

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ



СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ
НАПРАВЛЕНИЯ

Том 69, № 2, 2023

Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Научный журнал
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи,
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)

Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.

Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего образования «Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы»

Главный редактор

Р. В. Гамкрелидзе,

д.ф.-м.н., профессор,
академик РАН,

Математический институт им.
В. А. Стеклова РАН, Москва,
Россия

E-mail: gam@mi.ras.ru

Зам. главного редактора

А. Л. Скубачевский,

д.ф.-м.н., профессор,
Российский университет
дружбы народов, Москва,
Россия

E-mail: skubachevskii-al@rudn.ru

Ответственный секретарь

Е. М. Варфоломеев,

к.ф.-м.н.,
Российский университет
дружбы народов, Москва,
Россия

E-mail: varfolomeev-em@rudn.ru

Члены редакционной коллегии

А. А. Азгачев, д.ф.-м.н., профессор, Международная школа передовых исследований (SISSA), Триест, Италия; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

П. С. Красильников, д.ф.-м.н., профессор, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

А. Б. Муравник, д.ф.-м.н., Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

А. В. Овчинников, к.ф.-м.н., доцент, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва, Россия

В. Л. Попов, д.ф.-м.н., профессор, член-корр. РАН, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

А. В. Сарычев, д.ф.-м.н., профессор, Флорентийский университет, Флоренция, Италия

Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

4 выпуска в год

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.

Включен в каталог подписных изданий агентства «Роспечать», индекс 36832.

Индексируется в РИНЦ и международных базах данных *MathSciNet* и *Zentralblatt Math*.

Полный текст журнала размещен в базах данных компании *EBSCO Publishing* на платформе *EBSCOhost*.

Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences (New York)*.

Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты.

Правила оформления статей, архив публикаций в открытом доступе и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала: <http://journals.rudn.ru/cmfd>, <http://www.mathnet.ru/cmfd>.

Редактор: Е. М. Варфоломеев

Компьютерная верстка: Е. М. Варфоломеев

Адрес редакции:

115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Подписано в печать 21.04.2023. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.

Усл. печ. л. 21,86. Тираж 110 экз. Заказ 688.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов имени Патриса Лумумбы» (РУДН)

117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН

115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 952-04-41; e-mail: publishing@rudn.ru

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba



CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 69, No. 2, 2023

Proceedings of the Crimean Autumn Mathematical School-Symposium

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Founded in 2003

Founder: Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba

EDITOR-IN-CHIEF

Revaz Gamkrelidze,
Steklov Mathematical Institute
of Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russia
E-mail: gam@mi.ras.ru

DEPUTY EDITOR

Alexander Skubachevskii,
RUDN University
Moscow, Russia
E-mail: skubachevskii-al@rudn.ru

EXECUTIVE SECRETARY

Evgeniy Varfolomeev,
RUDN University
Moscow, Russia
E-mail: varfolomeev-em@rudn.ru

EDITORIAL BOARD

Andrei Agrachev, International School for Advanced Studies (SISSA), Trieste, Italy; Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Pavel Krasil'nikov, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

Andrey Muravnik, RUDN University, Moscow, Russia

Alexey Ovchinnikov, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; Russian Institute for Scientific and Technical Information of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Vladimir Popov, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Andrei Sarychev, University of Florence, Florence, Italy

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Published by the Peoples' Friendship University of Russia
named after Patrice Lumumba, Moscow, Russian Federation

ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

4 issues per year

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Indexed by *Russian Index of Science Citation*, *MathSciNet*, *Zentralblatt Math*.

The full texts can be found in the *EBSCOhost* databases by *EBSCO Publishing*.

Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences (New York)*.

Aims and Scope

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results.

Guidelines for authors, free accessible archive of issues, and other information can be found at the journal's website: <http://journals.rudn.ru/cmfd>, <http://www.mathnet.ru/eng/cmfd>.

Editor: *E. M. Varfolomeev*
Computer design: *E. M. Varfolomeev*

Address of the Editorial Office:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Print run 110 copies.

Peoples' Friendship University of Russia named after Patrice Lumumba (RUDN University), Moscow, Russia
6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia

Printed at RUDN Publishing House:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 952-04-41; e-mail: publishing@rudn.ru

СОДЕРЖАНИЕ

<i>Абдурагимов Г. Э., Абдурагимова П. Э., Курамагомедова М. М.</i> О существовании и единственности положительного решения краевой задачи типа Штурма—Лиувилля для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения	201
<i>Безродных С. И., Пикулин С. В.</i> Численно-аналитический метод для уравнения Бюргерса с периодическим краевым условием	208
<i>Богатов Е. М., Богатова Н. Е.</i> Исследование задачи о справедливом распределении квот на вылов рыбы методами теории игр	224
<i>Зеленчук П. А., Цибулин В. Г.</i> Математическая модель идеального свободного распределения в системе хищник—жертва	237
<i>Кабанцова Л. Ю.</i> Математическое ожидание решения стохастической мультипликативно возмущенной системы дифференциальных уравнений	250
<i>Кащенко С. А., Костерин Д. С., Глызин С. Д.</i> Семейство кусочно-гладких решений одного класса пространственно-распределенных уравнений	263
<i>Корнута А. А., Лукьяненко В. А.</i> Задача нелинейной оптики с преобразованием пространственной переменной и косо́й производной	276
<i>Кривошеев А. С., Кривошеева О. А.</i> Исключительные множества	289
<i>Панов Е. Ю.</i> К теории энтропийных суб- и суперрешений нелинейных вырождающихся параболических уравнений	306
<i>Петров В. Э.</i> Некоторые обратные задачи Фурье-оптики	332
<i>Рыхлов В. С.</i> Обобщенная начально-граничная задача для волнового уравнения со смешанной производной	342
<i>Соловьев А. Н., Чебаненко В. А., Германчук М. С.</i> Прикладная теория изгибных колебаний пьезоактивного биморфа в рамках несвязной краевой задачи термоэластостатики	364
<i>Югай Л. П.</i> Задача убегания в линейных параметрических дискретных играх	375

CONTENTS

<i>Abduragimov G. È., Abduragimova P. È., Kuramagomedova M. M.</i> On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary-value problem of the Sturm–Liouville type for a nonlinear ordinary differential equation	201
<i>Bezrodnykh S. I., Pikulin S. V.</i> Numerical-analytical method for the Burgers equation with a periodic boundary condition	208
<i>Bogatov E. M., Bogatova N. E.</i> Research of the problem of fair distribution of fishing quotas by the methods of game theory	224
<i>Zelenchuk P. A., Tsybulin V. G.</i> Mathematical model of ideal free distribution in the predator–prey system	237
<i>Kabantsova L. Yu.</i> Mathematical expectation of the solution of a stochastic multiplicatively perturbed system of differential equations	250
<i>Kaschenko S. A., Kosterin D. S., Glyzin S. D.</i> A family of piecewise-smooth solutions of a class of spatially distributed equations	263
<i>Kornuta A. A., Lukianenko V. A.</i> Nonlinear optics problem with transformation of a spatial variable and an oblique derivative	276
<i>Krivosheev A. S., Krivosheeva O. A.</i> Exceptional sets	289
<i>Panov E. Yu.</i> On the theory of entropy sub- and supersolutions of nonlinear degenerate parabolic equations	306
<i>Petrov V. È.</i> Some inverse problems of Fourier optics	332
<i>Rykhlov V. S.</i> Generalized initial-boundary problem for the wave equation with mixed derivative	342
<i>Soloviev A. N., Chebanenko V. A., Germanchuk M. S.</i> Applied theory of flexural vibrations of a piezoactive bimorph in the framework of uncoupled boundary-value problem of thermoelectroelasticity	364
<i>Yugay L. P.</i> Evasion problem in linear parametric discrete games	375

УДК 517.927.4

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-201-207

EDN: CUFAAP

О СУЩЕСТВОВАНИИ И ЕДИНСТВЕННОСТИ ПОЛОЖИТЕЛЬНОГО РЕШЕНИЯ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ ТИПА ШТУРМА—ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ ОДНОГО НЕЛИНЕЙНОГО ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

Г. Э. АБДУРАГИМОВ, П. Э. АБДУРАГИМОВА, М. М. КУРАМАГОМЕДОВА

Дагестанский государственный университет, Махачкала, Россия

Аннотация. В работе с помощью теоремы о неподвижной точке в частично упорядоченных множествах получены достаточные условия существования единственного положительного решения краевой задачи типа Штурма—Лиувилля для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения; приведен пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Ключевые слова: конус, положительное решение, неподвижная точка оператора, функция Грина.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Г. Э. Абдурагимов, П. Э. Абдурагимова, М. М. Курамагомедова. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи типа Штурма—Лиувилля для одного нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения // *Соврем. мат. Фундам. направл.* 2023. Т. 69, № 2. С. 201–207. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-201-207>

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Вопросам разрешимости краевых задач для нелинейных дифференциальных уравнений посвящено немало работ, в частности, работы зарубежных математиков [5, 7, 8, 11–15]. В основном, в них рассмотрены вопросы существования положительного решения, его поведения и асимптотики и др. Работ, посвященных получению условий, обеспечивающих единственность положительного решения краевых задач типа Штурма—Лиувилля для нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений n -го порядка, немного; отметим, например, [1–4, 9]. Из цитируемых выше работ близкими по тематике данному исследованию являются статьи [4, 9], в которых рассмотрены нелинейные краевые задачи с аналогичными краевыми условиями. В [9] получены достаточные условия существования положительных решений нелинейной краевой задачи с тремя видами различных краевых условий с помощью теоремы Красносельского о неподвижной точке в конусе. В [4] с помощью метода линейных преобразований Ц. На установлены достаточные условия существования единственного положительного решения краевой задачи для одного нелинейного дифференциального уравнения четного порядка и, кроме того, предложен эффективный численный алгоритм построения такого решения. В данной статье авторами предпринята попытка обобщить



упомянутые выше результаты и устранить соответствующие пробелы с помощью теоремы о неподвижной точке в частично упорядоченных множествах. В заключении приведен нетривиальный пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Рассмотрим краевую задачу

$$x^{(n)}(t) + f(t, x(t)) = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (1.1)$$

$$x'(0) = x''(0) = \dots x^{(n-2)}(0) = 0, \quad (1.2)$$

$$x(1) = 0, \quad (1.3)$$

где $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, функция $f(t, u)$ неотрицательна, непрерывна на $[0, 1] \times [0, \infty)$ и не убывает по второму аргументу.

Определение 1.1. Под *положительным решением* задачи (1.1)–(1.3) будем понимать функцию $x \in C_{[0,1]}^n$, положительную в интервале $(0, 1)$, удовлетворяющую на указанном интервале уравнению (1.1) и граничным условиям (1.2), (1.3).

Рассмотрим эквивалентное задаче (1.1)–(1.3) интегральное уравнение

$$x(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1, \quad (1.4)$$

где

$$G(t, s) = \begin{cases} \frac{t^{n-1}(1-s)^{n-1} - (t-s)^{n-1}}{(n-1)!}, & \text{если } 0 \leq s \leq t, \\ \frac{t^{n-1}(1-s)^{n-1}}{(n-1)!}, & \text{если } t \leq s \leq 1. \end{cases}$$

Замечание 1.1. Несложно показать, что $G(t, s) > 0$, $t, s \in (0, 1)$.

2. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В дальнейшем нам понадобятся следующие утверждения о неподвижной точке [6].

Теорема 2.1. Пусть (X, \leq) — частично упорядоченное множество, и предположим, что существует метрика d в X такая, что (X, d) — полное метрическое пространство. Предположим, что X удовлетворяет следующему условию:

Если x_n неубывающая последовательность в X такая, что $x_n \rightarrow x$, то $x_n \leq x$, $n \in \mathbb{N}$. (2.1)

Пусть $T : X \rightarrow X$ — такое неубывающее отображение, что

$$d(Tx, Ty) \leq d(x, y) - \psi(d(x, y)), \quad x \geq y,$$

где $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ — непрерывная и неубывающая функция такая, что ψ положительна на $(0, \infty)$, $\psi(0) = 0$ и $\lim_{t \rightarrow \infty} \psi(t) = \infty$.

Если существует $x_0 \in X$ такое, что $x_0 \leq Tx_0$, то оператор T имеет неподвижную точку.

Более того, если (X, \leq) удовлетворяет условию

$$\text{для любых } x, y \in X \text{ существует } z \in X, \text{ сравнимое с } x \text{ и } y, \quad (2.2)$$

то справедлива следующая теорема.

Теорема 2.2. При выполнении условия (2.2), помимо условий теоремы 2.1, имеет место единственность неподвижной точки оператора T .

В качестве X рассмотрим пространство $C_{[0,1]}$ с метрикой $d(x, y) = \sup_{0 \leq t \leq 1} \{|x(t) - y(t)|\}$.

Более того, введем в этом пространстве частичный порядок следующим образом:

$$x, y \in C_{[0,1]}, \quad x \leq y \Leftrightarrow x(t) \leq y(t), \quad t \in [0, 1].$$

В [10] доказано, что $(C_{[0,1]}, \leq)$ с определенной выше метрикой удовлетворяет условию (2.1) теоремы 2.1. Кроме того, поскольку функция $\max(x, y) \in C_{[0,1]}$, $x, y \in C_{[0,1]}$, множество $(C_{[0,1]}, \leq)$ удовлетворяет условию (2.2).

Обозначим через \mathcal{F} класс функций $\psi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, обладающих свойствами, указанными в теореме 2.1, а через \mathcal{J} , соответственно, класс непрерывных и неубывающих функций $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$, удовлетворяющих условию $I - \varphi \in \mathcal{F}$, где I — тождественное отображение на $[0, \infty)$.

Лемма 2.1.
$$\max_{t \in [0,1]} \int_0^1 G(t, s) ds = \frac{1}{n!} \left[\left(\frac{n-1}{n} \right)^{n-1} - \left(\frac{n-1}{n} \right)^n \right].$$

Доказательство. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^1 G(t, s) ds &= \int_0^t G(t, s) ds + \int_t^1 G(t, s) ds = \\ &= \int_0^t \frac{t^{n-1}(1-s)^{n-1} - (t-s)^{n-1}}{(n-1)!} ds + \int_t^1 \frac{t^{n-1}(1-s)^{n-1}}{(n-1)!} ds = \\ &= \int_0^1 \frac{t^{n-1}(1-s)^{n-1}}{(n-1)!} ds - \int_0^t \frac{(t-s)^{n-1}}{(n-1)!} ds = \frac{1}{(n-1)!} \left[\frac{t^{n-1}}{n} - \frac{t^n}{n} \right] = \frac{1}{n!} (t^{n-1} - t^n). \end{aligned}$$

Несложно убедиться, что наибольшее значение функции $h(t) = t^{n-1} - t^n$ достигается в точке $t_0 = \frac{n-1}{n}$. Таким образом,

$$\max_{t \in [0,1]} \int_0^1 G(t, s) ds = \frac{1}{n!} \left[\left(\frac{n-1}{n} \right)^{n-1} - \left(\frac{n-1}{n} \right)^n \right].$$

□

В дальнейшем для удобства выкладок положим $A = \frac{1}{n!} \left[\left(\frac{n-1}{n} \right)^{n-1} - \left(\frac{n-1}{n} \right)^n \right]$.

Теорема 2.3. *Предположим, что существует число $\lambda \in \left(0, \frac{1}{A}\right]$ такое, что для всех $x, y \in [0, \infty)$, $y \geq x$*

$$f(t, y) - f(t, x) \leq \lambda \varphi(y - x), \quad t \in [0, 1],$$

где $\varphi \in \mathcal{J}$.

Тогда краевая задача (1.1)–(1.3) имеет единственное неотрицательное решение.

Доказательство. Обозначим через \tilde{K} конус неотрицательных функций пространства $\mathbb{C}_{[0,1]}$. Очевидно, (\tilde{K}, d) с метрикой $d(x, y) = \sup_{0 \leq t \leq 1} \{|x(t) - y(t)|\}$ является полным метрическим пространством, удовлетворяющим условиям (2.1) и (2.2).

Оператор A , определенный равенством

$$(Ax)(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, x(s)) ds, \quad 0 \leq t \leq 1,$$

действует в пространстве неотрицательных непрерывных функций и оставляет инвариантным конус \tilde{K} .

Далее проверим выполнение условий теоремы 2.2.

Вначале покажем монотонность оператора A .

Действительно, в силу монотонности f по второму аргументу, для $u, v \in \tilde{K}$ и $u \geq v$ имеем

$$(Au)(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, u(s)) ds \geq \int_0^1 G(t, s) f(s, v(s)) ds = (Av)(t), \quad t \in [0, 1].$$

Докажем теперь, что A удовлетворяет стягивающему условию теоремы 2.1. Действительно, с учетом условий настоящей теоремы, для $u, v \in \tilde{K}$ и $u \geq v$ имеем

$$\begin{aligned} d(Au, Av) &= \sup_{0 \leq t \leq 1} \{|Au(t) - Av(t)|\} = \sup_{0 \leq t \leq 1} \{(Au(t) - Av(t))\} = \\ &= \sup_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t, s)(f(s, u(s)) - f(s, v(s))) ds \leq \sup_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t, s) \lambda \varphi(u(s) - v(s)) ds. \end{aligned}$$

Ввиду $\varphi \in \mathcal{J}$ с учетом условий данной теоремы и леммы 2.1 имеем

$$\begin{aligned} d(Au, Av) &\leq \lambda \varphi(d(u, v)) \sup_{0 \leq t \leq 1} \int_0^1 G(t, s) ds = \\ &= \lambda \varphi(d(u, v)) A \leq \varphi(d(u, v)) = d(u, v) - (d(u, v) - \varphi(d(u, v))). \end{aligned}$$

Положим $\psi(x) = x - \varphi(x)$. Из $\varphi \in \mathcal{J}$ следует, что $\psi \in \mathcal{F}$, и соответственно из последнего неравенства получим

$$d(Au, Av) \leq d(u, v) - \psi(d(u, v)).$$

Это доказывает, что A удовлетворяет стягивающему условию теоремы 2.1.

Наконец, неотрицательность функций $G(t, s)$ и $f(t, x)$ дает нам

$$(A0)(t) = \int_0^1 G(t, s) f(s, 0) ds \geq 0,$$

где 0 обозначает нулевую функцию.

Следовательно, в силу теоремы 2.2 оператор A имеет единственную неотрицательную неподвижную точку, что равносильно существованию единственного неотрицательного решения краевой задачи (1.1)–(1.3). \square

Приведем теперь достаточные условия существования и единственности положительного решения (см. определение 1.1) задачи (1.1)–(1.3).

Теорема 2.4. *При выполнении условий теоремы 2.3 и условия $f(t_0, 0) \neq 0$ для некоторого $t_0 \in [0, 1]$ краевая задача (1.1)–(1.3) имеет единственное положительное решение.*

Доказательство. Докажем вначале, что неотрицательное решение $x(t)$ задачи (1.1)–(1.3), существование которого гарантирует теорема 2.3, является положительным.

Рассмотрим эквивалентное задаче (1.1)–(1.3) уравнение (1.4). Предположим, что существует число $0 < t^* < 1$ такое, что $x(t^*) = 0$. Тогда

$$x(t^*) = \int_0^1 G(t^*, s) f(s, x(s)) ds = 0.$$

В силу неотрицательности $x(t)$, монотонности функции $f(t, u)$ по второму аргументу и неотрицательности функции Грина получим

$$0 = x(t^*) = \int_0^1 G(t^*, s) f(s, x(s)) ds \geq \int_0^1 G(t^*, s) f(s, 0) ds \geq 0.$$

Таким образом,

$$x(t^*) = \int_0^1 G(t^*, s) f(s, 0) ds = 0.$$

Очевидно, последнее соотношение возможно, если

$$G(t^*, s) f(s, 0) = 0.$$

Но, с другой стороны, $G(t^*, s) \neq 0$. Следовательно,

$$f(s, 0) = 0. \quad (2.3)$$

В то же время, по условию теоремы $f(t_0, 0) \neq 0$, $t_0 \in [0, 1]$, неотрицательность $f(t, u)$, соответственно, влечет $f(t_0, 0) > 0$. Ввиду непрерывности $f(t, u)$ можно указать подмножество $\Omega \subset [0, 1]$ с $t_0 \in \Omega$, $\mu(\Omega) > 0$, где μ — мера Лебега и $f(t, 0) > 0$ для любого $t \in \Omega$. Это противоречит (2.3).

Поэтому $x(t) > 0$, $t \in (0, 1)$. \square

Теперь приведем пример, иллюстрирующий полученные результаты.

Рассмотрим следующую краевую задачу:

$$x''(t) + \alpha + \lambda\sqrt{x(t)} = 0, \quad 0 < t < 1, \quad (2.4)$$

$$x'(0) = 0, \quad (2.5)$$

$$x(1) = 0, \quad (2.6)$$

где $\alpha, \lambda > 0$.

Здесь $n = 2$ и $f(t, x) = \alpha + \lambda\sqrt{x}$. Легко видеть, что $f(t, x)$ неотрицательна, непрерывна на $[0, 1] \times [0, \infty)$ и не убывает по второму аргументу. Более того, положив $\varphi(u) = \sqrt{u}$, несложно убедиться, что $f(t, u)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.3.

Таким образом, для $u \geq v$ справедливо

$$f(t, u) - f(t, v) = \lambda(\sqrt{u} - \sqrt{v}) \leq \lambda(\sqrt{u - v}).$$

Докажем, что $\varphi(u) = \sqrt{u}$ принадлежит \mathcal{J} . Очевидно, $\varphi : [0, \infty) \rightarrow [0, \infty)$ является непрерывной и неубывающей функцией. Кроме того, $\psi(u) = u - \varphi(u) = u - \sqrt{u}$ также непрерывна, не убывает и удовлетворяет условиям: $\psi(u) > 0$ при $u > 0$ и $\psi(0) = 0$. Следовательно, $\varphi \in \mathcal{J}$.

Наконец, $f(t, 0) = \alpha + \sqrt{0} = \alpha > 0$. Таким образом, на основании теоремы 2.4 задача (2.4)–(2.6) имеет единственное положительное решение при

$$0 < \lambda \leq \left(\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2} - \left(\frac{1}{2} \right)^2 \right) \right)^{-1} = 8.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдурагимов Э. И. Положительное решение двухточечной краевой задачи для одного ОДУ четвертого порядка и численный метод его построения // Вестн. СамУ. Естественнаучн. сер. — 2010. — 76, № 2. — С. 5–12.
2. Абдурагимов Э. И. Существование положительного решения двухточечной краевой задачи для одного нелинейного ОДУ четвертого порядка // Вестн. СамУ. Естественнаучн. сер. — 2014. — 121, № 10. — С. 9–16.
3. Абдурагимов Э. И., Абдурагимова П. Э., Гаджиева Т. Ю. Двухточечная краевая задача для одного нелинейного ОДУ 4-го порядка. Существование, единственность положительного решения и численный метод его построения // Вестн. Даг. гос. ун-та. Сер. 1: Естеств. науки. — 2019. — № 3. — С. 79–85.
4. Абдурагимов Г. Э., Абдурагимова П. Э., Курамагомедова М. М. О существовании и единственности положительного решения краевой задачи для нелинейного обыкновенного дифференциального уравнения четного порядка // Вестн. рос. ун-тов. Мат. — 2021. — 25, № 136. — С. 341–347.
5. Cabada A., Iglesias J. Nonlinear differential equations with perturbed Dirichlet integral boundary conditions // Bound. Value Probl. — 2021. — 66. — С. 1–19.
6. Harjani J., Sadarangani K. Fixed point theorems for weakly contractive mappings in partially ordered sets // Nonlinear Anal. — 2009. — 71. — С. 3403–3410.
7. Li Z., Shu X.-B., Miao T. The existence of solutions for Sturm–Liouville differential equation with random impulses and boundary value problems // Bound. Value Probl. — 2022. — 97. — С. 1–23.
8. Liu Y. Multiple positive of nonlinear singular boundary value problem for fourth-order equations // Appl. Math. Lett. — 2004. — 4. — С. 747–757.
9. Moustafa El-S. Positive solutions of boundary value problems for n th-order ordinary differential equations // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2008. — 1. — С. 1–9.
10. Nietto J. J., Rodriguez-Lopez R. Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations // Order. — 2005. — 22. — С. 223–239.
11. Talib I., Abdeljawad T., Abdulah M. A. New results and applications on the existence results for nonlinear coupled systems // Adv. Differ. Equ. — 2021. — 368. — С. 1–22.

12. Wang F., Ding R. On positive solutions of second-order delayed differential system with indefinite weight // Bound. Value Probl. — 2021. — 96. — С. 1–17.
13. Yang Z. Positive solutions of a second-order nonlinear Robin problem involving the first-order derivative // Adv. Differ. Equ. — 2021. — 313. — С. 1–16.
14. Ying H. Existence theory for single positive solution to fourth-order value problems // Adv. Pure Math. — 2014. — 4. — С. 480–486.
15. Zhang Y., Abdella K., Feng W. Positive solutions for second-order differential equations with singularities and separated integral boundary condition // Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2020. — 75. — С. 1–12.

Г. Э. Абдурагимов

Дагестанский государственный университет, Махачкала, Россия

E-mail: gusen_e@mail.ru

П. Э. Абдурагимова

Дагестанский государственный университет, Махачкала, Россия

E-mail: abpatuka@mail.ru

М. М. Курамагомедова

Дагестанский государственный университет, Махачкала, Россия

E-mail: madina19.12@mail.ru

UDC 517.927.4

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-201-207

EDN: CUFAAP

On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary-value problem of the Sturm–Liouville type for a nonlinear ordinary differential equation

G. È. Abduragimov, P. È. Abduragimova, and M. M. Kuramagomedova

Daghestan State University, Makhachkala, Russia

Abstract. Using the fixed point theorem in partially ordered sets, we obtain sufficient conditions for the existence of a unique positive solution to a boundary-value problem of the Sturm–Liouville type for a nonlinear ordinary differential equation, and give an example illustrating the results obtained.

Keywords: cone, positive solution, operator fixed point, Green’s function.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare that no financial support was received.

For citation: G. È. Abduragimov, P. È. Abduragimova, M. M. Kuramagomedova, “On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary-value problem of the Sturm–Liouville type for a nonlinear ordinary differential equation,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. 69, No. 2, 201–207. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-201-207>



REFERENCES

1. È. I. Abduragimov, “Polozhitel’noe reshenie dvukhtocheynoy kraevoy zadachi dlya odnogo ODU chetvertogo poryadka i chislennyy metod ego postroeniya” [A positive solution of a two-point boundary-value problem for one fourth-order ODE and a numerical method for its construction], *Vestn. SamU. Estestvennonauchn. ser.* [Bull. Samara Univ. Ser. Natur. Sci.], 2010, **76**, No. 2, 5–12 (in Russian).
2. È. I. Abduragimov, “Sushchestvovanie polozhitel’nogo resheniya dvukhtocheynoy kraevoy zadachi dlya odnogo nelineynogo ODU chetvertogo poryadka” [Existence of a positive solution to a two-point boundary-value problem for one nonlinear fourth-order ODE], *Vestn. SamU. Estestvennonauchn. ser.* [Bull. Samara Univ. Ser. Natur. Sci.], 2014, **121**, No. 10, 9–16 (in Russian).
3. È. I. Abduragimov, P. È. Abduragimova, and T. Yu. Gadzhieva, “Dvukhtocheynaya kraevaya zadacha dlya odnogo nelineynogo ODU 4-go poryadka. Sushchestvovanie, edinstvennost’ polozhitel’nogo resheniya i chislennyy metod ego postroeniya” [Two-point boundary-value problem for one 4th-order nonlinear ODE. Existence, uniqueness of a positive solution, and a numerical method for its construction], *Vestn. Dag. gos. un-ta. Ser. 1: Estestv. nauki* [Bull. Dagestan State Univ. Ser. 1. Natur. Sci.], 2019, No. 3, 79–85 (in Russian).
4. G. È. Abduragimov, P. È. Abduragimova, and M. M. Kuramagomedova, “O sushchestvovanii i edinstvennosti polozhitel’nogo resheniya kraevoy zadachi dlya nelineynogo obyknovennogo differentsial’nogo uravneniya chetnogo poryadka” [On the existence and uniqueness of a positive solution to a boundary-value problem for a nonlinear ordinary differential equation of even order], *Vestn. ros. un-tov. Mat.* [Bull. Rus. Univ. Math.], 2021, **25**, No. 136, 341–347 (in Russian).
5. A. Cabada and J. Iglesias, “Nonlinear differential equations with perturbed Dirichlet integral boundary conditions,” *Bound. Value Probl.*, 2021, **66**, 1–19.
6. J. Harjani and K. Sadarangani, “Fixed point theorems for weakly contractive mappings in partially ordered sets,” *Nonlinear Anal.*, 2009, **71**, 3403–3410.
7. Z. Li, X.-B. Shu, and T. Miao, “The existence of solutions for Sturm–Liouville differential equation with random impulses and boundary value problems,” *Bound. Value Probl.*, 2022, **97**, 1–23.
8. Y. Liu, “Multiple positive of nonlinear singular boundary value problem for fourth-order equations,” *Appl. Math. Lett.*, 2004, **4**, 747–757.
9. Moustafa El-S., “Positive solutions of boundary value problems for n th-order ordinary differential equations,” *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2008, **1**, 1–9.
10. J. J. Nietto and R. Rodriguez-Lopez, “Contractive mapping theorems in partially ordered sets and applications to ordinary differential equations,” *Order*, 2005, **22**, 223–239.
11. I. Talib, T. Abdeljawad, and M. A. Abdulah, “New results and applications on the existence results for nonlinear coupled systems,” *Adv. Differ. Equ.*, 2021, **368**, 1–22.
12. F. Wang and R. Ding, “On positive solutions of second-order delayed differential system with indefinite weight,” *Bound. Value Probl.*, 2021, **96**, 1–17.
13. Z. Yang, “Positive solutions of a second-order nonlinear Robin problem involving the first-order derivative,” *Adv. Differ. Equ.*, 2021, **313**, 1–16.
14. H. Ying, “Existence theory for single positive solution to fourth-order value problems,” *Adv. Pure Math.*, 2014, **4**, 480–486.
15. Y. Zhang, K. Abdella, and W. Feng, “Positive solutions for second-order differential equations with singularities and separated integral boundary condition,” *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2020, **75**, 1–12.

G. È. Abduragimov
 Daghestan State University, Makhachkala, Russia
 E-mail: gusen_e@mail.ru

P. È. Abduragimova
 Daghestan State University, Makhachkala, Russia
 E-mail: abpatuka@mail.ru

M. M. Kuramagomedova
 Daghestan State University, Makhachkala, Russia
 E-mail: madina19.12@mail.ru

УДК 517.956.4, 519.633

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-208-223

EDN: BSNBJE

ЧИСЛЕННО-АНАЛИТИЧЕСКИЙ МЕТОД ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА С ПЕРИОДИЧЕСКИМ КРАЕВЫМ УСЛОВИЕМ

С. И. Безродных, С. В. Пикулин

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук,
Москва, Россия

Аннотация. Построен эффективный численно-аналитический метод решения начально-краевой задачи для уравнения Бюргерса на отрезке с периодическим краевым условием. Метод включает в себя редукцию к линейной задаче на основе явно-неявной схемы дискретизации по времени и аналитическое решение вспомогательной линейной задачи на каждом временном шаге с использованием явного вида соответствующей функции Грина. Эффективность построенного метода обусловлена тем, что алгоритм решения вспомогательной задачи имеет всего лишь линейную сложность по количеству используемых узлов пространственной дискретизации, не задействуя при этом разностные аппроксимации производных искомой функции. На основе подстановки Коула—Хопфа получено явное периодическое решение задачи на отрезке и проведено сопоставление результатов численной реализации построенного алгоритма с этим явным решением. Разработанный метод продемонстрировал сочетание высокой вычислительной эффективности и точности получаемого результата.

Ключевые слова: уравнение Бюргерса, численно-аналитический метод, функция Грина, явно-неявная схема.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы благодарят проф. В. И. Власова за полезные стимулирующие обсуждения и внимание к работе. Работа выполнена в ФИЦ ИУ РАН за счет средств госзадания.

Для цитирования: С. И. Безродных, С. В. Пикулин. Численно-аналитический метод для уравнения Бюргерса с периодическим краевым условием // Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. 69, № 2. С. 208–223. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-208-223>

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассматривается следующая начально-краевая задача для уравнения Бюргерса на отрезке:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} = f(t, x), \quad x \in [-1, 1], \quad t \in [0, T], \quad (1.1)$$

с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \quad (1.2)$$

и краевыми условиями периодичности

$$u(t, -1) = u(t, 1), \quad \frac{\partial u}{\partial x}(t, -1) = \frac{\partial u}{\partial x}(t, 1), \quad (1.3)$$

где коэффициент диффузии $\lambda > 0$ не зависит от t и x , функции $u_0(x)$ и $f(t, x)$ являются непрерывными и периодическими по $x \in [-1, 1]$.

Известно (см. [11, гл. 4]), что решение задачи (1.1)–(1.3) существует и единственно в классе $C^1([0, T], C^2([-1, 1]))$. Отметим, что особый интерес представляет случай, когда коэффициент λ является малой величиной (см. [7, гл. 2]).

Как правило (см. [8, гл. VIII]), численное решение начально-краевых задач для нелинейного эволюционного уравнения, к классу которых принадлежит рассматриваемая задача (1.1)–(1.3), включает в себя этап пространственно-временной дискретизации при помощи той или иной схемы приближения искомого решения и входящих в уравнение его производных, затем переход ко вспомогательной линейной задаче, и, наконец, решение соответствующего линейного уравнения на каждом временном слое. При этом основная вычислительная нагрузка порождается последним из перечисленных шагов, т. е. решением линейной задачи.

Метод, построенный в настоящей работе, включает использование явно-неявной схемы дискретизации по времени [3, 9, 14, 16], приводящий на каждом шаге к линейной задаче для обыкновенного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и независимой переменной x . Схема метода изложена в разделе 2.

Новизна применяемого в настоящей работе подхода заключается в способе решения указанной линейной задачи, опирающемся на использование явного вида соответствующей функции Грина и имеющем при этом алгоритмическую сложность $O(N)$ при $N \rightarrow \infty$, где N — количество узлов пространственной аппроксимации. Линейная по N сложность алгоритма решения вспомогательной задачи на временном слое обеспечивает высокую эффективность разработанного алгоритма. Метод решения линейной задачи на отрезке с периодическим краевым условием изложен в разделах 3 и 4. Отметим, что близкий подход использовался в работе [2] при решении краевой задачи для сингулярно возмущенного обыкновенного дифференциального уравнения, где вместо функции Грина при вычислениях был использован главный член ее асимптотики, построенный методом ВКБ.

Известно (см. [11]), что уравнение Бюргерса (1.1) с помощью некоторой замены искомой функции (т. н. подстановки Коула–Хопфа) приводится к линейному уравнению теплопроводности. Такая редукция позволяет строить решения уравнения (1.1) в явном виде (см., например, [5]). В разделе 5 указанным способом построено явное периодическое решение уравнения Бюргерса, имеющее N -образный профиль. Это решение является аналогом известного решения Хохлова, определенного на всей числовой оси (см. [10]). Отметим в связи с этим также работы [6, 13], в которых на основе применения теста Пенлеве построены в явном аналитическом либо в полуаналитическом виде решения уравнения Колмогорова–Петровского–Пискунова. Это квазилинейное параболическое уравнение, в отличие от уравнения Бюргерса, не приводится какой-либо заменой переменных к линейному виду, однако излагаемый в данной работе метод применим также и к уравнениям такого типа.

В разделе 6 приведены результаты численной реализации построенного метода и их сопоставление с найденным явным решением.

2. СХЕМА МЕТОДА

Для того чтобы построить приближенное решение задачи (1.1)–(1.3), введем дискретизацию по времени с шагом $\tau = T/K$, $K \in \mathbb{N}$, и обозначим через $u_n(x)$ искомое приближение при $t = t_n$:

$$u_n(x) \approx u(t_n, x), \quad x \in [-1, 1], \quad t_n = n\tau.$$

Предполагая, что функции $u_1(x), \dots, u_n(x)$ уже вычислены, воспользуемся для нахождения функции $u_{n+1}(x)$ при $n > 1$ явно-неявной трехслойной схемой, центрированной в точке

$$t_n^* = t_n + \frac{\tau}{2},$$

включающей приближение линейного члена по схеме Кранка–Николсон (см. [15]) и экстраполяцию нелинейного члена по схеме Адамса–Бэшфорта (см. [14]):

$$\frac{u_{n+1}(x) - u_n(x)}{\tau} - \frac{\lambda}{2} \left(\frac{d^2 u_{n+1}}{dx^2} + \frac{d^2 u_n}{dx^2} \right) + \frac{3}{2} u_n(x) \frac{du_n}{dx} - \frac{1}{2} u_{n-1}(x) \frac{du_{n-1}}{dx} = f(t_n^*, x),$$

откуда получаем относительно $u_{n+1}(x)$ следующее линейное обыкновенное дифференциальное уравнение (одномерное уравнение Гельмгольца):

$$-\frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 u_{n+1}}{dx^2} + u_{n+1}(x) = g_{n+1}(x), \quad \frac{1}{\omega^2} := \frac{\lambda\tau}{2}, \quad (2.1)$$

где правая часть, определяемая по формуле

$$\begin{aligned} g_{n+1}(x) &= \frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 u_n}{dx^2} + u_n(x) + \tau \left(f(t_n^*, x) - \frac{3}{2} u_n(x) \frac{du_n}{dx} + \frac{1}{2} u_{n-1}(x) \frac{du_{n-1}}{dx} \right) = \\ &= 2 u_n(x) - g_n(x) + \tau \left(f(t_n^*, x) - \frac{3}{2} u_n(x) \frac{du_n}{dx} + \frac{1}{2} u_{n-1}(x) \frac{du_{n-1}}{dx} \right), \end{aligned} \quad (2.2)$$

зависит только от известных, уже вычисленных на предыдущих шагах алгоритма функций. Отметим, что выражение (2.2) не содержит явной зависимости от вторых производных функций $u_j(x)$, $j = 0, \dots, n-1$. Уравнение (2.1) с правой частью (2.2) дополняется краевыми условиями периодичности искомой функции в соответствии с (1.3):

$$u_{n+1}(-1) = u_{n+1}(1), \quad \frac{du_{n+1}}{dx}(-1) = \frac{du_{n+1}}{dx}(1). \quad (2.3)$$

Для нахождения функции $u_1(x)$, приближающей решение в момент времени $t = t_1 = \tau$, можно воспользоваться любой двуслойной вычислительной схемой. Мы для этого используем двуслойную явно-неявную схему [14] на основе приближения Кранка—Николсон. При сопоставлении численных результатов с явным решением в разделе 6 необходимые данные (т. е. значение решения $u(t, x)$ и его производных в требуемых точках) для двух начальных временных слоев $t = 0$ и $t = \tau$ не вычисляются, а задаются в качестве известных величин.

3. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ЗАДАЧИ С КУСОЧНО-ЛИНЕЙНОЙ ПРАВОЙ ЧАСТЬЮ

Перейдем к формулировке алгоритма решения задачи (2.1)–(2.3), который составляет основу построения решения исходной задачи (1.1)–(1.3).

Переформулируем задачу (2.1)–(2.3) в виде

$$Lv(x) := -\frac{1}{\omega^2} \frac{d^2 v(x)}{dx^2} + v(x) = g(x), \quad \omega > 0, \quad x \in [-1, 1], \quad (3.1)$$

$$v(-1) = v(1), \quad \frac{dv}{dx}(-1) = \frac{dv}{dx}(1), \quad (3.2)$$

где предполагается, что $g(x)$ — непрерывная функция, заданная на отрезке $[-1, 1]$, причем $g(-1) = g(1)$. Известно (см. [4, гл. 7]), что существует единственное решение $v(x) \in C^2([-1, 1])$ задачи (3.1), (3.2). Условия периодичности, которым удовлетворяют функции $g(x)$ и $v(x)$, позволяют продолжить их на всю числовую ось \mathbb{R} до непрерывных, имеющих период 2. Для таких продолженных функций сохраним те же обозначения.

Представим решение задачи (3.1), (3.2) в виде свертки правой части $g(x)$ уравнения (3.1) и соответствующей функции Грина $\mathcal{G}(x, \xi)$:

$$v(x) = \int_{-1}^1 \mathcal{G}(x, \xi) g(\xi) d\xi. \quad (3.3)$$

Отметим, что функция Грина $\mathcal{G}(x, \xi)$ задачи (3.1), (3.2), т. е. ее решение при $g(x) = \delta(x - \xi)$, имеет следующий явный вид: $\mathcal{G}(x, \xi) = G(x - \xi)$, где

$$G(r) = \frac{\omega}{2 \operatorname{sh} \omega} \operatorname{ch}(\omega(r - \operatorname{sign} r)) \quad \text{при } r \neq 0. \quad (3.4)$$

Таким образом, функция \mathcal{G} в (3.3) записывается по формуле

$$\mathcal{G}(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\omega}{2 \operatorname{sh} \omega} \operatorname{ch}(\omega(x - \xi + 1)) & \text{при } x \leq \xi, \\ \frac{\omega}{2 \operatorname{sh} \omega} \operatorname{ch}(\omega(x - \xi - 1)) & \text{при } x > \xi, \end{cases} \quad x, \xi \in [-1, 1]. \quad (3.5)$$

Приведем также выражения для производной функции Грина (3.5), которые потребуются при дальнейшем изложении алгоритма:

$$\mathcal{G}'(x, \xi) := \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial x}(x, \xi) = \begin{cases} \frac{\omega^2}{2 \operatorname{sh} \omega} \operatorname{sh}(\omega(x - \xi + 1)) & \text{при } x < \xi, \\ \frac{\omega^2}{2 \operatorname{sh} \omega} \operatorname{sh}(\omega(x - \xi - 1)) & \text{при } x > \xi, \end{cases} \quad x, \xi \in [-1, 1]. \quad (3.6)$$

Отметим, что справедливы следующие свойства симметрии функции Грина:

$$\mathcal{G}(x, \xi) = \mathcal{G}(\xi, x), \quad (3.7)$$

$$\mathcal{G}'(x, \xi) = -\mathcal{G}'(\xi, x), \quad x, \xi \in [-1, 1]. \quad (3.8)$$

Предположим, что правая часть $g(x)$ уравнения (3.1) является кусочно-линейной непрерывной функцией, т. е. задано разбиение отрезка $[-1, 1]$ на N частей узловыми точками

$$-1 = x_0 < x_1 < \dots < x_N = 1, \quad (3.9)$$

на каждом из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ определена линейная функция

$$P_k(x) = s_k(x - x_k^0) + y_k^0, \quad x_k^0 := \frac{x_k + x_{k-1}}{2}, \quad s_k, y_k^0 \in \mathbb{R}, \quad (3.10)$$

и справедливы равенства

$$g(x) = P_k(x), \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad (3.11)$$

причем

$$P_k(x_k) = P_{k+1}(x_k), \quad (3.12)$$

где мы полагаем $P_{N+1}(x_N) = P_1(x_0)$, $s_{N+1} = s_1$.

Здесь и далее удобно считать, что разбиение (3.9) продолжено на всю числовую ось с периодом 2 с сохранением нумерации по $k \in \mathbb{Z}$ таким образом, что равенство вида (3.11) справедливо при каждом $x \in \mathbb{R}$ для некоторого индекса k , т. е.

$$x_{k+N} = x_k + 2, \quad P_{k+N}(x + 2) = P_k(x), \quad s_{k+N} = s_k, \quad x \in [x_{k-1}, x_k], \quad k \in \mathbb{Z}.$$

С учетом сделанного замечания введем следующее обозначение для скачка производной функции $g(x)$ в узловой точке x_k :

$$\widehat{p}_k := \frac{dP_{k+1}}{dx}(x_k) - \frac{dP_k}{dx}(x_k) = s_{k+1} - s_k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.13)$$

Следующее утверждение уточняет представление (3.3) для рассматриваемого случая кусочно-линейной непрерывной правой части $g(x)$ уравнения (3.1).

Теорема 3.1. *Решение $v(x)$ задачи (3.1), (3.2), где правая часть $g(x)$ имеет вид (3.10)–(3.12), а также производная $v'(x)$ этого решения, могут быть представлены по формулам*

$$v(x) = g(x) + \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^N \widehat{p}_j \mathcal{G}(x, x_j), \quad (3.14)$$

$$\frac{dv}{dx}(x) = \frac{dg}{dx}(x) + \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^N \widehat{p}_j \mathcal{G}'(x, x_j), \quad x \in [-1, 1], \quad (3.15)$$

где производная \mathcal{G}' функции Грина по первому аргументу задана формулой (3.6), коэффициенты \widehat{p}_j определены равенствами (3.13).

Доказательство. Для всякой линейной функции $P(\xi)$ и любого $c \in \mathbb{R}$ справедлива следующая формула, получаемая интегрированием по частям:

$$\int \operatorname{ch}(\omega\xi + c) P(\xi) d\xi = \frac{1}{\omega} \operatorname{sh}(\omega\xi + c) P(\xi) - \frac{1}{\omega^2} \operatorname{ch}(\omega\xi + c) P'(\xi) + \operatorname{const}. \quad (3.16)$$

Зафиксируем точку z на одном из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ разбиения (3.9), $k \in \{1, \dots, N\}$, и введем следующие обозначения:

$$\eta_j := x_j, \quad j = 0, \dots, k-1, \quad \eta_k := z =: \zeta_k, \quad \zeta_j := x_j, \quad j = k+1, \dots, N.$$

Тогда, заменяя x на ξ в выражении (3.10) и подставляя его вместе с функцией Грина (3.5) при $x = z$ в представление (3.3), с помощью формулы (3.16) находим

$$\begin{aligned} v(z) &= \sum_{j=1}^k \int_{\eta_{j-1}}^{\eta_j} P_j(\xi) \frac{\omega}{2 \operatorname{sh} \omega} \operatorname{ch}(\omega(\xi - z + 1)) d\xi + \sum_{j=k+1}^N \int_{\zeta_{j-1}}^{\zeta_j} P_j(\xi) \frac{\omega}{2 \operatorname{sh} \omega} \operatorname{ch}(\omega(\xi - z - 1)) d\xi = \\ &= \frac{1}{2 \operatorname{sh} \omega} \sum_{j=1}^k \left[P_j(\xi) \operatorname{sh}(\omega(\xi - z + 1)) \right]_{\eta_{j-1}}^{\eta_j} - \frac{1}{2 \omega \operatorname{sh} \omega} \sum_{j=1}^k \left[P'_j(\xi) \operatorname{ch}(\omega(\xi - z + 1)) \right]_{\eta_{j-1}}^{\eta_j} + \\ &+ \frac{1}{2 \operatorname{sh} \omega} \sum_{j=k+1}^N \left[P_j(\xi) \operatorname{sh}(\omega(\xi - z - 1)) \right]_{\zeta_{j-1}}^{\zeta_j} - \frac{1}{2 \omega \operatorname{sh} \omega} \sum_{j=k+1}^N \left[P'_j(\xi) \operatorname{ch}(\omega(\xi - z - 1)) \right]_{\zeta_{j-1}}^{\zeta_j} =: \\ &=: S_1 + S_2 + S_3 + S_4. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Группируя в выражении (3.17) слагаемые, содержащие $P_j(\xi)$, с учетом условия непрерывности (3.12) находим

$$\begin{aligned} 2 \operatorname{sh} \omega (S_1 + S_3) &= -P_0(x_0) \operatorname{sh}(\omega(x_0 - z + 1)) + \sum_{j=1}^{k-1} (P_j(x_j) - P_{j+1}(x_j)) \operatorname{sh}(\omega(x_j - z + 1)) + \\ &+ P_k(z) \operatorname{sh}(\omega(z - z + 1)) - P_k(z) \operatorname{sh}(\omega(z - z - 1)) + \\ &+ \sum_{j=k}^{N-1} (P_j(x_j) - P_{j+1}(x_j)) \operatorname{sh}(\omega(x_j - z - 1)) + P_N(x_N) \operatorname{sh}(\omega(x_N - z - 1)) = 2 \operatorname{sh} \omega P_k(z). \end{aligned} \quad (3.18)$$

Аналогичным образом, группируя в (3.17) слагаемые, содержащие $P'_j(\xi)$, с учетом определения (3.13) находим

$$\begin{aligned} -2 \omega \operatorname{sh} \omega (S_2 + S_4) &= -P'_0(x_0) \operatorname{ch}(\omega(x_0 - z + 1)) + \sum_{j=1}^{k-1} (P'_j(x_j) - P'_{j+1}(x_j)) \operatorname{ch}(\omega(x_j - z + 1)) + \\ &+ \widehat{p}_k(z) \operatorname{ch}(\omega(z - z + 1)) - \widehat{p}_k(z) \operatorname{ch}(\omega(z - z - 1)) + \\ &+ \sum_{j=k}^{N-1} (P'_j(x_j) - P'_{j+1}(x_j)) \operatorname{ch}(\omega(x_j - z - 1)) + P'_N(x_N) \operatorname{ch}(\omega(x_N - z - 1)) = \\ &= \sum_{j=1}^{k-1} -\widehat{p}_j \operatorname{ch}(\omega(x_j - z + 1)) + \sum_{j=k}^N -\widehat{p}_j \operatorname{ch}(\omega(x_j - z - 1)). \end{aligned} \quad (3.19)$$

Объединяя равенства (3.17)–(3.19), на основании формул (3.5) получаем

$$v(z) = P_k(z) - \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^N \widehat{p}_j \mathcal{G}(x_j, z),$$

откуда с учетом симметрии (3.7) вытекает утверждение (3.14). Формула (3.15) получается из (3.14) путем дифференцирования по x . Теорема доказана. \square

Отметим, что формулы (3.14), (3.15) согласуются с тем, что решение $v(x)$ принадлежит классу $C^2[-1, 1]$. В самом деле, правая часть равенства (3.14) является непрерывной кусочно-аналитической функцией, возможно, имеющей разрывы производной первого рода в узлах разбиения (3.9). Вычислим согласно формулам (3.15), (3.13), (3.6) производную справа решения $v(x)$ в точке x_k :

$$\frac{dv}{dx}(x_k)_+ = \frac{dP_{k+1}}{dx}(x_k) + \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^N \widehat{p}_j \mathcal{G}'_+(x_k, x_j) =$$

$$= s_{k+1} + \frac{\widehat{p}_k}{2 \operatorname{sh} \omega} \operatorname{sh}(\omega(x_k - x_k - 1)) + \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1, j \neq k}^N \widehat{p}_j \mathcal{G}'(x_k, x_j) = \frac{s_k + s_{k+1}}{2} + \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1, j \neq k}^N \widehat{p}_j \mathcal{G}'(x_k, x_j),$$

и аналогичным образом вычислим производную слева в той же точке:

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx}(x_k)_- &= \frac{dP_k}{dx}(x_k) + \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^N \widehat{p}_j \mathcal{G}'_-(x_k, x_j) = \\ &= s_k + \frac{\widehat{p}_k}{2 \operatorname{sh} \omega} \operatorname{sh}(\omega(x_k - x_k + 1)) + \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1, j \neq k}^N \widehat{p}_j \mathcal{G}'(x_k, x_j) = \frac{s_k + s_{k+1}}{2} + \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1, j \neq k}^N \widehat{p}_j \mathcal{G}'(x_k, x_j). \end{aligned}$$

Равенство полученных предельных величин с учетом непрерывности функции $v(x)$ означает, что она является непрерывно дифференцируемой на отрезке $[-1, 1]$. Непрерывность второй производной вытекает из уравнения (3.1) и непрерывности его правой части $g(x)$.

Утверждение теоремы 3.1 можно обобщить на случай, когда кусочно-линейная правая часть $g(x)$ уравнения (3.1) имеет разрывы первого рода в узлах разбиения. В таком случае решение $v(x)$ задачи (3.1), (3.2) ищется в классе $C^1[-1, 1]$ и понимается в смысле выполнения интегрального уравнения, эквивалентного (3.1) (см. [12]). Представление (3.3) при этом сохраняет силу.

Для того, чтобы сформулировать соответствующий результат, введем следующее обозначение для скачков $g(x)$ в точках x_k :

$$p_k := P_{k+1}(x_k) - P_k(x_k), \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (3.20)$$

Следующая теорема уточняет представление (3.3) для случая кусочно-линейной разрывной правой части $g(x)$ уравнения (3.1).

Теорема 3.2. *Решение $v(x)$ задачи (3.1), (3.2), где правая часть $g(x)$ является кусочно-линейной функцией вида (3.10), (3.11), а также производная $v'(x)$ этого решения, могут быть представлены по формулам*

$$v(x) = g(x) + \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^N p_j \mathcal{G}'(x, x_j) + \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^N \widehat{p}_j \mathcal{G}(x, x_j), \quad (3.21)$$

$$\frac{dv}{dx}(x) = \frac{dg}{dx}(x) + \sum_{j=1}^N p_j \mathcal{G}(x, x_j) + \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^N \widehat{p}_j \mathcal{G}'(x, x_j), \quad x \in [-1, 1], \quad (3.22)$$

где величины p_j, \widehat{p}_j имеют вид (3.20) и (3.13), соответственно.

Теорема 3.2 доказывается аналогично теореме 3.1 с той разницей, что в выражении (3.18) слагаемые, содержащие разности $P_j(x_j) - P_{j+1}(x_j) = -p_j$, не обращаются в нуль, а вносят соответствующий вклад в сумму в правые части формул (3.21), (3.22).

Нетрудно увидеть, что утверждение теоремы 3.1 вытекает из утверждения теоремы 3.2, если положить $p_j = 0$, т. е. считать, что правая часть $g(x)$ уравнения (3.1) является непрерывной функцией.

4. ЛИНЕЙНЫЙ ПО СЛОЖНОСТИ АЛГОРИТМ ВЫЧИСЛЕНИЯ ДЛЯ N ТОЧЕК

Вычисление решения задачи (3.1), (3.2), (3.10) и его производной в заданной точке $z \in [-1, 1]$ по формулам (3.13)–(3.15), как легко видеть, требует $\sim N$ арифметических операций в предположении, что значения $\mathcal{G}(z, x_j), \mathcal{G}'(z, x_j)$ являются известными для всех $j = 1, \dots, N$. Действительно, для нахождения коэффициентов \widehat{p}_j в соответствии с (3.13) необходимо произвести N вычитаний, затем, следуя равенствам (3.14) и (3.15), нужно выполнить по N умножений найденных коэффициентов на величины $\mathcal{G}(z, x_j)$ и $\mathcal{G}'(z, x_j)$, соответственно, и, наконец, дважды вычислить сумму $N + 1$ слагаемых.

Если требуется провести аналогичные вычисления для $\sim N$ точек z_k , например, по $M \geq 1$ точек для каждого из отрезков разбиения (4.1), тогда общая алгоритмическая сложность возрастает до

$O(N^2)$ при $N \rightarrow \infty$. Однако, за счет использования явного вида функции Грина (3.5), оказывается возможным сохранить алгоритмическую сложность такого вычисления на уровне $O(N)$, $N \rightarrow \infty$.

Для простоты изложения будем далее предполагать, что функция $g(x)$ является непрерывной, т. е. выполнено условие (3.12), разбиение (3.9) является равномерным, т. е.

$$x_k = -1 + 2Lk, \quad L := \frac{1}{N}, \quad (4.1)$$

и на каждом из отрезков $[x_{k-1}, x_k]$ выбрана точка z_k :

$$z_k = x_k^0 + h_k, \quad h_k \in [-L, L], \quad z_k \in [x_{k-1}, x_k], \quad k = 1, \dots, N, \quad (4.2)$$

где x_k^0 является серединой отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ в соответствии с определением (3.10).

Прежде чем перейти к формулировке алгоритма эффективного вычисления решения задачи (3.1), (3.2), (3.10)–(3.12), введем следующие обозначения:

$$\beta(h) := e^{-\omega(L+h)}, \quad \gamma(h) := \beta(-h) = e^{-\omega(L-h)}, \quad h \in [-L, L], \quad (4.3)$$

$$\mu := \beta(L) = \exp(-2L\omega), \quad (4.4)$$

$$b_0 = \frac{1}{1 - e^{-2\omega}} \left(\sum_{j=1}^N \hat{p}_j \mu^{N-j} \right), \quad b_k = \mu b_{k-1} + \hat{p}_k, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad (4.5)$$

$$d_N = \frac{1}{1 - e^{-2\omega}} \left(\hat{p}_N + \sum_{j=1}^{N-1} \hat{p}_j \mu^j \right), \quad d_k = \mu d_{k+1} + \hat{p}_k, \quad k = 1, \dots, N-1. \quad (4.6)$$

Справедливо следующее утверждение, устанавливающее эффективный, т. е. имеющий линейную по N сложность, алгоритм вычисления функции $v(x)$ и ее производной.

Теорема 4.1. *Если в условиях теоремы 3.1 разбиение отрезка с отмеченными точками z_k имеет вид (4.1), (4.2), то решение $v(x)$ задачи (3.1), (3.2), (3.10)–(3.12) и его производная в точках z_k даются формулами*

$$v(z_k) = g(z_k) + \frac{b_{k-1} \beta(h_k) + d_k \gamma(h_k)}{2\omega}, \quad h_k = z_k - x_k^0, \quad (4.7)$$

$$\frac{dv}{dx}(z_k) = \frac{dg}{dx}(z_k) + \frac{-b_{k-1} \beta(h_k) + d_k \gamma(h_k)}{2}, \quad (4.8)$$

здесь величины $\beta(h_k)$, $\gamma(h_k)$, b_k , d_k определены равенствами (4.3)–(4.6), $k = 1, \dots, N$.

Доказательство. Следуя соглашению раздела 3, доопределим функции $g(x)$ и $\mathcal{G}(x, \xi)$ таким образом, чтобы они являлись непрерывными периодическими с периодом 2 функциями своих аргументов $x, \xi \in \mathbb{R}$, и распространим разбиение (4.1) с отмеченными точками (4.2) на всю числовую ось, сохраняя обозначения x_k, z_k и т. д. с индексом $k \in \mathbb{Z}$. Тогда последовательность $(\hat{p}_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ обладает периодом N в соответствии с определением (3.13). Обозначим множество всех таких последовательностей через $\mathfrak{P}(N)$, т. е.

$$\mathfrak{P}(N) = \{ (a_k)_{k \in \mathbb{Z}} : a_{k+N} = a_k \in \mathbb{R}, \quad \forall k \in \mathbb{Z} \}. \quad (4.9)$$

Для того чтобы получить эффективную вычислительную процедуру решения задачи (3.1), (3.2), (3.10)–(3.12), преобразуем формулу (3.14) при $x = z_k$ с учетом явного вида (3.5) функции \mathcal{G} .

Исходя из сделанного выше замечания о периодичности функции Грина, находим

$$\Delta_k := v(z_k) - g(z_k) = \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^N \hat{p}_j \mathcal{G}(z_k, x_j) = \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=k}^{N+k-1} \hat{p}_j \mathcal{G}(x_j, z_k). \quad (4.10)$$

Пользуясь вытекающим из (4.1), (4.2) равенством

$$x_j - z_k = (2(j - k) + 1)L - h_k,$$

подставляем явный вид (3.5) функции \mathcal{G} при $x_j > z_k$ в выражение (4.10):

$$\begin{aligned} \Delta_k &= \frac{1}{2\omega \operatorname{sh} \omega} \sum_{j=k}^{N+k-1} \hat{p}_{k+j} \operatorname{ch}\left(\omega((2(j-k)+1)L - h_k - 1)\right) = \\ &= \frac{1}{2\omega \operatorname{sh} \omega} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{k+j} \operatorname{ch}\left(\omega((2j+1)L - h_k - 1)\right). \end{aligned} \quad (4.11)$$

Гиперболический косинус в формуле (4.11) запишем в виде линейной комбинации экспонент:

$$4\omega \operatorname{sh} \omega \Delta_k = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{k+j} \exp\left(\omega((2j+1)L - h_k - 1)\right) + \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{k+j} \exp\left(\omega(-(2j+1)L + h_k + 1)\right),$$

затем в получившемся выражении вынесем общие множители таким образом, чтобы максимальный аргумент экспоненты в каждой из сумм оказался равен нулю:

$$\Delta_k = \frac{e^{-\omega(L+h_k)} e^\omega}{4\omega \operatorname{sh} \omega} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{k+j} \exp((2j+2)L\omega - 2\omega) + \frac{e^{-\omega(L-h_k)} e^\omega}{4\omega \operatorname{sh} \omega} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{k+j} \exp(-2L\omega j). \quad (4.12)$$

Обращая порядок слагаемых и нумерацию по j в первой сумме, входящей в правую часть выражения (4.12), и пользуясь периодичностью $\hat{p}_{k+N-1-j} = \hat{p}_{k-1-j}$, а также равенством

$$\frac{e^\omega}{2 \operatorname{sh} \omega} = \frac{1}{1 - e^{-2\omega}},$$

приходим к следующему результату:

$$\Delta_k = \frac{e^{-\omega(L+h_k)}}{2\omega(1 - e^{-2\omega})} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{k-1-j} \exp(-2L\omega j) + \frac{e^{-\omega(L-h_k)}}{2\omega(1 - e^{-2\omega})} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{k+j} \exp(-2L\omega j). \quad (4.13)$$

Таким образом, разность (4.10) искомого решения $v(x)$ и правой части $g(x)$ уравнения (3.1) представлена выражением (4.13) в виде суммы двух линейных комбинаций величин \hat{p}_j , коэффициенты которых образуют геометрическую прогрессию со знаменателем μ вида (4.4), не зависящим от k .

Получим выражение аналогичного (4.13) вида для разности производных решения и правой части уравнения. Из формулы (3.15) находим

$$\begin{aligned} \frac{dv}{dx}(z_k) - \frac{dg}{dx}(z_k) &= \frac{1}{\omega^2} \sum_{j=1}^N \hat{p}_j G'(z_k, x_j) = -\frac{1}{\omega^2} \sum_{j=k}^{N+k-1} \hat{p}_j G'(x_j, z_k) = \\ &= -\frac{1}{2 \operatorname{sh} \omega} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{k+j} \operatorname{sh}\left(\omega((2j+1)L - h_k - 1)\right) = \\ &= -\frac{e^{-\omega(L+h_k)} e^\omega}{4 \operatorname{sh} \omega} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{k+j} \exp((2j+2)L\omega - 2\omega) + \frac{e^{-\omega(L-h_k)} e^\omega}{4 \operatorname{sh} \omega} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{k+j} \exp(-2L\omega j) = \\ &= -\frac{e^{-\omega(L+h_k)}}{2(1 - e^{-2\omega})} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{k-1-j} \exp(-2L\omega j) + \frac{e^{-\omega(L-h_k)}}{2(1 - e^{-2\omega})} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{k+j} \exp(-2L\omega j). \end{aligned} \quad (4.14)$$

Таким образом, разность производных решения $v(x)$ задачи (3.1), (3.2), (3.10)–(3.12) и правой части $g(x)$ уравнения (3.1) в точках z_k представлена выражением (4.14) в виде разности тех же самых линейных комбинаций величин \hat{p}_j , которые входят в формулу (4.13), умноженных на коэффициент ω .

Прежде чем перейти к обоснованию формул (4.5)–(4.8), введем некоторые обозначения. Определим для последовательностей из класса (4.9) инволютивную операцию \mathcal{R} обращения порядка на периоде

$$(a_k) \xrightarrow{\mathcal{R}} (\tilde{a}_k) \in \mathfrak{P}(N), \quad \tilde{a}_k := a_{N-k+1}, \quad k = 1, \dots, N,$$

а также бинарную операцию $*$ циклической свертки

$$(a_k^{(1)}, a_k^{(2)}) \mapsto (a_k^{(1)}) * (a_k^{(2)}) = (a_k^{(3)}) \in \mathfrak{P}(N), \quad (4.15)$$

$$a_k^{(3)} := \sum_{j=0}^{N-1} a_j^{(1)} a_{k-j}^{(2)}, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.16)$$

Зададим периодическую последовательность $(\varepsilon_k) \in \mathfrak{P}(N)$ ее значениями на периоде

$$\varepsilon_k = \frac{1}{1 - e^{-2\omega}} \exp(-2L\omega k), \quad k = 0, \dots, N-1. \quad (4.17)$$

С учетом того, что $(\hat{p}_k) \in \mathfrak{P}(N)$, положим

$$(\tilde{b}_k) := (\varepsilon_k) * (\hat{p}_k), \quad \tilde{b}_k = \frac{1}{1 - e^{-2\omega}} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{k-j} \exp(-2L\omega j), \quad (4.18)$$

$$(\tilde{d}_k) := \mathcal{R}((\varepsilon_k) * \mathcal{R}(\hat{p}_k)), \quad \tilde{d}_k = \frac{1}{1 - e^{-2\omega}} \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{k+j} \exp(-2L\omega j). \quad (4.19)$$

Тогда формулы (4.13) и (4.14) записываются в виде

$$v(z_k) = g(z_k) + \frac{\tilde{b}_{k-1} \beta(h_k) + \tilde{d}_k \gamma(h_k)}{2\omega}, \quad (4.20)$$

$$\frac{dv}{dx}(z_k) = \frac{dg}{dx}(z_k) + \frac{-\tilde{b}_{k-1} \beta(h_k) + \tilde{d}_k \gamma(h_k)}{2}, \quad (4.21)$$

где значения $\beta(h_k)$, $\gamma(h_k)$ заданы равенствами (4.3).

Для того чтобы установить справедливость формул (4.5), (4.6), покажем, что

$$\tilde{b}_k = b_k, \quad \tilde{d}_k = d_k. \quad (4.22)$$

В самом деле, используя обозначение (4.4) и свойство периодичности $\hat{p}_{-j} = \hat{p}_{N-j}$, $j \in \mathbb{Z}$, исходя из определения (4.18), при $k = 0$ находим

$$(1 - e^{-2\omega}) \tilde{b}_0 = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{-j} \exp(-2L\omega j) = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{-j} \mu^j = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_{N-j} \mu^j = \sum_{j=1}^N \hat{p}_j \mu^{N-j} = (1 - e^{-2\omega}) b_0.$$

Аналогичным образом, из определения (4.19) при $k = N$ получаем

$$(1 - e^{-2\omega}) \tilde{d}_N = \sum_{j=0}^{N-1} \hat{p}_j \exp(-2L\omega j) = \hat{p}_0 + \sum_{j=1}^{N-1} \hat{p}_j \mu^j = \hat{p}_N + \sum_{j=1}^{N-1} \hat{p}_j \mu^j = (1 - e^{-2\omega}) d_N,$$

следовательно,

$$\tilde{b}_0 = b_0, \quad \tilde{d}_N = d_N. \quad (4.23)$$

Справедливость равенств (4.22) при $k = 1, \dots, N-1$ вытекает из следующей леммы.

Лемма 4.1. *Рассмотрим последовательности $(a_k), (h_k) \in \mathfrak{P}(N)$ и $(H_k) = (a_k) * (h_k)$, где*

$$a_k = a_0 \mu^k, \quad k = 1, \dots, N-1, \quad a_0, \mu \in \mathbb{R},$$

тогда справедлива следующая формула:

$$H_k = \mu H_{k-1} + a_0 (1 - \mu^N) h_k, \quad k \in \mathbb{Z}. \quad (4.24)$$

Доказательство. Пользуясь определением свертки (4.16) и свойством периодичности $h_{k-N} = h_k$, находим

$$\begin{aligned} \mu H_{k-1} &= \mu \sum_{j=0}^{N-1} a_0 \mu^j h_{k-1-j} = \sum_{j=1}^N a_0 \mu^j h_{k-j} = \sum_{j=0}^{N-1} a_0 \mu^j h_{k-j} + a_0 \mu^N h_{k-N} - a_0 h_k = \\ &= H_k - a_0 (1 - \mu^N) h_k, \end{aligned}$$

откуда следует равенство (4.24). Лемма доказана. \square

Применяя лемму 4.1 к последовательностям (\widehat{p}_k) и $\mathcal{R}(\widehat{p}_k)$ при

$$\mu = \exp(-2L\omega), \quad a_0 = \frac{1}{1 - e^{-2\omega}} = (1 - \mu^N)^{-1},$$

получаем

$$\begin{aligned} \widetilde{b}_k &= \mu \widetilde{b}_{k-1} + \widehat{p}_k, & k &= 1, \dots, N-1, \\ \widetilde{d}_k &= \mu \widetilde{d}_{k+1} + \widehat{p}_k, & k &= 1, \dots, N-1. \end{aligned}$$

что вместе с равенствами (4.23) и определениями (4.5), (4.6) обеспечивает выполнение условий (4.22) при всех $k \in \mathbb{Z}$. Из (4.20)–(4.22) следуют формулы (4.7), (4.8). Теорема 4.1 доказана. \square

Подчеркнем, что вычисление решения $v(x)$ задачи (3.1), (3.2), (3.10)–(3.12) и его производной в точках z_k по формулам (4.5)–(4.8) требует порядка N арифметических операций. В самом деле, алгоритм состоит из следующих четырех шагов:

1. по формулам (4.5), (4.6) вычислить величины b_0, d_N ;
2. вычислить b_k, d_k при $k = 1, \dots, N-1$;
3. по формуле (4.7) найти решение $v(z_k)$, $k = 1, \dots, N$;
4. согласно (4.8) найти производную решения $v'(z_k)$, $k = 1, \dots, N$.

При этом каждый из указанных шагов требует выполнения $\sim N$ операций.

5. НЕКОТОРЫЕ ЯВНЫЕ ПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ БЮРГЕРСА

Для оценки численного алгоритма используем следующее явное решение уравнения Бюргерса:

$$\frac{\partial u}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(t, x) \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad (5.1)$$

т. е. уравнения (1.1) при $f(t, x) = 0$:

$$u(t, x) = \widetilde{u}(t, x) = -2\pi\lambda \frac{\sin(\pi x)}{e^{\pi^2 \lambda t} - \cos(\pi x)}, \quad x \in \mathbb{R}, \quad t > 0. \quad (5.2)$$

Непосредственно из вида (5.2) функции $\widetilde{u}(t, x)$ следует, что по переменной x она является нечетной, имеет период 2 и удовлетворяет условиям (1.3).

Решение (5.2) уравнения (5.1) получено при помощи подстановки Коула–Хопфа (см. [11, п. 4.1])

$$u(t, x) = -\frac{2\lambda}{\varphi(t, x)} \frac{d\varphi}{dx}$$

из решения

$$\varphi(t, x) = 1 - e^{-\pi^2 \lambda t} \cos(\pi x)$$

линейного уравнения теплопроводности

$$\frac{\partial \varphi}{\partial t} - \lambda \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} = 0.$$

Рассмотрим подробнее поведение функции (5.2) на отрезке $[-1, 1]$. Для этого запишем равенство (5.2) в следующем виде:

$$-\frac{2\pi\lambda}{u(t, x)} = \frac{A(t) + 1}{2} \theta + \frac{A(t) - 1}{2} \theta^{-1}, \quad (5.3)$$

где

$$A(t) := e^{\pi^2 \lambda t}, \quad \theta = \theta(x) := \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}.$$

При изменении переменной x от -1 до 1 величина θ пробегает всю числовую ось от $-\infty$ до $+\infty$. Рассматривая правую часть формулы (5.3) при фиксированном значении $t \geq 0$ как функцию переменной θ , приходим к следующему результату.

Утверждение 5.1. При каждом фиксированном значении $t \geq 0$ правая часть равенства (5.2) как функция от $x \in [-1, 1]$ имеет единственный максимум $U(t) > 0$ в точке $-m(t) \in (-1, 0)$ и единственный минимум $-U(t)$ в точке $m(t) \in (0, 1)$, где

$$m(t) = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\frac{A(t) - 1}{A(t) + 1}} = \frac{2}{\pi} \operatorname{arctg} \sqrt{\operatorname{th} \frac{\pi^2 \lambda t}{2}}, \quad (5.4)$$

$$U(t) = \frac{2\pi\lambda}{\sqrt{A^2(t) - 1}}, \quad t > 0. \quad (5.5)$$

Функция $u(t, x)$ монотонно возрастает по x на отрезках $x \in [-1, -m(t)]$ и $x \in [m(t), 1]$ и монотонно убывает на отрезке $x \in [-m(t), m(t)]$.

При $t = 0$ решение (5.2) формально не существует, обращаясь в бесконечность при $x = 0$. Найдем асимптотики величин (5.4), (5.5) при $t \rightarrow 0$:

$$m(t) \sim \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{\pi^2 \lambda t}{2}} = \sqrt{2\lambda t}, \quad U(t) \sim \frac{2\pi\lambda}{\sqrt{2\pi^2 \lambda t}} = \sqrt{\frac{2\lambda}{t}}, \quad t \rightarrow 0. \quad (5.6)$$

Из соотношений (5.6) вытекает, что при малых t значение $m(t)$ мало, а значение $U(t)$ велико. Таким образом, решение (5.2) на отрезке убывания $[-m(t), m(t)]$ образует резкий фронт, на котором среднее значение градиента имеет асимптотику

$$-\frac{U(t)}{m(t)} \sim -\frac{1}{t}, \quad t \rightarrow 0.$$

На основании представления (5.3) заключаем, что при фиксированном $t > 0$ решение (5.2) в окрестности начала координат ведет себя следующим образом:

$$u(t, x) \sim -2\pi\lambda \frac{2}{A(t) - 1} \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} \sim -\frac{2\pi^2 \lambda}{A(t) - 1} x, \quad x \rightarrow 0, \quad t > 0,$$

откуда находим

$$u(t, x) \sim -\frac{2\pi^2 \lambda}{\pi^2 \lambda t} x = -\frac{2}{t} x, \quad x, t \rightarrow 0.$$

Из формулы (5.2) можно получить явные решения, которые описывают перемещающийся фронт, при помощи известного преобразования

$$u(t, x) \mapsto V + u(t, x - Vt), \quad V \in \mathbb{R}, \quad (5.7)$$

переводящего решение уравнения (5.1) снова в решение этого же уравнения.

6. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Численный алгоритм решения задачи (1.1)–(1.3), схема которого изложена в разделе 2, содержит основной этап, который заключается в решении линейной задачи (2.1)–(2.3). Для реализации этого основного этапа воспользуемся методом, предоставляемым теоремой 4.1.

Для численного представления непрерывных на отрезке $[-1, 1]$ периодических с периодом 2 функций будем использовать кусочно-линейное приближение (3.10)–(3.12) на основе равномерного разбиения (4.1). Каждая функция из этого класса однозначно задается своими значениями в узлах x_k этого разбиения, $k = 0, \dots, N - 1$.

В качестве отмеченных точек z_k вида (4.2), фигурирующих в теореме 4.1, выберем левые концы соответствующих отрезков разбиения, т. е.

$$z_k = x_{k-1}, \quad h_k = -L \quad \beta(h_k) = 1, \quad \gamma(h_k) = \exp(-2L\omega) = \mu, \quad k = 1, \dots, N.$$

Тогда в результате применения формул (4.7), (4.8) получим представление решения задачи (2.1)–(2.3) в указанном выше кусочно-линейном виде (3.10)–(3.12).

Проведем сравнение результатов численного расчета по изложенному алгоритму с явным решением, построенным в разделе 5.

В качестве начального условия (1.2) выберем функцию

$$u_0(x) = \tilde{u}(T_0, x) + V, \quad T_0 = \operatorname{const} > 0, \quad V \in \mathbb{R}, \quad (6.1)$$

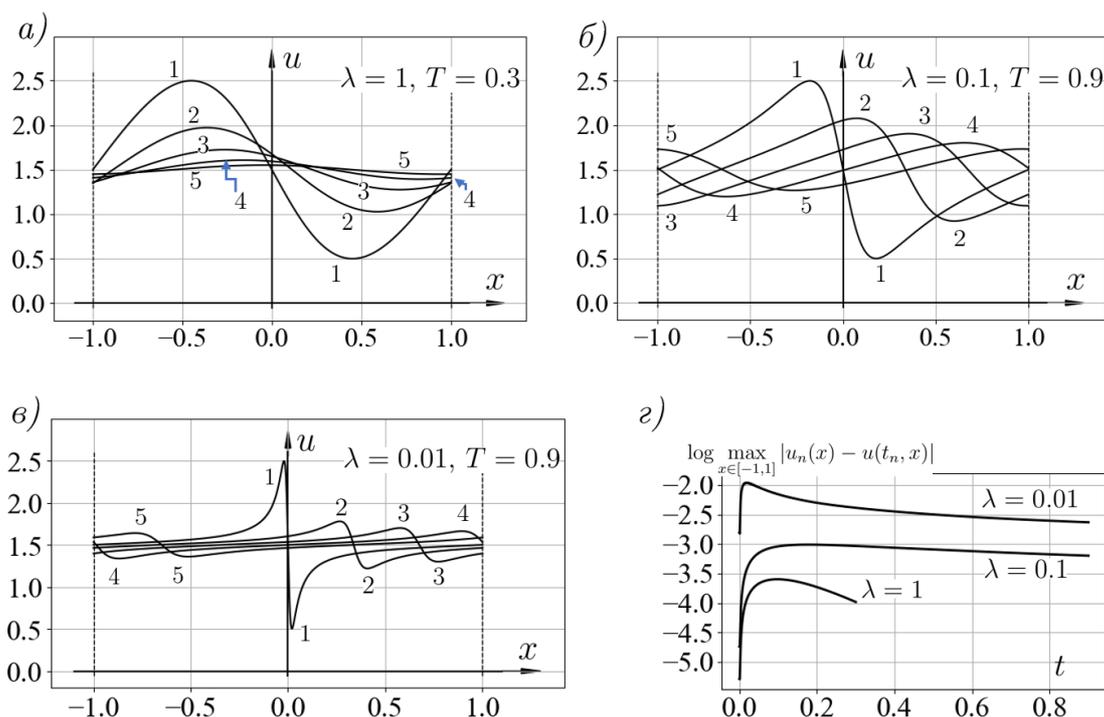


Рис. 1. Сопоставление численного расчета с явным решением.

FIG. 1. Comparison of the numerical result with the explicit solution.

где явное решение $\tilde{u}(t, x)$ уравнения (5.1) имеет вид (5.2). Тогда решение задачи (5.1), (1.2) в соответствии с преобразованием (5.7) имеет вид

$$u(t, x) = \tilde{u}(T_0 + t, x - Vt) + V. \tag{6.2}$$

Значение параметра T_0 установим, исходя из заданной величины

$$U_0 = U(T_0) \tag{6.3}$$

амплитуды (5.5) решения в начальный момент времени. Выражая T_0 через U_0 из равенства (6.3), находим

$$T_0 = \frac{\ln(1 + 4\pi^2\lambda^2/U_0^2)}{2\pi^2\lambda}.$$

На рис. 1 а), б), в) представлены результаты расчета решения задачи (5.1), (1.2), (6.1) при следующих значениях параметров:

$$U_0 = 1, \quad V = 1,5, \quad \tau = 10^{-3}, \quad N = 1500,$$

при трех различных значениях коэффициента λ , указанных на соответствующих рисунках, а также приведенных в таб. 1. Цифрами от 1 до 5 на каждом из рис. 1 а), б), в) обозначены графики решения в моменты времени $t = 0, T/4, T/2, 3T/4$ и T , соответственно.

λ	T	$K = T/\tau$	Ошибка/Error	Время, сек./Time, sec.	Рисунок/Figure
1,0	0,3	300	$2,5 \cdot 10^{-4}$	0,02	1 а)
0,1	0,9	900	$9,8 \cdot 10^{-4}$	0,09	1 б)
0,01	0,9	900	$1,1 \cdot 10^{-2}$	0,09	1 в)

ТАБ. 1. Параметры численного расчета решения (6.2) при различных λ .
 ТАБ. 1. Parameters of numerical calculation of solution (6.2) for different λ .

На рис. 1 г) дана зависимость логарифма абсолютной погрешности приближенного решения от времени для трех случаев, отвечающих строкам таб. 1 и рис. 1 а), б), в).

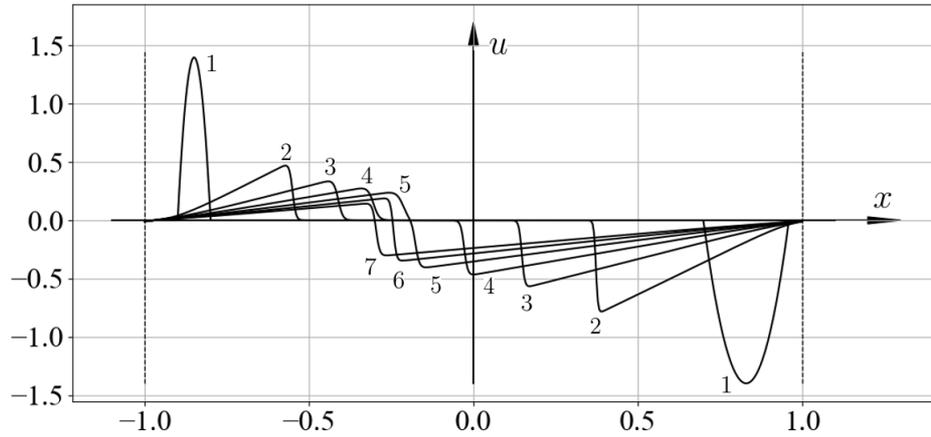


Рис. 2. Расчет взаимодействия двух бегущих волн при $\lambda = 10^{-3}$.

FIG. 2. Calculation of the interaction of two traveling waves for $\lambda = 10^{-3}$.

На рис. 2 дан результат численного решения задачи (5.1), (1.2) при

$$\lambda = 10^{-3}, \quad \tau = 10^{-3}, \quad N = 1500, \quad T = 4.$$

Начальный профиль решения $u_0(x)$, обозначенный цифрой 1, имеет два «горба» различной ширины, т. е. область положительных значений $\{u_0(x) > 0\}$ и область отрицательных значений $\{u_0(x) < 0\}$, на дополнении к которым функция $u_0(x)$ обращается в нуль. С течением времени эти «горбы» эволюционируют в виде бегущих волн, распространяющихся навстречу друг другу и затем сливающихся (см. график, обозначенный цифрой 5) в одну волну, которая продолжает двигаться влево (см. графики 6, 7). Отметим, что направление движения получившейся волны обусловлено тем, что правый «горб» занимал в начальный момент времени большую площадь, чем левый. Время вычислений составило 0,36 сек.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В настоящей работе построен метод для уравнения Бюргера — квазилинейного параболического уравнения с нелинейностью, включающей градиент искомой функции. Метод использует известную явно-неявную схему дискретизации по времени на основе приближения Кранка—Николсон для линейных членов уравнения и экстраполяции Адамса—Бэшфорта нелинейного члена.

Предлагаемый метод опирается на интегральное представление решения линейной задачи с функцией Грина, заданной в явном виде. Такой подход позволяет избежать потери точности, связанной с использованием разностных аппроксимаций производных искомой функции по пространственной переменной. Это может быть особенно актуальным в задачах для уравнений, содержащих малый коэффициент при старшей производной неизвестной функции по переменной x . Вместе с тем, данный метод обладает высокой вычислительной эффективностью, присущей разностным методам, таким как метод прогонки.

В связи с тем, что вычислительный алгоритм, даваемый теоремой 4.1 для решения линейной задачи с кусочно-линейной правой частью, имеет алгоритмическую сложность $O(N)$, $N \rightarrow \infty$, где N — число отрезков пространственной дискретизации, подчеркнем, что такая сложность является минимальной из потенциально возможных в рассматриваемом классе алгоритмов. Как было показано (см. формулы (4.18)–(4.21)), получение решения задачи (3.1), (3.2), (3.10)–(3.12) сводится к нахождению циклической свертки периодических последовательностей с периодом N . Нетрудно видеть, что прямое вычисление такой циклической свертки на основе определения (4.16) требует $\sim N^2$ операций. При помощи дискретного преобразования Фурье можно сократить необходимый объем вычислений до $\sim N \log N$, получая при этом приближенный результат (см. [1, гл. 4, § 4]). Однако для свертки с последовательностью, период которой представляет собой геометрическую прогрессию (4.17), можно вычислить точный результат за $\sim N$ операций в соответствии с утверждением леммы 4.1.

Вычислительный алгоритм, даваемый теоремой 4.1, может быть использован с неравномерным шагом по времени, а также, при некоторой модификации, может быть адаптирован для использования пространственной дискретизации с неравномерной сеткой.

Отметим, что теорема 4.1 может быть обобщена на случай кусочно-непрерывной правой части на основании теоремы 3.2. Модифицированный соответствующим образом алгоритм решения линейной задачи допускает использование более широкого класса кусочно-непрерывных кусочно-линейных аппроксимаций целевых функций, что в некоторых случаях может повысить точность приближения и, следовательно, улучшить качество вычислительного алгоритма.

Использованный в данной работе подход применим к широкому классу нелинейных пространственно одномерных параболических начально-краевых задач, включая задачи для уравнений типа Колмогорова—Петровского—Пискунова, уравнений реакции—диффузии—адвекции и систем таких уравнений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бахвалов Н. С., Жидков Н. П., Кобельков Г. М. Численные методы. — М.: Бином, 2011.
2. Безродных С. И., Власов В. И. Аналитико-численный метод расчета взаимодействия физических полей в полупроводниковом диоде // Мат. модел. — 2015. — 27, № 7. — С. 15–24.
3. Вабищевич П. Н., Васильева М. В. Явно-неявные схемы для задач конвекции—диффузии—реакции // Сиб. ж. выч. мат. — 2012. — 15, № 4. — С. 359–369.
4. Лизоркин П. И. Курс дифференциальных и интегральных уравнений с дополнительными главами анализа. — М.: ФМЛ, 1981.
5. Новиков Б. К. Точные решения уравнения Бюргерса // Акуст. ж. — 1978. — 24, № 4. — С. 577–581.
6. Пикулин С. В. О решениях типа бегущей волны уравнения Колмогорова—Петровского—Пискунова // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2018. — 58, № 2. — С. 244–252.
7. Руденко О. В., Солуян С. И. Теоретические основы нелинейной акустики. — М.: Наука, 1975.
8. Самарский А. А. Теория разностных схем. — М.: Наука, 1989.
9. Самарский А. А., Вабищевич П. Н. Численные методы решения задач конвекции—диффузии. — М.: Либроком, 2015.
10. Солуян С. И., Хохлов Р. В. Распространение акустических волн конечной амплитуды в диссипативной среде // Вестн. МГУ. Сер. 3. Физ. Астрон. — 1961. — № 3. — С. 52–61.
11. Уизем Дж. Б. Линейные и нелинейные волны. — М.: Мир, 1977.
12. Филиппов А. Ф. Дифференциальные уравнения с разрывной правой частью. — М.: Наука, 1985.
13. Ablowitz M., Zeppetella A. Explicit solutions of Fisher's equation for a special wave speed // Bull. Math. Biol. — 1979. — 41, № 6. — С. 835–840.
14. Ascher U. M., Ruuth S. J., Wetton B. T. R. Implicit-explicit methods for time-dependent partial differential equations // SIAM J. Numer. Anal. — 1995. — 32. — С. 797–823.
15. Crank J., Nicolson P. A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heatconduction type // Math. Proc. Cambridge Philos. Soc. — 1947. — 49. — С. 50–67.
16. Ruuth S. J. Implicit-explicit methods for reaction-diffusion problems in pattern formation // J. Math. Biol. — 1995. — 34, № 2. — С. 148–176.

С. И. Безродных

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, Москва, Россия

E-mail: sbezrodnykh@mail.ru

С. В. Пикулин

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» Российской академии наук, Москва, Россия

E-mail: spikuln@gmail.com

UDC 517.956.4, 519.633

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-208-223

EDN: BSNBJE

Numerical-analytical method for the Burgers equation with a periodic boundary condition

S. I. Bezrodnykh and S. V. Pikulin

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

Abstract. We construct an efficient numerical-analytical method for solving the initial-boundary value problem for the Burgers equation on a segment with a periodic boundary condition. The method includes the reduction to a linear problem based on an explicit-implicit time discretization scheme and an analytical solution of an auxiliary linear problem at each time step using the explicit form of the corresponding Green’s function. The efficiency of the constructed method is due to the fact that the algorithm for solving the auxiliary problem has only linear complexity in terms of the number of spatial discretization nodes used, without involving difference approximations of the derivatives of the desired function. On the basis of the Cole–Hopf substitution, we obtain an explicit periodic solution of the problem on the interval and compare the results of the numerical implementation of the constructed algorithm with this explicit solution. The developed method demonstrated a combination of high computational efficiency and accuracy of the result.

Keywords: Burgers equation, numerical-analytical method, Green’s function, explicit-implicit scheme.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors thank prof. V. I. Vlasov for useful stimulating discussions and attention to the work. The work was carried out at the Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences at the expense of state assignment funds.

