

***СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА.
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ
НАПРАВЛЕНИЯ***

Том 51, 2013



РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

Редакционная коллегия

Главный редактор:

Р.В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН)

Заместитель главного редактора:

А.Л. Скубачевский (Российский университет дружбы народов)

Члены редколлегии:

А.А. Азрачев (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, SISSA)

Е.С. Голод (Московский государственный университет)

Н.Д. Копачевский (Таврический национальный университет)

П.С. Красильников (Московский авиационный институт)

А.В. Овчинников (Московский государственный университет)

В.Л. Попов (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН)

А.В. Сарычев (Флорентийский университет)

Индекс журнала в каталоге подписных изданий агентства «Роспечать» — 36832

**СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА.
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ
НАПРАВЛЕНИЯ**

Том 51, 2013

Топология



РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Длина экстремальной сети в нормированном пространстве: формула Максвелла (А. Г. Банникова, Д. П. Ильютко, И. М. Никонов)	5
Инвариант узлов в утолщенных поверхностях (М. В. Зенкина)	21
Граф-зацепления: нереализуемость, ориентация и полином Джонса (Д. П. Ильютко, В. С. Сафина)	33
О больших подграфах графа расстояний, имеющих маленькое хроматическое число (А. А. Коткин, А. М. Райгородский)	64
Об объеме гиперболического октаэдра с нетривиальными симметриями (В. А. Краснов)	74
О комбинаторике разведений (М. В. Крисман)	87
О хроматических числах целочисленных и рациональных решеток (В. О. Мантуров)	110
Слабые четности и функториальные отображения (И. М. Никонов)	123
K -группы Брунса—Губеладзе для четырехугольной пирамиды (Ф. Ю. Попеленский, М. В. Приходько)	142

ДЛИНА ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ СЕТИ В НОРМИРОВАННОМ ПРОСТРАНСТВЕ: ФОРМУЛА МАКСВЕЛЛА

© 2013 г. А. Г. БАННИКОВА, Д. П. ИЛЬЮТКО, И. М. НИКОНОВ

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются локально минимальные и экстремальные сети в нормированных пространствах. Известно, что в случае евклидова пространства эти классы совпадают, и длина локально минимальной сети может быть найдена по координатам граничных вершин и направлениям граничных ребер (формула Максвелла). Более того, как показали Иванов и Тужилин [3], длина локально минимальной сети в евклидовом пространстве может быть найдена по координатам граничных вершин и структуре сети. В случае произвольной нормы не каждая локально минимальная сеть является экстремальной, и аналог упомянутой выше формулы имеет место только для экстремальных сетей, что является основным результатом настоящей работы. Кроме того, мы обобщаем формулу Максвелла на случай экстремальных сетей в нормированных пространствах и явно приводим нормирующие функционалы, фигурирующие в данной формуле, для некоторых классов нормированных пространств.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующую задачу. Пусть дано конечное множество точек на плоскости. Требуется построить связный граф, множество вершин которого содержит данное множество точек и длина которого минимальна. Данная задача в литературе известна как *проблема Штейнера*. Решение этой задачи называется *кратчайшей сетью* [1, 2, 14, 15]. Очевидно, что решение поставленной задачи будет являться вложенным в плоскость деревом, все ребра которого являются прямолинейными отрезками, и дерево не будет содержать дополнительных вершин (т. е. тех, которые добавляются при построении, такие вершины называются *внутренними*) степени один. Отметим, что кратчайшая сеть не является единственной.

Вместо евклидовой плоскости можно рассматривать произвольное риманово многообразие или метрическое пространство. Но даже в случае евклидовой плоскости задача описания класса кратчайших сетей является довольно трудной. Поэтому сначала рассматриваются сети кратчайшие в малом, так называемые *локально минимальные*, и сети, длина которых не уменьшается при малых деформациях, — *экстремальные сети*. Отметим, что с точки зрения римановой геометрии локально минимальные сети являются естественным обобщением обычных геодезических.

Нетрудно показать, что каждая экстремальная сеть является локально минимальной [2, 6, 8]. Хорошо известно, что в случае римановых многообразий класс локально минимальных сетей совпадает с классом экстремальных сетей [1, 2, 14, 15], а в случае произвольного нормированного пространства совпадение классов не имеет место [1, 2, 4, 6–8, 13, 15]. Равенство имеет место только в случае гладкой нормы, т. е. когда в каждой точке единичной сферы существует единственная опорная плоскость. Локальная структура локально минимальных сетей на нормированных плоскостях хорошо изучена, см., например, [2, 5, 17]. Степени вершин ограничены четырьмя в случае внутренних вершин и шестью в случае *граничных вершин* (это заданные вершины). Несмотря на все полученные ограничения на структуру локально минимальных сетей, их топология может быть достаточно сложной, и их число с увеличением количества граничных точек растет очень быстро. Что касается экстремальных сетей, то для некоторых классов нормированных плоскостей их структура описана, см., например, [6–10] для λ -нормированных плоскостей (единичная окружность является правильным 2λ -угольником).

Несмотря на возможную довольно сложную структуру локально минимальных сетей на евклидовой плоскости, можно найти их длину, имея только информацию о граничных вершинах

и граничных ребрах (ребрах, инцидентных граничным вершинам). Классическая формула Максвелла [12] позволяет вычислить длину плоского локально минимального бинарного дерева по координатам граничных вершин и направлениям приходящих в них ребер. В работе [3] Иванов и Тужилин получили формулу длины для локально минимальных сетей в евклидовом пространстве, которые могут содержать вырожденные ребра. Оказывается, что для вычисления длины такой сети достаточно знать координаты граничных вершин и топологию сети. Ответом является максимальное значение некоторой линейной функции на выпуклом компактном подмножестве евклидова пространства, образованном пересечением цилиндров.

В случае произвольной нормы локально минимальные сети, затягивающие данное множество точек и имеющие одинаковые направления граничных ребер, могут иметь разную длину. Поэтому для них формула Иванова и Тужилина [3] неприменима. Вместо локально минимальных сетей нужно рассматривать экстремальные сети. Мы обобщаем результаты Иванова и Тужилина, а именно, для экстремальной сети в нормированном пространстве мы строим линейную функцию на некотором компактном подмножестве евклидова пространства, максимум которой дает длину сети.

Другая проблема состоит в том, что в случае негладкой нормы нормирующий функционал вектора (см. определения ниже) определяется неоднозначно. В данной работе мы показываем, что можно подобрать нормирующие функционалы граничных ребер для вычисления длины экстремальной сети по формуле Максвелла. Для некоторых нормированных плоскостей мы явно строим соответствующие нормирующие функционалы.

Данная статья устроена следующим образом. В разделе 2 мы даем основные определения, касающиеся локально минимальных и экстремальных сетей в нормированных пространствах. Раздел 3 посвящен формулам длины экстремальной сети. Мы доказываем, что существуют нормирующие функционалы граничных ребер экстремальной сети, подстановка которых в формулу Максвелла дает длину сети (теорема 3.1). Также мы предьявляем способ нахождения длины экстремальной сети, зная лишь положения граничных вершин и топологию сети (теорема 3.2). В разделе 4 мы рассматриваем различные примеры нормированных пространств, где нормирующие функционалы для формулы Максвелла ищутся явно.

Благодарности. Авторы выражают благодарность А. О. Иванову и А. А. Тужилину за полезные советы и постоянное внимание к работе.

Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1410.2012.1) и программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (госконтракт 14.740.11.0794). Работа второго и третьего авторов выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Правительства РФ по постановлению № 220, договор 11.G34.31.0053, РФФИ (гранты № 10-01-00748-а и № 12-01-31432-мол-а), Программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1410.2012.1), программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (госконтракт 14.740.11.0794).

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В данном разделе мы дадим все определения и сформулируем известные теоремы, необходимые для формулировки и доказательства основных результатов.

2.1. Определение сети.

Определение 2.1. *Топологическим графом* G называется топологическое пространство, полученное из конечной совокупности отрезков $\{I_i\}_i$ некоторой склейкой по их концам. Пусть $\pi: \sqcup_i I_i \rightarrow G$ — каноническая проекция. Образы внутренностей отрезков I_i при отображении π называются *ребрами* графа G , а π -образы концевых точек отрезков I_i — *вершинами*. Граф G *связен*, если он связан как топологическое пространство. Обозначим через $V(G)$ множество вершин графа G , а через $E(G)$ — множество его ребер.

Пусть H — произвольный подграф в топологическом графе G . Обозначим через $G/_w H$ топологическое пространство, полученное из G отождествлением точек каждой связной компоненты графа H . Пространство $G/_w H$ наделяется естественной структурой топологического графа. Граф

G/wH называется *слабым фактор-графом графа G* по подграфу H . При этом каноническую проекцию $\pi: G \rightarrow G/wH$ будем называть *слабой проекцией*. Будем говорить, что граф G_2 может быть *слабо спроецирован на граф G_1* , если существует $H \subset G_2$, для которого $G_1 = G_2/wH$.

Определение 2.2. Граф G называется *меченым*, если на множестве $V(G)$ его вершин задано отображение $\text{sgn}: V(G) \rightarrow \mathbb{Z}_2$. Вершины из множества $\text{sgn}^{-1}(0)$ называются *внутренними* для данного графа, а вершины из $\text{sgn}^{-1}(1)$ — *граничными*. Множество граничных вершин графа G обозначается ∂G и называется *границей* графа G . Ребро, инцидентное (хотя бы одной) граничной вершине, будем называть *граничным*, в противном случае ребро назовем *внутренним*.

На протяжении всей статьи все рассматриваемые графы являются мечеными и связными, а множество $\text{sgn}^{-1}(1)$ не является пустым.

Определение 2.3. Пусть G — произвольное дерево и ∂G — его граница. *Линейной сетью типа G* или, более коротко, *сетью типа G* называется непрерывное отображение Γ из G в \mathbb{R}^n , аффинное на каждом ребре дерева G . Граф G в этом случае называется *параметризующим графом сети Γ* или ее *типом*.

Замечание 2.1. Мы рассматриваем только линейные сети, т. е. образы ребер графа G являются отрезками прямых или точками, так как мы изучаем кратчайшие сети в нормированных пространствах, и отрезок прямой в нормированном пространстве является кратчайшей кривой.

Определение 2.4. Ограничения отображения Γ на вершины, ребра, границу называются соответственно *вершинами*, *ребрами*, *границей* $\partial\Gamma$ сети Γ . Более того, в дальнейшем мы всегда будем предполагать, что все структуры, возникающие на параметризующем графе, такие как инцидентность, смежность, ориентация и т. д., переносятся на сети.

Определение 2.5. Ребро сети называется *вырожденным*, если оно является отображением в точку. Сеть Γ называется *погруженной*, если она не содержит вырожденных ребер.

Замечание 2.2. В случае погруженной сети мы часто будем отождествлять сеть с ее образом.

Определение 2.6. Пусть $\delta = \{G_k\}$ — семейство непересекающихся поддеревьев в G . Определим *редуцированное* дерево G/δ как слабый фактор-граф графа G по $\sqcup_k G_k$. *Граница* дерева G/δ состоит из всех вершин этого дерева, содержащих элементы из ∂G .

Для каждой сети Γ определим Γ -*редукцию* дерева G , выбрав в качестве G_k связные компоненты подграфа, порожденного вырожденными ребрами дерева G . Отметим, что сеть Γ естественным образом порождает невырожденную сеть типа G/δ .

Определение 2.7. Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ — произвольная сеть, $\partial\Gamma: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^n$ — ее граница. Сеть $\bar{\Gamma}: \bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$ с границей $\partial\bar{\Gamma}: \partial\bar{G} \rightarrow \mathbb{R}^n$ называется *подсетью сети Γ* , если $\bar{\Gamma} = \Gamma|_{\bar{G}}$, где \bar{G} является подграфом графа G , и его граница $\partial\bar{G}$ состоит из вершин $\partial G \cap \bar{G}$ и вершин \bar{G} , которые имеют в G степень больше, чем в \bar{G} . Если подсеть $\bar{\Gamma}$ отлична от Γ , то она называется *собственной подсетью сети Γ* .

Пусть G — произвольный граф с границей ∂G (возможно пустой) и $P \in G$ — некоторая его точка. *Допустимой окрестностью $U \subset G$ точки P графа G* называется замыкание связной окрестности этой точки, не содержащей вершин графа G , отличных от P (если P — вершина). Наделим окрестность U структурой графа, объявив вершинами все точки из $\partial U \cup \{P\}$, а ребрами — внутренности отрезков в U , соединяющих эти точки. Полученную звезду обозначим через G_U и будем называть *локальным графом с центром в точке P* . Определим *каноническую границу* ∂G_U локального графа G_U , включив в нее все вершины из ∂U , а также вершину P , если P — граничная вершина графа G , т. е. $\partial G_U = (\partial G \cap U) \cup (G \cap \partial U)$.

Определение 2.8. *Локальная сеть* сети $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ — это ограничение отображения сети Γ на какой-то ее локальный граф.

2.2. Локально минимальные и экстремальные сети. Пусть дано произвольное нормированное пространство $M = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|)$ с нормой $\|\cdot\|$.

Рассмотрим сеть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ типа G . Сопоставим каждому ребру $v_k v_l$, $v_k, v_l \in V(G)$, дерева G отрезок $[\Gamma(v_k), \Gamma(v_l)]$ (который может быть вырожденным). Тем самым естественно определены

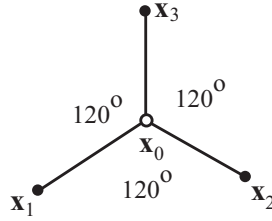


Рис. 1. Критические углы на евклидовой плоскости

углы между смежными невырожденными ребрами сети и длина сети $\ell(\Gamma)$ как сумма длин всех ее ребер:

$$\ell(\Gamma) = \sum_{v_k v_l \in E(G)} \|\Gamma(v_l) - \Gamma(v_k)\|.$$

Определение 2.9. Пусть X — произвольное конечное множество точек в пространстве. Если образ $\partial\Gamma$ совпадает с X , то мы говорим, что сеть Γ *затягивает множество X* . Без ограничения общности всегда будем предполагать, что отображение $\partial\Gamma$ является взаимно однозначным с образом.

Рассмотрим множество всех погруженных сетей в пространстве, затягивающих множество X . Тогда сеть наименьшей длины среди всех таких сетей называется *минимальным деревом Штейнера* или *кратчайшей сетью* с данной границей. Сеть называется *локально минимальной*, если любая локальная сеть является кратчайшей относительно своей канонической границы.

Опишем структуру локально минимальных сетей в произвольном нормированном пространстве. Для этого нам понадобится ряд определений.

Определение 2.10. Угол $\angle x_1 x_0 x_2$ (все точки $x_0, x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ попарно различны) в пространстве \mathbb{R}^n называется *критическим*, если существует такая точка $x_3 \neq x_0$, что при $x = x_0$ сумма $\|xx_1\| + \|xx_2\| + \|xx_3\|$ минимальна. Угол $\angle x_1 x_0 x_2$ называется *поглощающим*, если x_0 минимизирует сумму $\|xx_0\| + \|xx_1\| + \|xx_2\|$.

Замечание 2.3. Критический угол в евклидовом пространстве — это угол, равный 120° , см. рис. 1. Поглощающий угол в евклидовом пространстве — это угол, равный или больший 120° . Критические углы для произвольного нормированного пространства представляют собой аналог углов 120° на евклидовой плоскости.

Обозначим через $B = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| \leq 1\}$ единичный шар и через $S = \{x \in \mathbb{R}^n : \|x\| = 1\}$ единичную сферу в нормированном пространстве M . Пусть M^* — сопряженное пространство к пространству M , т. е. пространство линейных функционалов на \mathbb{R}^n . Элементы сопряженного пространства M^* называются *ковекторами*. Значение функционала $\varphi \in M^*$ на элементе x мы будем обозначать через $\varphi(x)$. Мы будем отождествлять пространство M^* , рассматриваемое как линейное пространство, с пространством \mathbb{R}^n , имея в виду следующий изоморфизм. Пусть $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — стандартное евклидово скалярное произведение. Тогда для любого линейного функционала (ковектора) φ из M^* существует такой единственный вектор $v \in \mathbb{R}^n$, что для любого элемента $x \in \mathbb{R}^n$ имеем $\varphi(x) = \langle v, x \rangle$. Таким образом мы отождествляем линейные функционалы на M и векторы в M , и значение функционала на векторе — это просто скалярное произведение соответствующих векторов.

Пространство M^* наделяется нормой $\|\cdot\|_*$, которая называется *конормой* и является двойственной к норме в M : $\|\varphi\|_* = \sup_{\|x\|=1} \varphi(x)$ для любого линейного функционала $\varphi \in M^*$. Известно, что для любого вектора $x \in M$, $x \neq 0$, существует такой функционал $\varphi \in M^*$, что $\|\varphi\|_* = 1$ и $\varphi(x) = \|x\|$. Назовем такой функционал *нормирующим функционалом* или *субградиентом* для x и обозначим через p_x . Если $x = 0$, то через p_x обозначим произвольный ковектор, по конорме не превосходящий единицу.

Справедливо следующее предложение, связывающее критические и поглощающие углы с нормирующими функционалами ребер угла.

Предложение 2.1 (см. [2, 17]).

1. Угол $\angle x_1 x_0 x_2$ является критическим углом тогда и только тогда, когда существуют такие нормирующие функционалы $p_{x_1-x_0}$ и $p_{x_2-x_0}$, что

$$\|p_{x_1-x_0} + p_{x_2-x_0}\|_* = 1.$$

2. Угол $\angle x_1 x_0 x_2$ является поглощающим углом тогда и только тогда, когда существуют такие нормирующие функционалы $p_{x_1-x_0}$ и $p_{x_2-x_0}$, что

$$\|p_{x_1-x_0} + p_{x_2-x_0}\|_* \leq 1.$$

Последнее равносильно тому, что угол $\angle x_1 x_0 x_2$ содержит какой-то критический угол $\angle x'_1 x_0 x'_2$ с той же вершиной x_0 .

Следующая теорема, являющаяся следствием теоремы 6.4 из [2], говорит нам, какие углы должны быть у локально минимальной сети.

Теорема 2.1. Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ — произвольная локально минимальная сеть в нормированном пространстве. Тогда

1. каждая вершина степени 1 является граничной;
2. каждый угол между смежными ребрами является поглощающим;
3. для любой внутренней вершины x , смежной вершинам x_i , существуют такие нормирующие функционалы p_{x_i-x} , что $\sum_i p_{x_i-x} = 0$.

Замечание 2.4. У локально минимальной сети каждый угол во внутренней вершине степени три является критическим.

Определение 2.11. Нормированная плоскость называется λ -нормированной, если единичная окружность представляет собой правильный 2λ -угольник, вписанный в стандартную евклидову окружность радиуса 1.

Дадим критерий локальной минимальности сети на нормированной плоскости.

Теорема 2.2 (см. [17]). Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ — погруженная сеть на нормированной плоскости. Сеть Γ является локально минимальной тогда и только тогда, когда:

1. каждая вершина степени 1 является граничной;
2. каждый угол между смежными ребрами является поглощающим;
3. каждый угол между смежными ребрами во внутренней вершине степени 3 является критическим;
4. ни для какой граничной вершины степени четыре не существует такой прямой, проходящей через нее, что все ребра, инцидентные этой вершине, лежат в одной замкнутой полуплоскости, определенной этой прямой, за исключением случая нормированной плоскости, изометричной 3-нормированной плоскости;
5. ни для какой внутренней вершины степени три не существует такой прямой, проходящей через нее, что все ребра, инцидентные этой вершине, лежат в одной открытой полуплоскости, определенной этой прямой;
6. во внутренней вершине степени четыре по крайней мере два противоположных ребра являются параллельными;
7. степень внутренней вершины не превосходит четырех, а степень граничной вершины не превосходит шести, причем степени 5 и 6 возможны только в нормированных плоскостях, изометричных 3-нормированной плоскости.

Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ — произвольная сеть.

