ . Здесь  $I_Q : L_p(Q) \rightarrow L_p(\mathbb{R}^n)$  — оператор продолжения функций из  $L_p(Q)$  нулем в  $\mathbb{R}^n \setminus Q$ ,  $P_Q : L_p(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_p(Q)$  — оператор сужения функций из  $L_p(\mathbb{R}^n)$  на  $Q$ . Напомним, что оператору  $R_Q$  соответствуют матрицы  $R_s = \{r_{ij}^s\}_{1 \leq i, j \leq N(s)}$  такие, что

$$r_{ij}^s = \begin{cases} a_h, & h = h_{sj} - h_{si} \in \mathcal{M}, \\ 0, & h_{sj} - h_{si} \notin \mathcal{M}, \end{cases} \quad (5.7)$$

где  $h_{si}$  определяется условием  $Q_{si} = Q_{s1} + h_{si}$ . Из ограниченности области  $Q$  и формулы (5.7) следует, что множество различных матриц  $R_s$  конечно.

Согласно лемме 5.3, для каждого  $r = 1, 2, \dots$ , найдется единственный номер  $s = s(r)$  такой, что  $N(s) = J(r)$  и  $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$  ( $l = 1, \dots, N(s)$ ) после перенумерации подобластей  $s$ -го класса. Обозначим через  $R_{s(r)}$  матрицы, полученные из  $R_s$  ( $s = s(r)$ ) путем перенумерования соответствующих столбцов и строк. Пусть  $e_j^r$  ( $j = 1, \dots, J(r)$ ) —  $j$ -я строка матрицы размерности  $J \times J_0$ , полученной путем вычеркивания последних  $J - J_0$  столбцов из матрицы  $R_{s(r)}$ .

**Определение 5.1.** Будем говорить, что матрицы  $R_s$  *соответствуют граничным условиям* (5.5), если выполнено следующее условие:

**Условие 5.3.** *Существует набор  $\widehat{\Lambda} = \{a_h : h \in \mathcal{M}\}$  такой, что для любого  $s = 1, 2, \dots$  матрицы  $R_s$  невырождены, а также для всех  $r \in B$  и  $s = s(r)$  справедливы соотношения:*

$$e_l^r = \sum_{1 \leq j \leq J_0} \gamma_{lj}^r e_j^r \quad (l = J_0 + 1, \dots, J). \quad (5.8)$$

Обозначим через  $R_{s_0}$  матрицу порядка  $J_0 \times J_0$ , полученную из матрицы  $R_s$  вычеркиванием последних  $N - J_0$  строк и столбцов.

**Пример 5.1.** Рассмотрим нелокальные краевые условия задачи Бицадзе—Самарского:

$$\left. \begin{aligned} w(x_1, 0) = w(x_1, 1) = 0 & \quad (0 \leq x_1 \leq 2), \\ w(0, x_2) = \gamma_1 w(1, x_2), \quad w(2, x_2) = \gamma_2 w(1, x_2) & \quad (0 < x_2 < 1). \end{aligned} \right\} \quad (5.9)$$

Согласно этим краевым условиям мы имеем множество сдвигов  $\mathcal{M} = \{(0, 0); (1, 0); (-1, 0)\}$ , которые разбивают область  $Q = (0, 2) \times (0, 1)$  на две подобласти  $Q_{11} = (0, 1) \times (0, 1)$  и  $Q_{12} = (1, 2) \times (0, 1)$ , принадлежащих одному классу. Множество  $\mathcal{K}$  состоит из 6 точек:

$$\mathcal{K} = \{(i, j) : i = 0, 1, 2; j = 0, 1\}.$$

Множество  $\{\Gamma_{rj}\}$  состоит из 8 элементов, которые принадлежат 4-м классам:

1)  $\Gamma_{11} = \{1\} \times (0, 1)$ ,  $\Gamma_{12} = \{0\} \times (0, 1)$ ;

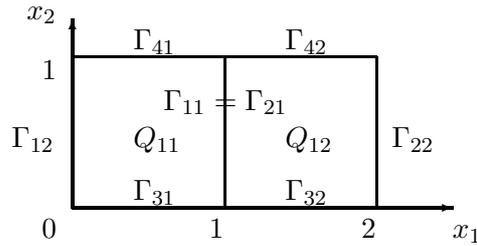


Рис. 5.1

FIG. 5.1

- 2)  $\Gamma_{21} = \{1\} \times (0, 1)$ ,  $\Gamma_{22} = \{2\} \times (0, 1)$ ;
- 3)  $\Gamma_{31} = (0, 1) \times \{0\}$ ,  $\Gamma_{12} = (1, 2) \times \{0\}$ ;
- 4)  $\Gamma_{41} = (0, 1) \times \{1\}$ ,  $\Gamma_{12} = (1, 2) \times \{1\}$ .

Подчеркнем, что  $\Gamma_{11}$  и  $\Gamma_{21}$  расположены на одном подмножестве, но имеют противоположные нормали. В соответствии с множеством сдвигов разностный оператор должен иметь вид

$$Ru(x) = u(x_1, x_2) + a_1u(x_1 + 1, x_2) + a_{-1}u(x_1 - 1, x_2).$$

Данному оператору соответствует матрица  $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ a_{-1} & 1 \end{pmatrix}$ , невырожденная при  $a_1a_{-1} \neq 1$ . В то же время, для любого  $u \in \dot{W}_p^1(Q)$  и  $w = R_Q u$  получаем:

$$\begin{aligned} w|_{x_2=0} &= w|_{x_2=1} = 0, \\ w|_{x_1=0} &= a_1u|_{x_1=1} = a_1w|_{x_1=1}, \\ w|_{x_1=2} &= a_{-1}u|_{x_1=1} = a_{-1}w|_{x_1=1}. \end{aligned}$$

Таким образом, если  $a_1 = \gamma_1$ ,  $a_{-1} = \gamma_2$  и  $u \in \dot{W}_p^1(Q)$ , то функция  $w = R_Q u \in W_p^1(Q)$  и удовлетворяет нелокальным краевым условиям (5.9), т. е.  $R_Q(\dot{W}_p^1(Q)) \subset W_{p,\gamma}^1(Q)$ , где  $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ .

**Пример 5.2.** Пусть  $Q = (0, 3) \times (0, 1)$ . Рассмотрим нелокальные краевые условия при  $\gamma_1 = \frac{39}{28}$ ,  $\gamma_2 = -\frac{6}{7}$ :

$$\left. \begin{aligned} w(x_1, 0) &= w(x_1, 1) = 0 && (0 \leq x_1 \leq 3), \\ w(0, x_2) &= \gamma_1 w(1, x_2) + \gamma_2 w(2, x_2) && (0 < x_2 < 1), \\ w(3, x_2) &= \gamma_2 w(1, x_2) + \gamma_1 w(2, x_2) && (0 < x_2 < 1). \end{aligned} \right\} \quad (5.10)$$

Согласно этим краевым условиям мы имеем множество сдвигов  $\mathcal{M} = \{(k, 0)\}_{k=0,\pm 1,\pm 2}$ , которые разбивают область  $Q = (0, 3) \times (0, 1)$  на три подобласти. Разбиение области и границы показано на рис. 5.2:

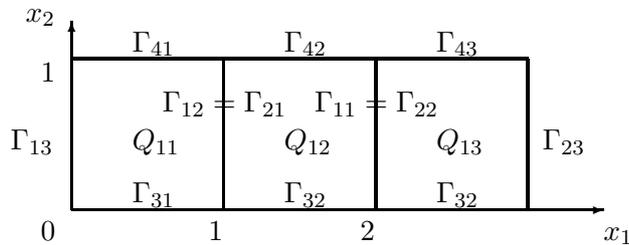


Рис. 5.2

FIG. 5.2

Разностный оператор в силу симметричности нелокальных условий также будет симметричным:

$$Ru(x) = a_0u(x) + a_1u(x_1 + 1, x_2) + a_{-1}u(x_1 - 1, x_2) + a_2u(x_1 + 2, x_2) + a_{-2}u(x_1 - 2, x_2).$$

Этому оператору соответствует матрица  $R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_0 & a_1 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}$ . На основании условия 5.3 вычислим значения  $\{a_i\}$ :

$$\begin{aligned} a_1 &= \gamma_1 a_0 + \gamma_2 a_1, \\ a_2 &= \gamma_2 a_0 + \gamma_1 a_1. \end{aligned}$$

Для удобства вычисления определим  $a_0 = 1$ . Тогда  $a_1 = 3/4$  и  $a_2 = 3/16$ . Таким образом, если  $a_0 = 1, a_1 = 3/4, a_2 = 3/16$  и  $u \in \dot{W}_p^1(Q)$ , то функция  $w = R_Q u \in W_p^1(Q)$  и удовлетворяет нелокальным краевым условиям (5.10), т. е.  $R_Q(\dot{W}_p^1(Q)) \subset W_{p,\gamma}^1(Q)$ .

Следующая теорема устанавливает связь между эллиптическими дифференциальными уравнениями с нелокальными условиями вида (5.5) и эллиптическими дифференциально-разностными уравнениями с однородными условиями Дирихле. Это позволяет применять результаты, полученные для одной из этих задач, к исследованию другой задачи.

**Теорема 5.1.** *Предположим, что выполнены условия 5.1–5.3, а соответствующие матрицы  $R_s$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) и  $R_{s0}$  ( $s = s(r), r \in B$ ) невырождены.*

*Тогда существует множество  $\gamma = \{\gamma_{lj}^r\}$  такое, что оператор  $R_Q$  отображает  $\dot{W}_p^1(Q)$  на  $W_{p,\gamma}^1(Q)$  непрерывно и взаимно однозначно.*

*Доказательство.* При  $p = 2$  данная теорема доказана в [106, теорема 8.1]. Для  $p \in (1, +\infty)$  доказательство содержит некоторые отличия. Поэтому для удобства читателей приведем его полностью.

1. Докажем вначале, что  $R_Q(\dot{W}_p^1(Q)) \subset W_{p,\gamma}^1(Q)$  для некоторого  $\gamma$ . Очевидно,  $R_Q(\dot{W}_p^1(Q)) \subset W_p^1(Q)$ . Поэтому достаточно доказать, что функция  $R_Q u$  удовлетворяет условиям (5.5) для  $u \in \dot{W}_p^1(Q)$ .

Пусть  $e_i^r - i$ -я строка матрицы, полученной из  $R_s$  путем вычеркивания последних  $N(s) - J_0$  столбцов ( $r \in B, s = s(r)$ ). Поскольку  $\det R_{s0} \neq 0$ , существуют числа  $\gamma_{lj}^r$  такие, что

$$e_l^r = \sum_{1 \leq j \leq J_0} \gamma_{lj}^r e_j^r \quad (l = J_0 + 1, \dots, N = N(s)). \tag{5.11}$$

Обозначим через  $L_p(\cup_l Q_{sl})$  подпространство функций из  $L_p(Q)$ , обращающихся в нуль вне множества  $\cup_l Q_{sl}$ . Пространство  $L_p(\cup_l Q_{sl})$  является инвариантным пространством  $R_Q$ , см. лемму 1.2.

Определим изоморфизм  $U_s : L_p(\cup_l Q_{sl}) \rightarrow L_p^N(Q_{s1})$ , где  $N = N(s)$ , по формуле

$$(U_s u)_l(x) = u(x + h_{sl}) \quad (x \in Q_{s1}). \tag{5.12}$$

Пусть также  $P_s : L_p(Q) \rightarrow L_p(\cup_l Q_{sl})$  — оператор проекции на  $L_p(\cup_l Q_{sl})$ . Тогда  $(U_s P_s u)_l|_{\Gamma_{r1}} = 0$  ( $l = J_0 + 1, \dots, N$ ) для любого  $u \in \dot{W}_p^1(Q)$ . Из (5.11) следует, что

$$\begin{aligned} (R_Q u)(x)|_{\Gamma_{r1}} &= (U_s P_s R_Q u)_l(x - h_{sl})|_{\Gamma_{r1}} = (R_s U_s P_s u)_l(x - h_{sl})|_{\Gamma_{r1}} = \\ &= \sum_{1 \leq j \leq J_0} \gamma_{lj}^r (R_s U_s P_s u)_j(x - h_{sl})|_{\Gamma_{r1}} = \sum_{1 \leq j \leq J_0} \gamma_{lj}^r (R_Q u)(x - h_{sl} + h_{sj})|_{\Gamma_{r1}} = \sum_{1 \leq j \leq J_0} \gamma_{lj}^r (R_Q u)(x)|_{\Gamma_{rj}}, \end{aligned} \tag{5.13}$$

где  $l = J_0 + 1, \dots, N$ . Таким образом,  $R_Q(\dot{W}_p^1(Q)) \subset W_{p,\gamma}^1(Q)$ .

2. Теперь докажем обратное вложение. В соответствии с [106, лемма 7.6], для любого фиксированного  $r$  и соответствующего  $s = s(r)$  существуют  $\rho = \rho(r)$  и  $m = m(r)$  такие, что  $\Gamma_{r1} \subset \partial Q_{\rho m}, Q_{\rho m} \neq Q_{s1}$ . Перенумеруем подобласти  $\rho$ -го класса так, что  $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{\rho l}$  ( $l = 1, \dots, J_0$ ).

Пусть  $w \in W_{p,\gamma}^1(Q)$ . Тогда  $u = R_Q^{-1} w \in W_p^1(Q_{sl})$ , см. лемму 1.6.

а) Покажем, что  $u \in \dot{W}_p^1(Q)$ . Пусть

$$\varphi_l = 0 \quad (l = J_0 + 1, \dots, N(s)), \tag{5.14}$$

$$\varphi_l = \psi_l \quad (l = 1, \dots, J_0), \tag{5.15}$$

где  $\varphi_l = (U_s P_s u)_l(x - h_{sl})|_{\Gamma_{rl}}$  ( $l = 1, \dots, N(s)$ ),  $\psi_l = (U_\rho P_\rho u)_l(x - h_{\rho l})|_{\Gamma_{rl}}$  ( $l = 1, \dots, N(\rho)$ ). Введем функцию  $u_j(x)$  ( $x \in \bigcup_{s,l} Q_{sl}$ ), такую что  $u_j(x) := \partial_j u(x)$  при  $x \in Q_{sl}$ . Согласно лемме 1.6,  $u_j \in L_p(Q)$ .

С учетом (5.14) для доказательства принадлежности  $u \in \mathring{W}_p^1(Q)$  достаточно показать, что для любого  $1 \leq j \leq n$  функция  $u$  имеет обобщенные производные  $\partial_j u$  и  $\partial_j u(x) = u_j(x)$  ( $x \in Q$ ), т. е. для любого  $v \in \dot{C}^\infty(Q)$

$$\int_Q u_j v \, dx = - \int_Q u \partial_j v \, dx. \quad (5.16)$$

Поскольку  $C^\infty(\overline{Q})$  всюду плотно в  $W_p^1(Q)$ , для каждого  $w \in W_p^1(Q)$  существует последовательность  $w_m \in C^\infty(\overline{Q})$ , сходящаяся по норме, т. е.

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|w - w_m\|_{W_p^1(Q)}^p = 0, \quad (5.17)$$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{r,l} \|(w - w_m)|_{\Gamma_{rl}}\|_{L_p(\Gamma_{rl})}^p = 0. \quad (5.18)$$

Полагая  $u_m = R_Q^{-1} w_m$ , из (5.17) и леммы 1.6 имеем, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{r,l} \|u - u_m\|_{W_p^1(Q_{sl})}^p = 0. \quad (5.19)$$

Из равенств  $R_Q^{-1} = \sum_s U_s^{-1} R_s^{-1} U_s P_s$  и  $P_s R_Q^{-1} = R_Q^{-1} P_s$  следует, что

$$(u - u_m)|_{\Gamma_{rl}} = (U_s P_s (u - u_m))_l(x - h_{sl})|_{\Gamma_{rl}} = (R_s^{-1} U_s P_s (w - w_m))_l(x - h_{sl})|_{\Gamma_{rl}}. \quad (5.20)$$

В силу конечности числа различных матриц  $R_{s,l}$ , а также с учетом (5.18) и (5.20) получаем, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \sum_{r,l} \|u - u_m\|_{L_p(\Gamma_{rl})}^p = 0. \quad (5.21)$$

Из условия 5.2 следует формула интегрирования по частям для произвольных  $u_m \in C^\infty(\overline{Q}_{sl})$  и  $v \in C^\infty(\overline{Q}_{sl})$ :

$$\int_{Q_{sl}} \partial_j u_m v \, dx = \int_{\partial Q_{sl} \setminus \mathcal{K}} u_m v \cos(x_j, \nu_{sl}) \, dx' - \int_{Q_{sl}} u_m \partial_j v \, dx,$$

где  $\nu_{sl}$  — единичный вектор внешней нормали к  $\partial Q_{sl}$  в точке  $x' \in \partial Q_{sl} \setminus \mathcal{K}$ . Переходя к пределу при  $m \rightarrow \infty$  и суммируя по  $s$  и  $l$ , получаем (5.16). Заметим, что в данной формуле интегральные слагаемые на множестве  $\partial Q_{sl} \setminus \mathcal{K}$  равны нулю в силу равенств (5.14), если  $l = J_0 + 1, \dots, N(s)$ . С другой стороны, в силу равенств (5.15) и соотношений  $\nu_{rl} = -\nu_{\rho l}$ , имеем

$$\int_{\Gamma_{rl}} u_m v \cos(x_j, \nu_{rl}) \, dx' + \int_{\Gamma_{\rho l}} u_m v \cos(x_j, \nu_{\rho l}) \, dx' = 0,$$

где  $\nu_{rl}$  и  $\nu_{\rho l}$  — единичные вектора внешних нормалей к  $\partial Q_{rl}$  и  $\partial Q_{\rho l}$  соответственно,  $l = 1, \dots, J_0$ .

б) Теперь докажем равенства (5.14) и (5.15). Поскольку  $w \in W_p^1(Q)$ , то

$$(U_s P_s R_Q u)_l(x - h_{sl})|_{\Gamma_{rl}} = (U_\rho P_\rho R_Q u)_l(x - h_{\rho l})|_{\Gamma_{rl}},$$

т. е.

$$(R_s U_s P_s u)_l(x - h_{sl})|_{\Gamma_{rl}} = (R_\rho U_\rho P_\rho u)_l(x - h_{\rho l})|_{\Gamma_{rl}} \quad (l = 1, \dots, J_0).$$

Следовательно, функции  $\varphi_l$  и  $\psi_l$  удовлетворяют условиям:

$$\sum_{1 \leq l \leq N(s)} r_{il}^s \varphi_l = \sum_{1 \leq l \leq N(\rho)} r_{il}^\rho \psi_l \quad (i = 1, \dots, J_0). \quad (5.22)$$

Более того, (5.13) для функции  $w = R_Q u$  можно переписать в виде

$$\sum_{1 \leq i \leq N(s)} r_{li}^s \varphi_i = \sum_{1 \leq j \leq J_0} \gamma_j^r \sum_{1 \leq i \leq N(s)} r_{ji}^s \varphi_i \quad (l = J_0 + 1, \dots, N(s)). \quad (5.23)$$

Применим (5.11):

$$\sum_{1 \leq i \leq J_0} r_{li}^s \varphi_i = \sum_{1 \leq j \leq J_0} \gamma_{lj}^r \sum_{1 \leq i \leq J_0} r_{ji}^s \varphi_i \quad (l = J_0 + 1, \dots, N(s)). \quad (5.24)$$

Из соотношений (5.23) и (5.24) следует, что

$$\sum_{J_0+1 \leq i \leq N(s)} \left( r_{li}^s - \sum_{1 \leq j \leq J_0} \gamma_{lj}^r r_{ji}^s \right) \varphi_i = 0 \quad (l = J_0 + 1, \dots, N(s)). \quad (5.25)$$

В силу (5.11)  $\det R_s = \det R_{s0} \cdot \det \tilde{R}_s$ , где  $\tilde{R}_s$  — матрица порядка  $(N(s) - J_0) \times (N(s) - J_0)$  системы (5.25). Поскольку  $\det R_s \neq 0$ , то и  $\det \tilde{R}_s \neq 0$ . Следовательно,  $\varphi_l = 0$  ( $l = J_0 + 1, \dots, N(s)$ ). Аналогично получаем, что  $\psi_l = 0$  ( $l = J_0 + 1, \dots, N(s)$ ). Таким образом, система (5.21) преобразуется к виду

$$\sum_{1 \leq l \leq J_0} (r_{il}^s \varphi_l - r_{il}^\rho \psi_l) = 0 \quad (i = 1, \dots, J_0). \quad (5.26)$$

По построению,  $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl} \cap \partial Q_{\rho l}$  ( $l = 1, \dots, J_0$ ). Следовательно,  $h_{sl} = h_{\rho l}$  ( $l = 1, \dots, J_0$ ) и  $r_{il}^s = r_{il}^\rho$  ( $i, l = 1, \dots, J_0$ ), см. (5.7). В силу невырожденности матрицы  $R_{s0}$  из системы уравнений (5.26) получаем, что  $\varphi_l = \psi_l$  при  $l = 1, \dots, J_0$ .  $\square$

## 5.2. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ

Рассмотрим нелинейное уравнение

$$Aw(x) = - \sum_{1 \leq i \leq n} \partial_i A_i(x, w, \nabla w) + A_0(x, w, \nabla w) = f_0 \quad (x \in Q) \quad (5.27)$$

с нелокальными краевыми условиями (5.5).

**Определение 5.2.** Пусть  $f \in L_q(Q)$ ,  $1/p + 1/q = 1$ . Функция  $w \in W_{p,\gamma}^1(Q)$  называется *обобщенным решением задачи* (5.27), (5.5), если для любого  $\xi \in \dot{W}_p^1(Q)$  справедливо интегральное тождество

$$\langle Au, \xi \rangle = \sum_{0 \leq i \leq n} \int_Q A_i(x, w, \nabla w) \partial_i \xi \, dx = \int_Q f \xi \, dx. \quad (5.28)$$

Существование обобщенного решения нелокальной задачи связано с существованием решения эквивалентной дифференциально-разностной задачи Дирихле. Напомним, что согласно условию 5.3, граничным условиям (5.5) ставится в соответствие разностный оператор  $R_Q$ , определяемый набором матриц  $R_s$ . Поэтому, используя результаты разделов 1.2–2.3, сформулируем теоремы существования решений дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями типа Бицадзе–Самарского.

Сначала рассмотрим квазилинейные эллиптические дифференциальные уравнения с нелокальными граничными условиями.

**Теорема 5.2.** Пусть выполнены условия 5.1–5.3, где нелокальным граничным условиям соответствует разностный оператор с невырожденными матрицами  $R_s$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) и  $R_{s0}$  ( $s = s(r)$ ,  $r \in B$ ), причем  $R_s^* + R_s > 0$ . Пусть, кроме того, коэффициенты  $A_i$ ,  $i = 0, 1, \dots, n$  дифференцируемы и удовлетворяют условиям сильной эллиптичности (1.25)–(1.26). Тогда для любого  $f \in W_q^{-1}(Q)$  существует единственное обобщенное решение задачи (5.27), (5.5). Более того, если  $w_1$  и  $w_2$  — обобщенные решения задачи (5.27), (5.5) при правых частях  $f_1$  и  $f_2$  соответственно, то справедлива оценка

$$\|w_1 - w_2\|_{W_p^1(Q)} \leq k_1 \|f_1 - f_2\|_{W_q^{-1}(Q)}^{1/(p-1)}. \quad (5.29)$$

Здесь  $k_1 > 0$  не зависит от  $w_j$  и  $f_j$ .

*Доказательство.* В силу условий 5.1–5.3 существует разностный оператор  $R_Q$ , соответствующий нелокальным граничным условиям (5.5). Поскольку матрицы  $R_s$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) и  $R_{s0}$  ( $s = s(r)$ ,  $r \in B$ ) невырождены, то  $R_Q : \dot{W}_p^1(Q) \rightarrow W_{p,\gamma}^1(Q)$  является изоморфизмом, см. теорему 5.1. То есть для любого  $w \in W_{p,\gamma}^1(Q)$  существует  $u \in \dot{W}_p^1(Q)$  такое, что  $w = R_Q u$ . Подставив эту замену переменных в (5.28), мы получим интегральное тождество (1.8). Очевидно, что  $w = R_Q u$  является решением интегрального тождества (5.28) тогда и только тогда, когда  $u$  является решением интегрального тождества (1.8).

Согласно лемме 1.9 оператор  $A_R := AR_Q$  деминепрерывен и ограничен. Деминепрерывный, сильно монотонный оператор  $A_R : \dot{W}_p^1(Q) \rightarrow W_q^{-1}(Q)$  является гомеоморфизмом, см. [20, следствие 1.1.1]. Существование и единственность решения (1.8) доказана. В силу того, что  $R_Q$  — изоморфизм, это доказывает существование и единственность решения (5.28).