For citation: S. I. Bezrodnykh, S. V. Pikulin, “Numerical-analytical method for the Burgers equation with a periodic boundary condition,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 2, 208–223. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-208-223>

REFERENCES

1. N. S. Bakhvalov, N. P. Zhidkov, and G. M. Kobel’kov, *Chislennyye metody* [Numerical Methods], Binom, Moscow, 2011 (in Russian).
2. S. I. Bezrodnykh and V. I. Vlasov, “Analitiko-chislennyi metod rascheta vzaimodeystviya fizicheskikh poley v poluprovodnikovom diode” [Analytical-numerical method for calculating the interaction of physical fields in semiconductor diode], *Mat. model.* [Math. Model.], 2015, **27**, No. 7, 15–24 (in Russian).
3. P. N. Vabishchevich and M. V. Vasil’eva, “Yavno-neyavnye skhemy dlya zadach konveksii–diffuzii–reaktsii” [Explicit-implicit schemes for convection–diffusion–reaction problems], *Sib. zh. vych. mat.* [Siberian J. Comput. Math.], 2012, **15**, No. 4, 359–369 (in Russian).
4. P. I. Lizorkin, *Kurs differentsial’nykh i integral’nykh uravneniy s dopolnitel’nyimi glavami analiza* [Course in Differential and Integral Equations with Additional Chapters of Analysis], FML, Moscow, 1981 (in Russian).
5. B. K. Novikov, “Tochnye resheniya uravneniya Byurgersa” [Exact solutions of the Burgers equation], *Akust. zh.* [Acoustic J.], 1978, **24**, No. 4, 577–581 (in Russian).



6. S. V. Pikulin, “O resheniyakh tipa begushchey volny uravneniya Kolmogorova—Petrovskogo—Piskunova” [On solutions of the traveling wave type of the Kolmogorov–Petrovskii–Piskunov equation], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2018, **58**, No. 2, 244–252 (in Russian).
7. O. V. Rudenko and S. I. Soluyan, *Teoreticheskie osnovy nelineynoy akustiki* [Theoretical Foundations of Nonlinear Acoustics], Nauka, Moscow, 1975 (in Russian).
8. A. A. Samarskii, *Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes], Nauka, Moscow, 1989 (in Russian).
9. A. A. Samarskiy and P. N. Vabishchevich, *Chislennyye metody resheniya zadach konveksii–diffuzii* [Numerical Methods for Solving Convection–Diffusion Problems], Librokom, Moscow, 2015 (in Russian).
10. S. I. Soluyan and R. V. Khokhlov, “Rasprostraneniye akusticheskikh voln konechnoy amplitudy v dissipativnoy srede” [Propagation of acoustic waves of finite amplitude in a dissipative medium], *Vestn. MGU. Ser. 3. Fiz. Astron.* [Bull. MSU. Ser. 3. Phys. Astron.], 1961, No. 3, 52–61 (in Russian).
11. G. B. Whitham, *Lineynyye i nelineynyye volny* [Linear and Nonlinear Waves], Mir, Moscow, 1977 (Russian translation).
12. A. F. Filippov, *Differentsial’nye uravneniya s razryvnoy pravoy chast’yu* [Differential Equations with Discontinuous Right-Hand Side], Nauka, Moscow, 1985 (in Russian).
13. M. Ablowitz and A. Zeppetella, “Explicit solutions of Fisher’s equation for a special wave speed,” *Bull. Math. Biol.*, 1979, **41**, No. 6, 835–840.
14. U. M. Ascher, S. J. Ruuth, and B. T. Wetton, “Implicit-explicit methods for time-dependent partial differential equations,” *SIAM J. Numer. Anal.*, 1995, **32**, 797–823.
15. J. Crank and P. Nicolson, “A practical method for numerical evaluation of solutions of partial differential equations of the heatconduction type,” *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.*, 1947, **49**, 50–67.
16. S. J. Ruuth, “Implicit-explicit methods for reaction–diffusion problems in pattern formation,” *J. Math. Biol.*, 1995, **34**, No. 2, 148–176.

S. I. Bezrodnykh

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russia

E-mail: sbezrodnykh@mail.ru

S. V. Pikulin

Federal Research Center “Computer Science and Control” of the Russian Academy of Sciences,
Moscow, Russia

E-mail: spikulin@gmail.com

УДК 519.83

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-224-236

EDN: BEVTED

ИССЛЕДОВАНИЕ ЗАДАЧИ О СПРАВЕДЛИВОМ РАСПРЕДЕЛЕНИИ КВОТ НА ВЫЛОВ РЫБЫ МЕТОДАМИ ТЕОРИИ ИГР

Е. М. БОГАТОВ^{1,2}, Н. Е. БОГАТОВА¹

¹ *Старооскольский технологический институт им. А. А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС», Старый Оскол, Россия*

² *Филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСиС» в г. Губкине Белгородской обл., Губкин, Россия*

Аннотация. Теория игр сформировалась как наука во второй половине XX в. Она успела хорошо зарекомендовать себя при анализе экономических ситуаций с участием нескольких субъектов экономической деятельности (игроков), интересы которых полностью или частично противоположны. При этом в ряде случаев решение игры удовлетворяло всех игроков, но не являлось наиболее выгодным (имело место равновесие по Нэшу), а в ряде других случаев оно давало возможность максимально учесть интерес всех сторон (существовало решение, оптимальное по Парето). Перенос принципов теории игр в другие области оказался сопряжённым с рядом трудностей, связанных, в том числе, с правильной интерпретацией стратегий и выигрышей сторон в конфликтной ситуации. По этой причине, несмотря на очевидную пользу от возможного применения методов теории игр к задачам о справедливом распределении квот на вылов рыбы и других морских обитателей, данный шаг до недавнего времени сделан не был.

В работе рассмотрена схема применения алгоритмов теории биматричных и кооперативных игр на примере решения задачи нахождения процента допустимого улова чёрного палтуса Баренцева моря для двух стран—участниц вылова и дана содержательная интерпретация полученных результатов. Основой для расчётов явились реальные данные, собранные российско-норвежской комиссией по рыболовству в последние десятилетия для определения пропорций вылова указанного вида рыбы в соответствующих морских зонах. Поскольку не все компоненты платёжных матриц игроков определяются однозначно, появилась возможность провести параметрический анализ математической модели конфликтной ситуации как при поиске равновесного решения, так и при реализации арбитражной схемы.

Работа является расширенной и дополненной версией доклада [2].

Ключевые слова: игровая модель справедливого распределения квот на вылов, биматричные игры, кооперативные игры, равновесие по Нэшу, арбитражное решение игры, параметрический анализ конфликтной ситуации.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки. Авторы выражают благодарность участникам Крымской осенней математической школы-симпозиума Н. Д. Копачевского КРОМШ-2022 за внимание к работе и полезные обсуждения.

Для цитирования: Е. М. Богатов, Н. Е. Богатова. Исследование задачи о справедливом распределении квот на вылов рыбы методами теории игр // *Соврем. мат. Фундам. направл.* 2023. Т. 69, № 2. С. 224–236. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-224-236>



1. ВВЕДЕНИЕ

Известно, что арктический запас черного палтуса является трансграничным, т. е. создает скопления во всех экономических зонах Баренцева моря. В соответствии с Конвенцией ООН по морскому праву (ч. V, ст. 63) управление такими запасами должно осуществляться на основе согласования между всеми прибрежными по отношению к указанным запасам странами. В нашем случае прибрежными странами являются Россия, Норвегия и Евросоюз. После признания палтуса совместным ресурсом, возникла задача установления квот на вылов этого гидробионта в общем допустимом улове (ОДУ) между Норвегией и Россией. Попытки ее решения предпринимались в ходе заседаний российско-норвежской комиссии по рыболовству (РНК) с 2001 по 2008 гг. За 8 лет работы объединенных российско-норвежских рабочих групп были формализованы и подготовлены для практического использования три основных критерия, по которым можно было выполнить расчёт так называемого «ключа распределения» (пропорций вылова) [4, с. 508]:

- численность палтуса;
- биомасса палтуса;
- история промысла палтуса.

Результаты обследования акватории вылова показали, что в распределении палтуса по численности преимущество имеет Россия, а по биомассе — Норвегия (таб. 1).

ТАБ. 1. Распределение черного палтуса, %

Показатель	НЭЗ	РЭЗ	Шпицберген
Биомасса	53–70	5–6	22–36
Численность	15–31	31–36	36–47

ТАБ. 1. Black halibut distribution, %

Indicator	NEZ	REZ	Svalbard
Biomass	53–70	5–6	22–36
Population	15–31	31–36	36–47

Здесь через НЭЗ обозначена норвежская экономическая зона, через РЭЗ — российская экономическая зона. Район архипелага Шпицберген считается местом совместного вылова черного палтуса [5].

Что касается истории промысла, то здесь стороны согласились взять за основу период с 1973 по 1994 гг., где доля СССР в вылове палтуса составила в среднем 47,8%, Норвегии — 32,6%, третьих стран — 19,6% [4, с. 508].

В течение четырех лет российская и норвежская сторона РНК пытались найти такое распределение квот на вылов черного палтуса, которое устраивали бы всех. И только в 2012 г. соглашение было достигнуто (таб. 2).

ТАБ. 2. Распределение квот на вылов

Страна	Россия	Норвегия	Третьи страны
Вылов, % от ОДУ	45	51	4

ТАБ. 2. Distribution of fishing quotas

Country	Russia	Norway	Third countries
Catch, % of TAC	45	51	4

2. ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ СПРАВЕДЛИВОЙ ДОЛИ ВЫЛОВА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ БИМАТРИЧНЫХ ИГР

Как видим, процесс нахождения приемлемого для всех участников распределения доли ОДУ был длительным и сложным. Для его упрощения можно использовать хорошо зарекомендовавшие себя в экономических и других ситуациях методы теории игр (см., например, [3]).

Выберем в качестве игрока A — Россию, в качестве игрока B — Норвегию. Будем считать, что стратегии первого игрока — это выбор фактора для определения доли вылова:

- A_1 — по биомассе;
- A_2 — по численности;
- A_3 — по истории промысла.

Тогда для второго игрока имеет смысл определить стратегии выделения квот на вылов по следующим критериям:

- B_1 — по своей экономической зоне,
- B_2 — по району Шпицбергена.

Усредним данные, имеющиеся в таб. 1, получим следующую таблицу.

ТАБ. 3. Усредненные данные по распределению черного палтуса, %.

Показатель	НЭЗ	РЭЗ	Шпицберген
Биомасса	62	6	29
Численность	23	33	42

ТАБ. 3. Average distribution of black halibut, %.

Indicator	NEZ	REZ	Svalbard
Biomass	62	6	29
Population	23	33	42

Чтобы дополнить данные таб. 3 историческими сведениями, будем пока считать, что в районе архипелага Шпицберген вылавливалось примерно одинаковое¹, количество палтуса ($x\%$ от ОДУ). Положим, для простоты, $x = 10$, тогда в дополнении к таб. 3 будем иметь следующую таблицу:

ТАБ. 4. Исторически сложившиеся объёмы промысла чёрного палтуса.

НЭЗ, % вылова	РЭЗ, % вылова	Шпицберген, % вылова	
		Доля Норвегии	Доля России
38	23	10	10

ТАБ. 4. Historical volumes of the black halibut fishery.

NEZ, % of catch	REZ, % of catch	Svalbard, % of catch	
		Share of Norway	Share of Russia
38	23	10	10

В этом случае соответствующие платёжные матрицы игроков A и B будут выглядеть так:

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 33 & 22 \\ 23 & 10 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 62 & 15 \\ 23 & 20 \\ 38 & 10 \end{pmatrix}.$$

¹На самом деле, этот вопрос является спорным (см., например, [5]), что даёт возможность более гибко подходить к наполнению платёжных матриц.

Поскольку стратегия A_2 доминирует над A_3 , то последнюю можно исключить и рассматривать биматричную игру с редуцированными матрицами за счёт уменьшения числа применяемых игроком A стратегий.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 33 & 20 \end{pmatrix}, \quad B_1 = \begin{pmatrix} 62 & 15 \\ 23 & 22 \end{pmatrix}.$$

Платёжный тензор такой игры имеет вид:

$$P_1 = \begin{pmatrix} 6; 62 & 14; 15 \\ 33; 23 & 20; 22 \end{pmatrix}.$$

Для дальнейшего нам потребуется унифицировать компоненты матриц таким образом, чтобы их сумма в каждой ячейке нового тензора равнялась¹ 100. Для пересчёта компонент a_{11}, b_{11} решим уравнение

$$6x + 62x = 100,$$

получим $x = 100/68 = 1,47$ (коэффициент пропорциональности). Тогда $a_{11} = 6 \cdot 1,47 = 8,82 \approx 9$; $b_{11} = 62 \cdot 1,47 = 91,41 \approx 91$.

Аналогично, для пересчёта компонент a_{21}, b_{21} получим уравнение

$$33y + 23y = 100,$$

откуда извлекаем коэффициент $y = 100/56 = 1,7857$. Тогда получим $a_{21} = 33 \cdot 1,7857 = 58,93 \approx 59$; $b_{21} = 23 \cdot 1,7857 \approx 41$.

Продолжая расчёты для клеток (1,2) и (2,2), получим новый платёжный тензор:

$$P_2 = \begin{pmatrix} 9; 91 & 48; 52 \\ 59; 41 & 49; 51 \end{pmatrix}.$$

Он распадается на две матрицы

$$A_2 = \begin{pmatrix} 9 & 48 \\ 59 & 49 \end{pmatrix}, \quad B_2 = \begin{pmatrix} 91 & 52 \\ 41 & 51 \end{pmatrix}.$$

В этой игре есть седловая точка, которой соответствует решение в чистых стратегиях: (A_2, B_2) . Поэтому выигрыши игроков будут равны $H_A = 49\%$ от вылова, $H_B = 51\%$ от вылова.

Поскольку информация о распределении чёрного палтуса (по численности, биомассе и по исторически сложившейся практике вылова) в зонах вылова России и Норвегии в районе архипелага Шпицберген является неполной, а сам вопрос — спорным, имеет смысл рассмотреть разные возможности для построения и редуцирования приведённых платёжных матриц игроков A и B . Если незначительно поменять процентное соотношение биомассы, численности и выловленного объёма палтуса стран в обсуждаемом районе, взяв его равным 45:55, 47:53 и 48:52, соответственно (в пользу Норвегии), то приведённые платёжные матрицы игроков A и B будут иметь вид

$$\widehat{A}_1 = \begin{pmatrix} 9 & 45 \\ 59 & 47 \\ 37 & 48 \end{pmatrix}; \quad \widehat{B}_1 = \begin{pmatrix} 91 & 55 \\ 41 & 53 \\ 63 & 52 \end{pmatrix}.$$

В этой ситуации следует исключить из рассмотрения *первую* стратегию игрока A (а не последнюю, как это было сделано выше). Тогда платёжный тензор игры будет иметь вид

$$\widehat{P}_1 = \begin{pmatrix} 59; 41 & 47; 53 \\ 37; 63 & 48; 52 \end{pmatrix}.$$

В результате мы получим другое равновесное решение биматричной игры в смешанных стратегиях, которому соответствуют выигрыш игрока A равный 47,5% от общего вылова, и игрока B — 52,5% от общего вылова.

Рассмотрим теперь более общую ситуацию, продолжая считать, что стратегия A_1 доминируется в матрице A стратегий A_2 ($a_{2i} \geq a_{1i}$). Обозначим через ε и δ величины превышения доли

¹Например, $a_{11} + b_{11} = 100$ будет означать, что при определении квот на вылов для двух стран мы отталкиваемся только от фактора биомассы, отбрасывая все остальные. В этом случае общий вылов берется за 100%.

норвежского распределения палтуса над российской в районе Шпицбергена по биомассе и численности соответственно. Тогда платёжный тензор новой игры можно представить в виде

$$P_{\varepsilon, \delta} = \begin{pmatrix} 9; 91 & 50 - \varepsilon; 50 + \varepsilon \\ 59; 41 & 50 - \delta; 50 + \delta \end{pmatrix}.$$

Для нахождения равновесия по Нэшу в смешанных стратегиях такой биматричной игры выделим платёжные матрицы игроков:

$$A_I = \begin{pmatrix} 9 & 50 - \varepsilon \\ 59 & 50 - \delta \end{pmatrix}; \quad B_I = \begin{pmatrix} 91 & 50 + \varepsilon \\ 41 & 50 + \delta \end{pmatrix}.$$

Обозначим оптимальную смешанную стратегию игрока A через $X^* = (p^*; 1 - p^*)$, игрока B — через $Y^* = (q^*; 1 - q^*)^T$, где $q^*, p^* \in [0; 1]$. Условия приемлемости ситуации (X^*, Y^*) для игроков A, B хорошо известны (см., например, [7, гл. 2-3]) и имеют вид

$$A_i(Y^*)^T \leq X^* A(Y^*)^T = H_A, \quad j = 1, 2, \quad (2.1)$$

$$X^* B_j \leq X^* B(Y^*)^T = H_B, \quad j = 1, 2, \quad (2.2)$$

где A_i — i -я строка матрицы A_I , B_j — j -й столбец матрицы B_I .

В предположении о том, что биматричная игра не имеет решений в чистых стратегиях¹ (что в нашем случае даёт $0 < \varepsilon < \delta$), для приемлемой ситуации получаем

$$q^* = \frac{\Delta}{50 + \Delta}, \quad (2.3)$$

где $\Delta = \delta - \varepsilon$. Тогда равновесная стратегия игрока B имеет вид

$$Y^* = \begin{pmatrix} \frac{\Delta}{50 + \Delta} \\ \frac{50}{50 + \Delta} \end{pmatrix}.$$

Из условия (2.2) выводим

$$p^* = \frac{41 - \delta}{50 - \Delta}. \quad (2.4)$$

Таким образом, равновесная стратегия игрока A выглядит так:

$$X^* = \left(\frac{41 - \delta}{50 - \Delta}; \frac{9 - \varepsilon}{50 - \Delta} \right).$$

Вычислим выигрыши игроков A, B из формул (2.1) и (2.2).

$$\begin{aligned} H_A = X^* A(Y^*)^T &= \frac{1}{2500 - \Delta^2} (41 - \delta; 9 - \varepsilon) \begin{pmatrix} 9 & 50 - \varepsilon \\ 59 & 50 - \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \\ 50 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{125000 - 2050\delta - 9\delta^2 - 450\varepsilon + 68\delta\varepsilon - 59\varepsilon^2}{2500 - (\delta - \varepsilon)^2}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

$$\begin{aligned} H_B = X^* B(Y^*)^T &= \frac{1}{2500 - \Delta^2} (41 - \delta; 9 - \varepsilon) \begin{pmatrix} 91 & 50 + \varepsilon \\ 41 & 50 + \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \\ 50 \end{pmatrix} = \\ &= \frac{125000 + 1150\delta - 91\delta^2 + 450\varepsilon + 32\delta\varepsilon - 41\varepsilon^2}{2500 - (\delta - \varepsilon)^2}. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Введём теперь ограничения для возможных изменений величин δ и ε , исходя из смысла задачи применительно к оптимальным стратегиям игроков²

$$\begin{cases} 0,1 \leq \varepsilon \leq 8,9, \\ \varepsilon \leq \delta \leq 10. \end{cases} \quad (2.7)$$

¹Максимальные элементы в столбцах матрицы A_I не совпадают с максимальными элементами в строках матрицы B_I .

²Верхняя граница δ может быть здесь, при необходимости, увеличена.

Представляет интерес найти соответствующие границы для выигрышей игроков. Это можно сделать методами условной оптимизации, решая задачи

$$\begin{cases} H_i(\varepsilon, \delta) \rightarrow \max, \\ (\varepsilon, \delta) \in T; \quad i = 1, 2; \end{cases} \quad (2.8)$$

$$\begin{cases} H_i(\varepsilon, \delta) \rightarrow \min, \\ (\varepsilon, \delta) \in T; \quad i = 1, 2. \end{cases} \quad (2.9)$$

Здесь T — трапеция в системе координат (ε, δ) , определяемая неравенствами (2.7); через H_1 обозначен выигрыш игрока A , через H_2 — выигрыш игрока B .

Применяя к задачам (2.8)-(2.9) стандартные методы дифференциального исчисления, получим:

$$\begin{aligned} H_1^{\min} &= H_1(8,9; 10) \approx 40,4\% \text{ от ОДУ}, & H_1^{\max} &= H_1(0,1; 0,1) \approx 49,9\% \text{ от ОДУ}, \\ H_2^{\min} &= H_2(0,1; 0,1) \approx 50,1\% \text{ от ОДУ}, & H_2^{\max} &= H_2(10; 0,1) \approx 53,1\% \text{ от ОДУ}. \end{aligned}$$

Из этих результатов следует, что максимально возможная доля в общем допустимом вылове палтуса для игрока A равна 0,499, а для игрока B — 0,531. При этом, как бы не менялись величины ε, δ в рамках допустимого коридора (2.7), доля игрока B не может быть ниже чем 0,501 от общего вылова, а игрока A — не может быть ниже, чем 0,404 от общего вылова.

Проведём теперь параметрический анализ игровой ситуации, соответствующей возмущению тензора \hat{P}_1 . По аналогии с предыдущим имеем

$$\hat{P}_{\varepsilon, \delta} = \begin{pmatrix} 59; 43 & 50 - \varepsilon; 50 + \varepsilon \\ 37; 63 & 50 - \delta; 50 + \delta \end{pmatrix},$$

причём $\varepsilon > \delta$, что даст отсутствие седловой точки. платёжные матрицы игроков A и B будут иметь вид

$$\hat{A}_I = \begin{pmatrix} 59 & 50 - \varepsilon \\ 37 & 50 - \delta \end{pmatrix}; \quad \hat{B}_I = \begin{pmatrix} 41 & 50 + \varepsilon \\ 63 & 50 + \delta \end{pmatrix}.$$

Условие приемлемости ситуации смешанного равновесия (X, Y) в этом случае равносильно выполнению равенства

$$A_2 Y^T = A_1 Y^T,$$

где A_i ($i = 1, 2$) — строки матрицы \hat{A}_I . Отсюда выводим

$$q^* = \frac{\Delta}{22 + \Delta} > 0, \quad (2.10)$$

где $\Delta = \varepsilon - \delta$. Поэтому равновесная стратегия игрока B выглядит так:

$$Y^* = \left(\frac{\Delta}{22 + \Delta}; \frac{22}{22 + \Delta} \right)^T.$$

Из условия приемлемости ситуации (X, Y) для игрока B :

$$X B_1 = X B_2,$$

где B_j ($j = 1, 2$) — столбцы матрицы \hat{B}_I , получаем

$$q^* = \frac{13 - \delta}{22 - \Delta}.$$

Таким образом, $X^* = \left(\frac{13 - \delta}{22 - \Delta}; \frac{9 - \varepsilon}{22 - \Delta} \right)$.

Теперь выигрыши игроков будут иметь вид

$$\begin{aligned} H_A &= \frac{1}{484 - \Delta^2} (13 - \delta; 9 - \varepsilon) \begin{pmatrix} 59 & 50 - \varepsilon \\ 37 & 50 - \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \\ 22 \end{pmatrix} = \frac{-59\delta^2 + 96\delta\varepsilon - 198\delta - 37\varepsilon^2 - 286\varepsilon + 24200}{484 - (\varepsilon - \delta)^2}, \\ H_B &= \frac{1}{484 - \Delta^2} (13 - \delta; 9 - \varepsilon) \begin{pmatrix} 41 & 50 + \varepsilon \\ 63 & 50 + \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta \\ 22 \end{pmatrix} = \frac{24200 + 198\delta - 41\delta^2 + 286\varepsilon + 104\delta\varepsilon - 63\varepsilon^2}{484 - (\delta - \varepsilon)^2}. \end{aligned}$$

Исходя из смысла задачи и естественных ограничений на компоненты векторов X^* и Y^* , целесообразно вывести границы возможных изменений переменных ε , δ по аналогии с (2.7):

$$\begin{cases} 0,1 \leq \delta \leq 9, \\ \delta \leq \varepsilon \leq 8,9. \end{cases} \quad (2.11)$$

Соответствующие задачи условной оптимизации будут иметь вид

$$\begin{cases} H_A(\delta, \varepsilon) \rightarrow \text{extr}, \\ (\varepsilon, \delta) \in T_1; \end{cases} \quad (2.12)$$

$$\begin{cases} H_B(\delta, \varepsilon) \rightarrow \text{extr}, \\ (\varepsilon, \delta) \in T_1. \end{cases} \quad (2.13)$$

Здесь T_1 — треугольник в системе координат (δ, ε) , определенный неравенствами (2.11). Решение задач (2.12), (2.13) дает следующие границы для H_A и H_B :

$$\begin{aligned} H_A^{\min} &= H_A(8,9; 8,9) \approx 41,1\% \text{ от ОДУ}, & H_A^{\max} &= H_A(0,1; 0,19) \approx 49,9\% \text{ от ОДУ}, \\ H_B^{\min} &= H_B(0,1; 8,9) \approx 50,1\% \text{ от ОДУ}, & H_B^{\max} &= H_B(8,9; 8,9) \approx 58,9\% \text{ от ОДУ}. \end{aligned}$$

Как видим, максимально возможная доля вылова игрока A не поменялась и составила 0,499, а игрока B увеличилась и составила 0,589 от общего вылова. В то же время нижний порог возможного выигрыша игрока A незначительно увеличился (до 0,411), а аналогичный порог игрока B остался прежним (0,501 от общего вылова). Это говорит о том, что ситуация с редуцированием первой строки платёжного тензора в целом более выгодна второму игроку и он будет стремиться её реализовать, игнорируя сведения о зональном распределении палтуса, исходя из биомассы. В то же время первый игрок более заинтересован в игнорировании сведений об исторически сложившихся объёмах промысла; это позволит ему приблизиться к 50%-й доле общего вылова.

3. ЗАДАЧА НАХОЖДЕНИЯ СПРАВЕДЛИВОЙ ДОЛИ ВЫЛОВА С ТОЧКИ ЗРЕНИЯ ТЕОРИИ КООПЕРАТИВНЫХ ИГР

Будем считать что игроки (страны) могут заключать между собой соглашение о распределении квот на вылов палтуса, используя арбитражное решение Нэша. В соответствии с известной схемой (см., например, [1, гл. 6], [9, гл. VII]) необходимо построить область допустимых решений задачи с платёжными матрицами A , B из предыдущего пункта. Сделаем это в системе координат Ou_1u_2 , где u_i — выигрыш i -го игрока, взяв за основу тензор P :

$$P = \begin{pmatrix} 6; 62 & 14; 15 \\ 33; 23 & 20; 22 \\ 28; 38 & 9; 11 \end{pmatrix}.$$

Выпуклая комбинация точек с координатами $(a_{ij}; b_{ij})$ (область допустимых решений) представляет собой треугольник KLM , где $K(6; 62)$, $L(9; 11)$, $M(33; 23)$. Внутри него лежат точки $Q_1(23; 38)$, $Q_2(14; 15)$, $Q_3(20; 22)$, соответствующие декартовым произведениям остальных чистых стратегий.

Определим величины выигрышей игроков, которые они могут получить, не вступая в коалицию (точку угрозы (\hat{u}_1, \hat{u}_2)). Для этого решим матричные игры с матрицами

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 14 \\ 33 & 20 \\ 23 & 9 \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B = \begin{pmatrix} 62 & 15 \\ 23 & 22 \\ 38 & 11 \end{pmatrix}.$$

Игра с матрицей A имеет седловую точку, её цена равна $v_A = 20$. Игра с матрицей B также имеет седловую точку; цена этой игры равна $v_B = 22$. Таким образом точка угрозы имеет координаты $(20; 22)$, она совпадает с Q_3 .

Проведем через точку угрозы линии, параллельные координатным осям. Они «высекают» из Парето-оптимального множества решений KM переговорное множество FM (см. рис. 1). На отрезке переговорного множества будет располагаться единственная точка арбитражного решения

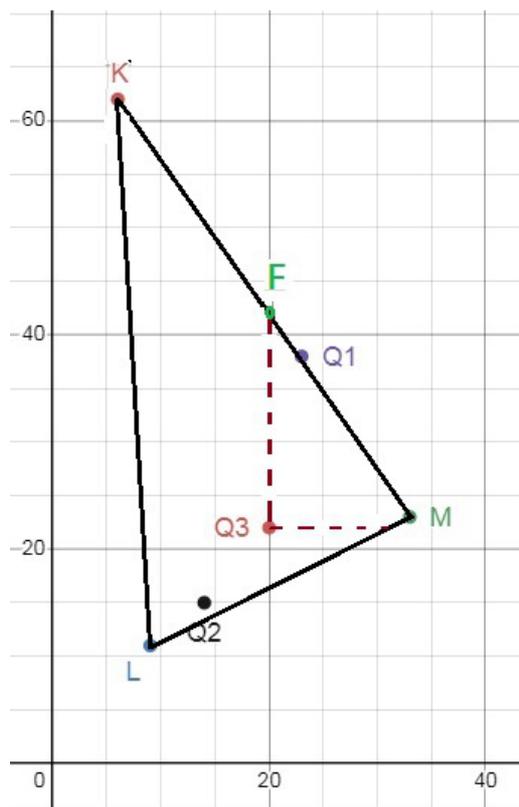


Рис. 1. Область допустимых решений кооперативной игры с платёжным тензором P , содержащая переговорное множество FM .

FIG. 1. The domain of admissible solutions of a cooperative game with payoff tensor P , containing the negotiation set FM .

Нэша N , в которой достигается максимум произведения $g(u) = (u_1 - \hat{u}_1)(u_2 - \hat{u}_2)$ — функции полезности игроков. В нашем случае $g(u) = (u_1 - 20)(u_2 - 22)$; для её максимизации удобней перейти к более привычным обозначениям в координатной системе Oxy :

$$g(u) \equiv g(x, y) = (x - 20)(y - 22). \tag{3.1}$$

Здесь y — линейная функция, соединяющая точки F и M , её уравнение выглядит так

$$y = 62 - \frac{29}{27}(x - 6). \tag{3.2}$$

Подставляя (3.2) в (3.1) и проводя элементарные преобразования, получим квадратичную функцию

$$g(x) = \frac{-13x^2 + 698x - 8760}{9},$$

максимум которой достигается в точке $x_N = 349/13 \approx 26,8$, лежащей на отрезке FM . Соответствующая ей ордината равна $y_N = 287/9 \approx 31,9$.

Таким образом¹, арбитражное решение Нэша — это точка $N(26,8; 31,9)$.

Перейдем к относительной шкале, взяв суммарный вылов в арбитражном решении за 100%. Тогда доля игрока A (России) будет равна 45,65% от ОДУ, а доля игрока B (Норвегии) — 54,35%.

Для оценки результата проведём расчеты в рамках теории бескоалиционных игр, преобразуя редуцированные матрицы A_1 и B_1 из предыдущего параграфа к относительной шкале ($a_{ij}^1 + b_{ij}^1 = 100\%$) с округлением компонент a_{i2}^1, b_{i2}^1 до десятых. Получим новые платёжные матрицы

$$\hat{A}_2 = \begin{pmatrix} 9 & 48,2 \\ 59 & 47,6 \end{pmatrix}, \quad \hat{B}_2 = \begin{pmatrix} 91 & 51,8 \\ 41 & 52,4 \end{pmatrix}.$$

¹Попутно можно сделать вывод о том, что в определении справедливой доли от ОДУ для стран—участниц вылова не участвовало соотношение сил в районе Шпицбергена.

Подставляя в формулы (2.5)-(2.6) для вычисления H_1 и H_2 величины $\varepsilon = 1,8$, $\delta = 2,4$, соответствующие матрицам \widehat{A}_2 и \widehat{B}_2 , получим следующие величины выигрышей: $H_A = 45,6\%$ и $H_B = 54,3\%$, что практически полностью совпадает с полученным выше решением.

Таким образом, игра «в открытую» не даёт никакого преимущества ни одному из игроков. Однако параметрический анализ игровой ситуации здесь тоже представляет интерес, поскольку он основан на других принципах (сохранение «рисунка» игры) и может дать дополнительную информацию о возможных предельных значениях выигрышей игроков и их поведении.

Введём параметры ε и δ возмущения матриц A и B , предполагая для простоты, что изменяться могут лишь компоненты a_{12}, a_{22} (b_{12}, b_{22}). А именно, примем за ε и δ шаги отступа от половинного значения компонентов последнего столбца таб. 3-4, которые послужили основой для построения платёжных матриц. Получим

$$A_1^K = \begin{pmatrix} 6 & 14,5 - \varepsilon \\ 33 & 21 - \delta \\ 23 & 9 \end{pmatrix}, \quad B_1^K = \begin{pmatrix} 62 & 14,5 + \varepsilon \\ 23 & 21 + \delta \\ 38 & 11 \end{pmatrix}.$$

Угловые точки области допустимых решений остаются прежними: $K(6; 62)$, $L(9; 11)$, $M(33; 23)$.

Чтобы записать условие того, что точки Q_2, Q_3 не выйдут за пределы треугольника KLM , составим уравнения его сторон

$$LM : y = 6,5 + 0,5x, \quad (3.3)$$

$$KL : y = 164 - 17x. \quad (3.4)$$

Зафиксируем координаты точки Q_2 :

$$Q_2(14,5 - \varepsilon; 14,5 + \varepsilon). \quad (3.5)$$

Для того чтобы точка $Q_2(x_2, y_2)$ оставалась внутри треугольника KLM , достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{cases} y_2 \geq 6,5 + 0,5x_2, \\ y_2 \geq 164 + 17x_2. \end{cases} \quad (3.6)$$

Подставим в (3.6) координаты точки Q_2 из (3.5), получим

$$\begin{cases} \varepsilon \geq -0,5, \\ \varepsilon \leq 6,0625. \end{cases}$$

Теперь зафиксируем координаты точки Q_3

$$Q_3(21 - \delta; 21 + \delta). \quad (3.7)$$

Точка Q_3 также должна остаться внутри KLM , значит её координаты с необходимостью удовлетворяют системе (3.6). Отсюда выводим

$$\begin{cases} \delta \geq -\frac{8}{3}, \\ \delta \leq 13,375. \end{cases}$$

Таким образом, при $\varepsilon \in [-0,5; 6,0685]$, $\delta \in [-8/3; 13,375]$ областью допустимых решений останется треугольник KLM , а оптимальным множеством по Парето — отрезок KM .

Чтобы определить положение точки угрозы N на переговорном множестве, выясним, при каких условиях стратегия № 1 будет сохранять своё доминирование над стратегией № 3 и в матрице A_1^K , и в матрице B_1^K . Для этого достаточно, чтобы выполнялись неравенства

$$\begin{cases} 21 - \delta \geq 9, \\ 14,5 + \varepsilon \geq 11, \end{cases}$$

откуда

$$\begin{cases} \delta \leq 12, \\ \varepsilon \geq 3,5. \end{cases} \quad (3.8)$$

Для того чтобы удовлетворялись условия (3.8), необходимо сузить область возможных изменений δ , положив

$$\delta \in [-8/3; 12]. \quad (3.9)$$

Тогда для нахождения точки угрозы целесообразно редуцировать матрицы A_1^K и B_1^K в контексте матричных игр к следующим матрицам:

$$A_3 = \begin{pmatrix} 6 & 14,5 - \varepsilon \\ 33 & 21 - \delta \end{pmatrix}, \quad (3.10)$$

$$B_3 = \begin{pmatrix} 62 & 14,5 + \varepsilon \\ 23 & 21 + \delta \end{pmatrix}. \quad (3.11)$$

Определим наличие седловой точки в игре с матрицей (3.10). В соответствии с принципом минимакса имеем:

$$\alpha_1 = \min\{6; 14,5 - \varepsilon\} = 6; \quad \alpha_2 = \min\{33; 21 - \delta\} = 21 - \delta.$$

Нижняя цена игры равна $\alpha = \max\{\alpha_1; \alpha_2\} = 21 - \delta$.

Для игрока B имеем

$$\beta_1 = \max\{6; 33\} = 33; \quad \beta_2 = \max\{14,5 - \varepsilon; 21 - \delta\} = 21 - \delta.$$

Последнее равенство справедливо при условии, что $\delta < 6,5 + \varepsilon$. В этом случае $\alpha = \beta$ и цена игры (3.10) равна $21 - \delta$.

Аналогично, для игры (3.11) получаем

$$\alpha_1 = 14,5 + \varepsilon, \quad \alpha_2 = 21 + \delta \quad (\text{если } \delta > 2); \\ \beta_1 = 63, \quad \beta_2 = 21 + \delta \quad (\text{если } \delta > \varepsilon - 6,5).$$

Для одновременного выполнения неравенств (3.8)-(3.9) нам удобно будет положить $\varepsilon = 35/6$. Тогда условия того, что Q_3 остаётся точкой угрозы, а отрезок FM — переговорным множеством, где точка F имеет абсциссу $21 - \delta$, дадут следующие промежутки¹:

$$\varepsilon \in [-0,5; 6,0625], \quad \delta \in [\varepsilon - 6,5; 2].$$

Составим для решения «возмущённой» кооперативной игры с матрицами A_1^K и B_1^K функцию полезности

$$g(x) = (x - 21 + \delta)(149/3 - \delta - 13x/9).$$

Её точка максимума будет иметь абсциссу $x_0 = \frac{360 - 11\delta}{13}$ и ординату $y_0 = \frac{92}{3} + \frac{11\delta}{9}$.

Поскольку x_0, y_0 линейно зависят от δ , можно определить пределы изменения выигрышей игроков, подставляя вместо δ её наименьшее и наибольшее значение из отрезка $[0, 2]$. Получим

$$x_0(0) = x_0^{\max} = \frac{360}{13} \approx 27,7; \quad y_0(0) = y_0^{\max} = \frac{298}{9} \approx 33,11.$$

Этим значениям соответствуют выигрыши $H_A^{\max} \approx 45,5\%$, $H_B^{\max} \approx 54,5\%$.

Аналогично,

$$x_0(2) = x_0^{\min} = 26; \quad y_0(2) = y_0^{\min} \approx 30,67.$$

Найденным значениям соответствуют выигрыши $H_A^{\min} \approx 45,9\%$; $H_B^{\min} \approx 54,1\%$.

Таким образом, если при положительных δ величина ε меняется в пределах $[-0,5; 35/6]$, то выигрыши игроков не зависят от ε и находятся в пределах от 45,5% до 45,9% от ОДУ (игрок A) и от 54,1% до 54,5% от ОДУ (игрок B).

Разрешим теперь величине δ принимать отрицательные значения в пределах от $\varepsilon - 6,5$ до нуля, тогда при поиске новых экстремальных границ выигрышей игроков (координат точки Нэша) будем учитывать тот факт, что они являются линейными функциями от ε :

$$x_0^\varepsilon = x_0(\varepsilon - 6,5) = \frac{431,5 - 11\varepsilon}{13}; \quad y_0^\varepsilon = y_0(\varepsilon - 6,5) = \frac{204,5 + 11\varepsilon}{9}.$$

Тогда максимально возможное значение величины ε , равное 6,0625, даст игроку A выигрыш, равный приблизительно 48,2% от ОДУ, а игроку B — равный приблизительно 51,8% от ОДУ.

¹Здесь мы будем разрешать принимать отрицательные значения величинам ε и δ , что будет означать перевес «начальных условий» в пользу игрока A .

В итоге, если игрок A по каким-либо причинам сможет обеспечить преимущество a_{22} над b_{22} хотя бы на 0,4375 единиц, то это даст ему возможность увеличить процент позволенного вылова палтуса в ОДУ на 2,3% (по сравнению с тем, что получится при отсутствии этого преимущества) несмотря на то, что его позиция a_{12} по сравнению с b_{12} может быть гораздо хуже (более, чем на 6 единиц).

4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Приведённые из области теории игр инструменты могут помочь в определении квот на вылов морских гидробионтов для любой пары стран, осуществляющих их совместный промысел. При этом допускается применение как теории биматричных бескоалиционных игр, так и арбитражной схемы Нэша. В любом случае решение конфликтной ситуации существует, единственно и даёт взаимовыгодное решение в виде оптимальных пропорций вылова. Если допустить, что в определении платёжных матриц игроков A и B присутствует неопределённость, то при любом подходе имеет смысл рассматривать континуум игровых ситуаций, вводя в некоторые компоненты A и B малые параметры (данное действие близко к поиску «равновесия дрожащей руки», определённого в работе Р. Селтена [14]). Это позволяет исследовать в каком-то смысле обратную задачу, т. е. задачу об определении того, как и на сколько можно изменить платёжные матрицы игроков, чтобы максимизировать (минимизировать) выигрыш одного из них.

Представленная методология может быть взята за основу при проектировании систем поддержки принятия решений о распределении квот на вылов рыбы и других морских обитателей между двумя субъектами вылова (в качестве ориентира см., например, [11]). Наличие трёх и более (нередуцируемых) строк в платёжном тензоре не является препятствием: поиск решения можно осуществить по алгоритму Лемке—Хоусона (см., например, [6, гл. 3]).

В качестве возможного содержательного продолжения настоящего исследования можно назвать расширение множества игроков до трёх с использованием теории триматричных игр [12, 13], а также коалиционных игр [10, гл. 13] с созданием коалиций «двое против одного».

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Безруков А. Б., Саитгараев С. С. Прикладная теория игр. — Челябинск: Челябинский гос. унив., 2001.
2. Богатов Е. М., Богатова Н. Е. О применении методов теории игр к задаче распределения квот на вылов морских гидробионтов // В сб.: «Сборник материалов международной конференции КРОМШ-2022». — Симферополь: ИТ «АРИАЛ», 2022. — С. 44.
3. Горелик В. А., Кононенко А. Ф. Теоретико-игровые модели принятия решений в эколого-экономических системах. — М.: Радио и связь, 1982.
4. Древетняк К. В., Греков А. А., Ковалев Ю. А. и др. История решения вопроса по определению ключей распределения общего допустимого улова черного палтуса Баренцева моря // Вопросы рыболовства. — 2016. — 17, № 4. — С. 502–512.
5. Зиланов В. К., Клочков Д. Н., Шибанов В. Н. Рыболовный Шпицберген // Рыбное хозяйство. — 2020. — № 1. — С. 14–24.
6. Колобашкина Л. В. Основы теории игр. — М.: Бином, 2011.
7. Конюховский П. В., Малова А. С. Теория игр. — М.: Юрайт, 2019.
8. Кремлев А. Г. Основные понятия теории игр. — Екатеринбург: Урал. унив., 2016.
9. Оуэн Г. Теория игр. — М.: Едиториал УРСС, 2005.
10. Петросян Л. А., Зенкевич Н. А., Шевкопляс Е. В. Теория игр. — СПб: БХВ-Петербург, 2014.
11. Рогачев А. Ф., Скитер Н. Н., Плещенко Т. В. Разработка системы поддержки принятия решений для обоснования параметров эколого-экономических систем // Изв. Нижневолжск. агроуниверситет. комплекса: наука и высш. проф. обр. — 2012. — № 2. — С. 238–242.
12. Gonzalez-Alcon C., Borm P., Hendrickx R. Nash equilibria in 2x2x2 trimatrix games with identical anonymous best-replies // Int. Game Theory Review. — 2014. — 16, № 4. — С. 1–11.
13. Romanuke V. Pareto-efficient strategies in 3-person games played with staircase-function strategies // Commun. Combin. Optim. — 2022. — 7, № 2. — С. 1–35.
14. Selten R. Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games // Int. J. Game Theory. — 1975. — № 4. — С. 25–55.

Е. М. Богатов

Старооскольский технологический институт им. А. А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС», Старый Оскол, Россия

Филиал Национального исследовательского технологического университета «МИСиС» в г. Губкине Белгородской обл., Губкин, Россия

E-mail: embogatov@inbox.ru

Н. Е. Богатова

Старооскольский технологический институт им. А. А. Угарова (филиал) Национального исследовательского технологического университета «МИСиС», Старый Оскол, Россия

E-mail: emejnik@gmail.com

UDC 519.83

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-224-236

EDN: BEVTED

Research of the problem of fair distribution of fishing quotas by the methods of game theory

E. M. Bogatov^{1,2} and N. E. Bogatova¹

¹*Starooskol'skii Technological Institute, branch of the National University of Science and Technology MISIS, Staryi Oskol, Russia*

²*Branch of the National University of Science and Technology MISIS in the city of Gubkin, Gubkin, Russia*

Abstract. Game theory emerged as a science in the second half of the 20th century. It managed to prove itself well in the analysis of economic situations involving several subjects of economic activity (players), whose interests are completely or partially opposite. At the same time, in a number of cases, the solution of the game satisfied all players, but was not the most profitable (there was a Nash equilibrium), and in a number of other cases, it was possible to take into account the interests of all parties to the maximum (there was a Pareto optimal solution). The transfer of the principles of game theory to other areas turned out to have a number of difficulties associated, among other things, with the correct interpretation of strategies and gains of the parties in a conflict situation. For this reason, despite the obvious benefit from the possible application of game theory methods to problems of a fair distribution of quotas for catching fish and other seafood, this step has not been taken until recently.

In this paper, we consider a scheme for applying the algorithms of the theory of bimatrix and cooperative games on the example of solving the problem of finding the percentage of the allowable catch of the black halibut in the Barents Sea for two countries participating in the catch and give a meaningful interpretation of the results. The basis for the calculations was real data collected by the Russian–Norwegian Fisheries Commission in recent decades to determine the proportions of the catch of the indicated fish species in the respective sea zones. Since not all components of the payoff matrices of the players are uniquely determined, it became possible to perform a parametric analysis of the mathematical model of the conflict situation both in the search for an equilibrium solution and in the implementation of the arbitration scheme.

The work is an extended and supplemented version of the report [2].

Keywords: game model of fair distribution of catch quotas, bimatrix games, cooperative games, Nash equilibrium, game arbitrage solution, parametric conflict analysis.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare that no financial support was received. The authors are grateful to the participants of the Crimean Autumn Mathematical School-Symposium of N. D. Kopachevsky (KROMSH-2022) for their attention to the work and useful discussions.

For citation: E. M. Bogatov, N. E. Bogatova, “Research of the problem of fair distribution of fishing quotas by the methods of game theory,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 2, 224–236. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-224-236>

REFERENCES

1. A. B. Bezrukov and S. S. Saitgaraev, *Prikladnaya teoriya igr* [Applied Game Theory], Chelyabinsk State Univ., Chelyabinsk, 2001 (in Russian).
2. E. M. Bogatov and N. E. Bogatova, “O primeneniі metodov teorii igr k zadache raspredeleniya kvot na vylov morskikh gidrobiontov” [On the application of game theory methods to the problem of distribution of quotas for the catch of marine hydrobionts], In: *Sbornik materialov mezhdunarodnoy konferentsii KROMSh-2022* [Collection of materials of the international conference KROMSH-2022], IT «ARIAL», Simferopol’, 2022, pp. 44 (in Russian).
3. V. A. Gorelik and A. F. Kononenko, *Teoretiko-igrovye modeli prinyatiya resheniy v ekologo-ekonomicheskikh sistemakh* [Game-theoretic decision-making models in ecological-economic systems], Radio i svyaz’, Moscow, 1982 (in Russian).
4. K. V. Drevetnyak, A. A. Grekov, Yu. A. Kovalev, etc., “Istoriya resheniya voprosa po opredeleniyu klyuchey raspredeleniya obshchego dopustimogo ulova chernogo paltusa Barentseva morya” [The history of resolving the issue of determining the keys for the distribution of the total allowable catch of black halibut in the Barents Sea], *Voprosy rybolovstva* [Fisheries Issues], 2016, **17**, No. 4, 502–512 (in Russian).
5. V. K. Zilanov, D. N. Klochkov, and V. N. Shibanov, “Rybolovnyy Shpitsbergen” [Fishing Svalbard], *Rybnoe khozyaystvo* [Fisheries], 2020, No. 1, 14–24 (in Russian).
6. L. V. Kolobashkina, *Osnovy teorii igr* [Fundamentals of Game Theory], Binom, Moscow, 2011 (in Russian).
7. P. V. Konyukhovskiy and A. S. Malova, *Teoriya igr* [Game Theory], Yurayt, Moscow, 2019 (in Russian).
8. A. G. Kremlev, *Osnovnye ponyatiya teorii igr* [Basic Concepts of Game Theory], Ural Univ., Ekaterinburg, 2016 (in Russian).
9. G. Owen, *Teoriya igr* [Game Theory], Editorial URSS, Moscow, 2005 (in Russian).
10. L. A. Petrosyan, N. A. Zenkevich, and E. V. Shevkoplyas, *Teoriya igr* [Game Theory], BKhV-Peterburg, Saint Petersburg, 2014 (in Russian).
11. A. F. Rogachev, N. N. Skiter, and T. V. Pleshchenko, “Razrabotka sistemy podderzhki prinyatiya resheniy dlya obosnovaniya parametrov ekologo-ekonomicheskikh sistem” [Development of a decision support system to substantiate the parameters of ecological and economic systems], *Izv. Nizhnevolzhsk. agrouniversitet. kompleksa: nauka i vyssh. prof. obr.* [Bull. Lower Volga Agricult. Univ. Complex. Sci. Higher. Prof. Edu.], 2012, No. 2, 238–242 (in Russian).
12. C. Gonzalez-Alcon, P. Borm, and R. Hendrickx, “Nash equilibria in 2x2x2 trimatrix games with identical anonymous best-replies,” *Int. Game Theory Review*, 2014, **16**, No. 4, 1–11.
13. V. Romanuke, “Pareto-efficient strategies in 3-person games played with staircase-function strategies,” *Commun. Combin. Optim.*, 2022, **7**, No. 2, 1–35.
14. R. Selten, “Reexamination of the perfectness concept for equilibrium points in extensive games,” *Int. J. Game Theory*, 1975, No. 4, 25–55.

E. M. Bogatov

Starooskol’skii Technological Institute, branch of the National University of Science and Technology MISIS, Staryi Oskol, Russia

Branch of the National University of Science and Technology MISIS in the city of Gubkin, Gubkin, Russia

E-mail: embogatov@inbox.ru

N. E. Bogatova

Starooskol’skii Technological Institute, branch of the National University of Science and Technology MISIS, Staryi Oskol, Russia

E-mail: emejnik@gmail.com

УДК 519.63

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-237-249

EDN: ANBXXKV

МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ИДЕАЛЬНОГО СВОБОДНОГО РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В СИСТЕМЕ ХИЩНИК—ЖЕРТВА

П. А. ЗЕЛЕНЧУК, В. Г. ЦИБУЛИН

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

Аннотация. Рассматривается система уравнений реакции—диффузии—адвекции, описывающая эволюцию пространственных распределений антагонистических популяций с учетом направленной миграции. Для модели хищник—жертва с учетом многофакторного таксиса введено понятие идеального свободного распределения (ИСР). Найдены условия на параметры, при которых существуют явные стационарные решения с ненулевыми плотностями обоих видов. Для анализа решений при нарушении условий на коэффициенты, обеспечивающих ИСР, применяется численный подход на основе дискретизации со смещенными сетками. Построены асимптотические разложения решений для неоднородного одномерного ареала и представлены результаты вычислительного эксперимента при нарушении соотношений ИСР.

Ключевые слова: математическая экология, идеальное свободное распределение, уравнения реакции—диффузии—адвекции, хищник—жертва.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена в Южном федеральном университете при поддержке РФФИ, грант № 23-21-00221.

Для цитирования: П. А. Зеленчук, В. Г. Цибулин. Математическая модель идеального свободного распределения в системе хищник—жертва // *Соврем. мат. Фундам. направл.* 2023. Т. 69, № 2. С. 237–249. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-237-249>

ВВЕДЕНИЕ

Система «хищник—жертва» — одна из базовых моделей математической биологии [1, 5, 8], позволяющая исследовать динамику взаимодействующих популяций и оценивать возможность их совместного существования на рассматриваемом ареале. К настоящему времени наиболее актуальными проблемами являются моделирование пространственного распределения хищников и жертв, анализ диффузионно-адвективных процессов.

Пространственно-временная динамика системы «хищник—жертва» описывается нелинейными дифференциальными уравнениями в частных производных [5, 7, 20]. Подход на основе уравнений реакции—диффузии—адвекции дает возможность учитывать локальное взаимодействие популяций, анализировать поведенческие стратегии видов и их эволюционную устойчивость [9, 10, 16, 19]. Одна из задач такого анализа, приобретающая особую важность в вопросах прогнозирования и биологического контроля, состоит в поиске стратегий поведения, которые обеспечивают максимальную приспособленность видов к окружающей среде обитания.

Идеальное свободное распределение (ИСР) является одной из таких стратегий [21], обеспечивающей ряд конкурентных преимуществ в борьбе за существование [18]. Введенная как теоретико-игровая концепция [22], ИСР изначально рассматривала один вид, особи которого имеют полное представление о среде обитания и могут свободно перемещаться в любую ее точку. Позже ИСР с учетом локальной динамики популяций была распространена на среду с двумя конкурирующими видами, а затем и на случай нескольких видов, находящихся во взаимодействии «хищник—жертва» [24, 26].

Для биологических систем, описываемых уравнениями реакции—диффузии—адвекции, концепция ИСР рассматривалась рядом исследователей [13, 15, 17, 18]. Авторы работы [16], определив ИСР как размещение особей популяции, пропорциональное емкости среды обитания (количеству доступного ресурса), показали, что эта концепция является необходимым и часто достаточным условием эволюционно устойчивой стратегии для диффузионно-адвективных моделей. Распространение понятия идеального свободного распределения на систему «хищник—жертва» в случае пространственной неоднородности среды обитания при многофакторном таксисе проведено в [4].

В данной работе рассматривается вопрос о построении математической модели «хищник—жертва» на основе уравнений реакции—диффузии—адвекции, обеспечивающей ИСР на неоднородном ареале в случае различных законов роста жертвы при многофакторном таксисе обоих видов. На основе асимптотических разложений и численного метода решения начально-краевой задачи анализируется отклонение распределений видов от ИСР при вариациях параметров модели.

1. ИДЕАЛЬНОЕ СВОБОДНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ

В общем случае модель на основе уравнений реакции—диффузии—адвекции с учетом многофакторного таксиса [2] и произвольным функциональным откликом хищника $g(u, v)$ [9] представляема в виде:

$$\begin{aligned} \dot{u} &= -q_1' + ua_1f_n(u) - b_1vg(u, v), & q_1 &= -k_1u' + u\varphi_1', \\ \dot{v} &= -q_2' - a_2v + b_2vg(u, v), & q_2 &= -k_2v' + v\varphi_2', \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $u(x, t)$ и $v(x, t)$ — плотности популяций жертвы и хищника соответственно, точка означает производную по времени, а штрих — производную по x . Положительные коэффициенты a_i, b_i характеризуют прирост и убыль видов при локальном взаимодействии. В потоковых слагаемых q_i коэффициенты k_1, k_2 отвечают за диффузию, а функции φ_i за таксис. Рост популяции жертвы определяется степенной функцией:

$$f_n(u) = u^n \left(1 - \frac{u}{p} \right), \quad n = 0, 1, 2, \dots, \quad (1.2)$$

где $p(x)$ — ресурс жертвы. Функция $f_n(u)$ при $n = 0$ соответствует логистическому, а при $n = 1$ гиперболическому закону роста. В [4] отмечено, что зависимость ресурса жертвы от пространственной переменной должна учитываться при формулировании соотношений функционального отклика и функции роста жертвы, описывающих локальное взаимодействие хищника и жертвы. В [10, 12, 23] был проведен анализ функций локального взаимодействия для уравнений реакции—диффузии—адвекции при моделировании динамики хищников и жертв в случае неоднородного ареала.

Система (1.1) дополняется начальными условиями

$$u(x, 0) = u^0(x), \quad v(x, 0) = v^0(x) \quad (1.3)$$

и одним из видов граничных условий.

Будем называть распределение видов в системе «хищник—жертва» *ИСР-подобным*, если плотности жертвы и хищника пропорциональны функции ресурса. Пример такого распределения для ареала $\Omega = [0, 1]$ с условиями периодичности

$$u(0, t) = u(1, t), \quad v(0, t) = v(1, t), \quad q_1(0, t) = q_1(1, t), \quad q_2(0, t) = q_2(1, t) \quad (1.4)$$

построен в [4]. Рассматривался гиперболический закон роста жертвы ($n = 1$), классический функциональный отклик Лотки—Вольтерры $g(u, v) = u$ и функции, характеризующие таксис,

$$\varphi_1 = \alpha_1 \ln p - \beta_1 \ln v, \quad \varphi_2 = \beta_2 \ln u. \quad (1.5)$$

При выполнении условия на параметры

$$k_1 = \alpha_1 - \beta_1, \quad k_2 = \beta_2 \quad (1.6)$$

нетривиальное ИСР-решение имеет вид:

$$u = \frac{\eta_2 p(x)}{\mu_2}, \quad v = \frac{\eta_1 \eta_2}{\mu_1 \mu_2} \left(1 - \frac{\eta_2}{\mu_2}\right) p(x), \quad a_1 = \eta_1, \quad b_1 = \mu_1, \quad b_2 = \frac{\mu_2}{p(x)}, \quad a_2 = \eta_2. \quad (1.7)$$

При отсутствии хищника и нулевых потоках ($q_1 = 0, q_2 = 0$) из выражения (1.7) для жертвы получается решение, которое соответствует концепции ИСР в ее первоначальной постановке для одного вида, т. е. распределение вида отвечает функции плотности ресурса или емкости ареала, как показано на рис. 1 (а).

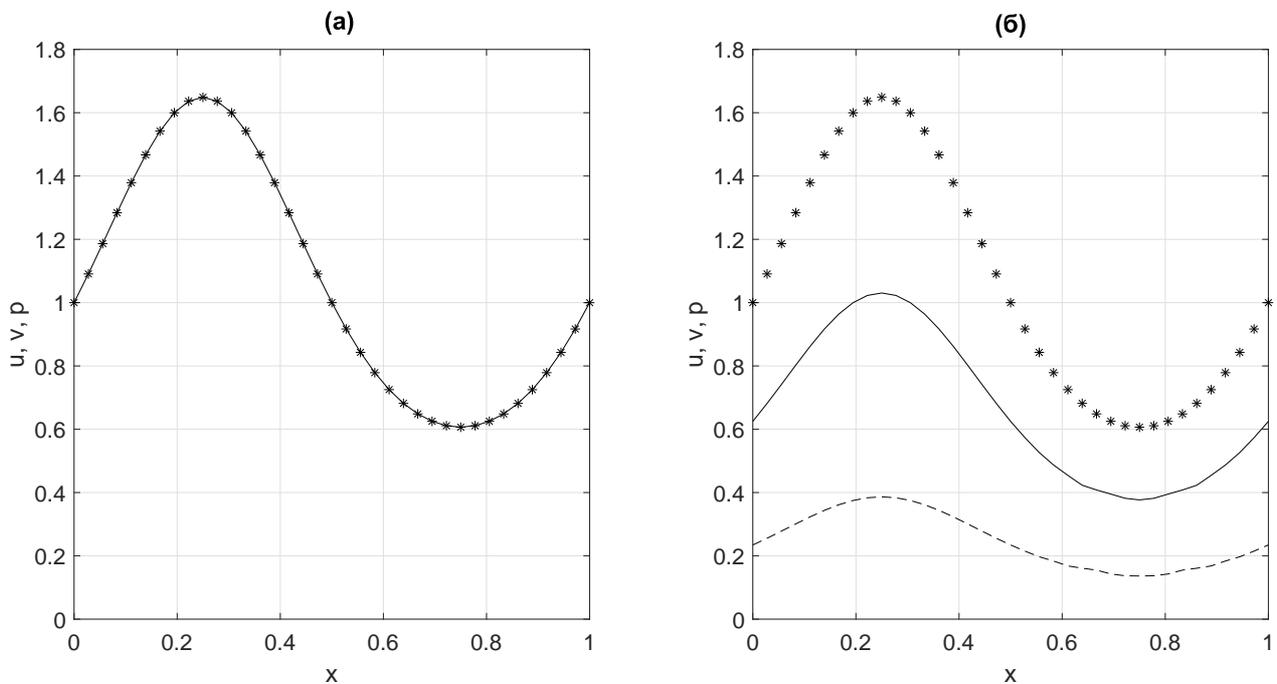


Рис. 1. Распределение популяций в отсутствие потоков при неоднородном ресурсе (звездочки), (а) — жертва (сплошная кривая) без хищника, (б) — жертва и хищник (штриховая); $\mu_1 = 5, \mu_2 = 8, \eta_1 = \eta_2 = 5, p(x) = \exp\left(\frac{1}{2} \sin 2\pi x\right)$

FIG. 1. Distribution of populations in the absence of flows with a nonhomogeneous resource (asterisks), (a) — prey (solid curve) without predator, (б) — prey and predator (dashed line); $\mu_1 = 5, \mu_2 = 8, \eta_1 = \eta_2 = 5, p(x) = \exp\left(\frac{1}{2} \sin 2\pi x\right)$

Это решение устанавливается также для начально-краевой задачи полной системы, если коэффициент смертности хищника η_2 превосходит критическое значение. При коэффициенте смертности хищника η_2 ниже критического значения формируются ненулевые распределения видов, как показано на рис. 1 (б).

Отметим, что исследования с учетом многофакторного таксиса достаточно редки [2, 25]. Обычно для жертв в случае неоднородного ареала предполагается направленная миграция вследствие неравномерности распределения ресурса $p(x)$. Для хищника естественно рассматривать таксис

на жертву. Например, в [14] используется линейная зависимость от ресурса и взаимодействующих видов

$$\begin{aligned} q_1 &= -k_1 u' + u \varphi_1', & \varphi_1 &= \alpha p(x) + \beta_{11} u + \beta_{12} v, \\ q_2 &= -k_2 v' + v \varphi_2', & \varphi_2 &= \beta_{21} u + \beta_{22} v. \end{aligned}$$

Здесь коэффициент направленной миграции на ресурс α положителен, а регулирующие межвидовой таксис коэффициенты β_{ij} могут быть нулевыми или различных знаков.

Исследуем вопрос о построении математической модели системы хищник—жертва с многофакторным таксисом, отвечающей ИСР при функциональном отклике Лотки—Вольтерры и различных законах роста жертвы. Будем учитывать также внутривидовой и межвидовой таксисы, отвечающие за направленное движение вследствие неравномерности распределения популяций:

$$\dot{u} = -q_1' + u [a_1 f_n(u) - b_1 v], \quad q_1 = -k_1 u' + \alpha u (\ln p)' - \beta_{11} u (\ln v)' - \beta_{12} u (\ln u)', \quad (1.8)$$

$$\dot{v} = -q_2' + v [-a_2 + b_2 u], \quad q_2 = -k_2 v' + \beta_{21} v (\ln u)' - \beta_{22} v (\ln v)'. \quad (1.9)$$

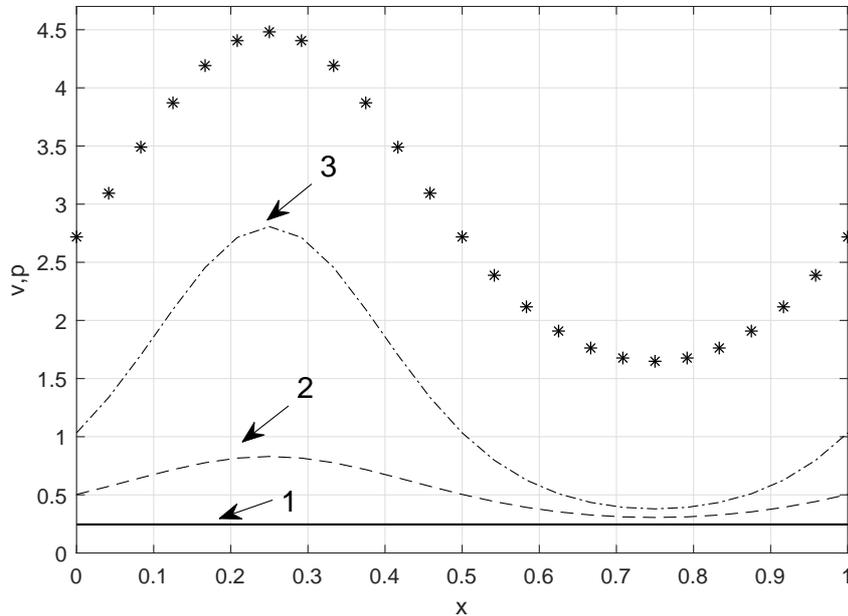


Рис. 2. Распределение хищника при $n = 0$ (кривая 1), $n = 1$ (2) и $n = 2$ (3) в сравнении с ресурсом жертвы $p(x)$ (звездочки); $\mu_1 = 5$, $\mu_2 = 8$, $\eta_1 = \eta_2 = 5$, $p(x) = \exp\left(\frac{1}{2} \sin 2\pi x\right)$

FIG. 2. Predator distribution for $n = 0$ (curve 1), $n = 1$ (2), and $n = 2$ (3) compared with the prey resource $p(x)$ (asterisks); $\mu_1 = 5$, $\mu_2 = 8$, $\eta_1 = \eta_2 = 5$, $p(x) = \exp\left(\frac{1}{2} \sin 2\pi x\right)$

Для системы (1.8)–(1.9) без диффузии и таксиса ($q_1 = q_2 = 0$)

$$\dot{u} = u [a_1 f_n(u) - b_1 v], \quad \dot{v} = v [-a_2 + b_2 u] \quad (1.10)$$

справедливо следующее утверждение.

Теорема 1.1. Для показателя степени в функции роста жертвы $n > 0$ система (1.10) имеет нетривиальное стационарное решение, отвечающее ИСР для двух видов,

$$u = \lambda p(x), \quad v_n = \lambda^n \mu (1 - \lambda) p(x), \quad (1.11)$$

при следующих условиях на коэффициенты:

$$a_1 = \frac{\mu}{p^n(x)}, \quad b_1 = b_2 = \frac{1}{p(x)}, \quad a_2 = \lambda. \quad (1.12)$$

Доказательство. Доказательство получается прямой подстановкой (1.1) и (1.12) в (1.10) с учетом стационарности решения. \square

Полученное решение (1.11) соответствует ИСР, поскольку оба вида пропорциональны ресурсу $p(x)$ и не зависят от $n > 0$. При $n = 0$ распределение хищника из (1.7) не зависит от ресурса $p(x)$, а при $n = 2$ пропорционально квадрату ресурса (рис. 2).

Рассмотрим полную систему (1.8)-(1.9) на ареале $\Omega \in [0, 1]$ с условиями периодичности (1.4). В этом случае имеет место следующая теорема.

Теорема 1.2. *Для любого действительного числа $n > 0$ система (1.8)–(1.9) имеет нетривиальное стационарное решение (1.11), отвечающее ИСР для двух видов, при выполнении условий*

$$k_1 = \alpha - \beta_{11} - \beta_{12}, \quad k_2 = \beta_{21} - \beta_{22}. \quad (1.13)$$

Доказательство. Для сохранения полной системой (1.8)-(1.9) стационарного решения (1.11) необходимо, чтобы суммарные потоки не зависели от x ($q_{1,2} = \text{const}$). В этом случае производная от потоков по координате будет равна нулю и система (1.8)-(1.9) сведется к (1.10), для которой справедливо ИСР-решение (1.11). Возьмем для потоков $q_{1,2}$ в качестве константы ноль, тогда:

$$\begin{aligned} k_1 u' - u \alpha \frac{p'(x)}{p(x)} + u \beta_{11} \frac{v'}{v} + u \beta_{12} \frac{u'}{u} &= 0, \\ k_2 v' + v \beta_{21} \frac{u'}{u} - v \beta_{22} \frac{v'}{v} &= 0. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Подставляя сюда решение (1.11), находим:

$$\begin{aligned} \lambda p'(x) [k_1 - \alpha + \beta_{11} + \beta_{12}] &= 0, \\ \lambda^n \mu (1 - \lambda) p'(x) [k_1 - \beta_{21} + \beta_{22}] &= 0. \end{aligned} \quad (1.15)$$

Поскольку коэффициенты λ и μ всегда положительны, а $p'(x) \neq 0$, то приходим к условиям (1.13). \square

2. АНАЛИЗ СИСТЕМЫ ПРИ МАЛЫХ ОТКЛОНЕНИЯХ ОТ ИСР

Проанализируем, что происходит с ИСР для системы (1.8)-(1.9) при малых отклонениях коэффициентов диффузии и таксиса от условий (1.13). Вначале рассмотрим задачу без учета таксиса ($\alpha = 0, \beta_{ij} = 0$) в случае малой диффузии

$$k_1 = \varepsilon, \quad k_2 = \gamma \varepsilon. \quad (2.1)$$

Построим формальное асимптотическое разложение [3, 6] для стационарного решения в виде рядов при $n = 1$:

$$\begin{aligned} u &= u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots, \\ v &= v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots \end{aligned} \quad (2.2)$$

Подставим эти выражение в (1.8)-(1.9) для стационарного случая. При ε^0 имеем

$$u_0 = \lambda p(x), \quad v_0 = \lambda \mu (1 - \lambda) p(x). \quad (2.3)$$

Для коэффициентов при ε^1 выводим

$$\begin{aligned} u_0'' &= \frac{2\mu u_0 u_1}{p} + \frac{\gamma u_0 v_1}{p} + \frac{u_1 v_0}{p} - \mu u_1, \\ \gamma v_0'' &= \gamma \lambda v_1 - \frac{\gamma u_0 v_1}{p} - \frac{v_0 u_1}{p}. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Подставляя (2.3) в (2.4) и упрощая, получаем для u_1, v_1 :

$$u_1 = -\gamma p'', \quad v_1 = \frac{(1 + \mu \gamma) p''}{\gamma}. \quad (2.5)$$

Таким образом, приближение к стационарному решению системы (1.8)-(1.9), ограниченное двумя членами асимптотического разложения, будет иметь вид:

$$u \approx \lambda p - \gamma \varepsilon p'',$$

$$v \approx \lambda\mu(1 - \lambda)p + (\varepsilon + \mu\gamma\varepsilon)p''.$$
 (2.6)

Учитывая (2.1):

$$\begin{aligned} u &\approx \lambda p - k_2 p'', \\ v &\approx \lambda\mu(1 - \lambda)p + (k_1 + \mu k_2)p'', \end{aligned}$$
 (2.7)

Видно, что полученное решение пропорционально не только функции ресурса $p(x)$, но и ее второй производной. Можно отметить, что учет диффузии дает отклонение решения от ИСР, причем для жертвы коэффициентом при $p''(x)$ выступает коэффициент диффузии хищника, а для хищника, соответственно, — комбинация коэффициентов диффузии и параметра роста жертвы.

На рис. 3 изображено распределение хищника (кривые 4 и 5) и жертвы (2 и 3) в сравнении с ресурсом $p(x)$ (1) при отсутствии (сплошные линии) и наличии (пунктир) диффузии.

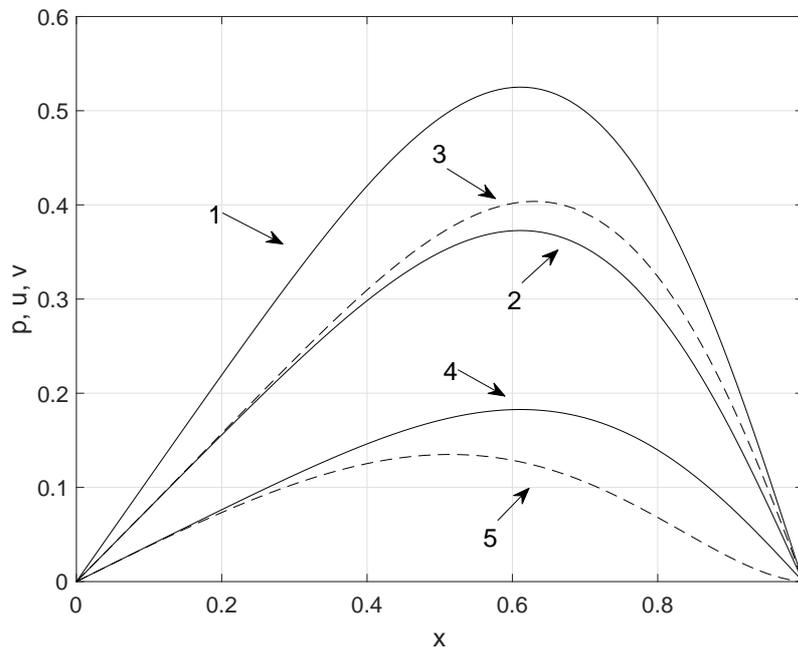


Рис. 3. Распределение популяций при наличии (пунктир) и отсутствие диффузии (сплошная); $k_1 = k_2 = 0,005$, $\mu = 1,2$, $\lambda = 0,71$, $p(x) = x^7 - 2,1x^5 + 1,1x$

FIG. 3. Distribution of populations in the presence (dashed line) and the absence of diffusion (solid line); $k_1 = k_2 = 0,005$, $\mu = 1,2$, $\lambda = 0,71$, $p(x) = x^7 - 2,1x^5 + 1,1x$

Однако существуют функции ресурса, для которых в случае диффузии возможно сохранение ИСР. Например, для асимптотического разложения (2.7) при $p(x) = \sin(\pi x)$ получается следующее ИСР-решение:

$$u = (k_2\pi^2 + \lambda)p(x), \quad v = [\mu(1 - k_2\pi^2 - \lambda) - k_1\pi^2]p(x).$$
 (2.8)

Соответствующие этому случаю распределения плотностей популяций приведены на рис. 4.

Проанализируем, как меняется решение при нарушении условий на параметры (1.13). Рассмотрим случай, когда имеется таксис жертвы на ресурс $p(x)$, т. е. $\beta_{11} = \beta_{12} = 0$, а хищника — только на жертву, т. е. $\beta_{21} = \beta$, $\beta_{22} = 0$. Пусть

$$k_1 = \alpha + \varepsilon, \quad k_2 = \beta + \gamma\varepsilon.$$
 (2.9)

Будем разыскивать стационарное решение в виде формального ряда

$$u = u_0 + \varepsilon u_1 + \varepsilon^2 u_2 + \dots,$$
 (2.10)

$$v = v_0 + \varepsilon v_1 + \varepsilon^2 v_2 + \dots$$
 (2.11)

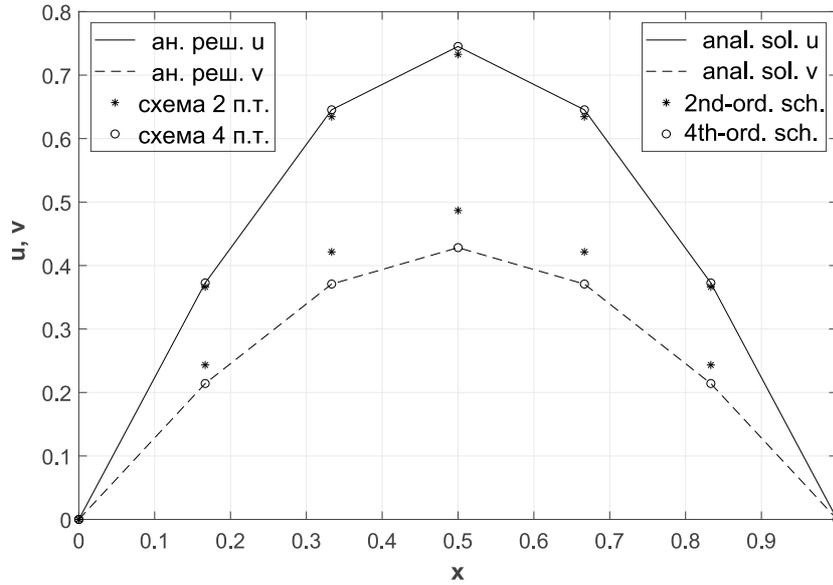


Рис. 4. Распределение популяций при наличии (пунктир) и отсутствие диффузии (сплошная); $k_1 = k_2 = 0,005$, $\mu = 1,2$, $\lambda = 0,71$, $p(x) = \sin \pi x$

FIG. 4. Distribution of populations in the presence (dashed line) and the absence of diffusion (solid line); $k_1 = k_2 = 0,005$, $\mu = 1,2$, $\lambda = 0,71$, $p(x) = \sin \pi x$

Собирая члены при одинаковых степенях, получим следующие уравнения при первой степени ε :

$$0 = \left[\alpha u_1' + \lambda p' - \alpha \frac{u}{p} p' \right]' - \lambda(\mu u_1 + v_1) \equiv g_1,$$

$$0 = \left[\beta v_1' + \gamma \mu(1 - \lambda)p' - \beta \mu(1 - \lambda)p \left(\frac{u_1}{\lambda p} \right)' - \beta \frac{v_1}{p} p' \right] + \mu(1 - \lambda)u_1 \equiv g_2.$$

Выражения g_j можно записать в виде

$$g_1 = \left[\alpha p \left(\frac{u_1}{p} \right)' + \lambda p' \right]' - \lambda(\mu u_1 + v_1), \tag{2.12}$$

$$g_2 = \left[\beta p \left(\frac{\lambda v_1 - \mu(1 - \lambda)u_1}{\lambda p} \right)' + \gamma \mu(1 - \lambda)p' \right]' + \mu(1 - \lambda)u_1. \tag{2.13}$$

Для ареала Ω из условия стационарности решения $g_j = 0$ интегрированием получаются следующие интегральные тождества:

$$\int_{\Omega} u_1 dx = 0, \quad \int_{\Omega} v_1 dx = 0.$$

Это означает, что при нарушении условий ИСР (1.13) вклад добавок первого порядка для отклонений от ИСР-распределений жертвы и хищника (2.10) суммарно нивелируется. При этом возникает вопрос о синфазности добавок, ответ на которой дают результаты вычислительного эксперимента.

3. ВЫЧИСЛИТЕЛЬНАЯ СХЕМА

Для дискретизации системы (1.8)-(1.9) вводится равномерная сетка по пространственной координате:

$$x_j = (j - 1)h, \quad j = 1, \dots, n + 1, \quad h = \frac{1}{n}. \tag{3.1}$$

Плотности распределения популяций u , v в узле (x_j) далее обозначаются через u_j , v_j . При вычислении потоков используется вспомогательная сетка:

$$x_{j+\frac{1}{2}} = (j-1)h + \frac{h}{2}, \quad j = 2, \dots, n. \quad (3.2)$$

Для аппроксимации применяется метод баланса: уравнения (1.8)-(1.9) интегрируются по отрезку $[x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}]$. Для потоков q_1 , q_2 интегрирование проводится по отрезку $[x_j, x_{j+1}]$, $j = 1, \dots, n$. Для записи сеточных уравнений далее используются операторы разностных производных и вычисления среднего

$$\begin{aligned} (dw)_j &= \frac{w_{j+\frac{1}{2}} - w_{j-\frac{1}{2}}}{h}, & (dw)_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{w_{j+1} - w_j}{h}, \\ (\delta w)_j &= \frac{w_{j+\frac{1}{2}} + w_{j-\frac{1}{2}}}{2}, & (\delta w)_{j+\frac{1}{2}} &= \frac{w_{j+1} + w_j}{2}. \end{aligned}$$

Здесь w обозначает переменную величину, которая вычисляется в узлах как с целочисленными индексами i , так и полуцелыми. В результате получается система обыкновенных дифференциальных уравнений для u_j , v_j

$$\begin{aligned} \dot{u}_j &= [-dq_1 + a_1 u f_n(u) - b_1 u v]_j, \\ \dot{v}_j &= [-dq_2 + -a_2 v + b_2 u v]_j. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Для функции $f_n(u)$ используем следующую формулу:

$$f_{nj} = u_j^n \left(1 - \frac{u_j}{P_j}\right), \quad P_j = \left[\frac{1}{h} \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} \frac{dx}{p(x)} \right]^{-1}. \quad (3.4)$$

Разностные аналоги для потоков имеют вид

$$\begin{aligned} q_{1,j+\frac{1}{2}} &= \left[-k_1 du + \alpha \delta u \frac{dp}{\delta p} - \beta_{11} du - \beta_{12} \delta u \frac{dv}{\delta v} \right]_{j+\frac{1}{2}}, \\ q_{2,j+\frac{1}{2}} &= \left[-k_2 dv + \beta_{21} \delta v \frac{du}{\delta u} - \beta_{22} dv \right]_{j+\frac{1}{2}}. \end{aligned}$$

Вводя векторы

$$\begin{aligned} U &= (u_1, u_2 \dots u_{n+1}), \\ V &= (v_1, v_2 \dots v_{n+1}), \end{aligned} \quad (3.5)$$

а также дополняя полученную конечномерную модель (3.3), (3.5) дискретными начальными условиями, получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{U} &= \Phi_1(U, V), \quad U(0) = U_0, \\ \dot{V} &= \Phi_2(U, V), \quad V(0) = V_0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Векторы U_0 , V_0 определяются следующим образом:

$$U_0 = (u_1^0, u_2^0, \dots, u_{n+1}^0), \quad V_0 = (v_1^0, v_2^0, \dots, v_{n+1}^0). \quad (3.7)$$

Для интегрирования системы (3.6) по времени используется метод Рунге—Кутты 4-го порядка.

4. ЧИСЛЕННЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

На рис. 5 представлено изменение ИСР при малых отклонениях потоковых параметров, полученное в ходе вычислительного эксперимента для одномерного кольцевого ареала. Функция ресурса задавалась выражением:

$$p(x) = 1 + \frac{1}{3} \sin 2\pi x.$$

Изучим поведение системы (1.8)-(1.9) при малых отклонениях параметров от (1.13), соответствующих ИСР, если функция роста жертвы задана гиперболическим законом ($n = 1$). На рис. 5

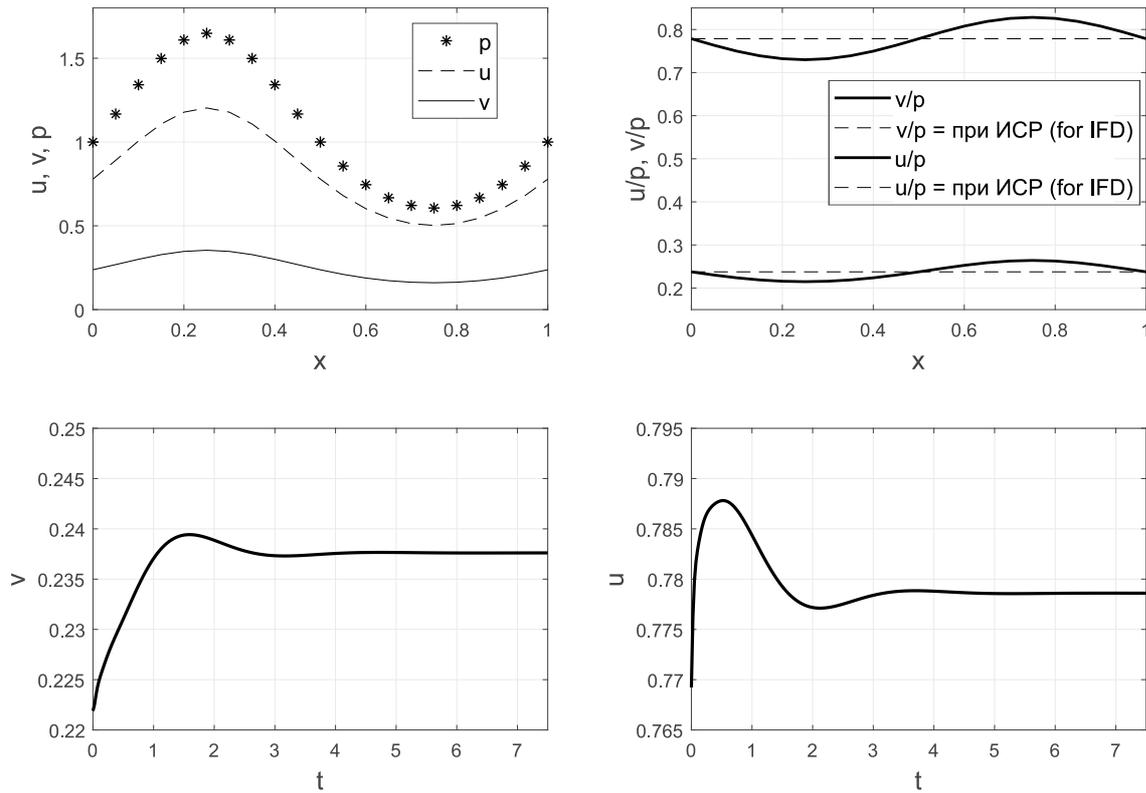


Рис. 5. Графики зависимостей плотностей популяций жертвы u и хищника v от координаты (вверху) и времени (внизу) при $k_1 = 0,15$

FIG. 5. Graphs of dependences of population densities of prey u and predator v on coordinate (top) and time (bottom) for $k_1 = 0,15$

представлены результаты расчета при возмущении параметра $k_1^* = k_1 + \varepsilon$, значения оставшихся параметров модели были следующими: $\mu_1 = 4$; $\eta_1 = 5$; $\mu_2 = 6,5$; $\eta_2 = 5$; $k_1 = 0,1$; $k_2 = 0,2$; $\alpha_1 = 0,2$; $\beta_1 = 0,1$; $\beta_2 = 0,2$. После всплеска численности популяций в начальный момент времени (нижние графики), жертва и хищник достаточно быстро восстанавливают свои значения.

Из верхнего левого графика рис. 5 видно, что распределение видов коррелирует с ресурсом $p(x)$. На верхнем правом графике рис. 5 изображены нормированные к ИСР распределения обоих видов, демонстрирующие перераспределение плотностей популяций. Увеличение коэффициента диффузии k_1 приводит к уменьшению плотностей популяций в зоне локального максимума ресурса и их увеличению в районе локального минимума. В этом случае отклонение от ИСР происходит сонаправлено, т. е. хищник «следует» за жертвой.

Картина перераспределения существенно меняется, если рассмотреть возмущение параметра $\beta_2^* = \beta_2 + \varepsilon$, см. рис. 6, где наблюдается разнонаправленное отклонение от ИСР при параметрах: $\mu_1 = 4$; $\eta_1 = 5$; $\mu_2 = 8,5$; $\eta_2 = 5$; $k_1 = 0,1$; $k_2 = 0,2$; $\alpha_1 = 0,2$; $\beta_1 = 0,1$; $\beta_2 = 0,15$.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Математические модели на основе уравнений реакции—диффузии—адвекции активно применяются при прогнозировании экологических и биологических процессов [5, 20]. Для анализа распределения популяций на неоднородных ареалах в основном используются прямые численные расчеты. При этом для ряда задач отмечена корреляция между распределениями видов и ресурсов. Данные сценарии хорошо описываются концепцией идеального свободного распределения, на основе которой получен ряд важных результатов для конкурирующих популяций [18].