Определение 2.12. Непрерывное отображение $\Psi: G \times I \rightarrow \mathbb{R}^n$ такое, что для каждого ребра e из G отображение $\Psi|_{e \times I}$ является аффинным и непрерывно дифференцируемым, причем для всех $g \in G$ имеет место равенство $\Psi(g, 0) = \Gamma(g)$, называется деформацией сети Γ . Положим $\Psi(g, t) = \Gamma_t(g)$ и в дальнейшем будем называть деформацией само однопараметрическое семейство $\{\Gamma_t: G \rightarrow \mathbb{R}^n\}$. Всегда будем предполагать, что деформация неподвижна на границе, т. е. $\Psi(v, t) = \Gamma(v)$ для любой вершины $v \in \partial G$ и любого $t \in [0, 1]$. Рассмотрим теперь траекторию

движения каждой точки сети Γ при деформации Γ_t . Для этого зафиксируем некоторую точку $P \in G$ и рассмотрим кривую $\Gamma_t(P)$. Вдоль Γ определено поле $\left. \frac{d\Gamma_t(P)}{dt} \right|_{t=0}$, которое называется *полем деформации* Γ_t .

Определение 2.13. Сеть Γ называется *слабо критической* или *слабо экстремальной типа G* , если для любой деформации Γ_t , $t \in [0, 1]$, где $\Gamma_{t=0} = \Gamma$, выполнено соотношение $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0+} l(\Gamma_t) \geq 0$.

Определение 2.14. Будем говорить, что сеть Γ_2 может быть *слабо спроецирована* на сеть Γ_1 , если существует слабая проекция $\pi: G_2 \rightarrow G_1$ такая, что $\Gamma_2 = \Gamma_1 \circ \pi$.

Пусть Γ и Γ' — произвольные сети, причем Γ' может быть слабо спроецирована на Γ . Произвольную деформацию сети Γ' назовем *деформацией с расщеплением* сети Γ .

Определение 2.15. Погруженная сеть Γ называется *критической* или *экстремальной*, если для любой деформации с расщеплением Γ'_t , $t \in [0, 1]$, где $\Gamma'_{t=0} = \Gamma'$, выполнено соотношение $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} l(\Gamma'_t) \geq 0$.

Сформулируем необходимые условия слабой экстремальности и экстремальности сети, которые вытекают из критерия слабой экстремальности, полученного А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным (см. [2, Теорема 6.4]).

Теорема 2.3. Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ — произвольная (слабо) экстремальная сеть. Тогда каждому ребру $e = vw$ (необязательно невырожденному в случае слабо экстремальной сети) дерева G можно сопоставить такой нормирующий функционал $p_{v,e} \in M^*$, соответствующий направлению ребра $\Gamma(e)$ сети Γ (в случае вырожденного ребра мы считаем, что $p_{v,e}$ равен нормирующему функционалу p_0 нулевого вектора), приходящего в точку $\Gamma(v)$, что $p_{v,e} = -p_{w,e}$ и в каждой внутренней вершине v дерева G выполняется соотношение

$$\sum_{e: v \in e} p_{v,e} = 0. \quad (2.1)$$

3. ДЛИНА (СЛАБО) ЭКСТРЕМАЛЬНОЙ СЕТИ

Пусть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^n$ — произвольная сеть типа G и $\varphi: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^n$, $\partial G = \{v_1, \dots, v_m\}$, — ее граничное отображение. Положим $\mathbf{x}_i = \Gamma(v_i) \in \mathbb{R}^n$, где $V(G) = \{v_1, \dots, v_{m+s}\}$. Будем отождествлять границу сети Γ с точками $\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_m)$ пространства \mathbb{R}^{nm} и будем считать, что граница задана.

Обозначим через $[G, \varphi]$ множество всех сетей в \mathbb{R}^n типа G с границей $\varphi: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^n$. Каждая сеть Γ из $[G, \varphi]$ однозначно задается образами \mathbf{x}_i , $i > m$, всех внутренних вершин G . Записав последовательные \mathbf{x}_i , $i > m$, как компоненты вектора $(\mathbf{x}_{m+1}, \dots, \mathbf{x}_{m+s})$, мы отождествим множество $[G, \varphi]$ с пространством \mathbb{R}^{ns} .

Длина сети представляет собой вещественную функцию $\ell_{G,\varphi}$ на $[G, \varphi]$. Легко видеть, что эта функция выпукла и стремится к бесконечности при неограниченном возрастании аргумента. Поэтому множество минимумов этой функции не пусто и выпукло. Оказывается, см. [6, 8], что каждая сеть, соответствующая минимуму этой функции, является слабо экстремальной сетью типа G , и каждая слабо экстремальная сеть типа G реализует минимум этой функции.

По определению, длину слабо экстремальной сети можно вычислить как наименьшее значение функции $\ell_{G,\varphi}$ на \mathbb{R}^{ns} . Однако эта функция представляет собой сумму квадратных корней из многочленов второй степени от координат внутренних вершин, что осложняет исследование экстремальных сетей в терминах этой функции. Следуя статье [3] Иванова и Тужилина, в настоящем разделе мы покажем, как можно вычислить длину (слабо) экстремальной сети в нормированном пространстве, максимизируя линейную функцию, но на более сложном конфигурационном пространстве: криволинейном выпуклом многограннике, являющемся пересечением цилиндров и линейного подпространства.

Перед доказательством основной теоремы раздела мы докажем теорему существования нормирующих функционалов граничных ребер, при подстановке которых в формулу Максвелла [3] мы получим формулу длины сети.

Теорема 3.1. Пусть Γ — произвольная (слабо) экстремальная сеть. Тогда для каждой граничной вершины $v_i \in \partial G$ и инцидентного ей ребра e_i существует такой нормирующий функционал $p_{v_i, e_i} \in M^*$, соответствующий направлению ребра $\Gamma(e_i)$ сети Γ , приходящего в точку \mathbf{x}_i , что длина сети Γ равна

$$\ell(\Gamma) = \sum_{i=1}^m p_{v_i, e_i}(\mathbf{x}_i). \quad (3.1)$$

Доказательство. Для каждой вершины $v \in V(G)$ и каждого инцидентного ей ребра e графа G возьмем нормирующие функционалы $p_{v, e} \in M^*$ из теоремы 2.3.

Пусть $e = vw$ — произвольное ребро графа. Тогда, поскольку $p_{v, e} = -p_{w, e}$, имеем

$$p_{v, e}(\Gamma(v)) + p_{w, e}(\Gamma(w)) = p_{v, e}(\Gamma(v) - \Gamma(w)) = \|\Gamma(v) - \Gamma(w)\|.$$

Применяя последнее равенство для сети и для наших нормирующих функционалов и учитывая равенство (2.1), получаем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m p_{v_i, e_i}(\mathbf{x}_i) &= \sum_{i=1}^m p_{v_i, e_i}(\mathbf{x}_i) + \sum_{i=m+1}^{m+s} \sum_{e_j: v_i \in e_j} p_{v_i, e_j}(\mathbf{x}_i) = \sum_{i=1}^{m+s} \sum_{e: v_i \in e} p_{v_i, e}(\mathbf{x}_i) = \\ &= \sum_{e=v_i v_j \in E(G)} p_{v_i, e}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = \sum_{e=v_i v_j \in E(G), \mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j} p_{v_i, e}(\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j) = \sum_{e=v_i v_j \in E(G), \mathbf{x}_i \neq \mathbf{x}_j} \|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}_j\| = \ell(\Gamma). \end{aligned}$$

□

Перейдем теперь к формулировке основного результата.

Используя структуру дерева G , зададим на пространстве \mathbb{R}^{mn} , а точнее, на пространстве $(M^*)^m = \underbrace{M^* \times \dots \times M^*}_m$ (напомним, что элементы из M^* мы отождествляем с векторами из \mathbb{R}^n),

с координатами $(\theta_1^1, \dots, \theta_1^n, \dots, \theta_m^1, \dots, \theta_m^n)$ систему S_G , состоящую из уравнений и неравенств на переменные θ_k^j . Положим $\theta_k = (\theta_k^1, \dots, \theta_k^n)$ и пусть $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_m)$.

Пусть e — некоторое ребро дерева G . Обозначим через G_r , $r = 1, 2$, связные компоненты графа $G \setminus e$. Таким образом, $G \setminus e = G_1 \sqcup G_2$, и пусть $\partial G_r = \partial G \cap V(G_r)$. Полученное в результате разбиения $\{\partial G_1, \partial G_2\}$ множества ∂G обозначим через $\mathcal{P}_G(e)$. Выберем одно из $\partial G_r \in \mathcal{P}_G(e)$, и пусть $\partial G_r = \{v_{k_1}, \dots, v_{k_p}\}$. Обозначим через σ_e неравенство $\left\| \sum_{q=1}^p \theta_{k_q} \right\|_* \leq 1$, где $\|\cdot\|_*$ — норма

сопряженного пространства M^* , а через σ — ковекторное уравнение $\sum_{k=1}^m \theta_k = 0$ в M^* . Систему S_G составим из σ и σ_e для всех ребер e дерева G .

Пусть $|S_G| \subseteq (M^*)^m$ — множество всех решений системы S_G . Отметим, что условие σ_e не зависит от выбора компонент ∂G_k в силу выполнения равенства σ . Кроме того, каждое σ_e задает выпуклое подмножество в \mathbb{R}^{mn} , ограниченное цилиндром над выпуклым ограниченным множеством, т. е. произведение выпуклого ограниченного множества в \mathbb{R}^n на $\mathbb{R}^{n(m-1)}$, а 0 и близкие к 0 точки подпространства L , заданного уравнением σ , являются решениями системы S_G . Поэтому $|S_G|$ — выпуклое тело в подпространстве L .

Положим $\ell_\varphi(\theta) = \theta_1(\mathbf{x}_1) + \dots + \theta_m(\mathbf{x}_m)$, где $\mathbf{x}_i = \varphi(v_i)$, $1 \leq i \leq m$.

Теорема 3.2. Во введенных выше обозначениях длина каждой слабо экстремальной сети из $[G, \varphi]$ равна наибольшему значению линейной функции ℓ_φ на выпуклом множестве $|S_G|$.

Доказательство. Пусть $\theta \in |S_G|$ — произвольная точка множества $|S_G|$. Используя ковектор θ , припишем каждой паре (v, e) , где $e \in E(G)$ — ребро дерева G , инцидентное вершине $v \in V(G)$, ковектор $\theta_{v, e} \in M^*$ по следующему правилу. Пусть $\mathcal{P}_G(e) = \{\partial G_1, \partial G_2\}$, причем $v \in V(G_1)$ и $\partial G_1 = \{v_{k_1}, \dots, v_{k_p}\}$. Тогда положим

$$\theta_{v, e} = \sum_{q=1}^p \theta_{k_q}.$$

Доказательство следующих лемм может быть найдено в [3].

Лемма 3.1. Для каждого ребра $e = vw$ дерева G имеем: $\theta_{v,e} = -\theta_{w,e}$.

Лемма 3.2. Для каждой граничной вершины v_i , $1 \leq i \leq m$, имеем:

$$\theta_i = \sum_{e: v_i \in e} \theta_{v_i, e}.$$

Лемма 3.3. Если e_j , $j = 1, \dots, r$, — все ребра дерева G , инцидентные его внутренней вершине v , то

$$\sum_{j=1}^r \theta_{v, e_j} = 0.$$

Лемма 3.4. Для каждой вершины v дерева G и каждого ребра e , инцидентного v , имеем: $\|\theta_{v, e}\|_* \leq 1$.

Лемма 3.5. В сделанных обозначениях имеем:

$$\theta_1(\mathbf{x}_1) + \dots + \theta_m(\mathbf{x}_m) = \sum_{(v_k, e), v_k \in e} \theta_{v_k, e}(\mathbf{x}_k).$$

Пусть $\Gamma \in [G, \varphi]$ — (слабо) экстремальная сеть. Используя леммы 3.4 и 3.5, имеем:

$$\begin{aligned} \theta_1(\mathbf{x}_1) + \dots + \theta_m(\mathbf{x}_m) &= \sum_{(v_k, e), v_k \in e} \theta_{v_k, e}(\mathbf{x}_k) = \sum_{e=v_k v_l} \theta_{v_k, e}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l) = \\ &= \sum_{e=v_k v_l} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l\| \theta_{v_k, e} \left(\frac{\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l}{\|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l\|} \right) \leq \sum_{e=v_k v_l} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l\| = \ell(\Gamma). \end{aligned}$$

Так как, напомним, θ — произвольная точка из $|S_G|$, заключаем, что наибольшее значение функции $\ell_\varphi(\theta)$ на $|S_G|$ не превосходит $\ell(\Gamma)$.

Покажем теперь, что это наибольшее значение достигается. Положим $\xi_k = \sum_{e: v_k \in e} p_{v_k, e}$ при $1 \leq k \leq m$, где нормирующие функционалы $p_{v_k, e}$ взяты из теоремы 2.3. Покажем, что ковектор $\xi = (\xi_1, \dots, \xi_m) \in \mathbb{R}^{mn}$ удовлетворяет системе S_G и что $\ell_\varphi(\xi) = \ell(\Gamma)$.

Действительно, рассмотрим произвольное ребро $e = vw$ дерева G , и пусть $G \setminus e = G_1 \sqcup G_2$, причем $v \in V(G_1)$, и $\partial G_1 = \partial G \cap V(G_1) = \{v_{k_1}, \dots, v_{k_p}\}$.

Доказательство следующей леммы дословно повторяет доказательство лемм 6 и 7 из [3].

Лемма 3.6. В сделанных выше обозначениях имеем $p_{v, e} = \sum_{q=1}^p \xi_{k_q}$ и $\sum_{k=1}^m \xi_k = 0$.

Из леммы 3.6 и условия $\|p_{v, e}\|_* \leq 1$ вытекает, что ξ удовлетворяет каждому неравенству σ_e , а также условию σ . Таким образом, $\xi \in |S_G|$. Далее,

$$\begin{aligned} \ell_\varphi(\xi) &= \xi_1(\mathbf{x}_1) + \dots + \xi_m(\mathbf{x}_m) = \sum_{k=1}^m \sum_{e: v_k \in e} p_{v_k, e}(\mathbf{x}_k) = \sum_{k=1}^{m+s} \sum_{e: v_k \in e} p_{v_k, e}(\mathbf{x}_k) = \\ &= \sum_{e=v_k v_l \in E} p_{v_k, e}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l) = \sum_{e=v_k v_l \in E, \mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}_l} p_{v_k, e}(\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l) = \sum_{e=v_k v_l \in E, \mathbf{x}_k \neq \mathbf{x}_l} \|\mathbf{x}_k - \mathbf{x}_l\| = \ell(\Gamma). \end{aligned}$$

Теорема доказана. \square

Замечание 3.1. Отметим, что по леммам 3.2 и 3.4 каждая координата вектора $\theta \in |S_G|$ ограничена, поэтому $|S_G|$ является компактным подмножеством \mathbb{R}^{mn} . Таким образом, с учетом вышесказанного $|S_G|$ — выпуклый компакт.

Пусть, как и выше, G — дерево с границей $\partial G = \{v_1, \dots, v_m\} \subseteq V(G)$ и $E_d \subseteq E(G)$ — некоторый набор ребер дерева G . Обозначим через $\delta = \{G_k\}$ семейство непересекающихся поддеревьев в G такое, что объединение всех их ребер совпадает с E_d . Предположим, что каждое из G_k пересекает ∂G не более чем по одной вершине. Такие семейства E_d будем называть *допустимыми*. Рассмотрим редуцированное дерево G/δ и выберем в качестве его границы те вершины, которые

пересекаются с ∂G . В силу ограничений, накладываемых на деревья G_k из δ , полученное граничное множество состоит из того же числа точек, что и ∂G , что позволяет отождествить его с ∂G . Таким образом, для произвольного отображения $\varphi: \partial G \rightarrow \mathbb{R}^m$ определены два пространства: $[G, \varphi]$ и $[G/\delta, \varphi]$. Если $\Gamma \in [G, \varphi]$ вырождает все ребра из E_d , то Γ естественным образом порождает сеть из $[G/\delta, \varphi]$, которую мы обозначим через Γ/δ .

Как и выше, определим систему S_G , состоящую из равенства σ и неравенств σ_e , и выкинем из нее все неравенства, соответствующие ребрам $e \in E_d$. Полученную систему обозначим через $S_G \setminus E_d$.

Теорема 3.3. *В сделанных выше обозначениях длина экстремальной сети $\Gamma/\delta \in [G/\delta, \varphi]$ равна наибольшему значению линейной функции ℓ_φ на множестве $|S_G \setminus E_d|$ решений системы $S_G \setminus E_d$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что $S_G \setminus E_d = S_{G/\delta}$, так как для каждого ребра e из G/δ имеем $\mathcal{P}_{G/\delta}(e) = \mathcal{P}_G(e)$. Доказательство закончено. \square

Таким образом, выбрасывание из системы S_G неравенств вида σ_e равносильно факторизации дерева G по соответствующим ребрам e .

4. ФОРМУЛА ДЛИНЫ ДЛЯ ЛОКАЛЬНО МИНИМАЛЬНОЙ СЕТИ

В данном разделе мы рассмотрим примеры нормированных пространств, где формула длины справедлива и для локально минимальных сетей.

4.1. Случай гладкой нормы.

Определение 4.1. Пусть $F \subset \mathbb{R}^n$ — выпуклая поверхность и $P \in F$ — произвольная ее точка. Проходящая через P гиперплоскость Π называется *опорной плоскостью* поверхности F в точке P , если F лежит в одном из замкнутых полупространств, ограниченных Π .

Определение 4.2. Нормированное пространство называется *гладким*, если в каждой точке его единичной сферы существует единственная опорная плоскость.

Предложение 4.1. *Нормированное пространство M является гладким тогда и только тогда, когда для любого $0 \neq \mathbf{x} \in M$ существует единственный нормирующий функционал $p_{\mathbf{x}}$.*

Поскольку в случае гладких нормированных пространств класс локально минимальных сетей совпадает с классом экстремальных сетей, то формула (3.1) справедлива и для локально минимальных сетей. Кроме того, в случае гладкого нормированного пространства нормирующие функционалы из теоремы 2.3 единственны.

4.2. Случай гладкой строго выпуклой нормированной плоскости.

Определение 4.3. Нормированное пространство называется *строго выпуклым*, если единичный шар является строго выпуклым множеством.

Лемма 4.1 (см. [17]). *Пусть M — гладкая строго выпуклая нормированная плоскость. Тогда для любого единичного вектора \mathbf{x}_1 существуют единственные два таких единичных вектора \mathbf{x}_2 и \mathbf{x}_3 , что $p_{\mathbf{x}_1} + p_{\mathbf{x}_2} + p_{\mathbf{x}_3} = 0$.*

Следствие 4.1. *Пусть дана невырожденная локально минимальная сеть на гладкой строго выпуклой нормированной плоскости, все граничные вершины которой имеют степень 1. Тогда с точностью до знака существуют не более трех разных направлений ребер данной сети.*

Определим число вращения сети, которое является аналогом числа вращения на стандартной евклидовой плоскости, введенного А. О. Ивановым и А. А. Тужилиным, см. [2]. Пусть на плоскости задана стандартная ориентация, что дает возможность определить положительное вращение (в левую сторону) и отрицательное вращение (в правую сторону). Пусть e_1 и e_2 — два ребра дерева G , и γ — единственный путь в дереве G , их соединяющий. Тогда *числом вращения* $\text{tw}(e_1, e_2)$ от ребра e_1 к ребру e_2 называется разность количеств левых (положительных) и правых (отрицательных) поворотов во внутренних вершинах пути γ при движении от e_1 к e_2 . Отметим, что эта функция кососимметрическая и аддитивная вдоль путей.

