РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 69, № 1, 2023

Дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1
http://journals.rudn.ru/cmfd

Научный журнал
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи, информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)
4 выпуска в год
http://journals.rudn.ru/cmfd
Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.
Включен в каталог подписных изданий агентства «Роспечать», индекс 36832.
Индексируется в РИНЦ и международных базах данных *MathSciNet* и *Zentralblatt Math.*
Полный текст журнала размещен в базах данных компании *EBSCO Publishing* на платформе *EBSCOhost.*
Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты.

Правила оформления статей, архив публикаций в открытом доступе и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала: http://journals.rudn.ru/cmfd, http://www.mathnet.ru/cmfd.

Редактор: *Е. М. Варфоломеев*
Компьютерная верстка: *Е. М. Варфоломеев*

Адрес редакции:
115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru

Подписано в печать 13.01.2023. Формат 60×84/8.
Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.
Усл. печ. л. 24,18. Тираж 110 экз. Заказ 45.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования
«Российский университет дружбы народов» (РУДН)
117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

Отпечатано в типографии ИПК РУДН
115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3
тел. +7 495 952-04-41; e-mail: publishing@rudn.ru

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 69, No. 1, 2023
Differential and Functional Differential Equations

DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1
http://journals.rudn.ru/cmfd

Founded in 2003
Founder: PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA

CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS
Published by the Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russian Federation

ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)
4 issues per year
http://journals.rudn.ru/cmfd
Indexed by *Russian Index of Science Citation*, *MathSciNet*, *Zentralblatt Math*.
The full texts can be found in the *EBSCOhost* databases by *EBSCO Publishing*.
Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences* (*New York*).

Aims and Scope

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results.

Guidelines for authors, free accessible archive of issues, and other information can be found at the journal's website: http://journals.rudn.ru/cmfd, http://www.mathnet.ru/eng/cmfd.

Editor: *E. M. Varfolomeev*
Computer design: *E. M. Varfolomeev*
Address of the Editorial Office:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: cmfdj@rudn.ru
Print run 110 copies.
Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia
6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia
Printed at RUDN Publishing House:
3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia
Tel. +7 495 952-04-41; e-mail: publishing@rudn.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 1 (2023)

СОДЕРЖАНИЕ

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions, 2023, Vol. 69, No. 1

CONTENTS

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 1 (2023). С. 1–17
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.929
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-1-17
EDN: EMWUDQ

ГЛАДКОСТЬ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ОБ УСПОКОЕНИИ НЕСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ УПРАВЛЕНИЯ С ПОСЛЕДЕЙСТВИЕМ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА НА ВСЕМ ИНТЕРВАЛЕ

А. Ш. Адхамова

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

Рассматривается задача об успокоении нестационарной системы управления, описываемой системой дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа с гладкими матричными коэффициентами и несколькими запаздываниями. Эта задача эквивалентна краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка, которая имеет единственное обобщенное решение. Доказано, что гладкость этого решения может нарушаться на рассматриваемом интервале и сохраняется лишь на некоторых подынтервалах. Получены достаточные условия на начальную функцию, обеспечивающие гладкость обобщенного решения на всем интервале.

Ключевые слова: дифференциально-разностное уравнение нейтрального типа, задача об успокоении системы управления с последействием, задача Красовского, обобщенное решение, гладкость решения

Для цитирования: *А. Ш. Адхамова.* Гладкость решений задачи об успокоении нестационарной системы управления с последействием нейтрального типа на всем интервале// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 1. С. 1–17. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-1-17

1. Введение

Впервые задача об успокоении системы управления с последействием рассматривалась Н. Н. Красовским [7]. Поведение системы управления описывалось системой линейных дифференциально-разностных уравнений запаздывающего типа с постоянными коэффициентами и постоянным запаздыванием. В работах [11, 18] задача Н. Н. Красовского об успокоении системы управления с последействием была обобщена на случай, когда уравнение, описывающее управляемую систему, содержит также старшие члены с запаздыванием, т. е. имеет нейтральный тип. Многомерная система управления с постоянными матричными коэффициентами исследовалась в [9, 14], а многомерная нестационарная система управления нейтрального типа рассматривалась в [2, 3]. Системы управления с последействием запаздывающего типа изучались в [1, 8, 10]. Отметим также работы, посвященные исследованию систем нейтрального типа с малыми коэффициентами при членах с запаздыванием [15, 17].

Настоящая работа посвящена исследованию гладкости обобщенных решений краевых задач для систем дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа, к которым сводится

Публикация подготовлена при поддержке гранта РФФИ № 20-31-90119.

задача об успокоении многомерных нестационарных систем управления нейтрального типа, рассмотренная в [2,3]. Гладкость обобщенных решений этих краевых задач может нарушаться внутри интервала при сколь угодно гладкой начальной функции. Однако, как показано в статье [1], гладкость решений сохраняется на некоторых подынтервалах. В данной статье получены достаточные условия сохранения гладкости на всем интервале.

Статья построена следующим образом. В первом разделе содержится введение, второй раздел посвящен постановке задачи об успокоении многомерной системы управления с последействием и связи между вариационной задачей, описывающей модель успокоения системы управления с последействием нейтрального типа, и краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка. В том же разделе сформулирована теорема об однозначной разрешимости рассматриваемой краевой задачи. Доказательство результатов, изложенных во втором разделе, можно найти в работе [2]. В третьем разделе содержатся свойства разностных операторов на конечном интервале. В четвертом разделе изучается гладкость обобщенных решений на подынтервалах [1]. Отметим, что вопросы гладкости обобщенных решений второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами рассматривались в работах [12, 13].

2. Постановка задачи

Рассмотрим линейную систему управления, описываемую системой дифференциально-разностных уравнений

$$\sum_{m=0}^{M} A_m(t)y'(t-m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t-m\tau) = u(t), \quad 0 < t < T. \tag{2.1}$$

Здесь $y(t) = (y_1(t), \dots, y_n(t))^T$ — неизвестная вектор-функция, описывающая состояние системы, $u(t) = (u_1(t), \dots, u_n(t))^T$ — вектор-функция управления, $A_m(t) = \{a_{ij}^m(t)\}_{i,j=1,\dots,n}, B_m(t) = \{b_{ij}^m(t)\}_{i,j=1,\dots,n}$ — матрицы порядка $n \times n$ с элементами $a_{ij}^m(t)$, $b_{ij}^m(t)$, которые являются вещественными непрерывно дифференцируемыми функциями на $\mathbb{R}$, $\tau = \mathrm{const} > 0$ — запаздывание.

Предыстория системы задается начальным условием

$$y(t) = \varphi(t), \quad t \in [-M\tau, 0]. \tag{2.2}$$

Здесь $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))^T$ — некоторая вектор-функция.

Рассмотрим задачу о приведении системы (2.1) с начальным условием (2.2) в положение равновесия при $t \geqslant T$. Для этого мы найдем такое управление $u(t)$, $0 < t < T$, что

$$y(t) = 0, \quad t \in [T - M\tau, T], \tag{2.3}$$

где $T > (M+1)\tau$.

Будем искать управление, доставляющее минимум функционалу энергии

$$\int_0^T |u(t)|^2 dt \to \min,$$

где $|\cdot|$ — евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Таким образом, в силу (2.1) мы получаем вариационную задачу о минимуме функционала

$$J(y) := \int_0^T \left| \sum_{m=0}^{M} A_m(t)y'(t-m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t)y(t-m\tau) \right|^2 dt \to \min. \tag{2.4}$$

Мы приведем без доказательства ряд результатов из [2,3], необходимых нам в дальнейшем для изучения гладкости обобщенных решений.

Чтобы установить взаимосвязь между вариационной задачей (2.4), (2.2), (2.3) и соответствующей краевой задачей для системы дифференциально-разностных уравнений, введем некоторые вспомогательные обозначения для различных вещественных функциональных пространств.

Обозначим через $C(\mathbb{R})$ пространство непрерывных и ограниченных на $\mathbb{R}$ функций с нормой

$$||x(t)||_{C(\mathbb{R})} = \sup_{t\in\mathbb{R}} |x(t)|.$$

Пусть $C^k(\mathbb{R})$, $k \in \mathbb{N}$, — пространство непрерывных и k раз непрерывно дифференцируемых функций на $\mathbb{R}$, ограниченных на $\mathbb{R}$ вместе со всеми производными вплоть до k-го порядка, с нормой

$$||x(t)||_{C^k(\mathbb{R})} = \max_{0\leqslant i\leqslant k} \sup_{t\in\mathbb{R}} |x^{(i)}(t)|.$$

Обозначим через $W_2^k(a,b)$ пространство абсолютно непрерывных на $[a,b]$ функций, имеющих производную k-го порядка из $L_2(a,b)$ со скалярным произведением

$$(v,w)_{W_2^k(a,b)} = \sum_{i=0}^{k} \int_a^b v^{(i)}(t) w^{(i)}(t) dt.$$

Пусть $\mathring{W}_2^k(a,b) = \{w \in W_2^k(a,b) : w^{(i)}(a) = w^{(i)}(b) = 0, i = 0, \ldots, k-1\}$.

Введем пространства вектор-функций

$$L_2^n(a,b) = \prod_{i=1}^{n} L_2(a,b), \qquad W_2^{k,n}(a,b) = \prod_{i=1}^{n} W_2^k(a,b), \qquad \mathring{W}_2^{k,n}(a,b) = \prod_{i=1}^{n} \mathring{W}_2^k(a,b),$$

со скалярными произведениями

$$(v,w)_{L_2^n(a,b)} = \sum_{i=1}^{n} (v_i,w_i)_{L_2(a,b)}, \qquad (v,w)_{W_2^{k,n}(a,b)} = \sum_{i=1}^{n} (v_i,w_i)_{W_2^k(a,b)},$$

где $v = (v_1,\ldots,v_n)^T,\ w = (w_1,\ldots,w_n)^T$.

Покажем, что вариационная задача (2.2)–(2.4) эквивалента краевой задаче для системы дифференциально-разностных уравнений второго порядка.

Пусть $y \in W_2^{1,n}(-M\tau,T)$ — решение вариационной задачи (2.2)–(2.4), где $\varphi \in W_2^{1,n}(-M\tau,0)$. Введем пространства

$$\widetilde{L} = \{v \in L_2^n(-M\tau,T) : v(t) = 0,\ t \in (-M\tau,0) \cup (T-M\tau,T)\},$$
$$\widetilde{W} = \{v \in W_2^{1,n}(-M\tau,T) : v(t) = 0,\ t \in (-M\tau,0) \cup (T-M\tau,T)\}.$$

Мы будем часто отождествлять пространство $\widetilde{L}$ с $L_2^n(0,T-M\tau)$, а пространство $\widetilde{W}$ с $\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)$, не оговаривая этого специально.

Пусть $v \in \widetilde{W}$ — произвольная фиксированная функция. Тогда функция $y+sv$ принадлежит $W_2^{1,n}(-M\tau,T)$ и удовлетворяет краевым условиям (2.2), (2.3) для всех $s \in \mathbb{R}$.

Обозначим $J(y+sv) = F(s)$. Поскольку $J(y+sv) \geqslant J(y),\ s \in \mathbb{R}$, мы имеем

$$\left.\frac{dF}{ds}\right|_{s=0} = 0, \tag{2.5}$$

$$B(y,v) := \int_0^T \left(\sum_{m=0}^{M} A_m(t) y'(t-m\tau) + \sum_{m=0}^{M} B_m(t) y(t-m\tau)\right)^T \times \\ \times \left(\sum_{l=0}^{M} A_l(t) v'(t-l\tau) + \sum_{l=0}^{M} B_l(t) v(t-l\tau)\right) dt. \tag{2.6}$$

Из равенства (2.5) следует, что

$$B(y,v) = 0, \quad v \in \widetilde{W}. \tag{2.7}$$

Обозначим

$$B_{m,l}(y,v) = \int_0^T \big(A_m(t) y'(t-m\tau) + B_m(t) y(t-m\tau)\big)^T \big(A_l(t) v'(t-l\tau) + B_l(t) v(t-l\tau)\big)\, dt. \tag{2.8}$$

Проведем преобразование слагаемых, полученных при раскрытии скобок в правой части (2.8). В слагаемых, содержащих $v(t-l\tau)$ или $v'(t-l\tau)$, сделаем замену переменной $\xi = t - l\tau$. Получим

$$B_{m,l}(y,v) = \int\limits_{-l\tau}^{T-l\tau} (A_m(\xi+l\tau)y'(\xi+(l-m)\tau) + B_m(\xi+l\tau) \times$$

$$\times\, y(\xi+(l-m)\tau))^T(A_l(\xi+l\tau)v'(\xi) + B_l(\xi+l\tau)v(\xi))d\xi.$$

Возвращаясь к старой переменной t, полагая $t=\xi$ и учитывая, что $v(t)=0$ при $t \in (-M\tau, 0) \cup (T-M\tau, T)$, имеем

$$B_{m,l}(y,v) = \int\limits_{0}^{T-M\tau} (A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau) + B_m(t+l\tau) \times$$

$$\times\, y(t+(l-m)\tau))^T(A_l(t+l\tau)v'(t) + B_l(t+l\tau)v(t))dt. \quad (2.9)$$

Из (2.6), (2.8) и (2.9) следует, что

$$B(y,v) = \int\limits_{0}^{T-M\tau} \sum_{l,m=0}^{M} \{(A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau))^T(A_l(t+l\tau)v'(t)) +$$

$$+ [(A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau))^T B_l(t+l\tau) - ((B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))^T A_l(t+l\tau))' +$$

$$+ (B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))^T B_l(t+l\tau)]v(t)\}dt. \quad (2.10)$$

Из (2.10) и определения обобщенной производной следует, что

$$\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau) \in W_2^{1,n}(0, T-M\tau). \quad (2.11)$$

Подставляя (2.10) в (2.7), в силу (2.11) мы можем произвести интегрирование по частям. Поскольку $v \in \mathring{W}_2^{1,n}(0, T-M\tau)$ — произвольная функция, мы получим

$$\mathcal{A}_R y := -\left(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau)\right)' +$$

$$+ \sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau) - \left(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau)\right)' +$$

$$+ \sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau) = 0 \ (t \in (0, T-M\tau). \quad (2.12)$$

Таким образом, вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ удовлетворяет системе дифференциально-разностных уравнений (2.12) почти всюду на интервале $(0, T-M\tau)$.

Определение 2.1. Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ называется *обобщенным решением* задачи (2.12), (2.2), (2.3), если выполняется условие (2.11), $y(t)$ почти всюду на $(0, T-M\tau)$ удовлетворяет системе уравнений (2.12), а также краевым условиям (2.2), (2.3).

Очевидно, следующее определение обобщенного решения эквивалентно определению 2.1.

Определение 2.2. Вектор-функция $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ называется *обобщенным решением* задачи (2.12), (2.2), (2.3), если она удовлетворяет интегральному тождеству

$$B(y,v) = \int\limits_{0}^{T-M\tau} \sum_{l,m=0}^{M} (A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau))^T v'(t)dt +$$

$$+\int\limits_0^{T-M\tau}\sum_{l,m=0}^{M}\{(B_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y'(t+(l-m)\tau))^T-$$
$$-((A_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))')^T+$$
$$+(B_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau))^T\}v(t)dt=0 \quad (2.13)$$

для всех $v\in \mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)$, а также краевым условиям (2.2), (2.3).

Таким образом, мы доказали, что если вектор-функция $y\in W_2^{1,n}(-M\tau,T)$ является решением вариационной задачи (2.2)–(2.4), то она будет обобщенным решением краевой задачи (2.12), (2.2), (2.3).

Справедливо и обратное утверждение: если вектор-функция $y\in W_2^{1,n}(-M\tau,T)$ является обобщенным решением краевой задачи (2.12), (2.2), (2.3), то она будет решением вариационной задачи (2.2)–(2.4), см. [2]. Таким образом, справедливо следующее утверждение.

Теорема 2.1. *Пусть $\varphi\in W_2^{1,n}(-M\tau,0)$. Функционал (2.4) с краевыми условиями (2.2), (2.3) достигает минимума на некоторой функции тогда и только тогда, когда она является обобщенным решением краевой задачи (2.12), (2.2), (2.3).*

Имеет место следующий результат, см. [2].

Лемма 2.1. *Пусть $\det A_0(t)\neq 0,\ t\in\mathbb{R}$. Тогда для всех $w\in\widetilde{W}$*

$$J_0(w)\geqslant c_1||w||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)}, \quad (2.14)$$

где $c_1>0$ — постоянная, не зависящая от w,

$$J_0(v):=\int\limits_0^T\left(\sum_{k=0}^{M}A_k(t)v'(t-k\tau)\right)'dt. \quad (2.15)$$

Используя лемму 2.1, можно доказать следующее утверждение, см. [2].

Теорема 2.2. *Пусть $\det A_0(t)\neq 0$, $t\in\mathbb{R}$. Тогда для любой вектор-функции $\varphi\in W_2^{1,n}(-M\tau,0)$ существует единственное обобщенное решение $y\in W_2^{1,n}(-M\tau,T)$ краевой задачи (2.12), (2.2), (2.3), при этом*

$$||y||_{W_2^{1,n}(-M\tau,T)}\leqslant c||\varphi||_{W_2^{1,n}(-M\tau,0)}, \quad (2.16)$$

где $c>0$ — постоянная, не зависящая от φ.

3. Свойства разностных операторов

Положим $d:=T-M\tau$. Пусть $d=(N+\theta)\tau$, где $N\in\mathbb{N},\ 0<\theta\leqslant 1$.

Введем некоторые дополнительные обозначения. Если $0<\theta<1$, обозначим $Q_{1s}=((s-1)\tau,(s-1+\theta)\tau),\ s=1,\dots,N+1$ и $Q_{2s}=((s-1+\theta)\tau,s\tau),\ s=1,\dots,N$. Если $\theta=1$, обозначим $Q_{1s}=((s-1)\tau,s\tau),\ s=1,\dots,N+1$. Таким образом, мы имеем два семейства непересекающихся интервалов, если $0<\theta<1$, и одно семейство, если $\theta=1$; причем каждые два интервала одного семейства получаются друг из друга сдвигом на некоторое число.

Не ограничивая общности, будем предполагать $M=N$.

Введем оператор $R:L_2^n(0,d)\to L_2^n(0,d)$ по формуле

$$(Rx)(t)=\sum_{l,m=0}^{M}A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)x(t+(l-m)\tau). \quad (3.1)$$

Лемма 3.1. *Оператор $R:L_2^n(0,d)\to L_2^n(0,d)$ самосопряженный, т. е. для любых $x,y\in L_2(\mathbb{R})$ выполняется равенство*

$$(Rx,y)_{L_2^n(\mathbb{R})}=(x,Ry)_{L_2^n(\mathbb{R})}.$$

Доказательство. Действительно, при любых $x, y \in L_2^n(\mathbb{R})$, делая замену $t' = t+(l-m)\tau$, получим

$$(Rx,y)_{L_2^n(\mathbb{R})} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)x(t+(l-m)\tau) \right) y(t)dt =$$

$$= \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t') \left(\sum_{l,m=0}^{M} A_m^T(t'+m\tau)A_l(t'+m\tau)y(t'+(m-l)\tau) \right) dt'.$$

Обозначая t' через t и меняя местами индексы l, m, имеем

$$(Rx,y)_{L_2^n(\mathbb{R})} = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau) \right) dt = (x, Ry)_{L_2^n(\mathbb{R})}.$$

□

Запишем оператор R в виде

$$(Ry)(t) := \sum_{s=-M}^{M} C_s(t)y(t+s\tau), \tag{3.2}$$

где

$$C_s(t) := \sum_{l,m:l-m=s} A_l^T(t+l\tau)A_m(t+l\tau) \tag{3.3}$$

— матрица порядка $n \times n$ с элементами $c_s^{ij}(t)$, $i,j = 1,\ldots,n$. По построению $c_s^{ij}(t)$ — непрерывно дифференцируемые функции на $\mathbb{R}$.

Обозначим $Q := (0,d)$. Введем ограниченные операторы $I_Q : L_2^n(Q) \to L_2^n(\mathbb{R})$ и $P_Q : L_2^n(\mathbb{R}) \to L_2^n(Q)$ следующим образом: $(I_Qx)(t) = x(t)$, $t \in (0,d)$, $(I_Qx)(t) = 0$, $t \notin (0,d)$ и $(P_Qy)(t) = y(t)$, $t \in (0,d)$. Обозначим $R_Q = P_QRI_Q$. Из леммы 3.1 вытекает следующий результат.

Лемма 3.2. *Оператор $R_Q : L_2^n(Q) \to L_2^n(Q)$ ограниченный и самосопряженный.*

Пусть $P_\alpha : L_2^n(Q) \to L_2^n(\bigcup\limits_s Q_{\alpha s})$ — оператор ортогонального проектирования из пространства $L_2^n(Q)$ на пространство $L_2^n(\bigcup\limits_s Q_{\alpha s})$, где $L_2^n(\bigcup\limits_s Q_{\alpha s}) = \left\{ y \in L_2^n(Q) : y(t) = 0,\ t \in (0,d) \backslash \bigcup\limits_s Q_{\alpha s} \right\}$, $\alpha = 1,2$, если $\theta < 1$; $\alpha = 1$ и P_α — единичный оператор, если $\theta = 1$.

Очевидно следующее утверждение.

Лемма 3.3. $L_2^n(\bigcup\limits_s Q_{\alpha s})$ — *инвариантное подпространство оператора R_Q.*

Введем оператор $U_\alpha : L_2(\bigcup\limits_s Q_{\alpha s}) \to L_2^{N(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$ по формуле

$$(U_\alpha y)_k(t) = y(t+(k-1)\tau), t \in Q_{\alpha 1}, \tag{3.4}$$

где $k = 1,\ldots,N(\alpha)$; $N(\alpha) = M+1$, если $\alpha = 1$; $N(\alpha) = M$, если $\alpha = 2$.

Введем теперь изометрический изоморфизм гильбертовых пространств $\widetilde{U}_\alpha : L_2^n(\bigcup\limits_s Q_{\alpha s}) \to L_2^{nM}(Q_{\alpha 1})$ по формуле

$$(\widetilde{U}_\alpha y)(t) = ((U_\alpha y_1)^T, \ldots, (U_\alpha y_n)^T)^T(t), \tag{3.5}$$

где

$$y = (y_1,\ldots,y_n)^T \in L_2^n(0,d), \qquad (U_\alpha y_j)(t) = ((U_\alpha y_j)_1(t), \ldots, (U_\alpha y_j)_M(t))^T.$$

Для каждого $\alpha = 1,2$ рассмотрим блочную матрицу

$$R_\alpha(t) = \{R_{\alpha ij}(t)\}_{i,j=1}^n. \tag{3.6}$$

Здесь R_{1ij} — квадратные матрицы порядка $(M+1)\times(M+1)$ с элементами

$$r_{kl}^{1ij} = c_{l-k}^{ij}(t+(k-1)\tau), \quad k,l = 1,\ldots,M+1, \tag{3.7}$$

R_{2ij} — квадратные матрицы порядка $M \times M$ с элементами

$$r^{2ij}_{kl} = c^{ij}_{l-k}(t + (k-1)\tau), \quad k, l = 1, \ldots, M. \tag{3.8}$$

Лемма 3.4. *Оператор* $R_{Q\alpha} = \widetilde{U}_\alpha R_Q \widetilde{U}_\alpha^{-1} : L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1}) \to L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$ *является оператором умножения на симметричную матрицу* $R_\alpha(t)$.

Доказательство. Пусть $V \in L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$. Обозначим $v = \widetilde{U}_\alpha^{-1} V \in L_2^n(\bigcup\limits_l Q_{sl})$. В силу формулы (3.4) и определения оператора R_Q мы имеем

$$(R_{Q\alpha}V)_{(i-1)N(\alpha)+k}(t) = (\widetilde{U}_\alpha R_Q \widetilde{U}_\alpha^{-1} V)_{(i-1)N(\alpha)+k}(t) = (\widetilde{U}_\alpha R_Q v)_{(i-1)N(\alpha)+k}(t) =$$
$$= \sum_{j=1}^{n} \sum_{s} C_s^{ij}(t + (k-1)\tau) v_j(t + (k-1+s)\tau) \quad (t \in Q_{\alpha 1}). \tag{3.9}$$

Здесь мы суммируем по s таким, что $1 \leqslant k + s \leqslant N(\alpha)$.

Пусть $l := k + s$. Тогда из (3.9) и (3.8) следует, что

$$(R_{Q\alpha}V)_{(i-1)N(\alpha)+k}(t) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{N(\alpha)} C_{l-k}^{ij}(t + (k-1)\tau) v_j(t + (l-1)\tau) = \sum_{j=1}^{n} \sum_{l=1}^{N(\alpha)} r_{kl}^{\alpha ij}(t) V_{(j-1)N(\alpha)+l}(t).$$

Таким образом, мы доказали, что оператор $R_{Q\alpha}$ является умножением на матрицу R_α в пространстве $L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$. Отсюда из леммы 3.2 следует симметричность матрицы R_α. □

Также отметим следующее равенство:

$$\widetilde{U}_\alpha R_Q y = R_\alpha \widetilde{U}_\alpha y, \quad y \in L_2(Q). \tag{3.10}$$

Пусть $B_{mp}(t)$ — алгебраическое дополнение элемента r_{mp} матрицы R_1, $m, p = 1, \ldots, n \times (M+1)$. Будем записывать индексы следующим образом: $B^{i+(l-1)(M+1)}_{j+(k-1)(M+1)}(t)$, где $i, j = 1, \ldots, M+1$, $k, l = 1, \ldots, n$. Таким образом, $B^{i+(l-1)(M+1)}_{j+(k-1)(M+1)}(t)$ соответствует элементу R_{lk1}, находящемуся в i-й строке и j-м столбце. Аналогичным образом обозначим через $r^{i+(l-1)(M+1)}_{j+(k-1)(M+1)} = r^{lk}_{ij}$ элемент матрицы R_1, находящийся в i-й строке и j-м столбце матрицы R_{1lk}.

Обозначим через $\mathcal{B}_1$ матрицу, полученную вычеркиванием первой строки и первого столбца из каждой матрицы $R_{ij1}, i, j = 1, \ldots, n$. Важно, что матрица $\mathcal{B}_1$ совпадает с матрицей, полученной вычеркиванием последней строки и последнего столбца в каждой матрице $R_{ij1}, i, j = 1, \ldots, n$.

Лемма 3.5. *Оператор* $R_Q : \mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau) \to W_2^{1,n}(0, T - M\tau)$ *является непрерывным, причем* $(R_Q \overline{y})' = R_Q \overline{y}' + R_Q' \overline{y}$ *для любых* $\overline{y} \in \mathring{W}_2^{1,n}(0, T - M\tau)$.

Доказательство очевидно.

Обозначим через $W^{1,n}_{2,\Gamma}$ подпространство функций $w \in W_2^{1,n}(0, T - M\tau)$, которое удовлетворяет следующим условиям:

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{M+1} B^{i+(l-1)(M+1)}_{1+(k-1)(M+1)}(0) w_l(i - \tau) = 0, \tag{3.11}$$

$$\sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{M+1} B^{i+(l-1)(M+1)}_{k(M+1)}(\theta) w_l(\theta + i - \tau) = 0, \tag{3.12}$$

где $k = 1, \ldots, n$.

Лемма 3.6. *Предположим, что* $\det R_1(t) \neq 0$, $t \in Q_{11}$ *и* $\det \mathcal{B}_1(t) \neq 0$, $t \in Q_{21}$. *Тогда оператор* R_Q *отображает* $W_2^{1,n}(0, T - M\tau)$ *на пространство* $W^{1,n}_{2,\Gamma}(0, T - M\tau)$ *непрерывно и взаимно однозначно.*

Доказательство. Докажем, что $R_Q(W_2^{1,n}(0,T-M\tau)) \subset W_{2,\Gamma}^{1,n}(0,T-M\tau)$,

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{M+1} B_{1+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(0)\ (R_Qy)_l(i-1) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{M+1} B_{1+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(0)\ \left(\sum_{m=1}^{n} R_{lmQ}y_m\right)(i-1) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{M+1} B_{1+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(0)\ \sum_{m=1}^{n}(\widetilde{U}_1 R_{lmQ}y_m)_i(0) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{M+1} B_{1+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(0)\ \sum_{m=1}^{n}(R_{lm}\widetilde{U}_1 y_m)_i(0) =$$

$$= \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{M+1} B_{1+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(0)\ \sum_{m=1}^{n}\sum_{j=2}^{M+1} r_{ij}^{lm} y_m(j-\tau) =$$

$$= \sum_{m=1}^{n}\sum_{j=2}^{M+1} y_m(j-\tau)\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{M+1} B_{1+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(0)\ r_{j+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)} = 0.$$

Получаем, что если $y \in \mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)$, равенство (3.11) выполняется. Следовательно, $R_Qy \subset W_{2,\Gamma}^{1,n}(0,T-M\tau)$. Равенство (3.12) рассматривается аналогично.

Теперь докажем обратное вложение: $W_{2,\Gamma}^{1,n}(0,T-M\tau) \subset R_Q(\mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau))$. Пусть $\overline{w} \in W_{2,\Gamma}^{1,n}(0,T-M\tau)$. Согласно лемме 3.4 оператор $R_Q : L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1}) \to L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$ имеет ограниченный обратный оператор $R_Q^{-1} : L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1}) \to L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$. Покажем, что $\overline{y} = R_Q^{-1}\overline{w} \in \mathring{W}_2^{1,n}(0,T-M\tau)$. Без потери общности предположим, что $\theta = 1$. Очевидно, что $y \in W_2^{1,n}((s-1)\tau, s\tau)$. Таким образом, достаточно показать, что $y_m(0+0) = y_m(0-0)$ и $y_m(0) = y_m(d) = 0$, $l = 1,\ldots,M$, $m = 1,\ldots,n$. Используя (3.11), получим

$$\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{M+1} B_{1+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(0)\ (R_Qy)_l(i-\tau) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{M+1} B_{1+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(0)\ (\sum_{m=1}^{n} R_{lmQ}y_m)(i-\tau) =$$

$$= \sum_{m,l=1}^{n}\sum_{i,j=1}^{M+1} B_{1+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(0) r_{j+(m-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)} y_m(j-\tau) = \det R_1(0) \times y_k(0) = 0,$$

$k = 1,\ldots,n$. Так как $\det R_1(t) \neq 0$, получаем, что $y_k(0) = 0$, $k = 1,\ldots,n$. Используя (3.12), получим $y_k(T-M\tau) = 0$, $k = 1,\ldots,n$. Теперь покажем, что $R_Qy \subset W_2^{1,n}(0,T-M\tau)$, т. е. $(R_Qy)(\tau+0) = (R_Qy)(\tau-0)$, $l = 1,\ldots,M$, $m = 1,\ldots,n$.

Пусть $\phi_{l+(k-1)(M+1)} = y_k(\tau+0)$, $l = 0,\ldots,M$; $\psi_{l+(k-1)(M+1)} = y_k(\tau-0)$, $l = 0,\ldots,M+1$. Тогда

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{M+1} r_{i+1,l}^{p,k}\phi_{l-1+(k-1)(M+1)} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{M+1} r_{i,l}^{p,k}\psi_{l+(k-1)(M+1)},$$

$i = 1,\ldots,M$, $p = 1,\ldots,n$. Согласно краевым условиям $\phi_{0+(k-1)(M+1)} = \psi_{M+1+(k-1)(M+1)} = 0$. Получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{M+1} r_{i+1,l+1}^{p,k}\phi_{l+(k-1)(M+1)} = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{M+1} r_{i,l}^{p,k}\psi_{l+(k-1)(M+1)}.$$

Используя равенство $r_{i,l}^{p,k} = r_{i+1,l+1}^{p,k}$, получаем

$$\sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{M+1} r_{i,l}^{p,k}(\phi_{l+(k-1)(M+1)} - \psi_{l+(k-1)(M+1)}) = 0,$$

$i = 1,\ldots,M$, $p = 1,\ldots,n$. Неравенство $\det \mathcal{B}_1(0) \neq 0$ означает, что $\phi_{l+(k-1)(M+1)} = \psi_{l+(k-1)(M+1)}$, $l = 1,\ldots,M$, $k = 1,\ldots,n$. $\square$

4. Гладкость обобщенных решений на подынтервалах

Как известно [4, 5, 18], гладкость обобщенных решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа может нарушаться внутри интервала, на котором определено решение. С другой стороны, гладкость обобщенных решений сохраняется на некоторых подынтервалах.

Приведем теорему о гладкости обобщенного решения на подынтервалах из [1].

Теорема 4.1. *Пусть* $\det A_0(t) \neq 0$, $t \in \mathbb{R}$, *и пусть* $\varphi \in W_2^{2,n}(-M\tau, 0)$. *Тогда обобщенное решение* $y \in W_2^{1,n}(-M\tau, T)$ *задачи* (2.12), (2.2), (2.3) *обладает следующей гладкостью на подынтервалах интервала* $(0, d)$:

- $y \in W_2^{2,n}((j-1)\tau, j\tau)$ $(j = 1, \ldots, M+1)$, *если* $\theta = 1$;
- $y \in W_2^{2,n}((j-1)\tau, (j-1+\theta)\tau)$ $(j = 1, \ldots, M+1)$ *и* $y \in W_2^{2,n}((j-1+\theta)\tau, j\tau)$ $(j = 1, \ldots, M)$, *если* $\theta < 1$.

Доказательство.

1. По теореме о продолжении функций в пространстве Соболева для любой вектор-функции $\varphi \in W_2^{2,n}(-M\tau, 0)$ существует $\Phi \in W_2^{2,n}(-M\tau, T)$ такая, что $\Phi(t) = \varphi(t)$ при $t \in (-M\tau, 0)$, $\Phi(t) = 0$ при $t \in (T - M\tau, T)$ и
$$||\Phi||_{W_2^{2,n}(-M\tau,T)} \leqslant k_1 ||\varphi||_{W_2^{2,n}(-M\tau,0)}, \tag{4.1}$$
где константа $k_1 > 0$ не зависит от φ.

Введем вектор-функцию $x(t) = y(t) - \Phi(t) \in W_2^{1,n}(-M\tau, 0)$. Поскольку $\Phi \in W_2^{2,n}(-M\tau, T)$, то в силу (2.11) $x(t)$ удовлетворяет условию
$$\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t + l\tau) A_m(t + l\tau) x'(t + (l - m)\tau) \in W_2^{1,n}(0, T - M\tau). \tag{4.2}$$

Таким образом, вектор-функция $x(t)$ удовлетворяет почти всюду на интервале $(0, T - M\tau)$ системе дифференциально-разностных уравнений
$$\mathcal{A}_R^0 x := -(R_Q x')'(t) = F(t), \quad t \in (0, T - M\tau) \tag{4.3}$$
и краевым условиям
$$x(0) = x(T - M\tau) = 0. \tag{4.4}$$
Здесь
$$\begin{aligned} F(t) := -\mathcal{A}_R\Phi - \sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t + l\tau) A_m(t + l\tau) y'(t + (l - m)\tau) + \\ + \Big(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t + l\tau) B_m(t + l\tau) y(t + (l - m)\tau)\Big)' - \\ - \sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t + l\tau) B_m(t + l\tau) y(t + (l - m)\tau) \in L_2^n(0, T - M\tau). \end{aligned}$$

2. Повторяя в обратном порядке выкладки раздела 2, сделанные при выводе системы дифференциально-разностных уравнений (2.12) из интегрального тождества (2.7), в силу леммы 2.1 мы получим неравенство
$$(\mathcal{A}_R^0 w, w)_{L_2^n(0,T-M\tau)} = J_0(w) \geqslant c_1 ||w||^2_{W_2^{1,n}(0,T-M\tau)} \tag{4.5}$$
для любых $w \in C_0^{\infty,n}(0, T - M\tau) := \prod_{j=1}^{n} C_0^\infty(0, T - M\tau)$.

Будем предполагать, что $\operatorname{supp} w \subset \bigcup_s Q_{\alpha s}$. Обозначим $W_\alpha = U_\alpha w$. Тогда из равенства (3.5) и лемм 3.2, 3.4 следует, что
$$-((R_\alpha W_\alpha')', W_\alpha)_{L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})} \geqslant c_1 ||W_\alpha||^2_{W_2^{1,nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})}. \tag{4.6}$$

Из (4.3) и формулы Лейбница следует, что вектор-функция $U_\alpha x \in W_2^{1,nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$ удовлетворяет почти всюду в $Q_{\alpha 1}$ системе дифференциальных уравнений

$$-R_\alpha(t)(U_\alpha x)''(t) = F_0(t), \quad t \in Q_{\alpha 1}, \tag{4.7}$$

где $F_0(t) = F(t) - R'_\alpha(t)(U_\alpha x)'(t) \in L_2^{nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$.

Таким образом, чтобы доказать утверждение теоремы, достаточно убедиться, что $\det R_1(t) \neq 0$ для всех $t \in \overline{Q_{\alpha 1}}$, поскольку тогда из (4.7) мы получим $U_\alpha x \in W_2^{2,nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})$, т. е. $y = x - \Phi \in W_2^{2,n}(Q_{\alpha 1})$, $s = 1, \ldots, N(\alpha)$.

Для доказательства того, что $\det R_1(t) \neq 0$ для всех $t \in \overline{Q_{\alpha 1}}$, мы используем неравенство (4.5).

3. Пусть $t^0 \in \overline{Q_{\alpha 1}}$ — произвольная точка. Выберем t^1 и r так, что $[t^1 - r, t^1 + r] \subset \overline{Q_{\alpha 1}} \cap (t^0 - \delta, t^0 + \delta)$, где $\delta > 0$ будет определено ниже. Предположим, что $W_\alpha \in C_0^{\infty, nN(\alpha)}(t^1 - r, t^1 + r)$. Из (4.6) следует, что

$$b_1 + b_2 \geqslant k_2 ||W_\alpha||^2_{W_2^{1,nN(\alpha)}(Q_{\alpha 1})}, \tag{4.8}$$

где

$$b_1 = (R_\alpha(t^0)W'_\alpha, W'_\alpha)_{L_2^{nN(\alpha)}(t^1 - r, t^1 + r)},$$
$$b_2 = ((R_\alpha(t) - R_\alpha(t^0))W'_\alpha, W'_\alpha)_{L_2^{nN(\alpha)}(t^1 - r, t^1 + r)}.$$

Поскольку коэффициенты матрицы $R_\alpha(t)$ равномерно непрерывны на $[0, T - M\tau]$, мы имеем

$$|b_2| \leqslant \varepsilon(\delta) ||W_\alpha||_{W_2^{1,nN(\alpha)}(t^1 - r, t^1 + r)},$$

где $\varepsilon(\delta) \to 0$ при $\delta \to 0$. Выберем $\delta > 0$ так, что $\varepsilon(\delta) < k_2/2$. Тогда из (4.8) мы получим

$$(R_\alpha(t^0)W'_\alpha, W'_\alpha)_{L_2^{nN(\alpha)}(t^1 - r, t^1 + r)} \geqslant \frac{k_2}{2} ||W_\alpha||^2_{W_2^{1,nN(\alpha)}(t^1 - r, t^1 + r)}.$$

Получим теперь аналогичную оценку для функции $V_\alpha \in C_0^{\infty, nN(\alpha)}(-R, R)$, где $\varkappa = R/r > 1$. Сделаем замену переменной $\eta = \varkappa(t - t^1)$. Обозначим $V_\alpha(\eta) = W_\alpha(t(\eta))$. Тогда из последнего неравенства мы получим

$$\begin{aligned}(R_\alpha(t^0)V'_\alpha(\eta), V'_\alpha(\eta))_{L_2^{nN(\alpha)}(-R,R)} &= \varkappa^{-1}(R_\alpha(t^0)W'_\alpha(t), W'_\alpha(t))_{L_2^{nN(\alpha)}(t^1 - r, t^1 + r)} \geqslant \\ &\geqslant \frac{k_2}{2}\varkappa^{-1}||W'_\alpha(t)||^2_{L_2^{nN(\alpha)}(t^1 - r, t^1 + r)} = \frac{k_2}{2}||V'_\alpha(\eta)||^2_{L_2^{nN(\alpha)}(-R,R)}.\end{aligned} \tag{4.9}$$

Предположим, что $V_\alpha = v_\alpha Y$, где $v_\alpha \in C_0^\infty(-R, R)$, $Y \in \mathbb{C}^{nN(\alpha)}$. Пусть функция v_α продолжена нулем в $\mathbb{R}\backslash(-R, R)$. Тогда, используя преобразование Фурье, из (4.9) в силу теоремы Планшереля мы получим

$$\int\limits_{\mathbb{R}} (R_\alpha(t^0)\xi^2 Y, Y)|\hat{v}_\alpha(\xi)|^2 d\xi \geqslant \frac{k_2}{2} \int\limits_{\mathbb{R}} \xi^2 |Y|^2 |\hat{v}_\alpha(\xi)|^2 d\xi. \tag{4.10}$$

Здесь

$$\hat{v}_\alpha(\xi) = (2\pi)^{-1/2} \int\limits_{\mathbb{R}} v_\alpha(\eta) e^{-i\xi\eta} d\eta$$

— преобразование Фурье функции $v_\alpha(\eta)$. Поскольку $C_0^\infty(\mathbb{R})$ всюду плотно в $L_2(\mathbb{R})$, из (4.10) следует, что

$$(R_\alpha(t^0)Y, Y) \geqslant \frac{k_2}{2}|Y|^2.$$

Таким образом, симметрическая матрица $R_\alpha(t^0)$ положительно определена для любого $t_0 \in \overline{Q_{\alpha 1}}$. Следовательно, $\det R_0(t) \neq 0$ для всех $t \in \overline{Q_{\alpha 1}}$. $\square$

Рассмотрим следующую модельную задачу:

$$-(R_Q y)''(t) = F(t), \quad F \in L_2^n(0, T - M\tau), \tag{4.11}$$
$$y(t) = 0, \quad t \in (-M\tau, 0) \cup (T - M\tau, T). \tag{4.12}$$

Ее обобщенное решение определяется аналогично решению (2.12), (2.2), (2.3).

Задача (4.11), (4.12) также обладает гладкостью на подынтервалах, поэтому определены значения $y'(0+0)$ и $y'(d-0)$.

Пусть
$$\mathfrak{L}y = -(R_Q y)''.$$

Теорема 4.2. *Предположим, что* $\det \mathcal{B}_1(0) \neq 0$ *и* y *— обобщенное решение задачи* (4.11), (4.12). *Тогда если*
$$y'(0+0) = y'(d-0) = 0,$$
то $y \in \mathring{W}_2^{2,n}(0, T - M\tau)$.

Доказательство. Для простоты предположим, что $\theta = 0$. Случай $\theta \in (0,1)$ рассматривается аналогично. Докажем, что $\mathcal{D}(\mathfrak{L}) \subset \mathring{W}_2^{2,n}(0, T - M\tau)$. Пусть $y \subset D(\mathfrak{L})$. Тогда $w = R_Q y \subset W_2^{2,n}(0, T - M\tau)$, т. е. $\widetilde{U}_1 w_l \subset W_2^{2,M+1}(0,1)$. Так как $w_l = \sum\limits_{k=1}^{n} R_{lkQ} y_k$, получаем $\widetilde{U}_1 w_l = \sum\limits_{k=1}^{n} R_{lki} \widetilde{U}_1 y_k$, $l = 1, \ldots, n$. Следовательно, $(\widetilde{U}_1 y_k)$ — линейная комбинация функций, принадлежащих $W_2^{2,M+1}(0,1)$, т. е. $\widetilde{U}_1 y_k \in W_2^{2,M+1}(0,1)$ (воспользуемся тем фактом, что $\det R_1(0) \neq 0$) и $y_k \in W_2^2(l-1, l)$, $l = 1, \ldots, M+1$. Этого достаточно, чтобы доказать, что $y_k'(l-0) = y_k'(l+0)$, $l = 1, \ldots, N$.

Из равенства $(R_Q y)_l = w_l \in W_2^2(0,d)$ получаем
$$\sum_{k=1}^{n} (R_{lkQ} y_k)'(m-0) = \sum_{k=1}^{n} (R_{lkQ} y_k)'(m+0),$$
$m = 1, \ldots, M$, $l = 1, \ldots, n$. Применим $\widetilde{U}_1$ к обеим сторонам равенства.

Используя (3.10), получим
$$\sum_{k=1}^{n} (R_{1lk} \widetilde{U}_1 y_k')_m (\tau - 0) = \sum_{k=1}^{n} (R_{1lk} \widetilde{U}_1 y_k')_{m+1}(0+0),$$
$m = 1, \ldots, M$, $l = 1, \ldots, n$.

Пусть $\phi_{mk} = (\widetilde{U}_1 y_k')_m (1-0), \psi_{mk} = (\widetilde{U}_1 y_k')_{m+1}(0+0)$. Так как $y_k'(0+0) = (\widetilde{U}_1 y_k')_1 (0+0) = 0$ и $y_k'(d-0) = (\widetilde{U}_1 y_k')_{M+1}(1-0) = 0$, можем записать
$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{M} r_{m,j}^{l,k} \phi_{j,k} = \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=2}^{M+1} r_{m+1,i}^{l,k} \psi_{i-1,k},$$
$m = 1, \ldots, M$, $l = 1, \ldots, n$.

Так как $r_{m,j}^{l,k} = r_{m+1,j+1}^{l,k}$, то
$$\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=2}^{M+1} r_{m+1,j}^{l,k} (\phi_{j-1,k} - \psi_{j-1,k}) = 0, \tag{4.13}$$
$m = 1, \ldots, M$, $l = 1, \ldots, n$.

Очевидно, что $r_{m+1,j}^{l,k} = r_{j+(k-1)(M+1)}^{m+1+(l-1)(M+1)}$, где $m = 1, \ldots, M$; $j = 2, \ldots, M+1$; $l, k = 1, \ldots, M$. Введем две вспомогательные функции. Пусть $\phi_{j-1+(k-1)(N+1)} = \phi_{j-1,k}$, $\psi_{j-1+(k-1)(M+1)} = \psi_{j-1,k}$, $j = 2, \ldots, M+1$, $k = 1, \ldots, n$.

Теперь с помощью этих функций можем переписать (4.13) в виде
$$\sum_{k=1}^{M} \sum_{j=2}^{M+1} r_{j+(k-1)(M+1)}^{m+1+(l-1)(M+1)} (\phi_{j-1+(k-1)(M+1)} - \psi_{j-1+(k-1)(M+1)}) = 0, \tag{4.14}$$
$m = 1, \ldots, M$.

С учетом того, что $\mathcal{B}_1(0) \neq 0$, можем сделать вывод, что система (4.13) имеет только тривиальные решения, т. е. $\phi_{j-1+(k-1)(M+1)} = \psi_{j-1+(k-1)(M+1)}$, $j = 2, \ldots, M+1, k = 1, \ldots, n$. Другими словами, $y_k'(l-0) = y_k'(l+0), l = 1, \ldots, M$, $k = 1, \ldots, n$. Следовательно, $y \in \mathring{W}_2^{2,n}(0, T - M\tau)$.

□

Рассмотрим вектор $w = R_Q y$, где y — решение системы уравнений $\mathfrak{L}y = F$. В силу леммы 3.6 w является решением системы уравнений

$$-w''(x) = F(x), \quad x \in (0,d) \tag{4.15}$$

и удовлетворяет нелокальным краевым условиям (3.11) и (3.12). И обратно: если w обладает этими свойствами, то функция $y = R_Q^{-1}w$ является обобщенным решением уравнения (4.11) с краевым условием (4.12).

Общее решение уравнения (4.13) принимает следующий вид:

$$w(t) = C_1 + C_2 t + \int\limits_0^t (t-\tau)F(\tau)d\tau. \tag{4.16}$$

Если мы подставим $w(t)$ в (3.11) и (3.12), благодаря (4.16) мы получим следующие системы $2n$ уравнений для C_1 и C_2 :

$$\sum_{l=1}^{n} C_1^l \sum_{i=1}^{M+1} B_{1+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(0) + \sum_{l=1}^{n} C_2^l \sum_{i=1}^{M+1} (i-\tau) B_{1+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(0) =$$
$$= -\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{M+1} B_{1+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(0) \int\limits_0^{i-1} (i-\tau)F_l(\tau)d\tau = 0, \tag{4.17}$$

$$\sum_{l=1}^{n} C_1^l \sum_{i=1}^{M+1} B_{k(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(\theta) + \sum_{l=1}^{n} C_2^l \sum_{i=1}^{M+1} (i-\tau+\theta) B_{k(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(\theta) =$$
$$= -\sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{M+1} B_{k(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(\theta) \int\limits_0^{i-1+\theta} (i+\theta-\tau)F_l(\tau)d\tau = 0, \tag{4.18}$$

где $k = 1,\dots,n$.

Используя $y_k'(0+0) = y_k'(d-0) = 0$, $k = 1,\dots,n$, получаем

$$y_k'(0+0) = (\widetilde{U}_1 y_k')_1(0+0) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{M+1} (\det R_1(0))^{-1} \times B_{1+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(0)(\widetilde{U}_1 w_l')_i(0+0) =$$
$$= \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{M+1} B_{1+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(0) \times (\det R_1(0))^{-1} w_l'(i-\tau-0) =$$
$$= \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{M+1} (\det R_1(0))^{-1} B_{1+(k-1)(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(0)(C_2^l + \int\limits_0^{i-1} F_l(\tau)d\tau) = 0, \tag{4.19}$$

$k = 1,\dots,M$.

Аналогично,

$$u_k'(d-0) = \sum_{l=1}^{n}\sum_{i=1}^{M+1} (\det R_1(0))^{-1} B_{k(M+1)}^{i+(l-1)(M+1)}(\theta)(C_2^l + \int\limits_0^{\theta+i-1} F_l(\tau)d\tau) = 0, \tag{4.20}$$

$k = 1,\dots,M$.

Система уравнений $\mathfrak{L}y = F$ разрешима, значит, система линейных алгебраических уравнений (4.17), (4.18) разрешима. Решения $y \in \mathcal{D}(\mathfrak{L})$ принадлежат пространству $W_2^{2,n}(0, T - M\tau)$ тогда и только тогда, когда выполняются условия (4.19) и (4.20).

Матрицу, соответствующую (4.17), (4.18), обозначим через $\mathfrak{R}$:

$$\mathfrak{R} = \left\| \begin{array}{c|c} \mathrm{A} & \mathrm{B} \\ \hline \mathrm{G} & \mathrm{D} \end{array} \right\|, \tag{4.21}$$

где

$$A = \left\| \sum_{i=1}^{M+1} B^{i+(l-1)(M+1)}_{1+(k-1)(M+1)}(0) \right\|^n_{k,l=1}, \qquad B = \left\| \sum_{i=1}^{M+1} (i-\tau) B^{i+(l-1)(M+1)}_{1+(k-1)(M+1)}(0) \right\|^n_{k,l=1},$$

$$G = \left\| \sum_{i=1}^{M+1} B^{i+(l-1)(M+1)}_{k(M+1)}(\theta) \right\|^n_{k,l=1}, \qquad D = \left\| \sum_{i=1}^{M+1} (i-\tau+\theta) B^{i+(l-1)(M+1)}_{k(M+1)}(\theta) \right\|^n_{k,l=1}.$$

Замечание. Условием однозначной разрешимости модельной задачи (4.11), (4.12) является невырожденность матрицы $\mathfrak{R}$: $\det \mathfrak{R} \neq 0$. В дальнейшем будем полагать его выполненным. Эта задача отличается от исходной задачи с оператором A^0_R, которая разрешима, младшими членами, поэтому накладываемое условие не лишнее, однозначная разрешимость модельной задачи не следует из однозначной разрешимости краевой задачи.

Теперь рассмотрим модельную задачу в пространстве гладких функций. Ей будет отвечать ограниченный оператор $\mathfrak{L}_0 : \mathring{W}^{2,n}_2(0, T - M\tau) \to L^n_2(0, T - M\tau)$. Из гладкости обобщенных решений на подынтервалах и из [16, лемма 4.1] следует, что гладкость обобщенного решения связана с проверкой равенств $y'(0+0) = y'(d-0) = 0$. Для анализа этих равенств мы сводим рассматриваемую задачу к задаче для уравнения $-w''(t) = F(t)$ с нелокальными краевыми условиями, что обеспечивается леммой 3.6 об изоморфизме. Заметим, что подстановкой общего решения в краевые условия (4.17) и (4.18) и анализом получившейся системы алгебраических линейных уравнений относительно столбцов C_1 и C_2 мы решаем вопрос существования и единственности обобщенного решения. Таким образом, предположение об однозначной разрешимости задачи может быть записано как $\det \mathfrak{R} \neq 0$. Дополнительные условия $y'(0+0) = y'(d-0)$ в случае однозначно определенных выше столбцов C_1 и C_2 имеют вид $2n$ условий на правую часть F. Из доказательства [16, лемма 4.1] следует, что они представляют собой условия ортогональности набору $2n$ линейно независимых функций из $L^n_2(0, T - M\tau)$. Таким образом, $\dim \operatorname{Coker} \mathfrak{L}_0 = 2n$, $\dim \operatorname{Ker} \mathfrak{L}_0 = 0$.

Теорема 4.3. *Пусть* $\det \mathfrak{R} \neq 0$ *и* $\det \mathcal{B}_1(0) \neq 0$. *Тогда* $\dim \operatorname{Ker} \mathfrak{L}_0 = 0$, $\dim \operatorname{Coker} \mathfrak{L}_0 = 2n$.

Доказательство. Ядро тривиально в силу $\det \mathfrak{R} \neq 0$. В силу теоремы 4.2 достаточно проверить следующие условия для обобщенного решения:

$$y'_k(0+0) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{M+1} (\det R_1(0))^{-1} B^{i+(l-1)(M+1)}_{1+(k-1)(M+1)}(0) \left(C^l_2 + \int\limits_0^{i-1} F_l(\tau) d\tau \right) = 0,$$

$$u'_k(d-0) = \sum_{l=1}^{n} \sum_{i=1}^{M+1} (\det R_1(0))^{-1} B^{i+(l-1)(M+1)}_{k(M+1)}(\theta) \left(C^l_2 + \int\limits_0^{\theta+i-1} F_l(\tau) d\tau \right) = 0,$$

$k = 1, \dots, M$, в которых столбец C_2 находится однозначно из системы (4.17), (4.18). В этом случае системы (4.19) и (4.20) принимают вид условий на правую часть уравнения. Из доказательства теоремы 4.3 получим, что (4.19), (4.20) являются условиями ортогональности в системе из $2n$ линейно независимых функций ψ в $L^n_2(-M\tau, 0)$.

Введем пространство вектор-функций

$$\widetilde{H} = L^n_2(0, T - M\tau) \times W^{2,n}_2(-M\tau, 0) \times W^{2,n}_2(T - M\tau, T)$$

и определим линейный непрерывный оператор $G : W^{2,n}_2(-M\tau, T) \to \widetilde{H}$, отвечающий гладким решениям, по следующей формуле:

$$Gy = ((\mathfrak{L}y), (y|_{(-M\tau,0)}), 0),$$

где $\mathfrak{L} : W^{2,n}_2(-M\tau, T) \to L^M_2(-M\tau, T)$ действует по формуле

$$\mathfrak{L}y = -(R_Q y')' + \sum_{l,m=0}^{M} B^T_l(t + l\tau) A_m(t + l\tau) y'(t + (l-m)\tau) +$$

$$+\left(\sum_{l,m=0}^{M} A_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau)\right)' - \sum_{l,m=0}^{M} B_l^T(t+l\tau)B_m(t+l\tau)y(t+(l-m)\tau).$$

Определение 4.1. Функция $y \in W_2^{2,n}(-M, d+M)$ называется *гладким решением* краевой задачи (2.12), (2.2), (2.3), если $Gy = (0, \varphi_1, 0)$.

Теорема 4.4. *Пусть* $\det \mathfrak{R}(0) \neq 0$, $\det \mathcal{B}_1(0) \neq 0$. *Тогда для гладкости обобщенного решения задачи* (2.12), (2.2), (2.3) *необходимо и достаточно, чтобы функция* ϕ *удовлетворяла в пространстве* $W_2^{2,n}(-M\tau, 0)$ *конечному числу* p *условий ортогональности, где* $p \leqslant 2n$.

Ядро G тривиально, поэтому достаточно показать, что его индекс больше или равен $-2n$.

Оператор $\mathfrak{L}$ отличается от оператора $\mathfrak{L}_0$ младшими членами, представляющими собой компактный оператор из $W_2^{2,n}(-M\tau, T)$ в $L_2^n(0, T-M\tau)$, что не меняет индекс оператора, поэтому без ограничения общности можно считать, что $\mathfrak{L}y = -(R_Q y)''$, $\operatorname{ind}\mathfrak{L}_0 = \operatorname{ind}\mathfrak{L} = -2n$.

Рассмотрим уравнение

$$-(R_Q y)''(t) = F(t) \tag{4.22}$$

с краевыми условиями

$$y(t) = \varphi_1(t), \quad t \in (-M\tau, 0), \tag{4.23}$$

$$y(t) = 0, \quad t \in (T-M\tau, T). \tag{4.24}$$

Введем функцию

$$\widetilde{\psi}(t) = \begin{cases} \psi_1(t), & t \in (-M\tau, 0), \\ \psi_2(t), & t \in (T-M\tau, T), \\ (\psi_1(0) + \psi_1'(0))\eta(t) + & \\ \quad + (\psi_2(T-M\tau) + \psi_2'(T-M\tau)(t-T+M\tau))\eta(t-T+M\tau), & t \in (0, T-M\tau), \end{cases}$$

где $\eta(t)$ — срезающая функция такая, что $\eta(t) = 1$, если $|t| < \dfrac{\tau}{4}$, и $\eta(t) = 0$, если $|t| > \dfrac{\tau}{3}$. Представим $v = y - \widetilde{\psi}$, таким образом краевую задачу (4.22)–(4.24) можно переписать в виде

$$\mathfrak{L}_0 v = F - (R\widetilde{\psi})''. \tag{4.25}$$

В силу теоремы 4.3 уравнение (4.25) разрешимо тогда и только тогда, когда

$$(F - (R\widetilde{\psi})'', \xi_i)_{L_2^n(0,T-M\tau)} = 0, \quad i = 1, \ldots, 2n, \tag{4.26}$$

где $\xi_i \in L_2^n(0, d)$, $i = 1, \ldots, 2n$, линейно независимы. Введем линейные функционалы $\Phi_i\widetilde{\psi} = ((R\widetilde{\psi})'', \xi_i)_{L_2^n(0,T-M\tau)}$, $i = 1, \ldots, 2n$. В силу выбора $\widetilde{\psi}$ имеем

$$\Phi_i(\widetilde{\psi}) \leqslant C||\psi||_{W_2^{2,n}(-M\tau,0)}||\xi_i||_{L_2^n(0,T-M\tau)}, \quad i = 1, \ldots, 2n,$$

где $C > 0$. По теореме Рисса существует линейный ограниченный оператор B_1 такой, что

$$-((R\widetilde{\psi})'', \xi_i)_{L_2^n(0,T-M\tau)} = (\psi, B_1\xi_i)_{W_2^{2,n}(-M\tau,0)}.$$

Таким образом, условие (4.26) примет вид

$$(\widetilde{F}, K_i)_{\widetilde{H}} = 0, \quad i = 1, \ldots, 2n, \tag{4.27}$$

где $\widetilde{F} = (F, \varphi_1, 0)$, вектор-функции $K_i = (\xi_i, (B_1\xi_i), 0) \in \widetilde{H}$ линейно независимы в силу линейной независимости функций ξ_i. Для задачи (2.12), (2.2), (2.3) при $F = 0$ условие (4.27) принимает вид $(\varphi_1, B_1\xi_i)_{W_2^{2n}(-M\tau,0)} = 0$, $i = 1, \ldots, 2n$. Некоторые из функций $B_1\xi$ могут быть линейно зависимыми, поэтому число условий ортогональности не превышает $2n$.

Таким образом, индекс задачи (4.22)–(4.24), совпадающий с индексом оператора G, больше или равен $-2n$. Учитывая, что ядро оператора G тривиально, получаем утверждение теоремы.

□

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Адхамова А. Ш.* Гладкость решений задачи об успокоении нестационарной системы управления с последействием// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2022. — *68*, № 1. — С. 14–24.
2. *Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л.* Об одной задаче успокоения нестационарной системы управления с последействием// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2019. — *65*, № 4. — С. 547–556.
3. *Адхамова А. Ш., Скубачевский А. Л.* Об успокоении системы управления с последействием нейтрального типа// Докл. РАН. — 2020. — *490*, № 1. — С. 81–84.
4. *Каменский А. Г.* Краевые задачи для уравнений с формально симметричными дифференциально-разностными операторами// Дифф. уравн. — 1976. — *10*, № 5. — С. 815–824.
5. *Каменский Г. А., Мышкис А. Д.* К постановке краевых задач для дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом и несколькими старшими членами// Дифф. уравн. — 1974. — *10*, № 3. — С. 409–418.
6. *Каменский Г. А., Мышкис А. Д., Скубачевский А. Л.* О гладких решениях краевой задачи для дифференциально-разностного уравнения нейтрального типа// Укр. мат. ж. — 1985. — *37*, № 5. — С. 581–585.
7. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
8. *Кряжимский А. В., Максимов В. И., Осипов Ю. С.* О позиционном моделировании в динамических системах// Прикл. мат. мех. — 1983. — *47*, № 6. — С. 883–890.
9. *Леонов Д. Д.* К задаче об успокоении системы управления с последействием// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *37*. — С. 28–37.
10. *Осипов Ю. С.* О стабилизации управляемых систем с запаздыванием// Дифф. уравн. — 1965. — *1*, № 5. — С. 605–618.
11. *Скубачевский А. Л.* К задаче об успокоении системы управления с последействием// Докл. РАН. — 1994. — *335*, № 2. — С. 157–160.
12. *Скубачевский А. Л., Иванов Н. О.* Вторая краевая задача для дифференциально-разностных уравнений// Докл. РАН. — 2021. — *500*, № 1. — С. 74–77.
13. *Скубачевский А. Л., Иванов Н. О.* Об обобщенных решениях второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2021. — *67*, № 3. — С. 576–595.
14. *Adkhamova A. S., Skubachevskii A. L.* Damping problem for multidimensional control system with delays// Distrib. Comput. Commun. Networks. — 2016. — *678*. — С. 612–623.
15. *Banks H. T., Kent G. A.* Control of functional differential equations of retarded and neutral type to target sets in function space// SIAM J. Control. — 1972. — *10*, № 4. — С. 567–593.
16. *Baumstein A. I., Skubachevskii A. L.* On smooth solutions of the boundary-value problems for the systems of differential-difference equations// Nonlinear Anal. — 1995. — *25*, № 7. — С. 655–668.
17. *Kent G. A.* A maximum principle for optimal control problems with neutral functional differential systems// Bull. Am. Math. Soc. — 1971. — *77*, № 4. — С. 565–570.
18. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 1997.

А. Ш. Адхамова
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: `ami_adhamova@mail.ru`

UDC 517.929
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-1-17
EDN: EMWUDQ

Smoothness of solutions to the damping problem for nonstationary control system with delay of neutral type on the whole interval

A. Sh. Adkhamova

RUDN University, Moscow, Russia

We consider the damping problem for a nonstationary control system described by a system of differential-difference equations of neutral type with smooth matrix coefficients and several delays. This problem is equivalent to the boundary-value problem for a system of second-order differential-difference equations, which has a unique generalized solution. It is proved that the smoothness of this solution can be violated on the considered interval and is preserved only on some subintervals. Sufficient conditions for the initial function are obtained to ensure the smoothness of the generalized solution over the entire interval.

Keywords: neutral-type differential-difference equation, damping problem for control system with aftereffect, Krasovskii problem, generalized solution, smoothness of solution

For citation: A. Sh. Adkhamova, "Smoothness of solutions to the damping problem for nonstationary control system with delay of neutral type on the whole interval," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 1, 1–17. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-1-17`

REFERENCES

1. A. Sh. Adkhamova, "Smoothness of solutions to the damping problem for nonstationary control system with delay" [Gladkost' resheniy zadachi ob uspokoenii nestatsionarnoy sistemy upravleniya s posledeystviem], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2022, **68**, No. 1, 14–24 (in Russian).
2. A. Sh. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, "Ob odnoy zadache uspokoeniya nestatsionarnoy sistemy upravleniya s posledeystviem" [On one damping problem for a nonstationary control system with aftereffect], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2019, **65**, No. 4, 547–556 (in Russian).
3. A. Sh. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, "Ob uspokoenii sistemy upravleniya s posledeystviem neytral'nogo tipa" [On damping of the control system with aftereffect of a neutral-type], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2020, **490**, No. 1, 81–84 (in Russian).
4. A. G. Kamenskii, "Kraevye zadachi dlya uravneniy s formal'no simmetrichnymi differentsial'no-raznostnymi operatorami" [Boundary-value problems for equations with formally symmetric differential-difference operators], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1976, **10**, No. 5, 815–824 (in Russian).
5. G. A. Kamenskii and A. D. Myshkis, "K postanovke kraevykh zadach dlya differentsial'nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom i neskol'kimi starshimi chlenami" [On the formulation of boundary-value problems for differential equations with deviating argument and several leading terms], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1974, **10**, No. 3, 409–418 (in Russian).
6. G. A. Kamenskii, A. D. Myshkis, and A. L. Skubachevskii, "O gladkikh resheniyakh kraevoy zadachi dlya differentsial'no-raznostnogo uravneniya neytral'nogo tipa" [On smooth solutions of the boundary-value problem for a differential-difference equation of neutral type], *Ukr. Mat. Zh.* [Ukrainian Math. J.], 1985, **37**, No. 5, 581–585 (in Russian).
7. N. N. Krasovskii, *Teoriya Upravleniya Dvizheniem* [Theory of Motion Control], Nauka, Moscow, 1968 (in Russian).

8. A. V. Kryazhimskii, V. I. Maksimov, and Yu. S. Osipov, “O pozitsionnom modelirovanii v dinamicheskikh sistemakh” [On positional modeling in dynamical systems], *Prikl. Mat. Mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1983, **47**, No. 6, 883–890 (in Russian).
9. D. D. Leonov, “K zadache ob uspokoenii sistemy upravleniya s posledeystviem” [On a stabilization problem for a control system with aftereffect], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **37**, 28–37 (in Russian).
10. Yu. S. Osipov, “O stabilizatsii upravlyaemykh sistem s zapazdyvaniem” [On stabilization of control systems with delay], *Diff. Uravn.* [Differ. Equ.], 1965, **1**, No. 5, 605–618 (in Russian).
11. A. L. Skubachevskii, “K zadache ob uspokoenii sistemy upravleniya s posledeystviem” [On the problem of damping a control system with aftereffect], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1994, **335**, No. 2, 157–160 (in Russian).
12. A. L. Skubachevskii and N. O. Ivanov, “Vtoraya kraevaya zadacha dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy” [The second boundary-value problem for differential-difference equations], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2021, **500**, No. 1, 74–77 (in Russian).
13. A. L. Skubachevskii and N. O. Ivanov, “Ob obobshchennykh resheniyakh vtoroy kraevoy zadachi dlya differentsial’no-raznostnykh uravneniy s peremennymi koeffitsientami” [On generalized solutions of the second boundary-value problem for differential-difference equations with variable coefficients], *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2021, **67**, No. 3, 576–595 (in Russian).
14. A. S. Adkhamova and A. L. Skubachevskii, “Damping problem for multidimensional control system with delays,” *Distrib. Comput. Commun. Networks*, 2016, **678**, 612–623.
15. H. T. Banks and G. A. Kent, “Control of functional differential equations of retarded and neutral type to target sets in function space,” *SIAM J. Control*, 1972, **10**, No. 4, 567–593.
16. A. I. Baumstein and A. L. Skubachevskii, “On smooth solutions of the boundary-value problems for the systems of differential-difference equations,” *Nonlinear Anal.*, 1995, **25**, No. 7, 655–668.
17. G. A. Kent, “A maximum principle for optimal control problems with neutral functional differential systems,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1971, **77**, No. 4, 565–570.
18. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhauser, Basel–Boston–Berlin, 1997.

A. Sh. Adkhamova
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: ami_adhamova@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 1 (2023). С. 18–31
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.2+517.9
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-18-31
EDN: CNBPXH

КВАЗИЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ И ПАРАБОЛИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С НЕДИАГОНАЛЬНЫМИ ГЛАВНЫМИ МАТРИЦАМИ И СИЛЬНЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ ПО ГРАДИЕНТУ. ПРОБЛЕМЫ РАЗРЕШИМОСТИ И РЕГУЛЯРНОСТИ

А. А. Архипова

Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия

Изучаются недиагональные эллиптические и параболические системы уравнений с сильно нелинейными членами по градиенту. Мы рассматриваем и комментируем известные результаты о разрешимости и регулярности и описываем последние результаты автора в этой области.

Ключевые слова: нелинейные эллиптические системы, нелинейные параболические системы, регулярность слабых решений

Для цитирования: *А. А. Архипова.* Квазилинейные эллиптические и параболические системы с недиагональными главными матрицами и сильными нелинейностями по градиенту. Проблемы разрешимости и регулярности// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 1. С. 18–31. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-18-31

1. Сильно нелинейные эллиптические системы

Пусть Ω — ограниченная область в пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geqslant 2$, и $u : \Omega \to \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 1$ — решение системы

$$-\mathrm{div}(A(x,u)\nabla u) + b(x,u,\nabla u) = f(x), \quad x \in \Omega, \tag{1.1}$$

где $u = (u^1, \dots, u^N)$, $\nabla u = \left\{\dfrac{\partial u^k}{\partial x_\alpha}\right\}_{\alpha \leqslant n}^{k \leqslant N}$.

Предположим, что недиагональная матрица $A(x,u) = \left\{A_{k\,l}^{\alpha\,\beta}(x,u)\right\}_{k,l \leqslant N}^{\alpha,\beta \leqslant n}$ равномерно непрерывна на $\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^N$ и удовлетворяет условию равномерной эллиптичности

$$(A(x,u)\,\xi \cdot \xi) \geqslant \nu\,|\xi|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^{nN}, \tag{1.2}$$

$$|A(x,u)| \leqslant \mu, \quad (x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^N, \tag{1.3}$$

с константами $0 < \nu \leqslant \mu$.

Мы также предполагаем, что функция $b : \Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN} \to \mathbb{R}^N$ определена, удовлетворяет условиям Каратеодори на $\Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN}$, и

$$|b(x,u,p)| \leqslant b_0 |p|^2, \quad b_0 = \mathrm{const}, \quad (x,u) \in \Omega \times \mathbb{R}^N,\ p \in \mathbb{R}^{nN}; \tag{1.4}$$

следующее одностороннее условие выполнено на $\Omega \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^{nN}$:

$$b(x,u,p)\cdot u = \sum_{k=1}^{N} b^k(x,u,p)u^k \geqslant \gamma\,|p|^2, \quad \gamma = \text{const}, \quad \nu+\gamma > 0; \tag{1.5}$$

а также существует константа b_1 такая, что

$$|b(x,v,p) - b(x,v,q)| \leqslant b_1(|p|+|q|)|p-q|, \quad (x,v)\in\Omega\times\mathbb{R}^N, \quad p,q\in\mathbb{R}^{nN}. \tag{1.6}$$

В уравнении (1.1) мы рассматриваем функции

$$f \in L^q(\Omega;\mathbb{R}^N), \quad q > n/2. \tag{1.7}$$

Условие (1.4) означает, что $b(x,u(x),\nabla u(x)) \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ при условии, что u — функция из пространства Соболева $W_2^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$, и мы имеем, что

$$-\operatorname{div}(A(x,u)\nabla u) = -b(x,u(x),\nabla u(x)) + f(x) \in L^1(\Omega;\mathbb{R}^N).$$

Такие системы (и, в частности, скалярные уравнения при $N=1$) известны как сильно нелинейные системы. Для изучения такого класса систем мы вынуждены применять специальные подходы.

Например, для исследования задачи Дирихле для такого класса скалярных уравнений (при $N=1$) в [8] применялся метод Лере—Шаудера. Доказано, что подходящим классом слабых решений является $W_2^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$. *Ограниченность* слабых решений предполагалась как необходимое условие для доказательства их дальнейшей гладкости (см. контрпримеры регулярности в [8, гл. 1, § 2]).

Поскольку класс $W_2^1(\Omega)\cap L^\infty(\Omega)$ является естественным при изучении задачи Дирихле для уравнения (1.1), $N=1$, где $b(x,u,p)$ имеет квадратичный рост по $|p|$ при $|p|\to\infty$, нам потребуются дополнительные предположения для оценки $\|u\|_{L^\infty(\Omega)}$. Одним из таких предположений является одностороннее условие (1.5). Следует отметить, что можно допустить более общие условия, чем (1.4) и (1.5) для функции b, но мы выбрали простейший вариант ограничений, чтобы объяснить основную идею нашего подхода.

В качестве контрпримера регулярности в скалярных задачах Дж. Фрезе [31] рассматривал вариационную задачу

$$\Phi[u] = \int\limits_{B_R(0)} [1 + (1 + e^u\,(\ln|x|)^{-12})^{-1}]\,|\nabla u|^2\,dx \implies \min_{u\in\mathring{W}_2^1(\Omega)},$$

где $u: B_R(0)\to\mathbb{R}^1$, $R=e^{-1}$, $n=2$, $N=1$. Здесь $a(x,u) = 1 + (1+e^u\,(\ln|x|)^{-12})^{-1}$, минимизирующей функцией здесь является $u\equiv 0$, и существует неограниченная экстремаль

$$u(x) = 12\,\ln(\ln|x|^{-1}) \in \mathring{W}_2^1(B_R(0)),$$

$1\leqslant a(x,u(x))\leqslant 2$, $|a'_u(x,u(x))|\leqslant 1$. Эта функция удовлетворяет уравнению Эйлера—Лагранжа

$$-\operatorname{div}(a(x,u)\nabla u) + \frac{1}{2}a'_u(x,u)|\nabla u|^2 = 0$$

в смысле распределений.

В этом примере выполняются предположения (1.1)–(1.4), но нет дополнительного условия, обеспечивающего L^∞-оценку на u.

Теперь рассмотрим так называемые *диагональные* сильно нелинейные системы. В этом случае $u:\Omega\to\mathbb{R}^N$, $N>1$, является решением системы

$$-(a^{\alpha\beta}(x,u)u^k_{x_\beta})_{x_\alpha} + b^k(x,u,\nabla u) = f^k(x), \quad k\leqslant N,\ x\in\Omega, \tag{1.8}$$

где главная $[n\times n]$-матрица $a(x,u)$ одинакова для всех уравнений, а функция b имеет квадратичный рост по градиенту. Качественные свойства решений систем такого типа (в частности, систем, связанных с гармоническими отображениями) хорошо изучены. Априорная оценка L^∞-нормы решений (1.8) была получена в [8, гл. 8, § 5] при некотором одностороннем условии для функции b, но дальнейшая регулярность доказана только при предположении меньшей скорости роста $b(x,u,p)\sim|p|^{2-\varepsilon}$, $\varepsilon>0$, $|p|\to\infty$.

Результаты о гладкости при размерностях $n=2$ и $n\geqslant 3$ для таких систем различны. Гладкая разрешимость задачи Дирихле для класса сильно нелинейных эллиптических систем в $\Omega\subset\mathbb{R}^2$ была доказана Дж. Фрезе [32] при некотором одностороннем условии для b.

С. Хильдебрандтом и К.-О. Видманом [34] было показано, что необходимым условием для доказательства непрерывности по Гельдеру и дальнейшей регулярности слабых решений уравнения (1.8) в $W_2^1(\Omega;\mathbb{R}^N)\cap L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$, $n\geqslant 3$, при условиях (1.2)–(1.4) является следующее условие:

$$b_0\,\|u\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)}<\nu. \tag{1.9}$$

В то же время, контрпримеры П.-А. Айверта [35] и М. Струве [48] подтверждают, что одностороннего условия (1.5) недостаточно для доказательства непрерывности ограниченного слабого решения диагональной системы при $n\geqslant 3$.

Существует важное различие в поведении слабых решений эллиптических систем с *недиагональными* главными матрицами и скалярных уравнений. Напомним, что слабые решения $u\in W_2^1(\Omega)$ уравнения (1.1) с $b=0$, $N=1$ и ограниченными эллиптическими матрицами $a(x)=A(x,u(x))$ — это функции, непрерывные по Гельдеру в Ω, согласно хорошо известным классическим результатам Де Джорджи и Нэша (см. [18, 40] и [8, гл. 4, § 1]).

В 1968 г. в работе [19] Э. Де Джорджи была построена линейная эллиптическая система

$$\operatorname{div}(A(x)\,\nabla u)=0,\quad x\in B_1(0)\subset\mathbb{R}^n,\quad n=N,\ n\geqslant 3, \tag{1.10}$$

с ограниченными, но не гладкими элементами эллиптической матрицы A. Система имеет слабое решение $u\in \mathring{W}_2^1(B_1(0);\mathbb{R}^n)$, $\lim\limits_{x\to 0}|u(x)|=\infty$. Матрица $A(x)$ является симметричной, и мы можем рассматривать $u(x)$ как экстремаль соответствующего квадратичного функционала. Очевидно, результат противоречит скалярной ситуации [18, 40].

Позднее разными авторами было построено много различных контрпримеров регулярности для эллиптических и параболических систем с недиагональными главными частями (см. работы [24, 38, 44–46, 49] и ссылки в них).

Из сказанного следует, что можно ожидать лишь *частичную* регулярность слабых решений различных классов эллиптических и параболических систем. Возникает проблема описания и оценки допустимых сингулярных множеств слабых решений. Как правило, мы можем оценить хаусдорфову размерность сингулярного множества.

В настоящее время существует три основных подхода к изучению частичной регулярности слабых решений. Исторически первый метод использовал идею доказательства от противного. Он известен как «метод от противного». Идея состоит в том, чтобы доказать монотонность масштабированного эксцесса слабого решения от противного (см., например, [24, гл. 4, § 1]).

Позднее появился так называемый «прямой» метод. Он сочетает в себе идею замораживания коэффициентов и более высокую интегрируемость градиента слабого решения u. Более высокая интегрируемость $|\nabla u|$ является следствием применения локального варианта леммы Геринга [23]. Локальные варианты леммы [27, 47] позволяют доказать более высокую интегрируемость $|\nabla u|$ при условии, что определенная степень $|\nabla u|$ удовлетворяет обратным неравенствам Гельдера (ОНГ) с различными носителями (см. [24, гл. 5, § 1] и [26, § 7.1]). ОНГ применялись для уточнения данных о слабых решениях как эллиптических, так и параболических задач. Возникли различные модификации леммы Геринга, в частности, появились ОНГ в параболической метрике. Предложенная автором концепция *квазиобратных неравенств Гельдера* применялась для изучения решений сильно нелинейных эллиптических и параболических систем уравнений (см. [9, 10]).

Наконец, третий подход (метод A-гармонической аппроксимации) был успешно применен Ф. Дюзаром и Дж. Ф. Гротовски для исследования частичной регулярности нелинейных эллиптических систем [20] (см. также [22]). Метод является развитием идеи Э. Де Джорджи, заключающейся в оценке отличия интегрального тождества для слабого решения нелинейной задачи от простейшего тождества для модельной системы с подходящим классом пробных функций (см. [41]). Метод вводит элементарный способ доказательства частичной регулярности решений при более естественных или даже оптимальных предположениях о данных. Эта идея была обобщена Ф. Дюзаром и Г. Минджионе в [21] для изучения частичной регулярности слабых решений для широкого класса параболических систем (метод A-калорической аппроксимации). Позже появилась новая версия метода. Он получил название «метод $A(t)$-калорической аппроксимации» [17].

Метод ослабил предположения о гладкости главной матрицы различных классов параболических систем (см. [14–17]).

Теперь обсудим некоторые известные результаты о частичной регулярности.

Если мы рассмотрим простейшую эллиптическую систему (1.10) в $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geqslant 3$, с эллиптической равномерно непрерывной на $\Omega \times \mathbb{R}^N$ матрицей $A(x,u)$, то любое слабое решение системы из $W_2^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ является функцией, непрерывной по Гельдеру на открытом множестве Ω_0, а замкнутое сингулярное множество $\Sigma = \Omega \setminus \Omega_0$ допускает оценку $H_{n-2-\varepsilon}(\Sigma) = 0$ для некоторого (достаточно малого) $\varepsilon > 0$. Результат был доказан Э. Джусти, М. Миранда [30] и Ч. Морри [39]. Следует отметить, что в двумерном случае ($n = 2$, $N \geqslant 1$) особые множества слабых решений (1.10) отсутствуют. Непрерывность слабых решений в этом случае следует из того, что любое слабое решение (1.10) из $W_2^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ принадлежит некоторому пространству $W_{2+\varepsilon}^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$, $\varepsilon > 0$. Это доказывается с помощью техники ОНГ. Непрерывность следует из теоремы вложения при $\dim \Omega = 2$.

Первый результат об интегрируемости более высокого порядка $|\nabla u|$ для систем (1.10) и более общих систем был доказан М. Джаквинта и Э. Джусти [25]. Авторы применяли *прямой метод* для доказательства частичной регулярности слабых решений.

Такую же оценку сингулярного множества можно получить для систем (1.1), если функция b имеет квадратичный рост по градиенту, и мы рассматриваем слабые *ограниченные* решения $u \in W_2^1(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$ в предположении, что

$$2\, b_0 \, \|u\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)} < \nu, \tag{1.11}$$

где ν и b_0 фиксированы в (1.2) и (1.4), соответственно. Это ограничение на L^∞-норму позволяет получить локальные энергетические оценки решения. Окончание доказательства частичной регулярности такое же, как и в случае $b = 0$ либо в случае не критически растущего b при $|p| \to \infty$.

Следует отметить, что условие (1.11) всегда допускается авторами, если рассматриваются системы с квадратичной нелинейностью по градиенту.

По мнению автора, класс $V = W_2^1(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$ является естественным для изучения сильно нелинейных скалярных уравнений ($N = 1$) и доказательства непрерывности слабых решений во всех точках области. В этой ситуации принцип максимума помогает оценить $\|u\|_{L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)}$ по данным. Для эллиптических и параболических систем с *недиагональными* главными матрицами принцип максимума не выполняется, и у нас нет инструментов для оценки L^∞-нормы решения. Это означает, что невозможно проверить условие (1.11).

Именно по этой причине автор решил рассматривать слабые решения задачи (1.1)–(1.4) в более общем смысле. Предположим, что $u \in W_2^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ может быть неограниченным.

Определение 1.1. Функция $u \in W_2^1(\Omega;\mathbb{R}^N)$ является *слабым решением* системы (1.1), если она удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_\Omega [A(x,u)\,\nabla u \cdot \nabla \eta + b(x,u,\nabla u)\cdot \eta]\, dx = \int\limits_\Omega f(x)\cdot \eta\, dx \quad \forall \eta \in C_0^\infty(\Omega). \tag{1.12}$$

Это означает, что мы понимаем u как решение в смысле распределений. Конечно, мы можем рассмотреть в (1.12) пробные функции из $\mathring{W}_2^1(\Omega;\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\Omega;\mathbb{R}^N)$.

Чтобы доказать локальную регулярность потенциально неограниченных слабых решений, мы дополнительно предположим, что выполняется одностороннее условие (1.5). Сформулируем предположения о поведении u в фиксированной точке $x^0 \in \Omega$, гарантирующие непрерывность $u(x)$ в некоторой окрестности этой точки.

Сначала определим *эксцесс* $E(r,x^0)$ следующим образом:

$$E(r,x^0) = \frac{1}{r^{n-2}} \int\limits_{B_r(x^0)} |\nabla u|^2\, dx.$$

Напомним, что условие

$$\liminf_{r\to 0} E(r,x^0) = 0 \tag{1.13}$$

является основным предположением для описания регулярных точек решений даже для простейших систем (1.10). В этом случае предположение (1.13) позволяет доказать монотонность по r эксцесса $E(r, x^0)$. Как следствие, можно доказать непрерывность по Гельдеру u в окрестности x^0.

Предположения (1.13) и (1.11) обычно используются для доказательства частичной регулярности *ограниченных* слабых решений системы (1.1) при условиях (1.2)–(1.4).

Теперь исследуем среднее значение u. Положим

$$u_{r,x^0} = \frac{1}{|B_r|} \int\limits_{B_r(x^0)} u(y)\, dy$$

и сформулируем следующий результат, принадлежащий автору.

Теорема 1.1 (см. [4, Theorem 2.1]). *Пусть выполнены предположения* (1.2)–(1.7), *а* u — *слабое решение уравнения* (1.1) *из* $W_2^1(\Omega; \mathbb{R}^N)$.

Если при $n > 2$ *имеет место предел*

$$\lim_{\rho \to 0} |u_{\rho,x^0}| = m, \quad m < \frac{\nu + \gamma}{b_0}, \tag{1.14}$$

в некоторой точке $x^0 \in \Omega$, *и если предположение* (1.13) *выполнено в* x^0, *то существует* $B_{\rho_0}(x^0) \subset \Omega$ *такое, что* $u \in C^\beta(\overline{B_{\rho_0}(x^0)}; \mathbb{R}^N)$ *для любого* $\beta \in (0, \min\{1, 2 - n/q\})$.

Если $n = 2$, *то утверждение теоремы следует при выполнении условия* (1.14).

Замечание 1.1. Если доказана непрерывность u по Гельдеру в некотором шаре $B_{\rho_0}(x^0)$ и данные задачи достаточно гладкие, то можно доказать непрерывность $\nabla u(x)$ в некотором шаре $B_{\rho_1}(x^0)$, $\rho_1 < \rho_0$ (см., например, [26, теорема 9.7]), и дальнейшая регулярность следует из линейной теории регулярности.

Замечание 1.2. Как уже упоминалось, условие (1.13) предполагается даже тогда, когда $b = 0$ и требуется описать регулярные точки решений. Мы заменили в этой теореме ограничение (1.11) предположением (1.14).

Замечание 1.3. В [5] мы описали регулярные точки неограниченных слабых решений *нелинейных* эллиптических систем с квадратичной нелинейностью по градиенту

$$-\operatorname{div} a(x, u, \nabla u) + b(x, u, \nabla u) = f(x), \quad x \in \Omega.$$

Предполагалось одностороннее условие для функции b.

Замечание 1.4. В [4, 5] результаты были доказаны методом от противного. Метод был ранее применен Ч. Гамбургером в [33] для изучения частичной регулярности *ограниченных* слабых решений нелинейных эллиптических систем с естественными q-нелинейностями по градиенту, $q \geqslant 2$.

2. Параболические системы с квадратичной нелинейностью по градиенту

Глобальная разрешимость задачи Коши—Дирихле для скалярных параболических уравнений ($N = 1$) с квадратичной нелинейностью по градиенту может быть доказана методом Лере—Шаудера при условии, что данные достаточно гладкие в $\overline{Q^T} = \overline{\Omega} \times [0, T]$ $\forall T > 0$ (см., например, [7, гл. 5, § 6]). В качестве первого шага для применения метода нам потребуется априорная оценка $\|u(x,t)\|_{L^\infty(Q^T)}$ по данным, где u — решение задачи. Напомним, что получить такую оценку помогает одностороннее условие на нелинейный член.

Далее рассмотрим случай $N > 1$.

Прежде всего рассмотрим параболические системы *вариационной* структуры. Более точно, пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^2$, $Q^T = \Omega \times (0, T)$ и $u : Q^T \to \mathbb{R}^N$, $N > 1$, — решение следующей задачи Коши—Дирихле:

$$u_t + L\, u = 0, \quad u = u(z),\ z = (x, t) \in Q^T; \quad u|_{\partial \Omega \times (0,T)} = 0, \quad u|_{t=0} = \phi_0(x). \tag{2.1}$$

Здесь L — оператор Эйлера—Лагранжа для некоторого класса квадратичных функционалов.

Первый результат [1] автора был посвящен системам, порожденным простейшими функционалами

$$\Phi^0[v] = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega} (A(x,v)\nabla v \cdot \nabla v)\, dx, \quad \Omega \subset \mathbb{R}^2,$$

с эллиптическими недиагональными достаточно гладкими матрицами A (см. также [2, 11, 12]). В [1] было доказано, что глобальное решение задачи существует и имеет не более чем конечное число особых (сингулярных) точек $(x^j, t^j) \in \overline{\Omega} \times (0, \infty)$. Точка (x^j, t^j) является особой, если

$$\limsup_{t \nearrow t^j} E(u(t), B_r(x^j) \cap \Omega) \geqslant \varepsilon_0 \quad \forall r > 0 \tag{2.2}$$

при некотором $\varepsilon_0 > 0$, где

$$E(u(t), B_r(x^j) \cap \Omega) = \frac{1}{2} \int\limits_{\Omega \cap B_r(x^j)} (A(x, u(x,t))\nabla u(x,t) \cdot \nabla u(x,t))\, dx.$$

Условие (2.2) означает, что концентрация энергии сохраняется в особых точках.

Позднее в работах М. Спековиус-Нейгебауэр и Дж. Фрезе [42, 43] было доказано, что если дополнительно предположить, что для сильно нелинейных членов $b(x, u, \nabla u)$ класса параболических систем с вариационной структурой ($n = 2$) выполняется одностороннее условие, то не существует точек (x^j, t^j), в которых локальная энергия $E(u(t), B_r(x^j) \cap \Omega)$ концентрируется, и глобальное решение задачи является гладким для всех $t \in [0, \infty)$.

В [3] нами были рассмотрены более общие квадратичные функционалы

$$\Phi^t[v] = \int\limits_{\Omega} [f(x,t,v,\nabla v) + g(x,t,v)]\, dx, \ \ x \in \Omega \subset \mathbb{R}^2, \quad t \in [0,T].$$

Тогда $L = \{L^k\}^{k \leqslant N}$ имеет следующую структуру:

$$L^k[v] = -\frac{d}{d\, x_\alpha} f_{v^k_{x_\alpha}}(x,t,v,\nabla v) + b^k(x, v, \nabla v),$$

где

$$b^k(x,t,v,p) = f_{v^k}(x,t,v,p) + g_{v^k}(x,t,v).$$

Среди предположений в [3] для f, g и их производных имеем, в частности, что

$$f(z,v,p) \approx |p|^2, \ |p| \to \infty, \quad |b(z,v,p)| \leqslant b_0|p|^2 + b_1|v|^m + \psi(z), \ m \geqslant 0.$$

(Отметим, что ниже мы пишем $\mathbb{B}(Q^T)$ вместо $\mathbb{B}(Q^T; \mathbb{R}^N)$ для упрощения записи.)

При некоторых предположениях о гладкости данных и при некотором *условии малости* произведения $b_0 \, \|\nabla \phi_0\|_{L^2(\Omega)}$ нами доказана в [3] глобальная по времени разрешимость задачи (2.1) в классе $W_2^{2,1}(Q^T) \cap C^\beta(\overline{Q^T};\, \delta)$, $\|u(\cdot,t) - \phi_0(\cdot)\|_{\mathring{W}_2^1(\Omega)} \to 0$, $t \to 0$.

Напомним, что параболическая метрика определяется следующим образом:

$$\delta(z^1, z^2) = \max\{|x^1 - x^2|,\, |t^1 - t^2|^{1/2}\} \quad \forall z^1, z^2 \in \mathbb{R}^{n+1},$$

а утверждение $u \in C^\beta(\overline{Q^T};\, \delta)$ означает, что функция u является непрерывной по Гельдеру с показателем β по x_i, $i \leqslant n$, и показателем $\beta/2$ по переменной t.

Теперь рассмотрим квазилинейные параболические системы

$$u_t + L\, u = f(z), \quad z \in Q^T, \tag{2.3}$$

где оператор

$$L\, u = -\mathrm{div}(A(z,u)\nabla u) + b(z, u, \nabla u), \qquad b(z,u,p) \sim |p|^2, \ |p| \to \infty, \tag{2.4}$$

не имеет вариационной структуры и эллиптическая матрица $A(z,u)$ не является диагональной.

Насколько известно автору, для классических краевых задач с системами такого типа нет результатов о разрешимости даже в двумерной области Ω.

В то же время имеются результаты частичной регулярности для сильно нелинейных параболических систем с недиагональными главными матрицами. При условии (параметры ν и b_0 определены в (2.7) и (2.9))

$$2\,b_0\,\|u\|_{L^\infty(Q^T)} < \nu \tag{2.5}$$

было доказано М. Джаквинта и М. Струве [28], что слабое решение задачи (2.3), (2.4) из $L^2((0,T);W_2^1(\Omega))\cap L^\infty(Q^T)$ является непрерывной гельдеровской функцией на открытом множестве $Q^0\subset Q^T$, а n-мерная мера Хаусдорфа в параболической метрике замкнутого сингулярного множества $\Sigma = Q^T\setminus Q^0$ равна нулю, т. е. $\mathcal{H}_n(\Sigma;\delta)=0$. Качественные свойства слабых ограниченных решений сильно нелинейных систем изучались в предположении (2.5) в [36, 37] и других работах, посвященных этому классу параболических систем.

Возникает та же проблема, что и в эллиптическом случае. Принцип максимума не выполняется для недиагональных параболических систем, мы не можем оценить $\|u\|_{L^\infty(Q^T)}$ и проверить соотношение (2.5).

В недавних работах [6, 13] автором были рассмотрены слабые, возможно, *неограниченные* решения сильно нелинейных систем из пространства $V(Q^T):=W_2^{1,0}(Q^T)=L^2((0,T);W_2^1(\Omega))$.

Определение 2.1. Функция $u\in V(Q^T)$ называется *слабым решением* системы (2.3), (2.4), если она удовлетворяет тождеству

$$\int\limits_{Q^T}[-u\cdot\eta_t + (A(z,u)\nabla u\cdot\nabla\eta) + b(z,u,\nabla u)\cdot\eta)]\,dz = \int\limits_{Q^T} f\cdot\eta\,dz \quad \forall\eta\in C_0^\infty(Q^T). \tag{2.6}$$

Легко видеть, что мы можем зафиксировать пробные функции η в (2.6) из пространства $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q^T)\cap L^\infty(Q^T)$, где $\overset{\circ}{W}{}_2^1(Q^T)=\Big[\overline{C_0^\infty(Q^T)}\Big]_{W_2^1(Q^T)}$.

В [6, 13] мы предполагали, что матрица A определена на множестве $Q^T\times\mathbb{R}^N$ и удовлетворяет сильному условию эллиптичности в виде:

(H1)
$$(A(z,u)\xi\cdot\xi)\geqslant\nu|\xi|^2\quad\forall\xi\in\mathbb{R}^{nN},\quad |A(z,u)|\leqslant\mu, \tag{2.7}$$
для почти всех $z\in Q^T$, $u\in\mathbb{R}^N$; $\nu\leqslant\mu$ — *положительные константы.*

Мы также предполагали в [13], что матрица $A(z,u)$ равномерно непрерывна на $Q^T\times\mathbb{R}^N$. Мы смягчили это предположение в [6] до следующих условий:

(H2) *матрица* $A(z,u)$ *равномерно непрерывна по* $u\in\mathbb{R}^N$ *при п. в.* $z\in Q^T$;

(H3) *элементы* $A_{k\,l}^{\alpha\beta}(x,t,u)$ *матрицы* A *непрерывны по* $x\in\Omega$ *в интегральном смысле, т. е.* $A_{k\,l}^{\alpha\beta}(x,t,u)\in VMO(\Omega)$ *для п. в.* $t\in(0,T)$ *и для всех* $u\in\mathbb{R}^N$, *и, кроме того,*
$$\sup_{z^0\in Q^T,\,\eta\in\mathbb{R}^N}\ \sup_{\rho\leqslant r}\ \fint\limits_{\Lambda_\rho(t^0)}\Big(\ \fint\limits_{B_\rho(x^0)}|A(y,t,\eta)-A_{\rho,x^0}(t,\eta)|^2dy\Big)\,dt =: q^2(r)\to 0,\quad r\to 0; \tag{2.8}$$
здесь и ниже $Q_\rho(z^0)=B_\rho(x^0)\times\Lambda_\rho(t^0)$, *где* $B_\rho(x^0)=\{x\in\mathbb{R}^n : |x-x^0|<\rho\}$, $\Lambda_\rho(t^0)=(t^0-\rho^2,t^0+\rho^2)$, $|Q_\rho|_{n+1}=2\omega_n\rho^{n+2}$, $\omega_n=|B_1|_n$, *перечеркиванием обозначается среднее значение интеграла*;

(H4) *функция* $b(z,u,p)$ *удовлетворяет условиям Каратеодори на* $Q^T\times\mathbb{R}^N\times\mathbb{R}^{nN}$ *и имеет квадратичный рост при* $|p|\to\infty$:
$$|b(z,u,p)|\leqslant b_0\,|p|^2,\quad b_0=\mathrm{const}; \tag{2.9}$$

(H5) *функция* b *удовлетворяет односторонней оценке*
$$(b(z,u,p)\cdot u)\geqslant\gamma|p|^2\quad \textit{с}\quad \nu+\gamma>0,\quad \textit{п. в. } z\in Q^T,\ u\in\mathbb{R}^N,\ p\in\mathbb{R}^{nN}; \tag{2.10}$$

(H6) *существует константа* b_1 *такая, что*
$$\operatorname*{ess\,sup}_{z\in Q^T}|b(z,u,p)-b(z,u,q)|\leqslant b_1(|p|+|q|)|p-q|,\quad u\in\mathbb{R}^N,\quad p,q\in\mathbb{R}^{nN}; \tag{2.11}$$

(H7) $f\in L^q(Q^T)$, $q>\dfrac{n+2}{2}$, $n\geqslant 2$, $\|f\|_{L^q(Q^T)}=:c_f$.

В [6] был доказан следующий результат.

Теорема 2.1 (см. [6, теорема 2.1]). *Пусть выполняются условия* (H1)–(H7) *и* $u \in V(Q^T)$ *является слабым решением системы* (2.3), (2.4). *Предположим, что*

$$\sup_{\rho>0} |u_{\rho,z^0}| < \frac{\nu+\gamma}{b_0}, \qquad u_{\rho,z^0} = \fint_{Q_\rho(z^0)} u(z)\,dz, \tag{2.12}$$

$$\liminf_{r\to 0} \frac{1}{r^n} \int_{Q_r(z^0)} |\nabla u|^2\,dz = 0, \tag{2.13}$$

в некоторой точке $z^0 \in Q^T$. *Тогда существует окрестность* $Q_{r_0}(z^0) \subset Q^T$ *такая, что* $u \in C^\beta(\overline{Q_{r_0}(z^0)};\,\delta)$ *для любых* $\beta \in \Big(0, \min\Big\{2-\dfrac{n+2}{q}, 1\Big\}\Big)$.

Следующая лемма содержит основной аналитический результат для доказательства теоремы 2.1.

Лемма 2.1 (см. [6, Lemma 3.1]). *Пусть* $u \in V(Q^T)$ *— слабое решение системы* (2.3), (2.4). *Зафиксируем множество* $Q_0 \subset\subset Q^T$ *и числа* $\tau \in (0,1)$, $M < \dfrac{\nu+\gamma}{b_0}$. *Существуют числа* θ, $\mathbb{C}_1$, $\mathbb{C}_2$ *такие, что если для некоторых* $z^0 \in Q_0$ *и* $R < \delta(Q_0;\partial Q^T) =: \delta_0$

$$|u_{R,z^0}| \leqslant M, \tag{2.14}$$

$$E(R,z^0) := R^{2\alpha} + \frac{1}{R^n} \int_{Q_R(z^0)} |\nabla u|^2\,dz < \theta^2, \tag{2.15}$$

то

$$\Phi(R,z^0) := \fint_{Q_R(z^0)} |u(z)-u_{R,z^0}|^2\,dz \leqslant \mathbb{C}_1 E(R,z^0) \tag{2.16}$$

$$E(\tau R,z^0) \leqslant \mathbb{C}_2\,\tau^{2\alpha} E(R,z^0), \tag{2.17}$$

где $\alpha = \min\Big\{2-\dfrac{n+2}{q}, 1\Big\}$, $\mathbb{C}_1 = \mathbb{C}_1(\mu, b_0, n, c_f)$, $\mathbb{C}_2 = \mathbb{C}_2(\nu,\mu,\alpha,n,q,c_f)$.

Заметим, что если зафиксировать любое $\beta < \alpha$ и выбрать такое τ, что выполняется неравенство $\mathbb{C}_2\tau^{2\alpha} \leqslant \tau^{2\beta}$, то из (2.17) следует, что $E(\tau R,z^0) \leqslant \tau^{2\beta}E(R,z^0)$. Это обеспечивает монотонность $E(r,z^0)$ в точке z^0.

Эта лемма была доказана в [6, 13] методом от противного. Отметим, что подход того же типа мы применяли в эллиптическом случае, но в параболическом случае доказательство имеет дополнительные шаги, поскольку функция $u(x,t)$ не является гладкой по переменной t.

С помощью леммы 2.1 доказывается следующая оценка:

$$\Phi(r,\xi^0) \leqslant c\Big(\frac{r}{R}\Big)^{2\beta} E(R,z^0) \quad \forall r \leqslant R \tag{2.18}$$

для всех ξ^0 в цилиндре $Q_{\rho_0}(z^0)$.

Как следствие оценки (2.18), мы получаем оценку

$$\sup_{\xi^0 \in Q_{\rho_0}(z^0)} \sup_{r\leqslant R} \frac{1}{r^{n+2+2\beta}} \int_{Q_r(\xi^0)} |u(z)-u_{r,\xi^0}|^2\,dz \leqslant c*, \tag{2.19}$$

где константа $c*$ зависит от R^{-1}, $\|\nabla u\|_{2,Q_R(z^0)}$ и других данных задачи. Это означает, что мы оценили полунорму в пространстве Кампанато $\mathcal{L}^{2,n+2+2\beta}(Q_{\rho_0}(z^0);\,\delta)$ и, как следствие, также оценили норму в этом пространстве. Используя изоморфизм между $\mathcal{L}^{2,n+2+2\beta}Q_{\rho_0}(z^0);\,\delta)$ и $C^\beta(\overline{Q_{\rho_0}(z^0)});\,\delta)$, можно утверждать, что $u \in C^\beta(\overline{Q_{\rho_0}(z^0)});\delta)$.

3. Оценки сингулярных множеств

Здесь мы обсуждаем сведения о сингулярных множествах слабых решений эллиптических и параболических систем с квадратичной нелинейностью по градиенту.

Как следствие теоремы 1.1, мы имеем описание сингулярного множества Σ в системе (1.1):

$$\Sigma = \Sigma_0 \cup \widetilde{\Sigma},$$

где

$$\Sigma_0 = \{x^0 \in \Omega : \liminf_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho^{n-2}} \int\limits_{B_\rho(x^0)} |\nabla u|^2 dx > 0\}, \tag{3.1}$$

и $\widetilde{\Sigma} = \widetilde{\Sigma_1} \cup \widetilde{\Sigma_2}$,

$$\widetilde{\Sigma_1} = \{x^0 \in \Omega \setminus \Sigma_0 : \frac{\nu+\gamma}{b_0} \leqslant \lim_{r\to 0} |u_{r,x^0}| < \infty\}, \tag{3.2}$$

$$\widetilde{\Sigma_2} = \{x^0 \in \Omega \setminus \Sigma_0 : \lim_{r\to 0} |u_{r,x^0}| = \infty \text{ и } \nexists \lim_{r\to 0} |u_{r,x^0}|\}. \tag{3.3}$$

Множество Σ_0 можно оценить по соответствующему результату Э. Джусти [29] (см. также доказательство в [24, гл. 4, теорема 2.2]).

Поскольку этот результат применяется для оценки сингулярных множеств различных типов систем, сформулируем его.

Теорема 3.1 (см. [29]). *Пусть Ω — открытое множество в $\mathbb{R}^n$, $v \in L^1_{loc}(\Omega)$ и $0 \leqslant \alpha < n$. Положим, что*

$$\Sigma^\alpha = \{x \in \Omega : \limsup_{\rho\to 0} \frac{1}{\rho^\alpha} \int\limits_{B_\rho(x)} |v(y)|\, dy > 0\}.$$

Тогда имеем $H_\alpha(\Sigma^\alpha) = 0$.

Следуя этому результату, мы имеем в нашем случае, что

$$H_{n-2}(\Sigma_0) = 0. \tag{3.4}$$

Отметим, что множество Σ_0 может появиться даже в случае простейших квазилинейных эллиптических систем с $b = 0$.

Известно, как оценить множество $\widetilde{\Sigma_2}$ (см., например, [24, теорема 2.1, гл. 4]). В этом случае мы доказываем, что

$$\widetilde{\Sigma_2} \subset I_\varepsilon = \{x^0 \in \Omega \setminus \Sigma_0 : \liminf_{r\to 0} \frac{1}{r^{n-2+\varepsilon}} \int\limits_{B_r(x^0)} |\nabla u|^2\, dx > 0\} \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{3.5}$$

Если (3.5) верно, то $H_{n-2+\varepsilon}(\widetilde{\Sigma_2}) \leqslant H_{n-2+\varepsilon}(I_\varepsilon) \underset{Th.3.1}{=} 0$. По определению размерности меры Хаусдорфа

$$\dim_H \widetilde{\Sigma_2} \leqslant n-2. \tag{3.6}$$

Таким образом, мы оценили множество

$$\Sigma_* = \Sigma_0 \cup \widetilde{\Sigma_2} : \quad \dim_H \Sigma_* \leqslant n-2.$$

Открытым вопросом для автора является то, как оценить множество $\widetilde{\Sigma_1}$.

В нашей статье [6] мы обсуждали сингулярное множество слабых решений $u \in V(Q^T)$ параболических систем (2.1) в условиях теоремы 2.1. В этом случае замкнутое сингулярное множество $\Sigma = \Sigma_0 \cup \widetilde{\Sigma}$, где

$$\Sigma_0 = \{z^0 \in Q^T : \liminf_{r\to 0} \frac{1}{r^n} \int\limits_{Q_r(z^0)} |\nabla u|^2\, dz > 0\}$$

$$\widetilde{\Sigma} = \widetilde{\Sigma_1} \cup \widetilde{\Sigma_2}.$$

Здесь

$$\widetilde{\Sigma_1} = \{z^0 \in Q^T \setminus \Sigma_0 : \frac{\nu+\gamma}{b_0} \leqslant \lim_{r\to 0} |u_{r,z^0}| < \infty\}, \tag{3.7}$$

$$\widetilde{\Sigma_2} = \{z^0 \in Q^T \setminus \Sigma_0 : \lim_{r\to 0} |u_{r,z^0}| = \infty \text{ и } \nexists \lim_{r\to 0} |u_{r,z^0}|\}. \tag{3.8}$$

Используя параболическую версию теоремы 3.1, мы можем утверждать, что n-мерная мера Хаусдорфа множества Σ_0 в параболической метрике δ обращается в нуль, т. е.

$$\mathcal{H}_n(\Sigma_0;\, \delta) = 0. \tag{3.9}$$

Нами доказано в [6, раздел 4], что

$$\widetilde{\Sigma_2} \subset I^\varepsilon = \{z^0 \in Q^T \setminus \Sigma_0 : \limsup_{r\to 0} \frac{1}{r^{n+\varepsilon}} \int\limits_{Q_r(z^0)} |\nabla u|^2\, dz > 0\} \quad \forall \varepsilon > 0. \tag{3.10}$$

В силу параболического варианта теоремы 3.1 $\mathcal{H}_{n+\varepsilon}(I^\varepsilon;\, \delta) = 0$. Из соотношения (3.10) следует, что $\mathcal{H}_{n+\varepsilon}(\widetilde{\Sigma_2};\, \delta) = 0\ \ \forall \varepsilon > 0$. Таким образом,

$$\dim_{\mathcal{H}}(\widetilde{\Sigma_2}) \leqslant n. \tag{3.11}$$

Из (3.9), (3.11) вытекает

$$\dim_{\mathcal{H}}(\Sigma_0 \cup \widetilde{\Sigma_2}) \leqslant n.$$

Открытый вопрос здесь тот же, что и в эллиптической ситуации: как оценить множество $\widetilde{\Sigma_1}$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Архипова А. А.* О глобальной разрешимости задачи Коши–Дирихле для недиагональных параболических систем с вариационной структурой при двух пространственных переменных// Пробл. мат. анализа — 1997. — *16*. — С. 3–40.
2. *Архипова А. А.* Локальная и глобальная по времени разрешимость задачи Коши–Дирихле для класса нелинейных недиагональных параболических систем// Алгебра и анализ — 1999. — *11*, № 6. — С. 69–102.
3. *Архипова А. А.* Глобальная разрешимость задачи Коши—Дирихле для одного класса сильно нелинейных параболических систем// Пробл. мат. анализа — 2020. — *105*. — С. 19–44.
4. *Архипова А. А.* Локальная регулярность слабых решений квазилинейных эллиптических систем с односторонним условием квадратичной нелинейности по градиенту// Пробл. мат. анализа — 2021. — *108*. — С. 35–52.
5. *Архипова А. А.* Условия регулярности нелинейных эллиптических систем с квадратичной нелинейностью по градиенту// Пробл. мат. анализа — 2021. — *112*. — С. 19–34.
6. *Архипова А. А.* Параболические системы с квадратичной нелинейностью по градиенту. Регулярность решений// Пробл. мат. анализа — 2022. — *116*. — С. 35–58.
7. *Ладыженская О. А., Солонников В. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа. — М.: Наука, 1967.
8. *Ладыженская О. А., Уральцева Н. Н.* Линейные и квазилинейные уравнения эллиптического типа. — М.: Наука, 1964.
9. *Arkhipova A. A.* Quasireverse Hölder inequalities and a priori estimates for strongly nonlinear systems// Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl. — 2003. — *14*, № 2. — С. 91–108.
10. *Arkhipova A. A.* Quasireverse Hölder inequalities and their applications// В сб.: «Nonlinear Equations and Spectral Theory. Dedicated to the Memory of Olga Aleksandrovna Ladyzhenskaya». — Providence: Am. Math. Soc. (2007). — С. 1–25.
11. *Arkhipova A. A.* Heat flow for one class of quadratic functionals with a nondiagonal principal matrix. Existence of a smooth global solution// Алгебра и анализ — 2018. — *30*, № 2. — С. 45–75.
12. *Arkhipova A. A.* Weak global solvability of two-phase problem for a class of parabolic systems with strong nonlinearity in the gradient. The case of two spatial variables// Алгебра и анализ — 2019. — *31*, № 2. — С. 118–151.
13. *Arkhipova A. A.* Local regularity of weak solutions to a class of parablic systems with quadratic nonlinearities in the gradient// Manuscripta Math. — 2023. — *170*, № 3-4. — С. 497–529.
14. *Arkhipova A. A., Stará J.* Boundary partial regularity for solutions of quasilinear parabolic systems with non smooth in time principal matrices// Nonlinear Anal. — 2015. — *120*. — С. 236–261.