В данной работе предложено расширение концепции ИСР на класс систем хищник—жертва с учетом многофакторного таксиса. С использованием концепции ИСР найдены соотношения на параметры, при которых имеются явные стационарные решения для одномерных неоднородных

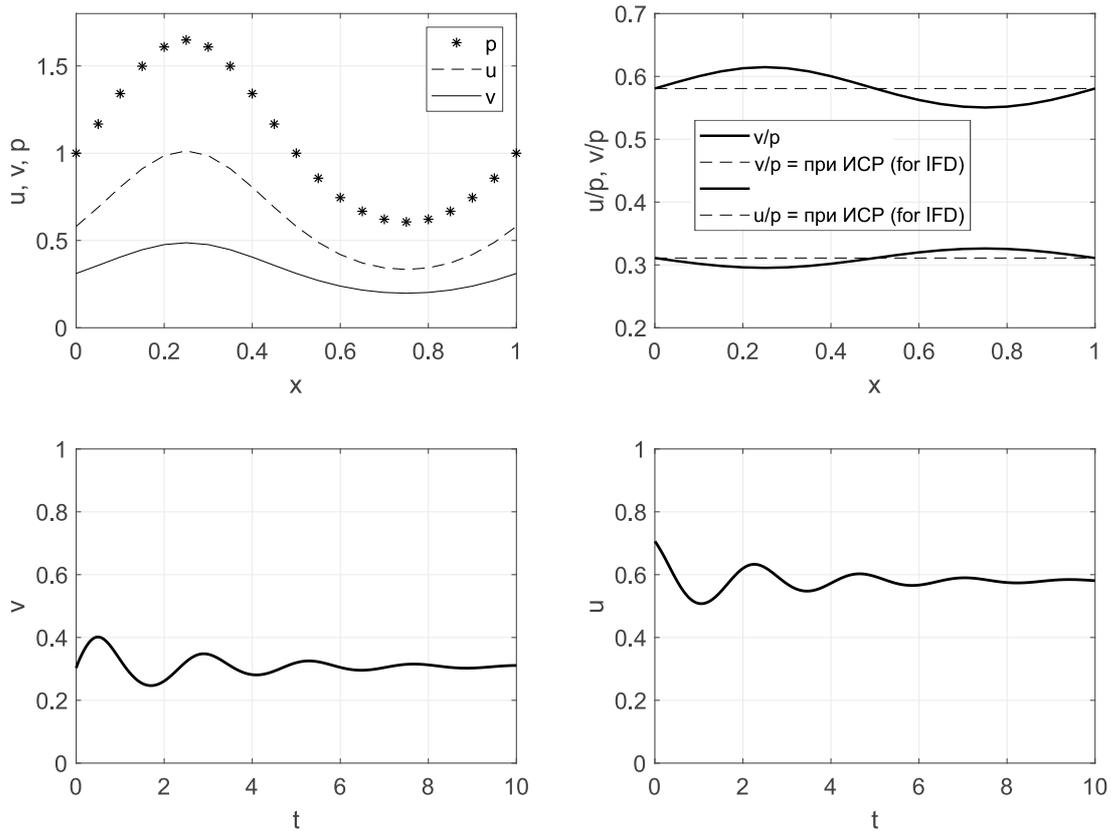


Рис. 6. Графики зависимостей плотностей популяций жертвы u и хищника v от координаты (вверху) и времени (внизу) при $\beta_2 = 0,15$

FIG. 6. Graphs of dependences of population densities of prey u and predator v on coordinate (top) and time (bottom) for $\beta_2 = 0,15$

ареалов. Для анализа распределений видов при отклонениях параметров построены формальные асимптотические разложения задачи Дирихле и задачи с условиями периодичности. Представлены результаты вычислительных экспериментов, иллюстрирующие изменение стационарных решений с ИСР. Изложенный в настоящей работе метод далее будет применен для анализа инвазии в системах хищников и жертв.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Базыкин А. Д. Нелинейная динамика взаимодействующих популяций. — Ижевск: Инст. комп. иссл, 2003.
2. Будянский А. В., Цибулин В. Г. Моделирование многофакторного таксиса в системе «хищник—жертва» // Биофизика. — 2019. — 64, № 2. — С. 343–349.
3. Васильева А. Б., Бутузов В. Ф. Асимптотические методы в теории сингулярных возмущений. — М.: Высшая школа, 1990.
4. Зеленчук П. А., Цибулин В. Г. Идеальное свободное распределение в модели «хищник—жертва» при многофакторном таксисе // Биофизика. — 2021. — 66, № 3. — С. 546–554.
5. Мюррей Дж. Д. Математическая биология. Т. 1. — М.—Ижевск: Инст. комп. иссл., 2011.
6. Найфэ А. Введение в методы возмущений. — М.: Мир, 1984.
7. Ризниченко Г. Ю. Математическое моделирование биологических процессов. Модели в биофизике и экологии. — М.: Юрайт, 2020.
8. Трубецков Д. И. Феномен математической модели Лотки—Вольтерры и сходных с ней // Изв. вузов. Прикл. нелиней. динам. — 2011. — 19, № 2. — С. 69–88.
9. Тютюнов Ю. В., Титова Л. И. От Лотки—Вольтерра к Ардити—Гинзбургу: 90 лет эволюции трофических функций // Журн. общ. биол. — 2018. — 79, № 6. — С. 428–448.

10. Ха Т. Д., Цибулин В. Г. Уравнения диффузии—реакции—адвекции для системы хищник—жертва в гетерогенной среде// Комп. иссл. и модел. — 2021. — 13, № 6. — С. 1161–1176.
11. Ха Т. Д., Цибулин В. Г. Мультистабильность для математической модели динамики хищников и жертв на неоднородном ареале// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2022. — 68, № 3. — С. 509–521.
12. Цибулин В. Г., Ха Т. Д., Зеленчук П. А. Нелинейная динамика системы хищник—жертва на неоднородном ареале и сценарии локального взаимодействия видов// Изв. вузов. Прикл. нелин. динам. — 2021. — 29, № 5. — С. 751–764.
13. Averill I., Lou Y., Munther D. On several conjectures from evolution of dispersal// J. Biol. Dyn. — 2012. — 6, № 2. — С. 117–130.
14. Budyansky A. V., Frischmuth K., Tsybulin V. G. Cosymmetry approach and mathematical modeling of species coexistence in a heterogeneous habitat// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2019. — 24. — С. 547–561.
15. Cantrell R. S., Cosner C. Evolutionary stability of ideal free dispersal under spatial heterogeneity and time periodicity// Math. Biosci. — 2018. — 305. — С. 71–76.
16. Cantrell R. S., Cosner C., DeAngelis D. L., Padron V. The ideal free distribution as an evolutionarily stable strategy// J. Biol. Dyn. — 2007. — 1, № 3. — С. 249–271.
17. Cantrell R. S., Cosner C., Lou Y. Evolution of dispersal and the ideal free distribution// Math. Biosci. Engrg. — 2010. — 7, № 1. — С. 17–36.
18. Cantrell R. S., Cosner C., Martinez S., Torres N. On a competitive system with ideal free dispersal// J. Differ. Equ. — 2018. — 265. — С. 3464–3493.
19. Cosner C. Reaction–diffusion–advection models for the effects and evolution of dispersal// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A. — 2014. — 34, № 5. — С. 1701–745.
20. Cosner C., Cantrell R. Spatial ecology via reaction–diffusion equations. — Chichester: John Wiley & Sons, 2003.
21. Cressman R., Garay G., Křivan V. Ideal free distributions, evolutionary games, and population dynamics in multiple-species environments// American Naturalist. — 2004. — 164, № 4. — С. 473–489.
22. Fretwell S. D., Lucas H. L. On territorial behavior and other factors influencing habitat distribution in birds// Acta Biotheoretica. — 1970. — № 19. — С. 16–36.
23. Ха Т. Д., Цибулин В. Г., Зеленчук П. А. How to model the local interaction in the predator–prey system at slow diffusion in a heterogeneous environment?// Ecol. Complexity. — 2022. — 52. — 101026.
24. Kacelnik A., Krebs J. R., Bernstein C. The ideal free distribution and predator–prey populations// Trends Ecol. Evol. — 1992. — 7. — С. 50–55.
25. Kim K., Choi W. Local dynamics and coexistence of predator–prey model with directional dispersal of predator// Math. Biosci. Engrg. — 2020. — 17. — С. 6737–6755.
26. Schwinning S., Rosenzweig M. L. Periodic oscillations in an ideal-free predator–prey distribution// OIKOS. — 1990. — 59. — С. 85–91.
27. Tyutyunov Y. V., Zagrebneva A. D., Azovsky A. I. Spatiotemporal pattern formation in a prey–predator system: The case study of short-term interactions between diatom microalgae and microcrustaceans// Mathematics. — 2020. — 8, № 7. — С. 1065–1079.

Зеленчук Павел Анатольевич

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: zelenchuk@sfedu.ru

Цибулин Вячеслав Георгиевич

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: vgcibulin@sfedu.ru

UDC 519.63

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-237-249

EDN: ANBXKV

Mathematical model of ideal free distribution in the predator–prey system

P. A. Zelenchuk and V. G. Tsybulin

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

Abstract. We consider a system of reaction–diffusion–advection equations which describes the evolution of spatial distributions of antagonistic populations under directed migration. The concept of an ideal free distribution (IFD) for a predator–prey system is introduced. We find conditions on parameters under which there exist explicit stationary solutions with nonzero densities of both species. The numerical approach with staggered grids is used to analyze solutions in case of violation of the conditions on the coefficients that provide the IFD. We construct asymptotic expansions for an inhomogeneous one-dimensional area and present the results of a computational experiment in the case of violation of the IFD conditions.

Keywords: mathematical ecology, reaction–diffusion–advection equations, predator–prey system.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was carried out in the Southern Federal University with the support of the Russian Science Foundation, grant № 23-21-00221.

For citation: P. A. Zelenchuk, V. G. Tsybulin, “Mathematical model of ideal free distribution in the predator–prey system,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 2, 237–249. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-237-249>

REFERENCES

1. A. D. Bazykin, *Nelineynaya dinamika vzaimodeystvuyushchikh populyatsiy* [Nonlinear Dynamics of Interacting Populations], Inst. Komp. Issl, Izhevsk, 2003 (in Russian).
2. A. V. Budyanskiy and V. G. Tsibulin, “Modelirovanie mnogofaktornogo taksisa v sisteme «khishchnik–zhertva»” [Modeling of multifactorial taxis in the “predator–prey” system], *Biofizika* [Biophysics], 2019, **64**, No. 2, 343–349 (in Russian).
3. A. B. Vasil’eva and V. F. Butuzov, *Asimptoticheskie metody v teorii singulyarnykh vozmushcheniy* [Asymptotic Methods in the Theory of Singular Perturbations], Vysshaya Shkola, Moscow, 1990 (in Russian).
4. P. A. Zelenchuk and V. G. Tsibulin, “Ideal’noe svobodnoe raspredelenie v modeli «khishchnik–zhertva» pri mnogofaktornom taksise” [Ideal free distribution in the “predator–prey” model with multifactor taxis], *Biofizika* [Biophysics], 2021, **66**, No. 3, 546–554 (in Russian).
5. Dzh. D. Myurrey, *Matematicheskaya biologiya. T. 1* [Mathematical Biology. Vol. 1], Inst. Komp. Issl., Moscow–Izhevsk, 2011 (in Russian).
6. A. Nayfeh, *Vvedenie v metody vozmushcheniy* [Introduction to Perturbation Techniques], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
7. G. Yu. Riznichenko, *Matematicheskoe modelirovanie biologicheskikh protsessov. Modeli v biofizike i ekologii* [Mathematical Modeling of Biological Processes. Models in Biophysics and Ecology], Yurayt, Moscow, 2020 (in Russian).
8. D. I. Trubetskov, “Fenomen matematicheskoy modeli Lotki–Vol’terry i skhodnykh s ney” [The phenomenon of the Lotka–Volterra mathematical model and similar], *Izv. vuzov. Prikl. neline. dinam.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Appl. Nonlinear Dyn.], 2011, **19**, No. 2, 69–88 (in Russian).



9. Yu. V. Tyutyunov and L. I. Titova, “Ot Lotki–Volterra k Arditi–Ginzburgu: 90 let evolyutsii troficheskikh funktsiy” [From Lotka–Volterra to Arditi–Ginzburg: 90 years of evolution of trophic functions], *Zhurn. obshch. biol.* [J. Gen. Biol.], 2018, **79**, No. 6, 428–448 (in Russian).
10. T. D. Kha and V. G. Tsibulin, “Uravneniya diffuzii–reaktsii–adveksii dlya sistemy khishchnik–zhertva v geterogennoy srede” [Diffusion–reaction–advection equations for a predator–prey system in a heterogeneous environment], *Komp. issl. i model.* [Comp. Research Model.], 2021, **13**, No. 6, 1161–1176 (in Russian).
11. T. D. Kha and V. G. Tsibulin, “Mul’tistabil’nost’ dlya matematicheskoy modeli dinamiki khishchnikov i zhertv na neodnorodnom areale” [Multistability for a mathematical model of the dynamics of predators and preys in a heterogeneous area], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2022, **68**, No. 3, 509–521 (in Russian).
12. V. G. Tsibulin, T. D. Kha, and P. A. Zelenchuk, “Nelineynaya dinamika sistemy khishchnik–zhertva na neodnorodnom areale i stsenarii lokal’nogo vzaimodeystviya vidov” [Nonlinear dynamics of the predator–prey system in a heterogeneous range and scenarios of local interaction of species], *Izv. vuzov. Prikl. nelin. dinam.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Appl. Nonlinear Dyn.], 2021, **29**, No. 5, 751–764 (in Russian).
13. I. Averill, Y. Lou, and D. Munther, “On several conjectures from evolution of dispersal,” *J. Biol. Dyn.*, 2012, **6**, No. 2, 117–130.
14. A. V. Budyansky, K. Frischmuth, and V. G. Tsybulin, “Cosymmetry approach and mathematical modeling of species coexistence in a heterogeneous habitat,” *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2019, **24**, 547–561.
15. R. S. Cantrell and C. Cosner, “Evolutionary stability of ideal free dispersal under spatial heterogeneity and time periodicity,” *Math. Biosci.*, 2018, **305**, 71–76.
16. R. S. Cantrell, C. Cosner, D. L. DeAngelis, and V. Padron, “The ideal free distribution as an evolutionarily stable strategy,” *J. Biol. Dyn.*, 2007, **1**, No. 3, 249–271.
17. R. S. Cantrell, C. Cosner, and Y. Lou, “Evolution of dispersal and the ideal free distribution,” *Math. Biosci. Engrg.*, 2010, **7**, No. 1, 17–36.
18. R. S. Cantrell, C. Cosner, S. Martinez, and N. Torres, “On a competitive system with ideal free dispersal,” *J. Differ. Equ.*, 2018, **265**, 3464–3493.
19. C. Cosner, “Reaction–diffusion–advection models for the effects and evolution of dispersal,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. A*, 2014, **34**, No. 5, 1701–745.
20. C. Cosner and R. Cantrell, *Spatial ecology via reaction–diffusion equations*, John Wiley & Sons, Chichester, 2003.
21. R. Cressman, G. Garay, V. Křivan, “Ideal free distributions, evolutionary games, and population dynamics in multiple-species environments,” *American Naturalist*, 2004, **164**, No. 4, 473–489.
22. S. D. Fretwell and H. L. Lucas, “On territorial behavior and other factors influencing habitat distribution in birds,” *Acta Biotheoretica*, 1970, No. 19, 16–36.
23. T. D. Ha, V. G. Tsybulin, and P. A. Zelenchuk, “How to model the local interaction in the predator–prey system at slow diffusion in a heterogeneous environment?,” *Ecol. Complexity*, 2022, **52**, 101026.
24. A. Kacelnik, J. R. Krebs, and C. Bernstein, “The ideal free distribution and predator–prey populations,” *Trends Ecol. Evol.*, 1992, **7**, 50–55.
25. K. Kim and W. Choi, “Local dynamics and coexistence of predator–prey model with directional dispersal of predator,” *Math. Biosci. Engrg.*, 2020, **17**, 6737–6755.
26. S. Schwinning and M. L. Rosenzweig, “Periodic oscillations in an ideal-free predator–prey distribution,” *OIKOS*, 1990, **59**, 85–91.
27. Y. V. Tyutyunov, A. D. Zagrebneva, and A. I. Azovsky, “Spatiotemporal pattern formation in a prey–predator system: The case study of short-term interactions between diatom microalgae and microcrustaceans,” *Mathematics*, 2020, **8**, No. 7, 1065–1079.

Pavel A. Zelenchuk

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

E-mail: zelenchuk@sfedu.ru

Vyacheslav G. Tsybulin

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

E-mail: vgcibulin@sfedu.ru

УДК 517.97

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-250-262

EDN: AYDVTN

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ РЕШЕНИЯ СТОХАСТИЧЕСКОЙ МУЛЬТИПЛИКАТИВНО ВОЗМУЩЕННОЙ СИСТЕМЫ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Л. Ю. КАБАНЦОВА

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

Аннотация. Рассматривается задача Коши для линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, коэффициенты которой являются случайными процессами. Получены явные формулы для математического ожидания решения. Рассмотрены примеры систем с гауссовскими и равномерно распределенными случайными коэффициентами. Приведен пример расчетов для упрощенной модели обучения на микроуровне.

Ключевые слова: системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка со случайными коэффициентами, математическое ожидание, вариационная производная, характеристический функционал.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Л. Ю. Кабанцова. Математическое ожидание решения стохастической мультипликативно возмущенной системы дифференциальных уравнений // Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. 69, № 2. С. 250–262. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-250-262>

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим задачу Коши для системы дифференциальных уравнений первого порядка

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \varepsilon_1(t)A \frac{\partial y}{\partial z} + \varepsilon_2(t)y + b(t, z), \quad (1.1)$$

$$y(t_0, z) = y_0(z), \quad (1.2)$$

где $t \in T = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$; t_0 задано; $y : T \times \mathbb{R} \rightarrow Y$ — искомое отображение; $b : T \times \mathbb{R} \rightarrow Y$ — случайный векторный процесс; A — постоянный оператор, действующий в пространстве Y ; Y — конечномерное пространство со скалярным произведением $\langle \cdot, \cdot \rangle$; $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — случайные процессы; $y_0(z)$ — случайный векторный процесс.

Уравнение (1.1) называется *стохастическим мультипликативно возмущенным векторным дифференциальным уравнением*.

Так как уравнение (1.1) содержит случайные процессы, то решение задачи Коши (1.1), (1.2) также является случайным процессом. Для приложений важны статистические характеристики решения — функция распределения, плотность распределения, характеристический функционал или моментные функции. Наиболее важным и одновременно простым является математическое ожидание. Метод сведения стохастической задачи к детерминированному дифференциальному



уравнению с обычными и вариационными производными (см. [1, 3, 7]) оказался эффективным для нахождения моментных функций решений линейных дифференциальных уравнений. В работе [2] получены явные формулы для математического ожидания решения мультипликативно возмущенного векторного дифференциального уравнения в частных производных с одним случайным коэффициентом. В данной работе решается задача нахождения математического ожидания решения задачи (1.1), (1.2) с двумя случайными коэффициентами. Исследуемая задача сводится к детерминированной системе дифференциальных уравнений с обычными и вариационными производными, для которой удастся получить явную формулу решения, и на основе полученной формулы выписать математическое ожидание решения стохастического уравнения с использованием характеристического функционала случайных коэффициентов и неоднородности. В качестве приложений выведены явные формулы математических ожиданий решений с независимыми равномерно распределенными и гауссовскими случайными коэффициентами.

2. ПЕРЕХОД К ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ ЗАДАЧЕ

Пусть $L_1(T)$ — пространство суммируемых функций на отрезке T с нормой $\|v\| = \int_T |v(t)| dt$, $\psi : L_1(T) \rightarrow \mathbb{C}$ — функционал, $h \in L_1(T)$ — приращение переменной v .

Определение 2.1. Если

$$\psi(v + h) - \psi(v) = \int_T \varphi(t, v) h(t) dt + o(h),$$

где $o(h)$ — бесконечно малая высшего порядка относительно h , и интеграл (Лебега) является линейным ограниченным функционалом по переменной h , тогда отображение $\varphi : T \times L_1(T) \rightarrow \mathbb{C}$ называется *вариационной производной функционала ψ в точке v* и обозначается $\frac{\delta\psi(v)}{\delta v(t)}$.

Вариационное дифференцирование аналогично обычному дифференцированию.

Пусть $\varepsilon(t, \omega)$ обозначает случайный процесс [1] (ω — случайное событие). В дальнейшем случайный процесс будем записывать просто как $\varepsilon(t)$, а $E[\varepsilon]$ использовать как обозначение математического ожидания случайного процесса ε .

Определение 2.2 (см. [1, с. 30]). Функционал

$$\psi(v) = E\left[\exp\left(i \int_T \varepsilon(s)v(s) ds\right)\right],$$

где $v \in L_1(T)$, $i = \sqrt{-1}$, называется *характеристическим функционалом случайного процесса ε* .

Отметим, что с помощью характеристического функционала можно находить моментные функции случайного процесса [1], например,

$$\begin{aligned} \frac{\delta\psi(v)}{\delta v(t)} \Big|_{v=0} &= iE[\varepsilon(t)], \\ \frac{\delta^2\psi(v)}{\delta v(t)\delta v(\tau)} \Big|_{v=0} &= -E[\varepsilon(t)\varepsilon(\tau)]. \end{aligned}$$

Будем считать, что процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и b заданы характеристическим функционалом, т. е. считаем известным

$$\psi(v_1, v_2, v_3) = E\left[\exp\left(i \int_T \varepsilon_1(s)v_1(s) ds + i \int_T \varepsilon_2(s)v_2(s) ds + i \iint_{T \times \mathbb{R}} \langle b(s_1, s_2), v_3(s_1, s_2) \rangle ds_2 ds_1\right)\right].$$

Здесь $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначает скалярное произведение в Y .

Введем обозначение

$$w = \exp\left(i \int_T \varepsilon_1(s)v_1(s) ds + i \int_T \varepsilon_2(s)v_2(s) ds + i \iint_{T \times \mathbb{R}} \langle b(s_1, s_2), v_3(s_1, s_2) \rangle ds_2 ds_1\right).$$

Умножим уравнение (1.1) на w и возьмем математическое ожидание полученного равенства. Находим

$$E\left[\frac{\partial y}{\partial t}w\right] = E\left[\varepsilon_1(t)A\frac{\partial y}{\partial z}w\right] + E[\varepsilon_2(t)yw] + E[b(t, z)w]. \quad (2.1)$$

Введем обозначение

$$\tilde{y}(t, z, v_1, v_2, v_3) = E[y(t, z)w].$$

Уравнение (2.1) (формально) можно записать с помощью \tilde{y} . Имеем

$$\frac{\partial \tilde{y}}{\partial t} = -iA\frac{\delta_p}{\delta v_1(t)}\frac{\partial \tilde{y}}{\partial z} - i\frac{\delta_p}{\delta v_2(t)}\tilde{y} - i\frac{\delta_p\psi}{\delta v_3(t, z)}, \quad (2.2)$$

где, например, $\frac{\delta_p\psi}{\delta v_3(t, z)}$ обозначает частную вариационную производную по переменной v_3 .

Будем считать, что случайный процесс y_0 не зависит от случайных процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и b . Умножим начальные условие (1.2) на w и вычислим математическое ожидание полученного равенства; находим

$$E[y(t_0, z)w] = E[y_0(z)w] = E[y_0(z)]E[w] = E[y_0(z)]\psi(v_1, v_2, v_3).$$

Перепишем последнее равенство в виде

$$\tilde{y}(t_0, z, v_1, v_2, v_3) = E[y_0(z)]\psi(v_1, v_2, v_3). \quad (2.3)$$

Определение 2.3. Математическим ожиданием $E[y(t, z)]$ решения задачи Коши (1.1), (1.2) называется $\tilde{y}(t, z, 0, 0, 0)$, где $\tilde{y}(t, z, v_1, v_2, v_3)$ — решение задачи (2.2), (2.3) в некоторой окрестности точки $v_1 = 0, v_2 = 0, v_3 = 0$.

Таким образом, чтобы найти математическое ожидание $E[y(t, z)]$ решения задачи (1.1), (1.2), достаточно найти решение $\tilde{y}(t, z, v_1, v_2, v_3)$ неслучайной (детерминированной) задачи (2.2), (2.3) в малой окрестности точки $v_1 = 0, v_2 = 0, v_3 = 0$.

3. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЯ С ОБЫЧНОЙ И ВАРИАЦИОННОЙ ПРОИЗВОДНЫМИ

Пусть $F_z(g(z))(\xi)$ обозначает преобразование Фурье [6] функции g по переменной z :

$$F_z(g(z))(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} g(z)e^{i\xi z} dz.$$

Применим преобразование Фурье по переменной z к уравнениям (2.2), (2.3), получим

$$\frac{\partial}{\partial t}F_z(\tilde{y}) = -\xi A\frac{\delta_p}{\delta v_1(t)}F_z(\tilde{y}) - i\frac{\delta_p}{\delta v_2(t)}F_z(\tilde{y}) - iF_z\left(\frac{\delta_p\psi(v_1, v_2, v_3)}{\delta v_3(t, z)}\right), \quad (3.1)$$

$$F_z(\tilde{y})(t_0, \xi, v_1, v_2, v_3) = F_z(E[y_0(z)])(\xi)\psi(v_1, v_2, v_3). \quad (3.2)$$

Пусть $\chi(t_0, t, s)$ — функция переменной $s \in \mathbb{R}$, определенная следующим образом: $\chi(t_0, t, s) = \text{sign}(s - t_0)$ при $s \in [\min\{t_0, t\}, \max\{t_0, t\}]$ и $\chi(t_0, t, s) = 0$ при s , не принадлежащих этому отрезку.

Рассмотрим отображение $g_k : L_1(T) \rightarrow \mathbb{R}$

$$g_k(v) = \int_T \dots \int_T B_k(s_1, s_2, \dots, s_k)v(s_1) \dots v(s_k) ds_1 \dots ds_k,$$

где B_k — непрерывная, симметричная по любой паре переменных функция.

Теорема 3.1 (см. [2]). Пусть a — непрерывная на отрезке $[t_0, t_1] = T$ функция и A — линейный оператор, действующий в Y . Тогда существует частная производная по переменной t отображения

$$\Phi_k(t, v) = \int_T \dots \int_T B_k(s_1, s_2, \dots, s_k)(v(s_1)I + a(s_1)\chi(t_0, t, s_1)A) \dots (v(s_k)I + a(s_k)\chi(t_0, t, s_k)A) ds_1 \dots ds_k$$

и справедливо равенство

$$\frac{\partial \Phi_k(t, v)}{\partial t} = a(t)Ak \int_T \dots \int_T B_k(s_1, s_2, \dots, s_{k-1}, t)(v(s_1)I + a(s_1)\chi(t_0, t, s_1)A) \dots \dots (v(s_{k-1})I + a(s_{k-1})\chi(t_0, t, s_{k-1})A) ds_1 \dots ds_{k-1}. \quad (3.3)$$

Доказательство. Пусть Δt — приращение переменной t ; тогда, используя формулу бинома Ньютона и симметричность функции B_k , получаем

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\Delta t}(\Phi_k(t + \Delta t, v) - \Phi_k(t, v)) = \\ & = \frac{1}{\Delta t} \int_T \dots \int_T B_k(s_1, \dots, s_k)[(v(s_1)I + a(s_1)\chi(t_0, t + \Delta t, s_1)A) \dots (v(s_k)I + a(s_k)\chi(t_0, t + \Delta t, s_k)A) - \\ & \quad - (v(s_1)I + a(s_1)\chi(t_0, t, s_1)A) \dots (v(s_k)I + a(s_k)\chi(t_0, t, s_k)A)] ds_1 \dots ds_k = \\ & = \frac{1}{\Delta t} \int_T \dots \int_T B_k(s_1, \dots, s_k) \sum_{m=0}^k C_k^m [(v(s_1)I + a(s_1)\chi(t_0, t, s_1)A) \dots (v(s_{k-m})I + a(s_{k-m})\chi(t_0, t, s_{k-m})A) \times \\ & \quad \times (a(s_{k-m+1})\chi(t, t + \Delta t, s_{k-m+1})) \dots (a(s_k)\chi(t, t + \Delta t, s_k)) - \\ & \quad - (v(s_1)I + a(s_1)\chi(t_0, t, s_1)A) \dots (v(s_k)I + a(s_k)\chi(t_0, t, s_k)A)] ds_1 \dots ds_k = \\ & = \frac{k}{\Delta t} \int_T \dots \int_T B_k(s_1, \dots, s_k)(v(s_1)I + a(s_1)\chi(t_0, t, s_1)A) \dots (v(s_{k-1})I + a(s_{k-1})\chi(t_0, t, s_{k-1})A) \times \\ & \quad \times (a(s_k)\chi(t, t + \Delta t, s_k)A) ds_1 \dots ds_k + \\ & + \frac{1}{\Delta t} \int_T \dots \int_T B_k(s_1, \dots, s_k) \sum_{m=2}^k C_k^m (v(s_1)I + a(s_1)\chi(t_0, t, s_1)A) \dots (v(s_{k-m})I + a(s_{k-m})\chi(t_0, t, s_{k-m})A) \times \\ & \quad \times A^{k-m} a(s_{k-m+1})\chi(t, t + \Delta t, s_{k-m+1}) \dots a(s_k)\chi(t, t + \Delta t, s_k) ds_1 \dots ds_k. \quad (3.4) \end{aligned}$$

Согласно теореме о среднем значении [5, с. 113], для непрерывной функции f

$$\frac{1}{\Delta t} \int_T f(s_k)Aa(s_k)\chi(t, t + \Delta t, s_k) ds_k = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} f(s_k)Aa(s_k) ds_k \rightarrow Aa(t)f(t)$$

при $\Delta t \rightarrow 0$. Переходя к пределу в равенстве (3.4) при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем (3.3). □

Теорема 3.2 (см. [2]). *В условиях теоремы 3.1 существует частная вариационная производная $\frac{\delta_p \Phi_k(t, v)}{\delta v(t)}$ и справедливо равенство*

$$\frac{\delta_p \Phi_k(t, v)}{\delta v(t)} = k \int_T \dots \int_T B_k(s_1, \dots, s_{k-1}, t)(v(s_1)I + a(s_1)\chi(t_0, t, s_1)A) \times \dots (v(s_{k-1})I + a(s_{k-1})\chi(t_0, t, s_{k-1})A) ds_1 \dots ds_{k-1}. \quad (3.5)$$

Доказательство. Пусть h — приращение переменной v , тогда

$$\begin{aligned} & \Phi_k(t, v + h) - \Phi_k(t, v) = \\ & = \int_T \dots \int_T B_k(s_1, \dots, s_k)[(v(s_1)I + a(s_1)\chi(t_0, t, s_1)A + h(s_1)I) \dots (v(s_k)I + \\ & + a(s_k)\chi(t_0, t, s_k)A + h(s_k)I) - (v(s_1)I + a(s_1)\chi(t_0, t, s_1)A) \dots (v(s_k)I + a(s_k)\chi(t_0, t, s_k)A)] ds_1 \dots ds_k = \\ & = k \int_T \dots \int_T B_k(s_1, \dots, s_k)(v(s_1)I + a(s_1)\chi(t_0, t, s_1)A) \dots (v(s_{k-1})I + a(s_{k-1})\chi(t_0, t, s_{k-1})A)h(s_k)I ds_1 \dots ds_k + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_T \dots \int_T B_k(s_1, \dots, s_k) \sum_{m=2}^k C_k^m(v(s_1)I + a(s_1)\chi(t_0, t, s_1)A) \times \\
& \times \dots (v(s_{k-m})I + a(s_{k-m})\chi(t_0, t, s_{k-m}))h(s_{k-m+1}) \dots h(s_k)I ds_1 \dots ds_k. \quad (3.6)
\end{aligned}$$

Последнее слагаемое является бесконечно малой величиной высшего порядка относительно h . Согласно определению вариационной производной из (3.6) следует существование $\frac{\delta_p \Phi(t, v)}{\delta v(t)}$ и ее представление в виде (3.5). \square

Замечание 3.1. Из соотношений (3.3), (3.5) следует, что Φ_k удовлетворяет операторному дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial \Phi_k(t, v)}{\partial t} = a(t)A \frac{\delta_p \Phi_k(t, v)}{\delta v(t)}. \quad (3.7)$$

Пусть теперь $\Phi(t, v) = \sum_{k=0}^{\infty} \Phi_k(t, v)$. Поскольку $\Phi_k, k = 0, 1, \dots$ удовлетворяют уравнению (3.7), то Φ удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial \Phi(t, v)}{\partial t} = a(t)A \frac{\delta_p \Phi(t, v)}{\delta v(t)}.$$

Теорема 3.3. Если функционал $\psi(v_1, v_2, v_3)$ разлагается в ряд

$$\begin{aligned}
\psi(v_1, v_2, v_3) &= \sum_{k=0}^{\infty} \int_T \dots \int_T \psi_{1k}(s_1, \dots, s_k, v_3) v_1(s_1) \dots v_1(s_k) ds_1 \dots ds_k \times \\
& \times \sum_{k=0}^{\infty} \int_T \dots \int_T \psi_{2k}(s_1, \dots, s_k, v_3) v_2(s_1) \dots v_2(s_k) ds_1 \dots ds_k, \quad \psi_{10} = 1, \psi_{20} = 1, \quad (3.8)
\end{aligned}$$

где ψ_{ik} — симметрические по любой паре переменных функции, имеющие вариационные производные по переменной v_3 , то

$$\begin{aligned}
F_z(\tilde{y})(t, \xi, v_1, v_2, v_3) &= \psi(v_1 I - \xi \chi(t_0, t)A, v_2 - i \chi(t_0, t), v_3) F_z(E[y_0])(\xi) - \\
& - i \int_{t_0}^t F_z \left(\frac{\delta_p \psi(v_1 I - \xi \chi(s, t)A, v_2 - i \chi(s, t), v_3)}{\delta v_3(s, z)} \right) ds \quad (3.9)
\end{aligned}$$

является решением задачи (3.1), (3.2).

Доказательство. Легко видеть, что условие (3.2) выполняется. Переменная v_3 в уравнении (3.1) является параметром. Используя теорему 3.2, находим

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial \psi(v_1 I - \xi \chi(t_0, t)A, v_2 - i \chi(t_0, t), v_3)}{\partial t} = \\
& = -\xi A \frac{\delta_p \psi(v_1 I - \xi \chi(t_0, t)A, v_2 - i \chi(t_0, t), v_3)}{\delta v_1(t)} - i \frac{\delta_p \psi(v_1 I - \xi \chi(t_0, t)A, v_2 - i \chi(t_0, t), v_3)}{\delta v_2(t)}.
\end{aligned}$$

Используя это равенство, находим производную по переменной t от функции $F_z(\tilde{y})$, определяемой формулой (3.9)

$$\begin{aligned}
& \frac{\partial F_z(\tilde{y})(t, \xi, v_1, v_2, v_3)}{\partial t} = -\xi A \frac{\delta_p \psi(v_1 I - \xi \chi(t_0, t)A, v_2 - i \chi(t_0, t), v_3)}{\delta v_1(t)} F_z(E[y_0])(\xi) - \\
& - i \frac{\delta_p \psi(v_1 I - \xi \chi(t_0, t)A, v_2 - i \chi(t_0, t), v_3)}{\delta v_2(t)} F_z(E[y_0])(\xi) - i F_z \left(\frac{\delta_p \psi(v_1 I, v_2, v_3)}{\delta v_3(t, z)} \right) + \\
& + i \xi A \int_{t_0}^t F_z \left(\frac{\delta_p^2 \psi(v_1 I - \xi \chi(s, t)A, v_2 - i \chi(s, t), v_3)}{\delta v_1(t) \delta v_3(s, z)} \right) ds - \int_{t_0}^t F_z \left(\frac{\delta_p^2 \psi(v_1 I - \xi \chi(s, t)A, v_2 - i \chi(s, t), v_3)}{\delta v_2(t) \delta v_3(s, z)} \right) ds.
\end{aligned}$$

Кроме того,

$$\frac{\delta_p F_z(\tilde{y})(t, \xi, v_1, v_2, v_3)}{\delta v_1(t)} = \frac{\delta_p \psi(v_1 I - \xi \chi(t_0, t) A, v_2 - i \chi(t_0, t), v_3)}{\delta v_1(t)} F_z(E[y_0])(\xi) -$$

$$- i \int_{t_0}^t F_z \left(\frac{\delta_p^2 \psi(v_1 I - \xi \chi(s, t) A, v_2 - i \chi(s, t), v_3)}{\delta v_1(t) \delta v_3(s, z)} \right) ds,$$

а

$$\frac{\delta_p F_z(\tilde{y})(t, \xi, v_1, v_2, v_3)}{\delta v_2(t)} = \frac{\delta_p \psi(v_1 I - \xi \chi(t_0, t) A, v_2 - i \chi(t_0, t), v_3)}{\delta v_2(t)} F_z(E[y_0])(\xi) -$$

$$- i \int_{t_0}^t F_z \left(\frac{\delta_p^2 \psi(v_1 I - \xi \chi(s, t) A, v_2 - i \chi(s, t), v_3)}{\delta v_1(t) \delta v_3(s, z)} \right) ds.$$

Подстановкой этих выражений в (3.1) убеждаемся, что (3.9) является решением уравнения (3.1). \square

Замечание 3.2. Характеристический функционал $\psi(v_1, v_2, v_3)$ будет удовлетворять условию (3.8), если мы будем предполагать независимость случайных процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2$.

4. МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОЖИДАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1.1), (1.2)

Для нахождения среднего значения решения задачи (1.1), (1.2) нужно найти отображение $\tilde{y}(t, z, v_1, v_2, v_3)$. Это можно сделать, вычислив обратное преобразование Фурье F_ξ^{-1} выражения (3.9). Поскольку преобразование Фурье от произведения равно свертке преобразований Фурье сомножителей [6, с. 154], то

$$\tilde{y}(t, z, v_1, v_2, v_3) = F_\xi^{-1} \psi(v_1 I - \xi \chi(t_0, t) A, v_2 - i \chi(t_0, t), v_3) * E[y_0(z)] -$$

$$- i \int_{t_0}^t F_\xi^{-1} \left(F_z \left(\frac{\delta_p \psi(v_1 I - \xi \chi(s, t) A, v_2 - i \chi(s, t), v_3)}{\delta v_3(s, z)} \right) \right) ds. \quad (4.1)$$

Здесь * обозначает свертку по переменной z .

Теорема 4.1. Если характеристический функционал $\psi(v_1, v_2, v_3)$ разлагается в степенной ряд вида (3.8), то

$$E[y(t, z)] = F_\xi^{-1} \psi(-\xi \chi(t_0, t) A, -i \chi(t_0, t), 0) * E[y_0(z)] - i \int_{t_0}^t F_\xi^{-1} \left(F_z \left(\frac{\delta_p \psi(-\xi \chi(s, t) A, -i \chi(s, t), 0)}{\delta v_3(s, z)} \right) \right) ds$$

$$(4.2)$$

является математическим ожиданием решения задачи (1.1), (1.2).

Доказательство. Поскольку $E[y(t, z)] = \tilde{y}(t, z, 0, 0, 0)$, то утверждение получается подстановкой $v_1 = 0, v_2 = 0, v_3 = 0$ в (4.1). \square

5. СЛУЧАЙ НЕЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ПРОЦЕССОВ $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и b

Пусть случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и b независимы, тогда $\psi(v_1, v_2, v_3) = \psi_{\varepsilon_1}(v_1) \psi_{\varepsilon_2}(v_2) \psi_b(v_3)$, где $\psi_{\varepsilon_1}, \psi_{\varepsilon_2}, \psi_b$ — характеристические функционалы для $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и b , соответственно.

Теорема 5.1. Если случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и b независимы, то

$$E[y(t, z)] = \psi_{\varepsilon_2}(-i \chi(t_0, t)) F_\xi^{-1}(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(t_0, t) A)) * E[y_0(z)] +$$

$$+ \int_{t_0}^t \psi_{\varepsilon_2}(-i \chi(s, t)) F_\xi^{-1}(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(s, t) A)) * E[b(s, z)] ds \quad (5.1)$$

является математическим ожиданием решения задачи (1.1), (1.2).

Доказательство. Поскольку

$$\begin{aligned} \frac{\delta_p \psi(-\xi \chi(s, t)A, -i\chi(s, t), 0)}{\delta v_3(s, z)} &= \psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(s, t)A) \psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(s, t)) \frac{\delta_p \psi_b(0)}{\delta v_3(s, z)} = \\ &= i\psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(s, t)A) \psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(s, t)) E[b(s, z)]. \end{aligned}$$

Тогда в силу теоремы 4.1 среднее значение $E[y(t, z)]$ решения задачи (1.1), (1.2) имеет вид

$$\begin{aligned} E[y(t, z)] &= F_\xi^{-1}(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(t_0, t)A) \psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(t_0, t))) * E[y_0(z)] + \\ &+ \int_{t_0}^t F_\xi^{-1}(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(s, t)A) \psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(s, t))) F_z(E[b(s, z)]) ds = \\ &= \psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(t_0, t)) F_\xi^{-1}(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(t_0, t)A)) * E[y_0(z)] + \\ &+ \int_{t_0}^t \psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(s, t)) F_\xi^{-1}(\psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(s, t)A)) * E[b(s, z)] ds. \end{aligned}$$

□

Замечание 5.1. Отметим, что для нахождения математического ожидания $E[y(t, z)]$ нужно знать характеристические функционалы процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и только математическое ожидание процесса b .

6. ЧАСТНЫЕ СЛУЧАИ

Рассмотрим задачу (1.1), (1.2) с гауссовскими случайными процессами $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, заданные характеристическими функционалами

$$\psi_{\varepsilon_k}(v_k) = \exp \left(i \int_T E[\varepsilon_k(s)] v_k(s) ds - \frac{1}{2} \iint_{TT} b_k(s_1, s_2) v_k(s_1) v_k(s_2) ds_1 ds_2 \right), \quad k = 1, 2, \quad (6.1)$$

где $b_k(s_1, s_2) = E[\varepsilon_k(s_1)\varepsilon_k(s_2)] - E[\varepsilon_k(s_1)]E[\varepsilon_k(s_2)]$, $k = 1, 2$, — ковариационные функции случайных процессов ε_1 и ε_2 , соответственно, и с независимым от ε_1 и ε_2 случайным процессом b .

Используя определение функции $\chi(s, t)$, находим

$$\begin{aligned} \psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(s, t)A) &= \exp \left(i \int_T E[\varepsilon_1(\tau)] (-\xi \chi(s, t, \tau)A) d\tau - \right. \\ &\left. - \frac{1}{2} \iint_{TT} b_1(s_1, s_2) (-\xi \chi(s, t, s_1)A) (-\xi \chi(s, t, s_2)A) ds_1 ds_2 \right) = \\ &= \exp \left(-i\xi \int_s^t E[\varepsilon_1(\tau)] A d\tau - \frac{1}{2} \xi^2 \int_s^t \int_s^t b_1(s_1, s_2) A^2 ds_1 ds_2 \right); \\ \psi_{\varepsilon_2}(-i\chi(s, t)) &= \exp \left(i \int_T E[\varepsilon_2(\tau)] (-i\chi(s, t, \tau)) d\tau - \frac{1}{2} \iint_{TT} b_2(s_1, s_2) (-i\chi(s, t, s_1)) (-i\chi(s, t, s_2)) ds_1 ds_2 \right) = \\ &= \exp \left(\int_s^t E[\varepsilon_2(\tau)] d\tau + \frac{1}{2} \int_s^t \int_s^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right). \end{aligned}$$

Подставим эти выражения в (5.1), получаем следующий результат.

Теорема 6.1. Пусть в задаче (1.1), (1.2) случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ заданы характеристическими функционалами (6.1) и не зависят от случайного процесса b , тогда

$$\begin{aligned}
 E[y(t, z)] = & \exp \left(\int_{t_0}^t E[\varepsilon_2(\tau)] d\tau + \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right) \times \\
 & \times F_\xi^{-1} \left(\exp \left(-i\xi \int_{t_0}^t E[\varepsilon_1(\tau)] A d\tau - \frac{1}{2} \xi^2 \int_{t_0}^t \int_{t_0}^t b_1(s_1, s_2) A^2 ds_1 ds_2 \right) \right) * E[y_0(z)] + \\
 & + \int_{t_0}^t \left\{ \exp \left(\int_s^t E[\varepsilon_2(\tau)] d\tau + \frac{1}{2} \int_s^t \int_s^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right) \times \right. \\
 & \left. \times F_\xi^{-1} \left(\exp \left(-i\xi \int_s^t E[\varepsilon_1(\tau)] A d\tau - \frac{1}{2} \xi^2 \int_s^t \int_s^t b_1(s_1, s_2) A^2 ds_1 ds_2 \right) \right) * E[b(s, z)] \right\} ds. \quad (6.2)
 \end{aligned}$$

является математическим ожиданием решения этой задачи.

Пусть теперь независимые случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$, имеют равномерное распределение с характеристическими функционалами

$$\psi_{\varepsilon_k}(v_k) = \frac{\sin \int a_k(s) v_k(s) ds}{\int a_k(s) v_k(s) ds} \exp \left(i \int E[\varepsilon_k(\tau)] v_k(\tau) d\tau \right) \quad a_k(s) \geq 0, \quad k = 1, 2, \quad (6.3)$$

и независимы от случайного процесса b .

Аналогично, используя определение функции $\chi(s, t)$, находим

$$\begin{aligned}
 \psi_{\varepsilon_1}(-\xi \chi(s, t) A) &= \frac{\sin \xi \int_s^t a_1(\tau) A d\tau}{\xi \int_s^t a_1(\tau) A d\tau} \exp \left(-i\xi \int_s^t E[\varepsilon_1(\tau)] A d\tau \right), \\
 \psi_{\varepsilon_2}(-i \chi(s, t)) &= \frac{\sin i \int_s^t a_2(\tau) d\tau}{i \int_s^t a_2(\tau) d\tau} \exp \left(\int_s^t E[\varepsilon_2(\tau)] d\tau \right).
 \end{aligned}$$

Подставив эти выражения в (5.1), получаем следующий результат.

Теорема 6.2. Пусть в задаче (1.1), (1.2) случайные процессы $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ заданы характеристическими функционалами (6.3) и не зависят от случайного процесса b , тогда

$$\begin{aligned}
 E[y(t, z)] = & \frac{\sin i \int_{t_0}^t a_2(\tau) d\tau}{i \int_{t_0}^t a_2(\tau) d\tau} \exp \left(\int_{t_0}^t E[\varepsilon_2(\tau)] d\tau \right) \times \\
 & \times F_\xi^{-1} \left(\frac{\sin \xi \int_{t_0}^t a_1(\tau) A d\tau}{\xi \int_{t_0}^t a_1(\tau) A d\tau} \exp \left(-i\xi \int_{t_0}^t E[\varepsilon_1(\tau)] A d\tau \right) \right) * E[y_0(z)] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \int_{t_0}^t \frac{\sin i \int_s^t a_2(\tau) d\tau}{i \int_s^t a_2(\tau) d\tau} \exp \left(\int_s^t E[\varepsilon_2(\tau)] d\tau \right) \times \\
& \times F_\xi^{-1} \left(\frac{\sin \xi \int_s^t a_1(\tau) A d\tau}{\xi \int_s^t a_1(\tau) A d\tau} \exp \left(-i\xi \int_s^t E[\varepsilon_1(\tau)] A d\tau \right) \right) * E[b(s, z)] ds \quad (6.4)
\end{aligned}$$

является математическим ожиданием решения этой задачи.

Выражение

$$\frac{\sin \xi \int_{t_0}^t a(\tau) A d\tau}{\xi \int_{t_0}^t a(\tau) A d\tau}$$

обозначает сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1} \left(\xi \int_{t_0}^t a(\tau) A d\tau \right)^{k-1}}{k!}.$$

7. ПРИМЕР: МОДЕЛЬ ОБУЧЕНИЯ НА МИКРОУРОВНЕ

Рассмотрим пример, связанный с уравнением Фёрстера, — математическая модель функционирования системы высшего образования в России [4, 8]. Одной из частных ее составляющих является простейшая модель обучения на микроуровне (или эффективность обучения, например, в студенческой группе).

Прежде чем перейти к рассмотрению изучаемого уравнения, рассмотрим процесс получения дифференциального уравнения, описывающего данную модель. Основные предпосылки модели следующие. Пусть некоторый профессиональный признак (квалификация) для каждого студента меняется по одинаковому закону

$$\frac{dx}{dt} = F(x) + H(t),$$

где x — степень квалификации студента; t — время; $F(x)$ — функция, определяющая возможности студента менять свою квалификацию; $H(t)$ — зависимость, характеризующая взаимодействие студента с обществом (интенсивность внешнего воздействия на студента, направленное на освоение учебных дисциплин).

Пусть $n(t, x)$ — число членов некоторой профессиональной группы, имеющих в данное время t квалификацию в пределах от $x-dx$ до $x+dx$. Рассмотрим предельный случай «абсолютно доброго деканата», когда на протяжении всего времени обучения выбывание из профессиональной группы не происходит. Тогда выполняется закон сохранения

$$\int_0^{\infty} n(t, x) dx = N = \text{const}.$$

Для распределения студентов во времени и по квалификации имеем следующее равенство:

$$\frac{dn}{dt} = \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial n}{\partial x} \frac{dx}{dt} = 0.$$

Тогда для описания эволюции профессиональной группы получаем линейное уравнение вида

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (F(x) + H(t)) \frac{\partial n}{\partial x} = 0.$$

Другой предельный случай — «абсолютно злой деканат», установивший «квоту отлова». В этом случае предыдущее уравнение будет иметь вид

$$\frac{\partial n}{\partial t} + (F(x) + H(t))\frac{\partial n}{\partial x} = -\gamma n.$$

Последнее уравнение связано с уравнением Фёрстера.

Рассмотрим упрощенную модель обучения в студенческой группе двум учебным дисциплинам. Будем предполагать, что $F(x) \equiv 0$. Получаем систему дифференциальных уравнений вида

$$\begin{cases} \frac{\partial n_1}{\partial t} + \varepsilon_1(t) \left(a_{11} \frac{\partial n_1}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial n_2}{\partial x} \right) = -\varepsilon_2(t)n_1, \\ \frac{\partial n_2}{\partial t} + \varepsilon_1(t) \left(a_{21} \frac{\partial n_1}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial n_2}{\partial x} \right) = -\varepsilon_2(t)n_2, \end{cases} \quad (7.1)$$

где $n_i(t, x)$ — число студентов группы, имеющих в данный момент t квалификацию в пределах от $x - dx$ до $x + dx$ по i -й учебной дисциплине, $i = 1, 2$; $\varepsilon_1(t)$ — случайный процесс, $A = \{a_{ij}\}_{i,j=1}^n$ — матрица второго порядка; $\varepsilon_1(t)A$ — характеризует внешнее воздействие на студентов, направленное на освоение учебных дисциплин; $\varepsilon_2(t)$ — случайный процесс, характеризующий «квоту отлова» студентов. Система (7.1) по своему виду схожа с уравнением (1.1). Будем искать решения системы (7.1), удовлетворяющие условиям

$$\begin{aligned} n_1(0, x) &= y_1(x), \\ n_2(0, x) &= y_2(x), \end{aligned} \quad (7.2)$$

где $y_k(x)$, $k = 1, 2$, — случайные процессы, характеризующие начальное число студентов в группе с уровнем квалификации от $x - dx$ до $x + dx$ по k -й учебной дисциплине.

Будем предполагать, что $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ — случайные гауссовские процессы, заданные функционалами вида (6.1)

$$\psi_{\varepsilon_1}(v_1) = \exp \left(i \int_T E[\varepsilon_1(s)]v_1(s)ds - \frac{1}{2} \iint_{TT} b_1(s_1, s_2)v_1(s_1)v_1(s_2)ds_1ds_2 \right),$$

где $E[\varepsilon_1(t)] = m_1 > 0$, а ковариационная функция случайного процесса ε_1 имеет вид $b_1(s_1, s_2) = e^{-\alpha|s_1-s_2|}$;

$$\psi_{\varepsilon_2}(v_2) = \exp \left(i \int_T E[\varepsilon_2(s)]v_2(s)ds - \frac{1}{2} \iint_{TT} b_2(s_1, s_2)v_2(s_1)v_2(s_2)ds_1ds_2 \right),$$

где $E[\varepsilon_2(t)] = m_2 > 0$, а ковариационная функция случайного процесса ε_2 имеет вид $b_2(s_1, s_2) = \frac{\tilde{A}}{1 + \gamma(s_1 - s_2)^2}$.

Пусть матрица коэффициентов A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix},$$

а математическое ожидание начальных условий (7.2) определено как

$$E[y_0(x)] = E \left[\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix} \right] = e^{-2x^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Математическое ожидание решения задачи Коши (7.1), (7.2) будем искать по формуле (6.2) в предположении, что случайный процесс $b(t, z) \equiv 0$. Для нашей задачи формула принимает следующий вид:

$$E[n(t, x)] = \exp \left(- \int_0^t E[\varepsilon_2(\tau)] d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t b_2(s_1, s_2)ds_1ds_2 \right) \times$$

$$\times F_{\xi}^{-1} \left(\exp \left\{ i\xi \int_0^t E[\varepsilon_1(\tau)] A d\tau - \frac{1}{2} \xi^2 \int_0^t \int_0^t b_1(s_1, s_2) A^2 ds_1 ds_2 \right\} \right) * E[y_0(x)].$$

Однако с вычислительной точки зрения удобнее использовать формулу вида:

$$E[n(t, x)] = \exp \left(- \int_0^t E[\varepsilon_2(\tau)] d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right) \times \\ \times F_{\xi}^{-1} \left(\exp \left\{ i\xi \int_0^t E[\varepsilon_1(\tau)] A d\tau - \frac{1}{2} \xi^2 \int_0^t \int_0^t b_1(s_1, s_2) A^2 ds_1 ds_2 \right\} F_z(E[y_0(x)])(\xi) \right). \quad (7.3)$$

Проведем предварительные вычисления:

$$\int_0^t \int_0^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 = \int_0^t \int_0^t \frac{\tilde{A}}{1 + \gamma(s_1 - s_2)^2} ds_1 ds_2 = \frac{2\tilde{A}}{\gamma} \left[t \operatorname{arctg} \sqrt{\gamma} t - \ln \sqrt{1 + \gamma t^2} \right]; \\ \exp \left(- \int_0^t E[\varepsilon_2(\tau)] d\tau + \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^t b_2(s_1, s_2) ds_1 ds_2 \right) = \exp \left(-m_2 t + \frac{\tilde{A}}{\gamma} \left[t \operatorname{arctg} \sqrt{\gamma} t - \ln \sqrt{1 + \gamma t^2} \right] \right) = \\ = (1 + \gamma t^2)^{-\frac{\tilde{A}}{2\gamma}} \exp \left(-m_2 t + \frac{\tilde{A} t}{\gamma} \operatorname{arctg} \sqrt{\gamma} t \right); \quad (7.4)$$

$$\int_0^t \int_0^t b_1(s_1, s_2) ds_1 ds_2 = \int_0^t \int_0^t e^{-\alpha|s_1 - s_2|} ds_1 ds_2 = \frac{2}{\alpha^2} (e^{-\alpha t} - 1); \\ i\xi \int_0^t E[\varepsilon_1(\tau)] A d\tau - \frac{1}{2} \xi^2 \int_0^t \int_0^t b_1(s_1, s_2) A^2 ds_1 ds_2 = -i\xi m_1 t A - \frac{1}{\alpha^2} \xi^2 (e^{-\alpha t} - 1) A^2 = \\ = \begin{pmatrix} 2im_1 \xi t - 4 \frac{\xi^2}{\alpha^2} (e^{-\alpha t} - 1) & im_1 \xi t - 4 \frac{\xi^2}{\alpha^2} (e^{-\alpha t} - 1) \\ 0 & 2im_1 \xi t - 4 \frac{\xi^2}{\alpha^2} (e^{-\alpha t} - 1) \end{pmatrix}.$$

Найдем экспоненту полученной матрицы:

$$\exp \left(i\xi \int_0^t E[\varepsilon_1(\tau)] A d\tau - \frac{1}{2} \xi^2 \int_0^t \int_0^t b_1(s_1, s_2) A^2 ds_1 ds_2 \right) = \\ = e^{2im_1 \xi t - 4 \frac{\xi^2}{\alpha^2} (e^{-\alpha t} - 1)} \begin{pmatrix} 1 & im_1 \xi t - 4 \frac{\xi^2}{\alpha^2} (e^{-\alpha t} - 1) \\ 0 & 1 \end{pmatrix}; \\ F_z(E[y_0(x)])(\xi) = \sqrt{2\pi} e^{-1/8\xi^2} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\exp \left(i\xi \int_0^t E[\varepsilon_1(\tau)] A d\tau - \frac{1}{2} \xi^2 \int_0^t \int_0^t b_1(s_1, s_2) A^2 ds_1 ds_2 \right) F_z(E[y_0(x)])(\xi) = \\ = \sqrt{2\pi} e^{2im_1 \xi t - 4 \frac{\xi^2}{\alpha^2} (e^{-\alpha t} - 1) - \frac{1}{8}\xi^2} \begin{pmatrix} im_1 \xi t - 4 \frac{\xi^2}{\alpha^2} (e^{-\alpha t} - 1) \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Найдем обратное преобразование Фурье от последнего выражения и подставим полученный результат и значение из (7.4) в формулу (7.3). Окончательно получаем

$$E[n_1(t, x)] = -\frac{8\alpha^5(1 + \gamma t^2)^{-\frac{\tilde{A}}{2\gamma}}}{(\alpha^2 + 32(e^{-\alpha t} - 1))^{5/2}} \exp\left(\frac{-2\alpha^2(x - 2m_1 t)^2}{\alpha^2 + 32(e^{-\alpha t} - 1)} - m_2 t + \frac{\tilde{A}t}{\gamma} \arctg \sqrt{\gamma t}\right) \times \\ \times \left[\frac{4}{\alpha^2}(e^{-\alpha t} - 1) \left(1 + \frac{32}{\alpha^2}(e^{-\alpha t} - 1)\right) + (2m_1 t - x) \left(m_1 t + \frac{16}{\alpha^2}(e^{-\alpha t} - 1)x\right) \right], \\ E[n_2(t, x)] = \frac{2\alpha(1 + \gamma t^2)^{-\frac{\tilde{A}}{2\gamma}}}{\sqrt{\alpha^2 + 32(e^{-\alpha t} - 1)}} \exp\left(\frac{-2\alpha^2(x - 2m_1 t)^2}{\alpha^2 + 32(e^{-\alpha t} - 1)} - m_2 t + \frac{\tilde{A}t}{\gamma} \arctg \sqrt{\gamma t}\right).$$

8. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Реальные динамические системы подвержены случайным возмущениям, которые можно учитывать в математических моделях, коэффициенты которых являются случайными процессами. В данной статье получены формулы для математического ожидания решения линейных систем дифференциальных уравнений первого порядка в частных производных со случайными коэффициентами. Явные формулы математического ожидания решений дифференциальных уравнений позволят провести анализ качественного поведения системы. Для ее применения достаточно знать характеристические функционалы процессов $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ и только математическое ожидание процесса b . Были рассмотрены наиболее распространенные варианты, когда ψ_{ε_1} и ψ_{ε_2} определяют гауссовы и равномерно распределенные случайные процессы ε_1 и ε_2 , соответственно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Задорожний В. Г.* Методы вариационного анализа. — М.—Ижевск: РХД, 2006.
2. *Задорожний В. Г., Кабанцова Л. Ю.* О решении линейных систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка // *Соврем. мат. Фундам. направл.* — 2021. — 67, № 3. — С. 549–563.
3. *Задорожний В. Г., Коновалова М. А.* Мультипликативно возмущенное случайным шумом дифференциальное уравнение в банаховом пространстве // *Соврем. мат. Фундам. направл.* — 2017. — 63, № 4. — С. 599–614.
4. *Капица С. П., Курдюмов С. П., Малинецкий Г. Г.* Синергетика и прогнозы будущего. — М.: УРСС, 2003.
5. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. Т. II. — М.: Наука, 1970.
6. *Шилов Г. Е.* Математический анализ. Второй специальный курс. — М.: Физматлит, 1965.
7. *Zadorozhniy V. G., Semenov M. E., Selavesyuk N. T., Ulshin I. I., Nozhkin V. S.* Statistical characteristics of solutions of the system of the stochastic transfer model // *Math. Models Comput. Simul.* — 2021. — 13, № 1. — С. 11–25.
8. *Akhromeeva T. S.* Higher education as an object of mathematical modeling // *Phystech J.* — 1997. — 3, № 2. — С. 115–145.

Л. Ю. Кабанцова

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: dlju@yandex.ru

UDC 517.97

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-250-262

EDN: AYDVTN

Mathematical expectation of the solution of a stochastic multiplicatively perturbed system of differential equations

L. Yu. Kabantsova

Abstract. We consider the Cauchy problem for a first-order linear inhomogeneous system of partial differential equations with random processes as coefficients. Explicit formulas for the mathematical expectation of the solution are obtained. Examples of systems with Gaussian and uniformly distributed random coefficients are considered. An example of calculations for a simplified learning model at the microlevel is given.

Keywords: first-order systems of partial differential equations with random coefficients, mathematical expectation, variational derivative, characteristic functional.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare that no financial support was received.

For citation: L. Yu. Kabantsova, “Mathematical expectation of the solution of a stochastic multiplicatively perturbed system of differential equations,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 2, 250–262. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-250-262>

REFERENCES

1. V. G. Zadorozhniy, *Metody variatsionnogo analiza* [Methods of Variational Analysis], RKhD, Moscow–Izhevsk, 2006 (in Russian).
2. V. G. Zadorozhniy and L. Yu. Kabantsova, “O reshenii lineynykh sistem differentsial’nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh pervogo poryadka” [On solution of first-order linear systems of partial differential equations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2021, **67**, No. 3, 549–563 (in Russian).
3. V. G. Zadorozhniy and M. A. Konovalova, “Mul’tiplikativno vozmushchennoe sluchaynym shumom differentsial’noe uravnenie v banakhovom prostranstve” [Differential equations in Banach spaces multiplicatively perturbed by random noise], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2017, **63**, No. 4, 599–614 (in Russian).
4. S. P. Kapitsa, S. P. Kurdyumov, and G. G. Malinetskiy, *Sinergetika i prognozy budushchego* [Synergetics and Future Forecasts], URSS, Moscow, 2003 (in Russian).
5. G. M. Fikhtengol’ts, *Kurs differentsial’nogo i integral’nogo ischisleniya. T. II* [Course in Differential and Integral Calculus. Vol. II], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
6. G. E. Shilov, *Matematicheskiiy analiz. Vtoroy spetsial’nyy kurs* [Mathematical Analysis. Second Special Course], Fizmatlit, Moscow, 1965 (in Russian).
7. V. G. Zadorozhniy, M. E. Semenov, N. T. Selavesyuk, I. I. Ulshin, and V. S. Nozhkin, “Statistical characteristics of solutions of the system of the stochastic transfer model,” *Math. Models Comput. Simul.*, 2021, **13**, No. 1, 11–25.
8. T. S. Akhromeeva, “Higher education as an object of mathematical modeling,” *Phystech J.*, 1997, **3**, No. 2, 115–145.

L. Yu. Kabantsova
Voronezh State University, Voronezh, Russia
E-mail: dlju@yandex.ru



УДК 517.926

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-263-275

EDN: APCXKP

СЕМЕЙСТВО КУСОЧНО-ГЛАДКИХ РЕШЕНИЙ ОДНОГО КЛАССА ПРОСТРАНСТВЕННО-РАСПРЕДЕЛЕННЫХ УРАВНЕНИЙ

С. А. КАЩЕНКО, Д. С. КОСТЕРИН, С. Д. ГЛЫЗИН

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия

Аннотация. В работе рассматривается пространственно-распределенное уравнение с периодическим краевым условием и условием нулевого по пространственной переменной интегрального среднего. Рассматриваемая краевая задача имеет семейство кусочно-постоянных по пространственной переменной решений с одной точкой разрыва. Определены условия устойчивости таких решений. Показано существование кусочно-постоянных решений, имеющих более одной точки разрыва. Представлен алгоритм вычисления решений краевой задачи численными методами. Выполнен численный анализ динамики краевой задачи.

Ключевые слова: эволюционные пространственно распределенные уравнения, кусочно-постоянные решения, устойчивость, кластерная синхронизация.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда № 22-11-00209, <https://rscf.ru/project/22-11-00209/>.

Для цитирования: С. А. Кащенко, Д. С. Костерин, С. Д. Глызин. Семейство кусочно-гладких решений одного класса пространственно-распределенных уравнений // Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. 69, № 2. С. 263–275. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-263-275>

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим пространственно-распределенное уравнение

$$\frac{\partial \xi}{\partial t} = \xi - \beta(\xi^2 - M(\xi^2)) - (1 - \beta)(\xi^3 - M(\xi^3)), \quad (1.1)$$

где $\beta \in [0, 1]$, а $\xi = \xi(t, x)$ при каждом $t \geq 0$ представляет собой кусочно-гладкую по пространственной переменной x функцию

$$M(\xi) = \int_0^1 \xi(t, x) dx.$$

Уравнение (1.1) рассматривается с периодическим краевым условием

$$\xi(t, x + 1) = \xi(t, x) \quad (1.2)$$

и дополнительным условием нулевого по пространственной переменной среднего

$$M(\xi) = 0. \quad (1.3)$$

Коротко опишем модели, при анализе которых появляется краевая задача (1.1)–(1.3). В первую очередь отметим работы, в которых исследуется динамика уравнений и систем уравнений с большим коэффициентом запаздывания из оптоэлектроники [5, 7–9]. При изучении локальной динамики этих моделей характеристический квазиполином системы, линеаризованной на ее состоянии равновесия, имеет бесконечно много корней, которые стремятся к мнимой оси при увеличении коэффициента запаздывания. Тем самым, реализуется критический случай бесконечной размерности в задаче об устойчивости состояния равновесия. В [5] был разработан асимптотический алгоритм построения системы первого приближения для решений таких моделей. Этот алгоритм основывается на переходе к уравнениям в частных производных. Как оказывается, расположение корней характеристического квазиполинома определяет и граничные условия для построенных уравнений в частных производных. Такими граничными условиями являются как периодические, так и антипериодические граничные условия, а также периодические и антипериодические краевые условия с дополнительным условием равенства нулю среднего значения решений уравнения в частных производных. Нелокальная динамика краевой задачи (1.1)–(1.3) определяет поведение решений исходной динамической системы с начальными условиями из некоторой достаточно малой окрестности состояния равновесия.

Источником такого типа граничных условий являются также сингулярно возмущенные задачи параболического типа [2, 3]. В них уравнение первого приближения содержит произвольный параметр в качестве множителя при старшей пространственной производной. Поэтому возникает задача исследования в том числе уравнений без производных по пространству, но с граничными условиями, включающими условие равенства нулю среднего значения решений и с нелинейными слагаемыми в уравнении первого приближения, которые получаются путем усреднения по пространственной переменной.

Также отметим, что уравнения с комплексными переменными аналогичного задаче (1.1)–(1.2) вида возникают при исследовании полностью связанных систем генераторов (см. [1, 4, 6]), при этом в дополнение к ним может понадобиться условие (1.3) нулевого среднего. В случае стремления числа взаимодействующих генераторов к бесконечности получается непрерывная модель такого же типа, что и краевая задача (1.1)–(1.3).

В работе исследуется динамика решений краевой задачи (1.1)–(1.3) при различных значениях параметра β . Доказано существование семейства кусочно-постоянных решений краевой задачи. Рассматривается вопрос о так называемой α -устойчивости этих решений. Для иллюстрации результатов аналитического исследования задачи (1.1)–(1.3) ее решения строятся численными методами.

2. СУЩЕСТВОВАНИЕ КУСОЧНО-ПОСТОЯННЫХ РЕШЕНИЙ С ОДНОЙ ТОЧКОЙ РАЗРЫВА

В данном разделе статьи обратимся к проблеме существования кусочно-постоянных решений краевой задачи (1.1)–(1.3). В связи с этим отметим, что для поиска таких решений достаточно выполнения условий (1.1)–(1.2). Свойство (1.3) получается, если проинтегрировать от 0 до 1 по пространственной переменной уравнение (1.1), учесть условие (1.2) и равенство нулю производной по времени.

Рассмотрим случай $\beta = 1$, при котором уравнение (1.1) содержит только квадратичную нелинейность. Покажем, что при выполнении этого условия существует однопараметрическое семейство кусочно-постоянных решений.

Представим искомую функцию в виде

$$\xi(t, x) = \begin{cases} a, & 0 \leq x < \alpha, \\ b, & \alpha \leq x < 1, \end{cases} \quad (2.1)$$

где a, b, α — некоторые ненулевые постоянные, причем $a \neq b$ и $\alpha \in (0, 1)$. Для функции (2.1) полагаем выполненным условие (1.2) периодичности по пространственной переменной.

Подставим (2.1) в (1.1), тогда на интервале $0 \leq x < \alpha$ получаем равенство

$$a - (a^2 - (\alpha a^2 + (1 - \alpha)b^2)) = 0,$$

а на интервале $\alpha \leq x < 1$ имеем

$$b - (b^2 - (\alpha a^2 + (1 - \alpha)b^2)) = 0.$$

Вычитая равенства друг из друга, получаем $(a - b)(1 - a - b) = 0$. Учитывая, что $a \neq b$, имеем $a + b = 1$. Если теперь сложить первое из равенств, умноженное на α , со вторым, умноженным на $1 - \alpha$, то получим соотношение $\alpha a + b(1 - \alpha) = 0$, которое представляет собой условие (1.3) нулевого среднего для решения (2.1). Тем самым, при фиксированном α можно определить числа a и b в формуле (2.1)

$$a = \frac{1 - \alpha}{1 - 2\alpha}, \quad b = \frac{\alpha}{1 - 2\alpha}.$$

Заметим, что при $\alpha = \frac{1}{2}$ функции вида (2.1) не существует.

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 2.1. *Краевая задача (1.1)–(1.3) при $\beta = 1$ имеет семейство зависящих от параметра $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha \neq \frac{1}{2}$, кусочно-постоянных по пространственной переменной x решений вида*

$$\xi(t, x) = \begin{cases} \frac{1 - \alpha}{1 - 2\alpha}, & 0 \leq x < \alpha, \\ -\frac{\alpha}{1 - 2\alpha}, & \alpha \leq x < 1. \end{cases} \quad (2.2)$$

Аналогичным образом рассматриваются случаи $\beta = 0$ и $\beta \in (0, 1)$. В связи с этим можно сформулировать следующие два утверждения.

Лемма 2.2. *Краевая задача (1.1)–(1.3) при $\beta = 0$ имеет два семейства зависящих от параметра $\alpha \in (0, 1)$ кусочно-постоянных по пространственной переменной x решений вида*

$$\xi(t, x) = \begin{cases} \pm \frac{1 - \alpha}{\sqrt{1 - 3\alpha + 3\alpha^2}}, & 0 \leq x < \alpha, \\ \mp \frac{\alpha}{\sqrt{1 - 3\alpha + 3\alpha^2}}, & \alpha \leq x < 1. \end{cases} \quad (2.3)$$

Лемма 2.3. *Краевая задача (1.1)–(1.3) при $\beta \neq 0$ и $\beta \neq 1$ имеет два семейства кусочно-постоянных по пространственной переменной x решений вида*

$$\xi(t, x) = \begin{cases} a(\alpha), & 0 \leq x < \alpha, \\ b(\alpha), & \alpha \leq x < 1, \end{cases} \quad (2.4)$$

где

$$\begin{aligned} a(\alpha) &= \frac{-\beta(1 - \alpha)(1 - 2\alpha) \pm (1 - \alpha)D}{2(1 - \beta)(1 - 3\alpha + 3\alpha^2)}, \\ b(\alpha) &= \frac{\alpha\beta(1 - 2\alpha) \mp \alpha D}{2(1 - \beta)(1 - 3\alpha + 3\alpha^2)}, \\ D &= \sqrt{\beta^2(1 - 2\alpha)^2 + 4(1 - \beta)(1 - 3\alpha + 3\alpha^2)}. \end{aligned} \quad (2.5)$$

Результаты данной части работы могут быть обобщены, если промежутки постоянства функции (2.1) заменить произвольным измеримым подмножеством отрезка $[0, 1]$. Очевидно, что результаты лемм 2.1–2.3 не зависят от вида множеств, на которых функция принимает значения a и b , а зависят только от меры этих множеств. Если положить

$$\xi(t, x) = \begin{cases} a, & x \in E, \\ b, & x \in [0, 1] \setminus E, \end{cases} \quad (2.6)$$

где $E \subset [0, 1]$, $\text{mes } E = \alpha$, то формулировки лемм 2.1–2.3 сохранятся в прежнем виде. Вместе с тем, представление в форме (2.1) более наглядно, кроме того, для решений такого вида можно ввести свойство α -устойчивости и исследовать построенные решения на наличие или отсутствие этого свойства.

3. α -УСТОЙЧИВОСТЬ КУСОЧНО ПОСТОЯННЫХ РЕШЕНИЙ

Определим понятие α -устойчивого кусочно-постоянного решения.

Пусть $\alpha_0 = 0 < \alpha_1 < \alpha_2 < \dots < \alpha_{k+1} = 1$ и

$$\xi_*(x) = \{\rho_j \text{ при } x \in [\alpha_j, \alpha_{j+1}), j = 0, \dots, k\}$$

является кусочно-постоянным решением краевой задачи (1.1). Рассмотрим решения этой краевой задачи с «близкими» к $\xi_*(x)$ начальными условиями

$$\xi(t_0, x) = \{\rho_j + \xi_j(x) \text{ при } x \in [\alpha_j, \alpha_{j+1}), j = 0, \dots, k\}.$$

Назовем решение $\xi_*(x)$ краевой задачи (1.1) α -устойчивым по Ляпунову, если для каждого $\varepsilon > 0$ найдётся такое $\delta > 0$, что из условия $\max_x \sum_{j=1}^k |\xi_j(x)| < \delta$ следует неравенство $\max_x |\xi(t, x) - \xi_*(x)| < \varepsilon$ при всех $t \geq t_0$.

Если при этом $\lim_{t \rightarrow \infty} \max_x |\xi(t, x) - \xi_*(x)| = 0$, то решение $\xi_*(x)$ будем называть *асимптотически α -устойчивым*.

Из указанных определений вытекает, что вопрос об α -устойчивости решения на отрезке $[0, 1]$ можно условно разбить на изучение асимптотической устойчивости отдельно на каждом из промежутков (α_j, α_{j+1}) . Кроме того, справедлива теорема Ляпунова об устойчивости по первому приближению.

Аналогично можно ввести понятие α -неустойчивости. Понятно, что из α -неустойчивости следует неустойчивость решения.

Рассмотрим устойчивость представленных в леммах 2.1–2.3 кусочно-постоянных решений. В случае квадратичной нелинейности ($\beta = 1$) выполнено следующее утверждение.

Теорема 3.1. Для любого $\alpha \in (0, 1)$, $\alpha \neq \frac{1}{2}$, решение вида (2.2) краевой задачи (1.1)–(1.3) является неустойчивым.

Доказательство. Представим решение краевой задачи в виде

$$\xi(t, x) = \begin{cases} \frac{1-\alpha}{1-2\alpha} + \xi_1, & 0 \leq x < \alpha, \\ -\frac{\alpha}{1-2\alpha} + \xi_2, & \alpha \leq x < 1, \end{cases} \quad (3.1)$$

где $\xi_i = \xi_i(t, x)$, $i = 1, 2$ удовлетворяют условию

$$\int_0^\alpha \xi_1(t, x) dx + \int_\alpha^1 \xi_2(t, x) dx = 0. \quad (3.2)$$

Тем самым функция (3.1) удовлетворяет условию (1.3).

Подставляя (3.1) в уравнение (1.1) и отбрасывая слагаемые более высокого порядка малости, получаем систему дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} &= -\frac{1}{1-2\alpha} \xi_1 + \frac{2(1-\alpha)}{1-2\alpha} \int_0^\alpha \xi_1 dx - \frac{2\alpha}{1-2\alpha} \int_\alpha^1 \xi_2 dx, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial t} &= \frac{1}{1-2\alpha} \xi_2 + \frac{2(1-\alpha)}{1-2\alpha} \int_0^\alpha \xi_1 dx - \frac{2\alpha}{1-2\alpha} \int_\alpha^1 \xi_2 dx. \end{aligned}$$

Используя условие (3.2), получаем два независимых уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} &= -\frac{1}{1-2\alpha} \xi_1 + \frac{2}{1-2\alpha} \int_0^\alpha \xi_1 dx, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial t} &= \frac{1}{1-2\alpha} \xi_2 - \frac{2}{1-2\alpha} \int_\alpha^1 \xi_2 dx. \end{aligned} \tag{3.3}$$

В системе (3.3) проинтегрируем первое уравнение по x от 0 до α , а второе от α до 1. Получим уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\alpha \xi_1(t, x) dx = - \int_0^\alpha \xi_1(t, x) dx, \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_\alpha^1 \xi_2(t, x) dx = - \int_\alpha^1 \xi_2(t, x) dx,$$

решения которых имеют вид

$$\int_0^\alpha \xi_1(t, x) dx = A_0 e^{-t}, \quad \int_\alpha^1 \xi_2(t, x) dx = B_0 e^{-t}.$$

Подставляя найденные интегралы в (3.3), получим два линейных неоднородных уравнения, решения которых

$$\xi_1(t, x) = A(x) e^{-\frac{t}{1-2\alpha}} + \frac{A_0}{\alpha} e^{-t}, \quad \xi_2(t, x) = B(x) e^{\frac{t}{1-2\alpha}} + \frac{B_0}{1-\alpha} e^{-t}$$

не стремятся к нулю одновременно ни при каких $\alpha \neq \frac{1}{2}$. □

Рассмотрим теперь случай кубической нелинейности ($\beta = 0$).

Теорема 3.2. Пусть $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{2}{3}$. Тогда решение вида (2.3) краевой задачи (1.1)–(1.3) асимптотически α -устойчиво.

Доказательство. Представим решение краевой задачи в виде

$$\xi(t, x) = \begin{cases} \pm \frac{1-\alpha}{\sqrt{1-3\alpha+3\alpha^2}} + \xi_1, & 0 \leq x < \alpha, \\ \mp \frac{1-\alpha}{\sqrt{1-3\alpha+3\alpha^2}} + \xi_2, & \alpha \leq x < 1, \end{cases} \tag{3.4}$$

где $\xi_i = \xi_i(t, x)$, $i = 1, 2$ удовлетворяют условию

$$\int_0^\alpha \xi_1(t, x) dx + \int_\alpha^1 \xi_2(t, x) dx = 0. \tag{3.5}$$

Подставим (3.4) в уравнение (1.1) и отбросим слагаемые более высокого порядка малости. Получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} &= \frac{-2+3\alpha}{1-3\alpha+3\alpha^2} \xi_1 + \frac{3(1-\alpha)^2}{1-3\alpha+3\alpha^2} \int_0^\alpha \xi_1 dx + \frac{3\alpha^2}{1-3\alpha+3\alpha^2} \int_\alpha^1 \xi_2 dx, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial t} &= \frac{1-3\alpha}{1-3\alpha+3\alpha^2} \xi_2 + \frac{3(1-\alpha)^2}{1-3\alpha+3\alpha^2} \int_0^\alpha \xi_1 dx + \frac{3\alpha^2}{1-3\alpha+3\alpha^2} \int_\alpha^1 \xi_2 dx, \end{aligned}$$

тогда из условия (3.5) получаем

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi_1}{\partial t} &= \frac{-2+3\alpha}{1-3\alpha+3\alpha^2} \xi_1 + \frac{3-6\alpha}{1-3\alpha+3\alpha^2} \int_0^\alpha \xi_1 dx, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial t} &= \frac{1-3\alpha}{1-3\alpha+3\alpha^2} \xi_2 + \frac{6\alpha-3}{1-3\alpha+3\alpha^2} \int_\alpha^1 \xi_2 dx.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Как и в предыдущем случае, проинтегрируем первое уравнение системы (3.6) по x от 0 до α , а второе от α до 1. Получим уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\alpha \xi_1(t, x) dx = -2 \int_0^\alpha \xi_1(t, x) dx, \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_\alpha^1 \xi_2(t, x) dx = -2 \int_\alpha^1 \xi_2 dx,$$

решения которых равны

$$\int_0^\alpha \xi_1(t, x) dx = A_0 e^{-2t}, \quad \int_\alpha^1 \xi_2(t, x) dx = B_0 e^{-2t}.$$

Подставив найденные интегралы в систему (3.6), получим два линейных неоднородных уравнения, решения которых

$$\xi_1(t, x) = A(x) e^{\frac{-2+3\alpha}{1-3\alpha+3\alpha^2} t} + \frac{A_0}{\alpha} e^{-2t}, \quad \xi_2(t, x) = B(x) e^{\frac{1-3\alpha}{1-3\alpha+3\alpha^2} t} + \frac{B_0}{1-\alpha} e^{-2t}$$

стремятся к нулю одновременно при $\frac{1}{3} < \alpha < \frac{2}{3}$. При $\alpha = \frac{1}{3}$ и $\alpha = \frac{2}{3}$ из этих же формул следует α -устойчивость по Ляпунову ступенчатого решения. \square

В случае произвольного β аналогично предыдущим случаям построим линеаризованную систему обыкновенных дифференциальных уравнений. Представим решение задачи в виде

$$\xi(t, x) = \begin{cases} a(\alpha) + \xi_1, & 0 \leq x < \alpha, \\ b(\alpha) + \xi_2, & \alpha \leq x < 1, \end{cases}\tag{3.7}$$

где $a(\alpha)$, $b(\alpha)$ определены по формуле (2.5), $\xi_j = \xi_j(t, x)$, $j = 1, 2$, а ξ_j удовлетворяют условию

$$\int_0^\alpha \xi_1(t, x) dx + \int_\alpha^1 \xi_2(t, x) dx = 0.\tag{3.8}$$

Подставив (3.7) в (1.1) и отбросив слагаемые более высокого порядка малости, приходим к системе

$$\begin{aligned}\frac{\partial \xi_1}{\partial t} &= a_1(\alpha) \xi_1 + b_1(\alpha) \int_0^\alpha \xi_1 dx + b_2(\alpha) \int_\alpha^1 \xi_2 dx, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial t} &= a_2(\alpha) \xi_1 + b_1(\alpha) \int_0^\alpha \xi_1 dx + b_2(\alpha) \int_\alpha^1 \xi_2 dx,\end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}a_1(\alpha) &= 1 - 2\beta a(\alpha) - 3(1-\beta)a^2(\alpha), & a_2(\alpha) &= 1 - 2\beta b(\alpha) - 3(1-\beta)b^2(\alpha), \\ b_1(\alpha) &= 2\beta a(\alpha) + 3(1-\beta)a^2(\alpha), & b_2(\alpha) &= 2\beta b(\alpha) + 3(1-\beta)b^2(\alpha).\end{aligned}$$

С учетом условия (3.8) получаем два независимых друг от друга уравнения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \xi_1}{\partial t} &= a_1(\alpha)\xi_1 + (b_1(\alpha) - b_2(\alpha)) \int_0^\alpha \xi_1 dx, \\ \frac{\partial \xi_2}{\partial t} &= a_2(\alpha)\xi_2 + (b_2(\alpha) - b_1(\alpha)) \int_\alpha^1 \xi_2 dx. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Проинтегрируем первое уравнение системы (3.9) по x от 0 до α , а второе от α до 1. Получим два уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_0^\alpha \xi_1(t, x) dx = d(\alpha) \int_0^\alpha \xi_1(t, x) dx, \quad \frac{\partial}{\partial t} \int_\alpha^1 \xi_2(t, x) dx = d(\alpha) \int_\alpha^1 \xi_2(t, x) dx,$$

решения которых равны

$$\int_0^\alpha \xi_1(t, x) dx = A_0 e^{d(\alpha)t}, \quad \int_\alpha^1 \xi_2(t, x) dx = B_0 e^{d(\alpha)t}.$$

Подставив найденные интегралы в (3.9), получим два линейных неоднородных уравнения, решения которых

$$\xi_1(t, x) = A(x)e^{a_1(\alpha)t} + \frac{A_0}{\alpha} e^{d(\alpha)t}, \quad \xi_2(t, x) = B(x)e^{a_2(\alpha)t} + \frac{B_0}{1-\alpha} e^{d(\alpha)t}$$

стремятся к нулю одновременно при отрицательных $a_1(\alpha)$, $a_2(\alpha)$, $d(\alpha)$.

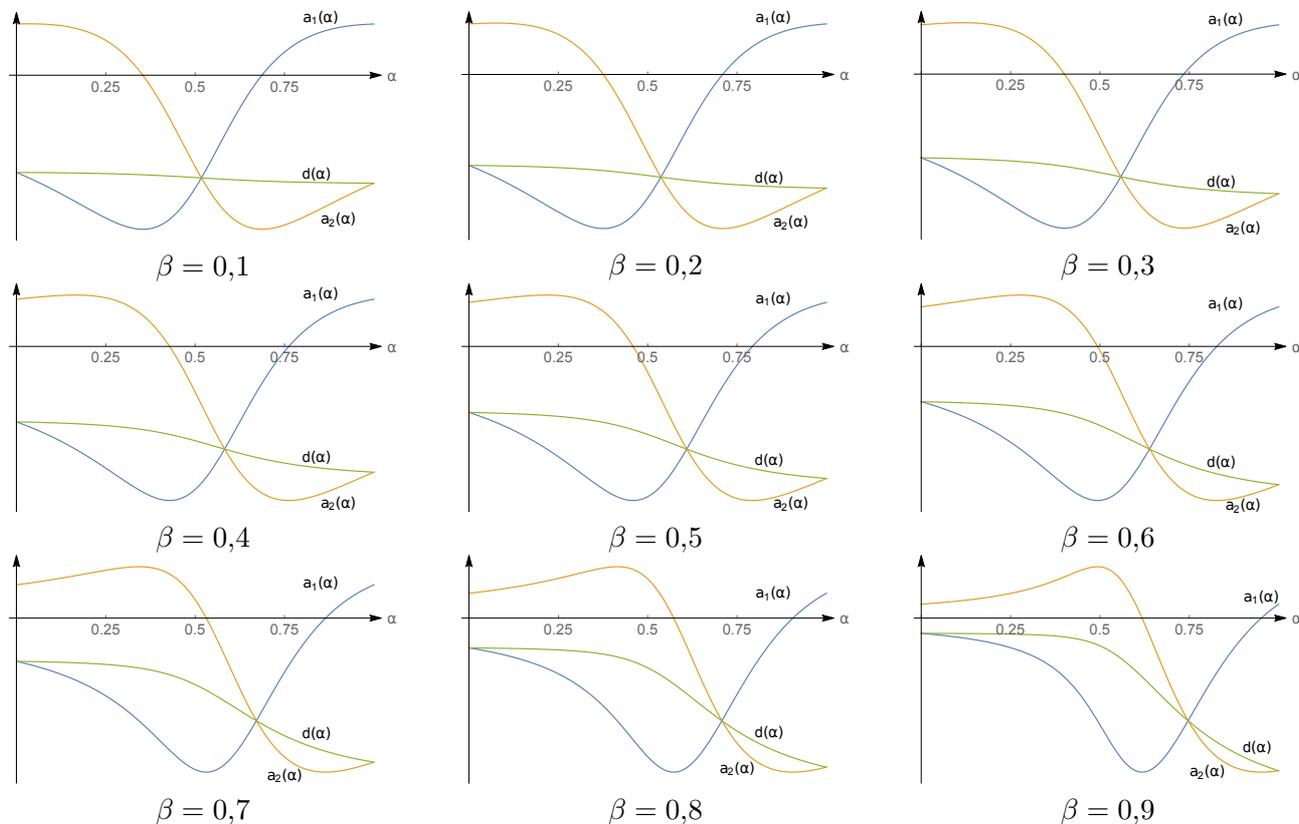


Рис. 1. Графики $a_1(\alpha)$, $a_2(\alpha)$ и $d(\alpha)$

FIG. 1. Graphs of $a_1(\alpha)$, $a_2(\alpha)$, and $d(\alpha)$

На рис. 1 представлены численно построенные графики функций $a_1(\alpha)$, $a_2(\alpha)$ и $d(\alpha)$ при различных β . Анализ этих графиков позволяет предположить, что непрерывные на отрезке $[0, 1]$

функции $a_2(\alpha)$, $a_1(\alpha)$ меняют знак в точках $\alpha_0(\beta) \in (0, 1)$, $\alpha_1(\beta) \in (0, 1)$, соответственно. При всех рассмотренных $\beta \in (0, 1)$ у этих функций точка смены знака единственная и выполнено неравенство $\alpha_0(\beta) < \alpha_1(\beta)$. Кроме того, обе функции $a_2(\alpha)$ и $a_1(\alpha)$ отрицательны при $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$ и $d(\alpha) < 0$ для всех $\alpha \in (0, 1)$. Тем самым, можно предположить, что при каждом $\beta \in (0, 1)$ существует промежуток $(\alpha_0, \alpha_1) \subset [0, 1]$, на котором функции $a_1(\alpha)$, $a_2(\alpha)$ и $d(\alpha)$ отрицательны одновременно. Это означает, что при $\alpha \in (\alpha_0, \alpha_1)$ решения вида (3.7) краевой задачи (1.1)–(1.3) являются асимптотически α -устойчивыми.

4. ДРУГИЕ АТТРАКТОРЫ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ, ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ

Поскольку задача (1.1)–(1.3) в случае $\beta \neq 1$ является диссипативной, имеет смысл исследовать динамику решений краевой задачи вне промежутка α -устойчивости кусочно-постоянных решений, имеющих одну точку разрыва.

Можно доказать, что при наличии только кубической нелинейности краевая задача имеет α -устойчивые кусочно-постоянные решения со значениями 1 и -1 . Покажем, что это действительно так.

Пусть кусочно-постоянная функция $\xi(t, x)$ имеет $n + 1$ точку разрыва α_j , $j = 0, \dots, n$, и на промежутках $[\alpha_{j-1}, \alpha_j)$ равна $(-1)^{j-1}$. Причем $\alpha_0 = 0$, $\alpha_n = 1$. Тогда из условия нулевого среднего (1.3) получаем уравнение на величины $\alpha_1, \dots, \alpha_{n-1}$

$$2\alpha_1 - 2\alpha_2 + 2\alpha_3 + \dots + 2(-1)^n \alpha_n + (-1)^{n+1} = 0. \quad (4.1)$$

Подставляя $\xi(t, x)$ в уравнение (1.1), можно заметить, что $M(\xi^3)$ также равно нулю. Тогда на промежутках $[\alpha_{j-1}, \alpha_j)$ уравнение (1.1) принимает вид

$$0 = (-1)^{j-1} - (-1)^{3(j-1)},$$

что, очевидно, является верным тождеством. Следовательно, при выполнении условия (4.1) в случае кубической нелинейности у краевой задачи (1.1)–(1.3) действительно имеются решения рассматриваемого вида.