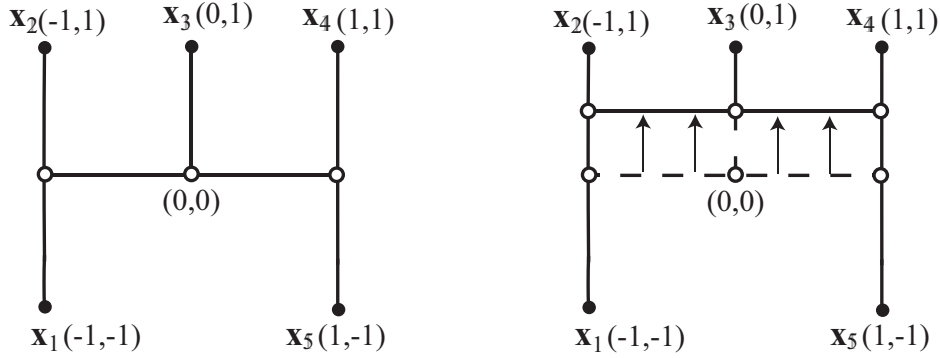


Рис. 2. Локально минимальная сеть на манхэттенской плоскости

Используя следствие 4.1, мы можем для локально минимальной сети на гладкой строго выпуклой нормированной плоскости, зная направление ребра и число вращения от него до другого, определить направление последнего ребра.

Пусть ξ_i — направления граничных ребер e_i , ориентированных в сторону граничных вершин, и $k_{i,j}$ — числа вращения от e_i к e_j (при проходе пути ориентация первого ребра меняется). Сразу получаем

Теорема 4.1. Пусть η_1 и η_2 — такие направления, что $p_{\xi_1} + p_{\eta_1} + p_{\eta_2} = 0$, и (ξ_1, η_1) задает положительную ориентацию на \mathbb{R}^2 , а (ξ_1, η_2) — отрицательную ориентацию. Тогда если

1. $k_{i,1} \equiv 0 \pmod{6}$, то направление ξ_i совпадает с направлением ξ_1 ;
2. $k_{i,1} \equiv 3 \pmod{6}$, то направление ξ_i противоположно направлению ξ_1 ;
3. $k_{i,1} \equiv 1 \pmod{6}$, то направление ξ_i совпадает с направлением η_1 ;
4. $k_{i,1} \equiv 4 \pmod{6}$, то направление ξ_i противоположно направлению η_1 ;
5. $k_{i,1} \equiv 5 \pmod{6}$, то направление ξ_i совпадает с направлением η_2 ;
6. $k_{i,1} \equiv 2 \pmod{6}$, то направление ξ_i противоположно направлению η_2 .

Следствие 4.2. Зная направление одного граничного ребра и числа вращения от него до всех других граничных ребер, мы можем найти длину сети.

5. λ -НОРМИРОВАННЫЕ ПЛОСКОСТИ

Покажем, что теорема 3.2 не верна для локально минимальных сетей в негладких нормированных пространствах. Мы рассмотрим случай манхэттенской плоскости. Напомним, что манхэттенская плоскость — это плоскость с нормой

$$\|\mathbf{x}\| = |x^1| + |x^2|, \quad \text{где } \mathbf{x} = (x^1, x^2).$$

Легко видеть, что единичная окружность для манхэттенской плоскости — это квадрат, т. е. это 2-нормированная плоскость. Таким образом, манхэттенская плоскость не является гладкой. Структура локально минимальных и экстремальных сетей на манхэттенской плоскости описана в [2].

Рассмотрим локально минимальную сеть, состоящую из пяти граничных вершин и трех внутренних, см. рис. 2. Отметим, что эта сеть не является экстремальной.

Пусть граничные вершины имеют координаты $\mathbf{x}_1 = (-1, -1)$, $\mathbf{x}_2 = (-1, 1)$, $\mathbf{x}_3 = (0, 1)$, $\mathbf{x}_4 = (1, 1)$, $\mathbf{x}_5 = (1, -1)$, тогда соответствующие им направления граничных ребер будут $(0, 1)$ и $(0, -1)$. Рассмотрим деформацию, переводящую эту сеть в другую, затягивающую ту же самую границу и с теми же направлениями ребер на ней (см. рис. 2). Заметим, что она тоже будет локально минимальной сетью, но длина уменьшается, то есть мы не можем однозначно вычислить длину сети, зная только граничные вершины и топологию сети. Следовательно, теорема 3.2 в данном случае не применима.

Этот пример — следствие того, что на манхэттенской плоскости локальная минимальность не эквивалентна экстремальности сети (см. [4])

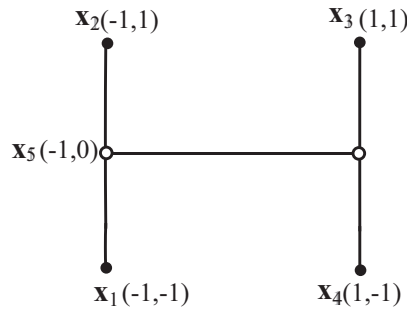


Рис. 3. Произвольные нормирующие функционалы граничных ребер

Покажем, что в формуле (3.1) нельзя выбирать нормирующие функционалы граничных ребер произвольным образом. Возьмем сеть с границей $x_1 = (-1, -1)$, $x_2 = (-1, 1)$, $x_3 = (1, 1)$, $x_4 = (1, -1)$, изображенную на рис. 3.

Заметим, что длина сети равна 6. Если же мы рассмотрим нормирующий функционал $(0, 1)$ для ребер, инцидентных x_2 и x_3 , и нормирующий функционал $(0, -1)$ для ребер, инцидентных x_1 и x_4 , то при подсчете длины по формуле (3.1) длина сети должна быть 4. Почему так получается? Рассмотрим для примера ребро x_5x_1 и x_5x_2 , где $x_5 = (-1, 0)$. Для вектора $x_1 - x_5$ определен нормирующий функционал $p_{x_1-x_5} = (0, -1)$. Наша цель — доопределить нормирующий функционал $p_{x_5-x_1} = (a, b)$ (в вершине x_5) таким образом, чтобы выполнялось следующее условие:

$$p_{x_1-x_5}(x_1) + p_{x_5-x_1}(x_5) = \|x_5 - x_1\|.$$

Подставив известные нам значения, получаем, что $a = 0$, $b = 1$, следовательно, $p_{x_5-x_1} = (0, 1)$.

Аналогично рассматривая ребро x_5x_2 , получаем $p_{x_5-x_2} = (0, -1)$. Заметим, что так как в точку x_5 приходят три ребра, то всего в ней должны быть определены три нормирующих функционала инцидентных ей ребер. При этом их сумма должна быть равна 0, чтобы можно было применять формулу (3.1). Но это невозможно, так как сумма уже двух из них равна 0.

Рассмотрим формулу (3.1) на λ -нормированных плоскостях, где $\lambda \neq 3, 4, 6$.

Для случая $\lambda = 2$ мы передокажем теорему 3.1. Из полученного доказательства будет видно, что справедливость формулы (3.1) для экстремальных сетей следует из справедливости формулы (3.1) для сетей простого вида, которые представляют собой «горизонтальные» или «вертикальные» фрагменты, а для таких фрагментов нормирующие функционалы ребер можно выбрать явно.

Для остальных λ мы предъявим нормирующие функционалы граничных ребер, дающие формулу (3.1) для любой экстремальной сети, граница которой состоит из вершин степени один.

5.1. Манхэттенская плоскость. Без ограничения общности мы рассматриваем сети, ребра которых могут быть только вертикальными или горизонтальными, и все граничные вершины имеют степень один.

Сформулируем и докажем следующие леммы.

Лемма 5.1. Для любого единичного элемента r_1 сопряженного пространства M^* к манхэттенской плоскости существуют такие два единичных элемента r_2 и r_3 , что $r_1 + r_2 + r_3 = 0$.

Доказательство. Доказательство аналогично доказательству предложения 3 из [17], также см. [11]. □

Лемма 5.2. Для экстремальной сети с одной внутренней вершиной степени три на манхэттенской плоскости нормирующий функционал ребра, перпендикулярного двум другим, который дает ноль в сумме с нормирующими функционалами двух других ребер, определен однозначно.

Доказательство. Рассмотрим сеть, состоящую из двух горизонтальных ребер и одного вертикального, направленного вниз, см. рис. 4, и всевозможные направления для функционала в граничной вершине горизонтального ребра.

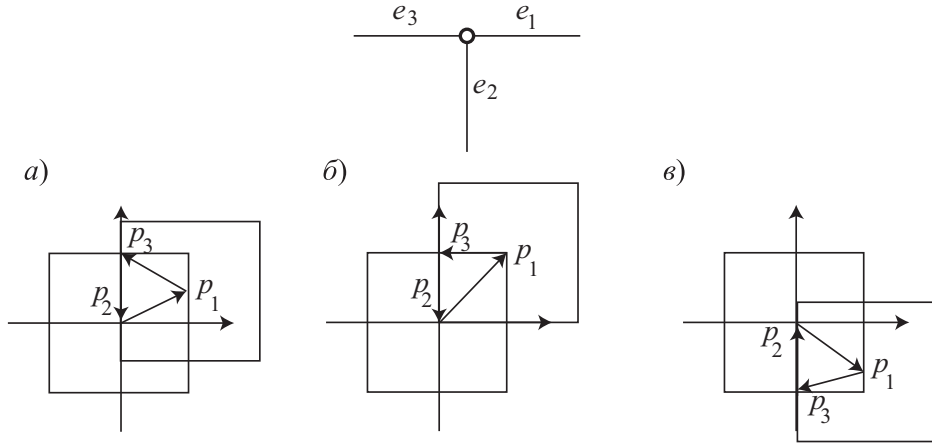


Рис. 4. Нормирующие функционалы для сети из трех граничных вершин

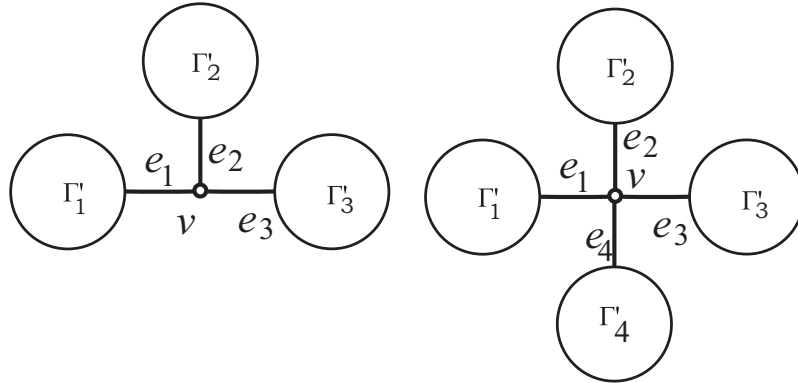


Рис. 5. Сети

Когда нормирующий функционал p_1 ребра e_1 находится в верхней замкнутой полуплоскости (рис. 4, а) и б)), два других нормирующих функционала существуют, и нормирующий функционал p_2 , соответствующий вертикальному ребру, не изменяется. Если же p_1 расположен в нижней полуплоскости (рис. 4, в)), то для вертикального ребра не существует нормирующего функционала, удовлетворяющего условиям. То есть, $p_2 = (0, -1)$ и это единственное возможное значение функционала в этой вершине, для которого выполнены условия теоремы, что и требовалось доказать. \square

Приведем теперь для манхэттенской плоскости конструкцию явного построения нормирующих функционалов, фигурирующих в доказательстве теоремы 3.1. Докажем по индукции, где индукцию проведем по числу n всех вершин сети.

База индукции. Случай $n = 4$ доказан в лемме 5.2.

Предположение индукции. Пусть для сетей с любым числом вершин, меньшим k , мы можем подобрать нормирующие функционалы ребер требуемым образом.

Индуктивный переход. Докажем наше утверждение для сетей с числом вершин k . Любую сеть можно представить в виде, изображенном на рис. 5, а именно в виде, когда внутренняя вершина соединена с тремя подсетями: Γ'_1, Γ'_2 и Γ'_3 , или с четырьмя подсетями: $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \Gamma'_3$ и Γ'_4 .

Предположим, что сеть Γ имеет вершину степени четыре. Тогда Γ можно представить в виде объединения двух сетей Γ_{vert} и Γ_{hor} (см. рис. 6). Если сеть Γ экстремальна, то сети Γ_{vert} и Γ_{hor} также будут экстремальны. По предположению индукции для каждой из сетей Γ_{vert} и Γ_{hor} существуют нормирующие функционалы ребер, обладающие необходимыми свойствами. Набор нормирующих функционалов для сети Γ получается следующим образом. Для ребер, инцидентных вершинам подсетей $\Gamma'_1, \Gamma'_2, \Gamma'_3$ и Γ'_4 , мы берем нормирующие функционалы соответствующих ребер

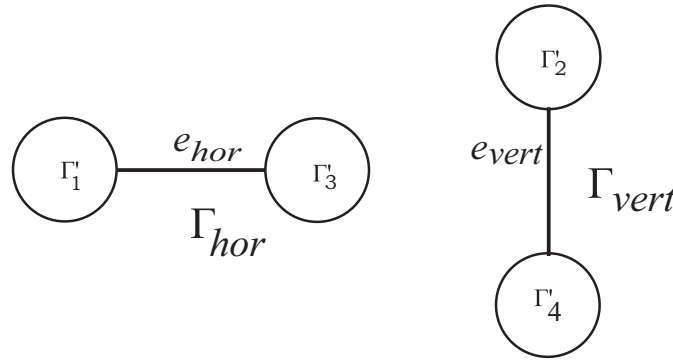


Рис. 6. Вершина степени четыре

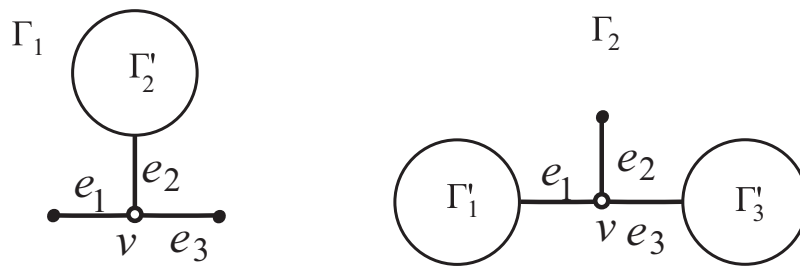


Рис. 7. Подсети

из Γ_{vert} и Γ_{hor} . На ребрах e_1 и e_3 мы ставим нормирующие функционалы ребра e_{hor} , а на ребрах e_2 и e_4 — ребра e_{vert} .

Далее мы можем считать, что сеть не содержит вершин степени четыре. Тогда сеть имеет вид, изображенный на рис 5 слева. Сначала рассмотрим случай, когда каждая из трех подсетей содержит не менее одной внутренней вершины. Тогда зададим функционалы для нашей сети с помощью двух других сетей Γ_1 и Γ_2 , полученных из Γ . Сеть Γ_1 состоит из сети Γ'_2 с вершиной v , ребер e_1, e_2, e_3 и инцидентных им вершин, а сеть Γ_2 включает в себя сети Γ'_1 и Γ'_3 с вершиной v , ребра e_1, e_2, e_3 и инцидентные им вершины (см. рис. 7).

У каждой из полученных сетей число вершин меньше, чем у Γ . Следовательно, по индукции для них можно задать направления граничных ребер в соответствии с условиями теоремы. Из леммы 5.2 следует, что нормирующий функционал ребра e_2 будет один и тот же для каждой из сетей Γ_1 и Γ_2 . Если из сети Γ_1 выкинуть ребра e_1 и e_3 , то полученная сеть по-прежнему будет экстремальной, и функционалы для всех ребер Γ'_2 , так же как и для e_2 , останутся теми же. Следовательно, на сеть Γ мы можем перенести те же функционалы, что были у сетей Γ_1 и Γ_2 (см. рис. 7). Случай, когда Γ'_1 или Γ'_3 вырождаются в одну вершину, рассматривается аналогично.

Если же в вершину вырождается Γ'_2 и сеть Γ имеет вид Γ_2 , то такой случай сводится к предыдущим, если хотя бы для одной вершины мы можем представить сеть в виде объединения трех невырожденных подсетей. Если же таких вершин нет, то наша сеть имеет вид длинного горизонтального отрезка (для определенности рассматриваем горизонтальный) с несколькими короткими вертикальными ребрами (см. рис. 8).

Внутренние вершины сети, лежащие ближе всего к краям горизонтального отрезка, называются *концевыми вершинами*.

Введем два класса вертикальных ребер: ребра, находящиеся в верхней полуплоскости относительно горизонтального отрезка, будут лежать в классе U_1 ; ребра, лежащие в нижней полуплоскости, будут принадлежать классу U_2 . Далее мы приведем здесь две леммы из [4], которые позволят лучше понять устройство таких сетей.

Лемма 5.3. *Класс U_1 (также и класс U_2) не содержит более двух последовательных ребер.*

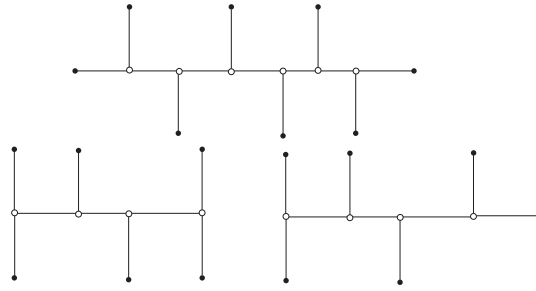


Рис. 8. Итоговые сети

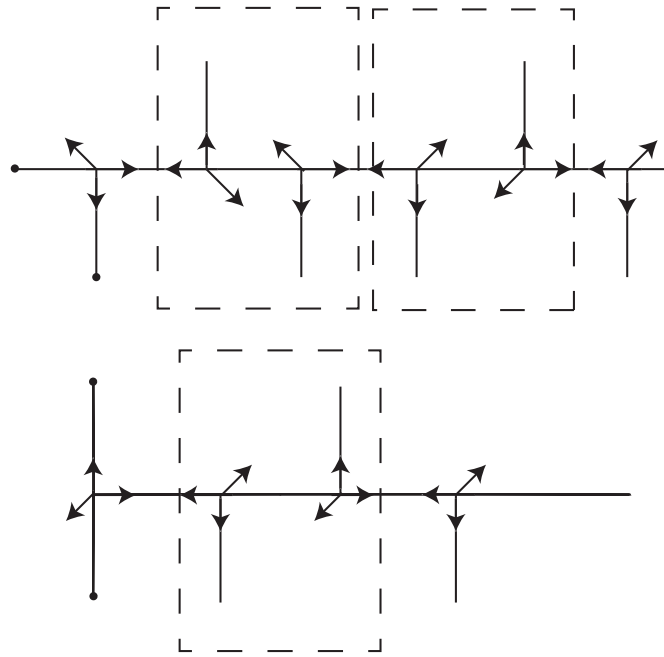


Рис. 9. Пример расстановки нормирующих функционалов во внутренних вершинах

Лемма 5.4. *Каждую неконцевую вершину, инцидентную ребру из класса U_1 , можно объединить в пару со смежной с ней вершиной, инцидентной ребру из U_2 , так чтобы полученные пары не пересекались.*

Замечание 5.1. На самом деле в доказательстве леммы 5.4, см. [2, Лемма 6.17], для горизонтального отрезка строится разбиение внутренних вершин сети, за исключением возможно концевых вершин отрезка, на пары, каждая из которых содержит одну вершину из U_1 и другую из U_2 .

Все нормирующие функционалы вертикальных ребер определяются однозначно, и надо только задать нормирующие функционалы для горизонтальных ребер. Сделаем это таким образом: разобьем все вершины, за исключением, возможно, концевых вершин отрезка, на пары согласно лемме 5.4.

Ребрам, соединяющим различные пары вершин, сопоставим нормирующие функционалы с координатами $(\pm 1, 0)$, тогда внутреннему ребру самой пары единственным образом сопоставляются два нормирующих функционала (по одному для каждого направления), дающие в сумме по ребру ноль, так же, как и в сумме по ребрам, инцидентным вершине. Эти нормирующие функционалы будут иметь координаты $(\pm 1, \pm 1)$. Нормирующие функционалы для ребер, инцидентных концевым вершинам, определяются в соответствии с выбором функционалов в вершинах, соседних с концевыми (см. рис. 9).

5.2. Случай $\lambda \neq 2, 3, 4, 6$. Опишем структуру экстремальных сетей на λ -нормированной плоскости, $\lambda \neq 2, 3, 4, 6$.