Докажем оценку (5.29). Пусть  $w_1, w_2 \in W_{p,\gamma}^1(Q)$  и — обобщенные решения задачи (5.27), (5.5) при правых частях  $f_1, f_2 \in W_q^{-1}(Q)$ , соответственно. Тогда существуют  $u_1, u_2 \in \dot{W}_p^1(Q)$  — решения (1.8) при правых частях  $f_1, f_2 \in W_q^{-1}(Q)$ , причем

$$\langle Aw_1 - Aw_2, u_1 - u_2 \rangle = \langle ARu_1 - ARu_2, u_1 - u_2 \rangle = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle.$$

Используем оценку сильной эллиптичности (1.29):

$$c_9 \|u_1 - u_2\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^p \leq \langle ARu_1 - ARu_2, u_1 - u_2 \rangle = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle \leq \|f_1 - f_2\|_{W_q^{-1}(Q)} \|u_1 - u_2\|_{\dot{W}_p^1(Q)},$$

т. е.

$$\|u_1 - u_2\|_{\dot{W}_p^1(Q)}^{p-1} \leq \frac{1}{c_9} \|f_1 - f_2\|_{W_q^{-1}(Q)}.$$

Вернемся к переменным  $w_j$ , используя оценку (1.22):

$$\begin{aligned} \|w_1 - w_2\|_{W_p^1(Q)} &= \|R_Q u_1 - R_Q u_2\|_{W_p^1(Q)} \leq \\ &\leq c_5 \left( \|u_1 - u_2\|_{L_p(Q)} + \|u_1 - u_2\|_{\dot{W}_p^1(Q)} \right) \leq k_1 \|f_1 - f_2\|_{W_q^{-1}(Q)}^{1/(p-1)}. \end{aligned}$$

Теорема доказана.  $\square$

**Пример 5.3.** Пусть  $p = 2$ ,  $Q = (0, 2) \times (0, 1)$ ,  $f \in L_2(Q)$ . Рассмотрим квазилинейное уравнение

$$Aw(x) = - \sum_{i,j=1,2} \partial_i (A_{ij}(x, w) \partial_j w) = f \quad (x \in Q) \quad (5.30)$$

с краевыми условиями Бицадзе—Самарского:

$$\left. \begin{aligned} w(x_1, 0) = w(x_1, 1) = 0 & \quad (0 \leq x_1 \leq 2), \\ w(0, x_2) = \gamma_1 w(1, x_2) & \quad (0 < x_2 < 1), \\ w(2, x_2) = \gamma_{-1} w(1, x_2) & \quad (0 < x_2 < 1). \end{aligned} \right\} \quad (5.31)$$

Здесь

$$|A_{ij}(x, y)| \leq g_4(x), \quad g_4 \in L_\infty(Q). \quad (5.32)$$

В работе [3] был рассмотрен оператор  $A = -\Delta$  и доказана разрешимость задачи при  $\gamma_1 = 0$  и  $\gamma_{-1} = 1$ . Существование и единственность обобщенного решения в пространстве  $W_2^1(Q)$  для произвольного линейного сильно эллиптического оператора  $A$ , заданного 1-периодическими функциями  $A_{ij}(x, w) = A_{ij}(x)$ , при  $|\gamma_1 + \gamma_{-1}| < 2$  была доказана в [106]. Там же была установлена взаимосвязь задачи (5.30), (5.31) и эллиптического функционально-дифференциального уравнения

$$ARu(x) \equiv AR_Q u(x) = f \quad (x \in Q) \quad (5.33)$$

с краевым условием

$$u = 0 \quad (x \in \partial Q), \quad (5.34)$$

где оператор  $R_Q = I_Q R P_Q$  таков, что

$$Ru(x) = u(x) + \gamma_1 u(x_1 + 1, x_2) + \gamma_{-1} u(x_1 - 1, x_2).$$

А именно, было доказано, что если  $\gamma_1\gamma_{-1} \neq 1$ , то оператор  $R_Q : \mathring{W}_2^1(Q) \rightarrow W_{2,\gamma}^1(Q)$  является изоморфизмом. Здесь

$$W_{2,\gamma}^1(Q) = \{u \in W_2^1(Q) : u \text{ удовлетворяют (5.31)}\}.$$

Таким образом, функция  $w \in W_2^1(Q)$  тогда и только тогда является обобщенным решением (5.30), (5.31), когда существует обобщенное решение  $u \in \mathring{W}_2^1(Q)$  задачи (5.33), (5.34), причем  $w = R_Q u$ .

В рассматриваемой квазилинейной задаче нельзя наложить условие 1-периодичности функций  $A_{ij}$ , поскольку имеется явная зависимость  $A_{ij}$  от  $w$ . Используем теорему 5.2 для проверки сильной монотонности оператора  $A_R$ . Заметим, что оператору  $R_Q$  соответствует матрица

$$R_1 = \begin{pmatrix} \gamma_0 & \gamma_1 \\ \gamma_{-1} & \gamma_0 \end{pmatrix},$$

где  $\gamma_0 := 1$ . Матрица  $R_1$  невырождена при  $\gamma_1\gamma_{-1} \neq 1$ . Матрица  $R_{10} = 1$  также невырождена. Согласно лемме 1.10 оператор  $A_R$  сильно монотонен, если  $\gamma_1\gamma_{-1} \neq 1$ , а непрерывные функции  $A_{ij}$  удовлетворяют неравенству

$$\sum_{l,m=1,2} \sum_{i,j=1,2} \gamma_{l-m} A_{ij}(x, \xi_m) \eta_{lj} \eta_{mi} \geq k_2 \sum_{m,i=1,2} |\eta_{mi}|^2,$$

где  $k_2 > 0$  не зависит от  $\xi \in \mathbb{R}^2$  и  $\eta \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ . В этом случае нелокальная эллиптическая задача (5.30), (5.31) имеет единственное обобщенное решение  $w \in W_{2,\gamma}^1(Q)$  для любого  $f \in W_2^{-1}(Q)$ , см. теорему 5.2.

**Теорема 5.3.** Пусть выполнены условия 5.1–5.3, где нелокальным граничным условиям соответствует разностный оператор с невырожденными матрицами  $R_s$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) и  $R_{s0}$  ( $s = s(r)$ ,  $r \in B$ ), причем  $R_s^* + R_s > 0$ . Пусть, кроме того, выполнены условия интегрируемости (1.6), дифференцируемости (1.26) для  $i, j = 1, \dots, n$ , сильной эллиптичности (1.35) и коэрцитивности (1.38)–(1.39),  $p \in [2, \infty)$ .

Тогда для любого  $f \in W_q^{-1}(Q)$  существует непустое, ограниченное, слабо замкнутое множество обобщенных решений задачи (5.27), (5.5).

*Доказательство.* В силу условий 5.1–5.3 существует разностный оператор  $R_Q$ , соответствующий нелокальным граничным условиям (5.5). Поскольку матрицы  $R_s$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) и  $R_{s0}$  ( $s = s(r)$ ,  $r \in B$ ) невырождены, то  $R_Q : \mathring{W}_p^1(Q) \rightarrow W_{p,\gamma}^1(Q)$  является изоморфизмом, см. теорему 5.1. То есть для любого  $w \in W_{p,\gamma}^1(Q)$  существует  $u \in \mathring{W}_p^1(Q)$  такое, что  $w = R_Q u$ . Подставив эту замену переменных в (5.28), мы получим интегральное тождество (1.8). Очевидно, что  $w = R_Q u$  является решением интегрального тождества (5.28) тогда и только тогда, когда  $u$  является решением интегрального тождества (1.8).

Если  $R_s^* + R_s > 0$ , а также выполнены условия интегрируемости (1.6), дифференцируемости (1.26) для  $i, j = 1, \dots, n$ , сильной эллиптичности (1.35) и коэрцитивности (1.38)–(1.39),  $p \in [2, \infty)$ , то множество решений интегрального тождества (1.8) непусто, принадлежит  $\mathring{W}_p^1(Q)$ , ограничено и слабо замкнуто, см. теорему 1.2.

В силу ограниченности и непрерывности оператора  $R_Q : \mathring{W}_p^1(Q) \rightarrow W_{p,\gamma}^1(Q)$ , а также взаимно однозначного соответствия  $w = R_Q u$  множество решений интегрального тождества (5.28) непусто, принадлежит  $W_{p,\gamma}^1(Q)$ , ограничено и слабо замкнуто.  $\square$

Перейдем к рассмотрению нелинейных дифференциальных уравнений.

**Теорема 5.4.** Пусть выполнены условия 5.1–5.3, где нелокальным граничным условиям соответствует разностный оператор с невырожденными матрицами  $R_s$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) и  $R_{s0}$  ( $s = s(r)$ ,  $r \in B$ ). Пусть также оператор  $A$ , заданный формулой (1.3), имеет измеримые по  $x \in Q$  и непрерывные по  $\xi_j \in \mathbb{R}$  ( $j = 0, 1, \dots, n$ ) коэффициенты  $A_i(x, \xi)$ ,  $\xi = (\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$ , удовлетворяющие оценке интегрируемости (1.6), условию эллиптичности (2.1) и условию коэрцитивности (2.2),  $p \in (1, \infty)$ .

Тогда для любого  $f \in W_q^{-1}(Q)$  существует непустое, ограниченное, слабо замкнутое множество обобщенных решений задачи (5.27), (5.5).

*Доказательство.* В силу условий 5.1–5.3 существует разностный оператор  $R_Q$ , соответствующий нелокальным граничным условиям (5.5). Поскольку матрицы  $R_s$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) и  $R_{s0}$  ( $s = s(r)$ ,  $r \in B$ ) невырождены, то  $R_Q : \dot{W}_p^1(Q) \rightarrow W_{p,\gamma}^1(Q)$  является изоморфизмом, см. теорему 5.1. То есть для любого  $w \in W_{p,\gamma}^1(Q)$  существует  $u \in \dot{W}_p^1(Q)$  такое, что  $w = R_Q u$ . Подставив эту замену переменных в (5.28), мы получим интегральное тождество (1.8). Очевидно, что  $w = R_Q u$  является решением интегрального тождества (5.28) тогда и только тогда, когда  $u$  является решением интегрального тождества (1.8).

В силу остальных условий теоремы 5.4 существует непустое, принадлежащее  $\dot{W}_p^1(Q)$ , ограниченное и слабо замкнутое множество решений интегрального тождества (1.8), см. теорему 2.1.

В силу ограниченности и непрерывности оператора  $R_Q : \dot{W}_p^1(Q) \rightarrow W_{p,\gamma}^1(Q)$ , а также взаимно-однозначного соответствия  $w = R_Q u$  множество решений интегрального тождества (5.28) непусто, принадлежит  $W_{p,\gamma}^1(Q)$ , ограничено и слабо замкнуто.  $\square$

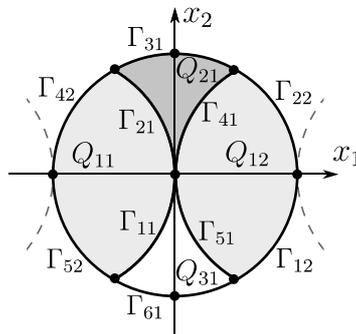


Рис. 5.3

FIG. 5.3

**Пример 5.4.** Пусть  $Q = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x_1|^2 + |x_2|^2 < 1\}$ , разбиение области и границы задано сдвигами  $\mathcal{M} = \{(0, 0); (1, 0); (-1, 0)\}$ , см. рис. 5.3.

Нелокальные краевые условия имеют следующий вид:

$$\left. \begin{aligned} w|_{\Gamma_{j2}} &= \gamma_{-1} w|_{\Gamma_{j1}}, & j &= 1, 2, \\ w|_{\Gamma_{j2}} &= \gamma_1 w|_{\Gamma_{j1}}, & j &= 4, 5, \\ w|_{\Gamma_{j1}} &= 0, & j &= 3, 6. \end{aligned} \right\} \quad (5.35)$$

Область  $Q$  разбивается на четыре подобласти, принадлежащих трем классам. Множество  $\mathcal{K}$  состоит из 7 точек (выделены на рис. 5.3). Граничным условиям соответствует разностный оператор

$$Ru(x) = u(x) + \gamma_1 u(x_1 + 1, x_2) + \gamma_{-1} u(x_1 - 1, x_2).$$

Этому оператору соответствуют матрицы

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 \\ \gamma_{-1} & 1 \end{pmatrix}, \quad R_2 = 1, \quad R_3 = 1.$$

$R_{10} = 1$ ,  $R_2$  и  $R_3$  невырождены. Задача (5.27), (5.35) будет иметь решение, если, например, выполнены следующие четыре условия:

- 1) условие невырожденности:  $\gamma_1 \gamma_{-1} \neq 1$ ;
- 2) условие интегрируемости:  $A_i$  — функции типа Каратеодори, удовлетворяющие (1.6);
- 3) условие эллиптичности:

$$\begin{aligned} \sum_{1 \leq l \leq 2} \sum_{1 \leq i \leq 2} (A_i(x + h_{sl}, \zeta_l) - A_i(x + h_{sl}, \eta_l)) (R_1^{-1}(\zeta_i - \eta_i))_l &> 0 \quad (x \in \overline{Q_{11}}), \\ \sum_{1 \leq i \leq 2} (A_i(x, \xi) - A_i(x, \mu)) (\xi_i - \mu_i) &> 0 \quad (x \in \overline{Q_{21}} \cup \overline{Q_{31}}); \end{aligned}$$

4) условие коэрцитивности:

$$\sum_{1 \leq l \leq 2} \sum_{0 \leq i \leq 2} A_i(x + h_{sl}, \zeta_l) (R_1^{-1} \zeta_i)_l \geq c_6 \sum_{1 \leq l \leq 2} \sum_{1 \leq i \leq 2} |\zeta_{li}|^p - c_7 \sum_{1 \leq l \leq 2} |\zeta_{l0}|^{p'} - c_8 \quad \text{для п.в. } x \in \overline{Q_{11}},$$

$$\sum_{0 \leq i \leq 2} A_i(x, \xi) \xi_i \geq c_6 \sum_{1 \leq i \leq 2} |\xi_i|^p - c_7 |\xi_0|^{\widehat{p}} - c_8 \quad \text{для п.в. } x \in \overline{Q_{21}} \cup \overline{Q_{31}},$$

$$\text{где } R_1^{-1} = \frac{1}{1 - \gamma_1 \gamma_{-1}} \begin{pmatrix} 1 & -\gamma_1 \\ -\gamma_{-1} & 1 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что условия в точках  $x \in Q_{21} \cup Q_{31}$  совпадают с условиями, накладываемыми на дифференциальный оператор при исследовании эллиптических нелинейных дифференциальных уравнений в частных производных.

**Теорема 5.5.** Пусть выполнены условия 5.1–5.3, где нелокальным граничным условиям соответствует разностный оператор с невырожденными матрицами  $R_s$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) и  $R_{s_0}$  ( $s = s(r)$ ,  $r \in B$ ), причем  $R_Q^{-1}$  сильно аккретивен. Тогда для любого  $f \in W_q^{-1}(Q)$  существует непустое, ограниченное, слабо замкнутое множество обобщенных решений уравнения

$$\Delta_p w(x) = - \sum_{1 \leq i \leq n} \partial_i (|\partial_i w(x)|^{p-2} \partial_i w(x)) = f(x) \quad (x \in Q) \quad (5.36)$$

с нелокальными граничными условиями (5.5), причем для всех решений справедлива оценка

$$\|w\|_{W_p^1(Q)} \leq k_2 \|f\|_{W_q^{-1}(Q)}^{1/(p-1)}, \quad (5.37)$$

где  $k_2 > 0$  не зависит от  $w$  и  $f$ .

*Доказательство.* Очевидно, обобщенное решение задачи (5.36), (5.5) должно удовлетворять для всех  $\xi \in \dot{W}_p^1(Q)$  интегральному тождеству

$$\sum_{1 \leq i \leq n} \int_Q |\partial_i u(x)|^{p-2} \partial_i u(x) \partial_i \xi(x) dx = \langle f, \xi \rangle. \quad (5.38)$$

В силу условий 5.1–5.3 существует разностный оператор  $R_Q$ , соответствующий нелокальным граничным условиям (5.5). Поскольку матрицы  $R_s$  ( $s = 1, 2, \dots$ ) и  $R_{s_0}$  ( $s = s(r)$ ,  $r \in B$ ) невырождены, то  $R_Q : \dot{W}_p^1(Q) \rightarrow W_{p,\gamma}^1(Q)$  является изоморфизмом, см. теорему 5.1. То есть для любого  $w \in W_{p,\gamma}^1(Q)$  существует  $u \in \dot{W}_p^1(Q)$  такое, что  $w = R_Q u$ . Подставив эту замену переменных в (5.38), мы получим интегральное тождество (2.43). Очевидно, что  $w = R_Q u$  является решением интегрального тождества (5.38) тогда и только тогда, когда  $u$  является решением интегрального тождества (2.43). Поскольку  $R_Q$  невырожден, а  $R_Q^{-1}$  сильно аккретивен, то тождество (2.43) имеет непустое, ограниченное, слабо замкнутое множество обобщенных решений, удовлетворяющих оценке

$$\|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)} \leq k_3 \|f\|_{W_q^{-1}(Q)}^{1/(p-1)}, \quad (5.39)$$

см. теорему 2.3. В силу ограниченности и непрерывности оператора  $R_Q : \dot{W}_p^1(Q) \rightarrow W_{p,\gamma}^1(Q)$ , а также взаимно-однозначного соответствия  $w = R_Q u$  множество решений интегрального тождества (5.28) непусто, принадлежит  $W_{p,\gamma}^1(Q)$ , ограничено и слабо замкнуто. И поскольку

$$\|w\|_{W_{p,\gamma}^1(Q)} = \|R_Q u\|_{W_{p,\gamma}^1(Q)} = \|R_Q u\|_{L_p(Q)} + \|R_Q u\|_{\dot{W}_p^1(Q)} \leq c_5 \left( \|u\|_{L_p(Q)} + \|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)} \right) \leq c_5 (c_{18} + 1) \|u\|_{\dot{W}_p^1(Q)}$$

(см. (1.22) и неравенство Фридрихса (1.43)), то из (5.39) следует оценка (5.37).  $\square$

**Пример 5.5.** Рассмотрим уравнение

$$\Delta_p w(x) = f \quad (x \in Q = (0, 2) \times (0, 1)), \quad (5.40)$$

с краевыми условиями

$$\left. \begin{aligned} w(x_1, 0) = w(x_1, 1) = 0 & \quad (0 \leq x_1 \leq 2), \\ w(0, x_2) = \gamma w(1, x_2), \quad w(2, x_2) = \gamma w(1, x_2) & \quad (0 < x_2 < 1). \end{aligned} \right\} \quad (5.41)$$

Как показано в примере 5.1, краевым условиям данной задачи соответствует матрица

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & \gamma \\ \gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Обратной к этой матрице будет матрица

$$R_1^{-1} = \frac{1}{1-\gamma^2} \begin{pmatrix} 1 & -\gamma \\ -\gamma & 1 \end{pmatrix}.$$

Матрицы  $R_1$  и  $R_{10} = 1$  невырождены если  $|\gamma| < 1$ . Матрица  $R_1^{-1}$  соответствует сильно аккретивному оператору также если  $|\gamma| < 1$ , см. условие (2.69) в лемме 2.8. То есть, при  $|\gamma| < 1$  задача (5.40)-(5.41) имеет решение для любого  $f \in W_q^{-1}(Q)$ , см. теорему 5.5.

**Пример 5.6.** Рассмотрим задачу

$$\Delta_p w(x) = f \quad (x \in Q = (0, 3) \times (0, 1)) \quad (5.42)$$

с нелокальными краевыми условиями

$$\left. \begin{aligned} w(x_1, 0) = w(x_1, 1) = 0 & \quad (0 \leq x_1 \leq 3), \\ w(0, x_2) = \gamma_1 w(1, x_2) + \gamma_2 w(2, x_2) & \quad (0 < x_2 < 1), \\ w(3, x_2) = \gamma_2 w(1, x_2) + \gamma_1 w(2, x_2) & \quad (0 < x_2 < 1), \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

где  $\gamma_1 = \frac{39}{28}$ ,  $\gamma_2 = -\frac{6}{7}$ .

Как показано в примере 5.2, граничным условиям данной задачи соответствует матрица

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 3/4 & 3/16 \\ 3/4 & 1 & 3/4 \\ 3/16 & 3/4 & 1 \end{pmatrix}.$$

Данная матрица симметрична и положительно определена, т. е. невырождена.  $R_{10}$  также невырождена как главный минор положительно определенной матрицы. С точностью до 3-го знака после запятой выпишем обратную матрицу:

$$R_1^{-1} = \begin{pmatrix} 8,615 & -12 & 7,385 \\ -12 & 19 & -12 \\ 7,385 & -12 & 8,615 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, что условие (2.69) в лемме 2.8 не выполнено:

$$8,615 < |-12| + 7,385 \quad \text{и} \quad 19 < |-12| + |-12|,$$

оператор  $R_Q^{-1}$  может не быть сильно аккретивным. Мы не можем гарантировать существование решения задачи (5.42)-(5.43).

При  $p = 2$  линейная задача (5.42)-(5.43) рассматривалась в [106, пример 13.5, гл. 2], было доказано существование единственного решения для любого  $f \in L_2(Q)$ .

**Пример 5.7.** Рассмотрим уравнение (5.42) с нелокальными краевыми условиями

$$\left. \begin{aligned} w(x_1, 0) = w(x_1, 1) = 0 & \quad (0 \leq x_1 \leq 2), \\ w(0, x_2) = -w(1, x_2) & \quad (0 < x_2 < 1), \\ w(3, x_2) = 0 & \quad (0 < x_2 < 1). \end{aligned} \right\} \quad (5.44)$$

Подставив параметры нелокальных краевых условий (5.44) в уравнение (5.8) (условие 5.3), получим, что этим условиям соответствует оператор  $R_Q$  с матрицей

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

т. е.  $Ru(x) = u(x) - u(x_1 + 1, x_2) + u(x_1 + 2, x_2)$ . Матрицы  $R_1$  и  $R_{10} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$  невырождены,  $R_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$  соответствует сильно аккретивному оператору (см. доказательство в примере 2.8). Задача (5.42), (5.44) имеет решение для любого  $f \in L_q(Q)$  и  $p \in (2, \infty)$ , см. теорему 5.5.

Проиллюстрируем возможность однозначной и неоднозначной разрешимости уравнения с  $p$ -лапласианом и нелокальными граничными условиями на простых примерах. Для этого рассмотрим задачу (5.42)-(5.43) в одномерном случае с различными правыми частями. Напомним, что при  $p = 2$  задача (5.42)-(5.43) имеет единственное решение для любого  $f \in L_2(Q)$ .

**Пример 5.8.** Пусть  $p \in (2, \infty)$ . Рассмотрим уравнение

$$-(|w'|^{p-2}w')' = 0 \quad (x \in Q = (0, 3)) \tag{5.45}$$

с нелокальными краевыми условиями

$$\left. \begin{aligned} w(0) &= \frac{39}{28}w(1) - \frac{6}{7}w(2), \\ w(3) &= -\frac{6}{7}w(1) + \frac{39}{28}w(2). \end{aligned} \right\} \tag{5.46}$$

Общее решение уравнения (5.44) имеет вид

$$w(x) = \tilde{c}_1x + \tilde{c}_2.$$

Подставим общее решение в нелокальные краевые условия (5.46):

$$\left. \begin{aligned} \tilde{c}_2 &= \gamma_1(\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2) + \gamma_2(2\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2), \\ 3\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2 &= \gamma_2(\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2) + \gamma_1(2\tilde{c}_1 + \tilde{c}_2). \end{aligned} \right\}$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} (\gamma_1 + 2\gamma_2)\tilde{c}_1 + (\gamma_1 + \gamma_2 - 1)\tilde{c}_2 &= 0, \\ (2\gamma_1 + \gamma_2 - 3)\tilde{c}_1 + (\gamma_1 + \gamma_2 - 1)\tilde{c}_2 &= 0. \end{aligned} \right\} \tag{5.47}$$

Вычитая из второго уравнения системы (5.47) первое, получим, что  $(\gamma_1 - \gamma_2 - 3)\tilde{c}_1 = 0$ . Поскольку  $\gamma_1 - \gamma_2 - 3 = \frac{9}{4} - 3 \neq 0$ , то  $\tilde{c}_1 = 0$ . Подставив это значение в одно из равенств системы (5.47), получим, что  $(\gamma_1 + \gamma_2 - 1)\tilde{c}_2 = 0$ . То есть  $\tilde{c}_2 = 0$ . Система (5.47) имеет единственное решение  $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = 0$ . Следовательно, задача (5.45), (5.43) имеет единственное решение  $w = 0$  при любом  $p > 2$ .

**Пример 5.9.** Рассмотрим уравнение

$$-(|w'|^{p-2}w')' = \frac{64}{27} \quad (x \in Q = (0, 3)) \tag{5.48}$$

с нелокальными краевыми условиями (5.46),  $p = 4$ .