Рассмотрим вопрос об α -устойчивости этих решений. Пусть

$$\xi(t, x) = (-1)^{j-1} + \xi_j(t, x) \quad \text{при } x \in [\alpha_{j-1}, \alpha_j),$$

тогда

$$M(\xi) = \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} \xi_j(t, x) dx = 0.$$

Подставим $\xi(t, x)$ в уравнение (1.1) и отбросим слагаемые более высокого порядка малости. Заметим, что в этом случае

$$M(\xi^3) = \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} ((-1)^{j-1} + \xi_j(t, x))^3 dx = 3 \sum_{j=1}^n \int_{\alpha_{j-1}}^{\alpha_j} \xi_j(t, x) dx = 0.$$

Таким образом, получаем систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{\partial \xi_j}{\partial t} = -2\xi_j, \quad j = 1, \dots, n-1,$$

решения которой стремятся к нулю по t . Следовательно, рассматриваемые кусочно-постоянные решения α -устойчивы.

Тем не менее, открытым остается вопрос о существовании других кусочно-постоянных решений краевой задачи при различных значениях β и вопрос α -устойчивости этих решений.

Аналитическое исследование в этом случае представляет определенную трудность, поэтому уместно проводить исследование поведения решений краевой задачи численными методами.

Будем искать решение краевой задачи в виде частичной суммы ряда Фурье

$$\xi(t, x) = \sum_{k=-N}^N \xi_k(t) \exp(2\pi kix). \quad (4.2)$$

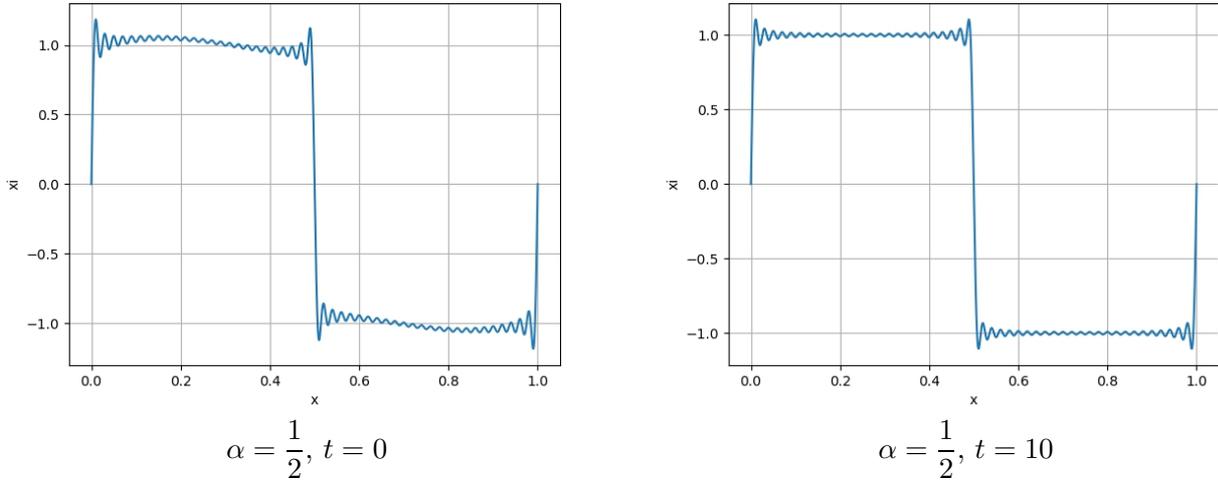


Рис. 2

Такое представление, очевидно, удовлетворяет краевому условию (1.2). Поскольку при выполнении условия нулевого среднего (1.3) следует, что коэффициент ряда Фурье при нулевой гармонике равен нулю, считаем, что в (4.2) имеет место $\xi_0(t) \equiv 0$. Также $\xi_{-k}(t) = \bar{\xi}_k(t)$.

Подставляя (4.2) в (1.1) и выделяя коэффициенты при одинаковых гармониках, получаем систему из $2N$ обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\dot{\xi}_k = \xi_k - \beta \left(\xi_{k/2}^2 + 2 \sum_{i+j=k} \xi_i \xi_j \right) - (1 - \beta) \left(\xi_{k/3}^3 + 3 \sum_{2i+j=k} \xi_i^2 \xi_j + 6 \sum_{i+j+l=k} \xi_i \xi_j \xi_l \right),$$

$k = -N, \dots, N, \quad k \neq 0. \quad (4.3)$

Начальное условие $\xi(0, x)$ также представим в виде частичной суммы ряда Фурье

$$\xi(0, x) = \sum_{k=-N}^N c_k \exp(2\pi k i x), \quad c_0 = 0.$$

Тогда система (4.3) рассматривается с начальными условиями

$$\xi_k(0) = c_k, \quad k = -N, \dots, N, \quad k \neq 0. \quad (4.4)$$

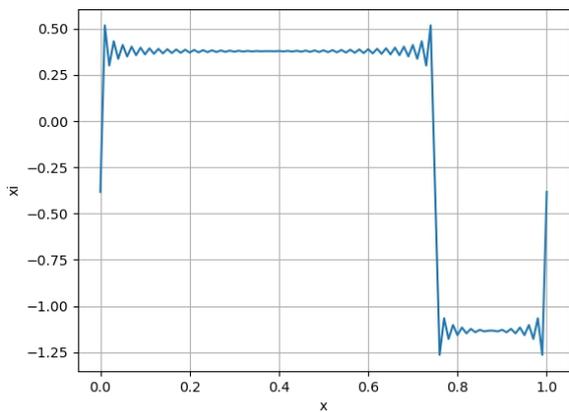
Таким образом, численное решение краевой задачи (1.1)–(1.3) определяется формулой (4.2), где $\xi_k(t)$ — решение системы (4.3).

Построим решение задачи (1.1)–(1.3) с начальным условием $\xi(0, x) = \xi_0(x) + g(x)$, где $\xi_0(x)$ — решение вида (2.4), $g(x)$ — малое возмущение, удовлетворяющее краевым условиям (1.2), (1.3).

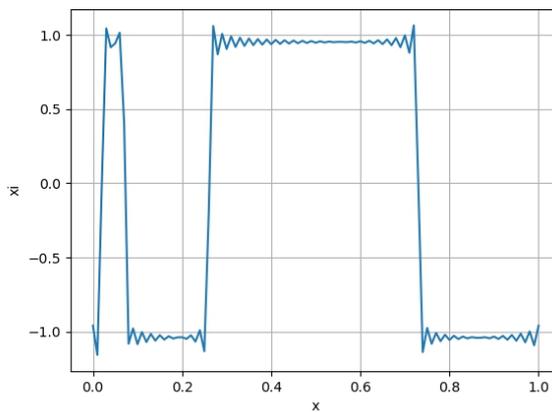
На рис. 2 представлен пример α -устойчивого решения вида (2.3) в случае $\beta = 0$.

Возьмем теперь такое значение α , при котором решение вида (2.4) неустойчиво. Тогда при $t \rightarrow \infty$ решения стремятся к кусочно-постоянным функциям, имеющим несколько точек разрыва. На рис. 3 представлен пример такого решения. Слева показано начальное условие краевой задачи в виде графика функции (3.4) с добавлением малого возмущения. Справа на рисунке показано это же решение при $t = 15$. Оно представляет собой кусочно-постоянную функцию с несколькими точками разрыва. Заметим, что дальнейшее увеличение значений переменной t не меняет структуры решения, его график не отличается от графика в правой части рис. 3.

Более того, если при фиксированном $\xi_0(x)$ в качестве возмущения $g(x)$ брать функцию вида $A \sin(kx)$, имеется зависимость количества точек разрыва α -устойчивого кусочно-постоянного решения от параметра k . А именно, чем больше k , тем больше точек разрыва имеет кусочно-постоянное решение, получающееся при вычислении решения системы (4.3). Так, в левой части рис. 4 представлено начальное условие краевой задачи в виде функции (3.4) с добавлением малого возмущения. С увеличением значений переменной t решение принимает вид кусочно-постоянной функции с несколькими точками разрыва. В левой части рис. 5 представлен график

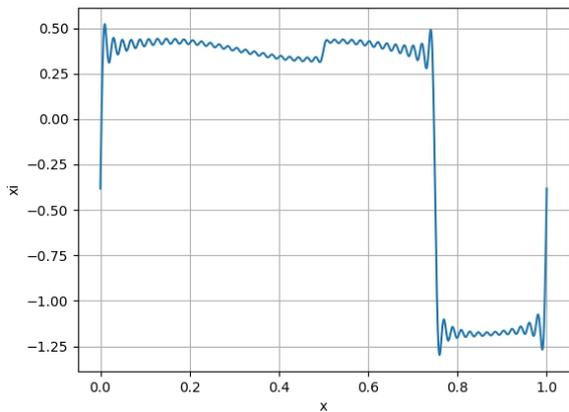


$$\alpha = \frac{3}{4}, t = 0$$

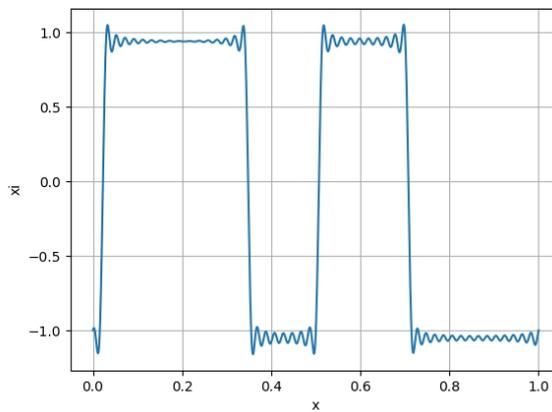


$$\alpha = \frac{3}{4}, t = 15$$

Рис. 3

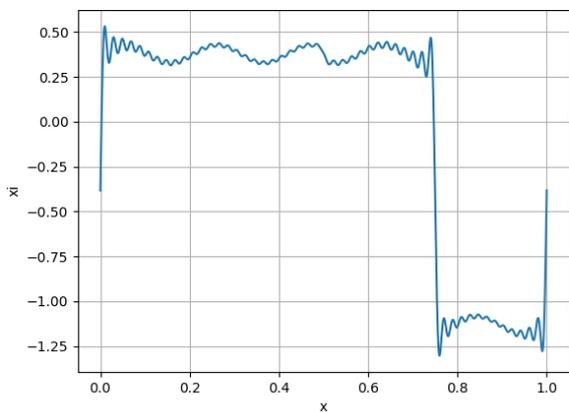


$$k = 10, \alpha = 0,7, t = 0$$

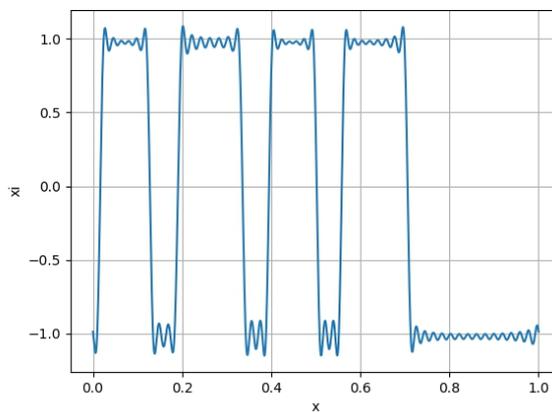


$$k = 10, \alpha = 0,7, t = 15$$

Рис. 4



$$k = 30, \alpha = 0,7, t = 0$$



$$k = 30, \alpha = 0,7, t = 15$$

Рис. 5

аналогичного начального условия, к которому добавлено возмущение с большей частотой колебаний. Увеличение значений переменной t в этом случае приводит решение к кусочно-постоянной функции, имеющей большее количество точек разрыва.

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе исследовалась динамика решений краевой задачи (1.1)–(1.3) при различных значениях параметра β . Доказано, что при каждом β задача имеет одно или два однопараметрических семейств кусочно-постоянных решений, зависящих от параметра α . Исследована α -устойчивость этих решений. Показано, что при $\beta \neq 1$ существует промежуток изменения параметра α , на котором эти решения асимптотически α -устойчивы. Доказано, что в случае $\beta = 1$ все такие решения неустойчивы.

Выполнено численное исследование поведения решений краевой задачи при $\beta \neq 1$ вне промежутка α -устойчивости однопараметрического семейства кусочно-постоянных решений. Показано наличие α -устойчивых кусочно-постоянных решений, имеющих более одной точки разрыва.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Глызин Д. С., Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Охота на химер в полностью связанных сетях нелинейных осцилляторов // Изв. вузов. Прикл. нелинейн. динам. — 2022. — 30, № 2. — С. 152–175.
2. Глызин С. Д., Кащенко С. А., Толбей А. О. Взаимодействие двух волн в модели Ферми–Паста–Улама // Модел. и анализ информ. сист. — 2016. — 23, № 5. — С. 548–558.
3. Глызин С. Д., Кащенко С. А., Толбей А. О. Уравнения с нелинейностями дислокаций и Ферми–Пасты–Улама // Изв. вузов. Прикл. нелинейн. динам. — 2019. — 27, № 4. — С. 52–70.
4. Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Периодические режимы двухкластерной синхронизации в полностью связанных сетях нелинейных осцилляторов // Теор. мат. физ. — 2022. — 212, № 2. — С. 213–233.
5. Григорьева Е. В., Кащенко С. А. Медленные и быстрые колебания в модели оптико-электронного осциллятора с запаздыванием // Докл. РАН. — 2019. — 484, № 1. — С. 21–25.
6. Глызин С. Д., Колесов А. Ю. Бегущие волны в полностью связанных сетях нелинейных осцилляторов // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2022. — 62, № 1. — С. 71–89.
7. Ikeda K., Matsumoto K. High-dimensional chaotic behavior in systems with time-delayed feedback // Phys. D. — 1987. — 29. — С. 223–235.
8. Marquez B. A. Interaction between Lienard and Ikeda dynamics in a nonlinear electro-optical oscillator with delayed bandpass feedback // Phys. Rev. E. — 2016. — 94, № 6. — 062208.
9. Talla Mbe J. H., Talla A. F., Goune Chengui G. R. Mixed-mode oscillations in slow-fast delayed optoelectronic systems // Phys. Rev. E. — 2015. — 91, № 1. — 012902.

С. А. Кащенко

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия
E-mail: kasch@uniyar.ac.ru

Д. С. Костерин

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия
E-mail: kosterin.dim@mail.ru

С. Д. Глызин

Ярославский государственный университет им. П. Г. Демидова, Ярославль, Россия
E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

UDC 517.926

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-263-275

EDN: APCXKP

A family of piecewise-smooth solutions of a class of spatially distributed equations

S. A. Kaschenko, D. S. Kosterin, and S. D. Glyzin

P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia

Abstract. In this paper, we consider a spatially distributed equation with a periodic boundary condition and the zero integral mean condition in the spatial variable. The boundary-value problem under consideration has a family of solutions that are piecewise constant with respect to the spatial variable and have one discontinuity point. Conditions for the stability of such solutions are determined. The existence of piecewise constant solutions with more than one discontinuity point is shown. An algorithm for calculating solutions to a boundary-value problem by numerical methods is presented. A numerical analysis of the dynamics of the boundary-value problem is performed.

Keywords: evolutionary spatially distributed equations, piecewise constant solutions, stability, cluster synchronization.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The study was supported by the Russian Science Foundation, grant № 22-11-00209, <https://rscf.ru/project/22-11-00209/>.

For citation: S. A. Kaschenko, D. S. Kosterin, S. D. Glyzin, “A family of piecewise-smooth solutions of a class of spatially distributed equations,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 2, 263–275. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-263-275>

REFERENCES

1. D. S. Glyzin, S. D. Glyzin, and A. Yu. Kolesov, “Okhota na khimer v polnosvyaznykh setyakh nelineynykh ostillyatorov” [Hunting for chimeras in fully connected networks of nonlinear oscillators], *Izv. vuzov. Prikl. nelinein. dinam.* [Bull. Higher Edu. Ser. Appl. Nonlinear Dyn.], 2022, **30**, No. 2, 152–175 (in Russian).
2. S. D. Glyzin, S. A. Kaschenko, and A. O. Tolbey, “Vzaimodeystvie dvukh voln v modeli Fermi–Pasta–Ulama” [Interaction of two waves in the Fermi–Pasta–Ulam model], *Model. i analiz inform. sist.* [Model. Anal. Inf. Sys.], 2016, **23**, No. 5, 548–558 (in Russian).
3. S. D. Glyzin, S. A. Kaschenko, and A. O. Tolbey, “Uravneniya s nelineynostyami dislokatsiy i Fermi–Pasty–Ulama” [Equations with dislocations and Fermi–Pasta–Ulam nonlinearities], *Izv. vuzov. Prikl. nelinein. dinam.* [Bull. Higher Edu. Ser. Appl. Nonlinear Dyn.], 2019, **27**, No. 4, 52–70 (in Russian).
4. S. D. Glyzin and A. Yu. Kolesov, “Periodicheskie rezhimy dvukhklasternoy sinkhronizatsii v polnosvyaznykh setyakh nelineynykh ostillyatorov” [Periodic modes of two-cluster synchronization in fully connected networks of nonlinear oscillators], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 2022, **212**, No. 2, 213–233 (in Russian).
5. E. V. Grigorieva and S. A. Kaschenko, “Medlennye i bystrye kolebaniya v modeli optiko-elektronogo ostillyatora s zapazdyvaniem” [Slow and fast oscillations in the model of an optoelectronic oscillator with delay], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2019, **484**, No. 1, 21–25 (in Russian).
6. S. D. Glyzin and A. Yu. Kolesov, “Begushchie volny v polnosvyaznykh setyakh nelineynykh ostillyatorov” [Traveling waves in fully connected networks of nonlinear oscillators], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2022, **62**, No. 1, 71–89 (in Russian).
7. K. Ikeda and K. Matsumoto, “High-dimensional chaotic behavior in systems with time-delayed feedback,” *Phys. D.*, 1987, **29**, 223–235.



8. B. A. Marquez, “Interaction between Lienard and Ikeda dynamics in a nonlinear electro-optical oscillator with delayed bandpass feedback,” *Phys. Rev. E*, 2016, **94**, No. 6, 062208.
9. J. H. Talla Mbe, A. F. Talla, and G. R. Goune Chengui, “Mixed-mode oscillations in slow-fast delayed optoelectronic systems,” *Phys. Rev. E*, 2015, **91**, No. 1, 012902.

S. A. Kaschenko

P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia

E-mail: kasch@uniyar.ac.ru

D. S. Kosterin

P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia

E-mail: kosterin.dim@mail.ru

S. D. Glyzin

P. G. Demidov Yaroslavl State University, Yaroslavl, Russia

E-mail: glyzin@uniyar.ac.ru

УДК 517.957

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-276-288

EDN: TXNZS

ЗАДАЧА НЕЛИНЕЙНОЙ ОПТИКИ С ПРЕОБРАЗОВАНИЕМ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ ПЕРЕМЕННОЙ И КОСОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

А. А. Корнута, В. А. Лукьяненко

Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского

Аннотация. В данной статье рассматривается функционально-дифференциальное уравнение параболического типа на полосе с преобразованием пространственной переменной и краевыми условиями с косою производной. Используя преобразования Лапласа и Фурье, получено представление рассматриваемой задачи в виде нелинейного интегрального уравнения. Рассмотрен частный случай данного представления. Доказанные утверждения дают возможность реализовать итерационные методы получения приближенных решений нелинейных уравнений в частных производных с учетом заданных условий. Результаты показывают, что представленный метод перспективен для решения аналогичных задач.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения, бифуркация, краевые условия с косою производной, преобразование Фурье, преобразование Лапласа.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: А. А. Корнута, В. А. Лукьяненко. Задача нелинейной оптики с преобразованием пространственной переменной и косою производной // *Соврем. мат. Фундам. направл.* 2023. Т. 69, № 2. С. 276–288. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-276-288>

ВВЕДЕНИЕ

В различных прикладных задачах (динамика жидкости, физика плазмы, механика твердого тела, квантовая теория поля, в оптических системах и др.) для изучения различных процессов используются математические модели, представленные в виде нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, нелинейных уравнений в частных производных, функционально-дифференциальных, а также нелинейных интегральных уравнений.

Широко используются нелинейные уравнения с параметрами при изучении моделей нелинейной оптики. Проводятся теоретические и численные исследования поведения решений нелинейных уравнений с параметрами. В зависимости от параметров задачи рассматриваются вопросы устойчивости, бифуркации решений, возникновения пространственно-неоднородных структур, квазипериодических решений и др. При этом применяются различные аналитические и асимптотические подходы: теория бифуркации векторных полей, теория центральных многообразий, теория нормальных форм и др.

Математические модели нелинейной оптики, обладающие особенностями самоорганизующихся систем, представляют класс задач, описывающих динамику изменения светового поля в зависимости от параметров системы. Примером такой системы является оптическая система, состоящая

из тонкого слоя нелинейной среды керровского типа и различным образом организованного внешнего контура двумерной обратной связи [1, 11], динамику которой описывает уравнение [13]:

$$\tau_1 \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + u(x, t) = \mu \Delta u(x, t) + K(1 + \gamma \cos Qu(x, t - \tau)), \quad x \in S, \quad t \geq 0, \quad (1)$$

где $u(x, t)$ — фазовая модуляция световой волны в тонком слое нелинейной среды керровского типа в пределах апертуры $S \subset \mathbb{R}^2$. Уравнение (1) рассматривается с краевыми условиями на границе ∂S , а также начальными условиями при $(x, t) \in S \times [-\tau, 0]$. Здесь Δ — оператор Лапласа, $\mu > 0$ — коэффициент диффузии частиц нелинейной среды, $K > 0$ — коэффициент нелинейности, пропорциональный интенсивности входного поля, γ ($0 < \gamma \leq 1$) — видность (контрастность) интерференционной картины, $Qu(x, t) = u(q(x), t)$, $q(x)$ — гладкое обратимое преобразование пространственной переменной (например, отражение, поворот).

Одной из задач, возникающих при исследовании процессов бифуркации в уравнении (1), является задача выявления решений различных типов (бегущих волн, вращающихся волн, фронтов). В частности, в работах А. В. Разгулина [12], Е. В. Григорьевой, С. А. Кащенко [16], М. А. Воронцова [22], Е. П. Белана [2, 3] для круговых областей в случае преобразования поворота пространственных аргументов показано появление в результате бифуркации Андронова—Хопфа вращающихся волн. А. Б. Муравник [9] исследует сингулярные уравнения, содержащие оператор Бесселя и оператор обобщенного сдвига, которые являются не только дифференциально-разностными, но и интегро-дифференциальными. В работе Е. П. Кубышкина и В. А. Куликова [8] изучаются бифуркации автоколебательных решений в круге для нелинейного дифференциального уравнения параболического типа с оператором поворота пространственного аргумента и временным запаздыванием, динамика и устойчивость которых определяются параметрами начально-краевой задачи. Дано геометрическое представление области однородных состояний равновесия.

В работах авторов [5, 6, 17–19] показано существование на круге, кольце и окружности периодических по времени решений, описана асимптотика этих решений.

В статье исследуется задача (1) в случае $\tau_1 = 1$, $\tau = 0$ с оператором отражения Q , который обладает свойством $Q^2 = I$ для бесконечной полосы и краевыми условиями с косой производной.

Задача с косой производной для уравнения Лапласа исследовалась методом интегральных преобразований в работах П. А. Крутицкого, А. И. Сбигнева, А. В. Чикилева [7, 20]. Начально-краевая задача без преобразования пространственных переменных с косой производной для кольца изучалась в работах А. В. Разгулина и соавторов [14, 15].

Для асимптотического разложения решения сингулярно возмущенной краевой задачи для случая нелинейных граничных условий в работе Г. А. Несененко использовано интегральное представление с функцией Грина [10].

В работе проводится анализ существования, формы и устойчивости решений (1), бифурцирующих из пространственно однородных стационарных решений, т. е. решений $u(x, t) = w$, определяемых из уравнения $w = K(1 + \gamma \cos w)$, с краевыми условиями, содержащими косую производную. Указанный анализ предлагается сводить к исследованию эквивалентного нелинейного интегрального уравнения, которое представляет самостоятельный интерес. Нелинейные интегральные уравнения в дальнейшем могут использоваться для построения итерационных схем получения приближённых асимптотических решений исходной задачи.

1. НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ПОЛОСЫ С ОПЕРАЦИЕЙ ОТРАЖЕНИЯ

Рассмотрим начально-краевую задачу для нелинейного функционально-дифференциального уравнения в частных производных параболического типа с преобразованием отражения по переменной $x \in \mathbb{R}$. В отличие от наиболее часто рассматриваемых условий Дирихле и Неймана, рассмотрим условие с косой производной:

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u = D\Delta u + K(1 + \gamma \cos Qu), \quad x \in \mathbb{R}, \quad |y| \leq l, \quad t > 0, \quad (1.2)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \operatorname{tg} \alpha_1 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{y=-l} = 0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \operatorname{tg} \alpha_2 \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{y=l} = 0, \quad (1.3)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y). \quad (1.4)$$

Здесь $u = u(x, y, t)$ — фазовая модуляция световой волны в тонком слое нелинейной среды керровского типа в пределах полосы $x \in \mathbb{R}$, $|y| \leq l$, Δ — оператор Лапласа, $D > 0$ — коэффициент диффузии частиц нелинейной среды, $K > 0$ — коэффициент нелинейности, пропорциональный интенсивности входного поля, γ ($0 < \gamma \leq 1$) — видность (контрастность) интерференционной картины, $Qu(x, y, t) = u(q(x), y, t)$, $q(x) = -x$ — преобразование отражения переменной x .

Граничные условия (1.3) с косой производной определяют производные по направлению, которое образуют с внешними нормальными углы $\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha$. Представляет интерес асимптотическая форма и анализ устойчивости решений, бифурцирующих из пространственно-однородного решения (1.2) $u(x, y, t) = \hat{w} = \text{const}$, определяемого равенством

$$w = K(1 + \gamma \cos w).$$

Фиксируем гладкую ветвь $\hat{w} = \hat{w}(K)$, $1 + K\gamma \sin \hat{w}(K) \neq 0$, и выполняем замену $u = \hat{w} + v$, где $v = v(x, y, t)$ — новая неизвестная функция, которую по-прежнему будем обозначать через $u(x, y, t)$. Приходим к задаче

$$\frac{\partial u}{\partial t} - Lu = N(Qu) = g, \quad x \in \mathbb{R}, \quad |y| \leq l, \quad t > 0, \quad (1.5)$$

$$\left(\frac{\partial u}{\partial y} - \text{tg } \alpha \frac{\partial u}{\partial x} \right) \Big|_{y=\pm l} = 0, \quad (1.6)$$

$$u(x, y, 0) = u_0(x, y), \quad (1.7)$$

где $L = D\Delta - I + \Lambda Q$, $N(Qu) = K(1 + \gamma \cos Qu) - \Lambda Qu = \Omega(Qu)^2 - \frac{\Lambda}{6}(Qu)^3 + \dots$, $Qu(x, y, t) = u(-x, y, t)$, $Q^2 = I$. Через $g(x, y, t)$ обозначен нелинейный оператор $N(Qu)$ как функция, зависящая от переменных (x, y, t) . Уравнение (1.5) является неоднородным. Представим задачу (1.5)–(1.7) в виде нелинейного интегрального уравнения. Будем использовать преобразование Фурье по переменной $x \in \mathbb{R}$ и преобразование Лапласа по переменной $t > 0$. Обозначим

$$U(\omega, y, t) = (\mathcal{F}u)(\omega, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} u(x, y, t) \exp[i\omega x] dx,$$

$$U(\omega, y, p) = (\mathcal{L}\mathcal{F}u)(\omega, y, p) = \int_0^{\infty} U(\omega, y, t) \exp[-pt] dt.$$

Используя свойства преобразования Фурье

$$\mathcal{F} \left\{ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial x} \right\} (\omega, y, t) = (-i\omega)U(\omega, y, t), \quad \mathcal{F} \left\{ \frac{\partial^2 u(x, y, t)}{\partial x^2} \right\} (\omega, y, t) = (-i\omega)^2 U(\omega, y, t)$$

и преобразования Лапласа

$$\mathcal{L} \left\{ \frac{\partial u(x, y, t)}{\partial t} \right\} (x, y, p) = pU(x, y, p) - u(x, y, 0) = p(x, y, p) - u_0(x, y),$$

мы видим, что задача (1.5)–(1.7) в образах Фурье–Лапласа имеет вид функционально-дифференциального уравнения второго порядка с оператором отражения $\{Q : QU(\omega, y, p) = U(-\omega, y, p)\}$:

$$\frac{\partial^2 U(\omega, y, p)}{\partial y^2} - \left[\omega^2 + \frac{1+p}{D} \right] U(\omega, y, p) - \frac{\Lambda}{D} U(-\omega, y, p) = G(\omega, y, p) + U_0(\omega, y), \quad (1.8)$$

$$\frac{\partial U(\omega, \pm l, p)}{\partial y} + i\omega \text{tg } \alpha U(\omega, \pm l, p) = 0. \quad (1.9)$$

Вводя обозначение $V(\omega, y, p) = U(-\omega, y, p)$ ($V = QU$), приводим однородное уравнение (1.8) к системе уравнений, не содержащих явно оператор Q :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 U(\omega, y, p)}{\partial y^2} - \left[\omega^2 + \frac{1+p}{D} \right] U(\omega, y, p) + \frac{\Lambda}{D} V(\omega, y, p) &= 0, \\ \frac{\partial^2 V(\omega, y, p)}{\partial y^2} - \left[\omega^2 + \frac{1+p}{D} \right] V(\omega, y, p) + \frac{\Lambda}{D} U(\omega, y, p) &= 0. \end{aligned} \quad (1.10)$$

Решения определяются через корни характеристического уравнения системы (1.10)

$$\lambda^2 - \left[\omega^2 + \frac{1+p}{D} \right] = \pm \frac{\Lambda}{D},$$

или, при соответствующем выборе ветви корня,

$$\begin{aligned} \lambda_1(\omega, p) &= - \left(\omega^2 + \frac{1+p+\Lambda}{D} \right)^{1/2}, & \lambda_2(\omega, p) &= - \left(\omega^2 + \frac{1+p-\Lambda}{D} \right)^{1/2}, \\ \lambda_3(\omega, p) &= \left(\omega^2 + \frac{1+p+\Lambda}{D} \right)^{1/2}, & \lambda_4(\omega, p) &= \left(\omega^2 + \frac{1+p-\Lambda}{D} \right)^{1/2}. \end{aligned}$$

Утверждение 1.1. Решения системы (1.10) представимы в виде

$$\begin{aligned} U(\omega, y, p) &= A_1(\omega, p) \exp[\lambda_1(\omega, p)y] + A_2(\omega, p) \exp[\lambda_2(\omega, p)y] + \\ &+ A_3(\omega, p) \exp[\lambda_3(\omega, p)y] + A_4(\omega, p) \exp[\lambda_4(\omega, p)y] = \sum_{s=1}^4 A_s(\omega, p) \exp[\lambda_s(\omega, p)y], \\ V(\omega, y, p) &= -A_1(\omega, p) \exp[\lambda_1(\omega, p)y] + A_2(\omega, p) \exp[\lambda_2(\omega, p)y] - \\ &- A_3(\omega, p) \exp[\lambda_3(\omega, p)y] + A_4(\omega, p) \exp[\lambda_4(\omega, p)y] = \sum_{s=1}^4 (-1)^s A_s(\omega, p) \exp[\lambda_s(\omega, p)y]. \end{aligned}$$

Замечание. Полученное представление далее в работе не используется. Далее получим зависимость только от двух коэффициентов.

2. СВЕДЕНИЕ К НЕЛИНЕЙНОМУ ИНТЕГРАЛЬНОМУ УРАВНЕНИЮ

Применим метод разделения переменных к решению краевой задачи (1.8), (1.9).

Лемма 2.1. Решение $U(\omega, y, p)$ представимо в виде разложения по собственным функциям краевой задачи по переменной y :

$$\begin{aligned} U(\omega, y, p) &= \frac{1}{2} A_0(\omega, p) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k(\omega, p) \cos \frac{k\pi}{2l} y + B_k(\omega, p) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right), \\ G(\omega, y, p) &= \frac{1}{2} C_0(\omega, p) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(C_k(\omega, p) \cos \frac{k\pi}{2l} y + D_k(\omega, p) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right), \\ U_0(\omega, y) &= \frac{1}{2} A_0(\omega) + \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_{0k}(\omega) \cos \frac{k\pi}{2l} y + B_{0k}(\omega) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right), \end{aligned} \tag{2.1}$$

где

$$A_k(\omega, p) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l U(\omega, y, p) \cos \frac{k\pi}{2l} y dy, \quad B_k(\omega, p) = \frac{1}{l} \int_{-l}^l U(\omega, y, p) \sin \frac{k\pi}{2l} y dy, \quad k = 0, 1, 2, \dots \tag{2.2}$$

Аналогично выписываются коэффициенты разложения для $G(\omega, y, p)$ и $U_0(\omega, y)$. В исходных переменных разложение (2.1) имеет вид

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_k(x, t) \cos \frac{k\pi}{2l} y + b_k(x, t) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right), \\ g(x, y, t) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(c_k(x, t) \cos \frac{k\pi}{2l} y + d_k(x, t) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right), \\ u_0(x, y) &= \sum_{k=0}^{\infty} \left(a_{0k}(x, t) \cos \frac{k\pi}{2l} y + b_{0k}(x, t) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right). \end{aligned} \tag{2.3}$$

Исходные коэффициенты и их изображения Фурье и Лапласа связаны соотношениями

$$\begin{aligned} A_k(\omega, p) &= (\mathcal{FL}a_k(x, t))(\omega, p), & B_k(\omega, p) &= (\mathcal{FL}b_k(x, t))(\omega, p), \\ C_k(\omega, p) &= (\mathcal{FL}c_k(x, t))(\omega, p), & D_k(\omega, p) &= (\mathcal{FL}d_k(x, t))(\omega, p), \\ A_k(x, p) &= (\mathcal{L}a_k(x, t))(x, p), & A_k(\omega, t) &= (\mathcal{F}a_k(x, t))(\omega, t), \\ B_k(x, p) &= (\mathcal{L}b_k(x, t))(x, p), & B_k(\omega, t) &= (\mathcal{F}b_k(x, t))(\omega, t), \\ C_k(x, p) &= (\mathcal{L}c_k(x, t))(x, p), & C_k(\omega, t) &= (\mathcal{F}c_k(x, t))(\omega, t), \\ D_k(x, p) &= (\mathcal{L}d_k(x, t))(x, p), & D_k(\omega, t) &= (\mathcal{F}d_k(x, t))(\omega, t), \\ A_{0k}(\omega) &= (\mathcal{F}a_{0k}(x))(\omega), & B_{0k}(\omega) &= (\mathcal{F}b_{0k}(x))(\omega). \end{aligned}$$

Подставляя выражение (2.1) в краевую задачу (1.8), (1.9), находим коэффициенты разложения (2.2) и (2.3).

Теорема 2.1. *Начально-краевая задача с косой производной (1.5)–(1.7) представима в виде нелинейного интегрального уравнения*

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left(\operatorname{ch} \Lambda(t - \tau) \exp \left[-\frac{(x + \xi)^2}{4(t - \tau)D} \right] + \operatorname{sh} \Lambda(t - \tau) \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4(t - \tau)D} \right] \right) \times \\ &\times \frac{\exp[-(t - \tau)]}{2\sqrt{\pi(t - \tau)D}} \frac{1}{l} \int_{-l}^l \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left[-D \left(\frac{k\pi}{2l} \right)^2 (t - \tau) \right] \cos \frac{k\pi}{2l} (y - \eta) \right] \times \\ &\times \left(K(1 + \gamma \cos u(\xi, \eta, \tau)) - \Lambda u(\xi, \eta, \tau) \right) d\eta d\xi d\tau + \\ &+ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left(\operatorname{ch} \Lambda t \exp \left[-\frac{(x - \xi)^2}{4tD} \right] + \operatorname{sh} \Lambda t \exp \left[-\frac{(x + \xi)^2}{4tD} \right] \right) \times \\ &\times \frac{\exp[-t]}{2\sqrt{\pi tD}} \frac{1}{l} \int_{-l}^l \left[\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \exp \left[-D \left(\frac{k\pi}{2l} \right)^2 t \right] \cos \frac{k\pi}{2l} (y - \eta) \right] u_0(\xi, \eta) d\eta d\xi. \end{aligned} \quad (2.4)$$

Доказательство. Применим метод разделения переменных: $U(\omega, y, p) = \sum_k Y_k(y) Z_k(\omega, p)$. Каждый член ряда удовлетворяет однородному уравнению (1.8) и краевому условию (1.9). Далее опустим индекс k .

Разделяя переменные, для однородного уравнения получим

$$\frac{Y_k''(y)}{Y_k(y)} = \left[\omega^2 + \frac{1+p}{D} \right] - \frac{\Lambda}{D} \frac{Z_k(-\omega, p)}{Z_k(\omega, p)} = -\nu^2. \quad (2.5)$$

Из (2.5) и условия (1.9) следует

$$\begin{aligned} Y''(y) + \nu^2 Y(y) &= 0, \\ Y'(\pm l) + i\omega \operatorname{tg} \alpha Y(\pm l) &= 0. \end{aligned} \quad (2.6)$$

Решение дифференциального уравнения краевой задачи $Y(y) = a \cos \nu y + b \sin \nu y$ имеет нетривиальное решение при условии

$$2(\omega^2 \operatorname{tg}^2 \alpha - \nu^2) \sin \nu l \cos \nu l = 0. \quad (2.7)$$

Отсюда следует, что $\nu_k = \frac{k\pi}{2l}$, $k = 0, 1, 2, \dots$,

$$Y_k(y) = a_k \cos \frac{k\pi}{2l} y + b_k \sin \frac{k\pi}{2l} y,$$

т. е. справедливо представление (2.1).

Случай $\nu = \pm \text{tg } \alpha$ рассматривается отдельно.

Для $Z_k(\omega, p)$ получим систему функциональных уравнений

$$\begin{aligned} Z_k(\omega, p) \left[\omega^2 + \nu^2 + \frac{1+p}{D} \right] - \frac{\Lambda}{D} Z_k(-\omega, p) &= 0, \\ -\frac{\Lambda}{D} Z_k(\omega, p) + Z_k(-\omega, p) \left[\omega^2 + \nu^2 + \frac{1+p}{D} \right] &= 0. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Второе уравнение получено в результате применения оператора Q . Система (2.8) имеет нетривиальное решение при условии

$$\left(\omega^2 + \nu^2 + \frac{1+p}{D} \right)^2 - \left(\frac{\Lambda}{D} \right)^2 = 0,$$

или $q_k(\omega, p) = \pm \Lambda$, где $q_k(\omega, p) = 1 + D \left[\omega^2 + \left(\frac{k\pi}{2l} \right)^2 \right] + p$.

Коэффициенты разложения A_k и B_k определяются из неоднородной системы уравнений, содержащих оператор отражения Q :

$$\begin{cases} q_k(\omega, p) A_k(\omega, p) - \Lambda A_k(-\omega, p) = C_k(\omega, p) + A_{0k}(\omega), \\ q_k(\omega, p) B_k(\omega, p) - \Lambda B_k(-\omega, p) = D_k(\omega, p) + B_{0k}(\omega). \end{cases}$$

Решения системы имеют вид

$$\begin{aligned} A_k(\omega, p) &= \frac{q_k(\omega, p) [C_k(\omega, p) + A_{0k}(\omega)] + \Lambda [C_k(-\omega, p) + A_{0k}(-\omega)]}{q_k^2(\omega, p) - \Lambda^2}, \\ B_k(\omega, p) &= \frac{q_k(\omega, p) [D_k(\omega, p) + B_{0k}(\omega)] + \Lambda [D_k(-\omega, p) + B_{0k}(-\omega)]}{q_k^2(\omega, p) - \Lambda^2}, \end{aligned}$$

или

$$A_k(\omega, p) = K_1(\omega, p, k) C_k(\omega, p) + K_2(\omega, p, k) C_k(-\omega, p) + K_1(\omega, p, k) A_{0k}(\omega) + K_2(\omega, p, k) A_{0k}(-\omega),$$

$$B_k(\omega, p) = K_1(\omega, p, k) D_k(\omega, p) + K_2(\omega, p, k) D_k(-\omega, p) + K_1(\omega, p, k) B_{0k}(\omega) + K_2(\omega, p, k) B_{0k}(-\omega),$$

где

$$\begin{aligned} K_1(\omega, p, k) &= \frac{q_k(\omega, p)}{q_k^2(\omega, p) - \Lambda^2}, \quad K_2(\omega, p, k) = \frac{\Lambda}{q_k^2(\omega, p) - \Lambda^2}, \\ k_j(x, t, k) &= \left(\mathcal{F}^{-1} \mathcal{L}^{-1} \{ K_j \} \right) (x, t, k), \quad j = 1, 2. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} u(x, y, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^t \int_{\mathbb{R}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(k_1(x - \xi, t - \tau, k) \left[c_k(\xi, \tau) \cos \frac{k\pi}{2l} y + d_k(\xi, \tau) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + k_2(x - \xi, t - \tau, k) \left[c_k(-\xi, \tau) \cos \frac{k\pi}{2l} y + d_k(-\xi, \tau) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right] \right) \right] d\xi d\tau + \\ &\quad + \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(k_1(x - \xi, t, k) \left[a_{0k}(\xi) \cos \frac{k\pi}{2l} y + b_{0k}(\xi) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right] + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + k_2(x - \xi, t, k) \left[a_{0k}(-\xi) \cos \frac{k\pi}{2l} y + b_{0k}(-\xi) \sin \frac{k\pi}{2l} y \right] \right) \right] d\xi. \end{aligned} \quad (2.9)$$

С помощью обратных преобразований Фурье и Лапласа определим оригиналы $\mathcal{L}^{-1}\{K_1(\omega, p, k)\}$ и $\mathcal{L}^{-1}\{K_2(\omega, p, k)\}$, используя формулы [4]

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{p+d}{(p-a)(p-b)}\right\} &= A \exp[at] + B \exp[bt], \quad A = \frac{a+d}{a-b}, \quad B = \frac{b+d}{b-a}, \\ \mathcal{L}^{-1}\left\{\frac{1}{(p-a)(p-b)}\right\} &= A \exp[at] + B \exp[bt], \quad A = \frac{1}{a-b}, \quad B = \frac{1}{b-a}.\end{aligned}$$

Получим

$$\begin{aligned}\mathcal{L}^{-1}\{K_1(\omega, p, k)\} &= \frac{1}{2} \exp\left[t\left(-D\left[\omega^2 + \left(\frac{k\pi}{2l}\right)^2\right] + \Lambda - 1\right)\right] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \exp\left[t\left(-D\left[\omega^2 + \left(\frac{k\pi}{2l}\right)^2\right] - \Lambda - 1\right)\right], \\ \mathcal{L}^{-1}\{K_2(\omega, p, k)\} &= \frac{1}{2} \exp\left[t\left(-D\left[\omega^2 + \left(\frac{k\pi}{2l}\right)^2\right] + \Lambda - 1\right)\right] - \\ &\quad - \frac{1}{2} \exp\left[t\left(-D\left[\omega^2 + \left(\frac{k\pi}{2l}\right)^2\right] - \Lambda - 1\right)\right].\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}k_1(x, t, k) &= \frac{\exp[-t]}{2\sqrt{\pi t D}} \exp\left[-\frac{x^2}{4tD}\right] \exp\left[-D\left(\frac{k\pi}{2l}\right)^2 t\right] \operatorname{ch} \Lambda t, \\ k_2(x, t, k) &= \frac{\exp[-t]}{2\sqrt{\pi t D}} \exp\left[-\frac{x^2}{4tD}\right] \exp\left[-D\left(\frac{k\pi}{2l}\right)^2 t\right] \operatorname{sh} \Lambda t.\end{aligned}\tag{2.10}$$

Преобразуя (2.9) с учетом (2.10) и $g(x, y, t) = K(1 + \gamma \cos u(-x, y, t)) - \Lambda u(-x, y, t)$, получаем (2.4). □

3. ЧАСТНЫЙ СЛУЧАЙ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ В ВИДЕ ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

В разделе 2 при разделении переменных получена зависимость решения $Y(y) = \exp[-i\omega \operatorname{tg} \alpha y]$. Рассмотрим данный случай.

После применения преобразования Фурье к (1.5)–(1.7) получим начально-краевую задачу

$$\frac{\partial U(\omega, y, t)}{\partial t} - U(\omega, y, t) - D\left[\frac{\partial^2 U(\omega, y, t)}{\partial y^2} - \omega^2 U(\omega, y, t)\right] - \Lambda U(-\omega, y, t) = G(\omega, y, t)\tag{3.1}$$

с начальным условием

$$U(\omega, y, 0) = U_0(\omega, y)\tag{3.2}$$

и краевым условием

$$\frac{\partial U(\omega, \pm l, t)}{\partial y} = (-i\omega)(\operatorname{tg} \alpha)U(\omega, \pm l, t).\tag{3.3}$$

Представим решение однородного уравнения в виде

$$U(\omega, y, t) = A(\omega, t) \exp[-i\omega \operatorname{tg} \alpha y].\tag{3.4}$$

Решение (3.4) удовлетворяет краевому условию (3.3). Имеет место следующая теорема.

Теорема 3.1. *Начально-краевая задача (3.1)–(3.3) представима в виде нелинейного интегрального уравнения*

$$u(x, y, t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} k_1(x - \xi, y, t) u_0(\xi, y) d\xi + \int_0^t \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} k_2(x - \xi, t - \tau) g(\xi, y, \tau) d\xi d\tau,$$

где

$$g(\xi, y, \tau) = K(1 + \gamma \cos Qu(\xi, y, \tau)) - \Lambda Qu(\xi, y, \tau),$$

$$k_1(x, y, t) = \frac{\exp[(1 \mp \Lambda)t]}{2\sqrt{\pi D(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)t}} \exp\left[-\frac{(x + y \operatorname{tg} \alpha)^2}{4D(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)t}\right],$$

$$k_2(x, t) = \frac{\exp[(1 \mp \Lambda)t]}{2\sqrt{\pi D(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)t}} \exp\left[-\frac{x^2}{4D(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)t}\right].$$

Доказательство. Подставим (3.4) в (3.2), получим неоднородное уравнение

$$\frac{\partial A(\omega, t)}{\partial t} - [1 - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)]A(\omega, t) - \Lambda QA(\omega, t) = G(\omega, y, t) \exp[i\omega \operatorname{tg} \alpha y]. \quad (3.5)$$

Соответствующее (3.5) однородное уравнение имеет вид

$$\frac{\partial A(\omega, t)}{\partial t} = [1 - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)]A(\omega, t) + \Lambda QA(\omega, t). \quad (3.6)$$

Разделяя переменные в (3.6) в виде $A(\omega, t) = X(\omega)T(t)$, получим:

$$\frac{T'(t) - T(t)}{T(t)} = -D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \Lambda \frac{QX(\omega)}{X(\omega)} = -\lambda,$$

откуда

$$T(t) = C \exp[(1 - \lambda)t].$$

Спектральную задачу для функционального уравнения

$$(\lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))X(\omega) + \Lambda X(-\omega) = 0$$

запишем в виде

$$\begin{aligned} (\lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))X(\omega) + \Lambda X_1(\omega) &= 0, \\ (\lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))X_1(\omega) + \Lambda X(\omega) &= 0, \end{aligned}$$

где $X_1(\omega) = X(-\omega)$. Существование нетривиального решения определяется условием

$$\lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) = \pm \Lambda.$$

Если $\lambda = \lambda^+ = D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) + \Lambda$, то $X(-\omega) = -X(\omega)$, следовательно, $X(\omega)$ — произвольная нечётная функция. Если $\lambda = \lambda^- = D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha) - \Lambda$, то $X(-\omega) = X(\omega)$, следовательно, $X(\omega)$ — произвольная чётная функция.

Тогда

$$\begin{aligned} T^+(t) &= C^+ \exp[(1 - \lambda^+)t] = C^+ \exp[(1 - \Lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))t], \\ T^-(t) &= C^- \exp[(1 - \lambda^-)t] = C^- \exp[(1 + \Lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))t]. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$A^\pm(\omega, t) = X^\pm C^\pm \exp[(1 \mp \Lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))t].$$

Общее решение соответствующего однородного уравнения (3.1) имеет вид

$$U^\pm(\omega, y, t) = C^\pm X^\pm \exp[(1 \mp \Lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))t - i\omega(\operatorname{tg} \alpha)y].$$

Общее решение (3.1) получаем методом вариации произвольной постоянной:

$$U^\pm(\omega, y, t) = C(t)X^\pm \exp[(1 \mp \Lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))t - i\omega(\operatorname{tg} \alpha)y]. \quad (3.7)$$

Одно из частных решений

$$\tilde{U}^\pm(\omega, y, t) = \int_0^t G(\omega, y, \tau) \exp[(1 \mp \Lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))(t - \tau)] d\tau. \quad (3.8)$$

Таким образом, с учетом формул (3.7), (3.8), соответственно, для общего решения получаем

$$\begin{aligned} U(\omega, y, t) &= U^\pm(\omega, y, t) + \tilde{U}^\pm(\omega, y, t) = \\ &= C^\pm X^\pm(\omega) \exp[(1 \mp \Lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))t - i\omega(\operatorname{tg} \alpha)y] + \\ &+ \int_0^t G(\omega, y, \tau) \exp[(1 \mp \Lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))(t - \tau)] d\tau. \end{aligned}$$

Из начального условия (3.2)

$$U(\omega, y, 0) = C^\pm X^\pm(\omega) \exp[-i\omega(\operatorname{tg} \alpha)y] = U_0(\omega, y).$$

Итак,

$$\begin{aligned} U(\omega, y, t) &= U_0(\omega, y) \exp[(1 \mp \Lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))t] + \\ &+ \int_0^t G(\omega, y, \tau) \exp[(1 \mp \Lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))(t - \tau)] d\tau = \\ &= K_1(\omega, t)U_0(\omega, y) + \int_0^t K_2(\omega, t - \tau)G(\omega, y, \tau) d\tau. \end{aligned}$$

С помощью обратного преобразования Фурье находим

$$\begin{aligned} k_1(x, y, t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp[(1 \mp \Lambda - D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha))t] \exp[-i\omega(\operatorname{tg} \alpha)y] \exp[-i\omega x] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi D(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}t} \exp\left[-\frac{(x + y \operatorname{tg} \alpha)^2}{4D(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)t}\right] \exp[(1 \mp \Lambda)t], \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} k_2(x, t - \tau) &= \exp[(1 \mp \Lambda)(t - \tau)] \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{\mathbb{R}} \exp[-D\omega^2(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(t - \tau)] \exp[-i\omega x] d\omega = \\ &= \frac{1}{2\sqrt{\pi D(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)}(t - \tau)} \exp[(1 \mp \Lambda)(t - \tau)] \exp\left[-\frac{x^2}{4D(1 + \operatorname{tg}^2 \alpha)(t - \tau)}\right]. \end{aligned}$$

Таким образом, имеет место представление (3.1). \square

Замечание. Представление (2.4) задачи (1.5)–(1.7) (теорема 2.1) в виде нелинейного интегрального уравнения (не содержащего оператор Q) позволяет строить итерационный процесс вида $u^{n+1} = Au^n + Bu_0$, $n = 0, 1, \dots$. Считая $u^0 = 0$, получаем $u^1 = Bu_0$, что позволяет видеть структуру решения (первое итерационное слагаемое в (2.4)). На рис. 1 представлено $u^1(x, y, t = 1)$ при фиксированных значениях параметров и начальных условиях $u_0(x, y) = \sin \frac{\pi}{2l}y \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$ или $u_0(x, y) = \cos \frac{\pi}{2l}y \exp\left[-\frac{x^2}{2}\right]$. Аналогичное рассуждение справедливо для частного случая теоремы 3.1.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе начально-краевая задача для нелинейного функционально-дифференциального уравнения в полосе с оператором отражения по переменной $x \in \mathbb{R}$ и краевыми условиями с косой производной на границах полосы с помощью интегральных преобразований Фурье и Лапласа сводится к нелинейному интегральному уравнению. При разделении переменных получены спектральная задача по переменной y ($|y| < l$) с условиями, соответствующими косой производной, и зависимая задача по переменной $x \in \mathbb{R}$, содержащая оператор инволюции Q ($Q^2 = I$). Структура соответствующих нелинейных уравнений отражает структуру исходной задачи. Ядра уравнений определяются через функции Грина соответствующей линеаризованной задачи.

Полученные нелинейные интегральные уравнения в дальнейшем будут использоваться для итерационных алгоритмов построения приближенных асимптотических решений исходной задачи. Частным случаем является задача с условиями Неймана.

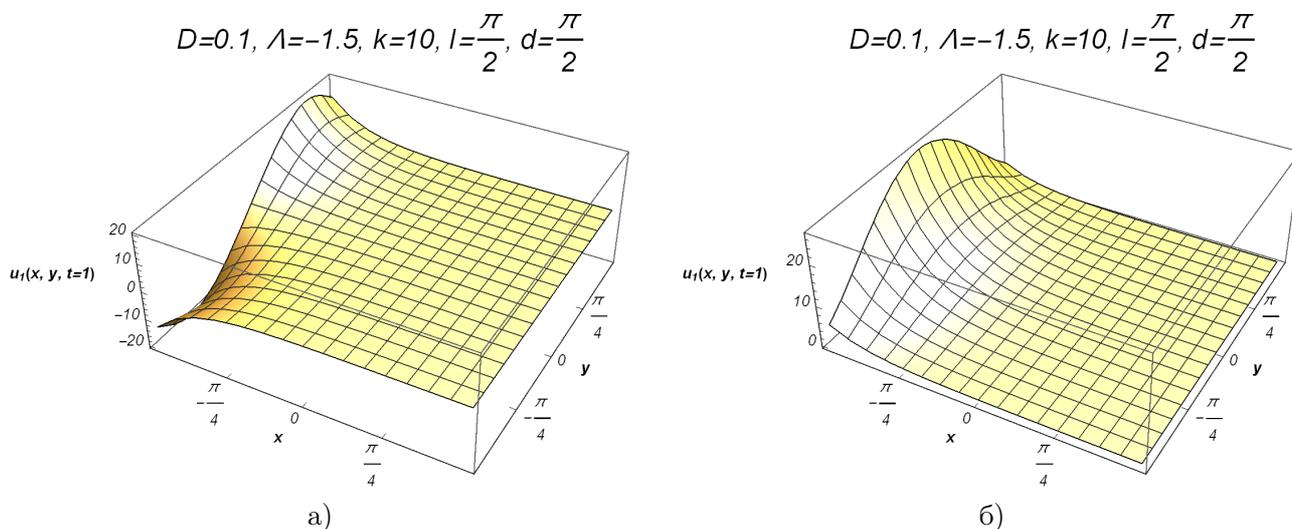


Рис. 1. Приближенное представление первого итерационного слагаемого в (2.4) при $t = 1$: а) для $u_0(x, y) = \sin \frac{\pi}{2l}y \exp \left[-\frac{x^2}{2} \right]$; б) для $u_0(x, y) = \cos \frac{\pi}{2l}y \exp \left[-\frac{x^2}{2} \right]$.

FIG. 1. Approximate representation of the first iteration term in (2.4) for $t = 1$: а) for $u_0(x, y) = \sin \frac{\pi}{2l}y \exp \left[-\frac{x^2}{2} \right]$; б) for $u_0(x, y) = \cos \frac{\pi}{2l}y \exp \left[-\frac{x^2}{2} \right]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ахманов С. А., Воронцов М. А., Иванов В. Ю. Генерация структур в оптических системах с двумерной обратной связью: на пути к созданию нелинейно-оптических аналогов нейронных сетей// В сб.: «Новые принципы оптической обработки информации». — М.: Наука, 1990. — С. 263–325.
2. Белан Е. П. О взаимодействии бегущих волн в параболическом функционально-дифференциальном уравнении// Дифф. уравн. — 2004. — 40, № 5. — С. 645–654.
3. Белан Е. П. О динамике бегущих волн в параболическом уравнении с преобразованием сдвига пространственной переменной// Журн. мат. физ., анализ, геом. — 2005. — 1, № 1. — С. 3–34.
4. Деч Г. Руководство к практическому применению преобразования Лапласа и Z-преобразования. С прил. табл., сост. Р. Гершелем. — М.: Наука, 1971.
5. Корнута А. А., Лукьяненко В. А. Функционально-дифференциальные уравнения параболического типа с оператором инволюции// Динам. сист. — 2019. — 9, № 4. — С. 390–409.
6. Корнута А. А., Лукьяненко В. А. Динамика решений нелинейных функционально-дифференциальных уравнений параболического типа// Изв. вузов. Прикл. нелиней. динам. — 2022. — 30, № 2. — С. 132–151.
7. Крутицкий П. А., Чикилев А. В. Метод углового потенциала в краевых задачах физики замагниченных полупроводников// Препринты ИПМ им. М. В. Келдыша. — 2003. — 072.
8. Кубышкин Е. П., Куликов В. А. Бифуркации автоколебательных решений нелинейного параболического уравнения с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2021. — 61, № 3. — С. 428–449.
9. Муравник А. Б. Функционально-дифференциальные параболические уравнения: интегральные представления и качественные свойства решений задачи Коши// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — 52. — С. 3–141.
10. Несененко Г. А. Метод граничных интегральных уравнений в решениях двумерных сингулярно возмущенных задач нестационарной теплопроводности с нелинейными граничными условиями// Дифф. уравн. — 2000. — 36, № 9. — С. 1160–1171.
11. Разгулин А. В. Нелинейные модели оптической синергетики. — М.: МАКС Пресс, 2008.

12. *Разгулин А. В., Романенко Т. Е.* Вращающиеся волны в параболическом функционально-дифференциальном уравнении с поворотом пространственного аргумента и запаздыванием// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2013. — 53, № 11. — С. 1804–1821.
13. *Achmanov S. A., Vorontzov M. A., Ivanov V. Yu., Larichev A. V., Zeleznykh N. I.* Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics — generation and interaction of spatiotemporal structures// J. Opt. Soc. Am. B. Opt. Phys. — 1992. — 9, № 1. — С. 78–90.
14. *Budzinskiy S. S., Razgulin A. V.* Rotating and standing waves in a diffractive nonlinear optical system with delayed feedback under $O(2)$ Hopf bifurcation// Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul. — 2017. — 49. — С. 17–29.
15. *Budzinskiy S. S., Razgulin A. V.* Pulsating and rotating spirals in a delayed feedback diffractive nonlinear optical system// Internat. J. Bifur. Chaos. Appl. Sci. Engrg. — 2021. — 31, № 1. — 2130002.
16. *Grigorieva E. V., Haken H., Kashchenko S. A., Pelster A.* Travelling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback// Phys. D. — 1999. — 125. — С. 123–141.
17. *Kornuta A. A., Lukianenko V. A.* Stable structures of nonlinear parabolic equations with transformation of spatial variables// Lobachevskii J. Math. — 2021. — 42, № 5. — С. 911–930.
18. *Kornuta A. A., Lukianenko V. A.* Stability of structures and asymptotics of nonlinear parabolic type equations solutions with transformation of arguments// Lobachevskii J. Math. — 2021. — 42, № 14. — С. 3468–3485.
19. *Kornuta A. A., Lukianenko V. A.* Scenarios of the behavior of solutions of a nonlinear functional-differential equation of parabolic type with transformation of arguments// В сб.: «Int. Sci. Conf. “Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis”». — Rostov-on-Don, 2021. — С. 29.
20. *Krutitskii P. A., Sgibnev A. I.* Integral-equation method in the mixed oblique derivative problem for harmonic functions outside cuts on the plane// J. Math. Sci. (N. Y.) — 2008. — 151. — С. 2710–2725.
21. *Kubyshekin E. P., Kulikov V. A.* Bifurcations of self-oscillatory solutions to a nonlinear parabolic equation with a rotating spatial argument and time delay// Comput. Math. Math. Phys. — 2021. — 61, № 3. — С. 403–423.
22. *Vorontzov M. A., Razgulin A. V.* Properties of global attractor in nonlinear optical system having nonlocal interactions// Photonics and Optoelectronics. — 1993. — 1, No 2. — С. 103–111.

А. А. Корнута

Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского

E-mail: korn_57@mail.ru

В. А. Лукьяненко

Крымский федеральный университет имени В. И. Вернадского

E-mail: art-inf@yandex.ru

UDC 517.957

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-276-288

EDN: TXNZS

Nonlinear optics problem with transformation of a spatial variable and an oblique derivative

A. A. Kornuta and V. A. Lukianenko

V. I. Vernadsky Crimean Federal University

Abstract. In this paper, we consider a functional differential equation of parabolic type on a strip with a transformation of a spatial variable and boundary conditions with an oblique derivative. Using the Laplace and Fourier transforms, we obtain a representation of the problem under consideration in the form of a nonlinear integral equation. A special case of this representation is considered. The proved statements make it possible to implement iterative methods for obtaining approximate solutions of nonlinear partial differential equations taking into account the given conditions. The results show that the presented method is promising for solving similar problems.

Keywords: functional differential equations, bifurcation, boundary conditions with an oblique derivative, Fourier transform, Laplace transform.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare that no financial support was received.

For citation: A. A. Kornuta, V. A. Lukianenko, “Nonlinear optics problem with transformation of a spatial variable and an oblique derivative,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. 69, No. 2, 276–288. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-276-288>

REFERENCES

1. S. A. Akhmanov, A. M. Vorontsov, and V. Yu. Ivanov, “Generatsiya struktur v opticheskikh sistemakh s dvumernoy obratnoy svyaz’yu: na puti k sozdaniyu nelineynno-opticheskikh analogov neyronnykh setey” [Generation of structures in optical systems with two-dimensional feedback: On the way to the creation of nonlinear optical analogs of neural network], In: *Novye printsipy opticheskoy obrabotki informatsii* [New Physical Principles of Optical Information Processing], Nauka, Moscow, 1990, pp. 263–325 (in Russian).
2. E. P. Belan, “O vzaimodeystvii begushchikh voln v parabolicheskom funktsional’no-differentsial’nom uravnenii” [On the interaction of traveling waves in a parabolic functional-differential equation], *Diff. uravn. [Differ. Equ.]*, 2004, 40, No. 5, 645–654 (in Russian).
3. E. P. Belan, “O dinamike begushchikh voln v parabolicheskom uravnenii s preobrazovaniem sdviga prostranstvennoy peremennoy” [Travelling waves dynamics in a nonlinear parabolic equation with a shifted spatial argument], *Zhurn. mat. fiz., anal., geom.* [J. Math. Phys. Anal. Geom.], 2005, 1, No. 1, 3–34 (in Russian).
4. G. Doetsch, *Rukovodstvo k prakticheskomu primeneniyu preobrazovaniya Laplasya i Z-preobrazovaniya* [A Guide to the Practical Application of the Laplace Transform and Z-transform], Nauka, Moscow, 1971 (Russian translation).
5. A. A. Kornuta and V. A. Lukianenko, “Funktsional’no-differentsial’nye uravneniya parabolicheskogo tipa s operatorom involyutsii” [Functional differential equations of parabolic type with an involution operator], *Dinam. sist.* [Dyn. Sys.], 2019, 9, No. 4, 390–409 (in Russian).
6. A. A. Kornuta and V. A. Lukianenko, “Dinamika resheniy nelineynykh funktsional’no-differentsial’nykh uravneniy parabolicheskogo tipa” [Dynamics of solutions of nonlinear functional differential equations of



- parabolic type], *Izv. vuzov. Prikl. neline. dinam.* [Bull. Higher Edu. Ser. Appl. Nonlinear Dyn.], 2022, **30**, No. 2, 132–151 (in Russian).
7. P. A. Krutitskiy and A. V. Chikilev, “Metod uglovogo potentsiala v kraevykh zadachakh fiziki zamagnichen-nykh poluprovodnikov” [Angular potential method in boundary-value problems of physics of magnetized semiconductors], *Preprinty IPM im. M. V. Keldysha* [Preprints of Keldysh Inst. Appl. Math.], 2003, **072** (in Russian).
 8. E. P. Kubyshkin and V. A. Kulikov, “Bifurkatsii avtokolebatel’nykh resheniy nelineynogo parabolicheskogo uravneniya s povorotom prostranstvennogo argumenta i zapazdyvaniem” [Bifurcations of self-oscillating solutions of a nonlinear parabolic equation with rotation of the spatial argument and delay], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Appl. Mech. Tech. Phys.], 2021, **61**, No. 3, 428–449 (in Russian).
 9. A. B. Muravnik, “Funktional’no-differentsial’nye parabolicheskie uravneniya: integral’nye predstavleniya i kachestvennye svoystva resheniy zadachi Koshi” [Functional differential parabolic equations: Integral transformations and qualitative properties of solutions of the Cauchy problem], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **52**, 3–141 (in Russian).
 10. G. A. Nesenenko, “Metod granichnykh integral’nykh uravneniy v resheniyakh dvumernykh singulyarno voz-mushchennykh zadach nestatsionarnoy teploprovodnosti s nelineynymi granichnymi usloviyami” [Method of boundary integral equations in solutions of two-dimensional singularly perturbed problems of nonstationary heat conduction with nonlinear boundary conditions], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2000, **36**, No. 9, 1160–1171 (in Russian).
 11. A. V. Razgulin, *Nelineynnye modeli opticheskoy sinergetiki* [Nonlinear Models of Optical Synergetics], MAKS Press, Moscow, 2008 (in Russian).
 12. A. V. Razgulin and T. E. Romanenko, “Vrashchayushchiesya volny v parabolicheskom funktsional’no-differentsial’nom uravnenii s povorotom prostranstvennogo argumenta i zapazdyvaniem” [Rotating waves in parabolic functional differential equations with rotation of spatial argument and time delay], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2013, **53**, No. 11, 1804–1821 (in Russian).
 13. S. A. Achmanov, M. A. Vorontzov, V. Yu. Ivanov, A. V. Larichev, and N. I. Zeleznykh, “Controlling transverse-wave interactions in nonlinear optics — generation and interaction of spatiotemporal structures,” *J. Opt. Soc. Am. B. Opt. Phys.*, 1992, **9**, No. 1, 78–90.
 14. S. S. Budzinskiy and A. V. Razgulin, “Rotating and standing waves in a diffractive nonlinear optical system with delayed feedback under $O(2)$ Hopf bifurcation,” *Commun. Nonlinear Sci. Numer. Simul.*, 2017, **49**, 17–29.
 15. S. S. Budzinskiy and A. V. Razgulin, “Pulsating and rotating spirals in a delayed feedback diffractive nonlinear optical system,” *Internat. J. Bifur. Chaos. Appl. Sci. Engrg.*, 2021, **31**, No. 1, 2130002.
 16. E. V. Grigorieva, H. Haken, S. A. Kashchenko, and A. Pelster, “Travelling wave dynamics in a nonlinear interferometer with spatial field transformer in feedback,” *Phys. D*, 1999, **125**, 123–141.
 17. A. A. Kornuta and V. A. Lukianenko, “Stable structures of nonlinear parabolic equations with transformation of spatial variables,” *Lobachevskii J. Math.*, 2021, **42**, No. 5, 911–930.
 18. A. A. Kornuta and V. A. Lukianenko, “Stability of structures and asymptotics of nonlinear parabolic type equations solutions with transformation of arguments,” *Lobachevskii J. Math.*, 2021, **42**, No. 14, 3468–3485.
 19. A. A. Kornuta and V. A. Lukianenko, “Scenarios of the behavior of solutions of a nonlinear functional-differential equation of parabolic type with transformation of arguments,” In: *Int. Sci. Conf. “Modern Methods, Problems and Applications of Operator Theory and Harmonic Analysis”*, Rostov-on-Don, 2021, pp. 29.
 20. P. A. Krutitskii and A. I. Sgibnev, “Integral-equation method in the mixed oblique derivative problem for harmonic functions outside cuts on the plane,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2008, **151**, 2710–2725.
 21. E. P. Kubyshkin and V. A. Kulikov, “Bifurcations of self-oscillatory solutions to a nonlinear parabolic equation with a rotating spatial argument and time delay,” *Comput. Math. Math. Phys.*, 2021, **61**, No. 3, 403–423.
 22. M. A. Vorontzov and A. V. Razgulin, “Properties of global attractor in nonlinear optical system having nonlocal interactions,” *Photonics and Optoelectronics*, 1993, **1**, No 2, 103–111.

A. A. Kornuta
 V. I. Vernadsky Crimean Federal University
 E-mail: korn_57@mail.ru

V. A. Lukianenko
 V. I. Vernadsky Crimean Federal University
 E-mail: art-inf@yandex.ru

УДК 517.53/.55

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-289-305

EDN: TJWAKD

ИСКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ МНОЖЕСТВА

А. С. КРИВОШЕЕВ¹, О. А. КРИВОШЕЕВА²¹Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа, Россия²Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

Аннотация. В работе исследуются последовательности комплексных чисел первого порядка. Допускаются кратные члены у таких последовательностей. Рассматриваются также комплексные последовательности с конечной максимальной плотностью. Строятся специальные покрытия кратных множеств $\{\lambda_k, n_k\}$, состоящие из кругов с центрами в точках λ_k специальных радиусов. В частности, строятся покрытия, связанные компоненты которых имеют относительно малый диаметр, а также покрытия, которые являются C_0 -множествами. Эти покрытия выступают в роли исключительных множеств для целых функций экспоненциального типа. Вне этих множеств получено представление логарифма модуля целой функции. Ранее подобное представление было получено Б. Я. Левиным вне исключительного множества, относительно которого утверждается лишь его существование. В отличие от этого в данной работе приводится простое конструктивное построение исключительного множества. Построены базисы в инвариантном подпространстве аналитических функций в выпуклой области. Они состоят из линейных комбинаций собственных и присоединенных функций (экспоненциальных мономов) оператора дифференцирования, разбитых на относительно малые группы.

Ключевые слова: ряд экспоненциальных мономов, выпуклая область, исключительное множество, индекс конденсации.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Исследование второго автора выполнено при поддержке конкурса «Молодая математика России».

Для цитирования: А. С. Кривошеев, О. А. Кривошеева. Исключительные множества // Современ. мат. Фундам. направл. 2023. Т. 69, № 2. С. 289–305. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-289-305>

1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть f — целая функция экспоненциального типа в комплексной плоскости, т. е.

$$\sigma_f = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln M_f(r)}{r} < \infty, \quad M_f(r) = \max_{|z| \leq r} |f(z)|.$$

Другими словами, выполнено неравенство

$$\ln |f(z)| \leq A + B|z|, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Функция

$$h_f(\varphi) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r}, \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

называется *индикатором* f . Говорят [15, гл. III], что f имеет *вполне регулярный рост*, если

$$h_f(\varphi) = \lim_{r \notin E, r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r\rho(r)}, \quad \varphi \in [0, 2\pi],$$

где $E \subset (0, +\infty)$ — множество нулевой относительной меры (E_0 -множество), т. е.

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{\text{mes}(E \cap (0, r))}{r} = 0$$

(символ mes обозначает лебегову меру множества).

Классический результат Б. Я. Левина [15, гл. II, теорема 2; гл. III, теорема 4] утверждает, что f имеет вполне регулярный рост тогда и только тогда, когда ее кратное нулевое множество $\Lambda_f = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^{\infty}$ является правильно распределенным. При этом выполнено равенство

$$\ln |f(re^{i\varphi})| = rh_f(\varphi) + \alpha(r), \quad re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus B_f, \quad \alpha(r)/r \rightarrow 0, \quad r \rightarrow +\infty, \quad (1.1)$$

где B_f — C_0 -множество, т. е. может быть покрыто кругами $B(z_j, r_j)$, $j \geq 1$, такими, что

$$\overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{1}{r} \sum_{|z_j| \leq r} r_j = 0.$$

Отметим, что в работе [5] доказывается, что эти круги могут быть непересекающимися. Автор книги [15] отмечает, что исключительное множество B_f строится неконструктивно. Доказывается лишь, что оно существует. В одном частном случае в [15] удается построить простое исключительное множество. С этой целью в книге [15] вводится понятие *регулярного множества* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Это простое (т. е. $n_k \equiv 1$) правильно распределенное множество, для которого круги специальных радиусов с центрами в точках λ_k попарно не пересекаются. В случае, когда Λ_f — регулярное множество, верно (1.1), где B_f является объединением указанных кругов.

В работе [14] вводится понятие *правильно сбалансированного кратного множества* $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Это правильно распределенное множество с нулевым индексом конденсации S_Λ , который был введен в работе [6]. В [14] доказывается, что регулярное множество является частным случаем правильно сбалансированного множества. Более того, доказывается [14, теорема 4.5], что правильная сбалансированность множества Λ_f является необходимым и достаточным условием для того, чтобы в равенстве (1.1) исключительное множество B_f состояло из попарно непересекающихся кругов относительно малых радиусов.

Цель данной работы — конструктивное построение простого исключительного множества B_f , которое фигурирует в равенстве (1.1), в форме, удобной для его применения. Другой целью этой работы является конструктивное построение разбиения нулевого множества Λ_f на относительно малые группы так, чтобы групповой индекс конденсации $S_\Lambda(U)$, введенный в работах [9, 10], равнялся нулю. В работе [10] по всем таким разбиениям строится базис в инвариантном относительно оператора дифференцирования подпространстве аналитических функций в выпуклой области комплексной плоскости. При этом в [10] подобные разбиения не строятся, а лишь доказывается, что они существуют.

Во втором разделе данной работы строятся специальные покрытия кратных множеств $\{\lambda_k, n_k\}$, состоящие из кругов с центрами в точках λ_k специальных радиусов. В частности, строятся покрытия, связные компоненты которых имеют относительно малый диаметр, а также покрытия, которые являются C_0 -множествами.

Третий раздел носит вспомогательный характер. В нем устанавливаются оценки снизу на модули специальных многочленов.

Основные результаты работы приведены в двух последних разделах. Здесь получена оценка (1.1) для функции вполне регулярного роста вне исключительных множеств B_f , построенных в предыдущем разделе (теоремы 4.1 и 4.2). Построены базисы в инвариантном подпространстве аналитических функций в выпуклой области. Они состоят из линейных комбинаций собственных и присоединенных функций (экспоненциальных мономов) оператора дифференцирования, разбитых на относительно малые группы (теоремы 5.1 и 5.2).

2. СПЕЦИАЛЬНОЕ ПОКРЫТИЕ

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}_{k=1}^\infty$ — последовательность различных комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k . Считаем, что $|\lambda_k|$ не убывает и $|\lambda_k| \rightarrow \infty, k \rightarrow \infty$. Символом $n(z, r, \Lambda)$ обозначим число точек λ_k с учетом их кратностей n_k в круге $B(z, r)$ с центром в точке $z \in \mathbb{C}$ и радиуса $r > 0$. Положим $n(r, \Lambda) = n(0, r, \Lambda)$. *Верхней плотностью* последовательности Λ называется величина

$$\bar{n}(\Lambda) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{n(r, \Lambda)}{r}.$$

Говорят, что Λ имеет *плотность* $n(\Lambda)$ (измерима), если существует предел

$$\lim_{r \rightarrow +\infty} \frac{n(r, \Lambda)}{r} = n(\Lambda) < \infty.$$

Положим

$$\bar{n}_0(\Lambda, \delta) = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{n(r, \Lambda) - n((1 - \delta)r, \Lambda)}{\delta r}, \quad \bar{n}_0(\Lambda) = \overline{\lim}_{\delta \rightarrow 0} \bar{n}_0(\Lambda, \delta).$$

Величина $\bar{n}_0(\Lambda)$ называется *максимальной плотностью* Λ . В силу [1, лемма 2.1] верны неравенства

$$\bar{n}(\Lambda) \leq \bar{n}_0(\Lambda, \delta) \leq \bar{n}_0(\Lambda), \quad \delta \in (0, 1). \tag{2.1}$$

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $h > 0$ и $\beta_k(h, \Lambda)$, $k \geq 1$, обозначает максимальное среди всех $p \in \mathbb{N}$, для которых верно равенство $n(\lambda_k, hp, \Lambda) = p$. Таким образом,

$$n(\lambda_k, \beta_k(h, \Lambda)h, \Lambda) = \beta_k(h, \Lambda), \quad n(\lambda_k, hp, \Lambda) \neq p, \quad p > \beta_k(h, \Lambda), \quad k \geq 1, \tag{2.2}$$

Лемма 2.1. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — последовательность с конечной верхней плотностью $\bar{n}(\Lambda) = \tau$. Для всех $h \in (0, \tau^{-1})$ и $k \geq 1$ величина $\beta_k(h, \Lambda)$ корректно определена и

$$n(\lambda_k, hp, \Lambda) < p, \quad p > \beta_k(h, \Lambda). \tag{2.3}$$

Если $h \in (0, ((\mu + 1)\tau)^{-1})$, то существует номер $k(h)$ такой, что

$$\mu\beta_k(h, \Lambda)h \leq |\lambda_k|, \quad k \geq k(h). \tag{2.4}$$

Доказательство. Пусть $h \in (0, \tau^{-1})$ и $k \geq 1$. Предположим, что для некоторой последовательности чисел p_j верны неравенства $n(\lambda_k, hp_j, \Lambda) \geq p_j, j \geq 1$. Тогда

$$\tau = \overline{\lim}_{r \rightarrow +\infty} \frac{n(r, \Lambda)}{r} \geq \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \frac{n(|\lambda_k| + hp_j, \Lambda)}{|\lambda_k| + hp_j} \geq \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \frac{n(\lambda_k, hp_j, \Lambda)}{|\lambda_k| + hp_j} \geq \frac{1}{h} > \tau.$$

Получили противоречие. Таким образом, существует номер $\beta_k(h, \Lambda)$ такой, что

$$n(\lambda_k, hp, \Lambda) < p, \quad p > \beta_k(h, \Lambda), \quad n(\lambda_k, \beta_k(h, \Lambda)h, \Lambda) \geq \beta_k(h, \Lambda). \tag{2.5}$$

Предположим, что $n(\lambda_k, \beta_k(h, \Lambda)h, \Lambda) > \beta_k(h, \Lambda)$. Тогда

$$n(\lambda_k, (\beta_k(h, \Lambda) + 1)h, \Lambda) \geq n(\lambda_k, \beta_k(h, \Lambda)h, \Lambda) > \beta_k(h, \Lambda) \geq \beta_k(h, \Lambda) + 1.$$

Это противоречит (2.5). Следовательно, верно (2.2) и (2.3). Это означает, что величина $\beta_k(h, \Lambda)$ определена корректно. Пусть $h \in (0, ((\mu + 1)\tau)^{-1})$. Согласно определению $\bar{n}(\Lambda)$ найдем номер $k(h)$ такой, что

$$\frac{\beta_k(h, \Lambda)}{|\lambda_k| + \beta_k(h, \Lambda)h} = \frac{n(|\lambda_k| + \beta_k(h, \Lambda)h, \Lambda)}{|\lambda_k| + \beta_k(h, \Lambda)h} \leq \frac{1}{(\mu + 1)h}.$$

Отсюда получаем (2.4). Лемма доказана. □

Положим

$$\Omega(h, \Lambda) = \bigcup_{k=1}^\infty B(\lambda_k, \beta_k(h, \Lambda)h),$$

и пусть $\Omega_s(h, \Lambda)$, $s \geq 1$, — все связные компоненты множества $\Omega(h, \Lambda)$.

Лемма 2.2. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — последовательность с конечной верхней плотностью $\overline{n}(\Lambda) = \tau$ и $h \in (0, (4\tau)^{-1})$. Множества $\Omega_s(h, \Lambda)$ ограничены и существуют номера $k(s, p)$, $p = \overline{1, p_s}$, $s \geq 1$, такие, что

$$\Omega_s(h, \Lambda) \subset \bigcup_{p=1}^{p_s} B(\lambda_{k(s,p)}, 3\beta_{k(s,p)}(h, \Lambda)h), \quad s \geq 1, \quad (2.6)$$

и круги $B(\lambda_{k(s,p)}, \beta_{k(s,p)}(h, \Lambda)h)$, $p = \overline{1, p_s}$, $s \geq 1$, попарно не пересекаются. Кроме того,

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \frac{d_s(h)}{\mu_s(h)} \leq 3\tau h, \quad (2.7)$$

где $d_s(h)$ — диаметр множества $\Omega_s(h, \Lambda)$ и

$$\mu_s(h) = \sup_{z \in \Omega_s(h, \Lambda)} |z|, \quad s \geq 1.$$

Доказательство. Покажем вначале, что $\Omega_s(h, \Lambda)$ — ограниченное множество для всех $s \geq 1$. Для этого достаточно показать, что ограничены все связные компоненты множества

$$U = \bigcup_{k=1}^{\infty} (|\lambda_k| - \beta_k(h, \Lambda)h, |\lambda_k| + \beta_k(h, \Lambda)h).$$

Предположим, что это множество содержит неограниченную компоненту (r_1, ∞) . Определим номера $k(l)$. Номер $k(1)$ найдем из условия

$$|\lambda_{k(1)}| + \beta_{k(1)}(h, \Lambda)h = \max\{|\lambda_k| + \beta_k(h, \Lambda)h : |\lambda_k| - \beta_k(h, \Lambda)h = r_1\}.$$

Предположим, что такой выбор невозможен. Тогда найдутся натуральные числа k_j такие, что $|\lambda_{k_j}| - \beta_{k_j}(h, \Lambda)h \leq r_1 + 1$, $j \geq 1$. Отсюда согласно условию и определению $\beta_k(h, \Lambda)$ получаем:

$$\tau \geq \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \frac{n(|\lambda_{k_j}| + \beta_{k_j}(h, \Lambda)h, \Lambda)}{|\lambda_{k_j}| + \beta_{k_j}(h, \Lambda)h} = \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \frac{\beta_{k_j}(h, \Lambda)}{|\lambda_{k_j}| + \beta_{k_j}(h, \Lambda)h} \geq \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \frac{\beta_{k_j}(h, \Lambda)}{r_1 + 1 + 2\beta_{k_j}(h, \Lambda)h} = \frac{1}{2h} > 2\tau. \quad (2.8)$$

Получили противоречие. Таким образом, номер $k(1)$ корректно определен. Далее, среди всех номеров k таких, что

$$|\lambda_k| + \beta_k(h, \Lambda)h > |\lambda_{k(1)}| + \beta_{k(1)}(h, \Lambda)h > |\lambda_k| - \beta_k(h, \Lambda)h > r_1,$$

выберем номер $k(2)$, реализующий максимум величины $|\lambda_k| + \beta_k(h, \Lambda)h$. Он существует по тем же соображениям, что и при получении неравенств (2.8). Определим по индукции номера $k(l)$ из условия

$$|\lambda_{k(l+1)}| + \beta_{k(l+1)}(h, \Lambda)h = \max\{|\lambda_k| + \beta_k(h, \Lambda)h\},$$

где максимум берется по всем номерам k таким, что

$$|\lambda_k| + \beta_k(h, \Lambda)h > |\lambda_{k(l)}| + \beta_{k(l)}(h, \Lambda)h > |\lambda_k| - \beta_k(h, \Lambda)h \geq |\lambda_{k(l-1)}| + \beta_{k(l-1)}(h, \Lambda)h. \quad (2.9)$$

Как и выше, номер $k(l+1)$ корректно определен. Таким образом, верно равенство

$$(r_1, \infty) = \bigcup_{l=1}^{\infty} (|\lambda_{k(l)}| - \beta_{k(l)}(h, \Lambda)h, |\lambda_{k(l)}| + \beta_{k(l)}(h, \Lambda)h).$$

В силу (2.9) и определения номера $k(l+1)$ имеем:

$$\begin{aligned} |\lambda_{k(l+1)}| + \beta_{k(l+1)}(h, \Lambda)h &> |\lambda_{k(l)}| + \beta_{k(l)}(h, \Lambda)h > |\lambda_{k(l+1)}| - \beta_{k(l+1)}(h, \Lambda)h > \\ &> |\lambda_{k(l-1)}| + \beta_{k(l-1)}(h, \Lambda)h, \quad l > 1. \end{aligned}$$

Последнее означает, что каждая точка множества (r_1, ∞) принадлежит не более чем двум из интервалов $(|\lambda_{k(l)}| - \beta_{k(l)}(h, \Lambda)h, |\lambda_{k(l)}| + \beta_{k(l)}(h, \Lambda)h)$, $l \geq 1$. Поэтому с учетом определения чисел $\beta_k(h, \Lambda)$ получаем:

$$\tau \geq \overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} \frac{n(|\lambda_{k(l)}| + \beta_{k(l)}(h, \Lambda)h, \Lambda)}{|\lambda_{k(l)}| + \beta_{k(l)}(h, \Lambda)h} \geq \overline{\lim}_{l \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \sum_{j=1}^l \beta_{k(j)}(h, \Lambda) \right) \left(2h \sum_{j=1}^l \beta_{k(j)}(h, \Lambda) \right)^{-1} = \frac{1}{4h} > \tau.$$

Получили противоречие. Таким образом, все связные компоненты множества U ограничены. Это означает, что ограничены также множества $\Omega_s(h, \Lambda)$, $s \geq 1$.

Фиксируем $s \geq 1$. Определим точки $\lambda_{k(s,p)} \in \Omega_s(h, \Lambda)$, $p = \overline{1, p_s}$, такие, что верно (2.6) и круги $B(\lambda_{k(s,p)}, \beta_{k(s,p)}(h, \Lambda)h)$, $p = \overline{1, p_s}$, попарно не пересекаются. Пусть $\lambda_{k(s,1)}$ — одна из точек $\lambda_k \in \Omega_s(h, \Lambda)$, для которой верно равенство

$$\beta_{k(s,1)}(h, \Lambda) = \max_{\lambda_k \in \Omega_s(h, \Lambda)} \beta_k(h, \Lambda).$$

Поскольку $\Omega_s(h, \Lambda)$ — ограниченное множество, то такая точка существует. Предположим, что мы уже определили точки $\lambda_{k(s,p)}$, $p = \overline{1, p_s}$. Тогда в качестве точки $\lambda_{k(s,l+1)}$ берем любую из точек

$$\lambda_k \in \Omega_{s,l} = \Omega_s(h, \Lambda) \setminus \bigcup_{p=1}^l B(\lambda_{k(s,p)}, 2\beta_{k(s,p)}(h, \Lambda)h),$$

для которой верно равенство

$$\beta_{k(s,l+1)}(h, \Lambda) = \max_{\lambda_k \in \Omega_{s,l}} \beta_k(h, \Lambda). \tag{2.10}$$

Таким образом, точки $\lambda_{k(s,p)} \in \Omega_s(h, \Lambda)$, $p = \overline{1, p_s}$, определены. По построению каждая точка $\lambda_k \in \Omega_s(h, \Lambda)$ принадлежит объединению кругов $B(\lambda_{k(s,p)}, 2\beta_{k(s,p)}(h, \Lambda)h)$, $p = \overline{1, p_s}$. Пусть

$$\lambda_k \in B(\lambda_{k(s,l+1)}, 2\beta_{k(s,l+1)}(h, \Lambda)h) \setminus \bigcup_{p=1}^l B(\lambda_{k(s,p)}, 2\beta_{k(s,p)}(h, \Lambda)h).$$

Тогда в силу (2.10) имеет место вложение

$$B(\lambda_k, \beta_k(h, \Lambda)h) \subset B(\lambda_{k(s,l+1)}, 3\beta_{k(s,l+1)}(h, \Lambda)h).$$

Поскольку

$$\Omega_s(h, \Lambda) = \bigcup_{\lambda_k \in \Omega_s(h, \Lambda)} B(\lambda_k, \beta_k(h, \Lambda)h), \tag{2.11}$$

то это дает нам (2.9). Таким образом,

$$\Omega(h, \Lambda) \subset \bigcup_{s=1}^{\infty} \bigcup_{p=1}^{p_s} B(\lambda_{k(s,p)}, 3\beta_{k(s,p)}(h, \Lambda)h).$$

Отметим, что

$$\lambda_{k(s,l+1)} \notin \bigcup_{p=1}^l B(\lambda_{k(s,p)}, 2\beta_{k(s,p)}(h, \Lambda)h).$$

Кроме того, в силу (2.10) верны неравенства

$$\beta_{k(s,1)} \geq \beta_{k(s,2)} \geq \dots \geq \beta_{k(s,p_s)}. \tag{2.12}$$

Поэтому круг $B(\lambda_{k(s,l+1)}, \beta_{k(s,l+1)}(h, \Lambda)h)$ не имеет общих точек с кругами $B(\lambda_{k(s,p)}, \beta_{k(s,p)}(h, \Lambda)h)$ для всех $p = \overline{1, l}$. Учитывая еще (2.10) и то, что множества $\Omega_s(h, \Lambda)$, $s \geq 1$, попарно не пересекаются, находим, что все круги $B(\lambda_{k(s,p)}, \beta_{k(s,p)}(h, \Lambda)h)$, $p = \overline{1, p_s}$, $s \geq 1$, попарно не пересекаются. Отсюда с учетом (2.6), (2.11) и (2.2) получаем:

$$\frac{d_s(h)}{\mu_s(h)} \leq \frac{1}{\mu_s(h)} \sum_{p=1}^{p_s} 3\beta_{k(s,p)}(h, \Lambda)h \leq \frac{3h}{\mu_s(h)} \sum_{p=1}^{p_s} n(\lambda_{k(s,p)}, \beta_{k(s,p)}(h, \Lambda)h) \leq \frac{3hn(\mu_s(h), \Lambda)}{\mu_s(h)}.$$

С учетом определения величины $\bar{n}(\Lambda)$ это дает нам (2.7). Лемма доказана. □

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\bar{n}(\Lambda) = \tau$ и $h \in (0, (4\tau)^{-1})$. По лемме 2.2 множества $\Omega_s(h, \Lambda)$ ограничены. В дальнейшем считаем, что

$$\mu_1(h) \leq \mu_2(h) \leq \dots \leq \mu_s(h) \leq \dots \tag{2.13}$$

Лемма 2.3. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — последовательность с конечной максимальной плотностью $\bar{n}_0(\Lambda) = \tau$ при порядке $\rho(r) \equiv 1$. Для каждого $h \in (0, (6\tau)^{-1})$ имеем:

$$\frac{d_s(h)}{\mu_s(h)} \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty. \quad (2.14)$$

Доказательство. Покажем вначале, что

$$\frac{\beta_k(h, \Lambda)}{|\lambda_k|} \rightarrow 0, \quad k \rightarrow \infty. \quad (2.15)$$

Предположим, что это неверно. Тогда в силу (2.4) существуют число $\alpha > 0$ и номера $k(p)$, $p \geq 1$, такие, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \frac{\beta_{k(p)}(h, \Lambda)h}{|\lambda_{k(p)}|} = \alpha \leq \frac{1}{5}.$$

Пусть $\varepsilon \in (0, \alpha)$ и

$$1 - \delta = \frac{1 - \alpha - \varepsilon}{1 + \alpha + \varepsilon}.$$

Тогда с учетом (2.2) получаем:

$$\begin{aligned} \bar{n}_0(\Lambda, \delta) &\geq \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \frac{n((1 + \alpha + \varepsilon)|\lambda_{k(p)}|, \Lambda) - n((1 - \alpha - \varepsilon)|\lambda_{k(p)}|, \Lambda)}{2(\alpha + \varepsilon)|\lambda_{k(p)}|} \geq \\ &\geq \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \frac{\beta_{k(p)}(h, \Lambda)h}{2(\alpha + \varepsilon)|\lambda_{k(p)}|} \geq \overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \frac{(\alpha - \varepsilon)|\lambda_{k(p)}|}{2h(\alpha + \varepsilon)|\lambda_{k(p)}|} = \frac{\alpha - \varepsilon}{2h(\alpha + \varepsilon)}. \end{aligned}$$

Отсюда в силу (2.1), произвольности $\varepsilon \in (0, \alpha)$ и выбора числа h имеем:

$$\tau \geq \frac{1}{2h} > 3\tau.$$

Получили противоречие. Таким образом, (2.15) верно.