Определение 5.1. Пусть Γ — произвольная погруженная сеть и γ — некоторое ребро сети Γ , ориентированное одним из двух возможных способов. Если направление этого ребра приходит во внутреннюю точку стороны $[\mu_i, \mu_{i+1}]$ 2λ -угольника Σ , то замыканием направления ребра γ назовем отрезок $[\mu_i, \mu_{i+1}]$, а если направление приходит в вершину μ_i , то замыканием направления ребра γ назовем точку μ_i . В первом случае назовем ребро *неточечным*, во втором — *точечным*. Замыкание направления ребра γ обозначим как $\text{fl}(\gamma)$.

Определение 5.2. Для любых подмножеств A и B из 2λ -угольника Σ обозначим через $\alpha(A, B)$ точную нижнюю грань углов между радиус-векторами точек $x \in A$ и $y \in B$. Если γ_1 и γ_2 — два смежных ребра, то в выражении $\alpha(\text{fl}(\gamma_1), \text{fl}(\gamma_2))$ под замыканиями $\text{fl}(\gamma_i)$ будем понимать замыкания для ребер γ_i , $i = 1, 2$, ориентированных от их общей вершины.

Определение 5.3. Пусть γ_1 и γ_2 — произвольные смежные ребра сети Γ , $i = 1, 2$. Тогда пара (γ_1, γ_2) имеет погрешность k , и будем писать $\text{fall}(\gamma_1, \gamma_2) = k$, если

$$\alpha(\text{fl}(\gamma_1), \text{fl}(\gamma_2)) = \frac{2\pi}{3} - \frac{k\pi}{3\lambda}.$$

Определение 5.4. Рассмотрим произвольную пару (γ, γ') смежных ребер, ориентированных от их общей вершины. Определим знак $\epsilon(\gamma, \gamma')$ этой пары следующим образом:

1. для линейно независимых ребер γ и γ' положим $\epsilon(\gamma, \gamma') = 1$, если базис (γ, γ') положительно ориентирован на \mathbb{R}^2 , и $\epsilon(\gamma, \gamma') = -1$ в противном случае;
2. для линейно зависимых ребер γ и γ' положим $\epsilon(\gamma, \gamma') = 1$.

Определим для пары (γ, γ') ориентированную погрешность $\text{fall}_0(\gamma, \gamma')$, положив $\text{fall}_0(\gamma, \gamma') = \epsilon(\gamma, \gamma')\text{fall}(\gamma, \gamma')$.

Определение 5.5. Путь P называется *правильно повернутым*, если все внутренние вершины пути P , граничные в сети Γ , имеют одинаковый знак. Ориентация правильно повернутого пути P называется *канонической*, если знак каждой внутренней вершины пути P , граничной в сети Γ , положителен. *Ориентированная погрешность* определяется как

$$\text{fall}_0(P) = \max_{j_1, j_n} \left(\text{fall}_0(\gamma_{j_1}^{j_1}, \gamma_2) + \sum_{i=2}^{n-2} \text{fall}_0(\gamma_i, \gamma_{i+1}) + \text{fall}_0(\gamma_{n-1}, \gamma_n^{j_n}) \right),$$

где $\partial\text{fl}(\gamma_q) = \{\gamma_q^1, \gamma_q^2\}$, $q = 1$ или n , — граница подмножества $\text{fl}(\gamma_q)$ окружности Σ . Пусть Π — множество канонически ориентированных путей в Γ , все внутренние ребра которых точечны. Положим $\text{Fall}_0(\Gamma) = \max_{P \in \Pi} \text{fall}_0(P)$.

Для λ -нормированных плоскостей имеется следующий критерий экстремальности.

Теорема 5.1 (см. [6–9]). *Произвольная сеть $\Gamma: G \rightarrow \mathbb{R}^2$ на λ -нормированной плоскости, $\lambda \neq 2, 3, 4, 6$, экстремальна тогда и только тогда, когда $\text{Fall}_0(\Gamma) \leq 3$.*

Покажем, что для экстремальной сети можно выбрать нормирующие функционалы граничных ребер явно. Из теоремы 5.1 следует, что для бинарной сети существуют такие ориентации ее ребер, что все они удовлетворяют условию локальной минимальности, т. е. мы можем разбить все ребра на три класса так, что ориентации ребер первого класса приходят в одну и ту же вершину 2λ -угольника, ориентации ребер второго класса приходят в одну и ту же вершину 2λ -угольника, а ориентации ребер третьего класса приходят на одну и ту же замкнутую сторону 2λ -угольника, причем погрешность между данными направлениями меньше 3. Следовательно, мы можем выбрать три нормирующих функционала для данных направлений, сумма которых равна нулю. Таким образом, для каждого ребра мы выбрали по одному нормирующему функционалу. Второй функционал для ребра — это противоположный первому.

Мы имеем три, с точностью до знака, нормирующих функционала. Для каждого направления граничного ребра берем соответствующий ему.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Разветвленные геодезические. Геометрическая теория локально минимальных сетей. — Эдвин—Меллен Пресс, 1999.
2. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Теория экстремальных сетей. — Москва—Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003.
3. *Иванов А. О., Тужилин А. А.* Длина минимального дерева заданной топологии: обобщенная формула Максвелла// Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. Мех. — 2010. — 3. — С. 7–14.
4. *Иванов А. О., Хонг В. Л., Тужилин А. А.* Плоские сети, локально-минимальные и критические для манхэттенского функционала длины // Зап. научн. сем. ПОМИ. Геометрия и топология. — 2011. — 279, № 6. — С. 111–140.
5. *Ильютко Д. П.* Локально минимальные сети в N -нормированных пространствах// Мат. заметки — 2003. — 74, № 5. — С. 656–668.
6. *Ильютко Д. П.* Геометрия локально минимальных и экстремальных сетей в пространствах с нормами. — Дисс. на соискание степени кандидата физ.-мат. наук. — М.: МГУ, 2005.
7. *Ильютко Д. П.* Геометрия экстремальных сетей на λ -нормированных плоскостях// Вестн. МГУ. Сер. 1. Матем. Мех. — 2005. — 4. — С. 52–54.
8. *Ильютко Д. П.* Разветвленные экстремали функционала λ -нормированной длины// Мат. сб. — 2006. — 197, № 5. — С. 75–98.
9. *Brazil M., Thomas D. A., Weng J. F.* Forbidden subpaths for Steiner minimum networks in uniform orientation metrics// Networks. — 2002. — 39. — С. 186–202.
10. *Brazil M., Thomas D. A., Weng J. F.* Locally minimal uniformly oriented shortest networks// Disc. Appl. Math. J. — 2006. — 154. — С. 2545–2564.
11. *Du D.-Z., Gao B., Graham R. L., Liu Z.-G., Wan P.-J.* Minimum Steiner trees in normed planes // Discrete Comput. Geom. — 1993. — 9. — С. 351–370.
12. *Gilbert E. N., Pollak H. O.* Steiner minimal trees// SIAM J. Appl. Math. — 1968. — 16, № 1. — С. 1–29.
13. *Ivanov A. O., Hong V. L., Tuzhilin A. A.* Planar Manhattan local minimal and critical networks // European J. of Combinatorics. — 2002. — 23, № 8. — С. 949–967.
14. *Ivanov A. O., Tuzhilin A. A.* Minimal networks. Steiner problem and its generalizations. — CRC-Press, 1994.
15. *Ivanov A. O., Tuzhilin A. A.* Branching solutions to one-dimensional variational problems. — World Scientific, Singapore—New Jersey—London—Hong Kong, 2000.
16. *Lawlor G., Morgan F.* Paired calibrations applied to soap films, immiscible fluids, and surfaces or networks minimizing other norms// Pacific J. Math. — 1994. — 166. — С. 55–83.
17. *Swanepoel K. J.* The local Steiner problem in normed planes// Networks. — 2002. — 36. — С. 104–113.

А. Г. Банникова

Механико-математический факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова

E-mail: jozhick@gmail.com

Д. П. Ильютко

Механико-математический факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова

Лаборатория дискретной и вычислительной геометрии им. Б. Н. Делоне, ЯрГУ им. П. Г. Демидова

E-mail: ilyutko@yandex.ru

И. М. Никонов

Механико-математический факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова

Лаборатория дискретной и вычислительной геометрии им. Б. Н. Делоне, ЯрГУ им. П. Г. Демидова

E-mail: nikonov@mech.math.msu.su

ИНВАРИАНТ УЗЛОВ В УТОЛЩЕННЫХ ПОВЕРХНОСТЯХ

© 2013 г. М. В. ЗЕНКИНА

Аннотация. В настоящей работе строится инвариант узлов в утолщенной сфере с g ручками, зависящий от $2g + 3$ переменных. При построении инварианта используются копредставление Виртингера группы узла, а также понятие четности, введенное Мантуровым [7]. В настоящей статье будут также рассмотрены примеры узлов в утолщенном торе, которые рассматривались в [8] и неэквивалентность которых доказывается с помощью построенного полинома.

1. ВВЕДЕНИЕ

Важным обобщением теории классических узлов является теория виртуальных узлов, разработанная Кауфманом в [10]. Виртуальные узлы представляют собой узлы в утолщенных двумерных поверхностях, рассмотренных с точностью до изотопии и стабилизации/дестабилизации (см. [12]). На теорию виртуальных узлов были обобщены многочисленные инварианты классических узлов (см., например, [6]), в том числе гомологии Хованова, а также различные модификации полинома Александера, связанные с копредставлением Виртингера (см. [5]). Стандартное копредставление Виртингера группы узла сопоставляет дугам образующие, а перекресткам — соотношения.

В [2] был построен инвариант z' зацеплений, который является обобщением полинома Александера для узлов в утолщенном торе и использует копредставление Дена группы узла. В настоящей статье будет построен полином s , который является обобщением полинома Александера для узлов в S_g . При построении инварианта будем использовать копредставление Виртингера группы узла, а также понятие четности перекрестков, введенное Мантуровым [7]. В статье будет доказана неэквивалентность узлов на торе, изображенных на рис. 1. Вопрос об эквивалентности данных узлов ранее ставился в работе [8] и не был решен.

Благодарности. Я благодарна В. О. Мантурову за полезные замечания при подготовке настоящего текста и за ценные советы.

2. ОСНОВНЫЕ ПОСТРОЕНИЯ

Мы рассматриваем ориентированные узлы K в $S_g \times I$, где S_g — сфера с g ручками, I — отрезок. Каждый такой узел естественным образом задается своей проекцией на S_g , которая в общем положении представляет собой четырехвалентный граф, каждая вершина которого снабжена структурой проход-переход, при этом два графа являются эквивалентными тогда и только тогда, когда один из них получается из другого стандартными движениями Рейдемейстера (см. рис. 2).

Представим поверхность S_g в виде склейки $4g$ -угольника L_g . Далее мы будем изображать диаграмму узла на L_g . Фиксируем ориентацию на S_g . Пусть дана диаграмма K ориентированного узла на S_g с n перекрестками, $V(K)$ — множество перекрестков диаграммы K в S_g . Поставим в соответствие каждому перекрестку, принадлежащему $V(K)$, либо 0 и назовем его четным, либо 1 и в этом случае будем говорить, что перекресток нечетный, следующим образом. Построим хордовую диаграмму $H(K)$, соответствующую диаграмме K . $H(K)$ состоит из окружности и набора хорд, соединяющих точки узла с одинаковыми проекциями на плоскость диаграммы узла (рис. 3). Хорда a хордовой диаграммы называется *зацепленной* с некоторой хордой b , если концы хорды b лежат в разных компонентах $S^1 \setminus a$. Четность перекрестка v диаграммы K полагаем равной четности числа хорд $H(K)$, зацепленных с хордой, соответствующей перекрестку v [7]. Назовем *дугой* диаграммы узла проекцию ветви узла от прохода перекрестка до следующего прохода. В четных перекрестках мы будем ставить локальные метки на дугах так, как показано на рис. 4, а в нечетных перекрестках — так, как показано на рис. 5.

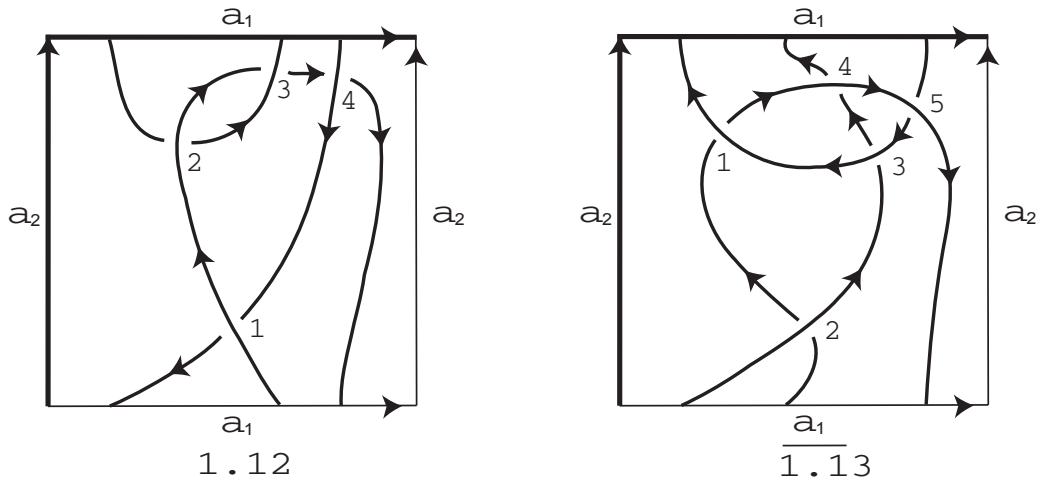


Рис. 1. Диаграммы узлов 1.12 и $\overline{1.13}$.

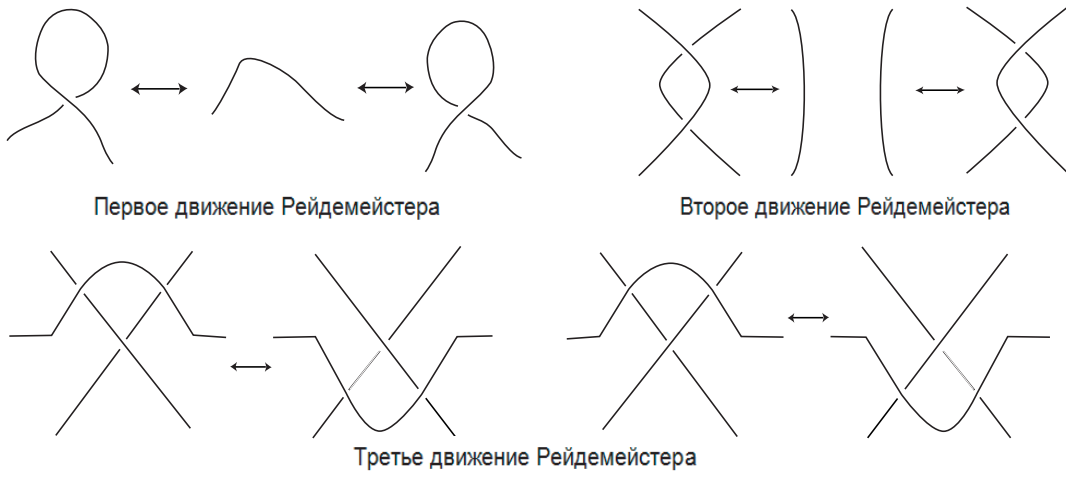


Рис. 2. Движения Рейдемейстера.

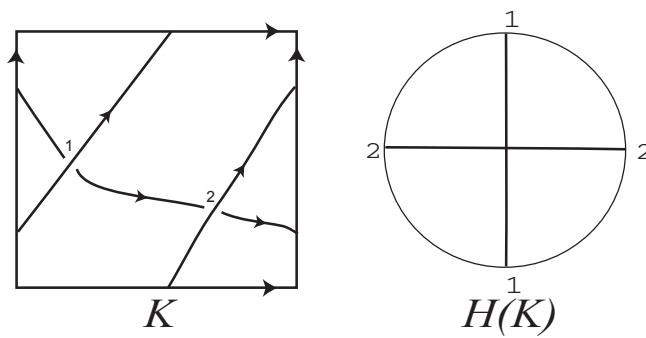


Рис. 3. Построение хордовой диаграммы.

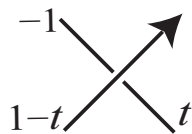


Рис. 4. Построение локальных меток в четных перекрестках.

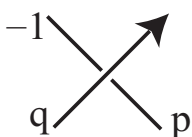


Рис. 5. Построение локальных меток в нечетных перекрестках.

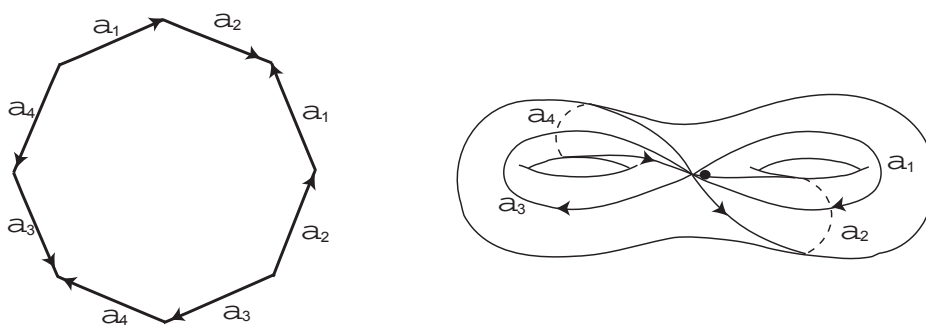


Рис. 6. Фундаментальный восьмиугольник и крендель.

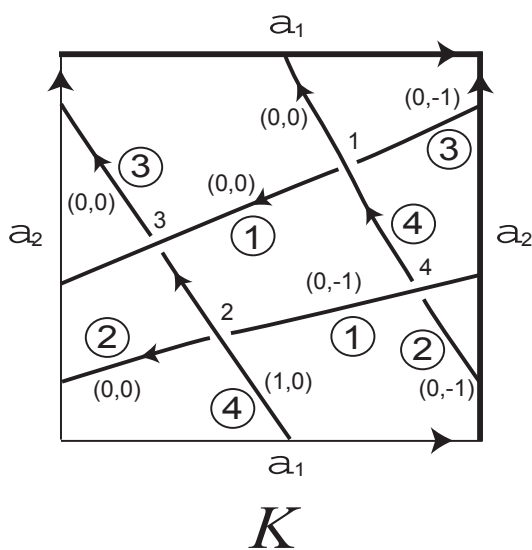


Рис. 7. Разметка дуг на примере T^2 .

Занумеруем перекрестки полученной диаграммы числами от 1 до n произвольным образом, где n — количество перекрестков. Как известно [4], количество дуг в этом случае равно n . Занумеруем дуги диаграммы теми же числами, что и перекрестки, таким образом, чтобы дуга с номером k выходила из перекрестка с номером k . Обозначим систему меридианов S_g через a_1, a_2, \dots, a_{2g} (рис. 6).

В $4g$ -угольнике L_g из каждой пары склеиваемых сторон выберем одну сторону, которую будем на чертеже выделять жирной линией. Меридианы разделяют дуги диаграммы на поддуги. Построим разметку поддуг следующим образом. Каждой поддуге, выходящей из k -го перекрестка, ставим в соответствие метку $(0, 0, \dots, 0)$ длины $2g$. Если дуга делится на поддуги меридианом a_m , где $m = 1, 2, \dots, 2g$, то при переходе через фиксированную сторону a_m число под номером m , стоящее в метке, увеличивается на 1, то есть метка меняется на $(0, 0, \dots, 1, \dots, 0)$, а если дуга переходит через меридиан, который не зафиксировали, то m -ое число в метке уменьшается на 1 (рис. 7).

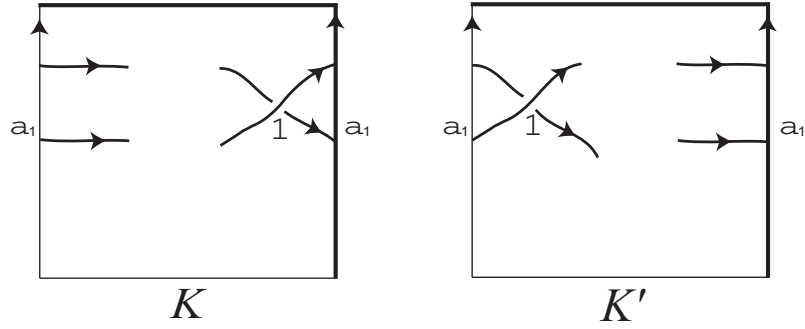


Рис. 8. Проход перекрестка через меридиан (первый случай).