15. *Arkhipova A. A., Stará J.* Regularity problem for 2m-order quasilinear parabolic systems with non smooth in time principal matrix. $(A(t), m)$-caloric approximation method// Topol. Methods Nonlinear Anal. — 2018. — *52*, № 1. — С. 111–146.
16. *Arkhipova A. A., Stará J.* Regularity problem for one class of nonlinear parabolic systems with nonsmooth in time principal matrix// Comment. Math. Univ. Carolin. — 2019. — *60*, № 2. — С. 231–267.
17. *Arkhipova A. A., Stará J., John O.* Partial regularity for solutions of quasilinear parabolic systemes with nonsmooth in time// Nonlinear Anal. — 2014. — *95*. — С. 421–435.
18. *De Giorgi E.* Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari// Mem. Accad. Sci. Torino cl. Sci. Fis. Mat. Nat. — 1957. — *3*, (3). — С. 25–43.
19. *De Giorgi E.* Un esempio di estremali discontinue per un problema variozional di tipo ellittico// Boll. Unione Mat. Ital. — 1968. — *4*. — С. 135–137.
20. *Duzaar F., Grotowski J. F.* Optimal interior partial regularity for nonlinear elliptic systems: the method of A-harmonic approximation// Manuscripta Math. — 2000. — *103*. — С. 267–298.
21. *Duzaar F., Mingione G.* Second order parabolic systems, optimal regularity, and singular sets of solutions// Ann Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire — 2005. — *22*. — С. 705–751.
22. *Duzaar F., Steffen K.* Optimal interior and boundary regularity for almost minimizers to elliptic variational integrals// J. Reine Angew. Math. — 2002. — *546*. — С. 76–138.
23. *Gehring F. W.* The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasi conformal mapping// Acta Math. — 1973. — *130*. — С. 265–277.
24. *Giaquinta M.* Multiple integrals in the calculus of variations and nonlinear elliptic systems. — Princeton: Princeton Univ. Press, 1983.
25. *Giaquinta M., Giusti E.* On the regularity of the minima of variational integrals// Acta Math. — 1982. — *148*. — С. 31–46.
26. *Giaquinta M., Martinazzi L.* An introduction to the regularity theory for elliptic systems, harmonic maps and minimal graphs. — Pisa: Edizioni della Normale, 2012.
27. *Giaquinta M., Modica G.* Regolarity results for some classes of higher order non linear elliptic systems// J. Reine Angew. Math. — 1979. — *311-312*. — С. 145–169.
28. *Giaquinta M., Struwe M.* On the partial regularity of weal solutions of nonlinear parabolic problems// Math. Z. — 1982. — *179*. — С. 437–451.
29. *Giusti E.* Precisazione delle funzioni $H^{1,p}$ e singolarità delle soluzioni deboli di sistemi ellittici non lineari// Boll. Unione Mat. Ital. — 1969. — *2*. — С. 71–76.
30. *Giusti E., Miranda M.* Sulla regolarità delle soluzioni deboli di una classe di sistemi ellittici quasilineari// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1968. — *31*. — С. 173–184.
31. *Frehse J.* A note on the Hölder continuity of the variational problems// Abh. Math. Semin. Univ. Hambg. — 1975. — *43*. — С. 59–63.
32. *Frehse J.* On two-dimensional quasilinear elliptic systems// Manuscripta Math. — 1979. — *28*. — С. 21–49.
33. *Hamburger C.* A new partial regularity proof for solutions of nonlinear elliptic systems// Manuscripta Math. — 1998. — *95*, № 1. — С. 11–31.
34. *Hildebrandt S., Widman K.-O.* Some regularity results for quasilinear elliptic systems of second order// Math. Z. — 1975. — *142*. — С. 67–86.
35. *Ivert P.-A.* On quasilinear elliptic systems of diagonal form// Math. Z. — 1980. — *170*. — С. 283–286.
36. *Marino M., Maugeri A.* Partial Hölder continuity of solutions of nonlinear parabolic systems of second order with quadratic growth// Boll. Unione Mat. Ital. — 1989. — *3-B*. — С. 397–435.
37. *Marino M., Maugeri A.* A remark on the note: Partial Hölder continuity of the spatial derivatives of the solutions to nonlinear parabolic systems with quadratic growth// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova — 1996. — *95*. — С. 23–28.
38. *Mooney C.* Finite time blowup for parabolic systems in two dimensions// Arxiv. — 2016. — 1604.05616v1 [math.AP].
39. *Morrey C. B.* Partial regularity results for nonlinear elliptic systems// J. Math. Mech. — 1968. — *17*. — С. 649–670.
40. *Nash J.* Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations// Ann. J. Math. — 1958. — *80*. — С. 931–954.
41. *Simon L.* Theorems on regularity and singularity of energy minimizing maps. — Basel: Birkhäuzer, 1996.
42. *Specovius-Neigebauer M., Frehse J.* Existence of regular solutions to a class of parabolic systems in two space dimensions with critical growth behaviour// Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat. — 2009. — *55*, № 2. — С. 239–261.
43. *Specovius-Neigebauer M., Frehse J.* Morrey estimates and Hölder continuity for solutions to parabolic equations with entropy inequalities// J. Reine Angew. Math. — 2010. — *638*. — С. 169–188.

44. *Stará J., John O.* Some (new) counterexamples of parabolic systems// Comment. Math. Univ. Carolin. — 1995. — *36*. — C. 503–510.
45. *Stará J., John O.* On some regularity and non regularity results for solutions to parabolic systems// Matematiche — 2000. — *55*, Suppl. 2. — C. 145–163.
46. *Stará J., John O., Malý J.* Counterexample to the regularity of weak solution of the quasilinear elliptic system// Comment. Math. Univ. Carolin. — 1986. — *27*. — C. 123–136.
47. *Stredulinsky E. W.* Higher integrability from reverse Hölder inequalities// Indiana Univ. Math. J. — 1980. — *29*, № 3. — C. 408–417.
48. *Struwe M.* A counterexample in elliptic regularity theory// Manuscripta Math. — 1981. — *34*. — C. 85–92.
49. *Sverák V., Yan X.* Non Lipschitz minimizers of smooth uniformly convex variational integrals// Proc. Natl. Acad. Sci. USA — 2002. — *99*, № 24. — C. 15268–15276.

Арина Алексеевна Архипова
Санкт-Петербургский государственный университет, Санкт-Петербург, Россия
E-mail: arinaark@gmail.com

UDC 517.2+517.9
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-18-31
EDN: CNBPXH

Quasilinear elliptic and parabolic systems with nondiagonal principal matrices and strong nonlinearities in the gradient. Solvability and regularity problems

A. A. Arkhipova

St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia

We consider nondiagonal elliptic and parabolic systems of equations with strongly nonlinear terms in the gradient. We review and comment known solvability and regularity results and describe the last author's results in this field.

Keywords: nonlinear elliptic systems, nonlinear parabolic systems, regularity of weak solutions

For citation: A. A. Arkhipova, "Quasilinear elliptic and parabolic systems with nondiagonal principal matrices and strong nonlinearities in the gradient. Solvability and regularity problems," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 1, 18–31. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-18-31

REFERENCES

1. A. A. Arkhipova, "Global solvability of the Cauchy–Dirichlet problem for nondiagonal parabolic systems with variational structure in the case of two spatial variables," *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 1998, **92**, No. 6, 4231–4255.
2. A. A. Arkhipova, "Local and global solvability of the Cauchy–Dirichlet problem for a class of nonlinear nondiagonal parabolic systems," *St. Petersburg Math. J.*, 2000, **11**, № 6, 989–1017.
3. A. A. Arkhipova, "Global solvability of the Cauchy–Dirichlet problem for a class of strongly nonlinear parabolic systems," *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2020, **250**, № 2, 201–231.
4. A. A. Arkhipova, "Local regularity of weak solutions to quasilinear elliptic systems with one-side condition on quadratic nonlinearity in the gradient," *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2021, **255**, No. 4, 388–408.

5. A. A. Arkhipova, "Regularity conditions for nonlinear elliptic systems with quadratic nonlinearities in the gradient," *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2021, **259**, No. 2, 128–147.
6. A. A. Arkhipova, "Parabolic systems with quadratic nonlinearities in the gradient. Regularity of solutions," *J. Math. Sci. (N.Y.)*, 2022, **264**, No. 5, 525–551.
7. O. A. Ladyzhenskaya, V. A. Solonnikov, and N. N. Uraltseva, *Linear and Quasi-Linear Equations of Parabolic Type*, Am. Math. Soc., Providence, 1968.
8. O. A. Ladyzhenskaya and N. N. Uraltseva, *Linear and Quasilinear Elliptic Equations*, Academic Press, New York, 1968.
9. A. A. Arkhipova, "Quasireverse Hölder inequalities and a priori estimates for strongly nonlinear systems," *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, 2003, **14**, No. 2, 91–108.
10. A. A. Arkhipova, "Quasireverse Hölder inequalities and their applications," In: *Nonlinear Equations and Spectral Theory. Dedicated to the Memory of Olga Aleksandrovna Ladyzhenskaya*, Am. Math. Soc., Providence, 2007, pp. 1–25.
11. A. A. Arkhipova, "Heat flow for one class of quadratic functionals with a nondiagonal principal matrix. Existence of a smooth global solution," *St. Petersburg Math. J.*, 2019, **30**, No. 2, 181–202.
12. A. A. Arkhipova, "Weak global solvability of two-phase problem for a class of parabolic systems with strong nonlinearity in the gradient. The case of two spatial variables," *St. Petersburg Math. J.*, 2020, **31**, No. 2, 118–151.
13. A. A. Arkhipova, "Local regularity of weak solutions to a class of parablic systems with quadratic nonlinearities in the gradient," *Manuscripta Math.*, 2023, **170**, No. 3-4, 497–529.
14. A. A. Arkhipova and J. Stará, "Boundary partial regularity for solutions of quasilinear parabolic systems with non smooth in time principal matrices," *Nonlinear Anal.*, 2015, **120**, 236–261.
15. A. A. Arkhipova and J. Stará, "Regularity problem for 2m-order quasilinear parabolic systems with non smooth in time principal matrix. $(A(t), m)$-caloric approximation method," *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 2018, **52**, No. 1, 111–146.
16. A. A. Arkhipova and J. Stará, "Regularity problem for one class of nonlinear parabolic systems with nonsmooth in time principal matrix," *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 2019, **60**, No. 2, 231–267.
17. A. A. Arkhipova, J. Stará, and O. John, "Partial regularity for solutions of quasilinear parabolic systemes with nonsmooth in time," *Nonlinear Anal.*, 2014, **95**, 421–435.
18. E. De Giorgi, "Sulla differenziabilità e l'analiticità delle estremali degli integrali multipli regolari," *Mem. Accad. Sci. Torino cl. Sci. Fis. Mat. Nat.*, 1957, **3**, (3), 25–43.
19. E. De Giorgi, "Un esempio di estremali discontinue per un problema variozional di tipo ellittico," *Boll. Unione Mat. Ital.*, 1968, **4**, 135–137.
20. F. Duzaar and J. F. Grotowski, "Optimal interior partial regularity for nonlinear elliptic systems: the method of A-harmonic approximation," *Manuscripta Math.*, 2000, **103**, 267–298.
21. F. Duzaar and G. Mingione, "Second order parabolic systems, optimal regularity, and singular sets of solutions," *Ann Inst. H. Poincaré, Anal. Non Linéaire*, 2005, **22**, 705–751.
22. F. Duzaar and K. Steffen, "Optimal interior and boundary regularity for almost minimizers to elliptic variational integrals," *J. Reine Angew. Math.*, 2002, **546**, 76–138.
23. F. W. Gehring, "The L^p-integrability of the partial derivatives of a quasi conformal mapping," *Acta Math.*, 1973, **130**, 265–277.
24. M. Giaquinta, *Multiple Integrals in the Calculus of Variations and Nonlinear Elliptic Systems*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1983.
25. M. Giaquinta and E. Giusti, "On the regularity of the minima of variational integrals," *Acta Math.*, 1982, **148**, 31–46.
26. M. Giaquinta, L. Martinazzi, *An Introduction to the Regularity Theory for Elliptic Systems, Harmonic Maps and Minimal Graphs*, Edizioni della Normale, Pisa, 2012.
27. M. Giaquinta and G. Modica, "Regolarity results for some classes of higher order non linear elliptic systems," *J. Reine Angew. Math.*, 1979, **311-312**, 145–169.
28. M. Giaquinta and M. Struwe, "On the partial regularity of weal solutions of nonlinear parabolic problems," *Math. Z.*, 1982, **179**, 437–451.
29. E. Giusti, "Precisazione delle funzioni $H^{1,p}$ e singolarità delle soluzioni deboli di sistemi ellittici non lineari," *Boll. Unione Mat. Ital.*, 1969, **2**, 71–76.
30. E. Giusti and M. Miranda, "Sulla regolarità delle soluzioni deboli di una classe di sistemi ellittici quasilineari," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1968, **31**, 173–184.
31. J. Frehse, "A note on the Hölder continuity of the variational problems," *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.*, 1975, **43**, 59–63.
32. J. Frehse, "On two-dimensional quasilinear elliptic systems," *Manuscripta Math.*, 1979, **28**, 21–49.

33. C. Hamburger, “A new partial regularity proof for solutions of nonlinear elliptic systems,” *Manuscripta Math.*, 1998, **95**, No. 1, 11–31.
34. S. Hildebrandt and K.-O. Widman, “Some regularity results for quasilinear elliptic systems of second order,” *Math. Z.*, 1975, **142**, 67–86.
35. P.-A. Ivert, “On quasilinear elliptic systems of diagonal form,” *Math. Z.*, 1980, **170**, 283–286.
36. M. Marino and A. Maugeri, “Partial Hölder continuity of solutions of nonlinear parabolic systems of second order with quadratic growth,” *Boll. Unione Mat. Ital.*, 1989, **3-B**, 397–435.
37. M. Marino and A. Maugeri, “A remark on the note: Partial Hölder continuity of the spatial derivatives of the solutions to nonlinear parabolic systems with quadratic growth,” *Rend. Semin. Mat. Univ. Padova*, 1996, **95**, 23–28.
38. C. Mooney, “Finite time blowup for parabolic systems in two dimensions,” *Arxiv*, 2016, 1604.05616v1 [math.AP].
39. C. B. Morrey, “Partial regularity results for nonlinear elliptic systems,” *J. Math. Mech.*, 1968, **17**, 649–670.
40. J. Nash, “Continuity of solutions of parabolic and elliptic equations,” *Ann. J. Math.*, 1958, **80**, 931–954.
41. L. Simon, *Theorems on Regularity and Singularity of Energy Minimizing Maps*, Birkhäuzer, Basel, 1996.
42. M. Specovius-Neigebauer and J. Frehse, “Existence of regular solutions to a class of parabolic systems in two space dimensions with critical growth behaviour,” *Ann. Univ. Ferrara Sez. VII Sci. Mat.*, 2009, **55**, No. 2, 239–261.
43. M. Specovius-Neigebauer and J. Frehse, “Morrey estimates and Hölder continuity for solutions to parabolic equations with entropy inequalities,” *J. Reine Angew. Math.*, 2010, **638**, 169–188.
44. J. Stará and O. John, “Some (new) counterexamples of parabolic systems,” *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 1995, **36**, 503–510.
45. J. Stará and O. John, “On some regularity and non regularity results for solutions to parabolic systems,” *Matematiche*, 2000, **55**, Suppl. 2, 145–163.
46. J. Stará, O. John, and J. Malý, “Counterexample to the regularity of weak solution of the quasilinear elliptic system,” *Comment. Math. Univ. Carolin.*, 1986, **27**, 123–136.
47. E. W. Stredulinsky, “Higher integrability from reverse Hölder inequalities,” *Indiana Univ. Math. J.*, 1980, **29**, No. 3, 408–417.
48. M. Struwe, “A counterexample in elliptic regularity theory,” *Manuscripta Math.*, 1981, **34**, 85–92.
49. V. Sverák and X. Yan, “Non Lipschitz minimizers of smooth uniformly convex variational integrals,” *Proc. Natl. Acad. Sci. USA*, 2002, **99**, No. 24, 15268–15276.

Arina A. Arkhipova
St. Petersburg State University, St. Petersburg, Russia
E-mail: arinaark@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 1 (2023). С. 32–49
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.9+519.63
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-32-49
EDN: ENHOAY

РАЗНОСТНЫЕ СХЕМЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ НЕЛОКАЛЬНЫХ ПО ВРЕМЕНИ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ ЗАДАЧ ИНТЕГРАЛЬНОГО ТИПА

А. Ашыралыев[1,2,3], **Ч. Ашыралыев**[1,4]

[1] *Бахчешехир университет, Стамбул, Турция*
[2] *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*
[3] *Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан*
[4] *Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан*

Исследуются разностные схемы второго порядка точности для приближенного решения нелокальных по времени параболических задач интегрального типа. Установлены теоремы об устойчивости r-модифицированной разностной схемы Кранка—Николсона и неявной разностной схемы второго порядка точности для приближенного решения нелокальных по времени параболических задач интегрального типа в гильбертовом пространстве с самосопряженным положительно определенным оператором. В качестве приложения получены оценки устойчивости решений второго порядка точности по t разностных схем для одномерной и многомерной нелокальной во времени параболической задачи. Приведены численные результаты.

Ключевые слова: нелокальная параболическая задача, разностная схема второго порядка точности, схема Кранка—Николсона, неявная разностная схема, устойчивость

Для цитирования: *А. Ашыралыев, Ч. Ашыралыев.* Разностные схемы второго порядка точности для нелокальных по времени параболических задач интегрального типа// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 1. С. 32–49. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-32-49

1. Введение

Многие задачи физики и прикладных наук сводятся к локальным и нелокальным краевым задачам для уравнений параболического типа. Приближенные решения и корректность локальных и нелокальных краевых задач для параболических уравнений широко исследовались в ряде работ (см., например, [1–41] и приведенные там ссылки).

В работе [12] исследована однозначная разрешимость нелокальной по времени краевой задачи для параболического уравнения в гильбертовом пространстве H с самосопряженными положительно определенными операторами A и B

$$\begin{cases} \dfrac{du}{dt} + Au = f(t),\ 0 < t < T, \\ u(0) = \int\limits_0^T a(s)Bu(s)ds + \varphi \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь $f : (0,T) \longrightarrow H$ и $a : [0,T] \longrightarrow \mathbb{R}^1$ — заданные функции, $\varphi \in H$ — известный элемент, оператор B ограничен и $D(B) = H$.

В работе [17] исследована корректность нелокальной по времени краевой задачи (1.1). Представлены одношаговые абсолютно устойчивые разностные схемы Роте и Кранка—Николсона для приближенного решения задачи (1.1). Установлена корректность дифференциальных и разностных задач в пространствах Гёльдера. В примерах даны численные иллюстрации.

В настоящей работе одношаговые разностные схемы второго порядка точности для приближенного решения задачи (1.1) строятся с помощью разложения Тейлора на двух точках, порожденных A и A^2. Установлены теоремы об устойчивости и коэрцитивной устойчивости r-модифицированной разностной схемы Кранка—Николсона и неявной разностной схемы второго порядка точности для приближенного решения задачи (1.1) в гильбертовом пространстве с самосопряженным положительно определенным оператором. В качестве приложения получены оценки устойчивости решений разностных схем второго порядка точности по t для одномерной и многомерной нелокальной во времени параболической задачи. Приведены численные результаты.

2. Устойчивость r-модифицированной разностной схемы Кранка—Николсона

Пусть $C_\tau(H) = C([0,T]_\tau, H)$, $C^\alpha_\tau(H) = C^\alpha_0([0,T]_\tau, H])$, $\alpha \in (0,1)$, — банаховы пространства всех H-значных сеточных функций $w_\tau = \{w_k\}_{k=0}^N$, определенных на $[0,T]_\tau = \{t_k = k\tau, 0 \leqslant k \leqslant N, N\tau = T\}$ с соответствующими нормами

$$\|w_\tau\|_{C_\tau(H)} = \max_{0\leqslant k\leqslant N} \|w_k\|_H, \qquad \|w_\tau\|_{C^\alpha_\tau(H)} = \sup_{1\leqslant k<k+n\leqslant N} (N-n)^{-\alpha}(k)^\alpha \|w_{k+n} - w_k\|_H + \|w_\tau\|_{C_\tau(H)}.$$

Для приближенного решения краевой задачи (1.1) мы вводим r-модифицированную разностную схему Кранка—Николсона

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\tau}(u_k - u_{k-1}) + Au_k = \varphi_k, \quad \varphi_k = f\Big(t_k - \dfrac{\tau}{2}\Big), \quad 1 \leqslant k \leqslant r, \\ \dfrac{1}{\tau}(u_k - u_{k-1}) + A\dfrac{u_k + u_{k-1}}{2} = \varphi_k, \quad \varphi_k = f\Big(t_k - \dfrac{\tau}{2}\Big), \quad r+1 \leqslant k \leqslant N, \\ u_0 = \dfrac{a_0Bu_0 + a_NBu_N}{2}\tau + \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_iBu_i\tau + \varphi. \end{cases} \tag{2.1}$$

Из положительности оператора A следует существование ограниченных шаговых операторов

$$C = (I+\tau A)^{-1}, \quad R = \Big(I - \frac{\tau A}{2}\Big)\Big(I + \frac{\tau A}{2}\Big)^{-1}, \quad P = \Big(I + \frac{\tau A}{2}\Big)^{-1}.$$

Лемма 2.1. *При любом $k = 1, \ldots, N$ выполнены оценки*

$$\|C\|_{H\to H} \leqslant 1, \quad \Big\|R^k\Big\|_{H\to H} \leqslant 1, \quad \Big\|(I-R)R^k\Big\|_{H\to H} \leqslant \frac{1}{k}. \tag{2.2}$$

Лемма 2.2. *Предположим, что*

$$\left[\frac{|a_0| + |a_N|}{2}\tau + \sum_{i=1}^{N-1} |a_i|\,\tau\right] \|B\| < 1. \tag{2.3}$$

Тогда оператор

$$I - \frac{a_0B + a_NBR^{N-r}C^r}{2}\tau - \sum_{i=1}^{r} a_iBC^i\tau - \sum_{i=r+1}^{N-1} a_iBR^{k-r}C^r\tau$$

имеет обратный Q_τ, и выполнена следующая оценка:

$$\|Q_\tau\|_{H\to H} \leqslant \frac{1}{1 - \left[\frac{|a_0|+|a_N|}{2}\tau + \sum\limits_{i=1}^{N-1} |a_i|\,\tau\right]\|B\|} = M_{a,b}. \tag{2.4}$$

Доказательство этой оценки основано на спектральном представлении самосопряженного положительно определенного оператора в гильбертовом пространстве.

Лемма 2.3. *Для решения разностной схемы* (2.1) *имеет место следующая формула:*

$$u_k = \begin{cases} C^k u_0 + \sum\limits_{j=1}^{k} C^{k-j+1}\varphi_j\tau, \quad 1 \leqslant k \leqslant r, \\ R^{k-r}C^r u_0 + \sum\limits_{j=1}^{r} R^{k-r}C^{r-j+1}\varphi_j\tau + \sum\limits_{j=r+1}^{k} R^{k-j}P\varphi_j\tau, \quad r+1 \leqslant k \leqslant N, \\ Q_\tau \left\{ \dfrac{a_N B}{2}\tau \left[\sum\limits_{j=1}^{r} R^{N-r}C^{r-j+1}\varphi_j\tau + \sum\limits_{j=r+1}^{N} R^{N-j}P\varphi_j\tau \right] + \right. \\ \qquad + \sum\limits_{i=1}^{r} a_i B \sum\limits_{j=1}^{i} C^{i-j+1}\varphi_j\tau^2 + \varphi + \\ \left. + \sum\limits_{i=r+1}^{N-1} a_i B \left[\sum\limits_{j=1}^{r} R^{i-r}C^{r-j+1}\varphi_j\tau + \sum\limits_{j=r+1}^{i} R^{i-j}P\varphi_j\tau \right] \tau \right\}, \quad k = 0. \end{cases} \tag{2.5}$$

Здесь

$$Q_\tau = \left(I - \frac{a_0 B + a_N B R^{N-r}C^r}{2}\tau - \sum_{i=1}^{r} a_i B C^i \tau - \sum_{i=r+1}^{N-1} a_i B R^{k-r} C^r \tau \right)^{-1}.$$

Доказательство. Для решения разностной схемы

$$\begin{cases} \dfrac{1}{\tau}(u_k - u_{k-1}) + Au_k = \varphi_k, \ \varphi_k = f(t_k), \quad 1 \leqslant k \leqslant r, \\ \dfrac{1}{\tau}(u_k - u_{k-1}) + A\dfrac{u_k + u_{k-1}}{2} = \varphi_k, \\ \varphi_k = f\Big(t_k - \dfrac{\tau}{2}\Big), \quad r+1 \leqslant k \leqslant N, \ u_0 - \text{заданный элемент}, \end{cases} \tag{2.6}$$

имеем формулу

$$u_k = \begin{cases} C^k u_0 + \sum\limits_{j=1}^{k} C^{k-j+1}\varphi_j\tau, \quad 1 \leqslant k \leqslant r, \\ R^{k-r}C^r u_0 + \sum\limits_{j=1}^{r} R^{k-r}C^{r-j+1}\varphi_j\tau + \sum\limits_{j=r+1}^{k} R^{k-j}P\varphi_j\tau, \quad r+1 \leqslant k \leqslant N. \end{cases} \tag{2.7}$$

Применяя эту формулу и нелокальное условие $u_0 = \dfrac{a_0 B u_0 + a_N B u_N}{2}\tau + \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i B u_i \tau + \varphi$, получим

$$\begin{aligned} u_0 = {} & \frac{a_0 B u_0 + a_N B R^{N-r}C^r u_0}{2}\tau + \sum_{i=1}^{r} a_i B C^i u_0 \tau + \sum_{i=r+1}^{N-1} a_i B R^{k-r} C^r \tau u_0 + \\ & + \frac{a_N B}{2}\tau \left[\sum_{j=1}^{r} R^{N-r}C^{r-j+1}\varphi_j\tau + \sum_{j=r+1}^{N} R^{N-j}P\varphi_j\tau \right] + \sum_{i=1}^{r} a_i B \sum_{j=1}^{i} C^{i-j+1}\varphi_j\tau^2 + \\ & + \sum_{i=r+1}^{N-1} a_i B \left[\sum_{j=1}^{r} R^{i-r}C^{r-j+1}\varphi_j\tau + \sum_{j=r+1}^{i} R^{i-j}P\varphi_j\tau \right] \tau + \varphi. \end{aligned}$$

По лемме 2.1 оператор

$$I - \frac{a_0 B + a_N B R^{N-r}C^r}{2}\tau - \sum_{i=1}^{r} a_i B C^i \tau - \sum_{i=r+1}^{N-1} a_i B R^{k-r} C^r \tau$$

имеет обратный Q_τ. Отсюда следует формула (2.5). Лемма 2.3 доказана. □

Теорема 2.1. *Пусть τ — достаточно малое число. Тогда разностная схема* (2.1) *устойчива в $C_\tau(H)$ и $C_\tau^\alpha(H)$, а для решения разностной схемы* (2.1) *в $C_\tau(H)$ и $C_\tau^\alpha(H)$ выполняются следующие неравенства устойчивости:*

$$\| u^\tau \|_{C_\tau(H)} \leqslant M_{a,b}[\| \varphi \|_H + \| \varphi^\tau \|_{C_\tau(H)}], \tag{2.8}$$

$$\| u^\tau \|_{C_\tau^\alpha(H)} \leqslant M_{a,b}[\| \varphi \|_H + \| \varphi^\tau \|_{C_\tau^\alpha(H)}]. \tag{2.9}$$

Доказательство. Неравенства устойчивости

$$\| u^\tau \|_{C_\tau(H)} \leqslant \left[\|u_0\|_H + T\| \varphi^\tau \|_{C_\tau(H)}\right], \tag{2.10}$$

$$\| u^\tau\|_{C^\alpha_\tau(H)} \leqslant M[\| \varphi \|_H + \| \varphi^\tau \|_{C^\alpha_\tau(H)}] \tag{2.11}$$

для решения разностной схемы (2.6) в $C_\tau(H)$ и $C^\alpha_\tau(H)$ были доказаны ранее (см. [20]). Используя формулу (2.5) и оценку (2.2), получаем оценки для решения разностной схемы (2.1) в $C_\tau(H)$ и $C^\alpha_\tau(H)$

$$\| u_0\|_H \leqslant M_{a,b}[\| \varphi \|_H + \| \varphi^\tau \|_{C_\tau(H)}], \tag{2.12}$$

$$\| u_0\|_H \leqslant M_{a,b}[\| \varphi \|_H + \| \varphi^\tau \|_{C^\alpha_\tau(H)}]. \tag{2.13}$$

Поэтому оценки (2.8) и (2.9) следуют из оценок (2.10)–(2.13). Теорема 2.1 доказана. ☐

Поскольку нелокальная краевая задача (1.1) в пространстве $C([0,T]\,,H)$ непрерывных H-значных функций, определенных на $[0,T]$, не является корректной для произвольного положительного оператора A и пространства H, то не имеет места равномерная по $\tau > 0$ корректность разностной схемы (2.1) в норме $C_\tau(H)$. Это означает, что коэрцитивная норма

$$\| u^\tau \|_{K_\tau(H)} = \| \{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_1^N \|_{C_\tau(H)} + \ \|\{Au_k\}_1^r\|_{C_\tau(H)} + \left\| \left\{A\frac{u_k+u_{k-1}}{2}\right\}_{r+1}^N \right\|_{C_\tau(H)}$$

стремится к бесконечности при $\tau \to +0$. Исследование разностной схемы (2.1) по норме $C_\tau(H)$ позволяет установить порядок роста этой нормы.

Теорема 2.2. *Пусть τ — достаточно малое число. Тогда для решения разностной схемы* (2.1) *имеем неравенство почти коэрцитивной устойчивости*

$$\| u^\tau \|_{K_\tau(H)} \leqslant M_{a,b}\Big[\min\left\{\ln\frac{1}{\tau}, 1 + |\ln \| A \|_{H\to H}|\right\} \| \varphi^\tau \|_{C_\tau(H)} + \| A\varphi \|_H\Big].$$

Доказательство. Доказательство теоремы 2.2 основано на оценке почти коэрцитивной устойчивости

$$\| u^\tau \|_{K_\tau(H)} \leqslant M\Big[\min\left\{\ln\frac{1}{\tau}, 1 + |\ln \| A \|_{H\to H}|\right\} \| \varphi^\tau \|_{C_\tau(H)} + \| Au_0\|_H\Big]$$

для решения разностной схемы (2.6) в $C_\tau(H)$ из монографии [20], а также на оценке

$$\| Au_0 \|_H \leqslant M_{a,b}\Big[\ \| A\varphi \|_H + \min\{\ln\frac{1}{\tau}, 1 + |\ln \| A \|_{H\to H}\ |\}\|\varphi^\tau \|_{C_\tau(H)}\ \Big]$$

для решения разностной схемы (2.1) в $C_\tau(H)$. ☐

Теорема 2.3. *Пусть τ — достаточно малое число и $\varphi \in D(A)$. Тогда для решения разностной схемы* (2.1) *выполняется следующее неравенство коэрцитивной устойчивости в $C^\alpha_\tau(E)$:*

$$\| \{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_1^N \|_{C^\alpha_\tau(H)} + \ \| \{Au_k\}_1^r \|_{C^\alpha_\tau(H)} + \left\| \left\{A\frac{u_k+u_{k-1}}{2}\right\}_{r+1}^N \right\|_{C^\alpha_\tau(H)} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{M_{a,b}}{\alpha(1-\alpha)}\|\varphi^\tau \|_{C^\alpha_\tau(E)} + M_{a,b}\,\|A\varphi\|\,|_H. \tag{2.14}$$

Доказательство. Корректность разностных схем первого и второго порядков точности в $C^\alpha_\tau(E)$ для задачи Коши получена в работах [10, 20]. Доказательство этой теоремы проводится по схеме доказательств из работ [10, 20] и опирается на оценку коэрцитивной устойчивости

$$\| Au_0 \|_E \leqslant \frac{M}{\alpha(1-\alpha)} \| \varphi^\tau \|_{C^\alpha_\tau(E)} + M \| A\mu \|_E$$

для решения разностной схемы (2.1). ☐

Замечание 2.1. Переходя к пределу при $\tau \longrightarrow 0$ в (2.14), можно получить корректность нелокальной краевой задачи (1.1) в $C_0^\alpha\left([0,T]\,,H\right)$.

Замечание 2.2. Заметим, что оценки устойчивости, почти коэрцитивной устойчивости и коэрцитивной устойчивости разностной схемы (2.1) в теоремах 2.1–2.3 в произвольном банаховом пространстве E верны в предположении, что оператор

$$I - \frac{a_0 B + a_N B R^{N-r} C^r}{2}\tau - \sum_{i=1}^{r} a_i B C^i \tau - \sum_{i=r+1}^{N-1} a_i B R^{k-r} C^r \tau h$$

имеет ограниченный обратный в E.

Теперь рассмотрим приложения результатов теорем 2.1–2.3.

Во-первых, рассматривается нелокальная краевая задача для одномерного параболического уравнения

$$\begin{cases} v_t - (a(x)v_x)_x + \delta v = f(t,x), & 0 < t < T, \quad 0 < x < l, \\ v(0,x) = \int\limits_0^T \alpha(s) B v(s,x) ds + \varphi(x), & 0 \leqslant x \leqslant l, \\ v(t,0) = v(t,l), \quad v_x(t,0) = v_x(t,l), & 0 \leqslant t \leqslant T. \end{cases} \tag{2.15}$$

Здесь $0 < a \leqslant a(x)$, $a(l) = a(0)$ и δ — положительная константа. При условиях согласования задача (2.15) имеет единственное решение $v(t,x)$ для гладких функций $a(x)$, $x \in (0,l)$, $\varphi(x)$, $x \in [0,l]$, $f(t,x)$, $(t,x) \in (0,T) \times (0,l)$. Это позволяет свести смешанную задачу (2.20) к нелокальной краевой задаче (1.1) в гильбертовом пространстве $H = L_2[0,l]$. Известно, что дифференциальное выражение

$$Az = -\frac{d}{dx}\left(a(x)\frac{dz(x)}{dx}\right) + \delta z(x) \tag{2.16}$$

определяет самосопряженный положительно определенный оператор A с областью определения

$$D(A) = \{z : z, z'' \in L_2[0,l], z(0) = z(l), z'(0) = z'(l)\}. \tag{2.17}$$

Пусть $L_{2h} = L_2[0,l]_h$ и $W_{2h}^2 = W_2^2[0,l]_h$ — нормированные пространства всех сеточных функций $\gamma^h(x) = \{\gamma_n\}_{n=0}^M$, определенных на $[0,l]_h = \{x_n = nh, 0 \leqslant n \leqslant M, Mh = l\}$ и оснащенных, соответственно, нормами

$$\left\|\gamma^h\right\|_{L_{2h}} = \left(\sum_{x \in [0,l]_h} \left|\gamma^h(x)\right|^2 h\right)^{1/2}, \qquad \left\|\gamma^h\right\|_{W_{2h}^2} = \left\|\gamma^h\right\|_{L_{2h}} + \left(\sum_{x \in [0,l]_h} \left|\left(\gamma^h\right)_{x\overline{x},j}\right|^2 h\right)^{1/2}.$$

Кроме того, введем разностный оператор A_h^x, действующий в пространстве сеточных функций $u^h(x) = \{u_n\}_{n=0}^M$, определенных на $[0,l]_h$ и удовлетворяющих условиям $u_M = u_0$ и $u_1 - u_0 = u_M - u_{M-1}$, по формуле

$$A_h^x u^h(x) = \left\{-\frac{1}{h}\left(a_{n+1}\frac{u_{n+1}-u_n}{h} - a_n\frac{u_n - u_{n-1}}{h}\right) + \delta u_n\right\}_1^{M-1}. \tag{2.18}$$

Для численного решения $\left\{u_k^h(x)\right\}_{k=0}^N$ нелокальной краевой задачи (2.15) приведем разностную схему второго порядка точности по t

$$\begin{cases} \dfrac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \dfrac{1}{h}\left(a_{n+1}\dfrac{u_{n+1}^k - u_n^k}{h} - a_n\dfrac{u_n^k - u_{n-1}^k}{h}\right) + \delta u_n^k = f_n^k, \\ f_n^k = f\left(t_k - \dfrac{\tau}{2}, x_n\right), \quad t_k = k\tau, \quad x_n = nh, \quad k = \overline{1,r}, \quad n = \overline{1,M-1}, \\ \dfrac{u_n^k - u_n^{k-1}}{\tau} - \dfrac{1}{2h}\left(a_{n+1}\dfrac{u_{n+1}^k - u_n^k}{h} - a_n\dfrac{u_n^k - u_{n-1}^k}{h}\right) - \\ \qquad - \dfrac{1}{2h}\left(a_{n+1}\frac{u_{n+1}^{k-1} - u_n^{k-1}}{h} - a_n\dfrac{u_n^{k-1} - u_{n-1}^{k-1}}{h}\right) + \delta\dfrac{u_n^k + u_n^{k-1}}{2} = f_n^k, \\ f_n^k = f\left(t_k - \frac{\tau}{2}, x_n\right), \quad t_k = k\tau, \quad x_n = nh, \quad k = \overline{r+1,N}, \quad n = \overline{1,M-1}, \\ u_n^0 = \dfrac{a_0 B u_n^0 + a_N B u_n^N}{2}\tau + \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i B u_n^i \tau + \varphi_n, \quad \varphi_n = \varphi(x_n), \quad n \in \overline{0,M}, \\ u_M^k = u_0^k, \quad u_1^k - u_0^k = u_M^k - u_{M-1}^k, \quad k \in \overline{0,N}. \end{cases} \tag{2.19}$$

Применяя результаты теорем 2.1–2.3, мы можем получить результаты об устойчивости, почти коэрцитивной устойчивости и коэрцитивной устойчивости для (2.19).

Теорема 2.4. *Пусть τ и h — достаточно малые числа и выполнено условие*

$$\left[\frac{|a_0|+|a_N|}{2}\tau+\sum_{i=1}^{N-1}|a_i|\,\tau\right]\|B\|<1.$$

Тогда для решения разностной схемы (2.19) *выполняются оценки устойчивости*

$$\left\|\left\{u_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\left\{f_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\right],$$

почти коэрцитивной устойчивости

$$\left\|\left\{\frac{1}{\tau}\left(u_k^h-u_{k-1}^h\right)\right\}_{k=1}^N\right\|_{C(L_{2h})}\leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\ln\frac{1}{h+\tau}\left\|\left\{f_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C(L_{2h})}\right]$$

и коэрцитивной устойчивости

$$\left\|\left\{\frac{1}{\tau}\left(u_k^h-u_{k-1}^h\right)\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\frac{1}{\alpha\,(1-\alpha)}\left\|\left\{f_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\right].$$

Во-вторых, пусть Ω — единичный куб в n-мерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$ $(0<x_k<1,$ $1\leqslant k\leqslant n)$ с границей S и $\widetilde{\Omega}=\Omega\cup S$. В $[0,T]\times\widetilde{\Omega}$ рассмотрим нелокальную краевую задачу для многомерного параболического уравнения

$$\begin{cases} u_t-\sum\limits_{r=1}^{n}\left(a_r(x)u_{x_r}\right)_{x_r}=f(t,x), \quad 0<t<T, \quad x\in\Omega, \\ u(0,x)=\int\limits_0^T\alpha(s)Bu(s,x)ds+\varphi(x),\ x\in\widetilde{\Omega}, \\ u(t,x)=0,\ x\in S,\ 0\leqslant t\leqslant T. \end{cases} \tag{2.20}$$

Задача (2.20) имеет единственное гладкое решение $u(t,x)$ для гладких функций $a_r(x)\geqslant a>0$ $(x\in\Omega)$, $\varphi(x)(x\in\widetilde{\Omega})$ и $f(t,x)$ $(t\in[0,T],x\in\Omega)$. Это позволяет свести смешанную задачу (2.20) к нелокальной краевой задаче (1.1) в гильбертовом пространстве $H=L_2(\Omega)$ всех интегрируемых функций, определенных на Ω, снабженных нормой

$$\|f\|_{L_2(\Omega)}=\left\{\int\limits_{x\in\Omega}\cdots\int|f(x)|^2\,dx_1\ldots dx_n\right\}^{\frac{1}{2}},$$

с самосопряженным положительно определенным оператором A^x, определяемым формулой

$$A^xu(x)=-\sum_{r=1}^{n}(a_r(x)u_{x_r})_{x_r}, \tag{2.21}$$

с областью определения

$$D(A^x)=\left\{u(x):u(x),u_{x_r}(x),(a_r(x)u_{x_r})_{x_r}\in L_2(\overline{\Omega}),1\leqslant r\leqslant n,u(x)=0,x\in S\right\}.$$

Численное решение задачи (2.20) проводится в два этапа. На первом этапе задаётся сетка

$$\widetilde{\Omega}_h=\left\{x=x_m=(h_1m_1,\ldots,h_nm_n),\ m=(m_1,\ldots,m_n),\ 0\leqslant m_r\leqslant M_r,\ h_rM_r=L,\ r=1,\ldots,n\right\},$$

$$\Omega_h=\widetilde{\Omega}_h\cap\Omega,\quad S_h=\widetilde{\Omega}_h\cap S$$

и разностный оператор A_h^x по формуле

$$A_h^xu^h(x)=-\sum_{r=1}^{n}\left(a_r(x)u_{\bar{x}_r}^h\right)_{x_r,j_r}, \tag{2.22}$$

действующий в пространстве сеточных функций $u^h(x)$, удовлетворяющих условиям $u^h(x)=0$ для всех $x\in S_h$. С помощью A_h^x приходим к нелокальной краевой задаче для бесконечной системы дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} v_t^h(t,x)+A_h^x v^h(t,x)=f^h(t,x), 0<t<T, \quad x\in\widetilde{\Omega}_h, \\ v^h(0,x)=\int\limits_0^T \alpha(s)B_h v^h(s,x)ds+\varphi^h(x), \quad x\in\widetilde{\Omega}_h. \end{cases} \tag{2.23}$$

На втором этапе задача (2.23) заменяется разностной схемой второго порядка точности по t

$$\begin{cases} \dfrac{u_k^h(x)-u_{k-1}^h(x)}{\tau}+A_h^x u_k^h(x)=\varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x)=f^k(t_k-\dfrac{\tau}{2},x), t_k=k\tau, \quad 1\leqslant k\leqslant r, \quad x\in\widetilde{\Omega}_h, \\ \dfrac{u_k^h(x)-u_{k-1}^h(x)}{\tau}+\dfrac{1}{2}A_h^x u_k^h(x)+\dfrac{1}{2}A_h^x u_{k-1}^h(x)=\varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x)=f^k(t_k-\dfrac{\tau}{2},x), t_k=k\tau, \quad r+1\leqslant k\leqslant N, \quad x\in\widetilde{\Omega}_h, \\ u_0^h(x)=\dfrac{a(0)Bu_0^h(x)+a(T)u_N^h(x)}{2}\tau+\sum\limits_{i=1}^{N-1}\alpha(t_i)Bu_i^h(x)\tau+\varphi^h(x), x\in\widetilde{\Omega}_h. \end{cases} \tag{2.24}$$

Для формулировки результата об устойчивости введем пространство $L_{2h}=L_2(\Omega_h)$ всех сеточных функций $\varphi^h(x)=\varphi(h_1m_1,\ldots,h_nm_n)$, определенных на $x\in\widetilde{\Omega}_h$, снабженных нормой

$$\left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}}=\left(\sum_{x\in\widetilde{\Omega}_h}|\varphi^h(x)|^2h\right)^{1/2}.$$

Применяя результаты теорем 2.1–2.3 и теорему о коэрцитивном неравенстве для решения эллиптической разностной задачи в L_{2h} (см. [11]), можно получить результаты об устойчивости, почти коэрцитивной устойчивости и коэрцитивной устойчивости.

Теорема 2.5. *Пусть τ и $|h|=\sqrt{h_1^2+h_2^2+\ldots+h_n^2}$ — достаточно малые числа и выполнено условие*

$$\left[\frac{|a_0|+|a_N|}{2}\tau+\sum_{i=1}^{N-1}|a_i|\,\tau\right]\|B\|<1.$$

Тогда для решений разностной схемы (2.24) *выполняются оценки устойчивости*

$$\left\|\left\{u_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\left\{f_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\right],$$

почти коэрцитивной устойчивости

$$\left\|\left\{\frac{1}{\tau}\left(u_k^h-u_{k-1}^h\right)\right\}_{k=1}^N\right\|_{C(L_{2h})}\leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\ln\frac{1}{|h|+\tau}\left\|\left\{f_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C(L_{2h})}\right]$$

и коэрцитивной устойчивости

$$\left\|\left\{\frac{1}{\tau}\left(u_k^h-u_{k-1}^h\right)\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\frac{1}{\alpha\,(1-\alpha)}\left\|\left\{f_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\right].$$

3. Устойчивость неявной разностной схемы второго порядка точности

Для приближенного решения краевой задачи (1.1) мы рассмотрим неявную разностную схему второго порядка

$$\frac{1}{\tau}(u_k-u_{k-1})+A\left(I+\frac{\tau A}{2}\right)u_k=\left(I+\frac{\tau A}{2}\right)\varphi_k, \quad \varphi_k=f\Big(t_k-\frac{\tau}{2}\Big), \quad 1\leqslant k\leqslant N, \tag{3.1}$$

$$u_0=\frac{a_0Bu_0+a_NBu_N}{2}\tau+\sum_{i=1}^{N-1}a_iBu_i\tau+\varphi.$$

Из положительности оператора A следует, что существует ограниченный оператор шага $R = R(\tau A)$ этой разностной схемы на всем пространстве H, определяемый формулой

$$R = \Big(I + \tau A + \frac{(\tau A)^2}{2}\Big)^{-1}.$$

Лемма 3.1. *При любых $k = 1, \ldots, N$ выполнены оценки*

$$\left\|R^k\right\|_{H \to H} \leqslant 1, \qquad \left\|(I - R)\, R^k\right\|_{H \to H} \leqslant \frac{1}{k}. \tag{3.2}$$

Лемма 3.2. *Предположим, что*

$$\left[\frac{|a_0| + |a_N|}{2}\tau + \sum_{i=1}^{N-1} |a_i|\, \tau\right] \|B\| < 1. \tag{3.3}$$

Тогда оператор $I - \dfrac{a_0 B + a_N B R^N}{2}\tau - \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i R^i B \tau$ имеет обратный Q и выполняется оценка

$$\|Q_\tau\|_{H \to H} \leqslant \frac{1}{1 - \left[\frac{|a_0| + |a_N|}{2}\tau + \sum\limits_{i=1}^{N-1} |a_i|\, \tau\right] \|B\|} = M_{a,b}. \tag{3.4}$$

Доказательство этой оценки основано на спектральном представлении самосопряженного положительно определенного оператора в гильбертовом пространстве.

Лемма 3.3. *Для решения разностной схемы* (3.1) *имеет место формула*:

$$u_k = R^k u_0 + \sum_{i=1}^{k} R^{k-i+1} \left(I + \frac{\tau A}{2}\right) \varphi_i \tau, \tag{3.5}$$

$$u_0 = Q_\tau \left[\frac{\tau a_N}{2} B \sum_{i=1}^{N} R^{N-i+1} \left(I + \frac{\tau A}{2}\right) \varphi_i \tau + \sum_{i=1}^{N-1} \tau a_i B \sum_{j=1}^{i} R^{i-j+1} \left(I + \frac{\tau A}{2}\right) \varphi_j \tau + \varphi\right]. \tag{3.6}$$

Доказательство. Для решения разностной схемы

$$\frac{1}{\tau}(u_k - u_{k-1}) + A\left(I + \frac{\tau A}{2}\right) u_k = \left(I + \frac{\tau A}{2}\right) \varphi_k, \quad 1 \leqslant k \leqslant N, \quad u_0 \text{ — заданный элемент} \tag{3.7}$$

применим формулу (3.5). С учетом нелокального условия

$$u_0 = \frac{a_0 B u_0 + a_N B u_N}{2}\tau + \sum_{i=1}^{N-1} a_i B u_i \tau + \varphi$$

получаем

$$u_0 = \frac{\tau a_0}{2} B u_0 + \frac{\tau a_N}{2} B \left[R^N u_0 + \sum_{i=1}^{N} R^{N-i+1} \left(I + \frac{\tau A}{2}\right) \varphi_i \tau\right] + \\ + \sum_{i=1}^{N-1} \tau a_i B \left[R^i u_0 + \sum_{j=1}^{i} R^{i-j+1} \left(I + \frac{\tau A}{2}\right) \varphi_j \tau\right] + \varphi.$$

По лемме 3.2 оператор $I - \dfrac{a_0 B + a_N B R^N}{2}\tau - \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i R^i B \tau$ имеет обратный Q_τ. Отсюда следует формула (3.6). Лемма 3.3 доказана. □

Теорема 3.1. *Пусть τ — достаточно малое число. Тогда разностная схема* (3.1) *устойчива в $C_\tau(H)$ и $C_\tau^\alpha(H)$, а для решения разностной схемы* (3.1) *в $C_\tau(H)$ и $C_\tau^\alpha(H)$ выполняются следующие неравенства устойчивости*:

$$\| u^\tau\|_{C_\tau(H)} \leqslant M_{a,b}\Big[\| \varphi \|_H + \| \varphi^\tau \|_{C_\tau(H)}\Big], \tag{3.8}$$

$$\| u^\tau\|_{C_\tau^\alpha(H)} \leqslant M_{a,b}\Big[\| \varphi \|_H + \| \varphi^\tau \|_{C_\tau^\alpha(H)}\Big]. \tag{3.9}$$

Доказательство. Неравенства устойчивости решения разностной схемы (3.7) в $C_\tau(H)$ и $C_\tau^\alpha(H)$

$$\| u^\tau \|_{C_\tau(H)} \leqslant \Big[\|u_0\|_H + T \| \varphi^\tau \|_{C_\tau(H)} \Big], \tag{3.10}$$

$$\| u^\tau \|_{C_\tau^\alpha(H)} \leqslant M \Big[\| u_0 \|_H + \| \varphi^\tau \|_{C_\tau^\alpha(H)} \Big] \tag{3.11}$$

были доказаны ранее (см. [10]). Используя формулу (3.6) и оценку (3.2), получаем оценки для решения разностной схемы (3.1) в $C_\tau(H)$ и $C_\tau^\alpha(H)$

$$\| u_0 \|_H \leqslant M_{a,b} \Big[\| \varphi \|_H + \| \varphi^\tau \|_{C_\tau(H)} \Big], \tag{3.12}$$

$$\| u_0 \|_H \leqslant M_{a,b} \Big[\| \varphi \|_H + \| \varphi^\tau \|_{C_\tau^\alpha(H)} \Big]. \tag{3.13}$$

Поэтому оценки (3.8) и (3.9) вытекают из оценок (3.10)–(3.13). □

Поскольку нелокальная краевая задача (1.1) в пространстве $C([0,T],H)$ непрерывных H-значных функций, определенных на $[0,T]$, не является корректной для произвольного положительного оператора A и пространства H, то равномерная по $\tau > 0$ корректность разностной схемы (3.1) по норме $C_\tau(H)$ не имеет места. Это означает, что коэрцитивная норма

$$\| u^\tau \|_{K_\tau(H)} = \| \{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_1^N \|_{C_\tau(H)} + \left\| \left\{ A\left(I + \frac{\tau A}{2}\right) u_k \right\}_1^N \right\|_{C_\tau(H)}$$

стремится к ∞ при $\tau \to$. Исследование разностной схемы (3.1) по норме $C_\tau(H)$ позволяет установить порядок роста этой нормы до ∞.

Теорема 3.2. *Пусть τ — достаточно малое число. Тогда для решения разностной схемы* (3.1) *имеем неравенство почти коэрцитивной устойчивости*

$$\| u^\tau \|_{K_\tau(H)} \leqslant M_{a,b} \left[\min\left\{ \ln\frac{1}{\tau}, 1 + |\ln \| A \|_{H\to H}| \right\} \| \varphi^\tau \|_{C_\tau(H)} + \| A\varphi \|_H \right].$$

Доказательство. Доказательство теоремы основано на оценке почти коэрцитивной устойчивости

$$\| u^\tau \|_{K_\tau(H)} \leqslant M \left[\min\left\{ \ln\frac{1}{\tau}, 1 + |\ln \| A \|_{H\to H}| \right\} \| \varphi^\tau \|_{C_\tau(H)} + \| Au_0 \|_H \right]$$

для решения разностной схемы (3.7) в $C_\tau(H)$ из монографии [20] и оценки

$$\| A\left(I + \frac{\tau A}{2}\right) u_0 \|_H \leqslant M_{a,b} \left[\| A\varphi \|_H + \min\left\{ \ln\frac{1}{\tau}, 1 + |\ln \| A \|_{H\to H} | \right\} \| \varphi^\tau \|_{C_\tau(H)} \right]$$

для решения разностной схемы (3.1) в $C_\tau(H)$. □

Теорема 3.3. *Пусть τ — достаточно малое число и $\varphi \in D(A)$. Тогда для решения разностной схемы* (3.1) *выполняется следующее неравенство коэрцитивной устойчивости в $C_\tau^\alpha(E)$:*

$$\| \{\tau^{-1}(u_k - u_{k-1})\}_1^N \|_{C_\tau^\alpha(H)} + \left\| \left\{ A\left(I + \frac{\tau A}{2}\right) u_k \right\}_1^N \right\|_{C_\tau^\alpha(H)} \leqslant \frac{M_{a,b}}{\alpha(1-\alpha)} \| \varphi^\tau \|_{C_\tau^\alpha(E)} + M_{a,b} \| A\varphi \|_H.$$

Доказательство. Доказательство этой теоремы основано на теореме о корректности в $C_\tau^\alpha(E)$ разностной схемы (3.7) из работ [10, 20] и оценках коэрцитивной устойчивости

$$\| A\left(I + \frac{\tau A}{2}\right) u_0 \|_E \leqslant \frac{M}{\alpha(1-\alpha)} \| \varphi^\tau \|_{C_\tau^\alpha(E)} + M \| A\mu \|_E$$

для решения разностной схемы (3.1). □

Замечание 3.1. Заметим, что оценки устойчивости, почти коэрцитивной устойчивости и коэрцитивной устойчивости разностной схемы (3.1) теорем 3.1–3.3 в произвольном банаховом пространстве E выполняются при предположении, что оператор $I - \dfrac{a_0 B + a_N B R^N}{2}\tau - \sum\limits_{i=1}^{N-1} a_i R^i B \tau$ имеет ограниченный обратный в E.

Теперь перейдем к приложениям результатов теорем 3.1–3.3.

Сначала рассмотрим нелокальную краевую задачу для одномерного параболического уравнения (2.15). Для численного решения $\left\{u_k^h(x)\right\}_{k=0}^N$ нелокальной краевой задачи (2.15) используем разностную схему второго порядка точности по t

$$\begin{cases} \dfrac{u_k^h(x)-u_{k-1}^h(x)}{\tau}+A_h^x\left(I+\dfrac{\tau A_h^x}{2}\right)u_k^h(x)=\left(I+\dfrac{\tau A_h^x}{2}\right)\varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x)=f^k\Big(t_k-\dfrac{\tau}{2},x\Big),\quad t_k=k\tau,\quad 1\leqslant k\leqslant N,\quad x\in[0,l]_h, \\ u_0^h(x)=\dfrac{a(0)Bu_0^h(x)+a(T)u_N^h(x)}{2}\tau+\sum\limits_{i=1}^{N-1}\alpha(t_i)Bu_i^h(x)\tau+\varphi^h(x),\quad x\in[0,l]_h. \end{cases} \tag{3.14}$$

Применяя результаты теорем 3.1–3.3, мы можем получить результаты об устойчивости, почти коэрцитивной устойчивости и коэрцитивной устойчивости для (3.14).

Теорема 3.4. *Пусть τ и h — достаточно малые числа и выполнено условие*

$$\left[\frac{|a_0|+|a_N|}{2}\tau+\sum_{i=1}^{N-1}|a_i|\,\tau\right]\|B\|<1.$$

Тогда для решения разностной схемы (3.14) *выполняются оценки устойчивости*

$$\left\|\left\{u_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\left\{f_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\right],$$

почти коэрцитивной устойчивости

$$\left\|\left\{\frac{1}{\tau}\left(u_k^h-u_{k-1}^h\right)\right\}_{k=1}^N\right\|_{C(L_{2h})}\leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\ln\frac{1}{h+\tau}\left\|\left\{f_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C(L_{2h})}\right]$$

и коэрцитивной устойчивости

$$\left\|\left\{\frac{1}{\tau}\left(u_k^h-u_{k-1}^h\right)\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\frac{1}{\alpha\,(1-\alpha)}\left\|\left\{f_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\right].$$

Теперь в $[0,T]\times\widetilde{\Omega}$ рассмотрим нелокальную краевую задачу (2.20) для многомерного параболического уравнения. Численное решение задачи (2.20) проводится в два этапа. На первом этапе определяется сетка

$$\widetilde{\Omega}_h=\left\{x=x_m=(h_1m_1,\ldots,h_nm_n),\ m=(m_1,\ldots,m_n),\ 0\leqslant m_r\leqslant M_r,\ h_rM_r=L,\ r=1,\ldots,n\right\},$$

$$\Omega_h=\widetilde{\Omega}_h\cap\Omega,\quad S_h=\widetilde{\Omega}_h\cap S$$

и разностный оператор A_h^x по формуле

$$A_h^xu^h(x)=-\sum_{r=1}^n\left(a_r(x)u_{\bar{x}_r}^h\right)_{x_r,j_r},\tag{3.15}$$

действующий в пространстве сеточных функций $u^h(x)$, удовлетворяющих условиям $u^h(x)=0$ для всех $x\in S_h$. С помощью A_h^x приходим к нелокальной краевой задаче

$$\begin{cases} v_t^h(t,x)+A_h^xv^h(t,x)=f^h(t,x),\quad 0<t<T,\quad x\in\widetilde{\Omega}_h, \\ v^h(0,x)=\int\limits_0^T\alpha(s)B_hv^h(s,x)ds+\varphi^h(x),\quad x\in\widetilde{\Omega}_h \end{cases}\tag{3.16}$$

для бесконечной системы дифференциальных уравнений.

На втором этапе задача (3.16) заменяется разностной схемой второго порядка точности по t

$$\begin{cases} \dfrac{u_k^h(x)-u_{k-1}^h(x)}{\tau}+A_h^x\left(I+\dfrac{\tau A_h^x}{2}\right)u_k^h(x)=\left(I+\dfrac{\tau A_h^x}{2}\right)\varphi_k^h(x), \\ \varphi_k^h(x)=f^k\Big(t_k-\dfrac{\tau}{2},x\Big), \quad t_k=k\tau, \quad 1\leqslant k\leqslant N, \quad x\in\widetilde{\Omega}_h, \\ u_0^h(x)=\dfrac{a(0)Bu_0^h(x)+a(T)u_N^h(x)}{2}\tau+\sum\limits_{i=1}^{N-1}\alpha(t_i)Bu_i^h(x)\tau+\varphi^h(x), \quad x\in\widetilde{\Omega}_h. \end{cases} \tag{3.17}$$

Применяя результаты теорем 3.1–3.3 и теорему о коэрцитивном неравенстве для решения эллиптической разностной задачи в L_{2h} (см. [11]), можно получить результаты об устойчивости, почти коэрцитивной устойчивости и коэрцитивной устойчивости.

Теорема 3.5. *Пусть* τ *и* $|h|=\sqrt{h_1^2+h_2^2+\ldots+h_n^2}$ *— достаточно малые числа и выполнено условие*

$$\left[\frac{|a_0|+|a_N|}{2}\tau+\sum_{i=1}^{N-1}|a_i|\,\tau\right]\|B\|<1.$$

Тогда для решений разностной схемы (3.17) *выполняются оценки устойчивости*

$$\left\|\left\{u_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\left\|\varphi^h\right\|_{L_{2h}}+\left\|\left\{f_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\right],$$

почти коэрцитивной устойчивости

$$\left\|\left\{\frac{1}{\tau}\left(u_k^h-u_{k-1}^h\right)\right\}_{k=1}^N\right\|_{C(L_{2h})}\leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\ln\frac{1}{|h|+\tau}\left\|\left\{f_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C(L_{2h})}\right]$$

и коэрцитивной устойчивости

$$\left\|\left\{\frac{1}{\tau}\left(u_k^h-u_{k-1}^h\right)\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\leqslant M_{a,b,q,\delta}\left[\left\|\varphi^h\right\|_{W_{2h}^2}+\frac{1}{\alpha\,(1-\alpha)}\left\|\left\{f_k^h\right\}_{k=1}^N\right\|_{C_\tau^\alpha(L_{2h})}\right].$$

4. Численные результаты

Рассмотрим разностные схемы второго порядка точности для решения нелокальной краевой задачи

$$\begin{cases} u_t(t,x)-\left(1+x^2\right)u_{xx}(t,x)-2x\;u_x(t,x)+2u(t,x)=f(t,x), \\ f(t,x)=\exp(-t-1)\;\left\{\left(2+x^2\right)\sin x-2x\cos x\right\}, \\ u(0,x)=\dfrac{1}{5}\int\limits_0^1 e^{-s}u(s,x)ds+\varphi(x), \quad \varphi(x)=\sin x\left\{e^{-1}+\dfrac{1}{10}\left(e^{-3}-e^{-1}\right)\right\}, \quad 0\leqslant x\leqslant\pi, \\ u(t,0)=0, \quad u(t,\pi)=0, \quad 0\leqslant t\leqslant 1 \end{cases} \tag{4.1}$$

для одномерного параболического уравнения.

Точное решение задачи $u\,(t,x)=\exp(-t-1)\sin x$. Множество семейства узлов сетки $[0,1]_\tau\times[0,\pi]_h$, зависящее от параметров τ и h, определяется как

$$[0,1]_\tau\times[0,\pi]_h=\left\{(t_k,x_n):t_k=\tau k,\;0\leqslant k\leqslant N,\;\tau N=1,x_n=hn,\;0\leqslant n\leqslant M,hM=\pi\right\}.$$

Сначала, применяя разностную схему (2.1) к задаче (4.1), мы получаем r-модифицированную разностную схему Кранка—Николсона

$$\begin{gathered}
\left(-\frac{\left(1+x_n^2\right)}{h^2}-\frac{2x_n}{2h}\right)u_{n+1}^k+\left(-\frac{1}{\tau}\right)u_n^{k-1}+\left(2+\frac{1}{\tau}+\frac{2\left(1+x_n^2\right)}{h^2}\right)u_n^k+\left(-\frac{\left(1+x_n^2\right)}{h^2}+\frac{2x_n}{2h}\right)u_{n-1}^k=\\
=f(t_k-\frac{\tau}{2},x_n),\quad k=1,\dots,r,\\
\left(-\left(1+x_n^2\right)\frac{1}{2h^2}-2x_n\frac{1}{4h}\right)u_{n+1}^k+\left(\frac{1}{\tau}+\left(1+x_n^2\right)\frac{1}{h^2}+1\right)u_n^k+\left(-\left(1+x_n^2\right)\frac{1}{2h^2}+2x_n\frac{1}{4h}\right)u_{n-1}^k+\\
+\left(-\left(1+x_n^2\right)\frac{1}{2h^2}-2x_n\frac{1}{4h}\right)u_{n+1}^{k-1}+\left(-\frac{1}{\tau}+\left(1+x_n^2\right)\frac{1}{h^2}+1\right)u_n^{k-1}+\\
+\left(-\left(1+x_n^2\right)\frac{1}{2h^2}+2x_n\frac{1}{4h}\right)u_{n-1}^{k-1}=f(t_k-\frac{\tau}{2},x_n),\quad k=r+1,\dots,N.
\end{gathered}\tag{4.2}$$

Эту систему уравнений можно переписать в матричной форме

$$\begin{cases}A_nU_{n+1}+B_n\,U_n+C_n\,U_{n-1}=R\varphi_n,\quad 2\leqslant n\leqslant M-2,\\ U_0=\overrightarrow{0},\quad U_1=\frac{4}{5}U_2-\frac{1}{5}U_3U_{M-1}=\frac{4}{5}U_{M-2}-\frac{1}{5}U_{M-3},\quad U_M=\overrightarrow{0},\end{cases}\tag{4.3}$$

где R — единичная матрица с $(N+1)$ строками и столбцами,

$$\varphi_n=\begin{bmatrix}\varphi_n^0\\ \varphi_n^1\\ \dots\\ \varphi_n^N\end{bmatrix}_{(N+1)\times 1},\qquad \varphi_n^k=\begin{cases}\left[e^{-1}+\frac{1}{10}\left(e^{-3}-e^{-1}\right)\right]\sin x_n,\quad k=0,\\ f\left(t_k-\frac{\tau}{2},x_n\right),\quad 1\leqslant k\leqslant N,\end{cases}$$

$$U_s=\begin{bmatrix}U_s^0\\ U_s^1\\ \dots\\ U_s^{N-1}\\ U_s^N\end{bmatrix},\quad s=n-1,n,n+1,\qquad Q(p,r)=\begin{bmatrix}p&r&\dots&0&0\\0&p&\dots&0&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&\dots&p&r\\0&0&\dots&0&0\end{bmatrix},$$

$$A_n=Q(0,a_n),\quad C_n=Q(0,c_n),$$

$$B_n=\begin{bmatrix}b_n&d&0&\dots&0&0&0\\0&b_n&d&\dots&0&0&0\\ \dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots&\dots\\0&0&0&\dots&0&b_n&d\\1-\frac{\tau}{10}&-\frac{\tau}{5}&-\frac{\tau}{5}&\dots&-\frac{\tau}{5}&-\frac{\tau}{5}&-\frac{\tau e^{-1}}{10}\end{bmatrix},\tag{4.4}$$

$$\begin{aligned}
&a_n=\left(-\left(1+x_n^2\right)\frac{1}{2h^2}-2x_n\frac{1}{2h}\right),\\
&b_n=\frac{1}{\tau}+\left(1+x_n^2\right)\frac{1}{h^2}+1,\\
&d=-\frac{1}{\tau},c_n=\left(-\left(1+x_n^2\right)\frac{1}{2h^2}+2x_n\frac{1}{2h}\right).
\end{aligned}$$

Во-вторых, применяя для решения разностную схему (4.1), получим разностную схему второго порядка точности

$$\begin{gathered}
\frac{u_n^k-u_n^{k-1}}{\tau}+\left(1+\frac{\tau}{2}\right)u_n^k+q_2\left(u_{n+1}^k-u_{n-1}^k\right)(2h)^{-1}+\frac{q_3}{h^2}\left(u_{n+1}^k-2u_n^k+u_{n-1}^k\right)+\\
+\frac{q_0\,\tau}{h^3}\left(u_{n+2}^k-2u_{n+1}^k+2u_{n-1}^k-u_{n-2}^k\right)+\frac{q_1}{h^4}\frac{\tau}{2}\left(u_{n+2}^k-4u_{n+1}^k+6u_n^k-4u_{n-1}^k+u_{n-2}^k\right)=\\
=e^{-t_{k-\frac{1}{2}}-1}\left\{\left(2+x_n^2\right)\sin x_n-2x\cos x_n\right\}+\frac{\tau}{2}e^{-t_{k-\frac{1}{2}}-1}\left\{\left(x_n^4-9x_n^2\right)\sin x_n+\left(-10x_n-8x_n^3\right)\cos x_n\right\},\\
n=\overline{2,M-2},\quad k=\overline{1,N},
\end{gathered}\tag{4.5}$$

$$u_0^k = 0, \quad u_1^k = \frac{4}{5}u_2^k - \frac{1}{5}u_3^k, \quad u_M^k = 0, \quad u_{M-1}^k = \frac{4}{5}u_{M-2}^k - \frac{1}{5}u_{M-3}^k, \quad k = \overline{0,N},$$
$$u_n^N = \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{2}\mu(t_j - \frac{\tau}{2})\tau \ \left[u_n^j + u_n^{j-1}\right] + \varphi_n, \quad n = \overline{0,M},$$

где

$$q_1 = \left(1 + x_n^2\right)^2, \quad q_0 = 4x_n\left(1 + x_n^2\right), \quad q_3 = -\left(1 + x_n^2\right) + \left(2 + 10x^2\right)\frac{\tau}{2} q_2 = \left(-2x_n - 2x_n\tau\right).$$

Можно записать (4.5) в следующей матричной форме:

$$\begin{cases} A_n u_{n+2} + B_n u_{n+1} + C_n u_n + D_n u_{n-1} + E_n u_{n-2} = I_{N+1}\varphi_n, \quad n = \overline{2, M-2}, \\ u_0 = \overrightarrow{0}, \quad u_1 = \frac{4}{5}u_2 - \frac{1}{5}u_3, \quad u_{M-1} = \frac{4}{5}u_{M-2} - \frac{1}{5}u_{M-3}, \quad u_M = \overrightarrow{0}. \end{cases} \tag{4.6}$$

Здесь I_k — единичная матрица $k \times k$, φ_n — матрица размера $(N+1) \times 1$, $\varphi_n = \left[\begin{array}{ccc} \varphi_n^0 & \cdots & \varphi_n^N \end{array}\right]^t$, A_n, B_n, C_n, D_n, E_n — матрицы размера $(N+1) \times (N+1)$, $O_{k\times m}$ — матрица типа $k \times m$ с нулевыми элементами,

$$A_n = \left[\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{O_{1\times(N+1)}} \\ v_n I_N & O_{N\times 1} \end{array}\right], \qquad B_n = \left[\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{O_{1\times(N+1)}} \\ y_n I_N & O_{N\times 1} \end{array}\right],$$
$$D_n = \left[\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{O_{1\times(N+1)}} \\ z_n I_N & O_{N\times 1} \end{array}\right], \qquad E_n = \left[\begin{array}{cc} \multicolumn{2}{c}{O_{1\times(N+1)}} \\ w_n I_N & O_{N\times 1} \end{array}\right],$$

$$C_n = \left[\begin{array}{ccccccc} s_0 & s_1 & s_2 & \cdots & s_{N-2} & s_{N-1} & s_N \\ r_n & d & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & r_n & d & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & \ddots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \ddots & r_n & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & r_n & d \end{array}\right],$$

где

$$v_n = \frac{q_0\tau}{h^3} + \frac{q_1}{h^4}\frac{\tau}{2}, \quad d = -\frac{1}{\tau}, \quad y_n = \frac{q_2}{2h} + \frac{q_3}{h^2} - \frac{2q_0\tau}{h^3} - \frac{2q_1\tau}{h^4},$$
$$r_n = 2 + \tau + \frac{1}{\tau} - \frac{2q_3}{h^2} + \frac{3q_1\tau}{h^4}, \quad w_n = -\frac{q_0\tau}{h^3} + \frac{q_1}{h^4}\frac{\tau}{2},$$
$$z_n = -\frac{q_2}{2h} + \frac{q_3}{h^2} + \frac{2q_0\tau}{h^3} - \frac{2q_1\tau}{h^4}, \quad s_0 = 1 - \frac{\tau}{2}\mu\Big(\frac{\tau}{2}\Big),$$
$$s_N = -\frac{\tau}{2}\mu\Big(t_N - \frac{\tau}{2}\Big), \quad s_j = -\frac{\tau}{2}\left(\mu(t_{j-\frac{1}{2}}) + \mu(t_{j+\frac{1}{2}})\right), \quad j = 1, \ldots, N-1.$$

Решение (4.6) определяется модифицированным методом исключения Гаусса:

$$u_n = \alpha_{n+1}u_{n+1} + \beta_{n+1}u_{n+2} + \gamma_{n+1},$$
$$\beta_{n+1} = -F_n^{-1}A_n, \alpha_{n+1} = -F_n^{-1}\left(B_n + D_n\beta_n + E_n\alpha_{n-1}\beta_n\right),$$
$$\gamma_{n+1} = -F_n^{-1}\left(I_{N+1}\varphi_n - D_n\gamma_n - E_n\alpha_{n-1}\gamma_n - E_n\gamma_{n-1}\right),$$
$$F_n = \left(C_n + D_n\alpha_n + E_n\beta_{n-1} + E_n\alpha_{n-1}\alpha_n\right)$$

при $n = M-2, \ldots, 0$, где

$$\gamma_1 = \gamma_2 = O_{(N+1)\times 1}, \quad \alpha_1 = \beta_1 = O_{(N+1)\times(N+1)}, \quad \alpha_2 = \frac{4}{5}I_{N+1}, \quad \beta_2 = -\frac{1}{5}I_{N+1}, \quad u_M = \overrightarrow{0},$$
$$D_M = \left(\beta_{M-2} + 5I_{N+1}\right) - \left(4I_{N+1} - \alpha_{M-2}\right)\alpha_{M-1}, \quad u_{M-1} = D_M^{-1}\left[\left(4I_{N+1} - \alpha_{M-2}\right)\gamma_{M-1} - \gamma_{M-2}\right].$$

Для сравнения приближенного решения с точным решением вычисляется погрешность

$$E_N^M = \max_{1\leqslant k\leqslant N-1}\left(\sum_{n=1}^{M-1}\left|u(t_k, x_n) - u_n^k\right|^2 h\right)^{\frac{1}{2}}.$$

В табл. 1 приведена погрешность между точным решением и решениями, полученными по разностной схеме (4.2). Погрешности (4.2) приведены в табл. 1 для $r = 1$ и $N, M = 20, 40, 80, 160$, соответственно. Из табл. 1 видно, что порядок точности сходится к двум.

В табл. 2 показана погрешность между точным решением и решением, полученным по разностной схеме (4.5) для $N, M = 20, 40, 80, 160$, соответственно. Из табл. 2 видно, что порядок точности сходится к двум.

$N = M$	E_N^M
20	$3{,}15\times10^{-2}$
40	$7{,}05\times10^{-3}$
80	$1{,}47\times10^{-3}$
160	$3{,}71\times10^{-4}$

Таб. 1. Погрешность приближения для разностной схемы (4.2)
Tab. 1. Error of approximation for difference scheme (4.2)

$N = M$	E_N^M
20	$3{,}10\times10^{-4}$
40	$7{,}66\times10^{-5}$
80	$1{,}92\times10^{-5}$
160	$4{,}80\times10^{-6}$

Таб. 2. Погрешность приближения для разностной схемы (4.5)
Tab. 2. Error of approximation for difference scheme (4.5)

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ашуров Р. Р., Мухиддинова А. Т.* Обратная задача по определению плотности тепловых источников для уравнения субдиффузии// Дифф. уравн. — 2020. — *56*, № 12. — С. 1596–1609.
2. *Ашыралыев А., Соболевский П. Е.* Разностные схемы высокого порядка точности для параболических уравнений с переменными коэффициентами// Докл. АН УССР. Сер. А. — 1988. — *6*. — С. 3–7.
3. *Гулин А. В., Ионкин Н. И., Морозова В. А.* Об устойчивости нелокальной двумерной разностной задачи// Дифф. уравн. — 2001. — *37*, № 7. — С. 926–932.
4. *Гулин А. В., Морозова В. А.* Об устойчивости нелокальной разностной краевой задачи// Дифф. уравн. — 2003. — *39*, № 7. — С. 912–917.
5. *Кожанов А. И.* Разрешимость краевых задач для линейных параболических уравнений в случае задания интегрального по временной переменной условия// Мат. заметки СВФУ. — 2014. — *21*, № 4. — С. 20–30.
6. *Оразов И., Садыбеков М. А.* Об одном классе задач определения температуры и плотности источников тепла по начальной и конечной температурам// Сиб. мат. ж. — 2012. — *53*, № 1. — С. 180–186.
7. *Россовский Л. Е., Ханалыев А. Р.* Коэрцитивная разрешимость нелокальных краевых задач для параболических уравнений// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — *62*. — С. 140–151.
8. *Скубачевский А. Л.* Неклассические краевые задачи. II// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *33*. — С. 3–179.
9. *Соболевский П. Е.* Неравенства коэрцитивности для абстрактных параболических уравнений// Докл. АН СССР. — 1964. — *157*, № 1. — С. 52–55.
10. *Соболевский П. Е.* О коэрцитивной разрешимости разностных уравнений// Докл. АН СССР. — 1971. — *201*, № 5. — С. 1063–1066.
11. *Соболевский П. Е.* Разностные методы решения дифференциальных уравнений. — Воронеж: ВГУ, 1975.
12. *Старовойтов В. Н.* Об однозначной разрешимости линейной параболической задачи с нелокальными по времени данными// Сиб. мат. ж. — 2021. — *62*, № 2. — С. 417–421.
13. *Шелухин В. В.* Задача со средними по времени данными для нелинейных параболических уравнений// Сиб. мат. ж. — 1991. — *32*, № 2. — С. 154–165.

14. *Шелухин В. В.* Вариационный принцип в нелокальных по времени задачах для линейных эволюционных уравнений// Сиб. мат. ж. — 1993. — *34*, № 2. — С. 191–207.
15. *Ashyralyev A.* Well-posedness of the modified Crank-Nicholson difference schemes in Bochner spaces// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B. — *7*, № 1. — С. 29–51.
16. *Ashyralyev A., Agirseven D., Agarwal R. P.* Stability estimates for delay parabolic differential and difference equation// Appl. Comput. Math. — 2020. — *19*, № 2. — С. 175–204.
17. *Ashyralyev A., Ashyralyyev C.* On the stability of parabolic differential and difference equations with a time-nonlocal condition// Comput. Math. Math. Phys. — 2022. — *62*, № 6. — С. 962–973.
18. *Ashyralyev A., Ashyraliyev M., Ashyralyyeva M. A.* Identification problem for telegraph-parabolic equations// Comput. Math. Math. Phys. — 2020. — *60*, № 8. — С. 1294–1305.
19. *Ashyralyev A., Hanalyev A., Sobolevskii P. E.* Coercive solvability of nonlocal boundary value problem for parabolic equations// Abstr. Appl. Anal. — 2002. — *6*, № 1. — С. 53–61.
20. *Ashyralyev A., Sobolevskii P. E.* New Difference Schemes for Partial Differential Equations. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2004.
21. *Ashyralyyev C.* Stability of Rothe difference scheme for the reverse parabolic problem with integral boundary condition// Math. Methods Appl. Sci. — 2020. — *43*, № 8. — С. 5369–5379.
22. *Ashyralyyev C.* The second order of ADS for reverse parabolic boundary value problem with integral condition// Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb. — 2020. — *46*, № 2. — С. 346–359.
23. *Ashyralyyev C., Gonenc A.* Crank—Nicolson difference scheme for reverse parabolic nonlocal problem with integral and Neumann boundary conditions// Int. J. Appl. Math. — 2021. — *34*, № 2. — С. 273–282.
24. *Ashyraliyev M.* On hyperbolic-parabolic problems with involution and Neumann boundary condition// Int. J. Appl. Math. — 2021. — *34*, № 2. — С. 363–376.
25. *Beyn W. J., Garay B. M.* Estimates of variable stepsize Runge—Kutta methods for sectorial evolution equations with nonsmooth data// Appl. Numer. Math. — 2002. — *41*, № 3. — С. 369–400.
26. *Buranay S. C., Arshad N.* Hexagonal grid approximation of the solution of heat equation on special polygons// Adv. Difference Equ. — 2020. — *2020:309*. — С. 1–24.
27. *Buranay S. C., Matan A. H., Arshad N.* Two stage implicit method on hexagonal grids for approximating the first derivatives of the solution to the heat equation// Fractal and Fractions. — 2021. — *5*, № 19. — С. 1–26.
28. *Erdogan A. S.* Numerical solution of parabolic inverse problem with an unknown source function// Канд. дисс. — Istanbul: Yildiz Technical University, 2010.
29. *Erdogan A. S.* Numerical solution of a parabolic problem with involution and nonlocal conditions// Int. J. Appl. Math. — 2021. — *34*, № 2. — С. 401–410.
30. *Gavrilyuk I. P.* Strongly p-positive operators and explicit representations of the solutions of initial value problems for second-order differential equations in Banach space// J. Math. Anal. Appl. — 1999. — *236*, № 2. — С. 327–349.
31. *Gavrilyuk I. P., Makarov V. L.* Exponentially convergent parallel disretization method for the first order evolution equation// Appl. Math. Inform. — 2000. — *5*, № 2. — С. 47–69.
32. *Guidetti D., Karasozen B., Piskarev S.* Approximation of abstract differential equations// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2004. — *122*, № 2. — С. 3013–3054.
33. *Iskenderov N. Sh., Allahverdiyeva S. I.* Inverse boundary value problem for the boussinesq-love equation with nonlocal integral condition// TWMS J. Pure Appl. Math. — 2020. — *11*, № 2. — С. 226–237.
34. *Islomov B. I., Alikulov Y. K.* Boundary value problem for loaded equation of parabolichyperbolic type of the third order in an infinite three-dimensional domain// Int. J. Appl. Math. — 2021. — *34*, № 2. — С. 377–389.
35. *Khankishiyev Z. F.* Solution of one problem for linear loaded parabolic type of differential equation with integral conditions// Adv. Math. Models Appl. — 2022. — *7*, № 2. — С. 178–190.
36. *Musaev N. K.* The Cauchy problem for degenerate parabolic convolution equation// TWMS J. Pure Appl. Math. — 2021. — *12*, № 2. — С. 278–288.
37. *Restrepo J. E., Suragan D.* Direct and inverse Cauchy problems for generalized space-time fractional differential equations// Adv. Differ. Equ. — 2021. — *26*, № 7/8. — С. 305–339.
38. *Ruzhansky M., Serikbaev D., Torebek B. T., Tokmagambetov N.* Direct and inverse problems for time-fractional pseudo-parabolic equations// Quaest. Math. — 2022. — *45*, № 7. — С. 1071–1089.
39. *Sadybekov M. A.* Stable difference scheme for a nonlocal boundary value heat conduction problem// e-J. Anal. Appl. Math. — 2018. — *2018*, № 1. — С. 1–10.
40. *Shakhmurov V.* Regularity properties of nonlocal fractional differential equations and applications// Georgian Math. J. — 2022. — *29*, № 2. — С. 275–284.
41. *Wang Y. G., Oberguggenberger M.* Nonlinear equations with regularized derivatives// J. Math. Anal. Appl. — 1999. — *233*, № 2. — С. 644–658.

Аллаберен Ашыралыев
Бахчешехир университет, Стамбул, Турция
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан
E-mail: aallaberen@gmail.com

Чарыяр Ашыралыев
Бахчешехир университет, Стамбул, Турция
Национальный университет Узбекистана им. М. Улугбека, Ташкент, Узбекистан
E-mail: charyar@gmail.com

UDC 517.9+519.63
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-32-49
EDN: ENHOAY

The second-order accuracy difference schemes for integral-type time-nonlocal parabolic problems

A. Ashyralyev[1,2,3] **and Ch. Ashyralyyev**[1,4]

[1] *Bahcesehir University, Istanbul, Turkey*
[2] *RUDN University, Moscow, Russia*
[3] *Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan*
[4] *National University of Uzbekistan Named After Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan*

This is a discussion on the second-order accuracy difference schemes for approximate solution of the integral-type time-nonlocal parabolic problems. The theorems on the stability of r-modified Crank–Nicolson difference schemes and second-order accuracy implicit difference scheme for approximate solution of the integral-type time-nonlocal parabolic problems in a Hilbert space with self-adjoint positive definite operator are established. In practice, stability estimates for the solutions of the second-order accuracy in t difference schemes for the one and multidimensional time-nonlocal parabolic problems are obtained. Numerical results are given.

Keywords: nonlocal parabolic problem, second-order accuracy difference scheme, Crank–Nicolson scheme, implicit difference scheme, stability

For citation: A. Ashyralyev, Ch. Ashyralyyev, "The second-order accuracy difference schemes for integral-type time-nonlocal parabolic problems," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 1, 32–49. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-32-49

REFERENCES

1. R. R. Ashurov and A. T. Mukhiddinova, "Inverse problem of determining the heat source density for the subdiffusion equation," *Differ. Equ.*, 2020, **56**, No. 12, 1550–1563.
2. A. Ashyralyev and P. E. Sobolevskii, "Raznostnye skhemy vysokogo poryadka tochnosti dlya parabolicheskikh uravneniy s peremennymi koeffitsientami" [Difference schemes of high order of accuracy for parabolic equations with variable coefficients], *Dokl. AN USSR. Ser. A* [Rep. Acad. Sci. Ukr. SSR. Ser. A.], 1988, **6**, 3–7 (in Russian).
3. A. V. Gulin, N. I. Ionkin, and V. A. Morozova, "On the stability of a nonlocal finite-difference boundary value problem," *Differ. Equ.*, 2001, **37**, No. 7, 970–978.

4. A. V. Gulin and V. A. Morozova, "On the stability of a nonlocal finite–difference boundary value problem," *Differ. Equ.*, 2003, **39**, No. 7, 962–967.
5. A. I. Kozhanov, "Razreshimost' kraevykh zadach dlya lineynykh parabolicheskikh uravneniy v sluchae zadaniya integral'nogo po vremennoy peremennoy usloviya" [Solvability of boundary-value problems for linear parabolic equations in the case of integral condition with respect to the time variable], *Mat. zametki SVFU* [Math. Notes North-East Fed. Univ.], 2014, **21**, No. 4, 20–30 (in Russian).
6. I. Orazov and M. A. Sadybekov, "On a class of problems of determining the temperature and density of heat sources given initial and final temperature," *Sib. Math. J.*, 2012, **53**, No. 1, 146–151.
7. L. E. Rossovskii and A. R. Khanalyev, "Coercive solvability of nonlocal boundary-value problems for parabolic equations," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2019, No. 6, **239**, 855–866.
8. A. L. Skubachevskii, "Nonclassical boundary-value problems. II," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2010, **166**, No. 4, 377–561.
9. P. E. Sobolevskii, "Coercivness inequalities for abstract parabolic equations," *Sov. Math. Dokl.*, 1964, **5**, 894–897.
10. P. E. Sobolevskii, "The coercive solvability of difference equations," *Sov. Math. Dokl.*, 1971, **12**, 1802–1805.
11. P. E. Sobolevskii, *Raznostnye metody resheniya differentsial'nykh uravneniy* [Difference Methods for Solving Differential Equations], VGU, Voronezh, 1975 (in Russian).
12. V. N. Starovoitov, "Unique solvability of a linear parabolic problem with nonlocal time data," *Sib. Math. J.*, 2021, **62**, No. 2, 337–340.
13. V. V. Shelukhin, "A problem with time-average data for nonlinear parabolic equations," *Sib. Math. J.*, 1991, **32**, No. 2, 309–320.
14. V. V. Shelukhin, "A variational principle for linear evolution problems nonlocal in time," *Sib. Math. J.*, 1993, **34**, No. 2, 369–384.
15. A. Ashyralyev, "Well-posedness of the modified Crank-Nicholson difference schemes in Bochner spaces," *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B*, 2007, **7**, No. 1, 29–51.
16. A. Ashyralyev, D. Agirseven, and R. P. Agarwal, "Stability estimates for delay parabolic differential and difference equation," *Appl. Comput. Math.*, 2020, **19**, No. 2, 175–204.
17. A. Ashyralyev and C. Ashyralyyev, "On the stability of parabolic differential and difference equations with a time-nonlocal condition," *Comput. Math. Math. Phys.*, 2022, **62**, No. 6, 962–973.
18. A. Ashyralyev, M. Ashyraliyev, and M. A. Ashyralyyeva, "Identification problem for telegraph-parabolic equations," *Comput. Math. Math. Phys.*, 2020, **60**, No. 8, 1294–1305.
19. A. Ashyralyev, A. Hanalyev, and P. E. Sobolevskii, "Coercive solvability of nonlocal boundary value problem for parabolic equations," *Abstr. Appl. Anal.*, 2002, **6**, No. 1, 53–61.
20. A. Ashyralyev and P. E. Sobolevskii, *New Difference Schemes for Partial Differential Equations*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 2004.
21. C. Ashyralyyev, "Stability of Rothe difference scheme for the reverse parabolic problem with integral boundary condition," *Math. Methods Appl. Sci.*, 2020, **43**, No. 8, 5369–5379.
22. C. Ashyralyyev, "The second order of ADS for reverse parabolic boundary value problem with integral condition," *Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb.*, 2020, **46**, No. 2, 346–359.
23. C. Ashyralyyev and A. Gonenc, "Crank—Nicolson difference scheme for reverse parabolic nonlocal problem with integral and Neumann boundary conditions," *Int. J. Appl. Math.*, 2021, **34**, No. 2, 273–282.
24. M. Ashyraliyev, "On hyperbolic-parabolic problems with involution and Neumann boundary condition," *Int. J. Appl. Math.*, 2021, **34**, No. 2, 363–376.
25. W. J. Beyn and B. M. Garay, "Estimates of variable stepsize Runge—Kutta methods for sectorial evolution equations with nonsmooth data," *Appl. Numer. Math.*, 2002, **41**, No. 3, 369–400.
26. S. C. Buranay and N. Arshad, "Hexagonal grid approximation of the solution of heat equation on special polygons," *Adv. Difference Equ.*, 2020, **2020:309**, 1–24.
27. S. C. Buranay, A. H. Matan, and N. Arshad, "Two stage implicit method on hexagonal grids for approximating the first derivatives of the solution to the heat equation," *Fractal and Fractions*, 2021, **5**, No. 19, 1–26.
28. A. S. Erdogan, "Numerical solution of parabolic inverse problem with an unknown source function," *PhD Thesis*, Yildiz Technical University, Istanbul, 2010.
29. A. S. Erdogan, "Numerical solution of a parabolic problem with involution and nonlocal conditions," *Int. J. Appl. Math.*, 2021, **34**, No. 2, 401–410.
30. I. P. Gavrilyuk, "Strongly p-positive operators and explicit representations of the solutions of initial value problems for second-order differential equations in Banach space," *J. Math. Anal. Appl.*, 1999, **236**, No. 2, 327–349.

31. I. P. Gavrilyuk and V. L. Makarov, “Exponentially convergent parallel disretization method for the first order evolution equation,” *Appl. Math. Inform.*, 2000, **5**, No. 2, 47–69.
32. D. Guidetti, B. Karasozen, and S. Piskarev, “Approximation of abstract differential equations,” *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2004, **122**, No. 2, 3013–3054.
33. N. Sh. Iskenderov and S. I. Allahverdiyeva, “Inverse boundary value problem for the boussinesq-love equation with nonlocal integral condition,” *TWMS J. Pure Appl. Math.*, 2020, **11**, No. 2, 226–237.
34. B. I. Islomov and Y. K. Alikulov, “Boundary value problem for loaded equation of parabolichyperbolic type of the third order in an infinite three-dimensional domain,” *Int. J. Appl. Math.*, 2021, **34**, No. 2, 377–389.
35. Z. F. Khankishiyev, “Solution of one problem for linear loaded parabolic type of differential equation with integral conditions,” *Adv. Math. Models Appl.*, 2022, **7**, No. 2, 178–190.
36. N. K. Musaev, “The Cauchy problem for degenerate parabolic convolution equation,” *TWMS J. Pure Appl. Math.*, 2021, **12**, No. 2, 278–288.
37. J. E. Restrepo and D. Suragan, “Direct and inverse Cauchy problems for generalized space-time fractional differential equations,” *Adv. Differ. Equ.*, 2021, **26**, No. 7/8, 305–339.
38. M. Ruzhansky, D. Serikbaev, B. T. Torebek, and N. Tokmagambetov, “Direct and inverse problems for time-fractional pseudo-parabolic equations,” *Quaest. Math.*, 2022, **45**, No. 7, 1071–1089.
39. M. A. Sadybekov, “Stable difference scheme for a nonlocal boundary value heat conduction problem,” *e-J. Anal. Appl. Math.*, 2018, **2018**, No. 1, 1–10.
40. V. Shakhmurov, “Regularity properties of nonlocal fractional differential equations and applications,” *Georgian Math. J.*, 2022, **29**, No. 2, 275–284.
41. Y. G. Wang and M. Oberguggenberger, “Nonlinear equations with regularized derivatives,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1999, **233**, No. 2, 644–658.

Allaberen Ashyralyev
Bahcesehir University, Istanbul, Turkey
RUDN University, Moscow, Russia
Institute of Mathematics and Mathematical Modeling, Almaty, Kazakhstan
E-mail: `aallaberen@gmail.com`

Charyyar Ashyralyyev
Bahcesehir University, Istanbul, Turkey
National University of Uzbekistan Named After Mirzo Ulugbek, Tashkent, Uzbekistan
E-mail: `charyar@gmail.com`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 1 (2023). С. 50–61
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.938
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-50-61
EDN: ERJRZY

СВОЙСТВО ОТСЛЕЖИВАНИЯ ДЛЯ НЕАВТОНОМНЫХ ДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

М. Л. Бланк[1,2]

[1] *Институт проблем передачи информации РАН*
[2] *Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»*

Предлагается новый подход, основанный на анализе влияния одиночного возмущения, в качестве теста для свойства отслеживания для широкого класса динамических систем (в частности, неавтономных) при различных возмущениях. Подробно изучены приложения для нескольких интересных классов динамических систем.

Ключевые слова: динамическая система, псевдотраектория, отслеживание, отслеживание в среднем

Для цитирования: *М. Л. Бланк.* Свойство отслеживания для неавтономных динамических систем// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 1. С. 50–61. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-50-61

1. Введение

При моделировании из-за неизбежно присутствующих возмущений, начиная от разного рода ошибок (в частности, в связи с округлением при компьютерном моделировании) и до неполного описания изучаемых процессов, мы можем наблюдать лишь приближенные реализации эволюционных процессов. Поэтому одна из основных проблем состоит в том, чтобы ответить, в каком смысле наблюдаемые траектории[1], которые бы будем называть *псевдотраекториями*, соотносятся с истинными траекториями невозмущенной системы. Одна из возможностей — найти условия, при которых в окрестности полученной реализации на максимально возможном интервале времени существует настоящая траектория изучаемого процесса.

Этот вопрос становится особенно нетривиальным в случае неавтономных систем, когда сама система со временем меняет свое поведение. В настоящее время в литературе практически отсутствуют результаты в этом направлении, и данная статья восполняет этот пробел, предлагая относительно простой тест для решения задачи отслеживания.

На уровне связей между отдельными траекториями гиперболической системы и соответствующих псевдотраекторий это свойство (называемое свойством *отслеживания*) впервые было сформулировано Д. В. Аносовым [1] как ключевой этап анализа структурной устойчивости диффеоморфизмов. Похожий, но гораздо менее интуитивный подход, называемый «спецификацией» в тех же условиях был предложен Р. Боуэном [5]. На качественном уровне оба подхода гарантируют, что ошибки не накапливаются во время процесса моделирования. В системах со свойством

[1] Приближенные траектории систем под действием малых возмущений.

отслеживания каждую приближенную траекторию можно равномерно отследить истинной траекторией системы на сколь угодно большом промежутке времени.

Естественно, это имеет большое значение при анализе хаотических систем, где даже произвольно малая ошибка в начальных данных приводит к (экспоненциально во времени) большим расхождениям траекторий.

Дальнейшее развитие теории показало, что для диффеоморфизма[1] наличие свойства отслеживания влечет за собой равномерную гиперболичность. В некоторой степени это ограничивает всю теорию равномерного отслеживания важным, но совершенно специфическим классом гиперболических динамических систем. Понятие *отслеживания в среднем*, введенное в [2] около 30 лет назад, позволило значительно расширить диапазон возмущений, рассматриваемых в теории отслеживания, в частности, иметь дело с возмущениями типа гауссовского шума, малыми лишь в среднем, но не равномерно. Читатель может найти обширный обзор исторических аспектов свойства отслеживания и различных подходов к его изучению в [3, 7, 8].

Технически самая сложная часть анализа свойства отслеживания состоит в том, что необходимо учитывать бесконечное (во времени) число независимых возмущений исходной системы. Это делает задачу весьма нелокальной. Поэтому очень желательно свести задачу отслеживания к ситуации с конечным числом возмущений (например, одним), хотя бы и с более жестким контролем точности аппроксимации.

Для реализации этой идеи мы разработали недавно (в [3, 4]) принципиально новую конструкцию, заключающуюся в эффективной аппроксимация псевдотраекторий автономных динамических систем при единственном во времени возмущении динамики. Основной результат состоит в том, что из свойства аппроксимации при наличии только одного возмущения при условии некоторых оценок точности аппроксимации следует интересующее нас свойство отслеживания. В настоящей статье мы распространяем этот подход на неавтономные системы.

2. Основные определения и результаты

Мы ограничиваемся динамическими системами с дискретным временем, оставляя обобщение нашего подхода на системы с непрерывным временем (потоки) для будущих исследований.

Определение 2.1. *Неавтономная динамическая система* определяется действием зависящего от времени отображения $f : X \times \mathbb{Z} \to X$, определяемого двусторонней последовательностью $\vec{f} := \{f_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$ (не обязательной обратимых) отображений $f_i : X \to X$ из полного метрического пространства (X, ρ) в себя. Другими словами, $f(x, t) := f_t x$.

Определение 2.2. *Траекторией* системы $(\vec{f}, X)$, начинающейся в точке $x \in X$, назовем двустороннюю последовательность точек $\vec{x} := \{\dots, x_{-2}, x_{-1}, x_0, x_1, x_2, \dots\} \subset X$, для которой $x_0 = x$ и $f_t x_i = x_{t+1}$ для всех доступных значений индекса t (времени).

Определение 2.3. *Псевдотраектория* системы $(\vec{f}, X)$ — это двусторонняя последовательность точек $\vec{y} := \{\dots, y_{-2}, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots\} \subset X$, удовлетворяющая условию, что последовательность расстояний $\{\rho(f_t y_t, y_{t+1})\}$ для всех доступных значений индекса t удовлетворяет некоторому условию «малости».

Замечание 2.1. В общем случае множество доступных значений индекса t вдоль траектории может быть ограничено как снизу (нет прообразов некоторой точки), так и сверху (траектория попала в «дыру» открытой системы). В настоящей статье мы ограничиваемся анализом (псевдо)траекторий, для которых доступны все целочисленные значения индекса.

Определим множество «*моментов возмущения*»

$$\mathcal{T}(\vec{y}) := \{t_i : \ \gamma_{t_i} := \rho(f_i y_{t_i}, y_{t_{i+1}}) > 0, \ i \in \mathbb{Z}\}$$

с естественным упорядочиванием: $t_i < t_{i+1}$ $\forall i$. Амплитуды возмущений γ_{t_i} будем называть *зазорами* между последовательными отрезками истинных траекторий.

---

[1]действующего на компакте

Определение 2.4. Для заданного $\varepsilon > 0$ будем говорить, что псевдотраектория $\vec{y}$:

(U) *равномерного* (*uniform*) типа, если $\rho(f_i y_i, y_{i+1}) \leqslant \varepsilon$ при всех доступных i;

(A) *малого в среднем* (*on average*) типа, если $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n+1} \sum\limits_{i=-n}^{n} \rho(f_i y_i, y_{i+1}) \leqslant \varepsilon$;

(S) *с одним возмущением* (*single perturbations*) типа, если множество $\mathcal{T}(\vec{y})$ состоит из одной точки.

Тип (A) позволяет рассматривать возмущения гауссовского типа, которые малы только в среднем, но допускают редкие большие выбросы. Если в (A) часть псевдотраектории, соответствующая отрицательным значениям времени, конечна, то достаточно рассматривать только положительные значения индекса i, что приводит к односторонним суммам $\dfrac{1}{n+1} \sum\limits_{i=0}^{n} \rho(f_i y_i, y_{i+1})$ вместо двусторонних.

Идея *отслеживания* в теории динамических систем сводится к вопросу о возможности аппроксимации псевдотраекторий данной динамической системы истинными траекториями. Естественно, ответ зависит от типа аппроксимации.

Определение 2.5. Будем говорить, что истинная траектория $\vec{x}$ *отслеживает* псевдотраекторию $\vec{y}$ с точностью δ (и обозначим это термином «δ-*отслеживает*»):

(U) *равномерно* (*uniformly*), если $\rho(x_i, y_i) \leqslant \delta$ при всех доступных i;

(A) *в среднем* (*on average*), если $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{1}{2n+1} \sum\limits_{i=-n}^{n} \rho(x_i, y_i) \leqslant \delta$.

Определение 2.6. Будем говорить, что неавтономная динамическая система $(\vec{f}, X, \rho)$ удовлетворяет свойству $(\alpha+\beta)$-*отслеживания* (и обозначим это $\vec{f} \in \mathcal{S}(\alpha,\beta)$) при $\alpha \in \{U, A, S\}$, $\beta \in \{U, A\}$, если $\forall \delta > 0\ \exists \varepsilon > 0$ такое, что каждая ε-псевдотраектория α-типа может быть отслежена в смысле β с точностью δ.

Вместо полного анализа действия всех наличествующих возмущений мы предлагаем тест, основанный на анализе только одного возмущения (т. е. псевдотраекторий типа S).

Определение 2.7. Будем говорить, что псевдотраектория $\vec{y}$ типа S с единственным возмущением в момент времени $t = t_0$ *аппроксимируется* истинной траекторией $\vec{x}$ с показателем точности $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}_+$, если

$$\rho(x_k, y_k) \leqslant \varphi(k - t_0) \rho(f_{t_0-1} y_{t_0-1}, y_{t_0}) \quad \forall k \in \mathbb{Z}. \tag{2.1}$$

Функция φ здесь контролирует качество аппроксимации на всей области определения, а второй член соответствует амплитуде возмущения. В дальнейшем будем предполагать, что $\varphi(t)$ монотонно стремится к нулю при $t \to \pm\infty$.

Определение 2.8. Будем говорить, что неавтономная динамическая система удовлетворяет *свойству аппроксимации одиночного возмущения* с показателем точности $\varphi : \mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ (и обозначим это $\vec{f} \in \mathcal{A}_\varphi$), если для любой псевдотраектории $\vec{y}$ типа S (т. е. $\#(\mathcal{T}(\vec{y})) = 1$) найдется траектория $\vec{x}$, аппроксимирующая $\vec{y}$ с показателем точности φ.

Наш основной результат состоит в следующем утверждении.

Теорема 2.1. *Если $\vec{f} \in \mathcal{A}_\varphi$ при $\sum\limits_k \varphi(k) < \infty$, то $\vec{f} \in \mathcal{S}(U,U) \cup \mathcal{S}(A,A)$.*

Другими словами, проверка того, что $\vec{f} \in \mathcal{A}_\varphi$ с суммируемым показателем точности φ, влечет как равномерное свойство отслеживания при равномерно малых возмущениях, так и отслеживание в среднем при малых в среднем возмущениях.

Наследование свойства отслеживания от отдельных отображений f_i ко всей неавтономной системе $\vec{f}$ и наоборот довольно контринтуитивно, что будет продемонстрировано в разделе 4.

3. Доказательство основной теоремы

Подход, который мы здесь используем, в основном следует идее конструкции, развитой для случая автономной системы в [3, 4], с рядом отличий, связанных с более сложной изучаемой ситуацией, когда само отображение меняется во времени.

Технически мы доказываем, что существует константа $K = K(\varphi) < \infty$, такая, что для каждого достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует истинная траектория, приближающая равномерно или в среднем с точностью $\delta \leqslant K\varepsilon$ любую ε-псевдотраектории U/A-типа.

Рассмотрим множество моментов возмущений псевдотраектории $\vec{y} := \{y_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$

$$\mathcal{T}(\vec{y}) := \{t_i: \ \gamma_{t_i} := \rho(f_i y_{t_i}, y_{t_{i+1}}) > 0, \ i \in \mathbb{Z}\}.$$

Между моментами времени t_k нет других возмущений и, следовательно, $\vec{y}$ можно разделить на сегменты истинных траекторий. Благодаря свойству $\mathcal{A}_\varphi$ любая пара последовательных сегментов настоящих траекторий, рассматриваемая как псевдотраектория с единственным возмущением, может быть аппроксимирована другой истинной траекторией с показателем точности φ.

Без ограничения общности будем считать, что возмущения происходят в каждый момент времени и, следовательно, $t_i = i \ \ \forall i \in \mathbb{Z}$.

Опишем итеративную процедуру.

Сначала разделим отрезки псевдотраектории между моментами возмущений t_i в последовательных парах, принадлежащих интервалам времени типа $(t_{\pm 2k-1}, t_{\pm 2k+1}]$. Рассматривая псевдотраекторию на этих интервалах как псевдотраекторию типа S и используя свойство аппроксимации однократного возмущения, аппроксимируем ее новой псевдотраекторией, состоящей из отрезков истинных траекторий вдвое большей длины. После этого применяем ту же процедуру для псевдотраектории, полученной на предыдущем шаге построения.

В результате на каждом шаге построения мы получаем новую псевдотраекторию, состоящую из вдвое меньшего числа отрезков истинных траекторий с экспоненциально возрастающей длиной, но с большими зазорами между ними (по сравнению с исходными зазорами). В пределе это дает аппроксимацию всей исходной псевдотраектории.

Для оценки ошибки аппроксимации найдем точность аппроксимации пары отрезков истинных траекторий: $v_{-N^-}, v_{-N^-+1}, \dots, v_{-1}$ и $v_0, v_1, \dots, v_{N^+}$. По свойству $\mathcal{A}_\varphi$ существует траектория $\vec{z} \subset X$ такая, что

$$\rho(v_k, z_k) \leqslant \varphi(k)\rho(f_{-1}v_{-1}, v_0) \ \ \forall k \in \{-N^-, \dots, N^+\}.$$

Поэтому

$$\sum_{k=-N^-}^{N^+} \rho(z_k, v_k) \leqslant \rho(f_{-1}v_{-1}, v_0)\sum_k \varphi(k) = \Phi \cdot \rho(f_{-1}v_{-1}, v_0).$$

Отметим несколько важных моментов в этой оценке:

(a) каждый момент возмущения t_i учитывается только один раз за весь процесс аппроксимации;
(b) точность аппроксимации зависит только от зазора $\rho(f_{-1}v_{-1}, v_0)$ между «концами» склеенных вместе отрезков траекторий;
(c) зазоры между сегментами траекторий на следующем шаге конструкции могут возрасти по сравнению с текущим шагом.

На n-м шаге процесса аппроксимации пар сегментов траекторий получаем псевдотраекторию $\vec{z}^{(n)}$ с двусторонней последовательностью зазоров $\{\gamma_{t_i}^{(n)}\}_{i\in\mathbb{Z}}$. Оценим величины этих зазоров.

Согласно свойству аппроксимации однократного возмущения получаем рекурсивную оценку для зазоров:

$$\gamma_{t_i}^{(n+1)} \leqslant \gamma_{t_i}^{(n)} + \varphi_-^{(n)}\gamma_{t_{i-1}}^{(n)} + \varphi_+^{(n)}\gamma_{t_{i+1}}^{(n)}, \tag{3.1}$$

где $\varphi_\pm^{(n)} = \varphi(\pm 2^n)$. Действительно, длины склеиваемых сегментов траекторий на n-ом шаге процедуры равны 2^n, в то время как $\varphi_-^{(n)}\gamma_{t_{i-1}}^{(n)}$ — оценка сверху для ошибки аппроксимации слева, а $\varphi_+^{(n)}\gamma_{t_{i+1}}^{(n)}$ — аналогичная оценка для ошибки аппроксимации справа.

Переписывая (3.1) следующим образом:

$$\gamma_{t_i}^{(n+1)} \leqslant (\varphi_-^{(n)} + \varphi_+^{(n)})\gamma_{t_i}^{(n)} + \left((1 - \varphi_-^{(n)} - \varphi_+^{(n)})\gamma_{t_i}^{(n)} + \varphi_-^{(n)}\gamma_{t_{i-1}}^{(n)} + \varphi_+^{(n)}\gamma_{t_{i+1}}^{(n)}\right),$$

мы видим, что в первом члене множитель $\varphi_-^{(n)} + \varphi_+^{(n)}$ стремится к нулю с ростом n, тогда как второй член соответствует усредняющему оператору типа $v_i \to (1-a-b)v_i + av_{i-1} + bv_{i+1}$. Остается заметить, что рекурсивное применение этого оператора сглаживает последовательность $\{v_i\}$ до константы.

Чтобы сделать это рассуждение точным, нам потребуются некоторые вычисления. Без ограничения общности полагаем, что функция φ четная (т. е. $\varphi(-k) = \varphi(k)\ \forall k$). В самом деле, заменив φ на $\tilde{\varphi}(k) := \max(\varphi(-k), \varphi(k))\ \forall k$, получаем результат.

Обозначим через $\gamma^{(n)} := \sup\limits_i \gamma_{t_i}^{(n)}$ максимальное значение зазоров на n-шаге процедуры, а через $\tau^{(n)} := 2^n$ — длину отрезков истинных траекторий. Тогда, используя предыдущее неравенство и монотонность функций $\varphi(\pm|k|)$, получаем

$$\gamma^{(n+1)} \leqslant \gamma^{(n)} + \varphi(\tau^{(n)})\gamma^{(n)} + \varphi(-\tau^{(n)})\gamma^{(n)} = \gamma^{(n)} \cdot \Big(1 + \varphi(-\tau^{(n)}) + \varphi(\tau^{(n)})\Big).$$

Продолжая это и переходя от n к $n-1$ и т. д., приходим к следующей оценке:

$$\gamma^{(n+1)} \leqslant \gamma^{(0)} \cdot \prod_{k=0}^{n} \Big(1 + \varphi(-\tau^{(k)}) + \varphi(\tau^{(k)})\Big).$$

В этом месте нам понадобится следующее простое неравенство, доказанное в [3].