Предположим теперь, что неверно (2.14). Тогда найдется последовательность номеров $s(j)$, точки $z_{s(j)}$, $w_{s(j)} \in \overline{\Omega_{s(j)}(h, \Lambda)}$ и число $\delta \in (0, 1/2)$ такие, что $|z_{s(j)}| = \mu_{s(j)}(h)$ и $|w_{s(j)} - z_{s(j)}| \geq (1 - \delta)\mu_{s(j)}$, $j \geq 1$. В силу (2.9) проекции кругов

$$B(\lambda_{k(s(j), p)}, 3\beta_{k(s(j), p)}(h, \Lambda)h), \quad p = \overline{1, p_{s(j)}}, \quad (2.16)$$

на прямую, проходящую через точки $z_{s(j)}$ и $w_{s(j)}$, покрывают отрезок $[z_{s(j)}, w_{s(j)}]$. Поэтому согласно (2.15) и определению числа $\mu_{s(j)}(h)$ для всех достаточно больших номеров j сумма радиусов всех кругов (2.16), лежащих в кольце $(1 - 2\delta)\mu_{s(j)} < |z| < \mu_{s(j)}$ не меньше, чем $\delta\mu_{s(j)}$. Таким образом,

$$\sum \beta_{k(s(j), p)}(h, \Lambda)h \geq \frac{\delta\mu_{s(j)}(h)}{3},$$

где сумма берется по всем указанным кругам. Поскольку круги $B(\lambda_{k(s(j), p)}, \beta_{k(s(j), p)}(h, \Lambda)h)$, $p = \overline{1, p_{s(j)}}$, попарно не пересекаются, то из предыдущего с учетом (2.2) получаем:

$$\bar{n}_0(\Lambda, 2\delta) \geq \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \frac{n(\mu_{s(j)}(h), \Lambda) - n((1 - 2\delta)\mu_{s(j)}(h), \Lambda)}{2\delta\mu_{s(j)}(h)} \geq \overline{\lim}_{j \rightarrow \infty} \frac{\delta\mu_{s(j)}(h)}{6h\delta\mu_{s(j)}(h)} = \frac{1}{6h}.$$

Отсюда в силу (2.1), произвольности $\varepsilon \in (0, \alpha)$ и выбора числа h имеем:

$$\tau \geq \frac{1}{6h} > \tau.$$

Получили противоречие. Таким образом, (2.14) верно. Лемма доказана. \square

Лемма 2.4. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\bar{n}(\Lambda) = \tau$ и $2h \in (0, \tau^{-1})$. Верно неравенство

$$n(z, ph, \Lambda) < p, \quad p \geq 1, \quad z \in \mathbb{C} \setminus \Omega(2h, \Lambda). \quad (2.17)$$

Доказательство. Предположим, что $n(z, ph, \Lambda) \geq p$. Выберем произвольную точку $\lambda_k \in B(z, ph)$. Верно вложение $B(z, ph) \subset B(\lambda_k, 2ph)$. Следовательно, $n(\lambda_k, p2h, \Lambda) \geq p$. Отсюда с учетом (2.3) получаем: $p \leq \beta_k(2h, \Lambda)$. Это означает, что $z \in B(\lambda_k, 2ph) \subset B(\lambda_k, 2\beta_k(2h, \Lambda)h) \subset \Omega(2h, \Lambda)$. Получили противоречие. Таким образом, (2.17) верно. Лемма доказана. \square

Пусть $U = \{U_s\}_{s=1}^\infty$ — разбиение последовательности $\{\lambda_k, n_k\}$ на конечные группы U_s . Точки λ_k , попавшие в группу U_s , будем обозначать $\lambda_{s,l}$, а их кратности — $n_{s,l}$. Первый индекс совпадает с номером группы, а второй индекс меняется в пределах от 1 до M_s , где M_s — число точек λ_k , попавших в группу U_s . Будем считать, что $|\lambda_{s+1,1}| \geq |\lambda_{s,1}|$, $s \geq 1$. Разбиение $U = \{U_s\}$ будем называть *тривиальным*, если каждая группа U_s состоит из одной точки $\lambda_{s,1}$. Будем говорить, что U_s — группы *относительно малого диаметра*, если

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \max_{1 \leq j, l \leq M_s} \frac{|\lambda_{s,j} - \lambda_{s,l}|}{|\lambda_{s,1}|} = 0. \quad (2.18)$$

Пусть N_s — число точек λ_k , попавших в U_s , с учетом их кратности. Будем также говорить, что группы U_s *относительно малы*, если они являются группами относительно малого диаметра и

$$N(\Lambda, U) = \lim_{s \rightarrow \infty} \frac{N_s}{|\lambda_{s,1}|} = 0.$$

Пусть $\bar{n}(\Lambda) = \tau$ и $h \in (0, (4\tau)^{-1})$. Символом $U(h) = \{U_s(h)\}$ обозначим разбиение $\{\lambda_k\}$ на группы, где $U_s(h)$ состоит из всех точек λ_k , принадлежащих $\Omega_s(h, \Lambda)$. По лемме 2.2 группы $U_s(h)$ ограничены. Пусть $N_s(h)$ — число точек λ_k , попавших в $U_s(h)$ с учетом их кратности.

Лемма 2.5. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\bar{n}_0(\Lambda) = \tau$. Для каждого $h \in (0, (6\tau)^{-1})$ группы $U_s(h)$ *относительно малы*.

Доказательство. В силу леммы 2.3 верно (2.18), т. е. $U_s(h)$ — группы относительно малого диаметра. Тогда

$$\lim_{s \rightarrow \infty} \frac{\mu_s(h)}{|\lambda_{s,1}|} = 1$$

и для каждого $\delta \in (0, 1)$ найдется номер $s(\delta)$ такой, что для всех $s \geq s(\delta)$ множество $\Omega_s(h, \Lambda)$ лежит в кольце $(1 - \delta)\mu_s(h) < |z| < \mu_s(h)$. Следовательно, согласно (2.12) имеем:

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \frac{N_s(h)}{|\lambda_{s,1}|} \leq \delta \overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \frac{n(\mu_s(h), \Lambda) - n((1 - \delta)\mu_s(h), \Lambda)}{\delta \mu_s(h)} \leq \tau \delta.$$

Так как $\delta \in (0, 1)$ — любое, то $N(\Lambda, U) = 0$. Лемма доказана. \square

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\bar{n}(\Lambda) = \tau$ и $h' \leq h \in (0, (4\tau)^{-1})$. Имеет место вложение

$$\Omega(h', \Lambda) \subset \Omega(h, \Lambda). \quad (2.19)$$

При этом для каждого $s \geq 1$ существует $j \geq 1$ такое, что $\Omega_s(h', \Lambda) \subset \Omega_j(h, \Lambda)$. Пусть $H = \{h_m\}$, $R = \{r_m\}$ удовлетворяют соотношениям:

$$\frac{1}{6\tau} > h_1 \geq \dots \geq h_m \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty, \quad \sum_{l=1}^m r_l h_l \leq r_{m+1} h_{m+1}, \quad m \geq 1. \quad (2.20)$$

Определим множества

$$\Omega_{m,l}(H, R, \Lambda), \quad 1 \leq l \leq l(m), \quad m \geq 1. \quad (2.21)$$

В качестве $\Omega_{1,l}(H, R, \Lambda)$, $1 \leq l \leq l(1)$, возьмем все множества $\Omega_s(h_1, \Lambda)$, для которых верно неравенство $\mu_s(h_1) \leq R_1$. Предположим, что мы уже построили множества

$$\Omega_{j,l}(H, R, \Lambda), \quad 1 \leq l \leq l(j), \quad j = \overline{1, m-1}. \quad (2.22)$$

Тогда в качестве $\Omega_{m,l}(H, R, \Lambda)$, $1 \leq l \leq l(m)$, возьмем все множества $\Omega_s(h_m, \Lambda)$, для которых верно неравенство $\mu_s(h_m) \leq R_m$, и которые попарно не пересекаются с множествами из (2.22). Положим

$$\Omega(H, R, \Lambda) = \bigcup_{m=1}^\infty \bigcup_{l=1}^{l(m)} \Omega_{m,l}(H, R, \Lambda). \quad (2.23)$$

По построению все множества из (2.21) являются связными и попарно не пересекаются. Таким образом, множества из (2.21) являются связными компонентами множества $\Omega(H, R, \Lambda)$. Из (2.19) следует, что

$$\bigcup_{\mu_s(h_m) \leq R_m} \Omega_s(h_m, \Lambda) \subset \Omega(H, R, \Lambda), \quad p \geq 1. \quad (2.24)$$

Лемма 2.6. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и $\bar{n}(\Lambda) = \tau$. Предположим, что $H = \{h_m\}$ и $R = \{r_m\}$ удовлетворяют соотношениям (2.20). Тогда $\Omega(H, R, \Lambda)$ является C_0 -множеством.

Доказательство. По построению с учетом (2.6) имеем:

$$\Omega(H, R, \Lambda) \subset \bigcup_{m=1}^{\infty} \bigcup_{\mu_s(h_m) \leq R_m} \bigcup_{p=1}^{p_s} B(\lambda_{k(s,p)}, 3\beta_{k(s,p)}(h_m, \Lambda)h_m).$$

Пусть $r_j < r \leq r_{j+1}$. По лемме 2.2 круги $B(\lambda_{k(s,p)}, \beta_{k(s,p)}(h_m, \Lambda)h_m)$, $p = \overline{1, p_s}$, $s \geq 1$, попарно не пересекаются. Поскольку Λ имеет конечную верхнюю плотность, то найдется $c > 0$ такое, что $n(r_m, \Lambda) \leq cr_m$, $m \geq 1$. Тогда с учетом (2.11), (2.2), (2.4) и (2.20) получаем:

$$\begin{aligned} & \frac{3}{r} \left(\sum_{m=1}^j \sum_{\mu_s(h_m) \leq r_m} \sum_{p=1}^{p_s} \beta_{k(s,p)}(h_m, \Lambda)h_m + \sum_{|\lambda_{k(s,p)}| \leq r} \beta_{k(s,p)}(h_{j+1}, \Lambda)h_{j+1} \right) \leq \\ & \leq \frac{3}{r} \left(\sum_{m=1}^j n(r_m, \Lambda)h_m + n(2r, \Lambda)h_{j+1} \right) \leq \frac{3}{r} \left(\sum_{m=1}^j r_m h_m + 2r h_{j+1} \right) \leq \\ & \leq \frac{3c}{r} (2r_j h_j + 2r h_{j+1}) \leq 6c(h_j + h_{j+1}) \rightarrow 0, \quad j \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

3. ОЦЕНКИ СНИЗУ СПЕЦИАЛЬНЫХ МНОГОЧЛЕНОВ

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\delta \in (0, 1)$ и $w \neq 0$. Положим

$$q_{\Lambda}(z, w, \delta) = \prod_{\lambda_k \in B(w, \delta|w|)} \left(\frac{z - \lambda_k}{3\delta|\lambda_k|} \right)^{n_k}$$

и $q_{\Lambda}(z, w, \delta) = q_{\Lambda, V}(z, \delta)$, если $V = B(w, \delta|w|)$. В случае, когда круг $B(w, \delta|w|)$ не содержит ни одной точки λ_k , полагаем $q_{\Lambda}(z, w, \delta) \equiv 1$. Нетрудно заметить, что верны неравенства:

$$\frac{|z - \lambda_k|}{3\delta|\lambda_k|} \leq 1, \quad z, \lambda_k \in B(w, \delta|w|), \quad \delta \in (0, 1/3), \tag{3.1}$$

$$\frac{|z - \lambda_k|}{3\delta|\lambda_k|} \geq 1, \quad z \in B(w, 5\delta|w|), \quad \lambda_k \in B(w, \delta|w|), \quad \delta \in (0, 1/3). \tag{3.2}$$

Лемма 3.1. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\bar{n}(\Lambda) = \tau$, $2h \in (0, \tau^{-1})$, $\delta \in (0, 1/3)$, и $w \neq 0$. Тогда

$$\ln |q_{\Lambda}(z, w, \delta)| \geq n \ln \frac{nh}{18\delta(1 + \delta)|w|}, \quad z \in B(w, \delta|w|) \setminus \Omega(h, \Lambda), \quad n = n(w, \delta|w|, \Lambda). \tag{3.3}$$

Доказательство. Пусть $z \in B(w, \delta|w|) \setminus \Omega(h, \Lambda)$ и $\xi_{k(1)}, \dots, \xi_{k(n)}$ — все точки λ_k с учетом их кратностей n_k из круга $B(w, \delta|w|)$. При этом

$$|z - \xi_{k(n)}| \geq \dots \geq |z - \xi_{k(j)}| \geq \dots \geq |z - \xi_{k(1)}|.$$

В силу леммы 2.4 имеем:

$$|z - \xi_{k(j)}| \geq jh/2, \quad j = \overline{1, n}.$$

Отсюда получаем:

$$\ln |q_{\Lambda}(z, w, \delta)| \geq \ln \left| \prod_{j=1}^n \frac{jh}{6\delta(1 + \delta)|w|} \right| = \ln \frac{n!h^n}{(6\delta(1 + \delta)|w|)^n} \geq n \ln \frac{nh}{18\delta(1 + \delta)|w|}.$$

Лемма доказана. □

Лемма 3.2. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\bar{n}(\Lambda) = \tau$, $2h \in (0, \tau^{-1})$. Для каждого $\varepsilon > 0$ существует $\delta \in (0, 1/3)$ такое, что

$$\ln |q_{\Lambda}(z, w, \delta)| \geq -\varepsilon|w|, \quad z \in B(w, \delta|w|) \setminus \Omega(h, \Lambda), \quad w \neq 0. \tag{3.4}$$

Доказательство. В силу (3.3) имеем:

$$\ln |q_\Lambda(z, w, \delta)| \geq \frac{18\delta(1 + \delta)}{h} |w|b, \quad b = \min_{x>0} x \ln x.$$

Отсюда получаем (3.4). Лемма доказана. \square

Введем локальную характеристику последовательности $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$. Пусть Λ разбита на группы $U = \{U_s\}$. Положим

$$q_{\Lambda,U}^{s,l}(z, \delta) = \prod_{\lambda_{k,v} \in B(\lambda_{s,l}, \delta|\lambda_{s,l}), k \neq s} \left(\frac{z - \lambda_{k,v}}{3\delta|\lambda_{k,v}|} \right)^{n_{k,v}}, \quad s \geq 1.$$

Если круг $B(\lambda_{s,l}, \delta|\lambda_{s,l})$ не содержит точек $\lambda_{k,v}$, $k \neq s$, то $q_{\Lambda,U}^{s,l}(z, \delta) \equiv 1$. Для разбиения U определим *групповой индекс конденсации* (см. [9, 10])

$$S_\Lambda(U) = \lim_{\delta \rightarrow 0} S_\Lambda(U, \delta), \quad S_\Lambda(U, \delta) = \lim_{s \rightarrow \infty} \min_{1 \leq l \leq M_s} \frac{\ln |q_{\Lambda,U}^{s,l}(\lambda_{s,l}, \delta)|}{|\lambda_{s,l}|}.$$

В силу (3.1) функция $S_\Lambda(U, \delta)$ монотонна. Поэтому предел всегда существует. При этом верно неравенство $S_\Lambda(U) \leq 0$. В случае, когда разбиение U тривиально, $S_\Lambda(U)$ совпадает с индексом конденсации S_Λ , введенным в работе [6]. Индексы S_Λ и $S_\Lambda(U)$ играют важную роль при исследовании задач интерполяции и фундаментального принципа [6], представления функций из инвариантных подпространств [10], а также при решении задачи о распределении особых точек суммы ряда экспоненциальных мономов, расположенных на границе его области сходимости [12].

Лемма 3.3. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\bar{n}_0(\Lambda) = \tau$, $h \in (0, (4\tau)^{-1})$. Тогда $S_\Lambda(U(h)) = 0$.

Доказательство. Пусть $s \geq 1$. Рассмотрим последовательность

$$\Lambda_s(h) = \{\lambda_{k,v}, n_{k,v}\}_{1 \leq v \leq M_k, k \neq s}.$$

Так как $\Omega_s(h, \Lambda)$ — связная компонента множества $\Omega(h, \Lambda)$, то верно равенство

$$\Omega(h, \Lambda_s(h)) = \Omega(h, \Lambda) \setminus \Omega_s(h, \Lambda).$$

В силу (3.3) для каждого $l = \overline{1, M_s}$, $\lambda_{s,l} \neq 0$, имеем:

$$\begin{aligned} \ln |q_{\Lambda,U(h)}^{s,l}(\lambda_{s,l}, \delta)| &= \ln |q_{\Lambda_s(h)}^{s,l}(\lambda_{s,l}, \delta)| \geq n \ln \frac{nh}{18\delta(1 + \delta)|\lambda_{s,l}|} \geq \frac{18\delta(1 + \delta)}{h} b |\lambda_{s,l}|, \\ n &= n(\lambda_{s,l}, \delta|\lambda_{s,l}, \Lambda), \quad b = -1/e. \end{aligned}$$

Отсюда получаем неравенство

$$S_\Lambda(U(h), \delta) \geq \frac{18\delta(1 + \delta)}{h} b.$$

Следовательно, $S_\Lambda(U(h)) \geq 0$. Поскольку всегда $S_\Lambda(U(h)) \leq 0$, то $S_\Lambda(U(h)) = 0$. Лемма доказана. \square

Лемма 3.4. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\bar{n}_0(\Lambda) = \tau$. Предположим, что H, R удовлетворяют (2.20) и

$$r_m > \mu_m(h_1), \quad m \geq 1, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{r_{m+1}}{r_m} > 1, \quad \ln h_m \max_{s \geq m} \frac{N_s(h_1)}{\mu_s(h_1)} \rightarrow 0, \quad m \rightarrow \infty. \quad (3.5)$$

Тогда для каждого $\varepsilon > 0$ существуют $\delta \in (0, 1/3)$ и $t > 0$ такие, что

$$\ln |q_\Lambda(z, w, \delta)| \geq -\varepsilon |w|, \quad z \in B(w, \delta|w|) \setminus \Omega(H, R, \Lambda), \quad |w| \geq t. \quad (3.6)$$

Доказательство. Предположим, что (3.6) неверно. Тогда для некоторого числа $\varepsilon > 0$ существуют последовательности $\{w_p\}$, $\{z_p\}$ такие, что $z_p \in B(w_p, p^{-1}|w_p|) \setminus \Omega(H, R, \Lambda)$, $|w_p| \rightarrow \infty$,

$$\ln |q_\Lambda(z_p, w_p, p^{-1})| < -5\varepsilon |w_p|, \quad p > 3. \quad (3.7)$$

Отсюда и из (3.1) следует, что

$$\ln |q_\Lambda(z_p, w_p, \delta)| < -4\varepsilon |w_p|, \quad \delta \in (0, 1/3), \quad p > \delta^{-1}. \quad (3.8)$$

По лемме 3.2 для $h = h_1$ выполнено (3.4). Следовательно, для каждого $p > 3$ найдется номер $s(p)$ такой, что $z_p \in \Omega_{s(p)}(h_1, \Lambda)$. Как и в лемме 3.3, рассмотрим последовательность $\Lambda_{s(p)}(h_1)$. Верно представление

$$q_\Lambda(z_p, w_p, \delta) = q_{\Lambda_{s(p)}(h_1)}(z_p, w_p, \delta) \prod_{\lambda_k \in B(w, \delta|w|) \cap \Omega_{s(p)}(h_1, \Lambda)} \left(\frac{z_p - \lambda_k}{3\delta|\lambda_k|} \right)^{n_k}.$$

В силу (3.3) имеем:

$$\ln |q_{\Lambda_{s(p)}(h_1)}(z_p, w_p, \delta)| \geq \frac{18\delta(1+\delta)}{h_1} b|w_p| \geq -\varepsilon|w_p|, \quad \delta \in (0, 1/3), \quad p > p(\varepsilon). \quad (3.9)$$

Пусть $r_{m(p)} < |z_p| \leq r_{m(p)+1}$. Так как $z_p \in \Omega_{s(p)}(h_1, \Lambda)$, то в силу (2.14) и (3.5)

$$r_{m(p)} < \mu_{s(p)}(h_1) < r_{m(p)+2}, \quad p > p_0.$$

Из первого неравенства в (3.5) следует, что $s(p) \geq m(p)+1$. Рассмотрим случай $\mu_{s(p)}(h_1) \leq r_{m(p)+1}$. Поскольку $z_p \in \Omega(H, R, \Lambda)$, то в силу (2.24) и (2.19) $z_p \in \Omega(h_{m(p)+1}, \Lambda)$. Тогда по лемме 2.4, как и в лемме 3.1, получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{|w_p|} \ln \left| \prod_{\lambda_k \in B(w_p, \delta|w_p|) \cap \Omega_{s(p)}(h_1, \Lambda)} \left(\frac{z_p - \lambda_k}{3\delta|\lambda_k|} \right)^{n_k} \right| &\geq \frac{n}{|w_p|} \ln \frac{nh_{m(p)+1}}{36\delta(1+\delta)|w_p|} \geq 36\delta(1+\delta)b + \\ &+ \frac{n}{|w_p|} \ln h_{m(p)+1} \geq -\varepsilon + \frac{n}{|w_p|} \ln h_{m(p)+1} \geq -\varepsilon + \frac{N_{s(p)}(h_1)}{|w_p|} \ln h_{m(p)+1}, \quad b = -1/e, \end{aligned}$$

где n — число точек λ_k с учетом кратностей, принадлежащих множеству $B(w, \delta|w|) \cap \Omega_{s(p)}(h_1, \Lambda)$, и $0 < \delta < \delta_0$. Так как $z_p \in B(w_p, p^{-1}|w_p|) \cap \Omega_{s(p)}(h_1, \Lambda)$, то с учетом (2.14) находим, что

$$\frac{\mu_{s(p)}(h_1)}{|w_p|} \rightarrow 1, \quad p \rightarrow \infty.$$

Следовательно, согласно (3.5) имеем:

$$\frac{1}{|w_p|} \ln \left| \prod_{\lambda_k \in B(w_p, \delta|w_p|) \cap \Omega_{s(p)}(h_1, \Lambda)} \left(\frac{z_p - \lambda_k}{3\delta|\lambda_k|} \right)^{n_k} \right| \geq -2\varepsilon.$$

Вместе с (3.9) это противоречит (3.8). Пусть теперь $\mu_{s(p)}(h_1) > r_{m(p)+1}$. Тогда в силу (3.5) $s(p) \geq m(p) + 2$. Поскольку $\mu_{s(p)}(h_1) < r_{m(p)+2}$, то, как и выше, получаем $z_p \in \Omega(h_{m(p)+2}, \Lambda)$. Затем получаем противоречие с (3.8). Лемма доказана. \square

Пусть $U(H, R) = \{U_{m,l}(H, R)\}$ — разбиение последовательности Λ на группы, где $U_{m,l}(H, R)$ состоит из всех точек $\lambda_k \in \Omega_{m,l}(H, R, \Lambda)$.

Лемма 3.5. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\bar{n}_0(\Lambda) = \tau$. Предположим, что H и R удовлетворяют (2.20) и (3.5). Тогда $S_\Lambda(U(H, R)) = 0$.

Доказательство. Для удобства можно считать, что группы разбиения $U(H, R)$ пронумерованы одним индексом: $U(H, R) = \{U_s\}$. Пусть Ω_s , $s \geq 1$, — все связные компоненты множества $\Omega(H, R, \Lambda)$, $U_s = \{\lambda_{s,l}, n_{s,l}\}_{l=1}^{M_s}$, $\lambda_{s,l} \in \Omega_s$, $l = \overline{1, M_s}$, и $\varepsilon > 0$. Из (2.14), (2.19) и определения $\Omega(H, R, \Lambda)$ следует, что

$$\frac{d_s}{\mu_s} \rightarrow 0, \quad s \rightarrow \infty, \quad (3.10)$$

где d_s — диаметр множества Ω_s и

$$\mu_s = \sup_{z \in \Omega_s} |z|, \quad s \geq 1.$$

По лемме 3.4 существуют $\delta \in (0, 1/3)$ и $t > 0$ такие, что выполнено (3.6). Фиксируем номер $s \geq 1$, для которого $|\lambda_{s,l}| > t$, $l = \overline{1, M_s}$. Тогда в силу (3.6) и (3.1) имеем:

$$\ln |q_{\Lambda, U(H, R)}^{s,l}(z, \delta)| \geq \ln |q_\Lambda(z, \lambda_{s,l}, \delta)| \geq -\varepsilon|\lambda_{s,l}|, \quad z \in B(\lambda_{s,l}, \delta|\lambda_{s,l}|) \setminus \Omega(H, R, \Lambda), \quad l = \overline{1, M_s}.$$

Согласно (3.10) можно считать, что $\Omega_s \in B(\lambda_{s,l}, \delta|\lambda_{s,l}|)$, $l = \overline{1, M_s}$. Тогда

$$\ln |q_{\Lambda, U(H,R)}^{s,l}(z, \delta)| \geq -\varepsilon|\lambda_{s,l}|, \quad z \in \partial\Omega_s, \quad l = \overline{1, M_s}.$$

Многочлен $q_{\Lambda, U(H,R)}^{s,l}(z, \delta)$ не имеет нулей на множестве Ω_s . Поэтому по принципу минимума для гармонических функций последнее неравенство продолжается на Ω_s . В частности,

$$\ln |q_{\Lambda, U(H,R)}^{s,l}(\lambda_{s,l}, \delta)| \geq -\varepsilon|\lambda_{s,l}|, \quad l = \overline{1, M_s}.$$

Следовательно, $S_{\Lambda}(U(H, R), \delta) \geq -\varepsilon$. В силу (3.1)

$$S_{\Lambda}(U(H, R), \delta_1) \geq S_{\Lambda}(U(H, R), \delta), \quad \delta_1 \in (0, \delta).$$

Поэтому $S_{\Lambda}(U(H, R)) \geq -\varepsilon$. Так как $\varepsilon > 0$ — любое и всегда верно неравенство $S_{\Lambda}(U(H, R)) \leq 0$, то $S_{\Lambda}(U(H, R)) = 0$. Лемма доказана. \square

4. ОЦЕНКИ СНИЗУ ЦЕЛЫХ ФУНКЦИЙ

Пусть f — целая функция экспоненциального типа. Отметим одно свойство индикатора [15, гл. I, §18, теорема 28]: для каждого $\varepsilon > 0$ существует $R(\varepsilon) > 0$ такое, что

$$\ln |f(re^{i\varphi})| \leq (h_f(\varphi) + \varepsilon)r, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad r \geq R(\varepsilon). \quad (4.1)$$

Функция h_f совпадает с опорной функцией

$$H_T(\varphi) = \max_{z \in T} \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi})$$

некоторого выпуклого компакта $T \subset \mathbb{C}$, который называется *индикаторной диаграммой* функции f . Сопряженная диаграмма K функции f является компактом, комплексно сопряженным к компактному T [16, гл. I, §5, теорема 5.4]. Таким образом,

$$h_f(\varphi) = H_K(-\varphi), \quad \varphi \in [0, 2\pi].$$

Отсюда следует, что функция h_f непрерывна (а значит, и равномерно непрерывна) на отрезке $[0, 2\pi]$. Поэтому для каждого $\varepsilon_0 > 0$ найдется $\delta_0 \in (0, 1)$ такое, что

$$|th_f(\psi) - h_f(\varphi)| \leq \varepsilon_0, \quad \varphi \in [0, 2\pi], \quad te^{i\psi} \in B(e^{i\varphi}, \delta_0). \quad (4.2)$$

Говорят также, что f имеет вполне регулярный рост на луче $L_{\varphi} = \{re^{i\varphi}, r > 0\}$, если

$$h_f(\varphi) = \lim_{r \notin E_{\varphi}, r \rightarrow +\infty} \frac{\ln |f(re^{i\varphi})|}{r},$$

где $E_{\varphi} — E_0 -множество. Если f имеет вполне регулярный рост на каждом луче, то множество E_{φ} , вообще говоря, зависит от $\varphi \in [0, 2\pi]$. Оказывается, однако, что можно подобрать исключительное E_0 -множество, которое подходит для всех $\varphi \in [0, 2\pi]$ [15, гл. III, §1, теорема 1]. Другими словами, функция f имеет вполне регулярный рост тогда и только тогда, когда она имеет вполне регулярный рост на каждом луче. Известно также другое эквивалентное определение функции вполне регулярного роста (см. [2] и [14, лемма 4.1]). Функция f имеет вполне регулярный рост на луче L_{φ} тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{z_m\}_{m=1}^{\infty}$ такая, что$

$$\lim_{m \rightarrow \infty} |z_m| = \infty, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{z_m}{|z_m|} = e^{i\varphi}, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{|z_{m+1}|}{|z_m|} = 1, \quad \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{\ln |f(z_m)|}{|z_m|} = h_f(\varphi). \quad (4.3)$$

Пусть f — целая функция экспоненциального типа и $\Lambda_f = \{\lambda_k, n_k\}$ — все ее нули с учетом их кратностей. По теореме Линделефа [15, гл. I, §3] верно неравенство $\overline{n}(\Lambda) = \tau < \infty$.

Теорема 4.1. Пусть f — целая функция экспоненциального типа, которая имеет вполне регулярный рост на каждом луче L_{φ} , и $h \in (0, \tau^{-1})$, $\tau = \overline{n}(\Lambda)$. Тогда

$$\ln |f(re^{i\varphi})| = rh_f(\varphi) + \alpha(r), \quad re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \Omega(h, \Lambda), \quad \alpha(r)/r \rightarrow 0, \quad r \rightarrow +\infty. \quad (4.4)$$

Доказательство. Предположим, что (4.4) неверно. Тогда в силу (4.1) существуют $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{w_j\}$ такие, что $w_j \in \mathbb{C} \setminus \Omega(h, \Lambda)$,

$$\ln |f(w_j)| \leq r_j(h_f(\varphi_j) - \varepsilon), \quad w_j = r_j e^{i\varphi_j}, \quad j \geq 1. \quad (4.5)$$

Можно считать, что $e^{i\varphi_j} \rightarrow e^{i\varphi}$, $j \rightarrow \infty$. По условию существует последовательность $\{z_m\}$, для которой выполнено (4.3). В силу второго и третьего равенства в (4.3) для каждого $\delta > 0$ и всех $j \geq j(\delta)$ найдется номер $m(j)$ такой, что $w_j \in B(z_{m(j)}, \delta|z_{m(j)}|/5)$.

Согласно (4.1), (4.2) и второму равенству в (4.3) существует $\delta \in (0, 1/5)$ такое, что

$$\ln |f(z)| \leq (h_f(\varphi) + \varepsilon/6)|z_m|, \quad z \in B(z_m, 5\delta|z_m|), \quad m \geq m(\varepsilon). \quad (4.6)$$

Уменьшая при необходимости δ , можно считать, что

$$r_j(h_f(\varphi_j) - \varepsilon) \leq |z_{m(j)}|(h_f(\varphi) - 2\varepsilon/3), \quad j \geq j(\delta). \quad (4.7)$$

В силу леммы 3.2 можно также считать, что

$$\ln |q_\Lambda(z, z_m, \delta)| \geq -\varepsilon|z_m|/6, \quad z \in B(z_m, \delta|z_m|) \setminus \Omega(h, \Lambda), \quad m \geq 1. \quad (4.8)$$

Из (4.5) и (4.7) получаем:

$$\ln |f(w_j)| \leq |z_{m(j)}|(h_f(\varphi) - 2\varepsilon/3), \quad j \geq j(\delta). \quad (4.9)$$

Согласно последнему равенству в (4.3) имеем:

$$\ln |f(z_m)| \geq |z_m|(h_f(\varphi) - \varepsilon/6), \quad m \geq m_1(\varepsilon) \geq m(\varepsilon). \quad (4.10)$$

Рассмотрим функции

$$g_m(z) = \frac{f(z)}{f(z_m)q_\Lambda(z, z_m, \delta)}, \quad m \geq 1.$$

Из (4.6), (4.10), (3.2) и принципа максимума модуля следует неравенство

$$\ln |g_m(z)| \leq \varepsilon|z_m|/3, \quad z \in B(z_m, 5\delta|z_m|), \quad m \geq m_1(\varepsilon).$$

Кроме того, $g_m(z_m) = 1$. Тогда по лемме [16, лемма 4.1] об оценке снизу функции, не имеющей нулей, получаем:

$$\ln |g_m(z)| \geq -\varepsilon|z_m|/6, \quad z \in B(z_m, \delta|z_m|/5), \quad m \geq m_1(\varepsilon).$$

В частности,

$$\ln |g_{m(j)}(w_j)| \geq -\varepsilon|z_{m(j)}|/8, \quad j \geq j(\delta), \quad m(j) \geq m_1(\varepsilon).$$

Поскольку $w_j \in B(z_{m(j)}, \delta|z_{m(j)}|/5) \setminus \Omega(h, \Lambda)$, то с учетом (4.8) и (4.10) имеем:

$$\ln |f(w_j)| \geq |z_{m(j)}|(h_f(\varphi) - \varepsilon/2), \quad j \geq j(\delta), \quad m(j) \geq m_1(\varepsilon).$$

Это противоречит (4.9). Теорема доказана. \square

Пусть f — целая функция экспоненциального типа и $\Lambda_f = \{\lambda_k, n_k\}$ — ее кратное нулевое множество. Как отмечалось во введении, Λ_f является правильно распределенным множеством. В частности, Λ_f имеет плотность $n(\Lambda) = \tau$. Тогда по лемме 2.1 из работы [1] верны равенства $\bar{n}_0(\Lambda) = n(\Lambda) = \tau$.

Таким образом, заменяя лемму 3.2 на лемму 3.4 и практически дословно повторяя рассуждения из доказательства теоремы 4.1, получаем следующий результат.

Теорема 4.2. Пусть f — целая функция экспоненциального типа, которая имеет вполне регулярный рост на каждом луче L_φ . Предположим, что H и R удовлетворяют (2.20) и (3.5). Тогда

$$\ln |f(re^{i\varphi})| = rh_f(\varphi) + \alpha(r), \quad re^{i\varphi} \in \mathbb{C} \setminus \Omega(H, R, \Lambda), \quad \alpha(r)/r \rightarrow 0, \quad r \rightarrow +\infty. \quad (4.11)$$

Замечание 4.1. Равенство (4.11) является полным аналогом равенства (1.1). Однако в отличие от (1.1) исключительное множество в (4.11) строится конструктивно.

5. БАЗИС В ИНВАРИАНТНОМ ПОДПРОСТРАНСТВЕ

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $D \subset \mathbb{C}$ — выпуклая область и $H(D)$ — пространство функций, аналитических в области D с топологией равномерной сходимости на компактах из D . Символом $W(\Lambda, D)$ обозначим замыкание в пространстве $H(D)$ линейной оболочки системы

$$\mathcal{E}(\Lambda) = \{z^n \exp(\lambda_k z)\}_{k=1, n=0}^{\infty, n_k-1}.$$

Если $\mathcal{E}(\Lambda)$ не полна в пространстве $H(D)$, то $W(\Lambda, D)$ является нетривиальным ($\neq H(D), \{0\}$) замкнутым подпространством в $H(D)$. Из определения вытекает, что оно инвариантно относительно оператора дифференцирования. При этом система $\mathcal{E}(\Lambda)$ — это набор собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в $W(\Lambda, D)$, а Λ — его кратный спектр.

Пусть $W \subset H(D)$ — нетривиальное замкнутое подпространство, инвариантное относительно оператора дифференцирования, и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — его кратный спектр. Он является не более чем счетным множеством с единственной предельной точкой ∞ [6, гл. II, §7]. В случае, когда спектр W конечен, оно совпадает с пространством решений однородного линейного дифференциального уравнения конечного порядка с постоянными коэффициентами. Более общим примером инвариантного подпространства служит множество решений уравнения свертки $\mu(g(z+w)) \equiv 0$ (или системы таких уравнений), где μ — линейный непрерывный функционал на пространстве $H(D)$. Частными случаями уравнения свертки являются линейные дифференциальные, разностные, дифференциально-разностные уравнения с постоянными коэффициентами конечного и бесконечного порядков, а также некоторые виды интегральных уравнений.

Основной задачей в теории инвариантных подпространств является представление всех функций $g \in W$ при помощи собственных функций оператора дифференцирования — $e^{\lambda_k z}$. Однако этих функций недостаточно для представления даже в случае, когда W есть пространство решений линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами. Это пространство совпадает с линейной оболочкой всех собственных и присоединенных функций оператора дифференцирования в W (т. е. с линейной оболочкой системы $\mathcal{E}(\Lambda)$). Этот результат известен как фундаментальный принцип Л. Эйлера. В этой связи задача представления функций $g \in W$ посредством рядов по элементам системы $\mathcal{E}(\Lambda)$, т. е. рядов

$$\sum_{k=1, n=0}^{\infty, n_k-1} a_{k,n} z^n e^{\lambda_k z}, \tag{5.1}$$

называется *проблемой фундаментального принципа* для инвариантного подпространства.

Первым шагом на пути к представлению (5.1) является решение *проблемы спектрального синтеза*, т. е. выяснение условий, при которых система $\mathcal{E}(\Lambda)$ полна в подпространстве W (другими словами, когда $W = W(\Lambda, D)$). Проблему фундаментального принципа, естественно, имеет смысл рассматривать лишь для инвариантных подпространств, допускающих спектральный синтез, т. е. для подпространств вида $W(\Lambda, D)$.

Отметим, что критерий допустимости спектрального синтеза в подпространстве W получен в работах [3, 4].

Исследование проблемы фундаментального принципа имеет богатую историю. Частично она отражена в работе [6]. Полное решение проблемы фундаментального принципа в случае ограниченной выпуклой области получено в работах [6, 11, 13].

Одним из необходимых условий (см. [6]) фундаментального принципа является равенство нулю индекса конденсации S_Λ . Если оно нарушается, то становится невозможным представление всех функций из подпространства $W(\Lambda, D)$ в виде ряда (5.1). Известно, однако, что и в этом случае иногда удается получить представление всех функций $g \in W(\Lambda, D)$ (для $D = \mathbb{C}$) в виде ряда (5.1) «со скобками»

$$g(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\sum_{\lambda_k \in U_m} \sum_{n=0}^{n_k-1} d_{n,k} z^n \exp(\lambda_k z) \right), \quad z \in D.$$

История такого представления частично изложена в работе [10]. В этой связи естественным образом возникает задача о переходе от такого представления в виде ряда «со скобками» к представлению рядом

$$\sum_{s=1, j=1}^{\infty, N_s} d_{s,j} e_{s,j}(z), \quad (5.2)$$

где участвуют фиксированные линейные комбинации элементов системы $\mathcal{E}(\Lambda)$, которые образуют базис в подпространстве $W(\Lambda, D)$. При этом показатели λ_k разбиты на группы $U = \{U_s\}$. Линейная комбинация $e_{s,j}$ формируется по точкам λ_k группы U_s .

Указанная задача называется *проблемой существования базиса* в инвариантном подпространстве. Если он существует, то возникает еще целый ряд вопросов. Каковы условия его существования. Как осуществить разбиение U и можно ли описать все подходящие разбиения? Как составлять линейные комбинации внутри группы и можно ли описать все подходящие комбинации? Насколько малым можно сделать диаметр групп U_s , т. е. насколько новый «чистый» ряд будет близок по своим свойствам к (5.1)? Наконец, как описать пространство коэффициентов сходящихся рядов, построенных по базису? Другими словами, с каким пространством числовых последовательностей можно отождествить $W(\Lambda, D)$? Ответы на эти вопросы (за исключением второго) в случае ограниченной области были даны в работах [7–10]. В частности, было установлено, что группы должны быть относительно малыми, а групповой индекс конденсации $S_\Lambda(U)$ должен равняться нулю.

Здесь мы дадим ответ на последний оставшийся вопрос — второй.

Пусть последовательность $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ разбита на группы $U = \{U_s\}$, $U_s = \{\lambda_{s,l}, n_{s,l}\}_{l=1}^{M_s}$. Следуя [8], положим

$$P_s(\lambda, z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_s} \frac{e^{sz}(\omega_s(\zeta) - \omega_s(\lambda))}{(\zeta - \lambda)\omega_s(\zeta)} d\zeta, \quad \omega_s(\lambda) = \prod_{l=1}^{M_s} (\lambda - \lambda_{s,l})^{n_{s,l}}, \quad s \geq 1,$$

где Γ_s — контур, охватывающий точки группы U_s . Пусть

$$e_{s,j}(z) = P_s^{(j-1)}(\lambda_{s,1}, z) = \frac{(j-1)!}{2\pi i} \int_{|\lambda - \lambda_{s,1}|=1} \frac{P_s(\lambda, z)}{(\lambda - \lambda_{s,1})^j} d\lambda, \quad j = \overline{1, N_s}.$$

Полученную систему функций $\{e_{s,j}\}_{j,s=1}^{N_s, \infty}$ обозначим символом $\mathcal{E}(\Lambda, U)$. В случае тривиального разбиения система $\mathcal{E}(\Lambda, U)$ совпадает с $\mathcal{E}(\Lambda)$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и $\Lambda(\varphi_1, \varphi_2)$ — множество всех пар λ_k, n_k таких, что λ_k лежит в угле $\Gamma(\varphi_1, \varphi_2) = \{z = te^{i\varphi} : \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2), t > 0\}$.

Пусть K — выпуклый компакт и z_1, z_2 — точки его границы ∂K . Через $s(z_1, z_2, K)$ обозначим длину дуги ∂K , соединяющей z_1 и z_2 , движение по которой от z_1 к z_2 осуществляется в положительном направлении (против часовой стрелки). Для каждого $\varphi \in \mathbb{R}$ пересечение опорной прямой и границы компакта

$$L(\varphi) = \{z : \operatorname{Re}(ze^{-i\varphi}) = H_K(e^{i\varphi})\} \cap \partial K$$

является либо точкой $z(\varphi)$, либо отрезком. Множество $\Phi(K)$ направлений φ , для которых $L(\varphi)$ — отрезок, не более чем счетное. Положим

$$S_K(\varphi_1, \varphi_2) = \sup_{z_1 \in L(\varphi_1), z_2 \in L(\varphi_2)} s(z_1, z_2, K).$$

Функция $S_K(\varphi_1, \varphi_2)$ является неубывающей по φ_2 и невозрастающей по φ_1 , а множество ее точек разрыва по обоим переменным совпадает с $\Phi(K)$. Если $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi(K)$, то

$$S_K(\varphi_1, \varphi_2) = s(z(\varphi_1), z(\varphi_2), K).$$

Теорема 5.1. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\bar{n}(\Lambda) = \tau$, $h \in (0, (6\tau)^{-1})$ и D — ограниченная выпуклая область. Предположим, что $W(\Lambda, D)$ нетривиально. Тогда эквивалентны утверждения:

- 1) Система $\mathcal{E}(\Lambda, U(h))$ является базисом в подпространстве $W(\Lambda, D)$.

- 2) Существует $\gamma > 0$ такое, что для всех $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi(K)$ с условием $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \gamma$ выполнено неравенство

$$\bar{n}_0(\Lambda(\varphi_1, \varphi_2)) \leq \frac{S_K(\varphi_1, \varphi_2)}{2\pi},$$

где K — компакт, комплексно сопряженный к замыканию \bar{D} области D .

Доказательство. По лемме 2.5 $U(h)$ — разбиение на относительно малые группы. Согласно лемме 3.3 верно равенство $S_\Lambda(U(h)) = 0$. Тогда в силу [11, теорема 3.1] утверждения 1) и 2) эквивалентны. Теорема доказана. \square

Аналогично доказывается следующий результат.

Теорема 5.2. Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$, $\bar{n}_0(\Lambda) = \tau$ и D — ограниченная выпуклая область. Предположим, что H и R удовлетворяют (2.20) и (3.5), а $W(\Lambda, D)$ нетривиально. Тогда эквивалентны утверждения:

- 1) Система $\mathcal{E}(\Lambda, U(H, R))$ является базисом в подпространстве $W(\Lambda, D)$.
- 2) Существует $\gamma > 0$ такое, что для всех $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi(K)$ с условием $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \gamma$ выполнено неравенство

$$\bar{n}_0(\Lambda(\varphi_1, \varphi_2)) \leq \frac{S_K(\varphi_1, \varphi_2)}{2\pi},$$

где K — компакт, комплексно сопряженный к замыканию \bar{D} области D .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абдулнагимов А. И., Кривошеев А. С. Правильно распределенные подмножества в комплексной плоскости // Алгебра и анализ. — 2016. — 28, № 4. — С. 1–46.
2. Брайчев Г. Г. Индекс лакуарности // Мат. заметки. — 1993. — 53, № 6. — С. 3–10.
3. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. I. Спектральный анализ на выпуклых областях // Мат. сб. — 1972. — 87, № 4. — С. 459–489.
4. Красичков-Терновский И. Ф. Инвариантные подпространства аналитических функций. II. Спектральный анализ на выпуклых областях // Мат. сб. — 1972. — 88, № 1. — С. 3–30.
5. Красичков-Терновский И. Ф. Одна геометрическая лемма, полезная в теории целых функций, и теоремы типа Левинсона // Мат. заметки. — 1978. — 24, № 4. — С. 531–546.
6. Кривошеев А. С. Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях // Изв. РАН. Сер. мат. — 2004. — 68, № 2. — С. 71–136.
7. Кривошеев А. С. Почти экспоненциальный базис // Уфимск. мат. ж. — 2010. — 2, № 1. — С. 87–96.
8. Кривошеев А. С. Базисы «по относительно малым группам» // Уфимск. мат. ж. — 2010. — 2, № 2. — С. 67–89.
9. Кривошеев А. С. Почти экспоненциальная последовательность экспоненциальных многочленов // Уфимск. мат. ж. — 2012. — 4, № 1. — С. 88–106.
10. Кривошеев А. С., Кривошеева О. А. Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций // Мат. сб. — 2013. — 204, № 12. — С. 49–104.
11. Кривошеев А. С., Кривошеева О. А. Фундаментальный принцип и базис в инвариантном подпространстве // Мат. заметки. — 2016. — 99, № 5. — С. 684–697.
12. Кривошеева О. А. Особые точки суммы ряда экспоненциальных мономов на границе области сходимости // Алгебра и анализ. — 2011. — 23, № 2. — С. 162–205.
13. Кривошеева О. А., Кривошеев А. С. Критерий выполнения фундаментального принципа для инвариантных подпространств в ограниченных выпуклых областях комплексной плоскости // Функци. анализ и его прилож. — 2012. — 46, № 4. — С. 14–30.
14. Кривошеева О. А., Кривошеев А. С., Рафиков А. И. Оценки снизу целых функций // Уфимск. мат. ж. — 2019. — 11, № 3. — С. 46–62.
15. Левин Б. Я. Распределение корней целых функций. — М.: Гостехиздат, 1956.
16. Леонтьев А. Ф. Целые функции. Ряды экспонент. — М.: Наука, 1983.

А. С. Кривошеев

Институт математики с вычислительным центром Уфимского федерального исследовательского центра РАН, Уфа, Россия

E-mail: kriolesya2006@yandex.ru

О. А. Кривошеева

Уфимский университет науки и технологий, Уфа, Россия

E-mail: kriolesya2006@yandex.ru

UDC 517.53/.55

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-289-305

EDN: TJWAKD

Exceptional sets

A. S. Krivosheev¹ and O. A. Krivosheeva²

¹*Institute of Mathematics with Computing Centre of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia*

²*Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia*

Abstract. In this paper, we study sequences of complex numbers of the first order. Multiple terms are allowed for such sequences. We also consider complex sequences with a finite maximum density. We construct special coverings of multiple sets $\{\lambda_k, n_k\}$ consisting of circles centered at points λ_k of special radii. In particular, we construct coverings are with connected components of a relatively small diameter, as well as coverings that are C_0 -sets. These coverings act as exceptional sets for entire functions of exponential type. Outside these sets, we obtain a representation of the logarithm of the modulus of an entire function. Previously, a similar representation was obtained by B. Ya. Levin outside the exceptional set, with respect to which only its existence is asserted. In contrast to this, in this paper we present a simple effective construction of an exceptional set. We construct bases of the invariant subspace of analytic functions in a convex domain. They consist of linear combinations of eigenfunctions and associated functions (exponential monomials) of the differentiation operator divided into relatively small groups.

Keywords: series of exponential monomials, convex domain, exceptional set, condensation index.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The research of the second author was supported by the competition “Young Mathematics of Russia.”

For citation: A. S. Krivosheev, O. A. Krivosheeva, “Exceptional sets,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 2, 289–305. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-289-305>

REFERENCES

1. A. I. Abdunagimov and A. S. Krivosheev, “Pravil’no raspredelennye podmnozhestva v kompleksnoy ploskosti” [Properly distributed subsets in the complex plane], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2016, **28**, No. 4, 1–46 (in Russian).
2. G. G. Braychev, “Indeks lakunarnosti” [Lacunarity index], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1993, **53**, No. 6, 3–10 (in Russian).
3. I. F. Krasichkov-Ternovskiy, “Invariantnye podprostranstva analiticheskikh funktsiy. I. Spektral’nyy analiz na vypuklykh oblastiakh” [Invariant subspaces of analytic functions. I. Spectral analysis on convex regions], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1972, **87**, No. 4, 459–489 (in Russian).
4. I. F. Krasichkov-Ternovskiy, “Invariantnye podprostranstva analiticheskikh funktsiy. II. Spektral’nyy analiz na vypuklykh oblastiakh” [Invariant subspaces of analytic functions. II. Spectral analysis on convex regions], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1972, **88**, No. 1, 3–30 (in Russian).



5. I. F. Krasichkov-Ternovskiy, “Oдна геометрическая лемма, полезная в теории целых функций, и теоремы типа Левинсона” [One geometric lemma useful in the theory of entire functions and Levinson-type theorems], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1978, **24**, No. 4, 531–546 (in Russian).
6. A. S. Krivosheev, “Fundamental’nyy printsip dlya invariantnykh podprostranstv v vypuklykh oblastiakh” [Fundamental principle for invariant subspaces in convex domains], *Izv. RAN. Ser. mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2004, **68**, No. 2, 71–136 (in Russian).
7. A. S. Krivosheev, “Pochti eksponentsial’nyy bazis” [Almost exponential basis], *Ufimsk. mat. zh.* [Ufa Math. J.], 2010, **2**, No. 1, 87–96 (in Russian).
8. A. S. Krivosheev, “Bazisy «po otnositel’no malym gruppam»” [Bases “on relatively small groups”], *Ufimsk. mat. zh.* [Ufa Math. J.], 2010, **2**, No. 2, 67–89 (in Russian).
9. A. S. Krivosheev, “Pochti eksponentsial’naya posledovatel’nost’ eksponentsial’nykh mnogochlenov” [Almost exponential sequence of exponential polynomials], *Ufimsk. mat. zh.* [Ufa Math. J.], 2012, **4**, No. 1, 88–106 (in Russian).
10. A. S. Krivosheev and O. A. Krivosheeva, “Bazis v invariantnom podprostranstve analiticheskikh funktsiy” [Basis in an invariant subspace of analytic functions], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2013, **204**, No. 12, 49–104 (in Russian).
11. A. S. Krivosheev and O. A. Krivosheeva, “Fundamental’nyy printsip i bazis v invariantnom podprostranstve” [Fundamental principle and basis in an invariant subspace], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2016, **99**, No. 5, 684–697 (in Russian).
12. O. A. Krivosheeva, “Osobyie točki summy ryada eksponentsial’nykh monomov na granitse oblasti skhodimosti” [Singular points of the sum of a series of exponential monomials on the boundary of the region of convergence], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2011, **23**, No. 2, 162–205 (in Russian).
13. O. A. Krivosheeva and A. S. Krivosheev, “Kriteriy vypolneniya fundamental’nogo printsipa dlya invariantnykh podprostranstv v ogranichennykh vypuklykh oblastiakh kompleksnoy ploskosti” [Criterion for fulfillment of the fundamental principle for invariant subspaces in bounded convex domains of the complex plane], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2012, **46**, No. 4, 14–30 (in Russian).
14. O. A. Krivosheeva, A. S. Krivosheev, and A. I. Rafikov, “Otsenki snizu tselykh funktsiy” [Lower estimates for entire functions], *Ufimsk. mat. zh.* [Ufa Math. J.], 2019, **11**, No. 3, 46–62 (in Russian).
15. B. Ya. Levin, *Raspredelenie korney tselykh funktsiy* [Distribution of Roots of Entire Functions], Gostekhizdat, Moscow, 1956 (in Russian).
16. A. F. Leont’ev, *Tselye funktsii. Ryady eksponent* [Entire Functions. Exponential Series], Nauka, Moscow, 1983 (in Russian).

A. S. Krivosheev

Institute of Mathematics with Computing Centre of the Ufa Federal Research Centre of the Russian Academy of Sciences, Ufa, Russia

E-mail: kriolesya2006@yandex.ru

O. A. Krivosheeva

Ufa University of Science and Technology, Ufa, Russia

E-mail: kriolesya2006@yandex.ru

УДК 517.957

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-306-331

EDN: UGEKXW

К ТЕОРИИ ЭНТРОПИЙНЫХ СУБ- И СУПЕРРЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ВЫРОЖДАЮЩИХСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Е. Ю. ПАНОВ^{1,2}¹Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Великий Новгород, Россия²Центр научных исследований и разработок, Великий Новгород, Россия

Аннотация. Рассматривается нелинейное вырождающееся анизотропное параболическое уравнение второго порядка в случае, когда вектор потока лишь непрерывен, а неотрицательная матрица диффузии ограничена и измерима. Введены понятия энтропийного суб- и суперрешения задачи Коши, так что энтропийное решение этой задачи, понимаемое в смысле Чена—Пертама, является одновременно энтропийным суб- и суперрешением. Установлено, что максимум энтропийных субрешений задачи Коши также является энтропийным субрешением этой задачи. С помощью этого результата доказано существование наибольшего энтропийного субрешения (и наименьшего энтропийного суперрешения). Показано также, что наибольшее энтропийное субрешение и наименьшее энтропийное суперрешение являются и энтропийными решениями.

Ключевые слова: нелинейные вырождающиеся параболические уравнения, задача Коши, энтропийные решения, энтропийные суб- и суперрешения, принцип максимума/минимума, метод удвоения переменных.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при поддержке РФФ, грант № 22-21-00344.

Для цитирования: Е. Ю. Панов. К теории энтропийных суб- и суперрешений нелинейных вырождающихся параболических уравнений // Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. 69, № 2. С. 306–331. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-306-331>

1. ВВЕДЕНИЕ

В полупространстве $\Pi = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$, рассмотрим нелинейное параболическое уравнение

$$u_t + \operatorname{div}_x(\varphi(u) - a(u)\nabla_x u) = 0, \quad (1.1)$$

в котором вектор потока $\varphi(u) = (\varphi_1(u), \dots, \varphi_n(u))$ лишь непрерывен: $\varphi_i(u) \in C(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n$, а симметричная матрица диффузии $a(u) = (a_{ij}(u))_{i,j=1}^n$ измерима по Лебегу и ограничена: $a_{ij}(u) \in L^\infty(\mathbb{R})$, $i, j = 1, \dots, n$. Также предполагается, что матрица $a(u) \geq 0$ (неотрицательно определена). Так как матрица диффузии может иметь нетривиальное ядро, уравнение (1.1) является вырождающимся (гиперболическим-параболическим) уравнением. В частном случае $a \equiv 0$ оно превращается в закон сохранения первого порядка

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) = 0. \quad (1.2)$$



Уравнение (1.1) можно переписать (по крайней мере — формально) в дивергентной форме

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) - D_x^2 \cdot A(u) = 0, \tag{1.3}$$

где матрица $A(u)$ является первообразной для матрицы диффузии $a(u)$, $A'(u) = a(u)$, а оператор D_x^2 — это «дивергенция второго порядка», так что

$$D_x^2 \cdot A(u) \doteq \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} A_{ij}(u), \quad u = u(t, x).$$

Мы будем исследовать задачу Коши для уравнения (1.1) с начальным условием

$$u(0, x) = u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n). \tag{1.4}$$

Пусть функция $g(u) \in BV_{loc}(\mathbb{R})$ имеет ограниченную вариацию на любом отрезке из \mathbb{R} . Нам понадобится ограниченный линейный оператор $T_g : C(\mathbb{R})/C \rightarrow C(\mathbb{R})/C$, где C — пространство постоянных функций. Этот оператор определяется, с точностью до аддитивной константы, равенством

$$T_g(f)(u) = g(u-)f(u) - \int_0^u f(s)dg(s), \tag{1.5}$$

в котором $g(u-) = \lim_{v \rightarrow u-} g(v)$ обозначает левосторонний предел функции g в точке u , а интеграл в (1.5) понимается в соответствии с формулой

$$\int_0^u f(s)dg(s) = \operatorname{sign} u \int_{J(u)} f(s)dg(s),$$

где $\operatorname{sign} u = 1$, $J(u)$ — интервал $[0, u)$, если $u > 0$; $\operatorname{sign} u = -1$, $J(u) = [u, 0)$, если $u \leq 0$. Следует отметить, что функция $T_g(f)(u)$ непрерывна даже в случае разрывной $g(u)$. Например, при $g(u) = \operatorname{sign}(u - k)$ имеем $T_g(f)(u) = \operatorname{sign}(u - k)(f(u) - f(k))$. Заметим также, что при $f \in C^1(\mathbb{R})$ оператор T_g однозначно определяется равенством $T_g(f)'(u) = g(u)f'(u)$ (в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$).

Фиксируем факторизацию матрицы диффузии $a(u)$ вида $a(u) = b^\top(u)b(u)$, где $b(u) = (b_{kj}(u))$, $k \in \overline{1, l}$, $j \in \overline{1, n}$, — это $l \times n$ -матрица с ограниченными и измеримыми компонентами $b_{kj}(u) \in L^\infty(\mathbb{R})$. Таким образом, справедливы равенства $a_{ij}(u) = \sum_{k=1}^l b_{ki}b_{kj}$. Матрица $b(u)$ может рассматриваться как квадратный корень из $a(u)$. При $l = n$ можно выбрать $b(u) = a(u)^{1/2}$. Напомним понятие энтропийного решения задачи (1.1), (1.4), предложенное в работе [11].

Определение 1.1. Функция $u = u(t, x) \in L^\infty(\Pi)$ называется *энтропийным решением* (кратко — *э.р.*) задачи (1.1), (1.4), если выполнены следующие условия:

- (i) при всех $k = 1, \dots, l$ распределения

$$\operatorname{div}_x B_k(u(t, x)) \in L_{loc}^2(\Pi), \tag{1.6}$$

где векторы $B_k(u) = (B_{k1}(u), \dots, B_{kn}(u)) \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n)$ таковы, что $B_{ki}'(u) = b_{ki}(u)$ в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, $i = 1, \dots, n$;

- (ii) для любой функции $g(u) \in C^1(\mathbb{R})$ и всех $k = 1, \dots, l$

$$\operatorname{div}_x T_g(B_k)(u(t, x)) = g(u(t, x)) \operatorname{div}_x B_k(u(t, x)) \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi); \tag{1.7}$$

- (iii) для любой выпуклой функции $\eta(u) \in C^2(\mathbb{R})$ (энтропии)

$$\eta(u)_t + \operatorname{div}_x T_{\eta'}(\varphi)(u) - D_x^2 \cdot T_{\eta'}(A)(u) + \eta''(u) \sum_{k=1}^l (\operatorname{div}_x B_k(u))^2 \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi); \tag{1.8}$$

- (iv) $\operatorname{ess} \lim_{t \rightarrow 0} |u(t, \cdot) - u_0| = 0$ в $L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$.

Условие (1.8) означает, что для любой неотрицательной пробной функции $f = f(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$

$$\int_{\Pi} [\eta(u)f_t + T_{\eta'}(\varphi)(u) \cdot \nabla_x f + T_{\eta'}(A)(u) \cdot D_x^2 f - f\eta''(u) \sum_{k=1}^l (\operatorname{div}_x B_k(u))^2] dt dx \geq 0, \quad (1.9)$$

где $D_x^2 f$ — симметричная матрица, состоящая из частных производных f второго порядка (гессиан), а « \cdot » обозначает стандартное скалярное умножение векторов или матриц (в частности, скалярное произведение матриц A, B — это $A \cdot B = \operatorname{Tr} A^\top B$).

В изотропном случае, когда матрица диффузии скалярна, определение э.р. значительно упрощается и было предложено ранее в работе Карильо [10]. В случае законов сохранения (1.2) определение 1.1 сводится к известному определению обобщённого э.р. задачи (1.2), (1.4) в смысле С. Н. Кружкова [1]. В случае гладкого вектора потока э.р. задачи Коши всегда единственно. Однако, в рассматриваемом нами общем случае лишь непрерывного вектора потока и возможно вырожденной диффузии свойство единственности э.р. может нарушаться. Для законов сохранения (1.2) соответствующие примеры можно найти в [2, 12], где были также предложены и точные достаточные условия единственности. Позднее эти условия были распространены и на параболический случай, см., например, [8, 9, 13]. Как установлено в недавней работе [16], в общем случае всегда существуют единственные наибольшее и наименьшее э.р. задачи (1.1), (1.4).

Подставив в (1.8) $\eta(u) = \pm u$, получим, что

$$u_t + \operatorname{div}_x \varphi(u) - D_x^2 \cdot A(u) = 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi),$$

т. е. э.р. u является и слабым решением (1.3), что естественно. Если в определении 1.1 ограничиться неубывающими (невозрастающими) энтропиями $\eta(u)$, получим понятия энтропийного субрешения и энтропийного суперрешения. Приведём строгие определения.

Определение 1.2. Функция $u = u(t, x) \in L^\infty(\Pi)$ называется *энтропийным субрешением* (кратко — *э.субр.*) задачи (1.1), (1.4), если выполнены условия (i), (ii) определения 1.1, для любой неубывающей выпуклой функции $\eta(u) \in C^2(\mathbb{R})$ справедливо энтропийное неравенство (iii), а начальное условие (iv) заменено на требование

$$\operatorname{ess} \lim_{t \rightarrow 0} (u(t, \cdot) - u_0)^+ = 0 \quad \text{в } L_{loc}^1(\mathbb{R}^n),$$

где $z^+ = \max(z, 0)$.

Определение 1.3. Функция $u = u(t, x) \in L^\infty(\Pi)$ называется *энтропийным суперрешением* (кратко — *э.суперр.*) задачи (1.1), (1.4), если выполнены условия (i), (ii) определения 1.1, для любой невозрастающей выпуклой функции $\eta(u) \in C^2(\mathbb{R})$ справедливо энтропийное неравенство (iii), а начальное условие (iv) заменено на требование

$$\operatorname{ess} \lim_{t \rightarrow 0} (u(t, \cdot) - u_0)^- = 0 \quad \text{в } L_{loc}^1(\mathbb{R}^n),$$

где $z^- = \max(-z, 0) = (-z)^+$.

Легко видеть, что функция $u = u(t, x)$ является э.р. задачи (1.1), (1.4) тогда и только тогда, когда эта функция одновременно э.субр. и э.суперр. этой задачи.

Замечание 1.1. Функция $u = u(t, x)$ является э.суперр. задачи (1.1), (1.4) тогда и только тогда, когда $v = -u(t, x)$ — э.субр. задачи

$$v_t + \operatorname{div}_x (-\varphi(-v) - a(-v)\nabla v) = 0, \quad v(0, x) = v_0(x) \doteq -u_0(x), \quad (1.10)$$

соответствующее факторизации $a(-v) = b(-v)^\top b(-v)$.

Действительно, вектор потока $\tilde{\varphi}(v)$, матрица \tilde{A} и векторы $\tilde{B}_k(v)$, $k \in \overline{1, l}$, соответствующие уравнению (1.10) и указанной выше факторизации матрицы диффузии, определяются равенствами:

$$\tilde{\varphi}(v) = -\varphi(-v), \quad \tilde{A}(v) = -A(-v), \quad \tilde{B}_k(v) = -B_k(-v).$$

Заметим также, что $T_{\tilde{g}}(\tilde{f})(u) = T_g(f)(-u)$ (с точностью до аддитивной константы). Если $f, g \in C^1(\mathbb{R})$, это соотношение следует из тождества

$$\frac{d}{du} T_{\tilde{g}}(\tilde{f})(u) = \tilde{g}(u)\tilde{f}'(u) = -g(-u)f'(-u) = -T_g(f)'(-u) = \frac{d}{du} T_g(f)(-u).$$

В общем случае нужно использовать аппроксимацию функций f, g .

Таким образом, $\operatorname{div} T_{\tilde{g}}(\tilde{B}_j)(v) = \operatorname{div} T_g(B_j)(u)$, откуда легко следует эквивалентность условий (i), (ii) для э.суперр. u и для э.субр. v . Если $\eta(u)$ — выпуклая функция, то $\hat{\eta}(v) = \eta(-v)$ также является выпуклой функцией и $\hat{\eta}'(v) = \tilde{\eta}'(v) = -\eta'(-v)$. Поэтому в $\mathcal{D}'(\Pi)$

$$\begin{aligned} & \hat{\eta}(v) + \operatorname{div}_x T_{\hat{\eta}'}(\tilde{\varphi})(v) - D_x^2 \cdot T_{\hat{\eta}'}(\tilde{A})(v) + \hat{\eta}''(u) \sum_{k=1}^l (\operatorname{div}_x \tilde{B}_k(v))^2 = \\ & = \eta(u)_t + \operatorname{div}_x T_{\eta'}(\varphi)(u) - D_x^2 \cdot T_{\eta'}(A)(u) + \eta''(u) \sum_{k=1}^l (\operatorname{div}_x B_k(u))^2. \end{aligned}$$

Поскольку условие невозрастания $\hat{\eta}$ эквивалентно условию неубывания η , то энтропийное неравенство (iii) для э.суперр. u равносильно требованию (iii) для э.субр. $v = -u$. Наконец, ввиду тождества

$$(v(t, \cdot) - v_0)^+ = (u_0 - u(t, \cdot))^+ = (u(t, \cdot) - u_0)^-,$$

начальное условие для э.суперр. u сводится к начальному условию для э.субр. v .

Основные результаты статьи содержатся в следующих теоремах.

Теорема 1.1 (принципы максимума/минимума). Пусть $u_1(t, x)$ — э.субр. задачи (1.1), (1.4), $u_2 = u_2(t, x)$ — её э.суперр. Тогда для любой константы $c \in \mathbb{R}$ для п.в. $t > 0$

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (u_1(t, x) - c)^+ dx & \leq \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - c)^+ dx, \\ \int_{\mathbb{R}^n} (u_2(t, x) - c)^- dx & \leq \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - c)^- dx. \end{aligned}$$

В частности, п.в. на Π

$$u_1(t, x) \leq \operatorname{ess\,sup} u_0(x), \quad u_2(t, x) \geq \operatorname{ess\,inf} u_0(x)$$

(принципы максимума/минимума).

Теорема 1.2. Максимум э.субр. $u_1 = u_1(t, x)$ и $u_2 = u_2(t, x)$ задачи (1.1), (1.4) также является э.субр. этой задачи.

С учётом замечания 1.1 и тождества $\min(-u_1, -u_2) = -\max(u_1, u_2)$ из теоремы 1.1 вытекает следующее утверждение.

Следствие 1.1. Минимум э.суперр. $u_1 = u_1(t, x)$ и $u_2 = u_2(t, x)$ задачи (1.1), (1.4) также является э.суперр. этой задачи.

С помощью этих результатов устанавливается существование наибольшего э.субр. (наименьшего э.суперр.).

Теорема 1.3. Существуют наибольшее э.субр. $u = u_+(t, x)$ и наименьшее э.суперр. $u = u_-(t, x)$ задачи (1.1), (1.4). Эти функции являются и э.р. этой задачи.

Таким образом, u_+, u_- являются наибольшим и наименьшим э.р. задачи (1.1), (1.4), существование которых установлено в работе [16].

В изотропном случае теоремы 1.1–1.3 следуют из работ [6, 15]. Для уравнений первого порядка, включая и неоднородные, аналогичные результаты были получены значительно раньше в [3–5].

В заключение вводного раздела мы покажем, что начальное условие из определений э.субр. и э.суперр. можно включить в интегральное энтропийное неравенство вида (1.9). Для э.р. соответствующее соотношение доказано в [16].

Предложение 1.1. Функция $u = u(t, x) \in L^\infty(\Pi)$, удовлетворяющая условиям (i), (ii) определения 1.1, является э.субр. задачи (1.1), (1.4) тогда и только тогда, когда для любой неубывающей выпуклой функции $\eta(u) \in C^2(\mathbb{R})$ и всех неотрицательных пробных функций $f = f(t, x) \in$

$C_0^\infty(\bar{\Pi})$, где $\bar{\Pi} = [0, +\infty) \times \mathbb{R}^n$,

$$\int_{\Pi} \left[\eta(u) f_t + T_{\eta'}(\varphi)(u) \cdot \nabla_x f + T_{\eta'}(A)(u) \cdot D_x^2 f - f \eta''(u) \sum_{k=1}^l (\operatorname{div}_x B_k(u))^2 \right] dt dx + \int_{\mathbb{R}^n} \eta(u_0(x)) f(0, x) dx \geq 0. \quad (1.11)$$

Доказательство. Предположим, что $u = u(t, x)$ — э.субр. задачи (1.1), (1.4). Пусть E состоит из значений $t > 0$ таких, что (t, x) — точка Лебега функции $u(t, x)$ для почти всех $x \in \mathbb{R}^n$. Известно (см., например, [14, Lemma 1.2]), что множество E имеет полную меру Лебега на $(0, +\infty)$ и что $t \in E$ является общей точкой Лебега функций $t \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} u(t, x) b(x) dx$ при всех $b(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Так

как, ввиду ограниченности u , любая точка Лебега этой функции является также точкой Лебега композиции $\eta(u)$ для любой функции $\eta \in C(\mathbb{R})$, мы можем заменить u на $\eta(u)$ в приведённом выше свойстве. Выберем функцию $\omega(s) \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, такую что $\omega(s) \geq 0$, $\operatorname{supp} \omega \subset [0, 1]$, $\int \omega(s) ds = 1$,

и определим последовательности $\omega_r(s) = r\omega(rs)$, $\theta_r(s) = \int_{-\infty}^s \omega_r(\sigma) d\sigma = \int_{-\infty}^{rs} \omega(\sigma) d\sigma$, $r \in \mathbb{N}$. Ясно,

что последовательность $\omega_r(s)$ сходится при $r \rightarrow \infty$ к δ -мере Дирака слабо в $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ (т. е. является аппроксимативной единицей), а последовательность $\theta_r(s)$ сходится к функции Хевисайда $\theta(s)$ поточечно и в $L_{loc}^1(\mathbb{R})$. Заметим, что $0 \leq \theta_r(s) \leq 1$. Пусть $f = f(t, x) \in C_0^\infty(\bar{\Pi})$, $f \geq 0$, $t_0 \in E$. Применяя (1.8) к неотрицательной пробной функции $\theta_r(t - t_0) f(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$, получим соотношение

$$\int_{\Pi} \eta(u) \omega_r(t - t_0) f dt dx + \int_{\Pi} [\eta(u) f_t + T_{\eta'}(\varphi)(u) \cdot \nabla_x f + T_{\eta'}(A)(u) \cdot D_x^2 f - f \eta''(u) \sum_{k=1}^l (\operatorname{div}_x B_k(u))^2] \theta_r(t - t_0) dt dx \geq 0, \quad (1.12)$$

где, в соответствии с определением 1.2, $\eta(u) \in C^2(\mathbb{R})$ — произвольная неубывающая выпуклая функция ($\eta''(u) \geq 0$, $\eta'(u) \geq 0$). Поскольку

$$\int_{\Pi} \eta(u) \omega_r(t - t_0) f dt dx = \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \eta(u(t, x)) f(t, x) dx \right) \omega_r(t - t_0) dt,$$

а t_0 — точка Лебега функции $t \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} \eta(u(t, x)) f(t, x) dx$, то в пределе при $r \rightarrow \infty$ из (1.12) вытекает, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(u(t_0, x)) f(t_0, x) dx + \int_{(t_0, +\infty) \times \mathbb{R}^n} [\eta(u) f_t + T_{\eta'}(\varphi)(u) \cdot \nabla_x f + T_{\eta'}(A)(u) \cdot D_x^2 f - f \eta''(u) \sum_{k=1}^l (\operatorname{div}_x B_k(u))^2] dt dx \geq 0. \quad (1.13)$$

Далее, поскольку функция $\eta(u)$ не убывает и удовлетворяет условию Липшица на любом отрезке,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\eta(u(t_0, x)) - \eta(u_0(x)))^+ f(t_0, x) dx \leq C \int_{\mathbb{R}^n} (u(t_0, x) - u_0(x))^+ f(t_0, x) dx, \quad C = \operatorname{const}.$$

В пределе при $E \ni t_0 \rightarrow 0$ из этой оценки и начального условия (iv) определения 1.2 следует, что

$$\limsup_{E \ni t_0 \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(u(t_0, x)) f(t_0, x) dx \leq \lim_{E \ni t_0 \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(u_0(x)) f(t_0, x) dx + \quad (1.14)$$

$$+ \lim_{E \ni t_0 \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} (\eta(u(t_0, x)) - \eta(u_0(x)))^+ f(t_0, x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} \eta(u_0(x)) f(0, x) dx. \quad (1.15)$$

С учётом этого соотношения из (1.13) в пределе при $E \ni t_0 \rightarrow 0$ следует (1.11).

Обратно, предположим, что выполнено соотношение (1.11). В случае неотрицательной пробной функции $f \in C_0^\infty(\Pi)$ (с компактным носителем, лежащим в открытом полупространстве Π) из этого соотношения вытекает энтропийное условие (iii) из определения 1.2. Остаётся только проверить начальное условие (iv) этого определения. Фиксируем неотрицательную функцию $h(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, $t_0 \in E$ и положим $f = h(x)(1 - \theta_r(t - t_0))$. Из (1.11) с выбранной пробной функцией f вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(u_0(x))h(x)dx - \int_{\Pi} \eta(u(t, x))\omega_r(t - t_0)h dt dx + \int_{(0, t_0+1/r) \times \mathbb{R}^n} [T_{\eta'}(\varphi)(u) \cdot \nabla h + \\ + T_{\eta'}(A)(u) \cdot D^2 h](1 - \theta_r(t - t_0)) dt dx \geq \int_{\Pi} f \eta''(u) \sum_{k=1}^l (\operatorname{div}_x B_k(u))^2 dt dx \geq 0. \end{aligned}$$

Переходя в этом неравенстве к пределу при $r \rightarrow \infty$, получим, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(u_0(x))h(x)dx - \int_{\mathbb{R}^n} \eta(u(t_0, x))h(x)dx + \int_{(0, t_0) \times \mathbb{R}^n} [T_{\eta'}(\varphi)(u) \cdot \nabla h + T_{\eta'}(A)(u) \cdot D^2 h] dt dx \geq 0,$$

откуда в пределе при $E \ni t_0 \rightarrow 0$ получаем

$$\limsup_{E \ni t_0 \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(u(t_0, x))h(x)dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \eta(u_0(x))h(x)dx. \quad (1.16)$$

По непрерывности соотношение (1.16) остаётся верным для любой выпуклой неубывающей энтропии $\eta \in C(\mathbb{R})$ (в частности, для $\eta(u) = (u - v)^+$, $v \in \mathbb{R}$) и для любой неотрицательной функции $h(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Так как $u_0(x) \in L^\infty(\mathbb{R}^n)$, мы можем найти ступенчатую функцию $v(x) = \sum_{i=1}^m v_i \chi_{A_i}(x)$, где $v_i \in \mathbb{R}$, $\chi_{A_i}(x)$ — характеристические функции измеримых множеств $A_i \subset \mathbb{R}^n$, так что $\|u_0 - v\|_\infty < \varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ произвольно. Множества A_i , $i = 1, \dots, m$, предполагаются дизъюнктивными. Ввиду (1.16)

$$\begin{aligned} \limsup_{E \ni t_0 \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} (u(t_0, x) - v(x))^+ h(x) dx &= \limsup_{E \ni t_0 \rightarrow 0} \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} (u(t_0, x) - v_i)^+ \chi_{A_i}(x) h(x) dx \leq \\ &\leq \sum_{i=1}^m \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - v_i)^+ \chi_{A_i}(x) h(x) dx = \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - v(x))^+ h(x) dx \leq \varepsilon \|h\|_1. \end{aligned} \quad (1.17)$$

Так как

$$(u(t_0, x) - u_0(x))^+ \leq (u(t_0, x) - v(x))^+ + (v(x) - u_0(x))^+ < (u(t_0, x) - v(x))^+ + \varepsilon,$$

из (1.17) следует, что

$$\limsup_{E \ni t_0 \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} (u(t_0, x) - u_0(x))^+ h(x) dx \leq 2\varepsilon \|h\|_1$$

и, ввиду произвольности $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{E \ni t_0 \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} (u(t_0, x) - u_0(x))^+ h(x) dx = 0$$

для всех $h(x) \in L^1(\mathbb{R}^n)$. Ясно, что это сводится к условию (iv)

$$\operatorname{ess} \lim_{t \rightarrow 0^+} (u(t, x) - u_0(x))^+ = 0 \quad \text{в } L_{loc}^1(\mathbb{R}^n)$$

и завершает доказательство. \square

Заметим, что утверждение, аналогичное предложению 1.1, справедливо и для э.суперр. (нужно лишь заменить неубывающие энтропии $\eta(u)$ на невозрастающие).

2. ПРИНЦИП МАКСИМУМА/МИНИМУМА

В этом разделе мы докажем теорему 1.1. Достаточно доказать утверждение, касающееся э.субр. (принцип максимума).

Предложение 2.1. Пусть $u = u(t, x)$ — э.субр. задачи (1.1), (1.4). Тогда $\forall c \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u(t, x) - c)^+ dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - c)^+ dx \quad (2.1)$$

для п.в. $t > 0$.

Доказательство. Приведённое ниже доказательство почти дословно повторяет доказательство [16, Proposition 2.2]. Как следует из (1.8), для любой неубывающей выпуклой функции $\eta \in C^2(\mathbb{R})$

$$\eta(u)_t + \operatorname{div}_x T_{\eta'}(\varphi)(u) - D_x^2 \cdot T_{\eta'}(A)(u) \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi). \quad (2.2)$$

По непрерывности неравенство (2.2) справедливо для любой неубывающей выпуклой энтропии $\eta \in C(\mathbb{R})$. Пусть $M = \|u\|_\infty$. Заметим, что условие (2.1) нетривиально только при

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - c)^+ dx < +\infty,$$

что и будет предполагаться ниже. Рассмотрим сначала случай $c = 0$. Обозначим при $m \geq n$, $\delta > 0$

$$\alpha(s) = \min((s^+)^m, 1), \quad \beta(k) = \alpha(k/\delta), \quad \eta(u) = \int_{-\infty}^u \beta(k) dk = \begin{cases} 0, & u \leq 0, \\ \frac{u^{m+1}}{(m+1)\delta^m}, & 0 < u \leq \delta, \\ u - \frac{m\delta}{m+1}, & u > \delta. \end{cases}$$

Ввиду (2.2) при $u = u(t, x)$

$$\eta(u)_t + \operatorname{div}_x \psi(u) - D_x^2 \cdot H(u) \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi), \quad (2.3)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \psi(u) &= T_\beta(\varphi)(u) = \int_0^u (\varphi(u) - \varphi(k)) \beta'(k) dk \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^n), \\ H(u) &= T_\beta(A)(u) = \int_0^u (A(u) - A(k)) \beta'(k) dk \in C(\mathbb{R}, \mathbb{R}^{n \times n}). \end{aligned}$$

Так как матрица $A'(u) = a(u) \geq 0$ (неотрицательно определена), матрица $A(u) - A(k) \geq 0$ при $k \leq u$. Поэтому матрица $H(u) \geq 0$ (ясно также, что $H(u) = 0$ при $u \leq 0$). Заметим, что при $|u| \leq M$

$$|\psi(u)| \leq 2 \max_{|u| \leq M} |\varphi(u)| \int_0^u \beta'(k) dk = 2 \max_{|u| \leq M} |\varphi(u)| \beta(u)$$

(здесь и ниже мы используем обозначение $|v|$ для евклидовой нормы конечномерного вектора v) и, аналогично,

$$|H(u)| \leq 2 \max_{|u| \leq M} |A(u)| \beta(u).$$

Из этих оценок следует, что для любого $\varepsilon > 0$

$$\frac{|\psi(u)|}{\eta(u) + \varepsilon} \leq \frac{C_1 \beta(u)}{\eta(u) + \varepsilon}, \quad \frac{|H(u)|}{\eta(u) + \varepsilon} \leq \frac{C_2 \beta(u)}{\eta(u) + \varepsilon},$$

где $C_1 = 2 \max_{|u| \leq M} |\varphi(u)|$, $C_2 = 2 \max_{|u| \leq M} |A(u)|$.