Общее решение уравнения (5.48) имеет вид

$$w(x) = \tilde{c}_1 - |x - \tilde{c}_2|^{4/3}. \tag{5.49}$$

Подставим (5.49) в нелокальные краевые условия:

$$\left. \begin{aligned} \tilde{c}_1 - |\tilde{c}_2|^{4/3} &= \gamma_1(\tilde{c}_1 - |1 - \tilde{c}_2|^{4/3}) + \gamma_2(\tilde{c}_1 - |2 - \tilde{c}_2|^{4/3}), \\ \tilde{c}_1 - |3 - \tilde{c}_2|^{4/3} &= \gamma_2(\tilde{c}_1 - |1 - \tilde{c}_2|^{4/3}) + \gamma_1(\tilde{c}_1 - |2 - \tilde{c}_2|^{4/3}). \end{aligned} \right\} \tag{5.50}$$

Из системы (5.50) легко выписать уравнение для  $\tilde{c}_2$ :

$$|\tilde{c}_2|^{4/3} - |3 - \tilde{c}_2|^{4/3} - (\gamma_1 - \gamma_2) \left( |1 - \tilde{c}_2|^{4/3} - |2 - \tilde{c}_2|^{4/3} \right) = 0. \tag{5.51}$$

Очевидно, что  $\tilde{c}_2 = 1.5$  является решением (5.51). Численные методы дают дополнительные решения:  $\tilde{c}_2 \approx 0,514$  и  $\tilde{c}_2 \approx 2,486$  (приведены с точностью до 3-го знака после запятой). Докажем,

что на интервалах  $(0, 1)$  и  $(2, 3)$  действительно существуют решения уравнения (5.51). Подставим значения:  $\gamma_1 - \gamma_2 = \frac{9}{4}$ . Введем функцию

$$\tilde{g}(\tilde{c}_2) = |\tilde{c}_2|^{4/3} - |3 - \tilde{c}_2|^{4/3} - \frac{9}{4} \left( |1 - \tilde{c}_2|^{4/3} - |2 - \tilde{c}_2|^{4/3} \right).$$

Функция  $\tilde{g}$  непрерывна. Поскольку

$$\tilde{g}(0) = -3^{4/3} - \frac{9}{4} \left( 1 - 2^{4/3} \right) < 0 \quad \text{и} \quad \tilde{g}(1) = 1 - 2^{4/3} + \frac{9}{4} > 0,$$

то  $\tilde{g}$  имеет нуль на интервале  $(0, 1)$ . То есть уравнение (5.51) имеет решение на этом интервале. Аналогично, поскольку

$$\tilde{g}(2) = 2^{4/3} - 1 - \frac{9}{4} < 0 \quad \text{и} \quad \tilde{g}(3) = 3^{4/3} - \frac{9}{4} \left( 2^{4/3} - 1 \right) > 0,$$

то на интервале  $(2, 3)$  функция  $\tilde{g}$  также имеет нуль. То есть уравнение (5.51) имеет решение на этом интервале. Так как уравнение (5.51) имеет не менее трех решений, то задача (5.48), (5.47) также имеет не менее трех решений.

### 5.3. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ НАЧАЛЬНО-КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА БИЦАДЗЕ—САМАРСКОГО

Исследование линейных эллиптических дифференциальных уравнений с нелокальными краевыми условиями широко проводилось ранее, см. [59, 67, 67, 106] и библиографию. Эволюционные дифференциальные уравнения с нелокальными краевыми условиями ранее не исследовались. В этом разделе будут рассмотрены параболические дифференциальные уравнения с нелокальными краевыми условиями, причем для рассмотрения как линейных, так и нелинейных задач будут использованы свойства максимально монотонных операторов, а не теория полугрупп.

**Определение 5.3.** Оператор  $\Lambda : \mathcal{D}(\Lambda) \subset X \rightarrow X^*$  называется *монотонным*, если

$$\langle \Lambda(u) - \Lambda(y), u - y \rangle \geq 0 \quad \forall u, y \in \mathcal{D}(\Lambda).$$

Монотонный оператор называется *максимально монотонным*, если не существует нетривиального расширения оператора, сохраняющего свойство монотонности.

**5.3.1. Постановка задачи.** Будем использовать разбиение области  $Q$  и построение множества  $\{\Gamma_{rj}\}$ , подробно изложенное в разделе 5.1. Обозначим теперь  $\Gamma_{rl}^T := \Gamma_{rl} \times (0, T)$ . Также будут использованы условия 5.1, 5.2 и 5.3.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\partial_t u(x, t) + Au(x, t) = f(x, t) \quad (x, t) \in \Omega_T, \quad (5.52)$$

где дифференциальный оператор  $A$  задан формулой (3.4):

$$Au(x, t) = - \sum_{1 \leq i \leq n} \partial_i A_i(x, t, u, \nabla u) + A_0(x, t, u, \nabla u),$$

с начальным условием

$$u|_{t=0} = \psi \quad x \in Q \quad (5.53)$$

и нелокальными краевыми условиями

$$\left. \begin{aligned} w|_{\Gamma_{rl}^T} &= \sum_{1 \leq j \leq J_0} \gamma_{lj}^r w|_{\Gamma_{rj}^T} & (r \in B, l = J_0 + 1, \dots, J), \\ w|_{\Gamma_{rl}^T} &= 0 & (r \notin B, l = 1, \dots, J), \end{aligned} \right\} \quad (5.54)$$

где  $J_0 = J_0(r)$ ,  $J = J(r)$ ,  $\gamma_{lj}^r$  — вещественные числа,  $B = \{r : J_0 > 0\}$ . Через  $L_p(0, T; W_{p,\gamma}^1(Q))$  ( $\gamma = \{\gamma_{ij}^r\}$ ) обозначим подпространство функций из  $L_p(0, T; W_p^1(Q))$ , удовлетворяющих *нелокальным краевым условиям* (5.54).

Рассмотрим набор вещественных постоянных коэффициентов  $\widehat{\Lambda} = \{a_h : h \in \mathcal{M}\}$ . Определим разностный оператор  $R : L_p(0, T; \mathbb{R}^n) \rightarrow L_p(0, T; \mathbb{R}^n)$ :

$$Ru(x, t) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_h u(x + h, t), \tag{5.55}$$

а также оператор  $R_Q = P_Q R I_Q : L_p(\Omega_T) \rightarrow L_p(\Omega_T)$ . Напомним, что свойства оператора  $R_Q$  исследуются с помощью матриц  $R_s = \{r_{ij}^s\}_{1 \leq i, j \leq N(s)}$  таких, что

$$r_{ij}^s = \begin{cases} a_h & (h = h_{sj} - h_{si} \in \mathcal{M}), \\ 0 & (h_{sj} - h_{si} \notin \mathcal{M}), \end{cases}$$

где  $h_{si}$  определяется условием  $Q_{si} = Q_{s1} + h_{si}$ . Если выполнены условия 5.1–5.3, то нашему набору  $\{\gamma_{lj}\}$  соответствует набор  $\widehat{\Lambda} = \{a_h : h \in \mathcal{M}\}$  и разностный оператор  $R$ .

Согласно лемме 5.3, для каждого  $r = 1, 2, \dots$  найдется единственный номер  $s = s(r)$  такой, что  $N(s) = J(r)$  и  $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl} \times (0, T)$  ( $l = 1, \dots, N$ ) после перенумерации подобластей  $s$ -го класса (как и в эллиптическом случае). Обозначим через  $R_{s(r)}$  матрицы, полученные из  $R_s$  ( $s = s(r)$ ) путем перенумерования соответствующих столбцов и строк. Кроме того, обозначим через  $R_{s0}$  матрицу порядка  $J_0 \times J_0$ , полученную из матрицы  $R_s$  вычеркиванием последних  $N(s) - J_0$  строк и столбцов.

Проиллюстрируем разбиение области и построение разностного оператора, соответствующего краевым условиям, на простом примере.

**Пример 5.10.** В качестве модельного примера рассмотрим параболическую задачу с лапласианом в прямоугольном параллелепипеде  $\Omega_T = (0, 2) \times (0, 1) \times (0, T)$ :

$$\partial_t w(x, t) - \Delta w(x, t) = f(t, x) \quad ((x, t) \in \Omega_T), \tag{5.56}$$

$$u(x, 0) = \psi(x) \quad (x = (x_1, x_2) \in Q = (0, 2) \times (0, 1)), \tag{5.57}$$

где  $f \in L_2(\Omega_T)$ ,  $\psi \in L_2(Q)$ , с нелокальными краевыми условиями

$$\left. \begin{aligned} w(x_1, 0, t) = w(x_1, 1, t) = 0 & \quad (0 \leq x_1 \leq 2, t \in (0, T)), \\ w(0, x_2, t) = \gamma_1 w(1, x_2, t) & \quad (0 < x_2 < 1, t \in (0, T)), \\ w(2, x_2, t) = \gamma_2 w(1, x_2, t) & \quad (0 < x_2 < 1, t \in (0, T)). \end{aligned} \right\} \tag{5.58}$$

Согласно этим краевым условиям мы имеем множество сдвигов  $\mathcal{M} = \{(0, 0); (1, 0); (-1, 0)\}$ , порожденная этими сдвигами группа разбивает область  $Q = (0, 2) \times (0, 1)$  на две подобласти  $Q_{11} = (0, 1) \times (0, 1)$  и  $Q_{12} = (1, 2) \times (0, 1)$  из одного класса. Множество  $\mathcal{K}$  состоит из 6 точек:  $\mathcal{K} = \{(i, j) : i = 0, 1, 2; j = 0, 1\}$ . Множество  $\{\Gamma_{rj}^T\}$  состоит из 8 элементов, которые принадлежат 4-м классам, см. рис. 5.4:

- 1)  $\Gamma_{11}^T = \{1\} \times (0, 1) \times (0, T) \times (0, T)$ ,  $\Gamma_{12}^T = \{0\} \times (0, 1) \times (0, T)$ ;
- 2)  $\Gamma_{21}^T = \{1\} \times (0, 1) \times (0, T)$ ,  $\Gamma_{22}^T = \{2\} \times (0, 1) \times (0, T)$ ;
- 3)  $\Gamma_{31}^T = (0, 1) \times \{0\} \times (0, T)$ ,  $\Gamma_{32}^T = (1, 2) \times \{0\} \times (0, T)$ ;
- 4)  $\Gamma_{41}^T = (0, 1) \times \{1\} \times (0, T)$ ,  $\Gamma_{42}^T = (1, 2) \times \{1\} \times (0, T)$ .

Заметим, что в полученном параллелепипеде есть еще 4 части граней, не входящих в множество  $\{\Gamma_{ij}^T\}$  ( $i = 1, \dots, 4; j = 1, 2$ ). В частности, на гранях  $\{0\} \times Q_{11}$  и  $\{0\} \times Q_{12}$  заданы начальные условия, на гранях  $\{T\} \times Q_{11}$  и  $\{T\} \times Q_{12}$  мы получим терминальные значения искомой функции.

**Теорема 5.6.** *Предположим, что выполнены условия 5.1–5.3, а соответствующие матрицы  $R_s$  и  $R_{s0}$  ( $s = s(r)$ ,  $r \in B$ ) невырождены. Тогда существует множество  $\gamma = \{\gamma_{lj}^r\}$  такое, что оператор  $R_Q : L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q)) \rightarrow L_p(0, T; W_{p,\gamma}^1(Q))$  — изоморфизм.*

*Доказательство.* Заметим, что оператор  $R_Q$  не зависит от  $t$ . В силу невырожденности матриц  $R_s$  и  $R_{s0}$  оператор  $R_Q(\cdot, t) : \dot{W}_p^1(Q) \rightarrow W_{p,\gamma}^1(Q)$  отображает  $\dot{W}_p^1(Q)$  на  $W_{p,\gamma}^1(Q)$  непрерывно и взаимно однозначно, см. теорему 5.1 для  $p \in (1, \infty)$ , для  $p = 2$  см. [106, теорема 8.1] или [69, теорема 2.1]. Следовательно,  $R_Q$  отображает  $L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))$  на  $L_p(0, T; W_{p,\gamma}^1(Q))$  непрерывно и взаимно однозначно.  $\square$

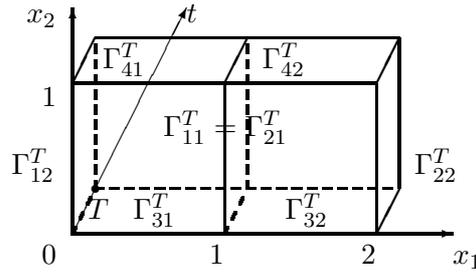


Рис. 5.4

FIG. 5.4

Обозначим  $\mathcal{V}_\gamma = L_p(0, T; W_{p,\gamma}^1(Q)) \cap L_2(\Omega_T)$ . Мы рассматриваем оператор  $\partial_t$  как неограниченный оператор  $\partial_t : \mathcal{D}(\partial_t) \subset \mathcal{V}_\gamma \rightarrow \mathcal{V}^*$ . Поскольку  $\mathcal{D}(\partial_t) \subset C(0, T; L_2(Q))$ , то начальные условия определены корректно. Введем пространство

$$W_\gamma := \{w \in \mathcal{V}_\gamma : \partial_t w \in \mathcal{V}^*\}.$$

Тогда задача (5.52)–(5.54) может быть рассмотрена как операторное уравнение

$$\partial_t w + Aw = f, \quad w \in W_\gamma \tag{5.59}$$

с начальными условиями (5.53).

**Определение 5.4.** Будем называть функцию  $w \in W_\gamma$  *обобщенным решением задачи* (5.52)–(5.54), если она удовлетворяет операторному уравнению (5.59) и начальным условием (5.53).

**Теорема 5.7.** Пусть выполнены условия 5.1–5.3, причем матрицы  $R_s$  и  $R_{s0}$  невырождены. Элемент  $u \in W$  является решением операторного уравнения

$$\partial_t R_Q u + AR_Q u = f, \quad u \in W \tag{5.60}$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = \varphi(x) = R_Q^{-1} \psi \tag{5.61}$$

тогда и только тогда, когда  $R_Q u = w \in W_\gamma$  является решением операторного уравнения (5.59), (5.53).

*Доказательство.* Так как выполнены условия 5.1–5.3, то существует разностный оператор  $R_Q : L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q)) \rightarrow L_p(0, T; W_{p,\gamma}^1(Q))$ , являющийся изоморфизмом, см. теорему 5.6. Кроме того,  $R_Q : L_2(\Omega_T) \rightarrow L_2(\Omega_T)$  невырожденный, т. е.  $R_Q : \mathcal{V} \rightarrow \mathcal{V}_\gamma$  также изоморфизм. Таким образом, для каждого  $w \in W_\gamma$  существует единственный элемент  $u \in \mathcal{V}$  такой, что  $w = R_Q u$ ,  $u = R_Q^{-1} w$ . Кроме того,  $\partial_t R_Q u = R_Q \partial_t u$ .

Покажем сначала, что если  $u \in L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))$ ,  $\partial_t u \in L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$ , то  $\partial_t R_Q u = R_Q \partial_t u \in L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$ . Линейный оператор  $R_Q : L_q(\Omega_T) \rightarrow L_q(\Omega_T)$  ограничен, см. лемму 3.1. Для любого  $u \in L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))$  такого, что  $\partial_t u \in L_q(\Omega_T)$ , имеем, что  $R_Q \partial_t u \in L_q(\Omega_T)$ . Очевидно, что  $\partial_t R_Q u = R_Q \partial_t u \in L_q(\Omega_T)$ . В силу непрерывности вложения пространств  $L_q(\Omega_T) \subset L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$  для любого  $u \in W$ , существует последовательность  $\{u_n\} \subset W$  такая, что  $L_q(\Omega_T) \ni \partial_t u_n \rightarrow \partial_t u$  в  $L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$ . Кроме того,  $R_Q \partial_t u = \lim_{n \rightarrow \infty} R_Q \partial_t u_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \partial_t R_Q u_n = \partial_t R_Q u$  в силу замкнутости графика линейного ограниченного оператора  $R_Q$ . Поскольку  $R_Q : L_2(\Omega_T) \rightarrow L_2(\Omega_T)$  невырожденный, то это доказывает, что

$$R_Q \partial_t u = \partial_t w \in \mathcal{V}^* = L_q(0, T; W_q^{-1}(Q)) + L_2(\Omega_T).$$

Поскольку  $R_Q : C(0, T; L_2(Q)) \rightarrow C(0, T; L_2(Q))$  также невырожден, то значение функции  $\varphi(x) := u(x, 0) = R_Q^{-1} w(x, 0) = R_Q^{-1} \psi(x)$  определено взаимно однозначно.  $\square$

**Пример 5.11.** Продолжим рассмотрение примера 5.10. Согласно краевым условиям (5.58), мы имеем множество сдвигов  $\mathcal{M} = \{(0, 0); (1, 0); (-1, 0)\}$ . В соответствии с  $\mathcal{M}$  разностный оператор должен иметь вид  $Ru(x, t) = u(x, t) + a_1 u(x_1 + 1, x_2, t) + a_{-1} u(x_1 - 1, x_2, t)$ . Данному оператору

соответствует матрица  $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & a_1 \\ a_{-1} & 1 \end{pmatrix}$ , невырожденная при  $a_1 a_{-1} \neq 1$ . В то же время, для любого  $u \in L_2(0, T; \mathring{W}_2^1(Q))$  и  $w = R_Q u$  получаем:

$$\begin{aligned} w(x_1, 0, t) &= w(x_1, 1, t) = 0, \\ a_1 u(1, x_2, t) &= w(0, x_2, t) = \gamma_1 w(1, x_2, t) = \gamma_1 u(1, x_2, t), \\ a_{-1} u(1, x_2, t) &= w(2, x_2, t) = \gamma_2 w(1, x_2, t) = \gamma_2 u(1, x_2, t). \end{aligned}$$

В последних двух формулах первое и третье равенства получены из определения разностного оператора, а второе — из краевых условий (5.58). Таким образом, если  $a_1 = \gamma_1$ ,  $a_{-1} = \gamma_2$  и  $u \in L_2(0, T; \mathring{W}_2^1(Q))$ , то функция  $w = R_Q u$  принадлежит  $L_2(0, T; W_2^1(Q))$  и удовлетворяет нелокальным краевым условиям (5.58), т. е.  $R_Q(L_2(0, T; \mathring{W}_2^1(Q))) \subset L_2(0, T; W_{2,\gamma}^1(Q))$ , где  $\gamma = \{\gamma_1, \gamma_2\}$ . При этом  $R_{10} = 1$ .

Поскольку условия 5.1–5.3 выполнены, то задаче (5.56)–(5.58) соответствует задача

$$\begin{aligned} \partial_t R_Q u(x, t) + \Delta R_Q u(x, t) &= f(x, t) \quad ((x, t) \in \Omega_T), \\ u(x, 0) = \varphi(x) &= R_Q^{-1} \psi(x) \quad (x \in Q), \\ u(x, t) &= 0 \quad ((x, t) \in \partial Q \times (0, T)). \end{aligned}$$

**5.3.2. Максимальная монотонность оператора  $\partial_t R_Q$ .** Пусть  $R_Q^*$  — сопряженный к  $R_Q$  оператор. Обозначим симметрическую и кососимметрическую части оператора  $R_Q$  через

$$R_Q^{sym} := \frac{1}{2} (R_Q + R_Q^*), \quad R_Q^{sk} := \frac{1}{2} (R_Q - R_Q^*). \quad (5.62)$$

Очевидно, что

$$\partial_i (R_Q^* u) = R_Q^* (\partial_i u), \quad \partial_i (R_Q^{sym} u) = R_Q^{sym} (\partial_i u), \quad \partial_i (R_Q^{sk} u) = R_Q^{sk} (\partial_i u), \quad (5.63)$$

а операторы  $R_{Q_s}^* : L_p^{N(s)}(\Omega_T) \rightarrow L_p^{N(s)}(\Omega_T)$ ,  $R_{Q_s}^{sym} : L_p^{N(s)}(\Omega_T) \rightarrow L_p^{N(s)}(\Omega_T)$  и  $R_{Q_s}^{sk} : L_p^{N(s)}(\Omega_T) \rightarrow L_p^{N(s)}(\Omega_T)$ , определенные соотношениями

$$R_{Q_s}^* = U_s R_Q^* U_s^{-1}, \quad R_{Q_s}^{sym} = U_s R_Q^{sym} U_s^{-1}, \quad R_{Q_s}^{sk} = U_s R_Q^{sk} U_s^{-1}, \quad (5.64)$$

являются операторами умножения на матрицы  $R_s^*$ ,  $R_s^{sym} = \frac{1}{2} (R_s + R_s^*)$  и  $R_s^{sk} = \frac{1}{2} (R_s - R_s^*)$ , соответственно.

**Определение 5.5.** Оператор  $R_Q + R_Q^*$  положительно определен, если

$$((R_Q + R_Q^*)u, u)_{L_2(\Omega_T)} \geq k_4 \|u\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \quad \forall u \in L_2(\Omega_T).$$

**Замечание 5.1.**  $R_Q$  и  $R_Q^{sym}$  положительно определены тогда и только тогда, когда  $R_s^{sym} > 0$  для всех  $s$ , см. [106, лемма 8.8] или [69, лемма 2.8]. Более того, если  $R_s^{sym} > 0$ , то  $R_s$  и  $R_{s0}$  невырождены.

Как известно, оператор  $\partial_t : W \rightarrow \mathcal{V}^*$  при фиксированных начальных условиях является максимально монотонным. Для  $\varphi = 0$  этот факт подробно рассмотрен в [33, гл. 3, §2]. Переход к произвольным начальным данным из  $L_2(Q)$  подробно описан в [34]. Докажем условия, при которых оператор  $\partial_t R_Q : W \rightarrow \mathcal{V}^*$  является максимально монотонным.

Сначала докажем вспомогательную оценку.

**Лемма 5.4.** Если  $R_s^{sym} > 0$  для всех  $s$ , то

$$\begin{aligned} (R_Q u(t), u(t))_{L_2(Q)} &= (R_Q^{sym} u(t), u(t))_{L_2(Q)} = \sum_s \left\| \sqrt{R_{Q_s}^{sym}} U_s P_s u(t) \right\|_{L_2^{N(Q_{s1})}}^2 = \\ &= \left\| \sqrt{R_Q^{sym}} u(t) \right\|_{L_2(Q)}^2 \geq k_5 \|u(t)\|_{L_2(Q)}^2 \quad \forall u(t) \in L_2(Q), \quad (5.65) \end{aligned}$$

где  $k_5 > 0$  не зависит от  $u$ .

*Доказательство.* Вычислим первое равенство в (5.65):

$$(R_Q u(t), u(t))_{L_2(Q)} = (u(t), R_Q^* u(t))_{L_2(Q)} = \frac{1}{2} ((R_Q + R_Q^*)u(t), u(t))_{L_2(Q)} = (R_Q^{sym} u(t), u(t))_{L_2(Q)}.$$

Поскольку  $R_s^{sym} > 0$ , то существует квадратный корень  $\sqrt{R_s^{sym}} > 0$ . Из формул (3.13) и (5.64) получаем

$$\begin{aligned} (R_Q^{sym} u(t), u(t))_{L_2(Q)} &= \sum_s (R_s^{sym} U_s P_s u(t), U_s P_s u(t))_{L_2^N(Q_{s1})} = \\ &= \sum_s \left( \sqrt{R_s^{sym}} U_s P_s u(t), \sqrt{R_s^{sym}} U_s P_s u(t) \right)_{L_2^N(Q_{s1})} = \sum_s \left\| \sqrt{R_{Q_s}^{sym}} U_s P_s u(t) \right\|_{L_2^N(Q_{s1})}^2. \end{aligned}$$

Из положительной определенности матриц  $R_s^{sym}$  следует положительная определенность оператора  $R_Q^{sym}$  и оценка (5.65).  $\square$

**Следствие 5.1.** Если  $R_s^{sym} > 0$  для всех  $s$ , то

$$\begin{aligned} (R_Q u, u)_{L_2(\Omega_T)} &= (R_Q^{sym} u, u)_{L_2(\Omega_T)} = \sum_s \left\| \sqrt{R_{Q_s}^{sym}} U_s P_s u \right\|_{L_2^N(Q_{s1} \times (0, T))}^2 = \\ &= \left\| \sqrt{R_Q^{sym}} u \right\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \geq k_5 \|u\|_{L_2(\Omega_T)}^2 \quad \forall u \in L_2(\Omega_T), \end{aligned} \quad (5.66)$$

где  $k_5 > 0$  не зависит от  $u$ .

**Следствие 5.2.**  $(R_Q^{sk} u(t), u(t))_{L_2(Q)} = 0$  для любого  $t$ ,

$$\langle \partial_t R_Q^{sk} u, u \rangle = \frac{1}{2} (R_Q^{sk} u(T), u(T))_{L_2(Q)} - \frac{1}{2} (R_Q^{sk} u(0), u(0))_{L_2(Q)} = 0.$$

Как известно, в рефлексивных строго выпуклых со своим сопряженным пространствах максимальная монотонность оператора  $\Lambda$  эквивалентна следующему свойству:

$$\langle \Lambda u, u \rangle \geq 0 \quad \forall u \in \mathcal{D}(\Lambda), \quad \langle \Lambda^* v, v \rangle \geq 0 \quad \forall v \in \mathcal{D}(\Lambda^*), \quad (5.67)$$

см. [33, лемма 1.1, гл. 3]. В частности, см. [33, гл. 3], этим свойством обладает оператор  $\Lambda = \partial_t$  с областью определения

$$\mathcal{D}(\Lambda) = \{u \in \mathcal{V} : \Lambda u \in \mathcal{V}^*, u|_{t=0} = 0\}, \quad (5.68)$$

причем  $\partial_t^* = -\partial_t$  и  $\mathcal{D}(\partial_t^*) = \{v \in \mathcal{V} : \partial_t v \in \mathcal{V}^*, v|_{t=T} = 0\}$ .

**Лемма 5.5.** Пусть  $R_s^{sym} > 0$  для всех  $s$ . Тогда оператор  $\Lambda = \partial_t R_Q$  с областью определения, заданной в (5.68), максимально монотонен.