Лемма 3.1. *Для любой последовательности $\{b_k\}_{k\geqslant 1}$ неотрицательных действительных чисел справедливо*

$$\limsup_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} (1 + b_k) \leqslant e^{\limsup\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} b_k}.$$

Полагая $b_k := \varphi(-\tau^{(k)}) + \varphi(\tau^{(k)})$ и используя то, что в случае равномерно малых возмущений $\gamma_{t_i}^{(0)} \leqslant \varepsilon\ \ \forall i \in \mathbb{Z}$, по лемме 3.1 оцениваем сверху зазоры $\gamma^{(n+1)}$ следующим образом:

$$\gamma^{(n+1)} \leqslant \varepsilon \exp\left(\sum_k \varphi(k)\right) = \varepsilon e^{\Phi}. \tag{3.2}$$

Здесь мы используем то, что каждый момент возмущения t_i учитывается только один раз за весь процесс аппроксимации.

Таким образом, зазоры $\gamma_{t_i}^{(n)}$ равномерно по n ограничены сверху величиной εe^{Φ}.

Оценку сверху расстояния между $z_t^{(n)}$ и $y_t = z_t^{(0)}$ мы получим как сумму расстояний между последовательными парами аппроксимирующих псевдотраекторий $z_t^{(k)}$, $z_t^{(k+1)}$. Поэтому вклад каждого зазора в окончательную ошибку приближения суммируется (см. рис. 1). Используя это, получаем

$$\rho(z_t^{(n)}, y_t) \leqslant \varepsilon e^{\Phi} \sum_i \varphi(t - t_i) \leqslant \varepsilon \Phi e^{\Phi} \quad \forall t \in \mathbb{Z}. \tag{3.3}$$

Аналогично, для любого $k > 0$

$$\rho(z_t^{(n)}, z^{(n+k)}) \leqslant \varepsilon e^{\Phi} \sum_{|j| \geqslant \tau(t,n)} \varphi(j) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

поскольку $\tau(t,n) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty$.

Поэтому для любого заданного t последовательность $\{z_t^{(n)}\}_n$ фундаментальна и сходится при $n \to \infty$ к пределу z_t, где $\{z_t\}$ является истинной траекторией нашей системы.

Поскольку оценка (3.3) равномерна по n, мы можем использовать ее также и для z_t, получая

$$\rho(z_t, y_t) \leqslant \varepsilon \Phi e^{\Phi} \quad \forall t \in \mathbb{Z},$$

что доказывает $G \in \mathcal{S}(U, U)$.

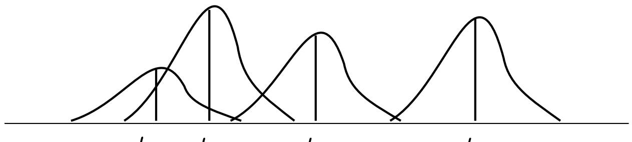

Рис. 1. Вклад в верхнюю оценку ошибки аппроксимации.
Fig. 1. Contributions to the upper bound of the approximation error.

Рассмотрим теперь случай возмущений A-типа. В предположении, что возмущения в среднем малы, получаем

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1} \sum_{i=-k}^{k} \gamma_{t_i}^{(0)} \leqslant \varepsilon.$$

Наша цель — показать, что $\exists C \neq C(\varepsilon)$ такое, что

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{1}{2k+1} \sum_{i=-k}^{k} \gamma_{t_i}^{(n)} \leqslant C\varepsilon \quad \forall n.$$

Не теряя общности, мы предполагаем, что функция φ — четная (т. е. $\varphi(-k) = \varphi(k)\ \forall k$). Действительно, заменив общую функцию φ ее симметризованной версией

$$\tilde\varphi(k) := \max(\varphi(-k), \varphi(k)) \quad \forall k \in \mathbb{Z},$$

получаем требуемый результат.

Обозначим $R_k^{(n)} := \sum\limits_{i=-k}^{k} \gamma_{t_i}^{(n)}$. Тогда, используя (3.1), получаем

$$\begin{aligned}
R_k^{(n+1)} &= \sum_{i=-k}^{k} \gamma_{t_i}^{(n+1)} \leqslant \sum_{i=-k}^{k} \gamma_{t_i}^{(n)} + \sum_{i=-k}^{k} \varphi_-^{(n)} \gamma_{t_{i-1}}^{(n)} + \sum_{i=-k}^{k} \varphi_+^{(n)} \gamma_{t_{i+1}}^{(n)} = \\
&= R_k^{(n)} + \varphi_-^{(n)} \left(\gamma_{t_{-k-1}}^{(n)} + R_k^{(n)} - \gamma_{t_{k+1}}^{(n)}\right) + \varphi_+^{(n)} \left(-\gamma_{t_{-k-1}}^{(n)} + R_k^{(n)} + \gamma_{t_{k+1}}^{(n)}\right) = \\
&= (1 + \varphi_-^{(n)} + \varphi_+^{(n)}) R_k^{(n)} + (\varphi_-^{(n)} - \varphi_+^{(n)})(\gamma_{t_{-k-1}}^{(n)} - \gamma_{t_{k+1}}^{(n)}) = \\
&= (1 + \varphi_-^{(n)} + \varphi_+^{(n)}) R_k^{(n)} \leqslant \qquad\qquad (\text{поскольку } \varphi_-^{(n)} = \varphi_+^{(n)}) \\
&\leqslant \ldots \leqslant R_k^{(0)} \prod_{i=0}^{n} (1 + \varphi_-^{(i)} + \varphi_+^{(i)}).
\end{aligned}$$

Теперь мы готовы закончить доказательство теоремы.

Вклад в верхнюю границу ошибки аппроксимации поступает из двух разных источников: оценки зазоров (меняющиеся по ходу описанной выше процедуры аппроксимации) и суммирования вкладов ошибок от аппроксимации пар последовательных сегментов истинных траекторий (см. рис. 1).

Чтобы получить оценку сверху для частичной суммы зазоров, применяя лемму 3.1 при $b_n := \varphi_-^{(n)} + \varphi_+^{(n)}$, имеем

$$R_k^{(n+1)} \leqslant \prod_{i=1}^{n} (1 + b_i) R_k^{(0)} \leqslant e^{\sum\limits_{i=0}^{n} b_i} R_k^{(0)} \leqslant e^{\Phi} R_k^{(0)}. \tag{3.4}$$

Для n-ой аппроксимирующей псевдотраектории $\vec{z}^{(n)}$ обозначим

$$Q_k^{(n)} := \frac{1}{2k+1} \sum_{t=-k}^{k} \rho(z_t^{(n)}, y_t).$$

Тогда

$$Q_k^{(n)} \leqslant \frac{1}{2k+1}\sum_{t=-k}^{k}\sum_i \gamma_{-t+i}^{(n)}\varphi(i) = \sum_i \varphi(i)\cdot\left(\frac{1}{2k+1}\sum_{t=-k}^{k}\gamma_{-t+i}^{(n)}\right) = \sum_i \varphi(i)\cdot R_k^{(n)}(t),$$

где $R_k^{(n)}(t) := \sum\limits_{i=-k}^{k}\gamma_{-t+t_i}^{(n)}$.

При помощи (3.4) получаем следующую оценку сверху:

$$\limsup_{k\to\infty} Q_k^{(n)} \leqslant \varepsilon\Phi e^{\Phi}, \tag{3.5}$$

не зависящую от номера шага n процедуры аппроксимации.

Утверждение о сходимости аппроксимирующих псевдотраекторий к пределу $\vec{z}$, являющемуся истинной траекторией системы, доказывается по той же схеме, что и в предыдущем рассмотренном случае равномерных возмущений. Аналогично оценивается и расстояние в среднем между $\vec{z}$ и $\vec{y}$, используя неравенство (3.5) вместо (3.2) (применявшегося ранее).

Теорема доказана. □

4. Приложения

В этом разделе мы применим описанный подход для некоторых важных классов динамических систем (в частности, для необратимых и разрывных отображений).

4.1. Дискретное пространство. Пусть фазовое пространство X состоит из конечного числа точек $\#(X) = M < \infty$ и снабжено дискретной метрикой $\rho(x,y) := 1_{x\neq y}$. В этой постановке не может быть малых возмущений, и мы будем рассматривать случай возмущений малых в среднем.

Начнем с не зависящих от времени семейств отображений.

Утверждение 4.1. *Пусть* $\vec{f} := \{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ *и* $f_i \equiv f : X \to X$. *Тогда свойство* $\vec{f} \in \mathcal{S}(A,A)$ *эквивалентно условию* $\min\limits_{n>0}\#(f^nX) = 1$.

Доказательство. Заметим, что в силу конечности фазового пространства предельное множество для последовательности $\{f^nX\}$ состоит из периодических точек отображения f, а минимум $\min\limits_{n>0}\#(f^nX)$ достигается в некоторый конечный момент времени $n = N$.

Пусть $\vec{y}$ — псевдотраектория S-типа отображения $\vec{f}$ с единственным возмущением в момент времени t_0. Тогда истинная траектория $\vec{x}$, приближающая $\vec{y}$ в среднем, может быть построена следующим образом:

$$x_t := \begin{cases} y_t, & \text{если } t < t_0,\\ f^{t-t_0}y_{t_0}, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Следовательно, последовательность расстояний $\{\rho(x_k,y_k)\}_{k\in\mathbb{Z}_+}$ содержит не более N ненулевых элементов, что влечет отслеживание в среднем.

Если предположение $\#(f^NX) = 1$ не выполняется, то существует как минимум две различные периодические точки $u, v \in X$ отображения f. Обозначим через m период точки u и рассмотрим следующую псевдотраекторию S-типа $\vec{y}$:

$$y_t := \begin{cases} f^{(m-t \bmod k)}u, & \text{если } t < 0,\\ f^tv, & \text{иначе.}\end{cases}$$

Иными словами, псевдотраектория $\vec{y}$ следует за истинной периодической траекторией точки u в отрицательном времени, так что $fy_{-1} = u$, а из-за возмущения в момент времени $t = 0$ совпадает с траекторией вперед (в положительное время) точки $v \neq u$.

Предположим, что истинная траектория $\vec{x}$ аппроксимирует в среднем $\vec{y}$. По определению дискретной метрики из этого следует, что $\vec{x}$ отличается от $\vec{y}$ только на конечном интервале времени, что противоречит построению $\vec{y}$. □

Следующий результат показывает, что пара отображений, не удовлетворяющих свойству отслеживания, может привести к неавтономной динамической системе, обладающей этим свойством.

Пример 4.1. Пусть $X := \{1, 2, 3\}$ и

$$g_1(1) := 2, \quad g_1(2) := 1, \quad g_1(3) := 1; \qquad g_2(1) := 2, \quad g_2(2) := 3, \quad g_2(3) := 2.$$

Рассмотрим $\vec{f} := \{f_i\}$ такую, что $f_i(x) := g_{h(i)}(x)$, где $h : \mathbb{Z} \to \{1, 2\}$.

Функция $h(t)$ здесь играет роль индикатора того, какое из отображений g_i применяется в момент времени t.

Утверждение 4.2.

(a) *Если* $h \equiv 1$ *или* $h \equiv 2$, *то* $\vec{f} \notin \mathcal{S}(A, A)$.

(b) *Если* $\forall N \in \mathbb{Z}_+$ $\exists k > N$ *такое, что* $h(k) = 2$, $h(k + 1) = 1$, *то* $\vec{f} \in \mathcal{S}(A, A)$.

Другими словами, несмотря на то, что оба отображения g_1 и g_2 не удовлетворяют свойству отслеживания в среднем, зависящее от времени отображение $\vec{f}$ может удовлетворять этому свойству при очень слабых предположениях об осцилляциях функции h.

Доказательство.

(a) Оба отображения g_1, g_2 допускают траектории периода 2 и, следовательно, не являются отслеживаемыми согласно утверждению 4.1.

(b) Пусть $\vec{y}$ — псевдотраектория S-типа отображения $\vec{f}$ с единственным возмущением в момент времени t_0. Рассмотрим истинную траекторию

$$x_t := \begin{cases} y_t, & \text{если } t < t_0, \\ f^{t-t_0} y_{t_0}, & \text{иначе.} \end{cases}$$

По условию найдется такое $n > t_0$, что $f_n = g_2$ и $f_{n+1} = g_1$. Возможны всего четыре следующих варианта:

- $x_n = y_n$. Тогда $x_t = y_t \ \ \forall t > n$.
- $x_n = 1, y_n = 2$. Тогда $g_2(x_n) = 2$, $g_2(y_n) = 3$ и $g_1 \circ g_2(x_n) = 1 = g_1 \circ g_2(y_n)$. Поэтому $x_t = y_t \ \ \forall t > n + 1$.
- $x_n = 1$, $y_n = 3$. Тогда $g_2(x_n) = 2 = g_2(y_n)$. Поэтому $x_t = y_t \ \ \forall t > n$.
- $x_n = 2$, $y_n = 3$. Тогда $g_2(x_n) = 3$, $g_2(y_n) = 2$ и $g_1 \circ g_2(x_n) = 1 = g_1 \circ g_2(y_n)$. Поэтому $x_t = y_t \ \ \forall t > n + 1$.

Во всех случаях мы наблюдаем лишь конечное число несовпадающих точек. ☐

Следующий пример демонстрирует, что возможно и обратное явление, когда отображения, обладающие свойством отслеживания, порождают неотслеживаемую неавтономную динамическую систему.

Пример 4.2. Пусть $X := \{1, 2, 3\}$ и

$$g_1(1) := 2, \quad g_1(2) := 3, \quad g_1(3) := 3; \qquad g_2(1) := 3, \quad g_2(2) := 1, \quad g_2(3) := 3.$$

Рассмотрим такую $\vec{f} := \{f_i\}$, что $f_{2k+1}(x) := g_1(x), \quad f_{2k}(x) := g_2(x) \ \ k \in \mathbb{Z}$.

Утверждение 4.3. $g_i \in \mathcal{S}(A, A)$, *но* $\vec{f} \notin \mathcal{S}(A, A)$.

Доказательство. Первое утверждение является следствием утверждения 4.1. Для доказательства второго утверждения рассмотрим псевдотраекторию S-типа $\vec{y}$ (с единственным возмущением в момент времени $t = 0$)

$$y_t := \begin{cases} 3, & \text{если } t < 0; \\ 1, & \text{если } t = 2k > 0; \\ 2, & \text{иначе.} \end{cases}$$

Предположим, что существует истинная траектория $\vec{x}$, аппроксимирующая $\vec{y}$ в среднем. Тогда неизбежно $\exists n < 0$ такое, что $x_n = 3$, откуда следует $x_t = 3 \ \forall t > n$. Приходим к противоречию. ☐

4.2. Гиперболические отображения. Обсудим применение нашего теста одиночного возмущения для композиций гиперболических отображений. Общие определения, связанные с теорией гиперболических отображений, можно найти, например, в [5,6]. В этом разделе мы ограничимся простейшим случаем аффинных отображений вида $fx := Ax + b$, где A — матрица, а b — вектор. Как мы увидим, даже этот случай весьма нетривиален с точки зрения отслеживания.

Обратимая матрица A размера $d \times d$ с действительными элементами разделяет евклидово пространство $\mathbb{R}^d$ в прямую сумму трех A-инвариантных линейных подпространств $E^s(A), E^u(A), E^n(A)$ (устойчивого, неустойчивого и нейтрального):

$$E^s(A) := \{v \in \mathbb{R}^d : \ \ ||A^n v|| \leqslant C\lambda_s^n ||v|| \ \ \forall n \in \mathbb{Z}_+\},$$
$$E^u(A) := \{v \in \mathbb{R}^d : \ \ ||A^{-n} v|| \leqslant C\lambda_u^{-n} ||v|| \ \ \forall n \in \mathbb{Z}_+\},$$
$$E^n(A) := \{v \in \mathbb{R}^d : \ \ ||Av|| = ||v||\},$$

где $0 < \lambda_s < 1 < \lambda_u < \infty$, $C < \infty$ и $||v|| := \sqrt{\sum\limits_i v_i^2}$.

В общем случае некоторые из подпространств $E^s(A), E^u(A), E^n(A)$ могут быть пустыми.

Определение 4.1. Если $E^n(A) = \varnothing$, то будем говорить, что матрица A — *гиперболическая.*

Обозначим нормализованные проекторы на эти пространства через π^s, π^u, π^n, соответственно. А именно, каждый вектор $v \in \mathbb{R}^d$ однозначно представляется в виде $v = q_s\pi^s v + q_u\pi^u v + q_n\pi^n v$, где $q_s, q_u, q_n \in \mathbb{R}$ и $||\pi^s v|| = ||\pi^u v|| = ||\pi^n v|| = 1$.

Из приведенных выше определений вытекает следующее свойство сжатия, которое мы сформулируем в виде отдельного утверждения.

Лемма 4.1 (сжатие). *Пусть A — гиперболическая матрица. Тогда существуют числа $0 < \lambda < 1$, $C < \infty$ такие, что*

$$||A^t x - A^t y|| \leqslant C\lambda^t ||x - y|| \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \ x - y \in E^u(A), \ t \geqslant 0,$$
$$||A^t x - A^t y|| \leqslant C\lambda^t ||x - y|| \ \ \forall x, y \in \mathbb{R}^d, \ x - y \in E^s(A), \ t \leqslant 0.$$

С точки зрения свойства отслеживания самые интересные вопросы здесь связаны с отображениями тора, а именно с отображениями вида $fx := Ax + b \pmod 1$.

Пример 4.3 (диффеоморфизмы Аносова). Пусть $X := \mathbb{T}^d$ — единичный d-мерный тор, а $g_n : X \to X$ — гиперболические отображения тора $g_n x := A_n x + b_n \pmod 1$ такие, что $\det(A_n) = 1$, $n \in \{1, 2, \ldots, N\}$. Тогда неавтономная система определяется двусторонней последовательностью $\vec{f} := \{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ отображений f_i из набора $\{g_i\}$.

Автономный случай ($N = 1$) подробно изучен в [2,4], но при его анализе активно используются так называемые марковские разбиения произвольно малого диаметра, хорошо известные в теории гиперболических отображений. К сожалению, даже в простейшей ситуации 2-периодической комбинации ($N = 2$) пары отображений $\vec{f} = \ldots, g_1, g_2, g_1, g_2, \ldots$ никакой замены марковского разбиения не известно. Чтобы преодолеть это препятствие, мы рассмотрим эту же задачу в $\mathbb{R}^d$, а не в $\mathbb{T}^d$, и вернемся позже к примеру 4.3 с использованием полученных результатов.

Пример 4.4 (аффинные отображения). Пусть $X := \mathbb{R}^d$ при $d \geqslant 1$ и евклидовой метрикой ρ, и пусть $g_n : X \to X$ — гиперболические отображения $g_n x := A_n x + b_n$ $n \in \{1, 2, \ldots, N$. Тогда неавтономная система определяется двусторонней последовательностью $\vec{f} := \{f_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ отображений f_i из набора $\{g_i\}$.

Здесь снова автономная постановка изучалась в [4], и можно было бы ожидать, что обобщение для комбинации нескольких гиперболических отображений не может изменить ситуацию коренным образом. Несмотря на это, мы покажем, что это именно так даже для пары различных гиперболических отображений.

Для заданной двусторонней последовательности натуральных чисел $\{h(i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ положим

$$A_h^{(t)} := \prod_{i=0}^{|t|-1} A_{h(t-i)} \ \ |t| \geqslant 1.$$

Утверждение 4.4. *Пусть последовательность* $\{h(i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ — M*-периодическая и* $\vec{f} := \{g_{h(i)}\}$. *Предположим, что матрица* $A^{(M)} := \prod_{i=1}^{M} A_{h(i)}$ — *гиперболическая. Тогда* $\vec{f} \in \mathcal{S}(A, A)$.

Замечание 4.1. Даже незначительные нарушения предположений утверждения 4.4 приводят к неотслеживаемым системам. Действительно, даже в периодической по времени постановке наличие нетривиального нейтрального подпространства E_M^n гарантирует, что возмущения, принадлежащие этому подпространству и действующие периодически с периодом M, не могут быть скомпенсированы. Общая ситуация, когда функция $h(i)$ непериодическая, еще более сложная. Для изучения свойств отслеживания в общем случае необходимо сделать ряд технических предположений об асимптотических свойствах матриц $A^{(n)}$ и использовать более сложные методы. Это будет сделано в отдельной публикации.

Доказательство утверждения 4.4. Проблема здесь в том, что даже в простейшем периодическом по времени случае последовательность инвариантных подпространств $E^{u/s}(A^{(t)})$ не сходится при $|t| \to \infty$. Чтобы преодолеть эту трудность, покажем, что некоторый аналог леммы 4.1 может быть применен в неавтономном случае для нахождения траектории отображения $\vec{f}$, которая аппроксимирует псевдотраекторию типа S как в положительном, так и в отрицательном времени.

Применяя лемму 4.1 к матрице $A^{(M)}$ и используя тот факт, что $E^u(A) = E^s(A^{-1})$ для гиперболической матрицы A, получаем экспоненциальную сходимость следующих последовательностей:

$$||(A^{(M)})^n x - (A^{(M)})^n y|| \leqslant C\lambda^n ||x - y|| \quad \text{если} \quad x - y \in E^u(A^{(M)}), \quad n \in \mathbb{Z}_+,$$

$$||(A^{(M)})^{-n} x - (A^{(M)})^{-n} y|| \leqslant C\lambda^n ||x - y|| \quad \text{если} \quad x - y \in E^s(A^{(M)}), \quad n \in \mathbb{Z}_+.$$

Чтобы иметь дело с промежуточными моментами времени $t = nM + k$ при $0 < k < M$, заметим, что обозначая $D := \max\{||A_i|| \ \ 1 \leqslant i \leqslant M$, мы получаем

$$||(A^{(nM+k)})x - (A^{(nM+k)})^y|| \leqslant D^M ||(A^{(M)})^{-n} x - (A^{(M)})^{-n} y||,$$

откуда следуют экспоненциально убывающие оценки для всех моментов времени $t \to \pm\infty$.

Псевдотраектория типа S неавтономной динамической системы может быть представлена траекторией назад, заканчивающейся в некоторой точке $u \in X$, и траекторией вперед, исходящей из некоторой точки $v \in X$. Множества $u + E^u(A^{(M)})$ и $v + E^s(A^{(M)})$ имеют непустое пересечение. Выберем любую точку z, принадлежащую этому пересечению. Тогда из приведенных выше оценок с учетом того, что $g_i(x) - g_i(y) = A_i x - A_i y \ \forall i$ и не зависит от b_i, получаем, что траектория точки z аппроксимирует в среднем рассматриваемую псевдотраекторию S-типа с экспоненциальным показателем точности. Таким образом, теорема 2.1 применима в рассматриваемом случае. $\square$

Теперь мы готовы вернуться к анализу гиперболических отображений тора. Здесь $X := \mathbb{T}^d := [0, 1)^d$ с метрикой $\rho(x, y) := ||x - y \pmod 1||$, а отображения тора определяются как $g_i(x) := A_i x + b_i \pmod 1$.

Утверждение 4.5. *Пусть последовательность* $\{h(i)\}_{i\in\mathbb{Z}}$ — M*-периодическая и* $\vec{f} := \{g_{h(i)}\}$. *Предположим, что* $\forall i$ *все элементы матриц* A_i *и векторов* b_i *являются целыми числами. Тогда гиперболичность матрицы* $A^{(M)} := \prod_{i=1}^{M} A_{h(i)}$ *влечет* $\vec{f} \in \mathcal{S}(A, A)$.

Доказательство. Основная идея здесь состоит в том, чтобы свести анализ отслеживания аффинных отображений тора к той же задаче для аффинных отображений в $\mathbb{R}^d$. Действительно, разница между ними только в том, что мы дополнительно берем целую часть. К сожалению, следуя этой конструкции, мы сталкиваемся с техническим препятствием: рассматриваемые аффинные отображения должны коммутировать со сдвигами целочисленной решетки $\mathbb{Z}^d$. В этом и есть причина предположения о целочисленности элементов матриц A_i и векторов b_i.

Таким образом, при сделанных предположениях для каждой (псевдо)траектории $\vec{y}$ отображения тора существует (псевдо)траектория $\vec{z}$ соответствующего отображения $\mathbb{R}^d$ такая, что $\vec{z} \pmod 1 = \vec{y}$. Следовательно, если $\vec{z}$ является псевдотраекторией типа A относительно евклидовой метрики, то $\vec{y}$ является псевдотраекторией типа A, но относительно метрики тора $\rho(\cdot, \cdot)$.

С другой стороны, по предложению 4.4 существует истинная траектория $\vec{x}$ системы в $\mathbb{R}^d$, приближающая $\vec{y}$ в среднем. Остается заметить, что последовательность $\vec{x} \pmod 1$ оказывается истинной траекторией на торе, аппроксимирующей в среднем псевдотраекторию $\vec{y}$ в метрике $\rho(\cdot,\cdot)$ с точностью, не превышающей точность аппроксимации в $\mathbb{R}^d$. $\square$

В заключение отметим, что классические линейные аносовские автоморфизмы тора удовлетворяют условиям утверждения 4.5, однако, ввиду отсутствия предположения о равенстве единице определителя матрицы отображения, класс примеров, удовлетворяющих этим условиям, существенно шире.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аносов Д. В.* Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем// В сб.: «Труды V Межд. конф. по нелинейным колебаниям. Т. 2». — Киев: Ин-т математики АН УССР, 1970. — С. 39–45.
2. *Blank M.* Metric properties of ε-trajectories of dynamical systems with stochastic behaviour// Ergodic Theory Dynam. Systems. — 1988. — *8*, № 3. — С. 365–378.
3. *Blank M.* Average shadowing and gluing property// *ArXiv.* — 2022. — 2202.13407 [math.DS].
4. *Blank M.* Average shadowing revisited// *ArXiv.* — 2022. — 2205.10769 [math.DS nlin.CD].
5. *Bowen R.* Equilibrium states and the ergodic theory of Anosov diffeomorphisms. — Berlin: Springer, 1975.
6. *Katok A., Hasselblatt B.* Introduction to the modern theory of dynamical systems. — Cambridge: Univ. Press, 1995.
7. *Kulczycki M., Kwietniak D., Oprocha P.* On almost specification and average shadowing properties// Fund. Math. — 2014. — *224*. — С. 241–278.
8. *Pilyugin S. Yu., Sakai K.* Shadowing and hyperbolicity. — Cham: Springer, 2017.

Бланк Михаил Львович
Институт проблем передачи информации РАН;
Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»
E-mail: `blank@iitp.ru`

UDC 517.938
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-50-61
EDN: ERJRZY

Shadowing property for nonautonomous dynamical systems

M. L. Blank[1,2]

[1]*Institute for Information Transmission Problems of the RAS (Kharkevich Institute), Moscow, Russia*
[2]*HSE University, Moscow, Russia*

A new approach based on the analysis of the influence of a single perturbation is proposed as a test for the shadowing property for a broad class of dynamical systems (in particular, non-autonomous) under a variety of perturbations. Applications for several interesting cases are considered in detail.

Keywords: dynamical system, pseudo-trajectory, shadowing, average shadowing

For citation: M. L. Blank, "Shadowing property for nonautonomous dynamical systems," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 1, 50–61. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-50-61`

REFERENCES

1. D. V. Anosov, “Ob odnom klasse invariantnykh mnozhestv gladkikh dinamicheskikh sistem” [On a class of invariant sets of smooth dynamical systems], In: *Trudy V Mezhd. konf. po nelineynym kolebaniyam. T. 2* [Proc. 5th Int. Conf. on Nonlin. Oscill. Vol. 2], Inst. mat. AN USSR, Kiev, 1970, pp. 39–45 (in Russian).
2. M. Blank, “Metric properties of ε-trajectories of dynamical systems with stochastic behaviour,” *Ergodic Theory Dynam. Systems.* , 1988, **8**, No. 3, 365–378.
3. M. Blank, “Average shadowing and gluing property,” *ArXiv.*, 2022, 2202.13407 [math.DS].
4. M. Blank, “Average shadowing revisited,” *ArXiv.*, 2022, 2205.10769 [math.DS nlin.CD].
5. R. Bowen, *Equilibrium States and the Ergodic Theory of Anosov Diffeomorphisms*, Springer, Berlin (1975).
6. A. Katok and B. Hasselblatt, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Univ. Press, Cambridge (1995).
7. M. Kulczycki, D. Kwietniak, and P. Oprocha, “On almost specification and average shadowing properties,” *Fund. Math.*, 2014, **224**, 241–278.
8. S. Yu. Pilyugin and K. Sakai, *Shadowing and Hyperbolicity*, Springer, Cham (2017).

Michael Blank
Institute for Information Transmission Problems of the RAS (Kharkevich Institute), Moscow, Russia;
HSE University, Moscow, Russia
E-mail: blank@iitp.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 1 (2022). С. 62–72
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.956.25
DOI: 10.22363/2413-3639-2022-69-1-62-72
EDN: ESEMSD

ОТСУТСТВИЕ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕРАВЕНСТВ С ПРЕОБРАЗОВАНИЯМИ АРГУМЕНТА В ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

Е. И. Галахов[1], **О. А. Салиева**[2]

[1] *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*
[2] *Московский государственный технологический университет «Станкин», Москва, Россия*

Мы доказываем отсутствие положительных решений для некоторых полулинейных эллиптических неравенств в частных производных с преобразованиями аргумента в полупространстве. Доказательства основаны на методе пробных функций.

Ключевые слова: нелинейные эллиптические неравенства, преобразования аргумента, отсутствие решений, положительные решения, монотонные решения

Для цитирования: *Е. И. Галахов, О. А. Салиева.* Отсутствие положительных решений некоторых нелинейных неравенств с преобразованиями аргумента в полупространстве// Соврем. мат. Фундам. направл. 2022. Т. **69**, № 1. С. 62–72. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-69-1-62-72

1. Введение

В настоящей работе рассматривается известная проблема необходимых условий существования положительных решений некоторых нелинейных уравнений и неравенств в частных производных. Существует несколько подходов к этим вопросам, такие как техники сравнения, энергетический метод и т. д. Подход, основанный на выборе специальных пробных функций, был предложен С. И. Похожаевым [3] и развит в совместных статьях и монографиях с Э. Митидиери, В. А. Галактионовым и другими соавторами (см. [2, 10] и ссылки в этих работах). В частности, было установлено, что для широкого класса неравенств в частных производных с нелинейностями степенного роста ($f(u) \sim cu^q$) существование положительных решений определяется соотношением между показателем q и так называемым критическим показателем, зависящим от размерности области определения и других параметров задачи.

Этот факт вызывает вопрос об устойчивости критического показателя по отношению к различным возмущениям и преобразованиям задачи, включая нелокальные эффекты, возникающие во многих областях теории уравнений с частными производными, таких как теория дробных степеней оператора Лапласа и интегро-дифференциальных операторов, имеющих такие приложения, как оценка влажности почв, математические модели лазерного излучения и особенно физика плазмы. Один из возможных примеров такого нелокального эффекта — интегрирование искомой функции по атомарной мере, что может быть также выражено как преобразование аргумента. Поэтому в работах авторов настоящей статьи (см., в частности, [9, 11]) были разработаны новые

Статья была поддержана стратегической программой академического лидерства университета РУДН.

техники пробных функций для нескольких новых классов неравенств, включая неравенства с преобразованиями аргумента во всем пространстве.

Здесь мы адаптируем метод пробных функций к получению достаточных условий отсутствия положительных решений для некоторых полулинейных эллиптических неравенств с преобразованиями аргумента в полупространстве. Мы приводим примеры, показывающие точность найденного критического показателя (см. замечания 2.2 и 3.1). Отметим, что аналогичные результаты для неравенств в полупространстве без преобразований аргумента были получены в [4, 5] и в более частном случае задачи Дирихле — в [6, 8] (см. также ссылки в этих работах) и авторами настоящей работы в [1]. Существенное продвижение в этом направлении было сделано недавно в [7].

Оставшаяся часть статьи состоит из трех разделов. В разделе 2 мы получаем результаты об отсутствии решений для полулинейных эллиптических неравенств с монотонно неубывающим (относительно нормальной переменной) преобразованием аргумента в нелинейном слагаемом, в разделе 3 — для неравенств с преобразованиями, близкими к тождественному (в определенном смысле, указанном ниже), а в разделе 4 мы рассматриваем более общие преобразования, но сужаем класс «допустимых» решений, ограничиваясь монотонными.

2. Монотонные преобразования

Пусть $g(x_1,\dots,x_{n-1},x_n) = (x_1,\dots,x_{n-1},\tilde g(x_n))$, где $\tilde g \in C^1(\mathbb{R}_+;\mathbb{R}_+)$ — строго монотонно возрастающая функция такая, что

(g0) $g(s) \geqslant s$ при всех $s>0$ и $\displaystyle\inf_{s\in\mathbb{R}_+} \frac{\tilde g^{-1}(s)|\tilde g'(s)|^{-1}}{s} > 0$.

Пример 2.1. Простейший пример: $g(s) = as+b$ с константами $a>1$, $b \geqslant 0$.

Рассмотрим полулинейное эллиптическое неравенство

$$-\Delta u(x) \geqslant |u(g(x))|^q \qquad (x \in \mathbb{R}^n_+), \tag{2.1}$$

где $q>1$, $\mathbb{R}^n_+ = \{x=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{R}^n : x_n>0\}$.

Определение 2.1. Назовем *слабым решением* неравенства (2.1) функцию $u \in L_{q,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$, удовлетворяющую неравенству

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} u(x)\cdot\Delta\psi(x)\,dx \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |u(g(x))|^q\psi(x)\,dx \tag{2.2}$$

для любой неотрицательной пробной функции $\psi \in C^2(\overline{\mathbb{R}^n_+})$ с компактным носителем такой, что $\psi(x_1,\dots,x_{n-1},0)\equiv 0$.

Лемма 2.1. *Существует невозрастающая функция $\varphi(s)\geqslant 0$ в $C^2[0,\infty)$, удовлетворяющая условиям*

$$\varphi(s) = \begin{cases} 1, & 0\leqslant s\leqslant 1,\\ 0, & s\geqslant 2,\end{cases} \tag{2.3}$$

$$\int\limits_1^2 \frac{|\varphi'(s)|^{q'}}{\varphi^{q'-1}(s)}\,ds < \infty, \tag{2.4}$$

$$\int\limits_1^2 \frac{|\varphi''(s)|^{q'}}{\varphi^{q'-1}(s)}\,ds < \infty. \tag{2.5}$$

Здесь и ниже $q' = \dfrac{q}{q-1}$.

Доказательство. Можно выбрать $\varphi(s)$ равным $(2-s)^\lambda$ с достаточно большим $\lambda>0$ в некоторой левой окрестности 2. □

Теорема 2.1. *Пусть выполнено условие* (g0), $n > 1$ *и* $1 < q \leqslant \dfrac{n+1}{n-1}$. *Тогда неравенство* (2.1) *не имеет нетривиальных (в частности, положительных) решений* $u \in L_{q,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$.

Доказательство. Рассуждая от противного, допустим, что нетривиальное решение (2.1) существует. Пусть $0 < R < \infty$ (в частности, возможен случай $R = 1$). Функция $x_n\varphi_R(x)$, где

$$\varphi_R(x) = \prod_{k=1}^{n} \varphi\left(\frac{|x_k|}{R}\right) \ (x = (x_1, \ldots, x_n) \in \overline{\mathbb{R}^n_+})$$

и $\varphi(s)$ — функция из леммы 2.1, будет использоваться в качестве *пробной функции* для неравенства (2.1). Отметим, что подобные пробные функции использовались для задачи (2.1) с $g(x) \equiv x$ в [4].

Подставляя пробную функцию $x_n\varphi_R$ в соотношение (2.2), получим

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} u(x) \cdot \Delta(x_n\varphi_R(x))\, dx \geqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |u(g(x))|^q x_n\varphi_R(x)\, dx. \tag{2.6}$$

Используя монотонность $\tilde{g}$ и φ_R, можно оценить правую часть (2.6) снизу как

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |u(g(x))|^q x_n\varphi_R(x)\, dx = \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |u(x)|^q \tilde{g}^{-1}(x_n)\varphi_R(x_1, \ldots, x_{n-1}, \tilde{g}^{-1}(x_n))|\tilde{g}'(x_n)|^{-1}\, dx \geqslant$$
$$\geqslant c\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |u(x)|^q x_n\varphi_R(x)\, dx, \tag{2.7}$$

где $c = \inf\limits_{s \in \mathbb{R}_+} \dfrac{\tilde{g}^{-1}(s)|\tilde{g}'(s)|^{-1}}{s} > 0$ в силу (g0).

С другой стороны, имеем

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} u(x) \cdot \Delta(\varphi_R(x)x_n)\, dx = -\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} u(x) \cdot \Delta\varphi_R(x) \cdot x_n\, dx - 2\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} u(x) \cdot \frac{\partial\varphi_R}{\partial x_n}\, dx. \tag{2.8}$$

Применяя параметрическое неравенство Юнга к первому слагаемому в правой части (2.8), получим

$$-\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} u(x) \cdot \Delta\varphi_R(x) \cdot x_n\, dx \leqslant \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |u(x)| \cdot |\Delta\varphi_R(x)|\, x_n\, dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |u(x)|^q x_n\varphi_R(x)\, dx + c_1\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |\Delta\varphi_R(x)|^{q'}\, x_n\varphi_R^{1-q'}(x)\, dx =$$
$$= \frac{c}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |u(x)|^q x_n\varphi_R(x)\, dx + c_1R^{n+1-2q'}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |\Delta\varphi_1(y)|^{q'}\, \varphi_1^{1-q'}(y)\, dy =$$
$$= \frac{c}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |u(x)|^q x_n\varphi_R(x)\, dx + c_2R^{n+1-2q'} \tag{2.9}$$

с некоторыми константами $c_1, c_2 > 0$.

Второе слагаемое в правой части (2.8) можно оценить аналогично:

$$-2\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} u(x) \cdot \frac{\partial\varphi_R}{\partial x_n}\, dx \leqslant 2\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} u(x) \cdot \left|\frac{\partial\varphi_R}{\partial x_n}\right| dx \leqslant$$
$$\leqslant \frac{c}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |u(x)|^q x_n\varphi_R(x)\, dx + c_3\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} x_n^{1-q'}\left|\frac{\partial\varphi_R}{\partial x_n}\right|^{q'} \varphi_R^{1-q'}(x)\, dx =$$

$$= \frac{c}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |u(x)|^q x_n \varphi_R(x)\,dx + c_3 R^{n+1-2q'} \int\limits_{\mathbb{R}^n_+} \left|\frac{\partial\varphi_1}{\partial y_n}\right|^{q'} \varphi_1^{1-q'}(y)\,dy =$$

$$= \frac{c}{4}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |u(x)|^q x_n \varphi_R(x)\,dx + c_4 R^{n+1-2q'} \tag{2.10}$$

с некоторыми константами $c_3, c_4 > 0$.

Комбинируя (2.6)–(2.10), будем иметь

$$\frac{c}{2}\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |u(x)|^q x_n \varphi_R(x)\,dx \leqslant (c_2 + c_4) R^{n+1-2q'}. \tag{2.11}$$

Далее будем использовать стандартное обозначение $B_r(x_*) = \{x \in \mathbb{R}^n : |x - x_*| < r\}$, где $x_* \in \mathbb{R}^n$, $r > 0$. Тогда для всех $x \in B_R(0) \cap \mathbb{R}^n_+$ по построению имеем $\varphi_R(x) = 1$. Поэтому, уменьшая область интегрирования в левой части неравенства (2.11), получим

$$\frac{c}{2}\int\limits_{B_R(0)\cap\mathbb{R}^n_+} |u(x)|^q x_n\,dx \leqslant (c_2 + c_4) R^{n+1-2q'}.$$

Устремляя $R \to \infty$, приходим к противоречию при $n + 1 - 2q' < 0$, что доказывает теорему во всех случаях, кроме критического (когда $n + 1 - 2q' = 0$).

В критическом случае получаем

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n_+} |u(x)|^q x_n\,dx < \infty$$

и отсюда

$$\int\limits_{\operatorname{supp}\Delta(\varphi_R x_n)} |u(x)|^q x_n\,dx \to 0 \text{ при } R \to \infty.$$

Но из (2.6), (2.7) и неравенства Гельдера следует, что

$$c\int\limits_{B_R(0)\cap\mathbb{R}^n_+} |u(x)|^q x_n\,dx \leqslant \left(\int\limits_{\operatorname{supp}\Delta(\varphi_R x_n)} |u(x)|^q x_n\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \cdot \left(\int\limits_{\operatorname{supp}\Delta(\varphi_R x_n)} |\Delta(\varphi_R(x) x_n)|^{q'} x_n^{1-q'}\,dx\right)^{\frac{1}{q'}} \tag{2.12}$$

и отсюда

$$\int\limits_{B_R(0)\cap\mathbb{R}^n_+} |u(x)|^q x_n\,dx \leqslant c\left(\int\limits_{\operatorname{supp}\Delta(\varphi_R x_n)} |u(x)|^q x_n\,dx\right)^{\frac{1}{q}} \to 0 \text{ при } R \to \infty,$$

так как второй множитель в правой части (2.12) можно оценить сверху через $(c_2 + c_4)R^{n+1-2q'}$, как и выше, причем $n + 1 - 2q' = 0$, так что для нетривиального u получаем противоречие и в этом случае. Это завершает доказательство. □

Замечание 2.1. Такой же результат имеет место для $g(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n) = (\tilde{g}(x_1, \dots, x_{n-1}), x_n)$, где $\tilde{g} : \mathbb{R}^{n-1} \to \mathbb{R}^{n-1}$ таково, что $|\tilde{g}(x')| \geqslant |x'| \overset{\text{def}}{=} \sqrt{\sum\limits_{i=1}^{n-1} x_i^2}$ и $\inf\limits_{x' \in \mathbb{R}^{n-1}} |J_{\tilde{g}'}^{-1}(x')| \cdot |\tilde{g}'(x')| > 0$.

Доказательство аналогично предыдущему.

Замечание 2.2. Критический показатель $\dfrac{n+1}{n-1}$ оптимален. См. пример решения $u_q(x)$ при $q > \dfrac{n+1}{n-1}$ и $g(x) \equiv x$ в [5]. Его модификация $u_{q,g}(x) = u_q(x', \tilde{g}^{-1}(x_n))$ удовлетворяет (2.1) для более общих g со свойством (g0).

3. Преобразования, близкие к тождественному

Пусть теперь $g \in C^1(\mathbb{R}^n_+; \mathbb{R}^n_+)$ удовлетворяет следующим условиям:

(g1) *существует константа* $c_1 > 0$ *такая, что при* $x \in \mathbb{R}^n_+$ *выполнено* $|g(x) - x| \leqslant c_1$;

(g2) $g(x) = x$ *при* $x \in \mathcal{C} \overset{\mathrm{def}}{=} \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+ : x_n \leqslant 4c_1\}$.

Пример 3.1. В качестве примера можно взять $g(x) = (x_1, \dots, x_{n-1}, \tilde{g}(x_n))$, где

$$\tilde{g}(s) = \begin{cases} s, & 0 \leqslant s \leqslant 4, \\ s + \dfrac{1}{2}\sin^2\left(\dfrac{\pi s}{4}\right), & s \geqslant 4. \end{cases}$$

Введем обозначение $Q_r = \{(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n_+ : |x_i| \leqslant r,\ i = 1, \dots, n\}$, где $r > 0$. Мы ограничиваемся рассмотрением класса положительных решений, удовлетворяющих для любого $R > 0$ оценке

$$\int\limits_{Q_{2R}} |u(x)|^q x_n\, dx \leqslant c_2 \int\limits_{Q_R} |u(x)|^q x_n\, dx, \tag{3.1}$$

который включает, в частности, решения, удовлетворяющие двусторонней оценке

$$c(1 + |x|)^\alpha \leqslant u(x) \leqslant c'(1 + |x|)^\alpha \ (x \in \mathbb{R}_+)$$

с некоторыми константами $\alpha \in \mathbb{R}$ и $c, c' \in \mathbb{R}_+$.

Теорема 3.1. *Пусть выполнены условия* (g1), (g2) *и* $1 < q \leqslant \dfrac{n+1}{n-1}$. *Тогда неравенство* (2.1) *не имеет положительных решений* $u \in L_{q,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$.

Доказательство. Повторим рассуждения из доказательства предыдущей теоремы, оценивая правую часть (2.6) при $R > 4c_1$ другим способом. А именно, мы покрываем область $Q_{2R} \setminus \mathcal{C}$ натуральным числом $M(R)$ шаров $B^{m,R}_{2c_1} = B_{2c_1}(x^{m,R})$ радиуса $2c_1$ с центрами в некоторых точках $x^{m,R}$ так, что объединение $M(R)$ меньших шаров с теми же центрами $B^{m,R}_{c_1} = B_{c_1}(x^{m,R})$ радиуса c_1 полностью лежит в $Q_R \setminus \mathcal{C}$ и эти шары не пересекаются, так что

$$\int\limits_{Q_R \setminus \mathcal{C}} f(x)\, dx \geqslant \sum_{m=1}^{M(R)} \int\limits_{B^{m,R}_{c_1}} f(x)\, dx, \tag{3.2}$$

и существует константа $c_3 = c_3(n)$ такая, что каждая точка $Q_R \setminus \mathcal{C}$ принадлежит не более чем c_3 шарам $B^{m,R}_{2c_1}$, поэтому для любой неотрицательной функции $f(x)$, интегрируемой в $Q_R \setminus \mathcal{C}$, имеем

$$\int\limits_{Q_R \setminus \mathcal{C}} f(x)\, dx \leqslant c_3 \sum_{m=1}^{M(R)} \int\limits_{B^{m,R}_{2c_1}} f(x)\, dx. \tag{3.3}$$

Заметим, что, так как $-\Delta u \geqslant u^q \geqslant 0$, функция u удовлетворяет слабому неравенству Харнака

$$\inf_{y \in B^{m,R}_{2c_1}} u^q(y) \geqslant c_4 R^{-n} \int\limits_{B^{m,R}_{4c_1}} u^q(x) dx \tag{3.4}$$

с некоторой константой $c_4 > 0$, не зависящей от m и R. Кроме того, так как центры $x^{m,R}$ шаров $B^{m,R}_{2c_1}$ по построению лежат вне $\mathcal{C}$, т. е. n-е координаты этих центров больше $4c_1$, а следовательно, n-е координаты всех точек шаров $B^{m,R}_{2c_1}$ больше $2c_1$, то

$$\frac{\sup\limits_{y \in B^{m,R}_{2c_1}} y_n}{\inf\limits_{y \in B^{m,R}_{2c_1}} y_n} = \frac{\inf\limits_{y \in B^{m,R}_{2c_1}} y_n + 4c_1}{\inf\limits_{y \in B^{m,R}_{2c_1}} y_n} = 1 + \frac{4c_1}{\inf\limits_{y \in B^{m,R}_{2c_1}} y_n} \leqslant 1 + \frac{4c_1}{2c_1} = 3. \tag{3.5}$$

Тогда получим:

$$\int\limits_{Q_{2R}} u^q(g(x))x_n\varphi_R(x)\,dx =$$

$$= \int\limits_{Q_{2R}\cap\mathcal{C}} u^q(g(x))x_n\varphi_R(x)\,dx + \int\limits_{Q_{2R}\setminus\mathcal{C}} u^q(g(x))x_n\varphi_R(x)\,dx \overset{(g2)}{=}$$

$$= \int\limits_{Q_{2R}\cap\mathcal{C}} u^q(x)x_n\varphi_R(x)\,dx + \int\limits_{Q_{2R}\setminus\mathcal{C}} u^q(g(x))x_n\varphi_R(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{Q_{2R}\cap\mathcal{C}} u^q(x)x_n\varphi_R(x)\,dx + \int\limits_{Q_R\setminus\mathcal{C}} u^q(g(x))x_n\,dx \overset{(3.2)}{\geqslant}$$

$$\geqslant \int\limits_{Q_{2R}\cap\mathcal{C}} u^q(x)x_n\varphi_R(x)\,dx + \sum_{m=1}^{M(R)} \int\limits_{B_{c_1}^{m,R}} u^q(g(x))x_n\,dx \overset{(g1)}{\geqslant}$$

$$\geqslant \int\limits_{Q_{2R}\cap\mathcal{C}} u^q(x)x_n\varphi_R(x)\,dx + \sum_{m=1}^{M(R)} \inf_{y\in B_{2c_1}^{m,R}} u^q(y) \int\limits_{B_{c_1}^{m,R}} x_n\,dx \overset{(3.4),\ (3.5)}{\geqslant}$$

$$\geqslant \int\limits_{Q_{2R}\cap\mathcal{C}} u^q(x)x_n\varphi_R(x)\,dx + \frac{c_4}{3}\sum_{m=1}^{M(R)} \int\limits_{B_{2c_1}^{m,R}} u^q(x)x_n dx \overset{(3.3)}{\geqslant}$$

$$\geqslant \int\limits_{Q_{2R}\cap\mathcal{C}} u^q(x)x_n\varphi_R(x)\,dx + \frac{c_4}{3c_3} \int\limits_{Q_R\setminus\mathcal{C}} u^q(x)x_n\,dx \overset{(3.1)}{\geqslant}$$

$$\geqslant \int\limits_{Q_{2R}\cap\mathcal{C}} u^q(x)x_n\varphi_R(x)\,dx + \frac{c_4}{3c_2c_3} \int\limits_{Q_{2R}\setminus\mathcal{C}} u^q(x)x_n\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{Q_{2R}\cap\mathcal{C}} u^q(x)x_n\varphi_R(x)\,dx + \frac{c_4}{3c_2c_3} \int\limits_{Q_{2R}\setminus\mathcal{C}} u^q(x)x_n\varphi_R(x)\,dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2}\min\left(1, \frac{c_4}{3c_2c_3}\right) \int\limits_{Q_{2R}} u^q(x)x_n\varphi_R(x)\,dx$$

и завершим доказательство аналогично предыдущему. □

Далее ограничимся классом решений u неравенства (2.1) не более чем со степенным ростом на бесконечности, т. е. такими, для которых существуют константы $c_0 > 0$ и $\alpha \in \mathbb{R}$ такие, что

$$u(x) \leqslant c_0|x|^\alpha \text{ для всех } x \in \mathbb{R}^n_+. \tag{3.6}$$

Лемма 3.1. *Обозначим* $I_R = \int\limits_{Q_R} u^q(x)x_n dx$. *Тогда для любой функции* $u(x)$, *удовлетворяющей* (3.6), *имеем*

$$\liminf_{R\to\infty} \frac{I_{2R}}{RI_R} = 0. \tag{3.7}$$

Доказательство. Предположим обратное, т. е.

$$\exists \varepsilon > 0 : \ \exists R_0 > 0 : \ \forall R > R_0 \ I_{2R} \geqslant \varepsilon R I_R. \tag{3.8}$$

Применяя (3.8) k раз, получим

$$I_{2^k R} \geqslant 2^{\frac{k(k-1)}{2}} (\varepsilon R)^k I_R. \tag{3.9}$$

С другой стороны, из (3.6) следует
$$I_{2^k R} \leqslant c(2^k R)^{\alpha q+n+1}. \tag{3.10}$$
Комбинируя (3.9) с (3.10) и устремляя $k \to \infty$, получаем противоречие, которое доказывает утверждение. □

Замечание 3.1. Аналогично можно показать, что
$$\limsup_{R\to\infty} \frac{I_{2R-c}}{I_{2R}} = 1.$$

Для решений неравенства (2.1), удовлетворяющих (3.6), условие (g2) в теореме 3.1 можно заменить следующими условиями:

(g3) *$g \in C^1(\mathbb{R}^n_+; \mathbb{R}^n_+)$ и существует константа $c_2 > 0$ такая, что для всех $x \in \mathbb{R}^n_+$ выполнено $|J_{g^{-1}}(x)| \geqslant c_2$.*

(g4) *Обозначим $g^{-1}(x_1, \dots, x_n) = (g_1^{-1}(x_1, \dots, x_n), \dots, g_n^{-1}(x_1, \dots, x_n))$. Тогда существует константа $c_3 > 0$ такая, что для всех $x \in \mathbb{R}^n_+$ имеем $g_n^{-1}(x_1, \dots, x_n) \geqslant c_3 x_n$.*

Пример 3.2. В качестве примера можно взять $g(x) = (x_1, \dots, x_{n-1}, ax_n + b))$ при $a > 0$ (но не обязательно $a \geqslant 1$, как в примере 2.1) и $b \geqslant 0$.

Тогда справедлива следующая теорема.

Теорема 3.2. *Пусть выполнены условия* (g1), (g3) *и* (g4) (*но не обязательно* (g2)), *а также $1 < q \leqslant \dfrac{n+1}{n-1}$. Тогда неравенство* (2.1) *не имеет положительных решений $u \in L_{q,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$, удовлетворяющих* (3.6).

Доказательство. При условиях теоремы имеем
$$\int\limits_{Q_{2R}} u^q(g(x)) x_n \varphi_R(x)\, dx \overset{x=g^{-1}(y)}{=} \int\limits_{g^{-1}(Q_{2R})} u^q(y) g_n^{-1}(y_n) \varphi_R(g^{-1}(y)) |J_{g^{-1}}(x)|\, dy \overset{(g3),(g4)}{\geqslant}$$
$$\geqslant c_2 c_3 \int\limits_{g^{-1}(Q_{2R})} u^q(y) y_n \varphi_R(g^{-1}(y))\, dy \overset{(g1)}{\geqslant} c_2 c_3 \int\limits_{Q_{2R-c_1}} u^q(y) y_n \varphi_R(g^{-1}(y))\, dy =$$
$$= c_2 c_3 \int\limits_{Q_{2R-c_1}} u^q(y) y_n (\varphi_R(y) + \varphi_R(g^{-1}(y)) - \varphi_R(y))\, dy \geqslant$$
$$\geqslant c_2 c_3 \int\limits_{Q_{2R-c_1}} u^q(y) y_n (\varphi_R(y) - \max_{y \in Q_{2R-c_1}} |\varphi_R'(y)| \cdot |g^{-1}(y) - y|)\, dy \overset{(g1)}{\geqslant}$$
$$\overset{(g1)}{\geqslant} c_2 c_3 \int\limits_{Q_{2R-c_1}} u^q(y) y_n (\varphi_R(y) - \max_{y \in Q_{2R}} |\varphi_R'(y)| \cdot c_1)\, dy \geqslant$$
$$\geqslant c_2 c_3 \left(\int\limits_{Q_{2R-c_1}} u^q(y) y_n \varphi_R(y)\, dy - \max_{z \in Q_2} |\varphi_1'(z)| \cdot \frac{c_1}{R} \int\limits_{Q_{2R}} u^q(y) y_n\, dy \right). \tag{3.11}$$
Применяя лемму 3.1, при $R > 2c_1$ приходим к
$$\max_{z \in Q_2} |\varphi_1'(z)| \cdot \frac{c_1}{R} \int\limits_{Q_{2R}} u^q(y) y_n\, dy \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{Q_R} u^q(y) y_n\, dx \leqslant \frac{1}{2} \int\limits_{Q_{2R}} u^q(y) y_n \varphi_R(y)\, dy$$
хотя бы для некоторой последовательности R, стремящейся к ∞. Отсюда с учетом (3.11) и замечания (3.1) следует
$$\int\limits_{Q_{2R}} u^q(g(x)) x_n \varphi_R(x)\, dx \geqslant \frac{c_2 c_3}{2} \int\limits_{Q_{2R-c_1}} u^q(y) y_n \varphi_R(y)\, dy \geqslant \frac{c_2 c_3}{4} \int\limits_{Q_{2R}} u^q(y) y_n \varphi_R(y)\, dy$$

для некоторой подпоследовательности той же последовательности, что позволяет завершить доказательство аналогично предыдущим. □

Замечание 3.2. Критический показатель $\dfrac{n+1}{n-1}$ оптимален по крайней мере для преобразований $g(x)$ таких, что $g(x)=x$ вне некоторого компактного множества $K\subset\mathbb{R}^n_+$ и $|g(x)-x|\leqslant c_K$ для всех $x\in K$, где c_K — константа Липшица для решения $u_q(x)$, упомянутого в замечании 2.1, на множестве K. В этом случае легко показать, что функция

$$v_q(x)\stackrel{\mathrm{def}}{=}\left(\frac{2}{3}\right)^{q'}u_q(g^{-1}(x))$$

при $q>\dfrac{n+1}{n-1}$ удовлетворяет (2.1).

4. Отсутствие монотонных решений

Пусть теперь $g\in C(\mathbb{R}^n_+;\mathbb{R}^n_+)=(\tilde g(x_1,\dots,x_{n-1}),x_n)$, где $\tilde g:\mathbb{R}^{n-1}\to\mathbb{R}^{n-1}$ таково, что

(g5) *существует константа $c_4>0$ такая, что $|\tilde g(x')|\leqslant c_4|x'|$ для всех $x\in\mathbb{R}^n_+$, где $|x'|$ определено, как в замечании* 2.1.

Пример 4.1. В качестве примера можно взять $g(x)=(c_4x_1,\dots,c_4x_{n-1},x_n))$ при $c_4>0$.

Теорема 4.1. *Пусть выполнены* (g5) *и* $1<q\leqslant\dfrac{n+1}{n-1}$. *Тогда неравенство* (2.1) *не имеет нетривиальных решений $u\in L_{q,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n_+)$, монотонно неубывающих по x_n для любого $x'\in\mathbb{R}^{n-1}$.*

Замечание 4.1. Известно, что в случае равенства в (2.1) с однородным условием Дирихле на $\partial\mathbb{R}^n_+=\{(x',0):\,x'\in\mathbb{R}^{n-1}\}$ все неотрицательные решения с необходимостью являются монотонно неубывающими (см. [6]), и поэтому из теоремы 4.1 следует отсутствие каких-либо нетривиальных решений этой задачи. Обобщения этого свойства монотонности и связанные с ними результаты об отсутствии решений квазилинейных задач с оператором p-Лапласа можно найти в [1, 8] и по ссылкам, приведенным в этих работах.

Доказательство теоремы 4.1. Не ограничивая общности, будем считать, что $c_4>1$ (иначе можно применить замечание 2.1), и рассмотрим пробные функции $\psi_R(x)=\psi_R(x',x_n)=\varphi_R(x',x_n-3c_4R)$. Так как оценка правой части (2.8) остается неизменной с точностью до замены пробных функций φ_R на ψ_R, достаточно оценить $\int\limits_{Q_{2R}}u^q(g(x))x_n\psi_R(x)\,dx$ снизу. Это можно сделать следующим образом:

$$\int\limits_{Q_{2R}}u^q(g(x))x_n\psi_R(x)\,dx\geqslant\int\limits_{Q_R}u^q(g(x))x_n\,dx\geqslant$$
$$\geqslant c\inf_{x\in\tilde Q_{c_4R}}u^q(x)R^{n+1}\geqslant c\int\limits_{\tilde Q_{2c_4R}}u^q(x)x_n\,dx\geqslant c\int\limits_{\tilde Q_R}u^q(x)x_n\psi_R\,dx,$$

где $\tilde Q_r\stackrel{\mathrm{def}}{=}\{x=(x_1,\dots,x_{n-1},x_n):\,(x_1,\dots,x_{n-1},x_n-3c_4r)\in Q_r\}$, $r>0$. Здесь на втором шаге мы используем условие (g5), а на третьем — слабое неравенство Харнака. Далее аналогично предыдущим доказательствам получаем

$$\int\limits_{\tilde Q_R}u^q(x)x_n\,dx=\int\limits_{\tilde Q_R}u^q(x)x_n\psi_R\,dx\leqslant cR^{n+1-2q'}$$

для некоторого $c>0$, не зависящего от R, и в силу условия монотонности $u(\cdot,x_n)$ по x_n имеем

$$\int\limits_{\tilde Q_R}u^q(x)x_n\,dx\geqslant\int\limits_{Q_R}u^q(x)x_n\,dx.$$

Доказательство завершается аналогично предыдущим случаям. □

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Галахов Е.И., Салиева О.А.* Отсутствие решений задачи Дирихле для некоторых квазилинейных эллиптических уравнений в полупространстве// Дифф. уравн. — 2016. — *52*. — С. 749–760.
2. *Митидиери Э., Похожаев С.И.* Априорные оценки и разрушение решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных// Тр. МИАН. — 2001. — *234*. — С. 1–383.
3. *Похожаев С.И.* Существенно нелинейные емкости, порожденные дифференциальными операторами// Докл. РАН. — 1997. — *56*. — С. 592–594.
4. *Bidaut-Véron M.F., Pohozaev S.* Nonexistence results and estimates for some nonlinear elliptic problems// J. Anal. Math. — 2001. — *84*. — С. 1–49.
5. *Birindelli I., Mitidieri E.* Liouville theorems for elliptic inequalities and applications// Proc. Roy. Soc. Edinburgh. — 1998. — *128A*. — С. 1217–1247.
6. *Dancer E.* Some notes on the method of moving planes// Bull. Aust. Math. Soc. — 1992. — *46*. — С. 425–434.
7. *Dupaigne L., Sirakov B., Souplet Ph.* A Liouville-type theorem for the Lane—Emden equation in a half-space// ArXiv. — 2020. — 2003.11466.
8. *Farina A., Montoro L., Sciunzi B.* Monotonicity in half-spaces of positive solutions to $-\Delta_p u = f(u)$ in the case $p > 2$// ArXiv. — 2015. — 1509.03897v1.
9. *Galakhov E., Salieva O.* On blow-up of solutions to differential inequalities with singularities on unbounded sets// J. Math. Anal. Appl. — 2013. — *408*. — С. 102–113.
10. *Galaktionov V., Mitidieri E., Pohozaev S.* Blow-up for higher-order parabolic, hyperbolic, dispersion and Schrödinger equations. — Boca Raton: CRC Press, 2014.
11. *Salieva O.* On nonexistence of solutions to some nonlinear inequalities with transformed argument// Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ. — 2017. — *2017*. — С. 3–13.

Е.И. Галахов
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия
E-mail: `egalakhov@gmail.com`

О.А. Салиева
Московский государственный технологический университет «Станкин», Москва, Россия
E-mail: `olga.a.salieva@gmail.com`

UDC 517.956.25
DOI: 10.22363/2413-3639-2022-69-1-62-72
EDN: ESEMSD

Absence of positive solutions of some nonlinear inequalities with transformations of the argument in a half-space

E. I. Galakhov[1] and O. A. Salieva[2]

[1] *RUDN University, Moscow, Russia*
[2] *Moscow State Technological University "Stankin," Moscow, Russia*

We prove the absence of positive solutions for some semilinear elliptic partial differential inequalities with transformations of the argument in a half-space. The proofs are based on the test functions method.

Keywords: nonlinear elliptic inequalities, transformations of arguments, absence of solutions, positive solutions, monotonic solutions

For citation: E. I. Galakhov, O. A. Salieva, "Absence of positive solutions of some nonlinear inequalities with transformations of the argument in a half-space," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2022, vol. **69**, No. 1, 62–72. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-69-1-62-72

REFERENCES

1. E. I. Galakhov and O. A. Salieva, "Otsutstvie resheniy zadachi Dirikhle dlya nekotorykh kvazilineynykh ellipticheskikh uravneniy v poluprostranstve" [Absence of solutions to the Dirichlet problem for some quasilinear elliptic equations in a half-space], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2016, **52**, 749–760 (in Russian).
2. E. Mitidieri and S. I. Pohozaev, "Apriornye otsenki i razrushenie resheniy nelineynykh uravneniy i neravenstv v chastnykh proizvodnykh" [A priori estimates and blow-up of solutions of nonlinear partial differential equations and inequalities], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2001, **234**, 1–383 (in Russian).
3. S. I. Pohozaev, "Sushchestvenno nelineynye emkosti, porozhdennye differentsial'nymi operatorami" [Essentially nonlinear capacities generated by differential operators], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1997, **56**, 592–594 (in Russian).
4. M. F. Bidaut-Véron and S. Pohozaev, "Nonexistence results and estimates for some nonlinear elliptic problems," *J. Anal. Math.*, 2001, **84**, 1–49.
5. I. Birindelli and E. Mitidieri, "Liouville theorems for elliptic inequalities and applications," *Proc. Roy. Soc. Edinburgh.*, 1998, **128A**, 1217–1247.
6. E. Dancer, "Some notes on the method of moving planes," *Bull. Aust. Math. Soc.*, 1992, **46**, 425–434.
7. L. Dupaigne, B. Sirakov, and Ph. Souplet, "A Liouville-type theorem for the Lane—Emden equation in a half-space," *ArXiv*, 2020, 2003.11466.
8. A. Farina, L. Montoro, and B. Sciunzi, "Monotonicity in half-spaces of positive solutions to $-\Delta_p u = f(u)$ in the case $p > 2$," *ArXiv*, 2015, 1509.03897v1.
9. E. Galakhov and O. Salieva, "On blow-up of solutions to differential inequalities with singularities on unbounded sets," *J. Math. Anal. Appl.*, 2013, **408**, 102–113.
10. V. Galaktionov, E. Mitidieri, and S. Pohozaev, *Blow-up for higher-order parabolic, hyperbolic, dispersion and Schrödinger equations*, CRC Press, Boca Raton, 2014.
11. O. Salieva, "On nonexistence of solutions to some nonlinear inequalities with transformed argument," *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, 2017, **2017**, 3–13.

E. I. Galakhov
RUDN University, Moscow, Russia
E-mail: egalakhov@gmail.com

O. A. Salieva
Moscow State Technological University “Stankin,” Moscow, Russia
E-mail: olga.a.salieva@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 1 (2023). С. 73–97
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.958+517.984.5
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-73-97
EDN: DYSLPL

СПЕКТРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРОВ В ЗАДАЧЕ О НОРМАЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЯХ СМЕСИ ВЯЗКИХ СЖИМАЕМЫХ ЖИДКОСТЕЙ

Д. А. Закора

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия

Исследуется задача о нормальных колебаниях гомогенной смеси нескольких вязких сжимаемых жидкостей, заполняющих ограниченную область трёхмерного пространства с бесконечно гладкой границей. Рассматриваются два граничных условия: условие прилипания и условие проскальзывания без касательных напряжений. Доказано, что существенный спектр задачи в обоих случаях представляет собой конечный набор отрезков, расположенных на действительной оси. Оставшийся спектр состоит из изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности и расположен на действительной оси за исключением, быть может, конечного числа комплексно сопряжённых собственных значений. Спектр задачи содержит подпоследовательность собственных значений с предельной точкой в бесконечности и степенным асимптотическим распределением.

Ключевые слова: смесь жидкостей, сжимаемая вязкая жидкость, спектральная задача, существенный спектр, дискретный спектр

Для цитирования: *Д. А. Закора.* Спектральные свойства операторов в задаче о нормальных колебаниях смеси вязких сжимаемых жидкостей// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 1. С. 73–97. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-73-97

1. Введение

1.1. Формулировка нелинейной динамической задачи. Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с бесконечно гладкой границей $\partial\Omega$ заполнена гомогенной смесью нескольких вязких сжимаемых жидкостей. Введём систему координат $Ox_1x_2x_3$ так, что ось Ox_3 направлена против действия силы тяжести, а начало координат находится внутри области Ω. Обозначим через $\mathbf{n}$ единичный вектор, нормальный к границе $\partial\Omega$ и направленный вне Ω.

Баротропное движение смеси $n \geqslant 2$ жидкостей описывается следующей системой уравнений[1]:

$$\begin{gathered} R_i\frac{\partial \mathbf{u}_i}{\partial t} + R_i(\mathbf{u}_i\cdot\nabla)\mathbf{u}_i = \operatorname{div}\Big(-P_iI_3 + \sum_{j=1}^n \sigma^{ij}(\mathbf{u}_j)\Big) + \sum_{j=1}^n a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) + R_i\mathbf{F}_i, \\ \frac{\partial R_i}{\partial t} + \operatorname{div}(R_i\mathbf{u}_i) = 0, \quad (t,x)\in[0,+\infty)\times\Omega, \quad i=1,\dots,n, \end{gathered} \tag{1.1}$$

где $\mathbf{u}_i = \mathbf{u}_i(t,x) = \big(u_{i1}(t,x); u_{i2}(t,x); u_{i3}(t,x)\big)^\tau$ $(x=(x_1;x_2;x_3)\in\Omega)$ — поле скоростей i-й компоненты смеси (символом τ обозначена операция транспонирования), $R_i = R_i(t,x)$ — плотность,

[1]Пусть A, B — матрицы, действующие в $\mathbb{R}^m$. Положим $\operatorname{div}A := \sum_{i=1}^m \mathbf{e}_i \sum_{j=1}^m \frac{\partial A_{ij}}{\partial x_j}$ и $A:B := \operatorname{tr}(A^\tau B) = \sum_{i,j=1}^m A_{ij}B_{ij}$.

$P_i = P_i(t,x)$ — давление, $a_{ij} = a_{ji} \geqslant 0$ — коэффициенты, отвечающие за интенсивность обмена импульсом между составляющими смеси, $\mathbf{F}_i = \mathbf{F}_i(t,x)$ — известные поля внешних массовых сил. Тензоры полных напряжений $\mathbf{T}_i$ и тензоры вязких напряжений $\mathbf{S}_i$ определяются равенствами[1]:

$$\mathbf{T}_i := -P_i I_3 + \mathbf{S}_i, \quad \mathbf{S}_i := \sum_{j=1}^{n} \sigma^{ij}(\mathbf{u}_j), \quad \sigma^{ij}(\mathbf{u}) := \lambda_{ij} \operatorname{tr} e(\mathbf{u}) I_3 + 2\mu_{ij} e(\mathbf{u}), \tag{1.2}$$

где I_3 — единичная матрица в $\mathbb{R}^3$, μ_{ij}, λ_{ij} — коэффициенты матриц вязкостей $\mathbf{M} := \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\boldsymbol{\Lambda} := \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^n$. Матрицы вязкостей подчинены следующим условиям:

$$\mathbf{M} > 0, \quad 2\mathbf{M} + 3\boldsymbol{\Lambda} > 0. \tag{1.3}$$

Предположим, что давление в каждой компоненте смеси пропорционально плотности:

$$P_i = c_i R_i, \quad c_i > 0, \quad (t,x) \in [0,+\infty) \times \Omega, \quad i = 1,\dots,n. \tag{1.4}$$

Линеаризованная относительно состояния покоя система (1.1) будет рассматриваться с двумя типами граничных условий. Первый тип граничных условий — условия прилипания:

$$\mathbf{u}_i = \mathbf{0}, \quad (t,x) \in [0,+\infty) \times \partial\Omega, \quad i = 1,\dots,n. \tag{1.5}$$

Второй тип граничных условий — условия непротекания для каждой компоненты смеси и нулевые касательные напряжения:

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\mathbf{T}_i \mathbf{n}) \times \mathbf{n} = \mathbf{0}, \quad (t,x) \in [0,+\infty) \times \partial\Omega, \quad i = 1,\dots,n, \tag{1.6}$$

где символ «$\times$» означает векторное произведение. В дальнейшем граничное условие (1.6) с учётом (1.2) будет переписано в более удобной для вычислений форме.

Система уравнений (1.1) — один из вариантов описания движения многокомпонентных жидкостных смесей и моделирует движения гомогенной смеси вязких сжимаемых жидкостей в многоскоростной модели (см. [12]). Это означает, что в каждой точке пространства присутствуют все компоненты смеси, которые находятся в одной фазе, но имеют каждая свою локальную скорость движения; взаимодействие между компонентами осуществляется через обмен импульсом и вязкое трение. В нелинейной теории многокомпонентных жидкостных смесей наряду с предположением (1.4) используются и другие связи (см. [5, 6, 14]).

Математическое исследование моделей движения многокомпонентных сред началось относительно недавно. Представление о различных моделях, а также возникающих при этом математических задач можно получить по монографиям [14, 29], а также обзору, приведённому в статье [27]. В работах [21, 22] получены первые результаты по слабой разрешимости нелинейной модели многокомпонентной смеси, заполняющей всё пространство $\mathbb{R}^3$. В следующей работе тех же авторов [23] исследуется вопрос единственности решения в случае отсутствия внешних сил и взаимодействия между компонентами смеси. Глубокие результаты по разрешимости нестационарных уравнений многокомпонентных вязких сжимаемых жидкостей, заполняющих ограниченную область, получены в [11, 12].

Цель данной работы — исследование задачи о нормальных колебаниях линеаризованной относительно состояния покоя системы (1.1)–(1.4) с граничными условиями (1.5) либо (1.6).

1.2. Линеаризация динамической задачи. Предположим, что рассматриваемая система находится в равновесии, т. е. $\mathbf{u}_i = \mathbf{0}$, $\mathbf{F}_i = -g\mathbf{e}_3$, $i = 1,\dots,n$, где g — ускорение свободного падения. Из (1.1) и (1.4) найдём, что стационарные плотности ρ_{i0} в компонентах смеси распределены по закону $\rho_{i0} = \rho_{i0}(0)\exp(-gc_i^{-1}x_3)$, где $\rho_{i0}(0)$ — стационарная плотность i-й компоненты смеси в начале координат.

---

[1] Для поля $\mathbf{u} = (u_1; u_2; u_3)^\tau$ определим набор коэффициентов $e_{lk}(\mathbf{u}) := \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\partial u_l}{\partial x_k} + \dfrac{\partial u_k}{\partial x_l}\right)$ $(l,k = 1,2,3)$ тензора скоростей деформаций $e(\mathbf{u})$. Через $\operatorname{tr} e(\mathbf{u}) := \sum_{s=1}^{3} e_{ss}(\mathbf{u}) = \operatorname{div}\mathbf{u}$ обозначим след матрицы $e(\mathbf{u})$.

Будем считать, что $R_i(t,x) = \rho_{i0}(x_3) + \widetilde{\rho}_i(t,x)$, $\mathbf{F}_i(t,x) = -g\mathbf{e}_3 + \mathbf{f}_i(t,x)$, где $\widetilde{\rho}_i$ — так называемая динамическая плотность, $\mathbf{f}_i$ — малое поле внешних массовых сил, наложенное на гравитационное поле. Предполагая, что $\mathbf{u}_i$, $\widetilde{\rho}_i$, $\mathbf{f}_i$ — малые одного порядка малости, и учитывая равенства

$$\frac{c_i\nabla\widetilde{\rho}_i + \widetilde{\rho}_i g\mathbf{e}_3}{\rho_{i0}} = \frac{c_i\rho_{i0}\nabla\widetilde{\rho}_i - c_i\widetilde{\rho}_i\nabla\rho_{i0}}{\rho_{i0}^2} = \nabla\left(\frac{c_i\widetilde{\rho}_i}{\rho_{i0}}\right),$$

придём к линеаризованной системе:

$$\frac{\partial\mathbf{u}_i}{\partial t} = -\nabla\left(\frac{c_i\widetilde{\rho}_i}{\rho_{i0}}\right) + \frac{1}{\rho_{i0}}\operatorname{div}\sum_{j=1}^{n}\sigma^{ij}(\mathbf{u}_j) + \frac{1}{\rho_{i0}}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) + \mathbf{f}_i,$$
$$\frac{\partial\widetilde{\rho}_i}{\partial t} = -\operatorname{div}(\rho_{i0}\mathbf{u}_i), \quad (t,x)\in[0,+\infty)\times\Omega, \quad i = 1,\ldots,n.$$

Осуществим в последней системе замену $c_i^{1/2}\rho_{i0}^{-1/2}\widetilde{\rho}_i(t,x) =: \rho_i(t,x)$ с целью её симметризации. В результате с учётом (1.2) получим следующую основную систему уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial\mathbf{u}_i}{\partial t} &= -\nabla\left(\frac{c_i^{1/2}\rho_i}{\rho_{i0}^{1/2}}\right) - \frac{1}{\rho_{i0}}\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\mathbf{u}_j + \frac{1}{\rho_{i0}}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) + \mathbf{f}_i,\\
\frac{\partial\rho_i}{\partial t} &= -\frac{c_i^{1/2}}{\rho_{i0}^{1/2}}\operatorname{div}(\rho_{i0}\mathbf{u}_i), \quad (t,x)\in[0,+\infty)\times\Omega, \quad i = 1,\ldots,n,
\end{aligned} \tag{1.7}$$

где $L_{ij} := -\mu_{ij}\Delta - (\mu_{ij} + \lambda_{ij})\nabla\operatorname{div}$ — дифференциальные операторы теории упругости.

2. Постановка задачи и основная теорема

Рассмотрим задачу о нормальных колебаниях смеси. Разыскивая решения линеаризованной однородной задачи (1.7) в виде $\mathbf{u}_i(t,x) = \exp(-\lambda t)\mathbf{u}_i(x)$, $\rho_i(t,x) = \exp(-\lambda t)\rho_i(x)$, $i = 1,\ldots,n$, где λ — спектральный параметр, $\mathbf{u}_i(x)$, $\rho_i(x)$ — амплитудные элементы, придём к следующей системе уравнений:

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\rho_{i0}}\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\mathbf{u}_j + \nabla\left(\frac{c_i^{1/2}\rho_i}{\rho_{i0}^{1/2}}\right) - \frac{1}{\rho_{i0}}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) &= \lambda\mathbf{u}_i,\\
\frac{c_i^{1/2}}{\rho_{i0}^{1/2}}\operatorname{div}(\rho_{i0}\mathbf{u}_i) = \lambda\rho_i, \quad x\in\Omega, \quad i = 1,\ldots,n.&
\end{aligned} \tag{2.1}$$

Далее система (2.1) с граничными условиями (1.5) либо (1.6) будет трактоваться в виде следующей спектральной задачи для замкнутого оператора $\mathcal{A}_j$ (индекс $j = 0$ соответствует граничным условиям (1.5), индекс $j = 1$ — условиям (1.6)) с областью определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_j)$, плотной в некотором гильбертовом пространстве $\mathcal{H}$:

$$\mathcal{A}_j\xi = \lambda\xi, \quad \xi\in\mathcal{D}(\mathcal{A}_j)\subset\mathcal{H}. \tag{2.2}$$

При исследовании спектральной задачи (2.1), (1.6) будем предполагать, что *граница $\partial\Omega$ области Ω не является поверхностью вращения.* Это условие призвано несколько упростить вычисления.

Определение 2.1. *Существенным спектром* замкнутого оператора $\mathcal{A}$ называется множество

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}) := \bigl\{\lambda\in\mathbb{C} : \text{оператор } \mathcal{A} - \lambda\mathcal{I} \text{ не является фредгольмовым}\bigr\}.$$

Определим матрицы $\mathbf{\Phi} := \operatorname{diag}(c_1\rho_{10}(x_3),\ldots,c_n\rho_{n0}(x_3))$ и $\mathbf{R} := \operatorname{diag}(\rho_{10}(x_3),\ldots,\rho_{n0}(x_3))$. Основным утверждением работы является следующая теорема.

Теорема 2.1. *Спектр $\sigma(\mathcal{A}_j)$ оператора $\mathcal{A}_j$ расположен на действительной положительной полуоси за исключением, быть может, конечного числа комплексно сопряжённых собственных значений конечной алгебраической кратности, а $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_0) = \Lambda_E\cup\Lambda_L$, $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_1) = \Lambda_E$, где*

$$\Lambda_E := \bigl\{\lambda\in\mathbb{C} :\ \det\bigl(\lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) - \mathbf{\Phi}\bigr) = 0,\ \ x\in\overline{\Omega}\bigr\},$$
$$\Lambda_L := \bigl\{\lambda\in\mathbb{C} :\ \det\bigl(\lambda(3\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) - \mathbf{\Phi}\bigr) = 0,\ \ x\in\partial\Omega\bigr\}.$$

Множество $\sigma(\mathcal{A}_j)\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A}_j)$ состоит из изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности и содержит подпоследовательность с асимптотическим поведением

$$\lambda_k^{(\infty)}(\mathcal{A}_j)=\mathcal{C}^{-2/3}k^{2/3}(1+o(1)),\quad k\longrightarrow\infty,\quad j=0,1,$$
$$\mathcal{C}:=\frac{1}{6\pi^2}\int\limits_{\Omega}\Big(\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2}+2\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2}\Big)\,d\Omega.$$

Замечание 2.1. Из условий (1.3) следует, что $2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}>0$. Отсюда и из неравенства $\mathbf{\Phi}>0$ теперь видно, что множество Λ_E представляет собой объединение n отрезков, расположенных на положительной полуоси. Таким же образом устроено и множество Λ_L.

Замечание 2.2. Утверждения теоремы 2.1 относительно оператора $\mathcal{A}_0$ справедливы и при ослабленных условиях на матрицы вязкостей: $\mathbf{M}>0$, $2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}>0$.

В случае $n=1$ с некоторыми изменениями система уравнений (2.1) с граничными условиями прилипания (1.5) либо с условиями нулевых напряжений на границе исследована в [16]. При этом исследование опиралось на результаты работы [25], в которой бесконечная дифференцируемость границы $\partial\Omega$ существенна. Настоящая работа следует тому же плану. Отметим, что в [20] с использованием результатов работы [19] исследован существенный спектр линеаризованного оператора Навье—Стокса в ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^m$ ($m\geqslant 2$) с C^2-гладкой границей. При этом техника псевдо-дифференциальных операторов не применялась.

3. Доказательство теоремы

3.1. Операторная формулировка спектральной задачи. Введём векторное гильбертово пространство с весом $\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{j0})$ $(j=1,\dots,n)$ со скалярным произведением и нормой:

$$(\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{j0})}:=\int\limits_{\Omega}\rho_{j0}(x_3)\mathbf{u}(x)\cdot\overline{\mathbf{v}(x)}\,d\Omega,\qquad \|\mathbf{u}\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{j0})}=\int\limits_{\Omega}\rho_{j0}(x_3)|\mathbf{u}(x)|^2\,d\Omega,$$

а также подпространство гильбертова пространства $L_2(\Omega)$ единичной коразмерности:

$$L_{2,\rho_{j0}}(\Omega):=\big\{f\in L_2(\Omega):(f,\rho_{j0}^{1/2})_{L_2(\Omega)}=0\big\},\quad j=1,\dots,n.$$

Введём основное гильбертово пространство $\mathcal{H}:=\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$ с естественно определённым на нём скалярным произведением и соответствующей нормой, где

$$\mathcal{H}_1:=\bigoplus_{j=1}^{n}\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{j0})=\big\{\mathbf{u}:=(\mathbf{u}_1;\dots;\mathbf{u}_n)^\tau:\ \mathbf{u}_j\in\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{j0}),\ j=1,\dots,n\big\},$$
$$\mathcal{H}_2:=\bigoplus_{j=1}^{n}L_{2,\rho_{j0}}(\Omega)=\big\{\rho:=(\rho_1;\dots;\rho_n)^\tau:\ \rho_j\in L_{2,\rho_{j0}}(\Omega),\ j=1,\dots,n\big\}.$$

Через $\mathbf{W}_2^1(\Omega)$, $\mathbf{W}_2^2(\Omega)$ и $W_2^1(\Omega)$ будем обозначать векторные и скалярные пространства Соболева со стандартными скалярными произведениями и нормами, а $\mathbf{L}_2(\Omega)\equiv\mathbf{L}_2(\Omega,1)$.

Введём оператор $L_0:\mathcal{D}(L_0)\subset\mathcal{H}_1\longrightarrow\mathcal{H}_1$, отвечающий граничным условиям прилипания (1.5), по следующему закону:

$$L_0\mathbf{u}:=\Big(\frac{1}{\rho_{10}}\sum_{j=1}^{n}L_{1j}\mathbf{u}_j;\dots;\frac{1}{\rho_{n0}}\sum_{j=1}^{n}L_{nj}\mathbf{u}_j\Big)^\tau,\quad \mathcal{D}(L_0):=\bigoplus_{j=1}^{n}\Big\{\mathbf{u}_j\in\mathbf{W}_2^2(\Omega):\ \mathbf{u}_j=\mathbf{0}\ \ (x\in\partial\Omega)\Big\}. \tag{3.1}$$

Лемма 3.1. *Пусть выполнены условия* (1.3). *Тогда оператор L_0 самосопряжён и положительно определён в $\mathcal{H}_1$, $L_0^{-1}\in\mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1)$. Энергетическое пространство $\mathcal{H}_{L_0}$ оператора L_0 выражается по следующей формуле*:

$$\mathcal{H}_{L_0}=\mathcal{D}(L_0^{1/2})=\bigoplus_{j=1}^{n}\Big\{\mathbf{u}_j\in\mathbf{W}_2^1(\Omega):\ \ \mathbf{u}_j=\mathbf{0}\ \ (x\in\partial\Omega)\Big\}.$$

Доказательство. Рассмотрим на $\mathcal{H}_{L_0} \subset \mathcal{H}_1$ полуторалинейную форму (см. (1.2))

$$L(\mathbf{u},\mathbf{v}) := \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} \Big(\lambda_{ij} \operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) \operatorname{tr} e(\overline{\mathbf{v}_i}) + 2\mu_{ij} e(\mathbf{u}_j) : e(\overline{\mathbf{v}_i})\Big)\, d\Omega \equiv \sum_{i=1}^{n} \int_{\Omega} \sum_{j=1}^{n} \sigma^{ij}(\mathbf{u}_j) : e(\overline{\mathbf{v}_i})\, d\Omega. \tag{3.2}$$

Покажем, что при выполнении условий (1.3) (плотно определённая) квадратичная форма $L(\cdot,\cdot)$ положительно определена в $\mathcal{H}_1$ и замкнута. Для этого проведём вспомогательные вычисления.

Введём обозначения

$$K_{ij} := \begin{pmatrix} \lambda_{ij}+2\mu_{ij} & \lambda_{ij} & \lambda_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{ij} & \lambda_{ij}+2\mu_{ij} & \lambda_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{ij} & \lambda_{ij} & \lambda_{ij}+2\mu_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_{ij} \end{pmatrix}, \quad \xi_j := \begin{pmatrix} e_{11}(\mathbf{u}_j) \\ e_{22}(\mathbf{u}_j) \\ e_{33}(\mathbf{u}_j) \\ \sqrt{2} e_{12}(\mathbf{u}_j) \\ \sqrt{2} e_{13}(\mathbf{u}_j) \\ \sqrt{2} e_{23}(\mathbf{u}_j) \end{pmatrix},$$

$$K := \big\{K_{ij} \equiv K(\lambda_{ij},\mu_{ij})\big\}_{i,j=1}^{n}, \quad \xi := \big(\xi_1;\xi_2,\dots;\xi_n\big)^{\tau}, \tag{3.3}$$

и вычислим квадратичную форму симметричной $(6n \times 6n)$-матрицы K:

$$\begin{aligned}
\big(K\xi,\xi\big) &= \sum_{i,j=1}^{n} \big(K_{ij}\xi_j,\xi_i\big) = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\begin{pmatrix} \lambda_{ij}+2\mu_{ij} & \lambda_{ij} & \lambda_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{ij} & \lambda_{ij}+2\mu_{ij} & \lambda_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ \lambda_{ij} & \lambda_{ij} & \lambda_{ij}+2\mu_{ij} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2\mu_{ij} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_{ij} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 2\mu_{ij} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_{11}(\mathbf{u}_j) \\ e_{22}(\mathbf{u}_j) \\ e_{33}(\mathbf{u}_j) \\ \sqrt{2} e_{12}(\mathbf{u}_j) \\ \sqrt{2} e_{13}(\mathbf{u}_j) \\ \sqrt{2} e_{23}(\mathbf{u}_j) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_{11}(\mathbf{u}_i) \\ e_{22}(\mathbf{u}_i) \\ e_{33}(\mathbf{u}_i) \\ \sqrt{2} e_{12}(\mathbf{u}_i) \\ \sqrt{2} e_{13}(\mathbf{u}_i) \\ \sqrt{2} e_{23}(\mathbf{u}_i) \end{pmatrix} \right) = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \left(\begin{pmatrix} \lambda_{ij} \operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) + 2\mu_{ij} e_{11}(\mathbf{u}_j) \\ \lambda_{ij} \operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) + 2\mu_{ij} e_{22}(\mathbf{u}_j) \\ \lambda_{ij} \operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) + 2\mu_{ij} e_{33}(\mathbf{u}_j) \\ 2\sqrt{2}\mu_{ij} e_{12}(\mathbf{u}_j) \\ 2\sqrt{2}\mu_{ij} e_{13}(\mathbf{u}_j) \\ 2\sqrt{2}\mu_{ij} e_{23}(\mathbf{u}_j) \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e_{11}(\mathbf{u}_i) \\ e_{22}(\mathbf{u}_i) \\ e_{33}(\mathbf{u}_i) \\ \sqrt{2} e_{12}(\mathbf{u}_i) \\ \sqrt{2} e_{13}(\mathbf{u}_i) \\ \sqrt{2} e_{23}(\mathbf{u}_i) \end{pmatrix} \right) = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\lambda_{ij} \operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) \operatorname{tr} e(\overline{\mathbf{u}_i}) + 2\mu_{ij} \sum_{k=1}^{3} e_{kk}(\mathbf{u}_j) e_{kk}(\overline{\mathbf{u}_i}) + \\
&\quad + 4\mu_{ij}\big(e_{12}(\mathbf{u}_j)e_{12}(\overline{\mathbf{u}_i}) + e_{13}(\mathbf{u}_j)e_{13}(\overline{\mathbf{u}_i}) + e_{23}(\mathbf{u}_j)e_{23}(\overline{\mathbf{u}_i})\big)\Big) = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\lambda_{ij} \operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) \operatorname{tr} e(\overline{\mathbf{u}_i}) + 2\mu_{ij} e(\mathbf{u}_j) : e(\overline{\mathbf{u}_i})\Big) = \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\lambda_{ij} \operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) I_3 + 2\mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\Big) : e(\overline{\mathbf{u}_i}) = \\
&= \sum_{i=1}^{n} \Big(\sum_{j=1}^{n} \sigma^{ij}(\mathbf{u}_j) : e(\overline{\mathbf{u}_i}) \Big).
\end{aligned} \tag{3.4}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned}
\big(K\xi,\xi\big) &= \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\Big(\lambda_{ij} + \frac{2}{3}\mu_{ij}\Big) \operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) I_3 + 2\mu_{ij} \Big(e(\mathbf{u}_j) - \frac{1}{3} \operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) I_3\Big)\Big) : e(\overline{\mathbf{u}_i}) = \\
&= \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\Big(\lambda_{ij} + \frac{2}{3}\mu_{ij}\Big) \operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) \operatorname{tr} e(\overline{\mathbf{u}_i}) + 2\mu_{ij} \Big(e(\mathbf{u}_j) - \frac{1}{3} \operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) I_3\Big) : \Big(e(\overline{\mathbf{u}_i}) - \frac{1}{3} \operatorname{tr} e(\overline{\mathbf{u}_i}) I_3\Big)\Big) =
\end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \Big(\lambda_{ij} + \frac{2}{3}\,\mu_{ij}\Big)\operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j)\operatorname{tr} e(\overline{\mathbf{u}_i}) +$$

$$+ 2\sum_{l,k=1}^{3}\bigg(\sum_{i,j=1}^{n}\mu_{ij}\Big(e_{lk}(\mathbf{u}_j) - \frac{\delta_{lk}}{3}\operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j)\Big)\Big(e_{lk}(\overline{\mathbf{u}_i}) - \frac{\delta_{lk}}{3}\operatorname{tr} e(\overline{\mathbf{u}_i})\Big)\bigg).$$

Пусть матрицы вязкостей удовлетворяют условиям (1.3). Тогда матрица K, очевидно, неотрицательна. Допустим, что $\big(K\xi,\xi\big) = 0$. Обозначим через $\gamma(\mathbf{M}) > 0$, $\gamma(\mathbf{\Lambda} + 2/3\mathbf{M}) > 0$ нижние грани соответствующих матриц и найдём из последнего соотношения, что

$$0 = \big(K\xi,\xi\big) \geqslant \gamma\Big(\mathbf{\Lambda} + \frac{2}{3}\,\mathbf{M}\Big)\sum_{j=1}^{n}\big|\operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j)\big|^2 + 2\sum_{l,k=1}^{3}\gamma(\mathbf{M})\sum_{j=1}^{n}\Big|e_{lk}(\mathbf{u}_j) - \frac{\delta_{lk}}{3}\operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j)\Big|^2 \geqslant 0.$$

Отсюда имеем $\operatorname{tr} e(\mathbf{u}_j) = 0$ для каждого $j = \overline{1,n}$. Следовательно, $e_{lk}(\mathbf{u}_j) = 0$ $(l,k = 1,2,3,\ j = \overline{1,n})$, а значит, $\xi = 0$. Таким образом, существует константа $\gamma(K) > 0$ такая, что $\big(K\xi,\xi\big) \geqslant \gamma(K)\big(\xi,\xi\big)$ для любого $\xi \in \mathbb{C}^{6n}$. Последнее соотношение с учётом (3.3), (3.4) перепишем следующим образом:

$$\sum_{i=1}^{n}\bigg(\sum_{j=1}^{n}\sigma^{ij}(\mathbf{u}_j) : e(\overline{\mathbf{u}_i})\bigg) \geqslant \gamma(K)\sum_{i=1}^{n} e(\mathbf{u}_i) : e(\overline{\mathbf{u}_i}). \tag{3.5}$$

Используя первое неравенство Корна (см. [15, гл. I, § 2, п. 2.1, теорема 2.1]) и неравенство Фридрихса (см. [17, гл. 18, теорема 18.1]), из (3.2)–(3.5) найдём, что для всех $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{L_0}$

$$C\|\mathbf{u}\|^2_{\bigoplus_{j=1}^{n}\mathbf{W}_2^1(\Omega)} \geqslant L(\mathbf{u},\mathbf{u}) \geqslant \frac{\gamma(K)}{2}\sum_{j=1}^{n}\sum_{l=1}^{3}\int_{\Omega}|\nabla u_{jl}|^2\,d\Omega \geqslant \frac{\gamma(K)}{4}\min\big\{1, C_F^{-1}\big\}\|\mathbf{u}\|^2_{\bigoplus_{j=1}^{n}\mathbf{W}_2^1(\Omega)}.$$

Здесь C_F — константа из неравенства Фридрихса, C — некоторая положительная константа. Из полученных неравенств следует, что (плотно определённая) квадратичная форма $L_0(\cdot,\cdot)$ положительно определена в $\mathcal{H}_1$ и замкнута (см. [7, гл. VI, § 1, п. 3]). По первой теореме о представлении (см. [7, гл. VI, § 2, теорема 2.1]) существует единственный самосопряжённый положительно определённый оператор L_0 такой, что

$$L(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (L_0\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathcal{H}_1} \quad \forall\,\mathbf{u} \in \mathcal{D}(L_0),\ \ \mathbf{v} \in \mathcal{H}_{L_0},$$
$$\mathcal{D}(L_0) = \big\{\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{L_0} :\ \exists\,\mathbf{w} \in \mathcal{H}_1 : L(\mathbf{u},\mathbf{v}) = (\mathbf{w},\mathbf{v})_{\mathcal{H}_1}\ \forall\,\mathbf{v} \in \mathcal{H}_{L_0}\big\}.$$

Предположим, что элемент $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{L_0}$ дважды непрерывно дифференцируем в области Ω, тогда с использованием тождества Бэтти (см. [17, гл. 24, формула (24.22)]) найдём (см. (1.2)), что для любого $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_{L_0}$

$$(L_0\mathbf{u},\mathbf{v})_{\mathcal{H}_1} = L(\mathbf{u},\mathbf{v}) = \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} L_{ij}\mathbf{u}_j\cdot\overline{\mathbf{v}_i}\,d\Omega + \sum_{i=1}^{n}\int_{\partial\Omega}\sum_{j=1}^{n}\sigma^{ij}(\mathbf{u}_j)\mathbf{n}\cdot\overline{\mathbf{v}_i}\,dS =$$
$$= \sum_{i,j=1}^{n}\int_{\Omega} L_{ij}\mathbf{u}_j\cdot\overline{\mathbf{v}_i}\,d\Omega = \sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{1}{\rho_{i0}}\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\mathbf{u}_j,\mathbf{v}_i\Big)_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{i0})}.$$

Отсюда следует формула для $L_0\mathbf{u}$ (см. (3.1)), поскольку $\mathcal{H}_{L_0}$ плотно в $\mathcal{H}_1$. Таким образом, дважды дифференцируемое решение $\mathbf{u}$ уравнения $L_0\mathbf{u} = \mathbf{w}$ является решением краевой задачи

$$\frac{1}{\rho_{i0}}\sum_{j=1}^{n}L_{ij}\mathbf{u}_j = \mathbf{w}_i\ \ (x \in \Omega), \quad \mathbf{u}_i = \mathbf{0}\ \ (x \in \partial\Omega), \quad i = 1,\ldots,n.$$

Элемент $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(L_0)$ — это в точности обобщённое решение (см. [17, гл. 11, определение 11.1]) указанной краевой задачи при $\mathbf{w}_i \in \mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{i0})$, $i = 1,\ldots,n$. Из теоремы об априорных оценках (см., например, [18, теорема 2.2]) следует формула для $\mathcal{D}(L_0)$ (см. (3.1)).

Компактность оператора L_0^{-1} следует из компактности вложения $\mathcal{H}_{L_0}$ в $\mathcal{H}_1$. $\square$

Определим теперь оператор L_1, отвечающий граничным условиям непротекания с нулевыми касательными напряжениями (1.6). Заметим, что из (1.6) и (1.2), в силу очевидного равенства $I_3\mathbf{n} \times \mathbf{n} = \mathbf{n} \times \mathbf{n} = \mathbf{0}$, следует, что

$$\mathbf{0} = (\mathbf{T}_i\mathbf{n}) \times \mathbf{n} = \Big(- P_i I_3 + \sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \mathrm{tr}\, e(\mathbf{u}_j) I_3 + 2\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\Big)\mathbf{n} \times \mathbf{n} = 2\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \times \mathbf{n}$$

для любого $x \in \partial\Omega$, $i = 1, \ldots, n$. Обозначим через τ_s, $s = 1, 2$ единичные векторы, касательные к поверхности $\partial\Omega$ и ортогональные между собой. Тогда с учётом сказанного выше граничные условия (1.6) для задачи (2.1) можно переписать в следующей эквивалентной форме:

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n} = 0, \quad 2\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \tau_s = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad s = 1, 2, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.6}$$

Введём теперь, учитывая (1.6) и (3.6), оператор $L_1 : \mathcal{D}(L_1) \subset \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ по следующему закону:

$$L_1\mathbf{u} := \left(\frac{1}{\rho_{10}} \sum_{j=1}^{n} L_{1j}\mathbf{u}_j; \ldots ; \frac{1}{\rho_{n0}} \sum_{j=1}^{n} L_{nj}\mathbf{u}_j \right)^{\tau}, \tag{3.7}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{D}(L_1) := \Big\{ &\mathbf{u} \in \mathcal{H}_1 : \ \mathbf{u}_i \in \mathbf{W}_2^2(\Omega), \quad \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n} = 0 \ \ (x \in \partial\Omega), \\ &2\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \tau_s = 0 \ \ (x \in \partial\Omega), \quad s = 1, 2, \quad i = 1, \ldots, n \Big\}.\end{aligned}$$

Лемма 3.2. *Пусть выполнены условия* (1.3) *и граница* $\partial\Omega$ *не является поверхностью вращения. Тогда оператор* L_1 *самосопряжён и положительно определён в* $\mathcal{H}_1$, $L_1^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1)$. *Энергетическое пространство* $\mathcal{H}_{L_1}$ *оператора* L_1 *выражается по следующей формуле*:

$$\mathcal{H}_{L_1} = \mathcal{D}(L_1^{1/2}) = \bigoplus_{j=1}^{n} \Big\{ \mathbf{u}_j \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) : \ \ \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n} = 0 \ \ (x \in \partial\Omega) \Big\}.$$

Доказательство. Рассмотрим на $\mathcal{H}_{L_1} \subset \mathcal{H}_1$ полуторалинейную форму (3.2). Как и в лемме 3.1 условия (1.3) на матрицы вязкостей влекут соотношение (3.5). Поскольку граница $\partial\Omega$ не является поверхностью вращения, пространства $\big\{\mathbf{u}_j \in \mathbf{W}_2^1(\Omega) : \ \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n} = 0 \ \ (x \in \partial\Omega)\big\}$ не содержат жёсткие перемещения. Следовательно, для элементов этих пространств справедливо второе неравенство Корна (см. [15, гл. I, § 2, п. 2.2, теорема 2.5]). Из (3.2)–(3.5) и второго неравенства Корна найдём, что для всех $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{L_1}$

$$C\|\mathbf{u}\|^2_{\bigoplus_{j=1}^n \mathbf{W}_2^1(\Omega)} \geqslant L(\mathbf{u}, \mathbf{u}) \geqslant \gamma(K) C_K^{-2} \|\mathbf{u}\|^2_{\bigoplus_{j=1}^n \mathbf{W}_2^1(\Omega)}.$$

Здесь C_K — константа из второго неравенства Корна, C — некоторая положительная константа. Из полученных неравенств следует, что (плотно определённая) квадратичная форма $L_0(\cdot, \cdot)$ положительно определена в $\mathcal{H}_1$ и замкнута (см. [7, гл. VI, § 1, п. 3]). По первой теореме о представлении (см. [7, гл. VI, § 2, теорема 2.1]) существует единственный самосопряжённый положительно определённый оператор L_1 такой, что

$$L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (L_1\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathcal{H}_1} \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{D}(L_1), \ \ \mathbf{v} \in \mathcal{H}_{L_1},$$

$$\mathcal{D}(L_1) = \big\{ \mathbf{u} \in \mathcal{H}_{L_1} : \ \exists\, \mathbf{w} \in \mathcal{H}_1 : L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = (\mathbf{w}, \mathbf{v})_{\mathcal{H}_1} \ \forall\, \mathbf{v} \in \mathcal{H}_{L_1} \big\}.$$

Предположим, что элемент $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_{L_1}$ дважды непрерывно дифференцируем в области Ω, тогда с использованием тождества Бэтти (см. [17, гл. 24, формула (24.22)]) найдём (см. (1.2)), что для любого $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_{L_1}$

$$\begin{aligned}(L_1\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathcal{H}_1} = L(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} L_{ij}\mathbf{u}_j \cdot \overline{\mathbf{v}_i}\, d\Omega + \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega} \sum_{j=1}^{n} \sigma^{ij}(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{v}_i}\, dS = \\ &= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} L_{ij}\mathbf{u}_j \cdot \overline{\mathbf{v}_i}\, d\Omega + \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega} \Big(\sum_{j=1}^{n} \lambda_{ij} \mathrm{tr}\, e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{v}_i} + 2\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \overline{\mathbf{v}_i} \Big) dS =\end{aligned}$$

$$= \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} L_{ij}\mathbf{u}_j \cdot \overline{\mathbf{v}_i}\, d\Omega + \sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega} 2\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \big(\tau_1(\tau_1 \cdot \overline{\mathbf{v}_i}) + \tau_2(\tau_2 \cdot \overline{\mathbf{v}_i})\big) dS. \tag{3.8}$$

Для элементов $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_{L_1}$, состоящих из финитных полей, отсюда найдём, что

$$(L_1\mathbf{u}, \mathbf{v})_{\mathcal{H}_1} = \sum_{i,j=1}^{n} \int_{\Omega} L_{ij}\mathbf{u}_j \cdot \overline{\mathbf{v}_i}\, d\Omega = \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{1}{\rho_{i0}} \sum_{j=1}^{n} L_{ij}\mathbf{u}_j, \mathbf{v}_i \Big)_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_{i0})}.$$

Отсюда следует формула для $L_1\mathbf{u}$ (см. (3.7)), поскольку множество элементов из $\mathcal{H}_{L_1}$, состоящих из финитных полей, плотно в $\mathcal{H}_1$. Подставляя выражение для $L_1\mathbf{u}$ в (3.8), приходим к равенству

$$\sum_{i=1}^{n} \int_{\partial\Omega} 2\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \big(\tau_1(\tau_1 \cdot \overline{\mathbf{v}_i}) + \tau_2(\tau_2 \cdot \overline{\mathbf{v}_i})\big) dS = 0.$$

Для элементов $\mathbf{v} \in \mathcal{H}_{L_1}$ вида $\mathbf{v} = (\mathbf{0}; \ldots; \mathbf{v}_i; \ldots; \mathbf{0})^{\tau}$ отсюда найдём, что

$$2\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \tau_s = 0 \ \ (x \in \partial\Omega), \quad s = 1, 2, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Таким образом, дважды дифференцируемое решение $\mathbf{u}$ уравнения $L_1\mathbf{u} = \mathbf{w}$ является решением краевой задачи

$$\frac{1}{\rho_{i0}} \sum_{j=1}^{n} L_{ij}\mathbf{u}_j = \mathbf{w}_i \ \ (x \in \Omega), \quad \mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n} = 0, \ \ 2\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \tau_s = 0 \ \ (x \in \partial\Omega), \ \ s = 1, 2, \quad i = 1, \ldots, n.$$

Элемент $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(L_1)$ — это в точности обобщённое решение (см. [17, гл. 11, определение 11.1]) указанной краевой задачи при $\mathbf{w}_i \in \mathbf{L}_2(\Omega, \rho_{i0})$, $i = 1, \ldots, n$. Из теоремы об априорных оценках (см. [18, теорема 2.2]) следует формула для $\mathcal{D}(L_1)$ (см. (3.7)).