Так как $\beta(u) = 1$ при $u > \delta$, функция $\omega(u) \doteq \frac{\beta(u)}{\eta(u) + \varepsilon}$ убывает на $[\delta, +\infty)$. Поэтому

$$\max \omega(u) = \max_{[0, \delta]} \omega(u) \leq \max_{u > 0} \frac{(u/\delta)^m}{\delta(u/\delta)^{m+1}/(m+1) + \varepsilon} = \max_{v=u/\delta > 0} \frac{m+1}{\delta v + (m+1)\varepsilon v^{-m}}.$$

Прямые вычисления показывают, что

$$\min_{v > 0} (\delta v + (m+1)\varepsilon v^{-m}) = \frac{\delta(m+1)}{m} \left(\frac{m(m+1)\varepsilon}{\delta} \right)^{\frac{1}{m+1}}.$$

Поэтому

$$\omega(u) \leq \frac{m}{\delta} \left(\frac{\delta}{m(m+1)} \right)^{\frac{1}{m+1}} \varepsilon^{-\frac{1}{m+1}}.$$

Итак,

$$\frac{|\psi(u)|}{\eta(u) + \varepsilon} \leq C\varepsilon^{-\frac{1}{m+1}}, \quad \frac{|H(u)|}{\eta(u) + \varepsilon} \leq C\varepsilon^{-\frac{1}{m+1}}, \quad (2.4)$$

где

$$C = \max(C_1, C_2) \frac{m}{\delta} \left(\frac{\delta}{m(m+1)} \right)^{\frac{1}{m+1}} = \text{const}.$$

Ввиду (2.3) для любого $\varepsilon > 0$

$$(\eta(u) + \varepsilon)_t + \text{div}_x \psi(u) - D_x^2 \cdot H(u) \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi),$$

т. е. для любой пробной функции $f = f(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$, $f \geq 0$

$$\int_{\Pi} [(\eta(u) + \varepsilon)f_t + \psi(u) \cdot \nabla_x f + H(u) \cdot D_x^2 f] dt dx \geq 0. \quad (2.5)$$

Выберем неотрицательную невозрастающую функцию $\rho(r) \in C^\infty(\mathbb{R})$ со следующими свойствами: $\rho(r) = 1$ при $r \leq 0$, $\rho(r) = e^{-r}$ при $r \geq 1$, $\rho(r)$ выпукла вверх на луче $(-\infty, 1/2]$ и выпукла вниз на $[1/2, +\infty)$ (так что $1/2$ — точка перегиба функции $\rho(r)$). Такая функция всегда удовлетворяет неравенству

$$\rho''(r) \leq c|\rho'(r)| = -c\rho'(r) \quad (2.6)$$

для некоторой положительной константы c . Действительно, $\rho''(r) \leq 0 \leq |\rho'(r)|$ при $r < 1/2$ и $\rho''(r) = -\rho'(r) = e^{-r}$ при $r > 1$. На оставшемся отрезке $[1/2, 1]$ имеем $-\rho'(r) \geq -\rho'(1) = e^{-1}$ по выпуклости $\rho(r)$ и, значит, $\rho''(r) \leq -c\rho'(r)$, где $c = e \max_{1/2 \leq r \leq 1} \rho''(r) \geq 1$. Итак, оценка (2.6)

выполнена. Зададим пробную функцию в виде

$$f(t, x) = \rho(N(t - t_0) + |x| - R)\chi(t),$$

где $0 < t_0 < T$, $R > 1$, константа $N = N(\varepsilon)$ будет указана позже, а неотрицательная функция $\chi(t) \in C_0^\infty((0, t_0))$. Заметим, что $\rho(N(t - t_0) + |x| - R) \equiv 1$ в цилиндре $|x| < R$, $t \in (0, t_0)$, так что особенность в точке $x = 0$ отсутствует. Таким образом, $f(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$. Поскольку функция f вместе со всеми её производными экспоненциально убывает при $|x| \rightarrow \infty$, мы можем выбрать эту функцию как пробную в (2.5). Путём простых вычислений находим, что

$$f_t(t, x) = N\rho'(N(t - t_0) + |x| - R)\chi(t) + \rho(N(t - t_0) + |x| - R)\chi'(t), \quad (2.7)$$

$$\nabla_x f = \rho'(N(t - t_0) + |x| - R)\chi(t) \frac{x}{|x|}, \quad (2.8)$$

$$D_x^2 f = \left(\rho''(N(t - t_0) + |x| - R) \frac{x \otimes x}{|x|^2} + \rho'(N(t - t_0) + |x| - R) \frac{|x|^2 E - x \otimes x}{|x|^3} \right) \chi(t), \quad (2.9)$$

где E обозначает единичную матрицу. Ввиду (2.9) для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{aligned} (D_x^2 f)\xi \cdot \xi &= \chi(t) \left(\rho''(N(t - t_0) + |x| - R) \frac{(x \cdot \xi)^2}{|x|^2} + \rho'(N(t - t_0) + |x| - R) \frac{|x|^2 |\xi|^2 - (x \cdot \xi)^2}{|x|^3} \right) \leq \\ &\leq -c\rho'(N(t - t_0) + |x| - R) \frac{(x \cdot \xi)^2}{|x|^2} \chi(t), \quad (2.10) \end{aligned}$$

где мы используем (2.6) и неравенство $\rho'(\dots)(|x|^2|\xi|^2 - (x \cdot \xi)^2) \leq 0$. Из соотношения (2.10) следует, что матрица

$$-c\rho'(N(t-t_0) + |x| - R)\chi(t)M(x) - D_x^2 f \geq 0$$

(неотрицательно определена), где $M(x) = \frac{x \otimes x}{|x|^2}$. Используя известное свойство неотрицательности скалярного произведения $A \cdot B$ неотрицательно определённых матриц $A, B \geq 0$, находим, что

$$H(u) \cdot D_x^2 f \leq -c\rho'(N(t-t_0) + |x| - R)\chi(t)H(u) \cdot M(x) \leq -c\rho'(N(t-t_0) + |x| - R)\chi(t)|H(u)| \quad (2.11)$$

(заметим, что $|M(x)| = 1$). Как следует из (2.5) с помощью соотношений (2.7), (2.8) и (2.11),

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi} [(\eta(u) + \varepsilon)\chi'(t)\rho(N(t-t_0) + |x| - R)] dt dx + \\ & + \int_{\Pi} [N(\eta(u) + \varepsilon) - |\psi(u)| - c|H(u)|]\rho'(N(t-t_0) + |x| - R)\chi(t) dt dx \geq 0. \quad (2.12) \end{aligned}$$

Положив $N = C(c+1)\varepsilon^{-\frac{1}{m+1}}$ в (2.12), получим, что $N(\eta(u) + \varepsilon) - |\psi(u)| - c|H(u)| \geq 0$ ввиду (2.4). Так как $\rho'(r) \leq 0$, последний интеграл в (2.12) неположителен и из (2.12) следует, что

$$\begin{aligned} & \int \left(\int_{\mathbb{R}^n} (\eta(u) + \varepsilon)\rho(N(t-t_0) + |x| - R) dx \right) \chi'(t) dt = \\ & = \int_{\Pi} (\eta(u) + \varepsilon)\chi'(t)\rho(N(t-t_0) + |x| - R) dt dx \geq 0 \quad \forall \chi(t) \in C_0^\infty((0, t_0)), \chi(t) \geq 0. \end{aligned}$$

Это означает, что

$$\frac{d}{dt} \int_{\mathbb{R}^n} (\eta(u) + \varepsilon)\rho(N(t-t_0) + |x| - R) dx \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'((0, t_0)). \quad (2.13)$$

Пусть E — множество полной меры значений $t > 0$, определённое в доказательстве предложения 1.1. Напомним, что любое значение $t \in E$ является точкой Лебега функции $t \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} (\eta(u) + \varepsilon)\rho(N(t-t_0) + |x| - R) dx$. Если $t_0 \in E$, то из (2.13) следует, что для всех $t \in E$, $t < t_0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\eta(u(t_0, x)) + \varepsilon)\rho(|x| - R) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} (\eta(u(t, x)) + \varepsilon)\rho(N(t-t_0) + |x| - R) dx.$$

Перейдём в этом неравенстве к пределу при $E \ni t \rightarrow 0$. Из начального условия следует (так же, как в (1.14)), что

$$\limsup_{E \ni t \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \eta(u(t, x))\rho(N(t-t_0) + |x| - R) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \eta(u_0(x))\rho(|x| - Nt_0 - R) dx,$$

откуда приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \int_{\mathbb{R}^n} \eta(u(t_0, x))\rho(|x| - R) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} (\eta(u_0(x)) + \varepsilon)\rho(|x| - Nt_0 - R) dx \leq \\ & \leq \int_{\mathbb{R}^n} \eta(u_0(x)) dx + \varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \rho(|x| - Nt_0 - R) dx. \quad (2.14) \end{aligned}$$

Заметим, что

$$\int_{\mathbb{R}^n} \rho(|x| - Nt_0 - R) dx \leq \int_{|x| \leq Nt_0 + R + 1} dx + e^{Nt_0 + R} \int_{|x| > Nt_0 + R + 1} e^{-|x|} dx \leq$$

$$\leq c_n(Nt_0 + R + 1)^n + nc_n e^{Nt_0+R} \int_{Nt_0+R+1}^{+\infty} e^{-r} r^{n-1} dr, \quad (2.15)$$

где c_n — мера единичного шара в \mathbb{R}^n . Поскольку

$$\begin{aligned} \int_{Nt_0+R+1}^{+\infty} e^{-r} r^{n-1} dr &= \int_0^{+\infty} e^{-s-Nt_0-R-1} (s + Nt_0 + R + 1)^{n-1} ds \leq \\ &\leq (Nt_0 + R + 1)^{n-1} e^{-Nt_0-R-1} \int_0^{+\infty} e^{-s} (1 + s)^{n-1} ds = a(Nt_0 + R + 1)^{n-1} e^{-Nt_0-R-1}, \end{aligned}$$

$a = \text{const}$, из (2.15) следует, что при некоторых константах a_1, a_2

$$\varepsilon \int_{\mathbb{R}^n} \rho(|x| - N(\varepsilon)t_0 - R) dx \leq a_1 \varepsilon (N(\varepsilon)t_0 + R + 1)^n \leq a_2 \varepsilon (1 + \varepsilon^{-\frac{1}{m+1}})^n \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0+} 0$$

(напомним, что $m + 1 > n$). Поэтому, переходя к пределу при $\varepsilon \rightarrow 0+$ в (2.14) получим, что при всех $t_0 \in E$

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(u(t_0, x)) \rho(|x| - R) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \eta(u_0(x)) dx. \quad (2.16)$$

Заметим, что $0 \leq \eta(u) \leq u^+$ и что $\eta(u) \rightarrow u^+$ при $\delta \rightarrow 0$. По теореме Лебега о предельном переходе под знаком интеграла из (2.16) в пределе при $\delta \rightarrow 0$ следует, что для п.в. $t = t_0 > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u(t, x))^+ \rho(|x| - R) dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x))^+ dx < +\infty.$$

По лемме Фату в пределе при $R \rightarrow \infty$ получим неравенство

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u(t, x))^+ dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x))^+ dx, \quad (2.17)$$

что доказывает (2.1) при $c = 0$. В общем случае произвольного $c \in \mathbb{R}$ заметим, что $u - c$ является э.субр. задачи

$$u_t + \text{div}_x(\varphi(u + c) - a(u + c)\nabla_x u) = 0, \quad u(0, x) = u_0(x) - c.$$

Соотношение (2.17) для этого э.субр. совпадает с требуемой оценкой (2.1). \square

Следствие 2.1. Если $u = u(t, x)$ — э.суперр. задачи (1.1), (1.4), то $\forall c \in \mathbb{R}$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u(t, x) - c)^- dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} (u_0(x) - c)^- dx \quad (2.18)$$

для п.в. $t > 0$.

Доказательство. По замечанию 1.1 функция $v = -u$ является э.субр. задачи (1.10). По предложению 2.1 с заменой c на $-c$ получим, что для п.в. $t > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (c - u(t, x))^+ dx = \int_{\mathbb{R}^n} (v(t, x) - (-c))^+ dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} (v_0(x) - (-c))^+ dx = \int_{\mathbb{R}^n} (c - u_0(x))^+ dx,$$

что эквивалентно (2.18). \square

Ясно, что из предложения 2.1 и следствия 2.1 вытекает утверждение теоремы 1.1.

3. МЕТОД УДВОЕНИЯ ПЕРЕМЕННЫХ И ПРИНЦИП СРАВНЕНИЯ

Пусть $\omega_r(\sigma)$, $\theta_r(s)$, $r \in \mathbb{N}$, — последовательности функций, определённые при доказательстве предложения 1.1. Положим $z_r^+ = \int_0^z \theta_r(s) ds$. Ясно, что $0 \leq z_r^+ \leq z^+$ при всех $z \in \mathbb{R}$ и что $z_r^+ \rightarrow z^+$ при $r \rightarrow \infty$ равномерно на \mathbb{R} . Положим также $m_r(u, v) = v + (u - v)_r^+$. Ясно, что эта функция является равномерной аппроксимацией $\max(u, v)$.

Рассмотрим пару функций $v, w \in L^\infty(\Pi)$, удовлетворяющих условиям (i), (ii) определения 1.1. Следующее свойство играет ключевую роль при обосновании метода удвоения переменных.

Лемма 3.1. Для любой функции $f = f(t, x; \tau, y) \in C_0^\infty(\Pi \times \Pi)$ и любой функции $p(u) \in C^1(\mathbb{R})$

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Pi \times \Pi} p(m_r(w, v)) \omega_r(w - v) \sum_{k=1}^l \operatorname{div}_x B_k(w) \operatorname{div}_y B_k(v) f dt dx d\tau dy = \\ = - \int_{\Pi \times \Pi} \sum_{i,j=1}^n \theta(w - v) (T_p(A_{ij})(w) - T_p(A_{ij})(v)) f_{x_i y_j} dt dx d\tau dy, \end{aligned} \quad (3.1)$$

где $w = w(t, x)$, $v = v(\tau, y)$ (напомним, что $\theta(s)$ — это функция Хевисайда).

Доказательство. По цепному свойству (ii) для $w = w(t, x)$ при всех $k = 1, \dots, l$

$$p(m_r(w, v)) \omega_r(w - v) \operatorname{div}_x B_k(w) = \operatorname{div}_x T_{p(m_r(\cdot, v)) \omega_r(\cdot - v)}(B_k)(w) = \sum_{i=1}^n (\psi_{ki}^r)_{x_i} \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi \times \Pi),$$

где

$$\psi_{ki}^r = \psi_{ki}^r(w, v) = T_{p(m_r(\cdot, v)) \omega_r(\cdot - v)} B_{ki}(w) = \int_v^w p(m_r(\alpha, v)) \omega_r(\alpha - v) b_{ki}(\alpha) d\alpha,$$

$w = w(t, x)$, $v = v(\tau, y)$. Перебрасывая производные на пробную функцию f , получим

$$\begin{aligned} I_r \doteq \int_{\Pi \times \Pi} p(m_r(w, v)) \omega_r(w - v) \sum_{k=1}^l \operatorname{div}_x B_k(w) \operatorname{div}_y B_k(v) f dt dx d\tau dy = \\ = - \int_{\Pi \times \Pi} \sum_{k=1}^l \sum_{i=1}^n \psi_{ki}^r(w, v) \operatorname{div}_y B_k(v) f_{x_i} dt dx d\tau dy. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Используя теперь цепное свойство (ii) для функции $v = v(\tau, y)$, получим соотношение

$$\psi_{ki}^r(w, v) \operatorname{div}_y B_k(v) = \operatorname{div}_y T_{\psi_{ki}^r(w, \cdot)}(B_k)(v).$$

Подставляя это соотношение в (3.2) и перебрасывая производные на функции f_{x_i} , придём к равенству

$$I_r = \int_{\Pi \times \Pi} \sum_{k=1}^l \sum_{i,j=1}^n T_{\psi_{ki}^r(w, \cdot)}(B_{kj})(v) f_{x_i y_j} dt dx d\tau dy \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi \times \Pi), \quad (3.3)$$

в котором

$$T_{\psi_{ki}^r(w, \cdot)}(B_{kj})(v) = \int_w^v \psi_{ki}^r(w, \beta) b_{kj}(\beta) d\beta. \quad (3.4)$$

Заметим далее, что функции $\omega_r(s)$ образуют аппроксимативную единицу. Поэтому

$$\psi_{ki}^r(w, \beta) = \int_\beta^w p(m_r(\alpha, \beta)) \omega_r(\alpha - \beta) b_{ki}(\alpha) d\alpha \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \theta(w - \beta) p(\beta) b_{ki}(\beta) \quad \text{для п.в. } \beta \in \mathbb{R}.$$

Ввиду ограниченности $\psi_{ki}^r(w, \beta)$ мы вправе применить теорему Лебега об ограниченной сходимости и получить из (3.4) предельное соотношение

$$T_{\psi_{ki}^r(w, \cdot)}(B_{kj})(v) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \theta(w - v) \int_w^v p(\beta) b_{ki}(\beta) b_{kj}(\beta) d\beta.$$

Суммируя по $k = 1, \dots, l$ и используя равенства $\sum_{k=1}^l b_{ki}(\beta) b_{kj}(\beta) = a_{ij}(\beta)$, получим

$$\sum_{k=1}^l T_{\psi_{ki}^r(w, \cdot)}(B_{kj})(v) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \theta(w - v) \int_w^v p(\beta) a_{ij}(\beta) d\beta = -\theta(w - v)(T_p(A_{ij})(w) - T_p(A_{ij})(v)).$$

Используя это соотношение и теорему Лебега, перейдем к пределу в равенстве (3.3). Получим желаемое равенство (3.1):

$$\lim_{r \rightarrow \infty} I_r = - \int_{\Pi \times \Pi} \sum_{i,j=1}^n \theta(w - v)(T_p(A_{ij})(w) - T_p(A_{ij})(v)) f_{x_j y_j} dt dx d\tau dy.$$

Лемма доказана. □

Предложение 3.1. Пусть $u_1 = u_1(t, x)$ — э.субр. задачи (1.1), (1.4), а $u_2 = u_2(t, x)$ — э.супер. этой задачи (с возможно различными начальными функциями). Тогда

$$(u_1 - u_2)_t^+ + \operatorname{div}_x [\theta(u_1 - u_2)(\varphi(u_1) - \varphi(u_2))] - D_x^2 \cdot [\theta(u_1 - u_2)(A(u_1) - A(u_2))] \leq 0 \quad (3.5)$$

в $\mathcal{D}'(\Pi)$.

Доказательство. Так как $u_1 = u_1(t, x)$ является э.субр., то по энтропийному неравенству (1.8) с энтропией $\eta(u) = (u - v)_r^+$, где $v \in \mathbb{R}$, получим

$$((u_1 - v)_r^+)_t + \operatorname{div}_x T_{\theta_r(\cdot - v)}(\varphi)(u_1) - D_x^2 T_{\theta_r(\cdot - v)}(A)(u_1) + \omega_r(u_1 - v) \sum_{k=1}^l (\operatorname{div}_x B_k(u_1))^2 \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi).$$

Положим здесь $v = u_2(\tau, y)$, применим полученное соотношение к неотрицательной пробной функции $f = f(t, x; \tau, y) \in C_0^\infty(\Pi \times \Pi)$ и затем проинтегрируем по переменным $(\tau, y) \in \Pi$. Получим в итоге неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi \times \Pi} [(u_1 - u_2)_r^+ f_t + T_{\theta_r(\cdot - u_2)}(\varphi)(u_1) \cdot \nabla_x f + \\ & + T_{\theta_r(\cdot - u_2)}(A)(u_1) \cdot D_x^2 f - \omega_r(u_1 - u_2) \sum_{k=1}^l (\operatorname{div}_x B_k(u_1))^2] dt dx d\tau dy \geq 0, \quad (3.6) \end{aligned}$$

$u_1 = u_1(t, x)$, $u_2 = u_2(\tau, y)$. Аналогично, так как $u_2 = u_2(\tau, y)$ — э.суперр., справедливо неравенство (1.8) с невозрастающей выпуклой энтропией $\eta(u) = (v - u)_r^+$, где $v \in \mathbb{R}$ (заметим, что $\eta'(u) = -\theta_r(v - u)$):

$$((v - u_2)_r^+)_\tau - \operatorname{div}_y T_{\theta_r(v - \cdot)}(\varphi)(u_2) + D_y^2 T_{\theta_r(v - \cdot)}(A)(u_2) + \omega_r(v - u_2) \sum_{k=1}^l (\operatorname{div}_y B_k(u_2))^2 \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi).$$

Положим в этом соотношении $v = u_1(t, x)$ (при фиксированных $(t, x) \in \Pi$), применим к пробной функции f (по переменным (τ, y)) и затем проинтегрируем по $(t, x) \in \Pi$. В результате получим неравенство, аналогичное (3.6):

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi \times \Pi} [(u_1 - u_2)_r^+ f_\tau - T_{\theta_r(u_1 - \cdot)}(\varphi)(u_2) \cdot \nabla_y f - \\ & - T_{\theta_r(u_1 - \cdot)}(A)(u_2) \cdot D_y^2 f - \omega_r(u_1 - u_2) \sum_{k=1}^l (\operatorname{div}_y B_k(u_2))^2] dt dx d\tau dy \geq 0. \quad (3.7) \end{aligned}$$

Складывая (3.6) и (3.7), получим соотношение

$$\begin{aligned} \int_{\Pi \times \Pi} [(u_1 - u_2)_r^+(f_t + f_\tau) + T_{\theta_r(\cdot, -u_2)}(\varphi)(u_1) \cdot \nabla_x f - T_{\theta_r(u_1, \cdot)}(\varphi)(u_2) \cdot \nabla_y f + \\ + T_{\theta_r(\cdot, -u_2)}(A)(u_1) \cdot D_x^2 f - T_{\theta_r(u_1, \cdot)}(A)(u_2) \cdot D_y^2 f - \\ - \omega_r(u_1 - u_2) \sum_{k=1}^l ((\operatorname{div}_x B_k(u_1))^2 + (\operatorname{div}_y B_k(u_2))^2)] dt dx d\tau dy \geq 0. \end{aligned}$$

Воспользовавшись элементарным неравенством $a^2 + b^2 \geq 2ab$, выводим из этого соотношения, что

$$\begin{aligned} \int_{\Pi \times \Pi} [(u_1 - u_2)_r^+(f_t + f_\tau) + T_{\theta_r(\cdot, -u_2)}(\varphi)(u_1) \cdot \nabla_x f - T_{\theta_r(u_1, \cdot)}(\varphi)(u_2) \cdot \nabla_y f + \\ + T_{\theta_r(\cdot, -u_2)}(A)(u_1) \cdot D_x^2 f - T_{\theta_r(u_1, \cdot)}(A)(u_2) \cdot D_y^2 f - \\ - 2\omega_r(u_1 - u_2) \sum_{k=1}^l \operatorname{div}_x B_k(u_1) \operatorname{div}_y B_k(u_2)] dt dx d\tau dy \geq 0. \quad (3.8) \end{aligned}$$

Перейдём в этом неравенстве к пределу при $r \rightarrow \infty$. Учитывая, что для любой непрерывной функции $q(u)$

$$\begin{aligned} T_{\theta_r(\cdot, -v)}(q)(u) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} T_{\theta(\cdot, -v)}(q)(u) = \theta(u - v)(q(u) - q(v)), \\ T_{\theta_r(v, \cdot)}(q)(u) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} T_{\theta(v, \cdot)}(q)(u) = \theta(v - u)(q(u) - q(v)) \end{aligned}$$

в пространстве $C(\mathbb{R})/C$ и что по лемме 3.1 (при $p \equiv 1$, $w = u_1$, $v = u_2$)

$$\begin{aligned} \int_{\Pi \times \Pi} \omega_r(u_1 - u_2) \sum_{k=1}^l \operatorname{div}_x B_k(u_1) \operatorname{div}_y B_k(u_2) f dt dx d\tau dy \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \\ - \int_{\Pi \times \Pi} \sum_{i,j=1}^n \theta(u_1 - u_2)(A_{ij}(u_1) - A_{ij}(u_2)) f_{x_i y_j} dt dx d\tau dy, \end{aligned}$$

выводим из (3.8) неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\Pi \times \Pi} [(u_1 - u_2)^+(\partial_t + \partial_\tau) f + \theta(u_1 - u_2)(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)) \cdot (\nabla_x + \nabla_y) f + \\ + \theta(u_1 - u_2)(A(u_1) - A(u_2)) \cdot (D_x^2 + D_y^2 + 2D_{xy}^2) f] dt dx d\tau dy \geq 0. \quad (3.9) \end{aligned}$$

Заметим, что операторная матрица

$$\begin{aligned} D_x^2 + D_y^2 + 2D_{xy}^2 &= \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} + \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial y_j} + \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial y_j} + \frac{\partial^2}{\partial y_i \partial x_j} = \\ &= \left(\frac{\partial}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial y_i} \right) \left(\frac{\partial}{\partial x_j} + \frac{\partial}{\partial y_j} \right) = (\nabla_x + \nabla_y) \otimes (\nabla_x + \nabla_y). \end{aligned}$$

Выберем в (3.9) пробную функцию f в виде $f = g(t, x) \delta_r(\tau - t, y - x)$, где $g = g(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$, $g \geq 0$, а $\delta_r(\tau - t, y - x) = \omega_r(\tau - t) \prod_{i=1}^n \omega_r(y_i - x_i)$, $r \in \mathbb{N}$. Так как $(\partial_t + \partial_\tau) \delta_r = 0$, $(\nabla_x + \nabla_y) \delta_r = 0$, справедливы равенства

$$\begin{aligned} (\partial_t + \partial_\tau) f &= \delta_r(\tau - t, y - x) g_t(t, x), \quad (\nabla_x + \nabla_y) f = \delta_r(\tau - t, y - x) \nabla_x g(t, x), \\ (\nabla_x + \nabla_y) \otimes (\nabla_x + \nabla_y) f &= \delta_r(\tau - t, y - x) D_x^2 g(t, x), \end{aligned}$$

Поэтому (3.9) переписывается в виде

$$\int_{\Pi \times \Pi} [(u_1 - u_2)^+ g_t + \theta(u_1 - u_2)(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)) \cdot \nabla_x g +$$

$$+ \theta(u_1 - u_2)(A(u_1) - A(u_2)) \cdot D_x^2 g] \delta_r(\tau - t, y - x) dt dx d\tau dy \geq 0. \quad (3.10)$$

Напомним, что здесь $u_1 = u_1(t, x)$, $u_2 = u_2(\tau, y)$. Поскольку для п.в. $(t, x) \in \Pi$ (именно, для точек Лебега функции u_2)

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi} [(u_1(t, x) - u_2(\tau, y))^+ g_t(t, x) + \theta(u_1(t, x) - u_2(\tau, y))(\varphi(u_1(t, x)) - \varphi(u_2(\tau, y))) \cdot \nabla_x g(t, x) + \\ & + \theta(u_1(t, x) - u_2(\tau, y))(A(u_1(t, x)) - A(u_2(\tau, y))) \cdot D_x^2 g(t, x)] \delta_r(\tau - t, y - x) d\tau dy \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \\ & (u_1(t, x) - u_2(t, x))^+ g_t(t, x) + \theta(u_1(t, x) - u_2(t, x))(\varphi(u_1(t, x)) - \varphi(u_2(t, x))) \cdot \nabla_x g(t, x) + \\ & + \theta(u_1(t, x) - u_2(t, x))(A(u_1(t, x)) - A(u_2(t, x))) \cdot D_x^2 g(t, x), \end{aligned}$$

что позволяет перейти к пределу при $r \rightarrow \infty$ в неравенстве (3.10) и с использованием теоремы Лебега о предельном переходе под знаком интеграла получить, что $\forall g = g(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$, $g \geq 0$

$$\int_{\Pi} [(u_1 - u_2)^+ g_t + \theta(u_1 - u_2)(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)) \cdot \nabla_x g + \theta(u_1 - u_2)(A(u_1) - A(u_2)) \cdot D_x^2 g] dt dx \geq 0,$$

где уже $u_1 = u_1(t, x)$, $u_2 = u_2(t, x)$. Это означает, что выполнено требуемое соотношение (3.5). \square

Неравенство (3.5) играет ключевую роль при доказательстве единственности э.р. и принципов сравнения. В изотропном случае $A(u) = g(u)E$ оно было доказано ранее в [6, лемма 3.1]. Нам понадобится один специальный вариант принципа сравнения, установленный в изотропном случае в [6, лемма 3.1], а для законов сохранения (1.2) значительно раньше в [7, Lemma 1].

Предложение 3.2. Пусть $u_1 = u_1(t, x) - \text{э.субр.}$, а $u_2 = u_2(t, x) - \text{э.суперр.}$ задачи (1.1), (1.4) с начальными функциями u_{01} , u_{02} , соответственно. Предположим, что для любого $T > 0$ множество

$$A_T \doteq \{ (t, x) \in (0, T) \times \mathbb{R}^n \mid u_1(t, x) > u_2(t, x) \}$$

имеет конечную меру Лебега. Тогда для п.в. $t > 0$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u_1(t, x) - u_2(t, x))^+ dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} (u_{01}(x) - u_{02}(x))^+ dx.$$

В частности, если $u_{01} \leq u_{02}$, то $u_1 \leq u_2$ п.в. на Π (принцип сравнения).

Доказательство. Будем следовать схеме доказательства [6, лемма 3.1], в анизотропном случае потребуются лишь незначительные изменения.

Выберем $0 < t_0 < t_1$ и положим $f = f(t, x) = (\theta_r(t - t_0) - \theta_r(t - t_1))p(x/l)$, где $r, l \in \mathbb{N}$, неотрицательная функция $p(y) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ такова, что $0 \leq p(y) \leq p(0) = 1$, а последовательность $\theta_r(s) = \int_{-\infty}^s \omega_r(\sigma) d\sigma$ аппроксимаций функции Хевисайда определена при доказательстве предложения 1.1 выше. Применяя (3.5) к пробной функции f , получим после простых преобразований неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi} (u_1(t, x) - u_2(t, x))^+ \omega_r(t - t_1) p(x/l) dt dx \leq \int_{\Pi} (u_1(t, x) - u_2(t, x))^+ \omega_r(t - t_0) p(x/l) dt dx + \\ & + \frac{1}{l} \int_{\Pi} \theta(u_1 - u_2)(\varphi(u_1) - \varphi(u_2)) \cdot \nabla_y p(x/l) (\theta_r(t - t_0) - \theta_r(t - t_1)) dt dx + \\ & + \frac{1}{l^2} \int_{\Pi} \theta(u_1 - u_2)(A(u_1) - A(u_2)) \cdot D_y^2 p(x/l) (\theta_r(t - t_0) - \theta_r(t - t_1)) dt dx. \quad (3.11) \end{aligned}$$

Пусть $t_0, t_1 \in E$, где E — множество полной меры значений t , для которых (t, x) является точкой Лебега функции $(u_1(t, x) - u_2(t, x))^+$ для п.в. $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда t_0, t_1 — точки Лебега функций $t \rightarrow$

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u_1(t, x) - u_2(t, x))^+ p(x/l) dx, \quad l \in \mathbb{N},$$

и из (3.11) в пределе при $r \rightarrow \infty$ следует, что

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (u_1(t_1, x) - u_2(t_1, x))^+ p(x/l) dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (u_1(t_0, x) - u_2(t_0, x))^+ p(x/l) dx + \\
&+ \frac{1}{l} \int_{(t_0, t_1) \times \mathbb{R}^n} \theta(u_1 - u_2) (\varphi(u_1) - \varphi(u_2)) \cdot \nabla_y p(x/l) dt dx + \\
&+ \frac{1}{l^2} \int_{(t_0, t_1) \times \mathbb{R}^n} \theta(u_1 - u_2) (A(u_1) - A(u_2)) \cdot D_y^2 p(x/l) dt dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} (u_1(t_0, x) - u_2(t_0, x))^+ p(x/l) dx \\
&+ \left(\frac{1}{l} \|\varphi(u_1) - \varphi(u_2)\|_\infty \|\nabla_y p\|_\infty + \frac{1}{l^2} \|A(u_1) - A(u_2)\|_\infty \|D_y^2 p\|_\infty \right) \int_{(0, t_1) \times \mathbb{R}^n} \theta(u_1 - u_2) dt dx. \quad (3.12)
\end{aligned}$$

Заметим, что по условию леммы $\int_{(0, t_1) \times \mathbb{R}^n} \theta(u_1 - u_2) dt dx < +\infty$. Переходя к пределу в (3.12) при $E \ni t_0 \rightarrow 0+$, получим, что для всех $t = t_1 \in E$

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (u_1(t, x) - u_2(t, x))^+ p(x/l) dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} (u_{01}(x) - u_{02}(x))^+ p(x/l) dx + \\
&+ \left(\frac{1}{l} \|\varphi(u_1) - \varphi(u_2)\|_\infty \|\nabla_y p\|_\infty + \frac{1}{l^2} \|A(u_1) - A(u_2)\|_\infty \|D_y^2 p\|_\infty \right) \int_{(0, t) \times \mathbb{R}^n} \theta(u_1 - u_2) dt dx, \quad (3.13)
\end{aligned}$$

где мы пользуемся неравенством

$$(u_1(t_0, x) - u_2(t_0, x))^+ \leq (u_1(t_0, x) - u_{01}(x))^+ + (u_{01}(x) - u_{02}(x))^+ + (u_{02}(x) - u_2(t_0, x))^+$$

вместе с начальными условиями (iv) определений 1.2, 1.3. По лемме Фату из (3.13) в пределе при $l \rightarrow \infty$ вытекает требуемое соотношение

$$\int_{\mathbb{R}^n} (u_1(t, x) - u_2(t, x))^+ dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} (u_{01}(x) - u_{02}(x))^+ dx.$$

Предложение доказано. \square

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.2

Установим сначала, что максимум э.субр. удовлетворяет условиям (i), (ii). Это вытекает из следующего более общего свойства.

Лемма 4.1. Пусть функции $u_1, u_2 \in L^\infty(\Pi)$ удовлетворяют условиям (i), (ii) определения 1.1. Тогда функция $u = \max(u_1, u_2)$ также удовлетворяет этим условиям.

Доказательство. Для доказательства мы снова применим метод удвоения переменных. Фиксируем $k \in \overline{1, l}$. Пусть $p(u) \in C^1(\mathbb{R})$, $v \in \mathbb{R}$, $r \in \mathbb{N}$. Из свойства (ii) с функцией $g(u) = p(u)\theta_r(u - v)$ в пределе при $r \rightarrow \infty$ вытекает равенство

$$\operatorname{div}_x T_p(B_k)(\max(u_1, v)) = \operatorname{div}_x T_{\theta(\cdot - v)}(B_k)(u_1) = p(u_1)\theta(u_1 - v) \operatorname{div}_x B_k(u_1) \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi),$$

причём по условию (i) $\operatorname{div}_x B_k(u_1) \in L_{loc}^2(\Pi)$. Положим в этом равенстве $v = u_2(\tau, y)$, $(\tau, y) \in \Pi$, применим к пробной функции $f = f(t, x; \tau, y)$ (относительно (t, x)) и проинтегрируем по $(\tau, y) \in \Pi$. Получим в итоге равенство

$$- \int_{\Pi \times \Pi} T_p(B_k)(\max(u_1, u_2)) \cdot \nabla_x f dt dx d\tau dy = \int_{\Pi \times \Pi} f p(u_1) \theta(u_1 - u_2) \operatorname{div}_x B_k(u_1) dt dx d\tau dy, \quad (4.1)$$

в котором $u_1 = u_1(t, x)$, $u_2 = u_2(\tau, y)$. Аналогично, из свойств (i), (ii) для функции $u_2(\tau, y)$ при $g(u) = p(u)(1 - \theta_r(u_1 - u))$ в пределе при $r \rightarrow \infty$ следует, что

$$\operatorname{div}_y T_p(B_k)(\max(u_1, u_2)) = T_{p(1 - \theta(u_1(t, x) - \cdot))}(B_k)(u_2) = p(u_2)(1 - \theta(u_1 - u_2)) \operatorname{div}_y B_k(u_2) \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi),$$

где $\operatorname{div}_y B_k(u_2) \in L^2_{loc}(\Pi)$. Применяя это равенство к f (относительно переменных (τ, y)) и затем интегрируя по (t, x) , получим, что

$$- \int_{\Pi \times \Pi} T_p(B_k)(\max(u_1, u_2)) \cdot \nabla_y f dt dx d\tau dy = \int_{\Pi \times \Pi} f p(u_2)(1 - \theta(u_1 - u_2)) \operatorname{div}_y B_k(u_2) dt dx d\tau dy. \quad (4.2)$$

Суммируя (4.1) и (4.2), получим

$$\begin{aligned} & - \int_{\Pi \times \Pi} T_p(B_k)(\max(u_1, u_2)) \cdot (\nabla_x + \nabla_y) f dt dx d\tau dy = \\ & = \int_{\Pi \times \Pi} f [p(u_1)\theta(u_1 - u_2) \operatorname{div}_x B_k(u_1) + p(u_2)(1 - \theta(u_1 - u_2)) \operatorname{div}_y B_k(u_2)] dt dx d\tau dy = \\ & = \int_{\Pi \times \Pi} f p(\max(u_1, u_2)) [\theta(u_1 - u_2) \operatorname{div}_x B_k(u_1) + (1 - \theta(u_1 - u_2)) \operatorname{div}_y B_k(u_2)] dt dx d\tau dy. \quad (4.3) \end{aligned}$$

Положим в этом соотношении, что $f = g(t, x)\delta_r(\tau - t, y - x)$, где $g = g(t, x) \in C^\infty_0(\Pi)$, а последовательность ядер δ_r , образующая аппроксимативную единицу на Π , определена при доказательстве предложения 3.1. Тогда равенство (4.3) переписется в виде

$$\begin{aligned} & - \int_{\Pi \times \Pi} T_p(B_k)(\max(u_1, u_2)) \cdot (\nabla_x g)\delta_r(\tau - t, y - x) dt dx d\tau dy = \int_{\Pi \times \Pi} [p(u_1)\theta(u_1 - u_2) \operatorname{div}_x B_k(u_1) + \\ & + p(u_2)(1 - \theta(u_1 - u_2)) \operatorname{div}_y B_k(u_2)] g(t, x)\delta_r(\tau - t, y - x) dt dx d\tau dy = \\ & = \int_{\Pi} g(t, x) p(\max(u_1(t, x), u_2(t, x))) [\operatorname{div}_x B_k(u_1(t, x))I_r(t, x) + \\ & + \operatorname{div}_x B_k(u_2(t, x))(1 - I_r(t, x))] dt dx + J_{1r} + J_{2r} + J_{3r}, \quad (4.4) \end{aligned}$$

где обозначено

$$I_r(t, x) = \int_{\Pi} \theta(u_1(t, x) - u_2(\tau, y))\delta_r(\tau - t, y - x) d\tau dy,$$

$$\begin{aligned} J_{1r} = \int_{\Pi \times \Pi} p(u_2(\tau, y))(1 - \theta(u_1(t, x) - u_2(\tau, y))) (\operatorname{div}_y B_k(u_2(\tau, y)) - \\ - \operatorname{div}_x B_k(u_2(t, x))) g(t, x)\delta_r(\tau - t, y - x) dt dx d\tau dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{2r} = \int_{\Pi \times \Pi} [p(\max(u_1(t, x), u_2(\tau, y))) - p(\max(u_1(t, x), u_2(t, x)))] \times \\ \times \theta(u_1(t, x) - u_2(\tau, y)) \operatorname{div}_x B_k(u_1(t, x)) g(t, x)\delta_r(\tau - t, y - x) dt dx d\tau dy, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} J_{3r} = \int_{\Pi \times \Pi} [p(\max(u_1(t, x), u_2(\tau, y))) - p(\max(u_1(t, x), u_2(t, x)))] \times \\ \times (1 - \theta(u_1(t, x) - u_2(\tau, y))) \operatorname{div}_x B_k(u_2(t, x)) g(t, x)\delta_r(\tau - t, y - x) dt dx d\tau dy. \end{aligned}$$

Так как $0 \leq I_r \leq 1$, то после возможного перехода к подпоследовательности (за которой мы сохраняем прежнее обозначение)

$$I_r \rightharpoonup I(t, x) \quad \text{*}-\text{слабо в } L^\infty(\Pi),$$

причём $0 \leq I(t, x) \leq 1$. Ясно, что тогда

$$\begin{aligned} \operatorname{div}_x B_k(u_1(t, x))I_r + \operatorname{div}_x B_k(u_2(t, x))(1 - I_r) \rightharpoonup \\ d_k \doteq \operatorname{div}_x B_k(u_1(t, x))I + \operatorname{div}_x B_k(u_2(t, x))(1 - I) \quad \text{слабо в } L^2_{loc}(\Pi). \quad (4.5) \end{aligned}$$

Покажем, что последовательности $J_{ir} \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$, $i = 1, 2, 3$. Имеем

$$|J_{1r}| \leq \text{const} \int_{\Pi \times \Pi} |\text{div}_y B_k(u_2(\tau, y)) - \text{div}_x B_k(u_2(t, x))| g(t, x) \delta_r(\tau - t, y - x) dt dx d\tau dy \rightarrow 0$$

при $r \rightarrow \infty$ по свойству непрерывности в среднем для функции $\text{div}_x B_k(u_2(t, x))$.

Далее, по неравенству Коши—Буняковского при $i = 2, 3$

$$\begin{aligned} |J_{ir}|^2 &\leq C^2 \int_{\Pi \times \Pi} (u_2(t, x) - u_2(\tau, y))^2 g(t, x) \delta_r(\tau - t, y - x) dt dx d\tau dy \times \\ &\times \int_{\Pi \times \Pi} [(\text{div}_x B_k(u_1(t, x)))^2 + (\text{div}_x B_k(u_2(t, x)))^2] g(t, x) \delta_r(\tau - t, y - x) dt dx d\tau dy = \\ &= C^2 \int_{\Pi \times \Pi} (u_2(t, x) - u_2(\tau, y))^2 g(t, x) \delta_r(\tau - t, y - x) dt dx d\tau dy \times \\ &\times \int_{\Pi} [(\text{div}_x B_k(u_1(t, x)))^2 + (\text{div}_x B_k(u_2(t, x)))^2] g(t, x) dt dx, \end{aligned}$$

где C — константа Липшица функции $p(u)$ на отрезке $|u| \leq M$, $M = \max(\|u_1\|_\infty, \|u_2\|_\infty)$. Так как первый сомножитель в правой части этого неравенства стремится к нулю при $r \rightarrow \infty$ (по свойству непрерывности в среднем), получаем, что $J_{ir} \rightarrow 0$. Итак,

$$J_{ir} \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0, \quad i = 1, 2, 3. \tag{4.6}$$

Перейдём к пределу при $r \rightarrow \infty$ в равенстве (4.4). Ввиду (4.5), (4.6) правая часть этого равенства сходится (после возможного выделения подпоследовательности) к

$$\int_{\Pi} g(t, x) p(\max(u_1(t, x), u_2(t, x))) d_k(t, x) dt dx.$$

Левая же часть сходится к

$$- \int_{\Pi} T_p(B_k)(\max(u_1, u_2)) \cdot \nabla_x g dt dx$$

(это устанавливается так же, как при доказательстве предложения 3.1). В итоге получим тождество: $\forall g = g(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$

$$- \int_{\Pi} T_p(B_k)(\max(u_1, u_2)) \cdot \nabla_x g dt dx = - \int_{\Pi} g(t, x) p(\max(u_1(t, x), u_2(t, x))) d_k(t, x) dt dx,$$

которое означает, что

$$\text{div}_x T_p(B_k)(\max(u_1, u_2)) = p(\max(u_1, u_2)) d_k. \tag{4.7}$$

При $p \equiv 1$ из (4.7) следует, что $\text{div}_x B_k(\max(u_1, u_2)) = d_k \in L^2_{loc}(\Pi)$, так что функция $u = \max(u_1, u_2)$ удовлетворяет условию (i). Подставляя $d_k = \text{div}_x B_k(\max(u_1, u_2))$ в (4.7), получим, что выполнено и условие (ii). \square

Аналогично доказывается, что и минимум функций, удовлетворяющих свойствам (i), (ii), также удовлетворяет этим свойствам. Заметим также, что предельное соотношение (4.5) справедливо без выделения подпоследовательности, это следует из того факта, что предельная функция $d_k = \text{div}_x B_k(\max(u_1, u_2))$ не зависит от выбора подпоследовательности.

Мы готовы приступить к доказательству теоремы 1.2.

Доказательство теоремы 1.2. Пусть $u_1 = u_1(t, x)$, $u_2 = u_2(t, x)$ — э.субр. задачи (1.1), (1.4). По лемме 4.1 функция $u = \max(u_1, u_2) \in L^\infty(\Pi)$ удовлетворяет условиям (i), (ii) определения 1.1. Проверим энтропийное условие (1.8) с неубывающей выпуклой энтропией $\eta(u) \in C^2(\mathbb{R})$. Для этого снова будем использовать метод удвоения переменных. Применяя для э.субр. $u_1 = u_1(t, x)$

условие (1.8) с неубывающей выпуклой энтропией $\eta(m_r(u, u_2))$, где $u_2 = u_2(\tau, y)$, получим соотношение

$$\begin{aligned} & \eta(m_r(u_1, u_2))_t + \operatorname{div}_x T_{\eta'(m_r(\cdot, u_2))\theta_r(\cdot - u_2)}(\varphi)(u_1) - D_x^2 T_{\eta'(m_r(\cdot, u_2))\theta_r(\cdot - u_2)}(A)(u_1) + \\ & + (\eta''(m_r(\cdot, u_2))(\theta_r(u_1 - u_2))^2 + \eta'(m_r(u_1, u_2))\omega_r(u_1 - u_2)) \sum_{k=1}^l (\operatorname{div}_x B_k(u_1))^2 \leq 0 \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi). \end{aligned}$$

Применяя это соотношение к неотрицательной пробной функции $f = f(t, x; \tau, y) \in C_0^\infty(\Pi \times \Pi)$ и интегрируя по переменным (τ, y) , получим неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi \times \Pi} [\eta(m_r(u_1, u_2))f_t + T_{\eta'(m_r(\cdot, u_2))\theta_r(\cdot - u_2)}(\varphi)(u_1) \cdot \nabla_x f + T_{\eta'(m_r(\cdot, u_2))\theta_r(\cdot - u_2)}(A)(u_1) \cdot D_x^2 f - \\ & - (\eta''(m_r(u_1, u_2))(\theta_r(u_1 - u_2))^2 + \eta'(m_r(u_1, u_2))\omega_r(u_1 - u_2)) \sum_{k=1}^l (\operatorname{div}_x B_k(u_1))^2 f] dt dx d\tau dy \geq 0. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Аналогично, из энтропийного неравенства (1.8) для э.субр. $u_2 = u_2(\tau, y)$ с неубывающей выпуклой энтропией $\eta(m_r(u_1, u))$ после применения к пробной функции f и интегрирования по (t, x) следует неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi \times \Pi} [\eta(m_r(u_1, u_2))f_\tau + T_{\eta'(m_r(u_1, \cdot))(1 - \theta_r(u_1 - \cdot))}(\varphi)(u_2) \cdot \nabla_y f + T_{\eta'(m_r(u_1, \cdot))(1 - \theta_r(u_1 - \cdot))}(A)(u_2) \cdot D_y^2 f - \\ & - (\eta''(m_r(u_1, u_2))(1 - \theta_r(u_1 - u_2))^2 + \eta'(m_r(u_1, u_2))\omega_r(u_1 - u_2)) \sum_{k=1}^l (\operatorname{div}_y B_k(u_2))^2 f] dt dx d\tau dy \geq 0. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Суммируя (4.8) и (4.9) и затем переходя к пределу при $r \rightarrow \infty$, получим неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi \times \Pi} [\eta(\max(u_1, u_2))(\partial_t + \partial_\tau)f + T_{\eta'}(\varphi)(\max(u_1, u_2)) \cdot (\nabla_x + \nabla_y)f + \\ & + T_{\eta'}(A)(\max(u_1, u_2)) \cdot (D_x^2 + D_y^2)f] dt dx d\tau dy - \\ & - \int_{\Pi \times \Pi} \eta''(\max(u_1, u_2)) \sum_{k=1}^l [\theta(u_1 - u_2)(\operatorname{div}_x B_k(u_1))^2 + (1 - \theta(u_1 - u_2))(\operatorname{div}_y B_k(u_2))^2] f dt dx d\tau dy \geq \\ & \geq \limsup_{r \rightarrow \infty} \int_{\Pi \times \Pi} \eta'(\max(u_1, u_2))\omega_r(u_1 - u_2) \sum_{k=1}^l [(\operatorname{div}_x B_k(u_1))^2 + (\operatorname{div}_y B_k(u_2))^2] dt dx d\tau dy \geq \\ & \geq 2 \limsup_{r \rightarrow \infty} \int_{\Pi \times \Pi} \eta'(m_r(u_1, u_2))\omega_r(u_1 - u_2) \sum_{k=1}^l \operatorname{div}_x B_k(u_1) \operatorname{div}_y B_k(u_2) dt dx d\tau dy. \end{aligned} \quad (4.10)$$

Мы учли, что при $r \rightarrow \infty$ справедливы предельные соотношения $m_r(u_1, u_2) \rightarrow \max(u_1, u_2)$

$$T_{\eta'(m_r(\cdot, u_2))\theta_r(\cdot - u_2)}(p)(u) \rightarrow T_{\eta'}(p)(\max(u, u_2)), \quad T_{\eta'(m_r(u_1, \cdot))(1 - \theta_r(u_1 - \cdot))}(u) \rightarrow T_{\eta'}(p)(\max(u_1, u))$$

в пространстве $C(\mathbb{R})/C$. Также использован факт, что замена функций $\eta''(m_r(u_1, u_2))(\theta_r(u_1 - u_2))^2$ и $\eta''(m_r(u_1, u_2))(1 - \theta_r(u_1 - u_2))^2$ на, соответственно, $\eta''(\max(u_1, u_2))\theta(u_1 - u_2)$ и $\eta''(\max(u_1, u_2))(1 - \theta(u_1 - u_2))$ приводит к ошибке, бесконечно малой при $r \rightarrow \infty$. По лемме 3.1

$$\lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Pi \times \Pi} \eta'(m_r(u_1, u_2))\omega_r(u_1 - u_2) \sum_{k=1}^l \operatorname{div}_x B_k(u_1) \operatorname{div}_y B_k(u_2) dt dx d\tau dy =$$

$$= - \int_{\Pi \times \Pi} \sum_{i,j=1}^n \theta(u_1 - u_2) (T_{\eta'}(A_{ij})(u_1) - T_{\eta'}(A_{ij})(u_2)) f_{x_i y_j} dt dx d\tau dy. \quad (4.11)$$

Так как функции $T_{\eta'}(A_{ij})(u_2(\tau, y))$ не зависят от переменных (t, x) , то

$$\int_{\Pi \times \Pi} \sum_{i,j=1}^n T_{\eta'}(A_{ij})(u_2) f_{x_i y_j} dt dx d\tau dy = - \int_{\Pi \times \Pi} \sum_{i,j=1}^n (T_{\eta'}(A_{ij})(u_2))_{x_i} f_{y_j} dt dx d\tau dy = 0,$$

и после добавления к правой части соотношения (4.11) равного нулю интеграла

$$\int_{\Pi \times \Pi} \sum_{i,j=1}^n T_{\eta'}(A_{ij})(u_2) f_{x_i y_j} dt dx d\tau dy$$

это соотношение переписывается в виде

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Pi \times \Pi} \eta'(m_r(u_1, u_2)) \omega_r(u_1 - u_2) \sum_{k=1}^l \operatorname{div}_x B_k(u_1) \operatorname{div}_y B_k(u_2) dt dx d\tau dy = \\ = - \int_{\Pi \times \Pi} \sum_{i,j=1}^n T_{\eta'}(A_{ij})(\max(u_1, u_2)) f_{x_i y_j} dt dx d\tau dy. \end{aligned} \quad (4.12)$$

Это позволяет переписать (4.10) в виде

$$\begin{aligned} \int_{\Pi \times \Pi} [\eta(\max(u_1, u_2))(\partial_t + \partial_\tau) f + T_{\eta'}(\varphi)(\max(u_1, u_2)) \cdot (\nabla_x + \nabla_y) f + \\ + T_{\eta'}(A)(\max(u_1, u_2)) \cdot (\nabla_x + \nabla_y) \otimes (\nabla_x + \nabla_y) f] dt dx d\tau dy - \\ - \int_{\Pi \times \Pi} \eta''(\max(u_1, u_2)) \sum_{k=1}^l [\theta(u_1 - u_2) (\operatorname{div}_x B_k(u_1))^2 + \\ + (1 - \theta(u_1 - u_2)) (\operatorname{div}_y B_k(u_2))^2] f dt dx d\tau dy \geq 0, \end{aligned} \quad (4.13)$$

$u_1 = u_1(t, x)$, $u_2 = u_2(\tau, y)$. В соответствии с методом удвоения переменных положим здесь $f = g(t, x) \delta_r(\tau - t, y - x)$, где $g(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$, $g \geq 0$ и перейдем к пределу при $r \rightarrow \infty$. Так же, как при доказательстве предложения 3.1, устанавливается, что предел первого интеграла в неравенстве (4.13) равен

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} \int_{\Pi \times \Pi} [\eta(\max(u_1, u_2)) g_t + T_{\eta'}(\varphi)(\max(u_1, u_2)) \cdot \nabla_x g + \\ + T_{\eta'}(A)(\max(u_1, u_2)) \cdot D_x^2 g] \delta_r(\tau - t, y - x) dt dx d\tau dy \\ = \int_{\Pi} [\eta(\max(u_1, u_2)) g_t + T_{\eta'}(\varphi)(\max(u_1, u_2)) \cdot \nabla_x g + T_{\eta'}(A)(\max(u_1, u_2)) \cdot D_x^2 g] dt dx, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где уже $u_1 = u_1(t, x)$, $u_2 = u_2(t, x)$. Предел второго интеграла в (4.13) не изменится, если мы заменим $u_2(\tau, y)$ на $u_2(t, x)$ в выражениях $\eta''(\max(u_1, u_2))$, $\operatorname{div}_y B_k(u_2)$. Используя также неравенство Йенсена, получим

$$\begin{aligned} \liminf_{r \rightarrow \infty} \int_{\Pi \times \Pi} \eta''(\max(u_1, u_2)) \sum_{k=1}^l [\theta(u_1 - u_2) (\operatorname{div}_x B_k(u_1))^2 + (1 - \theta(u_1 - u_2)) (\operatorname{div}_y B_k(u_2))^2] \times \\ \times g \delta_r(\tau - t, y - x) dt dx d\tau dy \geq \liminf_{r \rightarrow \infty} \int_{\Pi} \eta''(\max(u_1(t, x), u_2(t, x))) g(t, x) \times \end{aligned}$$

$$\times \left(\int_{\Pi} \sum_{k=1}^l [\theta(u_1 - u_2) \operatorname{div}_x B_k(u_1) + (1 - \theta(u_1 - u_2)) \operatorname{div}_x B_k(u_2)]^2 \delta_r(\tau - t, y - x) d\tau dy \right) dt dx. \quad (4.15)$$

Заметим, что мера $\delta_r(\tau - t, y - x) d\tau dy$ — вероятностная при всех (t, x) . По интегральному неравенству Йенсена

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi} \sum_{k=1}^l [\theta(u_1 - u_2) \operatorname{div}_x B_k(u_1) + (1 - \theta(u_1 - u_2)) \operatorname{div}_x B_k(u_2)]^2 \delta_r(\tau - t, y - x) d\tau dy \geq \\ & \geq \sum_{k=1}^l \left(\int_{\Pi} \theta(u_1 - u_2) \operatorname{div}_x B_k(u_1) + (1 - \theta(u_1 - u_2)) \operatorname{div}_x B_k(u_2) \delta_r(\tau - t, y - x) d\tau dy \right)^2 = \\ & = \sum_{k=1}^l (\operatorname{div}_x B_k(u_1(t, x)) I_r + \operatorname{div}_x B_k(u_2(t, x)) (1 - I_r))^2, \quad (4.16) \end{aligned}$$

где

$$I_r = I_r(t, x) = \int_{\Pi} \theta(u_1(t, x) - u_2(\tau, y)) \delta_r(\tau - t, y - x) d\tau dy.$$

Ввиду (4.5) для всех $k \in \overline{1, l}$ при $r \rightarrow \infty$

$$\operatorname{div}_x B_k(u_1(t, x)) I_r + \operatorname{div}_x B_k(u_2(t, x)) (1 - I_r) \rightarrow d_k = \operatorname{div} B_k(\max(u_1, u_2)).$$

По свойству слабой полунепрерывности снизу выпуклых функционалов $u \rightarrow \int u^2 \rho dt dx$, $\rho = \rho(t, x) \geq 0$,

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi} \eta''(\max(u_1(t, x), u_2(t, x))) g(t, x) \sum_{k=1}^l (\operatorname{div} B_k(\max(u_1, u_2)))^2 dt dx \leq \\ & \leq \liminf_{r \rightarrow \infty} \int_{\Pi} \eta''(\max(u_1(t, x), u_2(t, x))) g(t, x) \sum_{k=1}^l (\operatorname{div}_x B_k(u_1(t, x)) I_r + \operatorname{div}_x B_k(u_2(t, x)) (1 - I_r))^2 dt dx \\ & \leq \liminf_{r \rightarrow \infty} \int_{\Pi \times \Pi} \eta''(\max(u_1, u_2)) \sum_{k=1}^l [\theta(u_1 - u_2) (\operatorname{div}_x B_k(u_1))^2 + (1 - \theta(u_1 - u_2)) (\operatorname{div}_y B_k(u_2))^2] \times \\ & \quad \times g \delta_r(\tau - t, y - x) dt dx d\tau dy, \quad (4.17) \end{aligned}$$

где мы использовали неравенства (4.15), (4.16). С учётом (4.14), (4.17) из (4.13) в пределе при $r \rightarrow \infty$ следует неравенство

$$\begin{aligned} & \int_{\Pi} [\eta(\max(u_1, u_2)) g_t + T_{\eta'}(\varphi)(\max(u_1, u_2)) \cdot \nabla_x g + T_{\eta'}(A)(\max(u_1, u_2)) \cdot D_x^2 g - \\ & \quad - \eta''(\max(u_1, u_2)) \sum_{k=1}^l (\operatorname{div} B_k(\max(u_1, u_2)))^2 g] dt dx \geq 0, \end{aligned}$$

справедливое для любой неотрицательной пробной функции $g = g(t, x)$. Таким образом, функция $u = \max(u_1(t, x), u_2(t, x))$ удовлетворяет энтропийному условию (1.8) с любой неубывающей выпуклой энтропией $\eta(u)$. Для завершения доказательства осталось заметить, что

$$(\max(u_1(t, x), u_2(t, x)) - u_0(x))^+ \leq (u_1(t, x) - u_0(x))^+ + (u_2(t, x) - u_0(x))^+.$$

Поэтому из начального условия (iv) определения 1.2 для э.субр. u_1, u_2 следует, что

$$\operatorname{ess} \lim_{t \rightarrow 0} (\max(u_1(t, x), u_2(t, x)) - u_0(x))^+ = 0 \quad \text{в } L_{loc}^1(\mathbb{R}^n).$$

В соответствии с определением 1.2 функция $u = \max(u_1(t, x), u_2(t, x))$ — э.субр. задачи (1.1), (1.4). \square

Индукцией по числу функций m легко установить следующий результат.

Следствие 4.1. *Максимум конечного множества э.субр. u_1, \dots, u_m задачи (1.1), (1.4) также является э.субр. этой задачи.*

Ввиду замечания 1.1 и тождества $\min(u_1, \dots, u_m) = -\max(-u_1, \dots, -u_m)$ получаем, что минимум любого конечного множества э.суперр. задачи (1.1), (1.4) также является э.суперр. этой задачи.

5. СУЩЕСТВОВАНИЕ НАИБОЛЬШЕГО Э.СУБР. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1.3

Нам понадобится следующая априорная оценка функций $\operatorname{div}_x B_k(u)$ в $L^2_{loc}(\Pi)$.

Лемма 5.1. *Пусть $u = u(t, x)$ — э.субр. задачи (1.1), (1.4) и $\|u\|_\infty \leq M$. Тогда для любой функции $f = f(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$, $f \geq 0$*

$$\int_{\Pi} \sum_{k=1}^l (\operatorname{div}_x B_k(u))^2 f dt dx \leq C(f, M), \quad (5.1)$$

где константа $C(f, M)$ зависит только от f и M .

Доказательство. Фиксируем неубывающую выпуклую энтропию $\eta(u) \in C^2(\mathbb{R})$ такую, что $\eta''(u) \geq 1$ на отрезке $[-M, M]$ (например, $\eta(u) = e^{u+M}$). Тогда из условия (1.9) вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} \left(\sum_{k=1}^l (\operatorname{div}_x B_k(u))^2 \right) f dt dx &\leq \int_{\Pi} [\eta(u) f_t + T_{\eta'}(\varphi)(u) \cdot \nabla_x f + T_{\eta'}(A)(u) \cdot D_x^2 f] dt dx \leq \\ &\leq C(f, M) \doteq \max_{|u| \leq M} (\eta(u) + |T_{\eta'}(\varphi)(u)| + |T_{\eta'}(A)(u)|) \int_{\Pi} \max(|f_t|, |\nabla_x f|, |D_x^2 f|) dt dx, \end{aligned}$$

что и требовалось доказать. \square

Мы готовы доказать существование наибольшего э.субр.

Теорема 5.1. *Существует наибольшее э.субр. $u = u_+(t, x)$ задачи (1.1), (1.4).*

Доказательство. Выберем строго положительную суммируемую функцию $\rho(t, x)$ на Π (например, можно взять $\rho = e^{-t-|x|}$) и рассмотрим функционал $J(u) = \int_{\Pi} u(t, x) \rho(t, x) dt dx$. Поскольку любое э.субр. $u = u(t, x)$ задачи (1.1), (1.4) удовлетворяет оценке $u(t, x) \leq b = \operatorname{ess\,sup} u_0(x)$ п.в. на Π (по принципу максимума из теоремы 1.1), то функционал J ограничен сверху на множестве Sub э.субр. задачи (1.1), (1.4). Поэтому

$$\sup_{u \in Sub} J(u) = R \leq b \|\rho\|_1 < +\infty.$$

Выберем последовательность э.субр. u_r так, что $J(u_r) > R - 1/r$, $r \in \mathbb{N}$. Положим $\bar{u}_r = \max_{i \in \overline{1, r}} u_i(t, x)$.

По следствию 4.1 \bar{u}_r — также э.субр. задачи (1.1), (1.4). Так как $\bar{u}_r \geq u_r$,

$$R - 1/r < J(u_r) \leq J(\bar{u}_r) \leq R.$$

Поскольку последовательность \bar{u}_r монотонно возрастает и ограничена сверху константой b , существует предел

$$u_+(t, x) = \lim_{r \rightarrow \infty} \bar{u}_r(t, x) = \sup_{r \in \mathbb{N}} u_r(t, x)$$

для п.в. $(t, x) \in \Pi$, удовлетворяющих условию $u_r(t, x) \leq b \forall r \in \mathbb{N}$. Заметим также, что для всех $r \in \mathbb{N}$ справедлива оценка снизу $\bar{u}_r(t, x) \geq u_1(t, x) \geq a \doteq \operatorname{ess\,inf} u_1(t, x)$. В частности, при $M = \max(|a|, |b|)$

$$\|\bar{u}_r\|_\infty \leq M \forall r \in \mathbb{N}, \quad (5.2)$$

а значит, также и $\|u_+\|_\infty \leq M$. Ясно, что

$$J(u_+) = \lim_{r \rightarrow \infty} J(\bar{u}_r) = R.$$

Покажем, что u_+ также является э.субр. задачи (1.1), (1.4). Как следует из леммы 5.1 и оценки (5.2), последовательности $\operatorname{div}_x B_k(\bar{u}_r)$ ограничены в $L^2_{loc}(\Pi)$. Поэтому после возможного выделения подпоследовательностей они сходятся слабо при $r \rightarrow \infty$ к некоторым функциям $d_k = d_k(t, x) \in L^2_{loc}(\Pi)$:

$$\operatorname{div}_x B_k(\bar{u}_r) \rightharpoonup d_k, \quad k = 1, \dots, l.$$

Переходя к пределу при $r \rightarrow \infty$ в тождествах

$$\int_{\Pi} B_k(\bar{u}_r) \cdot \nabla_x f dt dx = - \int_{\Pi} \operatorname{div}_x B_k(\bar{u}_r) f dt dx \quad \forall f = f(t, x) \in C_0^\infty(\Pi),$$

получим, что

$$\int_{\Pi} B_k(u_+) \cdot \nabla_x f dt dx = - \int_{\Pi} d_k f dt dx \quad \forall f = f(t, x) \in C_0^\infty(\Pi)$$

(заметим, что $B_k(\bar{u}_r) \rightarrow B_k(u_+)$ сильно в $L^1_{loc}(\Pi)$), откуда следует, что

$$\operatorname{div}_x B_k(u_+) = d_k \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi),$$

т. е. u_+ удовлетворяет условию (i) определения 1.1. Аналогично, по условию (ii) для э.субр. \bar{u}_r для любого $g(u) \in C^1(\mathbb{R})$ выполнены равенства

$$\operatorname{div}_x T_g(B_k)(\bar{u}_r) = g(\bar{u}_r) \operatorname{div}_x B_k(\bar{u}_r) \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi).$$

Так как при $r \rightarrow \infty$ $T_g(B_k)(\bar{u}_r) \rightarrow T_g(B_k)(u_+)$, $g(\bar{u}_r) \rightarrow g(u_+)$ сильно в $L^2_{loc}(\Pi)$, а $\operatorname{div}_x B_k(\bar{u}_r) \rightharpoonup \operatorname{div}_x B_k(u_+)$ слабо в $L^2_{loc}(\Pi)$, то можно перейти в этих равенствах к пределу при $r \rightarrow \infty$ и получить, что

$$\operatorname{div}_x T_g(B_k)(u_+) = g(u_+) \operatorname{div}_x B_k(u_+) \quad \text{в } \mathcal{D}'(\Pi).$$

Это означает, что функция u_+ удовлетворяет и условию (ii) определения 1.1.

По предложению 1.1 для любой неубывающей выпуклой энтропии $\eta(u) \in C^2(\mathbb{R})$ и любой неотрицательной пробной функции $f = f(t, x) \in C_0^\infty(\bar{\Pi})$ справедливы неравенства

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} [\eta(\bar{u}_r) f_t + T_{\eta'}(\varphi)(\bar{u}_r) \cdot \nabla_x f + T_{\eta'}(A)(\bar{u}_r) \cdot D_x^2 f - f \eta''(\bar{u}_r) \sum_{k=1}^l (\operatorname{div}_x B_k(\bar{u}_r))^2] dt dx \\ + \int_{\mathbb{R}^n} \eta(u_0(x)) f(0, x) dx \geq 0. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Перейдём в этом неравенстве к пределу при $r \rightarrow \infty$. Ясно, что

$$\begin{aligned} \int_{\Pi} [\eta(\bar{u}_r) f_t + T_{\eta'}(\varphi)(\bar{u}_r) \cdot \nabla_x f + T_{\eta'}(A)(\bar{u}_r) \cdot D_x^2 f] dt dx \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \\ \int_{\Pi} [\eta(u_+) f_t + T_{\eta'}(\varphi)(u_+) \cdot \nabla_x f + T_{\eta'}(A)(u_+) \cdot D_x^2 f] dt dx. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Заметим далее, что последовательности

$$\sqrt{\eta''(\bar{u}_r)} \operatorname{div}_x B_k(\bar{u}_r) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} \sqrt{\eta''(u_+)} \operatorname{div}_x B_k(u_+)$$

слабо в $L^2(\Pi, f dt dx)$. По известному свойству слабой полунепрерывности снизу L^2 -нормы получим после суммирования по $k \in \overline{1, l}$, что

$$\int_{\Pi} \eta''(u_+) \sum_{k=1}^l (\operatorname{div}_x B_k(u_+))^2 f dt dx \leq \liminf_{r \rightarrow \infty} \int_{\Pi} \eta''(\bar{u}_r) \sum_{k=1}^l (\operatorname{div}_x B_k(\bar{u}_r))^2 f dt dx. \quad (5.5)$$

С помощью предельных соотношений (5.4), (5.5) из (5.3) следует неравенство

$$\int_{\Pi} [\eta(u_+) f_t + T_{\eta'}(\varphi)(u_+) \cdot \nabla_x f + T_{\eta'}(A)(u_+) \cdot D_x^2 f - f \eta''(u_+) \sum_{k=1}^l (\operatorname{div}_x B_k(u_+))^2] dt dx + \int_{\mathbb{R}^n} \eta(u_0(x)) f(0, x) dx \geq 0.$$

В соответствии с предложением 1.1 мы можем утверждать, что u_+ является э.субр. задачи (1.1), (1.4). Покажем, что это э.субр. — наибольшее. Для этого возьмём произвольное э.субр. $u \in \text{Sub}$ задачи (1.1), (1.4). По теореме 1.2 тогда $v = \max(u_+, u) \in \text{Sub}$. Так как $R = J(u_+) \leq J(v) \leq R$, имеем $J(v) = J(u_+) = R$. Тогда

$$\int_{\Pi} (u - u_+)^+ \rho dt dx = \int_{\Pi} (v - u_+) \rho dt dx = J(v) - J(u_+) = 0.$$

Поскольку $\rho = \rho(t, x) > 0$, заключаем, что $u \leq u_+$ п.в. на Π для всех $u \in \text{Sub}$. Это и значит, что u_+ — наибольшее э.субр. Теорема доказана. \square

По замечанию 1.1 функция $u_- = -v_+$, где v_+ — наибольшее э.субр. задачи (1.10), является наименьшим э.суперр. задачи (1.1), (1.4). Для завершения доказательства теоремы 1.3 достаточно установить, что наибольшее э.субр. задачи (1.1), (1.4) является и её э.р. Для этого выберем строго убывающую последовательность b_r , $r \in \mathbb{N}$, такую что $b_r > b = \operatorname{ess\,sup} u_0(x)$ для всех $r \in \mathbb{N}$ и определим соответствующую последовательность начальных функций

$$u_{0r}(x) = \begin{cases} u_0(x), & |x| \leq r, \\ b_r, & |x| > r. \end{cases}$$

Заметим, что $\forall r \in \mathbb{N}$

$$u_0(x) \leq u_{0r+1}(x) \leq u_{0r}(x) \leq b_r \text{ п.в. } \mathbb{R}^n, \text{ и } \lim_{r \rightarrow \infty} u_{0r}(x) = u_0(x).$$

Известно, что существует э.р. $u_r = u_r(t, x)$ задачи (1.1), (1.4) с начальной функцией $u_{0r}(x)$. Например, можно взять наибольшее (или наименьшее) э.р.; существование таких э.р. установлено в [16]. Как показано в [16], последовательность u_r убывает и сходится при $r \rightarrow \infty$ к наибольшему э.р. \tilde{u} исходной задачи.

По принципу максимума $u_+ \leq b$ п.в. на Π . Поэтому в слое $\Pi_T = (0, T) \times \mathbb{R}^n$ множество $\{u_+ > u_r\} \subset \{b > u_r\} = \{b_r - u_r > b_r - b\}$, и следовательно,

$$\operatorname{meas}\{u_+ > u_r\} \leq \frac{1}{b_r - b} \int_{\Pi_T} (u_r - b_r)^- dt dx \leq \frac{T}{b_r - b} \int_{|x| < r} (u_0 - b_r)^- dx < +\infty,$$

где мы использовали неравенство Чебышёва и теорему 1.1 для э.суперр. u_r . Таким образом, выполнено требование предложения 3.2, а значит, выполнен принцип сравнения для э.субр. u_+ и э.суперр. u_r , так что из неравенства $u_0 \leq u_{0r}$ следует, что $u_+ \leq u_r$ п.в. на Π . В пределе при $r \rightarrow \infty$ получаем, что $u_+ \leq \tilde{u}$ п.в. на Π . Но так как \tilde{u} — э.р., а значит, и э.субр. задачи (1.1), (1.4), в то время как u_+ — наибольшее э.субр. этой задачи, верно обратное неравенство $\tilde{u} \leq u_+$ п.в. на Π . Итак, $u_+ = \tilde{u}$ является э.р., что завершает доказательство теоремы 1.3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кружков С. Н. Квазилинейные уравнения первого порядка со многими независимыми переменными // Мат. сб. — 1970. — 81, № 2. — С. 228–255.
2. Кружков С. Н., Панов Е. Ю. Консервативные квазилинейные законы первого порядка с бесконечной областью зависимости от начальных данных // Докл. АН СССР. — 1990. — 314, № 1. — С. 79–84.
3. Панов Е. Ю. К теории обобщенных энтропийных суб- и супер-решений задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка // Дифф. уравн. — 2001. — 37, № 2. — С. 252–259.
4. Панов Е. Ю. О наибольших и наименьших обобщенных энтропийных решениях задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка // Мат. сб. — 2002. — 193, № 5. — С. 95–112.
5. Панов Е. Ю. К теории обобщенных энтропийных решений задачи Коши для квазилинейного уравнения первого порядка в классе локально суммируемых функций // Изв. РАН. — 2002. — 66, № 6. — С. 91–136.

6. Панов Е. Ю. К теории энтропийных решений нелинейных вырождающихся параболических уравнений// *Соврем. мат. Фундам. направл.* — 2020. — 66, № 2. — С. 292–313.
7. Andreianov B. P., Bénilan Ph., Kruzhkov S. N. L^1 -theory of scalar conservation law with continuous flux function// *J. Funct. Anal.* — 2000. — 171, № 1. — С. 15–33.
8. Andreianov B. P., Igbida N. On uniqueness techniques for degenerate convection–diffusion problems// *Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ.* — 2012. — 4, № 1-2. — С. 3–34.
9. Andreianov B. P., Maliki M. A note on uniqueness of entropy solutions to degenerate parabolic equations in \mathbb{R}^N // *NoDEA: Nonlinear Differ. Equ. Appl.* — 2010. — 17, № 1. — С. 109–118.
10. Carrillo J. Entropy solutions for nonlinear degenerate problems// *Arch. Ration. Mech. Anal.* — 1999. — 147. — С. 269–361.
11. Chen G.-Q., Perthame B. Well-posedness for non-isotropic degenerate parabolic-hyperbolic equations// *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire.* — 2003. — 20. — С. 645–668.
12. Kruzhkov S. N., Panov E. Yu. Osgood’s type conditions for uniqueness of entropy solutions to Cauchy problem for quasilinear conservation laws of the first order// *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat.* — 1994. — 40. — С. 31–54.
13. Maliki M., Touré H. Uniqueness of entropy solutions for nonlinear degenerate parabolic problem// *J. Evol. Equ.* — 2003. — 3, № 4. — С. 603–622.
14. Panov E. Yu. On the Cauchy problem for scalar conservation laws in the class of Besicovitch almost periodic functions: Global well-posedness and decay property// *J. Hyperbolic Differ. Equ.* — 2016. — 13. — С. 633–659.
15. Panov E. Yu. To the theory of entropy sub-solutions of degenerate nonlinear parabolic equations// *Math. Meth. Appl. Sci.* — 2020. — 43, № 16. — С. 9387–9404.
16. Panov E. Yu. On some properties of entropy solutions of degenerate non-linear anisotropic parabolic equations// *J. Differ. Equ.* — 2021. — 275. — С. 139–166.

Е. Ю. ПАНОВ

Новгородский государственный университет им. Ярослава Мудрого, Великий Новгород, Россия

Центр научных исследований и разработок, Великий Новгород, Россия

E-mail: eugeniy.panov@novsu.ru

UDC 517.957

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-306-331

EDN: UGEKXW

On the theory of entropy sub- and supersolutions of nonlinear degenerate parabolic equations

E. Yu. Panov^{1,2}

¹ *Yaroslav-the-Wise Novgorod State University, Novgorod the Great, Russia*

² *Scientific Research and Development Center, Novgorod the Great, Russia*

Abstract. We consider a second-order nonlinear degenerate anisotropic parabolic equation in the case when the flux vector is only continuous and the nonnegative diffusion matrix is bounded and measurable. The concepts of entropy sub- and supersolution of the Cauchy problem are introduced, so that the entropy solution of this problem, understood in the sense of Chen–Perthame, is both an entropy sub- and supersolution. It is established that the maximum of entropy subsolutions of the Cauchy problem is also an entropy subsolution of this problem. This result is used to prove the existence of the largest entropy subsolution (and the smallest entropy supersolution). It is also shown that the largest entropy subsolution and the smallest entropy supersolution are also entropy solutions.

Keywords: nonlinear degenerate parabolic equations, Cauchy problem, entropy solutions, entropy sub- and supersolutions, maximum/minimum principle, method of doubling variables.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was financially supported by the Russian Science Foundation, grant № 22-21-00344.

For citation: E. Yu. Panov, “On the theory of entropy sub- and supersolutions of nonlinear degenerate parabolic equations,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 2, 306–331. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-306-331>

REFERENCES

1. S. N. Kruzhkov, “Kvazilineynye uravneniya pervogo poryadka so mnogimi nezavisimymi peremennymi” [First-order quasilinear equations with many independent variables], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1970, **81**, No. 2, 228–255 (in Russian).
2. S. N. Kruzhkov and E. Yu. Panov, “Konservativnye kvazilineynye zakony pervogo poryadka s beskonechnoy oblast’yu zavisimosti ot nachal’nykh dannykh” [Conservative quasilinear first-order laws with an infinite domain of dependence on the initial data], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1990, **314**, No. 1, 79–84 (in Russian).
3. E. Yu. Panov, “K teorii obobshchennykh entropiynykh sub- i super-resheniy zadachi Koshi dlya kvazilineynogo uravneniya pervogo poryadka” [On the theory of generalized entropy sub- and super-solutions of the Cauchy problem for a first-order quasilinear equation], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2001, **37**, No. 2, 252–259 (in Russian).
4. E. Yu. Panov, “O naibol’shikh i naimen’shikh obobshchennykh entropiynykh resheniyakh zadachi Koshi dlya kvazilineynogo uravneniya pervogo poryadka” [On the largest and smallest generalized entropy solutions of the Cauchy problem for a first-order quasilinear equation], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2002, **193**, No. 5, 95–112 (in Russian).
5. E. Yu. Panov, “K teorii obobshchennykh entropiynykh resheniy zadachi Koshi dlya kvazilineynogo uravneniya pervogo poryadka v klasse lokal’no summiruemykh funktsiy” [On the theory of generalized entropy

- solutions of the Cauchy problem for a first-order quasilinear equation in the class of locally summable functions], *Izv. RAN [Bull. Russ. Acad. Sci.]*, 2002, **66**, No. 6, 91–136 (in Russian).
6. E. Yu. Panov, “K teorii entropiynykh resheniy nelineynykh vyrozhdayushchikhsya parabolicheskikh uravneniy” [On the theory of entropy solutions to nonlinear degenerate parabolic equations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2020, **66**, No. 2, 292–313 (in Russian).
 7. B. P. Andreianov, Ph. Bénilan, and S. N. Kruzhkov, “ L^1 -theory of scalar conservation law with continuous flux function,” *J. Funct. Anal.*, 2000, **171**, No. 1, 15–33.
 8. B. P. Andreianov and N. Igbida, “On uniqueness techniques for degenerate convection–diffusion problems,” *Int. J. Dyn. Syst. Differ. Equ.*, 2012, **4**, No. 1-2, 3–34.
 9. B. P. Andreianov and M. Maliki, “A note on uniqueness of entropy solutions to degenerate parabolic equations in \mathbb{R}^N ,” *NoDEA: Nonlinear Differ. Equ. Appl.*, 2010, **17**, No. 1, 109–118.
 10. J. Carrillo, “Entropy solutions for nonlinear degenerate problems,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1999, **147**, 269–361.
 11. G.-Q. Chen and B. Perthame, “Well-posedness for non-isotropic degenerate parabolic-hyperbolic equations,” *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, 2003, **20**, 645–668.
 12. S. N. Kruzhkov and E. Yu. Panov, “Osgood’s type conditions for uniqueness of entropy solutions to Cauchy problem for quasilinear conservation laws of the first order,” *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat.*, 1994, **40**, 31–54.
 13. M. Maliki and H. Touré, “Uniqueness of entropy solutions for nonlinear degenerate parabolic problem,” *J. Evol. Equ.*, 2003, **3**, No. 4, 603–622.
 14. E. Yu. Panov, “On the Cauchy problem for scalar conservation laws in the class of Besicovitch almost periodic functions: Global well-posedness and decay property,” *J. Hyperbolic Differ. Equ.*, 2016, **13**, 633–659.
 15. E. Yu. Panov, “To the theory of entropy sub-solutions of degenerate nonlinear parabolic equations,” *Math. Meth. Appl. Sci.*, 2020, **43**, No. 16, 9387–9404.
 16. E. Yu. Panov, “On some properties of entropy solutions of degenerate non-linear anisotropic parabolic equations,” *J. Differ. Equ.*, 2021, **275**, 139–166.

E. Yu. Panov

Yaroslav-the-Wise Novgorod State University, Novgorod the Great, Russia

Scientific Research and Development Center, Novgorod the Great, Russia

E-mail: eugeniy.panov@novsu.ru

УДК 517.443, 535.8

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-332-341

EDN: UFJOVO

НЕКОТОРЫЕ ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ФУРЬЕ-ОПТИКИ

В. Э. ПЕТРОВ

ООО «ТВЭЛЛ», Санкт-Петербург, Россия

Аннотация. Рассматривается общая постановка задачи восстановления сигнала по неполной априорной информации о нем и измерениям интенсивности его Фурье-образа. Изучены некоторые частные случаи, когда априорной информацией является знание четной или нечетной части сигнала, а также вещественной или мнимой части сигнала. Построены точные решения в квадратурах. Также предложен алгоритм решения задачи, когда известны лишь интенсивности сигнала и изображения.

Ключевые слова: преобразования Фурье, обратные задачи оптики, алгоритм Гершберга–Сакстона.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Автор заявляет об отсутствии финансовой поддержки. Автор благодарен А. А. Румянцеву за физическую постановку задачи.

Для цитирования: В. Э. Петров. Некоторые обратные задачи Фурье-оптики // Современ. мат. Фундам. направл. 2023. Т. 69, № 2. С. 332–341. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-332-341>

1. ВВЕДЕНИЕ

Одно из основных приложений преобразования Фурье

$$F(\xi) = \mathcal{F}[u](\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{ix\xi} dx = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (\cos x\xi + i \sin x\xi) dx, \quad (1.1)$$
$$f(y) = \mathcal{F}^{-1}[F](y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) e^{-i\xi y} d\xi = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) (\cos \xi y - i \sin \xi y) d\xi$$

— спектральный анализ и восстановление сигналов. В курсах по теоретической оптике (см., например, [4]) указывается фундаментальное значение преобразования Фурье как математическое содержание принципа Гюйгенса. Фактически, оптическая система преобразует оригинал в плоскости исходного сигнала в его Фурье-образ на плоскости изображения. Однако технически измерение на плоскости изображения всего сигнала невозможно. Измеряется лишь интенсивность — квадрат модуля. Ясно, что для полного восстановления оригинала этого недостаточно; для этого об оригинале должно быть заранее что-то известно. Поставим вопрос шире и сформулируем обратную задачу как восстановление оригинала $f(x)$ по некоторой неполной информации о Фурье-образе и определенной априорной информации об оригинале¹. Простейший случай доставляют

¹Ниже термины оригинал и сигнал, а также образ и изображение будут применяться как тождественные.

нам синус и косинус преобразования Фурье. Например, если нами измерена четная часть образа $F_2(\xi)$ и известна нечетная часть оригинала $f_1(x)$, то мы можем восстановить весь оригинал по формуле:

$$f(x) = f_1(x) + \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} F_2(\xi) \cos \xi x \, d\xi.$$

Напротив, если нам известна четная часть оригинала и четная часть образа, то этого недостаточно для восстановления оригинала, а если они не связаны между собой косинус-преобразованием Фурье, задача будет некорректной.

В этом примере мы использовали обозначения, которыми будем пользоваться на протяжении всей статьи:

$$f(x) = f_1(x) + f_2(x), \quad f_1(x) = \frac{f(x) - f(-x)}{2}, \quad f_2(x) = \frac{f(x) + f(-x)}{2}, \quad (1.2)$$

т. е. индексом «1» обозначается нечетная часть функции, а индексом «2» — четная. Это же правило действует и для образов.

Практически обратная задача восстановления сигнала для преобразования Фурье всегда некорректна. Дело в том, что преобразование Фурье задано на всей вещественной оси, тогда как физически носитель оригинала всегда компактен, например, световая щель. Но преобразование Фурье от компактного сигнала

$$F(\xi) = \int_a^b f(x) e^{i\xi x} \, dx, \quad -\infty < a < b < \infty,$$

— целая функция на всей плоскости, т. е. она аналитически продолжается с вещественной оси $-\infty < \xi < \infty$ на всю комплексную плоскость. С другой стороны, измерение сигнала опять-таки происходит не на всей оси $-\infty < \xi < \infty$, а на некотором конечном интервале, т. е. мы отбрасываем «хвосты» изображения, «обосновывая» это малостью амплитуды этих хвостов. Следовательно, отбрасывая «хвосты», мы принудительно полагаем изображение вне некоторого интервала нулем. Но целая функция, равная нулю на некотором множестве положительной меры (например, на части вещественной оси), равна нулю тождественно. Мы не будем обсуждать здесь эту тему, ограничиваясь ситуацией корректно поставленных задач.

В 1942 г. вышла книга Хартли, посвященная вопросам восстановления сигналов, где была высказана мысль об избыточности преобразования Фурье. Действительно, Фурье-образ $F(\xi)$ — это комплексная функция одной вещественной переменной. Полная информация о ней может быть получена, если нам известны четная и нечетная ее части, а также вещественная и мнимая ее части. Точно так же оригинал восстанавливается, если мы можем определить его четную и нечетную части или вещественную и мнимую его части. Но знать и то, и другое (именно для вопросов спектрального анализа) является совершенно избыточным. Таким образом, родилось вещественное преобразование (преобразование Хартли, см. [1])

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (\cos x\xi + \sin x\xi) \, dx, \quad f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) (\cos \xi y + \sin \xi y) \, d\xi, \quad (1.3)$$

которое вещественную функцию оставляет вещественной. Поэтому при использовании преобразования Хартли стоит задача определения знаков оригинала и образа, а не фазы.

Предположение Брейсуэлла, что все результаты, полученные с помощью преобразования Фурье, могут быть получены с помощью вещественного преобразования Хартли, нам представляется неверным. Например, Фурье-образы оригиналов с носителями на полуосях аналитически продолжаютя в верхнюю или нижнюю полуплоскость. Это дает возможность создания чрезвычайно полезной и содержательной теории уравнений типа свертки (решение уравнений Винера—Хопфа и их аналогов, см. [3]). Ничего подобного мы не имеем при использовании преобразования Хартли.

В работе [6] преобразования (1.1) и (1.3) были существенно обобщены. Во-первых, было показано, что для произвольных постоянных (в том числе, комплексных) a, b при обычных условиях,

накладываемых на оригинал и Фурье-образ, справедливо преобразование:

$$F(\xi) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) (a \cos x\xi + b \sin x\xi) dx, \quad f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi) \left(\frac{1}{a} \cos \xi y + \frac{1}{b} \sin \xi y \right) d\xi. \quad (1.4)$$

Нетрудно заметить, что при вещественных коэффициентах преобразование (1.4) самосопряженное, а при $|a| = |b| = (2\pi)^{-1/2}$ — унитарное. Более того, справедливы формулы взаимобратных преобразований с переменными коэффициентами.

Теорема 1.1 (см. [6]). Пусть $a(x)$, $b(x)$ — гельдеровы функции на оси. Пусть, далее,

$$a(x)b(-x) + a(-x)b(x) \neq 0. \quad (1.5)$$

Тогда уравнение

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x)(a(x) \cos x\xi + b(x) \sin x\xi) dx = F(\xi) \quad (1.6)$$

имеет единственное решение

$$f(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} F(\xi)(c(y) \cos \xi y + d(y) \sin \xi y) d\xi, \quad (1.7)$$

где

$$c(y) = \frac{2b(-y)}{a(y)b(-y) + a(-y)b(y)}, \quad d(y) = \frac{2a(-y)}{a(y)b(-y) + a(-y)b(y)}. \quad (1.8)$$

Здесь $f(x)$ и $F(\xi)$ понимаются в том же смысле, как и обычные Фурье-преобразования. В [6] можно найти и более общие преобразования, а также формулы свертки для этих преобразований, условия унитарности и самосопряженности. Строгая формулировка этой теоремы в классах $\{0\}$, $\{\{0\}\}$ приведена в [7].

Задачей настоящей статьи является исследование обратных задач, связанных с нахождением фазы изображения, считая интенсивность (квадрат амплитуды) изображения известной. Изображение — это то, что измеряется с той или иной точностью. При этом измеряется именно интенсивность; измерение фазы, вообще говоря, невозможно. Говоря, что интенсивность изображения известна, мы не обсуждаем шумы и точность измерения. Мы говорим о тех случаях, когда то или иное априорное знание о сигнале позволяет восстановить изображение и сигнал полностью. Рассматриваются следующие задачи:

- 1°. Определить фазу изображения по известной четной части оригинала и известной интенсивности изображения.
- 2°. Определить фазу изображения по известной вещественной части оригинала и известной интенсивности изображения.
- 3°. Определить фазу оригинала по известной амплитуде образа и известной амплитуде оригинала.

Наиболее интересна, конечно, задача 3°, поскольку измеряются, как уже говорилось, именно интенсивности (и то, с погрешностью), но ее решения в явном виде нам записать не удалось. Однако первые две задачи будут решены точно (т. е. мы предъявим фазу явно в квадратурах), и именно это даст нам возможность предложить простой алгоритм решения задачи 3°.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФАЗЫ ИЗОБРАЖЕНИЯ ПО ИЗВЕСТНОЙ ЧЕТНОЙ ЧАСТИ СИГНАЛА

Задача восстановления изображения, в том числе определение его фазы $\psi(\xi)$, в квадратурах в случае, когда нам известна четная часть $u_2(x)$ сигнала, является вполне элементарной задачей. Действительно, зная $u_2(x)$, мы косинус-преобразованием Фурье находим $U_2(\xi)$ — четную часть изображения:

$$U_2(\xi) = 2 \int_0^{\infty} u_2(x) \cos \xi x dx. \quad (2.1)$$

Таким образом, наша задача — восстановить функцию, зная ее модуль и четную часть. Имеем:

$$|U(\xi)|^2 = (U_1(\xi) + U_2(\xi))\overline{(U_1(\xi) + U_2(\xi))} = |U_1(\xi)|^2 + |U_2(\xi)|^2 + U_1(\xi)\overline{U_2(\xi)} + U_2(\xi)\overline{U_1(\xi)}. \quad (2.2)$$

Заметим, что $|U_1(\xi)|^2$ и $|U_2(\xi)|^2$ — четные функции, тогда как $|U(\xi)|^2$ — совсем не обязательно. Поменяем знак аргумента в (2.2):

$$|U(-\xi)|^2 = |U_1(\xi)|^2 + |U_2(\xi)|^2 - U_1(\xi)\overline{U_2(\xi)} - U_2(\xi)\overline{U_1(\xi)}$$

и сложим. Мы получим:

$$|U_1(\xi)|^2 + |U_2(\xi)|^2 = \frac{|U(\xi)|^2 + |U(-\xi)|^2}{2},$$

откуда находим модуль нечетной части:

$$|U_1(\xi)|^2 = \frac{|U(\xi)|^2 + |U(-\xi)|^2}{2} - |U_2(\xi)|^2. \quad (2.3)$$

Отсюда находим условие разрешимости задачи:

$$\frac{|U(\xi)|^2 + |U(-\xi)|^2}{2} \geq |U_2(\xi)|^2. \quad (2.4)$$

Для нахождения фазы нечетной части изображения, представим

$$U_1(\xi) = |U_1(\xi)|e^{i\alpha(\xi)}, \quad U_2(\xi) = |U_2(\xi)|e^{i\beta(\xi)}$$

и подставим эти выражения в (2.2). Тогда получим:

$$\cos(\alpha(\xi) - \beta(\xi)) = \frac{|U(\xi)|^2 - |U_1(\xi)|^2 - |U_2(\xi)|^2}{2|U_1(\xi)||U_2(\xi)|}. \quad (2.5)$$

В этом равенстве известны все функции, кроме $\alpha(\xi)$. Найдя ее, восстановим изображение по формуле:

$$U(\xi) = |U_1(\xi)|e^{i\alpha(\xi)} + U_2(\xi). \quad (2.6)$$

Отметим, что $\alpha(\xi)$ — это фаза нечетной функции, модуль которой четен. Поэтому из всего множества решений уравнения (2.5) следует отбирать те, которые удовлетворяют равенству

$$\alpha(-\xi) = \pi + \alpha(\xi). \quad (2.7)$$

Нам понадобится дальше решение аналогичной задачи в плоскости сигнала: пусть задана интенсивность сигнала $|u(x)|$ и известна его нечетная часть $|u_1(x)|$. Тогда модуль четной части сигнала определяется формулой:

$$|u_2(x)|^2 = \frac{|u(x)|^2 + |u(-x)|^2}{2} - |u_1(x)|^2, \quad (2.8)$$

а фаза четной части определяется из уравнения

$$\cos(a(x) - b(x)) = \frac{|u(x)|^2 - |u_1(x)|^2 - |u_2(x)|^2}{2|u_1(x)||u_2(x)|}, \quad (2.9)$$

где $u_1(x) = |u_1(x)|e^{ia(x)}$, $u_2(x) = |u_2(x)|e^{ib(x)}$. По тем же соображениям, что и выше, следует отбирать решения уравнения (2.9), которые удовлетворяют равенству

$$b(x) = b(-x). \quad (2.10)$$

3. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФАЗЫ ОРИГИНАЛА ПО ИЗВЕСТНОЙ ВЕЩЕСТВЕННОЙ ЧАСТИ ОБРАЗА

В отличие от простых формул предыдущего пункта, формулы этого раздела будут значительно изощреннее. Мы восстановим сигнал по известной его интенсивности и известной вещественной части изображения. Отметим, что простых аналогов синус- и косинус-преобразований Фурье, которые бы связывали вещественные и мнимые части сигнала и изображений, также нет. Чтобы найти, например, вещественную часть сигнала, недостаточно знать только вещественную часть изображения, надо знать полное изображение.