Построим квадратную матрицу размера $n \times n$ следующим образом. В матрице $M(K)$ каждой дуге диаграммы K соответствует столбец, а каждому перекрестку — строка. Если некоторая дуга j не инцидентна перекрестку i (не проходит через него и не заканчивается в нем), поставим на пересечении i -ой строки и j -го столбца ноль. В случае, если лишь одна поддуга j -ой дуги инцидентна i -ому перекрестку, элемент M_{ij} будет равен моному $x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \dots x_{2g}^{\alpha_{2g}}$, умноженному на локальную метку, то есть на один из мономов $-1, 1 - t, t$ в четном перекрестке и $-1, p, q$ в нечетном, где $(\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_{2g})$ — метка, соответствующая поддуге в данном перекрестке [1]. Если таких поддуг несколько, то соответствующий элемент матрицы равен сумме таких мономов по всем инцидентным поддугам.

Мы получили матрицу $M(K)$, зависящую от диаграммы K . Положим $s(K) = \det(M(K))$, где

$$s(K) \in \mathbb{Z}[t, q, p, x_1^{\pm 1}, x_2^{\pm 1}, \dots, x_{2g}^{\pm 1}] / (q(p - t) = 0, q^2 = (1 - t)(1 - p)),$$

g — количество ручек.

Центральным результатом настоящей работы является следующая

Теорема 1. *Если две диаграммы K и K' узлов в $S_g \times I$ эквивалентны, то*

$$s(K) = \pm s(K') t^\alpha p^\beta q^\gamma$$

для некоторых целых чисел α, β, γ .

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Заметим сначала, что произвол в нумерации перекрестков приводит к тому, что строки и столбцы будут меняться местами, то есть определитель либо не будет меняться, либо будет умножаться на -1 . Таким образом, мы можем нумеровать перекрестки произвольным образом.

Так как на сфере с g ручками выделена система меридианов, то помимо движений Рейдемейстера нужно проверить инвариантность также относительно движений, при которых один из перекрестков проходит через сторону фундаментального многоугольника. Пусть даны две диаграммы K и K' , которые отличаются друг от друга этим движением, причем перекресток 1 является четным (рис. 8).

Рассмотрим следующую операцию. Пусть K — диаграмма узла в $S_g \times I$, l — некоторая дуга. Мы разобьем дугу l на две дуги l_1 и l_2 добавлением вершины v (см. [4]). Вершина v инцидентна только дугам l_1 и l_2 . Все перекрестки, инцидентные дуге l , делятся на перекрестки, инцидентные дуге l_1 , и перекрестки, инцидентные дуге l_2 . Рассмотрим матрицу $M'(K)$ для полученной диаграммы. Будем считать, что новые дуги имеют номера 1 и 2. Строка, соответствующая вершине v , имеет два ненулевых элемента в 1-ом и 2-ом столбцах (рис. 9). Заметим, что столбец, соответствующий дуге l , разобьется на два столбца, сумма которых равна столбцу, соответствующему дуге l . Таким образом, определители матриц $M(K)$ и $M'(K)$ равны с точностью до умножения на t^α , $\alpha \in \mathbb{Z}$, то есть полином s инвариантен при таком разбиении дуги диаграммы K .

Вернемся к доказательству теоремы. Разобьем дугу 1 диаграмм K и K' на две дуги так, как показано на рис. 10. Полученным новым вершинам присвоим номер 2.

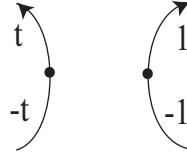


Рис. 9. Локальные метки в добавленной вершине.

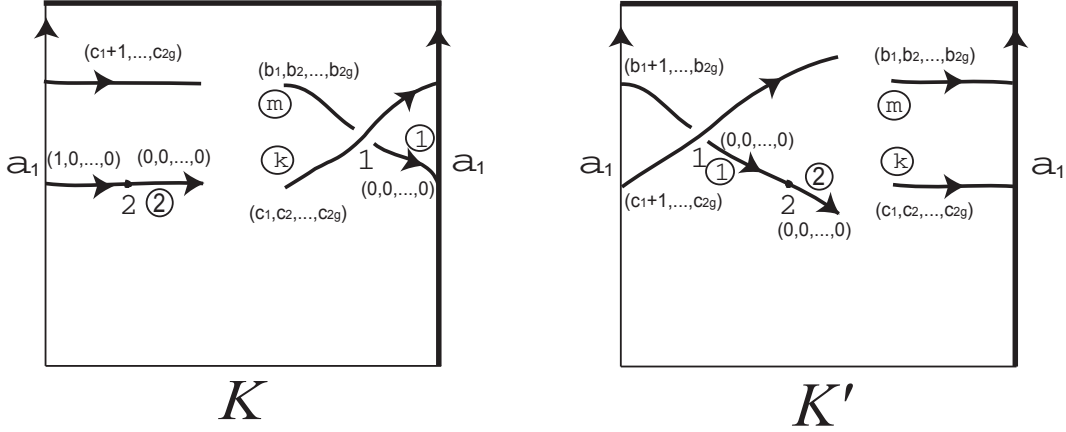


Рис. 10. Изменение меток при добавлении вершины.

Замечание 1. Вершину, полученную при разбиении дуги, будем считать четной, так как на хордовой диаграмме данная вершина не будет образовывать хорды, то есть пересечения с другими хордами нет.

Как видно из рис. 10, все строки, кроме первых двух, совпадают. Запишем матрицы, соответствующие диаграммам K и K' :

$$M'(K) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \dots 0 & -x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 \dots 0 & (1-t)x_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 \dots 0 \\ -x_1 & 1 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}, \quad (1)$$

$$M'(K') = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 \dots 0 & -x_1^{b_1+1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 \dots 0 & (1-t)x_1^{c_1+1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 \dots 0 \\ -1 & 1 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \quad (2)$$

Заметим, что в первом столбце в обеих матрицах все элементы равны 0, кроме элементов M_{11} и M_{21} . В матрице (1) первый столбец умножим на x_1^{-1} , а первую строку умножим на x_1 . В результате получим матрицу, которая совпадет с матрицей (2).

Рассмотрим также случай, который изображен на рис. 11, где перекресток 1 — четный. Соответствующие матрицы диаграмм тогда будут иметь вид:

$$M'(K) = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \dots 0 & tx_1^{b_1-1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 \dots 0 & (1-t)x_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 \dots 0 \\ -1 & 1 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}, \quad (3)$$

$$M'(K') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \dots 0 & tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 \dots 0 & (1-t)x_1^{c_1+1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 \dots 0 \\ -x_1^{-1} & 1 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \quad (4)$$

Заметим, что так же как и в предыдущем случае, в первом столбце в обеих матрицах все элементы равны 0, кроме элементов M_{11} и M_{21} . В матрице (4) первый столбец умножим на x_1 , а первую строку умножим на x_1^{-1} . В результате получим матрицу, которая совпадет с матрицей (3).

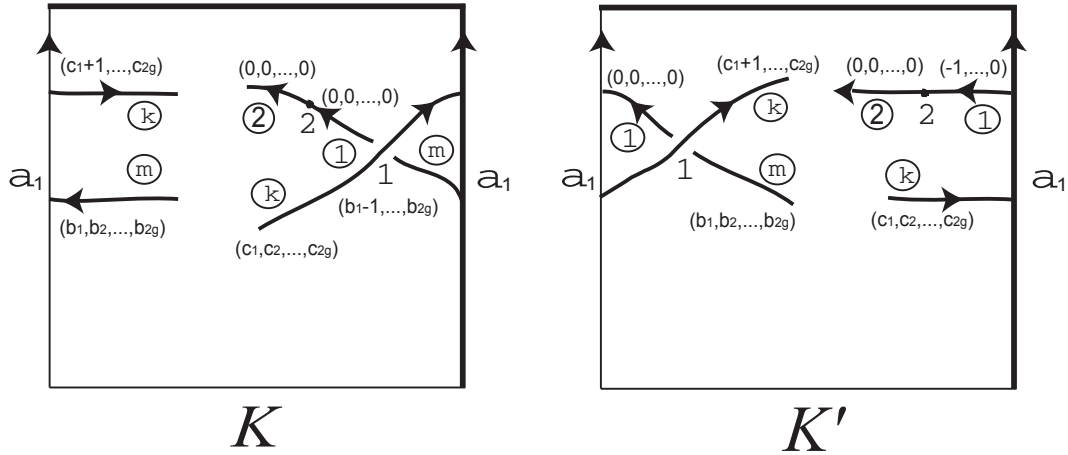


Рис. 11. Проход перекрестка через меридиан (второй случай).

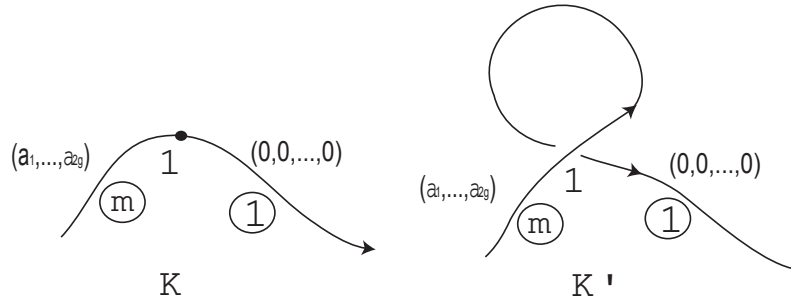


Рис. 12. Первое движение Рейдемейстера.

Аналогично можно доказать инвариантность во всех остальных случаях. Таким образом, полином инвариантен относительно движений, при которых один из перекрестков проходит через меридиан.

Для доказательства теоремы проверим инвариантность относительно движений Рейдемейстера.

Как известно (см., например, [14]), для установления эквивалентности двух диаграмм достаточно использовать лишь одну версию третьего движения Рейдемейстера, а также все версии первого и второго движений Рейдемейстера.

Докажем инвариантность относительно первого движения Рейдемейстера. Пусть диаграмма K' получается из диаграммы K , которая имеет n перекрестков, добавлением петли (см. рис. 12). Как известно из четной аксиоматики [7], участвующий в первом движении перекресток диаграммы K' является четным. Присвоим ему номер 1, а остальные перекрестки занумеруем произвольным образом номерами от 2 до $n + 1$. Разобьем дугу диаграммы K на две дуги и полученной вершине присвоим номер 1, а остальные перекрестки занумеруем так же, как в диаграмме K' (рис. 12).

Таким образом, все строки матриц, соответствующих диаграммам K и K' , будут совпадать, кроме первой. Записав первые строки этих матриц, видим, что определители равны с точностью до умножения на t^α , $\alpha \in \mathbb{Z}$:

$$M'(K) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \dots 0 & -x_1^{a_1} \dots x_{2g}^{a_{2g}} & 0 \dots 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix},$$

$$M(K') = \begin{pmatrix} t & 0 \dots 0 & -tx_1^{a_1} \dots x_{2g}^{a_{2g}} & 0 \dots 0 \\ * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

Аналогично доказывается инвариантность относительно трех оставшихся версий первого движения.

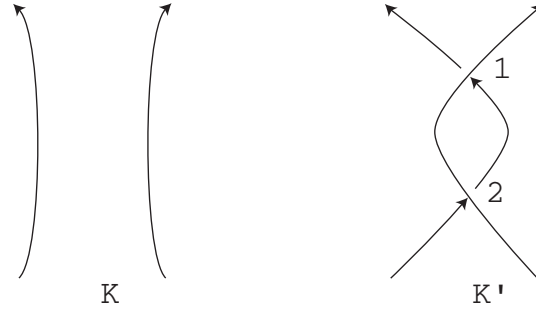


Рис. 13. Второе движение Рейдемейстера: первый случай.

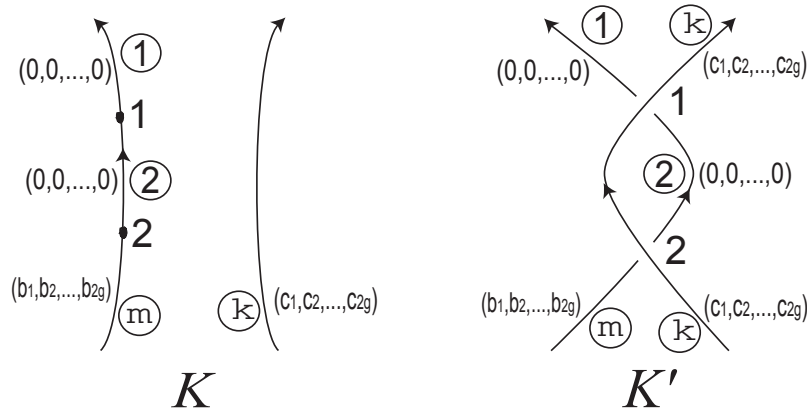


Рис. 14. Разбиение дуги и построение локальных меток.

Рассмотрим теперь доказательство инвариантности полинома относительно второго движения Рейдемейстера. Рассмотрим сначала его сонаправленную версию. Пусть диаграмма K' получается из диаграммы K добавлением двух классических перекрестков так, как показано на рис. 13.

Согласно четной аксиоматике [7] оба перекрестка, участвующие во втором движении, имеют одинаковую четность. Таким образом, мы получаем в случае сонаправленного движения Рейдемейстера два подслучая. В первом мы будем считать перекрестки 1 и 2 четными, а во втором — нечетными.

Рассмотрим первый подслучай. Разобьем дугу диаграммы K двумя вершинами на три дуги и перенумеруем перекрестки диаграмм K и K' следующим образом: в качестве первой и второй вершины в диаграмме K' возьмем перекрестки, участвующие во втором движении, в диаграмме K — добавленные вершины, а все остальные перекрестки диаграмм K и K' занумеруем одинаково (рис. 14).

Заметим, что все строки матриц совпадают, кроме двух первых. Запишем матрицы, соответствующие диаграммам K и K' :

$$M'(K) = \begin{pmatrix} t & -t & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & -tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 \\ * & 0 & * & * & * & * & * \end{pmatrix}, \quad (5)$$

$$M(K') = \begin{pmatrix} -1 & t & 0 \dots 0 & (1-t)x_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \dots 0 & (1-t)x_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 \dots 0 & -x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 \\ * & 0 & * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \quad (6)$$

Заметим, что во втором столбце в обеих матрицах все элементы равны 0, кроме M_{12} и M_{22} . В матрице (5) прибавим первую строку ко второй, а в матрице (6) первую строку умножим на -1 и прибавим ко второй. Получим:

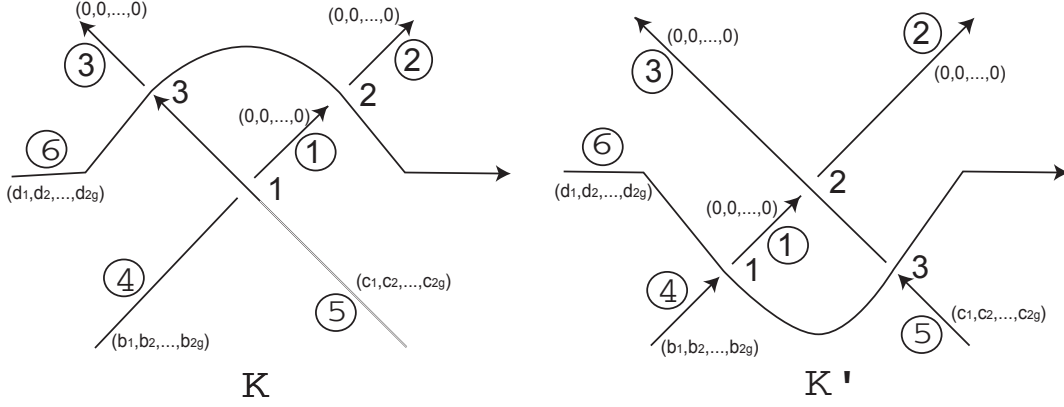


Рис. 15. Третье движение Рейдемейстера.

$$\begin{pmatrix} t & -t & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & -tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 \\ * & 0 & * & * & * & * & 0 \end{pmatrix}, \quad (7)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & t & 0 \dots 0 & (1-t)x_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & -x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 \\ * & 0 & * & * & * & * & 0 \end{pmatrix}. \quad (8)$$

Разлагая матрицы (7) и (8) по второму столбцу, мы видим, что определитель матрицы (7) равен определителю матрицы (8), умноженному на $-t$.

Рассмотрим второй подслучай, то есть перекрестки 1 и 2 являются нечетными (рис. 14). Запишем матрицы, соответствующие диаграммам K и K' :

$$M'(K) = \begin{pmatrix} t & -t & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ 0 & t & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & -tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 \\ * & 0 & * & * & * & * & 0 \end{pmatrix}, \quad (9)$$

$$M(K') = \begin{pmatrix} -1 & p & 0 \dots 0 & qx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ 0 & p & 0 \dots 0 & qx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 \dots 0 & -x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 \\ * & 0 & * & * & * & * & 0 \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Заметим, что во втором столбце в обеих матрицах, как и в предыдущем случае, все элементы равны 0, кроме M_{12} и M_{22} . В матрице (9) первую строку прибавим ко второй, а в матрице (10) первую строку умножим на -1 и прибавим ко второй. Получим:

$$\begin{pmatrix} t & -t & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ t & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & -tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 \\ * & 0 & * & * & * & * & 0 \end{pmatrix}, \quad (11)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & p & 0 \dots 0 & qx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 \dots 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \dots 0 & 0 & 0 \dots 0 & -x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 \\ * & 0 & * & * & * & * & 0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Разлагая матрицы (11) и (12) по второму столбцу, мы видим, что определитель матрицы (12) равен определителю матрицы (11), умноженному на $-\frac{p}{t^2}$.

Аналогично доказывается инвариантность в двух подслучаях сонаправленной версии второго движения Рейдемейстера и четырех подслучаях противонаправленной версии.

Рассмотрим третье движение Рейдемейстера. Занумеруем перекрестки диаграмм K и K' так, чтобы номера перекрестков, участвующих в движении Рейдемейстера, имели номера от 1 до 3, а номера остальных перекрестков были такими, чтобы дуги, участвующие в третьем движении, имели номера от 1 до 6 (см. рис. 15).

Как известно [7], среди перекрестков 1, 2 и 3 количество нечетных перекрестков четно. Рассмотрим сначала случай, когда все три перекрестка четные. Запишем матрицы, соответствующие диаграммам K и K' :

$$M(K) = \begin{pmatrix} t & 0 & 0 & -x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & (1-t)x_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 & 0 \dots 0 \\ t & -1 & 0 & 0 & 0 & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & tx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix},$$

$$M(K') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ -1 & t & 1-t & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & tx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

У обеих матриц в первом столбце стоят нули, начиная с третьей строки. Все строки этих матриц устроены одинаково, за исключением первых двух строк.

В обеих матрицах умножим первую строку на -1 и прибавим ко второй:

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & -x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & (1-t)x_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & -1 & 0 & x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & (t-1)x_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & tx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}, \quad (13)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & t & 1-t & -tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 & (t-1)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & tx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \quad (14)$$

В матрицах (13) и (14) прибавим второй столбец к третьему. В итоге получим две матрицы:

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & -x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & (1-t)x_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & -1 & -1 & x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & (t-1)x_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & tx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}, \quad (15)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & t & 1 & -tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 & (t-1)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & tx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Теперь в (15) умножим третью строку на -1 и прибавим ко второй, а в (16) прибавим третью строку ко второй. Имеем:

$$\begin{pmatrix} t & 0 & 0 & -x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & (1-t)x_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & -1 & 0 & x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & -x_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & tx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}, \quad (17)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & t & 0 & -tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & tx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & tx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Разлагая определители матриц (17) и (18) по первому столбцу, видим, что они равны.