Компактность оператора L_1^{-1} следует из компактности вложения $\mathcal{H}_{L_1}$ в $\mathcal{H}_1$. □

Введём оператор $T : \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ по следующему закону:

$$T\mathbf{u} := \bigg(-\frac{1}{\rho_{10}} \sum_{j=1}^{n} a_{1j}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_1); \ldots; -\frac{1}{\rho_{n0}} \sum_{j=1}^{n} a_{nj}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_n) \bigg)^{\tau}, \quad \mathcal{D}(T) := \mathcal{H}_1. \tag{3.9}$$

Лемма 3.3. *Оператор T ограничен, самосопряжён и неотрицателен в $\mathcal{H}_1$.*

Доказательство. Напомним, что $a_{ij} = a_{ji} \geqslant 0$, $i, j = 1, \ldots, n$. Отсюда имеем

$$\begin{aligned}
\|T\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1} &= \sum_{i=1}^{n} \Big\| -\frac{1}{\rho_{i0}} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \Big\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega, \rho_{i0})} = \sum_{i=1}^{n} \Big\| \sum_{j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i) \Big\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leqslant \\
&\leqslant \sum_{i=1}^{n} \bigg(\sum_{j=1}^{n} a_{ij} \Big(\|\mathbf{u}_j\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} + \|\mathbf{u}_i\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \Big) \bigg)^2 \leqslant n \sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}^2 \Big(\|\mathbf{u}_j\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} + \|\mathbf{u}_i\|_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \Big)^2 \leqslant \\
&\leqslant 4n^2 \max_{i,j}\{a_{ij}^2\} \sum_{j=1}^{n} \|\mathbf{u}_j\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \leqslant \frac{4n^2 \max\limits_{i,j}\{a_{ij}^2\}}{\min\limits_{j} \min\limits_{x \in \Omega} \rho_{j0}(x_3)} \|\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1} \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{H}_1,
\end{aligned}$$

т. е. оператор T ограничен в $\mathcal{H}_1$: $T \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$. Далее для любого $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_1$ имеем

$$\begin{aligned}
(T\mathbf{u}, \mathbf{u})_{\mathcal{H}_1} &= -\sum_{i,j=1}^{n} a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = -\sum_{i>j} a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)_{\mathbf{L}_2(\Omega)} - \sum_{i<j} a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \\
&= -\sum_{i>j} a_{ij}(\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i, \mathbf{u}_i)_{\mathbf{L}_2(\Omega)} - \sum_{j<i} a_{ji}(\mathbf{u}_i - \mathbf{u}_j, \mathbf{u}_j)_{\mathbf{L}_2(\Omega)} = \sum_{i>j} a_{ij}\|\mathbf{u}_j - \mathbf{u}_i\|^2_{\mathbf{L}_2(\Omega)} \geqslant 0,
\end{aligned}$$

т. е. оператор T самосопряжён и неотрицателен в $\mathcal{H}_1$. □

Введём оператор $B : \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{H}_1 \longrightarrow \mathcal{H}_2$ по следующему закону:

$$B\mathbf{u} := \biggl(-\frac{c_1^{1/2}}{\rho_{10}^{1/2}} \operatorname{div}(\rho_{10}\mathbf{u}_1); \ldots ; -\frac{c_n^{1/2}}{\rho_{n0}^{1/2}} \operatorname{div}(\rho_{n0}\mathbf{u}_n) \biggr)^{\tau}, \tag{3.10}$$

$$\mathcal{D}(B) := \bigoplus_{j=1}^{n} \Bigl\{ \mathbf{u}_j \in \mathbf{L}_2(\Omega) : \ \operatorname{div}(\rho_{j0}\mathbf{u}_j) \in \mathbf{L}_2(\Omega), \ \mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n} = 0 \ (x \in \partial\Omega) \Bigr\}.$$

Лемма 3.4. *Сопряжённый оператор $B^* : \mathcal{D}(B^*) \subset \mathcal{H}_2 \longrightarrow \mathcal{H}_1$ имеет вид*

$$B^*\rho = \biggl(\nabla\biggl(\frac{c_1^{1/2}\rho_1}{\rho_{10}^{1/2}} \biggr); \ldots ; \nabla\biggl(\frac{c_n^{1/2}\rho_n}{\rho_{n0}^{1/2}} \biggr) \biggr)^{\tau}, \quad \mathcal{D}(B^*) := \bigoplus_{j=1}^{n} \Bigl\{ W_2^1(\Omega) \cap L_{2,\rho_{j0}}(\Omega) \Bigr\}.$$

Доказательство. По определению сопряжённого оператора имеем

$$\mathcal{D}(B^*) = \bigl\{ \rho \in \mathcal{H}_2 : \ \exists\, \eta \in \mathcal{H}_2 : (B\mathbf{u}, \rho)_{\mathcal{H}_2} = (\mathbf{u}, \eta)_{\mathcal{H}_1} \ \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{D}(B) \bigr\},$$

а значит, $\rho \in \bigoplus_{j=1}^{n} \bigl\{ W_2^1(\Omega) \cap L_{2,\rho_{j0}}(\Omega) \bigr\} = \mathcal{D}(B^*)$. Отсюда теперь следует, что

$$\begin{aligned}
(B\mathbf{u}, \rho)_{\mathcal{H}_2} &= \sum_{j=1}^{n} \Bigl(-\frac{c_j^{1/2}}{\rho_{j0}^{1/2}} \operatorname{div}(\rho_{j0}\mathbf{u}_j), \rho_j \Bigr)_{L_{2,\rho_{j0}}(\Omega)} = -\sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \frac{c_j^{1/2}\overline{\rho_j}}{\rho_{j0}^{1/2}} \operatorname{div}(\rho_{j0}\mathbf{u}_j)\, d\Omega = \\
&= -\sum_{j=1}^{n} \int_{\partial\Omega} c_j^{1/2}\rho_{j0}^{1/2}\overline{\rho_j}(\mathbf{u}_j \cdot \mathbf{n})\, dS + \sum_{j=1}^{n} \int_{\Omega} \rho_{j0}\mathbf{u}_j \cdot \nabla\biggl(\frac{c_j^{1/2}\overline{\rho_j}}{\rho_{j0}^{1/2}} \biggr) d\Omega = \\
&= \sum_{j=1}^{n} \biggl(\mathbf{u}_j, \nabla\biggl(\frac{c_j^{1/2}\rho_j}{\rho_{j0}^{1/2}} \biggr) \biggr)_{\mathbf{L}_2(\Omega,\rho_{j0})} = (\mathbf{u}, B^*\rho)_{\mathcal{H}_1} \quad \forall\, \mathbf{u} \in \mathcal{D}(B), \quad \rho \in \mathcal{D}(B^*).
\end{aligned}$$

Лемма доказана. □

Введём оператор $A_j := L_j + T$, $j = 0, 1$ (см. (3.1), (3.7), (3.9)). Из лемм 3.1–3.3 и определения оператора B (см. (3.10)) следует, что $\mathcal{D}(A_j) \subset \mathcal{D}(A_j^{1/2}) = \mathcal{D}(L_j^{1/2}) \subset \mathcal{D}(B)$. Оператор B замыкаем, так как оператор B^* плотно определён (см. [7, гл. V, § 3, п. 1] и лемму 3.4). Следовательно, операторы $BA_j^{-1/2}$ и BA_j^{-1} ограниченно действуют из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$:

$$Q_j := BA_j^{-1/2} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2), \quad BA_j^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2), \quad j = 0, 1. \tag{3.11}$$

Лемма 3.5. *Оператор $A_j^{-1/2}B^*$ замыкаем, $\overline{A_j^{-1/2}B^*} = Q_j^*$, $Q_j^*|_{\mathcal{D}(B^*)} = A_j^{-1/2}B^*$. Аналогичные утверждения верны и для оператора $A_j^{-1}B^*$, $j = 0, 1$.*

Доказательство. Учитывая $Q_j^* \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2, \mathcal{H}_1)$, для любых $\mathbf{u} \in \mathcal{H}_1$, $\rho \in \mathcal{D}(B^*)$ имеем

$$(Q_j\mathbf{u}, \rho)_{\mathcal{H}_2} = (\mathbf{u}, A_j^{-1/2}B^*\rho)_{\mathcal{H}_1} = (\mathbf{u}, Q_j^*\rho)_{\mathcal{H}_1}.$$

Отсюда следует, что $Q_j^*|_{\mathcal{D}(B^*)} = A_j^{-1/2}B^*$, оператор $A_j^{-1/2}B^*$ ограничен на $\mathcal{D}(B^*)$ и расширяется по непрерывности (можно считать, что замыкается) до оператора Q_j^*. □

Наша цель — записать максимальную L_2-реализацию оператора системы (2.1) в виде операторной блок-матрицы с использованием введённых в (3.1)–(3.11) операторов. Сужение максимальной L_2-реализации оператора системы (2.1) на $\mathcal{D}(A_j) \oplus \mathcal{D}(B^*)$ с использованием введённых операторов можно записать в следующем виде:

$$\mathcal{A}_{0j} := \begin{pmatrix} A_j & B^* \\ -B & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0j}) = \mathcal{D}(A_j) \oplus \mathcal{D}(B^*) \subset \mathcal{H}. \tag{3.12}$$

Покажем, что оператор $\mathcal{A}_{0j}$ замыкаем и замыкание $\overline{\mathcal{A}_{0j}}$ есть замкнутый максимальный аккретивный оператор, т. е. других замкнутых аккретивных расширений у оператора $\mathcal{A}_{0j}$ нет. Этот оператор $\overline{\mathcal{A}_{0j}}$ и будет максимальной L_2-реализацией оператора системы (2.1). Подобные построения для операторных блоков проводились в работах А. А. Шкаликова [19,28], Н. Д. Копачевского и Т. Я. Азизова [2], и др. Тем не менее, приведём полное доказательство.

Лемма 3.6. *Оператор $\mathcal{A}_{0j}$ замыкаем и $\overline{\mathcal{A}_{0j}} =: \mathcal{A}_j$ — замкнутый максимальный аккретивный оператор. Оператор $\mathcal{A}_j$ представи́м в следующем виде*:

$$\mathcal{A}_j := \begin{pmatrix} A_j^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & Q_j^* \\ -Q_j & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_j^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} I & 0 \\ -Q_j A_j^{-1/2} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_j & 0 \\ 0 & Q_j Q_j^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_j^{-1/2} Q_j^* \\ 0 & I \end{pmatrix},$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}_j) := \Big\{ \xi = (\mathbf{u}; \rho)^\tau \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 : \ \mathbf{u} + A_j^{-1/2} Q_j^* \rho \in \mathcal{D}(A_j) \Big\}, \quad j = 0, 1. \tag{3.13}$$

Доказательство.

1) Оператор $\mathcal{A}_{0j}$, очевидно, плотно определён. Далее, легко проверить, что для любого $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0j})$ выполняется $\mathrm{Re}(\mathcal{A}_{0j}\xi, \xi)_{\mathcal{H}} = \|A_j^{1/2}\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1} \geqslant 0$, т. е. оператор $\mathcal{A}_{0j}$ аккретивен, а значит, допускает замыкание (см. [9, гл. I, § 4, п. 2]).

Построим замыкание оператора $\mathcal{A}_{0j}$, используя сначала включение $\mathcal{D}(A_j) \subset \mathcal{D}(B)$. Пусть

$$\xi_n := (\mathbf{u}_n; \rho_n)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_{0j}), \quad \xi_n \longrightarrow \xi := (\mathbf{u}; \rho)^\tau, \quad \mathcal{A}_{0j}\xi_n \longrightarrow \xi_0 := (\mathbf{u}_0; \rho_0)^\tau. \tag{3.14}$$

Отсюда имеем $\mathbf{u}_n + A_j^{-1} B^* \rho_n \in \mathcal{D}(A_j)$ и $\mathbf{u}_n + A_j^{-1} B^* \rho_n = \mathbf{u}_n + (BA_j^{-1})^* \rho_n \longrightarrow \mathbf{u} + (BA_j^{-1})^* \rho$, $A_j(\mathbf{u}_n + A_j^{-1} B^* \rho_n) \longrightarrow \mathbf{u}_0$. Оператор A_j самосопряжён, а значит, замкнут, поэтому имеем включение $\mathbf{u} + (BA_j^{-1})^* \rho \in \mathcal{D}(A_j)$ и равенство $A_j(\mathbf{u} + (BA_j^{-1})^* \rho) = \mathbf{u}_0$.

Далее, из (3.14) следует, что $\mathbf{u}_n \in \mathcal{D}(A_j) \subset \mathcal{D}(B)$, $\mathbf{u}_n \longrightarrow \mathbf{u}$, $-B\mathbf{u}_n \longrightarrow \rho_0$. Но оператор B, как отмечено выше, замыкаем, а значит, $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\overline{B})$ и $-\overline{B}\mathbf{u} = \rho_0$.

Таким образом, $\xi \in \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_{0j}})$ и $\overline{\mathcal{A}_{0j}}\xi = \xi_0$, где

$$\overline{\mathcal{A}_{0j}} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_j(\mathbf{u} + (BA_j^{-1})^* \rho) \\ -\overline{B}\mathbf{u} \end{pmatrix}, \ \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_{0j}}) = \Big\{ \xi = (\mathbf{u}; \rho)^\tau \in \mathcal{H} : \mathbf{u} \in \mathcal{D}(\overline{B}), \ \mathbf{u} + (BA_j^{-1})^* \rho \in \mathcal{D}(A_j) \Big\}.$$

Используем теперь включение $\mathcal{D}(A_j^{1/2}) \subset \mathcal{D}(B)$ (см. леммы 3.1, 3.2 и формулу (3.10)). Отсюда следует равенство $(BA_j^{-1})^* = (BA_j^{-1/2} A_j^{-1/2})^* = A_j^{-1/2} (BA_j^{-1/2})^* = A_j^{-1/2} Q_j^*$ (см. (3.11)). Теперь из включения $\mathbf{u} + (BA_j^{-1})^* \rho = \mathbf{u} + A_j^{-1/2} Q_j^* \rho \in \mathcal{D}(A_j) \subset \mathcal{D}(A_j^{1/2})$ и факта, что $\mathcal{D}(A_j^{1/2})$ — линеал, следует, что $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(A_j^{1/2}) \subset \mathcal{D}(B) \subset \mathcal{D}(\overline{B})$. Таким образом, условие $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(\overline{B})$ в описании множества $\mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_{0j}})$ можно опустить, а выражение $\overline{B}\mathbf{u}$ записать в виде $\overline{B}\mathbf{u} = (\overline{B} A_j^{-1/2}) A_j^{1/2} \mathbf{u} = Q_j A_j^{1/2} \mathbf{u}$. Из проведённых рассуждений теперь получим, что

$$\overline{\mathcal{A}_{0j}} \begin{pmatrix} \mathbf{u} \\ \rho \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A_j(\mathbf{u} + A_j^{-1/2} Q_j^* \rho) \\ -Q_j A_j^{1/2} \mathbf{u} \end{pmatrix}, \ \mathcal{D}(\overline{\mathcal{A}_{0j}}) = \Big\{ \xi = (\mathbf{u}; \rho)^\tau \in \mathcal{H} = \mathcal{H}_1 \oplus \mathcal{H}_2 : \ \mathbf{u} + A_j^{-1/2} Q_j^* \rho \in \mathcal{D}(A_j) \Big\}.$$

Непосредственными вычислениями можно убедиться, что множество $\mathcal{D}(\mathcal{A}_j)$ в (3.13) является естественной областью определения для каждой факторизации, обе факторизации определяют один и тот же оператор $\mathcal{A}_j$ и $\mathcal{A}_j = \overline{\mathcal{A}_{0j}}$, $j = 0, 1$.

2) Докажем, что замкнутый аккретивный оператор $\mathcal{A}_j$ максимален. Аккретивность оператора $\mathcal{A}_j$ следует из аккретивности $\mathcal{A}_{0j}$, однако может быть проверена и непосредственно. Действительно, если $\xi = (\mathbf{u}; \rho)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_j)$, то $\mathbf{u} \in \mathcal{D}(A_j^{1/2})$. Отсюда и из факторизации (3.13) оператора $\mathcal{A}_j$ с симметричными крайними сомножителями найдём, что $\mathrm{Re}(\mathcal{A}_j\xi, \xi)_{\mathcal{H}} = \|A_j^{1/2}\mathbf{u}\|^2_{\mathcal{H}_1} \geqslant 0$ для любого $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_j)$, а значит, оператор $\mathcal{A}_j$ аккретивен. Для доказательства максимальности оператора $\mathcal{A}_j$ достаточно установить (см. [9, гл. I, § 4, п. 2, теорема 4.3]), что $\rho(\mathcal{A}_j) \cap \{\lambda < 0\} \neq \varnothing$, где $\rho(\mathcal{A}_j)$ — резольвентное множество оператора $\mathcal{A}_j$.

Действительно, при $\lambda \neq 0$ непосредственно проверяется (см. (3.17)), что

$$\mathcal{A}_j - \lambda \mathcal{I} = \begin{pmatrix} A_j^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & -\lambda^{-1} Q_j^* \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I - \lambda A_j^{-1} - \lambda^{-1} Q_j^* Q_j & 0 \\ 0 & -\lambda I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ \lambda^{-1} Q_j & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_j^{1/2} & 0 \\ 0 & I \end{pmatrix}. \tag{3.15}$$

Введём оператор-функцию $L_j(\lambda) := I - \lambda A_j^{-1} - \lambda^{-1} Q_j^* Q_j$. Очевидно, что при $\lambda < 0$ (ограниченный) оператор $L_j(\lambda)$ самосопряжён и положительно определён, а значит, существует, ограничен и задан на всём пространстве $\mathcal{H}_1$ оператор $L_j^{-1}(\lambda)$: $L_j^{-1}(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1)$. Из последней факторизации при $\lambda < 0$ тогда найдём, что существует

$$(\mathcal{A}_j - \lambda\mathcal{I})^{-1} = \begin{pmatrix} A_j^{-1/2} & 0 \\ -\lambda^{-1} Q_j & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} L_j^{-1}(\lambda) & 0 \\ 0 & -\lambda^{-1} I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_j^{-1/2} & \lambda^{-1} Q_j^* \\ 0 & I \end{pmatrix} =$$
$$= \begin{pmatrix} A_j^{-1/2} L_j^{-1}(\lambda) A_j^{-1/2} & \lambda^{-1} A_j^{-1/2} L_j^{-1}(\lambda) Q_j^* \\ -\lambda^{-1} Q_j L_j^{-1}(\lambda) A_j^{-1/2} & -\lambda^{-1} I - \lambda^{-2} Q_j L_j^{-1}(\lambda) Q_j^* \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}), \tag{3.16}$$
$$L_j(\lambda) = I - \lambda A_j^{-1} - \lambda^{-1} Q_j^* Q_j, \quad j = 0, 1,$$

а значит, $\{\lambda < 0\} \subset \rho(\mathcal{A}_j)$, $j = 0, 1$. □

Таким образом, спектральную задачу (2.1) с граничными условиями (1.5) или (1.6) можно записать в виде (2.2) с замкнутым максимальным аккретивным оператором $\mathcal{A}_j$, $j = 0, 1$.

Замечание 3.1. Формула (3.16) при всех $\lambda \notin \sigma(L_j(\lambda)) \cup \{0\}$, где $\sigma(L_j(\lambda))$ — спектр оператор-функции $L_j(\lambda)$, даёт представление для резольвенты оператора $\mathcal{A}_j$. Из (3.16), в частности, следует, что $\sigma(\mathcal{A}_j) \backslash \{0\} \subset \sigma(L_j(\lambda))$. Более того, из факторизации (3.15) и теоремы о произведении фредгольмовых операторов (см. [24, гл. XVII, § 3, теорема 3.1]) следует, что $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_j) \subset \sigma_{ess}(L_j(\lambda))$. Можно доказать, что $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_j) = \sigma_{ess}(L_j(\lambda))$, $j = 0, 1$. Однако далее этот факт не понадобится.

Замечание 3.2. Имеют место факторизации Шура—Фробениуса операторных блоков с ограниченными операторными коэффициентами. Пусть E_1, E_2 — банаховы пространства. Пусть $A_{kl} \in \mathcal{L}(E_l, E_k)$ $(k, l = 1, 2)$, $A_{22}^{-1} \in \mathcal{L}(E_2)$, $D_1 := A_{11} - A_{12} A_{22}^{-1} A_{21}$. Если $D_1^{-1} \in \mathcal{L}(E_1)$, то существует

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \left(\begin{pmatrix} I & A_{12} A_{22}^{-1} \\ 0 & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} D_1 & 0 \\ 0 & A_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{22}^{-1} A_{21} & I \end{pmatrix} \right)^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} D_1^{-1} & -D_1^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \\ -A_{22}^{-1} A_{21} D_1^{-1} & A_{22}^{-1} + A_{22}^{-1} A_{21} D_1^{-1} A_{12} A_{22}^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2). \tag{3.17}$$

Пусть $A_{11}^{-1} \in \mathcal{L}(E_1)$, $D_2 := A_{22} - A_{21} A_{11}^{-1} A_{12}$. Если $D_2^{-1} \in \mathcal{L}(E_2)$, то существует

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \left(\begin{pmatrix} I & 0 \\ A_{21} A_{11}^{-1} & I \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{11} & 0 \\ 0 & D_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I & A_{11}^{-1} A_{12} \\ 0 & I \end{pmatrix} \right)^{-1} =$$
$$= \begin{pmatrix} A_{11}^{-1} + A_{11}^{-1} A_{12} D_2^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & -A_{11}^{-1} A_{12} D_2^{-1} \\ -D_2^{-1} A_{21} A_{11}^{-1} & D_2^{-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{L}(E_1 \times E_2). \tag{3.18}$$

3.2. Определение локальных координат и эллиптической краевой задачи. Приведём необходимые определения и факты из теории эллиптических краевых задач (см. [4, 8, 18, 26]), необходимые для исследования существенного спектра оператора $\mathcal{A}_j$. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных не выше второго порядка

$$\mathcal{L}(x, D)\mathbf{v}(x) = \mathbf{f}(x), \quad x \in \Omega, \tag{3.19}$$

где $x = (x_1; x_2; x_3) \in \Omega$, $D := (D_1; D_2; D_3) := \Big(-i\dfrac{\partial}{\partial x_1}; -i\dfrac{\partial}{\partial x_2}; -i\dfrac{\partial}{\partial x_3} \Big)$, $\mathbf{v}(x) := (v_1(x); \dots; v_m(x))^\tau$, $\mathbf{f}(x) := (f_1(x); \dots; f_m(x))^\tau$. Пусть $\mathcal{L}(x, \xi)$, $\xi := (\xi_1; \xi_2; \xi_3)^\tau$ — полиномиальная матрица, получаемая из (3.19) заменой символа D на ξ. Будем считать далее, что (3.19) определяет невырожденную систему Дуглиса—Ниренберга (см. [4, с. 375], а также [18]).

Определение 3.1 (см. [4, с. 376])**.** Оператор $\mathcal{L}(x, D)$ называется *эллиптическим* в замкнутой области $\overline{\Omega}$, если $\pi \det \mathcal{L}(x, \xi) \neq 0$ для любого $x \in \overline{\Omega}$ и $\xi \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$, где символ π обозначает старшую однородную часть многочлена.

Известно, что $\pi \det \mathcal{L}(x, \xi) = \det \pi\mathcal{L}(x, \xi)$, где $\pi\mathcal{L}$ — главная часть матрицы $\mathcal{L}$. О выделении главной части системы Дуглиса—Ниренберга см. [4, с. 377].

Возьмём произвольную точку $z_0 \in \partial\Omega$ и введём, следуя [8, 26], в окрестности этой точки следующую локальную систему координат. Пусть локально граница $\partial\Omega$ задаётся бесконечно дифференцируемыми функциями $z_i = z_i(y_1, y_2)$, $i = 1, 2, 3$ параметров y_1, y_2, которые выбираются так, что $y_i = \mathrm{const}$ есть линии кривизны. В векторной записи $z = z(y')$, где $y' := (y_1; y_2)$. Обозначим через $N(y')$ внутреннюю единичную нормаль к $\partial\Omega$. В окрестности границы $\partial\Omega$ введём координаты y_1, y_2, y_3, где y_3 — расстояние от точки x до $\partial\Omega$. Тогда $x = z(y') + y_3 N(y')$. При этом нумерация y_1, y_2 задаётся так, чтобы направление векторного произведения $\partial z/\partial y_1 \times \partial z/\partial y_2$ совпадало с нормалью $N(y')$, а начало координат находится в точке z_0. Пусть $E_i(y')$ $(i = 1, 2)$ — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности $\partial\Omega$, тогда $\partial z/\partial y_i \cdot \partial z/\partial y_j = E_i(y')\delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера. Обозначим через $\tau_s := E_s^{-1/2}(y')\partial z/\partial y_s$, $s = 1, 2$, единичные векторы, касательные к границе $\partial\Omega$. Тогда $\tau_i^\tau \tau_j = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2$, $\tau_s^\tau N = N^\tau \tau_s = 0$, $s = 1, 2$.

Рассмотрим теперь систему граничных условий

$$\mathcal{B}(x, D)\mathbf{v}(x) = \mathbf{g}(x), \quad x \in \partial\Omega, \tag{3.20}$$

где $\mathcal{B}(x, D)$ — $(r \times m)$-матрица, составленная из линейных дифференциальных операторов не выше первого порядка. Перепишем операторы краевой задачи (3.19), (3.20) во введённой выше локальной системе координат и рассмотрим главные части этих операторов:

$$\pi\mathcal{L}\Big(y, -i\frac{\partial}{\partial y}\Big) = \pi\mathcal{L}\Big(y, -i\frac{\partial}{\partial y'}, -i\frac{\partial}{\partial y_3}\Big), \qquad \pi\mathcal{B}\Big(y, -i\frac{\partial}{\partial y}\Big) = \pi\mathcal{B}\Big(y, -i\frac{\partial}{\partial y'}, -i\frac{\partial}{\partial y_3}\Big).$$

Определение 3.2 (см. [4, с. 380], а также [8, с. 12])**.** Краевая задача (3.19), (3.20) называется *эллиптической*, если выполнено определение 3.1 и условие Шапиро—Лопатинского:

$$\operatorname{rank} \int\limits_{\gamma_+} \pi\mathcal{B}(0, \xi', \xi_3)\big(\pi\mathcal{L}(0, \xi', \xi_3)\big)^{-1}\big(I_m, \xi_3 I_m\big)\, d\xi_3 = r$$

для любого $\xi' \in \mathbb{R}^2 \backslash \{0\}$. Здесь I_m — единичная матрица в $\mathbb{R}^m$, а через $\big(I_m, \xi_3 I_m\big)$ обозначена составная $(m \times 2m)$-матрица; γ_+ — спрямляемый контур в верхней ξ_3-полуплоскости, обходящий в положительном направлении все ξ_3-корни уравнения $\det \pi\mathcal{L}(0, \xi', \xi_3) = 0$, лежащие в верхней полуплоскости.

Для проверки условия Шапиро—Лопатинского понадобятся также следующие леммы и обозначения из [8].

Лемма 3.7 (см. [8, с. 14])**.** *В построенной выше локальной системе координат операторы $\partial/\partial x_i$ принимают вид*

$$\frac{\partial}{\partial x_i} = \sum_{j=1}^{2} \big(1 - K_j y_3\big)^{-1} E_j^{-1}(y')\frac{\partial z_i}{\partial y_j}\,\frac{\partial}{\partial y_j} + N_i \frac{\partial}{\partial y_3},$$

где K_j $(j = 1, 2)$ — главные кривизны поверхности $\partial\Omega$.

Введём некоторые обозначения. Пусть

$$\beta := (\beta_1; \beta_2; \beta_3)^\tau, \quad \beta_l := \sum_{j=1}^{2} E_j^{-1}(y')\frac{\partial z_l}{\partial y_j}\xi_j \quad (l = 1, 2, 3), \quad \alpha := \beta + \xi_3 N, \tag{3.21}$$

тогда $\beta^\tau N = 0$, $N^\tau \beta = 0$, $N^\tau N = 1$, поскольку $\beta = E_1^{-1/2}\xi_1\tau_1 + E_2^{-1/2}\xi_2\tau_2$. Положим $|\xi'|^2 := |\beta|^2$, тогда $|\xi'|^2 = \beta^\tau\beta = E_1^{-1}\xi_1^2 + E_2^{-1}\xi_2^2$. В локальной системе координат под символом $|\xi|^2$ будем понимать следующее выражение: $|\xi|^2 := |\xi'|^2 + \xi_3^2 = \alpha^\tau\alpha$.

Лемма 3.8 (см. [8, с. 15])**.** *Во введённой выше локальной системе координат при $y_3 = 0$ имеют место следующие формулы для главных символов*:

$$\sigma_0\Big(\frac{\partial}{\partial x_l}\Big) = i\alpha_l, \quad \sigma_0(\nabla) = i\alpha, \quad \sigma_0(\operatorname{div}) = i\alpha^\tau, \quad \sigma_0(\Delta) = -|\xi|^2 = -\big(|\xi'|^2 + \xi_3^2\big).$$

Лемма 3.9 (см. [8, с. 16]). *Справедливы следующие формулы для контурных интегралов, в которых контур интегрирования лежит в верхней ξ_3-полуплоскости и в положительном направлении окружает точку $\xi_3 = i|\xi'|$:*

$$\int\limits_{\gamma_+} \frac{d\xi_3}{|\xi|^2} = \frac{\pi}{|\xi'|}, \quad \int\limits_{\gamma_+} \frac{\xi_3\, d\xi_3}{|\xi|^2} = \pi i, \quad \int\limits_{\gamma_+} \frac{\xi_3^2\, d\xi_3}{|\xi|^2} = -\pi|\xi'|, \quad \int\limits_{\gamma_+} \frac{d\xi_3}{|\xi|^4} = \frac{\pi}{2|\xi'|^3},$$

$$\int\limits_{\gamma_+} \frac{\xi_3\, d\xi_3}{|\xi|^4} = 0, \quad \int\limits_{\gamma_+} \frac{\xi_3^2\, d\xi_3}{|\xi|^4} = \frac{\pi}{2|\xi'|}, \quad \int\limits_{\gamma_+} \frac{\xi_3^3\, d\xi_3}{|\xi|^4} = \pi i, \qquad |\xi|^2 = |\xi'|^2 + \xi_3^2.$$

3.3. О существенном и дискретном спектре оператора $\mathcal{A}_j$.

Напомним (см. определение 2.1), что существенный спектр оператора $\mathcal{A}_j$ состоит из тех точек $\lambda \in \mathbb{C}$, для которых оператор $\mathcal{A}_j - \lambda\mathcal{I}$ не является фредгольмовым. Можно проверить, что система из (2.1) составляет невырожденную систему Дуглиса—Ниренберга (см. [4, с. 375], а также [18]). Из работы [25] следует, что оператор $\mathcal{A}_j - \lambda\mathcal{I}$ фредгольмов тогда и только тогда, когда соответствующая краевая задача является эллиптической.

Выделим из системы (2.1) главную часть:

$$\sum_{j=1}^{n} L_{ij}\mathbf{u}_j + c_i^{1/2}\rho_{i0}^{1/2}\nabla\rho_i = \mathbf{0}, \quad c_i^{1/2}\rho_{i0}^{1/2}\mathrm{div}\mathbf{u}_i - \lambda\rho_i = 0, \quad x \in \Omega, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.22}$$

Выделим из граничных условий (1.5) и (1.6) (с учётом (3.6)) главные части:

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n} = 0, \quad \mathbf{u}_i \cdot \tau_s = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad s = 1, 2, \quad i = 1, \ldots, n, \tag{3.23}$$

$$\mathbf{u}_i \cdot \mathbf{n} = 0, \quad 2\sum_{j=1}^{n} \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} \cdot \tau_s = 0, \quad x \in \partial\Omega, \quad s = 1, 2, \quad i = 1, \ldots, n. \tag{3.24}$$

Обозначим через $\mathcal{L}_\lambda(x, D)$ матричный дифференциальный оператор системы уравнений (2.1) — это $(4n \times 4n)$-матрица; через $\mathcal{B}_j(x, D)$ обозначим матрицу, отвечающую граничным условиям ($j = 0$ отвечает граничным условиям (1.5), а $j = 1$ — условиям (1.6) или, что то же, (3.6)) — это $(3n \times 4n)$-матрица. В этом случае главная часть $\pi\mathcal{L}_\lambda(x, D)$ оператора $\mathcal{L}_\lambda(x, D)$ определяется системой из (3.22), а $\pi\mathcal{B}_j(x, D) = \mathcal{B}_j(x, D)$, где $\mathcal{B}_j(x, D)$ определяется условиями (3.23) при $j = 0$ и (3.24) при $j = 1$.

Таким образом, существенные спектры исследуемых операторов $\mathcal{A}_0$ и $\mathcal{A}_1$ будут состоять из тех точек $\lambda \in \mathbb{C}$, в которых нарушается эллиптичность краевых задач (3.22), (3.23) и (3.22), (3.24), соответственно.

Лемма 3.10. *Дифференциальный оператор $\mathcal{L}_\lambda(x, D)$ эллиптичен в замкнутой области $\overline{\Omega} \subset \mathbb{R}^3$ при $\lambda \notin \Lambda_E$, где*

$$\Lambda_E = \big\{\lambda \in \mathbb{C} : \ \det\big(\lambda(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) - \mathbf{\Phi}\big) = 0, \ \ x \in \overline{\Omega}\big\}.$$

Доказательство. Рассмотрим главный символ $\sigma_0(\mathcal{L}_\lambda(x, D)) = \pi\mathcal{L}_\lambda(x, \xi)$, где $\xi = (\xi_1; \xi_2; \xi_3)^\tau$, системы (2.1), определяемый системой (3.22):

$$\pi\mathcal{L}_\lambda(x, \xi) = \begin{pmatrix} \mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes \xi\xi^\tau & \mathbf{\Phi}^{1/2} \otimes i\xi \\ \mathbf{\Phi}^{1/2} \otimes i\xi^\tau & -\lambda I_n \end{pmatrix}. \tag{3.25}$$

Здесь и далее знак «$\otimes$» означает тензорное (кронекеровское) произведение матриц. Основные свойства тензорного произведения можно найти в [10, гл. 8, п. 8.2]. Напомним, что матрицы вязкостей и плотностей имеют вид: $\mathbf{M} = \{\mu_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\mathbf{\Lambda} = \{\lambda_{ij}\}_{i,j=1}^n$, $\mathbf{\Phi} = \mathrm{diag}(c_1\rho_{10}(x_3), \ldots, c_n\rho_{n0}(x_3))$.

Обозначим

$$\pi\mathcal{L}_\lambda(x, \xi) = \begin{pmatrix} \mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes \xi\xi^\tau & \mathbf{\Phi}^{1/2} \otimes i\xi \\ \mathbf{\Phi}^{1/2} \otimes i\xi^\tau & -\lambda I_n \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

и применим факторизацию (3.18) при $E_1 = \mathbb{C}^{3n}$, $E_2 = \mathbb{C}^n$. С учётом $\xi^\tau\xi = |\xi|^2$ непосредственными вычислениями проверяется (см. (1.3) и замечание 2.1), что

$$A_{11}^{-1} = \Big(\mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes \xi\xi^\tau\Big)^{-1} = \frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1} \otimes |\xi|^2 I_3 - (2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1} \otimes \xi\xi^\tau\Big).$$

Отсюда следует, что

$$
\begin{aligned}
A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}&=-\lambda I_n-\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\xi^\tau\cdot\Big(\mathbf{M}\otimes|\xi|^2I_3+(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\xi\xi^\tau\Big)^{-1}\cdot\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\xi=\\
&=-\lambda I_n-\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\xi^\tau\cdot\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\otimes\xi\xi^\tau\Big)\cdot\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\xi=\\
&=\mathbf{\Phi}^{1/2}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}-\mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}-\lambda I_n=\\
&=\mathbf{\Phi}^{1/2}\big(I_n-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}-\lambda I_n=\\
&=\mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\big((2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})-(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\mathbf{M}^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}-\lambda I_n=\\
&=\mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}-\lambda I_n=\mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\mathbf{\Phi}^{-1/2}. \qquad (3.27)
\end{aligned}
$$

Обозначим через $\Gamma_\xi:=(|\xi|^{-1}\xi,\mathbf{a}^\perp,\mathbf{b}^\perp)$ матрицу, составленную из вектор-столбцов $|\xi|^{-1}\xi$, $\mathbf{a}^\perp$, $\mathbf{b}^\perp$ ($|\mathbf{a}^\perp|=|\mathbf{b}^\perp|=1$), где $\mathbf{a}^\perp$, $\mathbf{b}^\perp$ ортогональны ξ и между собой. Непосредственной проверкой доказываются следующие формулы:

$$
\Gamma_\xi^\tau\Gamma_\xi=I_3,\quad \Gamma_\xi^\tau\xi=(|\xi|;0;0)^\tau=:|\xi|\mathbf{e}_1,\quad \Gamma_\xi^\tau\xi\xi^\tau\Gamma_\xi=\operatorname{diag}(|\xi|^2,0,0)=:|\xi|^2P_1. \qquad (3.28)
$$

Обозначим $\mathrm{S}_\xi:=I_n\otimes\Gamma_\xi$, тогда $\mathrm{S}_\xi^\tau\mathrm{S}_\xi=I_n\otimes I_3=I_{3n}$. Из (3.18), (3.26)–(3.28) и теоремы Лапласа о вычислении определителей теперь найдём, что (см. определение 3.1)

$$
\begin{aligned}
\pi\det\mathcal{L}_\lambda(x,\xi)&=\det\pi\mathcal{L}_\lambda(x,\xi)=\det\begin{pmatrix}I&0\\A_{21}A_{11}^{-1}&I\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}&0\\0&A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}I&A_{11}^{-1}A_{12}\\0&I\end{pmatrix}=\\
&=\det\begin{pmatrix}\mathbf{M}\otimes|\xi|^2I_3+(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\xi\xi^\tau&0_{3n\times n}\\0_{n\times 3n}&\mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\mathbf{\Phi}^{-1/2}\end{pmatrix}=\\
&=\det\mathrm{S}_\xi^\tau\big(\mathbf{M}\otimes|\xi|^2I_3+(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\xi\xi^\tau\big)\mathrm{S}_\xi\cdot\det(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\cdot\det\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)=\\
&=\det\big(\mathbf{M}\otimes|\xi|^2\Gamma_\xi^\tau\Gamma_\xi+(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\Gamma_\xi^\tau\xi\xi^\tau\Gamma_\xi\big)\cdot\det(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\cdot\det\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)=\\
&=\det\big(\mathbf{M}\otimes|\xi|^2I_3+(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes|\xi|^2P_1\big)\cdot\det(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\cdot\det\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)=\\
&=\big(|\xi|^2\big)^{3n}\cdot\det(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\cdot\det{}^2\mathbf{M}\cdot\det(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\cdot\det\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)=\\
&=(-1)^n|\xi|^{6n}\cdot\det{}^2\mathbf{M}\cdot\det\big(\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})-\mathbf{\Phi}\big)\neq0 \qquad (3.29)
\end{aligned}
$$

для любого $x\in\overline{\Omega}$ и $\xi\in\mathbb{R}^3\setminus\{0\}$, если только $\lambda\notin\Lambda_E$. □

Лемма 3.11. *Задача* (2.1), (1.5) *эллиптична при* $\lambda\notin\Lambda_E\cup\Lambda_L$, *где*

$$
\Lambda_L=\big\{\lambda\in\mathbb{C}:\ \det\big(\lambda(3\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})-\mathbf{\Phi}\big)=0,\ \ x\in\partial\Omega\big\}.
$$

Доказательство. Прежде всего, будем считать, что $\lambda\notin\Lambda_E$, поскольку по лемме 3.10 на множестве Λ_E оператор $\mathcal{L}_\lambda(x,D)$ теряет эллиптичность и, следовательно, задача (2.1), (1.5) не является эллиптической (см. определение 3.2). Дальнейшее доказательство разобьём на несколько шагов.

1) Зафиксируем $z_0\in\partial\Omega$ и введём в окрестности этой точки локальную систему координат, как описано в предыдущем пункте. Перепишем операторную матрицу системы (2.1) в локальной системе координат и выделим из неё главную часть. Эта главная часть представляет собой операторную матрицу системы (3.22), записанную в локальной системе координат. Главный символ последней системы имеет вид (3.25) с заменой ξ на α (см. (3.21) и лемму 3.8). При этом $\det\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)$ вычисляется по формуле (3.29) с заменой $|\xi|^2$ на $\alpha^\tau\alpha=\xi'^2+\xi_3^2$. Уравнение $\det\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)=0$ имеет $3n$-кратные ξ_3-корни $\xi_3=\pm i|\xi'|$.

2) Найдём выражение для матрицы $\big(\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)\big)^{-1}$ в определении 3.2. Далее для краткости положим $\xi'^2+\xi_3^2=:|\xi|^2$. Обозначим

$$
\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)=\begin{pmatrix}\mathbf{M}\otimes|\xi|^2I_3+(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\alpha\alpha^\tau&\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\alpha\\\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\alpha^\tau&-\lambda I_n\end{pmatrix}=:\begin{pmatrix}A_{11}&A_{12}\\A_{21}&A_{22}\end{pmatrix} \qquad (3.30)
$$

и найдём матрицу, обратную к $\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)$, с помощью факторизации (3.18) при $E_1=\mathbb{C}^{3n}$, $E_2=\mathbb{C}^n$. С учётом $\alpha^\tau\alpha=(\beta^\tau+\xi_3N^\tau)(\beta+\xi_3N)=\beta^\tau\beta+\xi_3^2=\xi'^2+\xi_3^2=|\xi|^2$ (см. (3.21)) непосредственными вычислениями проверяется (см. (1.3) и замечание 2.1), что

$$A_{11}^{-1}=\Big(\mathbf{M}\otimes|\xi|^2I_3+(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)^{-1}=\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big). \quad (3.31)$$

Отсюда следует (см. аналогичные вычисления в (3.27)), что

$$\begin{aligned}D_2^{-1}=(A_{22}-A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})^{-1}&=\big(\mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\mathbf{\Phi}^{-1/2}\big)^{-1}=\\&=\mathbf{\Phi}^{1/2}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{\Phi}^{-1/2}\otimes I_1. \qquad (3.32)\end{aligned}$$

Из (3.30)–(3.32) имеем

$$\begin{aligned}&A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}=\\&=A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}\cdot\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\alpha\cdot\mathbf{\Phi}^{1/2}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{\Phi}^{-1/2}\otimes I_1\cdot\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\alpha^\tau\cdot A_{11}^{-1}=\\&=A_{11}^{-1}-A_{11}^{-1}\cdot\mathbf{\Phi}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\otimes\alpha\alpha^\tau\times\\&\qquad\times\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)=\\&=A_{11}^{-1}-A_{11}^{-1}\cdot\frac{1}{|\xi|^2}\,\mathbf{\Phi}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau=\\&=A_{11}^{-1}-\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)\times\\&\qquad\times\frac{1}{|\xi|^2}\,\mathbf{\Phi}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau=\\&=A_{11}^{-1}-\frac{1}{|\xi|^4}\,(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{\Phi}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau=\\&=\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)-\\&\qquad-\frac{1}{|\xi|^4}\,(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{\Phi}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau=\\&=\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\Big((\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}+\mathbf{\Phi}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\Big)\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)=\\&=\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\Big((\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}+\\&\qquad+\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})+\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\Big)\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)=\\&=\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\Big((\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}+I_n+\\&\qquad+\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\Big)\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)=\\&=\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-\Big(\mathbf{M}^{-1}+\lambda\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\Big)\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)=\\&=\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\mathbf{M}^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big), \qquad (3.33)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}-A_{11}A_{12}D_2^{-1}&=-\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)\cdot\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes i\alpha\times\\&\qquad\times\mathbf{\Phi}^{1/2}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{\Phi}^{-1/2}\otimes I_1=\\&=-\frac{i}{|\xi|^2}\big(\mathbf{M}^{-1}-(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{M}^{-1}\big)\mathbf{\Phi}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{\Phi}^{-1/2}\otimes\alpha=\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= -\frac{i}{|\xi|^2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\mathbf{\Phi}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\mathbf{\Phi}^{-1/2}\otimes\alpha = \\
&= -\frac{i}{|\xi|^2}\Big(\mathbf{\Phi}^{1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})^{-1}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\mathbf{\Phi}^{-1}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\Big)^{-1}\otimes\alpha = \\
&= -\frac{i}{|\xi|^2}\big(\mathbf{\Phi}^{1/2}-\lambda\mathbf{\Phi}^{-1/2}(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\otimes\alpha = -\frac{i}{|\xi|^2}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes\alpha. \qquad (3.34)
\end{aligned}
$$

Из факторизации (3.18) и формул (3.33)-(3.34) теперь сможем найти необходимые для вычислений части матрицы $\big(\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)\big)^{-1}$.

3) Перепишем оператор граничных условий (1.5) во введённой выше локальной системе координат и рассмотрим его главную часть. Эта главная часть представляет собой операторную матрицу граничных условий (3.23), записанную в локальной системе координат:

$$
\pi\mathcal{B}(0,\xi',\xi_3) = \begin{pmatrix} I_n\otimes\tau_1^\tau & 0_n \\ I_n\otimes\tau_2^\tau & 0_n \\ I_n\otimes N^\tau & 0_n \end{pmatrix}, \qquad (3.35)
$$

где 0_n — нулевая $(n\times n)$-матрица.

Заметим, что

$$
I_{3n} = \begin{pmatrix} I_n\otimes\tau_1^\tau \\ I_n\otimes\tau_2^\tau \\ I_n\otimes N^\tau \end{pmatrix}\big(I_n\otimes\tau_1, I_n\otimes\tau_2, I_n\otimes N\big) = \big(I_n\otimes\tau_1, I_n\otimes\tau_2, I_n\otimes N\big)\begin{pmatrix} I_n\otimes\tau_1^\tau \\ I_n\otimes\tau_2^\tau \\ I_n\otimes N^\tau \end{pmatrix}. \qquad (3.36)
$$

Из определения 3.2 с учётом представления (3.30), факторизации (3.18) и формул (3.33)–(3.36) теперь следует, что для доказательства эллиптичности задачи (2.1), (1.5) требуется показать, что

$$
\begin{aligned}
&\operatorname{rank}\int\limits_{\gamma_+}\pi\mathcal{B}(0,\xi',\xi_3)\big(\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)\big)^{-1}\big(I_{4n},\xi_3 I_{4n}\big)\,d\xi_3 = \\
&= \operatorname{rank}\int\limits_{\gamma_+}\big(I_n\otimes\tau_1, I_n\otimes\tau_2, I_n\otimes N\big)\begin{pmatrix} I_n\otimes\tau_1^\tau & 0_n \\ I_n\otimes\tau_2^\tau & 0_n \\ I_n\otimes N^\tau & 0_n \end{pmatrix}\big(\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)\big)^{-1}\big(I_{4n},\xi_3 I_{4n}\big)\,d\xi_3 = \\
&= \operatorname{rank}\int\limits_{\gamma_+}\big(I_{3n}, 0_{3n\times n}\big)\begin{pmatrix} A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}A_{12}D_2^{-1} \\ *_{n\times 3n} & *_{n\times n} \end{pmatrix}\big(I_{4n},\xi_3 I_{4n}\big)\,d\xi_3 = \\
&= \operatorname{rank}\int\limits_{\gamma_+}\bigg(\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2 I_3 - \big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\mathbf{M}^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big), \\
&\qquad -\frac{i}{|\xi|^2}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes\alpha\bigg)\big(I_{4n},\xi_3 I_{4n}\big)\,d\xi_3 = 3n. \qquad (3.37)
\end{aligned}
$$

Здесь γ_+ — спрямляемый контур в верхней ξ_3-полуплоскости, обходящий в положительном направлении точку $\xi_3 = i|\xi'|$, а символами $*_{n\times 3n}$, $*_{n\times n}$ обозначены несущественные для вычислений матрицы соответствующих размеров.

4) Проведём вспомогательные вычисления. Пусть $\mathbf{N}$, $\mathbf{P}$, $\mathbf{C}$ — $(n\times n)$-матрицы. Из (3.21) следует, что $\alpha\alpha^\tau = (\beta+\xi_3 N)(\beta^\tau+\xi_3 N^\tau) = \beta\beta^\tau + \xi_3(\beta N^\tau + N\beta^\tau) + \xi_3^2 NN^\tau$. Используя формулы из леммы 3.9, теперь вычислим

$$
\begin{aligned}
\mathcal{M} &:= \int\limits_{\gamma_+}\bigg(\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{N}\otimes|\xi|^2 I_3 + \mathbf{P}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big), \frac{1}{|\xi|^2}\mathbf{C}\otimes\alpha\bigg)\big(I_{4n},\xi_3 I_{4n}\big)\,d\xi_3 = \\
&= \int\limits_{\gamma_+}\bigg(\mathbf{N}\otimes\frac{1}{|\xi|^2}I_3 + \mathbf{P}\otimes\frac{1}{|\xi|^4}\alpha\alpha^\tau, \mathbf{C}\otimes\frac{1}{|\xi|^2}\alpha, \mathbf{N}\otimes\frac{\xi_3}{|\xi|^2}I_3 + \mathbf{P}\otimes\frac{\xi_3}{|\xi|^4}\alpha\alpha^\tau, \mathbf{C}\otimes\frac{\xi_3}{|\xi|^2}\alpha\bigg)d\xi_3 = \\
&= \int\limits_{\gamma_+}\bigg(\mathbf{N}\otimes\frac{1}{|\xi|^2}I_3 + \mathbf{P}\otimes\bigg[\frac{1}{|\xi|^4}\beta\beta^\tau + \frac{\xi_3}{|\xi|^4}(\beta N^\tau + N\beta^\tau) + \frac{\xi_3^2}{|\xi|^4}NN^\tau\bigg], \mathbf{C}\otimes\bigg[\frac{\xi_3}{|\xi|^2}\beta + \frac{\xi_3^2}{|\xi|^2}N\bigg],
\end{aligned}
$$

$$\mathbf{N}\otimes\frac{\xi_3}{|\xi|^2}\,I_3+\mathbf{P}\otimes\left[\frac{\xi_3}{|\xi|^4}\,\beta\beta^\tau+\frac{\xi_3^2}{|\xi|^4}\,(\beta N^\tau+N\beta^\tau)+\frac{\xi_3^3}{|\xi|^4}\,NN^\tau\right],\mathbf{C}\otimes\left[\frac{\xi_3^2}{|\xi|^2}\,\beta+\frac{\xi_3^3}{|\xi|^2}\,N\right]\Bigg)d\xi_3=$$
$$=\Bigg(\mathbf{N}\otimes\frac{\pi}{|\xi'|}\,I_3+\mathbf{P}\otimes\left[\frac{\pi}{2|\xi'|^3}\,\beta\beta^\tau+\frac{\pi}{2|\xi'|}\,NN^\tau\right],\mathbf{C}\otimes\left[\frac{\pi}{|\xi'|}\,\beta+\pi iN\right],$$
$$\mathbf{N}\otimes\pi iI_3+\mathbf{P}\otimes\left[\frac{\pi}{2|\xi'|}(\beta N^\tau+N\beta^\tau)+\pi iNN^\tau\right],\mathbf{C}\otimes\big(\pi i\beta-\pi|\xi'|N\big)\Bigg).\qquad(3.38)$$

Обозначим через $\Gamma_\alpha:=(|\xi'|^{-1}\beta,\mathbf{a}^\perp,N)$ матрицу, составленную из вектор-столбцов $|\xi'|^{-1}\beta$, $\mathbf{a}^\perp$, N, где $\mathbf{a}^\perp$ ортогонален β, N и $|\mathbf{a}^\perp|=1$. Непосредственной проверкой доказываются следующие формулы:

$$\begin{gathered}\Gamma_\alpha^\tau\Gamma_\alpha=I_3,\quad \Gamma_\alpha^\tau\beta=(|\xi'|;0;0)^\tau=:|\xi'|\mathbf{e}_1,\quad \Gamma_\alpha^\tau N=(0;0;1)^\tau=:\mathbf{e}_3,\\ \Gamma_\alpha^\tau\beta\beta^\tau\Gamma_\alpha=\operatorname{diag}(|\xi'|^2,0,0)=:|\xi'|^2P_1,\quad \Gamma_\alpha^\tau NN^\tau\Gamma_\alpha=\operatorname{diag}(0,0,1)=:P_3.\end{gathered}\qquad(3.39)$$

Обозначим $\mathrm{S}_\alpha:=I_n\otimes\Gamma_\alpha$, тогда $\mathrm{S}_\alpha^\tau\mathrm{S}_\alpha=I_n\otimes I_3=I_{3n}$. Из (3.38), (3.39) найдём, что

$$\mathcal{N}:=\mathrm{S}_\alpha^\tau\cdot\mathcal{M}\cdot\operatorname{diag}(\mathrm{S}_\alpha,I_n\otimes I_1,\mathrm{S}_\alpha,I_n\otimes I_1)=$$
$$=\Bigg(\frac{\pi}{|\xi'|}\Big[\mathbf{N}\otimes I_3+\frac12\,\mathbf{P}\otimes(P_1+P_3)\Big],\pi\mathbf{C}\otimes(\mathbf{e}_1+i\mathbf{e}_3),$$
$$\pi i\Big[\mathbf{N}\otimes I_3+\frac12\,\mathbf{P}\otimes\big(2P_3-i(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3^\tau+\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1^\tau)\big)\Big],\pi i|\xi'|\mathbf{C}\otimes(\mathbf{e}_1+i\mathbf{e}_3)\Bigg).\qquad(3.40)$$

Далее, несложно вычислить, что спектр матрицы $2P_3-i(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3^\tau+\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1^\tau)$ состоит из собственного значения $\lambda=0$ кратности один и собственного значения $\lambda=1$ кратности два. Обозначим через T матрицу, столбцами которой являются собственные элементы, а также соответствующий присоединённый элемент матрицы $2P_3-i(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3^\tau+\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1^\tau)$, отвечающий точке $\lambda=1$. Тогда

$$\mathrm{T}=\begin{pmatrix}0&1/\sqrt2&1/\sqrt2\\1&0&0\\0&i/\sqrt2&-i/\sqrt2\end{pmatrix},\quad \mathrm{T}^{-1}=\begin{pmatrix}0&1&0\\1/\sqrt2&0&-i/\sqrt2\\1/\sqrt2&0&i/\sqrt2\end{pmatrix}.$$

Непосредственно проверяются следующие соотношения (см. (3.39)):

$$\mathrm{T}^{-1}\big(2P_3-i(\mathbf{e}_1\mathbf{e}_3^\tau+\mathbf{e}_3\mathbf{e}_1^\tau)\big)\mathrm{T}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix},$$
$$\mathrm{T}^{-1}\big(P_1+P_3\big)\mathrm{T}=\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad \mathrm{T}^{-1}\big(\mathbf{e}_1+i\mathbf{e}_3\big)=\sqrt2\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}.\qquad(3.41)$$

Из (3.40), (3.41) найдём, что

$$\mathcal{S}:=I_n\otimes\mathrm{T}^{-1}\cdot\mathcal{N}\cdot\operatorname{diag}(I_n\otimes\mathrm{T},I_n\otimes I_1,I_n\otimes\mathrm{T},I_n\otimes I_1)=$$
$$=\left(\frac{\pi}{|\xi'|}\left[\mathbf{N}\otimes\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\frac12\,\mathbf{P}\otimes\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right],\pi\sqrt2\mathbf{C}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\right.$$
$$\left.\pi i\left[\mathbf{N}\otimes\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix}+\frac12\,\mathbf{P}\otimes\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&-2\\0&0&1\end{pmatrix}\right],\pi i\sqrt2|\xi'|\mathbf{C}\otimes\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right).\qquad(3.42)$$

Матрица $\mathcal{S}$ имеет размер $3n\times8n$. Из теоремы Лапласа о вычислении определителей найдём, что любой минор матрицы $\mathcal{S}$ порядка $3n$, который может быть отличен от нуля, непременно содержит в качестве множителя определитель $\det(\mathbf{N}+1/2\mathbf{P})$. Таким образом, если $\det(\mathbf{N}+1/2\mathbf{P})=0$, то $\operatorname{rank}\mathcal{S}<3n$. С другой стороны, рассматривая минор матрицы $\mathcal{S}$, составленный из $3n$ строк и первых $3n$ столбцов, найдём, что

$$\det\frac{\pi}{|\xi'|}\left(\mathbf{N}\otimes I_3+\frac12\,\mathbf{P}\otimes(I_3-P_1)\right)=\frac{\pi^{3n}}{|\xi'|^{3n}}\cdot\det\mathbf{N}\cdot\det{}^2\Big(\mathbf{N}+\frac12\,\mathbf{P}\Big)\neq0$$

для любого $\xi' \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, если только $\det \mathbf{N} \neq 0$ и $\det(\mathbf{N}+1/2\mathbf{P}) \neq 0$.

Из проведённых рассуждений и равенств $\operatorname{rank}\mathcal{M} = \operatorname{rank}\mathcal{N} = \operatorname{rank}\mathcal{S}$ (см. (3.38), (3.40), (3.42)) следует, что $\operatorname{rank}\mathcal{M} = 3n$ для любого $\xi' \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, если только $\det \mathbf{N} \neq 0$ и $\det(\mathbf{N}+1/2\mathbf{P}) \neq 0$.

5) Применим проведённые рассуждения к (3.37). Учитывая, что $\det \mathbf{N} = \det \mathbf{M}^{-1} \neq 0$,

$$\det\Big(\mathbf{N}+\frac{1}{2}\mathbf{P}\Big) = \det\Big(\mathbf{M}^{-1} - \frac{1}{2}\big(\mathbf{\Phi} - \lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\mathbf{M}^{-1}\Big) =$$
$$= \det\Big(\frac{1}{2}\big(\mathbf{\Phi} - \lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)^{-1}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(3\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\mathbf{M}^{-1}\Big) =$$
$$= \frac{\det\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(3\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)}{2^n\cdot\det\mathbf{M}\cdot\det\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)} \neq 0$$

для любого $\xi' \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, если только $\lambda \notin \Lambda_L$, найдём, что равенство (3.37) имеет место для любого $\xi' \in \mathbb{R}^2\backslash\{0\}$, если только $\lambda \notin \Lambda_L$ (при этом также $\lambda \notin \Lambda_E$, как отмечено в начале доказательства). По определению 3.2 задача (2.1), (1.5) эллиптична при $\lambda \notin \Lambda_E \cup \Lambda_L$. ☐

Лемма 3.12. *Задача* (2.1), (1.6) *эллиптична при* $\lambda \notin \Lambda_E$.

Доказательство. Как и в лемме 3.11, будем считать, что $\lambda \notin \Lambda_E$, поскольку по лемме 3.10 на множестве Λ_E дифференциальный оператор $\mathcal{L}_\lambda(x,D)$ теряет эллиптичность и, следовательно, задача (2.1), (1.6) не является эллиптической (см. определение 3.2). Далее повторим дословно шаги 1) и 2) из доказательства леммы 3.11 и продолжим с построения оператора граничных условий.

3) Перепишем оператор граничных условий (1.6) во введённой выше локальной системе координат и рассмотрим его главную часть. Эта главная часть представляет собой операторную матрицу граничных условий (3.24), записанную в локальной системе координат.

Заметим, что часть граничных условий (3.24) может быть переписана в следующей форме:

$$0 = 2\sum_{j=1}^n \mu_{ij} e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n}\cdot\tau_s = \sum_{j=1}^n 2\mu_{ij}\tau_s^\tau e(\mathbf{u}_j)\mathbf{n} =$$
$$= \sum_{j=1}^n 2\mu_{ij}\tau_s^\tau \begin{pmatrix} e_{11}(\mathbf{u}_j) & e_{12}(\mathbf{u}_j) & e_{13}(\mathbf{u}_j) \\ e_{21}(\mathbf{u}_j) & e_{22}(\mathbf{u}_j) & e_{23}(\mathbf{u}_j) \\ e_{31}(\mathbf{u}_j) & e_{32}(\mathbf{u}_j) & e_{33}(\mathbf{u}_j)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3\end{pmatrix} = \sum_{j=1}^n \mu_{ij}\tau_s^\tau \begin{pmatrix} \nabla u_{j1}\cdot\mathbf{n} + \dfrac{\partial}{\partial x_1}\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{n} \\ \nabla u_{j2}\cdot\mathbf{n} + \dfrac{\partial}{\partial x_2}\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{n} \\ \nabla u_{j3}\cdot\mathbf{n} + \dfrac{\partial}{\partial x_3}\mathbf{u}_j\cdot\mathbf{n}\end{pmatrix} =$$
$$= \sum_{j=1}^n \mu_{ij}\tau_s^\tau \begin{pmatrix} n_1\dfrac{\partial}{\partial x_1} + \mathbf{n}\cdot\nabla & n_2\dfrac{\partial}{\partial x_1} & n_3\dfrac{\partial}{\partial x_1} \\ n_1\dfrac{\partial}{\partial x_2} & n_2\dfrac{\partial}{\partial x_2} + \mathbf{n}\cdot\nabla & n_3\dfrac{\partial}{\partial x_2} \\ n_1\dfrac{\partial}{\partial x_3} & n_2\dfrac{\partial}{\partial x_3} & n_3\dfrac{\partial}{\partial x_3} + \mathbf{n}\cdot\nabla\end{pmatrix}\begin{pmatrix} u_{j1} \\ u_{j2} \\ u_{j3}\end{pmatrix} =$$
$$= \sum_{j=1}^n \mu_{ij}\tau_s^\tau\Big\{n_k\frac{\partial}{\partial x_l} + \delta_{lk}\mathbf{n}\cdot\nabla\Big\}_{l,k=1}^3 \mathbf{u}_j, \quad s=1,2, \quad i=1,\ldots,n. \tag{3.43}$$

Во введённой выше локальной системе координат при $y_3 = 0$ с использованием леммы 3.8 выпишем главные символы дифференциальных операторов из (3.43):

$$\sigma_0\Big(\mu_{ij}\tau_s^\tau\Big\{N_k\frac{\partial}{\partial x_l} + \delta_{lk}N\cdot\nabla\Big\}_{l,k=1}^3\Big) = \mu_{ij}\tau_s^\tau\big\{iN_k\alpha_l + i\delta_{lk}N\cdot\alpha\big\}_{l,k=1}^3 =$$
$$= \mu_{ij}\tau_s^\tau\big\{iN_k\alpha_l + i\delta_{lk}(\beta^\tau + \xi_3 N^\tau)N\big\}_{l,k=1}^3 = \mu_{ij}i\tau_s^\tau(\alpha N^\tau + \xi_3 I_3), \quad s=1,2, \quad i,j=1,\ldots,n. \tag{3.44}$$

С учётом соотношений (3.43)-(3.44) операторная матрица граничных условий (3.24) запишется в локальной системе координат следующим образом:

$$\pi\mathcal{B}(0,\xi',\xi_3)=\begin{pmatrix}\mathbf{M}\otimes i\tau_1^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3 I_3) & 0_n\\ \mathbf{M}\otimes i\tau_2^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3 I_3) & 0_n\\ I_n\otimes N^\tau & 0_n\end{pmatrix}. \tag{3.45}$$

Из определения 3.2 с учётом представления (3.30), факторизации (3.18) и формул (3.33)-(3.34) теперь следует, что для доказательства эллиптичности задачи (2.1), (1.6) требуется показать, что ранг следующей матрицы равен $3n$:

$$\int\limits_{\gamma_+}\pi\mathcal{B}(0,\xi',\xi_3)\big(\pi\mathcal{L}_\lambda(0,\xi',\xi_3)\big)^{-1}\big(I_{4n},\xi_3 I_{4n}\big)\,d\xi_3=$$
$$=\int\limits_{\gamma_+}\begin{pmatrix}\mathbf{M}\otimes i\tau_1^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3 I_3) & 0_n\\ \mathbf{M}\otimes i\tau_2^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3 I_3) & 0_n\\ I_n\otimes N^\tau & 0_n\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1} & -A_{11}A_{12}D_2^{-1}\\ *_{n\times 3n} & *_{n\times n}\end{pmatrix}\big(I_{4n},\xi_3 I_{4n}\big)\,d\xi_3. \tag{3.46}$$

Здесь γ_+ — спрямляемый контур в верхней ξ_3-полуплоскости, обходящий в положительном направлении точку $\xi_3=i|\xi'|$, а символами $*_{n\times 3n}$, $*_{n\times n}$ обозначены, как и в (3.37), несущественные для дальнейших вычислений матрицы соответствующих размеров.

Обозначим через $\mathcal{M}$ матрицу, составленную из $3n$ строк и первых $4n$ столбцов матрицы (3.46). Если ранг матрицы $\mathcal{M}$ будет равен $3n$, то и ранг матрицы (3.46), очевидно, будет таким же. Вычислим составляющие матрицы $\mathcal{M}$ с использованием вспомогательных вычислений (см. (3.21)) и обозначений:

$$\begin{gathered}\tau_s^\tau\alpha=\tau_s^\tau(\beta+\xi_3 N)=\tau_s^\tau(E_1^{-1/2}\xi_1\tau_1+E_2^{-1/2}\xi_2\tau_2)=E_s^{-1/2}\xi_s,\quad s=1,2,\\ \tau_s^\tau\alpha\alpha^\tau=E_s^{-1/2}\xi_s(\beta^\tau+\xi_3N^\tau),\quad s=1,2,\quad N^\tau\alpha=\xi_3,\quad N^\tau\alpha\alpha^\tau=\xi_3\beta^\tau+\xi_3^2N^\tau,\\ \mathbf{I}_j:=\mathbf{\Phi}-\lambda(j\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda}),\quad j=1,2,3.\end{gathered} \tag{3.47}$$

Отсюда, из формул (3.33)-(3.34) и леммы 3.9 имеем

$$\int\limits_{\gamma_+}\mathbf{M}\otimes i\tau_s^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3 I_3)\cdot\big(A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}\big)\,d\xi_3=$$
$$=\int\limits_{\gamma_+}\mathbf{M}\otimes i\tau_s^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3 I_3)\cdot\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)\,d\xi_3=$$
$$=\int\limits_{\gamma_+}i\bigg(I_n\otimes\Big(\frac{1}{|\xi|^2}E_s^{-1/2}\xi_sN^\tau+\frac{\xi_3}{|\xi|^2}\tau_s^\tau\Big)-\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2^{-1}\otimes 2E_s^{-1/2}\xi_s\Big(\frac{\xi_3}{|\xi|^4}\beta^\tau+\frac{\xi_3^2}{|\xi|^4}N^\tau\Big)\bigg)d\xi_3=$$
$$=i\bigg(I_n\otimes\Big(\frac{\pi}{|\xi'|}E_s^{-1/2}\xi_sN^\tau+\pi i\tau_s^\tau\Big)-\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\frac{\pi}{|\xi'|}E_s^{-1/2}\xi_sN^\tau\bigg)=$$
$$=i\bigg(I_n\otimes\pi i\tau_s^\tau-\lambda\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\frac{\pi}{|\xi'|}E_s^{-1/2}\xi_sN^\tau\bigg),\quad s=1,2, \tag{3.48}$$

$$\int\limits_{\gamma_+}I_n\otimes N^\tau\cdot\big(A_{11}^{-1}+A_{11}^{-1}A_{12}D_2^{-1}A_{21}A_{11}^{-1}\big)\,d\xi_3=$$
$$=\int\limits_{\gamma_+}I_n\otimes N^\tau\cdot\frac{1}{|\xi|^4}\Big(\mathbf{M}^{-1}\otimes|\xi|^2I_3-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\alpha\alpha^\tau\Big)\,d\xi_3=$$
$$=\int\limits_{\gamma_+}\bigg(\mathbf{M}^{-1}\otimes\frac{1}{|\xi|^2}N^\tau-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\Big(\frac{\xi_3}{|\xi|^4}\beta^\tau+\frac{\xi_3^2}{|\xi|^4}N^\tau\Big)\bigg)d\xi_3=$$
$$=\mathbf{M}^{-1}\otimes\frac{\pi}{|\xi'|}N^\tau-\mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\frac{\pi}{2|\xi'|}N^\tau=\frac{1}{2}\mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_3\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\frac{\pi}{|\xi'|}N^\tau, \tag{3.49}$$

$$\int\limits_{\gamma_+} \mathbf{M}\otimes i\tau_s^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3 I_3)\cdot\big(-A_{11}A_{12}D_2^{-1}\big)\,d\xi_3=\int\limits_{\gamma_+}\mathbf{M}\otimes i\tau_s^\tau(\alpha N^\tau+\xi_3 I_3)\cdot\frac{-i}{|\xi|^2}\,\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes\alpha\,d\xi_3=$$
$$=2\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}E_s^{-1/2}\xi_s\int\limits_{\gamma_+}\frac{\xi_3}{|\xi|^2}\,d\xi_3=2\pi i\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}E_s^{-1/2}\xi_s,\quad s=1,2,\tag{3.50}$$

$$\int\limits_{\gamma_+} I_n\otimes N^\tau\cdot\big(-A_{11}A_{12}D_2^{-1}\big)\,d\xi_3=\int\limits_{\gamma_+} I_n\otimes N^\tau\cdot\frac{-i}{|\xi|^2}\,\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}\otimes\alpha\,d\xi_3=$$
$$=-i\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}\int\limits_{\gamma_+}\frac{\xi_3}{|\xi|^2}\,d\xi_3=\pi\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}.\tag{3.51}$$

Из (3.48)–(3.51) теперь найдём, что

$$\mathcal{M}=\begin{pmatrix} i\big(I_n\otimes\pi i\tau_1^\tau-\lambda\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\dfrac{\pi}{|\xi'|}\,E_1^{-1/2}\xi_1N^\tau\big) & 2\pi i\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}E_1^{-1/2}\xi_1\\ i\big(I_n\otimes\pi i\tau_2^\tau-\lambda\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\dfrac{\pi}{|\xi'|}\,E_2^{-1/2}\xi_2N^\tau\big) & 2\pi i\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}E_2^{-1/2}\xi_2\\ \frac12\,\mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_3\mathbf{I}_2^{-1}\otimes\dfrac{\pi}{|\xi'|}\,N^\tau & \pi\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}\end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что

$$\mathcal{N}:=\mathcal{M}\cdot\operatorname{diag}\big((I_n\otimes N,I_n\otimes\tau_1,I_n\otimes\tau_2),I_n\big)=$$
$$=\begin{pmatrix} -i\lambda\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\dfrac{\pi}{|\xi'|}\,E_1^{-1/2}\xi_1 & -\pi I_n & 0_n & 2\pi i\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}E_1^{-1/2}\xi_1\\ -i\lambda\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\dfrac{\pi}{|\xi'|}\,E_2^{-1/2}\xi_2 & 0_n & -\pi I_n & 2\pi i\mathbf{M}\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}E_2^{-1/2}\xi_2\\ \dfrac12\,\mathbf{M}^{-1}\mathbf{I}_3\mathbf{I}_2^{-1}\dfrac{\pi}{|\xi'|} & 0_n & 0_n & \pi\mathbf{I}_2^{-1}\mathbf{\Phi}^{1/2}\end{pmatrix}.$$

Несложно видеть, что минор матрицы $\mathcal{N}$, составленный из $3n$ строк и последних $3n$ столбцов, равен $\pi^{3n}\det\mathbf{I}_2^{-1}\cdot\det\mathbf{\Phi}^{1/2}=\pi^{3n}\det^{-1}\big(\mathbf{\Phi}-\lambda(2\mathbf{M}+\mathbf{\Lambda})\big)\cdot\det\mathbf{\Phi}^{1/2}\neq 0$, а значит, $\operatorname{rank}\mathcal{N}=3n$. Отсюда и из равенства $\operatorname{rank}\mathcal{M}=\operatorname{rank}\mathcal{N}$ следует, что ранг матрицы (3.46) равен $3n$. □

Лемма 3.13. $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_0)=\Lambda_E\cup\Lambda_L$, $\sigma_{ess}(\mathcal{A}_1)=\Lambda_E$. *Множество* $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A}_j)$ *состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора* $\mathcal{A}_j$.

Доказательство. Из определения 2.1, лемм 3.10–3.12 и [25] следуют формулы для существенных спектров операторов $\mathcal{A}_j$, $j=1,2$. Далее, в лемме 3.6 доказано, что оператор $\mathcal{A}_j$ является максимальным аккретивным оператором. Следовательно, оператор $\mathcal{A}_j-\lambda\mathcal{I}$ непрерывно обратим при отрицательных λ, а его дефект и индекс равны нулю. Множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A}_j)$, очевидно, является связным. Отсюда и из теоремы об устойчивости индекса и дефекта замкнутого оператора (см. [7, гл. 4, § 5, п. 2, теорема 5.17] или [24, гл. 17, § 2, теорема 2.1]) следует, что множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A}_j)$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности оператора $\mathcal{A}_j$. □

3.4. Локализация и асимптотика дискретного спектра оператора $\mathcal{A}_j$. Доказательство факта, что невещественный спектр оператора $\mathcal{A}_j$ (или оператора $\mathcal{A}_j^{-1}$, если он существует) состоит из конечного числа симметричных относительно вещественной оси пар собственных значений конечной кратности, состоит в проверке принадлежности оператора $\mathcal{A}_j^{-1}$ классу Хелтона: $\mathcal{A}_j^{-1}\in(H)$ (см. [1, гл. III, § 5, определение 5.1, следствие 5.21]). Чтобы не приводить здесь множество сопутствующих определений и терминов, сформулируем желаемое следствие из [1, гл. III, § 5, следствие 5.21] и [1, 23, гл. III, § 5, пример 5.23] в виде следующего предложения.

Предложение 3.1. *Определим в гильбертовом пространстве* $\mathcal{H}=\mathcal{H}_1\oplus\mathcal{H}_2$ *оператор*

$$\mathcal{T}=\begin{pmatrix}T_1&0\\0&T_2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}S_1&-S_3^*\\S_3&S_2\end{pmatrix},\qquad T_1=T_1^*\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_1),\quad T_2=T_2^*\in\mathcal{L}(\mathcal{H}_2),$$

$$S_1 = S_1^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1), \quad S_2 = S_2^* \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_2), \quad S_3 \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1, \mathcal{H}_2).$$

Пусть $\sigma(T_1) \cap \sigma(T_2) = \varnothing$. *Тогда невещественный спектр оператора* $\mathcal{T}$ *состоит из конечного числа симметричных относительно* $\mathbb{R}$ *пар собственных значений конечной кратности.*

Лемма 3.14. *Невещественный спектр оператора* $\mathcal{A}_j$ *состоит из конечного числа симметричных относительно* $\mathbb{R}$ *пар собственных значений конечной алгебраической кратности.*

Доказательство. Покажем, что $\operatorname{Ker} \mathcal{A}_j = \{0\}$. Допустим противное, тогда существует такой элемент $0 \neq \xi = (\mathbf{u}; \rho)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_j)$, что (см. лемму 3.6)

$$\mathcal{A}_j \xi = \begin{pmatrix} A_j^{1/2}(A_j^{1/2}\mathbf{u} + Q_j^*\rho) \\ -Q_j A_j^{1/2}\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что $(\rho, Q_j A_j^{1/2}\mathbf{u})_{\mathcal{H}_2} = 0$, а значит, $(A_j^{1/2}(A_j^{1/2}\mathbf{u} + Q_j^*\rho), \mathbf{u})_{\mathcal{H}_1} = \|A_j^{1/2}\mathbf{u}\|_{\mathcal{H}_1}^2 = 0$ и $\mathbf{u} = \mathbf{0}$. Тогда $A_j^{1/2}Q_j^*\rho = 0$, а значит, $\rho = 0$, так как $\operatorname{Ker} Q_j^* = \{0\}$ (см. лемму 3.4, (3.11) и лемму 3.5).

Таким образом, точка $\lambda = 0$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}_j$. По лемме 3.13 точка $\lambda = 0$ — регулярная точка оператора $\mathcal{A}_j$: $0 \in \rho(\mathcal{A}_j)$. Отсюда и из второй факторизации в лемме 3.6 следует, что оператор $Q_j Q_j^*$ является положительно определённым в $\mathcal{H}_2$, а значит, существует $(Q_j Q_j^*)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_2)$.

Из второй факторизации в лемме 3.6 теперь найдём, что

$$\mathcal{A}_j^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & (Q_jQ_j^*)^{-1} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_j^{-1} - A_j^{-1/2}Q_j^*(Q_jQ_j^*)^{-1}Q_jA_j^{-1/2} & -A_j^{-1/2}Q_j^*(Q_jQ_j^*)^{-1} \\ (Q_jQ_j^*)^{-1}Q_jA_j^{-1/2} & 0 \end{pmatrix}, \quad j = 1, 2.$$

Из представления $A_j = L_j + T$ и лемм 3.1–3.3 следует, что $A_j^{-1} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H}_1)$. Таким образом, оператор $\mathcal{A}_j^{-1}$ имеет структуру оператора $\mathcal{T}$ из предложения 3.1. Утверждение леммы теперь следует из $\sigma((Q_jQ_j^*)^{-1}) \cap \{0\} = \varnothing$ и предложения 3.1. $\square$

Лемма 3.15. *Спектр оператора* $\mathcal{A}_j$ *содержит подпоследовательность собственных значений с асимптотическим поведением*

$$\lambda_k^{(\infty)}(\mathcal{A}_j) = \mathcal{C}^{-2/3}k^{2/3}(1 + o(1)), \quad k \longrightarrow \infty, \quad j = 0, 1,$$

$$\mathcal{C} := \frac{1}{6\pi^2}\int\limits_\Omega \Big(\operatorname{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2} + 2\operatorname{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2}\Big)\, d\Omega.$$

Доказательство.

1) Покажем, что собственные значения оператора L_j имеют асимптотическое распределение $\lambda_k(L_j) = \mathcal{C}^{-2/3}k^{2/3}(1 + o(1))$ при $k \longrightarrow \infty$ с константой $\mathcal{C}$, определённой в лемме.

Действительно, указанная асимптотическая формула следует из обзора М. Ш. Бирмана и М. З. Соломяка [3, § 1, п. 3] с константой

$$\mathcal{C} = \frac{1}{24\pi^3}\int\limits_\Omega d\Omega \int\limits_{|\xi|=1} \operatorname{tr}\Big\{\big(a_0^{-1/2}b_0a_0^{-1/2}\big)^{3/2}\Big\}\, dS(\xi), \tag{3.52}$$

где $a_0 := \mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes \xi\xi^\tau$, $b_0 := \mathbf{R} \otimes I_3$. Учитывая, что

$$\operatorname{tr}\Big\{\big(a_0^{-1/2}b_0a_0^{-1/2}\big)^{3/2}\Big\} = \operatorname{tr}\Big\{\big(a_0^{1/2}b_0^{-1}a_0^{1/2}\big)^{-3/2}\Big\} = \operatorname{tr}\Big\{\big(b_0^{-1/2}a_0b_0^{-1/2}\big)^{-3/2}\Big\},$$

вычислим собственные значения матрицы $b_0^{-1/2}a_0b_0^{-1/2}$. Используя (3.28) и теорему Лапласа о вычислении определителей, найдём соответствующее характеристическое уравнение:

$$\begin{aligned}
\det(b_0^{-1/2}a_0b_0^{-1/2} - \lambda I_{3n}) &= \det\Big(\mathbf{R}^{-1/2}\big(\mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes \xi\xi^\tau - \lambda\mathbf{R} \otimes I_3\big)\mathbf{R}^{-1/2}\Big) = \\
&= \det{}^2\mathbf{R}^{-1/2} \cdot \det\Big(I_n \otimes \Gamma_\xi^\tau \cdot \big(\mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes \xi\xi^\tau - \lambda\mathbf{R} \otimes I_3\big) \cdot I_n \otimes \Gamma_\xi\Big) = \\
&= \det\mathbf{R}^{-1} \cdot \det\big(\mathbf{M} \otimes |\xi|^2 I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes |\xi|^2 P_1 - \lambda\mathbf{R} \otimes I_3\big) = \\
&= |\xi|^{6n} \cdot \det\mathbf{R}^{-1} \cdot \det\big(\mathbf{M} \otimes I_3 + (\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) \otimes P_1 - \mathbf{R} \otimes \lambda|\xi|^{-2} I_3\big) =
\end{aligned}$$

$$= |\xi|^{6n} \cdot \det \mathbf{R}^{-1} \cdot \det\big(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda}) - \lambda|\xi|^{-2}\mathbf{R}\big) \cdot \det{}^2\big(\mathbf{M} - \lambda|\xi|^{-2}\mathbf{R}\big) = 0.$$

Отсюда следует, что спектр матрицы $b_0^{-1/2}a_0b_0^{-1/2}$ состоит из трёх множеств:

$$\Big\{\lambda_k^{(1)} = |\xi|^2\lambda_k\big(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2}\big),\ \ \lambda_k^{(2)} = \lambda_k^{(3)} = |\xi|^2\lambda_k\big(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2}\big)\Big\}_{k=1}^{n},$$

где $\lambda_k\big(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2}\big)$, $\lambda_k\big(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2}\big)$ $(k = \overline{1,n})$ — собственные значения соответствующих матриц. Из (3.52) и проведённых рассуждений теперь найдём, что

$$\mathcal{C} = \frac{1}{24\pi^3}\int\limits_{\Omega} d\Omega \int\limits_{|\xi|=1} \left(\sum_{k=1}^{n}\big(\lambda_k^{(1)}\big)^{-3/2} + 2\sum_{k=1}^{n}\big(\lambda_k^{(2)}\big)^{-3/2}\right) dS(\xi) =$$

$$= \frac{1}{24\pi^3}\int\limits_{\Omega}\Big(\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2} + 2\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2}\Big)\, d\Omega \int\limits_{|\xi|=1}\frac{dS(\xi)}{|\xi|^3} =$$

$$= \frac{1}{6\pi^2}\int\limits_{\Omega}\Big(\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}(2\mathbf{M} + \mathbf{\Lambda})\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2} + 2\mathrm{tr}\big(\mathbf{R}^{-1/2}\mathbf{M}\mathbf{R}^{-1/2}\big)^{-3/2}\Big)\, d\Omega.$$

2) Из представления $A_j = L_j + T = (I + TL_j^{-1})L_j$ следует, что оператор A_j является *слабым возмущением* оператора L_j. Отсюда и из степенной асимптотики собственных значений оператора L_j следует (см., например, [13]), что главные члены асимптотик собственных значений этих операторов совпадают.

Далее, из (3.15) следует, что собственные значения оператора $\mathcal{A}_j$ и оператор-функции $L_j(\lambda)$ совпадают. Наличие же у оператор-функции (пучка операторов) $L_j(\lambda)$ последовательности собственных значений с указанным в лемме асимптотическим распределением следует из теоремы А. С. Маркуса и В. И. Мацаева о сравнении спектров (см. [13, теорема 1.2]). $\square$

Утверждения теоремы 2.1 следуют из лемм 3.13–3.15.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986.
2. *Азизов Т. Я., Копачевский Н. Д., Орлова Л. Д.* Эволюционная и спектральная задачи, порожденные проблемой малых движений вязкоупругой жидкости// Тр. СПб. Мат. об-ва. — 1988. — *6*. — С. 5–33.
3. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений// Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. — 1977. — *14*, № 11. — С. 5–58.
4. *Волевич Л. Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем// Мат. сб. — 1965. — *68*, № 3. — С. 373–416.
5. *Доровский В. Н., Перепечко Ю. В.* Теория частичного плавления// Геолог. и геофиз. — 1989. — № 9. — С. 56–64.
6. *Имомназаров Х. Х., Имомназаров Ш. Х., Маматкулов М. М., Черных Е. Г.* Фундаментальное решение для стационарного уравнения двухскоростной гидродинамики с одним давлением// Сиб. ж. индустр. мат. — 2014. — *17*, № 4. — С. 60–66.
7. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
8. *Кожевников А. Н.* Функциональные методы математической физики. Учебное пособие. — М.: МАИ, 1991.
9. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
10. *Ланкастер П.* Теория матриц. — М.: Наука, 1973.
11. *Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А.* Разрешимость начально-краевой задачи для уравнений политропного движения смесей вязких сжимаемых жидкостей// Сиб. электрон. мат. изв. — 2016. — *13*. — С. 541–583.
12. *Мамонтов А. Е., Прокудин Д. А.* Разрешимость нестационарных уравнений многокомпонентных вязких сжимаемых жидкостей// Изв. РАН. Сер. мат. — 2018. — *82*, № 1. — С. 151–197.
13. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* Теорема о сравнении спектров и спектральная асимптотика для пучка М. В. Келдыша// Мат. сб. — 1984. — *123*, № 3. — С. 391–406.
14. *Нигматулин Р. И.* Динамика многофазных сред. Т. 1. — М.: Наука, 1987.
15. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. — М.: МГУ, 1990.

16. *Пал П. К., Масленникова В. Н.* Спектральные свойства операторов в задаче о колебании сжимаемой жидкости во вращающихся сосудах// Докл. АН СССР. — 1985. — *281*, № 3. — С. 529–534.
17. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. — М.: Мир, 1985.
18. *Солонников В. А.* Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Даглиса—Л. Ниренберга. II// Тр. МИАН. — 1966. — *92.* — С. 233–297.
19. *Atkinson F. V., Langer H., Mennicken R., Shkalikov A. A.* The essential spectrum of some matrix operators// Math. Nachr. — 1994. — *167.* — С. 5–20.
20. *Faierman M., Fries R. J., Mennicken R., Möller M.* On the essential spectrum of the linearized Navier—Stokes operator// Integr. Equ. Oper. Theory. — 2000. — *38*, № 1. — С. 9–27.
21. *Frehse J., Goj S., Málek J.* A Stokes-like system for mixtures// В сб.: «Nonlinear Problems in Mathematical Physics and Related Topics. II». — Dordrecht—Norwell—New York—London: Kluwer, 2002. — С. 119–136.
22. *Frehse J., Goj S., Málek J.* On power and non-power asymptotic behavior of positive solutions to Emden—Fowler type higher-order equations// SIAM J. Math. Anal. — 2005. — *36*, № 4. — С. 1259–1281.
23. *Frehse J., Goj S., Málek J.* A uniqueness result for a model for mixtures in the absence of external forces and interaction momentum// Appl. Math. — 2005. — *50.* — С. 527–541.
24. *Gohberg I., Goldberg S., Kaashoek M. A.* Classes of linear operators. Vol. 1. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1990.
25. *Grubb G., Geymonat G.* The essential spectrum of elliptic systems of mixed order// Math. Ann. — 1977. — *227.* — С. 247–276.
26. *Kozhevnikov A., Skubachevskaya T.* Some applications of pseudo-differential operators to elasticity// Hokkaido Math. J. — 1997. — *26*, № 2. — С. 297–322.
27. *Mamontov A. E., Prokudin D. A.* Viscous compressible multi-fluids: modeling and multi-D existence// Methods Appl. Anal. — 2013. — *20*, № 2. — С. 179–195.
28. *Mennicken R., Shkalikov A. A.* Spectral decomposition of symmetric operator matrices// Math. Nachr. — 1996. — *179.* — С. 259–273.
29. *Rajagopal K. L., Tao L.* Mechanics of mixtures. — River Edge: World Sci. Publ., 1995.

Д. А. Закора
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского, Симферополь, Россия
E-mail: dmitry.zkr@gmail.com

UDC 517.958+517.984.5
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-73-97
EDN: DYSLPL

Spectral properties of operators in the problem on normal oscillations of a mixture of viscous compressible fluids

D. A. Zakora

V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol', Russia

In this paper, we study a problem of normal oscillations of a homogeneous mixture of several viscous compressible fluids filling a bounded domain of three-dimensional space with an infinitely smooth boundary. Two boundary conditions are considered: the no-slip condition and the slip condition without shear stresses. It is proved that the essential spectrum of the problem in both cases is a finite set of segments located on the real axis. The discrete spectrum lies on the real axis, except perhaps for a finite number of complex conjugate eigenvalues. The spectrum of the problem contains a subsequence of eigenvalues with a limit point at infinity and a power-law asymptotic distribution.

Keywords: mixture of fluids, compressible viscous fluid, spectral problem, essential spectrum, discrete spectrum

For citation: D. A. Zakora, "Spectral properties of operators in the problem on normal oscillations of a mixture of viscous compressible fluids," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 1, 73–97. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-73-97

REFERENCES

1. T. Ya. Azizov and I. S. Iokhvidov, *Osnovy teorii lineynykh operatorov v prostranstvakh s indefinitnoy metrikoy* [Fundamentals of the Theory of Linear Operators in Spaces with Indefinite Metric], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
2. T. Ya. Azizov, N. D. Kopachevsky, and L. D. Orlova, "Evolyutsionnaya i spektral'naya zadachi, porozhdennye problemoy malykh dvizheniy vyazkouprugoy zhidkosti" [Evolutionary and spectral problems generated by the problem of small motions of a viscoelastic fluid], *Tr. SPb. Mat. ob-va* [Proc. Saint Petersburg Math. Soc.], 1988, **6**, 5–33 (in Russian).
3. M. Sh. Birman and M. Z. Solomyak, "Asimptotika spektra differentsial'nykh uravneniy" [Asymptotic behavior of the spectrum of differential equations], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Mat. anal.* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Anal.], 1977, **14**, No. 11, 5–58 (in Russian).
4. L. R. Volevich, "Razreshimost' kraevykh zadach dlya obshchikh ellipticheskikh sistem" [Solvability of boundary-value problems for general elliptic systems], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1965, **68**, No. 3, 373–416 (in Russian).
5. V. N. Dorovskiy and Yu. V. Perepechko, "Teoriya chastichnogo plavleniya" [The theory of partial melting], *Geolog. i geofiz.* [Geology and Geophysics], 1989, No. 9, 56–64 (in Russian).
6. Kh. Kh. Imomnazarov, Sh. Kh. Imomnazarov, M. M. Mamatkulov, and E. G. Chernykh, "Fundamental'noe reshenie dlya statsionarnogo uravneniya dvukhskorostnoy gidrodinamiki s odnim davleniem" [Fundamental solution for the stationary equation of two-velocity hydrodynamics with one pressure], *Sib. zh. industr. mat.* [Sib. J. Industr. Math.], 2014, **17**, No. 4, 60–66 (in Russian).
7. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
8. A. N. Kozhevnikov, *Funktsional'nye metody matematicheskoy fiziki. Uchebnoe posobie* [Functional Methods of Mathematical Physics. Textbook], MAI, Moscow, 1991 (in Russian).

9. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear differential equations in a Banach space], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
10. P. Lancaster, *Teoriya matrits* [The Theory of Matrices], Nauka, Moscow, 1973 (Russian translation).
11. A. E. Mamontov and D. A. Prokudin, "Razreshimost' nachal'no-kraevoy zadachi dlya uravneniy politropnogo dvizheniya smesey vyazkikh szhimaemykh zhidkostey" [Solvability of the initial-boundary value problem for the equations of polytropic motion of mixtures of viscous compressible fluids], *Sib. elektron. mat. izv.* [Sib. Electron. Math. Bull.], 2016, **13**, 541–583 (in Russian).
12. A. E. Mamontov and D. A. Prokudin, "Razreshimost' nestatsionarnykh uravneniy mnogokomponentnykh vyazkikh szhimaemykh zhidkostey" [Solvability of nonstationary equations of multicomponent viscous compressible fluids], *Izv. RAN. Ser. mat.* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Math.], 2018, **82**, No. 1, 151–197 (in Russian).
13. A. S. Markus and V. I. Matsaev, "Teorema o sravnenii spektrov i spektral'naya asimptotika dlya puchka M. V. Keldysha" [The comparison theorem for spectra and the spectral asymptotics for the M. V. Keldysh pensil], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1984, **123**, No. 3, 391–406 (in Russian).
14. R. I. Nigmatulin, *Dinamika mnogofaznykh sred. T. 1* [Dynamics of Multiphase Media. Vol. 1], Nauka, Moscow, 1987 (in Russian).
15. O. A. Oleynik, G. A. Iosifyan, and A. S. Shamaev, *Matematicheskie zadachi teorii sil'no neodnorodnykh uprugikh sred* [Mathematical Problems of the Theory of Strongly Nonhomogeneous Elastic Media], MSU, Moscow, 1990 (in Russian).
16. P. K. Pal and V. N. Maslennikova, "Spektral'nye svoystva operatorov v zadache o kolebanii szhimaemoy zhidkosti vo vrashchayushchikhsya sosudakh" [Spectral properties of operators in the problem of oscillation of a compressible fluid in rotating vessels], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1985, **281**, No. 3, 529–534 (in Russian).
17. K. Rektorys, *Variatsionnye metody v matematicheskoy fizike i tekhnike* [Variational Methods in Mathematics, Science and Engineering], Mir, Moscow, 1985 (Russian translation).
18. V. A. Solonnikov, "Ob obshchikh kraevykh zadachakh dlya sistem, ellipticheskikh v smysle A. Daglisa—L. Nirenberga. II" [On general boundary-value problems for systems elliptic in the sense of Douglis—Nirenberg. II], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1966, **92**, 233–297 (in Russian).
19. F. V. Atkinson, H. Langer, R. Mennicken, and A. A. Shkalikov, "The essential spectrum of some matrix operators," *Math. Nachr.*, 1994, **167**, 5–20.
20. M. Faierman, R. J. Fries, R. Mennicken, and M. Möller, "On the essential spectrum of the linearized Navier—Stokes operator," *Integr. Equ. Oper. Theory*, 2000, **38**, No. 1, 9–27.
21. J. Frehse, S. Goj, and J. Málek, "A Stokes-like system for mixtures," In: *Nonlinear Problems in Mathematical Physics and Related Topics. II*, Kluwer, Dordrecht—Norwell—New York—London, 2002, pp. 119–136.
22. J. Frehse, S. Goj, and J. Málek, "On power and non-power asymptotic behavior of positive solutions to Emden—Fowler type higher-order equations," *SIAM J. Math. Anal.*, 2005, **36**, No. 4, 1259–1281.
23. J. Frehse, S. Goj, and J. Málek, "A uniqueness result for a model for mixtures in the absence of external forces and interaction momentum," *Appl. Math.*, 2005, **50**, 527–541.
24. I. Gohberg, S. Goldberg, and M. A. Kaashoek, *Classes of linear operators. Vol. 1*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1990.
25. G. Grubb and G. Geymonat, "The essential spectrum of elliptic systems of mixed order," *Math. Ann.*, 1977, **227**, 247–276.
26. A. Kozhevnikov and T. Skubachevskaya, "Some applications of pseudo-differential operators to elasticity," *Hokkaido Math. J.*, 1997, **26**, No. 2, 297–322.
27. A. E. Mamontov and D. A. Prokudin, "Viscous compressible multi-fluids: modeling and multi-D existence," *Methods Appl. Anal.*, 2013, **20**, No. 2, 179–195.
28. R. Mennicken and A. A. Shkalikov, "Spectral decomposition of symmetric operator matrices," *Math. Nachr.*, 1996, **179**, 259–273.
29. K. L. Rajagopal and L. Tao, *Mechanics of mixtures*, World Sci. Publ., River Edge, 1995.

D. A. Zakora
V. I. Vernadsky Crimean Federal University, Simferopol', Russia
E-mail: dmitry.zkr@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 1 (2023). С. 98–115
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.956.25
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-98-115
EDN: EBRPUC

ЭНТРОПИЙНЫЕ И РЕНОРМАЛИЗОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНОЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКОЙ ЗАДАЧИ В ПРОСТРАНСТВАХ МУЗИЛАКА—ОРЛИЧА

Л. М. Кожевникова[1,2]

[1] *Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, Стерлитамак, Россия*
[2] *Елабужский институт Казанского федерального университета, Елабуга, Россия*

В работе установлена эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений эллиптических уравнений второго порядка с нелинейностями, определяемыми функциями Музилака—Орлича, и правой частью из пространства $L_1(\Omega)$. В нерефлексивных пространствах Музилака—Орлича—Соболева доказаны существование и единственность как энтропийных, так и ренормализованных решений задачи Дирихле в областях с липшицевой границей.

Ключевые слова: эллиптическое уравнение второго порядка, энтропийное решение, ренормализованное решение, пространство Музилака—Орлича—Соболева, существование и единственность решений

Для цитирования: *Л. М. Кожевникова.* Энтропийные и ренормализованные решения нелинейной эллиптической задачи в пространствах Музилака—Орлича// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 1. С. 98–115. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-98-115

1. Введение

В работе рассматривается задача Дирихле

$$-\operatorname{div} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) + b(\mathrm{x}, u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad \mathrm{x} \in \Omega, \tag{1.1}$$

$$u\Big|_{\partial\Omega} = 0 \tag{1.2}$$

в строго липшицевой области $\Omega \subset \mathbb{R}^n = \{\mathrm{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)\}$, $n \geqslant 2$, с конечной мерой. Здесь функции $\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) = (a_1(\mathrm{x}, \mathrm{s}), \dots, a_n(\mathrm{x}, \mathrm{s})) : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ имеют рост, определяемый функцией Музилака—Орлича $M(\mathrm{x}, z)$. При этом на функцию M и сопряженную к ней функцию $\overline{M}$ не требуется никакое условие роста по переменной z. Предполагается, что по переменной $\mathrm{x} \in \Omega$ функция M подчиняется условию log-гельдеровской непрерывности, что приводит к хорошим аппроксимационным свойствам нерефлексивного пространства Музилака—Орлича.

Понятие ренормализованных и энтропийных решений служит основным инструментом для изучения общих вырождающихся эллиптических уравнений с правой частью в виде меры и, в частности, из пространства $L_1(\Omega)$. В работе [18] доказано существование ренормализованного решения задачи Дирихле для уравнения вида

$$-\operatorname{div} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) = f, \quad f \in L_1(\Omega), \quad \mathrm{x} \in \Omega, \tag{1.3}$$

с неоднородной анизотропной функцией Музилака—Орлича. Кроме того, в работе [15] авторы доказали существование и единственность ренормализованных решений эллиптических включений с многозначным оператором в условиях нерефлексивных и несепарабельных пространств Музилака—Орлича.

Авторы работ [7, 17] установили существование ренормализованного и энтропийного решений, соответственно, задачи Дирихле для уравнения вида

$$-\operatorname{div}\left(\mathrm{a}(\mathrm{x},u,\nabla u)+\mathrm{c}(u)\right)+a_0(\mathrm{x},u,\nabla u)=f,\quad f\in L_1(\Omega),\quad \mathrm{x}\in\Omega,$$

с функцией $\mathrm{c}\in C_0(\mathbb{R},\mathbb{R}^n)$.

В работах [16, 21], а также [8] (при $a_0\equiv 0$) доказано существование энтропийного решения задачи Дирихле для уравнения вида

$$-\operatorname{div}\left(\mathrm{a}(\mathrm{x},u,\nabla u)+\mathrm{c}(\mathrm{x},u)\right)+a_0(\mathrm{x},u,\nabla u)=f,\quad f\in L_1(\Omega),\quad \mathrm{x}\in\Omega,$$

с каратеодориевой функцией $\mathrm{c}(\mathrm{x},s_0):\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}^n$, подчиняющейся условию роста по переменной s_0.

В работе [22] в пространствах Музилака—Орлича доказаны существование и единственность энтропийных и ренормализованных решений задачи (1.3), (1.2), установлена их эквивалентность.

В настоящей статье получены некоторые свойства, доказаны единственность ренормализованного и существование энтропийного решений задачи Дирихле (1.1), (1.2) в нерефлексивных пространствах Музилака—Орлича—Соболева. Кроме того, доказана эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений рассматриваемой задачи. Заметим, что область Ω с конечной мерой может быть неограниченной. Ранее в работе [4] Л. М. Кожевниковой и А. П. Кашниковой аналогичный результат получен для решения уравнения (1.1) с более жесткими ограничениями на функцию $\mathrm{a}(\mathrm{x},\mathrm{s})$.

2. Пространства Музилака—Орлича—Соболева

В этом разделе будут приведены необходимые сведения из теории обобщенных N-функций и пространств Музилака—Орлича (см. [5, 13, 20]).

Определение 2.1. Пусть функция $M(\mathrm{x},z):\Omega\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}_+$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $M(\mathrm{x},\cdot)$ — N-функция по $z\in\mathbb{R}$, то есть она является выпуклой вниз, неубывающей при $z\in\mathbb{R}_+$, четной, непрерывной, $M(\mathrm{x},0)=0$ для п.в. $\mathrm{x}\in\Omega$ и

$$\inf_{\mathrm{x}\in\Omega} M(\mathrm{x},z)>0\quad\text{для всех}\quad z\neq 0,\tag{2.1}$$

$$\lim_{z\to 0}\sup_{\mathrm{x}\in\Omega}\frac{M(\mathrm{x},z)}{z}=0,\qquad \lim_{z\to\infty}\inf_{\mathrm{x}\in\Omega}\frac{M(\mathrm{x},z)}{z}=\infty;\tag{2.2}$$

2) $M(\cdot,z)$ — измеримая функция по $\mathrm{x}\in\Omega$ для любых $z\in\mathbb{R}$.

Такая функция $M(\mathrm{x},z)$ называется *функцией Музилака—Орлича*, или *обобщенной N-функцией*.

Сопряженная функция $\overline{M}(\mathrm{x},\cdot)$ к функции Музилака—Орлича $M(\mathrm{x},\cdot)$ в смысле Юнга для п.в. $\mathrm{x}\in\Omega$ и любых $z\geqslant 0$ определяется равенством

$$\overline{M}(\mathrm{x},z)=\sup_{y\geqslant 0}\left(yz-M(\mathrm{x},y)\right).$$

Отсюда следует неравенство Юнга:

$$|zy|\leqslant M(\mathrm{x},z)+\overline{M}(\mathrm{x},y),\quad z,y\in\mathbb{R},\quad \mathrm{x}\in\Omega.\tag{2.3}$$

Функция Музилака—Орлича M удовлетворяет Δ_2-*условию*, если существуют константы $c>0$, $z_0\geqslant 0$ и функция $H\in L_1(\Omega)$ такие, что для п.в. $\mathrm{x}\in\Omega$ и любых $|z|\geqslant z_0$ справедливо неравенство

$$M(\mathrm{x},2z)\leqslant cM(\mathrm{x},z)+H(\mathrm{x}).$$

Δ_2-условие эквивалентно выполнению для п.в. $\mathrm{x}\in\Omega$ и любых $|z|\geqslant z_0$ неравенства

$$M(\mathrm{x},lz)\leqslant c(l)M(\mathrm{x},z)+H_l(\mathrm{x}),\quad H_l\in L_1(\Omega),$$

где l — любое больше единицы, $c(l)>0$.

Существуют три класса Музилака—Орлича:

1) $\mathcal{L}_M(\Omega)$ — обобщенный класс Музилака—Орлича, состоящий из измеримых функций $v:\Omega\to\mathbb{R}$ таких, что
$$\varrho_{M,\Omega}(v)=\int\limits_\Omega M(\mathrm{x},v(\mathrm{x}))d\mathrm{x}<\infty;$$

2) $L_M(\Omega)$ — обобщенное пространство Музилака—Орлича, являющееся наименьшим линейным пространством, которое содержит класс $\mathcal{L}_M(\Omega)$, с нормой Люксембурга
$$\|v\|_{M,\Omega}=\inf\left\{\lambda>0\;\Big|\;\varrho_{M,\Omega}\left(\frac{v}{\lambda}\right)\leqslant 1\right\};$$

3) $E_M(\Omega)$ — наибольшее линейное пространство, содержащееся в классе $\mathcal{L}_M(\Omega)$.

Очевидно, $E_M(\Omega)\subset\mathcal{L}_M(\Omega)\subset L_M(\Omega)$. Заметим, что для любого $v\in E_M(\Omega)$ и любого $\mu>0$ справедливо неравенство $\varrho_{M,\Omega}(v/\mu)<\infty$. Кроме того, для любого $v\in L_M(\Omega)$ найдется $\lambda>0$ такое, что $\varrho_{M,\Omega}(v/\lambda)<\infty$ (см. [20, п. 7.4]).

Ниже, в обозначениях $\|\cdot\|_{M,Q}$, $\varrho_{M,Q}(\cdot)$, $\|\cdot\|_{1,Q}$, $\|\cdot\|_{\infty,Q}$ будем опускать индекс Q, если $Q=\Omega$. Для $v\in L_M(\Omega)$ справедливо неравенство:
$$\|v\|_M\leqslant\varrho_M(v)+1. \tag{2.4}$$

Далее будем рассматривать следующие условия на функцию Музилака—Орлича $M(\mathrm{x},z)$.

$(M1)$ *Функция* $M(\mathrm{x},z)$ *интегрируема, т. е.*
$$\varrho_M(z)=\int\limits_\Omega M(\mathrm{x},z)d\mathrm{x}<\infty,\quad\forall z\in\mathbb{R}.$$

$(M2)$ *Функция* $M(\mathrm{x},z)$ *удовлетворяет log-гельдеровой непрерывности по* x, *а именно: существуют константы* $c>0$, $b\geqslant 1$ *такие, что для всех* $\mathrm{x},\mathrm{y}\in\Omega$, $|\mathrm{x}-\mathrm{y}|<\dfrac{1}{2}$, $z\in\mathbb{R}$ *и выполняется неравенство*
$$M(\mathrm{x},z)\leqslant\max\left\{|z|^{-c/\ln|\mathrm{x}-\mathrm{y}|},b^{-c/\ln|\mathrm{x}-\mathrm{y}|}\right\}M(\mathrm{y},z).$$

Пусть M и $\overline{M}$ подчиняются условию $(M1)$, тогда пространство $E_M(\Omega)$ сепарабельно и $(E_M(\Omega))^*=L_{\overline{M}}(\Omega)$. Если дополнительно M удовлетворяет Δ_2-условию, то $E_M(\Omega)=\mathcal{L}_M(\Omega)=L_M(\Omega)$ и $L_M(\Omega)$ сепарабельно. Пространство $L_M(\Omega)$ рефлексивно тогда и только тогда, когда функции Музилака—Орлича M и $\overline{M}$ удовлетворяют Δ_2-условию.

Последовательность функций $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}\in L_M(\Omega)$ модулярно сходится к $v\in L_M(\Omega)$ ($v^j\underset{j\to\infty}{\overset{M}{\to}}v$), если существует константа $\lambda>0$ такая, что
$$\lim_{j\to\infty}\varrho_M\left(\frac{v^j-v}{\lambda}\right)=0.$$
Если M удовлетворяет Δ_2-условию, то модулярная топология и топология по норме совпадают.

Для двух сопряженных функций Музилака—Орлича M и $\overline{M}$, если $u\in L_M(\Omega)$ и $v\in L_{\overline{M}}(\Omega)$, то выполняется неравенство Гельдера:
$$\left|\int\limits_\Omega u(\mathrm{x})v(\mathrm{x})d\mathrm{x}\right|\leqslant 2\|u\|_M\|v\|_{\overline{M}}.$$

Определим пространство Музилака—Орлича—Соболева
$$W^1L_M(\Omega)=\{v\in L_M(\Omega)\;\big|\;\nabla v\in(L_M(\Omega))^n\}$$
с нормой
$$\|v\|_M^1=\|v\|_M+\||\nabla v|\|_M.$$

Для краткости введем обозначения $(L_M(\Omega))^n=\mathrm{L}_M(\Omega)$, $(L_M(\Omega))^{n+1}=\mathbf{L}_M(\Omega)$, $(E_M(\Omega))^n=\mathrm{E}_M(\Omega)$, $(E_M(\Omega))^{n+1}=\mathbf{E}_M(\Omega)$. Пространство $W^1L_M(\Omega)$ отождествляется с подпространством произведения $\mathbf{L}_M(\Omega)$ и является замкнутым по топологии $\sigma(\mathbf{L}_M,\mathbf{E}_{\overline{M}})$.

Пространство $\mathring{W}^1 L_M(\Omega)$ определим как замыкание $C_0^\infty(\Omega)$ по слабой топологии $\sigma(\mathbf{L}_M, \mathbf{E}_M)$ в $W^1 L_M(\Omega)$. Пространство $\mathring{W}^1 L_M(\Omega)$ банахово (см. [20, Theorem 10.2]).

Положим

$$\mathring{V}_M(\Omega) = \{u \in \mathring{W}_1^1(\Omega) : \nabla u \in \mathrm{L}_M(\Omega)\};$$

очевидно, что $\mathring{W}^1 L_M(\Omega) \subset \mathring{V}_M(\Omega)$.

3. Предположения и формулировка результатов

Предполагается, что функции

$$b(\mathrm{x}, s_0) : \Omega \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad \mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n,$$

входящие в уравнение (1.1), измеримы по $\mathrm{x} \in \Omega$ для $s_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$, непрерывны по $s_0 \in \mathbb{R}$, $\mathrm{s} = (s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ для почти всех $\mathrm{x} \in \Omega$ и выполнено следующее условие.

(M) *Существуют неотрицательные функции* $\psi \in E_{\overline{M}}(\Omega)$, $\phi \in L_1(\Omega)$ *и положительные константы* $\widehat{a}, \overline{a}, d$ *такие, что для п.в.* $\mathrm{x} \in \Omega$ *и для любых* $\mathrm{s}, \mathrm{t} \in \mathbb{R}^n$, $\mathrm{s} \neq \mathrm{t}$ *справедливы неравенства*:

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, s) \cdot \mathrm{s} \geqslant \overline{a} M(\mathrm{x}, d|\mathrm{s}|) - \phi(\mathrm{x}); \tag{3.1}$$

$$|\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s})| \leqslant \psi(\mathrm{x}) + \widehat{a}\overline{M}^{-1} M(\mathrm{x}, d|\mathrm{s}|); \tag{3.2}$$

$$(\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{t})) \cdot (\mathrm{s} - \mathrm{t}) > 0. \tag{3.3}$$

Здесь функция Музилака—Орлича $M(\mathrm{x}, z)$ *подчиняется условиям* $(M1)$, $(M2)$, *сопряженная к* M *функция* $\overline{M}(\mathrm{x}, z)$ *удовлетворяет условию* $(M1)$, $\mathrm{s} \cdot \mathrm{t} = \sum\limits_{i=1}^n s_i t_i$, $|\mathrm{s}| = \left(\sum\limits_{i=1}^n s_i^2\right)^{1/2}$.

Предполагается, что функция $b(\mathrm{x}, s_0)$ — неубывающая по $s_0 \in \mathbb{R}$, $b(\mathrm{x}, 0) = 0$ для п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$, поэтому для п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$, $s_0 \in \mathbb{R}$ справедливо неравенство

$$b(\mathrm{x}, s_0) s_0 \geqslant 0. \tag{3.4}$$

Сформулируем дополнительное условие, которое используется в теореме существования. Будем считать, что для любого $k > 0$

$$\sup_{|s_0| \leqslant k} |b(\mathrm{x}, s_0)| = \Phi_k(\mathrm{x}) \in L_1(\Omega). \tag{3.5}$$

Заметим, что в работах [4, 22] вместо условий (3.1), (3.2) на функцию $\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s})$ накладывается более сильное условие:

$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) \cdot \mathrm{s} \geqslant \overline{a}(M(\mathrm{x}, |\mathrm{s}|) + \overline{M}(\mathrm{x}, |\mathrm{a}|)), \quad \overline{a} \in (0, 1).$$

Условию (M) удовлетворяют, например, функции

$$a_i(\mathrm{x}, \mathrm{s}) = M(\mathrm{x}, |\mathrm{s}|)\frac{s_i}{|\mathrm{s}|^2} + \psi_i(\mathrm{x}), \quad \psi_i \in E_{\overline{M}}(\Omega), \quad i = 1, \ldots, n.$$

Определим срезающую функцию $T_k(r) = \max(-k, \min(k, r))$. Через $\mathring{\mathcal{T}}_M^1(\Omega)$ обозначим множество измеримых функций $u : \Omega \to \mathbb{R}$ таких, что $T_k(u) \in \mathring{V}_M(\Omega)$ при любом $k > 0$. Заметим, что, как следствие из [9, лемма 2.1], для каждой функции $u \in \mathring{\mathcal{T}}_M^1(\Omega)$ существует единственная измеримая функция $Z_u : \Omega \to \mathbb{R}^n$ такая, что

$$\nabla T_k(u) = \chi_{\{\Omega : |u| < k|\}} Z_u \quad \text{для почти каждого } \mathrm{x} \in \Omega \text{ и для каждого } k > 0,$$

где χ_Q — характеристическая функция измеримого множества Q. Обозначим через $Z_u = \nabla u$ обобщенный градиент u.

Таким образом, для любой функции $u \in \mathring{\mathcal{T}}_M^1(\Omega)$ и любого $k > 0$ имеем:

$$\nabla T_k(u) = \chi_{\{\Omega : |u| < k\}} \nabla u \in \mathrm{L}_M(\Omega). \tag{3.6}$$

Введем обозначение $\langle u \rangle = \int\limits_\Omega u d\mathrm{x}$.

Определение 3.1. *Энтропийным решением* задачи (1.1), (1.2) называется функция $u \in \mathring{\mathcal{T}}_M^1(\Omega)$ такая, что

1) $b(\mathrm{x}, u) \in L_1(\Omega)$;

2) $\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u)\chi_{\{\Omega:|u|<k\}} \in \mathrm{L}_{\overline{M}}(\Omega)$ при всех $k > 0$;
3) при всех $k > 0$ и $\xi \in C_0^1(\Omega)$ справедливо неравенство:

$$\langle (b(\mathrm{x}, u) - f)T_k(u-\xi)\rangle + \langle \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u-\xi)\rangle \leqslant 0. \tag{3.7}$$

Определение 3.2. *Ренормализованным решением* задачи (1.1), (1.2) называется функция $u \in \mathring{\mathcal{T}}_M^1(\Omega)$ такая, что
1) $b(\mathrm{x}, u) \in L_1(\Omega)$;
2) $\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u)\chi_{\{\Omega:|u|<k\}} \in \mathrm{L}_{\overline{M}}(\Omega)$ при всех $k > 0$;
3) имеется предел

$$\lim_{h\to\infty} \int\limits_{\{\Omega:h\leqslant|u|<h+1\}} M(\mathrm{x}, d|\nabla u|)d\mathrm{x} = 0; \tag{3.8}$$

4) для любой функции $S \in C_0^1(\mathbb{R})$ и любой функции $\xi \in C_0^1(\Omega)$ справедливо равенство:

$$\langle (b(\mathrm{x}, u) - f)S(u)\xi\rangle + \langle \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot (S'(u)\xi\nabla u + S(u)\nabla\xi)\rangle = 0. \tag{3.9}$$

Основными результатами работы являются теоремы 3.1–3.3, в которых предполагается, что область Ω липшицева и выполнено условие (M).