Пусть в преобразовании Фурье (1.1) известна амплитуда $q(x)$ оригинала и вещественная часть $A(\xi)$ образа:

$$f(x) = q(x)e^{i\varphi(x)}, \quad q(x) = |f(x)| \geq 0, \quad U(\xi) = A(\xi) + iB(\xi).$$

Мы решаем задачу

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(x) \cos(\xi x + \varphi(x)) dx = A(\xi), \quad (3.1)$$

где по известным функциям $q(x)$ и $A(\xi)$ надо найти фазу $\varphi(x)$. Кроме этого, надо найти условия разрешимости и единственности. Физически естественно предположить, что фаза $\varphi(x)$ непрерывна.

Уравнение (3.1) — это нелинейное интегральное уравнение 1-го рода. Аналитические сложности, связанные с его решением, преодолеваются с помощью теоремы 1.1, которая интегральное уравнение переводит в алгебраическую систему. Причина этого в том, что коэффициенты $a(x)$, $b(x)$ в записи прямого преобразования (1.6) являются «внутренними» (интегрирование происходит по переменной x), а коэффициенты $c(y)$, $d(y)$ в записи обратного преобразования (1.7) являются «внешними» (интегрирование происходит по переменной ξ).

Запишем уравнение (3.1) в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(x) (\cos \xi x \cos \varphi(x) - \sin \xi x \sin \varphi(x)) dx = A(\xi) \quad (3.2)$$

и по теореме 1.1 выразим $q(y)$ через $A(\xi)$, полагая $a(x) = \cos \varphi(x)$, $b(x) = -\sin \varphi(x)$:

$$q(y) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) (c(y) \cos \xi y + d(y) \sin \xi y) d\xi, \quad (3.3)$$

где

$$\begin{aligned} c(y) &= \frac{-2 \sin \varphi(-y)}{-\cos \varphi(y) \sin \varphi(-y) - \cos \varphi(-y) \sin \varphi(y)}, \\ d(y) &= \frac{2 \cos \varphi(-y)}{-\cos \varphi(y) \sin \varphi(-y) - \cos \varphi(-y) \sin \varphi(y)}. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Знаменатель в этих дробях равен

$$\cos \varphi(y) \sin \varphi(-y) + \cos \varphi(-y) \sin \varphi(y) = \sin(\varphi(y) + \varphi(-y)) = \sin 2\varphi_2(y),$$

где, напомним, индекс «2» означает четную часть функции. Поэтому равенство (3.3) можно записать в виде:

$$q(y) = \frac{\sin \varphi(-y)}{\pi \sin 2\varphi_2(y)} \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) \cos \xi y d\xi - \frac{\cos \varphi(-y)}{\pi \sin 2\varphi_2(y)} \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) \sin \xi y d\xi$$

или

$$\begin{aligned} q(y) \sin 2\varphi_2(y) &= \sin(\varphi_2(y) - \varphi_1(y)) \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} A_2(\xi) \cos \xi y d\xi - \cos(\varphi_2(y) - \varphi_1(y)) \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} A_1(\xi) \sin \xi y d\xi = \\ &= \sin(\varphi_2(y) - \varphi_1(y)) a_2(y) - \cos(\varphi_2(y) - \varphi_1(y)) a_1(y). \end{aligned} \quad (3.5)$$

Здесь

$$a_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) \sin \xi x d\xi, \quad a_2(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} A(\xi) \cos \xi x d\xi. \quad (3.6)$$

Чтобы не загромождать запись, опустим далее зависимость от переменной y , запомнив только, что четная часть функции (со значком «2») сохраняет знак при перемене знака аргумента, а нечетная часть (со значком «1») его меняет. Таким образом, имеем систему уравнений:

$$\begin{cases} (q_2 + q_1) \sin 2\varphi_2 = \sin(\varphi_2 - \varphi_1) a_2 - \cos(\varphi_2 - \varphi_1) a_1, \\ (q_2 - q_1) \sin 2\varphi_2 = \sin(\varphi_2 + \varphi_1) a_2 + \cos(\varphi_2 + \varphi_1) a_1. \end{cases} \quad (3.7)$$

Сложим и вычтем уравнения (3.7):

$$\begin{cases} 2q_2 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 = \sin \varphi_2 \cos \varphi_1 a_2 - \sin \varphi_2 \sin \varphi_1 a_1, \\ 2q_1 \sin \varphi_2 \cos \varphi_2 = -\cos \varphi_2 \sin \varphi_1 a_2 - \cos \varphi_2 \cos \varphi_1 a_1. \end{cases} \quad (3.8)$$

Теперь заметим, что для применения теоремы 1.1 мы должны предположить, что знаменатель коэффициентов (3.4) нигде на оси не обращается в нуль (см. (1.5)), т. е.

$$\sin \varphi_2 \neq 0, \quad \cos \varphi_2 \neq 0. \quad (3.9)$$

Поэтому в системе (3.8) мы можем сократить каждое из уравнений:

$$\begin{cases} 2q_2 \cos \varphi_2 = \cos \varphi_1 a_2 - \sin \varphi_1 a_1, \\ 2q_1 \sin \varphi_2 = -\sin \varphi_1 a_2 - \cos \varphi_1 a_1. \end{cases} \quad (3.10)$$

Возведем в квадрат уравнения (3.10) и сложим:

$$4q_2^2 \cos^2 \varphi_2 + 4q_1^2 \sin^2 \varphi_2 = a_2^2 + a_1^2, \quad (3.11)$$

откуда

$$\cos^2 \varphi_2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 - 4q_1^2}{4(q_2^2 - q_1^2)}, \quad \sin^2 \varphi_2 = \frac{4q_2^2 - (a_1^2 + a_2^2)}{4(q_2^2 - q_1^2)}. \quad (3.12)$$

Заметим далее, что при условии (3.9) в силу непрерывности фазы синус и косинус ее четной части не меняют знак. То есть φ_2 может изменяться лишь в одном из четырех квадрантов, не пересекая границы $\pi/2$, π , $3\pi/2$. Это следует учитывать при извлечении корней в выражениях (3.12). Однако мы покажем, что независимых решений не четыре, а всего два: например, I и II квадранты. Значения *всей фазы* $\varphi_2 + \varphi_1$, если мы зафиксируем φ_2 в III или IV квадрантах, с ними совпадут. Из (3.12) получаем:

$$\cos \varphi_2 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{a_1^2 + a_2^2 - 4q_1^2}{q_2^2 - q_1^2}}, \quad \sin \varphi_2 = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{4q_2^2 - (a_1^2 + a_2^2)}{q_2^2 - q_1^2}}, \quad (3.13)$$

и первое условие корректности задачи (3.1):

$$0 < \frac{a_1^2 + a_2^2 - 4q_1^2}{4(q_2^2 - q_1^2)} < 1,$$

или

$$4q_1^2 < a_1^2 + a_2^2 < 4q_2^2. \quad (3.14)$$

Имея явные выражения (3.13), из системы (3.10) находим:

$$\cos \varphi_1 = \frac{2q_2 a_2 \cos \varphi_2 - 2q_1 a_1 \sin \varphi_2}{a_1^2 + a_2^2}, \quad \sin \varphi_1 = -\frac{2q_2 a_1 \cos \varphi_2 + 2q_1 a_2 \sin \varphi_2}{a_1^2 + a_2^2}. \quad (3.15)$$

На нечетную часть фазы нет никаких ограничений, связанных с непрерывностью, поэтому ее можно найти из любого из уравнений (3.15). Надо лишь следить, чтобы

$$0 < \varphi_2(y) + \varphi_1(y) < 2\pi.$$

Теперь мы можем доказать, что выбор III или IV квадранта при определении φ_2 эквивалентен выбору I или II квадранта. Действительно, из (3.15) видно, что если φ_2 сдвигается на π , то и φ_1 сдвигается на π . Поэтому суммарная фаза сдвигается на 2π , т. е. на период.

Уравнения (3.15) новых условий корректности вдобавок к (3.14) не добавляют. Докажем это. Рассмотрим, например, первое уравнение (3.15) и подставим в него значения (3.13). Нам следует доказать, что при выполнении условия (3.14) имеем $|\cos \varphi_1| \leq 1$ автоматически. Сначала воспользуемся неравенством Коши—Буняковского

$$ax + by \leq \sqrt{(a^2 + b^2)(x^2 + y^2)}, \quad \forall a, b, x, y > 0,$$

а затем равенством (3.11):

$$|\cos \varphi_1| \leq \frac{|2q_2 \cos \varphi_2| |a_2| + |2q_1 \sin \varphi_2| |a_1|}{a_1^2 + a_2^2} \leq \sqrt{\frac{4q_2^2 \cos^2 \varphi_2 + 4q_1^2 \sin^2 \varphi_2}{a_1^2 + a_2^2}} = 1.$$

Аналогично получаем, что $|\sin \varphi_1| \leq 1$.

4. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФАЗЫ ОРИГИНАЛА ПО ИЗВЕСТНОЙ МНИМОЙ ЧАСТИ ОБРАЗА

Здесь мы рассмотрим задачу определения функции $\varphi(x)$ из уравнения:

$$\int_{-\infty}^{\infty} q(x) \sin(\xi x + \varphi(x)) dx = B(\xi), \quad \xi \in \mathbb{R}. \quad (4.1)$$

Повторяя дословно выкладки предыдущего раздела, получаем:

$$\begin{aligned} \cos^2 \varphi_2 &= \frac{4q_2^2 - b_1^2 - b_2^2}{4(q_2^2 - q_1^2)}, & \sin^2 \varphi_2 &= \frac{b_1^2 + b_2^2 - 4q_1^2}{4(q_2^2 - q_1^2)}, \\ \cos \varphi_1 &= \frac{2q_2 b_2 \sin \varphi_2 + 2q_1 b_1 \cos \varphi_2}{b_1^2 + b_2^2}, & \sin \varphi_1 &= \frac{2q_1 b_2 \cos \varphi_2 - 2q_2 b_1 \sin \varphi_2}{b_1^2 + b_2^2}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь

$$b_1(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) \sin \xi x d\xi, \quad b_2(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} B(\xi) \cos \xi x d\xi. \quad (4.3)$$

Аналогично предыдущему, имеем условие корректности задачи (4.1):

$$4q_1^2 < b_1^2 + b_2^2 < 4q_2^2. \quad (4.4)$$

5. ОБОБЩЕННЫЕ РАВЕНСТВА ПАРСЕВАЛЯ

Как известно, классическое равенство Парсеваля для преобразования Фурье имеет вид числового равенства:

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^2 dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(\xi)|^2 d\xi. \quad (5.1)$$

В этом разделе мы дадим два обобщения этого равенства. Первое из них совсем элементарно. Перемножим $U(\xi)$ и $\overline{U(\xi)}$:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x) e^{i\xi x} dx \cdot \int_{-\infty}^{\infty} \overline{u(y) e^{i\xi y}} dy = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} u(x) \overline{u(y)} e^{i\xi(x-y)} dx dy = |U(\xi)|^2. \quad (5.2)$$

Применим к (5.2) обратное преобразование Фурье, пользуясь известным равенством для обобщенных функций

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} 1 \cdot e^{-i\xi z} d\xi = \delta(z).$$

Таким образом, получаем первое поточечное равенство типа Парсеваля:

$$\int_{-\infty}^{\infty} u(x) \overline{u(x+z)} dx = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U(\xi)|^2 e^{-i\xi z} d\xi. \quad (5.3)$$

Очевидно, что при $z = 0$ мы получаем классическое равенство (5.1).

Для вывода второго поточечного равенства воспользуемся формулами (3.12) и (4.2). Если $A(\xi)$ и $B(\xi)$ — вещественная и мнимая части одного и того же Фурье-образа $U(\xi)$, то $\varphi_2(x)$, найденная по формулам (3.12) и (4.2) — это одна и та же функция. Поэтому

$$\cos^2 \varphi_2 = \frac{a_1^2 + a_2^2 - 4q_1^2}{4(q_2^2 - q_1^2)} = \frac{4q_2^2 - b_1^2 - b_2^2}{4(q_2^2 - q_1^2)},$$

следовательно,

$$a_1^2(x) + a_2^2(x) + b_1^2(x) + b_2^2(x) = |u(x)|^2 + |u(-x)|^2, \quad (5.4)$$

где функции в левой части определены в (3.6), (4.3). Напомним, что по физическому смыслу сигнал $u(x)$ является ограниченной функцией. Поэтому $q_2^2(x) - q_1^2(x) = |u(x)| |u(-x)| \neq \infty$.

6. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ФАЗ ПО ИЗВЕСТНЫМ ИНТЕНСИВНОСТЯМ

Пусть нам известна априорная информация — интенсивность оригинала $|u(x)|$ и измерена интенсивность образа $|U(\xi)|$. Требуется восстановить фазы оригинала $\varphi(x)$ и образа $\psi(\xi)$. Обычно эта задача решается алгоритмом Гершберга—Сакстона (ГС) (см., например, [5]), представленном на диаграмме на рис. 1.

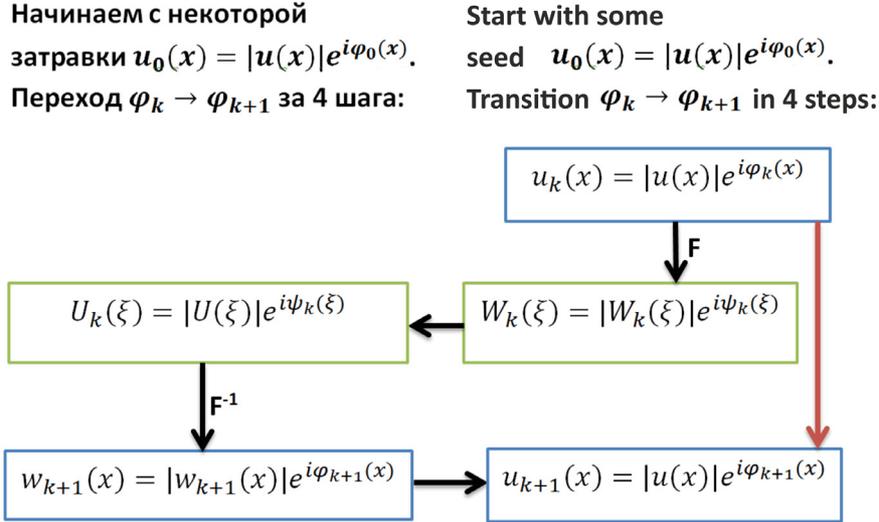


Рис. 1. Алгоритм Гершберга—Сакстона

FIG. 1. Gerchberg–Saxton algorithm

Таким образом, Гершберг и Сакстон вводят в рассмотрение две вспомогательные функции $w_k(x)$, $W_k(\xi)$. Если алгоритм сходится, то он сходится к четырем функциям $u_\infty(x)$, $w_\infty(x)$, $W_\infty(\xi)$, $U_\infty(\xi)$. По алгоритму

$$\begin{aligned}
 W_\infty(\xi) &= \mathcal{F}[u_\infty](\xi) & w_\infty(x) &= \mathcal{F}^{-1}[W_\infty](x), \\
 \int_{-\infty}^{\infty} |u_\infty(x)|^2 dx &= \int_{-\infty}^{\infty} |w_\infty(x)|^2 dx &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |W_\infty|^2 d\xi &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} |U_\infty|^2 d\xi.
 \end{aligned}
 \tag{6.1}$$

При этом того, что найденные предельные функции u_∞ , U_∞ связаны преобразованием Фурье, алгоритм не гарантирует. Можно было бы сказать, что алгоритм ГС решает задачу минимизации:

$$\|u_\infty(x) - \mathcal{F}^{-1}[U_\infty](x)\| = \min,
 \tag{6.2}$$

если бы функции $w_\infty(x)$, $W_\infty(\xi)$ были связаны преобразованием Фурье. Но и это не так. Справедливо лишь равенство Парсеваля.

В то же время, в литературе приведено множество удачных применений алгоритма ГС. Считается, что если затравка выбрана достаточно удачно, то алгоритм ГС сходится. В иных случаях известны примеры, когда алгоритм расходится, закликивается, или сходится неизвестно к чему.

Мы предлагаем алгоритм фазировки, который, по-видимому, лишен указанных выше недостатков. Будем пользоваться формулами раздела 2 и начнем с некоторой затравки: зададим четную функцию $u_{2,0}(x)$, удовлетворяющую условию

$$\frac{|u(x)|^2 + |u(-x)|^2}{2} - |u_{2,0}(x)|^2 \geq 0.
 \tag{6.3}$$

По этой функции косинус-преобразованием Фурье \mathcal{F}_c находим $U_{2,0}(\xi)$. По этой функции формулами (2.3), (2.5) находим нечетную функцию $U_{1,0}(\xi)$. По этой функции обратным синус-преобразованием Фурье \mathcal{F}_s^{-1} находим нечетную функцию в плоскости сигнала $u_{1,1}(x)$. Теперь

формулами (2.8), (2.9) находим следующее приближение $u_{2,1}(x)$. Каждый шаг алгоритма можно представить диаграммой

$$u_{2,k} \xrightarrow{\mathcal{F}_c} U_{2,k}(\xi) \longrightarrow U_{1,k}(\xi) \xrightarrow{\mathcal{F}_s^{-1}} u_{1,k+1}(x) \longrightarrow u_{2,k+1}(x).$$

Если алгоритм сходится, то он сходится к решению, поскольку в пределе найденные четные и нечетные части оригинала и образа связаны, соответственно, косинус- и синус-преобразованиями Фурье. Корректность алгоритма обеспечивается затравкой, удовлетворяющей условию (6.3). Сходимость алгоритма подлежит дальнейшему исследованию. Кроме того, предложенный алгоритм с вычислительной точки зрения в два раза экономнее алгоритма ГС, поскольку требует не двух вычислений полных преобразований Фурье, а только один раз косинус-преобразования, и один раз синус-преобразования. Все остальные формулы алгебраические и не требуют переходов из плоскости изображения в плоскость сигнала и обратно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Брейсуэлл Р.* Преобразование Хартли. Теория и приложения. — М.: Мир, 1990.
2. *Гахов Ф. Д.* Краевые задачи. — М.: Наука, 1974.
3. *Гахов Ф. Д., Черский Ю. И.* Уравнения типа свертки. — М.: Наука, 1978.
4. *Гудмен Дж.* Введение в Фурье-оптику. — М.: Мир, 1970.
5. *Ильина И. В., Черезова Т. Ю., Кудряшов А. В.* Алгоритм Гершберга–Сакстона: экспериментальная реализация и модификация для задачи формирования многомодового лазерного излучения // Квант. электрон. — 2009. — 39, № 6. — С. 521–527.
6. *Петров В. Э.* Обобщенные тригонометрические преобразования // Зап. науч. сем. ПОМИ. — 2015. — 438. — С. 203–224.
7. *Петров В. Э.* Преобразование типа Фурье на полуоси с произвольной фазой // Мат. заметки. — 2020. — 107, № 2. — С. 256–275.

В. Э. Петров
ООО «ТВЭЛЛ», Санкт-Петербург, Россия
E-mail: vladimir.petrov@twell.ru

UDC 517.443, 535.8

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-332-341

EDN: UFJOVO

Some inverse problems of Fourier optics

V. È. Petrov

TWELL Ltd., Saint Petersburg, Russia

Abstract. We consider a general formulation of the problem of signal reconstruction from incomplete a priori information about it and measurements of the intensity of its Fourier transform. Some special cases are studied when a priori information is the even or odd part of the signal, as well as the real or imaginary part of the signal. Exact solutions in quadratures are constructed. An algorithm for solving the problem is proposed when only the signal and image intensities are known.

Keywords: Fourier transforms, inverse problems of optics, Gerchberg–Saxton algorithm.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.



Acknowledgments and funding. The author declares that no financial support was received. The author is grateful to A. A. Rumyantsev for the physical formulation of the problem.

For citation: V. È. Petrov, “Some inverse problems of Fourier optics,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 2, 332–341. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-332-341>

REFERENCES

1. R. N. Bracewell, *Preobrazovanie Khartli. Teoriya i prilozheniya* [The Hartley Transform], Mir, Moscow, 1990 (Russian translation).
2. F. D. Gakhov, *Kraevye zadachi* [Boundary-Value Problems], Nauka, Moscow, 1974 (in Russian).
3. F. D. Gakhov and Yu. I. Cherskiy, *Uravneniya tipa svertki* [Convolution Type Equations], Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).
4. J. Goodman, *Vvedenie v Fur'e-optiku* [Introduction to Fourier Optics], Mir, Moscow, 1970 (Russian translation).
5. I. V. Il'ina, T. Yu. Cherezova, and A. V. Kudryashov, “Algoritm Gershberga—Sakstona: eksperimental'naya realizatsiya i modifikatsiya dlya zadachi formirovaniya mnogomodovogo lazernogo izlucheniya” [The Gerchberg–Saxton algorithm: Experimental implementation and modification for the problem of generation of multimode laser radiation], *Kvant. elektron.* [Quantum Electron.], 2009, **39**, No. 6, 521–527 (in Russian).
6. V. È. Petrov, “Obobshchennnye trigonometricheskie preobrazovaniya” [Generalized trigonometric transformations], *Zap. nauch. sem. POMI* [Notes Sci. Semin. St. Petersburg Dept. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2015, **438**, 203–224 (in Russian).
7. V. È. Petrov, “Preobrazovanie tipa Fur'e na poluosi s proizvol'noy fazoy” [Fourier-type transformation on a semiaxis with an arbitrary phase], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2020, **107**, No. 2, 256–275 (in Russian).

V. È. Petrov
TWELL Ltd., Saint Petersburg, Russia
E-mail: vladimir.petrov@twell.ru

УДК 517.958, 517.956.32

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-342-363

EDN: URKODE

ОБОБЩЁННАЯ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ ВОЛНОВОГО УРАВНЕНИЯ СО СМЕШАННОЙ ПРОИЗВОДНОЙ

В. С. Рыхлов

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия

Аннотация. Исследуется начально-граничная задача для неоднородного гиперболического уравнения второго порядка в полуполосе плоскости с постоянными коэффициентами, содержащего смешанную производную, с нулевым и ненулевым потенциалом. Данное уравнение является уравнением поперечных колебаний движущейся конечной струны. Рассматривается случай нулевой начальной скорости и закрепленных концов (условия Дирихле). Предполагается, что корни характеристического уравнения простые и лежат на вещественной оси по разные стороны от начала координат. Определяется классическое решение начально-граничной задачи. В случае нулевого потенциала формулируется теорема единственности классического решения и дается формула для решения в виде ряда, членами которого являются контурные интегралы, содержащие исходные данные задачи. На основе этой формулы вводятся понятия обобщённой начально-граничной задачи и обобщённого решения. Формулируются основные теоремы о конечных формулах для обобщённого решения в случае однородной и неоднородной задач. Для доказательства этих теорем применяется подход, использующий теорию расходящихся рядов в понимании Л. Эйлера, предложенный А. П. Хромовым (аксиоматический подход). С помощью этого подхода, на основе формул для решений в виде ряда, доказываются сформулированные основные теоремы. Далее, как приложение полученных основных теорем, доказывается теорема о существовании и единственности обобщённого решения начально-граничной задачи при наличии ненулевого суммируемого потенциала и дается формула для решения в виде экспоненциально сходящегося ряда.

Ключевые слова: начально-граничная задача, гиперболическое уравнение, волновое уравнение, уравнение с частными производными, полуполоса, смешанная производная в уравнении, потенциал общего вида, обобщённое решение.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: В. С. Рыхлов. Обобщённая начально-граничная задача для волнового уравнения со смешанной производной // Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. 69, № 2. С. 342–363. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-342-363>

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Рассмотрим обобщённую неоднородную начально-граничную задачу для волнового уравнения со смешанной производной простейшего вида

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = f(x, t), \quad (1.1)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad (1.2)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (1.3)$$

где $(x, t) \in Q = [0, 1] \times [0, +\infty)$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}$; $\varphi(x) \in L_1[0, 1]$; $f(x, t)$ является функцией класса Q и обе эти функции являются комплекснозначными.

Здесь и далее считаем, что функция $f(x, t)$ переменных $(x, t) \in Q$ есть *функция класса Q* , если $f(x, t) \in L_1(Q_T)$ при любом $T > 0$, где $Q_T = [0, 1] \times [0, T]$. Кроме того, для краткости, используются обозначения

$$u_x := \frac{\partial u}{\partial x}, \quad u_t := \frac{\partial u}{\partial t}, \quad u_{xx} := \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad u_{xt} := \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial t}, \dots$$

Рассматривается случай гиперболического уравнения (1.1), т. е. выполняется условие

$$p_1^2 - 4p_2 > 0.$$

В этом случае корни ω_1, ω_2 характеристического уравнения

$$\omega^2 + p_1\omega + p_2 = 0$$

вещественны и различны.

Возможны только две принципиально разные ситуации

$$\omega_1 < 0 < \omega_2, \tag{1.4}$$

$$0 < \omega_1 < \omega_2. \tag{1.5}$$

В случае (1.4) соответствующая спектральная задача (см. далее задачу (2.2)) является регулярной по Биркгофу [9, с. 66-67], а в случае (1.5) — не регулярной. Не регулярный случай был рассмотрен в [11]. Метод доказательства был отличным от метода настоящей статьи. Далее будет рассматриваться только случай (1.4).

Определение обобщённого решения задачи (1.1)–(1.3) будет дано далее в пункте 3.1.

Обобщённая начально-граничная задача (1.1)–(1.3) является одним из наиболее сильных обобщений классической начально-граничной задачи (определение классической задачи дается немного ниже). Внешний вид её такой же, как и у классической задачи, но смысл совсем другой.

При $\varphi(x) \in L_1[0, 1]$ и $f(x, t)$ класса Q задача (1.1)–(1.3) понимается чисто формально, так как ни о каком удовлетворении решения уравнению (1.1) и граничным условиям (1.2) речь уже не может идти.

Решение задачи (1.1)–(1.3) ищется как суперпозиция решений двух более простых задач

$$u(x, t) = u_1(x, t) + u_2(x, t), \tag{1.6}$$

где $u_1(x, t)$ есть решение обобщённой однородной задачи

$$u_{xx} + p_1u_{xt} + p_2u_{tt} = 0, \tag{1.7}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \tag{1.8}$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \tag{1.9}$$

а $u_2(x, t)$ есть решение обобщённой неоднородной задачи

$$u_{xx} + p_1u_{xt} + p_2u_{tt} = f(x, t), \tag{1.10}$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \tag{1.11}$$

$$u(x, 0) = 0, \quad u_t(x, 0) = 0. \tag{1.12}$$

Первый результат настоящей статьи относится к решению обобщённой задачи (1.7)–(1.9). Для того, чтобы его сформулировать, введём необходимые обозначения, а именно, для функции $f(x) \in L_1[0, 1]$ положим:

$$f^*(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi \in [0, a), \\ f\left(\frac{1-\xi}{1-a}\right), & \xi \in [a, 1]; \end{cases} \quad f_*(\xi) = \begin{cases} f\left(\frac{\xi}{a}\right), & \xi \in [0, a), \\ 0, & \xi \in [a, 1]. \end{cases} \tag{1.13}$$

где обозначено $a = \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1}$ и, таким образом, $1 - a = \frac{|\omega_1|}{\omega_2 - \omega_1}$. Кроме того, воспользуемся известным обозначением $\{x\}$ для дробной части числа $x \in \mathbb{R}$.

Теорема 1.1. Пусть $\varphi \in L_1[0, 1]$ и выполняется условие (1.4). Тогда решением обобщённой начально-граничной задачи (1.7)–(1.9) является функция $u_1(x, t)$ класса Q , определяемая формулой

$$u_1(x, t) = \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \left(\varphi^* \left(\left\{ \frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) - \varphi^* \left(\left\{ \frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) \right) + \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(\varphi_* \left(\left\{ \frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) - \varphi_* \left(\left\{ \frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) \right). \quad (1.14)$$

Второй результат статьи относится к решению обобщённой задачи (1.10)–(1.12). Для формулировки результата положим

$$F(x, t) = \int_0^x f(\xi, t) d\xi. \quad (1.15)$$

Теорема 1.2. Пусть $f(x, t)$ есть функция класса Q и выполняется условие (1.4). Тогда решением обобщённой начально-граничной задачи (1.10)–(1.12) является функция $u_2(x, t)$ класса Q , определяемая формулой

$$u_2(x, t) = -\frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t \left(F^* \left(\left\{ \frac{t - \tau + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\}, \tau \right) - F^* \left(\left\{ \frac{t - \tau + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\}, \tau \right) + F_* \left(\left\{ \frac{t - \tau + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\}, \tau \right) - F_* \left(\left\{ \frac{t - \tau + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\}, \tau \right) \right) d\tau. \quad (1.16)$$

В этой формуле звёздочки у функции $F(x, t)$ относятся к первой переменной.

Для получения этих результатов используется подход, предложенный А. П. Хромовым в [22] (подробно эти результаты изложены в [23]). А именно, как и в [22], используется теория расходящихся рядов в понимании Л. Эйлера [24], который является основоположником теории суммирования расходящихся рядов.

Вопросы, касающиеся расходящихся рядов, а именно, какой смысл они имеют, как понимать и трактовать сумму расходящегося ряда, какими свойствами должны обладать суммы таких рядов и другие связанные с этими вопросами понятия активно обсуждались ведущими математиками ещё во времена Эйлера, т. е. в 18-м веке. Исторический обзор можно найти в монографии [15].

При получении формул (1.14) и (1.16) для обобщённых решений важнейшую роль играют естественные аксиомы из монографии [15, с. 19] для преобразования расходящихся рядов:

- (A) $\sum a_n = s \implies \sum k a_n = k s$;
- (Б) $\sum a_n = s, \sum b_n = t \implies \sum (a_n + b_n) = s + t$;
- (B) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s \implies \sum_{n=1}^{\infty} a_n = s - a_0$.

Также существенно используется правило интегрирования расходящихся рядов, которое предложил А. П. Хромов в [22]:

$$\int \sum = \sum \int, \quad (1.17)$$

где \int — определенный интеграл. И все это опирается на соответствующую теорему Лебега о почленном интегрировании тригонометрического ряда в экспоненциальной форме (формулировку теоремы Лебега для тригонометрического ряда по синусам и косинусам можно найти в [10, с. 277, теорема 3]).

Наконец, как приложение к вышеприведенным результатам, рассматривается обобщённая начально-граничная задача для волнового уравнения с ненулевым потенциалом

$$u_{xx} + p_1 u_{xt} + p_2 u_{tt} = q(x) u(x, t), \quad (1.18)$$

$$u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, \quad (1.19)$$

$$u(x, 0) = \varphi(x), \quad u_t(x, 0) = 0, \quad (1.20)$$

где $\varphi(x) \in L_1[0, 1]$, $q(x) \in L_1[0, 1]$ и $q(x)u(x, t)$ класса Q .

Показывается, что эта задача приводится к интегральному уравнению, решение которого вполне естественно назвать обобщённым решением задачи (1.18)–(1.20). Это решение получается по методу последовательных подстановок. Соответствующий результат будет сформулирован и доказан далее в разделе 4.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ КЛАССИЧЕСКОГО РЕШЕНИЯ, ЕГО ЕДИНСТВЕННОСТЬ И ФОРМУЛА ДЛЯ РЕШЕНИЯ В ВИДЕ РЯДА

Под *классическим решением* задачи (1.1)–(1.3) (или, как иногда говорят, *решением п.в.*) понимается функция $u(x, t)$ переменных $(x, t) \in Q$, которая:

- а) непрерывна вместе с $u_x(x, t)$ и $u_t(x, t)$, при этом $u_x(x, t)$ и $u_t(x, t)$ абсолютно непрерывны и по x , и по t , и п.в. в Q выполняется равенство

$$u_{xt}(x, t) = u_{tx}(x, t); \tag{2.1}$$

- б) удовлетворяет условиям (1.2)–(1.3) на границе множества Q и уравнению (1.1) п.в. в Q .

Отметим, что необходимость в условии (2.1) обусловлена тем, что в случае, когда $u_{xt}(x, t)$ и $u_{tx}(x, t)$ не являются непрерывными функциями, это равенство может не выполняться на множестве положительной меры [14].

Из определения видно, что в случае, когда ищется классическое решение задачи (1.1)–(1.3), необходимо считать, что $\varphi(x), \varphi'(x)$ абсолютно непрерывны и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$.

В случае $\omega_1 = -1, \omega_2 = 1$ имеем $p_1 = 0, p_2 = -1$, и уравнение (1.1) является классическим уравнением колебания струны

$$u_{xx} - u_{tt} = 0.$$

В [22] рассматривался именно такой случай. Как следствие, из результатов настоящей статьи вытекает полученный в [22] результат об обобщённом решении. Результаты, излагаемые в настоящей статье, относятся к общему случаю $p_1 \in \mathbb{R}$.

С задачей (1.1)–(1.3) тесно связана спектральная задача

$$L(\lambda)y = 0, \tag{2.2}$$

порождённая оператор-функцией $L(\lambda)$, определяемой дифференциальным выражением с параметром λ

$$\ell(y, \lambda) := y'' + \lambda p_1 y' + \lambda^2 p_2 y \tag{2.3}$$

и краевыми условиями

$$U_1(y) := y(0) = 0, \quad U_2(y) := y(1) = 0. \tag{2.4}$$

Пусть R_λ есть резольвента оператор-функции $L(\lambda)$, а $G(x, \xi, \lambda)$ — её функция Грина. Обозначим через $R_{1\lambda}$ интегральный оператор с ядром $G_\xi(x, \xi, \lambda)$.

В качестве фундаментальной системы решений уравнения $\ell(y, \lambda) = 0$ рассмотрим систему решений

$$y_1(x, \lambda) := e^{\lambda\omega_1 x}, \quad y_2(x, \lambda) := e^{\lambda\omega_2 x}.$$

Тогда характеристический определитель $L(\lambda)$ [9, с. 26] имеет вид

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\lambda\omega_1} & e^{\lambda\omega_2} \end{vmatrix} = e^{\lambda\omega_2} - e^{\lambda\omega_1},$$

и его корни, очевидно, суть числа

$$\lambda_k = \frac{2k\pi i}{\omega_2 - \omega_1}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \tag{2.5}$$

Эти числа, кроме точки $\lambda_0 = 0$, являются простыми собственными значениями $L(\lambda)$. Число $\lambda_0 = 0$, как легко проверить, не является собственным значением.

Обозначим через γ_k окружности $\{\lambda : |\lambda - \lambda_k| = \delta\}$, где $\delta > 0$ и настолько мало, что внутри γ_k находится по одному собственному значению.

Результат настоящей статьи будет вытекать из результата, даваемого следующей теоремой единственности для классического решения и представления его рядом (полная версия теоремы опубликована в [12]).

Теорема 2.1. Если $u(x, t)$ есть классическое решение задачи (1.1)–(1.3) с условием (1.4) и дополнительно выполняется условие, что функция u_{tt} класса Q , то это решение единственно и находится по формуле

$$u(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \left((-p_1 e^{\lambda t} R_{1\lambda} + p_2 e^{\lambda t} \lambda R_\lambda) \varphi + \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_\lambda f(\cdot, \tau) d\tau \right) d\lambda, \quad (2.6)$$

в которой ряд справа сходится равномерно по $x \in [0, 1]$ при любом фиксированном $t > 0$.

Из формулы (2.6) найдём, в частности, что если классические решения задач (1.7)–(1.9) и (1.10)–(1.12) существуют, то для их решений $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$, соответственно, справедливы формулы:

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \left(-p_1 e^{\lambda t} R_{1\lambda} + p_2 e^{\lambda t} \lambda R_\lambda \right) \varphi d\lambda, \quad (2.7)$$

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} R_\lambda f(\cdot, \tau) d\tau d\lambda. \quad (2.8)$$

3. КОНЕЧНЫЕ ФОРМУЛЫ ДЛЯ ОБОБЩЁННОГО РЕШЕНИЯ

3.1. Определение обобщённого решения. Теорема 2.1 говорит о том, что формальный ряд (2.6) и начально-граничная задача (1.1)–(1.3) тесно связаны, а именно, если эта задача имеет классическое решение, то для него справедлива формула (2.6). При этом функция $\varphi(x)$ должна удовлетворять условиям: $\varphi(x), \varphi'(x)$ абсолютно непрерывны и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. Аналогично [22] расширим понятие этой связи.

Можно заметить, что ряд в (2.6) имеет смысл для любых функций $\varphi(x) \in L_1[0, 1]$ и $f(x, t)$ класса Q , хотя теперь он, вообще говоря, может быть и расходящимся. Будем считать, что этот ряд является формальным решением задачи (1.1)–(1.3), когда $\varphi(x) \in L_1[0, 1]$ и $f(x, t)$ класса Q . Как уже отмечалось, в этом случае задача (1.1)–(1.3) понимается чисто формально.

Эту задачу (1.1)–(1.3) в случае $\varphi(x) \in L_1[0, 1]$ и $f(x, t)$ класса Q мы и называли ранее *обобщённой начально-граничной задачей*. Назовем ряд справа в (2.6) *обобщённым решением* этой обобщённой задачи.

Затем можно попытаться найти сумму этого ряда, используя обычные правила анализа и накладывая дополнительно те или иные ограничения на начальную функцию $\varphi(x)$ и неоднородность $f(x, t)$, обеспечивающие сходимость этого ряда к некоторой сумме, понимаемой в классическом смысле по Коши как предел последовательности частичных сумм. Затем, найдя эту сумму, можно попытаться ослабить наложенные ограничения на $\varphi(x)$ и $f(x, t)$.

Но можно, как и в [22], использовать другой подход, упростив тем самым выкладки и при этом не накладывая никаких дополнительных ограничений на $\varphi(x)$ и $f(x, t)$, кроме того, что $\varphi(x) \in L_1[0, 1]$ и $f(x, t)$ класса Q . А именно, можно трактовать ряд справа в формуле (2.6) изначально как расходящийся (даже если он и сходится) и соответствующим образом определить (или, другими словами, назначить) «сумму» этого ряда («сумма» в кавычках означает, что это сумма именно расходящегося ряда).

Таким образом, найти решение обобщённой начально-граничной задачи (1.1)–(1.3) — значит определить (или назначить) «сумму» ряда справа в (2.6).

3.2. Определение «суммы» расходящегося тригонометрического ряда. Далее будет показано, что с использованием только аксиом (А)–(В) без использования обычного определения суммы ряда по Коши как предела его частичных сумм ряд справа в (2.6) сводится к сумме конечного числа рядов вида

$$\sum_k a_k e^{2k\pi i x}, \quad \text{где } a_k = \int_0^1 f(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi, \quad (3.1)$$

а функции $f(x) \in L_1[0, 1]$ выражаются по простым формулам через функцию $\varphi(x)$ или $f(x, t)$ и суммируемы в том и только в том случае, когда $\varphi(x) \in L_1[0, 1]$ и $f(x, t)$ класса Q .

Таким образом, чтобы найти формулу для обобщённого решения, необходимо определить «сумму» ряда (3.1). Наиважнейшую роль в этом играет теорема Лебега об интегрировании тригонометрического ряда [10, с. 277, теорема 3]. Нам эта теорема потребуется в следующей формулировке.

Теорема 3.1 (теорема Лебега об интегрировании тригонометрического ряда). *Пусть на промежутке $[0, 1]$ задана суммируемая функция $f(x)$, имеющая ряд (3.1) своим рядом Фурье. Если $[A, B] \subset [0, 1]$, то*

$$\int_A^B f(x) dx = \sum_k \int_A^B a_k e^{2k\pi i x} dx.$$

Доказательство этой теоремы без особых затруднений получается из доказательства соответствующей теоремы, см. [10, с. 277].

После формулировки этой теоремы в [10, с. 277] отмечено: «Иначе говоря, ряд Фурье суммируемой функции можно *почленно интегрировать*. Этот факт весьма замечателен, поскольку сам этот ряд может и не сходиться».

По сути эта теорема разрешает для тригонометрического ряда переставлять суммирование и интегрирование, даже если ряд расходится. Ввиду этого, как уже было отмечено, в [22] было предложено дополнить сформулированные выше три аксиомы (A)–(B) для расходящихся рядов правилом (1.17).

Используя теорему 3.1, можно определить «сумму» расходящегося ряда (3.1).

Лемма 3.1. *Если (3.1) есть ряд Фурье функции $f(x) \in L_1[0, 1]$, то «сумма» ряда (3.1) есть функция $f(x)$.*

Доказательство. Доказательство этой леммы почти дословно повторяет доказательство соответствующего результата из [22].

В самом деле, пусть «сумма» ряда (3.1) при $x \in [0, 1]$ есть какая-то функция $g(x) \in L_1[0, 1]$ (мы ограничиваем себя именно такими функциями). Тогда в соответствии с правилом (1.17) имеем

$$\int_0^x g(\eta) d\eta = \sum_k \left(\int_0^1 f(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) \int_0^x e^{2k\pi i \eta} d\eta. \tag{3.2}$$

По теореме 3.1 ряд в (3.2) сходится при любом $x \in [0, 1]$ и его сумма есть

$$\sum_k \left(\int_0^1 f(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) \int_0^x e^{2k\pi i \eta} d\eta = \int_0^x f(\eta) d\eta. \tag{3.3}$$

Таким образом, из (3.2) и (3.3) получим, что

$$\int_0^x g(\eta) d\eta = \int_0^x f(\eta) d\eta.$$

А отсюда следует, что $g(x) = f(x)$ для п.в. $x \in [0, 1]$, т. е. функция $f(x)$ является «суммой» ряда (3.1). Лемма доказана. \square

Утверждение леммы 3.1 вполне согласуется с идеей Эйлера [24], что «сумма некоторого бесконечного ряда есть конечное выражение, из разложения которого возникает этот ряд».

Описанный метод получения «суммы» расходящегося тригонометрического ряда (3.1) является «регулярным» [15], так как для сходящихся рядов эта «сумма» совпадает с обычной суммой ряда, т. е. с функцией $f(x)$.

3.3. Конечная формула для обобщённого решения в случае однородной задачи.

В этом разделе доказывается сформулированная выше теорема 1.1 о конечной формуле (1.14) для обобщённого решения. Исходим из формулы (2.7), которую запишем в виде

$$u_1(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \left(e^{\lambda t} \int_0^1 (-p_1 G_\xi(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) + \lambda p_2 G(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi)) d\xi \right) d\lambda. \quad (3.4)$$

Для функции Грина $G(x, \xi, \lambda)$ имеет место представление

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)\Delta(\lambda)} \left(e^{\lambda(\omega_1 x + \omega_2(1-\xi))} - e^{\lambda\omega_1(x+1-\xi)} + e^{\lambda(\omega_1(1-\xi) + \omega_2 x)} - e^{\lambda(\omega_1 + \omega_2(x-\xi))} \right) - \frac{1}{\lambda(\omega_2 - \omega_1)} \left(e^{\lambda\omega_1(x-\xi)} \chi(x-\xi) + e^{\lambda\omega_2(x-\xi)} \chi(\xi-x) \right),$$

где $\chi(x)$ — функция Хевисайда ($\chi(x) = 1$ при $x \geq 0$, $\chi(x) = 0$ при $x < 0$).

Для доказательства потребуются две леммы.

Так как числа λ_k , $k = \pm 1, \pm 2, \dots$, определяемые формулой (2.5), являются простыми полюсами функции Грина $G(x, \xi, \lambda)$, то для вычетов имеют место формулы, определяемые следующей леммой.

Лемма 3.2. *Справедливы формулы*

$$r_k(x, \xi) := \operatorname{res}_{\lambda=\lambda_k} G(x, \xi, \lambda) = \frac{1}{2k\pi i(\omega_2 - \omega_1)} \left(e^{\lambda_k \omega_2 x} - e^{\lambda_k \omega_1 x} \right) \left(e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} - e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} \right), \quad (3.5)$$

$$r_{1k}(x, \xi) := \operatorname{res}_{\lambda_k} G_\xi(x, \xi, \lambda) = -\frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \left(e^{\lambda_k \omega_2 x} - e^{\lambda_k \omega_1 x} \right) \left(\omega_1 e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} - \omega_2 e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} \right). \quad (3.6)$$

Доказательство леммы получается непосредственным подсчетом по формуле для вычетов отношения двух целых функций в случае простых полюсов [7, с. 417].

В следующей лемме даются формулы приведения интегралов от $e^{-\lambda_k \omega_j \xi} f(\xi)$, $j = 1, 2$ к коэффициентам Фурье по тригонометрической системе $\{e^{2k\pi i x}\}$ некоторых преобразований функций $f(\xi)$.

Лемма 3.3. *Если $f(x) \in L_1[0, 1]$, то справедливы формулы*

$$\int_0^1 e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} f(\xi) d\xi = -\frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_1} \int_0^1 e^{-2k\pi i \xi} f^*(\xi) d\xi, \quad (3.7)$$

$$\int_0^1 e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} f(\xi) d\xi = \frac{\omega_2 - \omega_1}{\omega_2} \int_0^1 e^{-2k\pi i \xi} f_*(\xi) d\xi, \quad (3.8)$$

где функции $f^*(\xi)$ и $f_*(\xi)$ определяются формулами (1.13).

Доказательство этой леммы без особых проблем получается в результате соответствующих замен переменных под знаками интегралов.

Перейдём теперь к непосредственному доказательству теоремы 1.1.

Используя обозначения леммы 3.2, из (3.4) получим

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \sum_k \int_0^1 \operatorname{res}_{\lambda=\lambda_k} \left(e^{\lambda t} (-p_1 G_\xi(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi) + \lambda p_2 G(x, \xi, \lambda) \varphi(\xi)) \right) d\xi = \\ &= \sum_k \int_0^1 \left(e^{\lambda_k t} (-p_1 r_{1k}(x, \xi) + \lambda_k p_2 r_k(x, \xi)) \varphi(\xi) \right) d\xi. \end{aligned} \quad (3.9)$$

На основании формул (3.5)-(3.6), а также аксиом (А)-(Б) из (3.9) будем иметь

$$u_1(x, t) = \sum_k \left(e^{\lambda_k(t+\omega_2 x)} - e^{\lambda_k(t+\omega_1 x)} \right) \left(\int_0^1 \left(\left(\frac{p_1 \omega_1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} + \frac{\lambda_k p_2}{2k\pi i(\omega_2 - \omega_1)} \right) e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} - \right.$$

$$- \left(\frac{p_1 \omega_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} + \frac{\lambda_k p_2}{2k\pi i (\omega_2 - \omega_1)} \right) e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} \varphi(\xi) d\xi \Bigg). \quad (3.10)$$

Отсюда, используя формулы Виета: $p_1 = -(\omega_1 + \omega_2)$ и $p_2 = \omega_1 \omega_2$, найдём

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \sum_k (e^{\lambda_k(t+\omega_2 x)} - e^{\lambda_k(t+\omega_1 x)}) \times \\ &\quad \times \left(-\frac{\omega_1^2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \int_0^1 e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} \varphi(\xi) d\xi + \frac{\omega_2^2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \int_0^1 e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} \varphi(\xi) d\xi \right) = \\ &= \frac{\omega_1^2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \left(-\sum_k e^{\lambda_k(t+\omega_2 x)} \int_0^1 \varphi(\xi) e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} d\xi - \sum_k e^{\lambda_k(t+\omega_1 x)} \int_0^1 \varphi(\xi) e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} d\xi \right) + \\ &\quad + \frac{\omega_2^2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \left(\sum_k e^{\lambda_k(t+\omega_2 x)} \int_0^1 \varphi(\xi) e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} d\xi - \sum_k e^{\lambda_k(t+\omega_1 x)} \int_0^1 \varphi(\xi) e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} d\xi \right). \quad (3.11) \end{aligned}$$

Далее применяем лемму 3.3 и аксиому (A). В результате получим

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \left(\sum_k e^{2k\pi i \frac{t+\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}} \int_0^1 \varphi^*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \sum_k e^{2k\pi i \frac{t+\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1}} \int_0^1 \varphi^*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right) + \\ &\quad + \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(\sum_k e^{2k\pi i \frac{t+\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}} \int_0^1 \varphi_*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \sum_k e^{2k\pi i \frac{t+\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1}} \int_0^1 \varphi_*(\xi) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \right). \quad (3.12) \end{aligned}$$

Теперь, чтобы получить конечную формулу для обобщённого решения, воспользуемся леммой 3.1 для определения «сумм» рядов, стоящих справа. Так как функция $e^{2k\pi i x}$ есть 1-периодическая функция, то в результате получим следующее представление для правой части последней формулы при п.в. $(x, t) \in Q$:

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{\omega_1}{\omega_2 - \omega_1} \left(\varphi^* \left(\left\{ \frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) - \varphi^* \left(\left\{ \frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) \right) + \\ &\quad + \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(\varphi_* \left(\left\{ \frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) - \varphi_* \left(\left\{ \frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) \right), \quad (3.13) \end{aligned}$$

где, как и раньше, $\{x\}$ обозначает дробную часть числа $x \in \mathbb{R}$. А это и есть формула (1.14).

То, что решение $u_1(x, t)$ есть функция класса Q , следует из следующей леммы.

Лемма 3.4. *Имеет место оценка*

$$\|u_1(x, t)\|_{L_1(Q_T)} \leq \left(\frac{\omega^*}{\omega_*} \right)^2 (T + 4\omega_*) \|\varphi\|_{L_1[0,1]}, \quad (3.14)$$

где обозначено $\omega_* = \min\{|\omega_1|, \omega_2\}$, $\omega^* = \max\{|\omega_1|, \omega_2\}$.

Доказательство. Из формулы (1.14) следует оценка

$$\begin{aligned} \|u_1(x, t)\|_{L_1(Q_T)} &= \int_0^T d\tau \int_0^1 |u_1(\xi, \tau)| d\xi = \int_0^1 d\xi \int_0^T |u_1(\xi, \tau)| d\tau \leq \\ &\leq \frac{|\omega_1|}{\omega_2 - \omega_1} \left(\int_0^1 d\xi \int_0^T \left| \varphi^* \left(\left\{ \frac{t + \omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) \right| d\tau + \int_0^1 d\xi \int_0^T \left| \varphi^* \left(\left\{ \frac{t + \omega_1 \xi}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) \right| d\tau \right) + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \left(\int_0^1 d\xi \int_0^T \left| \varphi_* \left(\left\{ \frac{t + \omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) \right| d\tau + \int_0^1 d\xi \int_0^T \left| \varphi_* \left(\left\{ \frac{t + \omega_1 \xi}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) \right| d\tau \right) = \\
& = \frac{|\omega_1|}{\omega_2 - \omega_1} (I_1 + I_2) + \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} (I_3 + I_4). \quad (3.15)
\end{aligned}$$

Оценим каждое слагаемое.

Делая в I_1 замену

$$\frac{\tau + \omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1} = \tau_1 \quad \longrightarrow \quad d\tau = (\omega_2 - \omega_1) d\tau_1,$$

получим

$$I_1 = (\omega_2 - \omega_1) \int_0^1 d\xi \int_{\frac{\omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1}}^{\frac{T + \omega_2 \xi}{\omega_2 - \omega_1}} |\varphi^*(\{\tau_1\})| d\tau_1 \leq (\omega_2 - \omega_1) \int_0^1 d\xi \int_0^{\frac{T + \omega_2}{\omega_2 - \omega_1}} |\varphi^*(\{\tau_1\})| d\tau_1.$$

Обозначим через m наименьшее натуральное число такое, что

$$\frac{T}{\omega_2 - \omega_1} \leq m < \frac{T}{\omega_2 - \omega_1} + 1.$$

Учитывая это и принимая во внимание, что $\varphi^*(\{\tau_1\})$ есть 1-периодическая функция, будем иметь

$$I_1 \leq (\omega_2 - \omega_1) \int_0^1 d\tau \int_0^{m+1} |\varphi^*(\{\tau_1\})| d\tau_1 = (\omega_2 - \omega_1)(m+1) \int_0^1 d\xi \int_0^1 |\varphi^*(\tau_1)| d\tau_1. \quad (3.16)$$

Далее потребуется следующая лемма.

Лемма 3.5. Для функции $f(x) \in L_1[0, 1]$ имеют место равенства

$$\int_0^1 |f^*(x)| dx = \frac{|\omega_1|}{\omega_2 - \omega_1} \|f\|_{L_1[0,1]}, \quad \int_0^1 |f_*(x)| dx = \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} \|f\|_{L_1[0,1]}.$$

Доказательство. Вспоминая определение функций $f^*(x)$ и $f_*(x)$ (см. формулы (1.13)), легко найдём

$$\int_0^1 |f^*(x)| dx = \int_a^1 \left| f\left(\frac{1-x}{1-a}\right) \right| dx = (1-a) \int_0^1 |f(\xi)| d\xi = \frac{|\omega_1|}{\omega_2 - \omega_1} \|f\|_{L_1[0,1]},$$

а это есть первое равенство в формулировке леммы. Второе равенство получается аналогично. Лемма 3.5 доказана. \square

Используя эту лемму, без труда получим из (3.16)

$$I_1 \leq |\omega_1|(m+1) \|\varphi\|_{L_1[0,1]} \leq |\omega_1| \left(\frac{T}{\omega_2 - \omega_1} + 2 \right) \|\varphi\|_{L_1[0,1]}. \quad (3.17)$$

Рассмотрим теперь I_2 . Делая в I_2 замену

$$\frac{\tau + \omega_1 \xi}{\omega_2 - \omega_1} = \tau_2 \quad \longrightarrow \quad d\tau = (\omega_2 - \omega_1) d\tau_2,$$

получим аналогично предыдущему

$$\begin{aligned}
I_2 & = (\omega_2 - \omega_1) \int_0^1 d\xi \int_{\frac{\omega_1 \xi}{\omega_2 - \omega_1}}^{\frac{T + \omega_1 \xi}{\omega_2 - \omega_1}} |\varphi^*(\{\tau_2\})| d\tau_2 \leq (\omega_2 - \omega_1) \int_0^1 d\xi \int_{-1}^{\frac{T}{\omega_2 - \omega_1}} |\varphi^*(\{\tau_2\})| d\tau_2 \leq \\
& \leq (\omega_2 - \omega_1) \int_0^1 d\tau \int_{-1}^m |\varphi^*(\{\tau_2\})| d\tau_2 = (\omega_2 - \omega_1)(m+1) \int_0^1 d\xi \int_0^1 |\varphi^*(\tau_2)| d\tau_2 \leq
\end{aligned}$$

$$\leq |\omega_1|(m+1)\|\varphi\|_{L_1[0,1]} \leq |\omega_1| \left(\frac{T}{\omega_2 - \omega_1} + 2 \right) \|\varphi\|_{L_1[0,1]}. \quad (3.18)$$

Похожим образом можно получить оценки

$$I_3 \leq \omega_2 \left(\frac{T}{\omega_2 - \omega_1} + 2 \right) \|\varphi\|_{L_1[0,1]}, \quad I_4 \leq \omega_2 \left(\frac{T}{\omega_2 - \omega_1} + 2 \right) \|\varphi\|_{L_1[0,1]}. \quad (3.19)$$

Из (3.15), (3.17), (3.18) и (3.19) будем иметь

$$\begin{aligned} \|u_1(x, t)\|_{L_1(Q_T)} &\leq \left(\frac{|\omega_1|}{\omega_2 - \omega_1} (|\omega_1| + |\omega_1|) + \frac{\omega_2}{\omega_2 - \omega_1} (\omega_2 + \omega_2) \right) \left(\frac{T}{\omega_2 - \omega_1} + 2 \right) \|\varphi\|_{L_1[0,1]} = \\ &= \left(\frac{2(|\omega_1|^2 + \omega_2^2)}{\omega_2 - \omega_1} \left(\frac{T}{\omega_2 - \omega_1} + 2 \right) \|\varphi\|_{L_1[0,1]} \leq \left(\frac{\omega^*}{\omega_*} \right)^2 (T + 4\omega_*) \|\varphi\|_{L_1[0,1]}, \end{aligned}$$

а это и есть утверждение леммы 3.4. Тем самым лемма 3.4 доказана. \square

Таким образом, теорема 1.1 полностью доказана.

Следствие 3.1. Пусть $\varphi \in L_1[0, 1]$ и выполняется условие (1.4). Тогда решением обобщённой начально-граничной задачи (1.7)–(1.9) является функция $u_1(x, t)$ класса Q , определяемая формулой

$$u_1(x, t) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \left(\widehat{\varphi} \left(\left\{ \frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) - \widehat{\varphi} \left(\left\{ \frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) \right), \quad (3.20)$$

где

$$\widehat{\varphi}(\xi) = \begin{cases} \omega_2 \varphi \left(\frac{\xi}{a} \right), & \text{если } \xi \in [0, a]; \\ \omega_1 \varphi \left(\frac{1 - \xi}{1 - a} \right), & \text{если } \xi \in [a, 1]. \end{cases} \quad (3.21)$$

Доказательство. Запишем формулу (1.14) (или, что то же самое, (3.13)) в другом виде:

$$\begin{aligned} u_1(x, t) &= \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \left(\left(\omega_1 \varphi^* \left(\left\{ \frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) + \omega_2 \varphi_* \left(\left\{ \frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \left(\omega_1 \varphi^* \left(\left\{ \frac{t + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) + \omega_2 \varphi_* \left(\left\{ \frac{t + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\} \right) \right) \right). \quad (3.22) \end{aligned}$$

Используя формулы (1.13) для функций со звёздочками, получим более простое представление для комбинации функций, стоящих в скобках в (3.22):

$$\omega_1 \varphi^*(\xi) + \omega_2 \varphi_*(\xi) \equiv \widehat{\varphi}(\xi),$$

где $\widehat{\varphi}(\xi)$ — именно та функция (3.21), которая фигурирует в формуле (3.20).

С учётом этого формула (3.22) запишется в виде (3.20).

То, что $u_1(x, t)$ есть функция класса Q , уже установлено в лемме 3.4. Таким образом, следствие 3.1 доказано. \square

Для сравнения целесообразно привести следующий результат из [12] о формуле для классического решения задачи (1.7)–(1.9).

Теорема 3.2. Пусть выполняется условие (1.4). Для того, чтобы задача (1.7)–(1.9) имела единственное классическое решение, необходимо и достаточно, чтобы функции $\varphi(x)$ и $\varphi'(x)$ были абсолютно непрерывны, $\varphi''(x) \in L_1[0, 1]$ и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$. При этом решение $u_1(x, t)$ определяется формулой (1.14) (или (3.13)).

Следовательно, и классическое, и обобщённое решения выражаются одной и той же формулой. Этот факт подтверждает правильность изложенного подхода получения формулы (1.14) для обобщённого решения $u_1(x, t)$ задачи (1.7)–(1.9).

3.4. Конечная формула для обобщённого решения в случае неоднородной задачи.

В этом разделе доказывается сформулированная выше теорема 1.2 о конечной формуле (1.16) для обобщённого решения. Исходим из формулы (2.8), которую запишем в виде

$$u_2(x, t) = \frac{1}{2\pi i} \sum_k \int_{\gamma_k} \int_0^t e^{\lambda(t-\tau)} \int_0^1 G(x, \xi, \lambda) f(\xi, \tau) d\xi d\tau d\lambda.$$

Используя обозначения леммы 3.2, отсюда найдём

$$u_2(x, t) = \sum_k \int_0^t \int_0^1 \operatorname{res}_{\lambda=\lambda_k} \left(e^{\lambda(t-\tau)} G(x, \xi, \lambda) f(\xi, \tau) \right) d\xi d\tau = \sum_k \int_0^t \int_0^1 e^{\lambda_k(t-\tau)} r_k(x, \xi) f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (3.23)$$

Далее проводим рассуждения, аналогичные рассуждениям при выводе формул (3.10)–(3.12), а именно, на основании леммы 3.2 из (3.23) получим

$$u_2(x, t) = \sum_k \frac{1}{2k\pi i(\omega_2 - \omega_1)} \int_0^t \left(e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_2 x)} - e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_1 x)} \right) \times \\ \times \int_0^1 \frac{\omega_1 \omega_2}{2k\pi i(\omega_2 - \omega_1)} \left(e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} - e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} \right) f(\xi, \tau) d\xi d\tau. \quad (3.24)$$

Используя обозначение (1.15), проведём во внутреннем интеграле справа в (3.24) один раз интегрирование по частям, при этом учтём равенство

$$e^{-\lambda_k \omega_1} - e^{-\lambda_k \omega_2} = e^{-\lambda_k \omega_2} (e^{\lambda_k(\omega_2 - \omega_1)} - 1) = e^{-\lambda_k \omega_2} (e^{2k\pi i} - 1) = 0$$

и аксиомы (A)–(B). Получим

$$u_2(x, t) = \sum_k \int_0^t \left(e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_2 x)} - e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_1 x)} \right) \times \\ \times \left(\frac{\omega_1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \int_0^1 F(\xi, \tau) e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} d\xi - \frac{\omega_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \int_0^1 F(\xi, \tau) e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} d\xi \right) = \\ = \frac{\omega_1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \left(\sum_k \int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_2 x)} \int_0^1 F(\xi, \tau) e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} d\xi d\tau - \right. \\ \left. - \sum_k \int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_1 x)} \int_0^1 F(\xi, \tau) e^{-\lambda_k \omega_1 \xi} d\xi d\tau \right) - \\ - \frac{\omega_2}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \left(\sum_k \int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_2 x)} \int_0^1 F(\xi, \tau) e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} d\xi d\tau - \right. \\ \left. - \sum_k \int_0^t e^{\lambda_k(t-\tau+\omega_1 x)} \int_0^1 F(\xi, \tau) e^{-\lambda_k \omega_2 \xi} d\xi d\tau \right).$$

Далее применяем лемму 3.3, аксиому (A) и правило (1.17). В результате получим

$$u_2(x, t) = \\ = -\frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t \left(\sum_k e^{2k\pi i \frac{t-\tau+\omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}} \int_0^1 F^*(\xi, \tau) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \sum_k e^{2k\pi i \frac{t-\tau+\omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1}} \int_0^1 F^*(\xi, \tau) e^{-2k\pi i \xi} d\xi - \right.$$

$$- \sum_k e^{2k\pi i \frac{t-\tau+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}} \int_0^1 F_*(\xi, \tau) e^{-2k\pi i \xi} d\xi + \sum_k e^{2k\pi i \frac{t-\tau+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}} \int_0^1 F_*(\xi, \tau) e^{-2k\pi i \xi} d\xi \Big) d\tau. \quad (3.25)$$

Используя уже найденную «сумму»¹ ряда (3.1), получим следующее представление для правой части формулы (3.25):

$$u_2(x, t) = - \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t \left(F^* \left(\left\{ \frac{t - \tau + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\}, \tau \right) - F^* \left(\left\{ \frac{t - \tau + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\}, \tau \right) - F_* \left(\left\{ \frac{t - \tau + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\}, \tau \right) + F_* \left(\left\{ \frac{t - \tau + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1} \right\}, \tau \right) \right) d\tau, \quad (3.26)$$

а это и есть формула (1.16).

То, что $u_2(x, t)$ является функцией класса Q , вытекает из следующей леммы.

Лемма 3.6. *Имеет место оценка*

$$\|u_2(x, t)\|_{L_1(Q_T)} \leq \frac{1}{2\omega_*} \|f(x, t)\|_{L_1(Q_T)}. \quad (3.27)$$

Доказательство. Чтобы доказать оценку (3.27), получим для функции $u_2(x, t)$, определенной формулой (3.26), другое, более удобное в некоторых вопросах, представление. Сформулируем результат в виде леммы.

Лемма 3.7. *Если $f(x, t)$ есть функция класса Q и выполняется условие (1.4), то для решения $u_2(x, t)$ обобщённой начально-граничной задачи (1.9)–(1.11) справедлива формула*

$$u_2(x, t) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \int_{\eta\left(\frac{t-\tau+\omega_2 x}{\omega_2-\omega_1}\right)}^{\eta\left(\frac{t-\tau+\omega_1 x}{\omega_2-\omega_1}\right)} f(\xi, \tau) d\xi, \quad (3.28)$$

где

$$\eta(s) = \frac{\{s\}}{a} \chi(a - \{s\}) + \frac{1 - \{s\}}{1 - a} \chi(\{s\} - a) \quad (3.29)$$

является непрерывной кусочно-линейной функцией при $s \in (-\infty, +\infty)$ и удовлетворяет неравенству

$$0 \leq \eta(s) \leq 1. \quad (3.30)$$

Доказательство. Положим для краткости

$$\alpha \equiv \alpha(x, t - \tau) := \frac{t - \tau + \omega_2 x}{\omega_2 - \omega_1}, \quad \beta \equiv \beta(x, t - \tau) := \frac{t - \tau + \omega_1 x}{\omega_2 - \omega_1}. \quad (3.31)$$

Тогда выражение под интегралом (3.26) будет иметь вид

$$\Phi(\alpha, \beta, \tau) = F^*({\alpha}), \tau - F^*({\beta}), \tau - F_*({\alpha}), \tau - F_*({\beta}), \tau.$$

Найдём для функции $\Phi(\alpha, \beta, \tau)$ явное выражение через функцию $f(x, t)$. Из формул (1.13) следует, что для функций со звёздочками возможны следующие четыре случая:

1) $\{\alpha\}, \{\beta\} \in [0, a)$; в этом случае, учитывая обозначение (1.15), будем иметь

$$\Phi(\alpha, \beta, \tau) = 0 - 0 + F\left(\frac{\{\alpha\}}{a}, \tau\right) - F\left(\frac{\{\beta\}}{a}, \tau\right) = \int_0^{\frac{\{\alpha\}}{a}} f(\xi, \tau) d\xi - \int_0^{\frac{\{\beta\}}{a}} f(\xi, \tau) d\xi = \int_{\frac{\{\beta\}}{a}}^{\frac{\{\alpha\}}{a}} f(\xi, \tau) d\xi;$$

¹В данном случае это будет уже обычная сумма, так как если $f(x) \in W_1^1[0, 1]$, то ряд (3.1) сходится, в частности, для п.в. $x \in [0, 1]$ к функции $f(x)$.

2) $\{\alpha\} \in [0, a), \{\beta\} \in [a, 1]$; в этом случае аналогично предыдущему будем иметь

$$\Phi(\alpha, \beta, \tau) = 0 - F\left(\frac{1 - \{\beta\}}{1 - a}, \tau\right) + F\left(\frac{\{\alpha\}}{a}, \tau\right) - 0 = - \int_0^{\frac{1 - \{\beta\}}{1 - a}} f(\xi, \tau) d\xi + \int_0^{\frac{\{\alpha\}}{a}} f(\xi, \tau) d\xi = \int_{\frac{1 - \{\beta\}}{1 - a}}^{\frac{\{\alpha\}}{a}} f(\xi, \tau) d\xi;$$

3) $\{\beta\} \in [0, a), \{\alpha\} \in [a, 1]$; в этом случае аналогично предыдущему будем иметь

$$\Phi(\alpha, \beta, \tau) = F\left(\frac{1 - \{\alpha\}}{1 - a}, \tau\right) - 0 + 0 - F\left(\frac{\{\beta\}}{a}, \tau\right) = \int_0^{\frac{1 - \{\alpha\}}{1 - a}} f(\xi, \tau) d\xi - \int_0^{\frac{\{\beta\}}{a}} f(\xi, \tau) d\xi = \int_{\frac{\{\beta\}}{a}}^{\frac{1 - \{\alpha\}}{1 - a}} f(\xi, \tau) d\xi;$$

4) $\{\alpha\}, \{\beta\} \in [a, 1]$; в этом случае аналогично предыдущему будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi(\alpha, \beta, \tau) &= F\left(\frac{1 - \{\alpha\}}{1 - a}, \tau\right) - F\left(\frac{1 - \{\beta\}}{1 - a}, \tau\right) + 0 - 0 = \\ &= \int_0^{\frac{1 - \{\alpha\}}{1 - a}} f(\xi, \tau) d\xi - \int_0^{\frac{1 - \{\beta\}}{1 - a}} f(\xi, \tau) d\xi = \int_{\frac{1 - \{\beta\}}{1 - a}}^{\frac{1 - \{\alpha\}}{1 - a}} f(\xi, \tau) d\xi. \end{aligned}$$

Учитывая теперь определение (3.29) функции $\eta(s)$ и найденные в пунктах 1)–4) формулы для функции $\Phi(\alpha, \beta, \tau)$ в разных случаях, получим

$$\Phi(\alpha, \beta, \tau) = \int_{\eta(\beta)}^{\eta(\alpha)} f(\xi, \tau) d\xi.$$

Подставляя найденное выражение для $\Phi(\alpha, \beta, \tau)$ в формулу (3.26) для решения $u_2(x, t)$, получим формулу (3.28).

Докажем, что функция $\eta(s)$ непрерывна при $s \in (-\infty, +\infty)$.

Функция $\eta(s)$ кусочно-линейная. Разрывы могут быть только в точках $x = n$ и $a + n$, $n \in \mathbb{Z}$. Покажем, что в этих точках односторонние пределы совпадают:

$$\begin{aligned} \eta(n + 0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(\frac{\{n + \varepsilon\}}{a} \chi(a - \{n + \varepsilon\}) + \frac{1 - \{n + \varepsilon\}}{1 - a} \chi(\{n + \varepsilon\} - a) \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(\frac{\varepsilon}{a} \chi(a - \varepsilon) + \frac{1 - \varepsilon}{1 - a} \chi(\varepsilon - a) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \frac{\varepsilon}{a} = 0; \\ \eta(n - 0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(\frac{\{n - \varepsilon\}}{a} \chi(a - \{n - \varepsilon\}) + \frac{1 - \{n - \varepsilon\}}{1 - a} \chi(\{n - \varepsilon\} - a) \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(\frac{1 - \varepsilon}{a} \chi(a - (1 - \varepsilon)) + \frac{1 - (1 - \varepsilon)}{1 - a} \chi((1 - \varepsilon) - a) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \frac{\varepsilon}{1 - a} = 0, \end{aligned}$$

таким образом, $\eta(n + 0) = \eta(n - 0)$;

$$\begin{aligned} \eta(a + n + 0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(\frac{\{a + n + \varepsilon\}}{a} \chi(a - \{a + n + \varepsilon\}) + \frac{1 - \{a + n + \varepsilon\}}{1 - a} \chi(\{a + n + \varepsilon\} - a) \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(\frac{a + \varepsilon}{a} \chi(a - (a + \varepsilon)) + \frac{1 - (a + \varepsilon)}{1 - a} \chi((a + \varepsilon) - a) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \frac{1 - a - \varepsilon}{1 - a} = 1; \\ \eta(a + n - 0) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(\frac{\{a + n - \varepsilon\}}{a} \chi(a - \{a + n - \varepsilon\}) + \frac{1 - \{a + n - \varepsilon\}}{1 - a} \chi(\{a + n - \varepsilon\} - a) \right) = \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \left(\frac{a - \varepsilon}{a} \chi(a - (a - \varepsilon)) + \frac{1 - (a - \varepsilon)}{1 - a} \chi((a - \varepsilon) - a) \right) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \frac{a - \varepsilon}{a} = 1, \end{aligned}$$

таким образом, $\eta(a + n + 0) = \eta(a + n - 0)$.

Тем самым установлено, что $\eta(s)$ есть непрерывная кусочно-линейная функция на всей вещественной оси.

Осталось доказать неравенства (3.30). Если $0 \leq \{s\} < a$, то из (3.29) получим

$$0 \leq \eta(s) < 1,$$

а если $a \leq \{s\} < 1$, то

$$0 < \eta(s) \leq 1.$$

Тем самым неравенства (3.30) установлены и лемма 3.7 полностью доказана. \square

Теперь можно завершить доказательство леммы 3.6. Для этого воспользуемся представлением (3.28) для решения $u_2(x, t)$, предположив, что $f(x, t)$ есть функция класса Q , и оценкой (3.30). Получим для $\forall(x, t) \in Q_T$:

$$|u_2(x, t)| \leq \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha)}^{\eta(\beta)} |f(\xi, \tau)| d\xi \leq \frac{1}{2\omega_*} \int_0^T d\tau \int_0^1 |f(\xi, \tau)| d\xi = \frac{1}{2\omega_*} \|f(x, t)\|_{L_1(Q_T)}, \quad (3.32)$$

а отсюда сразу следует неравенство (3.27). Лемма 3.6 доказана. \square

А, тем самым, и теорема 1.2 полностью доказана.

На самом деле справедлив более сильный результат, а именно, имеет место следующая теорема.

Теорема 3.3. Пусть $f(x, t)$ есть функция класса Q и выполняется условие (1.4). Тогда решением обобщённой начально-граничной задачи (1.10)–(1.12) является функция $u_2(x, t)$, непрерывная в Q_T , определяемая формулами (1.16) или (3.28), и для неё имеет место оценка

$$\|u_2(x, t)\|_{C(Q_T)} \leq \frac{1}{2\omega_*} \|f(x, t)\|_{L_1(Q_T)}. \quad (3.33)$$

Доказательство. Непрерывность функции $u_2(x, t)$ следует из формулы (3.28), непрерывности функции $\eta(s)$ на всей вещественной оси и функций $\alpha = \alpha(x, t - \tau)$, $\beta = \beta(x, t - \tau)$ в области $(x, t, \tau) \in [0, 1] \times [0, +\infty) \times [0, +\infty)$ как интегралов от суммируемой функции с непрерывными пределами интегрирования.

Оценка (3.33) непосредственно вытекает из оценки (3.32). Тем самым, теорема 3.3 доказана. \square

Для сравнения целесообразно привести следующий результат из [13] о формуле для классического решения неоднородной задачи (1.10)–(1.12).

Теорема 3.4. Пусть выполняется условие (1.4). Для того, чтобы задача (1.10)–(1.12) имела единственное классическое решение $u_2(x, t)$, достаточно, чтобы функция $f(x, t)$ была абсолютно непрерывна по $t > 0$ при п.в. $x \in [0, 1]$ и $f'_t(x, t)$ была функцией класса Q . При этом решение $u_2(x, t)$ определяется формулой (1.16) (или (3.26)).

Следовательно, и классическое, и обобщённое решения выражаются одной и той же формулой. Этот факт подтверждает правильность изложенного подхода получения формулы (1.16) для обобщённого решения $u_2(x, t)$ задачи (1.10)–(1.12).

4. ПРОСТЕЙШАЯ НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНАЯ ЗАДАЧА С НЕНУЛЕВЫМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Вначале вернёмся к исходной обобщённой задаче (1.1)–(1.3). В соответствии с формулой (1.6), теоремой 1.1, леммой 3.7 и обозначениями (3.31) имеет место следующая теорема.

Теорема 4.1. Если $\varphi(x) \in L_1[0, 1]$, $f(x, t)$ есть функция класса Q и выполняется условие (1.4), то для решения $u(x, t)$ обобщённой начально-граничной задачи (1.1)–(1.3) справедлива формула

$$u(x, t) = u_1(x, t) + \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} f(\xi, \tau) d\xi, \quad (4.1)$$

где функция $u_1(x, t)$ определяется формулой (1.14).

Теперь рассмотрим начально-граничную задачу (1.18)–(1.20). В этой задаче будем рассматривать правую часть $q(x)u(x, t)$ в уравнении (1.18) как возмущение в задаче (1.1)–(1.3). Тогда по теореме 4.1 мы от задачи (1.18)–(1.20) приходим к интегральному уравнению:

$$u(x, t) = u_1(x, t) + \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi) u(\xi, \tau) d\xi. \quad (4.2)$$

Вполне естественно назвать *обобщённым решением* обобщённой начально-граничной задачи (1.18)–(1.20) решение интегрального уравнения (4.2).

Решим уравнение (4.2). Решать будем методом последовательных подстановок.

Введём оператор, действующий из $C(Q_T)$ в $C(Q_T)$ по формуле:

$$Bf = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi) f(\xi, \tau) d\xi.$$

Лемма 4.1. *Оператор B — линейный и ограниченный в $C(Q_T)$, причём*

$$\|Bf\|_{C(Q_T)} \leq \frac{T}{2\omega_*} \|q\|_{L_1[0,1]} \|f(x, t)\|_{C(Q_T)}. \quad (4.3)$$

Доказательство. Линейность оператора B очевидна. А ограниченность оператора B и оценка (4.3) следует из неравенства, получаемого аналогично неравенству (3.32):

$$\begin{aligned} |(Bf)(x, t)| &\leq \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \left| \int_0^T d\tau \int_0^1 |q(\xi)| |f(\xi, \tau)| d\tau \right| \leq \\ &\leq \frac{1}{2\omega_*} \max_{(x,t) \in Q_T} |f(x, t)| \int_0^T d\tau \int_0^1 |q(\xi)| d\xi = \frac{T}{2\omega_*} \|q\|_{L_1[0,1]} \|f(x, t)\|_{C(Q_T)}. \end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Образует ряд

$$A_1(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n(x, t),$$

где $a_n = Ba_{n-1}$ ($= B^n a_0 = B^{n-1} a_1$) ($n \geq 1$) и $a_0(x, t) = u_1(x, t)$.

Лемма 4.2. *Функции $a_n(x, t)$ непрерывны в Q_T при $n \geq 1$.*

Доказательство. На основании формулы (3.20) и определения $a_1(x, t)$ имеем

$$\begin{aligned} a_1(x, t) &= (Ba_0)(x, t) = (Bu_1)(x, t) = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi) u_1(\xi, \tau) d\xi = \\ &= \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} \int_0^t d\tau \int_{\eta(\alpha(x, t-\tau))}^{\eta(\beta(x, t-\tau))} q(\xi) \left(\widehat{\varphi}(\{\alpha(\xi, \tau)\}) - \widehat{\varphi}(\{\beta(\xi, \tau)\}) \right) d\xi = \frac{1}{(\omega_2 - \omega_1)^2} (J_1(x, t) - J_2(x, t)). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Рассмотрим, например, $J_1(x, t)$. Для $J_2(x, t)$ рассуждения аналогичны. Так как $q(x), \widehat{\varphi}(x) \in L_1[0, 1]$, $\eta(s)$ — непрерывная кусочно-линейная функция на всей оси, $\{\alpha(x, t)\}$ и $\{\beta(x, t)\}$ — кусочно-линейные функции в Q , то по теореме Фубини [10, с. 328–336] можно поменять порядок интегрирования в $J_1(x, t)$. Затем делаем замену $\tau_1 = \alpha(\xi, \tau)$. В результате получим интеграл

по ограниченному подмножеству, мера которого непрерывно зависит от переменных x и t , от функции класса Q . Тогда непрерывность $J_1(x, t)$ есть простое следствие абсолютной непрерывности интеграла Лебега по множеству интегрирования [3, с. 301, теорема 5].

Таким образом, функции $J_1(x, t)$ и $J_2(x, t)$ непрерывны в Q_T , а следовательно, в силу (4.4) и $a_1(x, t)$ непрерывна в Q_T .

Непрерывность остальных $a_n(x, t)$ в Q_T при $n \geq 2$ вытекает из непрерывности $a_1(x, t)$, формулы $a_n = B a_{n-1}$ и определения оператора B . Тем самым, лемма доказана. \square

Лемма 4.3. *Справедливы следующие оценки при $n \geq 1$:*

$$|a_n(x, t)| \leq M_1 M_2^{n-1} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!}, \quad (4.5)$$

$$\|a_n(x, t)\|_{C(Q_T)} \leq M_1 M_2^{n-1} \frac{T^{n-1}}{(n-1)!}, \quad (4.6)$$

где $M_1 = \|a_1(x, t)\|_{C(Q_T)}$, $M_2 = \|q\|_{L_1[0,1]}/(2\omega_*)$. Кроме того, $M_1 \leq C_T \|\varphi\|_{L_1[0,1]}$ и постоянная C_T не зависит от $\varphi(x)$.

Доказательство. Положим $f_n(x, t) = q(x)a_n(x, t)$. Так как $q(x) \in L_1[0, 1]$ и $a_n(x, t) \in C(Q_T)$ при $n \geq 1$, то и $f_n(x, t) \in L_1(Q_T)$.

Доказательство леммы проведём, используя принцип математической индукции. При $n = 1$ оценка (4.5) справедлива.

Предположим, что оценка (4.5) выполняется при некотором $n \in \mathbb{N}$. Докажем, что она выполняется и для $n + 1$. Имеем

$$\begin{aligned} |a_{n+1}(x, t)| &\leq \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^t d\tau \left| \int_{\eta(\alpha)}^{\eta(\beta)} |f_n(\xi, \tau)| d\xi \right| \leq \frac{1}{2\omega_*} \int_0^t d\tau \int_0^1 |f_n(\xi, \tau)| d\xi = \\ &= \frac{1}{2\omega_*} \int_0^t d\tau \int_0^1 |q(\xi)| |a_n(\xi, \tau)| d\xi \leq \frac{1}{2\omega_*} \int_0^t d\tau \int_0^1 |q(\xi)| M_1 (M_2)^{n-1} \frac{\tau^{n-1}}{(n-1)!} d\xi = \\ &= M_1 \frac{1}{2\omega_*} \|q\|_{L_1[0,1]} M_2^{n-1} \frac{t^n}{n!} = M_1 M_2^n \frac{t^n}{n!}, \end{aligned}$$

а это есть оценка (4.5) для $n + 1$.

Тем самым, оценка (4.5) установлена для всех $n \geq 1$. Оценка (4.6) непосредственно вытекает из оценки (4.5), если учесть, что $t \leq T$.

Оценим M_1 . Аналогично предыдущему имеем

$$\begin{aligned} |a_1(x, t)| &\leq \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^T d\tau \int_0^1 |f_0(\xi, \tau)| d\xi = \\ &= \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^T d\tau \int_0^1 |q(\xi)| |u_1(\xi, \tau)| d\xi = \frac{1}{\omega_2 - \omega_1} \int_0^1 |q(\xi)| d\xi \int_0^T |u_1(\xi, \tau)| d\tau. \quad (4.7) \end{aligned}$$

Далее проводим рассуждения, которые полностью повторяют рассуждения при доказательстве леммы 3.4, с единственным отличием, что в (4.7), в отличие от (3.15), под интегралом по переменной ξ присутствует функция $|q(\xi)|$. Учитывая это, без особых проблем получим оценку

$$\|a_1(x, t)\|_{C(Q_T)} \leq C_T \|\varphi(x)\|_{L_1[0,1]},$$

где

$$C_T = \left(\frac{\omega^*}{\omega_*} \right)^2 (T + 4\omega_*) \|q(x)\|_{L_1[0,1]}.$$

Таким образом, лемма 4.3 доказана. \square

Из этой леммы вытекает, что ряд $A_1(x, t)$ сходится абсолютно и равномерно в Q_T .

Теорема 4.2. Уравнение (4.2) имеет единственное решение

$$u(x, t) = A(x, t), \quad (4.8)$$

где

$$A(x, t) = a_0(x, t) + A_1(x, t),$$

получаемое по методу последовательных подстановок.

Доказательство. Повторяем рассуждения из [23] при доказательстве аналогичной теоремы. Положим $v(x, t) = u(x, t) - a_0(x, t)$. Тогда из (4.2) получим для $v(x, t)$ интегральное уравнение

$$v(x, t) = a_1(x, t) + Bv(\cdot, t). \quad (4.9)$$

Так как $a_1(x, t) \in C(Q_T)$ на основании леммы 4.2, то уравнение (4.9) рассматриваем в $C(Q_T)$. По методу последовательных подстановок из (4.9) получаем ряд $A_1(x, t)$. Поскольку B на основании леммы 4.1 — линейный и ограниченный оператор в $C(Q_T)$ и $(BA_1)(x, t) = \sum_{n=2}^{\infty} a_n(x, t)$, то $A_1(x, t)$ есть решение (4.9).

Докажем, что уравнение (4.9) имеет единственное решение. Допустим, что кроме $A_1(x, t)$ есть ещё другое решение $w(x, t)$ этого уравнения. Тогда $z_1(x, t) = A_1(x, t) - w(x, t)$ есть решение уравнения $z(x, t) = (Bz)(x, t)$, а значит, и $z(x, t) = (B^{n-1}z)(x, t)$ при любом натуральном n . Заметим, что оценка (4.6) в лемме 4.2 остается верной, если в качестве $a_1(x, t)$ взять любую функцию из $C(Q_T)$. Возьмем в качестве такой функции $z(x, t)$. Тогда из оценки (4.6) получим

$$\|z(x, t)\|_{C(Q_T)} = \|(B^{n-1}z)(x, t)\|_{C(Q_T)} \leq \|z(x, t)\|_{C(Q_T)} M_2^{n-1} \frac{T^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Отсюда в силу произвольности n получаем $z(x, t) = 0$, следовательно, единственным решением уравнения (4.9) является ряд $A_1(x, t)$, а уравнения (4.2) — ряд $A(x, t)$. Теорема доказана. \square

Нетрудно установить аналогичными рассуждениями, что для классического решения¹ задачи (1.18)–(1.20) справедлива следующая теорема.

Теорема 4.3. Если выполняется условие (1.4), функции $\varphi(x), \varphi'(x)$ абсолютно непрерывны, $\varphi''(x) \in L_1[0, 1]$ и $\varphi(0) = \varphi(1) = 0$, то сумма ряда $A(x, t)$ представляет собой классическое решение $u(x, t)$ задачи (1.18)–(1.20) при условии, что $u_{tt}(x, t)$ — функция класса Q .

Таким образом, классическое решение задачи (1.18)–(1.20) и её обобщённое решение, даваемое теоремой 4.2, выражаются одной и той же формулой (4.8).

Справедливо также следующее утверждение.

Теорема 4.4. Если $\varphi(x) \in L_1[0, 1]$, а функция $\varphi_h(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 4.3 и $\|\varphi - \varphi_h\|_{L_1[0, 1]} \rightarrow 0$ при $h \rightarrow 0$, то соответствующее функции $\varphi_h(x)$ классическое решение $u_h(x, t)$ задачи (1.18)–(1.20) сходится при $h \rightarrow 0$ по норме $L_1(Q_T)$ к $A(x, t)$.

Доказательство. Утверждение теоремы без особых трудностей следует из линейности $A(x, t)$ по $\varphi(x)$ и леммы 4.3. \square

Таким образом, ряд $A(x, t)$ в случае $\varphi(x) \in L_1[0, 1]$ играет роль обобщённого решения задачи (1.18)–(1.20), если понимать его как предел классических решений. Иногда такое обобщённое решения называют *секвенциальным* (см., например, [4]). Таким образом, и обобщённое решение, определенное как решение интегрального уравнения (4.2), и секвенциальное обобщённое решение даются одной и той же формулой (4.8).

¹Определение классического решения для этой задачи в случае $q(x) \in L_1[0, 1]$ совершенно аналогично определению классического решения для задачи (1.1)–(1.3).

5. КРАТКАЯ ИСТОРИЯ ВОПРОСА

Восстановить полную историю исследований начально-граничной задачи (1.1)–(1.3) довольно трудно, так как очень много математиков рассматривали такую задачу на протяжении долгого времени под разными углами зрения и использовали разные методы.

Тем не менее, для полноты картины приведём некоторые исторические факты, которые в какой-то мере близки к обсуждаемым проблемам. Некоторые работы и авторы уже цитировались в процессе изложения.

Уравнение (1.1) является уравнением поперечных колебаний продольно движущейся конечной струны. Такие уравнения актуальны для производственных процессов, связанных с продольным движением материалов (например, бумажного полотна). Исследование таких колебаний началось около 60 лет назад в работах [25–27].

Излагаемые в настоящей статье результаты получены с использованием двух подходов к решению начально-граничных задач для волнового уравнения в полуполосе плоскости, предложенных А. П. Хромовым.