*Доказательство.* Согласно правилам дифференцирования и в силу коммутативности  $\partial_t R_Q = R_Q \partial_t$  и  $\partial_t R_Q^* = R_Q^* \partial_t$

$$\begin{aligned} \partial_t (R_Q u(t), u(t))_{L_2(Q)} &= (\partial_t R_Q u(t), u(t))_{L_2(Q)} + (R_Q u(t), \partial_t u(t))_{L_2(Q)} = \\ &= (R_Q \partial_t u(t), u(t))_{L_2(Q)} + (u(t), R_Q^* \partial_t u(t))_{L_2(Q)} = 2 \left( \partial_t R_Q^{sym} u(t), u(t) \right)_{L_2(Q)} \end{aligned}$$

для всех  $u \in W$ . Поскольку  $\langle \partial_t R_Q^{sk} u, u \rangle = 0$ , см. следствие 5.2, то

$$\begin{aligned} \langle \partial_t R_Q u, u \rangle &= \langle \partial_t R_Q^{sym} u, u \rangle = \int_0^T \left( \partial_t R_Q^{sym} u(\tau), u(\tau) \right)_{L_2(Q)} d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \left( R_Q^{sym} u(T), u(T) \right)_{L_2(Q)} - \frac{1}{2} \left( R_Q^{sym} u(0), u(0) \right)_{L_2(Q)} \quad \forall u \in W. \end{aligned} \quad (5.69)$$

Так как  $u \in \mathcal{D}(\Lambda)$ , используем оценку (5.65):

$$\langle \partial_t R_Q u, u \rangle = \frac{1}{2} \left( R_Q^{sym} u(T), u(T) \right)_{L_2(Q)} \geq \frac{k_5}{2} \|u(T)\|_{L_2(Q)}^2.$$

С другой стороны,  $\Lambda^* = -\partial_t R_Q^*$  имеет область определения

$$\mathcal{D}(\Lambda^*) = \{v \in \mathcal{V} : \partial_t R_Q^* v \in \mathcal{V}^*, v|_{t=T} = 0\},$$

т. е. используя оценку (5.65) и равенство (5.69), мы получим, что

$$\langle (\partial_t R_Q)^* v, v \rangle = -\langle \partial_t R_Q^* v, v \rangle = -\langle \partial_t R_Q^{sym} v, v \rangle \geq \frac{k_5}{2} \|v(0)\|_{L_2(Q)}^2 \geq 0$$

для всех  $v \in \mathcal{D}(\Lambda^*)$ . Свойство (5.67) доказано, оператор  $\partial_t R_Q$  максимально монотонен, см. [33, лемма 1.1, гл.3].  $\square$

**5.3.3. Линейная параболическая задача.** Рассмотрим линейное параболическое уравнение

$$\partial_t u(x, t) - \sum_{1 \leq i, j \leq n} \partial_i (A_{ij}(x, t) \partial_j u(x, t)) + A_{00}(x, t) u(x, t) = f(x, t) \quad (5.70)$$

на  $\Omega_T$  с начальными условиями (5.53) и нелокальными граничными условиями (5.54),  $p = 2$ .

**Определение 5.6.** Линейный оператор  $\mathcal{A} : L_2(0, T; \dot{W}_2^1(Q)) \rightarrow L_2(0, T; W_2^{-1}(Q))$  назовем *сильно эллиптичным*, если

$$\langle \mathcal{A}u, u \rangle \geq k_6 \|u\|_{L_2(0, T; \dot{W}_2^1(Q))}^2 - k_7 \|u\|_{L_2(\Omega_T)}^2$$

для любых  $u \in L_2(0, T; \dot{W}_2^1(Q))$ ,  $k_6 > 0$  и  $k_7 \in \mathbb{R}$  не зависят от  $u$ .

**Лемма 5.6.** Пусть  $A_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ ,  $A_{ij}(x, t) = A_{ji}(x, t)$  ( $i, j = 0, 1, \dots, n$ ), причем функции  $A_{ij}$   $M$ -периодичны для  $i, j = 1, \dots, n$ , (т. е.  $A_{ij}(x + h, t) = A_{ij}(x, t)$  для всех  $h \in M$ ) и

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} A_{ij}(x, t) \xi_i \xi_j \geq k_8 \sum_{1 \leq i \leq n} |\xi_i|^2, \quad (5.71)$$

$k_8 > 0$ . Кроме того, пусть оператор  $R_Q + R_Q^*$  положительно определен. Тогда линейный оператор  $A_R := AR_Q : L_2(0, T; \dot{W}_2^1(Q)) \rightarrow L_2(0, T; W_2^{-1}(Q))$  ограничен и сильно эллиптичен.

*Доказательство.* Ограниченность оператора  $A_R$  следует из того, что  $A_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , а оператор  $R_Q$  ограничен, см. лемму 3.1. Заметим, что это означает также деминепрерывность оператора  $A_R$ .

Сильная эллиптичность оператора  $A_R(\cdot, t) : \dot{W}_2^1(Q) \rightarrow W_2^{-1}(Q)$  доказана в [69, 106]. Для удобства читателей покажем справедливость этого утверждения для  $A_R : L_2(0, T; \dot{W}_2^1(Q)) \rightarrow L_2(0, T; W_2^{-1}(Q))$ .

Поскольку  $R_Q = \sum_s R_{Qs}$ , число различных матриц  $R_s$  конечно, а функции  $A_{ij}$   $M$ -периодичны для  $i, j = 1, \dots, n$ , воспользуемся формулами (3.13) и (3.15):

$$\sum_{1 \leq i, j \leq n} \int_{\Omega_T} A_{ij}(x, t) \partial_j R_{Qu} \partial_i u \, dx \, dt = \sum_s \sum_{0 \leq i, j \leq n} (A_{ij}(x, t) R_s \partial_j (U_s P_s u), \partial_i (U_s P_s u))_{L_2^N(\Omega_{s1})} = I_1.$$

Так как

$$\begin{aligned} \sum_s \sum_{1 \leq i, j \leq n} (A_{ij}(x, t) R_s \partial_j (U_s P_s u), \partial_i (U_s P_s u))_{L_2^N(\Omega_{s1})} &= \\ &= \sum_s \sum_{1 \leq i, j \leq n} (\partial_j (U_s P_s u), A_{ij}(x, t) R_s^* \partial_i (U_s P_s u))_{L_2^N(\Omega_{s1})} = \\ &= \sum_s \sum_{1 \leq i, j \leq n} (\partial_j (U_s P_s u), A_{ji}(x, t) R_s^* \partial_i (U_s P_s u))_{L_2^N(\Omega_{s1})} = \\ &= \frac{1}{2} \sum_s \sum_{1 \leq i, j \leq n} (A_{ij}(x, t) (R_s + R_s^*) \partial_j (U_s P_s u), \partial_i (U_s P_s u))_{L_2^N(\Omega_{s1})}, \end{aligned}$$

воспользуемся положительной определенностью оператора  $R_Q + R_Q^*$ , т. е. положительной определенностью матриц  $R_s + R_s^*$ , а также оценкой (5.71):

$$I_1 = \frac{1}{2} \sum_s \sum_{1 \leq i, j \leq n} (A_{ij}(x, t) (R_s + R_s^*) \partial_j (U_s P_s u), \partial_i (U_s P_s u))_{L_2^N(\Omega_{s1})} =$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \sum_s \sum_{1 \leq i, j \leq n} \left( A_{ij}(x, t) \sqrt{R_s + R_s^*} \partial_j (U_s P_s u), \sqrt{R_s + R_s^*} \partial_i (U_s P_s u) \right)_{L_2^N(\Omega_{s1})} \geq \\
&\geq \frac{k_8}{2} \sum_s \sum_{1 \leq i \leq n} \left( \sqrt{R_s + R_s^*} \partial_i (U_s P_s u), \sqrt{R_s + R_s^*} \partial_i (U_s P_s u) \right)_{L_2^N(\Omega_{s1})} = \\
&= \frac{k_8}{2} ((R_Q + R_Q^*)u, u) \geq \frac{k_8 k_4}{2} \|u\|_{L_2(0, T; \dot{W}_2^1(Q))}^2. \quad (5.72)
\end{aligned}$$

Оценим оставшееся слагаемое оператора. При этом мы учтем, что по определению  $|A_{ij}(x, t)| \leq k_9$  ( $A_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ ), а  $\|R_Q u\|_{L_2(\Omega_T)} \leq k_{10} \|u\|_{L_2(\Omega_T)}$  (см. лемму 3.6):

$$I_2 = \left| \int_{\Omega_T} A_{00}(x, t) R_Q u u \, dx \, dt \right| \leq k_9 k_{10} \|u\|_{L_2(\Omega_T)}^2. \quad (5.73)$$

Таким образом,

$$\langle A_R u, u \rangle \geq I_1 - I_2 \geq \frac{k_8 k_4}{2} \|u\|_{L_2(0, T; \dot{W}_2^1(Q))}^2 - k_9 k_{10} \|u\|_{L_2(\Omega_T)}^2. \quad (5.74)$$

Лемма доказана.  $\square$

**Замечание 5.2.** Утверждение леммы 5.6 справедливо также, если дифференциально-разностный оператор имеет слагаемые с младшими производными, поскольку, если  $A_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$ , то

$$\begin{aligned}
I_3 &= \left| \sum_{1 \leq j \leq n} \int_{\Omega_T} A_{0j}(x, t) \partial_j R_Q u u \, dx \, dt \right| \leq k_9 k_{10} \|u\|_{L_2(0, T; \dot{W}_2^1(Q))} \|u\|_{L_2(\Omega_T)} \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon k_9 k_{10}}{2} \|u\|_{L_2(0, T; \dot{W}_2^1(Q))} + \frac{k_9 k_{10}}{2\varepsilon} \|u\|_{L_2(\Omega_T)}, \\
I_4 &= \left| \sum_{1 \leq i \leq n} \int_{\Omega_T} A_{i0}(x, t) R_Q u \partial_i u \, dx \, dt \right| \leq k_9 k_{10} \|u\|_{L_2(0, T; \dot{W}_2^1(Q))} \|u\|_{L_2(\Omega_T)} \leq \\
&\leq \frac{\varepsilon k_9 k_{10}}{2} \|u\|_{L_2(0, T; \dot{W}_2^1(Q))} + \frac{k_9 k_{10}}{2\varepsilon} \|u\|_{L_2(\Omega_T)}.
\end{aligned}$$

Можно взять  $\varepsilon = \frac{k_8 k_4}{4k_9 k_{10}}$ . Тогда

$$\langle A_R u, u \rangle \geq I_1 - I_2 - I_3 - I_4 \geq \frac{k_8 k_4}{4} \|u\|_{L_2(0, T; \dot{W}_2^1(Q))}^2 - k_9 k_{10} \left( 1 + \frac{4k_9 k_{10}}{k_8 k_4} \right) \|u\|_{L_2(\Omega_T)}^2.$$

**Теорема 5.8.** Пусть  $A_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ ,  $A_{ij}(x, t) = A_{ij}(x, t)$  ( $i, j = 0, 1, \dots, n$ ), причем  $A_{ij}$   $M$ -периодичны для  $i, j = 1, \dots, n$  и справедлива оценка (5.71). Кроме того, пусть оператор  $R_Q + R_Q^*$  положительно определен. Тогда для любых  $f \in L_2(0, T; W^{-1}(Q))$  и  $\varphi \in L_2(Q)$  существует единственное решение задачи (5.59), (5.53). Более того, при некоторых  $k_{11}, k_{12}, k_{13}, k_{14} > 0$ , не зависящих от  $u_i, f_i$  и  $\varphi_2$  ( $i = 1, 2$ ), справедливы оценки

$$\|u_1 - u_2\|_{C(0, T; L_2(Q))} \leq k_{11} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2(Q)} + k_{12} \|f_1 - f_2\|_{L_2(0, T; W_2^{-1}(Q))}, \quad (5.75)$$

$$\|u_1 - u_2\|_{L_2(0, T; \dot{W}_2^1(Q))} \leq k_{13} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2(Q)} + k_{14} \|f_1 - f_2\|_{L_2(0, T; W_2^{-1}(Q))}, \quad (5.76)$$

где  $u_1$  и  $u_2$  — решения задачи (5.59), (5.53) при правых частях  $f_1$  и  $f_2$  и начальных условиях  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , соответственно.

*Доказательство.* Сначала рассмотрим задачу при  $\varphi = 0$ . Тогда согласно лемме 5.5 оператор  $\partial_t R_Q$  максимально монотонен, а согласно лемме 5.6 оператор  $A_R$  ограничен, деминепрерывен и сильно эллиптичен. Пусть в оценке сильной эллиптичности  $k_7 = 0$ . Тогда  $A_R$  монотонен и коэрцитивен. Кроме того, так как  $R_s + R_s^* > 0$ , то  $\partial_t R_Q$  является максимально монотонным, см. лемму 5.5. Следовательно, выполнены условия теоремы 1.1 из [33, гл. III, §1]. Решение задачи (5.59), (5.53) существует. Единственность данного решения следует из монотонности операторов.

Если  $k_7 > 0$ , то заменой функции  $u(x, t) = e^{\lambda t} v(x, t)$  получим эквивалентное уравнение

$$\partial_t R_Q v + (A_R + \lambda R_Q) v = e^{-\lambda t} f, \quad 0 < t < T, \quad (5.77)$$

$$v(0) = 0. \quad (5.78)$$

В силу оценки (5.66), если  $k_5 \lambda > k_7$ , то оператор  $A_R + \lambda R_Q$  монотонен и коэрцитивен, т. е. решение задачи (5.77), (5.78) существует и единственно, см. выше. Следовательно, существует и единственно решение задачи (5.59), (5.53).

Осталось рассмотреть задачу при  $\varphi \neq 0$ . Воспользуемся линейностью операторов. Так как  $W \subset C(0, T; L_2(Q))$  непрерывно и плотно, то для любого  $\varphi \in L_2(Q)$  существует функция  $y \in W$  такая, что  $y(x, 0) = \varphi(x)$  ( $x \in Q$ ). Тогда заменой функции  $u(x, t) = v(x, t) + y(x, t)$  можно получить эквивалентное уравнение

$$\partial_t R_Q v + A_R v = f - \partial_t y - A_R y := \widehat{f}, \quad 0 < t < T, \quad (5.79)$$

$$v(0) = 0. \quad (5.80)$$

Как доказано выше, задача (5.79), (5.80) имеет единственное решение. Следовательно, существует и единственно решение задачи (5.59), (5.53).

Покажем зависимость решения от начальных условий и правой части. Используем сильную эллиптичность оператора  $A_R$ . Как показано выше, вследствие оценки (5.74) существует  $\lambda \geq 0$  такое, что

$$\langle A_R u + \lambda R_Q u, u \rangle \equiv \langle \widehat{A}_R u, u \rangle \geq k_6 \|u\|_{L_2(0, T; \dot{W}_2^1(Q))}^2.$$

Пусть  $u_1, u_2 \in W$  — решения задачи

$$\partial_t R_Q u + (A_R + \lambda R_Q) u = e^{-\lambda t} f, \quad u(0) = \varphi. \quad (5.81)$$

при начальных условиях  $\varphi_1, \varphi_2 \in L_2(Q)$ , а также при правых частях  $\widehat{f}_1 = e^{-\lambda t} f_1 \in L_2(\Omega_T)$  и  $\widehat{f}_2 = e^{-\lambda t} f_2 \in L_2(\Omega_T)$ , соответственно. Пусть  $\Omega_t := Q \times (0, t)$  и  $\langle f, u \rangle_t := \int_{\Omega_t} f u \, dx \, d\tau$ . Аналогично формуле (5.69),

$$\langle \partial_t R_Q u, u \rangle_t = \int_0^t (\partial_t R_Q u(\tau), u(\tau))_{L_2(Q)} \, d\tau = \frac{1}{2} (R_Q^{sym} u(t), u(t))_{L_2(Q)} - \frac{1}{2} (R_Q^{sym} u(0), u(0))_{L_2(Q)}; \quad (5.82)$$

$(R_Q^{sym} u(t), u(t))_{L_2(Q)} = \|\sqrt{R_Q^{sym}} u(t)\|_{L_2(Q)}^2$ , см. (5.66). Из формул (5.82) и (5.66) следует, что

$$\langle \partial_t R_Q (u_1 - u_2), (u_1 - u_2) \rangle_t = \frac{1}{2} \|\sqrt{R_Q^{sym}} (u_1 - u_2)(t)\|_{L_2(Q)}^2 - \frac{1}{2} \|\sqrt{R_Q^{sym}} (\varphi_1 - \varphi_2)\|_{L_2(Q)}^2.$$

Тогда для любого  $t \in (0, T]$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \|\sqrt{R_Q^{sym}} (u_1(t) - u_2(t))\|_{L_2(Q)}^2 + \langle \widehat{A}_R u_1 - \widehat{A}_R u_2, u_1 - u_2 \rangle_t = \\ = \langle \widehat{f}_1 - \widehat{f}_2, u_1 - u_2 \rangle_t + \frac{1}{2} \|\sqrt{R_Q^{sym}} (\varphi_1 - \varphi_2)\|_{L_2(Q)}^2. \end{aligned} \quad (5.83)$$

Здесь

$$\langle \widehat{A}_R u, u \rangle_t := \sum_{0 \leq i, j \leq n_{\Omega_t}} \int A_{ij}(\tau, x) \partial_j R_Q u \partial_i u \, dx \, d\tau + \lambda \int_{\Omega_t} R_Q u u \, dx \, d\tau.$$

Рассмотрим также функцию  $u_3 \in W$ , являющуюся решением задачи (5.81) при начальных условиях  $\varphi_1$  и правой части  $\widehat{f}_2$ . Тогда для любого  $t \in (0, T]$

$$\frac{1}{2} \|\sqrt{R_Q^{sym}} (u_1(t) - u_3(t))\|_{L_2(Q)}^2 + \langle \widehat{A}_R u_1 - \widehat{A}_R u_3, u_1 - u_3 \rangle_t = \langle \widehat{f}_1 - \widehat{f}_2, u_1 - u_3 \rangle_t, \quad (5.84)$$

$$\frac{1}{2} \|\sqrt{R_Q^{sym}} (u_3(t) - u_2(t))\|_{L_2(Q)}^2 + \langle \widehat{A}_R u_3 - \widehat{A}_R u_2, u_3 - u_2 \rangle_t = \frac{1}{2} \|\sqrt{R_Q^{sym}} (\varphi_1 - \varphi_2)\|_{L_2(Q)}^2. \quad (5.85)$$

В силу аддитивности интеграла Лебега,

$$\langle \widehat{A}_R u, u \rangle_t \geq k_6 \|u\|_{L_2(0,t; \dot{W}_2^1(Q))}^2. \quad (5.86)$$

Используя оценку (5.86) и неотрицательность первого слагаемого левой части (5.83), имеем, что

$$\begin{aligned} k_6 \|u_1 - u_3\|_{L_2(0,t; \dot{W}_2^1(Q))}^2 &\leq \langle \widehat{A}_R u_1 - \widehat{A}_R u_3, u_1 - u_3 \rangle_t = \langle \widehat{f}_1 - \widehat{f}_2, u_1 - u_3 \rangle_t - \\ &- \left\| \sqrt{R_Q^{sym}}(u_1(t) - u_3(t)) \right\|_{L_2(Q)}^2 \leq \langle \widehat{f}_1 - \widehat{f}_2, u_1 - u_3 \rangle_t \leq \|\widehat{f}_1 - \widehat{f}_2\|_{L_2(0,t; W_2^{-1}(Q))} \|u_1 - u_3\|_{L_2(0,t; \dot{W}_2^1(Q))}, \end{aligned}$$

откуда

$$\|u_1 - u_3\|_{L_2(0,T; \dot{W}_2^1(Q))} \leq k_6^{-1/2} \|\widehat{f}_1 - \widehat{f}_2\|_{L_2(0,T; W_2^{-1}(Q))}. \quad (5.87)$$

С другой стороны, второе слагаемое левой части (5.84) также неотрицательно, т. е.

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| \sqrt{R_Q^{sym}}(u_1(t) - u_3(t)) \right\|_{L_2(Q)}^2 &\leq \langle \widehat{f}_1 - \widehat{f}_2, u_1 - u_3 \rangle_t \leq \\ &\leq \|\widehat{f}_1 - \widehat{f}_2\|_{L_2(0,t; W_2^{-1}(Q))} \|u_1 - u_3\|_{L_2(0,t; \dot{W}_2^1(Q))} \leq k_6^{-1} \|\widehat{f}_1 - \widehat{f}_2\|_{L_2(0,t; W_2^{-1}(Q))}^2. \end{aligned}$$

Опять применим оценку из (5.65):

$$\|u_1(t) - u_3(t)\|_{L_2(Q)}^2 \leq k_5^{-2} \left\| \sqrt{R_Q^{sym}}(u_1(t) - u_3(t)) \right\|_{L_2(Q)}^2 \leq 2k_5^{-2} k_6^{-1} \|\widehat{f}_1 - \widehat{f}_2\|_{L_2(0,t; W_2^{-1}(Q))}^2. \quad (5.88)$$

Из (5.85) в силу неотрицательности второго слагаемого левой части следует, что

$$\left\| \sqrt{R_Q^{sym}}(u_3(t) - u_2(t)) \right\|_{L_2(Q)}^2 \leq \left\| \sqrt{R_Q^{sym}}(\varphi_1 - \varphi_2) \right\|_{L_2(Q)}^2,$$

и благодаря невырожденности  $R_Q^{sym}$  имеем, что

$$\|u_3(t) - u_2(t)\|_{L_2(Q)}^2 \leq k_{11} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2(Q)}^2, \quad (5.89)$$

а также

$$\begin{aligned} k_6 \|u_3 - u_2\|_{L_2(0,T; \dot{W}_2^1(Q))}^2 &\leq \langle \widehat{A}_R u_3 - \widehat{A}_R u_2, u_3 - u_2 \rangle \leq \\ &\leq \frac{1}{2} \left\| \sqrt{R_Q^{sym}}(\varphi_1 - \varphi_2) \right\|_{L_2(Q)}^2 \leq k_{12} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2(Q)}^2. \end{aligned} \quad (5.90)$$

Здесь мы воспользовались ограниченностью оператора  $R_Q^{sym} : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ , см. [106, лемма 8.15]. Используем неравенство треугольника для норм. Тогда из (5.87)–(5.90) следует, что

$$\begin{aligned} \|u_1(t) - u_2(t)\|_{L_2(Q)} &\leq \|u_1(t) - u_3(t)\|_{L_2(Q)} + \|u_3(t) - u_2(t)\|_{L_2(Q)} \leq \\ &\leq \sqrt{k_{11}} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2(Q)} + \sqrt{2k_5^{-2} k_6^{-1}} \|\widehat{f}_1 - \widehat{f}_2\|_{L_2(0,T; W_2^{-1}(Q))}, \end{aligned} \quad (5.91)$$

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_{L_2(0,T; \dot{W}_2^1(Q))} &\leq \|u_1 - u_3\|_{L_2(0,T; \dot{W}_2^1(Q))} + \|u_3 - u_2\|_{L_2(0,T; \dot{W}_2^1(Q))} \leq \\ &\leq \sqrt{k_{12} k_6^{-1}} \|\varphi_1 - \varphi_2\|_{L_2(Q)} + \sqrt{k_6^{-1}} \|\widehat{f}_1 - \widehat{f}_2\|_{L_2(0,T; W_2^{-1}(Q))}. \end{aligned} \quad (5.92)$$

По построению  $e^{\lambda t} u_1(x, t)$  и  $e^{\lambda t} u_2(x, t)$  являются решениями задачи (5.59), (5.53). Подставив эти выражения (а также значения  $\widehat{f}_1 = e^{-\lambda t} f_1$  и  $\widehat{f}_2 = e^{-\lambda t} f_2$ ) в (5.91), (5.92) мы получим оценки (5.75), (5.76).  $\square$

Следующая теорема является следствием теорем 5.7 и 5.8.

**Теорема 5.9.** Пусть выполнены условия 5.1, 5.2 и 5.3. Пусть матрицы  $R_s$  и  $R_{s0}$ , заданные в условии 5.3, невырождены, причем  $R_s + R_s^* > 0$  ( $s = s(r), r \in B$ ). Пусть также  $A_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ ,  $A_{ij}(x, t) = A_{ij}(x, t)$  ( $i, j = 0, 1, \dots, n$ ), причем  $A_{ij}$   $M$ -периодичны для  $i, j = 1, \dots, n$  и справедлива оценка (5.71). Тогда для любых  $f \in L_2(0, T; W_2^{-1}(Q))$  и  $\psi \in L_2(Q)$  существует единственное обобщенное решение задачи (5.52)–(5.54). Более того, для некоторых  $k_{12}, k_{13}, k_{14}, k_{15} > 0$ , не зависящих от  $w_i, f_i$  и  $\psi_i$  ( $i = 1, 2$ ),

$$\|w_1 - w_2\|_{C(0,T; L_2(Q))} \leq k_{12} \|\psi_1 - \psi_2\|_{L_2(Q)} + k_{13} \|f_1 - f_2\|_{L_2(0,T; W_2^{-1}(Q))}, \quad (5.93)$$

$$\|w_1 - w_2\|_{L_2(0,T;W_2^1(Q))} \leq k_{14}\|\psi_1 - \psi_2\|_{L_2(Q)} + k_{15}\|f_1 - f_2\|_{L_2(0,T;W_2^{-1}(Q))}, \quad (5.94)$$

где  $w_1, w_2$  — обобщенные решения задачи (5.52)–(5.54) с линейным оператором  $A$  при правых частях  $f_1, f_2$  и начальных условиях  $\psi_1, \psi_2$ , соответственно.