Теорема 3.1. *Функция $u : \Omega \to \mathbb{R}$ является ренормализованным решением задачи* (1.1), (1.2) *тогда и только тогда, когда эта функция — энтропийное решение задачи* (1.1), (1.2)*. При этом в интегральном неравенстве* (3.7) *имеет место знак равенства*

$$\langle (b(\mathrm{x}, u) - f)T_k(u-\xi)\rangle + \langle \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u-\xi)\rangle = 0. \tag{3.7*}$$

Теорема 3.2. *Если u^1, u^2 — ренормализованные или энтропийные решения задачи* (1.1), (1.2), *то $u^1 = u^2$ п.в. в Ω.*

Теорема 3.3. *Пусть дополнительно выполнено условие* (3.5)*, тогда существует энтропийное решение задачи* (1.1), (1.2).

Из теорем 3.1–3.3 следуют эквивалентность, существование и единственность энтропийного и ренормализованного решений задачи (1.1), (1.2).

4. Подготовительные сведения

В этом разделе будут установлены некоторые свойства энтропийного и ренормализованного решений задачи (1.1), (1.2) и приведены вспомогательные леммы. Предполагается, что область Ω липшицева и выполнено условие (M). Все постоянные, встречающиеся ниже в работе, положительны.

Пользуясь выпуклостью функции $\overline{M}$, из (3.2) выводим оценку:

$$\overline{M}\left(\mathrm{x}, \frac{|\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s})|}{2\widehat{a}}\right) \leqslant \frac{1}{2}M(\mathrm{x}, d|\mathrm{s}|) + \frac{1}{2}\overline{M}\left(\mathrm{x}, \frac{\psi}{\widehat{a}}\right) = \frac{1}{2}M(\mathrm{x}, d|\mathrm{s}|) + \frac{1}{2}\Psi(\mathrm{x}) \tag{4.1}$$

с функцией $\Psi \in L_1(\Omega)$.

Предложение 4.1. *Пусть $v : \Omega \to \mathbb{R}$ измеримая функция такая, что при всех $k \geqslant 1$ имеем $M(\mathrm{x}, d|\nabla T_k(v)|) \in L_1(\Omega)$ и справедливо неравенство*

$$\int\limits_{\{\Omega:|v|<k\}} M(\mathrm{x}, d|\nabla v|)d\mathrm{x} \leqslant C_1 k. \tag{4.2}$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ найдутся $k_0(C_1, n)$, $h_0(C_1, n)$ такие, что справедливы неравенства

$$\mathrm{meas}\,(\{\Omega : |v| \geqslant k\}) < \varepsilon, \quad k \geqslant k_0, \tag{4.3}$$

$$\mathrm{meas}\,(\{\Omega : |\nabla v| \geqslant h\}) < \varepsilon, \quad h \geqslant h_0. \tag{4.4}$$

Соотношение (4.3) доказано в [22, Proposition 3.1], а (4.4) устанавливается аналогично в [22, Theorem 1.6].

Лемма 4.1. *Пусть u — энтропийное решение задачи* (1.1), (1.2), *тогда*

$$\operatorname{meas}(\{\Omega : |u| \geqslant k\}) \to 0, \quad k \to \infty, \tag{4.5}$$

$$\operatorname{meas}(\{\Omega : |\nabla u| \geqslant h\}) \to 0, \quad h \to \infty. \tag{4.6}$$

Кроме того, справедливо соотношение

$$\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \int\limits_{\{\Omega:|u|<k\}} M(\mathrm{x}, d|\nabla u|)d\mathrm{x} = 0. \tag{4.7}$$

Доказательство. Неравенство (3.7) при $\xi = 0$ принимает вид

$$\int\limits_{\Omega} b(\mathrm{x}, u)T_k(u)d\mathrm{x} + \int\limits_{\{\Omega:|u|<k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \nabla u d\mathrm{x} \leqslant \int\limits_{\Omega} fT_k(u)d\mathrm{x}.$$

Учитывая неравенства (3.1), (3.4), выводим оценку

$$\overline{a} \int\limits_{\{\Omega:|u|<k\}} M(\mathrm{x}, d|\nabla u|)d\mathrm{x} \leqslant \int\limits_{\Omega} |f||T_k(u)|d\mathrm{x} + \|\phi\|_1 \leqslant k\|f\|_1 + \|\phi\|_1. \tag{4.8}$$

Отсюда, применяя предложение 4.1, устанавливаем (4.5), (4.6). □

Перепишем неравенство (4.8) в виде

$$\frac{\overline{a}}{k} \int\limits_{\{\Omega:|u|<k\}} M(\mathrm{x}, d|\nabla u|)d\mathrm{x} \leqslant \int\limits_{\Omega} |f|\frac{|T_k(u)|}{k}d\mathrm{x} + \frac{\|\phi\|_1}{k}. \tag{4.9}$$

Поскольку $\dfrac{|T_k(u)|}{k} \leqslant 1$, $\dfrac{T_k(u)}{k} \to 0$ п.в. в Ω при $k \to \infty$ и $f \in L_1(\Omega)$, то по теореме Лебега имеем:

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega} |f|\frac{|T_k(u)|}{k}d\mathrm{x} = 0. \tag{4.10}$$

Соединяя (4.9) и (4.10), выводим (4.7).

Лемма 4.2 (см. [10, Lemma 2]). *Пусть функции $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset L_M(\Omega)$ таковы, что*

$$\|v^j\|_M \leqslant C, \quad j \in \mathbb{N},$$

$$v^j \to v \quad \textit{п.в. в} \quad \Omega, \quad j \to \infty.$$

Тогда $v \in L_M(\Omega)$ и $v^j \rightharpoonup v$, $j \to \infty$, в топологии $\sigma(L_M, E_{\overline{M}})$ пространства $L_M(\Omega)$.

Приведем теорему Витали в следующей форме (см. [1, гл. III, § 6, теорема 15]).

Лемма 4.3. *Пусть последовательность $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset L_1(\Omega)$, и*

$$v^j \to v \quad \textit{п.в. в} \quad \Omega, \quad j \to \infty.$$

Тогда для сходимости

$$v^j \to v \quad \textit{сильно в} \quad L_1(\Omega), \quad j \to \infty,$$

необходимо и достаточно, чтобы выполнялось условие равномерной интегрируемости:

$$\lim_{\operatorname{meas}(Q)\to 0} \int\limits_{Q} |v^j(\mathrm{x})|d\mathrm{x} = 0 \quad \textit{равномерно по} \quad j \in \mathbb{N}.$$

Следствием теоремы Витали является следующая лемма.

Лемма 4.4 (см. [6, Lemma 2]). *Пусть v, $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset L_M(\Omega)$ и*

$$v^j \xrightarrow{M} v \quad \textit{модулярно в} \quad L_M(\Omega), \quad j \to \infty.$$

Тогда $v^j \rightharpoonup v$, $j \to \infty$, в топологии $\sigma(L_M, L_{\overline{M}})$ пространства $L_M(\Omega)$.

Лемма 4.5. *Пусть функции* $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}\subset L_\infty(\Omega)$ *таковы, что* $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *ограничена в* $L_\infty(\Omega)$ *и*

$$v^j\to v \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \quad j\to\infty.$$

Тогда $v\in L_\infty(\Omega)$ *и* $v^j\rightharpoonup v$, $j\to\infty$, *в топологии* $\sigma(L_\infty,L_1)$ *пространства* $L_\infty(\Omega)$.

Если, кроме того, $g\in L_M(\Omega)(E_M(\Omega))$, *то*

$$v^j g\to vg \quad \text{модулярно (сильно) в} \quad L_M(\Omega)(E_M(\Omega)), \quad j\to\infty.$$

Доказательство леммы 4.5 следует из теоремы Лебега.

Лемма 4.6. *Если* u *— энтропийное решение задачи* (1.1), (1.2), *то неравенство* (3.7) *справедливо для любой функции* $\xi\in\mathring{V}_M(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$.

Доказательство аналогично [4, лемма 8].

Лемма 4.7. *Пусть* u *— энтропийное решение задачи* (1.1), (1.2), *тогда при всех* $k>0$ *справедливо соотношение*

$$\lim_{h\to\infty}\int\limits_{\{\Omega:h\leqslant|u|<h+k\}} M(\mathrm{x},d|\nabla u|)d\mathrm{x}=0. \tag{4.11}$$

Доказательство. Положив в неравенстве (3.7) $\xi=T_h(u)$, будем иметь

$$\int\limits_{\{\Omega:h\leqslant|u|<k+h\}}\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)\cdot\nabla u d\mathrm{x}+\int\limits_{\{\Omega:h\leqslant|u|\}} b(\mathrm{x},u)T_k(u-T_h(u))d\mathrm{x}\leqslant k\int\limits_{\{\Omega:h\leqslant|u|\}}|f|d\mathrm{x}.$$

Ввиду (3.4) справедливо неравенство

$$b(\mathrm{x},u)T_k(u-T_h(u))\geqslant 0.$$

Учитывая (3.1), для любого $k>0$ устанавливаем:

$$\overline{a}\int\limits_{\{\Omega:h\leqslant|u|<k+h\}} M(\mathrm{x},d|\nabla u|)d\mathrm{x}\leqslant\int\limits_{\{\Omega:h\leqslant|u|\}}(k|f|+\phi)d\mathrm{x}.$$

Отсюда, ввиду того, что $f,\phi\in L_1(\Omega)$, применяя (4.5) и переходя к пределу при $h\to\infty$, выводим соотношение (4.11). □

Лемма 4.8. *Если* u *является ренормализованным решением задачи* (1.1), (1.2), *то равенство* (3.9) *справедливо для любой функции* $S\in C_0^1(\mathbb{R})$ *и любой функции* $\xi\in\mathring{V}_M(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$.

Доказательство аналогично [4, лемма 9].

Лемма 4.9. *Пусть* u *— ренормализованное решение задачи* (1.1), (1.2), *тогда справедливы соотношения* (4.5)–(4.7).

Доказательство. Зафиксируем $k>0$ и пусть $\sigma>k$. Определим функцию $S_\sigma\in C^1(\mathbb{R})$ такую, что $S_\sigma(r)=1$, $|r|\leqslant\sigma$, $S_\sigma(r)=0$, $|r|\geqslant\sigma+1$, $0\leqslant S_\sigma\leqslant 1$ на $\mathbb{R}$. Очевидно, что $\operatorname{supp} S_\sigma\subset[-\sigma-1,\sigma+1]$ и $\operatorname{supp} S'_\sigma\subset[-\sigma-1,-\sigma]\cup[\sigma,\sigma+1]$. Положим в (3.9) $S=S_\sigma$, $\xi=T_k(u)$, получим

$$\begin{aligned}J_1+J_2+J_3=\langle\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)S_\sigma(u)\cdot\nabla T_k(u)\rangle+\left\langle\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)S'_\sigma(u)\cdot\nabla u T_k(u)\right\rangle+\\+\langle b(\mathrm{x},u)S_\sigma(u)T_k(u)\rangle=\langle fS_\sigma(u)T_k(u)\rangle.\end{aligned} \tag{4.12}$$

Оценим каждый интеграл:

$$J_1=\int\limits_\Omega\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)S_\sigma(u)\cdot\nabla T_k(u)d\mathrm{x}=\int\limits_{\{\Omega:|u|<k\}}\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)\cdot\nabla u d\mathrm{x}, \tag{4.13}$$

$$|J_2|\leqslant C_0\int\limits_{\{\Omega:\sigma\leqslant|u|\leqslant\sigma+1\}}|T_k(u)||\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)\cdot\nabla u|d\mathrm{x}\leqslant C_2k\int\limits_{\{\Omega:\sigma\leqslant|u|\leqslant\sigma+1\}}|\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)||\nabla u|d\mathrm{x}. \tag{4.14}$$

Используя (3.4), выводим неравенство

$$J_3=\int\limits_\Omega b(\mathrm{x},u)S_\sigma(u)T_k(u)d\mathrm{x}\geqslant 0. \tag{4.15}$$

Соединяя (4.12)–(4.15), установим неравенство

$$\int\limits_{\{\Omega:|u|<k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)\cdot\nabla u d\mathrm{x} \leqslant \int\limits_{\Omega} |f||T_k(u)|d\mathrm{x} + C_0 k \int\limits_{\{\Omega:\sigma\leqslant|u|\leqslant\sigma+1\}} |\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)||\nabla u|d\mathrm{x}.$$

Далее, применяя неравенство (2.3), используя оценки (3.1), (4.1), установим соотношения:

$$\overline{a} \int\limits_{\{\Omega:|u|<k\}} M(\mathrm{x},d|\nabla u|)d\mathrm{x} \leqslant \int\limits_{\Omega} |f||T_k(u)|d\mathrm{x} + \|\phi\|_1 + \frac{\widehat{a}}{d}C_2 k \int\limits_{\{\Omega:\sigma\leqslant|u|\leqslant\sigma+1\}} (3M(\mathrm{x},d|\nabla u|)+\Psi)\,d\mathrm{x}. \tag{4.16}$$

Учитывая условие 3) определения 3.2, перейдем к пределу при $\sigma\to\infty$, получим неравенство

$$\int\limits_{\{\Omega:|u|<k\}} M(\mathrm{x},d|\nabla u|)d\mathrm{x} \leqslant C_3 + C_4 k \leqslant C_5 k, \quad k\geqslant 1.$$

Отсюда, согласно предложению 4.1, устанавливаем (4.5), (4.6).

Теперь, снова применяя условие 3) определения 3.2 и (4.5), перейдем к пределу в (4.16) при $\sigma\to\infty$, установим неравенство (4.8). Соотношение (4.7) является следствием неравенства (4.8) (см. лемму 4.1). □

Лемма 4.10 (см. [12, лемма 2]). *Пусть* $(X,\mathcal{T},\mathrm{meas})$ — *измеримое пространство такое, что* $\mathrm{meas}(X)<\infty$. *Пусть* $\gamma: X\to[0,+\infty]$ — *измеримая функция такая, что* $\mathrm{meas}(\{\mathrm{x}\in X:\gamma(\mathrm{x})=0\})=0$. *Тогда для любого* $\varepsilon>0$ *существует* $\delta>0$ *такое, что неравенство*

$$\int\limits_Q \gamma(\mathrm{x})d\mathrm{x} < \delta$$

влечет $\mathrm{meas}\,(Q)<\varepsilon$.

Лемма 4.11 (см. [19, Lemma A.4]). *Пусть* $v^j:\Omega\to\mathbb{R},\ j\in\mathbb{N}$ — *измеримые функции такие, что*

$$\sup_{j\in\mathbb{N}}\int\limits_{\Omega} M(\mathrm{x},v^j)d\mathrm{x}<\infty.$$

Тогда последовательность $\{v^j\}_{j\in\mathbb{N}}$ *равномерно интегрируема в* $L_1(\Omega)$.

Замечание 4.1. Пусть $v^j,\ v:\Omega\to\mathbb{R},\ j\in\mathbb{N}$ — измеримые функции такие, что $v^j\to v$ п.в. в Ω, $j\to\infty$. Тогда $\chi_{\{\Omega:|v^j|\leqslant k\}}\to\chi_{\{\Omega:|v|\leqslant k\}}$ п.в. на Ω, $j\to\infty$ для таких k, что

$$\mathrm{meas}(\{\Omega:|v|=k\})=0. \tag{4.17}$$

Для области Ω с конечной мерой таких k, для которых условие (4.17) не выполнено, может быть не более, чем счетное число (см. [14, Lemma 9]). Положительные числа k, для которых выполнено условие (4.17), будем называть «*правильными*» для функции v.

5. Эквивалентность энтропийного и ренормализованного решений

Для уравнения (1.3) со степенной нелинейностью[1] эквивалентность энтропийного и ренормализованного решений доказана А. А. Ковалевским в работе [3, гл. I, теорема 1.1.6].

Доказательство теоремы 3.1. Пусть $u\in\mathring{\mathcal{T}}^1_M(\Omega)$ — ренормализованное решение задачи (1.1), (1.2). Зафиксируем произвольные $\varphi\in\mathring{V}_M(\Omega)\cap L_\infty(\Omega)$ и $k>0$. Пусть $\widehat{k}=k+\|\varphi\|_\infty$, тогда справедливо неравенство

$$|\nabla T_k(u-\varphi)|\leqslant|\nabla T_{\widehat{k}}(u)|+|\nabla\varphi| \quad \text{для п.в. } \mathrm{x}\in\Omega.$$

Поскольку $T_{\widehat{k}}(u)\in\mathring{V}_M(\Omega)$, то имеем:

$$T_k(u-\varphi)\in\mathring{V}_M(\Omega), \tag{5.1}$$

$$\nabla T_k(u-\varphi)=(\nabla u-\nabla\varphi)\chi_{\{\Omega:|u-\varphi|<k\}} \quad \text{для п.в. } \mathrm{x}\in\Omega.$$

[1] функция a удовлетворяет условиям (3.1), (3.2) при $M(\mathrm{x},z)=|z|^p,\ p\in(1,n)$

Определим функцию $h \in C_0^1(\mathbb{R})$ такую, что $h(r) = 1$ при $|r| \leqslant 1$, $h(r) = 0$ при $|r| \geqslant 2$, $0 \leqslant h \leqslant 1$ на $\mathbb{R}$. Для любого $\sigma > 0$ положим $h_\sigma(r) = h(r/\sigma),\ r \in \mathbb{R}$.

Запишем (3.9) с $S(r) = h_\sigma(r)$, $\xi = T_k(u - \varphi)$:

$$I_1 + I_2 = \langle \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \nabla u h'_\sigma(u) T_k(u-\varphi)\rangle + \langle(\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u-\varphi) + (b(\mathrm{x}, u) - f) T_k(u-\varphi)) h_\sigma(u)\rangle = 0. \tag{5.2}$$

Используя свойства функции h_σ, для любого $\sigma > 0$ устанавливаем

$$|I_1| \leqslant C_1 \frac{k}{\sigma} \int\limits_{\{\Omega:\sigma\leqslant|u|<2\sigma\}} |\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u)||\nabla u| d\mathrm{x}.$$

Применяя (2.3), (4.1), выводим неравенство

$$|I_1| \leqslant C_2 \frac{k}{\sigma} \int\limits_{\{\Omega:\sigma\leqslant|u|<2\sigma\}} (M(\mathrm{x}, d|\nabla u|) + \Psi(\mathrm{x}))\, d\mathrm{x}.$$

Отсюда благодаря (4.7) заключаем, что

$$\lim_{\sigma\to\infty} I_1 = 0.$$

Поскольку $f,\ b(\mathrm{x}, u),\ \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u)\chi_{\{\Omega:|u|<\widehat{k}\}} \cdot \nabla T_k(u-\varphi) \in L_1(\Omega)$ (см. (5.1) и пункты 1), 2) определения 3.2), то в интеграле I_2 согласно теореме Лебега можно перейти к пределу при $\sigma \to \infty$. В итоге выводим интегральное тождество

$$\langle(\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \nabla T_k(u-\varphi) + (b(\mathrm{x}, u) - f) T_k(u-\varphi)\rangle = 0.$$

Следовательно, u — энтропийное решение задачи (1.1), (1.2).

Пусть $u \in \mathring{\mathcal{T}}_M^1(\Omega)$ — энтропийное решение задачи (1.1), (1.2) и $S \in C_0^1(\mathbb{R})$, $\varphi \in \mathring{V}_M(\Omega) \cap L_\infty(\Omega)$. Существуют числа $L, L_1 > 0$ такие, что $\operatorname{supp} S \subset [-L, L]$ и $|S(r)| \leqslant L_1$ для любых $r \in \mathbb{R}$. Зафиксируем $k > L_1\|\varphi\|_\infty$, и пусть $m \in \mathbb{N},\ m > L$. Положим

$$\varphi_m = T_m(u) - S(T_m(u))\varphi \in \mathring{V}_M(\Omega) \cap L_\infty(\Omega),$$

имеем

$$\nabla\varphi_m = (\nabla u - S'(u)\varphi\nabla u - S(u)\nabla\varphi)\chi_{\{\Omega:|u|<m\}} \quad \text{п.в. на} \quad \Omega. \tag{5.3}$$

Положим в (3.7) $\xi = \varphi_m$, получим

$$\int\limits_{\{\Omega:|u-\varphi_m|<k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot (\nabla u - \nabla\varphi_m) d\mathrm{x} + \int\limits_\Omega (b(\mathrm{x}, u) - f) T_k(u - \varphi_m) d\mathrm{x} \leqslant 0.$$

Если $|u(\mathrm{x})| < m$, то для п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$ верно неравенство $|u - \varphi_m| = |S(u)||\varphi(\mathrm{x})| \leqslant \|\varphi\|_\infty L_1 < k$. Следовательно, для п.в. $\mathrm{x} \in \Omega$ имеет место вложение:

$$\{\Omega : |u| < L\} \subset \{\Omega : |u| < m\} \subset \{\Omega : |u - \varphi_m| < k\}.$$

Тогда, используя (5.3) установим

$$\int\limits_{\{\Omega:|u-\varphi_m|<k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \nabla u (1 - \chi_{\{\Omega:|u|<m\}}) d\mathrm{x} + \int\limits_{\{\Omega:|u|<L\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \big(\nabla u\varphi S'(u) + \nabla\varphi S(u)\big)\, d\mathrm{x} +$$

$$+ \int\limits_\Omega (b(\mathrm{x}, u) - f) T_k(u - \varphi_m) d\mathrm{x} = I_m^1 + I_m^2 + I_m^3 \leqslant 0. \tag{5.4}$$

Учитывая то, что $S(r) = S'(r) = 0$ для $|r| \geqslant L$, получаем

$$I_m^2 = \int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \big(\nabla u\varphi S'(u) + \nabla\varphi S(u)\big)\, d\mathrm{x}. \tag{5.5}$$

Далее, применяя (3.1), выводим

$$I_1^m = \int\limits_{\{\Omega:|u-\varphi_m|<k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \nabla u (1 - \chi_{\{\Omega:|u|<m\}}) d\mathrm{x} =$$

$$= \int\limits_{\{\Omega:|u-\varphi_m|<k\}} (\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)\cdot\nabla u+\phi)\,(1-\chi_{\{\Omega:|u|<m\}})d\mathrm{x} - \int\limits_{\{\Omega:|u-\varphi_m|<k\}} \phi(1-\chi_{\{\Omega:|u|<m\}})d\mathrm{x} \geqslant$$

$$\geqslant -\int\limits_{\Omega} \phi(1-\chi_{\{\Omega:|u|<m\}})d\mathrm{x}. \tag{5.6}$$

Соединяя (5.4), (5.5), (5.6), устанавливаем неравенство

$$\int\limits_{\Omega} \mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)\cdot\big(\nabla u\varphi S'(u)+\nabla\varphi S(u)\big)\,d\mathrm{x}+$$

$$+\int\limits_{\Omega}(b(\mathrm{x},u)-f)T_k(u-T_m(u)+S(T_m(u))\varphi)d\mathrm{x} \leqslant \int\limits_{\Omega}\phi(1-\chi_{\{\Omega:|u|<m\}})d\mathrm{x}. \tag{5.7}$$

Учитывая принадлежность $b(\mathrm{x},u), f, \phi \in L_1(\Omega)$ и применяя теорему Лебега, в неравенстве (5.7) перейдем к пределу $m\to\infty$, получим

$$\langle \mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)\cdot\big(\nabla u\varphi S'(u)+\nabla\varphi S(u)\big)\rangle + \langle (b(\mathrm{x},u)-f)S(u)\varphi\rangle \leqslant 0.$$

Очевидно, что такое же неравенство справедливо для $-\varphi$. Следовательно, для u выполняется равенство (3.9). Из леммы 4.7 следует справедливость соотношения (3.8). Таким образом, доказано, что u — ренормализованное решение задачи (1.1), (1.2). ☐

6. Единственность энтропийного и ренормализованного решений

Доказательство теоремы 3.2. Единственность энтропийного решения доказывается аналогично доказательству [4, теорема 4].

Пусть u^1, u^2 — ренормализованные решения задачи (1.1), (1.2). Запишем (3.9) для u^1 и u^2 с $S=h_\sigma$, $\xi = T_k(u^1-u^2)h_\sigma(u^2)$ и $\xi = T_k(u^1-u^2)h_\sigma(u^1)$, соответственно, затем вычтем из первого второе, получим равенство

$$\begin{aligned} J_1+J_2+J_3+J_4 &= \big\langle\big(\mathrm{A}^1-\mathrm{A}^2\big)\cdot\nabla T_k(u^1-u^2)h_\sigma(u^1)h_\sigma(u^2)\big\rangle + \\ &+\big\langle\big(\mathrm{A}^1-\mathrm{A}^2\big)\cdot\nabla u^1 T_k(u^1-u^2)h'_\sigma(u^1)h_\sigma(u^2)\big\rangle + \\ &+\big\langle\big(\mathrm{A}^1-\mathrm{A}^2\big)\cdot\nabla u^2 T_k(u^1-u^2)h_\sigma(u^1)h'_\sigma(u^2)\big\rangle + \\ &+\big\langle\big(B^1-B^2\big)\,T_k(u^1-u^2)h_\sigma(u^1)h_\sigma(u^2)\big\rangle = 0. \end{aligned} \tag{6.1}$$

Здесь $\mathrm{A}^i(\mathrm{x}) = \mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u^i),\ B^i(\mathrm{x}) = b(\mathrm{x},u^i),\ i=1,2.$

Оценим каждый интеграл $J_k,\ k=1,2,3,4$. Учитывая (2.3), (4.1), выводим неравенство

$$\begin{aligned} |J_2| \leqslant 2C_1\frac{k}{\sigma}\Big(\big\|\overline{M}\left(\mathrm{x},|\mathrm{A}^1|/(2\widehat{a})\right)\big\|_{1,\{\Omega:\sigma\leqslant|u^1|<2\sigma\}} + \big\|\overline{M}\left(\mathrm{x},|\mathrm{A}^2|/(2\widehat{a})\right)\big\|_{1,\{\Omega:|u^2|<2\sigma\}} + \\ + 2\,\big\|M(\mathrm{x},d|\nabla u^1|)\big\|_{1,\{\Omega:\sigma\leqslant|u^1|<2\sigma\}}\Big) \leqslant \\ \leqslant C_1\frac{k}{\sigma}\left(5\|M(\mathrm{x},d|\nabla u^1|)\|_{1,\{\Omega:|u^1|<2\sigma\}} + 2\|\Psi\|_1 + \|M(\mathrm{x},d|\nabla u^2|)\|_{1,\{\Omega:|u^2|<2\sigma\}}\right). \end{aligned}$$

Благодаря (4.7) имеем:

$$\lim_{\sigma\to\infty}|J_2| = 0. \tag{6.2}$$

Аналогично устанавливается, что

$$\lim_{\sigma\to\infty}|J_3| = 0. \tag{6.3}$$

Пользуясь монотонностью функции $b(\mathrm{x},s_0)$, выводим

$$J_4 \geqslant 0. \tag{6.4}$$

Соединяя (6.1), (6.4), устанавливаем неравенство

$$J_1 = \int\limits_{\{\Omega:|u^1-u^2|<k\}} \big(\mathrm{A}^1-\mathrm{A}^2\big)\cdot\nabla(u^1-u^2)h_\sigma(u^1)h_\sigma(u^2)d\mathrm{x} \leqslant |J_2|+|J_3|.$$

Пользуясь леммой Фату и соотношениями (6.2), (6.3), выполняя в последнем неравенстве предельный переход при $\sigma \to \infty$, устанавливаем неравенство

$$\int\limits_{\{\Omega:|u^1-u^2|<k\}} (\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u^1)-\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u^2)\cdot\nabla(u^1-u^2)d\mathrm{x} \leqslant 0.$$

Это противоречит условию (3.3), поэтому $\nabla(u^1-u^2)=0$ п.в. в $\{\Omega:|u^1-u^2|<k\}$ при любом $k>0$. Следовательно, $\nabla T_k(u^1-u^2)=0$ п.в. в Ω. Отсюда, ввиду принадлежностей $T_k(u^1),T_k(u^2)\in \mathring{W}_1^1(\Omega)$, заключаем, что $T_k(u^1-u^2)=0$ п.в. в Ω для любого $k>0$. Ввиду произвольности k устанавливаем, что $u^1=u^2$ п.в. в Ω. $\square$

7. Существование энтропийного решения

Доказательство теоремы 3.3. Запишем доказательство теоремы для неограниченной области Ω.

Шаг 1. Энтропийное решение строится как предел последовательности слабых решений аппроксимационной задачи для уравнения

$$-\mathrm{div}\,\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u)+b^m(\mathrm{x},u)=f^m(\mathrm{x}),\quad \mathrm{x}\in\Omega(m),\quad m\in\mathbb{N}, \tag{7.1}$$

с функциями

$$f^m(\mathrm{x})=T_mf(\mathrm{x})\chi_{\Omega(m)},\quad b^m(\mathrm{x},s_0)=T_mb(\mathrm{x},s_0)\chi_{\Omega(m)}.$$

Несложно показать, что

$$f^m\to f \quad \text{в} \quad L_1(\Omega),\quad m\to\infty, \tag{7.2}$$

и при этом

$$|f^m(\mathrm{x})|\leqslant|f(\mathrm{x})|,\quad |f^m(\mathrm{x})|\leqslant m\chi_{\Omega(m)},\quad \mathrm{x}\in\Omega,\quad m\in\mathbb{N}. \tag{7.3}$$

Очевидно, что

$$|b^m(\mathrm{x},s_0)|\leqslant|b(\mathrm{x},s_0)|,\quad |b^m(\mathrm{x},s_0)|\leqslant m\chi_{\Omega(m)},\quad \mathrm{x}\in\Omega,\quad s_0\in\mathbb{R}. \tag{7.4}$$

Кроме того, применяя (3.4), устанавливаем неравенство

$$b^m(\mathrm{x},s_0)s_0\geqslant 0,\quad \mathrm{x}\in\Omega,\quad s_0\in\mathbb{R}. \tag{7.5}$$

Для каждого $m\in\mathbb{N}$ существует обобщенное решение $u^m\in\mathring{V}_M(\Omega(m))$ уравнения (7.1) (см. [11, Theorem 13]). Продолжим u^m нулем на $\Omega\setminus\Omega(m)$, тогда для любой функции $v\in\mathring{V}_M^1(\Omega(l))\cap L_\infty(\Omega(l))$, $l\leqslant m$, выполняется интегральное равенство

$$\langle(b^m(\mathrm{x},u^m)-f^m(\mathrm{x}))\,v\rangle+\langle\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u^m)\cdot\nabla v\rangle=0,\quad m\in\mathbb{N}. \tag{7.6}$$

Шаг 2. В этом шаге установим априорные оценки для последовательности $\{u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$.

Положив в (7.6) $v=T_{k,h}(u^m)=T_k(u^m-T_h(u^m))$, $h,k>0$, будем иметь

$$\int\limits_{\{h\leqslant|u^m|<k+h\}}\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u^m)\cdot\nabla u^m d\mathrm{x}+\int\limits_{\{|u^m|\geqslant h\}}b^m(\mathrm{x},u^m)T_{k,h}(u^m)d\mathrm{x}\leqslant k\int\limits_{\{|u^m|\geqslant h\}}|f^m|d\mathrm{x}. \tag{7.7}$$

Благодаря (7.5) на множестве $\{\Omega:h\leqslant|u^m|\}$ справедливо неравенство

$$b^m(\mathrm{x},u^m)T_{k,h}(u^m)\geqslant 0.$$

Учитывая это, из (7.7), применяя (7.3), выводим неравенство

$$\int\limits_{\{h\leqslant|u^m|<k+h\}}\mathrm{a}(\mathrm{x},\nabla u^m)\cdot\nabla u^m d\mathrm{x}+k\int\limits_{\{|u^m|\geqslant k+h\}}|b^m(\mathrm{x},u^m)|d\mathrm{x}\leqslant k\int\limits_{\{|u^m|\geqslant h\}}|f|d\mathrm{x}.$$

Отсюда, используя (3.1), устанавливаем неравенство

$$\int\limits_{\{|u^m|\geqslant k+h\}}|b^m(\mathrm{x},u^m)|d\mathrm{x}\leqslant\int\limits_{\{|u^m|\geqslant h\}}(|f|+\phi)\,d\mathrm{x},\quad k\geqslant 1,\quad m\in\mathbb{N}. \tag{7.8}$$

Теперь в качестве пробной функции в (7.6) возьмем $T_k(u^m)$. Выполняя аналогичные преобразования, устанавливаем неравенство

$$\int\limits_{\{|u^m|<k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_k(u^m)) \cdot \nabla u^m d\mathrm{x} + k \int\limits_{\{|u^m|\geqslant k\}} |b^m(\mathrm{x}, u^m)| d\mathrm{x} \leqslant C_1 k, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, применяя (3.1), выводим

$$\overline{a} \int\limits_{\{|u^m|<k\}} M(\mathrm{x}, d|\nabla u^m|) d\mathrm{x} + k \int\limits_{\{|u^m|\geqslant k\}} |b^m(\mathrm{x}, u^m)| d\mathrm{x} \leqslant C_1 k + C_2. \tag{7.9}$$

И наконец, благодаря (7.4), (3.5), устанавливаем:

$$\sup_{|u^m|\leqslant k} |b^m(\mathrm{x}, u^m)| \leqslant \sup_{|u^m|\leqslant k} |b(\mathrm{x}, u^m)| = \Phi_k(\mathrm{x}) \in L_1(\Omega), \quad m \in \mathbb{N}. \tag{7.10}$$

Из оценок (7.9), (7.10) имеем:

$$\int\limits_{\Omega} |b^m(\mathrm{x}, u^m)| d\mathrm{x} \leqslant \int\limits_{\Omega} \Phi_k(\mathrm{x}) d\mathrm{x} + \int\limits_{\{|u^m|\geqslant k\}} |b^m(\mathrm{x}, u^m)| d\mathrm{x} \leqslant C_3(k). \tag{7.11}$$

Кроме того, из (7.9) следует оценка

$$\int\limits_{\{|u^m|<k\}} M(\mathrm{x}, d|\nabla u^m|) d\mathrm{x} = \int\limits_{\Omega} M(\mathrm{x}, d|\nabla T_k(u^m)|) d\mathrm{x} \leqslant C_4 k, \quad k \geqslant 1. \tag{7.12}$$

Соединяя (4.1), (7.12) выводим оценку

$$\int\limits_{\Omega} \overline{M}\left(\mathrm{x}, \frac{|\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_k(u^m)|}{2\widehat{a}}\right) d\mathrm{x} \leqslant C_5(k). \tag{7.13}$$

Шаг 3. Из оценки (7.12), применяя предложение 4.1, имеем:

$$\mathrm{meas}\left(\{\Omega : |u^m| \geqslant k\}\right) \to 0 \quad \text{равномерно по } m \in \mathbb{N}, \quad k \to \infty, \tag{7.14}$$

$$\mathrm{meas}\left(\{\Omega : |\nabla u^m| \geqslant h\}\right) \to 0 \quad \text{равномерно по } m \in \mathbb{N}, \quad h \to \infty. \tag{7.15}$$

Теперь установим сходимость по подпоследовательности:

$$u^m \to u \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \quad m \to \infty. \tag{7.16}$$

Из оценки (7.12) следует ограниченность множества $\{\nabla T_k(u^m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ в пространстве $L_M(\Omega)$, а следовательно в $L_1(\Omega)$. Тогда $\{T_k(u^m)\}_{m\in\mathbb{N}} \subset \mathring{W}_1^1(\Omega)$ ограничена в пространстве $\mathring{W}_1^1(\Omega)$.

Отсюда для любого фиксированного $k > 0$ следует сходимость $T_k(u^m) \to v_k$ в $L_1(\Omega)$, а также сходимость по подпоследовательности $T_k(u^m) \to v_k$ почти всюду в Ω. Далее, сходимость (7.16) устанавливается так же, как в работе [2, п. 5.3]. Из сходимости (7.16) следует, что для любого $k > 0$

$$T_k(u^m) \to T_k(u) \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \quad m \to \infty.$$

В силу доказанного справедлива сходимость

$$T_k(u^m) \to T_k(u) \quad \text{в} \quad L_1(\Omega), \quad m \to \infty. \tag{7.17}$$

Докажем, что

$$b^m(\mathrm{x}, u^m) \to b(\mathrm{x}, u) \quad \text{в} \quad L_1(\Omega), \quad m \to \infty. \tag{7.18}$$

Учитывая сходимость (7.16), имеем:

$$b^m(\mathrm{x}, u^m) \to b(\mathrm{x}, u) \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \quad m \to \infty. \tag{7.19}$$

Из (7.8) при $k = 1$ для любого $h > 0$ получаем:

$$\int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant h+1\}} |b^m(\mathrm{x}, u^m)| d\mathrm{x} \leqslant \int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant h\}} (|f| + \phi) d\mathrm{x}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Ввиду того, что $f, \phi \in L_1(\Omega)$, и абсолютной непрерывности интеграла в правой части последнего неравенства, учитывая (7.14), для любого $\varepsilon > 0$ можно выбрать достаточно большое $h(\varepsilon) > 1$ такое, что:

$$\int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant h\}} |b^m(\mathrm{x}, u^m)|d\mathrm{x} < \frac{\varepsilon}{2}, \quad m \in \mathbb{N}. \tag{7.20}$$

Пусть E — произвольное измеримое подмножество в Ω. Применяя (7.10), имеем:

$$\int\limits_E |b^m(\mathrm{x}, u^m)|d\mathrm{x} \leqslant \int\limits_E \Phi_h(\mathrm{x})d\mathrm{x} + \int\limits_{\{\Omega:|u^m|\geqslant h\}} |b^m(\mathrm{x}, u^m)|d\mathrm{x}. \tag{7.21}$$

Из принадлежности $\Phi_h \in L_1(\Omega)$ имеем:

$$\int\limits_E \Phi_h(\mathrm{x})d\mathrm{x} < \frac{\varepsilon}{2} \tag{7.22}$$

для любого E такого, что meas $(E) < \alpha(\varepsilon)$.

Объединяя (7.20)–(7.22), устанавливаем

$$\int\limits_E |b^m(\mathrm{x}, u^m)|d\mathrm{x} < \varepsilon \quad \forall\, E \quad \text{такого, что meas } (E) < \alpha(\varepsilon), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Таким образом, установлена равномерная интегрируемость последовательности $\{b^m(\mathrm{x}, u^m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ в $L_1(\Omega)$. Учитывая сходимость (7.19), применяя лемму 4.3, устанавливаем сходимость (7.18).

Шаг 4. Докажем сходимость:

$$\nabla u^m \to \nabla u \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \quad m \to \infty. \tag{7.23}$$

Из сходимости (7.16) следует сходимость по мере, а значит и фундаментальность u^m по мере:

$$\mathrm{meas}\,(\{\Omega : |u^m - u^l| \geqslant \nu\}) \to 0 \quad \text{при} \quad m, l \to \infty \quad \text{для любого} \quad \nu > 0. \tag{7.24}$$

Сначала установим сходимость:

$$\nabla u^m \to \nabla u \quad \text{по мере}, \quad m \to \infty. \tag{7.25}$$

Для $\nu, \theta, h > 0$ рассмотрим множество

$$E_{\nu,\theta,h} = \{\Omega : |u^l - u^m| < \nu,\ |\nabla u^l| \leqslant h,\ |\nabla u^m| \leqslant h,\ |u^l| < h,\ |u^m| < h,\ |\nabla(u^l - u^m)| \geqslant \theta\}.$$

Поскольку справедливо включение

$$\{\Omega : |\nabla(u^l - u^m)| \geqslant \theta\} \subset \{\Omega : |\nabla u^l| > h\} \cup \{\Omega : |\nabla u^m| > h\} \cup$$
$$\cup \{\Omega : |u^l - u^m| \geqslant \nu\} \cup \{\Omega : |u^l| \geqslant h\} \cup \{\Omega : |u^m| \geqslant h\} \cup E_{\nu,\theta,h},$$

то, в силу (7.14), (7.15), выбором h добьемся неравенств

$$\mathrm{meas}\,(\{\Omega : |\nabla(u^l - u^m)| \geqslant \theta\}) < 4\varepsilon + \mathrm{meas}\,(E_{\nu,\theta,h}) + \mathrm{meas}\,(\{\Omega : |u^l - u^m| \geqslant \nu\}), \quad m, l \in \mathbb{N}. \tag{7.26}$$

По условию монотонности (3.3) и известному факту, что непрерывная функция на компакте достигает наименьшего значения, найдется $\gamma(\mathrm{x}) > 0$ п.в. в Ω такая, что при $|\mathrm{s}| \leqslant h$, $|\mathrm{t}| \leqslant h$, $|\mathrm{s} - \mathrm{t}| \geqslant \theta$ с достаточно малым θ справедливо неравенство

$$(\mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{s}) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, \mathrm{t})) \cdot (\mathrm{s} - \mathrm{t}) \geqslant \gamma(\mathrm{x}) \quad \text{п.в. в} \quad \Omega. \tag{7.27}$$

Введем обозначение $A_0^m(\mathrm{x}) = f^m(\mathrm{x}) + b^m(\mathrm{x}, u^m)$. Из (7.3), (7.11) следует ограниченность последовательности $\{A_0^m\}_{m\in\mathbb{N}}$ в $L_1(\Omega)$. Запишем (7.6) дважды для u^m и u^l и вычтем из первого второе, получим

$$\int\limits_\Omega \Big(\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^m) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^l)\Big) \cdot \nabla v d\mathrm{x} + \int\limits_\Omega (A_0^m - A_0^l) v d\mathrm{x} = 0.$$

Подставляя пробную функцию $v = T_\nu(u^m - u^l)$, устанавливаем соотношение

$$\int\limits_\Omega \Big(\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^m) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^l)\Big)\cdot\nabla T_\nu(u^m - u^l) d\mathrm{x} = -\int\limits_\Omega (A_0^m - A_0^l) T_\nu(u^m - u^l) d\mathrm{x} \leqslant C_6\nu, \quad m, l \in \mathbb{N}. \quad (7.28)$$

Далее, применяя (7.27), выводим

$$\int\limits_{E_{\nu,\theta,h}} \gamma(\mathrm{x}) d\mathrm{x} \leqslant \int\limits_{E_{\nu,\theta,h}} \Big(\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^m) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^l)\Big)\cdot\nabla(u^m - u^l) d\mathrm{x} \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_{\{\Omega : |u^m - u^l| < \nu\}} (\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^m) - \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^l))\nabla(u^m - u^l) d\mathrm{x}. \quad (7.29)$$

Соединяя (7.29), (7.28), получаем

$$\int\limits_{E_{\nu,\theta,h}} \gamma(\mathrm{x}) d\mathrm{x} \leqslant C_6\nu.$$

Отсюда для произвольного $\delta > 0$ при фиксированном h выбором ν устанавливаем неравенство

$$\int\limits_{E_{\nu,\theta,h}} \gamma(\mathrm{x}) d\mathrm{x} < \delta.$$

Применяя лемму 4.10, для любого $\varepsilon > 0$ выводим

$$\operatorname{meas}(E_{\nu,\theta,h}) < \varepsilon. \quad (7.30)$$

Ввиду того, что $\operatorname{meas}(E_{\nu,\theta,h}) = 0$ для достаточно больших θ, то неравенство (7.30) справедливо для любых $\theta > 0$.

Кроме того, согласно (7.24), можно выбрать $m_0(\nu, \varepsilon)$ такое, что

$$\operatorname{meas}(\{\Omega : |u^l - u^m| \geqslant \nu\}) < \varepsilon, \quad m, l \geqslant m_0. \quad (7.31)$$

Соединяя (7.26), (7.30), (7.31), в итоге для любого $\theta > 0$ выводим неравенство

$$\operatorname{meas}(\{\Omega : |\nabla(u^l - u^m)| \geqslant \theta\}) < 6\varepsilon, \quad m, l \geqslant m_0.$$

Отсюда следует фундаментальность по мере последовательности $\{\nabla u^m\}_{m\in\mathbb{N}}$, это влечет сходимость (7.25), а также сходимость (7.23) по подпоследовательности.

Так как $\nabla u = 0$ на множестве, где $|u| = k$, то из сходимости (7.23) заключаем:

$$\nabla T_k(u^m) - \nabla T_k(u) = \chi_{\{\Omega : |u^m| < k\}}(\nabla u^m - \nabla u) +$$
$$+ \left(\chi_{\{\Omega : |u^m| < k\}} - \chi_{\{\Omega : |u| < k\}}\right)\nabla u \to 0 \quad \text{п.в. в} \quad \Omega, \quad m \to \infty. \quad (7.32)$$

Кроме того, благодаря оценке (7.12), пользуясь леммой 4.11 устанавливаем равномерную интегрируемость последовательности $\{\nabla T_k(u^m)\}_{m\in\mathbb{N}}$ в $L_1(\Omega)$. Отсюда по теореме Витали устанавливаем сходимость

$$\nabla T_k(u^m) \to \nabla T_k(u) \quad \text{в} \quad L_1(\Omega), \quad m \to \infty. \quad (7.33)$$

Следствием (7.17), (7.33) является принадлежность $T_k(u) \in \mathring{W}_1^1(\Omega)$.

Далее, применяя (2.4) из (7.12), (7.13) выводим оценки

$$\|\nabla T_k(u^m)\|_M \leqslant C_7(k), \quad \|\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_k(u^m))\|_{\overline{M}} \leqslant C_8(k), \quad m \in \mathbb{N}.$$

Отсюда, пользуясь сходимостью (7.32) по лемме 4.2 устанавливаем

$$\nabla T_k(u^m) \rightharpoonup \nabla T_k(u) \quad \text{по топологии} \quad \sigma(\mathrm{L}_M, \mathrm{E}_{\overline{M}}) \quad \text{в} \quad \mathrm{L}_M(\Omega), \quad m \to \infty,$$
$$\mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_k(u^m)) \rightharpoonup \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_k(u)) \quad \text{по топологии} \quad \sigma(\mathrm{L}_{\overline{M}}, \mathrm{E}_M) \quad \text{в} \quad \mathrm{L}_{\overline{M}}(\Omega), \quad m \to \infty. \quad (7.34)$$

Шаг 5. Пусть $\xi \in C_0^1(\Omega)$, $\operatorname{supp}\xi \subset \Omega(l)$, $l \geqslant l_0$. Чтобы доказать неравенство (3.7), в тождестве (7.6) возьмем пробную функцию $v = T_k(u^m - \xi)$, получим соотношение

$$\langle \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^m)\cdot\nabla T_k(u^m - \xi)\rangle + \langle (b^m(\mathrm{x}, u^m) - f^m)\, T_k(u^m - \xi)\rangle = I^m + J^m, \quad m \geqslant l_0. \quad (7.35)$$

Положим $\widehat{k} = k + \|\xi\|_\infty$. Если $|u^m - \xi| < k$, то $|u^m| < \widehat{k}$, поэтому $\{\Omega : |u^m - \xi| < k\} \subseteq \{\Omega : |u^m| < \widehat{k}\}$, следовательно,

$$I^m = \int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^m) \cdot \nabla T_k(u^m - \xi) d\mathrm{x} = \int\limits_{\{\Omega : |u^m - \xi| < k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u^m) \cdot \nabla (u^m - \xi) d\mathrm{x} =$$

$$= \int\limits_{\{\Omega : |u^m - \xi| < k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_{\widehat{k}}(u^m)) \cdot \nabla T_{\widehat{k}}(u^m) d\mathrm{x} - \int\limits_{\{\Omega : |u^m - \xi| < k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_{\widehat{k}}(u^m)) \cdot \nabla \xi d\mathrm{x} = I_1^m - I_2^m. \quad (7.36)$$

Применяя (7.16), (7.32), по лемме Фату для правильных k (таких, что $\mathrm{meas}(\{\Omega : |u - \xi| = k\}) = 0$) имеем сходимость:

$$\liminf_{m\to\infty} I_1^m = \liminf_{m\to\infty} \int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_{\widehat{k}}(u^m)) \cdot \nabla T_{\widehat{k}}(u^m) \chi_{\{\Omega : |u^m - \xi| < k\}} d\mathrm{x} \geqslant$$

$$\geqslant \int\limits_{\{\Omega : |u - \xi| < k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_{\widehat{k}}(u)) \cdot \nabla T_{\widehat{k}}(u) d\mathrm{x}. \quad (7.37)$$

Используя (7.16), по лемме 4.5 для правильных k имеем сходимость:

$$\nabla \xi \chi_{\{\Omega : |u^m - \xi| < k\}} \to \nabla \xi \chi_{\{\Omega : |u - \xi| < k\}} \quad \text{сильно в} \quad \mathrm{E}_M(\Omega), \quad m \to \infty.$$

Отсюда, учитывая сходимость (7.34), выводим

$$\lim_{m\to\infty} I_2^m = \lim_{m\to\infty} \int\limits_\Omega \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_{\widehat{k}}(u^m)) \cdot \nabla \xi \chi_{\{\Omega : |u^m - \xi| < k\}} d\mathrm{x} = \int\limits_{\{\Omega : |u - \xi| < k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_{\widehat{k}}(u)) \cdot \nabla \xi d\mathrm{x}. \quad (7.38)$$

Соединяя (7.36)–(7.38), устанавливаем

$$\liminf_{m\to\infty} I^m \geqslant \int\limits_{\{\Omega : |u - \xi| < k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_{\widehat{k}}(u)) \cdot \nabla T_{\widehat{k}}(u) d\mathrm{x} - \int\limits_{\{\Omega : |u - \xi| < k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla T_{\widehat{k}}(u)) \cdot \nabla \xi d\mathrm{x} =$$

$$= \int\limits_{\{\Omega : |u - \xi| < k\}} \mathrm{a}(\mathrm{x}, \nabla u) \cdot \nabla (u - \xi) d\mathrm{x}. \quad (7.39)$$

Из сходимости (7.16) по лемме 4.5 имеем:

$$T_k(u^m - \xi) \rightharpoonup T_k(u - \xi) \text{ в топологии } \sigma(L_\infty, L_1) \text{ пространства } L_\infty(\Omega), \quad m \to \infty.$$

Отсюда, используя (7.18), (7.2), устанавливаем

$$\lim_{m\to\infty} J^m = \lim_{m\to\infty} \int\limits_\Omega (b^m(\mathrm{x}, u^m) - f^m) T_k(u^m - \xi) d\mathrm{x} = \int\limits_\Omega (b(\mathrm{x}, u) - f) T_k(u - \xi) d\mathrm{x}. \quad (7.40)$$

Соединяя (7.35), (7.39), (7.40), выводим (3.7). Таким образом, $u \in \mathring{\mathcal{T}}_M^1(\Omega)$ является энтропийным решением задачи (1.1), (1.2). $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Общая теория. — М.: ИЛ, 1962.
2. *Кожевникова Л. М.* Энтропийные и ренормализованные решения анизотропных эллиптических уравнений с переменными показателями нелинейностей// Мат. сб. — 2019. — *210*, № 3. — С. 131–161.
3. *Ковалевский А. А., Скрыпник И. И., Шишков А. Е.* Сингулярные решения нелинейных эллиптических и параболических уравнений. — Киев: Наукова думка, 1962.
4. *Кожевникова Л. М., Кашникова А. П.* Эквивалентность энтропийных и ренормализованных решений нелинейной эллиптической задачи в пространствах Музилака—Орлича// Дифф. уравн. — 2023. — *59*. — С. 35–51.
5. *Рутицкий Я. Б., Красносельский М. А.* Выпуклые функции и пространства Орлича. — М.: Физматлит, 1958.
6. *Ahmida Y., Chlebicka I., Gwiazda P., Youssfi A.* Gossez's approximation theorems in Musielak—Orlicz—Sobolev spaces// J. Funct. Anal. — 2018. — *275*, № 9. — С. 2538–2571.

7. *Ait Khellou M., Benkirane A.* Renormalized solution for nonlinear elliptic problems with lower order terms and L^1 data in Musielak—Orlicz spaces// An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform. — 2016. — *43*, № 2. — С. 164–187.
8. *Ait Khellou M., Douiri S. M., El Hadfi Y.* Existence of solutions for some nonlinear elliptic equations in Musielak spaces with only the Log-Hölder continuity condition// Mediterr. J. Math. — 2020. — *17*, № 1. — С. 1–18.
9. *Benilan Ph., Boccardo L., Gallouët Th., Gariepy R., Pierre M., Vazquez J. L.* An L^1-theory of existence and nuniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. — 1995. — *22*, № 2. — С. 241–273.
10. *Benkirane A., Sidi El Vally M.* An existence result for nonlinear elliptic equations in Musielak—Orlicz—Sobolev spaces// Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. — 2013. — *20*, № 1. — С. 57–75.
11. *Benkirane A., Sidi El Vally M.* Variational inequalities in Musielak—Orlicz—Sobolev spaces// Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. — 2014. — *21*, № 5. — С. 787–811.
12. *Boccardo L., Gallouët Th.* Nonlinear elliptic equations with right-hand side measures// Commun. Part. Differ. Equ. — 1992. — *17*, № 3-4. — С. 641–655.
13. *Chlebicka I.* A pocket guide to nonlinear differential equations in Musielak—Orlicz spaces// Nonlinear Anal. — 2018. — *175*. — С. 1–27.
14. *Chlebicka I.* Measure data elliptic problems with generalized Orlicz growth// Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 2023. — *153*, № 2. — С. 588–618.
15. *Denkowska A., Gwiazda P., Kalita P.* On renormalized solutions to elliptic inclusions with nonstandard growth// Calc. Var. Partial Differ. Equ. — 2021. — *60*, № 21. — С. 1–44.
16. *Elarabi R., Rhoudaf M., Sabiki H.* Entropy solution for a nonlinear elliptic problem with lower order term in Musielak—Orlicz spaces// Ric. Mat. — 2018. — *67*, № 2. — С. 549–579.
17. *Elemine Vall M. S. B., Ahmedatt T., Touzani A., Benkirane A.* Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic equations in Musielak framework with L^1 data// Bol. Soc. Parana Mat. — 2018. — *36*, № 1. — С. 125–150.
18. *Gwiazda P., Skrzypczaka I., Zatorska-Goldstein A.* Existence of renormalized solutions to elliptic equation in Musielak—Orlicz space// Differ. Equ. — 2018. — *264*. — С. 341–377.
19. *Gwiazda P., Świerczewska-Gwiazda A., Wróblewska A.* Monotonicity methods in generalized Orlicz spaces for a class of non-Newtonian fluids// Math. Methods Appl. Sci. — 2010. — № 2. — С. 125–137.
20. *Musielak J.* Orlicz spaces and modular spaces. — Berlin: Springer, 1983.
21. *Talha A., Benkirane A.* Strongly nonlinear elliptic boundary value problems in Musielak—Orlicz spaces// Monatsh. Math. — 2018. — *186*, № 4. — С. 745–776.
22. *Ying Li, Fengping Y., Shulin Zh.* Entropy and renormalized solutions to the general nonlinear elliptic equations in Musielak—Orlicz spaces// Nonlinear Anal. Real World Appl. — 2021. — *61*. — С. 1–20.

Л. М. Кожевникова

Стерлитамакский филиал Уфимского университета науки и технологий, Стерлитамак, Россия;

Елабужский институт Казанского федерального университета, Елабуга, Россия

E-mail: `kosul@mail.ru`

UDC 517.956.25
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-98-115
EDN: EBRPUC

Entropy and renormalized solutions for a nonlinear elliptic problem in Musielak–Orlicz spaces

L. M. Kozhevnikova[1,2]

[1]*Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia*
[2]*Elabuga Institute of Kazan Federal University, Elabuga, Russia*

In this paper, we establish the equivalence of entropy and renormalized solutions of second-order elliptic equations with nonlinearities defined by the Musielak–Orlicz functions and the right-hand side from the space $L_1(\Omega)$. In nonreflexive Musielak—Orlicz—Sobolev spaces, we prove the existence and uniqueness of both entropy and renormalized solutions of the Dirichlet problem in domains with a Lipschitz boundary.

Keywords: second-order elliptic equation, entropy solution, renormalized solution, Musielak–Orlicz–Sobolev space, existence and uniqueness of solutions

For citation: L. M. Kozhevnikova, "Entropy and renormalized solutions for a nonlinear elliptic problem in Musielak–Orlicz spaces," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 1, 98–115. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-98-115`

REFERENCES

1. N. Dunford and J. T. Schwartz, *Lineynye operatory. Obshchaya teoriya* [Linear Operators. Part I: General Theory], IL, Moscow, 1962 (Russian translation).
2. L. M. Kozhevnikova, "Entropiynye i renormalizovannye resheniya anizotropnykh ellipticheskikh uravneniy s peremennymi pokazatelyami nelineynostey" [Entropy and renormalized solutions of anisotropic elliptic equations with variable nonlinearity exponents], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2019, **210**, No. 3, 131–161 (in Russian).
3. A. A. Kovalevskiy, I. I. Skrypnik, and A. E. Shishkov, *Singulyarnye resheniya nelineynykh ellipticheskikh i parabolicheskikh uravneniy* [Singular Solutions of Nonlinear Elliptic and Parabolic Equations], Naukova Dumka, Kiev, 1962 (in Russian).
4. L. M. Kozhevnikova and A. P. Kashnikova, "Ekvivalentnost' entropiynykh i renormalizovannykh resheniy nelineynoy ellipticheskoy zadachi v prostranstvakh Muzilaka—Orlicha" [Equivalence of Entropy and Renormalized Solutions of a Nonlinear Elliptic Problem in Musielak–Orlicz Spaces], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2023, **59**, 35–51 (in Russian).
5. Ya. B. Rutitskiy and M. A. Krasnosel'skiy, *Vypuklye funktsii i prostranstva Orlicha* [Convex Functions and Orlicz Spaces], Fizmatlit, Moscow, 1958 (in Russian).
6. Y. Ahmida, I. Chlebicka, P. Gwiazda, and A. Youssfi, "Gossez's approximation theorems in Musielak—Orlicz—Sobolev spaces," *J. Funct. Anal.*, 2018, **275**, No. 9, 2538–2571.
7. M. Ait Khellou and A. Benkirane, "Renormalized solution for nonlinear elliptic problems with lower order terms and L^1 data in Musielak—Orlicz spaces," *An. Univ. Craiova Ser. Mat. Inform.*, 2016, **43**, No. 2, 164–187.
8. M. Ait Khellou, S. M. Douiri, and Y. El Hadfi, "Existence of solutions for some nonlinear elliptic equations in Musielak spaces with only the Log-Hölder continuity condition," *Mediterr. J. Math.*, 2020, **17**, No. 1, 1–18.

9. Ph. Benilan, L. Boccardo, Th. Gallouët, R. Gariepy, M. Pierre, J. L. Vazquez, “An L^1-theory of existence and nuniqueness of solutions of nonlinear elliptic equations,” *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci.*, 1995, **22**, No. 2, 241–273.
10. A. Benkirane and M. Sidi El Vally, “An existence result for nonlinear elliptic equations in Musielak—Orlicz—Sobolev spaces,” *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin.*, 2013, **20**, No. 1, 57–75.
11. A. Benkirane and M. Sidi El Vally, “Variational inequalities in Musielak—Orlicz—Sobolev spaces,” *Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin.*, 2014, **21**, No. 5, 787–811.
12. L. Boccardo and Th. Gallouët, “Nonlinear elliptic equations with right-hand side measures,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 1992, **17**, No. 3-4, 641–655.
13. I. Chlebicka, “A pocket guide to nonlinear differential equations in Musielak—Orlicz spaces,” *Nonlinear Anal.*, 2018, **175**, 1–27.
14. I. Chlebicka, “Measure data elliptic problems with generalized Orlicz growth,” *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 2023, **153**, No. 2, 588–618.
15. A. Denkowska, P. Gwiazda, and P. Kalita, “On renormalized solutions to elliptic inclusions with nonstandard growth,” *Calc. Var. Partial Differ. Equ.*, 2021, **60**, No. 21, 1–44.
16. R. Elarabi, M. Rhoudaf, and H. Sabiki, “Entropy solution for a nonlinear elliptic problem with lower order term in Musielak—Orlicz spaces,” *Ric. Mat.*, 2018, **67**, No. 2, 549–579.
17. M. S. B. Elemine Vall, T. Ahmedatt, A. Touzani, and A. Benkirane, “Existence of entropy solutions for nonlinear elliptic equations in Musielak framework with L^1 data,” *Bol. Soc. Parana Mat.*, 2018, **36**, No. 1, 125–150.
18. P. Gwiazda, I. Skrzypczaka, and A. Zatorska-Goldstein, “Existence of renormalized solutions to elliptic equation in Musielak—Orlicz space,” *Differ. Equ.*, 2018, **264**, 341–377.
19. P. Gwiazda, Á. Swierczewska-Gwiazda, and A. Wróblewska, “Monotonicity methods in generalized Orlicz spaces for a class of non-Newtonian fluids,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2010, No. 2, 125–137.
20. J. Musielak, *Orlicz spaces and modular spaces*, Springer, Berlin, 1983.
21. A. Talha and A. Benkirane, “Strongly nonlinear elliptic boundary value problems in Musielak—Orlicz spaces,” *Monatsh. Math.*, 2018, **186**, No. 4, 745–776.
22. Li Ying, Y. Fengping, and Zh. Shulin, “Entropy and renormalized solutions to the general nonlinear elliptic equations in Musielak—Orlicz spaces,” *Nonlinear Anal. Real World Appl.*, 2021, **61**, 1–20.

L. M. Kozhevnikova
Sterlitamak Branch of Bashkir State University, Sterlitamak, Russia;
Elabuga Institute of Kazan Federal University, Elabuga, Russia
E-mail: `kosul@mail.ru`

Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.929
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-116-133
EDN: ECHRHE

ОБ АСИМПТОТИЧЕСКИХ СВОЙСТВАХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ НЕЙТРАЛЬНОГО ТИПА

В. В. Малыгина, К. М. Чудинов

Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия

Исследуется устойчивость систем линейных автономных функционально-дифференциальных уравнений нейтрального типа. В основе исследования лежит известное представление решения в виде интегрального оператора, ядром которого является функция Коши исследуемого уравнения. Определения устойчивости по Ляпунову, асимптотической и экспоненциальной устойчивости сформулированы в терминах соответствующих свойств функции Коши, что позволило без потери общности уточнить ряд традиционных понятий. Наряду с понятием асимптотической устойчивости вводится новое понятие сильной асимптотической устойчивости.

Основные результаты связаны с устойчивостью по начальной функции из пространств суммируемых функций. В частности, установлено, что сильная асимптотическая устойчивость при начальных данных из пространства L_1 равносильна экспоненциальной оценке функции Коши и, более того, экспоненциальной устойчивости по начальным данным из пространств L_p для любого $p \geqslant 1$.

Ключевые слова: функционально-дифференциальные уравнения нейтрального типа, функция Коши, устойчивость Ляпунову, экспоненциальная устойчивость, асимптотическая устойчивость, сильная асимптотическая устойчивость

Для цитирования: *В. В. Малыгина, К. М. Чудинов.* Об асимптотических свойствах решений дифференциальных уравнений нейтрального типа// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 1. С. 116–133. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-116-133

Введение

В настоящей работе исследуются асимптотические свойства решений линейного функционально-дифференциального уравнения (ФДУ) нейтрального типа

$$\dot{x}(t) - \sum_{k=1}^{K} A_k \dot{x}(t-kh) = \sum_{j=0}^{J} B_j x(t-jh), \quad t \in \mathbb{R}_+ \equiv [0, +\infty), \tag{1}$$

где $h > 0$, $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$, A_k и B_j — вещественные $n \times n$-матрицы.

В настоящее время количество работ, посвященных уравнениям нейтрального типа, продолжает расти, однако некоторые принципиальные вопросы, связанные с определениями относящихся к уравнению понятий, включая вопрос определения решения, остаются нерешенными или не имеют общепринятого решения. Несогласованность основных используемых понятий обусловливает разрозненность результатов исследований уравнений нейтрального типа, в том числе исследований

Исследования выполнены при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (проект № FSNM-2023-0005).

асимптотических свойств решений. Даже по отношению к автономному уравнению (1) определения устойчивости из разных работ часто не могут быть формально сопоставлены, поскольку требующие согласования понятия не определены.

Прежде чем описать цели настоящей работы и ее результаты, обратим внимание на следующее. Для корректности записи (1) требуется доопределить значения $x(t)$ и $\dot{x}(t)$ при $t < 0$. Для этого вводятся *начальные функции* $\varphi, \psi\colon [-\omega, 0) \to \mathbb{R}^n$, где $\omega = \max\{Kh, Jh\}$, и при $t < 0$ полагается $x(t) = \varphi(t)$ и $\dot{x}(t) = \psi(t)$. Устойчивость решений уравнения (1) относительно начальных условий естественно определять как непрерывную зависимость (в том или ином смысле) решений от функций φ и ψ. Но эти функции рассматриваются как элементы некоторых множеств, выбирать которые можно по-разному и снабжать разными нормами. В определениях устойчивости зависимость от выбора класса начальных функций должна быть отражена явно.

В настоящей работе:

- устойчивость уравнения (1) определяется как свойство, зависящее от класса начальных функций: вводится понятие $\mathbb{X}$-*устойчивости* — устойчивости относительно функций из множества $\mathbb{X}$;
- определяются несколько видов $\mathbb{X}$-устойчивости: устойчивость по Ляпунову, асимптотическая устойчивость, экспоненциальная устойчивость; при этом выясняется, что понятие асимптотической $\mathbb{X}$-устойчивости требует уточнения и выделения нового понятия *сильной асимптотической* $\mathbb{X}$-*устойчивости*;
- проясняются связи между различными подходами к исследованию устойчивости ФДУ нейтрального типа и результатами их применения;
- на основе известной формулы представления решения исследуются виды L_p-устойчивости;
- описаны виды L_p-устойчивости, которые реализуются на представителях класса уравнений вида (1).

Под решением уравнения (1) мы понимаем абсолютно непрерывную на каждом конечном отрезке вектор-функцию $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$. В работах, где под решением ФДУ понимается непрерывное продолжение начальной функции (например, [5, 8, 13]), которая в таком случае считается непрерывной, предполагается также «непрерывная стыковка» $x(0) = \varphi(0)$ и условие $\psi = \dot{\varphi}$. Мы не отрицаем этих условий, но и не предполагаем, что они обязательно выполняются.

Работа структурирована следующим образом. Первый раздел посвящен представлению решений уравнения (1) через его фундаментальное решение X и функцию Коши Y. Во втором разделе вводятся несколько видов $\mathbb{X}$-устойчивости и показывается, что они могут рассматриваться как свойства функций X и Y. В третьем разделе задача L_p-устойчивости уравнения (1) сводится к исследованию свойств только его функции Коши. Четвёртый раздел посвящен исследованию связи между асимптотической и экспоненциальной L_p-устойчивостями уравнения (1); сделан ряд принципиальных выводов об асимптотическом поведении его решений. В пятом разделе полученные результаты иллюстрируются описанием асимптотического поведения решений конкретного класса уравнений.

1. Представление решения и свойства матрицы Коши

1.1. Обозначения. Нормы в пространствах $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n\times n}$ вещественных n-мерных вектор-столбцов и $n \times n$-матриц обозначаются одинарными линиями $|\cdot|$, при этом норма в $\mathbb{R}^n$ везде евклидова, а норма в $\mathbb{R}^{n\times n}$ согласована с ней: для $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ имеем $|A| = \sup\limits_{|x|=1} |Ax|$, где $x \in \mathbb{R}^n$.

Норма в функциональном пространстве $\mathbb{X}$ обозначается символом $\|\cdot\|_{\mathbb{X}}$.

Для измеримого множества $S \subseteq \mathbb{R}_+$ через $L_p(S)$ обозначаются пространства вектор-функций, действующих из S в $\mathbb{R}^n$ и суммируемых со степенью p, где $1 \leqslant p < \infty$, а через $L_\infty(S)$ — пространство измеримых и ограниченных в существенном на множестве S вектор-функций. Нормы в этих функциональных пространствах традиционны.

Символами Θ и E будем обозначать соответственно нулевую и единичную $n \times n$-матрицы, символом I — тождественный оператор, действующий в функциональных пространствах.

Открытый и замкнутый круги в $\mathbb{C}$ обозначаются соответственно $B(a, r) = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| < r\}$ и $B[a, r] = \{z \in \mathbb{C} : |z - a| \leqslant r\}$.

1.2. Формула Коши. Рассмотрим уравнение

$$\dot{x}(t) - \sum_{k=1}^{K} A_k \dot{x}(t-kh) = \sum_{j=0}^{J} B_j x(t-jh), \quad t \in \mathbb{R}_+, \tag{1.2}$$

где $h > 0$, $K \in \mathbb{N}$, $J \in \mathbb{N}_0 \equiv \mathbb{N} \cup \{0\}$, $A_k, B_j \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Обозначим через S *оператор сдвига*, действующий в пространствах вектор-функций и матриц-функций следующим образом:

$$(Sy)(t) = \begin{cases} y(t-h), & t-h \geqslant 0, \\ 0, & t-h < 0, \end{cases}$$

и рассмотрим наряду с уравнением (1.2) неоднородное уравнение

$$\dot{x} - \sum_{k=1}^{K} A_k (S^k \dot{x}) = \sum_{j=0}^{J} B_j (S^j x) + f. \tag{1.3}$$

Под решением $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ уравнения (1.3) будем понимать локально (т. е. на каждом конечном отрезке) абсолютно непрерывную вектор-функцию; будем считать оператор S действующим из пространства локально абсолютно непрерывных функций в пространство локально суммируемых функций и предполагать функцию внешнего возмущения $f\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ локально суммируемой. Уравнение (1.2) с заданными начальными функциями φ и ψ представляется в виде (1.3), если положить

$$f(t) = \sigma(t) = \sum_{k=1}^{K} A_k \psi(t-kh)\chi_k(t) + \sum_{j=1}^{J} B_j \varphi(t-jh)\chi_j(t), \quad t \in \mathbb{R}_+; \tag{1.4}$$

здесь $\chi_m(t)$ — характеристические функции множеств $(-\infty, mh)$. В соответствии со сказанным решение уравнения (1.3) удовлетворяет равенству (1.2) почти всюду на $\mathbb{R}_+$. Таким образом, в дальнейшем будем по определению отождествлять решение уравнения (1.2) с решением уравнения (1.3).

В указанных условиях, как известно [1, с. 84], уравнение (1.3) с заданным начальным значением $x(0) \in \mathbb{R}^n$ однозначно разрешимо, и его решение представимо в виде

$$x(t) = X(t)x(0) + \int_0^t Y(t-s) f(s)\, ds, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{1.5}$$

Представление (1.5) по аналогии с известным представлением решения обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) называют *формулой Коши*. Матрица-функция $X\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ называется *фундаментальным решением*, а $Y\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^{n\times n}$ — *функцией Коши* уравнения (1.3). На отрицательной полуоси фундаментальное решение и функцию Коши доопределим нулевой матрицей. Матрицы-функции X и Y не зависят ни от начального значения $x(0)$, ни от внешнего возмущения f.

1.3. Выражение фундаментального решения через функцию Коши. В работе [14] показано, что фундаментальное решение уравнения (1.3) выражается через функцию Коши следующим образом:

$$X(t) = Y(t) - \sum_{k=1}^{K} (S^k Y)(t) A_k, \tag{1.6}$$

а для производной фундаментального решения выполняется соотношение

$$\dot{X}(t) = \sum_{m=0}^{M} (S^m Y)(t) B_m. \tag{1.7}$$

Таким образом, решение уравнения (1.3) задается формулой (1.5), где фундаментальное решение X выражается через функцию Коши Y, поэтому асимптотическое поведение решений уравнения (1.3) определяется свойствами матрицы Коши, которую, следовательно, можно выбрать основным объектом исследования при изучении асимптотических свойств решений уравнения (1.2).

2. $\mathbb{X}$-устойчивость

Обозначим $\omega = \max\{Kh, Jh\}$.

Введем определения устойчивости решений уравнения (1.2). Начальные условия для уравнения (1.2) задаются на множестве $[-\omega, 0]$. Функции φ и ψ в силу (1.4) и (1.5) не выходят из $L_1[-\omega, 0]$, но могут принадлежать более узкому множеству $\mathbb{X} \subset L_1[-\omega, 0]$, снабженному собственной нормой. Применительно к введенной выше функции σ это означает выбор аналогичного подмножества пространства $L_1[0, \omega]$.

Обозначим $K_t\sigma = \int\limits_0^t Y(t-s)\sigma(s)\,ds$.

Рассмотрим семейство линейных вектор-функционалов $\{K_t\colon \mathbb{X} \to \mathbb{R}^n\}_{t\geqslant 0}$ и семейство линейных преобразований $\{X_t\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n\}_{t\geqslant 0}$, определенных равенствами $X_t\alpha = X(t)\alpha$. Нормы функционалов K_t и X_t определим традиционно: $\|K_t\| = \sup\limits_{\|\sigma\|=1} |K_t\sigma|$, $\|X_t\| = \sup\limits_{|\alpha|=1} |X_t\alpha|$.

Решение $x\colon \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}^n$ уравнения (1.2), определяемое значением $x(0) = x_0 \in \mathbb{R}^n$ и начальной функцией $\sigma \in \mathbb{X}$, будем называть *соответствующим* данным x_0 и σ. Для него из формулы (1.5) получаем:

$$x(t) = X_t x_0 + K_t\sigma, \quad t \geqslant 0. \tag{2.1}$$

Заметим, что для всех $t \geqslant \omega$ имеем

$$K_t\sigma = \int\limits_0^\omega Y(t-s)\sigma(s)\,ds. \tag{2.2}$$

Пусть $\mathbb{X} \subseteq L_1[0, \omega]$ — нормированное множество (естественно считать его линейным пространством) измеримых на множестве $[0, \omega]$ функций.

Определение 2.1. Уравнение (1.2) называется $\mathbb{X}$-*устойчивым* (по Ляпунову), если для любого $\varepsilon > 0$ существует такое $\delta > 0$, что при любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\sigma \in \mathbb{X}$, таких что $|x_0| < \delta$ и $\|\sigma\|_{\mathbb{X}} < \delta$, для соответствующего решения $x = x(t)$ уравнения (1.2) справедлива оценка $\sup\limits_{t\geqslant 0} |x(t)| < \varepsilon$.

Определение 2.2. Уравнение (1.2) называется *асимптотически* $\mathbb{X}$-*устойчивым*, если оно $\mathbb{X}$-устойчиво и для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\sigma \in \mathbb{X}$ соответствующее решение $x = x(t)$ уравнения (1.2) обладает свойством $\lim\limits_{t\to+\infty} |x(t)| = 0$.

Определение 2.3. Уравнение (1.2) называется *экспоненциально* $\mathbb{X}$-*устойчивым*, если существуют такие постоянные $N, \gamma > 0$, что для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\sigma \in \mathbb{X}$ для соответствующего решения $x = x(t)$ уравнения (1.2) справедлива оценка $|x(t)| \leqslant Ne^{-\gamma t}\left(|x_0| + \|\sigma\|_{\mathbb{X}}\right)$.

Замечание 2.1. Выбор пространства $\mathbb{X} \subseteq L_1[0, \omega]$ произволен. В большинстве работ (например, в монографиях [8, 12, 13]) полагается $\mathbb{X} = C[0, \omega]$. В работах [6, 17] используется техника гильбертовых пространств, поэтому $\mathbb{X} = L_2[0, \omega]$. В работе [11] $\mathbb{X} = L_1[0, \omega]$, в работе [4] рассматривались случаи $\mathbb{X} = L_p[0, \omega]$ для всех $p \geqslant 1$.

Укажем несколько эквивалентных переформулировок определений 2.1–2.3.

Теорема 2.1. *Следующие утверждения эквивалентны*:

1) *уравнение* (1.2) $\mathbb{X}$-*устойчиво*;
2) *существует такое* $N > 0$, *что для любых* $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $\sigma \in \mathbb{X}$ *и* $t \geqslant 0$ *для соответствующего решения* $x = x(t)$ *уравнения* (1.2) *справедлива оценка* $|x(t)| \leqslant N\left(|x_0| + \|\sigma\|_{\mathbb{X}}\right)$;
3) $\sup\limits_{t\geqslant 0} |X(t)| < \infty$ *и* $\sup\limits_{t\geqslant 0} \|K_t\| < \infty$.

Доказательство. Проведем его по цепочке 1) $\Rightarrow$ 2) $\Rightarrow$ 3) $\Rightarrow$ 1).

1) $\Rightarrow$ 2). В силу определения 2.1 линейные функционалы X_t и K_t ограничены равномерно по t. Остается применить формулу (2.1).

2) $\Rightarrow$ 3). Используем формулу (2.1). Пусть $\sigma = 0$. Тогда ограниченность фундаментального решения очевидна из неравенства $|X(t)x_0| \leqslant N\,|x_0|$. Пусть теперь $x_0 = 0$. Тогда $|K_t\sigma| \leqslant N\|\sigma\|_{\mathbb{X}}$, т. е. $\|K_t\| \leqslant N$.

3) $\Rightarrow$ 1). Следует из формулы (2.1) непосредственно. □

В классическом определении асимптотической устойчивости [7, с. 68] решения ОДУ предполагается, что асимптотически устойчивое решение устойчиво по Ляпунову. Вообще говоря, это требование существенно, однако для линейных уравнений оно излишне. Разберем вопрос о необходимости устойчивости по Ляпунову для асимптотической устойчивости применительно к уравнению (1.2).

Лемма 2.1. *Пусть $\mathbb{X}$ — банахово пространство. Если для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\sigma \in \mathbb{X}$ решение уравнения* (1.2) *обладает свойством $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$, то уравнение* (1.2) *$\mathbb{X}$-устойчиво.*

Доказательство. Из формулы (2.1) вытекает, что условие $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$ выполняется для всех решений уравнения (1.2) тогда и только тогда, когда $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t) = \Theta$ и для любого $\sigma \in \mathbb{X}$ имеем $\lim\limits_{t\to+\infty} K_t\sigma = 0$. В таком случае $\sup\limits_{t\geqslant 0} |X(t)| < \infty$ и для любого $\sigma \in \mathbb{X}$ имеем $\sup\limits_{t\geqslant 0} |K_t\sigma| < \infty$. В силу теоремы Банаха—Штейнхауса [9, с. 116], получаем, что $\sup\limits_{t\geqslant 0} \|K_t\| < \infty$. Ссылка на теорему 2.1 завершает доказательство. □

Теорема 2.2. *Пусть $\mathbb{X}$ — банахово пространство. Тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1) *уравнение* (1.2) *асимптотически $\mathbb{X}$-устойчиво*;
2) *для любых $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\sigma \in \mathbb{X}$ соответствующее решение $x = x(t)$ уравнения* (1.2) *обладает свойством $\lim\limits_{t\to+\infty} x(t) = 0$*;
3) $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t) = \Theta$ *и для любого $\sigma \in \mathbb{X}$ имеем $\lim\limits_{t\to+\infty} K_t\sigma = 0$.*

Доказательство. Как и доказательство теоремы 2.1, нетрудно провести по цепочке 1) ⇒ 2) ⇒ 3) ⇒ 1), опираясь на представление решения (2.1). □

Обратим внимание на вывод условия 3) из условия 2). Из условия 2) следует $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t)x_0 = 0$ для любого $x_0 \in \mathbb{R}^n$ и $\lim\limits_{t\to+\infty} K_t\sigma = 0$ для любого $\sigma \in \mathbb{X}$. Первое из этих следствий равносильно тому, что $\lim\limits_{t\to+\infty} X(t) = \Theta$, что можно интерпретировать как сходимость семейства вектор-функционалов X_t по норме $\|X_t\|$, т. е. как *равномерную* сходимость. Однако второе следствие не равносильно равномерной сходимости $\lim\limits_{t\to+\infty} \|K_t\| = 0$ семейства функционалов $\{K_t\}$ по норме $\|K_t\|$. В связи с этим введем новое понятие.

Определение 2.4. Назовем уравнение (1.2) *сильно асимптотически $\mathbb{X}$-устойчивым*, если $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = \Theta$ и $\lim\limits_{t\to\infty} \|K_t\| = 0$.

После того как различие между асимптотической и сильной асимптотической устойчивостями формально зафиксировано с помощью определения семейства функционалов $\{K_t\}$, оно становится очевидным. Традиционно в исследованиях асимптотической устойчивости линейных ФДУ речь идет именно о сильной асимптотической устойчивости в смысле определения 2.4, что не всегда согласуется с формальными определениями вследствие их неточности или даже отсутствия. Обоснованием введения нового определения служат примеры уравнений, для которых понятия асимптотической и сильной асимптотической устойчивости не эквивалентны. Один из таки примеров будет рассмотрен в разделе 5.

Определение экспоненциальной устойчивости также переформулируем в терминах свойств фундаментального решения и функционалов K_t.

Теорема 2.3. *Уравнение* (1.2) *экспоненциально $\mathbb{X}$-устойчиво, если и только если существуют такие $N, \gamma > 0$, что для всех $t \geqslant 0$ имеем $|X(t)| \leqslant Ne^{-\gamma t}$ и $\|K_t\| \leqslant Ne^{-\gamma t}$.*

Доказательство. Следует из формулы (2.1). □

Таким образом, равномерная по t ограниченность норм функционалов семейства $\{K_t\}$ заложена в определениях 2.1 и 2.3, но не в определении 2.2. Определение 2.4 включает, как и определения 2.1 и 2.3, оценку нормы $\|K_t\|$, поэтому устойчивость по Ляпунову и экспоненциальная устойчивость можно считать по определению сильными. Можно также ввести понятия, формально относящиеся к устойчивости по Ляпунову и экспоненциальной устойчивости так же, как асимптотическая устойчивость относится к сильной асимптотической устойчивости, но если пространство $\mathbb{X}$ банахово, то эти понятия в силу теоремы Банаха—Штейнхауса совпадают с введенными в определениях 2.1 и 2.3.

3. L_p-устойчивость как свойство функции Коши

Итак, устойчивость уравнения (1.2) естественно рассматривать как $\mathbb{X}$-устойчивость, где $\mathbb{X} \subseteq L_1[0,\omega]$. В этом разделе мы получим критерии L_p-устойчивости (по Ляпунову, сильной асимптотической и экспоненциальной) для всех p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ в терминах свойств функции Коши.

3.1. Нормы вектор-функционалов $L_p \to \mathbb{R}^n$. В случае $n = 1$ общий вид функционала $F\colon L_p[0,\omega] \to \mathbb{R}$, где $p \geqslant 1$, определяется (см. [9, с. 150–154]) функцией $\alpha \in L_q[0,\omega]$, где $1/p+1/q = 1$, и формулой $Fx = \int\limits_0^\omega \alpha(s)x(s)\,ds$; его норма $\|F\| = \sup\limits_{|x|=1} |Fx|$ в случае $p > 1$ равна $\|F\| = \left(\int\limits_0^\omega |\alpha(s)|^q\,ds\right)^{1/q}$, а в случае $p = 1$ равна $\|F\| = \operatorname*{ess\,sup}\limits_{s\in[0,\omega]} |\alpha(s)| = \inf\limits_{\mu E=0} \sup\limits_{s\in[0,\omega]\setminus E} |\alpha(s)|$. Заметим, что формула нормы справедлива и в случае $p = \infty$ (тогда $q = 1$). Отсюда получаем вид вектор-функционала $F\colon L_p[0,\omega] \to \mathbb{R}^n$ для произвольного $n \in \mathbb{N}$:

$$Fx = \left(\sum_{i=1}^n \int\limits_0^\omega \alpha_{1i}(s)x_i(s)\,ds, \ldots, \sum_{i=1}^n \int\limits_0^\omega \alpha_{ni}(s)x_i(s)\,ds\right),$$

где компоненты матрицы-функции $A(t) = (\alpha_{ij}(t))_{i,j=1}^n$ принадлежат $L_p[0,\omega]$. В силу согласованности норм в $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^{n\times n}$ в случае $p > 1$

$$\|F\| = \sup_{|x|=1} |Fx| = \left(\int\limits_0^\omega |A(s)|^q\,ds\right)^{1/q}, \tag{3.1}$$

а в случае $p = 1$

$$\|F\| = \sup_{|x|=1} |Fx| = \operatorname*{ess\,sup}_{s\in[0,\omega]} |A(s)|. \tag{3.2}$$

3.2. Устойчивость по Ляпунову. Покажем, что ограниченность интеграла функции Коши уравнения (1.2) на отрезке длины ω влечет ограниченность фундаментального решения на полуоси $\mathbb{R}_+$.

Лемма 3.1. *Если* $\sup\limits_{t\geqslant 0} \int\limits_t^{t+\omega} |Y(s)|\,ds < \infty$, *то* $\sup\limits_{t\geqslant 0} |X(t)| < \infty$.

Доказательство. Из соотношений (1.6) и (1.7) и условий леммы следует, что

$$\sup_{t\geqslant 0} \int\limits_t^{t+\omega} |X(s)|\,ds = N_1 < \infty, \qquad \sup_{t\geqslant 0} \int\limits_t^{t+\omega} |\dot X(s)|\,ds = N_2 < \infty. \tag{3.3}$$

Предположим, что $\sup\limits_{t\geqslant 0} |X(t)| = \infty$. Тогда найдется такое $t_0 \in \mathbb{R}_+$, что

$$|X(t_0)| > \frac{N_1}{\omega} + N_2.$$

Значит, для всех $t \in [t_0, t_0+\omega]$ имеем

$$|X(t) - X(t_0)| \leqslant \int\limits_{t_0}^t |\dot X(s)|\,ds \leqslant \int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} |\dot X(s)|\,ds \leqslant N_2.$$

Таким образом, для всех $t \in [t_0, t_0+\omega]$ справедлива оценка $|X(t)| > \dfrac{N_1}{\omega}$. Следовательно, $\int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} |X(s)|\,ds > N_1$, что противоречит первому из соотношений (3.3). $\square$

Теперь получим критерий устойчивости по Ляпунову в терминах функции Коши.

Теорема 3.1. *Пусть* $1 < p \leqslant \infty$. *Тогда уравнение* (1.2) L_p-*устойчиво, если и только если*

$$\sup_{t\geqslant 0} \int\limits_t^{t+\omega} |Y(s)|^q\,ds < \infty,$$

где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Доказательство. В силу (2.2) и (3.1) для каждой фиксированной точки $t \in \mathbb{R}_+$ норма вектор-функционала $K_t\colon L_p[0,\omega] \to \mathbb{R}^n$ определяется как

$$\|K_t\| = \left(\int\limits_t^{t+\omega} |Y(s)|^q\,ds \right)^{1/q}. \tag{3.4}$$

Отсюда в силу теоремы 2.1 получаем доказательство теоремы в части необходимости. Учитывая неравенство Гёльдера и лемму 3.1, получаем достаточность. $\square$

Случай $p = 1$ рассмотрим отдельно.

Теорема 3.2. *Уравнение* (1.2) L_1-*устойчиво тогда и только тогда, когда* $\sup\limits_{t\geqslant 0} |Y(t)| < \infty$.

Доказательство. В силу (2.2) и (3.2) для каждой фиксированной точки $t \in \mathbb{R}_+$ норма вектор-функционала $K_t\colon L_1[0,\omega] \to \mathbb{R}^n$ определяется как

$$\|K_t\| = \operatorname*{ess\,sup}_{s\in[0,\omega]} |Y(s)|. \tag{3.5}$$

Остается применить теорему 2.1 и лемму 3.1. $\square$

Из теорем 3.1 и 3.2 получаем следствие.

Следствие 3.1. *Если функция Коши уравнения* (1.2) *ограничена, то уравнение* (1.2) L_p-*устойчиво для всех* p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

В последующих двух пунктах статьи получим теоремы, аналогичные теоремам 3.1 и 3.2, для двух других видов устойчивости.

3.3. Сильная асимптотическая устойчивость.

Лемма 3.2. *Если* $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_t^{t+\omega} |Y(s)|\,ds = 0$, *то* $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = \Theta$.

Доказательство. Пусть $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_t^{t+\omega} |Y(s)|\,ds = 0$. Тогда в силу соотношений (1.6) и (1.7) имеем

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_t^{t+\omega} |X(s)|\,ds = 0, \qquad \lim_{t\to\infty} \int\limits_t^{t+\omega} |\dot X(s)|\,ds = 0. \tag{3.6}$$

Предположим, что при этом $X(t)$ не стремится к Θ при $t \to \infty$. Тогда существует такие $\varepsilon > 0$ и последовательность $\{t_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, где $t_n \to +\infty$ при $n \to \infty$, что $|X(t_n)| \geqslant \varepsilon$.

В соответствии со вторым из соотношений (3.6) возьмем такое $N \in \mathbb{N}$, что для всех $n \geqslant N$

$$\int\limits_{t_n}^{t_n+\omega} |\dot X(s)|\,ds < \varepsilon/2.$$

Рассмотрим произвольные $n \in \mathbb{N}$ и $t \in [t_n, t_n + \omega]$. Имеем

$$|X(t) - X(t_n)| \leqslant \int\limits_{t_n}^{t} |\dot{X}(s)|\, ds \leqslant \int\limits_{t_n}^{t_n+\omega} |\dot{X}(s)|\, ds < \varepsilon/2.$$

Следовательно, $|X(t)| \geqslant \dfrac{\varepsilon}{2}$ для всех $t \in [t_n, t_n + \omega]$ и, значит, $\int\limits_{t_n}^{t_n+\omega} |X(s)|\, ds \geqslant \dfrac{\varepsilon\omega}{2} > 0$ для всех $n \geqslant N$, что противоречит первому из соотношений (3.6). □

Теорема 3.3. *Пусть* $1 < p \leqslant \infty$. *Тогда уравнение* (1.2) *сильно асимптотически* L_p*-устойчиво, если и только если для его функции Коши* Y *имеем*

$$\lim_{t\to\infty} \int\limits_{t}^{t+\omega} |Y(s)|^q\, ds = 0,$$

где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Доказательство. Для каждого фиксированного $t \in \mathbb{R}_+$ норма вектор-функционала $K_t \colon L_p[0, \omega] \to \mathbb{R}^n$ определяется формулой (3.4). Следовательно, если $\lim\limits_{t\to\infty} \|K_t\| = 0$, то $\lim\limits_{t\to\infty} \int\limits_{t}^{t+\omega} |Y(s)|^q\, ds = 0$, что доказывает теорему в части необходимости. Достаточность получаем из (3.4), неравенства Гёльдера и леммы 3.2. □

Теорема 3.4. *Уравнение* (1.2) *сильно асимптотически* L_1*-устойчиво тогда и только тогда, когда* $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = \Theta$.

Доказательство. Для каждого фиксированного $t \in \mathbb{R}_+$ норма вектор-функционала $K_t \colon L_1[0, \omega] \to \mathbb{R}^n$ определяется формулой (3.5), из которой следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} \|K_t\| = 0$, если и только если $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = \Theta$. Остается заметить, что в силу (1.6) из $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = \Theta$ следует $\lim\limits_{t\to\infty} X(t) = \Theta$. □

Из теорем 3.3 и 3.4 получаем следствие.

Следствие 3.2. *Если* $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = \Theta$, *то уравнение* (1.2) *сильно асимптотически* L_p*-устойчиво для всех* p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

3.4. Экспоненциальная устойчивость.

Лемма 3.3. *Если* $\int\limits_{t}^{t+\omega} |Y(s)|\, ds \leqslant Ne^{-\gamma t}$, *то* $|X(t)| \leqslant Me^{-\gamma t}$.

Доказательство. Из соотношений (1.6) и (1.7) следует, что если условия леммы выполнены, то для всех $t \in \mathbb{R}_+$ имеют место соотношения

$$\int\limits_{t}^{t+\omega} |X(s)|\, ds \leqslant M_1 e^{-\gamma t}, \qquad \int\limits_{t}^{t+\omega} \left|\dot{X}(s)\right| ds \leqslant M_2 e^{-\gamma t}. \tag{3.7}$$

Предположим, что существует такое $t_0 \in \mathbb{R}_+$, что

$$|X(t_0)e^{\gamma t_0}| > e^{\gamma\omega} \left(\gamma M_1 + \frac{M_1}{\omega} + M_2\right).$$

Тогда для произвольного $t \in [t_0, t_0 + \omega]$ имеем

$$\left|X(t)e^{\gamma t} - X(t_0)e^{\gamma t_0}\right| = \left|\int\limits_{t_0}^{t} \frac{d}{ds}(X(s)e^{\gamma s})\, ds\right| \leqslant \gamma \int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} |X(s)e^{\gamma s}|\, ds + \int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} \left|\dot{X}(s)e^{\gamma s}\right| ds \leqslant$$

$$\leqslant \gamma e^{\gamma(t_0+\omega)} \int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} |X(s)|\, ds + e^{\gamma(t_0+\omega)} \int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} \left|\dot{X}(s)\right| ds \leqslant \gamma e^{\gamma\omega} M_1 + e^{\gamma\omega} M_2.$$

Следовательно, для всех $t \in [t_0, t_0+\omega]$ справедлива оценка $\left|X(t)e^{\gamma t}\right| > \dfrac{M_1 e^{\gamma\omega}}{\omega}$. Значит,

$$e^{\gamma(t_0+\omega)} \int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} |X(s)|\, ds \geqslant \int\limits_{t_0}^{t_0+\omega} |X(s)e^{\gamma s}|\, ds > M_1 e^{\gamma\omega},$$

что противоречит первому из соотношений (3.7). □

Теорема 3.5. *Пусть* $1 < p \leqslant \infty$. *Тогда уравнение* (1.2) *экспоненциально* L_p*-устойчиво, если и только если найдутся такие* $N, \gamma > 0$, *что*

$$\int\limits_{t}^{t+\omega} |Y(s)|^q\, ds \leqslant N e^{-\gamma t}, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

где $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$.

Доказательство. Для каждого фиксированного $t \in \mathbb{R}_+$ норма вектор-функционала $K_t\colon L_p[0,\omega] \to \mathbb{R}^n$ определяется формулой (3.4). В силу теоремы 2.3 это доказывает теорему в части необходимости. Достаточность получаем из (3.4), неравенства Гёльдера и леммы 3.3. □

Теорема 3.6. *Уравнение* (1.2) *экспоненциально* L_1*-устойчиво, если и только если найдутся такие* $N, \gamma > 0$, *что его функция Коши подчинена экспоненциальной оценке*

$$|Y(t)| \leqslant N^{-\gamma t}, \quad t \in \mathbb{R}_+. \tag{3.8}$$

Доказательство. Для каждого фиксированного $t \in \mathbb{R}_+$ норма вектор-функционала $K_t\colon L_p[0,\omega] \to \mathbb{R}^n$ определяется формулой (3.5). Следовательно, $\|K_t\| \leqslant Ne^{-\gamma t}$, если и только если $|Y(t)| \leqslant Ne^{-\gamma t}$. Остается сослаться на соотношение (1.6). □

Из теорем 3.5 и 3.6 получаем следствие.

Следствие 3.3. *Если функция Коши уравнения* (1.2) *подчинена экспоненциальной оценке* (3.8), *то уравнение* (1.2) *экспоненциально* L_p*-устойчиво для всех* p, $1 \leqslant p \leqslant \infty$.

4. L_p-устойчивость и асимптотика функции Коши

4.1. Скачки функции Коши. В работе [15] показано, что все компоненты матрицы-функции Y абсолютно непрерывны на любом отрезке $[mh, mh+h)$, $m \in \mathbb{N}_0$, и имеют в точках mh конечные скачки $H(m)$, при этом функция $H\colon \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{n\times n}$ является решением следующей задачи для матричного линейного разностного уравнения:

$$\begin{aligned} &H(m) = \sum_{k=1}^{K} H(m-k)A_k, \quad m \in \mathbb{N};\\ &H(0) = E; \quad H(m) = \Theta, \qquad m \in \mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}_0. \end{aligned} \tag{4.1}$$

В связи с этим изучим некоторые свойства линейных автономных разностных систем.

Рассмотрим задачу Коши для неоднородного уравнения

$$\begin{aligned} &y(m) = \sum_{k=1}^{K} A_k^T y(m-k) + f(m), && m \in \mathbb{N},\\ &y(-p) = 0, && p = 0, 1, \ldots, K-1 \end{aligned} \tag{4.2}$$

относительно функции $y\colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$.

Лемма 4.1. *Решение задачи* (4.2) *при любой функции* $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ *представимо в виде*

$$y(m) = \sum_{\nu=1}^{m} H^T(m-\nu)f(\nu), \quad m \in \mathbb{N}, \tag{4.3}$$

где функция $H : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{R}^{n\times n}$ *определяется задачей* (4.1).

Доказательство. Очевидно, решение задачи (4.2) существует и единственно. Подставим (4.3) в уравнение (4.2) и используем свойства функции H, определяемые задачей (4.1):

$$\sum_{k=1}^{K} A_k^T y(m-k) + f(m) =$$

$$= A_1^T \sum_{\nu=1}^{m-1} H^T(m-\nu-1)f(\nu) + \ldots + A_K^T \sum_{\nu=1}^{m-K} H^T(m-\nu-K)f(\nu) + f(m) =$$

$$= \left(\sum_{\nu=1}^{m-1} \left(A_1^T H^T(m-\nu-1) + \ldots + A_K^T H^T(m-\nu-K) \right) \right) f(\nu) + f(m) =$$

$$= \left(\sum_{\nu=1}^{m-1} \left(H(m-\nu-1)A_1 + \ldots + H(m-\nu-K)A_K \right) \right)^T f(\nu) + f(m) =$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m-1} H^T(m-\nu)f(\nu) + f(m) = \sum_{\nu=1}^{m} H^T(m-\nu)f(\nu) = y(m).$$

Уравнение (4.2) обратилось в тождество, что и доказывает лемму. □

Приведенная ниже лемма описывает принцип известного переноса на разностные уравнения в рамках подхода пермской школы исследования ФДУ к определению решения уравнения [1, 2].

Рассмотрим разностную задачу Коши:

$$\begin{aligned} u(m) &= \sum_{k=1}^{K} A_k^T u(m-k), && m \in \mathbb{N}, \\ u(-p) &= \varphi(p), && p = 0, 1, 2, \ldots, K-1. \end{aligned} \tag{4.4}$$

Положим

$$f(m) = \begin{cases} \sum\limits_{k=m}^{K} A_k^T \varphi(k-m), & \text{если } m = 1, \ldots, K; \\ 0, & \text{если } m = K+1, K+2, \ldots; \end{cases} \tag{4.5}$$

и сопоставим решения задач (4.2) и (4.4). Нетрудно убедиться непосредственно, что *решения задач* (4.2) *и* (4.4) *при условии* (4.5) *совпадают*: $u(m) = y(m)$ *при всех* $m \in \mathbb{N}$.

Лемма 4.2. *Если* $\lim\limits_{m\to\infty} H(m) = \Theta$, *то для решения* $u \colon \mathbb{N} \to \mathbb{R}^n$ *задачи* (4.4) *выполняется* $\lim\limits_{m\to\infty} u(m) = 0$ *при любом выборе начальных условий* $u(-p)$, $p = \overline{0, K-1}$.

Доказательство. Перепишем уравнение (4.4) в виде (4.2) по схеме, приведенной выше. Очевидно, что

$$|f(m)| \leqslant \sum_{k=m}^{K} \left|A_k^T\right| |\varphi(k-m)| \leqslant \max_{0\leqslant k\leqslant K-1} |\varphi(k)| \sum_{k=0}^{K} \left|A_k^T\right| = \alpha < \infty.$$

Учитывая, что $f(m) = 0$ при $m \geqslant K+1$, и применяя лемму 4.1, получаем:

$$|u(m)| \leqslant \sum_{\nu=1}^{K} \left|H^T(m-\nu)\right| |f(\nu)| \leqslant \alpha \sum_{\nu=1}^{K} |H(m-\nu)| \underset{n\to\infty}{\to} 0.$$

Лемма доказана. □

4.2. Известные критерии наличия экспоненциальных оценок функций X и Y. Определим полиномы от комплексной переменной z с матричными коэффициентами

$$P_A(z) = E - \sum_{k=1}^{K} A_k z^k, \quad P_B(z) = \sum_{j=0}^{J} B_j z^j.$$

Для всех точек $z \in \mathbb{C}$, кроме таких, что $\det P_A(z) = 0$, определим функцию

$$Q(z) = \exp(hP_A^{-1}(z)P_B(z)).$$

Теорема 4.1 (см. [15]). *Для того чтобы функция Коши уравнения* (1.2) *имела при некоторых* $N, \gamma > 0$ *экспоненциальную оценку* (3.8), *необходимо и достаточно, чтобы*

- *все корни полинома* $\det P_A(z)$ *лежали вне круга* $B[0,1]$;
- *все корни уравнения* $\det(E - zQ(z)) = 0$ *лежали вне круга* $B[0,1]$.

Из результатов раздела 3 работы [15] следуют также необходимые и достаточные условия наличия экспоненциальной оценки фундаментального решения уравнения (1.2).

Теорема 4.2. *Для того чтобы фундаментальное решение уравнения* (1.2) *имело при некоторых* $N, \gamma > 0$ *экспоненциальную оценку* $|X(t)| \leqslant Ne^{-\gamma t}$, $t \in \mathbb{R}_+$, *необходимо и достаточно, чтобы все корни уравнения* $\det(E - zQ(z)) = 0$ *лежали вне круга* $B[0,1]$.

4.3. Характер стремления функции Коши к нулю.

Лемма 4.3. *Если* $\lim\limits_{m\to\infty} H(m) = \Theta$, *то все корни полинома* $\det P_A(z)$ *лежат вне круга* $B[0,1]$.

Доказательство. Предположим, что существует корень z_0 полинома $\det P_A(z)$, лежащий в круге $B[0,1]$. Тогда число $1/z_0$ является корнем характеристического многочлена $\det(z^K E - \sum\limits_{k=1}^{K} A_k^T z^{K-k})$ системы (4.4) и представимо в виде $1/z_0 = e^{\alpha+i\beta}$, где $\alpha \geqslant 0$.

Обозначим через $\xi_0 = \zeta + i\eta$ нетривиальное решение системы

$$(e^{(\alpha+i\beta)K} E - \sum_{k=1}^{K} A_k^T e^{(\alpha+i\beta)(K-k)})\xi = 0.$$

Возьмем в (4.4) в качестве начальных функций

$$\varphi(p) = e^{-\alpha p}(\zeta \cos\beta p + \eta \sin\beta p), \quad \varphi(p) = e^{-\alpha p}(\eta\cos\beta p - \zeta\sin\beta p), \quad p = 0, 1, 2, \ldots, K-1.$$

Легко видеть, что им соответствуют решения системы (4.4)

$$v(m) = e^{\alpha m}(\zeta\cos\beta m - \eta\sin\beta m), \quad w(m) = e^{\alpha m}(\eta\cos\beta m + \zeta\sin\beta m).$$

Из леммы 4.2 следует, что если $\lim\limits_{m\to\infty} H(m) = 0$, то $\lim\limits_{m\to\infty} v(m) = 0$ и $\lim\limits_{m\to\infty} w(m) = 0$, что невозможно, так как при $\alpha \geqslant 0$ и $m \in \mathbb{N}$

$$|v(m)|^2 + |w(m)|^2 = e^{2\alpha m}|\zeta|^2 + |\eta|^2 = e^{2\alpha m}|\xi_0|^2 \geqslant |\xi_0|^2 > 0.$$

Лемма доказана. □

Лемма 4.4. *Если* $Y(t)$ *имеет предел при* $t \to \infty$, *то* $\lim\limits_{m\to\infty} H(m) = \Theta$.

Доказательство. Допустим, что $\lim\limits_{m\to\infty} H(m) \neq \Theta$. Тогда из леммы 4.3 следует, что найдутся число $\varepsilon > 0$ и подпоследовательность $\{m_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ такие, что $|H(m_k)| \geqslant \varepsilon$. Пусть $t_k = hm_k$ — точка, в которой матрица-функция Y имеет скачок величиной $H(m_k)$. Тогда

$$\left| Y(t_k) - \lim_{\delta\to+0} Y(t_k - \delta) \right| = |H(m_k)| \geqslant \varepsilon,$$

откуда следует, что Y не может иметь предела при $t \to +\infty$. □

Следствие 4.1. *Если* $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = \Theta$, *то все корни полинома* $\det P_A(z)$ *лежат вне круга* $B[0,1]$.

Обозначим

$$G(\lambda) = \lambda(E - G_A(\lambda)) - G_B(\lambda), \quad G_A(\lambda) = \sum_{k=1}^{K} e^{-\lambda hk} A_k, \quad G_B(\lambda) = \sum_{j=0}^{J} e^{-\lambda hj} B_j.$$

Уравнение $\det G(\lambda) = 0$ называется *характеристическим уравнением* для уравнения (1.2).

Функция $\det G(\lambda)$ является аналитической, а уравнение $\det G(\lambda) = 0$ имеет в комплексной плоскости счетный набор корней.

Пусть $\lambda_0 = \alpha + i\beta$ — корень характеристического уравнения. Тогда существует ненулевой вектор $\xi_0 = \zeta + i\eta$ такой, что $G(\lambda_0)\xi_0 = 0$. Выбрав для уравнения (1.2) в качестве начальных функций при $\tau \in [-\omega, 0)$ функции

$$\varphi(\tau) = e^{\alpha\tau}(\zeta\cos(\beta\tau) - \eta\sin(\beta\tau)), \quad \psi(\tau) = \dot{\varphi}(\tau),$$

получим, что функция

$$v(t) = e^{\alpha t}(\zeta\cos(\beta t) - \eta\sin(\beta t)), \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

есть решение уравнения (1.2). Аналогично, если положить

$$\varphi(\tau) = e^{\alpha\tau}(\eta\cos(\beta\tau) + \zeta\sin(\beta\tau)), \quad \psi(\tau) = \dot{\varphi}(\tau),$$

то найдем другое решение уравнения (1.2):

$$w(t) = e^{\alpha t}(\eta\cos(\beta t) + \zeta\sin(\beta t)), \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Теорема 4.3. *Функция Коши обладает свойством* $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = \Theta$, *если и только если она имеет экспоненциальную оценку* (3.8).

Доказательство. Очевидно, что в доказательстве нуждается только необходимость. В соответствии с теоремой 4.1 надо убедиться, что все корни уравнений $\det P_A(z) = 0$ и $\det(E - zQ(z)) = 0$ лежат вне круга $B[0,1]$. Следствие 4.1 утверждает, что для уравнения $\det P_A(z) = 0$ это верно. Допустим, что уравнение $\det(E - zQ(z)) = 0$ имеет корень z_0, принадлежащий кругу $B[0,1]$. Тогда число $1/z_0$ представимо в виде $1/z_0 = e^{\lambda_0 h}$, где $\lambda_0 = \alpha + i\beta$, $\alpha \geqslant 0$, и с учетом определения функции $Q(z)$ имеем:

$$\det(\exp(hP_A^{-1}(e^{-\lambda_0 h})P_B(e^{-\lambda_0 h})) - e^{\lambda_0 h}E) = 0.$$

Следовательно, среди собственных чисел матрицы $P_A^{-1}(e^{-\lambda_0 h})P_B(e^{-\lambda_0 h})$ присутствует число $\lambda_1 = \alpha + i\gamma$.

Из определения $G(\lambda)$ получаем:

$$P_A^{-1}(e^{-\lambda_1 h})G(\lambda_1) = \lambda_1 E - P_A^{-1}(e^{-h\lambda_1})P_B(e^{-h\lambda_1}),$$

откуда следует, что $\det G(\lambda_1) = 0$.

В силу приведенных перед доказываемой теоремой рассуждений функции

$$v(t) = e^{\alpha t}(\zeta\cos(\gamma t) - \eta\sin(\gamma t)), \quad w(t) = e^{\alpha t}(\eta\cos(\gamma t) + \zeta\sin(\gamma t)),$$

где $|\zeta|^2 + |\eta|^2 > 0$, являются решениями уравнения (1.2).

Из теоремы 3.4 следует, что $\lim\limits_{t\to\infty} v(t) = \lim\limits_{t\to\infty} w(t) = 0$, что невозможно, так как при $\alpha \geqslant 0$

$$|v(t)|^2 + |w(t)|^2 = e^{2\alpha t}(|\zeta|^2 + |\eta|^2) \geqslant |\zeta|^2 + |\eta|^2 > 0.$$

Теорема доказана. □

Непосредственно из теорем 3.4 и 4.3 вытекает следствие.

Следствие 4.2. *Уравнение* (1.2) *сильно L_1-асимптотически устойчиво тогда и только тогда, когда функция Коши имеет экспоненциальную оценку* (3.8).

Замечание 4.1. Таким образом, для уравнений нейтрального типа сохранилось свойство функции Коши, хорошо известное для ОДУ и ФДУ запаздывающего типа: если функция Коши стремится к нулю, то со скоростью не ниже экспоненциальной. Но это не означает совпадения асимптотических свойств *решений* уравнений! Для ОДУ и ФДУ запаздывающего типа любое решение может стремиться к нулю только по экспоненциальному закону. Напротив, для уравнения (1.2) бесконечное множество решений (в том числе фундаментальное решение) могут стремиться к нулю медленнее экспоненты — например, как степенная функция [16]. Причина становится понятной, если обратиться к формуле (2.1), определяющей любое решение уравнения (1.2). Для ОДУ и ФДУ запаздывающего типа справедливо равенство $X(t) = Y(t)$; для уравнения (1.2) это равенство не выполняется (имеет место более сложная зависимость (1.6)), и в формуле (2.1) интегральное слагаемое может стремиться к нулю в случае, когда функция Y не имеет нулевого предела.

Замечание 4.2. Получение критериев устойчивости по Ляпунову для уравнения (1.2) представляет собой самостоятельную технически сложную задачу. Очевидно, что если выполнены условия теоремы 4.1, то функция Y ограничена, а уравнение (1.2) L_p-устойчиво при любом $p \geqslant 1$. Но этими условиями не исчерпываются классы уравнений с ограниченной функцией Коши: в работах [4, 18] указаны классы уравнений, для которых ограниченность функции Y сохраняется в случае, когда уравнения $\det P_A(z) = 0$ и $\det(E - zQ(z)) = 0$ имеют нули на границе круга $B[0, 1]$; более того, возможна ситуация, когда этих нулей бесконечно много.

Неизвестно, существуют ли примеры L_p-устойчивых уравнений, функция Коши которых была бы неограничена.