Первый подход, который можно назвать резольвентным, был применён впервые к решению начально-граничных задач для волнового уравнения в [1] и получил развитие в статьях [2, 16].

В дальнейшем А. П. Хромов дополнил резольвентный метод подходом, связанным с расходящимися рядами формальных решений. Расходящиеся ряды рассматриваются в понимании Л. Эйлера [15, 24], основоположника суммирования расходящихся рядов. Такой подход был первоначально рассмотрен в [17], а затем получил развитие в работах [18–20]. Иногда такой подход называют аксиоматическим. Наиболее просто подход А. П. Хромова описан в краткой статье [22], которая уже цитировалась. Развернутое изложение этой статьи, как уже было отмечено, дано в [23].

Историю формирования и развития этого метода, а также полученные с помощью этого метода результаты можно найти в указанных и других работах А. П. Хромова (например, в [21]). Аналогичный подход к решению смешанных задач в полуполосе плоскости для телеграфного уравнения при других краевых условиях использовал И. С. Ломов. Одними из последних его работ являются статьи [4, 5]. Другой подход, отличный от используемого А. П. Хромовым и И. С. Ломовым и при других постановках начально-граничных задач, получил развитие в работах Ф. Е. Ломовцева. Одна из последних его работ есть статья [6]. Рассматриваются и другие задачи для уравнения (1.1). Например, задача гашения поперечных колебаний продольно движущейся струны исследовалась в статье [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Резольвентный подход в методе Фурье // Докл. РАН. — 2014. — 458, № 2. — С. 138–140.
2. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Резольвентный подход для волнового уравнения // Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2015. — 55, № 2. — С. 229–241.
3. Колмогоров А. Н., Фомин С. В. Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1976.
4. Ломов И. С. Построение обобщённого решения смешанной задачи для телеграфного уравнения: секвенциальный и аксиоматический подходы // Дифф. уравн. — 2022. — 58, № 11. — С. 1471–1483.
5. Ломов И. С. Новый метод построения обобщённого решения смешанной задачи для телеграфного уравнения // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 15. Вычисл. мат. и киберн. — 2022. — № 3. — С. 33–40.
6. Ломовцев Ф. Е. Глобальная теорема корректности первой смешанной задачи для общего телеграфного уравнения с переменными коэффициентами на отрезке // Пробл. физ., мат. и техн. — 2022. — № 1. — С. 62–73.
7. Маркушевич А. И. Теория аналитических функций. Том 1. Начала теории. — М.: Наука, 1967.
8. Муравей Л. А., Петров В. М., Романенков А. М. О задаче гашения поперечных колебаний продольно движущейся струны // Вестн. Мордов. ун-та. — 2018. — 28, № 4. — С. 472–485.
9. Наймарк М. А. Линейные дифференциальные операторы. — М.: Наука, 1969.
10. Натансон И. П. Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974.
11. Рыжлов В. С. Разрешимость смешанной задачи для гиперболического уравнения с распадающимися краевыми условиями при отсутствии полноты собственных функций // Итоги науки и техн. Соврем. мат. и ее прил. — 2022. — 204. — С. 124–134.

12. Рыхлов В. С. Решение начально-граничной задачи для уравнения гиперболического типа со смешанной производной// В сб.: «Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й межд. Саратовской зимней школы». — Саратов: Саратов. унив., 2022. — С. 252–255.
13. Рыхлов В. С. О решении начально-граничной задачи для гиперболического уравнения со смешанной производной// В сб.: «Современные методы теории краевых задач: материалы межд. конф. “Понтрягинские чтения — XXXIII”». — Воронеж: ВГУ, 2022. — С. 237–240.
14. Толстов Г. П. О второй смешанной производной// Мат. сб. — 1949. — 24, № 1. — С. 27–51.
15. Харди Г. Расходящиеся ряды. — М.: Иностр. лит., 1951.
16. Хромов А. П. Поведение формального решения смешанной задачи для волнового уравнения// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2016. — 56, № 2. — С. 239–251.
17. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и функциональные уравнения, связанные с аналогами геометрической прогрессии// В сб.: «Современные методы теории краевых задач: материалы межд. конф. “Понтрягинские чтения — XXX”». — Воронеж: ВГУ, 2019. — С. 291–300.
18. Хромов А. П. О классическом решении смешанной задачи для однородного волнового уравнения с закрепленными концами и нулевой начальной скоростью// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2019. — 19, № 3. — С. 280–288.
19. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и смешанная задача для волнового уравнения// В сб.: «Математика. Механика. Вып. 21». — Саратов: Саратов. унив., 2019. — С. 62–67.
20. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и метод Фурье для волнового уравнения// В сб.: «Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 20-й межд. Саратовской зимней школы». — Саратов: Научная книга, 2020. — С. 433–439.
21. Хромов А. П., Корнев В. В. Расходящиеся ряды в методе Фурье для волнового уравнения// Тр. Инст. Мат. Мех. УрО РАН. — 2021. — 27, № 4. — С. 215–238.
22. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача для волнового уравнения// В сб.: «Современные проблемы теории функций и их приложения: материалы 21-й межд. Саратовской зимней школы». — Саратов: Саратов. унив., 2022. — С. 319–324.
23. Хромов А. П. Расходящиеся ряды и обобщённая смешанная задача для волнового уравнения простейшего вида// Изв. Саратов. ун-та. Нов. сер. Сер. Мат. Мех. Инф. — 2022. — 22, № 3. — С. 322–331.
24. Эйлера Л. Дифференциальное исчисление. — М.: Л.: ГИТТЛ, 1949.
25. Archibald F. R., Emslie A. G. The vibration of a string having a uniform motion along its length// J. Appl. Mech. — 1958. — 25, № 1. — С. 347–348.
26. Mahalingam S. Transverse vibrations of power transmission chains// British J. Appl. Phys. — 1957. — 8, № 4. — С. 145–148.
27. Sack R. A. Transverse oscillations in traveling strings// British J. Appl. Phys. — 1954. — 5, № 6. — С. 224–226.

В. С. Рыхлов

Саратовский государственный университет имени Н. Г. Чернышевского, Саратов, Россия

E-mail: RykhlovVS@yandex.ru

UDC 517.958, 517.956.32

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-342-363

EDN: URKODE

Generalized initial-boundary problem for the wave equation with mixed derivative

V. S. Rykhlov

Saratov State University, Saratov, Russia

Abstract. We study an initial-boundary problem for a second-order inhomogeneous hyperbolic equation in a half-strip of the plane containing a mixed derivative with constant coefficients and zero or nonzero potential. This equation is the equation of transverse oscillations of a moving finite string. The case of zero initial velocity and fixed ends (Dirichlet conditions) is considered. It is assumed that the roots of the characteristic equation are simple and lie on the real axis on opposite sides of the origin. The classical solution of the initial-boundary problem is determined. In the case of zero potential, a uniqueness theorem for the classical solution is formulated and a formula for the solution is given in the form of a series consisting of contour integrals containing the initial data of the problem. Based on this formula, the concepts of a generalized initial-boundary value problem and a generalized solution are introduced. The main theorems on finite formulas for the generalized solution in the case of homogeneous and inhomogeneous problems are formulated. To prove these theorems, we apply an approach that uses the theory of divergent series in the sense of Euler, proposed by A. P. Khromov (axiomatic approach). Using this approach, on the basis of formulas for solutions in the form of a series, the formulated main theorems are proved. Further, as an application of the main theorems obtained, we prove a theorem on the existence and uniqueness of a generalized solution of the initial-boundary problem in the presence of a nonzero summable potential and give a formula for the solution in the form of an exponentially convergent series.

Keywords: initial boundary value problem, hyperbolic equation, wave equation, partial differential equation, half-strip, mixed derivative in the equation, potential of the general form, generalized solution.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare that no financial support was received.

For citation: V. S. Rykhlov, “Generalized initial-boundary problem for the wave equation with mixed derivative,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. 69, No. 2, 342–363. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-342-363>

REFERENCES

1. M. Sh. Burlutskaya and A. P. Khromov, “Rezol’ventnyy podkhod v metode Fur’e” [Resolvent approach in the Fourier method], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2014, **458**, No. 2, 138–140 (in Russian).
2. M. Sh. Burlutskaya and A. P. Khromov, “Rezol’ventnyy podkhod dlya volnovogo uravneniya” [Resolvent approach for the wave equation], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2015, **55**, No. 2, 229–241 (in Russian).
3. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elementy teorii funktsiy i funktsional’nogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
4. I. S. Lomov, “Postroenie obobshchennogo resheniya smeshannoy zadachi dlya telegrafnogo uravneniya: sekventzial’nyy i aksiomaticheskyy podkhody” [Construction of a generalized solution of a mixed problem for a telegraph equation: Sequential and axiomatic approaches], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2022, **58**, No. 11, 1471–1483 (in Russian).



5. I. S. Lomov, “Novyy metod postroeniya obobshchennogo resheniya smeshannoy zadachi dlya telegrafnogo uravneniya” [A new method for constructing a generalized solution of the mixed problem for the telegraph equation], *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 15. Vychisl. mat. i kibern.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 15. Comput. Math. Cybern.], 2022, No. 3, 33–40 (in Russian).
6. F. E. Lomovtsev, “Global’naya teorema korrektnosti pervoy smeshannoy zadachi dlya obshchego telegrafnogo uravneniya s peremennymi koeffitsientami na otrezke” [Global well-posedness theorem for the first mixed problem for the general telegraph equation with variable coefficients on a segment], *Probl. fiz., mat. i tekhn.* [Probl. Phys. Math. Tech.], 2022, No. 1, 62–73 (in Russian).
7. A. I. Markushevich, *Teoriya analiticheskikh funktsiy. Tom 1. Nachala teorii* [Theory of Analytic Functions. Vol. 1. Basic Theory], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
8. L. A. Muravey, V. M. Petrov, and A. M. Romanenkov, “O zadache gasheniya poperechnykh kolebaniy prodol’no dvizhushcheyasya struny” [On the problem of damping transverse vibrations of a longitudinally moving string], *Vestn. Mordov. un-ta* [Bull. Mordov. Univ.], 2018, **28**, No. 4, 472–485 (in Russian).
9. M. A. Naimark, *Lineynye differentsial’nye operatory* [Linear Differential Operators], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
10. I. P. Natanson, *Teoriya funktsiy veshchestvennoy peremennoy* [Theory of Functions of a Real Variable], Nauka, Moscow, 1974 (Russian translation).
11. V. S. Rykhlov, “Razreshimost’ smeshannoy zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya s raspadayushchimi-sya kraevymi usloviyami pri otsutstvii polnoty sobstvennykh funktsiy” [Solvability of a mixed problem for a hyperbolic equation with splitting boundary conditions in the absence of completeness of eigenfunctions], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. mat. i ee pril.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Math. Appl.], 2022, **204**, 124–134 (in Russian).
12. V. S. Rykhlov, “Reshenie nachal’no-granichnoy zadachi dlya uravneniya giperbolicheskogo tipa so smeshannoy proizvodnoy” [Solution of an initial-boundary value problem for a hyperbolic-type equation with a mixed derivative], In: *Sovremennyye problemy teorii funktsiy i ikh prilozheniya: materialy 21-y mezhd. Saratovskoy zimney shkoly* [Modern problems of the Theory of Functions and Their Applications: Proc. 21st Int. Saratov Winter School], Saratov. univ., Saratov, 2022, pp. 252–255 (in Russian).
13. V. S. Rykhlov, “O reshenii nachal’no-granichnoy zadachi dlya giperbolicheskogo uravneniya so smeshannoy proizvodnoy” [On the solution of the initial-boundary value problem for a hyperbolic equation with a mixed derivative], In: *Sovremennyye metody teorii kraevykh zadach: materialy mezhd. konf. “Pontryaginskije chteniya – XXXIII”* [Modern Methods of the Theory of Boundary-Value Problems: Proc. Int. Conf. “Pontryagin Readings – XXXIII”], VGU, Voronezh, 2022, pp. 237–240 (in Russian).
14. G. P. Tolstov, “O vtoroy smeshannoy proizvodnoy” [On the second mixed derivative], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1949, **24**, No. 1, 27–51 (in Russian).
15. G. Hardy, *Raskhodyashchiesya ryady* [Divergent Series], Inostr. lit., Moscow, 1951 (Russian translation).
16. A. P. Khromov, “Povedenie formal’nogo resheniya smeshannoy zadachi dlya volnovogo uravneniya” [Behavior of the formal solution of the mixed problem for the wave equation], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2016, **56**, No. 2, 239–251 (in Russian).
17. A. P. Khromov, “Raskhodyashchiesya ryady i funktsional’nye uravneniya, svyazannye s analogami geometricheskoy progressii” [Divergent series and functional equations related to analogues of geometric progression], In: *Sovremennyye metody teorii kraevykh zadach: materialy mezhd. konf. “Pontryaginskije chteniya – XXX”* [Modern Methods of the Theory of Boundary-Value Problems: Proc. Int. Conf. “Pontryagin Readings – XXX”], VGU, Voronezh, 2019, pp. 291–300 (in Russian).
18. A. P. Khromov, “O klassicheskom reshenii smeshannoy zadachi dlya odnorodnogo volnovogo uravneniya s zakreplennymi kontsami i nulevoy nachal’noy skorost’yu” [On the classical solution of a mixed problem for a homogeneous wave equation with fixed ends and zero initial velocity], *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mat. Mekh. Inf.* [Bull. Saratov Univ. New Ser. Ser. Math. Mech. Inf.], 2019, **19**, No. 3, 280–288 (in Russian).
19. A. P. Khromov, “Raskhodyashchiesya ryady i smeshannaya zadacha dlya volnovogo uravneniya” [Divergent series and the mixed problem for the wave equation], In: *Matematika. Mekhanika. Vyp. 21* [Math. Mech. Iss. 21], Saratov. univ., Saratov, 2019, pp. 62–67 (in Russian).
20. A. P. Khromov, “Raskhodyashchiesya ryady i metod Fur’e dlya volnovogo uravneniya” [Divergent series and the Fourier method for the wave equation], In: *Sovremennyye problemy teorii funktsiy i ikh prilozheniya: materialy 20-y mezhd. Saratovskoy zimney shkoly* [Modern Problems of the Theory of Functions and Their Applications: Proc. 20th Int. Saratov Winter School], Nauchnaya kniga, Saratov, 2020, pp. 433–439 (in Russian).

21. A. P. Khromov and V. V. Kornev, “Raskhodyashchiesya ryady v metode Fur’e dlya volnovogo uravneniya” [Divergent series in the Fourier method for the wave equation], *Tr. Inst. Mat. Mekh. UrO RAN* [Proc. Inst. Math. Mech. Ural Branch of the RAS], 2021, **27**, No. 4, 215–238 (in Russian).
22. A. P. Khromov, “Raskhodyashchiesya ryady i obobshchennaya smeshannaya zadacha dlya volnovogo uravneniya” [Divergent series and a generalized mixed problem for the wave equation], In: *Sovremennye problemy teorii funktsiy i ikh prilozheniya: materialy 21-y mezhd. Saratovskoy zimney shkoly* [Modern Problems of the Theory of Functions and Their Applications: Proc. 21st Int. Saratov Winter School], Saratov. univ., Saratov, 2022, pp. 319–324 (in Russian).
23. A. P. Khromov, “Raskhodyashchiesya ryady i obobshchennaya smeshannaya zadacha dlya volnovogo uravneniya prosteyshego vida” [Divergent series and a generalized mixed problem for the wave equation of the simplest form], *Izv. Sarat. un-ta. Nov. ser. Ser. Mat. Mekh. Inf.* [Bull. Saratov Univ. New Ser. Ser. Math. Mech. Inf.], 2022, **22**, No. 3, 322–331 (in Russian).
24. L. Euler, *Differentsial’noe ischislenie* [Differential Calculus], GITTL, Leningrad–Moscow, 1949 (in Russian).
25. F. R. Archibald and A. G. Emslie, “The vibration of a string having a uniform motion along its length,” *J. Appl. Mech.*, 1958, **25**, No. 1, 347–348.
26. S. Mahalingam, “Transverse vibrations of power transmission chains,” *British J. Appl. Phys.*, 1957, **8**, No. 4, 145–148.
27. R. A. Sack, “Transverse oscillations in traveling strings,” *British J. Appl. Phys.*, 1954, **5**, No. 6, 224–226.

V. S. Rykhlov

Saratov State University, Saratov, Russia

E-mail: RykhlovVS@yandex.ru

УДК 534.121.1

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-364-374

EDN: UZSLLN

**ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ
ПЬЕЗОАКТИВНОГО БИМОРФА
В РАМКАХ НЕСВЯЗНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ
ТЕРМОЭЛЕКТРОУПРУГОСТИ**

А. Н. СОЛОВЬЕВ^{1,2}, В. А. ЧЕБАНЕНКО^{2,3}, М. С. ГЕРМАНЧУК⁴

¹Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

²Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

³Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Россия

⁴Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия

Аннотация. В работе рассматриваются поперечные установившиеся колебания пьезоактивного биморфа в постановке плоской деформации. Задача решается в рамках линейной термоэлектроупругости, при этом температурная задача решается отдельно и распределение температуры учитывается в определяющих соотношениях электроупругости. На основе гипотез типа Кирхгофа–Лява для механических величин и симметричного квадратичного распределения электрического потенциала строится приближенная теория расчета колебаний биморфа. Проведены численные эксперименты для различных случаев закрепления и возбуждения колебаний. Результаты этих экспериментов сравнивались с расчетами, произведенными с помощью метода конечных элементов в пакете COMSOL и показали адекватность построенной теории в низкочастотной области.

Ключевые слова: термоэлектроупругость, биморф, колебания, прикладная теория, метод конечных элементов, пьезоэлектрический генератор сбора и накопления энергии.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Работа выполнена при финансовой поддержке (первый и второй авторы) гранта РФФИ № 22-11-00265.

Для цитирования: А. Н. Соловьев, В. А. Чебаненко, М. С. Германчук. Прикладная теория изгибных колебаний пьезоактивного биморфа в рамках несвязной краевой задачи термоэлектроупругости // Современ. мат. Фундам. направл. 2023. Т. 69, № 2. С. 364–374. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-364-374>

ВВЕДЕНИЕ

Пьезоэлектрические преобразователи широко используются в различных сферах: в промышленности, медицине, в быту и др. С этим связана актуальность проектирования эффективных устройств преобразования механической, магнитной, тепловой энергии в электрическую и обратно. В настоящее время предварительный расчет конструкций с пьезоактивными элементами возможен с помощью метода конечных элементов (МКЭ), реализованного в «тяжелых» и специализированных САЕ пакетах, таких, как ANSYS, COMSOL, ACELAN и др. Однако для ряда устройств возможно построение приближенных теорий расчета их колебаний на основе гипотез



о распределении механических, электрических, магнитных полей [2, 10]. Одним из типов таких устройств являются излучатели, приемники и пьезоэлектрические генераторы (ПЭГ), рабочим элементом которых являются биморфы — электродированные многослойные пластины, совершающие поперечные колебания. Кроме механического и магнитного воздействия, источником возникновения индуцированной разности потенциалов на электродах пьезоэлектрических слоев является неоднородное распределение температуры в них, возникающее за счет действия внешних температурных потоков. Такая задача может быть решена в рамках термоэлектроупругости. При использовании в качестве пьезоактивного материала композитов первым шагом исследования является нахождение их эффективных свойств. Вопросам определения эффективных свойств термоэлектроупругих и термомагнитоэлектроупругих композитов посвящены работы [1, 4, 6, 7, 14], толщинные колебания пластины под действием начального термоэлектромеханического поля исследуются в [3], аналитические и численные аналитические решения задач термоэлектроупругости рассматриваются в [5, 9, 11–13].

В настоящей работе рассматриваются поперечные колебания двухслойной пластины в рамках линейной теории термоэлектроупругости в плоской постановке. Температура входит в определяющие соотношения, а уравнение теплопроводности решается независимо от уравнений электроупругости. С помощью гипотез типа Кирхгофа—Лява в предположении о квадратичном распределении электрического потенциала строится прикладная теория колебаний и граничные условия для рассматриваемого биморфа. Проведены численные эксперименты при различном способе возбуждения колебаний. Осуществлено сравнение прогибов и распределений электрического потенциала с расчетом в COMSOL.

1. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

1.1. Геометрическая и физическая модель. Рассматривается двухслойная пластина (см. рис. 1) толщины h и длины l ; верхняя, нижняя и интерфейсная границы электродированы. На верхнем и нижнем электродах электрические потенциалы одинаковы и равны V_0 , потенциал на среднем электроде равен V_2 , на боковых сторонах отсутствует электрический заряд. На верхнюю границу действует распределенное механическое давление $q_3(x_1)$, на боковых сторонах задаются граничные условия, соответствующие свободной границе, шарнирному опиранию или жесткой заделке. Температурная задача решается независимо и определяется распределение температуры $\theta(x_1, x_3)$, которое затем учитывается в уравнениях состояния для электроупругого тела.

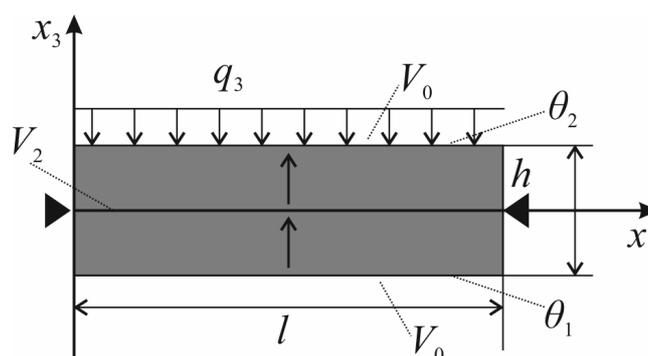


Рис. 1. Геометрия пластины

FIG. 1. Plate geometry

1.2. Континуальная модель. Рассматриваются установившиеся колебания биморфа (рис. 1) с круговой частотой ω в рамках линейной теории термоэлектроупругости. Задача сводится к следующей системе дифференциальных уравнений в частных производных относительно компонент

вектора смещений $u_i(x_1, x_2, x_3)$, $i = 1, 2, 3$ и электрического потенциала $\varphi(x_1, x_2, x_3)$:

$$\begin{aligned} \nabla \boldsymbol{\sigma} + \rho \mathbf{f} &= -\rho \omega^2 \mathbf{u}, & \nabla \mathbf{D} &= \sigma \Omega, \\ \boldsymbol{\sigma} &= \mathbf{c} : \boldsymbol{\varepsilon} - \mathbf{e}^T \mathbf{E} - \mathbf{g} \theta, & \mathbf{D} &= \mathbf{e} : \boldsymbol{\varepsilon} + \boldsymbol{\kappa} \mathbf{E} + \mathbf{p} \theta, \\ \boldsymbol{\varepsilon} &= \frac{1}{2} \left(\nabla \mathbf{u} + (\nabla \mathbf{u})^T \right), & \mathbf{E} &= -\nabla \varphi, \end{aligned} \quad (1.1)$$

где $\boldsymbol{\sigma}$ и $\boldsymbol{\varepsilon}$ — тензоры механических напряжений и деформации, \mathbf{D} и \mathbf{E} — векторы электрической индукции и напряженности электрического поля, ρ — плотность материала, \mathbf{c} — тензор упругих модулей, \mathbf{e} — тензор пьезоэлектрических модулей, \mathbf{g} — тензор температурных напряжений, $\boldsymbol{\kappa}$ — тензор диэлектрических проницаемостей, \mathbf{p} — вектор пьезоэлектрических коэффициентов, \mathbf{f} — вектор плотности массовых сил, $\sigma \Omega$ — объемная плотность электрических зарядов, \mathbf{u} — вектор перемещений, φ — электрический потенциал.

Граничные условия. Механические напряжения на границе биморфа:

$$\sigma_{ij} \cdot n_j|_S = q_i, \quad i, j = 1, 3. \quad (1.2)$$

Биморф шарнирно закреплен на концах, как указано на рис. 1:

$$u_i|_{(0,0)} = u_i|_{(l,0)} = 0, \quad i = 1, 3. \quad (1.3)$$

Электрический потенциал на внутреннем и внешнем электродах, соответственно:

$$\varphi|_{x_3} = 0 = V_2, \quad \varphi|_{x_3=\pm h/2} = V_0. \quad (1.4)$$

Отсутствие зарядов на боковых гранях:

$$\mathbf{D} \cdot \mathbf{n}|_{x_1=0} = 0, \quad \mathbf{D} \cdot \mathbf{n}|_{x_1=l} = 0. \quad (1.5)$$

В задачах электроупругости для упрощения записи часто используются определяющие соотношения на основе нотации Фойгта:

$$\mathbf{T} = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{12} & C_{11} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ C_{13} & C_{13} & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C_{44} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & (C_{11} - C_{12})/2 \end{pmatrix} \mathbf{S} - \begin{pmatrix} 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{31} \\ 0 & 0 & e_{33} \\ 0 & e_{15} & 0 \\ e_{15} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{E} - \begin{pmatrix} g_{11} & 0 & 0 \\ 0 & g_{11} & 0 \\ 0 & 0 & g_{33} \end{pmatrix} \theta, \quad (1.6)$$

$$\mathbf{D} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & e_{15} & 0 & 0 \\ e_{31} & e_{31} & e_{33} & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mathbf{S} + \begin{pmatrix} \kappa_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \kappa_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \kappa_{33} \end{pmatrix} \mathbf{E} + \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \\ p_3 \end{pmatrix} \theta. \quad (1.7)$$

Здесь $\mathbf{T} = (\sigma_{11}, \sigma_{22}, \sigma_{33}, \sigma_{23}, \sigma_{13}, \sigma_{12})^T$ и $\mathbf{S} = (\varepsilon_{11}, \varepsilon_{22}, \varepsilon_{33}, 2\varepsilon_{23}, 2\varepsilon_{13}, 2\varepsilon_{12})^T$ — это псевдовекторы, элементами которых являются компоненты тензоров напряжений и деформаций, соответственно.

2. ПРИКЛАДНАЯ ТЕОРИЯ ПОПЕРЕЧНЫХ КОЛЕБАНИЙ

2.1. Гипотезы. Для построения прикладной теории колебаний примем гипотезы типа Кирхгофа—Лява. В соответствии с ними предполагается отсутствие нормальных напряжений и распределение перемещений по толщине:

$$\sigma_{33}(x_1, x_3) = 0, \quad u_1(x_1, x_3) = -x_3 w_{,1}, \quad u_3(x_1, x_3) = w(x_1). \quad (2.1)$$

Распределение электрического потенциала по толщине каждого слоя принимается квадратичным; так, например, в верхнем слое оно имеет вид:

$$\varphi(x_1, x_3) = V_0 \frac{2x_3}{h} \left(\frac{4x_3}{h} - 1 \right) + V_1(x_1) \frac{8x_3}{h} \left(1 - \frac{2x_3}{h} \right) + V_2 \left(\frac{2x_3}{h} - 1 \right) \left(\frac{4x_3}{h} - 1 \right). \quad (2.2)$$

где функции V_0 , V_1 и V_2 отвечают за значение электрического потенциала на внешнем электроде, в середине слоя и на внутреннем электроде, соответственно. Чтобы удовлетворить условиям задачи, примем эти функции в следующем виде:

$$V_0(x_1) = V_0 = \text{const}, \quad V_1(x_1) = \Phi(x_1), \quad V_2(x_1) = V_2 = \text{const}, \quad (2.3)$$

где функция $\Phi(x_1)$ является неизвестной.

Предполагается, что задача теплопроводности решена предварительно, и распределение температуры берется линейным по толщине биморфа:

$$\theta(x_1, x_3) = \theta_1 \left(1 + \frac{2x_3}{h}\right) / 2 + \theta_2 \left(1 - \frac{2x_3}{h}\right) / 2, \quad (2.4)$$

где θ_1, θ_2 — температуры на верхней и нижней грани биморфа, соответственно.

2.2. Вариационный принцип. Для дальнейшего построения прикладной теории воспользуемся принципом Гамильтона для электроупругой среды. Рассмотрим функционал

$$\Pi = \iint_S (H - X_i u_i) dS - \int_{\partial S} (q_i u_i - \sigma \varphi) dl, \quad (2.5)$$

где H — электрическая энтальпия, σ — заряд на ∂S . Принцип Гамильтона, обобщенный на теорию пьезоэлектричества, имеет вид

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{K} - \Pi) dt = 0. \quad (2.6)$$

Здесь \mathcal{K} — кинетическая энергия, а $t_2 - t_1$ — временной промежуток. Допустимое движение тела должно быть согласовано с ограничениями на это движение. Должны быть выполнены условия

$$\delta u_i(x, t_1) = \delta u_i(x, t_2) = 0. \quad (2.7)$$

Вариация кинетической энергии с учетом условия (2.7) равна

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{K} dt = -\rho \int_{t_1}^{t_2} dt \iint_S \ddot{u}_i \delta u_i dS, \quad (2.8)$$

$$\begin{aligned} & \delta \int_{t_1}^{t_2} (\mathcal{K} - \Pi) dt = \\ & = \int_{t_1}^{t_2} dt \left(-\rho \iint_S \ddot{u}_i \delta u_i dS - \iint_S \left(\frac{\partial H}{\partial \varepsilon_{ij}} \delta \varepsilon_{ij} - \frac{\partial H}{\partial E_i} \delta E_i - X_i \delta u_i \right) dS + \int_{\partial B} (p_i \delta u_i - \sigma \delta \varphi) dl \right) = 0. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Пользуясь определяющими соотношениями [8] $\sigma_{ij} = \partial H / \partial \varepsilon_{ij}$, $D_i = -\partial H / \partial E_i$, для случая наличия поверхностных нагрузок, а также отсутствия поверхностных зарядов и массовых сил получим

$$\int_{t_1}^{t_2} dt \left(-\rho \iint_S \ddot{u}_i \delta u_i dS - \iint_S (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i) dS + \int_{\partial B} q_i \delta u_i dl \right) = 0. \quad (2.10)$$

Далее будем рассматривать случай установившихся гармонических колебаний, когда

$$u_i = u_i e^{i\omega t}, \quad \varphi = \varphi e^{i\omega t}, \quad q_i = q_i e^{i\omega t}. \quad (2.11)$$

Тогда

$$\iint_S (\sigma_{ij} \delta \varepsilon_{ij} - D_i \delta E_i) dS - \rho \omega \iint_S \ddot{u}_i \delta u_i dS - \int_{\partial B} q_i \delta u_i dl = 0. \quad (2.12)$$

С учетом принятых гипотез (2.1) вариационное уравнение принимает следующий вид:

$$\iint_S (\sigma_{11} \delta \varepsilon_{11} - D_1 \delta E_1 - D_3 \delta E_3) dS - \rho \omega \iint_S (\ddot{u}_1 \delta u_1 + \ddot{u}_3 \delta u_3) dS - \int_{\partial B} (q_1 \delta u_1 + q_3 \delta u_3) dl = 0. \quad (2.13)$$

ТАБ. 1

ρ , кг/м ³ kg/m ³	c_{11}^E , ГПа GPa	c_{12}^E , ГПа GPa	c_{13}^E , ГПа GPa	c_{33}^E , ГПа GPa	c_{44}^E , ГПа GPa
7500	139	77,8	74,3	115	25,6
e_{31} , пКл/Н pC/N	e_{33} , пКл/Н pC/N	e_{15} , пКл/Н pC/N	κ_{11}^S/κ_0	κ_{33}^S/κ_0	
-5,2	15,1	12,7	730	635	
g_1 , Па/К Pa/K	g_3 , Па/К Pa/K	p_1 , мКл/(м ² К) mC/(m ² К)	p_3 , мКл/(м ² К) mC/(m ² К)		
9,5	7,6	0	0,25		

2.3. Уравнения и силовые факторы. Проведем вариацию уравнения (2.13), а также проинтегрируем его по толщине. Последняя операция устраняет зависимость от x_3 , поэтому в дальнейшем опустим нижний индекс у x_1 . На последнем шаге, после вариации и интегрирования, приравняв коэффициенты при независимых вариациях δw и $\delta \Phi$ в выведенном выше уравнении, мы получим систему дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами (2.14), (2.15) и выражения силовых факторов, которые представлены уравнениями (2.16)–(2.18).

$$1/24 \frac{h(-16c_{13}e_{33} + 16c_{33}e_{31})}{c_{33}} \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) +$$

$$+ 1/24 \frac{h(2c_{11}c_{33}h^2 - 2c_{13}^2h^2)}{c_{33}} \frac{d^4}{dx^4} w(x) - \omega^2 \rho h U(x) - q_3(x) = 0, \quad (2.14)$$

$$\left(-16 \frac{e_{33}^2}{h^2 c_{33}} - 16 \frac{g_{33}}{h^2}\right) V_0 + \left(-16 \frac{e_{33}^2}{h^2 c_{33}} - 16 \frac{g_{33}}{h^2}\right) V_2 + \left(-\frac{e_{33}g_3}{hc_{33}} + \frac{p_3}{h}\right) \theta_1 +$$

$$+ \left(\frac{e_{33}g_3}{hc_{33}} - \frac{p_3}{h}\right) \theta_2 + \left(32 \frac{e_{33}^2}{h^2 c_{33}} + 32 \frac{g_{33}}{h^2}\right) \Phi(x) - 2/3g_{11} \frac{d^2}{dx^2} \Phi(x) +$$

$$+ \left(-e_{31} + \frac{c_{13}e_{33}}{c_{33}}\right) \frac{d^2}{dx^2} w(x) = 0. \quad (2.15)$$

Для удовлетворения граничных условий на концах биморфа получены выражения для силовых факторов: M_1 — момента, Q_1 — поперечной силы и D_1 — осредненной по толщине горизонтальной компоненты вектора электрической индукции.

$$M_1 = -1/12 \frac{h(10c_{13}e_{33} - 10c_{33}e_{31})}{c_{33}} V_0 - 1/12 \frac{h(-2c_{13}e_{33} + 2c_{33}e_{31})}{c_{33}} V_2 -$$

$$- 1/12 \frac{h(c_{13}g_3h - c_{33}g_1h)}{c_{33}} \theta_1 - 1/12 \frac{h(-c_{13}g_3h + c_{33}g_1h)}{c_{33}} \theta_2 -$$

$$- 1/12 \frac{h(-8c_{13}e_{33} + 8c_{33}e_{31})}{c_{33}} \Phi(x) - 1/12 \frac{h(c_{11}h^2c_{33} - c_{13}^2h^2)}{c_{33}} \frac{d^2}{dx^2} w(x), \quad (2.16)$$

$$Q_1 = 1/24 \frac{h(-16c_{13}e_{33} + 16c_{33}e_{31})}{c_{33}} \frac{d}{dx} \Phi(x) + 1/24 \frac{h(2c_{11}h^2c_{33} - 2c_{13}^2h^2)}{c_{33}} \frac{d^3}{dx^3} w(x), \quad (2.17)$$

$$D_1 = -1/2(\theta_2 - \theta_1)p_1 - 2/3g_{11} \frac{d}{dx} \Phi(x). \quad (2.18)$$

3. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

В численном эксперименте в качестве пьезоэлектрического материала была выбрана пьезоке-рамика PZT-4, поляризованная по толщине, физические константы которой приведены в таб. 1, где κ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума. Размеры пластины: $l = 0,01$ м, $h = 0,0012$ м, толщины слоев одинаковы. Рассматриваются установившиеся колебания на частоте 314,16 Гц под действием равномерно распределенной нагрузки амплитуды $q_3 = 1000$ Па, температуры $\theta_1 = 15^\circ\text{C}$, $\theta_2 = 10^\circ\text{C}$ и разности потенциалов $V_0 = 100$ В, $V_2 = 0$ В.

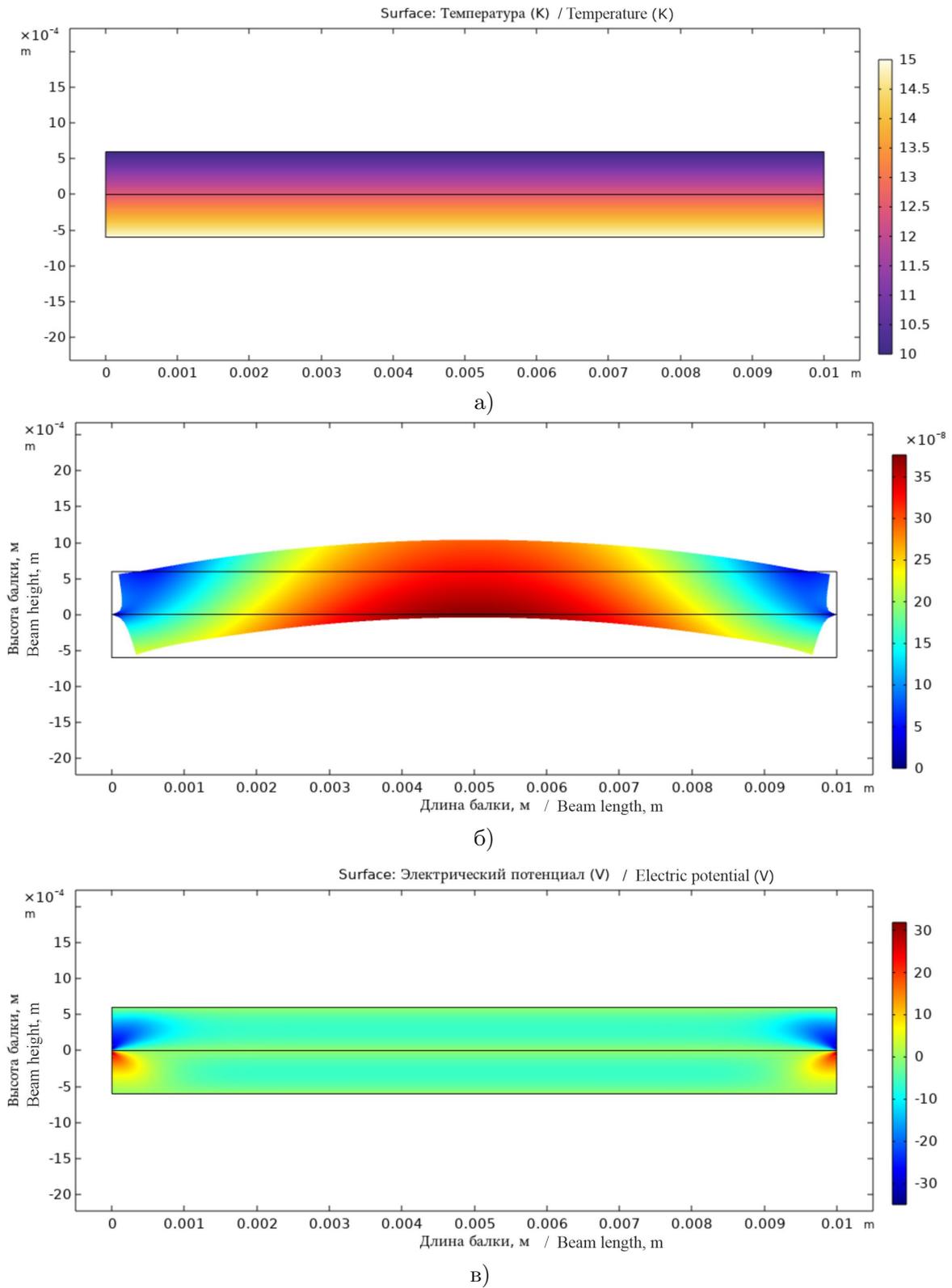


РИС. 2. Распределение физических полей при разнице температур на границах и нулевых потенциалах: а) температура, б) модуль вектора перемещений, в) электрический потенциал.

FIG. 2. Distribution of physical fields with temperature difference on the boundaries and zero potentials: а) temperature, б) displacement vector modulus, в) electric potential.

Граничные условия в соответствии с постановкой задачи (рис. 1) имеют вид

$$w(0) = w(l) = 0, \quad M_1(0) = M_1(l) = 0, \quad D_1(0) = D_1(l) = 0.$$

Рассматриваются три задачи: в первой возбуждение колебаний осуществляется разностью температур, во второй разностью электрических потенциалов и в третьей распределенной нагрузкой при неизвестном электрическом потенциале V_0 .

Аналогичный набор задач был решен в конечно-элементном (КЭ) пакте COMSOL Multiphysics (ЦКП ЮНЦ РАН № 501994). В интерфейсе решения уравнений в частных производных была решена система (1.1) для плоского случая. На рис. 2 представлено распределение перемещений, температуры и электрического потенциала для первой задачи, полученные на основе метода КЭ.

На рис. 3–5 для описанных выше задач, соответственно, представлены графики распределения: а) прогиб пластины, б) продольное распределение потенциала в середине слоя, в) поперечное распределение потенциала в середине пластины; при этом сплошная линия соответствует прикладной теории, штрих-пунктирная — расчетам методом КЭ.

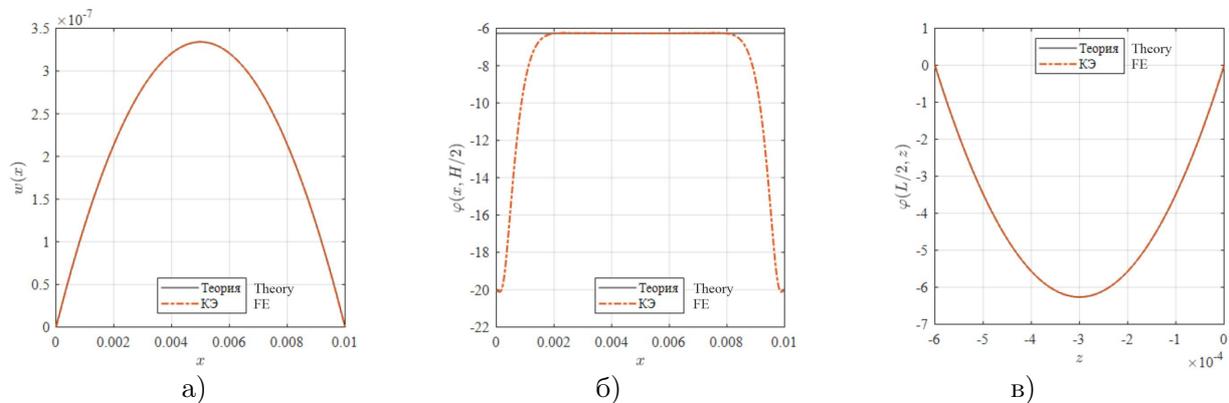


РИС. 3. Распределение механических и электрических полей в верхнем слое при разнице температур на границах и нулевых потенциалах: а) прогиб пластины, б) продольное распределение потенциала в середине слоя, в) поперечное распределение потенциала в середине пластины.

FIG. 3. Distribution of mechanical and electric fields in the upper layer with temperature difference on the boundaries and zero potentials: а) plate deflection, б) longitudinal potential distribution in the middle of the layer, в) transverse potential distribution in the middle of the plate.

Анализ результатов, полученных по прикладной теории и с помощью метода КЭ, показывает, что погрешность в значениях характеристик деформированного состояния, как и распределения электрического потенциала, составляет не более одного процента. Исключением являются концы пластины, где различие для электрического потенциала более существенно. Вместе с тем важная характеристика ПЭГ — выходной электрический потенциал для третьей задачи (его значение оказалось равным $V_0 = 237$ В) находится также с незначительной погрешностью.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе на основе гипотез типа Кирхгофа–Лява и предположения о квадратичном распределении электрического потенциала в каждом слое пластины, представляющей собой пьезоэлектрический биморф из термоэлектрострунгого материала, строится прикладная теория его поперечных колебаний. Распределение температуры учитывается в определяющих соотношениях для механических и электрических полей, при этом уравнение теплопроводности решается отдельно. Задача сводится к двум связанным обыкновенным дифференциальным уравнениям четвертого и второго порядков относительно прогиба нейтральной линии и распределения электрического потенциала в середине каждого из слоев и граничных условий для механических характеристик: прогиба, угла поворота, момента и поперечной силы, потенциала или продольной компоненты вектора электрической индукции. Внешние поверхности и интерфейсный слой биморфа

электродированы. Электрические потенциалы на внешних электродах одинаковы. В численных экспериментах рассматривалось линейное распределение температуры по толщине биморфа и постоянное распределение по внешним поверхностям. Колебания рассматривались для шарнирно опертой пластины при их возбуждении равномерно распределенным механическим давлением, разностью потенциалов на электродах, разностью температур на внешних поверхностях. Численные результаты сравнивались с расчетом с помощью метода конечных элементов в пакете COMSOL. Это сравнение подтвердило адекватность предложенной прикладной теории в низкочастотной области, а именно, резонансная частота первой изгибной моды является рабочей для такого устройства.

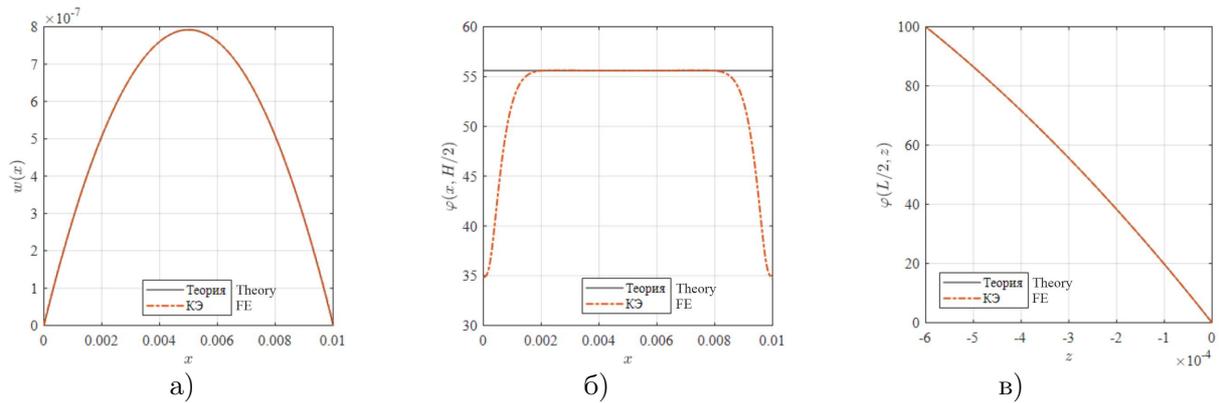


РИС. 4. Распределение механических и электрических полей в верхнем слое при одинаковой температуре и приложенном потенциале 100 В: а) прогиб пластины, б) продольное распределение потенциала в середине слоя, в) поперечное распределение потенциала в середине пластины.

FIG. 4. Distribution of mechanical and electric fields in the upper layer for the same temperature and applied potential of 100 V: а) deflection of the plate, б) longitudinal distribution of the potential in the middle of the layer, в) transverse distribution of the potential in the middle of the plate.

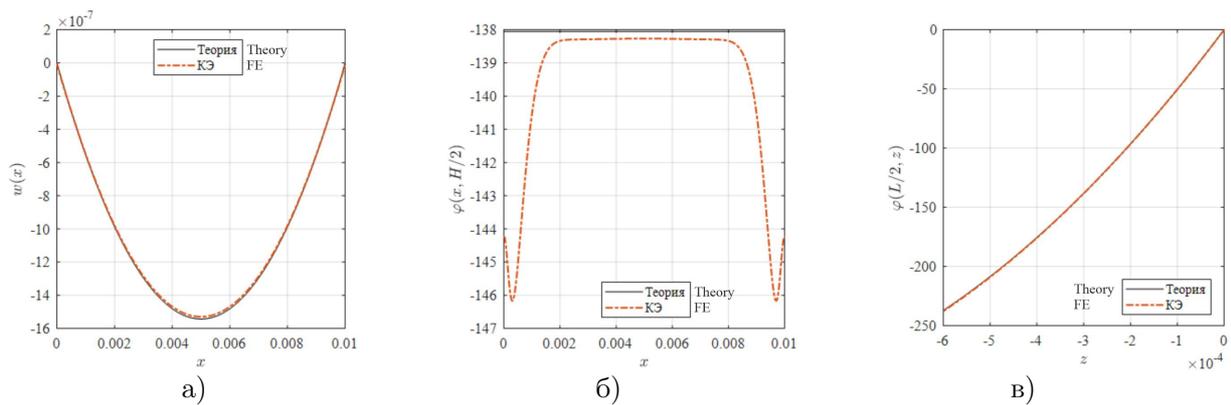


РИС. 5. Распределение механических и электрических полей в верхнем слое при разнице температур на границах и неизвестном потенциале на внешних электродах: а) прогиб пластины, б) продольное распределение потенциала в середине слоя, в) поперечное распределение потенциала в середине пластины.

FIG. 5. Distribution of mechanical and electric fields in the upper layer with temperature difference on the boundaries and unknown potential on the external electrodes: а) plate deflection, б) longitudinal potential distribution in the middle of the layer, в) transverse potential distribution in the middle of the plate.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Bednarek S.* Elastic and magnetic properties of heat-shrinkable ferromagnetic composites with elastomer matrix// *Mater. Sci. Engrg. B.* — 2000. — 77. — С. 120–127.
2. *Binh D. T., Chebanenko V. A., Duong L. V., Kirillova E., Thang P. M., Soloviev A. N.* Applied theory of bending vibration of the piezoelectric and piezomagnetic bimorph// *J. Adv. Dielectrics.* — 2020. — 10, № 3. — 2050007.
3. *Du J. K., Wang J., Zhou Ya.* Thickness vibrations of a piezoelectric plate under biasing fields// *Ultrasonics.* — 2006. — 44. — С. 853–857.
4. *Huang J.* Micromechanics determinations of thermoelectroelastic fields and effective thermoelectroelastic moduli of piezoelectric composites// *Mater. Sci. Engrg. B.* — 1996. — 39. — С. 163–172.
5. *Kulikov G. M., Mamontov A., Plotnikova S.* Coupled thermoelectroelastic stress analysis of piezoelectric shells// *Composite Structures.* — 2015. — 124. — С. 65–76.
6. *Levin V.* Exact relations between the effective thermoelectroelastic characteristics of piezoelectric composites// *Int. J. Engrg. Sci.* — 2013. — 66-67. — С. 14–20.
7. *Levin V. M., Rakovskaja M. I., Kreher W. S.* The effective thermoelectroelastic properties of microinhomogeneous materials// *Int. J. Solids Structures.* — 1999. — 36. — С. 2683–2705.
8. *Nowacki W.* Mathematical models of phenomenological piezoelectricity// *Banach Center Publ.* — 1985. — 1, № 15. — С. 593–607.
9. *Pasternak I., Pasternak R., Sulym H.* A comprehensive study on Green's functions and boundary integral equations for 3D anisotropic thermomagnetoelasticity// *Eng. Anal. Bound. Elem.* — 2016. — 64. — С. 222–229.
10. *Soloviev A. N., Chebanenko V. A., Oganessian P. A., Chao S.-F., Liu Y.-M.* Applied theory for electroelastic plates with non-homogeneous polarization// *Mater. Phys. Mech.* — 2019. — 42, № 2. — С. 242–255.
11. *Xu K., Noor A. K., Tang Y. Y.* Three-dimensional solutions for coupled thermoelectroelastic response of multilayered plates// *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.* — 1995. — 126, № 3-4. — С. 355–371.
12. *Xu K., Noor A. K., Tang Y. Y.* Three-dimensional solutions for free vibrations of initially-stressed thermoelectroelastic multilayered plates// В сб.: «Contemporary Research in Engineering Science». — Berlin—Heidelberg: Springer, 1995. — С. 593–612.
13. *Zhang C., Cheung Y. K., Di S., Zhang N.* The exact solution of coupled thermoelectroelastic behavior of piezoelectric laminates// *Comput. Struct.* — 2002. — 80. — С. 1201–1212.
14. *Zhong X., Wu Y., Zhang K.* An extended dielectric crack model for fracture analysis of a thermopiezoelectric strip// *Acta Mech. Solida Sin.* — 2020. — 33. — С. 521–545.

А. Н. Соловьев

Донской государственный технический университет, Ростов-на-Дону, Россия

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: solovievarc@gmail.com

В. А. Чебаненко

Южный федеральный университет, Ростов-на-Дону, Россия

Южный научный центр РАН, Ростов-на-Дону, Россия

E-mail: valera@chebanenko.ru

М. С. Германчук

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия

E-mail: germanchukms@cfuv.ru

UDC 534.121.1

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-364-374

EDN: UZSLLN

Applied theory of flexural vibrations of a piezoactive bimorph in the framework of an uncoupled boundary-value problem of thermoelectroelasticity

A. N. Soloviev^{1,2}, V. A. Chebanenko^{2,3}, and M. S. Germanchuk⁴

¹*Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia*

²*Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia*

³*Southern Research Center of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russia*

⁴*V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia*

Abstract. In this paper, we consider transverse steady oscillations of a piezoactive bimorph in the formulation of a plane deformation. The problem is solved within the framework of linear thermoelectroelasticity, while the temperature problem is solved separately and the temperature distribution is taken into account in the constitutive relations of electroelasticity. On the basis the Kirchhoff–Love type hypothesis for mechanical quantities and a symmetric quadratic distribution of the electric potential, an approximate theory for calculating bimorph vibrations is constructed. Numerical experiments have been carried out for various cases of pinning and excitation of vibrations. The results of these experiments were compared with calculations made using the finite element method in the COMSOL package and showed the adequacy of the constructed theory in the low-frequency region.

Keywords: thermoelectroelasticity, bimorph, vibrations, applied theory, finite element method, piezoelectric generator for collecting and storing energy.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The work was financially supported (first and second authors) by the Russian Science Foundation grant № 22-11-00265.

For citation: A. N. Soloviev, V. A. Chebanenko, M. S. Germanchuk, “Applied theory of flexural vibrations of a piezoactive bimorph in the framework of an uncoupled boundary-value problem of thermoelectroelasticity,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 2, 364–374. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-364-374>

REFERENCES

1. S. Bednarek, “Elastic and magnetic properties of heat-shrinkable ferromagnetic composites with elastomer matrix,” *Mater. Sci. Engrg. B*, 2000, **77**, 120–127.
2. D. T. Binh, V. A. Chebanenko, L. V. Duong, E. Kirillova, P. M. Thang, A. N. Soloviev, “Applied theory of bending vibration of the piezoelectric and piezomagnetic bimorph,” *J. Adv. Dielectrics*, 2020, **10**, No. 3, 2050007.
3. J. K. Du, J. Wang, and Ya. Zhou, “Thickness vibrations of a piezoelectric plate under biasing fields,” *Ultrasonics*, 2006, **44**, 853–857.
4. J. Huang, “Micromechanics determinations of thermoelectroelastic fields and effective thermoelectroelastic moduli of piezoelectric composites,” *Mater. Sci. Engrg. B*, 1996, **39**, 163–172.
5. G. M. Kulikov, A. Mamontov, and S. Plotnikova, “Coupled thermoelectroelastic stress analysis of piezoelectric shells,” *Composite Structures*, 2015, **124**, 65–76.
6. V. Levin, “Exact relations between the effective thermoelectroelastic characteristics of piezoelectric composites,” *Int. J. Engrg. Sci.*, 2013, **66-67**, 14–20.



7. V. M. Levin, M. I. Rakovskaja, and W. S. Kreher, “The effective thermoelectroelastic properties of micro-inhomogeneous materials,” *Int. J. Solids Structures*, 1999, **36**, 2683–2705.
8. W. Nowacki, “Mathematical models of phenomenological piezoelectricity,” *Banach Center Publ.*, 1985, **1**, No. 15, 593–607.
9. I. Pasternak, R. Pasternak, and H. Sulym, “A comprehensive study on Green’s functions and boundary integral equations for 3D anisotropic thermomagnetoelasticity,” *Eng. Anal. Bound. Elem.*, 2016, **64**, 222–229.
10. A. N. Soloviev, V. A. Chebanenko, P. A. Oganessian, S.-F. Chao, and Y.-M. Liu, “Applied theory for electro-elastic plates with non-homogeneous polarization,” *Mater. Phys. Mech.*, 2019, **42**, No. 2, 242–255.
11. K. Xu, A. K. Noor, and Y. Y. Tang, “Three-dimensional solutions for coupled thermoelectroelastic response of multilayered plates,” *Comput. Methods Appl. Mech. Engrg.*, 1995, **126**, No. 3-4, 355–371.
12. K. Xu, A. K. Noor, and Y. Y. Tang, “Three-dimensional solutions for free vibrations of initially-stressed thermoelectroelastic multilayered plates,” In: *Contemporary Research in Engineering Science*, Springer, Berlin–Heidelberg, 1995, pp. 593–612.
13. C. Zhang, Y. K. Cheung, S. Di, and N. Zhang, “The exact solution of coupled thermoelectroelastic behavior of piezoelectric laminates,” *Comput. Struct.*, 2002, **80**, 1201–1212.
14. X. Zhong, Y. Wu, and K. Zhang, “An extended dielectric crack model for fracture analysis of a thermopiezoelectric strip,” *Acta Mech. Solida Sin.*, 2020, **33**, 521–545.

A. N. Soloviev

Don State Technical University, Rostov-on-Don, Russia

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

E-mail: solovievarc@gmail.com

V. A. Chebanenko

Southern Federal University, Rostov-on-Don, Russia

Southern Research Center of the Russian Academy of Sciences, Rostov-on-Don, Russia

E-mail: valera@chebanenko.ru

M. S. Germanchuk

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol, Russia

E-mail: germanchukms@cfuv.ru

УДК 517.9

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-375-382

EDN: VCEYZY

ЗАДАЧА УБЕГАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ПАРАМЕТРИЧЕСКИХ ДИСКРЕТНЫХ ИГРАХ

Л. П. Югай

Узбекский государственный университет физической культуры и спорта, Чирчик, Узбекистан

Аннотация. Рассмотрена задача убегания в постановке Л. С. Понтрягина и Е. Ф. Мищенко для линейных дискретных игр, зависящих от параметра. Получены достаточные условия и области значений параметров, обеспечивающие разрешимость задачи убегания. Полученные результаты применены к решению задачи убегания для известной в теории дифференциальных игр задачи «Изотропные ракеты»—«Мальчик и крокодил» в дискретном варианте.

Ключевые слова: дифференциальная игра, дискретная игра, убегание, преследователь, убегающий игрок, управление, параметр, терминальное множество.

Заявление о конфликте интересов. Авторы заявляют об отсутствии конфликта интересов.

Благодарности и финансирование. Авторы заявляют об отсутствии финансовой поддержки.

Для цитирования: Л. П. Югай. Задача убегания в линейных параметрических дискретных играх // Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. 69, № 2. С. 375–382. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-375-382>

1. ВВЕДЕНИЕ

Дискретные игры занимают важное место в теории игр. В фундаментальной монографии основателя теории дифференциальных игр Р. Айзекса указана важность исследования дискретных игр с точки зрения их практических приложений [13, с. 65]. Источником дискретных игр являются непрерывные (континуальные) дифференциальные игры или самостоятельно возникающие в различных прикладных областях дискретные конфликтно управляемые процессы и их модели. Основные постановки задач в дифференциальных и дискретных играх изложены в [6, 13, 14]. Дискретные дифференциальные игры начали интенсивно развиваться в работах [2, 7, 10–12]. Нелинейным дискретным играм посвящены работы [1, 7, 8]. Различные стороны, особенности и приложения дискретных конфликтно управляемых процессов (игр) исследованы в [3–5, 9, 15].

В данной работе рассмотрены линейные дискретные игры с входящим в уравнения параметром, для которых получены достаточные условия убегания из любых допустимых начальных позиций. Для известной в теории дифференциальных игр задачи «Изотропные ракеты»—«Мальчик и крокодил» [6, 13] получен новый дискретный аналог, к которому применены основные результаты работы по решению задачи убегания.

2. ПОСТАНОВКА ДИСКРЕТНОЙ ЗАДАЧИ УБЕГАНИЯ

2.1. Основные определения и формулировка игровых задач. В пространстве \mathbb{R}^n рассматривается движение вектора $z(t) \in \mathbb{R}^n$, $t \geq 0$, которое описывается линейным дискретным

уравнением:

$$z((k+1)\tau) = A(\tau)z(k\tau) + B(\tau)u + D(\tau)v, \quad (2.1)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$, $\tau \geq 0$; u и v — параметры, $u \in P \subset \mathbb{R}^p$, $v \in Q \subset \mathbb{R}^q$; P и Q — компакты, содержащие в себе начала несущих пространств ($0_p \in P$, $0_q \in Q$); $A(\tau)$, $B(\tau)$ и $D(\tau)$ — матрицы размерностей $n \times n$, $n \times p$ и $n \times q$ соответственно, зависящие от параметра. Терминальное множество $M \subset \mathbb{R}^n$ — непустое и замкнутое.

Уравнение (2.1) носит описательный характер и приобретает конкретный смысл, если будут указаны правила выбора параметров. Параметр $\tau \geq 0$ после выбора фиксируется. Параметры u и v выбираются двумя сторонами, их традиционно называют *игроками* — *преследователем* и *убегающим*. Цели игроков в общем случае являются не совпадающими. Игра начинается из начальной позиции $z_0 \notin M$. Убегающий игрок стремится уклонить бесконечно долго от терминального множества M дискретную траекторию $z(k\tau)$, $k = 1, 2, \dots$, при любом возможном поведении преследователя. Цель преследователя — добиться включения $z(k\tau) \in M$ при некотором $k \geq 1$.

2.2. Пошаговый процесс убегания. Опишем более детально процесс игры. Дискретная игра убегания (2.1) проходит пошагово. На шаге 1 полагают $k = 0$ и фиксируется некоторое значение параметра $\tau > 0$. Считаем, что начальная позиция z_0 задана, известна обоим игрокам и $z_0 \notin M$. Полагаем $z(k=0) = z_0$, и пусть преследующий игрок выбирает в соответствии с (2.1) произвольно свое управление $u_1 = u((0+1)\tau) = u(\tau) \in P$, которое по правилам игры становится известным убегающему игроку. Убегающий игрок на основе известных ему z_0 и $u_1 = u(\tau)$ так строит на шаге 1 свое управление $\bar{v}_1 = v((0+1)\tau) = v(\tau) \in Q$, чтобы соответствующее выбранным управлениям и начальной позиции решение уравнения

$$z = A(\tau)z(0) + B(\tau)u_1 + D(\tau)\bar{v}_1 \quad (2.2)$$

не принадлежало терминальному множеству M .

Заметим, что уравнение (2.2) может иметь несколько решений z , тогда выберем из них по какому-нибудь правилу одно, например, лексикографическим способом [5, с. 217]. Обозначим найденное решение через $z(\tau)$, тогда, обозначив $z(\tau) = z_1$, получим, что

$$z_1 = z(\tau) = A(\tau)z(0) + B(\tau)u_1 + D(\tau)\bar{v}_1. \quad (2.3)$$

Таким образом, в результате первого шага, точка z_0 под действием выбранных игроками управлений u_1 и \bar{v}_1 перейдет согласно (2.2) в положение $z(\tau)$, удовлетворяющее (2.3). Заметим, что на самом деле $\bar{v}_1 = \bar{v}_1(\tau, z_0, u_1)$, т. е. убегающий игрок строит свое управление на основе знания управления преследователя, выбранного им на данном шаге, и позиции z_0 (ср. [1, 2, 7, 8, 10, 11]).

На шаге 2 полагают $k = 1$, и убегающему игроку становятся доступными позиция $z(0+\tau) = z(\tau) = z_1 \notin M$, полученная на шаге 1, и выбранное преследователем на этом, втором шаге, управление $u_2 = u(2\tau) \in P$. На их основе убегающий игрок строит свое управление $\bar{v}_2 = \bar{v}_2(2\tau, z_1, u_2) \in Q$ так, чтобы $z(2\tau) \notin M$, где $z_2 = z(2\tau)$ выбрано (однозначным способом) из решений уравнения

$$z = A(\tau)z(\tau) + B(\tau)u_2 + D(\tau)\bar{v}_2. \quad (2.4)$$

Продолжая этот процесс индуктивно, получаем, что на n -м шаге, $n \geq 1$, убегающий игрок строит свое управление $\bar{v}_n = v_n(n\tau, z_{n-1}, u_n)$ так, чтобы $z_{n-1} = z((n-1)\tau)$ переходило в состояние (единственное)

$$z_n = z(n\tau) = A(\tau)z((n-1)\tau) + B(\tau)u_n + D(\tau)\bar{v}_n \quad (2.5)$$

и выполнялось $z_n = z(n\tau) \notin M$, $n \geq 1$ ($z_0 = z(0) \notin M$).

В результате изложенного описания пошагового хода игры, начинающейся из начальной позиции $z_0 = z(0) \notin M$, получаем, что z_0 и (2.5) порождают последовательность точек z_0, z_1, z_2, \dots , не принадлежащих терминальному множеству. Для каждой точки выбирается управление, обеспечивающее переход из рассматриваемой точки в следующую (по номеру шага) точку, которая не попадает на терминальное множество. Это управление для каждой точки строится по информации о ней (полное знание позиции) и текущему управлению в рассматриваемый момент времени (шаг).

Другими словами, выбор управления убегающего игрока на каждом шаге зависит от позиции системы (2.1), сложившейся на предыдущем шаге, и управления преследователя, выбираемого

им на рассматриваемом шаге. В результате дискретная система (2.1) переходит из состояния z_k в состояние z_{k+1} , $k \geq 0$.

Перейдем к более точным формулировкам задач игроков. Будем говорить, что убегающий игрок решил задачу убегаения из заданной начальной точки $z_0 \notin M$ при значении параметра $\tau > 0$, если для каждой последовательности управлений $\{u_n \in P, n \geq 1\}$ можно построить такую последовательность управлений $\{v_n \in Q, n \geq 1\}$, что соответствующие решения z_n уравнения (2.5) не попадают на M при всех $n \geq 1$. При $n = 0$ $z_0 \notin M$ по условиям убегаения (нулевой или начальный шаг выполняется автоматически).

Если уклонение возможно из любой точки $z_0 \in \mathbb{R}^n \setminus M$, то будем говорить, что в дискретной параметрической игре (2.1) возможно убегаение при заданном значении параметра.

Далее, нужно определить достаточные условия, при которых пошаговый процесс (метод) убегаения в игре (2.1) может быть реализован.

3. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Пусть терминальное множество задано в виде:

$$M = \{z \in \mathbb{R}^n : \langle n_i, z \rangle \leq \alpha_i\}, \tag{3.1}$$

где n_i — заданные единичные векторы, α_i — действительные числа, $i = 1, 2, \dots, m$. Обозначим

$$F(\tau, z, u, v) = A(\tau)z + B(\tau)u + D(\tau)v, \\ E(\tau) = \{z \in \mathbb{R}^n : \min_u \max_v \max_i [\langle n_i, F(\tau, z, u, v) \rangle - \alpha_i] \leq 0\}. \tag{3.2}$$

Теорема 3.1 (об убегаении). Пусть для заданного значения параметра $\tau > 0$ множество

$$E(\tau) \subset M. \tag{3.3}$$

Тогда в дискретной игре (2.1) из любой начальной позиции $z_0 \notin M$ возможно убегаение пошаговым способом. При этом на каждом шаге $n = 1, 2, 3, \dots$ убегающий игрок использует информацию о состоянии позиции на предыдущем шаге $z_{n-1} = z((n-1)\tau)$ и управлении $u(n\tau) \in P$, которое преследователь принимает на том же n -м шаге. В результате система (2.1) переходит из позиции $z_{n-1} \notin M$ в положение $z_n = z(n\tau) \notin M$ и, тем самым, возможно убегаение из любой начальной позиции (точки) $z_0 \notin M$.

Доказательство. Из условия $E(\tau) \subset M$ следует, что если $z \notin M$, то $z \notin E(\tau)$, значит,

$$\min_u \max_v \max_i [\langle n_i, F(\tau, z, u, v) \rangle - \alpha_i] > 0. \tag{3.4}$$

Из (3.4) следует, что для каждого $z \notin M$, $u \in P$ и фиксированного $\tau > 0$ найдется единственный вектор $\bar{v}(\tau, z, u) \in Q$ такой, что хотя бы для одного номера $i = 1, 2, \dots, m$ будет выполняться неравенство:

$$\langle n_i, F(\tau, z, u, \bar{v}(\tau, z, u)) \rangle - \alpha_i > 0. \tag{3.5}$$

Как и выше, вектор $\bar{v}(t, z, u)$ можно выбрать однозначным (лексикографическим) способом [5].

Неравенство (3.5) будет играть основную роль при выборе управления убегаения в пошаговом процессе убегаения от терминального множества M , заданного в виде (3.1).

Пусть на первом шаге игра начинается из начальной позиции $z_0 = z(0) \notin M$ и преследователь выбрал $u_1 = u(\tau) \in P$. Тогда убегающему игроку предлагается выбрать управление $\bar{v}_1 = v_1(\tau, z_0, u_1) \in Q$ таким образом, чтобы оно удовлетворяло (3.5) при каком-либо $i = 1, 2, \dots, m$, т. е.:

$$\langle n_i, F(\tau, z_0, u_1, \bar{v}_1) \rangle - \alpha_i > 0. \tag{3.6}$$

Отсюда будет следовать, что $z_1 = z_1(\tau) \notin M$, где

$$z_1(\tau) = F(\tau, z_0, u_1, \bar{v}_1) = A(\tau)z(0) + B(\tau)u_1 + D(\tau)\bar{v}_1. \tag{3.7}$$

Продолжая индуктивно (пошагово) процесс, получим следующее: на n -м шаге, $n \geq 1$, процесс убегаения начинается из точки $z_{n-1} = z((n-1)\tau) \notin M$, и пусть преследователь на этом шаге выбрал управление $u_n = u(n\tau)$. Убегающий игрок на основе знания z_{n-1} и управления $u_n = u(n\tau)$ строит свое управление $\bar{v}_n = \bar{v}_n(n\tau, z_{n-1}, u_n)$ таким образом, чтобы выполнялось (3.6):

$$\langle n_i, F(\tau, z_{n-1}, u_n, \bar{v}_n) \rangle - \alpha_i > 0, \tag{3.8}$$

откуда следует, что для точки

$$z_n(n\tau) = F(\tau, z_{n-1}, u_n, \bar{v}_n) = A(\tau)z_{n-1} + B(\tau)u_n + D(\tau)\bar{v}_n \quad (3.9)$$

не выполняются условия включения в терминальное множество M .

Из (3.8) и (3.9) получается, что при изложенном способе построения управления убегания на основе (3.5) точка $z_n(n\tau) \notin M$ при всех $n = 1, 2, 3, \dots$, т. е. из начальной точки z_0 в дискретной игре (2.1) возможно убегание. Поскольку начальная позиция $z_0 \notin M$ была произвольной, то убегание в дискретной игре (2.1) при заданном фиксированном параметре $\tau > 0$ возможно. Теорема доказана. \square

4. ИССЛЕДОВАНИЕ ДИСКРЕТНОЙ ИГРЫ «ИЗОТРОПНЫЕ РАКЕТЫ»—«МАЛЬЧИК И КРОКОДИЛ» [6, 13]

4.1. «Мальчик и крокодил» (непрерывный случай). В теории дифференциальных и дискретных игр многие игры имеют свои «персональные экзотические имена», например: «Изотропные ракеты», «Мальчик и крокодил», «Лев и человек», «Контрольный пример Понтрягина», «Полицейский автомобиль», «Дама в озере», «Волки и олень», «Успокоение—раскачка маятника» и многие другие [1, 6, 8, 13, 14]. Заметим, что не все названные игры исследованы достаточно полно в дискретном варианте [1, 8]. Возможными причинами этого являются преимущество математических методов анализа дифференциальных игр как непрерывных систем, а также недостаточно эффективный перенос результатов дифференциальных игр на соответствующие дискретные игры. Сформулируем дифференциальную игру «Мальчик и крокодил» [6], которая в книге Р. Айзекса [13] носит название «Изотропные ракеты». Пусть движение убегающего игрока («мальчик») происходит под действием ограниченной скорости, величина и направление которой могут меняться мгновенно. Движение преследователя происходит под действием ограниченной силы, направлением и величиной которой управляет преследователь. Ввиду инерционности движения преследователя, его называют «крокодилом» [6]. Математически движения игроков (x — преследователь, y — убегающий игрок) записываются в следующем виде:

$$\begin{aligned} \ddot{x} &= u, & |u| &\leq \rho; \\ \dot{y} &= v, & |v| &\leq \sigma, \end{aligned} \quad (4.1)$$

где x, y, u, v — векторы из \mathbb{R}^m , $\rho \geq 0$, $\sigma \geq 0$, точки в (3.8) означают производные по времени.

Преследование считается завершенным, если в некоторый конечный момент времени будет $x = y$. В противном случае будем говорить, что осуществлено убегание. Замена переменных $z_1 = x - y$, $z_2 = \dot{x}$, переводит (4.1) в систему

$$\begin{cases} \dot{z}_1 = z_2 - v, \\ \dot{z}_2 = u. \end{cases} \quad (4.2)$$

Терминальное множество (множество точек окончания игры) определяется в виде:

$$M = \left\{ z = \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2m} : z_1 = 0 \right\}. \quad (4.3)$$

Задачей преследователя является попадание точки $z(t)$ — решения (4.2) с помощью допустимых управлений (измеримых функций) в некоторый конечный момент времени на терминальное множество (4.3) при любом допустимом противодействии убегающего игрока, цель которого — противоположная. В такой постановке дифференциальная (непрерывная) игра (4.2)-(4.3) называется в литературе «Мальчик и крокодил», она исследовалась многими авторами [4, 6, 9, 11, 13, 14]. В теории дифференциальных игр эта игра является важным тестовым показателем эффективности применения новых методов решения задач преследования и убегания. В игре (4.2)-(4.3) «Мальчик и крокодил» активную роль будем предоставлять убегающему игроку, задачей которого является построение такого допустимого управления (измеримой функции), которое обеспечивает уклонение (убегание) от M из заданной допустимой начальной позиции на бесконечном интервале времени.

4.2. «Мальчик и крокодил» (дискретная игра с параметром). Перейдем от дифференциальной игры «Мальчик и крокодил» к ее дискретному аналогу. Этот переход, называемый в [13, с. 65] «квантизацией», можно осуществлять разными способами, некоторые из них изложены в [1]. Нами предлагается следующий способ квантизации непрерывной дифференциальной игры (4.2)-(4.3), отличный от ранее применявшихся. В начале запишем (4.2) в матричном виде:

$$\dot{z}(t) = Cz(t) + \bar{u}(t) + \bar{v}(t), \quad (4.4)$$

где

$$C = \begin{bmatrix} O & I \\ O & O \end{bmatrix}, \quad \bar{u}(t) = \begin{bmatrix} 0_m \\ u(t) \end{bmatrix}, \quad \bar{v}(t) = \begin{bmatrix} -v(t) \\ 0_m \end{bmatrix}, \quad t \geq 0, \quad (4.5)$$

O и I — нулевая и единичная матрицы порядка m , соответственно; 0_m — начало \mathbb{R}^m .

Введем последовательность $\{t_k, k = 0, 1, 2, 3, \dots\}$, $t_{k+1} - t_k = \tau > 0$, $t_0 = 0$.

При подстановке в уравнение (4.2) $t = t_k > 0$, $k = 1, 2, 3, \dots$ оно примет вид

$$\dot{z}(t_k) = Cz(t_k) + \bar{u}(t_k) + \bar{v}(t_k). \quad (4.6)$$

Теперь заменим в (4.6) производную ее приближенным значением:

$$\dot{z}(t_k) \approx \frac{z(t_k) - z(t_k - \tau)}{\tau}. \quad (4.7)$$

Замена (4.7), на наш взгляд, предпочтительнее в силу того, что в дифференциальных играх в каждый момент времени t известны, обычно, значения $z(s)$ при $s \leq t$, которые в будущие моменты $s > t$ не известны, так как позиция формируются двумя противоборствующими сторонами. Замена (4.7) учитывает этот факт.

Подставляя правую часть (4.7) в уравнение (4.6), получаем дискретное уравнение с параметром типа (2.1) (ср. [1, 8, 10, 13]):

$$z((k+1)\tau) = \bar{A}(\tau)z(k\tau) + \bar{B}(\tau)[\bar{u}((k+1)\tau) + \bar{v}((k+1)\tau)], \quad (4.8)$$

где

$$\bar{A}(\tau) = (I - \tau C)^{-1}, \quad \bar{B}(\tau) = \tau(I - \tau C)^{-1}, \quad k = 0, 1, 2, \dots, \quad (4.9)$$

а $\bar{u}((k+1)\tau)$ и $\bar{v}((k+1)\tau)$ задаются на основе (4.5).

Терминальное множество зададим в виде [8]:

$$M = \{z = (z_1, z_2)^T \in \mathbb{R}^{2m} : \langle n_i^\pm, z \rangle \leq l, \quad z_2 \in \mathbb{R}^m\} \notin \emptyset, \quad (4.10)$$

где $l \geq 0$; $n_i^{pm} \in \mathbb{R}^{2m}$ — векторы, у которых только i -я координата равна ± 1 , $1 \leq i \leq m$, остальные координаты равны нулю; \langle, \rangle — символ скалярного произведения. Терминальное множество M ограничено по первым m координатам $2m$ гиперплоскостями (с нормальными n_i^\pm), по остальным m координатам ограничений не имеет.

Дискретную игру (4.8)-(4.9) с терминальным множеством (4.10) будем называть дискретной игрой «Мальчик и крокодил», соответствующей (или ассоциированной) непрерывной дифференциальной игре (4.2)-(4.3).

Напомним, что убегающий игрок стремится не попасть на каждом конечном шаге на M , т. е. на каждом шаге убегания хотя бы одна из координат точки z_1 не должна удовлетворять неравенствам из (4.10). Для этой игры убегание будет означать непопадание на терминальное множество (4.10) на каждом шаге, и для этого достаточно невыполнения на каждом шаге одного из неравенств в (4.10).

Проверим выполнимость условий теоремы 3.1 об убегании для задачи «Мальчик и крокодил» в дискретном варианте.

Несложные вычисления показывают, что в (4.9) будет:

$$\bar{A}(\tau)z = \begin{bmatrix} I & \tau I \\ O & I \end{bmatrix} \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z_1 + \tau z_2 \\ z_2 \end{bmatrix}, \quad \bar{B}(\tau) = \begin{bmatrix} \tau I & \tau^2 I \\ O & \tau I \end{bmatrix}, \quad \bar{B}(\tau)\bar{u} = \begin{bmatrix} \tau^2 u \\ \tau u \end{bmatrix}, \quad \bar{B}(\tau)\bar{v} = \begin{bmatrix} -\tau v \\ 0_m \end{bmatrix}, \quad (4.11)$$

$$\bar{F}(\tau, z, u, v) = \bar{A}(\tau)z + \bar{B}(\tau)(\bar{u} + \bar{v}) = \begin{bmatrix} z_1 + \tau z_2 \\ z_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \tau^2 u \\ \tau u \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -\tau v \\ 0_m \end{bmatrix}. \quad (4.12)$$

Вычислим теперь множество $E(\tau)$ (формула (3.2)), которое для игры (4.8)–(4.10) будет выглядеть следующим образом:

$$E(\tau) = \{z \in \mathbb{R}^{2m} : \min_u \max_v \max_i [< n_i^\pm, \bar{F}(\tau, z, u, v) > -l] \leq 0 \}. \quad (4.13)$$

Далее, используя линейность уравнений дискретной игры (4.8), а также (4.11)–(4.12), нетрудно вычислить, что

$$E(\tau) = \{z \in \mathbb{R}^{2m} : |(z_1 + \tau z_2)_i| + \sigma\tau - \rho\tau^2 - l \leq 0\}, \quad (4.14)$$

где индекс i означает номер координаты, дающей максимум в $E(\tau)$, $1 \leq i \leq m$. Из вида вычисленного множества $E(\tau)$ получаем, что

$$|(z_1 + \tau z_2)_i| \leq l - \sigma\tau + \rho\tau^2. \quad (4.15)$$

Очевидно, что если выполнено квадратное неравенство $\rho\tau^2 - \sigma\tau + l < 0$, то из (4.13) следует, что $E(\tau) = \emptyset$, и выполняется соотношение $E(\tau) = \emptyset \subset M \neq \emptyset$. Поэтому если параметры рассматриваемой игры l, τ, σ, ρ удовлетворяют неравенствам

$$l + \tau(\rho\tau - \sigma) < 0, \quad \sigma^2 \geq 4\rho l, \quad (4.16)$$

то выполняются все условия теоремы 3.1 об убегании, а значит, в дискретной игре «Мальчик и крокодил» возможно убегание, реализуемое на основе пошагового метода убегания.

Из (4.14) нетрудно получить различные соотношения между параметрами дискретной игры «Мальчик и крокодил», обеспечивающие возможность убегания от терминального множества M вида (4.10). Например, при фиксированных значениях параметров l, σ и ρ задача убегания в игре «Мальчик и крокодил» разрешима, если параметр $\tau \in (\tau_1, \tau_2)$ и $\sigma^2 \geq 4\rho l$, где

$$\tau_1 = \frac{\sigma - \sqrt{\sigma^2 - 4\rho l}}{2\rho}, \quad \tau_2 = \frac{\sigma + \sqrt{\sigma^2 - 4\rho l}}{2\rho}. \quad (4.17)$$

5. ОБСУЖДЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ

Отметим некоторые отличия в дискретных играх на примере «Мальчик и крокодил» в дискретном варианте.

1. Квантизация непрерывной игры «Мальчик и крокодил» приводит к двум разным уравнениям, одним из них является полученное выше уравнение (4.8) с пояснениями (4.9), которое запишется в виде:

$$z((k+1)\tau) = (I - \tau C)^{-1} \{ z(k\tau) + \tau(\bar{u}((k+1)\tau) + \bar{v}((k+1)\tau)) \}. \quad (5.1)$$

2. Другое дискретное уравнение для задачи «Мальчик и крокодил» получено квантизацией в [1, с. 116] и имеет в наших обозначениях вид:

$$z((k+1)\tau) = (I + \tau C)z(k\tau) + B(\tau)\bar{u}(k\tau) + D(\tau)\bar{v}(k\tau). \quad (5.2)$$

Нетрудно видеть, что уравнения (4.15) и (4.16) существенно отличаются друг от друга, что приводит к необходимости аккуратно проводить квантизацию в целях получения достоверных результатов о непрерывных играх. С другой стороны, каждый из классов дискретных игр (4.15) и (4.16) можно рассматривать как самостоятельный объект, который при исследовании может дать свои собственные результаты.

В заключение отметим, что уравнение (4.16) использовалось в [1] только для исследования задачи преследования.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азамов А. А. Основания теории дискретных игр. — Ташкент: Niso Poligraf, 2011.
2. Дзюбенко Г. Ц., Пшеничный Б. Н. Дискретные дифференциальные игры с запаздыванием информации // Кибернетика. — 1972. — № 6. — С. 69–73.
3. Маматов М. Ш. О применении метода конечных разностей к решению задачи преследования в системах с распределенными параметрами // Автоматика и телемеханика. — 2009. — № 8. — С. 123–132.
4. Мищенко Е. Ф., Никольский М. С., Сатимов Н. Задача уклонения от встречи в дифференциальных играх многих лиц // Тр. МИАН. — 1997. — 113. — С. 105–128.
5. Половинкин Е. С. Многозначный анализ и дифференциальные включения. — М.: Физматлит, 2014.

6. Понтрягин Л. С., Мищенко Е. Ф. Задача избегания одного управляемого объекта от другого // Докл. АН СССР. — 1969. — 189, № 4. — С. 721–723.
7. Сатимов Н. Ю. Задача избегания для одного класса нелинейных дискретных игр // Изв. АН СССР. Техн. киберн. — 1973. — № 6. — С. 45–48.
8. Сатимов Н., Азамов А. А. Нелинейные дискретные игры избегания // Кибернетика. — 1976. — № 4. — С. 70–73.
9. Черноусько Ф. Л., Меликян А. А. Игровые задачи поиска и управления. — М.: Наука, 1978.
10. Чикрий А. А. О линейных дискретных играх качества // Кибернетика. — 1971. — № 6. — С. 90–99.
11. Chikrii A. A. Conflict-controlled processes. — Boston—London—Dordrecht: Kluwer Acad. Publ., 1997.
12. Fleming W. The convergence problem for differential games // J. Math. Anal. Appl. — 1961. — № 3. — С. 102–116.
13. Isaacs R. Differential games (A mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization). — New York—London—Sydney: John Wiley and Sons, 1965.
14. Krasovskii N. N., Subbotin A. I. Game theoretical control problems. — New York—Berlin: Springer, 1988.
15. Yugay L. P. The problem of trajectories avoiding a sparse terminal set // Dokl. Math. — 2020. — 102, №3. — С. 538–541.

Л. П. Югай

Узбекский государственный университет физической культуры и спорта, Чирчик, Узбекистан
E-mail: yugailp@mail.ru

UDC 517.9

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-2-375-382

EDN: VCEYZY

Evasion problem in linear parametric discrete games

L. P. Yugay

Uzbek State University of Physical Culture and Sport, Chirchiq, Uzbekistan

Abstract. We consider the evasion problem in the formulation by Pontryagin and Mishchenko for linear discrete games depending on a parameter. We obtain sufficient conditions and domains of parameter values that ensure the solvability of the evasion problem. The obtained results are applied to the solution of the evasion problem for the well-known problem in the theory of differential games “Isotropic Rockets”—“Boy and Crocodile” in the discrete version.

Keywords: differential game, discrete game, evasion, pursuer, evader player, control, parameter, terminal set.

Conflict-of-interest. The authors declare no conflicts of interest.

Acknowledgments and funding. The authors declare that no financial support was received.

For citation: L. P. Yugay, “Evasion problem in linear parametric discrete games,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. 69, No. 2, 375–382. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-2-375-382>

REFERENCES

1. A. A. Azamov, *Osnovaniya teorii diskretnykh igr* [Foundations of the Theory of Discrete Games], Niso Poligraf, Tashkent, 2011 (in Russian).



2. G. Ts. Dzyubenko and B. N. Pshenichnyy, “Diskretnye differentsial’nye igry s zapazdyvaniem informatsii” [Discrete differential games with information delay], *Kibernetika* [Cybernetics], 1972, No. 6, 69–73 (in Russian).
3. M. Sh. Mamatov, “O primeneniі metoda konechnykh raznostey k resheniyu zadachi presledovaniya v sistemakh s raspredelennymi parametrami” [On the application of the finite difference method to solving the pursuit problem in systems with distributed parameters], *Avtomatika i telemekhanika* [Automation Telemekh.], 2009, No. 8, 123–132 (in Russian).
4. E. F. Mishchenko, M. S. Nikol’skiy, and N. Satimov, “Zadacha ukлонeniya ot vstrechi v differentsial’nykh igrakh mnogikh lits” [Evasion problem in differential games for many persons], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1997, **113**, 105–128 (in Russian).
5. E. S. Polovinkin, *Mnogoznachnyy analiz i differentsial’nye vkluycheniya* [Multivalued Analysis and Differential Inclusions], Fizmatlit, Moscow, 2014 (in Russian).
6. L. S. Pontryagin and E. F. Mishchenko, “Zadacha ubeganiya odnogo upravlyaemogo ob"ekta ot drugogo” [The evasion problem of one controlled object from another], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1969, **189**, No. 4, 721–723 (in Russian).
7. N. Yu. Satimov, “Zadacha ubeganiya dlya odnogo klassa nelineynykh diskretnykh igr” [Evasion problem for a class of nonlinear discrete games], *Izv. AN SSSR. Tekhn. kibern.* [Bull. Acad. Sci. USSR. Tech. Cybern.], 1973, No. 6, 45–48 (in Russian).
8. N. Satimov and A. A. Azamov, “Nelineynye diskretnye igry ubeganiya” [Nonlinear Discrete Evasion Games], *Kibernetika* [Cybernetics], 1976, No. 4, 70–73 (in Russian).
9. F. L. Chernous’ko and A. A. Melikyan, *Igrovye zadachi poiska i upravleniya* [Game Problems of Search and Control], Nauka, Moscow, 1978 (in Russian).
10. A. A. Chikriy, “O lineynykh diskretnykh igrakh kachestva” [On linear discrete quality games], *Kibernetika* [Cybernetics], 1971, No. 6, 90–99 (in Russian).
11. A. A. Chikrii, *Conflict-controlled processes*, Kluwer Acad. Publ., Boston—London—Dordrecht, 1997.
12. W. Fleming, “The convergence problem for differential games,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1961, No. 3, 102–116.
13. R. Isaacs, *Differential games (A mathematical theory with applications to warfare and pursuit, control and optimization)*, John Wiley and Sons, New York—London—Sydney, 1965.
14. N. N. Krasovskii and A. I. Subbotin, *Game theoretical control problems*, Springer, New York—Berlin, 1988.
15. L. P. Yugay, “The problem of trajectories avoiding a sparse terminal set,” *Dokl. Math.*, 2020, **102**, No. 3, 538–541.

L. P. Yugay

Uzbek State University of Physical Culture and Sport, Chirchiq, Uzbekistan

E-mail: yugailp@mail.ru