**Замечание 5.3.** Если выполнены условия теоремы 5.9 и  $f \in L_2(\Omega_T)$ , то обобщенное решение задачи (5.52)–(5.54) таково, что  $\partial_t w \in L_2(\Omega_T)$ . Кроме того, если  $w_1, w_2$  — обобщенные решения задачи (5.52)–(5.54) с линейным оператором  $A$  при правых частях  $f_1, f_2$  и начальных условиях  $\psi_1, \psi_2$ , соответственно, то справедливы оценки

$$\begin{aligned} \|w_1 - w_2\|_{C(0,T;L_2(Q))} &\leq k_{12}\|\psi_1 - \psi_2\|_{L_2(Q)} + k_{13}\|f_1 - f_2\|_{L_2(\Omega_T)}, \\ \|w_1 - w_2\|_{L_2(0,T;W_2^1(Q))} &\leq k_{14}\|\psi_1 - \psi_2\|_{L_2(Q)} + k_{15}\|f_1 - f_2\|_{L_2(\Omega_T)}, \end{aligned}$$

Доказательство аналогично предыдущему, если рассматривать

$$\mathcal{D}(\partial_t) = \widetilde{W}_{2,\gamma} := \{w \in L_2(0, T; W_{2,\gamma}^1(Q)) : \partial_t w \in L_2(\Omega_T)\}.$$

При этом используется компактность вложения  $\widetilde{W}_{2,\gamma} \subset L_2(\Omega_T)$ .

**Пример 5.12.** Теперь можно закончить рассмотрение примера 5.10. Нелокальным краевым условиям соответствует разностный оператор  $Ru(t, x) = u(t, x) + \gamma_1 u(t, x_1 + 1, x_2) + \gamma_2 u(t, x_1 - 1, x_2)$ .

Данному оператору соответствует матрица  $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & 1 \end{pmatrix}$ , невырожденная при  $\gamma_1 \gamma_2 \neq 1$ . При  $|\gamma_1 + \gamma_2| < 2$  оператор  $R_Q$  положительно определен, условия леммы 5.5 и теоремы 5.8 выполнены. В силу теоремы 5.9 для любых  $f \in L_2(0, T; W_2^{-1}(Q))$  и  $\psi \in L_2(Q)$  при  $|\gamma_1 + \gamma_2| < 2$  задача (5.56)–(5.58) имеет единственное обобщенное решение

$$w \in W_{2,\gamma} := \{w \in L_2(0, T; W_{2,\gamma}^1(Q)) : \partial_t w \in L_2(0, T; W_2^{-1}(Q))\}.$$

Если при этом  $f \in L_2(\Omega_T)$ , то  $\partial_t w \in L_2(\Omega_T)$ .

**5.3.4. Квазилинейные параболические уравнения.** Сформулируем теоремы существования решения нелокальных задач для нелинейного параболического уравнения с дифференциальным оператором с дифференцируемыми коэффициентами,  $p \in [2, \infty)$ .

**Теорема 5.10.** Пусть выполнены условия 5.1–5.3. Пусть матрицы  $R_s$  и  $R_{s0}$ , заданные в условии 5.3, невырождены, причем  $R_s + R_s^* > 0$  ( $s = s(r)$ ,  $r \in B$ ). Предположим, что дифференциальный оператор  $A$  задан функциями  $A_i(x, t, \xi)$ , измеримыми по  $(x, t) \in \Omega_T$ , непрерывными по  $\xi$  для п.в.  $(x, t) \in \Omega_T$ , для которых выполнены условия интегрируемости (3.8), дифференцируемости (3.22) для  $i, j = 0, 1, \dots, n$  и сильной эллиптичности (3.21),  $p \in [2, \infty)$ . Тогда для любых  $f \in L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$  и  $\psi \in L_2(Q)$ , существует единственное обобщенное решение задачи (5.52)–(5.54), причем

$$\|w_1(T) - w_2(T)\|_{L_2(Q)} \leq k_{16}\|f_1 - f_2\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}^{q/2} + k_{17}\|\psi_1 - \psi_2\|_{L_2(Q)}, \quad (5.95)$$

$$\|w_1 - w_2\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))} \leq k_{18}\|f_1 - f_2\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}^{q/p} + k_{19}\|\psi_1 - \psi_2\|_{L_2(Q)}^{2/p}, \quad (5.96)$$

где  $w_1, w_2$  — обобщенные решения задачи (5.52)–(5.54) при правых частях  $f_1, f_2$  и начальных условиях  $\psi_1, \psi_2$ , соответственно.

*Доказательство.* Так как выполнены условия 5.1–5.3, то существует разностный оператор  $R_Q : L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q)) \rightarrow L_p(0, T; W_{p,\gamma}^1(Q))$ , являющийся изоморфизмом (см. теорему 5.6). Воспользуемся теоремой 5.8 и рассмотрим эквивалентную задачу (5.60)–(5.61). В силу оценки интегрируемости (3.8) оператор  $A_R$  деминепрерывен и ограничен (см. лемму 3.8), а в силу условий (3.21)–(3.22) — сильно монотонен (см. лемму 3.9), причем

$$\langle A_R u - A_R y, u - y \rangle \geq c_9 \|u - y\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))}^p, \quad (5.97)$$

см. (3.25). Если  $\psi = 0$ , то  $\varphi = 0$  и  $\partial_t R_Q$  является максимально монотонным, см. лемму 5.5. Следовательно, существует решение  $u \in W$  операторного уравнения (5.60), см. [33, теорема 1.1, гл. III, §1]. Более того, в силу монотонности  $A_R$  данное решение единственно.

Если  $\psi \neq 0$ , т. е.  $\varphi = R_Q^{-1}\psi \neq 0$ , то существует фиксированный элемент  $\hat{u} \in W \subset C(0, T; L_2(Q))$  такой, что  $\hat{u}|_{t=0} = \varphi$ . Существование такого элемента обусловлено тем, что  $C^1(0, T; \dot{W}_p^1(Q)) \cap W$  плотно вложено в  $W$ , см. [15, лемма 1.12, Ch. IV], а  $W$  непрерывно вложено в  $C(0, T; L_2(Q))$ , см. [15, теорема 1.17, Ch. IV]. Подставив  $u(x, t) = v(x, t) + \hat{u}(x, t)$ , получим эквивалентное уравнение

$$\partial_t R_Q v + A_R(v + \hat{u}) = f - \partial_t R_Q \hat{u} := \hat{f}, \quad (5.98)$$

$$v|_{t=0} = 0. \quad (5.99)$$

Очевидно, что  $\hat{f} \in L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$ . По построению оператор  $A_R(\cdot + \hat{u})$  удовлетворяет оценкам (3.8), (3.21) и (3.22), т. е. является ограниченным, деминепрерывным и сильно эллиптичным. Применяя [33, теорема 1.1, гл. III, §1] получаем существование решения задачи (5.98)–(5.99). Следовательно, существует решение  $u \in W$  операторного уравнения (5.60) с начальным условием  $u|_{t=0} = \varphi$ .

Так как существует единственное решение  $u \in W$  операторного уравнения (5.60), (5.61), то  $w = R_Q u \in W_\gamma$  является единственным обобщенным решением задачи (5.52)–(5.54).

Докажем оценки (5.95), (5.96). Пусть  $w_1, w_2 \in W_\gamma$  — обобщенные решения задачи (5.52)–(5.54) при правых частях  $f_1, f_2$  и начальных условиях  $\psi_1, \psi_2$ , соответственно. Пусть  $u_i = R_Q^{-1}w_i$  и  $\varphi_i = R_Q^{-1}\psi_i$ . Поскольку  $u_i$  — решения уравнения (5.60), то

$$\langle \partial_t R_Q u_1 - \partial_t R_Q u_2, u_1 - u_2 \rangle + \langle A_R u_1 - A_R u_2, u_1 - u_2 \rangle = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \left\| \sqrt{R_Q^{sym}} (u_1(T) - u_2(T)) \right\|_{L_2(Q)}^2 + \langle A_R u_1 - A_R u_2, u_1 - u_2 \rangle = \\ = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle + \frac{1}{2} \left\| \sqrt{R_Q^{sym}} (\varphi_1 - \varphi_2) \right\|_{L_2(Q)}^2, \end{aligned} \quad (5.100)$$

мы использовали оценки (5.66) и (5.69). Пусть также  $u_3 \in W$  — решение уравнения (5.60), (5.61) при начальном условии  $\varphi = \varphi_1$  и правой части  $f = f_2$ . Тогда

$$\frac{1}{2} \left\| \sqrt{R_Q^{sym}} (u_1(T) - u_3(T)) \right\|_{L_2(Q)}^2 + \langle A_R u_1 - A_R u_3, u_1 - u_3 \rangle = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_3 \rangle, \quad (5.101)$$

$$\frac{1}{2} \left\| \sqrt{R_Q^{sym}} (u_3(T) - u_2(T)) \right\|_{L_2(Q)}^2 + \langle A_R u_3 - A_R u_2, u_3 - u_2 \rangle = \frac{1}{2} \left\| \sqrt{R_Q^{sym}} R_Q^{-1} (\psi_1 - \psi_2) \right\|_{L_2(Q)}^2. \quad (5.102)$$

В силу оценки (5.97) и равенства (5.101),

$$\begin{aligned} c_9 \|u_1 - u_3\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^p &\leq \langle A_R u_1 - A_R u_3, u_1 - u_3 \rangle = -\frac{1}{2} \left\| \sqrt{R_Q^{sym}} (u_1(T) - u_3(T)) \right\|_{L_2(Q)}^2 + \\ &+ \langle f_1 - f_2, u_1 - u_3 \rangle \leq \langle f_1 - f_2, u_1 - u_3 \rangle \leq \|f_1 - f_2\|_{L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))} \|u_1 - u_3\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))} \leq \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^q q} \|f_1 - f_2\|_{L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))}^q + \frac{\varepsilon^p}{p} \|u_1 - u_3\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^p, \end{aligned} \quad (5.103)$$

т.е. для  $\frac{\varepsilon^p}{p} \leq \frac{c_9}{2}$  получаем, что

$$\|u_1 - u_3\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^p \leq k_{20} \|f_1 - f_2\|_{L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))}^q, \quad (5.104)$$

$$\langle f_1 - f_2, u_1 - u_3 \rangle \leq k_{21} \|f_1 - f_2\|_{L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))}^q. \quad (5.105)$$

С другой стороны, второе слагаемое левой части (5.101) неотрицательно в силу монотонности  $A_R$ . Подставляя оценку (5.105), получим

$$\frac{1}{2} \left\| \sqrt{R_Q^{sym}} (u_1(T) - u_3(T)) \right\|_{L_2(Q)}^2 \leq \langle f_1 - f_2, u_1 - u_3 \rangle \leq k_{21} \|f_1 - f_2\|_{L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))}^q,$$

т. е.

$$k_5 \|u_1(T) - u_3(T)\|_{L_2(Q)}^2 \leq \left\| \sqrt{R_Q^{sym}} (u_1(T) - u_3(T)) \right\|_{L_2(Q)}^2 \leq 2k_{21} \|f_1 - f_2\|_{L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))}^q. \quad (5.106)$$

Неотрицательность второго слагаемого правой части (5.102) влечет оценку

$$\left\| \sqrt{R_Q^{sym}}(u_3(T) - u_2(T)) \right\|_{L_2(Q)}^2 \leq \left\| \sqrt{R_Q^{sym}}(\varphi_1 - \varphi_2) \right\|_{L_2(Q)}^2.$$

Опять воспользуемся оценкой (5.66) и ограниченностью оператора  $\sqrt{R_Q^{sym}}R_Q^{-1}$ :

$$\begin{aligned} k_5 \|u_3(T) - u_2(T)\|_{L_2(Q)}^2 &\leq \left\| \sqrt{R_Q^{sym}}(u_3(T) - u_2(T)) \right\|_{L_2(Q)}^2 \leq \left\| \sqrt{R_Q^{sym}}(\varphi_1 - \varphi_2) \right\|_{L_2(Q)}^2 = \\ &= \left\| \sqrt{R_Q^{sym}}R_Q^{-1}(\psi_1 - \psi_2) \right\|_{L_2(Q)}^2 \leq k_{22} \|\psi_1 - \psi_2\|_{L_2(Q)}^2. \end{aligned} \quad (5.107)$$

Осталось применить неравенство треугольника

$$\begin{aligned} \|u_1(T) - u_2(T)\|_{L_2(Q)} &\leq \|u_1(T) - u_3(T)\|_{L_2(Q)} + \|u_3(T) - u_2(T)\|_{L_2(Q)} \leq \\ &\leq \sqrt{\frac{2k_{21}}{k_5}} \|f_1 - f_2\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}^{q/2} + \sqrt{\frac{k_{22}}{k_5}} \|\psi_1 - \psi_2\|_{L_2(Q)}. \end{aligned}$$

и воспользоваться ограниченностью оператора  $R_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ :

$$\begin{aligned} \|w_1(T) - w_2(T)\|_{L_2(Q)} &= \|R_Q(u_1(T) - u_2(T))\|_{L_2(Q)} \leq k_{23} \|u_1(T) - u_2(T)\|_{L_2(Q)} \leq \\ &\leq k_{23} \left( \sqrt{\frac{2k_{21}}{k_5}} \|f_1 - f_2\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}^{q/2} + \sqrt{\frac{k_{22}}{k_5}} \|\psi_1 - \psi_2\|_{L_2(Q)} \right). \end{aligned}$$

Оценка (5.95) доказана.

В то же время из оценок (5.97), (5.102) и (5.107) следует, что

$$\begin{aligned} c_9 \|u_3 - u_2\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))}^p &\leq \langle ARu_3 - ARu_2, u_3 - u_2 \rangle \leq \frac{1}{2} \left\| \sqrt{R_Q^{sym}}(u_3(T) - u_2(T)) \right\|_{L_2(Q)}^2 + \\ &+ \langle ARu_3 - ARu_2, u_3 - u_2 \rangle = \frac{1}{2} \left\| \sqrt{R_Q^{sym}}R_Q^{-1}(\psi_1 - \psi_2) \right\|_{L_2(Q)}^2 \leq \frac{k_{22}}{2} \|\psi_1 - \psi_2\|_{L_2(Q)}^2, \end{aligned} \quad (5.108)$$

т. е.  $\|u_3 - u_2\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))}^p \leq \frac{k_{22}}{2c_9} \|\psi_1 - \psi_2\|_{L_2(Q)}^2$ . Воспользуемся неравенствами (5.104) и (5.108), а также неравенством треугольника

$$\begin{aligned} \|u_1 - u_2\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))} &\leq \|u_1 - u_3\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))} + \|u_3 - u_2\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))} \leq \\ &\leq k_{21}^{1/p} \|f_1 - f_2\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}^{q/p} + \left( \frac{k_{22}}{2c_9} \right)^{1/p} \|\psi_1 - \psi_2\|_{L_2(Q)}^{2/p}. \end{aligned}$$

Из этого неравенства в силу ограниченности оператора  $R_Q : L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q)) \rightarrow L_p(0,T;W_p^1(Q))$  следует, что

$$\begin{aligned} \|w_1 - w_2\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))} &= \|R_Q(u_1 - u_2)\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))} \leq k_{24} \|u_1 - u_2\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))} \leq \\ &\leq k_{24} \left( k_{21}^{1/p} \|f_1 - f_2\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}^{q/p} + \left( \frac{k_{22}}{2c_9} \right)^{1/p} \|\psi_1 - \psi_2\|_{L_2(Q)}^{2/p} \right). \end{aligned}$$

Оценка (5.96) доказана. □

**Теорема 5.11.** Пусть выполнены условия 5.1–5.3. Пусть матрицы  $R_s$  и  $R_{s0}$ , заданные в условии 5.3, невырождены, причем  $R_s + R_s^* > 0$  ( $s = s(r)$ ,  $r \in B$ ). Предположим, что дифференциальный оператор  $A$  задан функциями  $A_i(x, t, \xi)$ , измеримыми по  $(x, t) \in \Omega_T$ , непрерывными по  $\xi$  для п.в.  $(x, t) \in \Omega_T$ , для которых выполнены условия интегрируемости (3.8), дифференцируемости (3.22) для  $i, j = 1, \dots, n$ , сильной эллиптичности (3.39) и коэрцитивности (3.42)–(3.43),  $p \in [2, \infty)$ . Тогда для любых  $f \in L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$  и  $\psi \in L_2(Q)$ , существует непустое, ограниченное и слабо замкнутое в  $W_\gamma$  множество обобщенных решений задачи (5.52)–(5.54).

*Доказательство.* Так как выполнены условия 5.1–5.3, то существует разностный оператор  $R_Q : L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q)) \rightarrow L_p(0, T; W_{p,\gamma}^1(Q))$ , являющийся изоморфизмом (см. теорему 5.6). Воспользуемся теоремой 5.8 и рассмотрим эквивалентную задачу (5.60)–(5.61). Из условий теоремы следует, что  $A_R$  — деминепрерывный (см. лемму 3.9), коэрцитивный (см. лемму 3.11) оператор, обладающий свойством  $(S_+)$  на  $W$  (см. лемму 3.10), т. е. псевдомонотонный на  $W$ . Если  $\psi = 0$ , то  $\varphi = 0$  и  $\partial_t R_Q$  является максимально монотонным, см. лемму 5.5. Согласно [33, теорема 1.2, гл. 3, §1.4] существует решение задачи (5.60)–(5.61)  $u \in W$ . Иначе мы, аналогично предыдущей теореме, можем рассмотреть фиксированный элемент  $\hat{u} \in W \subset C(0, T; L_2(Q))$  такой, что  $\hat{u}|_{t=0} = \varphi$ , и эквивалентное уравнение (5.98)–(5.99). По построению оператор  $A_R(\cdot + \hat{u})$  удовлетворяет оценкам (3.8), (3.21) и (3.22), т. е. является ограниченным, деминепрерывным, коэрцитивным и обладает свойством  $(S_+)$  на  $W$ . Применяя [33, теорема 1.1, гл. III, §1] получаем существование решения задачи (5.98)–(5.99). Следовательно, существует решение  $u \in W$  операторного уравнения (5.60) с начальным условием  $u|_{t=0} = \varphi$ .

Ограниченность множества решений следует из коэрцитивности оператора  $A_R$ . Докажем это. Пусть  $u$  — решение,  $u \neq 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \langle \partial_t R_Q u + A_R u, u \rangle &= \langle f, u \rangle, \\ \frac{1}{2} \left\| \sqrt{R_Q^{sym}} u(T) \right\|_{L_2(Q)}^2 + \langle A_R u, u \rangle &= \langle f, u \rangle + \frac{1}{2} \left\| \sqrt{R_Q^{sym}} R_Q^{-1} \psi \right\|_{L_2(Q)}^2, \\ \langle A_R u, u \rangle &\leq \langle f, u \rangle + \frac{1}{2} \left\| \sqrt{R_Q^{sym}} R_Q^{-1} \psi \right\|_{L_2(Q)}^2, \end{aligned} \quad (5.109)$$

$$\|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}^{-1} \langle A_R u, u \rangle \leq \|f\|_{L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))} + \frac{\left\| \sqrt{R_Q^{sym}} R_Q^{-1} \psi \right\|_{L_2(Q)}^2}{2\|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}}. \quad (5.110)$$

С правой стороны неравенства (5.110) стоит ограниченное значение. Ограничение левой части (5.110) в силу коэрцитивности оператора  $A_R$  гарантирует ограниченность  $\|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}$ , причем можно определить константу, которой ограничена эта норма так, что данная константа будет зависеть только от  $\|f\|_{L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))}$ , от  $\|\varphi\|_{L_2(Q)}$  и от функции, оценивающей коэрцитивность оператора  $A_R$ , но не зависеть от  $u$ . В то же время из равенства (5.109), ограниченности  $\|u\|_{L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))}$  и ограниченности оператора  $\sqrt{R_Q^{sym}}$  следует, что ограничено  $\|u(T)\|_{L_2(Q)}$ . Доказана ограниченность решений задачи (5.60)–(5.61) в пространстве  $W$ . А поскольку  $R_Q$  ограничен и  $w = R_Q u$  является решением (5.59), (5.53) тогда и только тогда, когда  $u$  — решение (5.60)–(5.61), то множество решений (5.59), (5.53) ограничено в  $W_\gamma$ .

Слабая компактность множества решений следует из того, что оператор  $A_R$  является псевдомонотонным на  $W$ . Докажем это. Пусть  $u_n \rightharpoonup u$  в  $W$ ,  $u_n$  принадлежат множеству решений для каждого  $n$ . При этом по определению  $u_n \rightharpoonup u$  в  $L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))$  и  $\partial_t u_n \rightharpoonup \partial_t u$  в  $L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$ , кроме того,  $u(0) = \varphi$  в силу непрерывности вложения  $W \subset C(0, T; L_2(Q))$ . Поскольку  $u_n$  — решение (5.60), то

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle A_R u_n, u_n - u \rangle = \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, u_n - u \rangle - \underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle \partial_t u_n, u_n - u \rangle. \quad (5.111)$$

Первое слагаемое (5.111)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, u_n - u \rangle = 0$ , так как  $u_n \rightharpoonup u$  в  $L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))$ . Распишем второе слагаемое (5.111):  $\lim_{n \rightarrow \infty} \langle \partial_t R_Q u_n, u \rangle = \langle \partial_t R_Q u, u \rangle$  в силу слабой сходимости  $\partial_t u_n \rightharpoonup \partial_t u$  в  $L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$  и непрерывности оператора  $R_Q$ . В лемме 5.5 доказано, что  $\partial_t R_Q$  — монотонный оператор при нулевых начальных условиях. В силу линейности оператора  $\partial_t R_Q$  это свойство сохраняется для любых фиксированных начальных условий, т. е.  $\langle \partial_t R_Q u_n - \partial_t R_Q u, u_n - u \rangle \geq 0$ . Следовательно,

$$\underline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle \partial_t R_Q u_n, u_n - u \rangle \geq \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \partial_t R_Q u, u_n - u \rangle = 0 \quad (5.112)$$

в силу слабой сходимости  $\partial_t u_n \rightharpoonup \partial_t u$  в  $L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$  и непрерывности оператора  $R_Q$ . Подставив это выражение в (5.111), получим, что  $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \langle A_R u_n, u_n - u \rangle \leq 0$ . В силу условия псевдомонотонности на  $W$  оператора  $A_R$  и монотонности оператора  $\partial_t R_Q$

$$\begin{aligned} \langle A_R u, u - v \rangle &\leq \varliminf_{n \rightarrow \infty} \langle A_R u_n, u_n - v \rangle = \varliminf_{n \rightarrow \infty} \langle f - \partial_t R_Q u_n, u_n - v \rangle \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \langle f, u_n - v \rangle - \\ &- \overline{\varliminf}_{n \rightarrow \infty} \langle \partial_t R_Q u_n, u_n - u \rangle \leq \langle f, u - v \rangle - \lim_{n \rightarrow \infty} \langle \partial_t R_Q u, u_n - u \rangle = \langle f - \partial_t R_Q u, u - v \rangle. \end{aligned}$$

Поскольку данное неравенство справедливо для всех  $v \in L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q))$ , то  $u$  удовлетворяет операторному уравнению (5.60). Доказана слабая компактность в  $W$  решений уравнения (5.60) с начальными условиями (5.61). А поскольку  $R_Q$  непрерывен и  $w = R_Q u$  является решением (5.59), (5.53) тогда и только тогда, когда  $u$  — решение (5.60)-(5.61), то множество решений задачи (5.59), (5.53) слабо компактно в  $W_\gamma$ .  $\square$

### 5.3.5. Нелинейные нелокальные задачи.

**Теорема 5.12.** Пусть выполнены условия 5.1–5.3. Пусть матрицы  $R_s$  и  $R_{s0}$ , заданные в условии 5.3, невырождены, причем  $R_s + R_s^* > 0$  ( $s = s(r)$ ,  $r \in B$ ). Предположим, что дифференциальный оператор  $A$  задан функциями  $A_i(x, t, \xi)$ , измеримыми по  $(x, t) \in \Omega_T$ , непрерывными по  $\xi$  для п.в.  $(x, t) \in \Omega_T$ , для которых выполнены условия интегрируемости (3.8), а также один из следующих наборов:

- 1) условия коэрцитивности **(A2)** (см. (4.1)) и эллиптичности **(A3)** (см. (4.2)),  $p \in (1, \infty)$ ;
- 2) условия сильной эллиптичности **(A4)** (см. (4.18)) и локальной липшицевости **(A5)** (см. (4.19)-(4.20)), а также одно из условий коэрцитивности **(A2)**, (3.42)-(3.43) или (4.39)–(4.41),  $p \in [2, \infty)$ .

Тогда для любых  $f \in \mathcal{V}^*$  и  $\psi \in L_2(Q)$ , существует непустое, ограниченное и слабо замкнутое в  $W_\gamma$  множество обобщенных решений задачи (5.52)–(5.54).