4.4. Экспоненциальная L_p-устойчивость. В силу теоремы 3.6 экспоненциальная L_1-устойчивость уравнения (1.2) эквивалентна экспоненциальной оценке функции Коши. Так как при $p > 1$ справедливо включение $L_p[0, \omega] \subset L_1[0, \omega]$, то оценка (3.8) влечет экспоненциальную L_p-устойчивость уравнения (1.2) при всех $p > 1$. Интересен вопрос, существуют ли экспоненциально L_p-устойчивые уравнения, функция Коши которых не имеет экспоненциальной оценки?

Лемма 4.5. *Пусть* λ_0 *— корень уравнения* $\det(1-G_A(\lambda)) = 0$. *Тогда при любом* $\varepsilon > 0$ *найдется корень* μ_0 *того же уравнения такой, что* $\operatorname{Re}\lambda_0 = \operatorname{Re}\mu_0$, *а в круге* $B(\mu_0, \varepsilon)$ *есть корень уравнения* $\det G(\lambda) = 0$.

Доказательство. Обозначим $\eta(z) = \det(E - G_A(\lambda_0 + z))$. Поскольку функция $\det(E - G_A(\lambda))$ аналитическая, ее нули изолированы, значит, при достаточно малом $\varepsilon > 0$ функция η имеет в круге $B(0, \varepsilon)$ единственный нуль $z = 0$. На границе $|z| = \varepsilon$ имеем $\min\limits_{|z|=\varepsilon} |\eta(z)| = m > 0$. Пусть $\lambda_k = \lambda_0 + \dfrac{2\pi ki}{h}$, где $k \in \mathbb{Z}$. Очевидно, что $e^{\lambda_0 h} = e^{\lambda_k h}$, следовательно, $G_A(\lambda_k + z) = G_A(\lambda_0 + z)$, $G_B(\lambda_k+z) = G_B(\lambda_0+z)$. Матрицы-функции $G_A(\lambda_0+z)$ и $G_B(\lambda_0+z)$ непрерывны и, следовательно, ограничены в круге $B[0, \varepsilon]$; значит, при $|z| = \varepsilon$ справедливо равенство

$$\det\left(E - G_A(\lambda_0 + z) + \frac{G_B(\lambda_0 + z)}{\lambda_k + z}\right) = \eta(z) + \frac{R(\lambda_k + z)}{\lambda_k + z},$$

причем найдется такое $M > 0$, что $|R(\lambda_k + z)| \leqslant M$ при всех $k \in \mathbb{Z}$.

Положим $\xi_k(z) = \dfrac{R(\lambda_k + z)}{\lambda_k + z}$; легко видеть, что при $|z| = \varepsilon$ справедлива оценка $|\xi_k(z)| \leqslant \dfrac{Mh}{\sqrt{\lambda_0^2 h^2 + 4\pi^2 k^2} - h\varepsilon}$, а значит, можно выбрать $k = k_0 \in \mathbb{Z}$ таким, что $|\xi_{k_0}(z)| < m$.

Обозначим $\xi_{k_0}(z) = \xi(z)$, $\lambda_{k_0} = \mu_0$. С учетом приведенных выше оценок получаем, что при $|z| = \varepsilon$ выполнены неравенства $|\eta(z)| \geqslant m > |\xi(z)|$, и по теореме Руше функции $\eta(z) + \xi(z)$ и $\eta(z)$ имеют в круге $B(0, \varepsilon)$ одинаковое число нулей. Так как в этом круге есть нуль у функции $\eta(z)$, то при некотором $z_0 \in B(0, \varepsilon)$

$$\eta(z_0) + \xi(z_0) = \det(E - G_A(\mu_0 + z_0) + \frac{G_B(\mu_0 + z_0)}{\mu_0 + z_0}) = 0.$$

Так как

$$\det G(\mu_0 + z_0) = (\mu_0 + z_0)^n \det\left(E - G_A(\mu_0 + z_0) + \frac{G_B(\mu_0 + z_0)}{\mu_0 + z_0}\right) = 0,$$

$\operatorname{Re}\mu_0 = \operatorname{Re}\lambda_0$, а $\mu_0 + z_0 \in B(\mu_0, \varepsilon)$, то лемма доказана. □

Лемма 4.6. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Если уравнение* (1.2) *экспоненциально* L_p*-устойчиво, то все корни многочлена* $P_A(z)$ *лежат вне круга* $B[0,1]$.

Доказательство. Пусть z_0 — корень уравнения многочлена $P_A(z)$. Допустим, что $z_0 \in B[0,1]$, т. е. $z_0 = e^{-\alpha - i\beta}$, где $\alpha \geqslant 0$. Тогда уравнение $\det(E - G_A(\lambda)) = 0$ имеет корень $\lambda_0 = \alpha + i\beta$. Выберем $\varepsilon < \alpha + \gamma$, где γ — показатель экспоненты в определении экспоненциальной L_p-устойчивости, и найдем, в соответствии с леммой 4.5, корень μ_0 уравнения $\det(E - G_A(\lambda)) = 0$ такой, что $\operatorname{Re}\mu_0 = \alpha$, а в круге $B(\mu_0, \varepsilon)$ есть корень функции $\det G(\lambda)$, который обозначим через $\lambda_1 = \alpha_1 + i\beta_1$. По построению, $|\alpha_1 - \alpha| < \varepsilon < \alpha + \gamma$, следовательно, $\alpha_1 + \gamma > 0$. Корню λ_1 соответствует нетривиальное решение $\xi_0 = \zeta + i\eta$ системы $G(\lambda_1)\xi = 0$ и решения уравнения (1.2)

$$x(t) = e^{\alpha_1 t}(\eta\cos\beta_1 t - \zeta\sin\beta_1 t), \quad y(t) = e^{\alpha_1 t}(\eta\cos\beta_1 t + \zeta\sin\beta_1 t),$$

для которых сумма

$$|x(t)|^2 e^{2\gamma t} + |y(t)|^2 e^{2\gamma t} = e^{2(\alpha_1+\gamma)t}\left(|\eta|^2 + |\zeta|^2\right) = e^{2(\alpha_1+\gamma)t}|\xi_0|^2$$

является неограниченной функцией, что противоречит экспоненциальной L_p-устойчивости уравнения (1.2). □

Теорема 4.4. *Пусть* $1 \leqslant p \leqslant \infty$. *Уравнение* (1.2) *экспоненциально* L_p*-устойчиво тогда и только тогда, когда для функции Коши справедлива оценка* (3.8).

Доказательство. Очевидно, что в доказательстве нуждается только необходимость. Пусть уравнение (1.2) экспоненциально L_p-устойчиво. Из леммы 4.6 следует, что все корни многочлена $\det P_A(z)$ лежат вне круга $B(0,1)$. Далее, если уравнение (1.2) экспоненциально L_p-устойчиво, то его фундаментальное решение имеет экспоненциальную оценку, и из теоремы 4.2 следует, что все корни уравнения $\det(E - zQ(z)) = 0$ также лежат вне круга $B(0,1)$. Применение теоремы 4.1 завершает доказательство. □

Следствие 4.3. *Если уравнение* (1.2) *экспоненциально* L_{p_0}*-устойчиво хотя бы при одном* $p_0 \geqslant 1$, *то оно экспоненциально* L_p*-устойчиво при всех* $p \geqslant 1$.

Таким образом, в шкале пространств L_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$ экспоненциальную устойчивость достаточно исследовать при каком-то одном p. Наиболее удобными, по-видимому, являются пространства L_1, L_2 или L_∞.

Наиболее важные результаты раздела 4 соединим в одной теореме.

Теорема 4.5. *Следующие утверждения эквивалентны*:

- *уравнение* (1.2) *сильно асимптотически* L_1*-устойчиво*;
- *уравнение* (1.2) *экспоненциально* L_p*-устойчиво при любом* $p \geqslant 1$;
- *уравнение* (1.2) *экспоненциально* L_p*-устойчиво хотя бы при одном* $p \geqslant 1$;
- $\lim\limits_{t\to\infty} Y(t) = \Theta$;
- *при некоторых* $N, \gamma > 0$ *справедлива оценка* $|Y(t)| \leqslant Ne^{-\gamma t}$, $t \in \mathbb{R}_+$.

5. Пример

Покажем, что все введенные выше виды устойчивости реализуются на конкретных представителях уравнений вида (1.2).

Рассмотрим уравнение нейтрального типа

$$\begin{aligned} &\dot{x}(t) - a\dot{x}(t-1) = bx(t) - cx(t-1), && t \geqslant 0, \\ &x(\xi) = \varphi(\xi), \quad \dot{x}(\xi) = \psi(\xi), && \xi < 0, \end{aligned} \tag{5.1}$$

где a, b, c — произвольные вещественные числа. Для уравнения (5.1) в работе [4] была построена область устойчивости. Приведем ее здесь.

В пространстве $Ouvw$ зададим поверхность Γ:

$$u = \cos\theta + v\frac{\cos\theta}{\theta}, \quad w = -\theta\sin\theta + v\cos\theta,$$

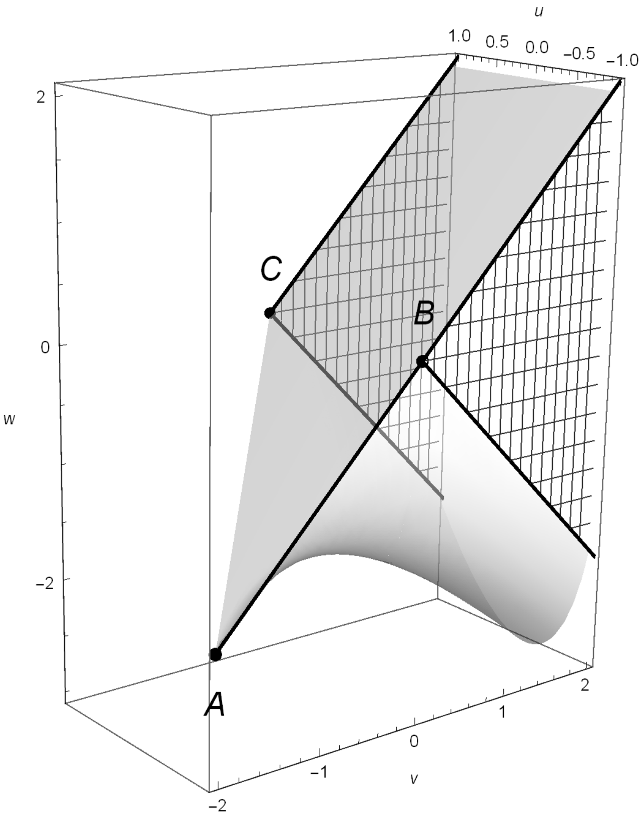

Рис. 1. Область D
Fig. 1. Domain D

считая, что $\theta \in (\theta_1, \pi)$ при $v \geqslant 0$, где θ_1 — наименьший положительный корень уравнения $\cos\zeta + v\dfrac{\sin\zeta}{\zeta} = -1$, и $\theta \in (0, \theta_2)$ при $v \in (-2, 0)$, где θ_2 — наименьший положительный корень уравнения $\cos\zeta + v\dfrac{\sin\zeta}{\zeta} = 1$.

Вместе с тремя плоскостями $v = w$ и $u = \pm 1$ поверхность Γ ограничивает в пространстве $Ouvw$ область D, приведенную на рис. 1 (границы не принадлежат D).

Пусть $|a| < 1$. В работе [4] показано, что функция Коши уравнения (5.1) имеет экспоненциальную оценку (3.8), если и только если $(a, b, c) \in D$. В силу теоремы 4.5 наличие экспоненциальной оценки можно заменить любым из четырех оставшихся утверждений. При попадании точки (a, b, c) на поверхность Γ или плоскость $v = w$ (кроме отрезка AC) уравнение (5.1) теряет асимптотическую устойчивость, но остается L_p-устойчивым при любом $p \geqslant 1$. Таким образом, при $|a| < 1$ асимптотические свойства уравнения (5.1) не отличаются от свойств ФДУ запаздывающего типа.

Пусть теперь $|a| = 1$. При попадании точки (a, b, c) на границы $u = \pm 1$ уравнение (5.1) теряет экспоненциальную устойчивость, но не обязательно теряет асимптотическую устойчивость. В работе [10] показано, что если $|a| = 1$, а $|c| < b$, то уравнение (5.1) сильно асимптотически L_p-устойчиво при всех $p > 1$. При $p = 1$ сильная асимптотическая устойчивость теряется, но уравнение (5.1) остается асимптотически L_1-устойчивым. Таким образом, при $|a| = 1$ обнаруживаются специфические свойства уравнений нейтрального типа: несмотря на то, что уравнение (5.1) является автономным, для него асимптотическая устойчивость не совпадает с экспоненциальной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматуллина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991.
2. *Андрианов Д. Л.* Краевые задачи и вопросы управления для линейных разностных уравнений с последействием// Изв. вузов. Сер. мат. — 1993. — № 5. — С. 3–16.

3. *Баландин А. С., Малыгина В. В.* Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных уравнений нейтрального типа// Изв. вузов. Сер. мат. — 2007. — № 7. — С. 17–27.
4. *Баландин А. С., Малыгина В. В.* Асимптотические свойства решений одного класса дифференциальных уравнений нейтрального типа// Мат. тр. — 2020. — *23*, № 2. — С. 3–49.
5. *Беллман Р., Кук К. Л.* Дифференциально-разностные уравнения. — М.: Мир, 1967.
6. *Власов В. В., Раутиан Н. А.* Спектральный анализ функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Макс Пресс, 2016.
7. *Демидович Б. П.* Введение в математическую теорию устойчивости. — М.: Наука, 1967.
8. *Колмановский В. Б., Носов В. Р.* Устойчивость и периодические режимы регулируемых систем с последействием. — М.: Наука, 1981.
9. *Люстерник Л. А., Соболев В. И.* Краткий курс функционального анализа. — М.: Высшая школа, 1982.
10. *Малыгина В. В., Баландин А. С.* Асимптотическая устойчивость одного класса уравнений нейтрального типа// Сиб. мат. ж. — 2021. — *62*, № 1. — С. 106–116.
11. *Симонов П. М., Чистяков А. В.* Об экспоненциальной устойчивости линейных дифференциально-разностных систем// Изв. вузов. Сер. Мат. — 1997. — № 6. — С. 37–49.
12. *Хейл Дж.* Теория функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1984.
13. *Эльсгольц Л. Э., Норкин С. Б.* Введение в теорию дифференциальных уравнений с отклоняющимся аргументом. — М.: Наука, 1971.
14. *Balandin A.* On relation between the fundamental and Cauchy matrices of linear autonomous functional differential equations of neutral type// Func. Differ. Equ. — 2020. — *27*, № 3-4. — C. 61–70.
15. *Balandin A., Chudinov K.* On the asymptotic behavior of linear autonomous functional differential equations of neutral type// Func. Differ. Equ. — 2008. — *15*, № 1-2. — C. 5–15.
16. *Hahn W.* Zur stabilität der lösungen von linearen differential-differenzengliechungen mit konstanten koeffizienten// Math. Ann. — 1956. — *131*. — C. 151–166.
17. *Junca S., Lombard B.* Stability of a critical nonlinear neutral delay differential equation// J. Differ. Equ. — 2014. — *256*, № 7. — C. 2368–2391.
18. *Malygina V., Chudinov K.* On the asymptotic behavior of solutions to linear autonomous neutral functional differential equations// Func. Differ. Equ. — 2020. — *27*, № 3-4. — C. 103–123.

В. В. Малыгина
Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия
E-mail: `mavera@list.ru`

К. М. Чудинов
Пермский национальный исследовательский политехнический университет, Пермь, Россия
E-mail: `cyril@list.ru`

UDC 517.929
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-116-133
EDN: ECHRHE

On asymptotic properties of solutions for differential equations of neutral type

V. V. Malygina and K. M. Chudinov

Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia

The stability of systems of linear autonomous functional differential equations of neutral type is studied. The study is based on the well-known representation of the solution in the form of an integral operator, the kernel of which is the Cauchy function of the equation under study. The definitions of Lyapunov, asymptotic, and exponential stability are formulated in terms of the corresponding properties of the Cauchy function, which allows us to clarify a number of traditional concepts without loss of generality. Along with the concept of asymptotic stability, a new concept of strong asymptotic stability is introduced.

The main results are related to the stability with respect to the initial function from the spaces of summable functions. In particular, it is established that strong asymptotic stability with initial data from the space L_1 is equivalent to the exponential estimate of the Cauchy function and, moreover, exponential stability with respect to initial data from the spaces L_p for any $p \geqslant 1$.

Keywords: neutral-type functional differential equations, Cauchy function, Lyapunov stability, exponential stability, asymptotic stability, strong asymptotic stability

For citation: V. V. Malygina, K. M. Chudinov, "On asymptotic properties of solutions for differential equations of neutral type," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 1, 116–133. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-116-133

REFERENCES

1. N. V. Azbelev, V. P. Maksimov, and L. F. Rakhmatullina, *Vvedenie v teoriyu funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Introduction to the theory of functional differential equations], Nauka, Moscow, 1991 (in Russian).
2. D. L. Andrianov, "Kraevye zadachi i voprosy upravleniya dlya lineynykh raznostnykh uravneniy s posledeystviem" [Boundary-value problems and control for linear difference equations with aftereffect], *Izv. vuzov. Ser. mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1993, No. 5, 3–16 (in Russian).
3. A. S. Balandin and V. V. Malygina, "Ob eksponentsial'noy ustoychivosti lineynykh differentsial'no-raznostnykh uravneniy neytral'nogo tipa" [On the exponential stability of linear differential-difference equations of neutral type], *Izv. vuzov. Ser. mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2007, No. 7, 17–27 (in Russian).
4. A. S. Balandin and V. V. Malygina, "Asimptoticheskie svoystva resheniy odnogo klassa differentsial'nykh uravneniy neytral'nogo tipa" [Asymptotic properties of solutions for a class of differential equations of neutral type], *Mat. tr.* [Math. Proc.], 2020, **23**, No. 2, 3–49 (in Russian).
5. R. Bellman and K. L. Cooke, *Differentsial'no-raznostnye uravneniya* [Differential-Difference Equations], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
6. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, *Spektral'nyy analiz funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Spectral Analysis of Functional Differential Equations], Maks Press, Moscow, 2016 (in Russian).
7. B. P. Demidovich, *Vvedenie v matematicheskuyu teoriyu ustoychivosti* [Introduction to the Mathematical Theory of Stability], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).

8. V. B. Kolmanovskiy and V. R. Nosov, *Ustoychivost' i periodicheskie rezhimy reguliruemykh sistem s posledeystviem* [Stability and Periodic Regimes of Regulated Systems with Aftereffect], Nauka, Moscow, 1981 (in Russian).
9. L. A. Lyusternik and V. I. Sobolev, *Kratkiy kurs funktsional'nogo analiza* [Short Course in Functional Analysis], Vysshaya Shkola, Moscow, 1982 (in Russian).
10. V. V. Malygina and A. S. Balandin, "Asimptoticheskaya ustoychivost' odnogo klassa uravneniy neytral'nogo tipa" [Asymptotic stability of one class of equations of neutral type], *Sib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 2021, **62**, No. 1, 106–116 (in Russian).
11. P. M. Simonov and A. V. Chistyakov, "Ob eksponentsial'noy ustoychivosti lineynykh differentsial'no-raznostnykh sistem" [On the exponential stability of linear differential-difference systems], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1997, No. 6, 37–49 (in Russian).
12. J. Hale, *Teoriya funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy* [Theory of Functional Differential Equations], Mir, Moscow, 1984 (Russian translation).
13. L. E. El'sgol'ts and S. B. Norkin, *Vvedenie v teoriyu differentsial'nykh uravneniy s otklonyayushchimsya argumentom* [Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Argument], Nauka, Moscow, 1971 (in Russian).
14. A. Balandin, "On relation between the fundamental and Cauchy matrices of linear autonomous functional differential equations of neutral type," *Func. Differ. Equ.*, 2020, **27**, No. 3-4, 61–70.
15. A. Balandin and K. Chudinov, "On the asymptotic behavior of linear autonomous functional differential equations of neutral type," *Func. Differ. Equ.*, 2008, **15**, No. 1-2, 5–15.
16. W. Hahn, "Zur stabilität der lösungen von linearen differential-differenzengliechungen mit konstanten koeffizienten," *Math. Ann.*, 1956, **131**, 151–166.
17. S. Junca and B. Lombard, "Stability of a critical nonlinear neutral delay differential equation," *J. Differ. Equ.*, 2014, **256**, No. 7, 2368–2391.
18. V. Malygina and K. Chudinov, "On the asymptotic behavior of solutions to linear autonomous neutral functional differential equations," *Func. Differ. Equ.*, 2020, **27**, No. 3-4, 103–123.

V. V. Malygina
Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia
E-mail: mavera@list.ru

K. M. Chudinov
Perm National Research Polytechnic University, Perm, Russia
E-mail: cyril@list.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 1 (2023). С. 134–151
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.97
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-134-151
EDN: FNYJWO

L^2-ОЦЕНКИ ПОГРЕШНОСТИ УСРЕДНЕНИЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С УЧЕТОМ КОРРЕКТОРОВ

С. Е. Пастухова

МИРЭА — Российский технологический университет, Москва, Россия

Рассматриваются параболические уравнения второго порядка с ограниченными измеримыми ε-периодическими коэффициентами. Для решения задачи Коши в слое $\mathbb{R}^d \times (0,T)$ с неоднородным уравнением получены приближения в норме $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}$ с остаточным членом порядка ε^2 при $\varepsilon \to 0$.

Ключевые слова: параболические уравнения, усреднение решений, погрешность усреднения, корректор

Для цитирования: *С. Е. Пастухова.* L^2-оценки погрешности усреднения параболических уравнений с учетом корректоров// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 1. С. 134–151. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-134-151

1. Введение. Постановка задачи

1.1. Рассмотрим параболический оператор с измеримыми ограниченными быстро осциллирующими коэффициентами

$$L_\varepsilon = \partial_t + A_\varepsilon, \quad A_\varepsilon = -\mathrm{div}\,(a^\varepsilon(x)\nabla), \quad a^\varepsilon(x) = a(y)|_{y=\varepsilon^{-1}x}, \tag{1.1}$$

где $\varepsilon \in (0,1)$ — малый параметр, $\nabla = \nabla_x = (D_1,\dots,D_d)$ — градиент по пространственной переменной $x \in \mathbb{R}^d$, $\mathrm{div} = \nabla^*$, а 1-периодическая вещественная матрица $a(y) = \{a_{ij}(y)\}_{i,j=1}^d$ измерима, ограничена и удовлетворяет неравенствам

$$a_{ij}(\cdot)\xi_i\xi_j \geqslant \lambda|\xi|^2 \quad \forall\xi \in \mathbb{R}^d, \quad \|a(\cdot)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)} \leqslant \lambda^{-1} \tag{1.2}$$

с некоторой положительной константой λ. Здесь и далее по повторяющимся индексам подразумеваем суммирование от 1 до d, если не оговорено противное.

Пусть $u^\varepsilon(x,t) \in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d))$ есть слабое решение задачи Коши

$$\begin{aligned} L_\varepsilon u^\varepsilon &= f \qquad \text{в } \mathbb{R}^d \times (0,T), \\ u^\varepsilon &= h \qquad \text{при } t = 0, \end{aligned} \tag{1.3}$$

где $f \in L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))$ и $h \in L^2(\mathbb{R}^d)$. В теории усреднения хорошо известно [1, 2, 9, 20], что $u^\varepsilon(x,t)$ сходится при $\varepsilon \to 0$ слабо в $L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d))$ и сильно в $L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d)) = L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))$ к слабому решению усредненной задачи

$$\begin{aligned} L_0 u &= f \qquad \text{в } \mathbb{R}^d \times (0,T), \\ u &= h \qquad \text{при } t = 0, \end{aligned} \tag{1.4}$$

где оператор

$$L_0 = \partial_t + A_0, \quad A_0 = -\mathrm{div}\,(a^0\nabla), \tag{1.5}$$

того же типа, что (1.1), но с постоянной матрицей коэффициентов a^0, определяемой через решения вспомогательных задач на ячейке периодичности — единичном кубе $Y = [-1/2, 1/2)^d$ (см. (2.1), (2.3)).

С самого начала существования теории усреднения ставился вопрос, насколько u^ε близко к u в различных нормах с оценкой по параметру ε. Долгое время оценки погрешности усреднения удавалось получить только при завышенных условиях регулярности на данные задачи (к ним относим коэффициенты оператора, правую часть в уравнении или начальные функции для эволюционных уравнений). По этой причине оценкам погрешности нельзя было придать операторный смысл, т. е. переформулировать их в естественной операторной норме, например, для разности резольвент исходного и усредненного эллиптических операторов или для разности полугрупп (операторных экспонент) соответствующих параболических уравнений.

Оценки погрешности усреднения, относящиеся к операторному типу, можно найти в работах В. В. Жикова 80-х годов (см. статью [7] и её изложение в [2, гл. II]). Будучи востребованы в приложениях к теории вероятностей и теории диффузии, это были оценки для параболических уравнений в L^∞-нормах. Для их доказательства использовался спектральный подход, основанный на блоховском представлении фундаментального решения. Прежде всего доказывались поточечная и интегральная оценка для фундаментального решения — ядра интегрального оператора полугруппы, отвечающей нестационарному уравнению диффузии. А уже из этих оценок, как простое следствие, в [7] выводилась оценка погрешности усреднения в L^∞-норме, и эта оценка имела операторный смысл. Позже в [10] было показано, что из оценок для фундаментального решения, установленных в [7], вытекает не только L^∞-оценка усреднения, но и аналогичные оценки в L^s-нормах для любого $1 \leqslant s \leqslant \infty$ с единой константой в правой части, а именно,

$$\|u^\varepsilon(\cdot,t) - u(\cdot,t)\|_{L^s(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}\|h\|_{L^s(\mathbb{R}^d)}, \quad C = \mathrm{const}(d,\lambda). \tag{1.6}$$

Здесь $u^\varepsilon(x,t)$ и $u(x,t)$ — решения задач (1.3) и (1.4) с однородным уравнением и симметричной матрицей коэффициентов $a(y)$. Запишем решения через операторные экспоненты:

$$u^\varepsilon(x,t) = \exp(-tA_\varepsilon)h(x), \quad u(x,t) = \exp(-tA_0)h(x).$$

Тогда из (1.6) при $s = 2$ получаем оценку в L^2-операторной норме

$$\forall t > 0 \quad \|\exp(-tA_\varepsilon) - \exp(-tA_0)\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant C\frac{\varepsilon}{\sqrt{t}}, \quad C = \mathrm{const}(d,\lambda). \tag{1.7}$$

Отсюда (поскольку резольвента есть преобразование Лапласа от полугруппы) вытекает оценка для разности резольвент

$$\|(A_\varepsilon + 1)^{-1} - (A_0 + 1)^{-1}\|_{L^2(\mathbb{R}^d)\to L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c\varepsilon, \quad c = \mathrm{const}(d,\lambda). \tag{1.8}$$

Этот вывод дан в [10].

Повышенный интерес к операторным оценкам типа (1.7) и (1.8) возник в нулевые годы после появления работы [3] М. Ш. Бирмана и Т. А. Суслиной, давшей новый толчок спектральному направлению в теории усреднения. В [3] с помощью предложенного авторами теоретико-операторного подхода доказаны L^2-операторные оценки усреднения типа (1.8) для широкого класса самосопряженных матричных эллиптических операторов. Как продолжение этой деятельности, в последующие годы Т. А. Суслиной и её учениками изучены различные аспекты параболического усреднения, связанные с операторными оценками для экспонент операторов из класса, введенного в [3] (см., например, [5, 6, 11, 12, 19, 23, 24, 36, 37]). В частности, в [19] (см. также подробную версию [36]) впервые установлена L^2-оценка типа (1.7). В последние годы много интересных результатов в параболическом усреднении получено китайскими коллегами. Особо надо отметить их исследования для операторов с коэффициентами, зависящими от времени (см., например, [21, 22, 25] и указанную там библиографию).

1.2. Данная публикация продолжает линию работ, идущую от [8, 38], где были сформулированы основные идеи так называемого *метода сдвига* (иначе этот подход можно назвать модифицированным методом первого приближения, что отражает его близость по духу к анзацу Бахвалова [1]) для получения операторных оценок усреднения. В этой серии среди работ [13, 17, 27, 39], посвященных параболическому усреднению, выделим статью [39], где для задачи Коши с однородным уравнением (т. е. $f=0$ в (1.3)) и симметричной матрицей $a(y)$ доказана оценка

$$\|u^\varepsilon - u\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))} \leqslant c_0\varepsilon^2(\ln(T+1)+2\ln(1/\varepsilon))\|h\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \tag{1.9}$$

с константой c_0, зависящей лишь от размерности d и константы λ из условия (1.2). Оценка (1.9) получалась как следствие (интегрированием по $t\in(0,T)$) из L^2-оценки по сечениям $t=\mathrm{const}$

$$\forall t>0 \quad \|u^\varepsilon(\cdot,t)-u(\cdot,t)\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)} \leqslant c_0\frac{\varepsilon^2}{t+\varepsilon^2}\|h\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad c=\mathrm{const}(d,\lambda), \tag{1.10}$$

которая впервые в [39] была доказана не спектральным методом, основанным на блоховском разложении фундаментального решения или операторной экспоненты, а методом сдвига.

Теперь нас интересует противоположная ситуация. Пусть, в отличие от [39], уравнение в (1.3) неоднородное, а однородно данное Коши, т. е. $h=0$, но f — ненулевая функция, более точно $f\in L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))$. Кроме того, пусть матрица коэффициентов $a(y)$ необязательно несимметрична. Наша цель — указать в этих условиях приближение для решения u^ε сначала в норме $L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d))$ с точностью порядка ε, а уже потом, опираясь на этот результат, найти приближение в норме $L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))$ с точностью порядка ε^2. В итоге придём к оценкам

$$\|u^\varepsilon - u - \varepsilon U^\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}, \tag{1.11}$$

$$\|u^\varepsilon - u\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))} \leqslant C\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}, \tag{1.12}$$

$$\|u^\varepsilon - u - \varepsilon\tilde{U}^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))} \leqslant C\varepsilon^2\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}. \tag{1.13}$$

Здесь и всюду далее (если не оговорено специально) обозначаем через C константу, зависящую лишь от d, T и постоянной λ из условия (1.2). В оценках (1.11) и (1.13) появляются дополняющие нулевое приближение $u(x,t)$ двухмасштабные корректоры $U^\varepsilon(x,t)$ и $\tilde{U}^\varepsilon(x,t)$, зависящие от медленной и быстрой переменных x и x/ε, которые, вообще говоря, нельзя отбросить. Точный вид корректоров описан в теореме 4.1. При этом корректор U^ε входит составной частью в $\tilde{U}^\varepsilon$ и для него верны оценки

$$\begin{gathered}\|U^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))} \leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))},\\ \|\varepsilon\nabla U^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))} \leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}.\end{gathered} \tag{1.14}$$

Поскольку $\|\varphi\|^2_{L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d)))} = \|\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))} + \|\nabla\varphi\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}$, неравенство (1.12) легко выводится из (1.11) в силу оценки $(1.14)_1$. Построение на основе оценки (1.11) аппроксимации $u+\varepsilon\tilde{U}^\varepsilon$ для решения u^ε с указанной в (1.13) погрешностью не столь очевидно. Этому посвящена существенная часть данной статьи, а именно, раздел 4. Лежащая в основе наших построений оценка (1.11) доказана в разделе 3. В разделе 2 введены вспомогательные задачи на ячейке. В разделе 5 приведены свойства сглаживания, которые использованы в доказательствах. Раздел 6 посвящен некоторым замечаниям, прямо не связанным с доказательством основных результатов; в частности, обсуждаются возможные обобщения основных результатов.

1.3. Оценки (1.11)–(1.13) с указанными в них приближениями не являются совершенно новыми и уже приводились ранее в определенных вариантах и контекстах. Например, в работе [36] дана оценка типа (1.12), но с логарифмическим дефектом в мажоранте, т. е. с мажорантой порядка $\varepsilon\ln^{1/2}(1/\varepsilon)$, как в (1.9). Оценка типа (1.11) следует из поточечных по t оценок, доказанных в [37], где изучалось неоднородное параболическое уравнение, однако, с несколько более регулярной по t, чем в (1.3), правой частью, а именно, $f\in\mathcal{H}_p(T):=L^p(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))$ с показателем $p\in(2,\infty]$. При этом мажоранта в оценке оказывается порядка $\varepsilon^{\kappa(p)}$, $0<\kappa(p)<1$, если $2<p<\infty$, и порядка ε, если $p=\infty$. Наконец, улучшенные по сравнению с (1.12) L^2-оценки по слою с учетом корректоров можно извлекать из соответствующих поточечных по t оценок, доказанных в [5]. Но тогда возникает мажоранта меньшего порядка малости по параметру ε, чем в (1.13). При этом наибольшая точность аппроксимации достигается в предположении, что $f\in\mathcal{H}_p(T)$, $p=\infty$. Проведённое здесь сопоставление результатов относится только к самосопряженному случаю, который охвачен в [5, 36, 37].

1.4. Сделаем замечания о методе доказательства и выборе класса функций для правых частей уравнения.

Замечание 1.1. Предложенный в [8, 38] метод сдвига для получения оценок погрешности усреднения позволяет снимать проблемы, связанные с минимальной регулярностью данных задачи, введением дополнительного параметра интегрирования. Это можно осуществить за счет непосредственного сдвига по быстрой переменной в построенном двухмасштабном приближении, как в [8], либо за счет его сглаживания (например, по Стеклову) по медленной переменной, как в [38]. Заметим, что сглаживание можно расценивать как обобщенный сдвиг. В данной статье выбрана версия метода сдвига, использующая сглаживание по Стеклову и его итерации.

Замечание 1.2. Усреднение задачи (1.3) можно рассматривать при более общей правой части в уравнении, например, из пространства $L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}^d))$. Если правая часть вида $f+\mathrm{div}F$, где $f\in L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))$ и $F\in L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))^d$, то для решения задачи Коши с нулевым начальным условием справедлива энергетическая оценка

$$|||u^\varepsilon|||_{0,T}^2 := \sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|u^\varepsilon(\cdot,t)\|^2+\int_0^T\|\nabla u^\varepsilon(\cdot,t)\|^2\,dt\leqslant C\int_0^T(\|f(\cdot,t)\|^2+\|F(\cdot,t)\|^2)\,dt. \tag{1.15}$$

Здесь и далее

$$\|\cdot\|=\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}$$

без различия в обозначении для L^2-пространств скалярных и векторных функций. Мы сужаем класс правых частей в задаче (1.3), преследуя цель получить оценки погрешности усреднения прежде всего в норме $|||\cdot|||_{0,T}$, определенной в (1.15). Для этого необходимо иметь несколько повышенную регулярность решения усредненной задачи (1.4), так чтобы $u\in L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^d))$ и $\partial_t u\in L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))$, что обеспечено, если в (1.3) (и, как следствие, в (1.4)) имеем правую часть $f\in L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))$ и нулевое начальное условие (см. оценку (2.4)). Такая повышенная регулярность решения усредненной задачи наблюдается и при ненулевом начальном условии, если начальная функция $h\in H^1(\mathbb{R}^d)$, что обыгрывалось в доказательствах [39] как промежуточный момент. В данной статье в основной части эта ситуация не затрагивается.

2. Задачи на ячейке

Введём задачи на ячейке

$$N_j\in\mathcal{W},\quad \mathrm{div}\,(a(\nabla N_j+e_j))=0,\quad j=1,\dots,d, \tag{2.1}$$

где $e_1,\dots,e_d$ — канонический базис в $\mathbb{R}^d$, $\mathcal{W}=\{\varphi\in H^1_{\mathrm{per}}(Y):\langle\varphi\rangle=0\}$ — соболевское пространство периодических функций ($Y=\Big[-\dfrac{1}{2},\dfrac{1}{2}\Big)^d$ — ячейка периодичности) с нулевым средним

$$\langle\varphi\rangle=\int_Y\varphi(y)\,dy.$$

По неравенству Пуанкаре норму в пространстве $\mathcal{W}$ можно задать равенством $\|\varphi\|_{\mathcal{W}}=\langle\nabla\varphi\cdot\nabla\varphi\rangle^{1/2}$. Решения задач (2.1) понимаются в смысле распределений в $\mathbb{R}^d$ или, что эквивалентно, в смысле интегрального тождества по ячейке Y на пробных функциях из $C^\infty_{\mathrm{per}}(Y)$. Последнее по замыканию распространяется на все функции из энергетического пространства $\mathcal{W}$, то есть

$$\langle a\nabla N_j\cdot\nabla\varphi\rangle=-\langle ae_j\cdot\nabla\varphi\rangle,\quad \varphi\in\mathcal{W}.$$

Отсюда легко следует разрешимость задачи (2.1) и оценка

$$\|N_j\|_{\mathcal{W}}\leqslant c,\quad c=\mathrm{const}(\lambda). \tag{2.2}$$

Двоякая точка зрения на уравнение (2.1) переносится и на другие подобные дифференциальные соотношения для периодических функций (например, $(2.6)_1$ и $(2.7)_1$).

Матрица коэффициентов a^0 для оператора (1.5) определяется соотношениями

$$a^0e_j=\langle a(e_j+\nabla N_j)\rangle,\quad j=1,\dots,d, \tag{2.3}$$

и принадлежит классу (1.2).

Ввиду постоянства и эллиптичности матрицы a^0 для решения усредненной задачи (1.4) с нулевым начальным условием (т. е. $h = 0$) верна оценка

$$\|u\|_{L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^d))} + \|\partial_t u\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))} \leqslant C\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}. \tag{2.4}$$

Введём векторы

$$g_j = a(e_j + \nabla N_j) - a^0 e_j, \quad j = 1, \dots, d. \tag{2.5}$$

Очевидно, что

$$\operatorname{div} g_j = 0, \quad \langle g_j \rangle = 0. \tag{2.6}$$

Тогда к векторам g_j применимо следующее утверждение, доказанное в [9].

Лемма 2.1. *Пусть $g \in L^2_{\mathrm{per}}(Y)^d$, $\langle g\rangle = 0$ и $\operatorname{div} g = 0$. Тогда найдётся кососимметрическая матрица $G \in H^1_{\mathrm{per}}(Y)^{d\times d}$ такая, что $\langle G\rangle = 0$, $\operatorname{Div} G = g$, $\|G\|_{H^1} \leqslant c\|g\|_{L^2}$.*

Здесь и далее обозначаем через $\operatorname{Div} G$ дивергенцию от матрицы $G = \{G_{st}\}_{s,t=1}^d$, вычисляемую построчно, так что $\operatorname{Div} G$ есть вектор $\{D_t G_{st}\}_{s=1}^d$. По лемме 2.1 векторам g_j из (2.5), в силу свойств (2.6), сопоставляются кососимметрические матрицы G_j, такие что

$$\operatorname{Div} G_j = g_j, \quad \langle G_j\rangle = 0, \quad \|G_j\|_{H^1} \leqslant c\|g_j\|_{L^2}, \quad j = 1, \dots, d. \tag{2.7}$$

3. О приближении в энергетической норме

Первоначально в качестве приближения к решению исходной задачи (1.3) возьмём двухмасштабную функцию

$$w^\varepsilon(x,t) = u^{,\varepsilon}(x,t) + \varepsilon\, U^\varepsilon(x,t). \tag{3.1}$$

Здесь

$$u^{,\varepsilon}(x,t) = \Theta^\varepsilon u(x,t) \tag{3.2}$$

есть сглаженное решение $u(x,t)$ усредненной задачи (1.4) с подходящим оператором сглаживания Θ^ε по пространственной переменной x (см. ниже), а корректор строится по формуле

$$U^\varepsilon(x,t) = N(x/\varepsilon)\cdot\nabla u^{,\varepsilon}(x,t) = N_j(x/\varepsilon) D_j u^{,\varepsilon}(x,t), \tag{3.3}$$

где $N_j(y)$, $j = 1, \dots, d$ суть решения задач (2.1). Оператор сглаживания Θ^ε должен иметь достаточно регулярное ядро сглаживания. Для определенности возьмём в качестве Θ^ε итерации оператора сглаживания по Стеклову S^ε, а именно, $\Theta^\varepsilon = S^\varepsilon S^\varepsilon S^\varepsilon$. Наконец, сам оператор сглаживания S^ε определяется как

$$(S^\varepsilon\varphi)(x) = \int\limits_Y \varphi(x - \varepsilon\omega)\, d\omega, \quad Y = [-1/2, 1/2)^d, \tag{3.4}$$

для любой $\varphi \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^d)$.

Присутствие сглаживания в корректоре U^ε (в силу свойств сглаживания, см. лемму 5.1) обеспечивает принадлежность функции w^ε пространству $L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d))$ при условии, что решение $u(x,t)$ усредненной задачи (1.4) имеет второй градиент $\nabla^2 u \in L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))$. Такая повышенная регулярность решения усредненной задачи (1.4) наблюдается, например, в случае нулевого начального условия.

Лемма 3.1.

(i) *Определенная в (3.1)–(3.3) функция w^ε имеет невязку в уравнении (1.3) вида*

$$L_\varepsilon w^\varepsilon - f = f^{,\varepsilon} - f + \varepsilon \operatorname{div} r_\varepsilon + \varepsilon\, r^0_\varepsilon =: F^\varepsilon, \tag{3.5}$$

где $f^{,\varepsilon} = \Theta^\varepsilon f$ и $\Theta^\varepsilon = S^\varepsilon S^\varepsilon S^\varepsilon$ — тройное сглаживание по Стеклову,

$$r^0_\varepsilon(x,t) = N_j(x/\varepsilon)\partial_t D_j u^{,\varepsilon}(x,t), \tag{3.6}$$

$$r_\varepsilon(x,t) = G_j(x/\varepsilon)\nabla D_j u^{,\varepsilon}(x,t) - a(x/\varepsilon) N_j(x/\varepsilon)\nabla D_j u^{,\varepsilon}(x,t) \tag{3.7}$$

и матрица $G_j(y)$ та же, что в (2.7).

(ii) *Для правой части F^ε равенства (3.5) справедлива оценка*

$$\|F^\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\varepsilon(\|\nabla^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))} + \|\partial_t u\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))} + \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}) \tag{3.8}$$

с константой $C = \mathrm{const}(d,T,\lambda)$. Здесь T можно заменить на любое $\tau \in (0,T)$.

Доказательство. Далее для 1-периодической функции $b(y)$ используем обозначение
$$b^\varepsilon(x) := b(x/\varepsilon). \tag{3.9}$$
Например, $N_j^\varepsilon(x) = N_j(x/\varepsilon)$, $(a\nabla N_j)^\varepsilon(x) = a(x/\varepsilon)(\nabla N_j)(x/\varepsilon)$ и т. д.

(i) Проведём простые вычисления:
$$\nabla w^\varepsilon = \nabla u^{,\varepsilon} + (\nabla N_j)^\varepsilon D_j u^{,\varepsilon} + \varepsilon N_j^\varepsilon \nabla D_j u^{,\varepsilon}, \tag{3.10}$$
$$\begin{aligned} a^\varepsilon(\nabla u^{,\varepsilon} + (\nabla N_j)^\varepsilon D_j u^{,\varepsilon}) = (a(e_j + \nabla N_j))^\varepsilon D_j u^{,\varepsilon} &\overset{(2.3),\,(2.5)}{=} g_j^\varepsilon D_j u^{,\varepsilon} + a^0 \nabla u^{,\varepsilon} = \\ &\overset{(2.7)}{=} \operatorname{Div}(\varepsilon G_j^\varepsilon D_j u^{,\varepsilon}) - \varepsilon G_j^\varepsilon \nabla D_j u^{,\varepsilon} + a^0 \nabla u^{,\varepsilon}, \end{aligned} \tag{3.11}$$
где учли представление $g_j^\varepsilon = \operatorname{Div}(\varepsilon G_j^\varepsilon)$ и правило взятия дивергенции от произведения матрицы G на скаляр φ, а именно, $\operatorname{Div}(G\varphi) = \varphi \operatorname{Div} G + G\nabla\varphi$. Вектор $\operatorname{Div}(\varepsilon G_j^\varepsilon D_j u^{,\varepsilon})$ соленоидален в силу кососимметричности матрицы G_j^ε. Тогда, учитывая структуру операторов L_ε и L_0, имеем
$$\begin{aligned} L_\varepsilon w^\varepsilon - f = L_\varepsilon w^\varepsilon - L_0 u^{,\varepsilon} + (f^{,\varepsilon} - f) &= (\partial_t + A_\varepsilon)(u^{,\varepsilon} + \varepsilon\, U^\varepsilon) - (\partial_t + A_0) u^{,\varepsilon} + (f^{,\varepsilon} - f) = \\ &= A_\varepsilon(u^{,\varepsilon} + \varepsilon\, U^\varepsilon) - A_0 u^{,\varepsilon} + \varepsilon \partial_t U^\varepsilon + (f^{,\varepsilon} - f) = \\ &= -\operatorname{div}(\varepsilon (aN_j)^\varepsilon \nabla D_j u^{,\varepsilon} - \varepsilon G_j^\varepsilon \nabla D_j u^{,\varepsilon}) + \varepsilon N_j^\varepsilon \partial_t D_j u^{,\varepsilon} + (f^{,\varepsilon} - f), \end{aligned}$$
и указанное в (3.5)–(3.7) представление получено.

(ii) Справедливы оценки
$$\begin{aligned} \|r_\varepsilon\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} &\leqslant C\|\nabla^2 u\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}, \\ \|r_\varepsilon^0\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}^d))} &\leqslant C\|\partial_t u\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}. \end{aligned} \tag{3.12}$$
В самом деле, доказывая оценку $(3.12)_1$, используем лемму 5.1, а также энергетические неравенства для решений $N_j(y)$ и $G_j(y)$ периодических задач (см. (2.2) и (2.7)). Чтобы доказать оценку $(3.12)_2$, используем лемму 5.2, считая $\varphi = \varepsilon S^\varepsilon S^\varepsilon \Phi$ и $\Phi = \partial_t D_j u = D_j(\partial_t u)$. По лемме 5.5
$$\|\varphi\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} \overset{(5.10)}{\leqslant} \|\partial_t u\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}. \tag{3.13}$$
Отсюда ввиду (5.4) (учитывая $\langle N_j \rangle = 0$) имеем
$$\|N_j^\varepsilon S^\varepsilon \varphi\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}^d))} \leqslant \varepsilon \langle |N_j|^2 \rangle^{1/2} \|\varphi\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} \overset{(2.2),\,(3.13)}{\leqslant} \varepsilon C \|\partial_t u\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))},$$
что обеспечивает $(3.12)_2$, так как
$$\varepsilon r_\varepsilon^0 = \varepsilon N_j^\varepsilon \partial_t D_j u^{,\varepsilon} \overset{(3.2)}{=} \varepsilon N_j^\varepsilon S^\varepsilon S^\varepsilon S^\varepsilon \partial_t D_j u = N_j^\varepsilon S^\varepsilon(\varepsilon S^\varepsilon S^\varepsilon D_j(\partial_t u)) = N_j^\varepsilon S^\varepsilon \varphi.$$
Наконец, используя оценку типа (5.3) для сглаживания Θ^ε, получаем
$$\|f^{,\varepsilon} - f\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\varepsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}, \tag{3.14}$$
что вместе с (3.12) даёт оценку (3.8). □

Замечание 3.1. Наряду с (3.14) имеем следующее соотношение:
$$\int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} (f^{,\varepsilon} - f)\psi\, dx\, dt = \int_0^T \int_{\mathbb{R}^d} f(\psi^{,\varepsilon} - \psi)\, dx\, dt$$
и, значит,
$$\int_0^T \langle (f^{,\varepsilon} - f), \psi \rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)\times H^1(\mathbb{R}^d)} dt \leqslant C\varepsilon \|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))} \|\nabla\psi\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} \quad \forall \psi \in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d)).$$
Аналогично можно уточнить оценку $(3.12)_2$, анализируя применение леммы 5.2 для её доказательства, а именно,
$$\int_0^T \langle \varepsilon r_\varepsilon^0, \psi \rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)\times H^1(\mathbb{R}^d)} dt \leqslant C\varepsilon \|\partial_t u\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))} \|\nabla\psi\|_{L^2(0,T;L^2(\mathbb{R}^d))} \quad \forall \psi \in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d)).$$

Лемма 3.2. *Пусть u^ε — решение задачи* (1.3), *а w^ε определена в* (3.1)-(3.2). *Тогда*

$$\forall\tau\in(0,T)\qquad \int\limits_0^\tau \langle(\partial_t+A_\varepsilon)(u^\varepsilon-w^\varepsilon),\psi\rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)\times H^1(\mathbb{R}^d)}dt\leqslant$$
$$\leqslant C\varepsilon(\|\nabla^2u\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,\tau))}+\|\partial_t u\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,\tau))}+\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,\tau))})\|\nabla\psi\|_{L^2(0,\tau;L^2(\mathbb{R}^d))} \tag{3.15}$$

для любой $\psi\in L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d))$ с константой $C=\mathrm{const}(d,T,\lambda)$.

Доказательство. Заметим, что

$$(\partial_t+A_\varepsilon)(u^\varepsilon-w^\varepsilon)=L_\varepsilon u^\varepsilon-L_\varepsilon w^\varepsilon\overset{(1.3)}{=}f-L_\varepsilon w^\varepsilon\overset{(3.5)}{=}-F^\varepsilon.$$

Отсюда, учитывая структуру F^ε (см. (3.5)–(3.7)), оценку (3.8) и её уточнение в замечании 3.1, получаем (3.15). □

Теорема 3.1. *Пусть u^ε — решение задачи* (1.3) *с нулевым начальным данным* (*т. е.* $h=0$), *а w^ε определена в* (3.1)-(3.2). *Тогда для разности $z^\varepsilon:=u^\varepsilon-w^\varepsilon$ верна оценка в энергетической норме*

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|z^\varepsilon(\cdot,t)\|^2+\int\limits_0^T\|\nabla z^\varepsilon(\cdot,t)\|^2dt\leqslant C\varepsilon^2\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))},\quad C=\mathrm{const}(d,T,\lambda). \tag{3.16}$$

Доказательство. Полагая в (3.15) $\psi=z^\varepsilon$, легко вывести (3.16), поскольку

$$\int\limits_0^\tau\langle A_\varepsilon z^\varepsilon(\cdot,t),z^\varepsilon(\cdot,t)\rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)\times H^1(\mathbb{R}^d)}dt=\int\limits_0^\tau\int\limits_{\mathbb{R}^d}a^\varepsilon(x)\nabla z^\varepsilon(x,t)\cdot\nabla z^\varepsilon(x,t)dx\,dt \tag{3.17}$$

и

$$2\int\limits_0^\tau\langle\partial_t z^\varepsilon(\cdot,t),z^\varepsilon(\cdot,t)\rangle_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)\times H^1(\mathbb{R}^d)}dt=\|z^\varepsilon(\cdot,\tau)\|^2-\|z^\varepsilon(\cdot,0)\|^2=\|z^\varepsilon(\cdot,\tau)\|^2. \tag{3.18}$$

На последнем шаге в (3.18) учли, что $u^\varepsilon(\cdot,0)=w^\varepsilon(\cdot,0)=0$ в силу нулевого данного Коши в задачах (1.3) и (1.4). □

Замечание 3.2. В условиях теоремы 3.1 из неравенства (3.15) при $\psi=z^\varepsilon=u^\varepsilon-w^\varepsilon$, учитывая (3.17) и (3.18), можно получить также оценку

$$\|u^\varepsilon-w^\varepsilon\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}\leqslant C\varepsilon\|f\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))},\quad C=\mathrm{const}(d,T,\lambda). \tag{3.19}$$

Видим, что в этой L^2-оценке при фиксированном $T>0$ мажоранта имеет больший порядок малости по отношению к $\varepsilon\to0$, нежели в (1.9).

Замечание 3.3. В силу свойств сглаживания, неравенства (3.16) и (3.19) останутся в силе, если в аппроксимации w^ε первое слагаемое $u^{\cdot\varepsilon}$ заменить на u (т. е. снять в нём сглаживание).

Замечание 3.4. Анализируя преобразования в (3.11), видим, что есть другое представление члена r_ε из (3.7), удобное для дальнейшего. Оно получается, если, не переходя к матричным потенциалам G_j для векторов g_j, удовлетвориться равенством

$$r_\varepsilon(x,t)=-\varepsilon^{-1}g_j(x/\varepsilon)D_ju^{\cdot\varepsilon}(x,t)-a(x/\varepsilon)N_j(x/\varepsilon)\nabla D_ju^{\cdot\varepsilon}(x,t) \tag{3.20}$$

4. О приближении в L^2-норме

4.1. Далее рассматриваем задачу (1.3) с нулевым начальным условием, т. е.

$$\begin{aligned}(\partial_t+A_\varepsilon)u^\varepsilon&=f\qquad&&\text{в } \mathbb{R}^d\times(0,T),\\ u^\varepsilon&=0&&\text{при } t=0,\end{aligned} \tag{4.1}$$

где $f\in L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))$. Введём сопряженную к ней задачу

$$\begin{aligned}(-\partial_t+A_\varepsilon^*)v^\varepsilon&=h\qquad&&\text{в } \mathbb{R}^d\times(0,T),\\ v^\varepsilon&=0&&\text{при } t=T,\end{aligned} \tag{4.2}$$

где $h \in L^2(\mathbb{R}^d \times (0,T))$ и оператор $A^*_\varepsilon = -\operatorname{div}(a^*(x/\varepsilon)\nabla)$ имеет матрицу $a^*(y)$, сопряженную к $a(y)$, т. е. $a^*_{ij}(y) = a_{ji}(y)$. Известно, что усредненной для (4.2) будет задача

$$\begin{aligned} (-\partial_t + A^*_0)v = h \qquad & \text{в } \mathbb{R}^d \times (0,T), \\ v = 0 \qquad & \text{при } t = T, \end{aligned} \tag{4.3}$$

где $A^*_0 = -\operatorname{div}((a^0)^*\nabla)$ имеет матрицу, сопряженную к усредненной матрице a^0 из (1.5). Справедлива оценка

$$\|v\|_{L^2(0,T;H^2(\mathbb{R}^d))} + \|\partial_t u\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))} \leqslant C\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}. \tag{4.4}$$

Для решения $v^\varepsilon(x,t)$ аналогом приближения (3.1) будет

$$\begin{gathered} v^{,\varepsilon}(x,t) + \varepsilon V^\varepsilon(x,t), \qquad \text{где } v^{,\varepsilon}(x,t) = \Theta^\varepsilon v(x,t), \\ V^\varepsilon(x,t) = \tilde N(x/\varepsilon)\cdot\nabla v^{,\varepsilon}(x,t) = \tilde N_j(x/\varepsilon) D_j v^{,\varepsilon}(x,t), \end{gathered} \tag{4.5}$$

$\Theta^\varepsilon = S^\varepsilon S^\varepsilon S^\varepsilon$ — тройное сглаживание по Стеклову и $\tilde N_j(y)$ суть решения сопряженных задач на ячейке (аналоги задач (2.1) с сопряженной матрицей $a^*(y)$).

Справедлива оценка, аналогичная (3.16), если в ней положить $z^\varepsilon = v^\varepsilon - v^{,\varepsilon} - \varepsilon V^\varepsilon$, из которой, в частности, выводим

$$\|v^\varepsilon - v^{,\varepsilon} - \varepsilon V^\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\varepsilon\|h\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}, \quad C = \operatorname{const}(d,T,\lambda). \tag{4.6}$$

4.2. Будем использовать следующие упрощенные обозначения:

$$\|\cdot\|_T = \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}, \quad (\cdot,\cdot)_T = (\cdot,\cdot)_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}.$$

Наша цель — найти для аппроксимации из оценки (3.19) дополнительные корректоры, чтобы добиться погрешности приближения в норме $\|\cdot\|_T$ порядка ε^2. Для этого изучим форму

$$I := (u^\varepsilon - u^{,\varepsilon} - \varepsilon U^\varepsilon, h)_T \tag{4.7}$$

с произвольной $h \in L^2(\mathbb{R}^d \times (0,T))$, сопоставляя h решение v^ε задачи (4.2). Тогда

$$\begin{gathered} (u^\varepsilon - u^{,\varepsilon} - \varepsilon U^\varepsilon, h)_T = (u^\varepsilon - u^{,\varepsilon} - \varepsilon U^\varepsilon, (-\partial_t + A^*_\varepsilon)v^\varepsilon)_T = \\ = ((\partial_t + A_\varepsilon)(u^\varepsilon - u^{,\varepsilon} - \varepsilon U^\varepsilon), v^\varepsilon)_T = (f - (\partial_t + A_\varepsilon)(u^{,\varepsilon} + \varepsilon U^\varepsilon), v^\varepsilon)_T = \\ \overset{(3.5)}{=} (-F^\varepsilon, v^\varepsilon)_T \overset{(4.5)}{=} (-F^\varepsilon, v^\varepsilon - v^{,\varepsilon} - \varepsilon V^\varepsilon)_T + (-F^\varepsilon, v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon)_T, \end{gathered}$$

где

$$|(-F^\varepsilon, v^\varepsilon - v^{,\varepsilon} - \varepsilon V^\varepsilon)_T| \leqslant C\|F^\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^{-1}(\mathbb{R}^d))}\|v^\varepsilon - v^{,\varepsilon} - \varepsilon V^\varepsilon\|_{L^2(0,T;H^1(\mathbb{R}^d))} \leqslant C\varepsilon^2\|f\|_T\|h\|_T$$

в силу (3.8), (2.4) и (4.6). Таким образом, форма (4.7) имеет представление

$$I \simeq (-F^\varepsilon, v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon)_T. \tag{4.8}$$

Здесь и далее знак «$\simeq$» обозначает приближенное равенство, полученное из точного равенства отбрасыванием слагаемых I_j, допускающих оценку

$$|I_j| \leqslant C\varepsilon^2\|f\|_T\|h\|_T;$$

сами такие слагаемые называем *несущественными*.

Учитывая структуру F^ε, указанную в (3.5), можно записать

$$I \overset{(4.8)}{\simeq} \varepsilon(r_\varepsilon, \nabla(v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon))_T - \varepsilon(r^0_\varepsilon, v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon)_T + (f - f^{,\varepsilon}, v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon)_T := I_1 + I_2 + I_3, \tag{4.9}$$

где каждую из форм I_j надлежит проанализировать.

1°. Учитывая выражение (3.20), имеем

$$I_1 := \varepsilon(r_\varepsilon, \nabla(v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon))_T = -(g^\varepsilon_j D_j u^{,\varepsilon} + \varepsilon a^\varepsilon N^\varepsilon_j \nabla D_j u^{,\varepsilon}, \nabla(v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon))_T,$$

где использовали обозначение (3.9) для ε-периодических функций. Вычисления, подобные (3.10)-(3.11), дают

$$\nabla(v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon) \overset{(4.5)}{=} \nabla v^{,\varepsilon} + (\nabla\tilde N_k)^\varepsilon D_k v^{,\varepsilon} + \varepsilon\tilde N^\varepsilon_k \nabla D_k v^{,\varepsilon} = (e_k + \nabla\tilde N_k)^\varepsilon D_k v^{,\varepsilon} + \varepsilon\tilde N^\varepsilon_k\nabla D_k v^{,\varepsilon}$$

и, значит,

$$
\begin{gathered}
-I_1=(g_j^\varepsilon D_j u^{,\varepsilon},(e_k+\nabla\tilde N_k)^\varepsilon D_k v^{,\varepsilon})_T+\varepsilon(g_j^\varepsilon D_j w^{,\varepsilon},\tilde N_k^\varepsilon\nabla D_k v^{,\varepsilon})_T+\\
+\varepsilon(a^\varepsilon N_j^\varepsilon\nabla D_j u^{,\varepsilon},(e_k+\nabla\tilde N_k)^\varepsilon D_k v^{,\varepsilon})_T+\varepsilon^2(a^\varepsilon N_j^\varepsilon\nabla D_j u^{,\varepsilon},\tilde N_k^\varepsilon\nabla D_k v^{,\varepsilon})_T.
\end{gathered}
\tag{4.10}
$$

По лемме 5.1 имеем

$$
(a^\varepsilon N_j^\varepsilon\nabla D_j w^{,\varepsilon},\tilde N_k^\varepsilon\nabla D_k v^{,\varepsilon})_T\leqslant\|a^\varepsilon N_j^\varepsilon\nabla D_j u^{,\varepsilon}\|_T\|\tilde N_k^\varepsilon\nabla D_k v^{,\varepsilon}\|_T\leqslant C\|\nabla^2 u\|_T\|\nabla^2 v\|_T,
$$

если учесть условие (1.2), неравенство (2.2) и его аналог для $\tilde N_k$. Отсюда в силу (2.4) и (4.4) получаем несущественность последней формы в (4.10). Кроме того, аналогичные соображения по лемме 5.3 дают

$$
(g_j^\varepsilon D_j u^{,\varepsilon},(e_k+\nabla\tilde N_k)^\varepsilon D_k v^{,\varepsilon})_T\simeq 0,
$$

так как $\langle g_j\cdot(e_k+\nabla\tilde N_k)\rangle=0$ по свойствам векторов g_j (см. (2.6)) и $D_j u, D_k v\in L^2(0,T;H^1(\mathbb R^d))$; а по лемме 5.4

$$
\varepsilon(g_j^\varepsilon D_j u^{,\varepsilon},\tilde N_k^\varepsilon\nabla D_k v^{,\varepsilon})_T\simeq\varepsilon(D_j\varphi,\langle\tilde N_k g_j\rangle\cdot\nabla D_k\psi)_T\overset{(5.2)}{\simeq}\varepsilon(D_j u,\langle\tilde N_k g_j\rangle\cdot\nabla D_k v)_T,
$$

где $\varphi=S^\varepsilon S^\varepsilon u$ и $\psi=S^\varepsilon S^\varepsilon v$. Подобным образом после некоторых преобразований, основанных на соотношениях

$$
a^*(e_k+\nabla\tilde N_k)=\tilde g_k+(a^0)^*e_k,\quad k=1,\dots,d,
$$

аналогичных (2.5), получаем также представление

$$
\begin{gathered}
\varepsilon(a^\varepsilon N_j^\varepsilon\nabla D_j u^{,\varepsilon},(e_k+\nabla\tilde N_k)^\varepsilon D_k v^{,\varepsilon})_T=\varepsilon(N_j^\varepsilon\nabla D_j u^{,\varepsilon},a^{*\varepsilon}(e_k+\nabla\tilde N_k)^\varepsilon D_k v^{,\varepsilon})_T=\\
=\varepsilon(N_j^\varepsilon\nabla D_j u^{,\varepsilon},\tilde g_k^\varepsilon D_k v^{,\varepsilon})_T+\varepsilon(N_j^\varepsilon\nabla D_j u^{,\varepsilon},(a^0)^*e_k D_k v^{,\varepsilon})_T\simeq\\
\simeq\varepsilon(N_j^\varepsilon\nabla D_j u^{,\varepsilon},\tilde g_k^\varepsilon D_k v^{,\varepsilon})_T\overset{(5.8),\,(5.2)}{\simeq}\varepsilon(\langle\tilde g_k N_j\rangle\nabla D_j u,D_k v)_T,
\end{gathered}
$$

где на предпоследнем шаге отброшено слагаемое $\varepsilon(N_j^\varepsilon\nabla D_j u^{,\varepsilon},(a^0)^*e_k D_k v^{,\varepsilon})_T\simeq 0$ — его несущественность показываем по лемме 5.2 с учетом того, что $\langle N_j\rangle=0$.

В итоге после анализа всех слагаемых в (4.10) имеем представление

$$
-I_1\simeq\varepsilon(D_j u,\langle\tilde N_k g_j\rangle\cdot\nabla D_k v)_T+\varepsilon(\langle\tilde g_k N_j\rangle\cdot\nabla D_j u,D_k v)_T.
\tag{4.11}
$$

2°. Учитывая выражение (3.6), имеем

$$
\begin{gathered}
I_2:=-\varepsilon(r_\varepsilon^0,v^{,\varepsilon}+\varepsilon V^\varepsilon)_T=-\varepsilon(N_j^\varepsilon\partial_t D_j u^{,\varepsilon},v^{,\varepsilon}+\varepsilon V^\varepsilon)_T=\\
\overset{(4.5)}{=}\varepsilon(D_j u^{,\varepsilon},N_j^\varepsilon\partial_t v^{,\varepsilon})_T-\varepsilon^2(N_j^\varepsilon(D_j\partial_t u^{,\varepsilon}),\tilde N_k^\varepsilon D_k v^{,\varepsilon})_T,
\end{gathered}
\tag{4.12}
$$

где, интегрируя по частям по переменной t, используем независимость N_j от t, а также нулевые данные Коши: $u(x,0)=0$ и $v(x,T)=0$. Покажем несущественность обоих слагаемых в полученном представлении.

По лемме 5.2

$$
\varepsilon(D_j u^{,\varepsilon},N_j^\varepsilon\partial_t v^{,\varepsilon})_T\simeq 0,
\tag{4.13}
$$

так как $\langle N_j\rangle=0$, $\partial_t v\in L^2(\mathbb R^d\times(0,T))$, $D_j u\in L^2(0,T;H^1(\mathbb R^d))$ и есть необходимое присутствие сглаживания.

По лемме 5.6 (полагая $\varphi=\partial_t u\in L^2(\mathbb R^d\times(0,T))$ и $\psi=(S^\varepsilon)^2D_k v\in L^2(0,T;H^1(\mathbb R^d))$) без суммирования по повторяющимся индексам имеем

$$
\begin{gathered}
|\varepsilon^2(N_j^\varepsilon(D_j\partial_t u^{,\varepsilon}),\tilde N_k^\varepsilon D_k v^{,\varepsilon})_T-\varepsilon^2\langle N_j\tilde N_k\rangle((S^\varepsilon)^2D_j\varphi,\psi)_T|\leqslant\\
\overset{(5.12)}{\leqslant}C\varepsilon^2\langle|N_j|^2\rangle^{1/2}\langle|\tilde N_k|^2\rangle^{1/2}\|\varphi\|_T\|\nabla\psi\|_T\leqslant C\varepsilon^2\|\partial_t u\|_T\|\nabla^2 v\|_T,
\end{gathered}
$$

где мажоранта представляет собой несущественный член ввиду оценок (2.4) и (4.4) для решений усредненных задач и оценок для решений задач на ячейке типа (2.2). Поэтому

$$
\begin{gathered}
I_2\overset{(4.12),\,(4.13)}{\simeq}-\varepsilon^2\langle N_j\tilde N_k\rangle((S^\varepsilon)^2D_j\varphi,\psi)_T=\varepsilon^2\langle N_j\tilde N_k\rangle((S^\varepsilon)^2\varphi,D_j\psi)_T=\\
=\varepsilon^2\langle N_j\tilde N_k\rangle((S^\varepsilon)^2\partial_t u,D_jD_k v)_T\simeq 0,
\end{gathered}
\tag{4.14}
$$

где под конец вспомнили выражения φ и ψ через u и v, а также снова учли оценки для решений усредненных задач и задач на ячейке.

3°. Покажем, что

$$
\begin{gathered}
I_3 := (f - f^{,\varepsilon}, v^{,\varepsilon} + \varepsilon V^\varepsilon)_T = (f - f^{,\varepsilon}, v^{,\varepsilon})_T + \varepsilon(f, V^\varepsilon)_T - \varepsilon(f^{,\varepsilon}, V^\varepsilon)_T \simeq \\
\simeq \varepsilon(f, V^\varepsilon)_T \overset{(4.5)}{=} \varepsilon(f, \tilde{N}^\varepsilon \cdot \nabla v^{,\varepsilon})_T.
\end{gathered} \tag{4.15}
$$

В самом деле, вспоминая, что $f^{,\varepsilon} = \Theta^\varepsilon f$, имеем

$$
(f - f^{,\varepsilon}, v^{,\varepsilon})_T = (f, v^{,\varepsilon} - \Theta^\varepsilon v^{,\varepsilon})_T \overset{(5.6),\ (5.1)}{\leqslant} C\varepsilon^2 \|f\|_T \|\nabla^2 v\|_T \overset{(4.4)}{\leqslant} C\varepsilon^2 \|f\|_T \|h\|_T.
$$

Следовательно, $(f - f^{,\varepsilon}, v^{,\varepsilon})_T \simeq 0$. Кроме того, по лемме 5.2

$$
\varepsilon(f^{,\varepsilon}, V^\varepsilon)_T \overset{(4.5)}{=} \varepsilon(f^{,\varepsilon}, \tilde{N}^\varepsilon \cdot \nabla v^{,\varepsilon})_T \simeq 0.
$$

4.3. Подведём итоги. Из (4.7), (4.9), (4.11), (4.14) и (4.15) следует, что имеет место равенство

$$
(u^\varepsilon - u - \varepsilon U^\varepsilon, h)_T \simeq \varepsilon(f, V^\varepsilon)_T - \varepsilon(D_j u, \langle \tilde{N}_k g_j \rangle \cdot \nabla D_k v)_T - \varepsilon(\langle \tilde{g}_k N_j \rangle \cdot \nabla D_j u, D_k v)_T, \tag{4.16}
$$

где в форме (4.7) функция $u^{,\varepsilon} = \Theta^\varepsilon u$ заменена на u, что допустимо в силу свойства сглаживания типа (5.6) и оценки (2.4).

Введём разрешающие операторы для задачи (4.1), для её усредненной задачи, а также для задачи (4.3):

$$
u^\varepsilon = L_\varepsilon^{-1} f, \quad u = L_0^{-1} f, \quad v = (L_0^*)^{-1} h. \tag{4.17}
$$

Введём также корректирующие операторы

$$
U^\varepsilon \overset{(3.3)}{=} N^\varepsilon \cdot \Theta^\varepsilon \nabla L_0^{-1} f =: \mathcal{K}_\varepsilon f, \quad V^\varepsilon \overset{(4.5)}{=} \tilde{N}^\varepsilon \cdot \Theta^\varepsilon \nabla (L_0^*)^{-1} h =: \tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon h, \tag{4.18}
$$

где участвуют $\Theta^\varepsilon = (S^\varepsilon)^3$ — тройной оператор сглаживания по Стеклову и векторы N, $\tilde{N}$, составленные из решений задач на ячейке (2.1), а также сопряженных к ним задач.

Сумму двух последних слагаемых в (4.16) запишем короче как

$$
\begin{gathered}
\varepsilon((\tilde{c}_{jk}^m - c_{jk}^m) D_j D_k D_m u, v)_T = \varepsilon(Bu, v)_T = \varepsilon(B L_0^{-1} f, (L_0^*)^{-1} h)_T = \\
= \varepsilon(L_0^{-1} B L_0^{-1} f, h)_T = \varepsilon(\mathcal{K} f, h)_T,
\end{gathered} \tag{4.19}
$$

где

$$
c_{jk}^m = \langle \tilde{N}_k g_j^m \rangle, \quad \tilde{c}_{jk}^m = \langle \tilde{g}_k^m N_j \rangle \tag{4.20}
$$

и введён дифференциальный оператор третьего порядка с постоянными коэффициентами

$$
B = (\tilde{c}_{jk}^m - c_{jk}^m) D_j D_k D_m. \tag{4.21}
$$

Соотношениями (4.19)–(4.21) определён третий корректирующий оператор $\mathcal{K}$ наряду с двумя другими из (4.18).

Используя введенные выше разрешающие и корректирующие операторы, записываем равенство (4.16) в виде

$$
(L_\varepsilon^{-1} f - L_0^{-1} f - \varepsilon \mathcal{K}_\varepsilon f - \varepsilon (\tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon)^* f - \varepsilon \mathcal{K} f, h)_T \simeq 0,
$$

где $(\tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon)^*$ — сопряженный оператор, что по соглашению о знаке «$\simeq$» (см. фрагмент после (4.8)) означает

$$
|(L_\varepsilon^{-1} f - L_0^{-1} f - \varepsilon \mathcal{K}_\varepsilon f - \varepsilon (\tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon)^* f - \varepsilon \mathcal{K} f, h)|_T \leqslant C\varepsilon^2 \|f\|_T \|h\|_T.
$$

Отсюда в силу произвольности $h \in L^2(\mathbb{R}^d \times (0, T))$ заключаем, что

$$
\|L_\varepsilon^{-1} f - L_0^{-1} f - \varepsilon \mathcal{K}_\varepsilon f - \varepsilon (\tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon)^* f - \varepsilon \mathcal{K} f\|_T \leqslant C\varepsilon^2 \|f\|_T, \tag{4.22}
$$

т. е. для решения задачи (4.1) получена искомая аппроксимация $u + \varepsilon \tilde{U}^\varepsilon$ с оценкой (1.13), где корректор имеет трехчастную структуру $\tilde{U}^\varepsilon = \mathcal{K}_\varepsilon f + (\tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon)^* f + \mathcal{K} f$. В тех же терминах основной результат раздела 3 формулируется в виде оценок (см. теорему 3.1 и замечание 3.2)

$$
\|L_\varepsilon^{-1} f - L_0^{-1} f\|_T \leqslant C\varepsilon \|f\|_T, \tag{4.23}
$$

$$
\|\nabla (L_\varepsilon^{-1} f - L_0^{-1} f - \varepsilon \mathcal{K}_\varepsilon f)\|_T \leqslant C\varepsilon \|f\|_T. \tag{4.24}
$$

Таким образом, доказана следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть* $u^\varepsilon = L_\varepsilon^{-1} f$, $u = L_0^{-1} f$ — *решения задачи Коши* (4.1) *и соответствующей усредненной задачи. Пусть корректирующие операторы* $\mathcal{K}_\varepsilon$, $\tilde{\mathcal{K}}_\varepsilon$ *определены в* (4.18), *а корректирующий оператор* $\mathcal{K}$ — *в* (4.19)–(4.21), *при этом в соотношениях* (4.18) *и* (4.20) *участвуют решения* N_j, $\tilde{N}_k$ *задачи на ячейке* (2.1) *и сопряженной к ней, а также их производные — вектор-функции* g_j, $\tilde{g}_k$, *определённые равенствами типа* (2.5).

Тогда имеют место оценки (4.23), (4.24) *и* (4.22) *в* L^2*-норме* $\|\cdot\|_T = \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}$ *по слою* $\mathbb{R}^d \times (0,T)$. *Константы в правых частях оценок зависят от размерности* d, *ширины слоя* T *и постоянной эллиптичности* λ *из условия* (1.2).

Замечание 4.1. В случае, когда матрица коэффициентов $a(y)$ симметрична, оператор B из (4.21) равен нулю, так как $c^m_{jk} = \tilde{c}^m_{jk}$ (соответствующее вычисление проведено, например, в [29] или [32]). Как следствие, в силу (4.19) корректор $\mathcal{K}$ равен нулю и указанная в (4.22) L^2-аппроксимация для решения $u^\varepsilon = L_\varepsilon^{-1} f$ упрощается. Подобное наблюдение в эллиптической теории сделано раньше в [4] и связано в полной мере с тремя факторами: уравнение скалярное, притом с матрицей коэффициентов вещественной и симметричной. Таким образом, это эффект «скалярного вещественного самосопряженного» случая.

5. О сглаживании

Для упрощения формул обозначаем норму и скалярное произведение в $L^2(\mathbb{R}^d)$, не различая пространства скалярных и векторных функций, как

$$\|\cdot\| = \|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d)}, \quad (\cdot,\cdot) = (\cdot,\cdot)_{L^2(\mathbb{R}^d)}.$$

5.1. Сглаживание по Стеклову. Для сглаживания по Стеклову (см. определение (3.4)) приведём сначала наиболее простые и известные свойства:

$$\|S^\varepsilon\varphi\| \leqslant \|\varphi\|, \tag{5.1}$$

$$\|S^\varepsilon\varphi - \varphi\| \leqslant (\sqrt{d}/2)\varepsilon\|\nabla\varphi\| \quad \forall\varphi \in H^1(\mathbb{R}^d) \tag{5.2}$$

и как следствие по двойственности

$$\|S^\varepsilon\varphi - \varphi\|_{H^{-1}(\mathbb{R}^d)} \leqslant (\sqrt{d}/2)\varepsilon\|\varphi\| \quad \forall\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d). \tag{5.3}$$

Отметим также очевидное свойство $S^\varepsilon(\nabla\varphi) = \nabla(S^\varepsilon\varphi)$, которое систематически используется.

В нашем методе ключевыми оказываются следующие свойства сглаживания, доказанные, например, в [10, 38].

Лемма 5.1. *Если* $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $b \in L^2_{\mathrm{per}}(Y)$ *и* $b_\varepsilon(x) = b(\varepsilon^{-1}x)$, *то* $b_\varepsilon S^\varepsilon\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *и*

$$\|b_\varepsilon S^\varepsilon\varphi\| \leqslant \langle |b|^2\rangle^{1/2}\|\varphi\|. \tag{5.4}$$

Лемма 5.2. *Если* $b \in L^2_{\mathrm{per}}(Y)$, $\langle b\rangle = 0$, $b_\varepsilon(x) = b(\varepsilon^{-1}x)$, $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ *и* $\psi \in H^1(\mathbb{R}^d)$, *то*

$$|(b_\varepsilon S^\varepsilon\varphi, \psi)| \leqslant C\varepsilon\langle |b|^2\rangle^{1/2}\|\varphi\|\,\|\nabla\psi\|, \quad C = \mathrm{const}(d). \tag{5.5}$$

Приведённые выше оценки малости уточняются в условиях большей регулярности. В отношении (5.2) имеем уточнение

$$\|S^\varepsilon\varphi - \varphi\| \leqslant C\varepsilon^2\|\nabla^2\varphi\| \quad \forall\varphi \in H^2(\mathbb{R}^d), \quad C = \mathrm{const}(d). \tag{5.6}$$

Оценка (5.5) имеет следующее обобщение и уточнение.

Лемма 5.3. *Если* $\alpha, \beta \in L^2_{\mathrm{per}}(Y)$, $\langle\alpha\beta\rangle = 0$, $\alpha_\varepsilon(x) = \alpha(x/\varepsilon)$, $\beta_\varepsilon(x) = \beta(x/\varepsilon)$ *и* $\varphi, \psi \in H^1(\mathbb{R}^d)$, *то*

$$|(\alpha_\varepsilon S^\varepsilon\varphi, \beta_\varepsilon S^\varepsilon\psi)| \leqslant C\varepsilon^2\langle|\alpha|^2\rangle^{1/2}\langle|\beta|^2\rangle^{1/2}\|\nabla\varphi\|\,\|\nabla\psi\|, \quad C = \mathrm{const}(d). \tag{5.7}$$

Ослабим условия на периодические функции в предыдущих леммах, не требуя равенства нулю для средних.

Лемма 5.4. *Если* $\alpha, \beta \in L^2_{\mathrm{per}}(Y)$, $\alpha_\varepsilon(x) = \alpha(x/\varepsilon)$, $\beta_\varepsilon(x) = \beta(x/\varepsilon)$ *и* $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$, $\psi \in H^1(\mathbb{R}^d)$, *то*

$$|(\alpha_\varepsilon S^\varepsilon\varphi, \beta_\varepsilon S^\varepsilon\psi) - \langle\alpha\beta\rangle(\varphi,\psi)| \leqslant C\varepsilon\langle|\alpha|^2\rangle^{1/2}\langle|\beta|^2\rangle^{1/2}\|\varphi\|\,\|\nabla\psi\|, \quad C = \mathrm{const}(d). \tag{5.8}$$

Доказательство свойств (5.7), (5.8) можно найти в [14, 29, 30, 32].

5.2. Сглаживание с произвольным ядром. Рассмотрим оператор сглаживания

$$\Theta^\varepsilon\varphi(x) = \int\limits_{\mathbb{R}^d} \varphi(x-\varepsilon\omega)\theta(\omega)\,d\omega. \tag{5.9}$$

Пусть ядро сглаживания $\theta \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$ имеет компактный носитель, $\theta \geqslant 0$ и $\int\limits_{\mathbb{R}^d}\theta(x)dx = 1$.

Оценки (5.1)–(5.4), сформулированные для оператора сглаживания Стеклова, остаются в силе для общего оператора сглаживания (5.9) с единственной оговоркой, что в правой части появятся константы, зависящие не только от размерности d, но и от ядра θ. Если ядро θ четно, то сглаживание Θ^ε обладает также свойством типа (5.6).

Следующие свойства оператора (5.9) или их аналоги отмечены в [26, 30].

Лемма 5.5. *Пусть ядро сглаживания θ есть липшицева функция, и пусть $b \in L^2_{\mathrm{per}}(Y)$, $b_\varepsilon(x) = b(x/\varepsilon)$ и $\varphi \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Тогда*

$$\|\Theta^\varepsilon\nabla\varphi\| \leqslant C\varepsilon^{-1}\|\varphi\|, \quad C = \mathrm{const}(\theta, d), \tag{5.10}$$

$$\|b_\varepsilon\Theta^\varepsilon\nabla\varphi\| \leqslant C\varepsilon^{-1}\langle|b|^2\rangle^{1/2}\|\varphi\|, \quad C = \mathrm{const}(\theta, d). \tag{5.11}$$

5.3. Итерации сглаживания по Стеклову. Очевидно, что оператор сглаживания Стеклова S^ε задаётся по формуле (5.9) с ядром сглаживания — характеристической функцией $\theta_1(x)$ куба $Y = [-1/2, 1/2)^d$. Двойное сглаживание по Стеклову $(S^\varepsilon)^2 = S^\varepsilon S^\varepsilon$ есть оператор вида (5.9) с ядром сглаживания, равным свёртке $\theta_2 = \theta_1 * \theta_1$. Аналогично, тройное сглаживание по Стеклову $(S^\varepsilon)^3 = S^\varepsilon S^\varepsilon S^\varepsilon$ есть оператор вида (5.9) с ядром сглаживания, равным свёртке $\theta_3 = \theta_2 * \theta_1$. В [30] ядра θ_2 и θ_3 вычислены. Во-первых, это липшицевы функции и, как следствие, для сглаживания $\Theta^\varepsilon = (S^\varepsilon)^2$ или $\Theta^\varepsilon = (S^\varepsilon)^3$ верны свойства (5.10) и (5.11). Во-вторых, θ_2 и θ_3 — четные функции и поэтому для $(S^\varepsilon)^2$ и $(S^\varepsilon)^3$ справедливо свойства (5.6).

Следствием из лемм 5.4 и 5.5 является ещё одна лемма.

Лемма 5.6. *В условиях леммы* 5.4 *справедлива оценка*

$$|(\alpha_\varepsilon(S^\varepsilon)^3D_i\varphi, \beta_\varepsilon S^\varepsilon\psi) - \langle\alpha\beta\rangle((S^\varepsilon)^2D_i\varphi, \psi)| \leqslant C\langle|\alpha|^2\rangle^{1/2}\langle|\beta|^2\rangle^{1/2}\|\varphi\|\,\|\nabla\psi\| \tag{5.12}$$

для любой обобщенной производной $D_i\varphi$, $1 \leqslant i \leqslant d$, с константой $C = \mathrm{const}(d)$.

Доказательство. Эта лемма доказана в [15], но ввиду важности её при выводе оценок в нашем изложении приведём и здесь её доказательство. По лемме 5.5 обе L^2-формы, стоящие в левой части (5.12), корректно определены и имеют порядок $O(\varepsilon^{-1})$ при $\varepsilon \to 0$. В самом деле, ядра сглаживания для операторов $(S^\varepsilon)^3$ и $(S^\varepsilon)^2$ липшицевы и, как следствие, в обоих случаях сглаживание обобщенной производной $D_i\varphi$ принадлежит $L^2(\mathbb{R}^d)$ с оценкой L^2-нормы в силу (5.10). Применяя лемму 5.4 к паре функций $\Phi = \varepsilon(S^\varepsilon)^2D_i\varphi$ и ψ, запишем

$$|(\alpha_\varepsilon S^\varepsilon\Phi, \beta_\varepsilon S^\varepsilon\psi) - \langle\alpha\beta\rangle(\Phi, \psi)| \leqslant C\varepsilon\langle|\alpha|^2\rangle^{1/2}\langle|\beta|^2\rangle^{1/2}\|\Phi\|\,\|\nabla\psi\|,$$

где $\|\Phi\| = \|\varepsilon(S^\varepsilon)^2D_i\varphi\| \leqslant C\|\varphi\|$ по лемме 5.5. Подставляя сюда выражение для Φ, имеем

$$|\varepsilon(\alpha_\varepsilon(S^\varepsilon)^3D_i\varphi, \beta_\varepsilon S^\varepsilon\psi) - \varepsilon\langle\alpha\beta\rangle((S^\varepsilon)^2D_i\varphi, \psi)| \leqslant C\varepsilon\langle|\alpha|^2\rangle^{1/2}\langle|\beta|^2\rangle^{1/2}\|\varphi\|\,\|\nabla\psi\|,$$

что после деления на ε даёт (5.12). Лемма 5.6 доказана. □

6. Некоторые замечания

Замечание 6.1. Рассмотрим задачу (1.3), предполагая $f \in L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))$ и $h \in H^1(\mathbb{R}^d)$. Тогда решение усредненной задачи имеет свойства: $u \in L^2(0,T; H^2(\mathbb{R}^d))$ и $\partial_t u \in L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))$, что было основным условием при выводе оценок из разделов 3 и 4. В оценку (3.16) из теоремы 3.1 надо внести следующие коррективы. Поскольку в этой ситуации функция $z^\varepsilon = u^\varepsilon - w^\varepsilon$ имеет ненулевое данное Коши

$$z^\varepsilon(x,0) = h(x) - h^{,\varepsilon}(x) - \varepsilon N^\varepsilon(x)\cdot\nabla h^{,\varepsilon}(x), \quad h^{,\varepsilon}(x) = \Theta^\varepsilon h(x),$$

в правой части неравенства (3.18) появится дополнительное слагаемое $\|z^\varepsilon(\cdot,0)\|^2$, имеющее оценку

$$\|z^\varepsilon(\cdot,0)\|^2 \leqslant (\|h - h^{,\varepsilon}\|^2 + \varepsilon^2\langle|N|^2\rangle\|\nabla h\|^2) \leqslant C\varepsilon^2\|\nabla h\|^2$$

по свойствам сглаживания. Таким образом, вместо (3.18) получим

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant T}\|z^\varepsilon(\cdot,t)\|^2+\int\limits_0^T\|\nabla z^\varepsilon(\cdot,t)\|^2dt\leqslant C\varepsilon^2(\|f\|^2_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}+\|h\|^2_{H^1(\mathbb{R}^d)}),\quad C=\mathrm{const}(d,T,\lambda).$$

При ненулевом данном Коши в задаче (1.3) в доказательство оценки типа (4.22) надо внести более существенные коррективы, и здесь мы это не уточняем.

Замечание 6.2. Рассмотрим векторный аналог оператора (1.1) с комплексными коэффициентами. Для этого введём комплекснозначный 1-периодический тензор четвёртого порядка

$$a(y)=\{a^{\alpha\beta}_{jk}(y)\}^{1\leqslant\alpha,\beta\leqslant n}_{1\leqslant j,k\leqslant d},$$

действующий как линейный оператор в пространстве $(n\times d)$-матриц. Функции $u:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}^n$ сопоставим $(n\times d)$-матрицу градиента $Du=\{D_ku^\beta\}_{\beta,k}$, где $D=-i\nabla$ $(i^2=-1)$, а также $(n\times d)$-матрицу потока $aDu=\{a^{\alpha\beta}_{jk}D_ku^\beta\}_{\alpha,j}$. Здесь и далее подразумеваем суммирование по повторяющимся индексам: от 1 до d, если индексы латинские, и от 1 до n, если индексы греческие. В пространстве функций $u:\mathbb{R}^d\to\mathbb{C}^n$ действует дифференциальный оператор второго порядка с ε-периодическими комплексными коэффициентами

$$A_\varepsilon u=D^*(a(x/\varepsilon)Du)=\{D_j(a^{\alpha\beta}_{jk}(x/\varepsilon)D_ku^\beta)\}_{1\leqslant\alpha\leqslant n}. \tag{6.1}$$

Относительно тензора $a(y)=\{a^{\alpha\beta}_{jk}(y)\}$ предполагаем условия ограниченности и коэрцитивности

$$\|a^{\alpha\beta}_{jk}\|_{L^\infty(\mathbb{R}^d)}\leqslant\lambda_1\quad\forall j,k,\alpha,\beta, \tag{6.2}$$

$$\mathrm{Re}\,(\mathrm{aD}\varphi,\mathrm{D}\varphi)\geqslant\lambda_0\|\mathrm{D}\varphi\|^2\quad\forall\varphi\in\mathrm{C}^\infty_0(\mathbb{R}^\mathrm{d},\mathbb{C}^\mathrm{n}) \tag{6.3}$$

с некоторыми константами $\lambda_0,\lambda_1>0$, где $(\cdot,\cdot)$ и $\|\cdot\|$ суть упрощенные обозначения для скалярного произведения и нормы в пространствах $L^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^n)$ и $L^2(\mathbb{R}^d,\mathbb{C}^{n\times d})$.

Действуя подобно тому, как в скалярном случае, для векторной задачи (4.1) с оператором A_ε из (6.1), удовлетворяющим условиям (6.2) и (6.3), можно получить аппроксимации решения, аналогичные тем, что приведены в теоремах 3.1 и 4.1. Необходимые атрибуты усреднения подробно описаны, например, в [28]. Рассматривая в разделах 1–4 скалярные уравнения, мы специально не опирались на их специфические свойства, не имеющие аналогов в векторном случае. Например, нигде не ссылались на ограниченность решений (в силу принципа максимума) основной задачи на ячейке. Это свойство позволяет на заключительном этапе записать корректоры в (4.22) и (4.24) более простыми без сглаживания. Поскольку подобное упрощение неоднократно проделано (см. [10] или [16]), здесь оно опускается.

Замечание 6.3. Предложенный подход позволяет получить аналог теоремы 4.1 для оператора A_ε с локально периодическими коэффициентами. Приближения резольвенты таких операторов с точностью порядка ε^2 при $\varepsilon\to0$ построены методом сдвига в [31]. Можно говорить о других обобщениях оценок погрешности усреднения из разделов 3 и 4, если перенести результаты по эллиптическим операторам из работ [14,30,32,33] (операторы в перфорированном пространстве, операторы сингулярно возмущенные или с неограниченной матрицей коэффициентов) на параболический случай.

Замечание 6.4. Рассуждения, дающие ключевую для нашего метода оценку (1.11), имеют общее с рассуждениями из [21]: аппроксимируя в L^2-норме по слою решение $u^\varepsilon(x,t)$ вместе с его пространственным градиентом $\nabla u^\varepsilon(x,t)$, строим двухмасштабное разложение типа анзаца Бахвалова [1], но сглаженное по медленной переменной. Однако в конструкции из (1.11) это разложение удаётся брать более коротким за счет привлечения дополнительных свойств сглаживания. Проведённое сопоставление относится только к случаю не зависящих от t коэффициентов, в то время как в [21] охвачен более общий случай, допускающий такую зависимость.

Рассуждения для вывода оценки (1.13) из оценки (1.11) пересекаются с рассуждениями из работ [18,34,35] для доказательства аналогичных оценок с корректорами в эллиптической теории: существенным моментом являются соображения двойственности. Именно в [18, 34] этот приём впервые предложен для получения улучшенных резольвентных L^2-аппроксимаций с остаточным членом порядка ε^2 и применён в частности в локально периодическом усреднении.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бахвалов Н. С.* Осреднение дифференциальных уравнений с частными производными с быстро осциллирующими коэффициентами// Докл. АН СССР. — 1975. — *221*, № 3. — С. 516–519.
2. *Бахвалов Н. С., Панасенко Г. П.* Осреднение процессов в периодических средах. Математические задачи механики композиционных материалов. — М.: Наука, 1984.
3. *Бирман М. Ш., Суслина Т. А.* Периодические дифференциальные операторы второго порядка. Пороговые свойства усреднения// Алгебра и анализ. — 2003. — *15*, № 3. — С. 1–108.
4. *Бирман М. Ш., Суслина Т. А.* Усреднение периодических эллиптических дифференциальных операторов с учетом корректора// Алгебра и анализ. — 2005. — *17*, № 6. — С. 1–104.
5. *Василевская Е. С.* Усреднение параболической задачи Коши с периодическими коэффициентами при учете корректора// Алгебра и анализ. — 2009. — *21*, № 1. — С. 3–60.
6. *Василевская Е. С., Суслина Т. А.* Усреднение параболических и эллиптических периодических операторов в $L_2(\mathbb{R}^d)$ при учете первого и второго корректоров// Алгебра и анализ. — 2012. — *24*, № 2. — С. 1–103.
7. *Жиков В. В.* Спектральный подход к асимптотическим задачам диффузии// Дифф. уравн. — 1989. — *25*, № 1. — С. 44–50.
8. *Жиков В. В.* Об операторных оценках в теории усреднения// Докл. РАН. — 2005. — *403*, № 3. — С. 305–308.
9. *Жиков В. В., Козлов С. М., Олейник О. А.* Усреднение дифференциальных операторов. — М.: Наука, 1993.
10. *Жиков В. В., Пастухова С. Е.* Об операторных оценках в теории усреднения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 3. — С. 3–98.
11. *Мешкова Ю. М., Суслина Т. А.* Усреднение первой начально-краевой задачи для параболических систем: операторные оценки погрешности// Алгебра и анализ. — 2017. — *29*, № 9. — С. 99–158.
12. *Милослова А. А., Суслина Т. А.* Усреднение параболических уравнений высокого порядка с периодическими коэффициентами// Совр. мат. Фундам. направл. — 2021. — *67*, № 1. — С. 130–191.
13. *Пастухова С. Е.* Аппроксимация экспоненты оператора диффузии с многомасштабными коэффициентами// Функц. анализ и его прилож. — 2014. — *48*, № 3. — С. 34–51.
14. *Пастухова С. Е.* L^2-аппроксимации резольвенты эллиптического оператора в перфорированном пространстве// Совр. мат. Фундам. направл. — 2020. — *66*, № 2. — С. 314–334.
15. *Пастухова С. Е.* Улучшенные L^2-аппроксимации резольвенты в усреднении операторов четвёртого порядка// Алгебра и анализ. — 2022. — *34*, № 4. — С. 74–106.
16. *Пастухова С. Е.* Об улучшенных аппроксимациях резольвенты в усреднении операторов второго порядка с периодическими коэффициентами// Функц. анализ и его прилож. — 2022. — *56*, № 4. — С. 93–104.
17. *Пастухова С. Е., Тихомиров Р. Н.* Оценки локально периодического и повторного усреднения: параболические уравнения// Докл. РАН. — 2009. — *428*, № 2. — С. 166–170.
18. *Сеник Н. Н.* Об усреднении несамосопряженных локально периодических эллиптических операторов// Функц. анализ и его прилож. — 2017. — *51*, № 2. — С. 92–96.
19. *Суслина Т. А.* Об усреднении периодических параболических систем// Функц. анализ и его прилож. — 2004. — *38*, № 4. — С. 86–90.
20. *Bensoussan A., Lions J. L., Papanicolaou G.* Asymptotic analysis for periodic structures. — Amsterdam—New York: North Holland Publishing Co., 1978.
21. *Geng J., Shen Z.* Convergence rates in parabolic homogenization with time-dependent periodic coefficients// J. Funct. Anal. — 2017. — *272*. — С. 2092–2113.
22. *Geng J., Shen Z.* Homogenization of parabolic equations with non-self-similar scales// Arch. Ration. Mech. Anal. — 2020. — *236*, № 8. — С. 145–188.
23. *Meshkova Y.* Note on quantitative homogenization results for parabolic systems in $\mathbb{R}^d$// J. Evol. Equ. — 2021. — *21*. — С. 763–769.
24. *Meshkova Yu. M., Suslina T. A.* Homogenization of initial boundary value problem for parabolic systems with periodic coefficients// Appl. Anal. — 2016. — *95*, № 8. — С. 1736–1775.
25. *Niu W., Xu Y.* Convergence rates in homogenization of higher-order parabolic systems// Discrete Contin. Dyn. Syst. — 2018. — *38*, № 8. — С. 4203–4229.
26. *Niu W., Yuan Y.* Convergence rate in homogenization of elliptic systems with singular perturbations// J. Math. Phys. — 2019. — *60*. — 111509.

27. *Pastukhova S. E.* Estimates in homogenization of parabolic equations with locally periodic coefficients// Asymptot. Anal. — 2010. — *66*, № 3-4. — С. 207-228.
28. *Pastukhova S. E.* Operator estimates in homogenization of elliptic systems of equations// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2017. — 226, № 4. — С. 445–461.
29. *Pastukhova S. E.* L^2-estimates for homogenization of elliptic operators// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2020. — *244*, № 4. — С. 671–685.
30. *Pastukhova S. E.* Homogenization estimates for singularly perturbed operators// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2020. — *251*, № 5. — С. 724–747.
31. *Pastukhova S. E.* On resolvent approximations of elliptic differential operators with locally periodic coefficients// Lobachevskii J. Math. — 2020. — *41*, № 5. — С. 818–838.
32. *Pastukhova S. E.* On resolvent approximations of elliptic differential operators with periodic coefficients// Appl. Anal. — 2022. — *101*, № 13. — С. 4453–4474.
33. *Pastukhova S. E.* L^2-estimates for homogenization of diffusion operators with unbounded nonsymmetric matrices// J. Math. Sci. (N. Y.). — 2022. — *268*, № 4. — С. 473–492.
34. *Senik N.* Homogenization for non-self-adjoint periodic elliptic operators on an infinite cylinder// SIAM J. Math. Anal. — 2017. — *49*, № 2. — С. 874–898.
35. *Senik N.* Homogenization for locally periodic elliptic operators// J. Math. Anal. Appl. — 2022. — *505*, № 2. — 125581.
36. *Suslina T. A.* Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem// В сб.: «Nonlinear equations and spectral theory». — Providence: Am. Math. Soc., 2007. — С. 201–233.
37. *Suslina T. A.* Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space// Math. Model. Nat. Phenom. — 2010. — *5*, № 4. — С. 390–447.
38. *Zhikov V. V., Pastukhova S. E.* On operator estimates for some problems in homogenization theory// Russ. J. Math. Phys. — 2005. — *12*, № 4. — С. 515–524.
39. *Zhikov V. V., Pastukhova S. E.* Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients// Russ. J. Math. Phys. — 2006. — *12*, № 2. — С. 224–237.

С. Е. Пастухова
МИРЭА — Российский технологический университет, Москва, Россия
E-mail: pas-se@yandex.ru

UDC 517.97
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-134-151
EDN: FNYJWO

L^2-estimates of error in homogenization of parabolic equations with correctors taken into account

S. E. Pastukhova

MIREA — Russian Technological University, Moscow, Russia

We consider second-order parabolic equations with bounded measurable ε-periodic coefficients. To solve the Cauchy problem in the layer $\mathbb{R}^d \times (0,T)$ with the nonhomogeneous equation, we obtain approximations in the norm $\|\cdot\|_{L^2(\mathbb{R}^d\times(0,T))}$ with remainder of order ε^2 as $\varepsilon \to 0$.

Keywords: parabolic equations, homogenization of solutions, homogenization error, corrector

For citation: S. E. Pastukhova, "L^2-estimates of error in homogenization of parabolic equations with correctors taken into account," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 1, 134–151. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-134-151`

REFERENCES

1. N. S. Bakhvalov, "Osrednenie differentsial'nykh uravneniy s chastnymi proizvodnymi s bystro ostsilliruyushchimi koeffitsientami" [Homogenization of partial differential equations with rapidly oscillating coefficients], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1975, **221**, No. 3, 516–519 (in Russian).
2. N. S. Bakhvalov and G. P. Panasenko, *Osrednenie protsessov v periodicheskikh sredakh. Matematicheskie zadachi mekhaniki kompozitsionnykh materialov* [Homogenization of Processes in Periodic Media. Mathematical Problems of Mechanics of Composite Materials], Nauka, Moscow, 1984 (in Russian).
3. M. Sh. Birman and T. A. Suslina, "Periodicheskie differentsial'nye operatory vtorogo poryadka. Porogovye svoystva usredneniya" [Periodic second-order differential operators. Threshold properties of homogenization], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2003, **15**, No. 3, 1–108 (in Russian).
4. M. Sh. Birman and T. A. Suslina, "Usrednenie periodicheskikh ellipticheskikh differentsial'nykh operatorov s uchetom korrektora" [Homogenization of periodic elliptic differential operators with the account of a corrector], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2005, **17**, No. 6, 1–104 (in Russian).
5. E. S. Vasilevskaya, "Usrednenie parabolicheskoy zadachi Koshi s periodicheskimi koeffitsientami pri uchete korrektora" [Homogenization with a corrector for a parabolic Cauchy problem with periodic coefficients], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2009, **21**, No. 1, 3–60 (in Russian).
6. E. S. Vasilevskaya and T. A. Suslina, "Usrednenie parabolicheskikh i ellipticheskikh periodicheskikh operatorov v $L_2(\mathbb{R}^d)$ pri uchete pervogo i vtorogo korrektorov" [Homogenization of parabolic and elliptic periodic operators in $L_2(\mathbb{R}^d)$ with the first and second correctors taken into account], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2012, **24**, No. 2, 1–103 (in Russian).
7. V. V. Zhikov, "Spectral approach to asymptotic diffusion problems," *Differ. Equ.*, 1989, **25**, No. 1, 33–39.
8. V. V. Zhikov, "Ob operatornykh otsenkakh v teorii usredneniya" [On operator estimates in homogenization theory], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2005, **403**, No. 3, 305–308 (in Russian).
9. V. V. Zhikov, S. M. Kozlov, and O. A. Oleynik, *Usrednenie differentsial'nykh operatorov* [Homogenization of Differential Operators], Nauka, Moscow, 1993 (in Russian).
10. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, "Ob operatornykh otsenkakh v teorii usredneniya" [On operator estimates in homogenization theory], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 3, 3–98 (in Russian).

11. Yu. M. Meshkova and T. A. Suslina, "Usrednenie pervoy nachal'no-kraevoy zadachi dlya parabolicheskikh sistem: operatornye otsenki pogreshnosti" [Homogenization of the first initial-boundary value problem for parabolic systems: operator error estimates], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2017, **29**, No. 9, 99–158 (in Russian).
12. A. A. Miloslova and T. A. Suslina, "Usrednenie parabolicheskikh uravneniy vysokogo poryadka s periodicheskimi koeffitsientami" [Homogenization of higher-order parabolic equations with periodic coefficients], *Sovr. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2021, **67**, No. 1, 130–191 (in Russian).
13. S. E. Pastukhova, "Approksimatsiya eksponenty operatora diffuzii s mnogomasshtabnymi koeffitsientami" [Approximation of the exponent of the diffusion operator with multiscale coefficients], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2014, **48**, No. 3, 34–51 (in Russian).
14. S. E. Pastukhova, "L^2-approksimatsii rezol'venty ellipticheskogo operatora v perforirovannom prostranstve" [Resolvent approximations in L^2-norm for elliptic operators acting in a perforated space], *Sovr. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2020, **66**, No. 2, 314–334 (in Russian).
15. S. E. Pastukhova, "Uluchshennye L^2-approksimatsii rezol'venty v usrednenii operatorov chetvertogo poryadka" [Improved L^2-approximations of the resolvent in homogenization of fourth-order operators], *Algebra i analiz* [Algebra Anal.], 2022, **34**, No. 4, 74–106 (in Russian).
16. S. E. Pastukhova, "Ob uluchshennykh approksimatsiyakh rezol'venty v usrednenii operatorov vtorogo poryadka s periodicheskimi koeffitsientami" [Improved resolvent approximations in homogenization of second order operators with periodic coefficients], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2022, **56**, No. 4, 93–104 (in Russian).
17. S. E. Pastukhova and R. N. Tikhomirov , "Otsenki lokal'no periodicheskogo i povtornogo usredneniya: parabolicheskie uravneniya" [Estimates of locally periodic and reiterated homogenization for parabolic equations], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2009, **428**, No. 2, 166–170 (in Russian).
18. N. N. Senik, "Ob usrednenii nesamosopryazhennykh lokal'no periodicheskikh ellipticheskikh operatorov" [On homogenization for non-self-adjoint locally periodic elliptic operators], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 2017, **51**, No. 2, 92–96 (in Russian).
19. T. A. Suslina, "On homogenization of periodic parabolic systems," *Funct. Anal. Appl.*, 2004, **38**, No. 4, 309–312.
20. A. Bensoussan, J. L. Lions, and G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures*, North Holland Publishing Co., Amsterdam—New York, 1978.
21. J. Geng and Z. Shen, "Convergence rates in parabolic homogenization with time-dependent periodic coefficients," *J. Funct. Anal.*, 2017, **272**, 2092–2113.
22. J. Geng and Z. Shen, "Homogenization of parabolic equations with non-self-similar scales," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 2020, **236**, No. 8, 145–188.
23. Y. Meshkova, "Note on quantitative homogenization results for parabolic systems in $\mathbb{R}^d$," *J. Evol. Equ.*, 2021, **21**, 763–769.
24. Yu. M. Meshkova and T. A. Suslina, "Homogenization of initial boundary value problem for parabolic systems with periodic coefficients," *Appl. Anal.*, 2016, **95**, No. 8, 1736–1775.
25. W. Niu and Y. Xu, "Convergence rates in homogenization of higher-order parabolic systems," *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, 2018, **38**, No. 8, 4203–4229.
26. W. Niu and Y. Yuan, "Convergence rate in homogenization of elliptic systems with singular perturbations," *J. Math. Phys.*, 2019, **60**, 111509.
27. S. E. Pastukhova, "Estimates in homogenization of parabolic equations with locally periodic coefficients," *Asymptot. Anal.*, 2010, **66**, No. 3-4, 207-228.
28. S. E. Pastukhova, "Operator estimates in homogenization of elliptic systems of equations," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2017, 226, No. 4, 445–461.
29. S. E. Pastukhova, "L^2-estimates for homogenization of elliptic operators," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2020, **244**, No. 4, 671–685.
30. S. E. Pastukhova, "Homogenization estimates for singularly perturbed operators," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2020, **251**, No. 5, 724–747.
31. S. E. Pastukhova, "On resolvent approximations of elliptic differential operators with locally periodic coefficients," *Lobachevskii J. Math.*, 2020, **41**, No. 5, 818–838.
32. S. E. Pastukhova, "On resolvent approximations of elliptic differential operators with periodic coefficients," *Appl. Anal.*, 2022, **101**, No. 13, 4453–4474.
33. S. E. Pastukhova, "L^2-estimates for homogenization of diffusion operators with unbounded nonsymmetric matrices," *J. Math. Sci. (N. Y.)*, 2022, **268**, No. 4, 473–492.
34. N. Senik, "Homogenization for non-self-adjoint periodic elliptic operators on an infinite cylinder," *SIAM J. Math. Anal.*, 2017, **49**, No. 2, 874–898.

35. N. Senik, “Homogenization for locally periodic elliptic operators,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2022, **505**, No. 2, 125581.
36. T. A. Suslina, “Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem,” In: *Nonlinear equations and spectral theory*, Am. Math. Soc., Providence, 2007, pp. 201–233.
37. T. A. Suslina, “Homogenization of a periodic parabolic Cauchy problem in the Sobolev space,” *Math. Model. Nat. Phenom.*, 2010, **5**, No. 4, 390–447.
38. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, “On operator estimates for some problems in homogenization theory,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2005, **12**, No. 4, 515–524.
39. V. V. Zhikov and S. E. Pastukhova, “Estimates of homogenization for a parabolic equation with periodic coefficients,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2006, **12**, No. 2, 224–237.

S. E. Pastukhova
MIREA — Russian Technological University, Moscow, Russia
E-mail: pas-se@yandex.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 1 (2023). С. 152–165
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.956.223
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-152-165
EDN: FOBXVK

ГЛАДКОСТЬ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ФУНКЦИОНАЛЬНО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОРТОТРОПНЫМИ СЖАТИЯМИ НА ГРАНИЦЕ СОСЕДНИХ ПОДОБЛАСТЕЙ

А. Л. Тасевич[1,2]

[1] *Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*
[2] *Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия*

Статья посвящена изучению гладкости обобщенных решений первой краевой задачи для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения, содержащего в старшей части преобразования ортотропного сжатия аргументов искомой функции. Задача рассматривается в круге, коэффициенты уравнения постоянные. Под ортотропным сжатием понимается различное сжатие по различным переменным. Найдены в явном виде условия сохранения гладкости на границах соседних подобластей, образованных действием группы преобразования сжатия на круг, при любой правой части из пространства Лебега.

Ключевые слова: сильно эллиптическое функционально-дифференциальное уравнение, ортотропное сжатие аргументов, гладкость обобщенных решений

Для цитирования: *А. Л. Тасевич.* Гладкость обобщенных решений задачи Дирихле для сильно эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями на границе соседних подобластей// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 1. С. 152–165. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-152-165

1. Введение

В работе рассматривается первая краевая задача для функционально-дифференциального уравнения

$$A_R u \equiv -\sum_{i,j=1}^{2} (R_{ijB} u_{x_i})_{x_j} = f(x), \quad x \in B, \tag{1.1}$$

$$u|_{\partial B} = 0 \tag{1.2}$$

в круге $B \subset \mathbb{R}^2$ некоторого радиуса r с центром в начале координат. Здесь оператор R_{ijB} является композицией операторов

$$R_{ijB} = P_B R_{ij} I_B,$$

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Мегагрант, соглашение № 075-15-2022-1115).

где $I_B : L_2(B) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ — оператор продолжения функций из пространства Лебега $L_2(B)$ нулем в $\mathbb{R}^2 \setminus B$, $P_B : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(B)$ — оператор сужения функций из $L_2(\mathbb{R}^2)$ на B, а оператор $R_{ij} : L_2(\mathbb{R}^2) \to L_2(\mathbb{R}^2)$ определяется по формуле

$$R_{ij}v(x) = a_{ij0}v(x) + a_{ij1}v(q^{-1}x_1, px_2) + a_{ij,-1}v(qx_1, p^{-1}x_2).$$

В рассматриваемой задаче числа $p, q > 1$, коэффициенты уравнения $a_{ij0}, a_{ij,\pm 1} \in \mathbb{C}$ $(i, j = 1, 2)$, а функция $f \in L_2(B)$ является комплекснозначной.