Рассмотрим теперь случай, когда перекрестки 1 и 3 на диаграмме K являются нечетными, а перекресток 2 — четным (рис. 15). В соответствии с четной аксиоматикой на диаграмме K'

перекрестки 2 и 3 — нечетные, а 1 — четный. Запишем матрицы, соответствующие диаграммам K и K' :

$$M(K) = \begin{pmatrix} p & 0 & 0 & -x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & qx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 & 0 \dots 0 \\ t & -1 & 0 & 0 & 0 & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & px_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & qx_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix},$$

$$M(K') = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ -1 & p & q & 0 & 0 & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & px_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & qx_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}.$$

У обеих матриц в первом столбце стоят нули, начиная с третьей строки. Все строки этих матриц устроены одинаково, за исключением первых двух строк.

В первой матрице умножим первую строку на $-\frac{t}{p}$ и прибавим ко второй, а во второй матрице третью строку умножим на q и прибавим ко второй. Получим:

$$\begin{pmatrix} p & 0 & 0 & -x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & qx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & -1 & 0 & \frac{t}{p}x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & -\frac{tq}{p}x_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & px_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & qx_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}, \quad (19)$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ -1 & p & 0 & 0 & qpx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & q^2x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & px_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & qx_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \quad (20)$$

В матрице (19) умножим первый столбец на $\frac{1}{p}$, а вторую строку — на p :

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -x_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & qx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & 0 & 0 \dots 0 \\ 0 & -p & 0 & tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & -tqx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & p(1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & px_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & qx_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \quad (21)$$

В матрице (20) умножим первую строку на -1 и прибавим ее ко второй:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & p & 0 & -tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & qpx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & (q^2 + t - 1)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & px_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & qx_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \quad (22)$$

Так как выполняются соотношения $q(p-t) = 0$, $q^2 = (1-t)(1-p)$, то матрица (22) примет вид:

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & 0 & (1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & p & 0 & -tx_1^{b_1} \dots x_{2g}^{b_{2g}} & tqx_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & -p(1-t)x_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 & px_1^{c_1} \dots x_{2g}^{c_{2g}} & qx_1^{d_1} \dots x_{2g}^{d_{2g}} & 0 \dots 0 \\ 0 & * & * & * & * & * & * \end{pmatrix}. \quad (23)$$

Разлагая определители матриц (21) и (23) по первому столбцу, видим, что они равны.

Рассуждая аналогично для других подслучаев третьего движения Рейдемейстера, получим, что определители, соответствующие диаграммам K и K' , равны. Теорема доказана.

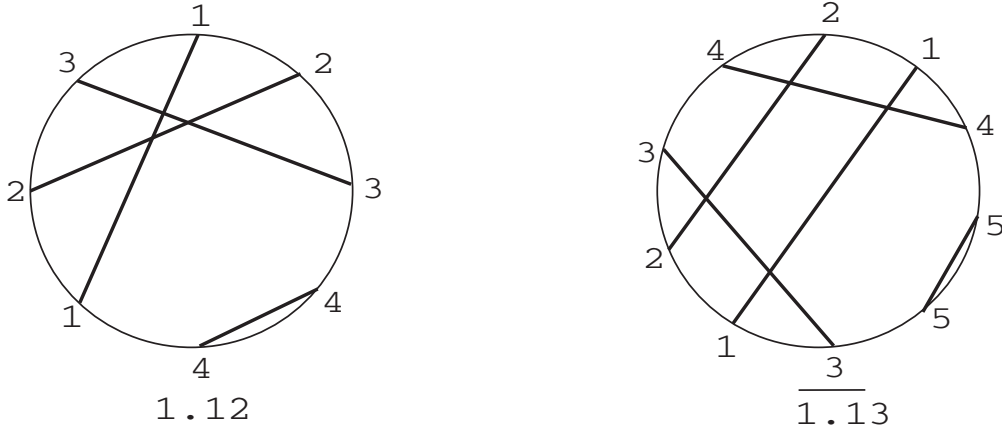
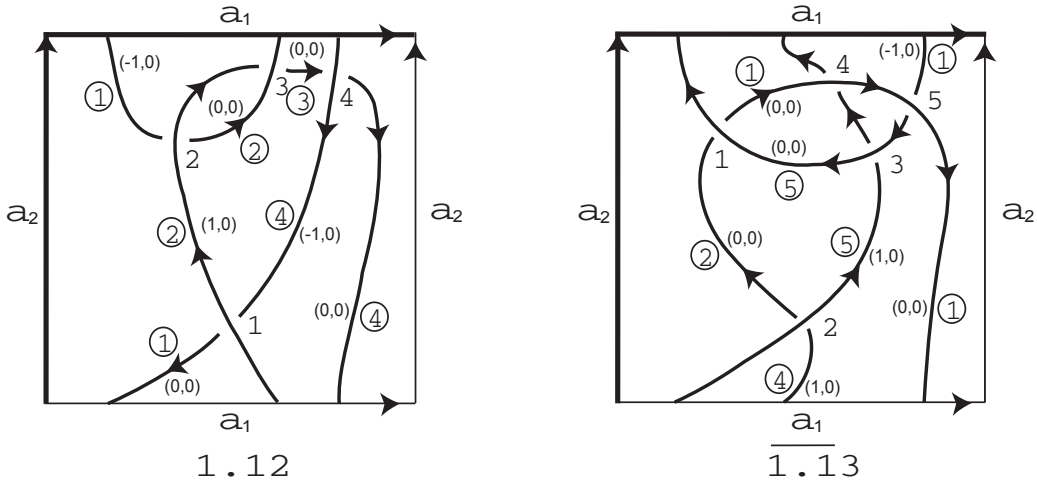
Рис. 16. Хордовые диаграммы узлов 1.12 и $\overline{1.13}$.

Рис. 17. Расстановка меток на диаграммах.

Пример 1. Рассмотрим диаграммы узлов 1.12 и $\overline{1.13}$ на торе T^2 , рассмотренные в [8] (рис. 1). Найдем четность перекрестков этих диаграмм (рис. 16). Видим, что все перекрестки обеих диаграмм четные. Поставим метки на дугах данных диаграмм (рис. 17).

Составим матрицы $M_{1.12}$ и $M_{\overline{1.13}}$, соответствующие диаграммам узлов 1.12 и $\overline{1.13}$.

$$M_{1.12} = \begin{pmatrix} -1 & (1-t)x_1 & 0 & tx_1^{-1} \\ -x_1^{-1} & t + (1-t)x_1 & 0 & 0 \\ 0 & 1-t-x_1 & t & 0 \\ 0 & 0 & t & (1-t)x_1^{-1} - 1 \end{pmatrix},$$

$$M_{\overline{1.13}} = \begin{pmatrix} t & -1 & 0 & 0 & 1-t \\ 0 & -1 & 0 & tx_1 & (1-t)x_1 \\ 0 & 0 & t & 0 & 1-t-x_1 \\ 1-t & 0 & t & -1 & 0 \\ 1-t-x_1^{-1} & 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}.$$

Найдем определители полученных матриц:

$$s(1.12) = \det(M_{1.12}) = -2t + 4t^2 - t^3 + \frac{t^2}{x_1^2} - \frac{t^3}{x_1^2} + \frac{t}{x_1} - \frac{4t^2}{x_1} + \frac{2t^3}{x_1} + tx_1 - t^2x_1,$$

$$s(\overline{1.13}) = \det(M_{\overline{1.13}}) = -2t + 4t^2 - t^3 + \frac{t}{x_1} - \frac{t^2}{x_1} + tx_1 - 4t^2x_1 + 2t^3x_1 + t^2x_1^2 - t^3x_1^2.$$

Таким образом, построенный полином доказывает неэквивалентность диаграмм 1.12 и $\overline{1.13}$ на торе T^2 .

Заметим, что инвариант также доказывает неэквивалентность диаграмм 1.13 и $\overline{1.12}$, которые являются зеркальными отражениями, то есть получаются из рассматриваемых диаграмм $\overline{1.13}$ и 1.12 заменой всех типов перекрестков (проходов на переходы и наоборот) [8].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Афанасьев Д. М.* Об усилении инвариантов виртуальных узлов с помощью четности // *Мат. сб.* — 2010. — 201, № 6. — С. 3–18.
2. *Зенкина М. В.* Инвариант зацеплений в утолщенном торе // *Мат. заметки.* — 2011. — 90, № 2. — С. 242–253.
3. *Зенкина М. В., Мантуров В. О.* Инвариант зацеплений в утолщенном торе // *Зап. науч. сем. ПОМИ.* — 2009. — 372. — С. 5–18.
4. *Мантуров В. О.* Лекции по теории узлов и их инвариантов. — М.: УРСС, 2001.
5. *Мантуров В. О.* О полиномиальных инвариантах виртуальных зацеплений // *Тр. Моск. Мат. об-ва.* — 2004. — 65, № 1. — С. 175–200.
6. *Мантуров В. О.* Теория узлов. — М.—Ижевск: РХД, 2005.
7. *Мантуров В. О.* Четность в теории узлов // *Мат. сб.* — 2010. — 201, № 5. — С. 65–110.
8. *Grishanov S. A., Meshkov V. R., Vassiliev V. A.* Recognizing textile structures by finite type knot invariants // *J. Knot Theory Ramifications.* — 2009. — 18, № 2. — С. 209–235.
9. *Grishanov S. A., Vassiliev V. A.* Invariants of links in 3-manifolds and splitting problem of textile structures // *J. Knot Theory Ramifications.* — 2011. — 20, № 3. — С. 345–370.
10. *Kauffman L. H.* Virtual knot theory // *Eur. J. Combinatorics.* — 1999. — 20, № 7. — С. 662–690.
11. *Kauffman L. H.* Formal knot theory. — Dover Publ., 2006.
12. *Manturov V. O., Ilyutko D. P.* Virtual knots: the state of the art. — Singapore: World Scientific, 2012.
13. *Morton H. R., Grishanov S.* Doubly periodic textile patterns // *J. Knot Theory Ramifications.* — 2009. — 18. — С. 1597–1622.
14. *Ohtsuki T.* Quantum invariants. — Singapore: World Scientific, 2002.

М. В. Зенкина

Московский педагогический государственный университет,
математический факультет, кафедра геометрии

E-mail: zenkina-m@mail.ru

ГРАФ-ЗАЦЕПЛЕНИЯ: НЕРЕАЛИЗУЕМОСТЬ, ОРИЕНТАЦИЯ И ПОЛИНОМ ДЖОНСА

© 2013 г. Д. П. ИЛЬЮТКО, В. С. САФИНА

Аннотация. Данная работа посвящена граф-зацеплениям с многими компонентами и состоит из двух частей. В первой части работы мы классифицируем вершины меченого графа по их принадлежности компонентам граф-зацепления. На основе этой классификации мы строим инвариант граф-зацеплений. Этот инвариант показывает, что меченый второй граф Буше порождает нереализуемое граф-зацепление.

Во второй части работы мы вводим понятие ориентированного граф-зацепления. Для ориентированного граф-зацепления мы определяем число закрученности и, нормируя с его помощью скобку Кауфмана, получаем инвариант ориентированных граф-зацеплений — полином Джонса.

1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим сначала следующий вопрос. Пусть дана диаграмма виртуального узла, т. е. погруженный в плоскость (погружение фиксировано) 4-валентный граф, каждая вершина которого снабжена крестовой структурой и структурой прохода-перехода. Вопрос состоит в следующем: Как много информации мы должны знать об этой диаграмме, чтобы определить для нее скобку Кауфмана или полином Джонса? Оказывается, что вышеназванные полиномы можно получить, лишь зная граф пересечений гауссовой диаграммы (все определения см. ниже) и число закрученности каждого классического перекрестка. Таким образом, информацию о право-лево, которая задается с помощью стрелок на гауссовой диаграмме, оказывается лишней при определении скобки Кауфмана и полинома Джонса. Отметим, что если мы забудем о числе закрученности и будем иметь только крестовую структуру (структуру противоположности ребер), мы получим нетривиальные объекты (с точностью до движений Рейдемейстера) (см. [21]).

Вероятно, самый легкий и наглядный пример, показывающий, как получить информацию об узле из его графа пересечений, — это формула, позволяющая найти количество окружностей в состояниях скобки Кауфмана из графа пересечений, а точнее, из его матрицы смежности [7, 11, 23, 26, 29] (количество окружностей равно корангу матрицы смежности плюс один, см. рис. 1). В частности, это означает, что мы можем обобщить скобку Кауфмана на все графы, не обязательно соответствующие узлам (такие графы называются *нереализуемыми*, см. примеры ниже), причем обобщение совпадает с обычной скобкой Кауфмана в случае, если граф реализуем хордовой диаграммой. Это было отправной точкой исследования у Л. Тральди и Л. Зулли [30] (*петлевые графы*): они построили независимо теорию «нереализуемых графов», обладающую многими интересными свойствами теории узлов. Объекты этой теории — это классы эквивалентности (меченых) графов по «движениям Рейдемейстера» (переведенным на язык графов пересечений). Существенный недостаток такого подхода состоит в том, что он может быть применен только к узлам, а не к зацеплениям: для кодирования зацепления нужно использовать более сложные объекты, чем гауссовы диаграммы, — гауссовы диаграммы на многих окружностях. Этот подход получил дальнейшее развитие в работах Тральди [27, 28], и он позволяет кодировать не только узлы, но и зацепления с любым конечным количеством компонент с помощью меченых графов.

В работах [2, 14] был предложен другой подход к обобщению узлов и зацеплений: в то время как гауссовы диаграммы соответствуют трансверсальному проходу каждого перекрестка, мы можем рассмотреть поворачивающие обходы [1, 3, 4, 13, 19]. Кроме того, мы можем закодировать тип прохода вершины (*A*-разведение или *B*-разведение), см. рис. 2. Заметим, что здесь каждая вершина еще будет иметь метку, зависящую от ориентации противоположных ребер (оснащение 0

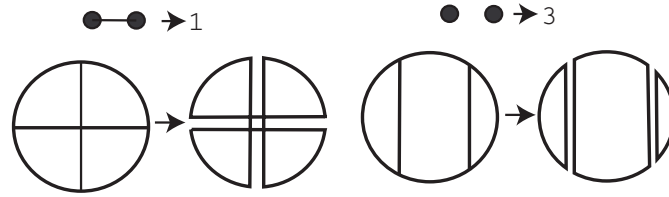


Рис. 1. Сглаживание вдоль двух хорд дает одну или три окружности.

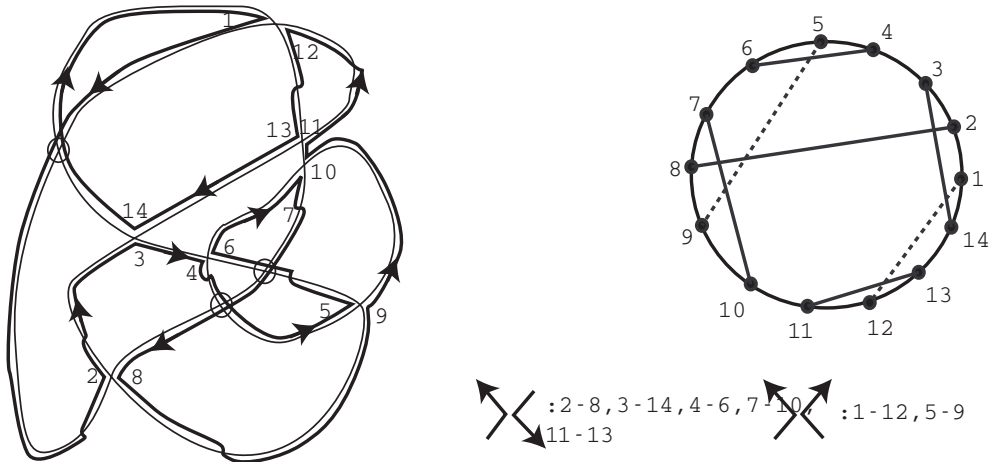


Рис. 2. Поворачивающий обход изображен тонкой линией; Хордовая диаграмма.

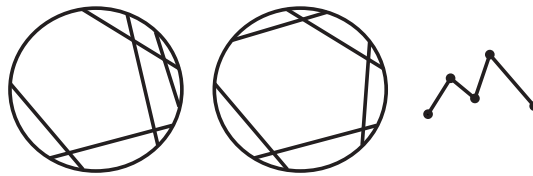


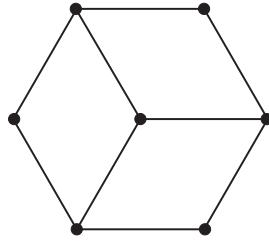
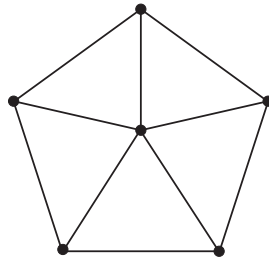
Рис. 3. Граф, который неоднозначно представим хордовыми диаграммами.

или оснащение 1). Поступая аналогично, как с гауссовыми диаграммами, мы можем определить движения на графах пересечений, соответствующие движениям на хордовых диаграммах, и затем продолжить их на все простые графы. В результате, мы получим новый объект — *граф-зацепление*

Таким образом, имеется аналогия: переход от реализуемых гауссовых диаграмм (классических узлов) к произвольным хордовым диаграммам приводит к концепции виртуального узла, а переход от реализуемых (посредством хордовых диаграмм) графов к произвольным графам — к концепции граф-зацепления.

Отметим, что при переходе от узлов к графам пересечений мы теряем некоторую информацию об узле, например, иногда гауссовы диаграммы могут быть получены из графа пересечений многими способами, см. рис. 3. Оказывается, что много информации об узле и его инвариантах можно получить из граф-зацепления. Например, можно определить *число компонент граф-зацепления*, которое совпадает с настоящим числом компонент зацепления в реализуемом случае, т. е. в случае, когда граф-зацепление можно реализовать некоторым зацеплением, построить аналог скобки Кауфмана. Определив число компонент граф-зацепления, мы можем выделить класс граф-зацеплений, имеющих одну компоненту, — *граф-узлы*. Граф-узлы в некотором смысле являются аналогом узлов в множестве зацеплений. Для граф-узла было построено *число закрученности*, с помощью которого был построен полный инвариант граф-узлов — полином Джонса [14].

Один из простейших инвариантов, позволяющий в некоторых случаях показать, что виртуальное зацепление не эквивалентно классическому зацеплению, — это коэффициент, аналогичный

Рис. 4. Второй граф Буше BW_3 .Рис. 5. Первый граф Буше W_5 .

коэффициенту зацепления для классических зацеплений, см. [6, 19]. Если дано виртуальное зацепление, то для каждой пары компонент мы можем найти четность числа классических перекрестков, принадлежащих обеим компонентам. Если окажется, что для некоторой пары компонент это число нечетно, то данное виртуальное зацепление не эквивалентно классическому зацеплению. В первой части работы мы переписываем условие принадлежности вершины одной или разным компонентам зацепления на языке матриц смежности графов пересечений. Оказывается, что эти условия инвариантны относительно граф-преобразований. Таким образом, мы можем классифицировать вершины граф-зацепления по принадлежности их одной или разным компонентам граф-зацепления. Далее мы классифицируем вершины, принадлежащие разным компонентам. А именно, каждый класс состоит из тех и только тех вершин, которые принадлежат разным компонентам и в которых пересекаются одни и те же две компоненты. Оказывается, что четность числа классов, состоящих из нечетного числа вершин, является инвариантом. С помощью этого инварианта мы показываем, что граф-зацепление, порожденное вторым графом Буше BW_3 (см. рис. 4 и [14]), каждая вершина которого имеет оснащение 0, является нереализуемым, т. е. каждый граф данного класса не реализуем никакой хордовой диаграммой. Отметим, что нереализуемость граф-зацепления, порожденного первым графом Буше (W_5 , см. рис. 5 и [13]), каждая вершина которого имеет оснащение 0, была доказана с помощью четности (см. [5, 20, 21]).

Вторая часть работы посвящена полиному Джонса для зацеплений со многими компонентами. Известно, что в случае узлов полином Джонса не зависит от ориентации узла, а в случае зацеплений полином Джонса строится для ориентированных зацеплений. В [14] полином Джонса был построен для граф-узлов. Для того чтобы построить полином Джонса для граф-зацеплений, мы должны сначала ввести понятие *ориентированного* граф-зацепления. Во второй части статьи мы сначала определяем ориентированное граф-зацепление, потом для него строим число закрученности, которое обобщает число закрученности зацепления. С помощью этого числа мы определяем полином, который является аналогом полинома Джонса. Последний полином является полным инвариантом ориентированного граф-зацепления.