*Доказательство.* Так как выполнены условия 5.1–5.3, то существует разностный оператор  $R_Q : L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q)) \rightarrow L_p(0, T; W_{p,\gamma}^1(Q))$ , являющийся изоморфизмом, см. теорему 5.6. Воспользуемся теоремой 5.8 и рассмотрим эквивалентную задачу (5.60)–(5.61). В силу условия интегрируемости (3.8) оператор  $A_R$  деминепрерывный и ограниченный, см. лемму 3.9. Остальные условия гарантируют коэрцитивность и псевдомонотонность на  $W$  оператора  $A_R$ . В случае 1) мы имеем коэрцитивный оператор, обладающий свойством  $(S_+)$  на  $W$ , см. леммы 4.1 и 4.3. В случае 2) мы имеем коэрцитивный оператор, обладающий свойством  $(\mathcal{V}; W)$ -полуограниченной вариации, см. лемму 4.4 и замечание 4.1. Дальнейшее доказательство аналогично доказательству теоремы 5.11.  $\square$

**Теорема 5.13.** Пусть выполнены условия 5.1–5.3. Пусть матрицы  $R_s$  и  $R_{s0}$ , заданные в условии 5.3, невырождены, причем  $R_s + R_s^* > 0$  ( $s = s(r)$ ,  $r \in B$ ), а обратный оператор  $R_q^{-1}$  сильно аккретивен. Предположим, что дифференциальный оператор  $A = \Delta_p$ ,  $p \in (2, \infty)$ . Тогда для любых  $f \in L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$  и  $\psi \in L_2(Q)$  существует непустое, ограниченное и слабо замкнутое в  $W_\gamma$  множество обобщенных решений задачи (5.52)–(5.54), причем решения удовлетворяют оценкам

$$\|w\|_{C(0,T;L_2(Q))}^2 \leq k_{25} \|f\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}^q + k_{26} \|\psi\|_{L_2(Q)}^2, \quad (5.113)$$

$$\|w\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))}^p \leq k_{27} \|f\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}^q + k_{28} \|\psi\|_{L_2(Q)}^2, \quad (5.114)$$

где  $k_{25}, k_{26}, k_{27}, k_{28} > 0$  не зависят от  $w, f$  и  $\psi$ .

*Доказательство.* Так как выполнены условия 5.1–5.3, то существует разностный оператор  $R_Q : L_p(0, T; \dot{W}_p^1(Q)) \rightarrow L_p(0, T; W_{p,\gamma}^1(Q))$ , являющийся изоморфизмом, см. теорему 5.6. Воспользуемся теоремой 5.8 и рассмотрим эквивалентную задачу (5.60)–(5.61). В силу сильной аккретивности оператора  $R_Q^{-1}$  оператор  $\Delta_p R_Q$  деминепрерывен, ограничен, коэрцитивен и псевдомонотонен, см. леммы 4.5 и 4.7. Если  $\psi = 0$ , то  $\varphi = 0$  и  $\partial_t R_Q$  является максимально монотонным, см. лемму 5.5. Согласно [33, теорема 1.1, гл. 3, §1.4] существует решение  $u \in W$  задачи (5.60)–(5.61). Иначе мы, аналогично доказательству теоремы 5.10, можем рассмотреть фиксированный элемент  $\hat{u} \in W \subset C(0, T; L_2(Q))$  такой, что  $\hat{u}|_{t=0} = \varphi$ , и эквивалентное уравнение (5.98)–(5.99). По построению оператор  $\Delta_p R_Q(\cdot + \hat{u})$  деминепрерывен, ограничен, коэрцитивен и псевдомонотонен. Применяя [33, теорема 1.1, гл. III, §1], доказываем существование решения задачи (5.98)–(5.99). Следовательно, существует решение  $u \in W$  операторного уравнения (5.60) с начальным условием  $u|_{t=0} = \varphi$ .

Ограниченность множества решений следует из коэрцитивности оператора  $\Delta_p R_Q$  и ограниченности оператора  $R_Q$ , слабая компактность множества решений следует из псевдомонотонности оператора  $\Delta_p R_Q$  и непрерывности оператора  $R_Q$  (подробнее см. доказательство теоремы 5.11).

Для доказательства оценок (5.113), (5.114) докажем аналогичные оценки для решений  $u$  задачи (5.98)–(5.99) с оператором  $\Delta_p R_Q$ . Для них справедливо равенство

$$\langle \partial_t R_Q u, u \rangle + \langle \Delta_p R_Q u, u \rangle = \langle f, u \rangle. \quad (5.115)$$

Используем равенство (5.69) для первого слагаемого левой части (5.115) и оценку (4.47) для второго слагаемого левой части (5.115), а правую часть (5.115) распишем с помощью неравенства Гёльдера. Тогда

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\| \sqrt{R_Q^{sym}} u(T) \right\|_{L_2(Q)}^2 - \frac{1}{2} \left\| \sqrt{R_Q^{sym}} \varphi \right\|_{L_2(Q)}^2 + c_5^{-p} c_a \|u\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))}^p \leq \langle \partial_t R_Q u, u \rangle + \langle \Delta_p R_Q u, u \rangle \leq \\ & \leq \|f\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))} \|u\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))} \leq \frac{1}{q\varepsilon^q} \|f\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}^q + \frac{\varepsilon^p}{p} \|u\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))}^p. \end{aligned} \quad (5.116)$$

Выберем  $\varepsilon > 0$  так, что  $\varepsilon^p/p = c_5^{-p} c_a/2$ . Первое слагаемое левой части (5.116) неотрицательно,  $\varphi = R_Q \psi$ , следовательно

$$\frac{c_5^{-p} c_a}{2} \|u\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))}^p \leq \frac{1}{q\varepsilon^q} \|f\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}^q + \frac{1}{2} \left\| \sqrt{R_Q^{sym}} R_Q \psi \right\|_{L_2(Q)}^2,$$

т. е. в силу ограниченности оператора  $\sqrt{R_Q^{sym}} R_Q$

$$\|u\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))}^p \leq k_{29} \|f\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}^q + k_{30} \|\psi\|_{L_2(Q)}^2. \quad (5.117)$$

Так как  $w = R_Q u$ , а оператор  $R_Q$  ограничен и справедлива оценка (3.20), то из (5.117) следует (5.114).

С другой стороны, в силу неотрицательности  $\langle \Delta_p R_Q u, u \rangle$ ,

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left\| \sqrt{R_Q^{sym}} u(T) \right\|_{L_2(Q)}^2 \leq \langle f, u \rangle + \frac{1}{2} \left\| \sqrt{R_Q^{sym}} R_Q \psi \right\|_{L_2(Q)}^2 \leq \frac{1}{q} \|f\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}^q + \\ & + \frac{1}{p} \|u\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))}^p + k_{31} \|\psi\|_{L_2(Q)}^2 \leq k_{32} \|f\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}^q + k_{31} \|\psi\|_{L_2(Q)}^2. \end{aligned} \quad (5.118)$$

Так как  $w = R_Q u$ , а оператор  $R_Q$  ограничен и справедлива оценка (1.22), то из (5.118) следует (5.113).  $\square$

**Пример 5.13.** Рассмотрим задачу Бицадзе–Самарского (5.56)–(5.58) с  $p$ -лапласианом (продолжим рассмотрение задачи из примеров 5.10–5.12). Будем искать  $w$ , удовлетворяющее уравнению

$$\partial_t w + \Delta_p w = f, \quad w|_{t=0} = \psi \quad (5.119)$$

с нелокальными краевыми условиями (5.58). В примере 5.11 доказано, что краевым условиям (5.58) соответствует разностный оператор

$$Ru(x, t) = u(x_1, x_2, t) + \gamma_1 u(x_1 + 1, x_2, t) + \gamma_2 u(x_1 - 1, x_2, t)$$

с матрицей  $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & 1 \end{pmatrix}$ . Матрица  $R_1$  невырождена при  $\gamma_1 \gamma_2 \neq 1$ . При  $|\gamma_1 + \gamma_2| < 2$  оператор  $R_Q$  положительно определен, условия леммы 5.5 выполнены. Кроме того, обратному оператору  $R_Q^{-1}$  соответствует матрица

$$R_1^{-1} = \frac{1}{1 - \gamma_1 \gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -\gamma_1 \\ -\gamma_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

То есть, если

$$2 > \lambda |\gamma_1 - \gamma_2| + |\gamma_1 + \gamma_2|, \quad (5.120)$$

где  $\frac{\lambda^p}{\lambda + 1} \leq \frac{p^p}{(p-1)^{p-1}}$ , то оператор  $R_Q^{-1}$  сильно аккретивен, см. лемму 2.8. Следовательно, при выполнении оценки (5.120) выполнены условия теоремы 5.13, задача (5.56)–(5.58) имеет обобщенное решение.

**Пример 5.14.** На параллелепипеде  $\Omega_T = (0, 3) \times (0, 1) \times (0, T)$  рассмотрим уравнение (5.119) с нелокальными условиями

$$\left. \begin{aligned} w(x_1, 0, t) &= w(x_1, 1, t) = 0 && (0 \leq x_1 \leq 2; 0 < t < T), \\ w(0, x_2, t) &= 0,5 w(1, x_2, t) && (0 < x_2 < 1; 0 < t < T), \\ w(3, x_2, t) &= 0,5 w(2, x_2, t) && (0 < x_2 < 1; 0 < t < T). \end{aligned} \right\} \quad (5.121)$$

В соответствии со сдвигами, имеющимися в краевых условиях, разностный оператор должен иметь вид  $Ru(x) = \sum_{-2 \leq k \leq 2} a_k u(x_1 + k, x_2, t)$ . В силу симметричности краевых условий этому оператору соответствует симметрическая матрица

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_0 & a_1 \\ a_2 & a_1 & a_0 \end{pmatrix},$$

причем согласно условию 5.3  $R_Q$  соответствует краевым условиям, если

$$a_1 = 0,5a_0, \quad a_2 = 0,5a_1.$$

То есть

$$R_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & 1 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad R_{10} = \begin{pmatrix} 1 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Легко видеть, что матрицы  $R_1$  и  $R_{10}$  положительно определены. Обратная матрица

$$R_1^{-1} = \begin{pmatrix} 4/3 & -2/3 & 0 \\ -2/3 & 5/3 & -2/3 \\ 0 & -2/3 & 4/3 \end{pmatrix}$$

удовлетворяет критерию сильной аккретивности из леммы 2.8:  $4/3 > 2/3$ ;  $5/3 > 2/3 + 2/3$ . Следовательно, задача (5.119), (5.57), (5.121) имеет обобщенное решение для любых  $f \in L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$  и  $\psi \in L_2(Q)$ , см. теорему 5.13.

5.4. СУЩЕСТВОВАНИЕ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ПО  $t$  РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕЛОКАЛЬНЫМИ КРАЕВЫМИ УСЛОВИЯМИ ТИПА БИЦАДЗЕ—САМАРСКОГО

Как и выше, будем использовать разбиение области  $Q$  и построение множества  $\{\Gamma_{rj}\}$ , подробно изложенное в разделе 5.1,  $\Gamma_{rl}^T := \Gamma_{rl}(0, T) \times (0, T)$ , а также условия 5.1–5.3.

Рассмотрим дифференциальное уравнение (5.52), где дифференциальный оператор  $A$  задан формулой (3.4), с нелокальными краевыми условиями (5.54). Будем искать периодические по  $t$  решения задачи (5.52), (5.54) с периодом  $T$ , т. е.

$$w(x, 0) = w(x, T) \quad (x \in Q). \quad (5.122)$$

**Определение 5.7.** Будем называть функцию  $w \in W_\gamma$  обобщенным решением задачи (5.52), (5.54), (5.122), если она удовлетворяет операторному уравнению (5.59) и условию периодичности (5.122).

**Теорема 5.14.** Пусть выполнены условия 5.1–5.3, причем матрицы  $R_s$  и  $R_{s0}$  невырождены. Элемент  $u \in W$  является решением операторного уравнения (5.60) и удовлетворяет условию периодичности

$$u(x, 0) = u(x, T) \quad (5.123)$$

тогда и только тогда, когда  $R_Q u = w \in W_\gamma$  является решением операторного уравнения (5.58) и удовлетворяет условию периодичности (5.122).

Доказательство совпадает с доказательством теоремы 5.7. Надо только отметить, что поскольку оператор  $R_Q : C(0, T; L_2(Q)) \rightarrow C(0, T; L_2(Q))$  невырожден, то

$$u(x, 0) = R_Q^{-1} w(x, 0) = R_Q^{-1} w(x, T) = u(x, T).$$

Как известно, оператор  $\partial_t : \mathcal{D}(\partial_t) \rightarrow \mathcal{V}^*$  с областью определения

$$\mathcal{D}(\partial_t) := \{u \in \mathcal{V} : \partial_t u \in \mathcal{V}^*, u(x, 0) = u(x, T)\}. \quad (5.124)$$

является максимально монотонным, см., например, [33, гл. 3, §2]. Докажем это свойство для  $\partial_t R_Q : W \rightarrow \mathcal{V}^*$ .

**Лемма 5.7.** Пусть оператор  $R_Q$  невырожденный<sup>1</sup>. Тогда оператор  $\partial_t R_Q$  с областью определения

$$\mathcal{D}(\partial_t R_Q) := \{u \in \mathcal{V} : \partial_t u \in \mathcal{V}^*, u(x, 0) = u(x, T)\},$$

максимально монотонен.

*Доказательство.* По построению  $\mathcal{D}(\partial_t R_Q) \subset W$ . Кроме того,  $(\partial_t R_Q)^* = R_Q^* \partial_t^* = \partial_t^* R_Q^* = -\partial_t R_Q^*$ . То есть  $\mathcal{D}(\partial_t R_Q)^* \subset W$ . Заметим, что

$$(R_Q u(t), u(t))_{L_2(Q)} = (u(t), R_Q^* u(t))_{L_2(Q)} = (R_Q^{sym} u(t), u(t))_{L_2(Q)}.$$

Более того, согласно правилам дифференцирования,

$$\begin{aligned} \partial_t (R_Q u(t), u(t))_{L_2(Q)} &= (\partial_t R_Q u(t), u(t))_{L_2(Q)} + (R_Q u(t), \partial_t u(t))_{L_2(Q)} = \\ &= (R_Q \partial_t u(t), u(t))_{L_2(Q)} + (u(t), R_Q^* \partial_t u(t))_{L_2(Q)} = 2 \left( \partial_t R_Q^{sym} u(t), u(t) \right)_{L_2(Q)}. \end{aligned}$$

Поскольку  $\langle \partial_t R_Q^{sk} u, u \rangle = 0$  и  $u(x, T) = u(x, 0)$ , получаем, что

$$\begin{aligned} \langle \partial_t R_Q u, u \rangle &= \langle \partial_t R_Q^{sym} u, u \rangle = \int_0^T \left( \partial_t R_Q^{sym} u(\tau), u(\tau) \right)_{L_2(Q)} d\tau = \\ &= \frac{1}{2} \left( R_Q^{sym} u(T), u(T) \right)_{L_2(Q)} - \frac{1}{2} \left( R_Q^{sym} u(0), u(0) \right)_{L_2(Q)} = 0. \end{aligned}$$

С другой стороны, в силу невырожденности оператора,

$$\langle (\partial_t R_Q)^* u, u \rangle = -\langle \partial_t R_Q^* u, u \rangle = -\langle \partial_t R_Q^{sym} u, u \rangle = 0.$$

Условие (5.67) для оператора  $\Lambda = \partial_t R_Q$  выполнено, оператор  $\partial_t R_Q$  максимально монотонен, см. [33, лемма 1.1, гл. 3].  $\square$

Сформулируем теоремы существования решений.

**Теорема 5.15.** Пусть выполнены условия 5.1–5.3. Пусть  $R_s + R_s^* > 0$  ( $s = s(r)$ ,  $r \in B$ ). Пусть линейный дифференциальный оператор  $A$ , заданный в (5.70), таков, что  $A_{ij} \in C^\infty(\mathbb{R}^{n+1})$ ,  $A_{ij}(x, t) = A_{ij}(x, t)$  ( $i, j = 0, 1, \dots, n$ ), причем  $A_{ij}$   $M$ -периодичны для  $i, j = 1, \dots, n$  (т. е.  $A_{ij}(x + h, t) = A_{ij}(x, t)$  для всех  $h \in M$ ) и справедлива оценка (5.71). Тогда для любого  $f \in L_2(0, T; W_2^{-1}(Q))$  существует единственное обобщенное решение задачи (5.52), (5.54), (5.122), причем справедливы оценки

$$\|w_1 - w_2\|_{L_2(0, T; W_2^1(Q))} \leq k_{33} \|f_1 - f_2\|_{L_2(0, T; W_2^{-1}(Q))}, \quad (5.125)$$

где  $w_1$  и  $w_2$  — решения задачи (5.52), (5.54), (5.122) при правых частях  $f_1$  и  $f_2$ ,  $k_{33} > 0$  не зависит от  $w_i$  и  $f_i$ .

*Доказательство.* В силу выполнения условий 5.1–5.3 существует разностный оператор  $R_Q$ , соответствующий нелокальным краевым условиям. Поскольку  $R_s^{sym} > 0$ , то матрицы  $R_s$  и  $R_{s0}$  невырождены, т. е. соответствующий оператор  $R_Q$  является изоморфизмом, см. теорему 5.6, а оператор  $\partial_t R_Q$  максимально монотонен, см. лемму 5.7. Также условие  $R_s^{sym} > 0$ ,  $M$ -периодичность коэффициентов и оценка (5.71) гарантируют, что оператор  $A_R = AR_Q$  деминепрерывен, ограничен и сильно эллиптичен, см. лемму 5.6. То есть выполнены условия теоремы 1.1 из [33, гл. III, §1], операторное уравнение (5.60) с условием периодичности (5.123) имеет решение  $u \in W$ . Монотонность оператора  $A_R$  гарантирует единственность решения. Согласно этому результату и теореме 5.14,  $w = R_Q u$  — обобщенное решение задачи (5.52), (5.54), (5.122).

<sup>1</sup>Напомним, что оператор  $R_Q$  невырожден тогда и только тогда, когда для всех  $s$  матрицы  $R_s$  невырождены.

Оценка (5.125) следует из сильной эллиптичности оператора  $A_R$ . Не нарушая общности, будем считать, что  $k_7 = 0$ , иначе перейдем к вспомогательным функциям, как в теореме 5.8, т. е.

$$\langle A_R u, u \rangle \geq k_6 \|u\|_{L_2(0,T; \dot{W}_2^1(Q))}^2.$$

Пусть  $u_1 = R_Q^{-1} w_1$  и  $u_2 = R_Q^{-1} w_2$ . Тогда

$$\langle A_R u_1 - A_R u_2, u_1 - u_2 \rangle = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle.$$

Воспользуемся сильной эллиптичностью:

$$\begin{aligned} k_6 \|u_1 - u_2\|_{L_2(0,T; \dot{W}_2^1(Q))}^2 &\leq \langle A_R u_1 - A_R u_2, u_1 - u_2 \rangle = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle \leq \\ &\leq \|f_1 - f_2\|_{L_2(0,T; W_2^{-1}(Q))} \|u_1 - u_2\|_{L_2(0,T; \dot{W}_2^1(Q))}. \end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \|w_1 - w_2\|_{L_2(0,T; W_2^1(Q))} &= \|R_Q u_1 - R_Q u_2\|_{L_2(0,T; W_2^1(Q))} \leq \\ &\leq c_5 (c_{18} + 1) \|u_1 - u_2\|_{L_2(0,T; \dot{W}_2^1(Q))} \leq \frac{c_5}{k_6} (c_{18} + 1) \|f_1 - f_2\|_{L_2(0,T; W_2^{-1}(Q))}, \end{aligned}$$

где константа  $c_5$  из оценки (3.20), а  $c_{18}$  — из неравенства Фридрихса, что доказывает оценку (5.125).  $\square$

**Пример 5.15.** Рассмотрим параболическую задачу с лапласианом:

$$\partial_t w(x, t) - \Delta w(x, t) = f(t, x) \quad (x \in Q), \tag{5.126}$$

где  $f \in L_2(\Omega_T)$ , с нелокальными краевыми условиями Бицадзе—Самарского

$$\left. \begin{aligned} w(x_1, 0, t) = w(x_1, 1, t) = 0 & \quad (0 \leq x_1 \leq 2, t \in (0, T)), \\ w(0, x_2, t) = \gamma_1 w(1, x_2, t) & \quad (0 < x_2 < 1, t \in (0, T)), \\ w(2, x_2, t) = \gamma_2 w(1, x_2, t) & \quad (0 < x_2 < 1, t \in (0, T)). \end{aligned} \right\} \tag{5.127}$$

Как показано в примерах 5.10–5.12, этим краевым условиям соответствует разностный оператор  $Ru(t, x) = u(t, x) + \gamma_1 u(t, x_1 + 1, x_2) + \gamma_2 u(t, x_1 - 1, x_2)$  с матрицей  $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & 1 \end{pmatrix}$ . Матрица  $R_1$  невырождена при  $\gamma_1 \gamma_2 \neq 1$ . При  $|\gamma_1 + \gamma_2| < 2$  оператор  $R_Q$  положительно определен, условия леммы 5.7 и теоремы 5.15 выполнены. В силу теоремы 5.15 задача (5.126)–(5.127) имеет единственное периодическое по  $t$  с периодом  $T$  решение для любого  $f \in L_2(\Omega_T)$  при  $|\gamma_1 + \gamma_2| < 2$ .

**Теорема 5.16.** Пусть выполнены условия 5.1–5.3,  $R_s + R_s^* > 0$  ( $s = s(r)$ ,  $r \in B$ ). Предположим, что дифференциальный оператор  $A$  задан функциями  $A_i(x, t, \xi)$ , измеримыми по  $(x, t) \in \Omega_T$ , непрерывными по  $\xi$  для п.в.  $(x, t) \in \Omega_T$ , для которых выполнены условия интегрируемости (3.8), дифференцируемости (3.22) для  $i, j = 0, 1, \dots, n$  и сильной эллиптичности (3.21),  $p \in [2, \infty)$ . Тогда для любого  $f \in L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$  существует единственное обобщенное решение задачи (5.52), (5.54), (5.122), причем справедливы оценки

$$\|w_1 - w_2\|_{L_p(0,T; W_p^1(Q))} \leq k_{34} \|f_1 - f_2\|_{L_q(0,T; W_q^{-1}(Q))}^{1/(p-1)}, \tag{5.128}$$

где  $w_1$  и  $w_2$  — решения задачи (5.52), (5.54), (5.122) при правых частях  $f_1$  и  $f_2$ ,  $k_{34} > 0$  не зависит от  $w_i$  и  $f_i$ .

*Доказательство.* В силу выполнения условий 5.1–5.3 существует разностный оператор  $R_Q$ , соответствующий нелокальным краевым условиям. Поскольку  $R_s^{sym} > 0$ , то матрицы  $R_s$  и  $R_{s0}$  невырождены, т. е. соответствующий оператор  $R_Q$  является изоморфизмом, см. теорему 5.6, а оператор  $\partial_t R_Q$  максимально монотонен, см. лемму 5.7. В силу оценки интегрируемости (3.8) оператор  $A_R$  деминепрерывен и ограничен, см. лемму 3.8, а в силу условий (3.21)–(3.22) — сильно эллиптичен (сильно монотонен), см. лемму 3.9. То есть выполнены условия теоремы 1.1 из [33, гл. III, §1], операторное уравнение (5.60) с условием периодичности (5.123) имеет решение  $u \in W$ . Монотонность оператора  $A_R$  гарантирует единственность решения. Согласно этому результату и теореме 5.14,  $w = R_Q u$  — обобщенное решение задачи (5.52), (5.54), (5.122).

Оценка (5.125) следует из сильной монотонности оператора  $A_R$ , т. е.

$$\langle A_R u_1 - A_R u_2, u_1 - u_2 \rangle \geq c_9 \|u_1 - u_2\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))}^2.$$

Пусть  $u_1 = R_Q^{-1} w_1$  и  $u_2 = R_Q^{-1} w_2$ . Тогда

$$\begin{aligned} c_9 \|u_1 - u_2\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))}^p &\leq \langle A_R u_1 - A_R u_2, u_1 - u_2 \rangle = \langle f_1 - f_2, u_1 - u_2 \rangle \leq \\ &\leq \|f_1 - f_2\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))} \|u_1 - u_2\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))}, \end{aligned}$$

следовательно,

$$\begin{aligned} \|w_1 - w_2\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))} &= \|R_Q u_1 - R_Q u_2\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))} \leq c_5 (c_{18} + 1) \|u_1 - u_2\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))} \leq \\ &\leq c_5 (c_{18} + 1) c_9^{1/(p-1)} \|f_1 - f_2\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}^{1/(p-1)}, \end{aligned}$$

где константа  $c_5$  из оценки (3.20), а  $c_{18}$  — из неравенства Фридрихса, что доказывает оценку (5.128).  $\square$

**Теорема 5.17.** Пусть выполнены условия 5.1–5.3;  $R_s^{sym} > 0$  ( $s = s(r)$ ,  $r \in B$ ); дифференциальный оператор  $A$  задан функциями  $A_i(x, t, \xi)$ , измеримыми по  $(x, t) \in \Omega_T$ , непрерывными по  $\xi$  для п.в.  $(x, t) \in \Omega_T$ , для которых справедливо условия интегрируемости (3.8), дифференцируемости (3.22) для  $i, j = 1, \dots, n$ , сильной эллиптичности (3.39) и коэрцитивности (3.42)–(3.43),  $p \in [2, \infty)$ .

Тогда для любого  $f \in L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$  существует ограниченное и слабо замкнутое множество обобщенных решений задачи (5.52), (5.54), (5.122).