Сформулируем определение сильной эллиптичности следующим образом.

Определение 1.1. Уравнение (1.1) будем называть *сильно эллиптическим уравнением*, а соответствующий оператор A_R — *сильно эллиптическим оператором*, если существуют такие постоянные $c_1 > 0, c_2 \geqslant 0$, что для любой финитной бесконечно гладкой функции $u \in C_0^\infty(B)$ выполняется неравенство типа Гординга

$$\operatorname{Re}(A_R u, u)_{L_2(B)} \geqslant c_1\|u\|^2_{H^1(B)} - c_2\|u\|^2_{L_2(B)}. \tag{1.3}$$

Здесь и далее $H^1(B) = W_2^1(B)$ — гильбертово пространство Соболева первого порядка.

С задачей (1.1), (1.2) свяжем полуторалинейную форму, непрерывную на пространстве $\mathring{H}^1(B) = \{u \in H^1(B) : u(x) = 0 \text{ для } x \notin B\}$

$$a_R[u, v] = \sum_{i,j=1}^{2} (R_{ijB}u_{x_i}, v_{x_j})_{L_2(B)} \quad (u, v \in \mathring{H}^1(B)).$$

Очевидно, существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$|a_R[u, v]| \leqslant M\|u\|_{H^1(B)}\|v\|_{H^1(B)} \quad (u, v \in \mathring{H}^1(B)). \tag{1.4}$$

Кроме того, неравенство (1.3), левая часть которого совпадает на гладких финитных функциях с действительной частью формы $\operatorname{Re} a_R[u, u]$, обеспечивает оценку

$$\operatorname{Re} a_R[u, u] \geqslant c_1\|u\|^2_{H^1(B)} - c_2\|u\|^2_{L_2(B)} \quad (u \in \mathring{H}^1(B)) \tag{1.5}$$

на всем пространстве $\mathring{H}^1(B)$.

Определение 1.2. Функция $u \in \mathring{H}^1(B)$ называется *обобщенным решением* задачи (1.1), (1.2), если интегральное тождество

$$a_R[u, v] = (f, v)_{L_2(B)} \tag{1.6}$$

выполнено для любой функции $v \in \mathring{H}^1(B)$.

Будем рассматривать также неограниченный оператор

$$\mathcal{A}_R : \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) \subset L_2(B) \to L_2(B),$$

область определения $\mathcal{D}(\mathcal{A}_R)$ которого состоит из всевозможных обобщенных решений задачи (1.1), (1.2), когда f пробегает все пространство $L_2(B)$. Если u — обобщенное решение, отвечающее правой части f, то полагаем $\mathcal{A}_R u = f$ (оператор $\mathcal{A}_R$, очевидно, корректно определен на $\mathcal{D}(\mathcal{A}_R)$). Понятно, что $C_0^\infty(B) \subset \mathcal{D}(\mathcal{A}_R) \subset \mathring{H}^1(B)$ и $\mathcal{A}_R u = A_R u$, если $u \in C_0^\infty(B)$.

Данная статья посвящена гладкости обобщенных решений функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями в круге, при этом считается выполненным неравенство типа Гординга, которое рассматривается как аналог условия сильной эллиптичности. Для дифференциальных уравнений, включая системы дифференциальных уравнений, уравнения с переменными коэффициентами и уравнения высокого порядка, сильная эллиптичность начала изучаться в 50-х годах XX века с работ М. И. Вишика [1] и Л. Гординга [23]. Для дифференциально-разностных уравнений необходимые и достаточные условия сильной эллиптичности были получены в [28, 29], а для функционально-дифференциальных уравнений с изотропными сжатиями — в работах [11–13]. Хорошо известно, что неравенство Гординга гарантирует фредгольмову разрешимость, дискретность и секториальную структуру спектра. Кроме того это неравенство связано с решением известной проблемы Т. Като о квадратном корне из m-аккретивного оператора [20–22, 24–26].

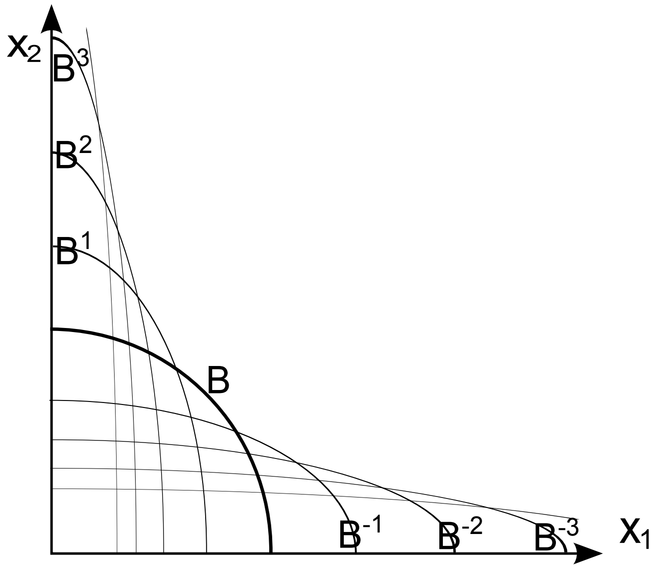

Рис. 1. Множества B^k, $k = \overline{-4, 4}$.
Fig. 1. Sets B^k, $k = \overline{-4, 4}$.

Изучение гладкости обобщенных решений является естественным шагом при исследовании краевых задач. В отличие от эллиптических дифференциальных уравнений, гладкость обобщенных решений краевых задач для функционально-дифференциальных уравнений может нарушаться в ограниченной области и сохраняться только в некоторых подобластях. Гладкость решений краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений была изучена А. Л. Скубачевским в работах [15, 17, 19, 29] и в обзоре [16]. Вторая краевая задача для дифференциально-разностного уравнения второго порядка с переменными коэффициентами на интервале $(0, d)$ рассматривалась в [4–6]. Случай, когда правая часть дифференциально-разностного уравнения принадлежит пространству Гельдера, рассматривался в работе [9, 10]. Ряд результатов по гладкости для функционально-дифференциальных уравнений со сжатиями и растяжениями получен в [13]. В вышеперечисленных работах было показано возникновение степенных особенностей у решения в некоторых точках внутри области.

2. Некоторые геометрические конструкции

Опишем геометрические конструкции, связанные с отражением $(x_1, x_2) \to (q^{-1}x_1, px_2)$, $q, p > 1$, в круге B. Более подробные построения и доказательства приведенных ниже утверждений можно найти в [18]. Обозначим через B^k множество

$$B^k = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 | (q^{k-1}x_1, p^{1-k}x_2) \in B\},$$

а через B_r — открытую компоненту множества $B \setminus \left(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \partial B^k \right)$.

Определение 2.1. Множество B_r будем называть *подобластью*, а множество $\mathcal{R}$ всех подобластей B_r назовем *разбиением* области B.

На рис. 1 мы видим разбиение $\mathcal{R}$ круга B, рассматриваемое в первой координатной четверти. Легко убедиться, что $\mathcal{R}$ счетно. Для круга B, а также и для более сложной по форме области, будут справедливы следующие леммы.

Лемма 2.1. $\overline{\bigcup\limits_r \partial B_r} = \left(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{Z}} \partial B^k \right) \bigcap \overline{B}$.

Лемма 2.2.

1. $\overline{\bigcup_r B_r} = \overline{B}$.
2. *Для любой подобласти* B_{r_1} *и* $k \in \mathbb{Z}$ *либо существует* B_{r_2} *такое, что* $B_{r_2} = (B_{r_1})^k$, *либо* $(B_{r_1})^k \subset \mathbb{R}^2 \setminus B$.

Мы можем разбить множество $\mathcal{R}$ на непересекающиеся классы следующим образом: подобласти $B_{r_1}, B_{r_2} \in \mathcal{R}$ принадлежат одному классу, если существует такое $k \in \mathbb{Z}$, что $(B_{r_1})^k = B_{r_2}$. Обозначим подобласти B_r через B_{sl}, где s является номером класса, а l — номером подобласти в s-ом классе, $l = \overline{1, N(s)}$. В силу ограниченности круга каждый класс состоит из конечного числа подобластей. Количество классов будет счетным, поскольку область B содержит начало координат — точку сгущения орбит оператора P.

Замечание 2.1. В каждой координатной четверти возможно упорядочить классы подобластей таким образом, что номер класса совпадет с числом его элементов, т. е. $N(s) = s$. В этом можно убедиться на рис. 2. Поэтому, без ограничения общности, везде далее считаем, что количество элементов класса совпадает с его номером.

Введем множество $\mathcal{K}$ по следующей формуле:

$$\mathcal{K} = \bigcup_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\ k_1 \neq k_2} \left\{ \overline{B} \cap \left(\partial B^{k_1} \right) \cap \left(\partial B^{k_2} \right) \right\}. \tag{2.1}$$

Сформулируем основное условие, накладываемое на область для дальнейших построений, справедливое для рассматриваемого случая круга и оператора ортотропного сжатия.

Условие 2.1. $\mu(\mathcal{K} \cap \partial B) = 0$.

Для элементов границы областей B_{sl} выполняются следующие утверждения.

Лемма 2.3. *Пусть* $x^0 \in \partial B_{sl} \cap \partial B$. *Предположим, что существует последовательность точек* $x^n \to x^0$ *при* $n \to \infty$ *такая, что* $x^n \in \overline{B}_{s_n l_n}$, $(s_n, l_n) \neq (s, l)$. *Тогда* $x^0 \in \mathcal{K}$.

Следствие 2.1. *Пусть* $x^0 \in \partial B \cap \partial B_{s_1 l_1} \cap \partial B_{s_2 l_2}$, $(s_1, l_1) \neq (s_2, l_2)$. *Тогда* $x^0 \in \mathcal{K}$.

Лемма 2.4. *Пусть* $x^0 \in B \cap \partial B_{sl} \cap \partial B_{rk}$, $(p, l) \neq (q, k)$. *Предположим, что существует последовательность точек* $x^n \to x^0$ *при* $n \to \infty$, *а также* $x^n \in \overline{B}_{s_n l_n}$, $(s_n, l_n) \neq (s, l), (r, k)$. *Тогда* $x^0 \in \mathcal{K}$.

Следствие 2.2. *Пусть* $x^0 \in \bigcap_i \partial B_{s_i l_i}$, *где* $(s_i, l_i) \neq (s_j, l_j)$ *для* $i \neq j$ $(i, j = 1, 2, 3)$. *Тогда* $x^0 \in \mathcal{K}$.

Обозначим через Γ_p компоненты множества $\partial B \setminus \mathcal{K}$, являющиеся открытыми и связными в топологии ∂B.

Мы можем разбить множество $\{\Gamma_s^k : \Gamma_s^k \subset \overline{B}, s \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{Z}\}$ на классы следующим образом. Множества $\Gamma_{s_1}^{k_1}$ и $\Gamma_{s_2}^{k_2}$ принадлежат одному классу, если существует $k \in \mathbb{Z}$ такое, что $\Gamma_{s_1}^{k_1} = \left(\Gamma_{s_2}^{k_2}\right)^k$.

Очевидно, что множество Γ_s^k может содержаться только в одном классе. Обозначим множество Γ_s^k через Γ_{rj}, где r — это номер класса, а j — номер элемента в данном классе $(1 \leqslant j \leqslant J = J(r))$. Для круга B возможно упорядочить множества элементов класса так, чтобы $\Gamma_{r1} \subset \partial B, \Gamma_{r2}, \ldots, \Gamma_{rJ} \subset B$.

Приведем справедливые для элементов Γ_{rj} утверждения.

Лемма 2.5. *Для любого множества* $\Gamma_{r1} \subset \partial B$ *существует подобласть* B_{sl} *такая, что* $\Gamma_{rj} \subset \partial B_{sl}$ *и* $\Gamma_{rj} \cap \partial B_{s_1 l_1} = \varnothing$, *если* $(s_1, l_1) \neq (s, l)$.

Также для каждого класса $r \in \mathbb{N}$ существует единственное число $s = s(r)$ такое, что $J(r) = s$, и после перенумерации $\Gamma_{rl} \subset \partial B_{sl}$ $(l = \overline{1, s})$.

Лемма 2.6. *Для каждого* $\Gamma_{rj} \subset B$ *существуют подобласти* $B_{s_1 l_1}$ *и* $B_{s_2 l_2}$ *такие, что* $B_{s_1 l_1} \neq B_{s_2 l_2}$, $\Gamma_{rj} \subset \partial B_{s_1 l_1} \cap \partial B_{s_2 l_2}$ *и* $\Gamma_{rj} \cap \partial B_{s_3 l_3} = \varnothing$, *если* $(s_3, l_3) \neq (s_1, l_1), (s_2, l_2)$.

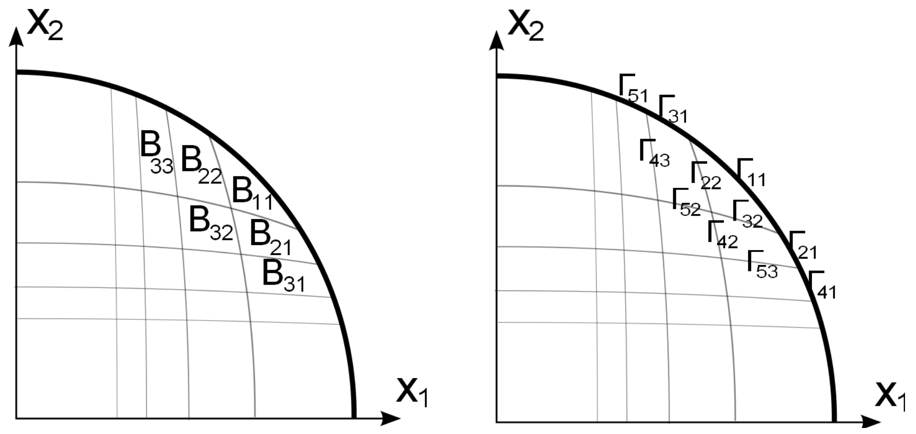

Рис. 2. Множества B_{sl} и Γ_{rj}.
Fig. 2. Sets B_{sl} and Γ_{rj}.

3. Условия сильной эллиптичности ФДУ с ортотропными сжатиями

Результаты данного пункта приводятся без доказательств. Необходимые доказательства можно найти в [18].

Для каждого $s \in \mathbb{N}$ и всякой функции $u \in L_2(B_s)$, $B_s = \bigcup\limits_{l=1}^{s} B_{sl}$ построим вектор-функцию $U = (u_1, \dots, u_s)^T \in L_2^s(B_{s1})$, где

$$u_k(x_1, x_2) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1-k}{2}} u(q^{1-k}x_1, p^{k-1}x_2)\ (x \in B_{s1}, k = \overline{1, s}). \tag{3.1}$$

Отображение $u \to U$ унитарно, т. е. $(u, v)_{L_2(B_s)} = (U, V)_{L_2(B_{s1})}$.

Построим матрицу $\mathbf{R}_{ijs}\,(s \times s)$ с элементами

$$\rho_{kl}^{ijs} = \begin{cases} \left(\dfrac{q}{p}\right)^{\frac{l-k}{2}} a_{ij,l-k}, & |l-k| \leqslant 1; \\ 0, & |l-k| > 1. \end{cases} \tag{3.2}$$

Тогда если $v = R_{ij}u$ и $V = (v_1 \dots v_s)^T \in L_2^s\,(B_{s1})$ — соответствующая вектор-функция, то

$$v_k(x_1, x_2) = \rho_{kk}^{ijs} u_k(x_1, x_2) + \rho_{k,k+1}^{ijs} u_{k+1}(x_1, x_2) + \rho_{k,k-1}^{ijs} u_{k-1}(x_1, x_2).$$

Таким образом,

$$v = R_{ij}u\ (u, v \in L_2(B_s)) \Longleftrightarrow V = \mathbf{R}_{ijs}U\ \left(U, V \in L_2^s(B_{s1})\right). \tag{3.3}$$

Заметим, что дифференциальный оператор не коммутирует с оператором сжатия и справедливы следующие отношения:

$$\left(u_{x_1}\right)_k (x_1, x_2) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1-k}{2}} u_{x_1}\left(q^{1-k}x_1, p^{k-1}x_2\right) = \tag{3.4}$$

$$= \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{1-k}{2}} q^{k-1} \left(u(q^{1-k}x_1, p^{k-1}x_2)\right)_{x_1} = q^{k-1} \left(u_k(x_1, x_2)\right)_{x_1}.$$

Аналогично, $\left(u_{x_2}\right)_k (x) = p^{1-k} \left(u_k(x)\right)_{x_2}$.

Положим

$$\mathbf{Q}_s = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & q & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & q^{s-1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{P}_s = \begin{pmatrix} 1 & & & 0 \\ & p^{-1} & & \\ & & \ddots & \\ 0 & & & p^{1-s} \end{pmatrix}. \tag{3.5}$$

Тогда можно переписать неравенство (1.3) для функции $u \in C_0^\infty(B_s)$ в виде

$$\operatorname{Re}(A_R u, u)_{L_2(B)} = \operatorname{Re}(A_R u, u)_{L_2(B_s)} = \tag{3.6}$$
$$= ((\mathbf{R}_{11s} + \mathbf{R}_{11s}^*)\, \mathbf{Q}_s U_{x_1}, \mathbf{Q}_s U_{x_1})_{L_2^s(B_{s1})} + ((\mathbf{R}_{12s} + \mathbf{R}_{12s}^*)\, \mathbf{Q}_s U_{x_1}, \mathbf{P}_s U_{x_2})_{L_2^s(B_{s1})} +$$
$$((\mathbf{R}_{21s} + \mathbf{R}_{21s}^*)\, \mathbf{P}_s U_{x_2}, \mathbf{Q}_s U_{x_1})_{L_2^s(B_{s1})} + ((\mathbf{R}_{22s} + \mathbf{R}_{22s}^*)\, \mathbf{P}_s U_{x_2}, \mathbf{P}_s U_{x_2})_{L_2^s(B_{s1})} \geqslant$$
$$\geqslant c_2 \int\limits_{B_{s1}} \left(|\mathbf{Q}_s U_{x_1}|^2 + |\mathbf{P}_s U_{x_2}|^2 + |U|^2 \right) dx - c_1 \|U\|^2_{L_2^s(B_{s1})} \geqslant$$
$$\geqslant c_2 \int\limits_{B_{s1}} \left(|U_{x_1}|^2 + p^{2-2s} |U_{x_2}|^2 + |U|^2 \right) dx - c_1 \|U\|^2_{L_2^s(B_{s1})} \geqslant c_2 p^{2-2s} \|U\|^2_{H^{1,s}(B_{s1})} - c_1 \|U\|^2_{L_2^s(B_{s1})}.$$

Данное неравенство выполняется для всех вектор-функций $U \in C_0^{\infty,s}(B_{s1})$ и означает сильную эллиптичность матричного дифференциального оператора второго порядка с постоянными коэффициентами

$$\mathbf{A}_s = -\left(\frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{Q}_s \mathbf{R}_{11s} \mathbf{Q}_s \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{P}_s \mathbf{R}_{12s} \mathbf{Q}_s \frac{\partial}{\partial x_1} + \frac{\partial}{\partial x_1} \mathbf{Q}_s \mathbf{R}_{21s} \mathbf{P}_s \frac{\partial}{\partial x_2} + \frac{\partial}{\partial x_2} \mathbf{P}_s \mathbf{R}_{22s} \mathbf{P}_s \frac{\partial}{\partial x_2} \right). \tag{3.7}$$

Введем обозначения

$$\mathbf{R}_{11sPQ} = \mathbf{Q}_s\,(\mathbf{R}_{11s} + \mathbf{R}_{11s}^*)\,\mathbf{Q}_s, \quad \mathbf{R}_{12sPQ} = \mathbf{P}_s\,(\mathbf{R}_{12s} + \mathbf{R}_{12s}^*)\,\mathbf{Q}_s, \tag{3.8}$$
$$\mathbf{R}_{21sPQ} = \mathbf{Q}_s\,(\mathbf{R}_{21s} + \mathbf{R}_{21s}^*)\,\mathbf{P}_s, \quad \mathbf{R}_{22sPQ} = \mathbf{P}_s\,(\mathbf{R}_{22s} + \mathbf{R}_{22s}^*)\,\mathbf{P}_s.$$

Таким образом, из известных результатов по сильно эллиптическим системам [1] вытекает следующее утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть уравнение* (1.1) *сильно эллиптическое в* $\overline{B}$. *Тогда матрицы*

$$\sum_{i,j=1}^{2} \mathbf{R}_{ijsPQ} \xi_i \xi_j \tag{3.9}$$

положительно определены для всех $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^2$ *и* $s = 1, 2, \ldots$

Для каждого $s = 1, 2, \ldots$ из матриц $\mathbf{Q}_s\mathbf{R}_{11s}\mathbf{Q}_s, \mathbf{P}_s\mathbf{R}_{12s}\mathbf{Q}_s, \mathbf{Q}_s\mathbf{R}_{21s}\mathbf{P}_s, \mathbf{P}_s\mathbf{R}_{22s}\mathbf{P}_s$ составим блочную матрицу $\mathbf{R}_s$ порядка $2s \times 2s$.

Введем матричный оператор $R : L_2^2(B) \to L_2^2(B)$, элементами которого являются разностные операторы $R_{ijB} : L_2(B) \to L_2(B)$ $(i, j = 1, 2)$. Сопряженному оператору R^*, состоящему из операторов $R_{jiB}^* : L_2(B) \to L_2(B)$, отвечают эрмитово сопряженные матрицы $\mathbf{R}_s^*$.

Лемма 3.2. *Оператор* $R + R^*$ *положительно определен тогда и только тогда, когда все матрицы* $\mathbf{R}_s + \mathbf{R}_s^*$ $(s = 1, 2, \ldots)$ *положительно определены.*

Доказательство. Пусть имеется вектор-функция $w \in L_2^2(B)$. Для каждой ее компоненты w_i и каждого s по правилу (3.1) построим вектор-функцию $W_{is} \in L_2^s(B_{s1})$. Затем из W_{1s}, W_{2s} составим вектор W_s длины $2s$. Таким образом, для каждого s имеем вектор-функцию $W_s \in L_2^{2s}(B_{s1})$. Теперь неравенство

$$((R + R^*)\, w, w)_{L_2^2(B)} = \sum_{i,j=1}^{2} \left((R_{ij} + R_{ji}^*)\, w_j, w_i \right)_{L_2(B)} \geqslant c\|w\|^2_{L_2^2(B)} = c \sum_{i=1}^{2} \|w_i\|^2_{L_2(B)} \tag{3.10}$$

для любой вектор-функции $w \in L_2^2(B)$ может быть записано в виде

$$\sum_s \sum_{i,j=1}^{2} ((\mathbf{R}_{ijsPQ})\, W_{js}, W_{is})_{L_2^s(B_{s1})} \geqslant c \sum_s \sum_{i=1}^{2} \|W_{is}\|^2_{L_2^s(B_{s1})}, \tag{3.11}$$

или

$$\sum_s ((\mathbf{R}_s + \mathbf{R}_s^*)\, W_{js}, W_{is})_{L_2^{2s}(B_{s1})} \geqslant c \sum_s \|W_s\|^2_{L_2^{2s}(B_{s1})} \tag{3.12}$$

Если все матрицы $\mathbf{R}_s + \mathbf{R}_s^*$ положительно определены, то найдется такая константа $c > 0$, что выполнено неравенство (3.12). Если же, зафиксировав $s = s_0$, подставлять в неравенство (3.11) функции, равные постоянным в подобластях s_0-го класса и нулю вне этих подобластей, то (3.12) становится условием положительной определенности матрицы $\mathbf{R}_{s_0} + \mathbf{R}_{s_0}^*$. Лемма доказана. $\square$

4. Гладкость обобщенных решений на границе подобластей

В дальнейшем предполагаем, что для оператора $\mathcal{A}_R$ выполняется условие сильной эллиптичности. В статье [14] приведены явные, как необходимые, так и достаточные условия сильной эллиптичности на коэффициенты уравнения (1.1).

Справедливы следующие теоремы о гладкости обобщенных решений (см. статью [18]).

Теорема 4.1. *Пусть уравнение* (1.1) *является сильно эллиптическим в* $\overline{B}$. *Предположим, что функция* u *является обобщенным решением краевой задачи* (1.1), (1.2), *а функция* f *принадлежит* $L_2(B) \cap H^k_{loc}(B_{sl})$ $(s \in \mathbb{N}, l = \overline{1,s})$. *Тогда* $u \in H^{k+2}_{loc}(B_{sl})$ *для всех* s, l.

Теорема 4.2. *Пусть уравнение* (1.1) *является сильно эллиптическим в* $\overline{B}$. *Предположим, что функция* u *является обобщенным решением краевой задачи* (1.1), (1.2), *а функция* f *принадлежит* $L_2(B)$. *Тогда* $u \in H^2(B_{sl} \setminus \overline{\mathcal{K}^\varepsilon})$ *для всех* $\varepsilon > 0$ $(s \in \mathbb{N},\ l = \overline{1,s})$, *где* $\mathcal{K}^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^2 : \rho(x, \mathcal{K}) < \varepsilon\}$.

Перейдем к выводу основного результата статьи о гладкости обобщенных решений на границе соседних подобластей. Пусть, как и прежде, функционально-дифференциальный оператор $\mathcal{A}_R$ является сильно эллиптическим, и область B удовлетворяет условию 2.1. Предположим, что $u(x)$ является обобщенным решением краевой задачи (1.1), (1.2), где $f \in L_2(B)$. Зафиксируем класс s и рассмотрим точку $y^1 = (y_1^1, y_2^1) \in B \cap (\partial B_{s1} \setminus \mathcal{K})$. Пусть $y^l = (q^{l-1}y_1^1, p^{1-l}y_2^1) \in \partial B_{sl} \setminus \mathcal{K}$ $(l = 1, \dots, s)$. При этом возможны три случая: $y^l \in B$ $(l = 1, \dots, s-1)$, $y^s \in \partial B$, или $y^1 \in \partial B$, $y^l \in B$ $(l = 2, \dots, s)$, или $y^l \in B$ $(l = 1, \dots, s)$. Без ограничения общности, которое будет пояснено ниже, рассмотрим третий случай. Будем искать условия, при которых для заданного $1 \leqslant l \leqslant s$ существует $a > 0$ такое, что $u \in H^2(S_a(y^l))$ для всех $f \in L_2(B)$, т. е. решение имеет соответствующую гладкость в некоторой окрестности $S_a(y^l)$.

По лемме 2.6 существует единственная подобласть $B_{rj} \neq B_{s1}$ такая, что $y^1 \in \partial B_{rj}$. При этом в рассматриваемом случае $r = s + 1$. Введем дополнительный набор точек $z^1, \dots, z^{s+1} \in \overline{B}$ такой, что $z^l = (q^{l-j}z_1^j, p^{j-l}z_2^j) \in \partial B_{rl} \setminus \mathcal{K}$ $(l = 1, \dots, s+1)$, $z^j = y^1$. Без ограничения общности можно положить $y^l = z^l$ $(l = 1, \dots, s)$, $z^{s+1} \in \partial B$. В противном случае $y^l = z^{l+1}$ $(l = 1, \dots, s)$, $z^1 \in \partial B$. При этом для случаев, когда одна из точек y^l лежит на границе, мы получаем, что соседним классом подобластей является класс B_{rj}, где $r = s - 1$. Таким образом, для различных случаев расположения точек y^l дальнейшие построения и рассуждения будут действительными.

В силу лемм 2.3, 2.4 можно выбрать $a > 0$ достаточно малым, чтобы выполнялись следующие условия:

- множества $\partial B_{sl} \cap S_a(y^l)$ являются связанными и принадлежат классу C^∞ $(l = 1, \dots, s)$;
- $a < \min\limits_{t,l} \rho(x^{tl}, \mathcal{K})$, где $t = s, s+1$; $x^{sl} = y^l$, $x^{s+1,l} = z^l$;
- $S_a(x^{s+1,l}) \subset B$ при $l = 1, \dots, s$; $S_a(x^{s+1,s+1}) \cap B = S_a(x^{s+1,s+1}) \cap B_{sl}$;
- $S_a(x^{sl}) \cap B_{s_1 l_1} = \varnothing$, $((s_1, l_1) \neq (s, l))$.

Пусть u — обобщенное решение задачи (1.1), (1.2). Будем рассматривать его поведение вблизи точки y^l, $l = 1, \dots, s$. Умножим уравнение (1.1) на функцию

$$\xi(x_1, x_2) = \left(\frac{q}{p}\right)^{\frac{l-1}{2}} \eta(q^{l-1}x_1, p^{1-l}x_2),$$

где $\eta \in \dot{C}^\infty(S_a(y^1))$. Тогда будет справедливо следующее равенство:

$$-\int\limits_{S_a(y^l)} \sum_{i,j=1}^{2} (R_{ijB}u_{x_i}(x))_{x_j} \overline{\xi}(x)dx = \int\limits_{S_a(y^l)} f(x)\overline{\xi}(x)dx. \tag{4.1}$$

При помощи замены переменных перейдем в (4.1) к интегралу по множеству $S_a(y^1)$:

$$-\int\limits_{S_a(y^1)} \sum_{i,j=1}^{2} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{l-1}{2}} (R_{ijB}u_{x_i}(q^{-l+1}x_1, p^{l-1}x_2))_{x_j}\overline{\eta}(x)dx = \int\limits_{S_a(y^1)} \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{l-1}{2}} f(q^{-l+1}x_1, p^{l-1}x_2)\overline{\eta}(x)dx. \tag{4.2}$$

В силу определения (3.1) вектор-функции U получаем

$$\begin{aligned} R_{1jB}u_{x_1}(q^{1-l}x_1, p^{l-1}x_2) &= a_{1j,-1}u_{x_1}(q^{2-l}x_1, p^{l-2}x_2) + a_{1j0}u_{x_1}(q^{1-l}x_1, p^{l-1}x_2) + a_{1j1}u_{x_1}(q^{-l}x_1, p^{l}x_2) = \\ &= \Big(a_{1j,-1}q^{l-2}u(q^{2-l}x_1, p^{l-2}x_2) + a_{1j0}q^{l-1}u(q^{1-l}x_1, p^{l-1}x_2) + a_{1j1}q^{l}u(q^{-l}x_1, p^{l}x_2)\Big)_{x_1} = \\ &= \left(a_{1j,-1}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{2-l}{2}} q^{l-2}u_{l-1}(x) + a_{1j0}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1-l}{2}} q^{l-1}u_l(x) + a_{1j1}\left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{-l}{2}} q^{l}u_{l+1}(x)\right)_{x_1} = \\ &= \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1-l}{2}} \left(\sqrt{\frac{p}{q}}a_{1j,-1}q^{l-2}u_{l-1}(x) + a_{1j0}q^{l-1}u_l(x) + \sqrt{\frac{q}{p}}a_{1j1}q^{l}u_{l+1}(x)\right)_{x_1}. \end{aligned} \tag{4.3}$$

Обратим внимание на то, что в скобках полученного выражения стоит l-ый элемент вектор-столбца $\mathbf{R}_{1js}\mathbf{Q}_sU$. Аналогичным (4.3) образом, получим

$$R_{2jB}u_{x_2}(q^{1-l}x_1, p^{l-1}x_2) = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{1-l}{2}} \left(\sqrt{\frac{p}{q}}a_{2j,-1}p^{2-l}u_{l-1}(x) + a_{2j0}p^{1-l}u_l(x) + \sqrt{\frac{q}{p}}a_{2j1}p^{-l}u_{l+1}(x)\right)_{x_2}.$$

Тогда каждому $l = 1, \ldots, s$ будет соответствовать уравнение из системы

$$-\sum_{r=s,s+1}\int\limits_{\omega_r}(\mathbf{R}_{11r}\mathbf{Q}_rU_{x_1x_1} + \mathbf{R}_{12r}\mathbf{Q}_rU_{x_1x_2} + \mathbf{R}_{21r}\mathbf{P}_rU_{x_2x_1} + \mathbf{R}_{22r}\mathbf{P}_rU_{x_2x_2})\,\overline{\eta}(x)dx = \int\limits_{S_a(y^1)}F\overline{\eta}(x)dx, \tag{4.4}$$

где $\omega_r = B_{r1} \cap S_a(y^1)$ $(r = s, s+1)$, а вектор-функция $F \in L_{2,s}(S_a(y^1))$ имеет элементы $f_l = \left(\frac{p}{q}\right)^{\frac{l-1}{2}} f(q^{-l+1}x_1, p^{l-1}x_2)$.

Теперь можно, не ограничивая общности, считать, что $y^1 = 0$,

$$\omega_s = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 > 0\} \cap S_a(0), \quad \omega_{s+1} = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 < 0\} \cap S_a(0),$$

$$\gamma_r = \partial B_{r1} \cap S_a(0) = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 0\}, \quad r = s, s+1.$$

В силу теоремы 4.2 имеем $u \in H^2(\omega_r)$. Поэтому мы можем проинтегрировать по частям уравнение по областям $\omega_r, r = s, s+1$. Тогда слева в (4.4) получим

$$i\sum_{r=s,s+1}(-1)^{\mu(r)+1}\int\limits_{\gamma_r}(\mathbf{R}_{12r}\mathbf{Q}_rU_{x_1}+\mathbf{R}_{22r}\mathbf{P}_rU_{x_2})|_{\gamma_r}\overline{\eta}|_{\gamma_r}dx_1+\sum_{r=s,s+1}\int\limits_{\omega_r}\sum_{j=1}^{2}(\mathbf{R}_{1jr}\mathbf{Q}_rU_{x_1}+\mathbf{R}_{2jr}\mathbf{P}_rU_{x_2})\,\overline{\eta}_{x_j}(x)dx.$$

Здесь $v|_{\gamma_r}$ — след функции v, определенной в области B_{r1}, на границе γ_r. При этом $\mu(s) = 1$, $\mu(s+1) = 2$.

С другой стороны, для обобщенного решения u справедливо интегральное тождество (1.6), из которого следует, что

$$\sum_{r=s,s+1}\int\limits_{\omega_r}\sum_{j=1}^{2}(\mathbf{R}_{1jr}\mathbf{Q}_rU_{x_1}+\mathbf{R}_{2jr}\mathbf{P}_rU_{x_2})\,\overline{\eta}_{x_j}(x)dx = \int\limits_{S_a(y^1)}F\overline{\eta}(x)dx.$$

Таким образом, получаем условие

$$\sum_{r=s,s+1}(-1)^{\mu(r)+1}(\mathbf{R}_{12r}\mathbf{Q}_rU_{1r} + \mathbf{R}_{22r}\mathbf{P}_rU_{2r})|_{\gamma_r} = 0, \tag{4.5}$$

где U_{ir}, $r = s, s+1$, $i = 1, 2$ — производная по x_i вектор-столбца U длины r.

Запишем матрицу $\mathbf{R}_{ij,s+1}$, определенную формулой (3.2), следующим образом:

$$\mathbf{R}_{ij,s+1} = \begin{pmatrix} A_{ij,s+1} \\ B_{ij,s+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A'_{ij,s+1} & A''_{ij,s+1} \\ B'_{ij,s+1} & B''_{ij,s+1} \end{pmatrix},$$

где матрица $A_{ij,s+1}$ имеет размер $(s \times s+1)$, $B_{ij,s+1}$ — $(1 \times s+1)$, $A'_{ij,s+1}$ — $(s \times s)$, $A''_{ij,s+1}$ — $(s \times 1)$, $B'_{ij,s+1}$ — $(1 \times s)$, $B''_{ij,s+1}$ — (1×1). При этом данные матрицы имеют четкий геометрический смысл: матрица $A'_{ij,s+1}$ соответствует отображению внутренней точки области во внутреннюю, матрица $A''_{ij,s+1}$ — внутренней точки в граничную, матрица $B'_{ij,s+1}$ — граничной точки во внутреннюю, матрица $B''_{ij,s+1}$ — граничной точки в граничную. Обратим внимание на то, что матрица $A'_{ij,s+1}$ равна матрице $\mathbf{R}_{ijs}$.

Введем также дополнительные обозначения для вектор-функции $U_{i,s+1}$:

$$U_{i,s+1} = \begin{pmatrix} U'_{i,s+1} \\ U''_{i,s+1} \end{pmatrix}.$$

Здесь вектор-функции $U'_{i,s+1}$ получены из вектор-функций $U_{i,s+1}$ вычеркиванием последней строки, а вектор-функции $U''_{i,s+1}$ получены из вектор-функций $U_{i,s+1}$ вычеркиванием первых s строк.

В силу того, что $u \in \mathring{H}^1(B)$ является обобщенным решением задачи (1.1), (1.2), из теоремы 4.2 получаем следующие соотношения:

$$U'_{s+1} = U_s, \quad U''_{s+1} = 0, \quad U'_{1,s+1} = U_{1s}, \quad U''_{1,s+1} = 0. \tag{4.6}$$

Перепишем (4.5) для $l = 1, \dots, s$, используя новые обозначения:

$$A'_{22,s+1}\mathbf{P}_s(U_{2s} - U'_{2,s+1}) = A''_{22,s+1}p^{-s}U''_{2,s+1}. \tag{4.7}$$

Умножив (4.7) слева на $\mathbf{P}_s$, перепишем уравнение, используя новые обозначения:

$$E_sY(x_1) = F(x_1) \quad (x_1, 0) \in \gamma, \tag{4.8}$$

где $E_s = \mathbf{R}_{22sPQ}$, $Y(x_1) = U_{2s} - U'_{2,s+1}$, $F(x_1) = E_0U''_{2,s+1}$, $E_0 = \mathbf{P}_sA''_{22,s+1}p^{-s}$.

По лемме 3.1 матрица $\mathbf{R}_{22sPQ} + \mathbf{R}^*_{22sPQ}$ положительно определена. Тогда существует обратная матрица $\mathbf{R}^{-1}_{22sPQ}$, и из уравнения (4.7) вытекает

$$U_{2s} - U'_{2,s+1} = \mathbf{R}^{-1}_{22sPQ}\mathbf{P}_sA''_{22,s+1}p^{-s}U''_{2,s+1} = \mathbf{P}_s^{-1}A'^{-1}_{22,s+1}A''_{22,s+1}p^{-s}U''_{2,s+1}.$$

Обозначим через E_{sl} матрицу порядка $s \times (s-1)$, полученную из матрицы E_s вычеркиванием l-го столбца.

Теорема 4.3. *Пусть уравнение* (1.1) *является сильно эллиптическим в* $\overline{B}$. *Тогда для данного* l $(1 \leqslant l \leqslant s)$ *обобщенное решение* $u(x)$ *краевой задачи* (1.1), (1.2) *принадлежит пространству* $H^2(S_a(y^l))$ *для всех* $f \in L_2(B)$ *в том и только том случае, когда для любого* $(x_1, 0) \in \gamma$ *вектор-столбец* E_0 *является линейной комбинацией столбцов матрицы* E_{sl}.

Доказательство.

1. Достаточность. По теореме 4.2 решение $u(x)$ краевой задачи (1.1), (1.2) принадлежит пространству $H^2(S_a(y^l))$ тогда и только тогда, когда равны l-ые компоненты векторов U_{2s} и $U_{2,s+1}$:

$$U^l_{2s} - U'^l_{2,s+1} = 0. \tag{4.9}$$

Выше было показано, что решение $u(x)$ удовлетворяет уравнениям (4.8). Поскольку $\det \mathbf{R}_{22sPQ} \neq 0$ для всех $(x_1, 0) \in \gamma$, существует единственное решение $Y(x)$ системы (4.8). Предположим, что вектор-столбец E_0 является линейной комбинацией столбцов матрицы E_{sl} для всех $(x_1, 0) \in \gamma$. Тогда матрица системы (4.8), (4.9) и расширенная матрица этой системы имеют один и тот же ранг s. Следовательно решение $Y(x)$ системы (4.8) удовлетворяет уравнению (4.9). Поэтому $u \in H^2(S_a(y^l))$.

2. Необходимость. Предположим, что вектор-столбец E_0 не является линейной комбинацией столбцов матрицы E_{sl}. Покажем, что тогда существует функция $u \in \mathcal{D}(A_R)$ такая, что $u \notin H^2(S_a(y^l))$. Введем функцию $\xi(x) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2) : \xi(x) = 1$ при $x \in S_\varepsilon(y^1)$; $\xi(x) = 0$ при $x \notin S_{2\varepsilon}(y^1)$. Положим $W^s(x) = 0$ $(x \in \omega_s)$, $W^{s+1}(x) = ix_2\xi$ $(x \in \omega_{s+1})$. Очевидно, что $W^{s+1}(x)|_{x_2=0} = 0$.

Рассмотрим систему уравнений (4.8). Эта система имеет единственное решение $Y(x_1) \in C_0^{\infty,s}(\gamma)$. Очевидно, что существует вектор-функция $Z \in C_0^{2,s}(S_a(0))$ такая, что

$$Z(x)|_{x_2=0} = 0, \quad (x_1, 0) \in \gamma,$$
$$Z_{x_2}(x)|_{x_2=0} = Y(x_1), \quad (x_1, 0) \in \gamma.$$

Пусть

$$u(x) = U_t^1(q^{1-t}x_1, p^{t-1}x_2), \quad x \in B_{s+1,t} \cap S_a(y^t), \quad (t = 1, \ldots, s+1);$$
$$u(x) = 0, \quad x \in B \setminus \left\{ \bigcup_t (B_{s+1,t} \cap S_a(y^t)) \right\},$$

где $U^1 = (Z_1, \ldots, Z_s, W^{s+1})$. В силу (4.8) имеем $u \in \mathcal{D}(A_R)$. Докажем, что $u \notin H^2(S_a(y^l))$. Учитывая вид функции W^{s+1}, перепишем уравнение (4.8):

$$E_s Y(x_1) = E_0 \quad (x_1, 0) \in \gamma \cap S_\varepsilon(y^1). \tag{4.10}$$

Если $u \in H^2(S_a(y^l))$, то

$$U_{2s}(x_1) - U'_{2,s+1}(x_1) = 0 \quad ((x_1, 0) \in \gamma \cap S_\varepsilon(y^1)). \tag{4.11}$$

По предположению E_0 не является линейной комбинацией столбцов матрицы E_{sl}. Поэтому матрица и расширенная матрица системы (4.10), (4.11) имеют ранги s и $s+1$, соответственно. Таким образом, функция $u(x)$ не удовлетворяет уравнению (4.11). Следовательно, построенная функция $u \in \mathcal{D}(A_R)$ не принадлежит пространству $H^2(S_a(y^l))$. Теорема доказана. □

Проиллюстрируем полученные результаты на первых классах подмножеств.

Пусть $s = 1$. В первом классе содержится одна подобласть B_{11}, тогда $y^1 \in B_{11} \cap B_{21}$. Запишем уравнение (4.7):

$$a_{220}(u_{21} - u'_{22}) = \sqrt{\frac{q}{p}} a_{221} p^{-1} u''_{22}.$$

Для сохранения гладкости решения в окрестности точки y^1 для любой правой части требуется, чтобы $a_{221} = 0$.

Перейдем ко второму классу подобластей. Уравнение (4.7) приобретает вид

$$\begin{pmatrix} a_{220} & \sqrt{\frac{q}{p}} p^{-1} a_{221} \\ \sqrt{\frac{p}{q}} a_{22,-1} & p^{-1} a_{220} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_{21}^1 - u_{22}^1 \\ u_{21}^2 - u_{22}^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{\frac{q}{p}} p^{-2} a_{221} u_{22}^3 \end{pmatrix}.$$

Для того, чтобы $u \in H^2(y^i), i = 1, 2$, необходимо, чтобы обнулялись следующие определители:

$$\begin{vmatrix} 0 & \sqrt{\frac{q}{p}} p^{-1} a_{221} \\ \sqrt{\frac{q}{p}} p^{-2} a_{221} & p^{-1} a_{220} \end{vmatrix} \quad \text{для } i = 1, \qquad \begin{vmatrix} a_{220} & 0 \\ \sqrt{\frac{p}{q}} a_{22,-1} & \sqrt{\frac{q}{p}} p^{-2} a_{221} \end{vmatrix} \quad \text{для } i = 2.$$

Учитывая сильную эллиптичность, получаем условие равенства нулю коэффициента a_{221}.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Вишик М. И.* О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений// Мат. сб. — 1951. — *29*, № 3. — С. 615–676.
2. *Гусева О. В.* О краевых задачах для сильно эллиптических систем// Докл. АН СССР. — 1955. — *102*, № 6. — С. 1069–1072.
3. *Данфорд Н., Шварц Дж. Т.* Линейные операторы. Т. 2. — М.: Мир, 1966.
4. *Иванов Н. О., Скубачевский А. Л.* Вторая краевая задача для дифференциально-разностных уравнений// Докл. РАН. — 2021. — *500*. — С. 74–77.
5. *Иванов Н. О., Скубачевский А. Л.* Об обобщенных решениях второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2021. — *67*, № 3. — С. 576–595.

6. *Иванов Н. О., Скубачевский А. Л.* Об обобщенных решениях второй краевой задачи для дифференциально-разностных уравнений с переменными коэффициентами на интервале нецелой длины// Мат. заметки. — 2022. — *111*, № 6. — С. 873–886.
7. *Ладыженская О. А.* Краевые задачи математической физики. — М.:Наука, 1973.
8. *Михайлов В. П.* Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.:Наука, 1976.
9. *Неверова Д. А.* Гладкость обобщенных решений второй и третьей краевых задач для сильно эллиптических дифференциально-разностных уравнений// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2019. — *65*, № 4. — С. 655–671.
10. *Неверова Д. А.* Гладкость обобщенных решений задачи Неймана для сильно эллиптического дифференциально-разностного уравнения на границе соседних подобластей// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2020. — *66*, № 2. — С. 272–291.
11. *Россовский Л. Е.* Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений// Мат. заметки. — 1996. — *59*, № 1. — С. 103–113.
12. *Россовский Л. Е.* К вопросу о коэрцитивности функционально-дифференциальных уравнений// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2012. — *45*. — С. 122–131.
13. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргумертов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *54*. — С. 3–138.
14. *Россовский Л. Е., Тасевич А. Л.* Первая краевая задача для сильно эллиптического функционально-дифференциального уравнения с ортотропными сжатиями// Мат. заметки. — 2015. — *97*, № 5. — С. 733–748.
15. *Скубачевский А. Л.* Гладкость обобщенных решений первой краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения// Мат. заметки. — 1983. — *34*, № 1. — С. 105–112.
16. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — *71*, № 5. — С. 3–112.
17. *Скубачевский А. Л., Цветков Е. Л.* Вторая краевая задача для эллиптических дифференциально-разностных уравнений// Дифф. уравн. — 1989. — *25*, № 10. — С. 1766–1776.
18. *Тасевич А. Л.* Гладкость обобщенных решений задачи Дирихле для сильно эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — *58*. — С. 153–165.
19. *Цветков Е. Л.* О гладкости обобщенных решений третьей краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения// Укр. мат. ж. — 1993. — *45*, № 8. — С. 1140–1150.
20. *Шамин Р. В.* О пространствах начальных данных для дифференциальных уравнений в гильбертовых пространствах// Мат. сб. — 2003. — *194*, № 9. — С. 141–156.
21. *Auscher P., Hofmann S., McIntosh A., Tchamitchian P.* The Kato square root problem for higher order elliptic operators and systems on $\mathbb{R}^n$// J. Evol. Equ. — 2001. — *1*, № 4. — С. 361–385.
22. *Axelsson A., Keith S., McIntosh A.* The Kato square root problem for mixed boundary value problems// J. Lond. Math. Soc. — 2006. — *74*. — С. 113–130.
23. *Gårding L.* Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations// Math. Scand. — 1953. — *1*. — С. 55–72.
24. *Kato T.* Fractional powers of dissipative operators// J. Math. Soc. Japan. — 1961. — *13*, № 3. — С. 246–274.
25. *Lions J. L.* Espaces d'interpolation et domaines de puissance fractionnaires d'operateurs// J. Math. Soc. Japan. — 1962. — *14*, № 2. — С. 233–241.
26. *McIntosh A.* On the comparability of $A^{1/2}$ and $A*^{1/2}$// Proc. Am. Math. Soc. — 1972. — *32*, № 2. — С. 430–434.
27. *Morrey C. B.* Multiple integrals in the calculus of variations. — Berlin—Heidelberg—New York: Springer, 1966.
28. *Skubachevskii A. L.* The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations// J. Differ. Equ. — 1986. — *63*. — С. 332–361.
29. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.

А. Л. Тасевич

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия;

Федеральный исследовательский центр «Информатика и управление» РАН, Москва, Россия

E-mail: `tasevich-al@rudn.ru`

UDC 517.956.223
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-152-165
EDN: FOBXVK

Smoothness of generalized solutions to the Dirichlet problem for strongly elliptic functional differential equations with orthotropic contractions on the boundary of adjacent subdomains

A. L. Tasevich[1,2]

[1]*RUDN University, Moscow, Russia*
[2]*Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

The paper is devoted to the study of the smoothness of generalized solutions of the first boundary-value problem for a strongly elliptic functional differential equation containing orthotropic contraction transformations of the arguments of the unknown function in the leading part. The problem is considered in a circle, the coefficients of the equation are constant. Orthotropic contraction is understood as different contraction in different variables. Conditions for the conservation of smoothness on the boundaries of neighboring subdomains formed by the action of the contraction transformation group on a circle are found in explicit form for any right-hand side from the Lebesgue space.

Keywords: strongly elliptic functional differential equation, orthotropic contraction of arguments, smoothness of generalized solutions

For citation: A. L. Tasevich, "Smoothness of generalized solutions to the Dirichlet problem for strongly elliptic functional differential equations with orthotropic contractions on the boundary of adjacent subdomains," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 1, 152–165. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-152-165`

REFERENCES

1. M. I. Vishik, "O sil'no ellipticheskikh sistemakh differentsial'nykh uravneniy" [On strongly elliptic systems of differential equations], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1951, **29**, No. 3, 615–676 (in Russian).
2. O. V. Guseva, "O kraevykh zadachakh dlya sil'no ellipticheskikh sistem" [On boundary-value problems for strongly elliptic systems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1955, **102**, No. 6, 1069–1072 (in Russian).
3. N. Dunford and J. Schwartz, *Lineynye operatory. T. II. Spektral'naya teoriya. Samosopryazhennye operatory v gil'bertovom prostranstve* [Linear Operators. Part II: Spectral Theory. Self-Adjoint Operators in Hilbert Space], Mir, Moscow, 1966 (Russian translation).
4. N. O. Ivanov and A. L. Skubachevskiy, "Vtoraya kraevaya zadacha dlya differentsial'no-raznostnykh uravneniy" [The second boundary-value problem for differential-difference equations], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2021, **500**, 74–77 (in Russian).
5. N. O. Ivanov and A. L. Skubachevskii, "Ob obobshchennykh resheniyakh vtoroy kraevoy zadachi dlya differentsial'no-raznostnykh uravneniy s peremennymi koeffitsientami" [On generalized solutions of the second boundary-value problem for differential-difference equations with variable coefficients], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2021, **67**, No. 3, 576–595 (in Russian).
6. N. O. Ivanov and A. L. Skubachevskii, "Ob obobshchennykh resheniyakh vtoroy kraevoy zadachi dlya differentsial'no-raznostnykh uravneniy s peremennymi koeffitsientami na intervale netseloy dliny" [On generalized solutions of the second boundary-value problem for differential-difference equations with

variable coefficients on an interval of noninteger length], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2022, **111**, No. 6, 873–886 (in Russian).

7. O. A. Ladyzhenskaya, *Kraevye zadachi matematicheskoy fiziki* [Boundary-Value Problems of Mathematical Physics], Nauka, Moscow, 1973 (in Russian).
8. V. P. Mikhaylov, *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Partial Differential Equations], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
9. D. A. Neverova, "Gladkost' obobshchennykh resheniy vtoroy i tret'ey kraevykh zadach dlya sil'no ellipticheskikh differentsial'no-raznostnykh uravneniy" [Smoothness of generalized solutions of the second and third boundary-value problems for strongly elliptic differential-difference equations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2019, **65**, No. 4, 655–671 (in Russian).
10. D. A. Neverova, "Gladkost' obobshchennykh resheniy zadachi Neymana dlya sil'no ellipticheskogo differentsial'no-raznostnogo uravneniya na granitse sosednikh podoblastey" [Smoothness of generalized solutions of the Neumann problem for a strongly elliptic differential-difference equation on the boundary of adjacent subdomains], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2020, **66**, No. 2, 272–291 (in Russian).
11. L. E. Rossovskii, "Koertsitivnost' funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy" [Coercivity of functional differential equations], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1996, **59**, No. 1, 103–113 (in Russian).
12. L. E. Rossovskii, "K voprosu o koertsitivnosti funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy" [The coercivity of functional differential equations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2012, **45**, 122–131 (in Russian).
13. L. E. Rossovskii, "Ellipticheskie funktsional'no-differentsial'nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumertov neizvestnoy funktsii" [Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, 3–138 (in Russian).
14. L. E. Rossovskii and A. L. Tasevich, "Pervaya kraevaya zadacha dlya sil'no ellipticheskogo funktsional'no-differentsial'nogo uravneniya s ortotropnymi szhatiyami" [The first boundary-value problem for a strongly elliptic functional differential equation with orthotropic contractions], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2015, **97**, No. 5, 733–748 (in Russian).
15. A. L. Skubachevskii, "Gladkost' obobshchennykh resheniy pervoy kraevoy zadachi dlya ellipticheskogo differentsial'no-raznostnogo uravneniya" [Smoothness of generalized solutions of the first boundary-value problem for an elliptic differential-difference equation], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1983, **34**, No. 1, 105–112 (in Russian).
16. A. L. Skubachevskii, "Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy i ikh prilozheniya" [Boundary-value problems for elliptic functional differential equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 3–112 (in Russian).
17. A. L. Skubachevskii and E. L. Tsvetkov, "Vtoraya kraevaya zadacha dlya ellipticheskikh differentsial'no-raznostnykh uravneniy" [The second boundary-value problem for elliptic differential-difference equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1989, **25**, No. 10, 1766–1776 (in Russian).
18. A. L. Tasevich, "Gladkost' obobshchennykh resheniy zadachi Dirikhle dlya sil'no ellipticheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy s ortotropnymi szhatiyami" [Smoothness of generalized solutions of the Dirichlet problem for strongly elliptic functional differential equations with orthotropic contractions], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **58**, 153–165 (in Russian).
19. E. L. Tsvetkov, "O gladkosti obobshchennykh resheniy tret'ey kraevoy zadachi dlya ellipticheskogo differentsial'no-raznostnogo uravneniya" [On the smoothness of generalized solutions of the third boundary-value problem for an elliptic differential-difference equation], *Ukr. mat. zh.* [Ukr. Math. J.], 1993, **45**, No. 8, 1140–1150 (in Russian).
20. R. V. Shamin, "O prostranstvakh nachal'nykh dannykh dlya differentsial'nykh uravneniy v gil'bertovykh prostranstvakh" [On spaces of initial data for differential equations in Hilbert spaces], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2003, **194**, No. 9, 141–156 (in Russian).
21. P. Auscher, S. Hofmann, A. McIntosh, and P. Tchamitchian, "The Kato square root problem for higher order elliptic operators and systems on $\mathbb{R}^n$," *J. Evol. Equ.*, 2001, **1**, No. 4, 361–385.
22. A. Axelsson, S. Keith, and A. McIntosh, "The Kato square root problem for mixed boundary value problems," *J. Lond. Math. Soc.*, 2006, **74**, 113–130.
23. L. Gårding, "Dirichlet's problem for linear elliptic partial differential equations," *Math. Scand.*, 1953, **1**, 55–72.
24. T. Kato, "Fractional powers of dissipative operators," *J. Math. Soc. Japan*, 1961, **13**, No. 3, 246–274.
25. J. L. Lions, "Espaces d'interpolation et domaines de puissance fractionnaires d'operateurs," *J. Math. Soc. Japan*, 1962, **14**, No. 2, 233–241.

26. A. McIntosh, "On the comparability of $A^{1/2}$ and $A*^{1/2}$," *Proc. Am. Math. Soc.*, 1972, **32**, No. 2, 430–434.
27. C. B. Morrey, *Multiple integrals in the calculus of variations*, Springer, Berlin—Heidelberg—New York, 1966.
28. A. L. Skubachevskii, "The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations," *J. Differ. Equ.*, 1986, **63**, 332–361.
29. A. L. Skubachevskii, *Elliptic functional differential equations and applications*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1997.

A. L. Tasevich

RUDN University, Moscow, Russia;

Federal Research Center "Computer Science and Control" of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

E-mail: `tasevich-al@rudn.ru`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 1 (2023). С. 166–184
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 517.9
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-166-184
EDN: FPXSDA

ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ И АНАЛИТИЧЕСКИЕ РАЗРЕШАЮЩИЕ СЕМЕЙСТВА ОПЕРАТОРОВ

В. Е. Федоров, А. Д. Годова

Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия

Исследуется класс уравнений в банаховых пространствах с интегро-дифференциальным оператором типа Римана—Лиувилля с операторнозначным ядром свертки. Исследованы свойства k-разрешающих операторов таких уравнений, определен класс $\mathcal{A}_{m,K,\chi}$ линейных замкнутых операторов, принадлежность которому необходима и в случае коммутирования оператора с ядром свертки достаточна для существования аналитических в секторе k-разрешающих семейств операторов исследуемого уравнения. При некоторых дополнительных условиях на ядро свертки доказаны теоремы об однозначной разрешимости неоднородного линейного уравнения рассматриваемого класса в случае непрерывной в норме графика оператора из уравнения или гельдеровой неоднородности. Доказана теорема о достаточных условиях на аддитивное возмущение оператора класса $\mathcal{A}_{m,K,\chi}$ для того, чтобы возмущенный оператор также принадлежал такому классу. Абстрактные результаты использованы при исследовании начально-краевых задач для системы уравнений в частных производных с несколькими дробными производными Римана—Лиувилля по времени разных порядков и для уравнения с дробной производной Прабхакара по времени.

Ключевые слова: интегро-дифференциальные уравнения, банаховы пространства, оператор Римана—Лиувилля, однозначная разрешимость, дробные производные Римана—Лиувилля, дробная производная Прабхакара

Для цитирования: *В. Е. Федоров, А. Д. Годова.* Интегро-дифференциальные уравнения в банаховых пространствах и аналитические разрешающие семейства операторов// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 1. С. 166–184. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-166-184`

Введение

В последние десятилетия дробное интегро-дифференциальное исчисление все чаще используется при решении как теоретических, так и прикладных задач во многих областях математического моделирования [21, 25, 27, 28]. При этом регулярно появляются все новые конструкции дробных производных или просто интегро-дифференциальных операторов, представляющие собой композицию оператора дифференцирования целого порядка и оператора свертки [11, 14, 23], но не со степенной функцией, как при построении наиболее распространенных дробных производных Римана—Лиувилля и Герасимова—Капуто.

Исследование выполнено за счет гранта Президента Российской Федерации для поддержки ведущих научных школ, проект НШ-2708.2022.1.1.

В данной работе будет исследован класс уравнений с интегро-дифференциальным оператором типа Римана—Лиувилля (сначала действие оператором свертки, затем — дифференцирование) высокого порядка в банаховом пространстве, при этом будут рассматриваться операторы свертки с операторнозначной функцией ядра K. Это усложняет абстрактную задачу, но дает дополнительные возможности при приложении полученных результатов к конкретным уравнениям и системам уравнений, в частности, позволяет рассматривать системы уравнений, содержащие дробные производные различных порядков в рамках абстрактного интегро-дифференциального уравнения.

Ранее авторы исследовали линейные уравнения в банаховых пространствах, разрешенные относительно интегро-дифференциального оператора типа Римана—Лиувилля и типа Герасимова—Капуто высокого порядка, с ограниченным оператором при искомой функции [17]. При некоторых условиях на операторнозначное ядро K была доказана однозначная разрешимость начальных задач для таких уравнений, а также для уравнений с вырожденным линейным оператором при интегро-дифференциальном операторе в случае относительной ограниченности пары операторов в таком уравнении. В данной работе с использованием техники преобразования Лапласа исследуются разрешенные относительно интегро-дифференциального оператора типа Римана—Лиувилля линейные уравнения в банаховых пространствах с неограниченным оператором при искомой функции. Для некоторого класса таких уравнений исследованы свойства разрешающих семейств операторов, доказана однозначная разрешимость задачи типа Коши, т. е. задачи с начальными условиями Коши для свертки искомой функции.

Настоящая работа построена следующим образом. В первом разделе вводится понятие k-разрешающего семейства интегро-дифференциального уравнения порядка $m \in \mathbb{N}$, исследуются свойства таких семейств и их соотношения при различных $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$. Второй раздел содержит доказательство теоремы о необходимых и достаточных условиях на преобразование Лапласа аналитической в секторе функции. В третьем разделе эти условия использованы для задания класса $\mathcal{A}_{m,K,\chi}$ линейных замкнутых операторов A, для которых при λ из некоторого сектора вида $S_{\theta_0,a_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_0)| < \theta_0, \mu \neq a_0\}$, $\theta_0 \in (\pi/2, \pi]$, $a_0 \geqslant 0$, существуют обратные операторы $(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}$, нормы которых не превосходят величины $C|\lambda|^{\chi - m}$ в S_{θ_0,a_0}. Доказана необходимость и достаточность (в случае коммутирования операторов $K(s)$ и A) условия $A \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}$ для существования аналитических в секторе k-разрешающих семейств однородного уравнения исследуемого вида. Этот результат, в частности, дает достаточные условия однозначной разрешимости задачи типа Коши для линейного однородного интегро-дифференциального уравнения. В следующем разделе при некоторых дополнительных условиях на ядро свертки доказана однозначная разрешимость задачи типа Коши для линейного неоднородного уравнения исследуемого вида с правой частью, непрерывной в норме графика оператора A или гельдеровой норме. Пятый раздел посвящен доказательству теоремы о возмущении операторов класса $\mathcal{A}_{m,K,\chi}$, т. е. о достаточных условиях на аддитивное возмущение такого оператора, при котором возмущенный оператор также содержится в $\mathcal{A}_{m,K,\chi}$. Полученные абстрактные результаты о разрешимости неоднородного уравнении и о возмущении операторов класса $\mathcal{A}_{m,K,\chi}$ в шестом разделе использованы для доказательства однозначной разрешимости начально-краевой задачи для системы уравнений с несколькими дробными производными Римана—Лиувилля различных порядков по времени, с самосопряженным эллиптическим оператором высокого порядка по пространственным переменным в каждом уравнении. В последнем разделе аналогичным образом исследовано уравнение с дробной производной Прабхакара по времени.

1. Разрешающие семейства интегро-дифференциальных уравнений

Пусть $\mathcal{Z}$ — банахово пространство, $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ — банахова алгебра всех линейных ограниченных операторов на $\mathcal{Z}$, $\mathcal{C}l(\mathcal{Z})$ — множество всех линейных замкнутых операторов, плотно определенных в пространстве $\mathcal{Z}$, $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, область определения D_A оператора A снабжена нормой графика $\|\cdot\|_{D_A} = \|\cdot\|_{\mathcal{Z}} + \|A\cdot\|_{\mathcal{Z}}$, $\mathbb{R}_+ = \{a \in \mathbb{R} : a > 0\}$, $\overline{\mathbb{R}}_+ := \{0\} \cup \mathbb{R}_+$, $K \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$. Определим оператор свертки

$$(J^K z)(t) := \int_0^t K(t-s)z(s)ds$$

и интегро-дифференциальный оператор типа Римана—Лиувилля

$$(D^{m,K}z)(t) := D^m(J^K z)(t) := D^m \int_0^t K(t-s)z(s)ds,$$

где D^m — производная целого порядка $m \in \mathbb{N}$.

Замечание 1.1. При $K(t) = \dfrac{t^{m-\alpha-1}}{\Gamma(m-\alpha)} I$ интегро-дифференциальный оператор типа Римана—Лиувилля является производной Римана—Лиувилля D^α порядка $\alpha \in (m-1, m]$, $m \in \mathbb{N}$.

Рассмотрим начальную задачу

$$(D^{k,K}z)(0) = z_k \in \mathcal{Z}, \ \ k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{1.1}$$

для уравнения

$$(D^{m,K}z)(t) = Az(t), \ t > 0. \tag{1.2}$$

Решением задачи (1.1), (1.2) называется такая функция $z \in C(\mathbb{R}_+; D_A)$, что $J^K z \in C^{m-1}(\overline{\mathbb{R}}_+; \mathcal{Z}) \cap C^m(\mathbb{R}_+; \mathcal{Z})$, выполняются условия (1.1) и равенство (1.2) при $t \in \mathbb{R}_+$.

Замечание 1.2. По аналогии с тем, как задача Коши для дробного интеграла Римана—Лиувилля от неизвестной функции (т. е. для ее свертки со степенной функцией) при исследовании уравнений с производной Римана—Лиувилля называется задачей типа Коши [21], задачу Коши для абстрактной свертки искомой функции (1.1) будем также называть *задачей типа Коши.*

Для функции $h : \mathbb{R}_+ \to \mathcal{Z}$ обозначим преобразование Лапласа через $\widehat{h}$ или через $\mathfrak{L}[h]$, если выражение для h слишком длинное. Обратное преобразование Лапласа для функции $H(\lambda)$ будем обозначать $\mathfrak{L}^{-1}[H]$.

Сформулируем следующее условие.

($\widehat{K}$) *Пусть при некоторых* $\theta_K \in (\pi/2, \pi)$, $a_K \geqslant 0$ *существует однозначная аналитическая функция* $\widehat{K} : S_{\theta_K, a_K} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\arg(\mu - a_K)| < \theta_K, \ \mu \neq a_K\} \to \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ — *преобразование Лапласа для* $K \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$.

Определение 1.1. При $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ множество операторов $\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t \in \mathbb{R}_+\}$ называется *семейством k-разрешающих операторов* уравнения (1.2), если выполняются следующие условия:

(i) $S_k(\cdot)$ сильно непрерывно на $\mathbb{R}_+$;

(ii) для всех $t \in \mathbb{R}_+$ $S_k(t)[D_A] \subset D_A$, $S_k(t)Az_0 = AS_k(t)z_0$ при каждом $z_0 \in D_A$;

(iii) для любого $z_k \in D_A$ функция $S_k(t)z_k$ является решением задачи $D^{k,K}z(0) = z_k$, $D^{l,K}z(0) = 0$, $l \in \{0, 1, \ldots, m-1\} \setminus \{k\}$, для уравнения (1.2).

Лемма 1.1. *Пусть* $K \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ *удовлетворяет условию* ($\widehat{K}$), *при некотором* $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ *существует k-разрешающее семейство операторов* $\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ *уравнения* (1.2) *такое, что при всех* $t > 0$ $\|S_k(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant Ce^{at}t^\beta$ *при некоторых* $C > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $\beta > -1$. *Тогда при* $\mathrm{Re}\lambda > a$ *имеем* $(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$,

$$\widehat{S}_k(\lambda) = \lambda^{m-1-k}(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}, \tag{1.3}$$

и k-разрешающее семейство уравнения (1.2) *единственно.*

Доказательство. В силу свойств преобразования Лапласа, пунктов (ii) и (iii) определения 1.1 при любых $z_k \in D_A$, $\mathrm{Re}\lambda > a$ $\lambda^m \widehat{K}(\lambda)\widehat{S}_k(\lambda)z_k - \lambda^{m-1-k}z_k = A\widehat{S}_k(\lambda)z_k = \widehat{S}_k(\lambda)Az_k$. Поэтому оператор $\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A : D_A \to \mathcal{Z}$ обратим и выполняется равенство (1.3). Поскольку $\widehat{S}_k(\lambda) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ при $\mathrm{Re}\lambda > a$, имеем $(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. Из (1.3) и единственности обратного преобразования Лапласа следует единственность k-разрешающего семейства операторов уравнения (1.2). $\square$

Лемма 1.2. *Пусть* $K \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ *удовлетворяет условию* $(\widehat{K})$, *существует* 0*-разрешающее семейство* $\{S_0(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ *уравнения* (1.2) *такое, что при всех* $t > 0$ $\|S_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant Ce^{at}t^{\beta}$ *при некоторых* $C > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $\beta > -1$. *Тогда при любом* $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ *существует единственное* k*-разрешающее семейство* $\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$. *При этом для всех* $t > 0$ $S_k(t) \equiv J^k S_0(t)$ *и* $\|S_k(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant C_k e^{\max\{a,0\}t}t^{\beta+k}$ *при некотором* $C_k > 0$.

Доказательство. Поскольку $\beta > -1$, определим при $k = 1, 2, \dots, m-1$ семейства $\{S_k(t) := J^k S_0(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$. По построению они удовлетворяют условию (i) определения 1.1. При $x \in D_A$, $t > 0$

$$J^k S_0(t)Ax = \int\limits_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{\Gamma(k)} S_0(s)Axds = AJ^k S_0(t)x,$$

так как $\{S_0(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ удовлетворяет условию (ii) определения 1.1, а оператор A замкнут. Поэтому условие (ii) выполняется и для $\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$, $k = 1, 2, \dots, m-1$.

При всех $t > 0$

$$\|S_k(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant C\int\limits_0^t \frac{(t-s)^{k-1}}{\Gamma(k)} e^{as}s^{\beta}ds \leqslant \frac{Ce^{\max\{a,0\}t}t^{\beta+k}B(k,\beta+1)}{\Gamma(k)} =$$

$$= \frac{Ce^{\max\{a,0\}t}t^{\beta+k}\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\beta+k+1)} = C_k e^{\max\{a,0\}t}t^{\beta+k}.$$

При $z_k \in D_A$ умножим равенство $\lambda^m\widehat{K}(\lambda)\widehat{S}_0(\lambda)z_k - \lambda^{m-1}z_k = A\widehat{S}_0(\lambda)z_k$, следующее из условия (iii) определения 0-разрешающего семейства операторов, на λ^{-k} и, принимая во внимание коммутирование операторов свертки J^K и J^k, получим равенство $\lambda^m\mathfrak{L}[J^kJ^KS_0](\lambda)z_k - \lambda^{m-1-k}z_k = \lambda^m\mathfrak{L}[J^KJ^kS_0](\lambda)z_k - \lambda^{m-1-k}z_k = A\widehat{J^kS_0}(\lambda)z_k$, т. е. $\lambda^m\widehat{K}(\lambda)\widehat{S}_k(\lambda)z_k - \lambda^{m-1-k}z_k = A\widehat{S}_k(\lambda)z_k$. Последнее равенство в силу леммы 1.1 и единственности обратного преобразования Лапласа означает, что $\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ — k-разрешающее семейство (1.2). □

Следствие 1.1. *Пусть* $K \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ *удовлетворяет условию* $(\widehat{K})$, *существует* 0*-разрешающее семейство* $\{S_0(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ *уравнения* (1.2) *такое, что при всех* $t > 0$ $\|S_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant Ce^{at}t^{\beta}$ *при некоторых* $C > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $\beta > -1$. *Тогда для* $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ k*-разрешающее семейство* $\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ *удовлетворяет равенствам*

$$D^{l,K}S_k(t) = D^{0,K}S_{k-l}(t), \quad t > 0, \quad l = 0, 1, \dots, k.$$

Доказательство. При доказательстве леммы 1.2 было показано, что при $k \in \{0, 1, \dots, m-1\}$ $S_k(t) = J^kS_0(t)$, $J^KS_k(t) = J^kJ^KS_0(t)$. Отсюда следует, что для $l = 0, 1, \dots, k$

$$D^{l,K}S_k(t) := D^lJ^KS_k(t) = D^lJ^kJ^KS_0(t) = J^{k-l}J^KS_0(t) = J^KS_{k-l}(t) = D^{0,K}S_{k-l}(t).$$

□

Теорема 1.1. *Пусть* $K \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ *удовлетворяет условию* $(\widehat{K})$; *для всех* $t > 0$ $\|K(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant C_Ke^{a_Kt}$ *при некоторых* $C_K > 0$, $a_K \in \mathbb{R}$; *существуют обратные операторы* $\widehat{K}(\lambda_n)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ *при таких* $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$, *что* $\lim\limits_{n\to\infty} \mathrm{Re}\lambda_n = +\infty$; *существует* 0*-разрешающее семейство операторов* $\{S_0(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ *уравнения* (1.2), *такое, что для всех* $t > 0$ $\|S_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant Ce^{at}t^{\beta}$ *при некоторых* $C > 0$, $a \in \mathbb{R}$, $\beta > -1$. *Если предел* $\lim\limits_{t\to 0+} J^KS_0(t) = I$ *существует в норме* $\mathcal{L}(\mathcal{Z})$, *то* $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$. *Обратное верно при дополнительных условиях:* $\widehat{K}(\lambda)$ *определены и непрерывно обратимы при* $\lambda \in \Omega_{R_0} := \{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| > R_0, \arg\mu \in (-\pi, \pi)\}$, *при этом*

$$\exists c > 0 \quad \exists \chi > -m \quad \forall \lambda \in \Omega_{R_0} \quad \|\widehat{K}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \geqslant c|\lambda|^{\chi}. \tag{1.4}$$

Доказательство. В силу леммы 1.1 при $\mathrm{Re}\lambda > a$

$$\int\limits_0^{\infty} e^{-\lambda t}(J^KS_0(t) - I)dt = \lambda^{m-1}\widehat{K}(\lambda)(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} - \lambda^{-1}I.$$

Пусть функция $\eta(t) := \|J^K S_0(t) - I\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}$ непрерывна на отрезке $[0,1]$ и $\eta(0) = 0$. Для $\varepsilon > 0$ возьмем такое $\delta > 0$, что $\eta(t) \leqslant \varepsilon$ при всех $t \in [0,\delta]$, тогда

$$\left\|\lambda^{m-1}\widehat{K}(\lambda)(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} - \lambda^{-1}I\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \int_0^\delta e^{-\lambda t}\eta(t)dt + \int_\delta^\infty e^{-\lambda t}\eta(t)dt \leqslant \frac{\varepsilon}{\lambda} + o\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$

при $\mathrm{Re}\lambda \to +\infty$, так как

$$\|J^K S_0(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant CC_K \int_0^t e^{a_K(t-s)}e^{as}s^\beta ds \leqslant C_1 e^{a_1 t}$$

при некоторых $C_1 > 0$, $a_1 \in \mathbb{R}$ и поэтому $\eta(t) \leqslant C_1e^{a_1t} + 1$ для $t \geqslant 0$. Следовательно, при достаточно больших $\mathrm{Re}\lambda > a$ $\left\|\lambda^m\widehat{K}(\lambda)(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} - I\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} < 1$ и оператор $\widehat{K}(\lambda)(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}$ непрерывно обратим. С учетом непрерывной обратимости оператора $\widehat{K}(\lambda_n)$ при достаточно большом $n \in \mathbb{N}$ получим, что $\lambda_n^m\widehat{K}(\lambda_n) - A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, а значит, и $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$.

Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $R > \max\{R_0, 2(c^{-1}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})})^{1/(m+\chi)}\}$, $\Gamma_R := \Gamma_{1,R} \cup \Gamma_{2,R} \cup \Gamma_{3,R}$, где $\Gamma_{1,R} := \{Re^{i\varphi} : \varphi \in (-\pi,\pi)\}$, $\Gamma_{2,R} := \{re^{i\pi} : r \in [R,\infty)\}$, $\Gamma_{3,R} := \{re^{-i\pi} : r \in [R,\infty)\}$. При $t > 0$ получаем

$$J^K S_0(t) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \lambda^{m-1}\widehat{K}(\lambda)(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda = I + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \lambda^{-1}A(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda =$$

$$= I + \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} \frac{1}{\lambda}\sum_{l=1}^\infty \lambda^{-ml}(A\widehat{K}(\lambda)^{-1})^l e^{\lambda t}d\lambda.$$

В силу условия (1.4) выполнено $\|\widehat{K}(\lambda)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant c^{-1}|\lambda|^{-\chi}$ при всех $\lambda \in \Omega_{R_0}$. При малых $t > 0$ возьмем $R = 1/t$ и получим

$$\|J^K S_0(t) - I\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant C_1 \sum_{k=1}^3\sum_{l=1}^\infty \int_{\Gamma_{k,R}} \frac{\|A\|^l_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\|\widehat{K}(\lambda)^{-1}\|^l_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}|d\lambda|}{|\lambda|^{ml+1}} \leqslant$$

$$\leqslant C_2\sum_{l=1}^\infty \frac{(c^{-1}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})})^l}{R^{(m+\chi)l}} \leqslant C_3t^{m+\chi}\|A\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \to 0$$

при $t \to 0+$, так как $m + \chi > 0$. □

Замечание 1.3. Результат, аналогичный теореме 1.1, хорошо известен для разрешающих полугрупп операторов уравнений 1-го порядка (см., например, [22]). Для разрешающих семейств операторов уравнения с производной Герасимова—Капуто подобный результат был доказан в работе [12], для других типов уравнений с дробными производными — в работах [8, 13, 16, 18–20, 26].

2. Преобразование Лапласа аналитической в секторе функции

Теорема 2.1. *Пусть $\theta_0 \in (\pi/2,\pi]$, $a_0 \in \mathbb{R}$, $\beta > -1$, $\mathcal{X}$ — банахово пространство, задано отображение $H : (a,\infty) \to \mathcal{X}$. Тогда следующие утверждения эквивалентны.*

(i) *Существует аналитическая функция $F : \Sigma_{\theta_0-\pi/2} \to \mathcal{X}$, для которой при любом $\theta \in (\pi/2,\theta_0)$ существует такое $c(\theta) > 0$, что при всех $t \in \Sigma_{\theta-\pi/2}$ выполняется неравенство $\|F(t)\|_{\mathcal{X}} \leqslant c(\theta)|t|^\beta e^{a_0\mathrm{Re}\,t}$; $\widehat{F}(\lambda) = H(\lambda)$ при $\lambda > a_0$.*

(ii) *Отображение H аналитически продолжимо на S_{θ_0,a_0}; при каждом $\theta \in (\pi/2,\theta_0)$ существует такое $C(\theta) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta,a_0}$ $\|H(\lambda)\|_{\mathcal{X}} \leqslant C(\theta)|\lambda - a_0|^{-1-\beta}$.*

Доказательство. Пусть справедливо утверждение (i), $\pi/2 < \theta < \theta_0 \leqslant \pi$, $\delta > 0$, $\gamma_{\pm}^{\delta} = (0, \delta] \cup \{\delta + re^{\pm i(\theta-\pi/2)} : r \in (0, \infty)\}$. По теореме Коши при всех $\lambda > a_0$

$$\widehat{F}(\lambda) = \int_0^{\infty} F(t)e^{-\lambda t}dt = \int_{\gamma_{\pm}^{\delta}} F(\tau)e^{-\lambda\tau}d\tau =$$

$$= \int_0^{\delta} F(t)e^{-\lambda t}dt + e^{\pm i(\theta-\pi/2)} \int_0^{\infty} F(\delta + re^{\pm i(\theta-\pi/2)})e^{-\lambda(\delta+re^{\pm i(\theta-\pi/2)})}dr.$$

Устремим $\delta \to 0+$, тогда

$$\widehat{F}(\lambda) = e^{\pm i(\theta-\pi/2)} \int_0^{\infty} F(re^{\pm i(\theta-\pi/2)})e^{-\lambda re^{\pm i(\theta-\pi/2)}}dr := H_{\pm}(\lambda),$$

поскольку $\|F(\delta + re^{\pm i(\theta-\pi/2)})e^{-\lambda(\delta+re^{\pm i(\theta-\pi/2)})}\|_{\mathcal{X}} \leqslant c(\theta)c_1r^{\beta}e^{(a_0-\lambda)r\cos(\theta-\pi/2)}$ при $\delta \in [0, 1]$,

$$\left\|\int_0^{\delta} F(t)e^{-\lambda t}dt\right\|_{\mathcal{X}} \leqslant c_2\delta^{1+\beta} \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0+.$$

Возьмем такие $\varepsilon \in (0, \theta_0 - \pi/2)$ и $\lambda \in \mathbb{C}$, что $\arg(\lambda - a_0) \in (-\theta + \varepsilon, \pi - \theta - \varepsilon)$; тогда выполняется включение $\arg((\lambda - a_0)e^{i(\theta-\pi/2)}) \in (-\pi/2 + \varepsilon, \pi/2 - \varepsilon)$, следовательно, справедливы неравенства $\mathrm{Re}((\lambda - a_0)e^{i(\theta-\pi/2)}) \geqslant |\lambda - a_0|\sin\varepsilon$, $\|F(re^{i(\theta-\pi/2)})e^{-\lambda re^{i(\theta-\pi/2)}}\|_{\mathcal{X}} \leqslant c(\theta)r^{\beta}e^{-r|\lambda-a_0|\sin\varepsilon}$. Поэтому интеграл $H_+(\lambda)$ абсолютно сходится и определяет аналитическую функцию в секторе $\{\lambda \in \mathbb{C} : \arg(\lambda - a_0) \in (-\theta + \varepsilon, \pi - \theta - \varepsilon),\ \lambda \neq a_0\}$, в котором

$$\|H_+(\lambda)\|_{\mathcal{X}} \leqslant c(\theta) \int_0^{\infty} r^{\beta}e^{-r|\lambda-a_0|\sin\varepsilon}dr = \frac{c(\theta)\sin^{-\beta-1}\varepsilon\,\Gamma(1+\beta)}{|\lambda - a_0|^{1+\beta}} := \frac{C(\theta)}{|\lambda - a_0|^{1+\beta}}.$$

Аналогично может быть показано, что $H_-(\lambda)$ определяет аналитическую функцию в секторе $\{\lambda \in \mathbb{C} : \arg(\lambda - a_0) \in (-\pi + \theta + \varepsilon, \theta - \varepsilon),\ \lambda \neq a_0\}$, в котором выполняется неравенство $\|H_-(\lambda)\|_{\mathcal{X}} \leqslant C(\theta)|\lambda - a_0|^{-\beta-1}$. Так как H_+ и H_- являются аналитическими продолжениями функции $\widehat{F}$, определенной на $(a_0, +\infty)$, по теореме об аналитическом продолжении они определяют аналитическую функцию H на $S_{\theta-\varepsilon,a_0}$, удовлетворяющую неравенству $\|H(\lambda)\|_{\mathcal{X}} \leqslant C(\theta)|\lambda - a_0|^{-\beta-1}$. Так как $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ и $\varepsilon \in (0, \theta_0 - \pi/2)$ произвольны, утверждение (ii) выполняется.

Пусть выполняется утверждение (ii). Возьмем $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $\delta > 0$ и ориентированный контур $\Gamma = \Gamma_- \cup \Gamma_0 \cup \Gamma_+$, где $\Gamma_{\pm} := \{a_0 + re^{\pm i\theta} : r \in [\delta, \infty)\}$, $\Gamma_0 := \{a_0 + \delta e^{i\varphi} : \varphi \in (-\theta, \theta)\}$. При $\varepsilon \in (0, \theta - \pi/2)$, $t \in \Sigma_{\theta-\pi/2-\varepsilon}$, $\lambda \in \Gamma_{\pm}$ имеем $\mathrm{Re}(\lambda t) = a_0\mathrm{Re}\,t + r|t|\cos(\arg t \pm \theta) \leqslant a_0\mathrm{Re}\,t - r|t|\sin\varepsilon$. Поэтому $\|H(\lambda)e^{\lambda t}\|_{\mathcal{X}} \leqslant C(\theta)r^{-\beta-1}e^{a_0\mathrm{Re}\,t}e^{-r|t|\sin\varepsilon}$, интеграл

$$F(t) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} H(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda$$

абсолютно сходится, равномерно на компактных подмножествах множества $\Sigma_{\theta_0-\pi/2}$. Следовательно, интеграл определяет аналитическую функцию в секторе $\Sigma_{\theta_0-\pi/2}$.

Возьмем $\theta_1 \in (\pi/2, \theta_0)$, $\theta = (\theta_0 + \theta_1)/2$, $\varepsilon = \theta - \theta_1 = (\theta_0 - \theta_1)/2$, $t \in \Sigma_{\theta_1-\pi/2}$, $\delta = |t|^{-1}$, тогда

$$\left\|\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_0} H(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda\right\|_{\mathcal{X}} \leqslant \frac{C(\theta)|t|^{\beta}e^{a_0\mathrm{Re}t}}{2\pi} \int_{-\theta}^{\theta} e^{\cos(\arg t+\varphi)}d\varphi \leqslant C(\theta)|t|^{\beta}e^{1+a_0\mathrm{Re}t},$$

$$\left\|\frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_{\pm}} H(\lambda)e^{\lambda t}d\lambda\right\|_{\mathcal{X}} \leqslant \frac{C(\theta)e^{a_0\mathrm{Re}t}}{2\pi} \int_{1/|t|}^{\infty} r^{-\beta-1}e^{-r|t|\sin\varepsilon}dr \leqslant$$

$$\leqslant \frac{C(\theta)e^{a_0\mathrm{Re}t}|t|^{1+\beta}}{2\pi}\int\limits_{1/|t|}^{\infty} e^{-r|t|\sin\varepsilon}dr = \frac{C(\frac{\theta_0+\theta_1}{2})}{2\pi\sin\frac{\theta_0-\theta_1}{2}}|t|^{\beta}e^{a_0\mathrm{Re}t},$$

поэтому $\|F(t)\|_{\mathcal{X}} \leqslant c(\theta_1)|t|^{\beta}e^{a_0\mathrm{Re}t}$ при всех $t \in \Sigma_{\theta_1-\pi/2}$.

По теореме Фубини и теореме о вычетах при $\lambda > a_0$

$$\widehat{F}(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{H(\mu)d\mu}{\lambda-\mu} = H(\lambda) - \lim_{R\to\infty}\left(\int\limits_{\Gamma_R^0}\frac{H(\mu)d\mu}{\lambda-\mu} - \int\limits_{\Gamma_R^+}\frac{H(\mu)d\mu}{\lambda-\mu} - \int\limits_{\Gamma_R^-}\frac{H(\mu)d\mu}{\lambda-\mu}\right),$$

где $\Gamma_R^0 := \{a_0 + Re^{i\varphi} : \varphi \in (-\theta,\theta)\}$, $\Gamma_R^{\pm} := \{a_0 + re^{\pm i\theta} : r \in [R,\infty)\}$. При этом

$$\left\|\int\limits_{\Gamma_R^0}\frac{H(\mu)d\mu}{\lambda-\mu}\right\|_{\mathcal{X}} \leqslant \int\limits_{-\theta}^{\theta}\frac{R^{-\beta}C(\theta)d\varphi}{|a_0+Re^{i\varphi}-\lambda|} \to 0,$$

$$\left\|\int\limits_{\Gamma_R^{\pm}}\frac{H(\mu)d\mu}{\lambda-\mu}\right\|_{\mathcal{X}} \leqslant \int\limits_{R}^{\infty}\frac{r^{-\beta-1}C(\theta)dr}{|a_0+re^{\pm i\theta}-\lambda|} \leqslant C_1\int\limits_{R}^{\infty}r^{-\beta-2}dr \to 0,$$

при $R\to\infty$, поскольку $\beta > -1$. Таким образом, $\widehat{F} \equiv H$. □

Замечание 2.1. Понятно, что из условия (ii) следует, что при всех $\theta \in (\pi/2,\theta_0)$, $\varepsilon > 0$ существует такое $C_1(\theta) > 0$, что для всех $\lambda \in S_{\theta,a_0+\varepsilon}$ $\|H(\lambda)\|_{\mathcal{X}} \leqslant C_1(\theta)|\lambda|^{-1-\beta}$. Обратно, из неравенства $\|H(\lambda)\|_{\mathcal{X}} \leqslant C_1(\theta)|\lambda|^{-1-\beta}$ в S_{θ,a_0} при каждом $\theta \in (\pi/2,\theta_0)$ следует неравенство $\|H(\lambda)\|_{\mathcal{X}} \leqslant C(\theta)|\lambda-a_0|^{-1-\beta}$ в том же секторе S_{θ,a_0}

Замечание 2.2. При $a_0 = \beta = 0$ это утверждение совпадает с теоремой 0.1 из [24], при $\theta_0 = \pi/2$, $\beta > 0$ — с теоремой 2.6.1 из [10]. При $\beta \in (-1,0)$ такая теорема была доказана в работе [16].

3. Аналитические разрешающие семейства

k-Разрешающее семейство операторов при $k \in \{0,1,\ldots,m-1\}$ называется *аналитическим*, если оно имеет аналитическое продолжение в сектор Σ_{ψ_0} при некотором $\psi_0 \in (0,\pi/2]$. Аналитическое k-разрешающее семейство операторов $\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ имеет тип (ψ_0,a_0,β) при некоторых $\psi_0 \in (0,\pi/2]$, $a_0 \in \mathbb{R}$, $\beta > -1$, если для любого $\psi \in (0,\psi_0)$ существует такое $c(\psi)$, что при всех $t \in \Sigma_\psi$ выполняется неравенство $\|S_k(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant c(\psi)e^{a_0\mathrm{Re}\,t}|t|^{\beta}$.

Определение 3.1. Пусть $m \in \mathbb{N}$, $K \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ удовлетворяет условию $(\widehat{K})$, $\theta_0 \in (\pi/2,\theta_K]$, $a_0 \geqslant a_K \geqslant 0$, $\chi < 1$. Через $\mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0,a_0)$ обозначим класс операторов $A \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, для которых выполняются следующие условия:

(i) для любого $\lambda \in S_{\theta_0,a_0}$ существует оператор $(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$;

(ii) для любого $\theta \in (\pi/2,\theta_0)$ найдется такое $C = C(\theta) > 0$, что

$$\forall\lambda \in S_{\theta,a_0} \quad \|(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{C(\theta)}{|\lambda|^{m-\chi}}.$$

Иногда для удобства будем сокращать обозначение класса операторов $\mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0,a_0)$ до $\mathcal{A}_{m,K,\chi}$, когда значения параметров θ_0 и a_0 не играют роли.

Лемма 3.1. *Пусть $A \in \mathcal{L}(\mathcal{Z})$, $K \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ удовлетворяет условию $(\widehat{K})$ и существует такое $c > 0$, что при всех $\lambda \in S_{\theta_K,a_K}$ $\|\widehat{K}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \geqslant c|\lambda|^{-\chi}$. Тогда $\mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0,a_0)$.*

Доказательство. Действительно,

$$\|(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} = \|\lambda^{-m}\widehat{K}(\lambda)^{-1}(I - \lambda^{-m}A\widehat{K}(\lambda)^{-1})^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{2c^{-1}}{|\lambda|^{m-\chi}}$$

при достаточно больших $|\lambda|$, т. е. при выборе достаточно большого $a_0 > 0$. □

Замечание 3.1. Подробно задача (1.1), (1.2) с ограниченным оператором A исследована в работе [17].

Лемма 3.2. *Пусть* $K \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ *удовлетворяет условию* $(\widehat{K})$, $A \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0,a_0)$, $\gamma \in \mathbb{R}$,

$$Z_\gamma(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \mu^{m-1-\gamma}(\lambda^m\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}e^{\mu t}d\mu, \quad t \in \mathbb{R}_+,$$

$\Gamma = \Gamma_+\cup\Gamma_-\cup\Gamma_0$, $\Gamma_\pm = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a_0+re^{\pm i\theta},\ r \in [\delta,\infty)\}$, $\Gamma_0 = \{\mu \in \mathbb{C} : \mu = a_0+\delta e^{i\varphi},\ \varphi \in (-\theta,\theta)\}$ *при некоторых* $\delta > 0$, $\theta \in (\pi/2,\theta_0)$. *Тогда* Z_γ *допускает аналитическое продолжение в сектор* $\Sigma_{\theta_0-\pi/2}$ *и при всех* $\theta \in (\pi/2,\theta_0)$ *существует такое* $C_\gamma = C_\gamma(\theta)$, *что для всех* $t \in \Sigma_{\theta-\pi/2}$

$$\|Z_\gamma(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant C_\gamma(\theta)e^{a_0\mathrm{Re}t}(|t|^{-1}+a_0)^{\chi-\gamma}, \quad \gamma \leqslant \chi-1, \tag{3.1}$$

$$\|Z_\gamma(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant C_\gamma(\theta)e^{a_0\mathrm{Re}t}|t|^{\gamma-\chi}, \quad \gamma > \chi-1. \tag{3.2}$$

При этом

$$\frac{d^k}{dt^k}Z_\gamma = Z_{\gamma-k}, \quad k \in \mathbb{N}, \tag{3.3}$$

$$\lim_{t\to 0+} Z_\gamma(t) = 0 \ \ \text{при } \gamma > \chi. \tag{3.4}$$

Доказательство. Для $\varepsilon \in (0,\theta-\pi/2)$, $t \in \Sigma_{\theta-\pi/2-\varepsilon}$, $\mu \in \Gamma_\pm$ имеем

$$\mathrm{Re}(\mu t) = a_0\mathrm{Re}t + r|t|\cos(\arg t \pm \theta) \leqslant a_0\mathrm{Re}t - r|t|\sin\varepsilon,$$

а в случае $\mu \in \Gamma_0$ $\mathrm{Re}(\mu t) = a_0\mathrm{Re}t+\delta|t|\cos(\arg t\pm\varphi)$, поэтому в силу определения 3.1 при $\gamma \leqslant \chi-1$

$$\|Z_\gamma(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{Ce^{a_0\mathrm{Re}t}}{\pi}\int\limits_\delta^\infty (r+a_0)^{\chi-\gamma-1}e^{-r|t|\sin\varepsilon}dr + \frac{Ce^{a_0\mathrm{Re}t}\delta(\delta+a_0)^{\chi-\gamma-1}}{2\pi}\int\limits_{-\theta}^{\theta} e^{\delta|t|\cos(\arg t\pm\varphi)}d\varphi \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Ce^{a_0\mathrm{Re}t}}{\pi}\int\limits_\delta^\infty (r+a_0)^{\chi-\gamma-1}e^{-r|t|\sin\varepsilon}dr + \frac{Ce^{\delta|t|+a_0\mathrm{Re}t}(\delta+a_0)^{\chi-\gamma}\theta}{\pi}.$$

При $\gamma > \chi-1$ аналогичная оценка будет иметь следующий вид:

$$\|Z_\gamma(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{Ce^{a_0\mathrm{Re}t}c^{\chi-\gamma-1}}{\pi}\int\limits_\delta^\infty r^{\chi-\gamma-1}e^{-r|t|\sin\varepsilon}dr + \frac{Ce^{\delta|t|+a_0\mathrm{Re}t}c^{\chi-\gamma-1}\delta^{\chi-\gamma}\theta}{\pi}.$$

При этом использовано неравенство $|\mu| \geqslant c|\mu-a_0|$, очевидно справедливое при некотором $c = c(\theta) > 0$ для всех $\mu \in \Gamma$. Таким образом, при любом $\gamma \in \mathbb{R}$ соответствующий интеграл сходится равномерно на любом компактном подмножестве сектора $\Sigma_{\theta-\pi/2}$, а значит, определяет в нем аналитическую функцию переменной t. Отсюда сразу следуют равенства (3.3).

Возьмем $\delta = |t|^{-1}$, тогда при $\gamma \leqslant \chi-1$

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\mu^{m-1-\gamma}(\lambda^m\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}e^{\mu t}d\mu\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{Ce^{1+a_0\mathrm{Re}t}(|t|^{-1}+a_0)^{\chi-\gamma}\theta}{\pi},$$

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\pm}\mu^{m-1-\gamma}(\lambda^m\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}e^{\mu t}d\mu\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{Ce^{a_0\mathrm{Re}t}|t|^{-1}}{2\pi}\int\limits_1^\infty (r|t|^{-1}+a_0)^{\chi-\gamma-1}e^{-r\sin\varepsilon}dr \leqslant$$

$$\leqslant \frac{Ce^{a_0\mathrm{Re}t}(|t|^{-1}+a_0)^{\chi-\gamma}}{2\pi}\int\limits_1^\infty r^{\chi-\gamma-1}e^{-r\sin\varepsilon}dr.$$

Таким образом, выполняется неравенство (3.1) при

$$C_\gamma(\theta-\varepsilon) = \frac{C(\theta)\theta e}{\pi} + \frac{C(\theta)}{\pi}\int\limits_1^\infty r^{\chi-\gamma-1}e^{-r\sin\varepsilon}dr.$$

Переобозначим $\theta_1 = \theta - \varepsilon \in (\pi/2, \theta_0)$, выберем $\varepsilon = \dfrac{\theta_0 - \theta_1}{2}$, тогда $\theta = \theta_1 + \varepsilon = \dfrac{\theta_0 + \theta_1}{2}$. Вернувшись к обозначению $\theta := \theta_1$, получим

$$C_\gamma(\theta) = \frac{C(\frac{\theta_0+\theta}{2})(\theta_0+\theta)e}{2\pi} + \frac{C(\frac{\theta_0+\theta}{2})}{\pi}\int\limits_1^\infty r^{\chi-\gamma-1}e^{-r\sin\varepsilon}dr.$$

При $\delta = |t|^{-1}$, $\gamma > \chi - 1$ получим неравенства

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_0}\mu^{m-1-\gamma}(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}e^{\mu t}d\mu\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{Ce^{1+a_0\mathrm{Re}t}c^{\chi-\gamma-1}|t|^{\gamma-\chi}\theta}{\pi},$$

$$\left\|\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_\pm}\mu^{m-1-\gamma}(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}e^{\mu t}d\mu\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{Ce^{a_0\mathrm{Re}t}c^{\chi-\gamma-1}|t|^{\gamma-\chi}}{2\pi}\int\limits_1^\infty r^{\chi-\gamma-1}e^{-r\sin\varepsilon}dr,$$

из которых следует неравенство (3.2) при

$$C_\gamma(\theta-\varepsilon) = \frac{C(\theta)c(\theta)^{\chi-\gamma-1}\theta e}{\pi} + \frac{C(\theta)c(\theta)^{\chi-\gamma-1}}{\pi}\int\limits_1^\infty r^{\chi-\gamma-1}e^{-r\sin\varepsilon}dr.$$

Рассуждая, как в конце предыдущего раздела, получим

$$C_\gamma(\theta) = \frac{C(\frac{\theta_0+\theta}{2})c(\frac{\theta_0+\theta}{2})^{\chi-\gamma-1}(\theta_0+\theta)e}{2\pi} + \frac{C(\frac{\theta_0+\theta}{2})c(\frac{\theta_0+\theta}{2})^{\chi-\gamma-1}}{\pi}\int\limits_1^\infty r^{\chi-\gamma-1}e^{-r\sin\varepsilon}dr.$$

Из (3.2) следуют равенства (3.4). □

Теорема 3.1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $K \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ удовлетворяет условию $(\widehat{K})$.*

(i) *Если при некотором $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\}$ существует аналитическое k-разрешающее семейство операторов типа $(\theta_0 - \pi/2, a_0, -\chi + k)$ для уравнения (1.2), то $A \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0, a_0)$.*

(ii) *Если $A \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0, a_0)$, для любых $t > 0$, $x \in D_A$ $K(t)Ax = AK(t)x$, то при каждом $k = 0, 1, \ldots, m-1$ существует единственное аналитическое k-разрешающее семейство операторов $\{S_k(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ типа $(\theta_0 - \pi/2, \max\{a_0, 0\}, -\chi + k)$ уравнения (1.2). При этом $S_k \equiv Z_k \equiv J^k Z_0$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$.*

Доказательство. Утверждение (i) сразу следует из леммы 1.1 и теоремы 2.1.

Если $A \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0, a_0)$, то в силу леммы 1.1 и теоремы 2.1 при $\mathcal{X} = \mathcal{L}(\mathcal{Z})$ семейство операторов $\{Z_l(t) \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ при $l = 0, 1, \ldots, m-1$ аналитично и имеет тип $(\theta_0 - \pi/2, a_0, l - \chi)$. Отсюда следует условие (i) определения 1.1. Из коммутирования операторов $K(t)$ и A при всех $t > 0$ следует коммутирование $\widehat{K}(\lambda)$ и A, а значит, и коммутирование операторов A и $(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}$. Учитывая вид $Z_l(t)$, получаем условие (ii) определения 1.1.

Поскольку при $l = 0, 1, \ldots, m-1$ $\widehat{J^K Z_l(t)} = \widehat{K}(\lambda)\lambda^{m-1-l}(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}$, то при $z_l \in D_A$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$

$$D^k J^K Z_l(t)z_l = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda^{m-1-l+k}\widehat{K}(\lambda)(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda z_l =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda^{k-1-l}e^{\lambda t}d\lambda z_l + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda^{k-1-l}(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda A z_l,$$

$$\|\lambda^{k-1-l}(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{C_1}{|\lambda|^{m-\chi-k+1+l}}, \quad m - \chi - k + 1 + l \geqslant 2 - \chi > 1,$$

поэтому $D^{k,K}Z_l(0)z_l = 0$, $k \in \{0, 1, \ldots, m-1\} \setminus \{l\}$, $D^{l,K}Z_l(0)z_l = z_l$. Кроме того, при $t > 0$

$$D^m J^K Z_l(t)z_l = D^m\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda^{m-1-l}\widehat{K}(\lambda)(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}e^{\lambda t}z_l d\lambda =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \lambda^{2m-1-l} \widehat{K}(\lambda)(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} e^{\lambda t} z_l d\lambda = AZ_l(t) z_l,$$

так как $m - 1 - l \geqslant 0$. Таким образом, $\{Z_l \in \mathcal{L}(\mathcal{Z}) : t > 0\}$ — l-разрешающее семейство уравнения (1.2). По лемме 1.2 получаем требуемое. □

Замечание 3.2. Аналогичное теореме 3.1 утверждение для уравнений первого порядка называется теоремой Соломяка—Иосиды о порождении аналитических полугрупп операторов [2,4,5,9]. Эта теорема была обобщена на случай эволюционных интегральных уравнений [24], уравнений с дробной производной Герасимова—Капуто [12], Римана—Лиувилля [1, 7], Джрбашяна—Нерсесяна [19], с распределенными производными [8, 16, 26], для уравнений с несколькими дробными производными [13, 20].

Следствие 3.1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, функция ядра $K \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ удовлетворяет условию $(\widehat{K})$, $A \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0, a_0)$, для любых $t > 0$, $x \in D_A$ $K(t)Ax = AK(t)x$. Тогда для любых $z_0, z_1, \dots, z_{m-1} \in D_A$ функция*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t) z_k$$

является единственным решением задачи (1.1), (1.2). *Это решение аналитично в* $\Sigma_{\theta_0 - \pi/2}$.

Доказательство. После теоремы 3.1 остается доказать единственность решения. Если существует два решения y_1, y_2 задачи (1.1), (1.2), то их разность $y = y_1 - y_2$ является решением уравнения (1.2), удовлетворяющим начальным условиям

$$D^{k,K} y(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1. \tag{3.5}$$

Переопределим y на (T, ∞) при некотором $T > 0$ нулем. Полученная функция y_T удовлетворяет уравнению (1.2) на положительной полуоси, кроме, возможно, точки T. Подействуем преобразованием Лапласа на обе части уравнения (1.2), учитывая условия (3.5), и получим равенство $\lambda^m \widehat{K}(\lambda) \widehat{y}_T(\lambda) = A \widehat{y}_T(\lambda)$. Так как существует ограниченный оператор $(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}$ при каждом $\lambda \in S_{\theta_0, a_0}$, имеем $\widehat{y}_T(\lambda) = (\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} 0 \equiv 0$. Поэтому $y_T \equiv 0$. В силу произвольности $T > 0$ получаем $y \equiv 0$ на $\mathbb{R}_+$, и решение задачи (1.1), (1.2) единственно. □

4. Задача типа Коши для неоднородного уравнения

Рассмотрим уравнение

$$D^{m,K} z(t) = Az(t) + f(t), \quad t \in (0, T], \tag{4.1}$$

где $f \in C([0, T]; \mathcal{Z})$. Функция $z \in C((0, T]; D_A)$ называется решением задачи типа Коши

$$D^{k,K} z(0) = z_k, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{4.2}$$

для уравнения (4.1), если $J^K z \in C^{m-1}([0, T]; \mathcal{Z}) \cap C^m((0, T]; \mathcal{Z})$, равенство (4.1) справедливо при всех $t \in (0, T]$ и выполняются условия (4.2).

Лемма 4.1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, $K \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ удовлетворяет условию $(\widehat{K})$, $A \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0, a_0)$, для любых $t > 0$, $x \in D_A$ выполнено $K(t)Ax = AK(t)x$, $t^\beta K(t) \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ при некотором $\beta < 2 - \chi$, $f \in C([0, T]; D_A)$. Тогда функция*

$$z_f(t) = \int_0^t Z_{m-1}(t-s) f(s) ds \tag{4.3}$$

является единственным решением задачи

$$D^{k,K} z(0) = 0, \quad k = 0, 1, \dots, m-1, \tag{4.4}$$

для уравнения (4.1).

Доказательство. В силу коммутирования операторов $K(t)$ и A, а значит, и операторов $(\lambda^m\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}$ и A, а также с учетом замкнутости оператора A и условия $f \in C([0,T];D_A)$ сходится интеграл

$$\int_0^t AZ_{m-1}(t-s)f(s)ds = \int_0^t Z_{m-1}(t-s)Af(s)ds.$$

Действительно, с учетом теоремы 3.1

$$\left\|\int_0^t Z_{m-1}(t-s)Af(s)ds\right\|_{\mathcal{Z}} \leqslant Ce^{|a|t}\|f\|_{C([0,T];D_A)}\frac{t^{\beta+1}}{\beta+1},$$

поэтому $z_f(t) \in D_A$ и $Az_f(t) = z_{Af}(t)$ при $t > 0$.

Известно, что $D^kZ_{m-1}(0) = 0$ при всех $k = 0,1,\ldots,m-2$, поэтому

$$D^kz_f(t) = \int_0^t D^kZ_{m-1}(t-s)f(s)ds = \int_0^t Z_{m-1-k}(t-s)f(s)ds, \quad k = 0,1,\ldots,m-1,$$

и в силу леммы 3.2

$$\|D^kz_f(t)\|_{\mathcal{Z}} \leqslant C_{m-1-k}e^{|a|T}\|f\|_{C([0,T];\mathcal{Z})}\int_0^t (t-s)^{-\chi+m-1-k}ds = c\|f\|_{C([0,T];\mathcal{Z})}t^{m-k-\chi} \to 0 \tag{4.5}$$

при $t \to 0+$ для $k = 0,1,\ldots,m-1$, так как $\chi < 1$.

Далее, при $k = 0,1,\ldots,m$

$$D^{k,K}z_f(t) = D^k\int_0^t K(s)z_f(t-s)ds = \int_0^t K(s)D^kz_f(t-s)ds = J^KD^kz_f(t),$$

в силу неравенства (4.5) для $k = 0,1,\ldots,m-1$

$$\|D^{k,K}z_f(t)\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \int_0^t \|K(s)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\|D^kz_f(t-s)\|_{\mathcal{Z}}ds \leqslant C\|f\|_{C([0,T];\mathcal{Z})}\int_0^t (t-s)^{m-k-\chi}s^{-\beta}ds \leqslant$$

$$\leqslant C\|f\|_{C([0,T];\mathcal{Z})}t^{m-k+1-\chi-\beta}B(m-k+1-\chi,1-\beta) \leqslant C_1t^{2-\chi-\beta} \to 0$$

при $t \to 0+$, поскольку $\beta < 2-\chi$. Поэтому

$$\widehat{D^{m,K}z_f} = \lambda^m\widehat{K}(\lambda)\widehat{z_f}(\lambda) = \lambda^m\widehat{K}(\lambda)(\lambda^m\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}\widehat{f}(\lambda) = \widehat{f}(\lambda) + A(\lambda^m\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}\widehat{f}(\lambda).$$

Отсюда с учетом замкнутости A получаем

$$D^{m,K}z_f(t) - f(t) = \mathfrak{L}^{-1}[A(\lambda^m\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}\widehat{f}(\lambda)] = Az_f(t).$$

Единственность доказывается так же, как для однородного уравнения. □

Из следствия 3.1 и леммы 4.1 сразу получаем теорему об однозначной разрешимости.

Теорема 4.1. *Пусть $m \in \mathbb{N}$, функция $K \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ удовлетворяет условию $(\widehat{K})$, $A \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0,a_0)$, для любых $t > 0$, $x \in D_A$ выполнено $K(t)Ax = AK(t)x$, $t^\beta K(t) \in C([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ при некотором $\beta < 2-\chi$, $f \in C([0,T];D_A)$, $z_k \in D_A$, $k = 0,1,\ldots,m-1$. Тогда существует единственное решение задачи* (4.1), (4.2)*, при этом оно имеет вид*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t)z_k + \int_0^t Z_{m-1}(t-s)f(s)ds.$$

При $\gamma \in (0,1]$ обозначим через $C^\gamma([0,T];\mathcal{Z})$ множество всех функций $f:[0,T] \to \mathcal{Z}$, удовлетворяющих условию Гельдера:

$$\exists C > 0 \quad \forall s,t \in [0,T] \quad \|f(s)-f(t)\|_{\mathcal{Z}} \leqslant C|s-t|^\gamma.$$

Лемма 4.2. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $K \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ *удовлетворяет условию* $(\widehat{K})$, $A \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0, a_0)$, *для любых* $t > 0$, $x \in D_A$ $K(t)Ax = AK(t)x$, $t^\beta K(t) \in C([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ *при некотором* $\beta < 2-\chi$,

$$\forall\theta \in (\pi/2, \theta_0)\ \exists C = C(\theta) > 0\ \forall\lambda \in S_{\theta,a_0}\ \|\widehat{K}(\lambda)(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \frac{C(\theta)}{|\lambda|^m}, \tag{4.6}$$

$f \in C^\gamma([0,T];\mathcal{Z})$ *при некотором* $\gamma \in (0,1]$. *Тогда функция* (4.3) *является единственным решением задачи* (4.1), (4.4).