Благодарности. Авторы выражают благодарность В. О. Мантурову, И. М. Никонову, А. Т. Фоменко и В. В. Чернову за полезные советы и постоянное внимание к работе.

Работа первого автора выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Правительства РФ по постановлению № 220, договор 11.G34.31.0053, РФФИ (гранты № 13-01-00664-а и № 12-01-31432-мол-а), программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1410.2012.1), программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (госконтракт 14.740.11.0794).

Второй автор частично поддержан программой поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1410.2012.1) и программой «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (госконтракт 14.740.11.0794).

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ПОНЯТИЯ: ГРАФ-ЗАЦЕПЛЕНИЕ

2.1. Классические и виртуальные узлы. (*Классический*) узел или зацепление представляет собой образ гладкого вложения одной окружности S^1 или несвязного объединения нескольких окружностей $S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1$ в трехмерную сферу S^3 (в случае зацепления образ каждой окружности — узел — называется *компонентой зацепления*). Узлом (зацеплением) также называют само вложение. Основная задача теории узлов — это классификация классов изотопии узлов (зацеплений), где два узла $f_1, f_2: S^1 \rightarrow S^3$ (зацепления $f_1, f_2: S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1 \rightarrow S^3$) называются *изотопными*, если существует изотопия $F_t: S^3 \rightarrow S^3, t \in [0, 1]$, такая, что $F_0 = \text{id}$ (тождественное отображение) и $F_1(f_1(S^1)) = f_2(S^1)$ ($F_1(f_1(S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1)) = f_2(S^1 \sqcup \dots \sqcup S^1)$). Отметим, что классификация узлов в S^3 эквивалентна классификации узлов в трехмерном евклидовом пространстве \mathbb{R}^3 .

В случае, если фиксирована ориентация окружности, говорят об *ориентированном узле* (соответственно в случае *ориентированного зацепления* требуется ориентация окружностей — прообразов компонент зацепления); в случае изотопии ориентированных зацеплений требуется, чтобы диффеоморфизм объемлющего пространства сохранял как ориентацию сферы, так и ориентации всех компонент.

Обычно узлы (зацепления) кодируются следующим образом. Фиксируем узел (зацепление) и рассмотрим некоторую плоскость и проекцию узла (зацепления) на нее. Без ограничения общности можно считать, что проекция узла (зацепления) на плоскость представляет собой вложенный конечный четырехвалентный граф, являющийся образом гладкого погружения окружности (несвязного объединения окружностей) в плоскость. Каждая вершина графа проекции, называемая *перекрестком диаграммы зацепления*, снабжена структурой прохода-перехода, см. рис. 6 (ветвь, проходящая сверху, образует *переход*, ветвь снизу образует *проход*). Ребра переходов изображаются сплошными линиями, в то время как проход изображается линией, имеющей разрыв в перекрестке. Такое изображение узла (зацепления) на плоскости называется *плоской диаграммой узла (зацепления)*.

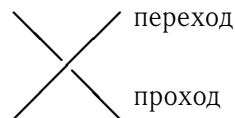


Рис. 6. Локальная структура перекрестка.

Рейдемейстер [25] доказал, что любые две плоские диаграммы задают одно и то же зацепление тогда и только тогда, когда они могут быть получены друг из друга конечной последовательностью движений (впоследствии названных *движениями Рейдемейстера*), см. рис. 7, а также плоской изотопии. Это позволяет рассматривать изотопические классы узлов как комбинаторные объекты: они представляют собой классы эквивалентности плоских диаграмм по движениям Рейдемейстера.

С другой стороны, каждую плоскую диаграмму узла можно задать в виде *гауссовой диаграммы*. Напомним, что *гауссовой диаграммой*, соответствующей плоской диаграмме, называется диаграмма, состоящая из ориентированной окружности (с фиксированной точкой, не являющейся прообразом перекрестка), на которой прообразы прохода и перехода для каждого перекрестка соединены стрелкой, направленной от прообраза перехода к прообразу прохода. Каждая стрелка снабжена знаком, который совпадает со знаком перекрестка, т. е. равен единице для перекрестка вида \times и минус единице для \times .

Так, для классического правого трилистника гауссова диаграмма выглядит следующим образом: см. рис. 8. Не каждая окружность с хордами (*хордовая диаграмма*) может рассматриваться как гауссова диаграмма некоторого классического узла.

По аналогии с движениями Рейдемейстера на плоских диаграммах мы можем определить движения на гауссовых диаграммах. Продолжим эти новые движения на все хордовые диаграммы

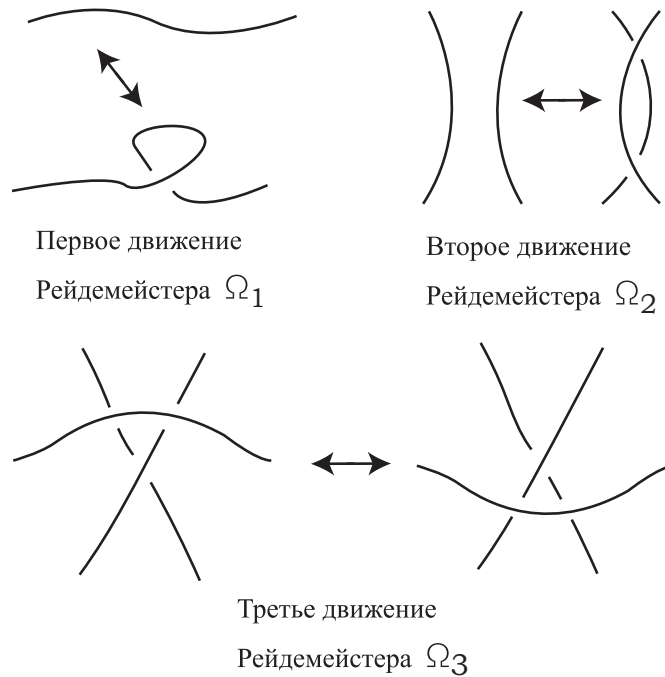


Рис. 7. Движения Рейдемейстера $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$.

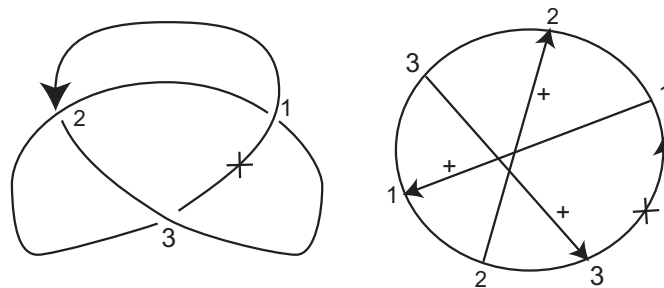


Рис. 8. Гауссова диаграмма правого трилистника.

(хорды ориентированы и снабжены знаком) и рассмотрим классы эквивалентности хордовых диаграмм по движениям. Точный список движений Рейдемейстера для гауссовых диаграмм можно найти в [10]. В результате мы получим новую теорию — теорию виртуальных узлов [12, 17]. Отметим, что вся информация об узле и его инвариантах может быть прочитана из любой гауссовой диаграммы, кодирующей этот узел [18].

Поскольку гауссовы диаграммы (на одной окружности) кодируют лишь диаграммы узлов, то с помощью гауссовых диаграмм мы можем определить только виртуальный узел, но не зацепление. Дадим другое определение виртуального зацепления.

Пусть G — произвольный граф с множеством вершин $V(G)$ и множеством ребер $E(G)$. Под *ребром* мы будем понимать класс эквивалентности двух полуребер, которые его составляют. Вершина $v \in V(G)$ имеет *степень*, равную k , если v инцидентна k полуребрам. Граф, все вершины которого имеют степень k , называется k -валентным или просто k -графом. Для любого k *свободная петля*, т. е. граф без вершин с одним *циклическим ребром*, рассматривается как k -граф.

Определение 2.1. 4-Граф называется *оснащенным* или *графом с крестовой структурой*, если в каждой вершине графа четыре исходящих из нее полуребра разбиты на два семейства полуребер, т. е. задана *структура противоположных ребер*. Полуребра из одного семейства называются (формально) *противоположными*.

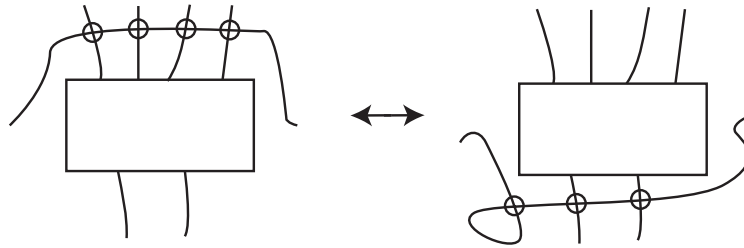


Рис. 9. Объезд.

Определение 2.2. Под *изоморфизмом* 4-графов с крестовой структурой мы всегда будем понимать изоморфизм, сохраняющий структуру (оснащение). Обозначим через G_0 4-граф, представляющий собой одну окружность.

При изображении 4-графов с крестовой структурой на плоскости мы всегда предполагаем, что структура противоположных полуребер в вершинах наследуется из плоскости \mathbb{R}^2 .

Определение 2.3. *Виртуальной диаграммой* (или *диаграммой виртуального зацепления*) называется погружение (также и образ погружения) общего положения 4-графа с крестовой структурой в \mathbb{R}^2 , у которого образ каждой вершины снабжен еще структурой классического перекрестка, т. е. указано, какая ветвь (пара противоположных ребер) проходит выше, а какая — ниже; при изображении на плоскости точки пересечения образов различных ребер оснащенного 4-графа называются *виртуальными перекрестками* и обозначаются кружочком.

Виртуальная диаграмма называется *связной*, если связан соответствующий 4-граф.

Виртуальное зацепление — это класс эквивалентности виртуальных диаграмм по виртуальным движениям Рейдемейстера, которые включают в себя обычные движения Рейдемейстера и движение объезда (см. рис. 9).

То есть фактически для задания виртуального узла нам нужно лишь знать, как расположены классические перекрестки и как они между собой соединяются, при этом нам не важно, как расположены пути, идущие между классическими перекрестками, пересекаются ли они и имеют ли точки самопересечения.

Замечание 2.1. Отметим, что такой подход — стандартные движения внутри локальной евклидовой области и движения типа объезда — был использован Н. Камадой и С. Камадой [16] для построения формальных теорий многомерных «виртуальных узлов» и их инвариантов.

Подобно классическому зацеплению, виртуальное зацепление обладает некоторым количеством *компонент* (*уникурсальных компонент*). Компоненты виртуального зацепления можно описать комбинаторно, исходя из виртуальной диаграммы. Под *уникурсальной компонентой* диаграммы виртуального зацепления понимается следующее. Рассмотрим виртуальную диаграмму K как одномерный комплекс на плоскости. Часть связных компонент этого комплекса представляет собой окружности; каждую такую компоненту назовем (*уникурсальной*) *компонентой зацепления*. Оставшаяся часть представляет собой четырехвалентный граф Γ с вершинами в классических и виртуальных перекрестках. *Уникурсальными компонентами диаграммы* назовем также (помимо компонент-окружностей) классы эквивалентности на множестве ребер графа: два ребра e, e' считаются *эквивалентными*, если существует набор ребер $e = e_1, \dots, e_k = e'$ и набор вершин v_1, \dots, v_{k-1} (некоторые из которых, быть может, совпадают) графа K такие, что ребра e_i, e_{i+1} подходят к вершине v_i с противоположных сторон. Легко видеть, что количество компонент диаграммы зацепления является инвариантным при обобщенных движениях Рейдемейстера. В классическом случае это определение компонент зацепления согласуется с приведенным ранее.

Виртуальный узел — это виртуальное зацепление с одной *уникурсальной компонентой*.

Числом закрученности $w(K)$ виртуальной диаграммы K называется количество положительных перекрестков \times минус количество отрицательных перекрестков \times .

2.2. Граф-зацепление. Любые две эквивалентные (в классе всех виртуальных диаграмм) связные (см. определение 2.3) виртуальные диаграммы являются эквивалентными в классе связных

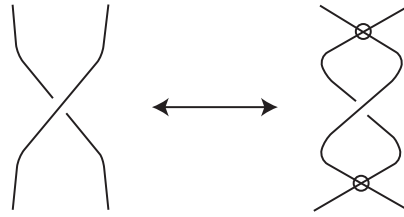


Рис. 10. Виртуализация.

виртуальных диаграмм [14]. Поэтому, без ограничения общности, мы считаем, что все рассматриваемые виртуальные диаграммы связны и содержат по крайней мере один классический перекресток [2, 14].

Мы будем строить хордовые диаграммы не только для узлов, но и для зацеплений. Поэтому подход с помощью гауссовых диаграмм не годится. Вместо них мы будем рассматривать хордовые диаграммы, соответствующие *поворачивающим обходам*, причем в каждом (классическом) перекрестке мы поворачиваем с ребра на соседнее ребро. В дальнейшем, если не указано противное, все хордовые диаграммы соответствуют поворачивающим обходам.

Определение 2.4. *Хордовая диаграмма* — это 3-граф, состоящий из выбранного неориентированного гамильтонова цикла (*окружности*) и неориентированных ребер (*хорд*), соединяющих точки на окружности, причем разные хорды не имеют общих точек на окружности.

Мы назовем две хорды *зацепленными*, если концы одной хорды лежат в разных связных компонентах множества, полученного из S^1 удалением концов другой хорды. В противном случае хорды называются *незацепленными*.

Замечание 2.2. Хордовые диаграммы, как правило, изображаются в виде стандартной евклидовой окружности с конечным множеством ее хорд (точки пересечения хорд вершинами, конечно, не являются).

Определение 2.5. Хордовая диаграмма называется *меченой*, если каждая хорда снабжена меткой (a, α) , где $a \in \{0, 1\}$ — *оснащение* хорды и $\alpha \in \{\pm\}$ — *знак* хорды. Если метки не указаны, то мы считаем, что все они равны $(0, +)$.

Хордовая диаграмма называется *оснащенной*, если каждая хорда снабжена только оснащением, т. е. 0 или 1.

Пусть D — меченая хордовая диаграмма. Мы можем построить такую виртуальную диаграмму $K(D)$ (с точностью до *виртуализации*, см. рис. 10), что диаграмма D совпадает с хордовой диаграммой некоторого поворачивающего обхода на $K(D)$. Мы погружаем диаграмму D в \mathbb{R}^2 , вкладывая окружность диаграммы в плоскость и размещая некоторые хорды внутри окружности, а остальные — вне. После этого мы удаляем окрестности каждого из концов всех хорд и заменяем каждую хорду парой хорд, соединяющих четыре точки на окружности, которые образовались в результате удаления двух окрестностей. При этом новые две хорды образуют только классический перекресток, если оснащение хорды равно 0, и образуют классический и виртуальный перекрестки, если оснащение хорды равно 1, см. рис. 11 (пересечения хорд из разных пар образуют всегда виртуальные перекрестки). Еще мы требуем, чтобы первоначальные части окружности соответствовали A -разведению, $A: \times \rightarrow \succ\langle$, если хорда положительна, и B -разведению, $B: \times \rightarrow \times$, если хорда отрицательна.

Обратно, имея связную виртуальную диаграмму K , мы можем построить меченую хордовую диаграмму $D_C(K)$. Мы рассматриваем поворачивающий обход C на K (виртуальные перекрестки проходятся трансверсально) и строим оснащенную хордовую диаграмму. Знак хорды равен $+$ (соответственно, $-$), если обход локально согласуется с A -разведением (соответственно, с B -разведением). Оснащение хорды зависит от ориентации противоположных полуребер при движении вдоль C (см. рис. 12). Нетрудно проверить, что эта операция обратна операции построения виртуальной диаграммы из меченой хордовой диаграммы: если мы рассмотрим хордовую диаграмму D и построим виртуальную диаграмму $K(D)$ из нее, тогда для некоторого поворачивающего

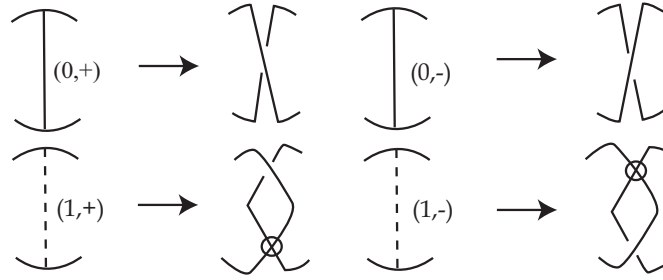


Рис. 11. Замена хорды парой линий.

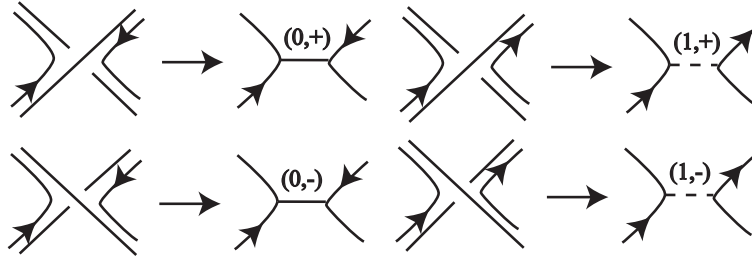


Рис. 12. Замена классического перекрестка меченой хордой.

обхода C меченая хордовая диаграмма $D_C(K(D))$ будет совпадать с D . Это доказывает следующую теорему.

Теорема 2.1 (см. [4]). *Для любой связной виртуальной диаграммы L существует меченая хордовая диаграмма D такая, что $L = K(D)$.*

Опишем движения на графах, которые получаются из движений Рейдемейстера на виртуальных диаграммах, используя поворачивающий обход [2, 14]. Эти движения соответствуют «настоящим» движениям Рейдемейстера, когда они применяются к графам, реализуемым хордовыми диаграммами. Затем мы обобщим эти движения на все графы (не только реализуемые диаграммами). В результате мы получим новый объект — *граф-зацепление*.

Определение 2.6. *Граф пересечений* (см. [9]) $G(D)$ хордовой диаграммы D — это простой граф (без петель и кратных ребер), вершины которого находятся в однозначном соответствии с хордами диаграммы D , причем две вершины соединены ребром в том и только в том случае, если соответствующие им хорды зацеплены.

Назовем граф *меченым*, если каждая его вершина v снабжена меткой (a, α) , где $a \in \{0, 1\}$ — это *оснащение* вершины v , а $\alpha \in \{\pm\}$ — *знак* вершины v .

Пусть D — меченая хордовая диаграмма. *Меченый граф пересечений*, ср. [9, 24], $G(D)$ диаграммы D — это граф пересечений, каждая вершина которого снабжена соответствующей меткой. Простой граф H называется *реализуемым*, если существует такая хордовая диаграмма D , что $H = G(D)$. В противном случае граф называется *нереализуемым*.

Замечание 2.3. Мы будем еще рассматривать простые графы, каждая вершина которых имеет одну метку — 0 или 1. Назовем такие графы *оснащенными*. Таким образом, мы имеем два типа оснащенных графов: 4-валентные графы и простые графы. В первом случае мы будем часто говорить «граф с крестовой структурой».

В реализуемом случае оснащенные графы — это графы пересечений оснащенных хордовых диаграмм.

Следующая лемма очевидна.

Лемма 2.1. *Простой граф реализуем, если и только если каждая его компонента связности реализуема.*

Определение 2.7. Пусть G — произвольный граф и $v \in V(G)$. Множество всех вершин графа G , смежных с v , называется *окрестностью вершины v* и обозначается $N(v)$.