*Доказательство.* В силу выполнения условий 5.1–5.3 существует разностный оператор  $R_Q$ , соответствующий нелокальным краевым условиям, причем  $R_Q$  является изоморфизмом, см. теорему 5.6, а оператор  $\partial_t R_Q$  максимально монотонен, см. лемму 5.7. В силу оценки интегрируемости (3.8) оператор  $A_R$  деминепрерывен и ограничен. Кроме того,  $A_R$  коэрцитивен и обладает свойством  $(S_+)$  на  $W$ , см. леммы 3.11 и 3.10. Условия теоремы 1.2 из [33, гл. III, §1] выполнены, операторное уравнение (5.60) с условием периодичности (5.122) имеет решение  $u \in W$ . Ограниченность множества решений следует из коэрцитивности оператора  $A_R$ , а слабая замкнутость — из псевдомонотонности на  $W$  оператора  $A_R$ . Согласно этому результату и теореме 5.14 множество обобщенных решений задачи (5.52), (5.54), (5.122) непусто, ограничено, слабо замкнуто и состоит из элементов  $w = R_Q u$ , где  $u \in W$  — решение уравнения (5.60) с условием периодичности (5.123).  $\square$

**Теорема 5.18.** Пусть выполнены условия 5.1–5.3;  $R_s$  и  $R_{s_0}$  ( $s = s(r)$ ,  $r \in B$ ) невырождены; дифференциальный оператор  $A$  задан функциями  $A_i(x, t, \xi)$ , измеримыми по  $(x, t) \in \Omega_T$ , непрерывными по  $\xi$  для п.в.  $(x, t) \in \Omega_T$ , кроме того, справедливы условия (A1)–(A3) из главы 4. Тогда для любого  $f \in \mathcal{V}^*$  существует ограниченное и слабо замкнутое множество обобщенных решений задачи (5.52), (5.54), (5.122).

*Доказательство.* В силу выполнения условий 5.1–5.3 существует разностный оператор  $R_Q$ , соответствующий нелокальным краевым условиям, причем  $R_Q$  является изоморфизмом, см. теорему 5.6, а оператор  $\partial_t R_Q$  максимально монотонен, см. лемму 5.7. В силу условия интегрируемости (A1) оператор  $A_R$  деминепрерывен и ограничен, см. лемму 3.9. Из оценки (A2) следует коэрцитивность оператора  $A_R$ , см. лемму 4.1. При выполнении условий эллиптичности (A3) и коэрцитивности (A2) оператор  $A_R$  обладает свойством  $(S_+)$  на  $W$  и псевдомонотонен на  $W$ , см. лемму 4.3. Условия теоремы 1.2 из [33, гл. III, §1] выполнены, операторное уравнение (5.60) с условием периодичности (5.122) имеет решение  $u \in W$ . Ограниченность множества решений следует из коэрцитивности оператора  $A_R$ , а слабая замкнутость — из псевдомонотонности на  $W$  оператора  $A_R$ . Согласно этому результату и теореме 5.14 множество обобщенных решений задачи (5.52), (5.54), (5.122) непусто, ограничено, слабо замкнуто и состоит из элементов  $w = R_Q u$ , где  $u \in W$  — решение уравнения (5.60) с условием периодичности (5.123).  $\square$

**Теорема 5.19.** Пусть выполнены условия 5.1–5.3;  $R_s$  и  $R_{s_0}$  ( $s = s(r)$ ,  $r \in B$ ) невырождены; обратный оператор  $R_Q^{-1}$  сильно аккретивен. Тогда для любого  $f \in L_q(0, T; W_q^{-1}(Q))$  существует

ограниченное и слабо замкнутое множество обобщенных решений задачи (5.52), (5.54), (5.122) с дифференциальным оператором  $A = \Delta_p$ , причем для каждого решения справедлива оценка

$$\|w\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))} \leq k_{35} \|f\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}^{1/(p-1)}, \tag{5.129}$$

где  $c_{35} > 0$ .

*Доказательство.* В силу выполнения условий 5.1–5.3 существует разностный оператор  $R_Q$ , соответствующий нелокальным краевым условиям. Поскольку матрицы  $R_s$  и  $R_{s0}$  невырождены, т. е. соответствующий оператор  $R_Q$  является изоморфизмом, см. теорему 5.6, а оператор  $\partial_t R_Q$  максимально монотонен, см. лемму 5.7. Сильная аккретивность оператора  $R_Q^{-1}$  гарантирует, что оператор  $\Delta_p R_Q$  деминепрерывен, ограничен и псевдомонотонен, см. леммы 4.5 и 4.7. То есть выполнены условия теоремы 1.1 из [33, гл. III, §1], операторное уравнение (5.60) с условием периодичности (5.123) имеет решение  $u \in W$ . Ограниченность множества решений следует из коэрцитивности оператора  $\Delta_p R_Q$ , а слабая замкнутость — из псевдомонотонности оператора  $\Delta_p R_Q$ . Согласно этому результату и теореме 5.14 множество обобщенных решений задачи (5.52), (5.54), (5.122) непусто, ограничено, слабо замкнуто и состоит из элементов  $w = R_Q u$ , где  $u \in W$  — решение уравнения (5.60) с условием периодичности (5.123). Оценка (5.129) следует из условия коэрцитивности оператора  $\Delta_p R_Q$ :

$$c_a \|u\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))}^p \leq \langle A_R u, u \rangle = \langle f, u \rangle - \langle \partial_t R_Q u, u \rangle \leq \|f\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))} \|u\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))},$$

поскольку  $\langle \partial_t R_Q u, u \rangle = 0$ . Тогда

$$\begin{aligned} \|w\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))} &= \|R_Q u\|_{L_p(0,T;W_p^1(Q))} \leq c_5 (c_{18} + 1) \|u\|_{L_p(0,T;\dot{W}_p^1(Q))} \leq \\ &\leq c_5 (c_{18} + 1) c_a^{1/(p-1)} \|f\|_{L_q(0,T;W_q^{-1}(Q))}^{1/(p-1)}, \end{aligned}$$

где константа  $c_5$  из оценки (3.20), а  $c_{18}$  — из неравенства Фридрихса, что доказывает оценку (5.129). □

**Пример 5.16.** Рассмотрим уравнение

$$\partial_t w + \Delta_p w = f, \quad w|_{t=0} = \psi, \tag{5.130}$$

с нелокальным краевым условиям (5.127). В примере 5.11 доказано, что данным краевым условиям соответствует разностный оператор

$$Ru(t, x) = u(t, x) + \gamma_1 u(t, x_1 + 1, x_2) + \gamma_2 u(t, x_1 - 1, x_2)$$

с матрицей  $R_1 = \begin{pmatrix} 1 & \gamma_1 \\ \gamma_2 & 1 \end{pmatrix}$ . Матрица  $R_1$  невырождена при  $\gamma_1 \gamma_2 \neq 1$ . Кроме того, обратному оператору  $R_Q^{-1}$  соответствует матрица

$$R_1^{-1} = \frac{1}{1 - \gamma_1 \gamma_2} \begin{pmatrix} 1 & -\gamma_1 \\ -\gamma_2 & 1 \end{pmatrix}.$$

То есть, если

$$2 > \lambda^{-1} |\gamma_1 - \gamma_2| + |\gamma_1 + \gamma_2|, \tag{5.131}$$

где  $\frac{\lambda^p}{\lambda + 1} \leq \frac{p^p}{(p-1)^{p-1}}$ , то оператор  $R_Q^{-1}$  сильно аккретивен, см. лемму 2.8. Следовательно, при выполнении оценки (5.131) выполнены условия теоремы 5.19, задача (5.130), (5.127) имеет периодическое по  $t$  решение с периодом  $T$ .

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бадерко Е. А., Черепова М. Ф. Задача Бицадзе—Самарского для параболической системы на плоскости // Докл. РАН. — 2016. — 471, № 5. — С. 517–519.
2. Беллман Р., Кук К. Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967.
3. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических задач // Докл. АН СССР. — 1969. — 185, № 4. — С. 739–740.

4. *Вайнберг М. М.* Вариационный метод и метод монотонных операторов в теории нелинейных уравнений. — М.: Наука, 1972.
5. *Вентцель А. Д.* О граничных условиях для многомерных диффузионных процессов// Теор. вер. и ее примен. — 1959. — 4, № 2. — С. 172–185.
6. *Вишик М. И.* Об общих краевых задачах для эллиптических дифференциальных уравнений// Тр. Моск. мат. об-ва — 1952. — 1. — С. 187–264.
7. *Вишик М. И.* О разрешимости первой краевой задачи для нелинейных эллиптических систем дифференциальных уравнений// Докл. АН СССР. — 1960. — 134, № 4. — С. 749–752.
8. *Вишик М. И.* О разрешимости краевых задач для квазилинейных параболических уравнений высших порядков// Мат. сб. — 1962. — 59. — С. 289–325.
9. *Вишик М. И., Ладыженская О. А.* Краевые задачи для уравнений в частных производных и некоторых классов операторных уравнений// Усп. мат. наук. — 1956. — 11, № 6. — С. 41–97.
10. *Власов В. В., Медведев Д. А.* Об асимптотических свойствах решений функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2006. — 15. — С. 112–125.
11. *Власов В. В., Медведев Д. А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2008. — 30. — С. 3–173.
12. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: МАКС Пресс, 2016.
13. *Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С.* Спектральный анализ и корректная разрешимость абстрактных интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2011. — 39. — С. 36–65.
14. *Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С.* Исследование операторных моделей, возникающих в задачах наследственной механики// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2012. — 45. — С. 43–61.
15. *Гаевский Х., Грегер К., Захарьас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторно-дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978.
16. *Гантмахер Ф. Р.* Теория матриц. — М.: Наука, 1967.
17. *Гуревич П. Л.* Эллиптические задачи с нелокальными краевыми условиями и полугруппы Феллера// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — 38. — С. 3–173.
18. *Гуцин А. К., Михайлов В. П.* О разрешимости нелокальных задач для эллиптического уравнения второго порядка// Мат. сб. — 1994. — 185, № 4. — С. 121–160.
19. *Дубинский Ю. А.* Квазилинейные эллиптические и параболические уравнения любого порядка// Усп. мат. наук. — 1968. — 23, № 1. — С. 45–90.
20. *Дубинский Ю. А.* Нелинейные эллиптические и параболические уравнения// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. — 1976. — 9. — С. 5–130.
21. *Житарашу Н. В., Эйдельман С. Д.* Нелокальные граничные задачи для эллиптических уравнений// Мат. иссл. — 1971. — 6, № 2. — С. 63–73.
22. *Ильин В. А., Моисеев Е. И.* Нелокальная краевая задача второго рода для оператора Штурма—Лиувилля// Дифф. уравн. — 1987. — 23, № 8. — С. 1422–1431.
23. *Иванова Е. П.* Методы исследования дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов// Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. — 2022. — 204. — С. 44–52.
24. *Иваненко В. И., Мельник В. С.* Вариационные методы в задачах управления для систем с распределенными параметрами. — Киев: Наукова думка, 1988.
25. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
26. *Кадец В. М.* Курс функционального анализа. — Харьков: ХНУ, 2004.
27. *Качуровский Р. И.* О монотонных операторах и выпуклых функционалах// Усп. мат. наук. — 1960. — 15, № 4. — С. 213–215.
28. *Кишкис К. Ю.* К теории нелокальных задач для уравнения Лапласа// Дифф. уравн. — 1989. — 25, № 1. — С. 59–64.
29. *Красносельский М. А.* Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. — М.: Гостехиздат, 1956.
30. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1973.
31. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1973.
32. *Лийко В. В., Скубачевский А. Л.* Смешанные задачи для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений в цилиндре// Мат. заметки. — 2020. — 107, № 5. — С. 693–716.
33. *Лионс Ж.-Л.* Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: Мир, 1972.

34. Лионс Ж.-Л., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
35. Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. — М.: ГИТТЛ, 1951.
36. Мельник В. С., Згуровский М. З. Нелинейный анализ и управление бесконечномерными системами. — Киев: Наукова думка, 1999.
37. Моисеев Е. И. Об отсутствии свойства базисности у системы корневых функций одной нелокальной краевой задачи// Дифф. уравн. — 1994. — 30, № 12. — С. 2082–2093.
38. Муравник А. Б. Об асимптотике решений некоторых параболических уравнений с нелокальными старшими членами// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2006. — 25. — С. 143–183.
39. Муравник А. Б. Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства задачи Коши// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — 52. — С. 3–143.
40. Муравник А. Б. О задаче Дирихле в полуплоскости для дифференциально-разностных эллиптических уравнений// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — 60. — С. 102–113.
41. Мышкис А. Д. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом// Усп. мат. наук. — 1977. — 32, № 2. — С. 173–202.
42. Мышкис А. Д. Смешанные функционально-дифференциальные уравнения// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2003. — 4. — С. 5–120.
43. Онанов Г. Г., Скубачевский А. Л. Дифференциальные уравнения со смещенными аргументами в стационарных задачах механики деформируемого тела// Совет. прикл. мех. — 1979. — 15. — С. 391–397.
44. Панеях Б. П. О некоторых нелокальных краевых задачах для линейных дифференциальных операторов// Мат. заметки. — 1984. — 35, № 3. — С. 425–434.
45. Подъяпольский В. В., Скубачевский А. Л. Спектральная асимптотика сильно эллиптических дифференциально-разностных операторов// Дифф. уравн. — 1999. — 35, № 6. — С. 793–800.
46. Попов В. А., Скубачевский А. Л. Априорные оценки для эллиптических дифференциально-разностных операторов с вырождением// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — 36. — С. 125–142.
47. Похожаев С. И. О разрешимости нелинейных уравнений с нечетными операторами// Функц. анализ и его прилож. — 1967. — 1, № 3. — С. 66–73.
48. Похожаев С. И., Дубинский Ю. А. Об одном классе операторов и разрешимости квазилинейных дифференциальных уравнений// Мат. сб. — 1967. — 72, № 2. — С. 226–236.
49. Рабинович В. С. О дифференциально-разностных уравнениях в полупространстве// Дифф. уравн. — 1980. — 16, № 11. — С. 2030–2038.
50. Рабинович В. С. О задаче Коши для параболических дифференциально-разностных операторов с переменными коэффициентами// Дифф. уравн. — 1983. — 19, № 6. — С. 1032–1038.
51. Разгулин А. В., Романенко Т. Е. Вращающиеся волны в параболическом функционально-дифференциальном уравнении с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2013. — 53, № 11. — С. 1804–1821.
52. Ройтберг Я. А., Шефтель З. Г. Нелокальные задачи для эллиптических уравнений и систем// Сиб. мат. ж. — 1972. — 13, № 1. — С. 165–181.
53. Россовский Л. Е. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — 54. — С. 3–138.
54. Россовский Л. Е., Ханалыев А. Р. Коэрцитивная разрешимость нелокальных краевых задач для параболических уравнений// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — 62. — С. 140–151.
55. Самарский А. А. О некоторых проблемах теории дифференциальных уравнений// Дифф. уравн. — 1980. — 16, № 1. — С. 1925–1935.
56. Селицкий А. М. Третья краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — 21. — С. 114–132.
57. Скритник И. В. Методы исследования нелинейных эллиптических граничных задач. — М.: Наука, 1990.
58. Скубачевский А. Л. Гладкость обобщенных решений первой краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения// Мат. заметки. — 1983. — 34, № 1. — С. 105–112.
59. Скубачевский А. Л. Эллиптические задачи с нелокальными условиями вблизи границы// Мат. сб. — 1986. — 129, № 2. — С. 279–302.
60. Скубачевский А. Л. О некоторых задачах для многомерных диффузионных процессов// Докл. АН СССР. — 1989. — 307, № 2. — С. 287–291.
61. Скубачевский А. Л. О собственных значениях и собственных функциях некоторых нелокальных краевых задач// Дифф. уравн. — 1989. — 25, № 1. — С. 127–136.
62. Скубачевский А. Л. Модельные нелокальные задачи для эллиптических уравнений в двугранных углах// Дифф. уравн. — 1990. — 26, № 1. — С. 120–131.

63. *Скубачевский А. Л.* О методе срезающих функций в теории нелокальных задач// Дифф. уравн. — 1991. — 27, № 1. — С. 128–139.
64. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами// Докл. АН СССР. — 1992. — 324, № 6. — С. 1155–1158.
65. *Скубачевский А. Л.* О некоторых свойствах эллиптических и параболических функционально-дифференциальных уравнений// Усп. мат. наук. — 1996. — 51, № 1. — С. 169–170.
66. *Скубачевский А. Л.* О бифуркации Хопфа для квазилинейного параболического функционально-дифференциального уравнения// Дифф. уравн. — 1998. — 34, № 10. — С. 1394–1401.
67. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. I// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — 26. — С. 3–132.
68. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. II// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — 33. — С. 3–179.
69. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — 71, № 5. — С. 3–112.
70. *Скубачевский А. Л., Селицкий А. М.* Вторая краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения// Усп. мат. наук. — 2007. — 62, № 1. — С. 207–208.
71. *Скубачевский А. Л., Шамин Р. В.* Первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения// Мат. заметки. — 1999. — 66, № 1. — С. 145–153.
72. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М.: Наука, 1988.
73. *Солдатов А. П.* Задача Бицадзе—Самарского для функций, аналитических по Дуглису// Дифф. уравн. — 2005. — 41, № 3. — С. 396–407.
74. *Солонуха О. В.* О нелинейной параболической задаче с препятствием// Усп. мат. наук. — 2004. — 59, № 3. — С. 181–182.
75. *Солонуха О. В.* О существовании решений нелинейных параболических вариационных неравенств с односторонними ограничениями// Мат. заметки. — 2005. — 77, № 3. — С. 460–476.
76. *Солонуха О. В.* Об одном классе существенно нелинейных эллиптических дифференциально-разностных уравнений// Тр. МИАН. — 2013. — 283. — С. 226–244.
77. *Солонуха О. В.* Об одной нелинейной нелокальной задаче эллиптического типа// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2017. — 57, № 3. — С. 60–72.
78. *Солонуха О. В.* Об одном эллиптическом дифференциально-разностном уравнении с несимметричным оператором сдвигов// Мат. заметки. — 2018. — 104, № 4. — С. 604–620.
79. *Солонуха О. В.* Обобщенные решения квазилинейных эллиптических дифференциально-разностных уравнений// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2020. — 60, № 12. — С. 2085–2097.
80. *Солонуха О. В.* О разрешимости линейной параболической задачи с нелокальными краевыми условиями// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2021. — 67, № 2. — С. 349–362.
81. *Солонуха О. В.* О периодических решениях параболических квазилинейных уравнений с краевыми условиями типа Бицадзе—Самарского// Докл. РАН. — 2022. — 503. — С. 83–86.
82. *Солонуха О. В.* О разрешимости нелинейных параболических функционально-дифференциальных уравнений со сдвигами по пространственным переменным// Мат. заметки. — 2023. — 113, № 5. — С. 757–773.
83. *Стернин Б. Ю., Шаталов В. Е.* Расширение алгебры псевдодифференциальных операторов и некоторые нелокальные эллиптические задачи// Мат. сб. — 1994. — 185, № 3. — С. 117–160.
84. *Тамаркин Я. Д.* О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений и о разложении произвольных функций в ряды. — Петроград: Тип. М. П. Фроловой, 1917.
85. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984.
86. *Bade W. G., Freeman R. S.* Closed extensions of the Laplace operator determined by a general class of boundary conditions// Pacific J. Math. — 1962. — 12, № 2. — С. 395–410.
87. *Beals R.* Nonlocal elliptic boundary value problems// Bull. Am. Math. Soc. — 1964. — 70, № 5. — С. 693–696.
88. *Brézis H.* Équations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité// Ann. Inst. Fourier. — 1968. — 18. — С. 115–175.
89. *Browder F.* Non-local elliptic boundary value problems// Am. J. Math. — 1964. — 86, № 4. — С. 735–750.
90. *Browder F. E., Hess P.* Nonlinear mappings of monotone type in Banach spaces// J. Funct. Anal. — 1972. — 11, № 2. — С. 251–294.
91. *Hartman P., Stampacchia G.* On some nonlinear elliptic differential functional equations// Acta Math. — 1966. — 115. — С. 271–310.

92. *Grubb G.* A characterization of the non-local boundary value problems associated with elliptic operator// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. — 1968. — 22, № 3. — С. 425–513.
93. *Guan Z., Kartsatos A. G., Skrypnik I. V.* Ranges of densely defined generalized pseudomonotone perturbations of maximal monotone operators// J. Differ. Equ. — 2003. — 188. — С. 332–351.
94. *Feller W.* The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations// Ann. Math. — 1952. — 55. — С. 468–519.
95. *Feller W.* Diffusion processes in one dimension// Trans. Am. Math. Soc. — 1954. — 77. — С. 1–30.
96. *Kartsatos A. G., Skrypnik I. V.* On the eigenvalue problems for perturbed nonlinear maximal monotone operators in reflexive Banach spaces// Trans. Am. Math. Soc. — 2006. — 358, № 9. — С. 3851–3881.
97. *Minty G. J.* Monotone (non-linear) operator in Hilbert space// Duke Math. J. — 1962. — 29. — С. 341–346.
98. *Onanov G. G., Skubachevskii A. L.* Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells// Math. Model. Nat. Phenom. — 2017. — 12, № 6. — С. 192–207.
99. *Picone M.* I teoremi d'esistenza per gli integrali di una equazione differenziale lineare ordinaria soddisfacenti ad una nuova classe di condizioni// Rom. Acc. L. Rend. — 1908. — 17, № 1. — С. 340–347.
100. *Picone M.* Equazione integrale traduce il più generale problema lineare per le equazioni differenziali lineari ordinarie di qualsivoglia ordine// Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. — 1932. — 15. — С. 942–948.
101. *Razgulin A. V.* Rotational multi-petal waves in optical systems with 2-D feedback// В сб.: «Chaos in Optics. Proceedings SPIE». — 1993. — 2039. — С. 342–352.
102. *Sato K., Ueno T.* Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary// J. Math. Kyoto Univ. — 1965. — 4. — С. 295–298.
103. *Schechter M.* Nonlocal elliptic boundary value problems// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. — 1966. — 20, № 2. — С. 421–441.
104. *Skubachevskii A. L.* The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations// J. Differ. Equ. — 1986. — 63. — С. 332–361.
105. *Skubachevskii A. L.* On the stability of index of nonlocal elliptic problems// J. Math. Anal. Appl. — 1991. — 160, № 2. — С. 323–341.
106. *Skubachevskii A. L.* Elliptic Functional Differential Equations and Applications. — Basel–Boston–Berlin: Birkhäuser, 1997.
107. *Skubachevskii A. L.* Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics// Nonlinear Anal. — 1998. — 32. — С. 261–278.
108. *Solonukha O. V.* On nonlinear and quasilinear elliptic functional differential equations// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S. — 2016. — 9, № 3. — С. 847–868.
109. *Solonukha O. V.* The criteria of accretivity of differential operators described by the  $2 \times 2$  matrices and its applications// В сб.: «XXVIII Крымская Осенняя Математическая Школа-симпозиум по спектральным и эволюционным задачам (КРОМШ-2017). Сборник материалов международной конференции». — Симферополь: ДИАЙПИ, 2017. — С. 124–128.
110. *Solonukha O. V.* The first Boundary Value Problem for Quasilinear Parabolic Differential-Difference Equations// Lobachevskii J. Math. — 2021. — 42, № 5. — С. 1067–1077.
111. *Solonukha O. V.* On periodic solutions of linear parabolic problems with nonlocal boundary conditions// Тавр. вестн. инф. и мат. — 2021. — 51, № 2. — С. 7–11.
112. *Solonukha O. V.* On nonlinear nonlocal parabolic problem// Russ. J. Math. Phys. — 2022. — 29, № 1. — С. 121–140.
113. *Sommerfeld A.* Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen// В сб.: «Proc. Intern. Congr. Math. (Rome, 1908). III». — Roma: Reale Accad. Lincei, 1909. — С. 116–124.
114. *Taira K.* Diffusion Processes and Partial Differential Equations. — New York–London: Academic Press, 1988.

О. В. Солонуха

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия

E-mail: solonukha@yandex.ru

UDC 517.9

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-3-445-563

EDN: EANPTD

## Nonlinear differential-difference equations of elliptic and parabolic type and their applications to nonlocal problems

O. V. Solonukha

*Federal Research Center “Computer Science and Control” of the RAS, Moscow, Russia*

**Abstract.** In this survey, we study boundary-value problems for nonlinear differential-difference equations of elliptic and parabolic types, as well as related nonlinear equations with nonlocal boundary conditions. The main feature of the equations under consideration is that the difference operator is located in the principal part of the nonlinear operator containing higher-order derivatives.

**Keywords:** nonlinear differential-difference equations, nonlocal boundary conditions, shift in spatial variables, elliptic equation, parabolic equation, initial-boundary value problem, periodic solutions, pseudomonotone operator, operator with semi-bounded variation, ellipticity condition, strong ellipticity condition.

**Conflict-of-interest.** The authors declare no conflicts of interest.

**Acknowledgments and funding.** This work was supported by the Ministry of Science and Higher Education of the Russian Federation (Megagrant, agreement No. 075-15-2022-1115) in Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba (RUDN University).