Доказательство. Так как оператор A замкнут, при $t > 0$

$$AZ_{m-1}(t) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma A(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \lambda^m\widehat{K}(\lambda)(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}e^{\lambda t}d\lambda,$$

при этом $\|\lambda^m\widehat{K}(\lambda)(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant C$. Поэтому $\|AZ_{m-1}(t)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} = O(t^{-1})$ при $t \to 0+$. Тогда при $s, t \in (0,T]$

$$\|AZ_{m-1}(t-s)(f(s) - f(t))\|_{\mathcal{Z}} \leqslant C_1|t-s|^{\gamma-1}, \tag{4.7}$$

$$\int\limits_0^t AZ_{m-1}(t-s)f(s)ds = \int\limits_0^t AZ_{m-1}(t-s)(f(s)-f(t))ds + \int\limits_0^t D^{m,K}Z_{m-1}(t-s)f(t)ds.$$

Предпоследний интеграл сходится в силу неравенства (4.7), последний — поскольку

$$\int\limits_0^t D^{m,K}Z_{m-1}(t-s)f(t)ds = (D^{m-1,K}Z_{m-1}(t) - D^{m-1,K}Z_{m-1}(0))f(t) = D^{m-1,K}Z_{m-1}(t)f(t) - f(t).$$

Таким образом, с учетом замкнутости оператора A получаем, что $z_f(t) \in D_A$ при $t > 0$.

Остальная часть доказательства такая же, как в лемме 4.2. ☐

Следствие 3.1 и лемма 4.2 влекут следующий результат.

Теорема 4.2. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, *функция* $K \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ *удовлетворяет условию* $(\widehat{K})$, $A \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0, a_0)$, *для любых* $t > 0$, $x \in D_A$ $K(t)Ax = AK(t)x$, $t^\beta K(t) \in C([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ *при некотором* $\beta < 2-\chi$, *выполняется условие* (4.6), $f \in C^\gamma([0,T];\mathcal{Z})$ *при некотором* $\gamma \in (0,1]$, $z_k \in D_A$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$. *Тогда существует единственное решение задачи* (4.1), (4.2), *при этом оно имеет вид*

$$z(t) = \sum_{k=0}^{m-1} Z_k(t)z_k + \int\limits_0^t Z_{m-1}(t-s)f(s)ds.$$

5. Теорема о возмущении

Обозначим через $C_A(\theta)$ максимум из констант $C(\theta)$ из определения 3.1 и условия (4.6).

Теорема 5.1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, *функция* $K \in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ *удовлетворяет условию* $(\widehat{K})$, $A \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0, a_0)$, *для любых* $t > 0$, $x \in D_A$ $K(t)Ax = AK(t)x$, *выполняется условие* (4.6), $B \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, *для всех* $x \in D_A \subset D_B$

$$\|Bx\|_{\mathcal{Z}} \leqslant \beta\|Ax\|_{\mathcal{Z}} + \delta\|x\|_{\mathcal{Z}}, \tag{5.1}$$

где $\beta \in [0,1)$, $\delta \geqslant 0$, *для всех* $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$ *выполнено* $\beta\,(1 + C_A(\theta)) \leqslant q$ *при некотором* $q \in (0,1)$. *Тогда* $A + B \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0, a_1)$ *при достаточно большом* $a_1 > a_0$.

Если к тому же $\|\widehat{K}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant C_K|\lambda|^{-\chi}$ *в секторе* S_{θ_0,a_1}, *то для* $A + B$ *выполняется условие* (4.6).

Доказательство. Выберем $l \geqslant 1$, $\lambda \in S_{\theta,la_0} \subset S_{\theta,a_0}$ при $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, тогда из (5.1) следует, что

$$\|B(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant \beta\|A(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} + \delta\|(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} \leqslant$$

$$\leqslant \beta\left\|\lambda^m\widehat{K}(\lambda)(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} - I\right\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})} + \frac{\delta C_A(\theta)}{|\lambda|^{m-\chi}} \leqslant \beta\,(1 + C_A(\theta)) + \frac{\delta C_A(\theta)}{|\lambda|^{m-\chi}} \leqslant q + \frac{\delta C_A(\theta)}{(la_0\sin\theta_0)^{m-\chi}} < 1$$

при достаточно большом l. Поэтому

$$(\lambda^m\widehat{K}(\lambda)-A-B)^{-1}=(\lambda^m\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}(I-B(\lambda^m\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1})^{-1}=$$

$$=(\lambda^m\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}[B(\lambda^m\widehat{K}(\lambda)-A)^{-1}]^k,$$

$$\|(\lambda^m\widehat{K}(\lambda)-A-B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\leqslant\frac{C_A(\theta)}{\left(1-q-\frac{\delta C_A(\theta)}{(la_0\sin\theta_0)^{m-\chi}}\right)|\lambda|^{m-\chi}}.$$

Следовательно, $A+B\in\mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0,a_1)$ при $a_1=la_0$. При выполнении условия $\|\widehat{K}(\lambda)\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\leqslant C_K|\lambda|^{-\chi}$ имеем

$$\|\widehat{K}(\lambda)(\lambda^m\widehat{K}(\lambda)-A-B)^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}\leqslant\frac{C_KC_A(\theta)}{\left(1-q-\frac{\delta C_A(\theta)}{(la_0\sin\theta_0)^{m-\chi}}\right)|\lambda|^{m}}.$$

□

Замечание 5.1. Любой оператор $B\in\mathcal{L}(\mathcal{Z})$ удовлетворяет условию (5.1) при $\beta=0$, $\delta=\|B\|_{\mathcal{L}(\mathcal{Z})}$.

Замечание 5.2. Теорема 5.1 обобщает теорему о порождении инфинитезимальных генераторов аналитических полугрупп операторов [3]. Аналогичные результаты для уравнений с распределенными производными получены в работах [15,26], а для уравнений с производной Джрбашяна—Нерсесяна — в [19].

6. Приложение к начально-краевой задаче для системы уравнений

Возьмем $b_{ij}\in\mathbb{R}$, $m_{ij}-1<\alpha_{ij}\leqslant m_{ij}\in\mathbb{N}$, $i,j=1,2$, $m:=\max\limits_{i,j=1,2}m_{ij}$,

$$K(s):=\begin{pmatrix} b_{11}\dfrac{s^{m-\alpha_{11}-1}}{\Gamma(m-\alpha_{11})} & b_{12}\dfrac{s^{m-\alpha_{12}-1}}{\Gamma(m-\alpha_{12})}\\ b_{21}\dfrac{s^{m-\alpha_{21}-1}}{\Gamma(m-\alpha_{21})} & b_{22}\dfrac{s^{m-\alpha_{22}-1}}{\Gamma(m-\alpha_{22})}\end{pmatrix}, \tag{6.1}$$

тогда

$$D^{m,K}=\begin{pmatrix} b_{11}D^{\alpha_{11}} & b_{12}D^{\alpha_{12}}\\ b_{21}D^{\alpha_{21}} & b_{22}D^{\alpha_{22}}\end{pmatrix}.$$

В ограниченной области $\Omega\subset\mathbb{R}^d$ с гладкой границей $\partial\Omega$ заданы операторы

$$(\Lambda u)(s):=\sum_{|q|\leqslant 2r}a_q(s)\frac{\partial^{|q|}u(s)}{\partial s_1^{q_1}\partial s_2^{q_2}\ldots\partial s_d^{q_d}},\quad a_q\in C^\infty(\overline{\Omega}),$$

$$(B_lu)(s):=\sum_{|q|\leqslant r_l}b_{lq}(s)\frac{\partial^{|q|}u(s)}{\partial s_1^{q_1}\partial s_2^{q_2}\ldots\partial s_d^{q_d}},\quad b_{lq}\in C^\infty(\partial\Omega),\quad l=1,2,\ldots,r,$$

где $q=(q_1,q_2,\ldots,q_d)\in\mathbb{N}_0^d$, $\mathbb{N}_0:=\mathbb{N}\cup\{0\}$, $|q|=q_1+\cdots+q_d$. Предположим, что пучок операторов $\Lambda,B_1,B_2,\ldots,B_r$ регулярно эллиптичен (см. определение в [6]) и определим оператор $\Lambda_1\in\mathcal{C}l(L_2(\Omega))$ с областью определения

$$D_{\Lambda_1}=H^{2r}_{\{B_l\}}(\Omega):=\{v\in H^{2r}(\Omega):B_lv(s)=0,\,l=1,2,\ldots,r,\,s\in\partial\Omega\},$$

действующий по правилу $\Lambda_1u:=\Lambda u$. Пусть оператор Λ_1 самосопряжен, тогда его спектр $\sigma(\Lambda_1)$ действителен, дискретен и конечнократен [6]. Предположим, кроме того, что спектр $\sigma(\Lambda_1)$ ограничен справа и не содержит нуля, обозначим через $\{\varphi_k:k\in\mathbb{N}\}$ ортонормированную в $L_2(\Omega)$ систему собственных функций оператора Λ_1, занумерованную в порядке невозрастания соответствующих собственных значений $\{\lambda_k:k\in\mathbb{N}\}$ с учетом их кратностей.

Положим $\mathcal{Z}=L_2(\Omega)\times L_2(\Omega)$, $A=\begin{pmatrix}\Lambda_1 & 0\\ 0 & \Lambda_1\end{pmatrix}\in\mathcal{C}l(L_2(\Omega)\times L_2(\Omega))$, $D_A=D_{\Lambda_1}\times D_{\Lambda_1}$, ядро $K(s)$ задано формулой (6.1).

Лемма 6.1. *Пусть в условиях данного раздела* $b_{11} > 0$, $b_{22} > 0$, $b_{21} = 0$, $m_{11} = m_{22} = m \in \{1, 2\}$, $\alpha_{12} \leqslant \max\{\alpha_{11}, \alpha_{12}\} < 2$, $\alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{12} < 2$. *Тогда* $K \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ *удовлетворяет условию* $(\widehat{K})$; $A \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0, a_0)$ *при некоторых* $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geqslant 0$, $\chi < 1$; $t^\beta K(t) \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ *при некотором* $\beta < 2-\chi$; *выполняется условие* (4.6); *для любых* $t > 0$, $x \in D_A$ $K(t)Ax = AK(t)x$.

Доказательство. Из вида оператора A и того факта, что A действует на пространственные переменные, а $K(s)$ — на временные, следует коммутирование A и $K(s)$.

Заметим, что

$$\widehat{K}(\lambda) := \begin{pmatrix} b_{11}\lambda^{\alpha_{11}-m} & b_{12}\lambda^{\alpha_{12}-m} \\ 0 & b_{22}\lambda^{\alpha_{22}-m} \end{pmatrix},$$

поэтому выполняется условие $(\widehat{K})$ при любых $\theta_K \in (\pi/2, \pi)$, $a_K \geqslant 0$. Обозначим $\delta := \max\{\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{12}\} < 2$, возьмем $\theta_0 \in (\pi/2, \pi/\delta)$, $a_0 = \lambda_1 + 1$, где λ_1 — собственное значение оператора Λ_1. Тогда при $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, $\lambda \in S_{\theta,a_0}$

$$\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A = \begin{pmatrix} b_{11}\lambda^{\alpha_{11}} - \Lambda_1 & b_{12}\lambda^{\alpha_{12}} \\ 0 & b_{22}\lambda^{\alpha_{22}} - \Lambda_1 \end{pmatrix},$$

Обозначим $D_k := (b_{11}\lambda^{\alpha_{11}} - \lambda_k)(b_{22}\lambda^{\alpha_{22}} - \lambda_k)$, тогда

$$(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} (b_{22}\lambda^{\alpha_{22}} - \lambda_k)/D_k & -b_{12}\lambda^{\alpha_{12}}/D_k \\ 0 & (b_{11}\lambda^{\alpha_{11}} - \lambda_k)/D_k \end{pmatrix} \langle\cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} 1/(b_{11}\lambda^{\alpha_{11}} - \lambda_k) & -b_{12}\lambda^{\alpha_{12}}/D_k \\ 0 & 1/(b_{22}\lambda^{\alpha_{22}} - \lambda_k) \end{pmatrix} \langle\cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k,$$

$$\|(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L_2(\Omega))} \leqslant \frac{C\sin^{-1}(\delta\theta)}{|\lambda|^\varepsilon},$$

где $\varepsilon := \min\{\alpha_{11}, \alpha_{22}, \alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{12}\}$. При этом $\chi = m - \varepsilon < 1$ в силу условий на α_{ij}. Таким образом, $A \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0, a_0)$.

Далее

$$\widehat{K}(\lambda)(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \begin{pmatrix} b_{11}\lambda^{\alpha_{11}-m}/(b_{11}\lambda^{\alpha_{11}} - \lambda_k) & -b_{12}\lambda^{\alpha_{12}-m}\lambda_k/D_k \\ 0 & b_{22}\lambda^{\alpha_{22}-m}/(b_{22}\lambda^{\alpha_{22}} - \lambda_k) \end{pmatrix} \langle\cdot, \varphi_k\rangle\varphi_k.$$

Имеем при $\lambda \in S_{\theta,a_0}$

$$\left|\frac{b_{11}\lambda^{\alpha_{11}-m}}{b_{11}\lambda^{\alpha_{11}} - \lambda_k}\right| = \frac{|\lambda|^{-m}}{|1 - b_{11}^{-1}\lambda_k\lambda^{-\alpha_{11}}|} \leqslant \frac{\sin^{-1}(\alpha_{11}\theta)}{|\lambda|^m}, \qquad \left|\frac{b_{22}\lambda^{\alpha_{22}-m}}{b_{22}\lambda^{\alpha_{22}} - \lambda_k}\right| \leqslant \frac{\sin^{-1}(\alpha_{22}\theta)}{|\lambda|^m}.$$

По условиям леммы $\alpha_{12} \leqslant \alpha_{11}$ или $\alpha_{12} \leqslant \alpha_{22}$. В первом случае

$$\left|\frac{-b_{12}\lambda^{\alpha_{12}-m}\lambda_k}{(b_{11}\lambda^{\alpha_{11}} - \lambda_k)(b_{22}\lambda^{\alpha_{22}} - \lambda_k)}\right| = \frac{|b_{12}||\lambda|^{\alpha_{12}-m}}{|b_{11}\lambda^{\alpha_{11}} - \lambda_k||b_{22}\lambda^{\alpha_{22}}\lambda_k^{-1} - 1|} \leqslant \frac{C\sin^{-1}(\delta\theta)}{|\lambda|^{m+\alpha_{11}-\alpha_{12}}} \leqslant \frac{C_1(\theta)}{|\lambda|^m}.$$

Во втором случае изменения в рассуждениях очевидны, в итоге

$$\|\widehat{K}(\lambda)(\lambda^m\widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L_2(\Omega))} \leqslant \frac{C_2(\theta)}{|\lambda|^m},$$

т. е. выполняется условие (4.6).

Понятно, что $t^\beta K(t) \in C([0, T]; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ при

$$\beta = 1 - m + \max\{\alpha_{11}, \alpha_{22}\} = 2 - \chi - 1 - \min\{\alpha_{11}, \alpha_{22}\} + \max\{\alpha_{11}, \alpha_{22}\} < 2 - \chi,$$

так как $\alpha_{ii} \in (m - 1, m]$, $i = 1, 2$. $\square$

Пусть для определенности $m = 2$, рассмотрим начально-краевую задачу

$$b_{11}J_t^{2-\alpha_{11}}v(\xi, 0) + b_{12}J_t^{2-\alpha_{12}}w(\xi, 0) = v_0(\xi),\ \xi \in \Omega, \tag{6.2}$$

$$b_{22}J_t^{2-\alpha_{22}}w(\xi, 0) = w_0(\xi),\ \xi \in \Omega, \tag{6.3}$$

$$b_{11}D_t^{\alpha_{11}-1}v(\xi, 0) + b_{12}D_t^{\alpha_{12}-1}w(\xi, 0) = v_1(\xi),\ \xi \in \Omega, \tag{6.4}$$

$$b_{22}D_t^{\alpha_{22}-1}w(\xi, 0) = w_1(\xi),\ \xi \in \Omega, \tag{6.5}$$

$$B_l v(\xi,t) = B_l w(\xi,t) = 0, \ \ l = 1,2,\dots,r, \ \ (\xi,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \tag{6.6}$$

$$b_{11} D_t^{\alpha_{11}} v(\xi,t) + b_{12} D_t^{\alpha_{12}} w(\xi,t) = \Lambda v(\xi,t) + a_1(\xi) v(\xi,t) + a_2(\xi) w(\xi,t) + g(\xi,t), \ \ (\xi,t) \in \Omega \times (0,T], \tag{6.7}$$

$$b_{22} D_t^{\alpha_{22}} w(\xi,t) = \Lambda w(\xi,t) + a_3(\xi) v(\xi,t) + a_4(\xi) w(\xi,t) + h(\xi,t), \ \ (\xi,t) \in \Omega \times (0,T]. \tag{6.8}$$

Здесь D_t^δ — дробная производная Римана—Лиувилля порядка $\delta \geqslant 0$ по переменной t или дробный интеграл Римана—Лиувилля порядка $\delta < 0$ по переменной t. Эта задача путем произведенного выше выбора пространства $\mathcal{Z}$ и операторов A, $K(s)$ редуцируется к задаче (4.1), (4.2) с $f(t) = (g(\cdot,t), h(\cdot,t))$, $z_k = (v_k(\cdot), w_k(\cdot))$, $k = 0,1$.

Теорема 6.1. *Пусть* $b_{11} > 0$, $b_{22} > 0$, $b_{21} = 0$, $m_{11} = m_{22} = 2$, $\alpha_{12} \leqslant \max\{\alpha_{11}, \alpha_{12}\} < 2$, $\alpha_{11} + \alpha_{22} - \alpha_{12} < 2$, $a_i \in L_2(\Omega)$, $i = 1,2,3,4$, $v_0, v_1, w_0, w_1 \in D_{\Lambda_1}$, $g, h \in C([0,T]; D_{\Lambda_1}) \cap C^\gamma([0,T]; L_2(\Omega))$, $\gamma \in (0,1]$. *Тогда существует единственное решение задачи* (6.2)–(6.8).

Доказательство. В силу леммы 6.1 $A \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0, a_0)$. Оператор B, задаваемый матрицей

$$B = \begin{pmatrix} a_1(\xi) & a_2(\xi) \\ a_3(\xi) & a_4(\xi) \end{pmatrix},$$

ограничен в $L_2(\Omega) \times L_2(\Omega)$, поэтому по теореме 5.1 $A + B \in \mathcal{A}_{m,K,\chi}(\theta_0, a_1)$ при некотором $a_1 > 0$. В силу леммы 6.1 выполняются все условия теорем 4.1, 4.2, из которых следует однозначная разрешимость исследуемой задачи. □

Замечание 6.1. Понятно, что без всяких проблем можно добавить, например, интегральные по пространственным переменным операторы с ядрами из $L_2(\Omega\times\Omega)$ в уравнения (6.7), (6.8) и аналогично с использованием леммы 6.1 и теорем 5.1, 4.1, 4.2 доказать однозначную разрешимость полученной задачи.

7. Начально-краевая задача для уравнения с производной Прабхакара

Напомним определение обобщенной функции Миттаг-Леффлера $E^\varepsilon_{\alpha,\delta}$ и ядра Прабхакара $e^\varepsilon_{\alpha,\delta,\omega}$ (см. [23]):

$$E^\varepsilon_{\alpha,\delta}(t) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\varepsilon+n) t^n}{\Gamma(\varepsilon)\Gamma(\alpha n + \delta) n!}, \quad e^\varepsilon_{\alpha,\delta,\omega}(t) = t^{\delta-1} E^\varepsilon_{\alpha,\delta}(\omega t^\alpha).$$

Пусть $\alpha, \varepsilon, \omega \in \mathbb{R}$, для определенности $1 < \delta \leqslant 2$. Рассмотрим начально-краевую задачу для уравнения с производной Прабхакара по времени

$$\frac{\partial^k}{\partial t^k} \int_0^t (t-s)^{1-\delta} E^\varepsilon_{\alpha,2-\delta}(\omega(t-s)^\alpha) v(\xi,s)\,ds \bigg|_{t=0} = v_k(\xi), \quad k = 0,1, \ \xi \in \Omega, \tag{7.1}$$

$$B_l v(\xi,t) = 0, \ \ l = 1,2,\dots,r, \quad (\xi,t) \in \partial\Omega \times (0,T], \tag{7.2}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t (t-s)^{2-\delta-1} E^\varepsilon_{\alpha,2-\delta}(\omega(t-s)^\alpha) v(\xi,s)\,ds = \Lambda v(\xi,t) + a(\xi) v(\xi,t) + \int_\Omega \kappa(\xi,\eta) v(\eta)\,d\eta + g(\xi,t) \tag{7.3}$$

при $(\xi,t) \in \Omega \times (0,T]$. Здесь производная Прабхакара, действующая как

$$D^\varepsilon_{\alpha,\delta,\omega} h(t) := \frac{\partial^2}{\partial t^2} \int_0^t (t-s)^{1-\delta} E^\varepsilon_{\alpha,2-\delta}(\omega(t-s)^\alpha) h(s)\,ds,$$

является интегро-дифференциальным оператором Римана—Лиувилля с ядром $K(s) = e^\varepsilon_{\alpha,2-\delta,\omega}(s)$.

Возьмем $\mathcal{Z} = L_2(\Omega)$, $A = \Lambda_1 \in \mathcal{C}l(\mathcal{Z})$, $D_A = D_{\Lambda_1}$.

Лемма 7.1. *Пусть в условиях данного раздела* $1 < \delta \leqslant 2$, $\alpha, \varepsilon, \omega \in \mathbb{R}$. *Тогда* $K \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$ *удовлетворяет условию* $(\widehat{K})$; $A \in \mathcal{A}_{2,K,2-\delta}(\theta_0, a_0)$ *при некоторых* $\theta_0 \in (\pi/2, \pi)$, $a_0 \geqslant 0$; $t^{\delta-1} K(t) \in C([0,T]; \mathcal{L}(\mathcal{Z}))$; *выполняется условие* (4.6); *для любых* $t > 0$, $x \in D_A$ $K(t)Ax = AK(t)x$.

Доказательство. Известно [23], что

$$\widehat{K}(\lambda) = \mathfrak{L}[e^{\varepsilon}_{\alpha,2-\delta,\omega}(s)](\lambda) = \frac{\lambda^{\alpha\varepsilon+\delta-2}}{(\lambda^{\alpha}-\omega)^{\varepsilon}},$$

поэтому условие $(\widehat{K})$ выполняется при любом $a_K > |\omega|^{1/\alpha}$ и θ_K, зависящем от a_K. При достаточно большом $a_0 > \lambda_1$ возьмем подходящее $\theta_0 \in (\pi/2, \pi/\delta)$, любое $\theta \in (\pi/2, \theta_0)$, тогда при $\lambda \in S_{\theta,a_0}$

$$\lambda^2 \widehat{K}(\lambda) - A = \frac{\lambda^{\alpha\varepsilon+\delta}}{(\lambda^{\alpha}-\omega)^{\varepsilon}} - A.$$

Поскольку при больших $|\lambda|$ имеем $\lambda^{\delta}(1-\omega\lambda^{-\alpha})^{-\varepsilon} \sim \lambda^{\delta}$, то, выбрав достаточно большое a_0, получим для $\lambda \in S_{\theta,a_0}$ включение $\lambda^{\delta}(1-\omega\lambda^{-\alpha})^{-\varepsilon} \in S_{\theta,a_0/2}$, при этом $|\lambda^{\delta}(1-\omega\lambda^{-\alpha})^{-\varepsilon} - \lambda_k| \geqslant C_1|\lambda^{\delta}-\lambda_k| \geqslant C_1|\lambda^{\delta}-a_0|\sin(\delta\theta)$ для всех $k \in \mathbb{N}$, поэтому существует обратный оператор

$$(\lambda^2 \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{\lambda^{\delta}(1-\omega\lambda^{-\alpha})^{-\varepsilon} - \lambda_k},$$

$$\|(\lambda^2 \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L_2(\Omega))} \leqslant \frac{C_2 \sin^{-1}(\delta\theta)}{|\lambda|^{\delta}},$$

при этом $\chi = 2 - \delta < 1$. Следовательно, $A \in \mathcal{A}_{2,K,2-\delta}(\theta_0, a_0)$. Очевидно, что $t^{\delta-1}K(t) \in C([0,T];\mathcal{L}(\mathcal{Z}))$, при этом $\delta - 1 < \delta = 2 - \chi$.

Кроме того,

$$\widehat{K}(\lambda)(\lambda^2 \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{-2}\langle \cdot, \varphi_k \rangle \varphi_k}{1 - \lambda_k \lambda^{-\delta}(1-\omega\lambda^{-\alpha})^{\varepsilon}},$$

$$\|\widehat{K}(\lambda)(\lambda^m \widehat{K}(\lambda) - A)^{-1}\|_{\mathcal{L}(L_2(\Omega))} \leqslant \frac{C_2 \sin^{-1}(\delta\theta)}{|\lambda|^2},$$

т. е. выполняется условие (4.6).

Коммутирование $K(t)$ и Λ_1 очевидно. □

Рассуждая, как при доказательстве теоремы 6.1, с использованием леммы 7.1 и теорем 5.1, 4.1 и 4.2 получим следующий результат.

Теорема 7.1. *Пусть* $1 < \delta \leqslant 2$, $\alpha, \varepsilon, \omega \in \mathbb{R}$, $a \in L_2(\Omega)$, $\kappa \in L_2(\Omega \times \Omega)$, $v_0, v_1 \in D_{\Lambda_1}$, $g \in C([0,T]; D_{\Lambda_1}) \cap C^{\gamma}([0,T]; L_2(\Omega))$, $\gamma \in (0,1]$. *Тогда существует единственное решение задачи* (7.1)–(7.3).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Авилович А. С., Гордиевских Д. М., Федоров В. Е.* Вопросы однозначной разрешиомсти и приближенной управляемости для линейных уравнений дробного порядка с гельдеровой правой частью// Челяб. физ.-мат. ж. — 2020. — *5*, № 1. — С. 5–21.
2. *Иосида К.* Функциональный анализ. — М.: Мир, 1967.
3. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
4. *Клемент Ф., Хейманс Х., Ангенент С., ван Дуйн К., де Пахтер Б.* Однопараметрические полугруппы. — М.: Мир, 1992.
5. *Соломяк М. З.* Применение теории полугрупп к исследованию дифференциальных уравнений в пространствах Банаха// Докл. АН СССР. — 1958. — *122*, № 6. — С. 766–769.
6. *Трибель Х.* Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. — М.: Мир, 1980.
7. *Федоров В. Е., Авилович А. С.* Задача типа Коши для вырожденного уравнения с производной Римана—Лиувилля в секториальном случае// Сиб. мат. ж. — 2019. — *60*, № 2. — С. 461–477.
8. *Федоров В. Е., Филин Н. В.* Линейные уравнения с дискретно распределенной дробной производной в банаховых пространствах// Тр. Ин-та мат. и мех. УрО РАН. — 2021. — *27*, № 2. — С. 264–280.
9. *Хенри Д.* Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985.
10. *Arendt W., Batty C. J. K., Hieber M., Neubrander F.* Vector-valued laplace transforms and Cauchy problems. — Basel: Springer, 2011.
11. *Atangana A., Baleanu D.* New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model// Thermal Sci. — 2016. — *20*. — С. 763–769.

12. *Bajlekova E. G.* Fractional evolution equations in Banach spaces// Канд. дисс. — Eindhoven: Eindhoven Univ. of Technology, 2001.
13. *Boyko K. V., Fedorov V. E.* The Cauchy problem for a class of multi-term equations with Gerasimov—Caputo derivatives// Lobachevskii J. Math. — 2022. — *43*, № 6. — C. 1293–1302.
14. *Caputo M., Fabrizio M.* A new definition of fractional derivative without singular kernel// Prog. Fract. Differ. Appl. — 2015. — *1*, № 2. — C. 1–13.
15. *Fedorov V. E.* Generators of analytic resolving families for distributed order equations and perturbations// Mathematics. — 2020. — *8*, № 8. — C. 1306.
16. *Fedorov V. E., Du W.-S., Kostic M., Abdrakhmanova A. A.* Analytic resolving families for equations with distributed Riemann—Liouville derivatives// Mathematics. — 2022. — *10*, № 5. — C. 681.
17. *Fedorov V. E., Godova A. D., Kien B. T.* Integro-differential equations with bounded operators in Banach spaces// Bull. Karaganda Univ. Math. Ser. — 2022. — № 2. — C. 93–107.
18. *Fedorov V. E., Filin N. V.* On strongly continuous resolving families of operators for fractional distributed order equations// Fractal and Fractional. — 2021. — *5*, № 1. — C. 20.
19. *Fedorov V. E., Plekhanova M. V., Izhberdeeva E. M.* Analytic resolving families for equations with the Dzhrbashyan—Nersesyan fractional derivative// Fractal and Fractional. — 2022. — *6*, № 10. — C. 541.
20. *Fedorov V. E., Turov M. M.* Sectorial tuples of operators and quasilinear fractional equations with multi-term linear part// Lobachevskii J. Math. — 2022. — *43*, № 6. — C. 1502–1512.
21. *Kilbas A. A., Srivastava H. M., Trujillo J. J.* Theory and applications of fractional differential equations. — Amsterdam—Boston—Heidelberg: Elsevier, 2006.
22. *Pazy A.* Semigroups and linear operators and applications to partial differential equations. — New York: Springer, 1983.
23. *Prabhakar T. R.* A singular integral equation with a generalized Mittag—Leffler function in the kernel// Yokohama Math. J. — 1971. — *19*. — C. 7–15.
24. *Prüss J.* Evolutionary integral equations and applications. — Basel: Springer, 1993.
25. *Samko S. G., Kilbas A. A., Marichev O. I.* Fractional integrals and derivatives. Theory and applications. — Philadelphia: Gordon and Breach, 1993.
26. *Sitnik S. M., Fedorov V. E., Filin N. V., Polunin V. A.* On the solvability of equations with a distributed fractional derivative given by the Stieltjes integral// Mathematics. — 2022. — *10*, № 16. — C. 2979.
27. *Tarasov V. E.* Fractional dynamics: applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media. — New York: Springer, 2011.
28. *Uchaikin V. V.* Fractional derivatives for physicists and engineers. Vol. I, II. — Berlin, Heidelberg: Springer, 2013.

В. Е. Федоров
Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
E-mail: kar@csu.ru

А. Д. Годова
Челябинский государственный университет, Челябинск, Россия
E-mail: sashka_1997_godova55@mail.ru

UDC 517.9
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-166-184
EDN: FPXSDA

Integro-differential equations in Banach spaces and analytic resolving families of operators

V. E. Fedorov and A. D. Godova

Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia

We study a class of equations in Banach spaces with a Riemann–Liouville-type integro-differential operator with an operator-valued convolution kernel. The properties of k-resolving operators of such equations are studied and the class $\mathcal{A}_{m,K,\chi}$ of linear closed operators is defined such that the belonging to this class is necessary and, in the case of commutation of the operator with the convolution kernel, is sufficient for the existence of analytic in the sector k-resolving families of operators of the equation under study. Under certain additional conditions on the convolution kernel, we prove theorems on the unique solvability of the nonhomogeneous linear equation of the class under consideration if the nonhomogeneity is continuous in the norm of the graph of the operator from the equation or Hölder continuous. We obtain the theorem on sufficient conditions on an additive perturbation of an operator of the class $\mathcal{A}_{m,K,\chi}$ in order that the perturbed operator also belong to such a class. Abstract results are used in the study of initial-boundary value problems for a system of partial differential equations with several fractional Riemann–Liouville derivatives of different orders with respect to time and for an equation with a fractional Prabhakar derivative with respect to time.

Keywords: integro-differential equations, Banach spaces, Riemann–Liouville operator, unique solvability, Riemann–Liouville fractional derivatives, Prabhakar fractional derivative

For citation: V. E. Fedorov, A. D. Godova, "Integro-differential equations in Banach spaces and analytic resolving families of operators," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 1, 166–184. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-166-184`

REFERENCES

1. A. S. Avilovich, D. M. Gordievskikh, and V. E. Fedorov, "Voprosy odnoznachnoy razreshiomsti i priblizhennoy upravlyaemosti dlya lineynykh uravneniy drobnogo poryadka s gel'derovoy pravoy chast'yu" [Questions of unique solvability and approximate controllability for linear equations of fractional order with a Hölder right-hand side], *Chelyab. fiz.-mat. zh.* [Chelyabinsk Phys. Math. J.], 2020, **5**, No. 1, 5–21 (in Russian).
2. K. Yosida, *Funktsional'nyy analiz* [Functional Analysis], Mir, Moscow, 1967 (Russian translation).
3. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972 (Russian translation).
4. Ph. P. J. E. Clément, H. J. A. M. Heijmans, S. Angenent, C. J. van Duijn, and B. de Pagter, *Odnoparametricheskie polugruppy* [One-Parameter Semigroups], Mir, Moscow, 1992 (Russian translation).
5. M. Z. Solomyak, "Primenenie teorii polugrupp k issledovaniyu differentsial'nykh uravneniy v prostranstvakh Banakha" [Application of semigroup theory to the study of differential equations in Banach spaces], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1958, **122**, No. 6, 766–769 (in Russian).
6. H. Tribel, *Teoriya interpolyatsii, funktsional'nye prostranstva, differentsial'nye operatory* [Interpolation Theory, Function Spaces, Differential Operators], Mir, Moscow, 1980 (Russian translation).
7. V. E. Fedorov and A. S. Avilovich, "Zadacha tipa Koshi dlya vyrozhdennogo uravneniya s proizvodnoy Rimana—Liuvillya v sektorial'nom sluchae" [Cauchy-type problem for a degenerate equation with a

Riemann–Liouville derivative in the sectorial case], *Sib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 2019, **60**, No. 2, 461–477 (in Russian).
8. V. E. Fedorov and N. V. Filin, "Lineynye uravneniya s diskretno raspredelennoy drobnoy proizvodnoy v banakhovykh prostranstvakh" [Linear equations with discretely distributed fractional derivative in Banach spaces], *Tr. In-ta mat. i mekh. UrO RAN* [Proc. Inst. Math. Mech. Ural Branch Russ. Acad. Sci.], 2021, **27**, No. 2, 264–280 (in Russian).
9. D. Henry, *Geometricheskaya teoriya polulineynykh parabolicheskikh uravneniy* [Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations], Mir, Moscow, 1985 (Russian translation).
10. W. Arendt, C. J. K. Batty, M. Hieber, and F. Neubrander, *Vector-valued laplace transforms and Cauchy problems*, Springer, Basel, 2011.
11. A. Atangana and D. Baleanu, "New fractional derivatives with nonlocal and non-singular kernel: Theory and application to heat transfer model," *Thermal Sci.*, 2016, **20**, 763–769.
12. E. G. Bajlekova, "Fractional evolution equations in Banach spaces," *PhD Thesis*, Eindhoven Univ. of Technology, Eindhoven, 2001.
13. K. V. Boyko and V. E. Fedorov, "The Cauchy problem for a class of multi-term equations with Gerasimov—Caputo derivatives," *Lobachevskii J. Math.*, 2022, **43**, No. 6, 1293–1302.
14. M. Caputo and M. Fabrizio, "A new definition of fractional derivative without singular kernel," *Prog. Fract. Differ. Appl.*, 2015, **1**, No. 2, 1–13.
15. V. E. Fedorov, "Generators of analytic resolving families for distributed order equations and perturbations," *Mathematics*, 2020, **8**, No. 8, 1306.
16. V. E. Fedorov, W.-S. Du, M. Kostic, and A. A. Abdrakhmanova, "Analytic resolving families for equations with distributed Riemann—Liouville derivatives," *Mathematics*, 2022, **10**, No. 5, 681.
17. V. E. Fedorov, A. D. Godova, and B. T. Kien, "Integro-differential equations with bounded operators in Banach spaces," *Bull. Karaganda Univ. Math. Ser.*, 2022, No. 2, 93–107.
18. V. E. Fedorov and N. V. Filin, "On strongly continuous resolving families of operators for fractional distributed order equations," *Fractal and Fractional*, 2021, **5**, No. 1, 20.
19. V. E. Fedorov, M. V. Plekhanova, and E. M. Izhberdeeva, "Analytic resolving families for equations with the Dzhrbashyan—Nersesyan fractional derivative," *Fractal and Fractional*, 2022, **6**, No. 10, 541.
20. V. E. Fedorov and M. M. Turov, "Sectorial tuples of operators and quasilinear fractional equations with multi-term linear part," *Lobachevskii J. Math.*, 2022, **43**, No. 6, 1502–1512.
21. A. A. Kilbas, H. M. Srivastava, and J. J. Trujillo, *Theory and applications of fractional differential equations*, Elsevier, Amsterdam—Boston—Heidelberg, 2006.
22. A. Pazy, *Semigroups and linear operators and applications to partial differential equations*, Springer, New York, 1983.
23. T. R. Prabhakar, "A singular integral equation with a generalized Mittag—Leffler function in the kernel," *Yokohama Math. J.*, 1971, **19**, 7–15.
24. J. Prüss, *Evolutionary integral equations and applications*, Springer, Basel, 1993.
25. S. G. Samko, A. A. Kilbas, and O. I. Marichev, *Fractional integrals and derivatives. Theory and applications*, Gordon and Breach, Philadelphia, 1993.
26. S. M. Sitnik, V. E. Fedorov, N. V. Filin, and V. A. Polunin, "On the solvability of equations with a distributed fractional derivative given by the Stieltjes integral," *Mathematics*, 2022, **10**, No. 16, 2979.
27. V. E. Tarasov, *Fractional dynamics: applications of fractional calculus to dynamics of particles, fields and media*, Springer, New York, 2011.
28. V. V. Uchaikin, *Fractional derivatives for physicists and engineers. Vol. I, II*, Springer, Berlin, Heidelberg, 2013.

V. E. Fedorov
Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
E-mail: kar@csu.ru

A. D. Godova
Chelyabinsk State University, Chelyabinsk, Russia
E-mail: sashka_1997_godova55@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 69, № 1 (2023). С. 185–200
Contemporary Mathematics. Fundamental Directions. ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

УДК 515.124+515.126.4+515.126.83
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-185-200
EDN: FQFZEV

МЕТОД ПОИСКОВЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ В ТЕОРИИ НЕПОДВИЖНЫХ ТОЧЕК И СОВПАДЕНИЙ

Т. Н. Фоменко

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

Статья содержит обзор ряда результатов, содержащихся в работах автора, а также автора и Ю. Н. Захаряна, о существовании и аппроксимации нулей однозначных и многозначных (α, β)-поисковых функционалов, о сохранении, при изменении числового параметра, существования нулей таких функционалов. Приводятся следствия из этих результатов в теории неподвижных точек и точек совпадения однозначных и многозначных отображений метрических пространств. Проводится сравнение с известными результатами других авторов. В завершающей части статьи исследуется проблема существовании непрерывной по параметру однозначной ветви нулей у параметрического семейства поисковых функционалов. Доказана теорема о существовании решения этой задачи.

Ключевые слова: поисковые функционалы, существование нулей, неподвижные точки, точки совпадения

Для цитирования: *Т. Н. Фоменко.* Метод поисковых функционалов и его применения в теории неподвижных точек и совпадений// Соврем. мат. Фундам. направл. 2023. Т. **69**, № 1. С. 185–200. http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-185-200

1. Введение

Статья содержит обзор ряда результатов автора о существовании и аппроксимации нулей однозначных и многозначных (α, β)-поисковых функционалов [6–8, 12], а также результатов автора и Ю. Н. Захаряна [14] о сохранении, при изменении числового параметра, существования нулей у параметрического семейства таких функционалов. Приводятся некоторые следствия из этих результатов в теории неподвижных точек и точек совпадения однозначных и многозначных отображений метрических пространств. Проводится сравнение с известными результатами других авторов. В завершающей части статьи исследуется проблема существования непрерывной по параметру однозначной ветви нулей у параметрического семейства поисковых функционалов. Доказана теорема о существовании решения этой задачи.

Статья состоит из 4 разделов и списка литературы и организована следующим образом.

В разделе 2 содержится обзор ранее полученных результатов о поиске нулей неотрицательных (α, β)-поисковых функционалов $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$ на метрическом пространстве (X, ρ), то есть таких точек ξ, где $\varphi(\xi) = 0$. Понятие (α, β)-поискового функционала и метод поиска нулей таких функционалов были предложены автором в работах 2009–2013 годов [6–8, 12]. Сначала рассматривались однозначные, затем многозначные поисковые функционалы. Поиск нулей однозначных функционалов осуществлялся по метрическому пространству (X, ρ). Для многозначных (α, β)-поисковых функционалов более удобным оказался метод поиска их нулей, то есть таких точек

$\xi \in X$, что $0 \in \varphi(\xi)$, по графику заданного функционала. В теории неподвижных точек и совпадений отображений метрических пространств поиск и аппроксимация неподвижных точек и точек совпадения связаны с тем, что расстояние между точкой и её образом или между образами двух либо нескольких отображений стремится к нулю. Отсюда очевидна связь с проблемой поиска и аппроксимации нулей функционалов.

Ниже формулируются несколько версий принципа поиска нулей (α, β)-поисковых функционалов как в однозначном, так и в многозначном случае. Приводятся полученные с их помощью обобщения известных результатов, связанных с проблемой существования неподвижных точек и совпадений отображений метрических пространств.

Подчеркнем, что мы не копируем определения и формулировки более ранних работ, а приводим их некоторое развитие, слегка ослабляя условия теорем и приводя более оптимальные определения и терминологию.

В разделе 3 представлен обзор совместных результатов автора и Ю. Н. Захаряна [14] о сохранении, при изменении параметра, существования нулей у параметрического семейства поисковых функционалов. Приводятся следствия о сохранении, при изменении параметра, существования неподвижных точек и точек совпадения у семейств многозначных отображений метрического пространства и сравнения с известными результатами других авторов.

В разделе 4 рассматривается важная для приложений задача о существовании параметрической непрерывной кривой в множестве нулей параметрического семейства многозначных поисковых функционалов. Доказывается основной результат статьи — теорема о существовании такой непрерывной ветви нулей.

2. Существование нулей поисковых функционалов в метрическом пространстве и некоторые следствия

Пусть $(X, \rho), (Y, d)$ — метрические пространства. Ниже будем использовать следующие обозначения. Пусть $H \subset Y$ — замкнутое подпространство. Его полный прообраз при действии отображения $f : X \to Y$ обозначим через $f^{-1}(H)$. $\mathrm{Coin}(f_1, \dots, f_n) := \{x \in X | f_1(x) = \dots = f_n(x)\} \subseteq X$ обозначает множество точек совпадения отображений $f_1, \dots, f_n : X \to Y (n \geqslant 2)$, $\mathrm{Comfix}(f_1, \dots, f_n) := \{x \in X | f_1(x) = \dots = f_n(x) = x\} \subset X$ — множество общих неподвижных точек отображений $f_1, \dots, f_n : X \to X$ $(n \geqslant 1)$. Если задан однозначный или многозначный неотрицательный функционал $\varphi : X \rightrightarrows \mathbb{R}_+$, то множество его нулей будем обозначать через $\mathrm{Nil}(\varphi) := \{x \in X | 0 \in \varphi(x)\}$.

Рассматриваются задачи построения аппроксимационных последовательностей в X, начинающихся из любой заданной точки $x_0 \in X$ и сходящихся к точке заданного множества $A \neq \varnothing$, где $A \subseteq X$ совпадает с одним из указанных выше подмножеств $f^{-1}(H)$, $\mathrm{Coin}(f_1, \dots, f_n)$, $\mathrm{Comfix}(f_1, \dots, f_n)$ пространства X.

Отметим, что рассматриваемые задачи и полученные ниже результаты удобно формулируются в терминах дискретных динамических систем.

Под дискретной динамической системой с фазовым пространством X и полугруппой сдвигов $(Z_{\geqslant 0}, +)$ понимают произвольное действие этой полугруппы на X, то есть когда на X задана полугруппа неотрицательных итераций $\{G^n\}_{n=0,1,\dots}$ отображения $G : X \to X$, где $G^0 := \mathrm{id}_X$. Такая динамическая система называется *каскадом*[1] на X. Здесь мы будем использовать термин *мультикаскад*, имея в виду его многозначный вариант (то есть когда отображение $G : X \rightrightarrows X$ многозначно). Отображение (оператор сдвига) $G = G^1 : X \to X$, представляющее образующий элемент $1 \in Z_{\geqslant 0}$, называется *генератором* каскада. В случае мультикаскада этот оператор, вообще говоря, многозначен.

Таким образом, фактически задача, сформулированная выше, — это задача построения мультикаскада на пространстве X с заданным предельным множеством A. Иными словами, построение мультикаскада означает задание некоторого, вообще говоря, неоднозначного, отображения (генератора каскада) $G : X \rightrightarrows X$, итерации которого, примененные к любой точке $x \in X$, задают начинающиеся из x сходящиеся последовательности, пределы которых суть элементы предельного множества этого каскада, то есть заданного подмножества A.

[1]Удачный термин *каскад* предложен Д. В. Аносовым.

Для решения таких задач применяется метод так называемых (α, β)-поисковых неотрицательных функционалов на пространстве X.

Опишем понятие (α, β)-поискового функционала и принцип каскадного поиска нулей таких функционалов. Вначале рассмотрим однозначную версию этого принципа. Затем принцип каскадного поиска будет применён для аналогичных случаев предельного множества A, касающихся многозначных отображений.

В некотором смысле можно сказать, что предлагаемый метод каскадного поиска является дискретным аналогом в метрическом пространстве хорошо известного метода градиентного спуска.

Определения и терминология многозначных отображений имеются в книге [3]. Тем не менее, для удобства, кроме ссылок на литературу, будут приведены все необходимые определения и обозначения.

Приведем общий результат, который мы называем однозначным *принципом каскадного поиска нулей*. Покажем, что из этого принципа получаются обобщения целого ряда известных теорем, в том числе известного принципа неподвижной точки Банаха [11] (см. также [5, с. 70])

Следующие определения имеются в [8, 12].

Определение 2.1. Пусть $f : X \to Y$ — однозначное (или многозначное, $f : X \rightrightarrows Y$) отображение между метрическими пространствами (X, d) и (Y, ρ), и его график $\mathrm{Graph}(f) := \{(x, y) \in X \times Y | y \in f(x)\} \subseteq X \times Y$. Будем говорить, что для некоторого непустого подмножества $A \subset Y$, график $\mathrm{Graph}(f)$ является *A-замкнутым*, если он содержит все свои предельные точки вида $(x, y) \in X \times Y$, где $y \in A$.

Определение 2.2. Будем говорить, что график $\mathrm{Graph}(f)$ является *A-полным*, если всякая фундаментальная последовательность $\{x_n, y_n\}_{n=0,1,\ldots} \subseteq \mathrm{Graph}(f)$, где $\rho(y_n, A) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, сходится к некоторой паре $(\xi, \eta) \in \mathrm{Graph}(f)$, где $\eta \in A$, и следовательно, $\eta \in f(\xi) \cap A$.

Определение 2.3. Пусть $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$ — неотрицательный однозначный функционал на метрическом пространства (X, ρ), $0 \leqslant \beta < \alpha$. Скажем, что функционал φ является *(α, β)-поисковым* на X, если для любого $x \in X$ существует $x' \in X$ такой, что $\rho(x.x') \leqslant \dfrac{\varphi(x)}{\alpha}$ и $\varphi(x') \leqslant \dfrac{\beta}{\alpha} \cdot \varphi(x)$.

Для однозначных (α, β)-поисковых функционалов на метрическом пространстве (X, ρ), исходя из их определения, из любой точки $x_0 \in X$ можно построить так называемую *поисковую последовательность* $\{x_n\} \subseteq X$, то есть такую, что $\rho(x_n.x_{n+1}) \leqslant \dfrac{\varphi(x_n)}{\alpha}$ и $\varphi(x_{n+1}) \leqslant \dfrac{\beta}{\alpha} \cdot \varphi(x_n)$.

Следующая теорема является небольшой модификацией теоремы из [12]. Для полноты изложения приведем её с доказательством. Вместо более сильных условий $\{0\}$-полноты и $\{0\}$-замкнутости графика (α, β)-поискового функционала мы используем следующие понятия.

Определение 2.4. Будем говорить, что график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ (α, β)-поискового функционала *поисково-полон*, если любая его поисковая последовательность сходится к элементу графика. Будем называть график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ *поисково-замкнутым*, если он содержит пределы всех его поисковых последовательностей.

Теорема 2.1 (однозначный принцип каскадного поиска)**.** *Пусть (X, ρ) — метрическое пространство, $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$ — неотрицательный однозначный (α, β)-поисковый функционал на X, $0 \leqslant \beta < \alpha$. Предположим, что либо его график поисково-полон, либо пространство X полно и график* $\mathrm{Graph}(\varphi)$ *поисково-замкнут. Тогда на X существует мультикаскад с предельным множеством* $\mathrm{Nil}(\varphi)$ *и расстояние между любой начальной точкой $x_0 \in X$ и предельной точкой любой поисковой последовательности, начинающейся из x_0, не превышает* $\dfrac{\varphi(x_0)}{\alpha - \beta}$.

Доказательство. Рассуждения вполне стандартны. Рассмотрим любую точку $x_0 \in X$. Сходящаяся поисковая последовательность строится по индукции. Пусть $x_1 = x'$ — точка, существующая согласно условию теоремы. Далее, если точка x_m уже выбрана и $\varphi(x_m) = 0$, то есть $x_m \in A$, то положим $x_j = x_m$ для всех $j > m$. Если $\varphi(x_m) > 0$, то согласно условиям теоремы снова существует точка x_{m+1}, для которой $\rho(x_m, x_{m+1}) \leqslant \dfrac{\varphi(x_m)}{\alpha}$ и $\varphi(x_{m+1}) \leqslant \dfrac{\beta}{\alpha} \cdot \varphi(x_m)$.

Получаем последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$. Она очевидно фундаментальна, так как

$$\rho(x_m, x_{m+1}) \leqslant \frac{\varphi(x_m)}{\alpha} \leqslant (\frac{\beta}{\alpha})^m \cdot \frac{\varphi(x_0)}{\alpha} \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Кроме того, из этих неравенств видно, что $\varphi(x_m) \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} 0$. Следовательно, последовательность элементов графика $\{(x_m, \varphi(x_m))\}_{m=0,1,\dots}$ фундаментальна. Так как по условию либо график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ поисково-полон, или пространство X полно и график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ поисково-замкнут, в обоих случаях получается, что эта последовательность сходится к некоторому элементу $(\xi, 0) \in \mathrm{Graph}(\varphi)$. Это означает, что $\varphi(\xi) = 0$, то есть $\xi \in \mathrm{Nil}(\varphi)$.

Оценим расстояние $\rho(x_0, \xi)$. Имеем:

$$\rho(x_0, \xi) = \lim_{m\to\infty} \rho(x_0, x_m) \leqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} \rho(x_{k-1}, x_k) \leqslant$$

$$\leqslant \lim_{m\to\infty} \sum_{k=1}^{m} (\frac{\beta}{\alpha})^{k-1} \cdot \frac{\varphi(x_0)}{\alpha} = \frac{\varphi(x_0)}{\alpha} \cdot \frac{1}{1-\frac{\beta}{\alpha}} = \frac{\varphi(x_0)}{\alpha-\beta}.$$

□

Приведем примеры однозначных поисковых функционалов.

Пример 2.1. $\varphi(x) := \rho(x, H)$, где H — замкнутое подпространство в Y. Функционал φ является $(1,0)$-поисковым. В самом деле, при $\alpha = 1$, $\beta = 0$ имеем: для любого $x \in X$ существует $x' \in H$ такое, что $\rho(x, x') = \varphi(x)$, $\varphi(x') = \rho(x', H) = 0$.

Пример 2.2. Если $f : X \to X$ — λ-сжимающее отображение, то есть

$$\rho(f(x_1), f(x_2)) \leqslant \lambda \cdot \rho(x_1, x_2), \quad x_1, x_2 \in X, \quad 0 < \lambda < 1,$$

то функционал $\psi(x) := \rho(x, f(x))$ является (α, β)-поисковым при $\alpha = 1$, $\beta = \lambda$. Действительно, для любого $x \in X$ возьмем $x' = f(x) \in X$. Тогда $\rho(x, x') = \rho(x, f(x)) = \psi(x)$, $\psi(x') = \rho(x', f(x')) = \rho(f(x), f^2(x) \leqslant \lambda \cdot \rho(x, f(x)) = \lambda \cdot \psi(x)$.

Рассмотрим некоторые приложения теоремы 2.1, в которых используются данные выше определения поисковой замкнутости и поисковой полноты графика.

Приближение к прообразу замкнутого подпространства. Пусть (X, ρ), (Y, d) — метрические пространства. Пусть H — замкнутое подпространство в Y. Обозначим через $\overline{B_r(x)}$ замкнутый шар радиуса $r = r(x)$ с центром в точке $x \in X$ по метрике ρ.

Теорема 2.2. *Пусть в описанных условиях задано отображение $F : X \to Y$ и существуют числа α, β, $0 \leqslant \beta < \alpha$ такие, что функционал $\varphi : X \to \mathbb{R}_+$, где $\varphi(x) = d(F(x), H)$, является (α, β)-поисковым на X. Кроме того, пусть либо пространство X полно и график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ функционала φ поисково-замкнут, либо график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ поисково-полон.*

Тогда на X существует мультикаскад с предельным множеством $F^{-1}(H) \neq \varnothing$, причём расстояние от любой начальной точки $x_0 \in X$ до всякой соответствующей ей предельной точки ξ этого мультикаскада не превышает $\dfrac{\rho(F(x_0), H)}{\alpha-\beta}$.

Другими словами, для любой точки $x_0 \in X$ существует начинающаяся из неё сходящаяся, итерационная относительно генератора каскада (вообще говоря, не единственная) последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$ такая, что её предел $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = \xi \in X, F(\xi) \in H$, причём $\rho(x_0, \xi) \leqslant \dfrac{\rho(F(x_0), H)}{\alpha-\beta}$.

Доказательство этой теоремы представлено в [6] (в её первоначальной версии), а также в [12].

В частности, если подпространство $H = \{h\}$ — это фиксированная точка $h \in Y$, то теорема 2.2 дает достаточные условия для приближения к корням уравнения: $F(x) = h$.

Приближение к точкам совпадения n отображений ($n > 1$). Важным частным случаем рассмотренной задачи о приближении к прообразу подпространства является проблема приближения к точкам совпадения заданного набора n отображений $f_1, \ldots, f_n : X \to Y$. На самом деле эта задача равносильна задаче о приближении к диагонали $\Delta_n := \{y = (y_1, \ldots, y_n) \in Y^n | y_1 = \ldots = y_n\} \subset \underbrace{Y \times \ldots \times Y}_{n} = Y^n$ для отображения $F = f_1 \times \ldots \times f_n : X \to Y^n$. Сформулируем в виде теоремы этот частный вариант теоремы 2.2, полагая метрику D в $X \times Y$ заданной по формуле $D(x, y) = \sum\limits_{i=1}^{n} d(x_i, y_i)$, где $x = (x_1, \ldots, x_n)$, $y = (y_1, \ldots, y_n) \in Y^n$.

Теорема 2.3. *Пусть заданы отображения $f_1, \ldots, f_n : X \to Y$, и существуют числа α, β, $0 < \beta < \alpha$ такие, что функционал $\varphi(x) := D(F(x), \Delta_n)$ является (α, β)-поисковым, где*

$$\Delta_n := \{(y_1, \ldots, y_n) \in Y^n | y_1 = \ldots = y_n\}, \quad F = (f_1, \ldots, f_n).$$

Пусть также либо график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ функционала φ поисково-полон, либо X — полное пространство и график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ поисково-замкнут.

Тогда на X существует мультикаскад с предельным множеством $A = \mathrm{Coin}(f_1, \ldots, f_n) \neq \varnothing$, причём расстояние от любой начальной точки $x_0 \in X$ до всякой соответствующей ей предельной точки мультикаскада $\xi \in A$ не превышает $\dfrac{D(F(x_0), \Delta_n)}{\alpha - \beta}$.

Иначе говоря, для любой точки $x_0 \in X$ существует начинающаяся из неё сходящаяся, итерационная относительно генератора каскада (не единственная) последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\ldots}$ такая, что её предел $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = \xi \in X$, $f_1(\xi) = \ldots = f_n(\xi)$, причём $\rho(x_0, \xi) \leqslant \dfrac{D(F(x_0), \Delta_n)}{\alpha - \beta}$.

Доказательство этого утверждения (в его первоначальной форме) содержится в [12].

С точки зрения теоремы 2.3 представляет интерес отыскание достаточных условий на отображения $f_1, \ldots, f_n$, обеспечивающих условие теоремы. Поэтому полезно получить оценки на расстояние до диагонали от любой точки $y = (y_1, \ldots, y_n) \in Y^n$. Приведем такие оценки в следующей лемме, доказательство которой вполне стандартно [12].

Лемма 2.1. *Для произвольного элемента $y = (y_1, \ldots, y_n) \in Y^n$, $n \geqslant 2$, обозначим $\tilde{D}(y) = \dfrac{1}{n-1} \sum\limits_{1 \leqslant i < j \leqslant n} d(y_i, y_j)$. Справедлива следующая оценка:*

$$\tilde{D}(y) \leqslant D(y, \Delta_n) \leqslant \frac{2(n-1)}{n} \tilde{D}(y). \tag{2.1}$$

Заметим, что при $n = 2$ из приведенной в лемме 2.1 оценки следует очевидное равенство: $D(y, \Delta_2) = \tilde{D}(y) = d(y_1, y_2)$.

Следует отметить, что при $n = 2$ из теоремы 2.3 вытекает следующая теорема А. В. Арутюнова. Подробное обоснованное сравнение этих теорем приведено в [7].

Теорема 2.4 (см. [1, теорема 1])**.** *Пусть X, Y — метрические пространства, причём пространство X полно. Пусть $f_1, f_2 : X \to Y$ — произвольные отображения, причём f_1 непрерывно и является λ-накрывающим (то есть для некоторого $\lambda > 0$ верно включение: $B_{\lambda r}(F(x)) \subseteq F(B_r(x))$, $\forall r > 0, \forall x \in X$), а отображение f_2 удовлетворяет условию Липшица с константой γ (то есть $\rho(f_2(x), f_2(x')) \leqslant \gamma \rho(x, x')$, $\forall x, x' \in X$), где $0 \leqslant \gamma < \lambda$. Тогда для любого $x_0 \in X$ существует такое $\xi = \xi(x_0) \in X$, что $f_1(\xi) = f_2(\xi)$, и справедлива оценка:*

$$\rho(x_0, \xi) \leqslant \frac{\rho(f_1(x_0), f_2(x_0))}{\lambda - \gamma}. \tag{2.2}$$

Стоит сказать, что теорема 2.3 является существенным обобщением теоремы 2.4 в том смысле, что из условий теоремы 2.3 при $n = 2$ не следует ни одно из условий теоремы 2.4. В [7] приводится соответствующий пример.

Если в теореме 2.3 положить $X = Y$ и одно из отображений $f_1, \ldots, f_n$ положить равным тождественному, то получается теорема о существовании общих неподвижных точек у конечного набора отображений в себя пространства X.

Если все отображения $f_1, \dots, f_n$ при $n > 1$ совпадают, или $n = 1$, то в качестве ещё одного следствия из теоремы 2.3 получается следующее обобщение хорошо известного *принципа Банаха—Каччиополи сжимающих отображений* [11] (см. также, например, [5, с. 70]).

Теорема 2.5. *Пусть X — полное метрическое пространство, $f : X \to Y$ — заданное отображение с замкнутым графиком. Пусть существует такое число α, $0 < \alpha < 1$, что для любой точки $x \in X$ выполнено неравенство: $\rho(f(x), f^2(x)) \leqslant \alpha \cdot \rho(x, f(x))$. Тогда на X существует каскад, генератор которого совпадает с отображением f, с предельным множеством $A = \mathrm{Fix}(f) \neq \varnothing$, причём расстояние от любой начальной точки $x_0 \in X$ до всякой соответствующей ей предельной точки каскада $\xi \in A$ не превышает $\dfrac{\rho(x_0, f(x_0))}{1-\alpha}$. Иначе говоря, тогда из любой точки $x_0 \in X$ можно построить последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$, где $x_m = f^m(x_0)$, имеющую предел $\lim\limits_{m\to\infty} x_m = \xi \in X$, причём $\xi = f(\xi)$, и $\rho(x_0, \xi) \leqslant \dfrac{\rho(x_0, f(x_0))}{1-\alpha}$.*

Отметим, что в отличие от принципа сжимающих отображений, теорема 2.5 не гарантирует единственности неподвижной точки, однако применима к более широкому классу отображений.

Можно предложить и такой вариант обобщения принципа сжимающих отображений.

Теорема 2.6. *Пусть X — метрическое пространство, $f : X \to X$ заданное отображение. Пусть α, $0 < \alpha < 1$, таково, что функционал $\varphi(x) := \rho(x, f(x))$, $x \in X$, является $(1, \alpha)$-поисковым на X. Предположим также, что график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ функционала φ поисково-полон. Тогда на X существует мультикаскад с предельным множеством $\mathrm{Fix}(f)$, и расстояние между любой начальной точкой $x_0 \in X$ и любой соответствующей предельной точкой не превышает $\dfrac{\rho(x_0, f(x_0))}{1-\alpha}$.*

Приведем несколько простых замечаний.

Замечание 2.1. Отметим, что генератор каждого из построенных мультикаскадов в приведенных теоремах задается отображением (вообще говоря, неоднозначным) $G : X \to X$, $G(x) = x' = x'(x)$, где существование соответствующей (вообще говоря, не единственной) точки $x'(x) \in X$ с нужными свойствами обеспечивается условиями каждой из теорем. Все построенные в доказательствах теорем последовательности $\{x_m\}_{m=0,1,\dots}$ являются, конечно, *итерационными относительно действия именно такого генератора G.*

Замечание 2.2. Отметим, что предложенные здесь результаты объединены общей идеей, похожей на метод градиентного спуска. Для построения на пространстве X мультикаскада с предельным множеством A, $A \subset X$, на X задается некоторый метрический функционал φ с нуль-пространством $\{x \in X \mid \varphi(x) = 0\} = A$. Значение такого функционала в каждой точке $x \in X$ определяет (с помощью вспомогательных параметров) некоторое «направляющее» множество, где должны существовать точки «спуска» этого функционала, то есть уменьшения его значения с коэффициентом, меньшим единицы. Переход в такую точку «спуска» и задает действие генератора искомого каскада. Стремление такого функционала к нулю означает в точности приближение к заданному предельному множеству A.

Перейдем теперь к рассмотрению многозначных функционалов.

Каскадный поиск нулей многозначного (α, β)-поискового функционала. Определения и терминология теории многозначных отображений имеются, например, в книге [3]. Приведем необходимые определения и формулировку принципа поиска нулей (см. [8, 12]).

Определение 2.5. Пусть (X, d) — метрическое пространство, $\Phi : X \rightrightarrows \mathbb{R}_+$ — многозначный функционал на X. Будем говорить, что график $\mathrm{Graph}(\Phi)$ является $\{0\}$-*замкнутым*, если для всякой последовательности $\{(x_n, c_n)\} \subseteq \mathrm{Graph}(\Phi)$, сходящейся к некоторому элементу $(\xi, 0)$, верно, что $(\xi, 0) \in \mathrm{Graph}(\Phi)$, то есть $0 \in \Phi(\xi)$.

Замечание 2.3. Фундаментальность и сходимость последовательностей элементов графика рассматриваются относительно метрики $D : (X \times \mathbb{R}_+)^2 \to \mathbb{R}_+$, где $D((x', c'), (x'', c'')) = d(x', x'') + |c' - c''|$.

Определение 2.6. Пусть (X, d) — метрическое пространство, $0 \leqslant \beta < \alpha$. Многозначный функционал $\Phi : X \rightrightarrows \mathbb{R}_+$ называется (α,β)-*поисковым на* X, если для любой точки $x \in X$ и любого значения $c \in \Phi(x)$ существует точка $x' \in X$ и значение $c' \in \Phi(x')$ такие, что $d(x, x') \leqslant \dfrac{1}{\alpha}c$ и $c' \leqslant \dfrac{\beta}{\alpha}c$.

Определение 2.7. Пусть (X, d) — метрическое пространство, $\Phi : X \rightrightarrows \mathbb{R}_+$ — многозначный (α,β)-поисковый функционал на X. График $\mathrm{Graph}(\Phi) := \{(x, c) \in X \times \mathbb{R}_+ \mid c \in \Phi(x)\}$ функционала Φ называется *поисково-полным*, если всякая (α,β)-поисковая последовательность $\{(x_n, c_n)\} \subseteq \mathrm{Graph}(\Phi)$ (то есть такая, что $\rho(x_n, x_{n+1}) \leqslant \dfrac{c_n}{\alpha}$ и $c_{n+1} \leqslant \dfrac{\beta}{\alpha} \cdot c_n$, $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$), сходится к некоторому элементу $(\xi, 0) \in \mathrm{Graph}(\Phi)$, то есть $0 \in \Phi(\xi)$.

График многозначного (α,β)-поискового функционала называется *поисково-замкнутым*, если он содержит пределы всех поисковых последовательностей.

Предыдущий вариант следующей теоремы с доказательством содержится в [8].

Теорема 2.7. *Пусть* (X, d) — *метрическое пространство,* $\Phi : X \rightrightarrows \mathbb{R}_+$ — *многозначный* (α,β)-*поисковый функционал на* X *с поисково-полным графиком,* $0 \leqslant \beta < \alpha$. *Тогда для каждой пары* $(x_0, c_0) \in \mathrm{Graph}(\Phi)$ *существует точка* $\xi \in X$ *такая, что* $0 \in \Phi(\xi)$ *и* $d(x_0, \xi) \leqslant \dfrac{c_0}{\alpha - \beta}$. *При этом, очевидно, что если* $c_0 \leqslant R \cdot (\alpha - \beta)$, *то* $\xi \in B_R(x_0)$.

Обозначения. $(X, \rho), (Y, d)$ — метрические пространства, H — замкнутое подпространство в Y, $F : X \to C(Y)$ — многозначное отображение, где $C(Y)$ — совокупность непустых замкнутых подмножеств в Y. $\overline{B_r(M)}$ — замкнутая r-окрестность ($r > 0$) множества M (в соответствующей метрике). В частности, если $M = x$ — точка, то это замкнутый шар радиуса r с центром в точке x. Метрику D в пространстве Y^n определим так: $D(y, z) := \sum\limits_{i=1}^{n} d(y_i, z_i)$, где $y = (y_1, \dots, y_n)$, $z = (z_1, \dots, z_n) \in Y^n$. Δ_n — диагональ в Y^n, $n \geqslant 2$. $\Delta_n(H) := \{\tilde{h} = (h, \dots, h) \in \Delta_n \mid h \in H\}$ — часть диагонали «над подпространством H». Расстояние от элемента $y \in Y$ до подмножества $A \subset Y$ определяется стандартным образом: $d(y, A) := \inf\limits_{z \in A} d(y, z)$.

Определение 2.8. Многозначное отображение F называется α-*накрывающим* в X, если для любой точки $x \in X$ и для любого $r > 0$ верно, что $B_{\alpha r}(F(x)) \subseteq F(B_r(x))$.

Определение 2.9. Многозначное отображение F называется β-*липшицевым*, если для любых $x, x' \in X$ верно, что $h(F(x), F(x')) \leqslant \beta\rho(x, x')$, где $h : C(Y) \times C(Y) \to \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ — (расширенная) метрика Хаусдорфа.

Теорема 2.8 (см. [12]). *Пусть* $F : X \to C(Y)$ — *многозначное отображение, и* $\mathrm{Graph}(F)$ H-*поисково-полон, где* $H \subset Y$ — *замкнутое подпространство в* Y. *Пусть* $\gamma > 0$, $0 < \beta < \alpha$, *и для каждой пары* $(x, y) \in \mathrm{Graph}(F)$ *существует пара* $(x', y') \in \mathrm{Graph}(F)$, *для которой* $\rho(x, x') \leqslant \dfrac{d(y, H)}{\alpha}$, $d(y, y') \leqslant \gamma \cdot d(y, H)$ *и* $d(y', H) \leqslant \dfrac{\beta}{\alpha} \cdot d(y, H)$. *Тогда на* X *существует мультикаскад с предельным множеством* $F^{-1}(H)$, *причём расстояние от любой начальной точки* x_0 *до всякой соответствующей предельной точки не больше* $\dfrac{d(y_0, H)}{\alpha - \beta}$, *где* $y_0 \in F(x_0)$.

Применим теорему 2.8 к задаче каскадного поиска множества точек совпадений конечного набора многозначных отображений. Верно следующее утверждение.

Теорема 2.9. *Пусть* $F_1, \dots, F_n : X \to C(Y)$, $F = F_1 \times \ldots \times F_n : X \to C(Y^n)$, *причём* $\mathrm{Graph}(F)$ *поисково-*Δ_n*-замкнут, и хотя бы один из графиков* $\mathrm{Graph}(F_i), i = 1, \dots, n$, *полон. Пусть числа* $\gamma > 0$, $0 < \beta < \alpha$, *таковы, что для каждого* $x \in X$ *и каждого* $y \in F(x)$ *существуют точки* $x' \in X$ *и* $y' \in F(x')$, *для которых* $\rho(x, x') \leqslant \dfrac{d(y, \Delta_n)}{\alpha}$, $d(y, y') \leqslant \gamma \cdot d(y, \Delta_n)$, $d(y', \Delta_n) \leqslant \dfrac{\beta}{\alpha} \cdot d(y, \Delta_n)$. *Тогда на* X *существует мультикаскад с предельным множеством* $\mathrm{Coin}(F_1, \dots, F_n) := \{x \in X \mid F_1(x) \cap \ldots \cap F_n(x) \neq \varnothing\}$, *причём расстояние от любой начальной точки* $x_0 \in X$ *до любой* *соответствующей предельной точки* $\xi \in X$ *зависит от выбранного значения* $y_0 \in F(x_0)$ *и не превышает* $\dfrac{d(y_0, \Delta_n)}{\alpha - \beta}$.

Как показано в [12], из теоремы 2.9 при $n = 2$ следует, в частности, [1, теорема 2].

Определение 2.10. Точка $\xi \in X$ называется *точкой совпадения* многозначных отображений $F_1, \ldots, F_n : X \to C(Y)$, если $\bigcap\limits_{i=1}^{n} F_i(\xi) \neq \varnothing$. Множество всех точек совпадения называется *множеством совпадений* и обозначается $\mathrm{Coin}(F_1, \ldots, F_n)$.

Определение 2.11. Многозначное отображение $F : X \to Y$ называется *полунепрерывным сверху* в точке $x \in X$, если для любого открытого множества $V \subset Y$ такого, что $F(x) \subset V$, существует окрестность $U(x)$ точки x, для которой $F(U(x)) \subset V$. Отображение F является полунепрерывным сверху на X, если оно является таковым в каждой точке $x \in X$.

Определение 2.12. Будем говорить, что многозначное отображение $F : X \to Y$ является *секвенциально полунепрерывным сверху* в точке ξ, если для любой сходящейся последовательности $\{x_k\}_{k=0,1,\ldots}$, где $\lim\limits_{k\to\infty} x_k = \xi$, всякая последовательность $\{y_k\}_{k=0,1,\ldots}$, где $y_k \in F(x_k)$, удовлетворяет условию: $\lim\limits_{k\to\infty} d(y_k, F(\xi)) = 0$. Многозначное отображение F называется секвенциально полунепрерывным сверху на X, если оно является таковым в любой точке X.

Заметим, что если отображение полунепрерывно сверху, то оно и секвенциально полунепрерывно сверху. Однако, вообще говоря, обратное неверно. Нетрудно привести соответствующий пример.

Определение 2.13. Назовём график $\mathrm{Graph}(F)$ многозначного отображения $F : X \rightrightarrows Y$ H-(α, β)-*поисково-полным*, если любая (α, β)-поисковая последовательность $\{(x_m, y_m)\}_{m=o,1,\ldots} \subseteq \mathrm{Graph}(F)$, то есть такая, что $\rho(x_n, x_{n+1}) \leqslant \dfrac{d(y_m, H)}{\alpha}$, $d(y_{n+1}, H) \leqslant \dfrac{\beta}{\alpha} d(y_m, H)$, сходится и имеет предел $(\xi, \eta) \in \mathrm{Graph}(F)$, то есть $\eta \in F(\xi) \cap H$.

График $\mathrm{Graph}(F)$ будем называть H-(α, β)-*поисково-замкнутым*, если он содержит пределы всех своих (α, β)-поисковых последовательностей.

Введем следующие обозначения. Расширенный прообраз подпространства H при отображении F — это множество $F_+^{-1}(H) = \{x \in X \mid d(F(x), H) = 0\}$. Расширенное множество совпадений набора многозначных отображений $F_1, \ldots, F_n$ — это множество $\mathrm{Coin}_+(F_1, \ldots, F_n) = \{x \in X \mid D((F_1 \times \ldots \times F_n)(x), \Delta_n) = 0\}$.

Следующая теорема (предыдущая версия её имеется в [12]) решает проблему каскадного поиска расширенного прообраза и полного прообраза замкнутого подпространства при действии многозначного отображения. Отметим, что всюду здесь компактные метрические пространства рассматриваются как пространства, в которых у всякой последовательности есть сходящаяся подпоследовательность.

Теорема 2.10. *Пусть* $(X, \rho), (Y, d)$ — *метрические пространства,* $F : X \to C(Y)$ *секвенциально полунепрерывное сверху многозначное отображение, и* $H \subset Y$ *замкнутое подпространство в* Y. *Предположим, что многозначный функционал* $d_{(F,H)}(x) := \{d = d(y, H) \mid y \in F(x)\}$, $x \in X$, *является* (α, β)-*поисковым на* X *для некоторых* α, β, $0 < \beta < \alpha$, *и выполнено одно из следующих двух условий*:

(a) X *полно*;

(b) H *компактно и график* $\mathrm{Graph}(F)$ H-(α, β)-*поисково-полон.*

Тогда на X *существует мультикаскад с предельным множеством* A, *где либо* $A = F_+^{-1}(H)$ (*в случае* (a)), *либо* $A = F^{-1}(H)$ (*в случае* (b)), *и в обоих случаях расстояние между начальной точкой* $x_0 \in X$ *и каждой соответствующей предельной точкой из множества* A *не превышает* $\dfrac{d(F(x_0), H)}{\alpha - \beta}$.

Из теоремы 2.10 получаются следующие теоремы о расширенном и обычном множествах совпадений конечного набора многозначных отображений.

Теорема 2.11. *Пусть X — полное метрическое пространство, $F_1, \ldots, F_n : X \to C(Y)$ — многозначные секвенциально полунепрерывные сверху отображения, и $F = F_1 \times \ldots \times F_n : X \to C(Y^n)$. Пусть существуют числа $0 < \beta < \alpha$ такие, что многозначный функционал $\Psi(x) := \{\psi = D(y, \Delta_n) \mid y \in F(x)\}$ является (α, β)-поисковым на X.*

Тогда существует мультикаскад на X с предельным множеством $\mathrm{Coin}_+(F_1, \ldots, F_n)$, и расстояние между любой начальной точкой $x_0 \in X$ и каждой соответствующей ей предельной точкой не превышает $\dfrac{D(F(x_0), \Delta_n)}{\alpha - \beta}$.

Иначе говоря, для любого $x_0 \in X$ существует последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\ldots}$ (вообще говоря, не единственная), начинающаяся с x_0, итерационная относительно генератора этого мультикаскада $x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \xi \in X$, такая, что $\xi \in \mathrm{Coin}_+(F_1, \ldots, F_n)$ и $\rho(x_0, \xi) \leqslant \dfrac{D(F(x_0), \Delta_n)}{\alpha - \beta}$.

Теорема 2.12. *Пусть $F_1, \ldots, F_n : X \to C(Y)$ — многозначные секвенциально полунепрерывные сверху отображения, и $F = F_1 \times \ldots \times F_n : X \to C(Y^n)$. Пусть многозначный функционал $\Psi(x) := \{\psi = D(y, \Delta_n) \mid y \in F(x)\}$ является (α, β)-поисковым на X, где $0 < \beta < \alpha$. Пусть Y компактно, и хотя бы один из графиков $\mathrm{Graph}(F_1), \ldots, \mathrm{Graph}(F_n)$ полон.*

Тогда существует мультикаскад на X с предельным множеством $\mathrm{Coin}(F_1, \ldots, F_n)$, и расстояние между любой начальной точкой $x_0 \in X$ и любой соответствующей ей предельной точкой не превышает $\dfrac{D(F(x_0), \Delta_n)}{\alpha - \beta}$.

Иначе говоря, для каждой начальной точки $x_0 \in X$ имеется последовательность $\{x_m\}_{m=0,1,\ldots}$ (вообще говоря, не единственная), начинающаяся с x_0, итерационная относительно генератора этого мультикаскада, такая, что $x_m \underset{m\to\infty}{\longrightarrow} \xi \in X$, $\xi \in \mathrm{Coin}(F_1, \ldots, F_n)$ и $\rho(x_0, \xi) \leqslant \dfrac{D(F(x_0), \Delta_n)}{\alpha - \beta}$.

Отметим, что, как показано в [12], из теоремы 2.12 при $n = 2$ следует утверждение [1, теорема 3 и примечание 1].

На этом заканчиваем небольшой обзор результатов о существовании нулей (α, β)-поискового функционала в метрическом пространстве. Отметим ещё, что в недавних работах [9, 10] принцип поиска нулей (α, β)-поискового функционала распространён на некоторые квази-метрические пространства (где неравенство треугольника в определении метрики заменено более общим условием). В этих работах получены результаты, обобщающие некоторые теоремы из [2, 4].

3. Проблема сохранения существования нулей у параметрического семейства функционалов в метрическом пространстве. Сравнение с известными результатами

В этом разделе рассматривается проблема сохранения, при изменении числового параметра, существования нулей у однопараметрического семейства многозначных (α, β)-поисковых функционалов на некотором открытом подмножестве метрического пространства. В статье [14] доказана теорема, где найдены достаточные условия для решения этой задачи. Представлены также следствия из этой теоремы: о сохранении существования прообразов данного замкнутого подпространства у параметрического семейства многозначных отображений метрических пространств, о сохранении существования точек совпадения у конечного набора из двух и более семейств многозначных отображений метрических пространств, о сохранении существования общих неподвижных точек у набора семейств многозначных отображений в себя метрического пространства.

В качестве простого частного случая из полученных результатов вытекает теорема М. Фригон и А. Гранаса [15, 16] (1994 г.) о неподвижных точках сжимающего семейства многозначных отображений.

Стоит отметить, что сжимающее семейство, рассматриваемое в упомянутых работах М. Фригон и А. Гранаса, является непрерывной гомотопией. В отличие от него, семейство многозначных отображений, изучаемое в [14], гомотопией, вообще говоря, не является, поскольку не обладает свойством непрерывности.

Теоремы о существовании неподвижной точки сжимающих отображений имеют многочисленные применения в самых разных областях математики и являются основополагающими результатами в теории неподвижных точек, так как они, кроме существования и единственности неподвижной точки, представляют аппроксимационный процесс её отыскания и оценку расстояния до неё от любой начальной точки.

Самостоятельный интерес представляет задача о сохранении, при изменении числового параметра, существования неподвижных точек на заданном подмножестве метрического пространства у однопараметрического семейства многозначных сжимающих отображений. Эта задача, как уже говорилось, рассматривалась в [15, 16].

В этом разделе будут использованы следующие обозначения.

Пусть (X, d) — метрическое пространство. Будем обозначать $\mathrm{C}(X)$ — совокупность непустых замкнутых подмножеств X, $\mathrm{CB}(X)$ — совокупность непустых замкнутых и ограниченных подмножеств X, $\mathrm{Com}(X)$ — совокупность непустых компактных подмножеств X. Для любых непустых подмножеств A, B множества X будем обозначать $d(A, B) := \inf\{d(a, b) \mid a \in A,\ b \in B\}$ — расстояние между подмножествами A и B, $d(a, B) := \inf\{d(a, b) | b \in B\} = d(\{a\}, B)$ — расстояние от точки a до подмножества B, $h(A, B) := \sup\limits_{a\in A} d(a, B)$ — отклонение подмножества A от подмножества B, $H(A, B) := \max\{h(A, B), h(B, A)\}$ — расстояние Хаусдорфа между подмножествами A и B. Через $B(a, r) = \{x \in X \mid d(a, x) \leqslant r\}$, как обычно, будем обозначать замкнутый шар радиуса r с центром в точке $a \in X$. Символом «$\subset$» («$\subseteq$») будем обозначать отношение строгого (нестрогого) включения.

Следующее определение дано в [15].

Определение 3.1. Пусть (X, ρ) и (Y, d) — метрические пространства. Семейство $T = \{T_t : X \to \mathrm{CB}(Y)\}$ многозначных отображений с параметром $t \in [0; 1]$ называется *λ-сжимающим*, если:

1) для некоторого λ, $0 \leqslant \lambda < 1$, верно, что $H(T_t(x'), T_t(x'')) \leqslant \lambda\rho(x', x'')$ для всех $t \in [0; 1]$ и $x', x'' \in X$;
2) существует непрерывная возрастающая функция $\theta : [0; 1] \to \mathbb{R}$ такая, что $H(T_{t'}(x), T_{t''}(x)) \leqslant |\theta(t') - \theta(t'')|$ для всех $x \in X$ и $t', t'' \in [0; 1]$.

В [15] изучен вопрос о сохранении существования неподвижных точек у λ-сжимающего семейства отображений, определенных на некотором открытом подмножестве полного метрического пространства, и доказано следующее утверждение.

Теорема 3.1 (см. [15, 16]). *Пусть (X, d) — полное метрическое пространство, $U \subset X$ — открытое подмножество, и $\{T_t : \overline{U} \to \mathrm{CB}(X)\}$ — λ-сжимающее семейство отображений, не имеющих неподвижных точек на границе ∂U. Тогда если T_0 имеет неподвижную точку в U, то T_1 также имеет неподвижную точку в U.*

Основным результатом работы [14] является теорема (см. теорему 3.3 ниже) о сохранении существования нулей при изменении параметра у однопараметрического семейства (α, β)-поисковых функционалов на открытом подмножестве метрического пространства.

Ниже вводится более общее понятие многозначного функционала, *(α, β)-поискового на некотором подмножестве* метрического пространства (X, d), и доказывается теорема о существовании и поиске нуля такого функционала на этом подмножестве.

Для непрерывной возрастающей функции $\theta : [0; 1] \to \mathbb{R}$ вводится понятие *θ-непрерывного однопараметрического семейства (α, β)-поисковых функционалов.*

Определение 3.2. Пусть (X, d) — метрическое пространство, $Y \subseteq X$, $0 \leqslant \beta < \alpha$. Многозначный функционал $\Phi : Y \rightrightarrows \mathbb{R}_+$ называется *(α, β)-поисковым на Y*, если для любой пары $(x, c) \in \mathrm{Graph}(\Phi)$, где $x \in Y$, $c \in \Phi(x)$, $c \leqslant (\alpha - \beta)r$ и $\overline{B_r(x)} \subset Y$, существует пара $(x', c') \in \mathrm{Graph}(\Phi)$, для которой $d(x, x') \leqslant \dfrac{1}{\alpha}c$, $c' \leqslant \dfrac{\beta}{\alpha}c$.

Верна следующая теорема о существовании нулей в Y у функционала, который является (α, β)-*поисковым на Y*.

Теорема 3.2. *Пусть (X,d) — метрическое пространство, $Y \subseteq X$, $\Phi : Y \rightrightarrows \mathbb{R}_+$ — многозначный функционал, являющийся (α,β)-поисковым на Y, с поисково-полным графиком, $0 \leqslant \beta < \alpha$. Пусть заданы $x_0 \in Y$, $c_0 \in \Phi(x_0)$ и $r > 0$ такие, что*

1) $\overline{B(x_0,r)} \subseteq Y$,
2) $c_0 \leqslant \alpha\Big(1 - \dfrac{\beta}{\alpha}\Big)r$.

Тогда существует точка $\xi \in \overline{B(x_0,r)}$ такая, что $0 \in \Phi(\xi)$.

Доказательство. Доказательство данной теоремы вполне аналогично доказательству [14, теорема 4]. Приведем его кратко.

Начиная с точки x_0, с помощью индукции легко построить последовательности $\{x_n\} \subseteq \overline{B(x_0,r)}$ и $\{c_n\}$ такие, что для любого $n \in \{0\} \cup \mathbb{N}$ выполнены условия:

$$c_n \in \Phi(x_n); \quad d(x_n, x_{n+1}) \leqslant \frac{1}{\alpha}c_n;$$

$$c_{n+1} \leqslant \frac{\beta}{\alpha}c_n \leqslant (\frac{\beta}{\alpha})^{n+1}c_0 \leqslant (\frac{\beta}{\alpha})^{n+1}\alpha(1-\frac{\beta}{\alpha})r = \frac{\beta^{n+1}}{\alpha^n}(1-\frac{\beta}{\alpha})r,$$

откуда следует, что верна оценка: $d(x_n,x_0) \leqslant \Big(1 - \dfrac{\beta^n}{\alpha^n}\Big)r < r$.

Поэтому ясно, что каждая точка x_n $(n \geqslant 1)$ этой последовательности лежит в шаре $B(x_0,r)$. Кроме того, понятно, что последовательность $\{x_n\}$ является поисковой. Следовательно,так как график $\mathrm{Graph}(\Phi)$ поисково-полон, существует точка $\xi \in Y$ такая, что $x_n \to \xi$ и $0 \in \Phi(\xi)$. Остается лишь заметить, что в силу замкнутости $B(x_0,r)$, $\xi \in B(x_0,r)$. $\square$

Рассмотрим теперь вопрос о сохранении существования нулей при изменении параметра у некоторого специального однопараметрического семейства поисковых функционалов. Нам понадобится следующее простое вспомогательное утверждение.

Лемма 3.1. *Пусть A, B — непустые замкнутые ограниченные множества в метрическом пространстве (X,d). Тогда для любого $q > 1$ верно, что для каждого $x \in A$ существует такое $z \in B$, что $d(x,z) \leqslant qH(A,B)$.*

Определение 3.3. Пусть (X,d) — метрическое пространство, $Y \subseteq X$. Пусть $\theta : [0;1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная возрастающая функция. Однопараметрическое семейство многозначных функционалов $\Phi = \{\Phi_t : Y \rightrightarrows \mathbb{R}_+\}_{t\in[0;1]}$ будем называть *θ-непрерывным* на Y, если для каждого $x \in Y$, любых $t', t'' \in [0;1]$ и любого $c' \in \Phi_{t'}(x)$ существует такое значение $c'' \in \Phi_{t''}(x)$, что $|c' - c''| \leqslant |\theta(t') - \theta(t'')|$.

Для любых подмножеств Z, Y, где $Z \subseteq Y \subseteq X$, и семейства $\Phi = \{\Phi_t : Y \rightrightarrows \mathbb{R}_+\}_{t\in[0;1]}$ многозначных функционалов определим следующее множество:

$$M_Z(\Phi) := \{(x,t) \in Z \times [0;1] \mid 0 \in \Phi_t(x)\}. \tag{3.1}$$

В пространстве $X\times[0;1]$ (и, в частности, в $Y\times[0;1]$) рассматривается метрика $D : (X\times[0;1])^2 \to \mathbb{R}_+$, определяемая по правилу $D((x',t'),(x'',t'')) = d(x',x'')+|t'-t''|$ для любых $x', x'' \in X$ и любых $t', t'' \in [0;1]$. Сходимость в этой метрике, очевидно, эквивалентна покомпонентной сходимости.

Верно следующее вспомогательное утверждение.

Предложение 3.1. *Пусть (X,d) — метрическое пространство, $U \subset X$ — некоторое открытое подмножество в X, $\theta : [0;1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная возрастающая функция. Пусть на $\overline{U}$ задано однопараметрическое θ-непрерывное семейство $\Phi = \{\Phi_t : \overline{U} \rightrightarrows \mathbb{R}_+\}_{t\in[0;1]}$ многозначных функционалов, причём для каждого $t \in [0;1]$ график $\mathrm{Graph}(\Phi_t)$ является (α,β)-поисково-полным. Тогда, если $M_{\partial U}(\Phi) = \varnothing$, то $M_U(\Phi)$ замкнуто.*

Доказательство этого утверждения стандартно, и его можно найти в [14].

Определение 3.4. Будем говорить, что параметрическое семейство Φ многозначных функционалов *θ-непрерывно на множестве $M_U(\Phi)$*, если для любой пары $(x,t) \in M_U(\Phi)$ (то есть где $0 \in \Phi_t(x)$) и любого $t' \in [0;1]$ верно, что существует $c' \in \Phi_{t'}$ такое, что $c' \leqslant |\theta(t) - \theta(t')|$.

Теорема 3.3 (см. [14]). *Пусть (X,d) — метрическое пространство, $U \subset X$ — открытое подмножество X. Пусть задано $\Phi = \{\Phi_t : \overline{U} \rightrightarrows \mathbb{R}_+\}_{t\in[0;1]}$ — θ-непрерывное на множестве $M_U(\Phi)$ параметрическое семейство (α,β)-поисковых на $\overline{U}$ многозначных функционалов с поисково-полными графиками, причём множество $M = M_U(\Phi)$ непусто и замкнуто. Пусть $\preceq$ — отношение частичного порядка на M, заданное по правилу:*

$$(x',t') \preceq (x'',t'') \Leftrightarrow \begin{cases} t' \leqslant t'', \\ d(x',x'') \leqslant \dfrac{1}{\alpha-\beta}(\theta(t'')-\theta(t')). \end{cases}$$

Тогда в $(M,\preceq)$ имеется максимальный элемент. Причем для любой пары $(x,c) \in M$ существует максимальный элемент $(\xi,\bar{t})$ такой, что $(x,t) \preceq (\xi,\bar{t})$.

Теорема 3.4. *Пусть (X,d) — метрическое пространство, $U \subset X$ — открытое подмножество в X, $\theta : [0;1] \to \mathbb{R}$ — непрерывная возрастающая функция. Пусть задано однопараметрическое семейство $\Phi = \{\Phi_t : \overline{U} \rightrightarrows \mathbb{R}_+\}_{t\in[0;1]}$ многозначных (α,β)-поисковых на $\overline{U}$ функционалов, и либо их графики поисково-полны, либо, если X полно, их графики $\{0\}$-замкнуты. Пусть множество $M = M_U(\Phi)$ замкнуто и семейство Φ θ-непрерывно на M. Тогда, если существует элемент вида $(x_0,0) \in M$, то существует и элемент вида $(x_1,1) \in M$.*

Доказательство этой теоремы практически совпадает с доказательством её первоначальной версии в [14].

В качестве приложений этой теоремы в [14] рассматривалась задача продолжения по параметру существования прообразов замкнутого подпространства у заданного параметрического семейства многозначных отображений, проблема сохранения существования, при изменении параметра, точек совпадения, а также общих неподвижных точек у параметрического семейства многозначных отображений.

Приведем необходимые определения и некоторые из этих теорем.

Определение 3.5. Пусть $(X,\rho),(Y,d)$ — метрические пространства, $Q \subseteq Y$ — замкнутое подпространство в Y, $Z \subseteq X$ — подмножество в X. Пусть $F : Z \to C(Y)$ — многозначное отображение. График $\mathrm{Graph}(F) := \{(x,y) \in Z \times Y | y \in F(x)\}$ отображения F называется Q-полным, если любая фундаментальная последовательность $\{(x_n,y_n)\}_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathrm{Graph}(F)$, где $d(y_n,Q) \to 0$, сходится к некоторому элементу $(\xi,\eta) \in \mathrm{Graph}(F)$, где $\eta \in Q$.

Теорема 3.5. *Пусть (X,ρ), (Y,d) — метрические пространства, $Q \subseteq Y$ — замкнутое подпространство в Y, $U \subset X$ — открытое подмножество X. Пусть $T = \{T_t\}_{t\in[0;1]}$ — однопараметрическое семейство многозначных отображений $T_t : \overline{U} \to \mathrm{C}(Y)$. Пусть для некоторых чисел α,β, $0 \leqslant \beta < \alpha$, непрерывной возрастающей функции $\theta : [0;1] \to \mathbb{R}$ и любого $t \in [0;1]$ выполнены следующие условия* 1)–3):

1) *график* $\mathrm{Graph}(T_t)$ *является* $-Q$*-полным;*
2) *для любого $x \in \overline{U}$ и любых $r > 0$, $y \in T_t(x)$ таких, что $B(x;r) \subseteq \overline{U}$ и $c = d(y,Q) \leqslant (\alpha-\beta)r$, существуют такие точка $x' \in B(x;c/\alpha)$ и значение $y' \in T_t(x')$, что $c' = d(y',Q) \leqslant \dfrac{\beta}{\alpha}c$;*
3) *множество $M := \{(x,t) \in U \times [0;1] | x \in T_t^{-1}(Q)\}$ замкнуто.*

Пусть, кроме того, для любой пары $(x,t) \in M$ и любого $t' \in [0;1]$ верно неравенство $H(T_t(x),T_{t'}(x)) \leqslant |\theta(t')-\theta(t)|$.

Тогда, если $T_0^{-1}(Q) \cap U \neq \varnothing$, то $T_1^{-1}(Q) \cap U \neq \varnothing$.

В данной формулировке, с учетом замечаний в статье [14], ослаблены условия 1) и 3) теоремы и условие на последнее неравенство. Доказательство этой версии теоремы практически дословно совпадает с доказательством её версии в [14].

На основе теоремы 3.4 в [14] получены также теоремы о сохранении существования совпадений у конечного набора параметрических семейств многозначных отображений метрических пространств, а также о сохранении существования общих неподвижных точек у конечного набора таких семейств.

Приведем ниже частный случай теоремы о сохранении существования совпадений, а именно, теорему о сохранении совпадений *у двух параметрических семейств* многозначных отображений.

Отметим, что в приводимой формулировке условие 5) ослаблено по сравнению с версией этой теоремы в [14] в соответствии с тем, что условие θ-непрерывности семейства функционалов в теореме 3.4 заменено на условие его θ-непрерывности на множестве M.

Теорема 3.6. *Пусть (X,ρ), (Y,d) — метрические пространства, $U \subset X$ — открытое подмножество X. Пусть заданы два параметрических семейства отображений $T = \{T_t \mid T_t : \overline{U} \to \mathrm{CB}(Y)\}_{t\in[0;1]}$ и $S = \{S_t \mid S_t : X \to \mathrm{CB}(Y)\}_{t\in[0;1]}$. Пусть также заданы числа α, β, q, $0 \leqslant \beta < \alpha$, $1 < q < \dfrac{\alpha}{\beta}$, непрерывная возрастающая функция $\theta : [0;1] \to \mathbb{R}$, и выполнены следующие условия:*

1) *для любого $t \in [0;1]$ график $\mathrm{Graph}(S_t|_{\overline{U}})$ является полным и $T_t(\overline{U}) \subseteq S_t(X)$;*
2) *для любого $t \in [0;1]$ и для любой фундаментальной последовательности $\{x_n\} \subseteq \overline{U}$, всякая последовательность $\{y_n\}$, где $y_n \in S_t(x_n)$, является фундаментальной;*
3) *для любого $t \in [0;1]$ и для любых $x', x'' \in \overline{U}$ верно, что $H(T_t(x'), T_t(x'')) \leqslant \dfrac{\beta}{q\alpha} d(S_t(x'), S_t(x''))$;*
4) *для любого $t \in [0;1]$ и для любых $x', x'' \in X$ верно неравенство $\rho(x', x'') \leqslant \dfrac{1}{\alpha} d(S_t(x'), S_t(x''))$;*
5) *для любой пары (x,t) такой, что $x \in \mathrm{Coin}(T_t, S_t)$ и любого $t' \in [0;1]$ справедливо неравенство*
$$H(T_t(x), T_{t'}(x)) + H(S_t(x), S_{t'}(x) \leqslant |\theta(t') - \theta(t)|. \tag{3.2}$$
6) *Для любого $t \in [0;1]$ $\mathrm{Coin}(T_t, S_t) \cap \partial U = \varnothing$.*

Тогда если $\mathrm{Coin}(T_0, S_0) \neq \varnothing$, то $\mathrm{Coin}(T_1, S_1) \neq \varnothing$.

Доказательство этой теоремы практически полностью совпадает с доказательством её первоначальной версии в [14].

4. Основные результаты. Проблема непрерывности по параметру множества нулей у параметрического семейства функционалов

В данном пункте рассмотрим проблему существования непрерывной однозначной ветви нулей исходного однопараметрического семейства многозначных функционалов. Для отыскания условий, которые нужно добавить к условиям теоремы 3.4 для решения данной задачи, нам понадобятся некоторые дополнительные понятия и утверждения.

Определение 4.1. Пусть (Z,μ) — метрическое пространство, $0 \leqslant \beta < \alpha$, и задан функционал $\varphi : Z \to \mathbb{R}_+$. Будем говорить, что функционал φ *слабо* (α,β)*-поисковый* на Z, если для любой точки $z \in Z$ и любого $r > 0$, таких, что $o < \varphi(z) \leqslant r$, существует точка $z' \in Z$, для которой $\varphi(z') \leqslant \dfrac{\beta}{\alpha} r$, $\mu(z,z') \leqslant r + \varphi(z')$.

В [13] доказана следующая теорема.

Теорема 4.1. *Пусть X — топологическое пространство, (Y,d) — полное (ограниченное) метрическое пространство, и $C(X,Y)$ — множество непрерывных отображений из X в Y. Определим метрику μ на $C(X,Y)$, $\mu(f,g) := \sup\limits_{x\in X} d(f(x), g(x))$. Пусть $F : X \rightrightarrows Y$ — многозначное отображение с замкнутыми образами. Определим функционал $\varphi : C(X,Y) \to \mathbb{R}_+$, полагая $\varphi(f) = \mu(f,F) := \sup\limits_{x\in X} d(f(x), F(x))$, $f \in C(X,Y)$, где $d(f(x), F(x)) := \inf\limits_{y\in F(x)} d(f(x), y)$. Предположим, что для некоторых $\alpha, \beta, 0 \leqslant \beta < \alpha$, функционал φ является слабо (α,β)-поисковым на $C(X,Y)$. Пусть также либо график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ поисково-полон, либо $C(X,Y)$ — полное пространство и график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ поисково-замкнут.*

Тогда для любого $f \in C(X,Y)$, $0 < \varphi(f) \leqslant r$, существует непрерывное сечение $\zeta \in C(X,Y)$ отображения F, причём $\mu(f,\zeta) \leqslant \dfrac{(\alpha+\beta)r}{\alpha-\beta}$.

Теперь мы можем сформулировать и доказать следующую теорему, которая представляет основной результат данной статьи.

Теорема 4.2. *Пусть выполнены все условия теоремы* 3.4*, подмножество* U *ограничено, пространство* X *полно и графики* $\mathrm{Graph}(\Phi_t)$ *функционалов* $\Phi_t, t \in [0;1]$, $\{0\}$*-замкнуты. Рассмотрим многозначное отображение* $N : I = [0;1] \rightrightarrows X$*, где* $N(t) = N_t = \mathrm{Nil}(\Phi_t) \cap U$*. Зададим в множестве* $C(I,X)$ *непрерывных отображений из* $I = [0;1]$ *в* X *метрику* μ*, полагая, для любых* $f, g \in C(I,X)$, $\mu(f,g) := \sup\limits_{t\in I} \rho(f(t), g(t))$*. Определим функционал* $\varphi : C(I,X) \to \mathbb{R}_+$*, полагая* $\varphi(f) = \mu(f,N) := \sup\limits_{t\in I} \rho(f(t), N(t))$, $f \in C(I,X)$*, где* $\rho(f(t), N(t)) := \inf\limits_{x\in N(t)} \rho(f(t), x)$*. Предположим, что для некоторых* $\bar\alpha, \bar\beta, 0 \leqslant \bar\beta < \bar\alpha$*, функционал* φ *является слабо* $(\bar\alpha, \bar\beta)$*-поисковым на* $C(I,X)$*. Пусть его график* $\mathrm{Graph}(\varphi)$ *поисково-замкнут.*

Тогда для любого $f \in C(I,X)$, $0 < \varphi(f) \leqslant r$*, существует непрерывное сечение* $\zeta \in C(I,X)$ *отображения* N*, причём* $\mu(f,\zeta) \leqslant \dfrac{(\bar\alpha + \bar\beta)r}{\bar\alpha - \bar\beta}$*. Иными словами, существует непрерывная по* t, $t \in [0;1]$*, ветвь нулей семейства функционалов* $\Phi = \{\Phi_t\}_{t\in[0;1]}$.

Доказательство. В силу теоремы 3.4 имеем $N(t) \neq \varnothing$ для любого $t \in [0;1]$. Кроме того, так как множество U ограничено, то образы $N(t)$ отображения N тоже ограничены, следовательно, метрика μ корректно определена. В силу условия о том, что графики всех функционалов Φ_t являются $\{0\}$-замкнутыми, множество $N(t)$ замкнуто для любого $t \in [0;1]$. В самом деле, пусть $\{x_n\}$ — какая-нибудь сходящаяся последовательность в $N(t)$, $x_n \to x_0$. Тогда последовательность $\{(x_n, 0)\} \subseteq \mathrm{Graph}(\Phi_t)$, очевидно, сходится к элементу $(x_0, 0) \in \mathrm{Graph}(\Phi_t)$. Так как пространство (X, ρ) полно и в множестве $C(I,X)$ непрерывных отображений задана равномерная метрика μ, то пространство $(C(I,X), \mu)$ также полно. Далее, по условию график $\mathrm{Graph}(\varphi)$ поисково-замкнут. Итак, в данной ситуации для многозначного отображения N выполнены все условия теоремы 4.1. В силу теоремы 4.1 существует нуль функционала φ в $C(I,X)$, то есть такое непрерывное отображение $\zeta \in C(I,X)$, что $\varphi(\zeta) = \mu(\zeta, N) = 0$. Это означает, что для любого $t \in I = [0;1]$ верно, что $\rho(\zeta(t), N(t)) = 0$. Поскольку образы $N(t)$ замкнуты, то это означает, что $\zeta(t) \in N(t)$. $\square$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арутюнов А. В.* Накрывающие отображения в метрических пространствах и неподвижные точки// Докл РАН. — 2007. — *416*, № 2. — С. 151–155.
2. *Арутюнов А. В., Грешнов А. В.* (q1, q2)-квазиметрические пространства. Накрывающие отображения и точки совпадения// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2018. — *82*, № 2. — С. 3–32.
3. *Борисович Ю. Г., Гельман Б. Д., Мышкис А. Д., Обуховский В. В.* Введение в теорию многозначных отображений и дифференциальных включений. — М.: ЛИБРОКОМ, 2011.
4. *Жуковский Е. С.* Неподвижные точки сжимающих отображений f-квазиметрических пространств// Сиб. мат. ж. — 2018. — *59*, № 6. — С. 1338–1350.
5. *Колмогоров А. Н., Фомин С. В.* Элементы теории функций и функционального анализа. — М.: Наука, 1972.
6. *Фоменко Т. Н.* О приближении к точкам совпадения и общим неподвижным точкам набора отображений метрических пространств// Мат. заметки. — 2009. — *86*, № 1. — С. 110–125.
7. *Фоменко Т. Н.* К задаче каскадного поиска множества совпадений набора многозначных отображений// Мат. заметки. — 2009. — *86*, № 2. — С. 276–281.
8. *Фоменко Т. Н.* Каскадный поиск прообразов и совпадений: глобальная и локальная версии// Мат. заметки. — 2013. — *93*, № 1. — С. 127–143.
9. *Фоменко Т. Н.* Поиск нулей функционалов, неподвижные точки и совпадения отображений в квазиметрических пространствах// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2019. — № 6. — С. 14–22.
10. *Фоменко Т. Н.* Существование нулей многозначных функционалов, совпадения и неподвижные точки в f-квазиметрическом пространстве// Мат. заметки. — 2021. — *110*, № 4. — С. 598–609.
11. *Banach S.* Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales// Fund. Math. — 1922. — *3*. — C. 133–181.
12. *Fomenko T. N.* Cascade search principle and its applications to the coincidence problem of n one-valued or multi-valued mappings// Topology Appl. — 2010. — *157*. — C. 760–773.
13. *Fomenko T. N.* Zeros of functionals and a parametric version of Michael selection theorem// Lobachevskii J. Math. — 2022. — *43*, № 3. — C. 1314–1321.
14. *Fomenko T. N., Zakharyan Ju. N.* Preservation of the existence of zeros in a family of set-valued functionals and some consequences// Math. Notes. — 2020. — *108*, № 6. — C. 802–813.

15. *Frigon M.* On continuation methods for contractive and nonexpansive mappings// В сб.: «Recent advances on metric fixed point theory». — Sevilla: Univ. of Sevilla, 1996. — C. 19–30.
16. *Frigon M., Granas A.* Resultats du type de Leray—Schauder pour des contractions multivoques// Topol. Methods Nonlinear Anal. — 1994. — *4*. — C. 197–208.

Т. Н. Фоменко
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия
E-mail: `tn-fomenko@yandex.ru`

UDC 515.124+515.126.4+515.126.83
DOI: 10.22363/2413-3639-2023-69-1-185-200
EDN: FQFZEV

Method of search functionals and its applications in fixed point and coincidence theory

T. N. Fomenko

M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

The paper contains a survey of several results from the author's papers and joint papers by the author and Yu. N. Zakharyan, both on the zero existence and approximation for single-valued and multi-valued (α, β)-search functionals, and also on the zero existence preservation for parametric family of such functionals, under the parameter changing. Some corollaries of these results in the fixed point and coincidence theory of single-valued and multi-valued mappings of metric spaces are also given. The comparison is provided with some known results by other authors. In the concluding part of the paper, we investigate the problem on the existence of a parameter-continuous single-valued branch of zeros for a parametric family of search functionals. A theorem on the existence of solution of this problem is proved.

Keywords: search functionals, existence of zeros, fixed points, coincidence points

For citation: T. N. Fomenko, "Method of search functionals and its applications in fixed point and coincidence theory," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2023, vol. **69**, No. 1, 185–200. `http://doi.org/10.22363/2413-3639-2023-69-1-185-200`

REFERENCES

1. A. V. Arutyunov, "Nakryvayushchie otobrazheniya v metricheskikh prostranstvakh i nepodvizhnye tochki" [Covering mappings in metric spaces and fixed points], *Dokl RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2007, **416**, No. 2, 151–155 (in Russian).
2. A. V. Arutyunov and A. V. Greshnov, "(q1, q2)-kvazimetricheskie prostranstva. Nakryvayushchie otobrazheniya i tochki sovpadeniya" [(q1, q2)-quasimetric spaces. Covering mappings and coincidence points], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2018, **82**, No. 2, 3–32 (in Russian).
3. Yu. G. Borisovich, B. D. Gel'man, A. D. Myshkis, and V. V. Obukhovskiy, *Vvedenie v teoriyu mnogoznachnykh otobrazheniy i differentsial'nykh vklyucheniy* [Introduction to the Theory of Multivalued Mappings and Differential Inclusions], LIBROKOM, Moscow, 2011 (in Russian).
4. E. S. Zhukovskiy, "Nepodvizhnye tochki szhimayushchikh otobrazheniy f-kvazimetricheskikh prostranstv" [Fixed points of contraction mappings of f-quasimetric spaces], *Sib. mat. zh.* [Sib. Math. J.], 2018, **59**, No. 6, 1338–1350 (in Russian).

5. A. N. Kolmogorov and S. V. Fomin, *Elementy teorii funktsiy i funktsional'nogo analiza* [Elements of the Theory of Functions and Functional Analysis], Nauka, Moscow, 1972 (in Russian).
6. T. N. Fomenko, "O priblizhenii k tochkam sovpadeniya i obshchim nepodvizhnym tochkam nabora otobrazheniy metricheskikh prostranstv" [Approximation of coincidence points and common fixed points of a collection of mappings of metric spaces], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2009, **86**, No. 1, 110–125 (in Russian).
7. T. N. Fomenko, "K zadache kaskadnogo poiska mnozhestva sovpadeniy nabora mnogoznachnykh otobrazheniy" [Cascade search of the coincidence set of collections of multivalued mappings], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2009, **86**, No. 2, 276–281 (in Russian).
8. T. N. Fomenko, "Kaskadnyy poisk proobrazov i sovpadeniy: global'naya i lokal'naya versii" [Cascade search for preimages and coincidences: global and local versions], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2013, **93**, No. 1, 127–143 (in Russian).
9. T. N. Fomenko, "Poisk nuley funktsionalov, nepodvizhnye tochki i sovpadeniya otobrazheniy v kvazimetricheskikh prostranstvakh" [Search for zeros of functionals, fixed points, and mappings coincidence in quasimetric spaces], *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Moscow Univ. Math. Bull.], 2019, No. 6, 14–22 (in Russian).
10. T. N. Fomenko, "Sushchestvovanie nuley mnogoznachnykh funktsionalov, sovpadeniya i nepodvizhnye tochki v f-kvazimetricheskom prostranstve" [The existence of zeros of multivalued functionals, coincidence points, and fixed points in f-quasimetric spaces], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2021, **110**, No. 4, 598–609 (in Russian).
11. S. Banach, "Sur les operations dans les ensembles abstraits et leur application aux equations integrales," *Fund. Math.*, 1922, **3**, 133–181.
12. T. N. Fomenko, "Cascade search principle and its applications to the coincidence problem of n one-valued or multi-valued mappings," *Topology Appl.*, 2010, **157**, 760–773.
13. T. N. Fomenko, "Zeros of functionals and a parametric version of Michael selection theorem," *Lobachevskii J. Math.*, 2022, **43**, No. 3, 1314–1321.
14. T. N. Fomenko and Yu. N. Zakharyan, "Preservation of the existence of zeros in a family of set-valued functionals and some consequences," *Math. Notes*, 2020, **108**, No. 6, 802–813.
15. M. Frigon, "On continuation methods for contractive and nonexpansive mappings," In: *Recent advances on metric fixed point theory*, Univ. of Sevilla, Sevilla, 1996, pp. 19–30.
16. M. Frigon and A. Granas, "Resultats du type de Leray—Schauder pour des contractions multivoques," *Topol. Methods Nonlinear Anal.*, 1994, **4**, 197–208.

T. N. Fomenko
M. V. Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
E-mail: `tn-fomenko@yandex.ru`