**For citation:** O. V. Solonukha, “Nonlinear differential-difference equations of elliptic and parabolic type and their applications to nonlocal problems,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 3, 445–563. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-3-445-563>

### REFERENCES

1. E. A. Baderko and M. F. Cherepova, “Zadacha Bitsadze–Samarskogo dlya parabolicheskoy sistemy na ploskosti” [Bitsadze–Samarsky problem for a parabolic system on a plane], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2016, **471**, No. 5, 517–519 (in Russian).
2. R. Bellman and K. Cooke, *Differentsial'no-raznostnye uravneniya* [Theory of Differential-Difference Equations], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
3. A. V. Bitsadze and A. A. Samarskii, “O nekotorykh prosteyshikh obobshcheniyakh lineynykh ellipticheskikh zadach” [On some simple generalizations of linear elliptic problems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1969, **185**, No. 4, 739–740 (in Russian).
4. M. M. Vaynberg, *Variatsionnyy metod i metod monotonykh operatorov v teorii nelineynykh uravneniy* [Variational Method and Method of Monotone Operators in the Theory of Nonlinear Equations], Nauka, Moscow, 1972 (in Russian).
5. A. D. Venttsel', “O granichnykh usloviyakh dlya mnogomernykh diffuzionnykh protsessov” [On boundary conditions for multidimensional diffusion processes], *Teor. ver. i ee primen.* [Theory Probab. Appl.], 1959, **4**, No. 2, 172–185 (in Russian).
6. M. I. Vishik, “Ob obshchikh kraevykh zadachakh dlya ellipticheskikh differentsial'nykh uravneniy” [On general boundary-value problems for elliptic differential equations], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1952, **1**, 187–264 (in Russian).
7. M. I. Vishik, “O razreshimosti pervoy kraevoy zadachi dlya nelineynykh ellipticheskikh sistem differentsial'nykh uravneniy” [On the solvability of the first boundary-value problem for nonlinear elliptic systems of differential equations], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1960, **134**, No. 4, 749–752 (in Russian).



8. M. I. Vishik, “O razreshimosti kraevykh zadach dlya kvazilineynykh parabolicheskikh uravneniy vysshikh poryadkov” [On the solvability of boundary-value problems for higher-order quasilinear parabolic equations], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1962, **59**, 289–325 (in Russian).
9. M. I. Vishik and O. A. Ladyzhenskaya, “Kraevye zadachi dlya uravneniy v chastnykh proizvodnykh i nekotorykh klassov operatornykh uravneniy” [Boundary value problems for partial differential equations and some classes of operator equations], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1956, **11**, No. 6, 41–97 (in Russian).
10. V. V. Vlasov and D. A. Medvedev, “Ob asimptoticheskikh svoystvakh resheniy funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy neytral’nogo tipa” [On asymptotic properties of solutions of functional differential equations of neutral type], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2006, **15**, 112–125 (in Russian).
11. V. V. Vlasov and D. A. Medvedev, “Funktsional’no-differentsial’nye uravneniya v prostranstvakh Soboleva i svyazannye s nimi voprosy spektral’noy teorii” [Functional-differential equations in Sobolev spaces and related problems of spectral theory], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2008, **30**, 3–173 (in Russian).
12. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, *Spektral’nyy analiz funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy* [Spectral Analysis of Functional Differential Equations], MAKS Press, Moscow, 2016 (in Russian).
13. V. V. Vlasov, N. A. Rautian, and A. S. Shamaev, “Spektral’nyy analiz i korrektnaya razreshimost’ abstraktnykh integrodifferentsial’nykh uravneniy, vznikayushchikh v teplofizike i akustike” [Spectral analysis and correct solvability of abstract integrodifferential equations arising in thermophysics and acoustics], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2011, **39**, 36–65 (in Russian).
14. V. V. Vlasov, N. A. Rautian, and A. S. Shamaev, “Issledovanie operatornykh modeley, vznikayushchikh v zadachakh nasledstvennoy mekhaniki” [Analysis of operator models arising in problems of hereditary mechanics], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2012, **45**, 43–61 (in Russian).
15. H. Gajewski, K. Gröger, and K. Zacharias, *Nelineynye operatornye uravneniya i operatorno-differentsial’nye uravneniya* [Nonlinear Operator Equations and Operator-Differential Equations], Mir, Moscow, 1978 (Russian translation).
16. F. R. Gantmacher, *Teoriya matrits* [Matrix Theory], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
17. P. L. Gurevich, “Ellipticheskie zadachi s nelokal’nymi kraevymi usloviyami i polugruppy Fellera” [Elliptic problems with nonlocal boundary conditions and Feller semigroups], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **38**, 3–173 (in Russian).
18. A. K. Gushchin and V. P. Mikhaylov, “O razreshimosti nelokal’nykh zadach dlya ellipticheskogo uravneniya vtorogo poryadka” [On the solvability of nonlocal problems for a second-order elliptic equation], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1994, **185**, No. 4, 121–160 (in Russian).
19. Yu. A. Dubinskii, “Kvazilineynye ellipticheskie i parabolicheskie uravneniya lyubogo poryadka” [Quasilinear elliptic and parabolic equations of any order], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1968, **23**, No. 1, 45–90 (in Russian).
20. Yu. A. Dubinskii, “Nelineynye ellipticheskie i parabolicheskie uravneniya” [Nonlinear elliptic and parabolic equations], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. mat.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math.], 1976, **9**, 5–130 (in Russian).
21. N. V. Zhitarashu and S. D. Eidelman, “Nelokal’nye granichnye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy” [Nonlocal boundary-value problems for elliptic equations], *Mat. issl.* [Math. Stud.], 1971, **6**, No. 2, 63–73 (in Russian).
22. V. A. Il’in and E. I. Moiseev, “Nelokal’naya kraevaya zadacha vtorogo roda dlya operatora Shturma—Liuvillya” [Nonlocal boundary-value problem of the second kind for the Sturm—Liouville operator], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1987, **23**, No. 8, 1422–1431 (in Russian).
23. E. P. Ivanova, “Metody issledovaniya differentsial’no-raznostnykh uravneniy s nesoizmerimymi sdvigami argumentov” [Methods for studying differential-difference equations with incommensurate shifts of arguments], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. mat. i ee pril.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2022, **204**, 44–52 (in Russian).
24. V. I. Ivanenko and V. S. Mel’nik, *Variatsionnye metody v zadachakh upravleniya dlya sistem s raspredelennyimi parametrami* [Variational Methods in Control Problems for Systems with Distributed Parameters], Naukova dumka, Kiev, 1988 (in Russian).
25. K. Yoshida, *Funktsional’nyy analiz* [Functional Analysis], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
26. V. M. Kadets, *Kurs funktsional’nogo analiza* [Functional Analysis Course], KhNU, Khar’kov, 2004 (in Russian).

27. R. I. Kachurovskii, “O monotonnykh operatorakh i vypuklykh funktsionalakh” [On monotone operators and convex functionals], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1960, **15**, No. 4, 213–215 (in Russian).
28. K. Yu. Kishkis, “K teorii nelokal’nykh zadach dlya uravneniya Laplasya” [To the theory of nonlocal problems for the Laplace equation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1989, **25**, No. 1, 59–64 (in Russian).
29. M. A. Krasnosel’skii, *Topologicheskie metody v teorii nelineynykh integral’nykh uravneniy* [Topological Methods in the Theory of Nonlinear Integral Equations], Gostekhizdat, Moscow, 1956 (in Russian).
30. O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural’tseva, *Lineynye i kvazilineynye uravneniya parabolicheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Parabolic Type], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
31. O. A. Ladyzhenskaya and N. N. Ural’tseva, *Lineynye i kvazilineynye uravneniya ellipticheskogo tipa* [Linear and Quasilinear Equations of Elliptic Type], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
32. V. V. Liiko and A. L. Skubachevskii, “Smeshannye zadachi dlya sil’no ellipticheskikh differentsial’no-raznostnykh uravneniy v tsilindre” [Mixed problems for strongly elliptic differential-difference equations in a cylinder], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2020, **107**, No. 5, 693–716 (in Russian).
33. J.-L. Lions, *Nekotorye metody resheniya nelineynykh kraevykh zadach* [Some Methods of Solving Nonlinear Boundary-Value Problems], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
34. J.-L. Lions and E. Magenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Nonhomogeneous Boundary-Value Problems and Applications], Mir, Moscow, 1971 (Russian translation).
35. L. A. Lyusternik and V. I. Sobolev, *Elementy funktsional’nogo analiza* [Elements of Functional Analysis], GITTL, Moscow, 1951 (in Russian).
36. V. S. Mel’nik and M. Z. Zgupovskii, *Nelineynyy analiz i upravlenie beskonechnomernymi sistemami* [Nonlinear Analysis and Control of Infinite-Dimensional Systems], Naukova dumka, Kiev, 1999 (in Russian).
37. E. I. Moiseev, “Ob otsutstviy svoystva bazisnosti u sistemy kornevykh funktsiy odnoy nelokal’noy kraevoy zadachi” [On the absence of the basis property in a system of root functions of one nonlocal boundary-value problem], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1994, **30**, No. 12, 2082–2093 (in Russian).
38. A. B. Muravnik, “Ob asimptotike resheniy nekotorykh parabolicheskikh uravneniy s nelokal’nymi starshimi chlenami” [On the asymptotics of solutions of some parabolic equations with nonlocal higher-order terms], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 2006, **25**, 143–183 (in Russian).
39. A. B. Muravnik, “Funktsional’no-differentsial’nye parabolicheskie uravneniya: integral’nye predstavleniya i kachestvennyye svoystva zadachi Koshi” [Functional-differential parabolic equations: integral representations and qualitative properties of the Cauchy problem], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **52**, 3–143 (in Russian).
40. A. B. Muravnik, “O zadache Dirikhle v poluploskosti dlya differentsial’no-raznostnykh ellipticheskikh uravneniy” [On the Dirichlet problem for differential-difference elliptic equations in a half-plane], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **60**, 102–113 (in Russian).
41. A. D. Myshkis, “O nekotorykh problemakh teorii differentsial’nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom” [On some problems in the theory of differential equations with deviating argument], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1977, **32**, No. 2, 173–202 (in Russian).
42. A. D. Myshkis, “Smeshannye funktsional’no-differentsial’nye uravneniya” [Mixed functional differential equations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2003, **4**, 5–120 (in Russian).
43. G. G. Onanov and A. L. Skubachevskii, “Differentsial’nye uravneniya so smeshchennymi argumentami v statsionarnykh zadachakh mekhaniki deformiruemogo tela” [Differential equations with shifted arguments in stationary problems of mechanics of a deformable body], *Sovet. prikl. mekh.* [Soviet. Appl. Mech.], 1979, **15**, 391–397 (in Russian).
44. B. P. Paneah, “O nekotorykh nelokal’nykh kraevykh zadachakh dlya lineynykh differentsial’nykh operatorov” [On some nonlocal boundary-value problems for linear differential operators], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1984, **35**, No. 3, 425–434 (in Russian).
45. V. V. Pod’yapol’skii and A. L. Skubachevskii, “Spektral’naya asimptotika sil’no ellipticheskikh differentsial’no-raznostnykh operatorov” [Spectral asymptotics of strongly elliptic differential-difference operators], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1999, **35**, No. 6, 793–800 (in Russian).
46. V. A. Popov and A. L. Skubachevskii, “Apriornye otsenki dlya ellipticheskikh differentsial’no-raznostnykh operatorov s vyrozhdeniem” [A priori estimates for elliptic differential-difference operators with degeneration], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **36**, 125–142 (in Russian).
47. S. I. Pohozaev, “O razreshimosti nelineynykh uravneniy s nechetnymi operatorami” [On the solvability of nonlinear equations with odd operators], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1967, **1**, No. 3, 66–73 (in Russian).

48. S. I. Pohozaev and Yu. A. Dubinskii, “Ob odnom klasse operatorov i razreshimosti kvazilineynykh differentsial’nykh uravneniy” [On one class of operators and solvability of quasilinear differential equations], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1967, **72**, No. 2, 226–236 (in Russian).
49. V. S. Rabinovich, “O differentsial’no-raznostnykh uravneniyakh v poluprostranstve” [On differential-difference equations in half-space], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1980, **16**, No. 11, 2030–2038 (in Russian).
50. V. S. Rabinovich, “O zadache Koshi dlya parabolicheskikh differentsial’no-raznostnykh operatorov s peremennymi koeffitsientami” [On the Cauchy problem for parabolic differential-difference operators with variable coefficients], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1983, **19**, No. 6, 1032–1038 (in Russian).
51. A. V. Razgulin and T. E. Romanenko, “Vrashchayushchiesya volny v parabolicheskom funktsional’no-differentsial’nom uravnenii s povorotom prostranstvennogo argumenta i zapazdyvaniem” [Rotating waves in a parabolic functional differential equation with rotation of the spatial argument and delay], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2013, **53**, No. 11, 1804–1821 (in Russian).
52. Ya. A. Roitberg and Z. G. Sheftel, “Nelokal’nye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy i sistem” [Nonlocal problems for elliptic equations and systems], *Sib. mat. zh.* [Siberian Math. J.], 1972, **13**, No. 1, 165–181 (in Russian).
53. L. E. Rossovskii, “Ellipticheskie funktsional’no-differentsial’nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii” [Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, 3–138 (in Russian).
54. L. E. Rossovskii and A. R. Hanalyev, “Koertsitivnaya razreshimost’ nelokal’nykh kraevykh zadach dlya parabolicheskikh uravneniy” [Coercive solvability of nonlocal boundary-value problems for parabolic equations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **62**, 140–151 (in Russian).
55. A. A. Samarskii, “O nekotorykh problemakh teorii differentsial’nykh uravneniy” [On some problems of the theory of differential equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1980, **16**, No. 1, 1925–1935 (in Russian).
56. A. M. Selitskii, “Tret’ya kraevaya zadacha dlya parabolicheskogo differentsial’no-raznostnogo uravneniya” [The third boundary-value problem for parabolic differential-difference equations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2007, **21**, 114–132 (in Russian).
57. I. V. Skrypnik, *Metody issledovaniya nelineynykh ellipticheskikh granichnykh zadach* [Methods for Studying Nonlinear Elliptic Boundary-Value Problems], Nauka, Moscow, 1990 (in Russian).
58. A. L. Skubachevskii, “Gladkost’ obobshchennykh resheniy pervoy kraevoy zadachi dlya ellipticheskogo differentsial’no-raznostnogo uravneniya” [Smoothness of generalized solutions of the first boundary-value problem for an elliptic differential-difference equation], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1983, **34**, No. 1, 105–112 (in Russian).
59. A. L. Skubachevskii, “Ellipticheskie zadachi s nelokal’nymi usloviyami vblizi granitsy” [Elliptic problems with nonlocal conditions near the boundary], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1986, **129**, No. 2, 279–302 (in Russian).
60. A. L. Skubachevskii, “O nekotorykh zadachakh dlya mnogomernykh diffuzionnykh protsessov” [On some problems for multidimensional diffusion processes], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1989, **307**, No. 2, 287–291 (in Russian).
61. A. L. Skubachevskii, “O sobstvennykh znacheniyakh i sobstvennykh funktsiyakh nekotorykh nelokal’nykh kraevykh zadach” [On eigenvalues and eigenfunctions of some nonlocal boundary value problems], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1989, **25**, No. 1, 127–136 (in Russian).
62. A. L. Skubachevskii, “Model’nye nelokal’nye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy v dvugrannykh uglakh” [Model nonlocal problems for elliptic equations in dihedral angles], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1990, **26**, No. 1, 120–131 (in Russian).
63. A. L. Skubachevskii, “O metode srezayushchikh funktsiy v teorii nelokal’nykh zadach” [On the method of cut-off functions in the theory of nonlocal problems], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1991, **27**, No. 1, 128–139 (in Russian).
64. A. L. Skubachevskii, “Kraevye zadachi dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy s nesoizmerimymi sdvigami” [Boundary-value problems for differential-difference equations with incommensurate shifts], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1992, **324**, No. 6, 1155–1158 (in Russian).
65. A. L. Skubachevskii, “O nekotorykh svoystvakh ellipticheskikh i parabolicheskikh funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy” [On some properties of elliptic and parabolic functional differential equations], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1996, **51**, No. 1, 169–170 (in Russian).
66. A. L. Skubachevskii, “O bifurkatsii Khopfa dlya kvazilineynogo parabolicheskogo funktsional’no-differentsial’nogo uravneniya” [On the Hopf bifurcation for a quasilinear parabolic functional differential equation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1998, **34**, No. 10, 1394–1401 (in Russian).

67. A. L. Skubachevskii, “Neklassicheskie kraevye zadachi. I” [Nonclassical boundary-value problems. I], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2007, **26**, 3–132 (in Russian).
68. A. L. Skubachevskii, “Neklassicheskie kraevye zadachi. II” [Nonclassical boundary-value problems. II], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **33**, 3–179 (in Russian).
69. A. L. Skubachevskii, “Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy i ikh prilozheniya” [Boundary-value problems for elliptic functional differential equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 3–112 (in Russian).
70. A. L. Skubachevskii and A. M. Selitskii, “Vtoraya kraevaya zadacha dlya parabolicheskogo differentsial’no-raznostnogo uravneniya” [The second boundary-value problem for a parabolic differential-difference equation], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2007, **62**, No. 1, 207–208 (in Russian).
71. A. L. Skubachevskii and R. V. Shamin, “Pervaya smeshannaya zadacha dlya parabolicheskogo differentsial’no-raznostnogo uravneniya” [The first mixed problem for a parabolic differential-difference equation], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1999, **66**, No. 1, 145–153 (in Russian).
72. S. L. Sobolev, *Nekotorye primeneniya funktsional’nogo analiza v matematicheskoy fizike* [Some Applications of Functional Analysis in Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1988 (in Russian).
73. A. P. Soldatov, “Zadacha Bitsadze—Samarskogo dlya funktsiy, analiticheskikh po Duglisu” [Bitsadze—Samarsky problem for functions analytic in the sense of Douglas], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2005, **41**, No. 3, 396–407 (in Russian).
74. O. V. Solonukha, “O nelineynoy parabolicheskoy zadache s prepyatstviem” [On a nonlinear parabolic problem with an obstacle], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2004, **59**, No. 3, 181–182 (in Russian).
75. O. V. Solonukha, “O sushchestvovanii resheniy nelineynykh parabolicheskikh variatsionnykh neravenstv s odnostoronnimi ogranicheniyami” [On the existence of solutions to nonlinear parabolic variational inequalities with one-sided restrictions], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2005, **77**, No. 3, 460–476 (in Russian).
76. O. V. Solonukha, “Ob odnom klasse sushchestvenno nelineynykh ellipticheskikh differentsial’no-raznostnykh uravneniy” [On one class of essentially nonlinear elliptic differential-difference equations], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2013, **283**, 226–244 (in Russian).
77. O. V. Solonukha, “Ob odnoy nelineynoy nelokal’noy zadache ellipticheskogo tipa” [On one nonlinear nonlocal problem of elliptic type], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2017, **57**, No. 3, 60–72 (in Russian).
78. O. V. Solonukha, “Ob odnom ellipticheskom differentsial’no-raznostnom uravnenii s nesimmetrichnym operatorom sdvigo” [On an elliptic differential-difference equation with an asymmetric shift operator], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2018, **104**, No. 4, 604–620 (in Russian).
79. O. V. Solonukha, “Obobshchennye resheniya kvazilineynykh ellipticheskikh differentsial’no-raznostnykh uravneniy” [Generalized solutions of quasilinear elliptic differential-difference equations], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2020, **60**, No. 12, 2085–2097 (in Russian).
80. O. V. Solonukha, “O razreshimosti lineynoy parabolicheskoy zadachi s nelokal’nymi kraevymi usloviyami” [On solvability of a linear parabolic problem with nonlocal boundary conditions], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2021, **67**, No. 2, 349–362 (in Russian).
81. O. V. Solonukha, “O periodicheskikh resheniyakh parabolicheskikh kvazilineynykh uravneniy s kraevymi usloviyami tipa Bitsadze—Samarskogo” [On periodic solutions of parabolic quasilinear equations with boundary conditions of Bitsadze—Samarsky type], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2022, **503**, 83–86 (in Russian).
82. O. V. Solonukha, “O razreshimosti nelineynykh parabolicheskikh funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy so sdvigami po prostranstvennym peremennym” [On the solvability of nonlinear parabolic functional differential equations with shifts in spatial variables], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2023, **113**, No. 5, 757–773 (in Russian).
83. B. Yu. Sternin and V. E. Shatalov, “Rasshirenie algebrы psevdodifferentsial’nykh operatorov i nekotorye nelokal’nye ellipticheskie zadachi” [Extension of the algebra of pseudodifferential operators and some nonlocal elliptic problems], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1994, **185**, No. 3, 117–160 (in Russian).
84. Ya. D. Tamarkin, *O nekotorykh obshchikh zadachakh teorii obyknovennykh lineynykh differentsial’nykh uravneniy i o razlozhenii proizvol’nykh funktsiy v ryady* [On Some General Problems in the Theory of Ordinary Linear Differential Equations and on the Series Expansion of Arbitrary Functions], M. P. Frolova typography, Petrograd, 1917 (in Russian).
85. J. Hale, *Teoriya funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy* [Theory of Functional Differential Equations], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
86. W. G. Bade and R. S. Freeman, “Closed extensions of the Laplace operator determined by a general class of boundary conditions,” *Pacific J. Math.*, 1962, **12**, No. 2, 395–410.
87. R. Beals, “Nonlocal elliptic boundary value problems,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1964, **70**, No. 5, 693–696.

88. H. Brézis, “Équations et inéquations non linéaires dans les espaces vectoriels en dualité,” *Ann. Inst. Fourier*, 1968, **18**, 115–175.
89. F. Browder, “Non-local elliptic boundary value problems,” *Am. J. Math.*, 1964, **86**, No. 4, 735–750.
90. F. E. Browder and P. Hess, “Nonlinear mappings of monotone type in Banach spaces,” *J. Funct. Anal.*, 1972, **11**, No. 2, 251–294.
91. P. Hartman and G. Stampacchia, “On some nonlinear elliptic differential functional equations,” *Acta Math.*, 1966, **115**, 271–310.
92. G. Grubb, “A characterization of the non-local boundary value problems associated with elliptic operator,” *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*, 1968, **22**, No. 3, 425–513.
93. Z. Guan, A. G. Kartsatos, and I. V. Skrypnik, “Ranges of densely defined generalized pseudomonotone perturbations of maximal monotone operators,” *J. Differ. Equ.*, 2003, **188**, 332–351.
94. W. Feller, “The parabolic differential equations and the associated semi-groups of transformations,” *Ann. Math.*, 1952, **55**, 468–519.
95. W. Feller, “Diffusion processes in one dimension,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1954, **77**, 1–30.
96. A. G. Kartsatos and I. V. Skrypnik, “On the eigenvalue problems for perturbed nonlinear maximal monotone operators in reflexive Banach spaces,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 2006, **358**, No. 9, 3851–3881.
97. G. J. Minty, “Monotone (non-linear) operator in Hilbert space,” *Duke Math. J.*, 1962, **29**, 341–346.
98. G. G. Onanov and A. L. Skubachevskii, “Nonlocal problems in the mechanics of three-layer shells,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2017, **12**, No. 6, 192–207.
99. M. Picone, “I teoremi d’esistenza per gli integrali di una equazione differenziale lineare ordinaria soddisfacenti ad una nuova classe di condizioni,” *Rom. Acc. L. Rend.*, 1908, **17**, No. 1, 340–347.
100. M. Picone, “Equazione integrale traducente il più generale problema lineare per le equazioni differenziali lineari ordinarie di qualsivoglia ordine,” *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend.*, 1932, **15**, 942–948.
101. A. V. Razgulín, “Rotational multi-petal waves in optical systems with 2-D feedback,” *Chaos in Optics. Proceedings SPIE*, 1993, **2039**, 342–352.
102. K. Sato and T. Ueno, “Multi-dimensional diffusion and the Markov process on the boundary,” *J. Math. Kyoto Univ.*, 1965, **4**, 295–298.
103. M. Schechter, “Nonlocal elliptic boundary value problems,” *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*, 1966, **20**, No. 2, 421–441.
104. A. L. Skubachevskii, “The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations,” *J. Differ. Equ.*, 1986, **63**, 332–361.
105. A. L. Skubachevskii, “On the stability of index of nonlocal elliptic problems,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1991, **160**, No. 2, 323–341.
106. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel–Boston–Berlin, 1997.
107. A. L. Skubachevskii, “Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics,” *Nonlinear Anal.*, 1998, **32**, 261–278.
108. O. V. Solonukha, “On nonlinear and quasilinear elliptic functional differential equations,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 2016, **9**, No. 3, 847–868.
109. O. V. Solonukha, “The criteria of accretivity of differential operators described by the  $2 \times 2$  matrices and its applications,” In: *XXVIII Cremean Autumn Mathematical School-Symposium on Spectral and Evolution Problems (KROMSh-2017). Abstracts*, DIAYPI, Simferopol, 2017, pp. 124–128.
110. O. V. Solonukha, “The first Boundary Value Problem for Quasilinear Parabolic Differential-Difference Equations,” *Lobachevskii J. Math.*, 2021, **42**, No. 5, 1067–1077.
111. O. V. Solonukha, “On periodic solutions of linear parabolic problems with nonlocal boundary conditions,” *Тавр. вестн. інф. у мат.*, 2021, **51**, No. 2, 7–11.
112. O. V. Solonukha, “On nonlinear nonlocal parabolic problem,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2022, **29**, No. 1, 121–140.
113. A. Sommerfeld, “Ein Beitrag zur hydrodynamischen Erklärung der turbulenten Flüssigkeitsbewegungen,” In: *Proc. Intern. Congr. Math. (Rome, 1908). III*, Reale Accad. Lincei, Roma, 1909, pp. 116–124.
114. K. Taira, *Diffusion Processes and Partial Differential Equations*, Academic Press, N.Y.–London, 1988.

O. V. Solonukha

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the RAS, Moscow, Russia

E-mail: solonukha@yandex.ru