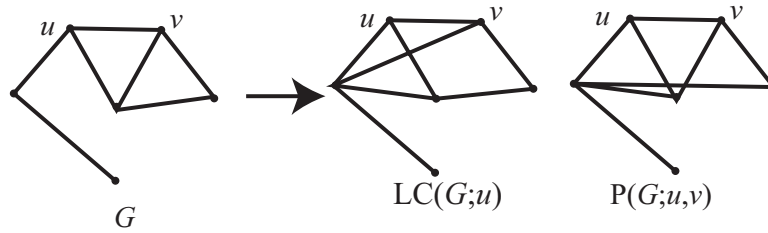


Рис. 13. Локальное дополнение и шарнирное преобразование.

Определим две операции на простых немеченых графах.

Определение 2.8 (Локальное дополнение). Пусть G — произвольный граф. *Локальное дополнение* графа G в вершине $v \in V(G)$ — это операция, которая меняет смежности только между вершинами $a, b \in N(v)$ и $a \neq b$ (остальные смежности остаются без изменений). Обозначим граф, полученный из G с помощью операции локального дополнения в вершине v , через $LC(G; v)$.

Определение 2.9 (Шарнирное преобразование). Пусть G — произвольный граф с двумя различными вершинами u и v . *Шарнирное преобразование* графа G в вершинах u и v — это операция, которая меняет смежности только между такими вершинами x, y , что $x, y \notin \{u, v\}$, $x \in N(u)$, $y \in N(v)$ и либо $x \notin N(v)$, либо $y \notin N(u)$ (остальные смежности остаются без изменений). Обозначим граф, полученный из G с помощью шарнирного преобразования в вершинах u и v , через $piv(G; u, v)$.

Пример 2.1. На рис. 13 изображены графы G , $LC(G; u)$ и $piv(G; u, v)$.

Легко доказать следующую лемму.

Лемма 2.2. Если вершины u и v смежны, то существует изоморфизм

$$piv(G; u, v) \cong LC(LC(LC(G; u); v); u).$$

Определим *граф-преобразования*, т. е. преобразования меченых графов. Мы рассматриваем меченые хордовые диаграммы, построенные посредством поворачивающих обходов, и движения на них, которые получаются из «настоящих» движений Рейдемейстера виртуальных диаграмм. Затем мы переносим эти движения на произвольные меченые графы, используя графы пересечений хордовых диаграмм. В результате мы получим новый объект — класс эквивалентности меченых графов по формальным движениям [2, 14].

Определение 2.10.

- Ω_g1 . *Первое граф-преобразование* состоит в добавлении/удалении изолированной вершины с меткой $(0, \alpha)$, $\alpha \in \{\pm\}$.
- Ω_g2 . *Второе граф-преобразование* состоит в добавлении/удалении двух несмежных (соответственно смежных) вершин с метками $(0, \pm\alpha)$ (соответственно $(1, \pm\alpha)$), и имеющих одинаковые смежности с остальными вершинами.
- Ω_g3 . *Третье граф-преобразование* определяется следующим образом. Пусть u, v, w — произвольные три вершины графа G , все имеющие метки $(0, -)$, причем вершина u смежна только с вершинами v и w в G , а вершины v и w не смежны друг с другом. Тогда мы изменяем только смежности вершины u с вершинами v, w и $t \in (N(v) \setminus N(w)) \cup (N(w) \setminus N(v))$. Кроме того, мы еще меняем знаки вершин v и w на $+$. Обратная операция также называется третьим граф-преобразованием.
- Ω_g4 . *Четвертое граф-преобразование* для графа G определяется следующим образом. Мы берем две смежные вершины u и v с метками $(0, \alpha)$ и $(0, \beta)$ соответственно. Заменяем граф G на $piv(G; u, v)$ и, кроме того, меняем знаки вершин u и v на $-\beta$ и $-\alpha$ соответственно.
- Ω_g4' . В этом *четвертом граф-преобразовании* мы берем одну вершину v с меткой $(1, \alpha)$. Заменяем G на $LC(G; v)$ и, кроме того, меняем знак вершины v и оснащение каждой вершины $u \in N(v)$.

Замечание 2.4. Четвертые граф-преобразования $\Omega_g A$ и $\Omega_g A'$ в реализуемом случае соответствуют замене поворачивающего обхода диаграммы зацепления другим поворачивающим обходом.

Замечание 2.5. Если меченый граф G_2 получен из меченого графа G_1 применением одного граф-преобразования, то между вершинами графов, не «принимающих» участие в преобразовании, имеется взаимно однозначное соответствие.

В случае третьего граф-преобразования мы всегда условимся считать, что вершина u графа G_1 соответствует вершине u графа G_2 , а вершина v (соответственно w) графа G_1 соответствует вершине w (соответственно v) графа G_2 .

В случае четвертого граф-преобразования $\Omega_g A$ мы всегда условимся считать, что вершина u графа G_1 соответствует вершине v графа G_2 , а вершина v — вершине u графа G_2 .

Всегда, если не оговорено противное, вершины графов G_i будем нумеровать следующим образом: вершины, не «принимающие» участие в преобразованиях, имеют одинаковые номера; добавляемые вершины при первых двух граф-преобразованиях имеют последние номера, вершины u, v, w для третьего граф-преобразования имеют номера 1, 2, 3 для G_1 и соответственно 1, 3, 2 для G_2 , вершины u, v (соответственно вершина u) для четвертого граф-преобразования $\Omega_g A$ (соответственно $\Omega_g A'$) имеют номера 1, 2 (соответственно номер 1) для G_1 и 2, 1 (соответственно номер 1) для G_2 (т. е. соответствующие при преобразовании вершины имеют одинаковые номера).

Замечание 2.6. Мы определили граф-преобразования для меченых графов. Если мы рассматриваем оснащенные графы, то для них граф-преобразования получаются из граф-преобразований $\Omega_g 1 - \Omega_g A'$ забыванием знака, т. е. второй 1-компоненты метки. В этом случае мы будем использовать те же самые обозначения.

Сопоставление граф-преобразований с движениями Рейдемейстера приводит к следующей теореме.

Теорема 2.2. Пусть G_1 и G_2 — два меченых графа пересечений виртуальных диаграмм K_1 и K_2 соответственно. Если K_1 и K_2 эквивалентны в классе связных диаграмм, тогда G_1 и G_2 получаются друг из друга последовательностью граф-преобразований $\Omega_g 1 - \Omega_g A'$.

Определение 2.11. Граф-зацепление $\{G\}$ — это класс эквивалентности меченого графа G относительно преобразований $\Omega_g 1 - \Omega_g A'$. Граф из $\{G\}$ назовем *представителем* для $\{G\}$.

Определение 2.12. Матрица смежности $A(G)$ меченого графа G — это матрица (a_{ij}) над \mathbb{Z}_2 , для которой a_{ii} равно оснащению вершины v_i , $a_{ij} = 1$, $i \neq j$, если и только если вершины v_i и v_j смежны, и $a_{ij} = 0$ в противном случае.

Отметим, что $\text{corank}(A(G_1) + E) = \text{corank}(A(G_2) + E)$, где $G_1, G_2 \in \{G\}$ (см. [14]), где через $\text{corank } A$ мы обозначаем коранг матрицы A , т. е. разность между размерностью матрицы и ее рангом (ранг считается над \mathbb{Z}_2). Определим *число компонент* граф-зацепления $\{G\}$ как $\text{corank}(A(G) + E) + 1$, где E — единичная матрица. *Граф-узел* — это граф-зацепление с одной компонентой. Граф-зацепление называется *нереализуемым*, если каждый его представитель не является реализуемым графом.

Отметим, что в реализуемом случае число компонент граф-зацепления совпадает с числом компонент соответствующего зацепления.

3. ПЕРЕСЕЧЕНИЕ РАЗНЫХ КОМПОНЕНТ

Пусть G — меченый граф с множеством вершин $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$ и $B(G) = A(G) + E$, $B_i(G) = A(G) + E + E_{ii}$, где E_{ii} — $n \times n$ -матрица с одним ненулевым элементом, равным 1 и стоящим на пересечении i -го столбца и i -ой строки.

3.1. Вспомогательные результаты. Докажем некоторые леммы, которые нам понадобятся позже.

Лемма 3.1. *Равенство*

$$\text{corank} \begin{pmatrix} a & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{b} & C \end{pmatrix} = \text{corank } C,$$

где C — симметрическая матрица, выполняется тогда и только тогда, когда вектор $\begin{pmatrix} a+1 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$ линейно выражается через столбцы матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{b}^\top \\ C \end{pmatrix}$, а вектор $\begin{pmatrix} a \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$ — нет (линейные комбинации рассматриваются над \mathbb{Z}_2 , и возможен случай, когда в линейной комбинации участвует пустое множество столбцов, т. е. вектор $\begin{pmatrix} a+1 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$ является нулевым).

Замечание 3.1. Жирными буквами здесь и далее мы обозначаем векторы-столбцы.

Доказательство. Импликация \Leftarrow очевидна.

Рассмотрим импликацию \Rightarrow . Имеем

$$\text{rank} \begin{pmatrix} a & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{b} & C \end{pmatrix} = \text{rank } C + 1.$$

Если вектор \mathbf{b} не выражается через столбцы матрицы C , то

$$\text{rank} (\mathbf{b} \ C) = \text{rank } C + 1 \quad \text{и} \quad \text{rank} \begin{pmatrix} a & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{b} & C \end{pmatrix} = \text{rank } C + 2,$$

получили противоречие.

Следовательно, один из двух векторов $\begin{pmatrix} a+1 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$ или $\begin{pmatrix} a \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$ линейно выражается через столбцы матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{b}^\top \\ C \end{pmatrix}$. Но во втором случае получим, что

$$\text{corank} \begin{pmatrix} a & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{b} & C \end{pmatrix} = \text{corank} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & C \end{pmatrix} = \text{corank } C + 1,$$

здесь и далее $\mathbf{0}$ — это вектор-столбец, состоящий из нулей. \square

Обозначим через $G \setminus \{v_i\}$ меченый граф, полученный из G удалением вершины v_i и всех ребер, инцидентных ей (метки всех остальных вершин сохраняются).

Следствие 3.1. Если $\text{corank } B_i(G) = \text{corank } B(G \setminus \{v_i\})$, то $\text{corank } B_i(G) = \text{corank } B(G) - 1$.

Следствие 3.2. Если $\text{corank } B_i(G) \neq \text{corank } B(G \setminus \{v_i\})$, то либо

$$\text{corank } B(G) = \text{corank } B(G \setminus \{v_i\}) = \text{corank } B_i(G) - 1,$$

либо

$$\text{corank } B(G) = \text{corank } B_i(G) = \text{corank } B(G \setminus \{v_i\}) - 1.$$

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $i = 1$ и

$$B(G) = \begin{pmatrix} a & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{b} & C \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$B_1(G) = \begin{pmatrix} a+1 & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{b} & C \end{pmatrix} \quad \text{и} \quad B(G \setminus \{v_1\}) = C.$$

По лемме 3.1 мы имеем два случая:

1. Вектор $\begin{pmatrix} a+1 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$ линейно выражается через столбцы матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{b}^\top \\ C \end{pmatrix}$. Тогда

$$\text{corank } B(G) = \text{corank } B(G \setminus \{v_i\}) = \text{corank } B_i(G) - 1.$$

2. Вектор \mathbf{b} линейно не выражается через столбцы матрицы C . Тогда

$$\text{corank } B(G) = \text{corank } B_i(G) = \text{corank } B(G \setminus \{v_i\}) - 1.$$

\square

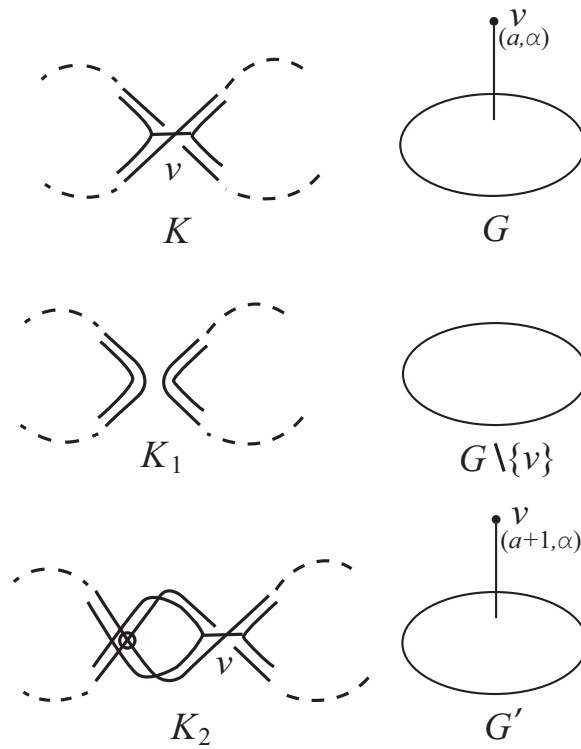


Рис. 14. Перекресток зацепления.

3.2. Вершины и компоненты граф-зацеплений. В данном пункте сначала мы переписываем условие принадлежности классического перекрестка зацепления одной компоненте зацепления на язык графов пересечений, а точнее, на язык матриц смежности графов пересечений, и используем новое условие для введения понятия *принадлежности вершины графа одной компоненте*. Затем мы проделываем то же самое для пары перекрестков, каждый из которых принадлежит разным компонентам, но при этом они оба принадлежат всего двум компонентам.

Пусть v — классический перекресток виртуальной диаграммы K . Рассмотрим произвольный поворачивающий обход на диаграмме K и построим меченую хордовую диаграмму и соответствующий ей граф пересечений G , см. рис. 14 (верхний рисунок). Очевидно, что перекресток v принадлежит одной и той же компоненте тогда и только тогда, когда виртуальные диаграммы K_1 и K_2 (см. средний и нижний рис. 14) имеют разное число компонент. Легко видеть, что число компонент диаграммы K_1 можно сосчитать по формуле $\text{corank } B(G \setminus \{v\}) + 1$, а K_2 — по $\text{corank } B(G') + 1 = \text{corank } B_i(G) + 1$, где i — номер вершины v . Используя эти числа, дадим следующее определение.

Пусть дан меченый граф G с множеством вершин $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Определение 3.1. Будем говорить, что вершина v_i *принадлежит одной компоненте* меченого графа G , если $\text{corank } B_i(G) \neq \text{corank } B(G \setminus \{v_i\})$. В противном случае будем говорить, что вершина *принадлежит разным компонентам* графа G .

Посмотрим, что происходит с вершинами меченого графа при применении к нему граф-преобразований.

Лемма 3.2. Пусть меченый граф G_2 получен из меченого графа G_1 применением первого граф-преобразования, при котором добавляется вершина с меткой $(0, \alpha)$. Тогда:

1. вершина, участвующая в преобразовании, принадлежит одной компоненте графа G_2 ;
2. вершина графа G_1 принадлежит одной компоненте тогда и только тогда, когда соответствующая ей вершина в G_2 принадлежит одной компоненте.

Доказательство. Пусть $V(G_1) = \{v_1, \dots, v_n\}$ и $V(G_2) = \{v'_1, \dots, v'_{n+1}\}$, и

$$A(G_2) = \begin{pmatrix} A(G_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 0 \end{pmatrix}, \quad B(G_2) = \begin{pmatrix} B(G_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Из определения сразу получаем

$$\text{corank } B_{n+1}(G_2) \neq \text{corank } B(G_2 \setminus \{v'_{n+1}\}).$$

Отсюда следует справедливость первого утверждения.

2. Легко видеть, что при $i < n + 1$ два равенства

$$\text{corank } B_i(G_1) = \text{corank } B(G_1 \setminus \{v_i\}),$$

$$\text{corank } B_i(G_2) = \text{corank } B(G_2 \setminus \{v'_i\})$$

выполняются или не выполняются одновременно. Отсюда следует справедливость второго пункта утверждения. \square

Лемма 3.3. Пусть меченый граф G_2 получен из меченого графа G_1 применением второго граф-преобразования, при котором добавляются две вершины. Тогда:

1. вершины графа G_2 , добавленные к графу G_1 , одновременно принадлежат либо одной компоненте, либо разным компонентам графа G_2 ;
2. вершина графа G_1 принадлежит одной компоненте тогда и только тогда, когда соответствующая ей вершина в G_2 принадлежит одной компоненте.

Доказательство. Пусть $V(G_1) = \{v_1, \dots, v_n\}$ и $V(G_2) = \{v'_1, \dots, v'_{n+2}\}$. Тогда

$$A(G_2) = \begin{pmatrix} A(G_1) & \mathbf{c} & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\top & a & a \\ \mathbf{c}^\top & a & a \end{pmatrix}, \quad B(G_2) = \begin{pmatrix} B(G_1) & \mathbf{c} & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\top & a+1 & a \\ \mathbf{c}^\top & a & a+1 \end{pmatrix}.$$

Первое утверждение очевидно. Рассмотрим теперь второе.

Используя элементарные преобразования (см. также лемму 5.1 из [14]), мы получаем

$$\begin{aligned} B(G_2) &= \begin{pmatrix} B(G_1) & \mathbf{c} & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\top & a+1 & a \\ \mathbf{c}^\top & a & a+1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} B(G_1) & \mathbf{c} & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\top & a+1 & a \\ \mathbf{0}^\top & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \\ &\rightsquigarrow \begin{pmatrix} B(G_1) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}^\top & a+1 & a \\ \mathbf{0}^\top & 1 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} B(G_1) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{c}^\top & 1 & a \\ \mathbf{0}^\top & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} B(G_1) & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 1 & 0 \\ \mathbf{0}^\top & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Следовательно, при $i < n + 1$ равенства

$$\text{corank } B_i(G_1) = \text{corank } B(G_1 \setminus \{v_i\})$$

и

$$\text{corank } B_i(G_2) = \text{corank } B(G_2 \setminus \{v'_i\})$$

выполняются или не выполняются одновременно. \square

Лемма 3.4. Пусть меченый граф G_2 получен из меченого графа G_1 применением третьего граф-преобразования. Тогда вершина графа G_1 принадлежит одной компоненте тогда и только тогда, когда соответствующая ей вершина в G_2 принадлежит одной компоненте.

Доказательство. Имеем

$$B(G_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{0}^\top \\ 1 & 1 & 0 & \mathbf{a}^\top \\ 1 & 0 & 1 & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{a} & \mathbf{b} & C \end{pmatrix}, \quad B(G_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & (\mathbf{a} + \mathbf{b})^\top \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{b}^\top \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{a}^\top \\ \mathbf{a} + \mathbf{b} & \mathbf{b} & \mathbf{a} & C \end{pmatrix}.$$

Поскольку для любых \mathbf{a} , \mathbf{b} , C существует цепочка элементарных преобразований, переводящая матрицу $B(G_2)$ в матрицу $B(G_1)$ (см. доказательство леммы 5.1 из [14]), мы получаем справедливость утверждения для всех вершин с номерами $i > 3$.

Рассмотрим оставшиеся три вершины.

Для первой вершины имеем

$$B_1(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & (\mathbf{a} + \mathbf{b})^\top \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{b}^\top \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{a}^\top \\ \mathbf{a} + \mathbf{b} & \mathbf{b} & \mathbf{a} & C \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & \mathbf{0}^\top \\ 1 & 1 & 0 & \mathbf{a}^\top \\ 1 & 0 & 1 & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{a} & \mathbf{b} & C \end{pmatrix} = B_1(G_1),$$

т. е. $\text{corank } B_1(G_1) = \text{corank } B_1(G_2)$.

Далее, матрицы $B(G_1 \setminus \{v_1\})$ и $B(G_2 \setminus \{v'_1\})$ равны с точностью до перестановки строк и столбцов, т. е. $\text{corank } B(G_1 \setminus \{v_1\}) = \text{corank } B(G_2 \setminus \{v'_1\})$. Отсюда следует справедливость утверждения для первой вершины.

Для второй вершины имеем

$$B_2(G_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{0}^\top \\ 1 & 0 & 0 & \mathbf{a}^\top \\ 1 & 0 & 1 & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{a} & \mathbf{b} & C \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{0}^\top \\ 0 & 1 & 1 & \mathbf{a}^\top \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{a} & \mathbf{b} & C \end{pmatrix},$$

$$B_2(G_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & (\mathbf{a} + \mathbf{b})^\top \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{b}^\top \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{a}^\top \\ \mathbf{a} + \mathbf{b} & \mathbf{b} & \mathbf{a} & C \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \mathbf{0}^\top \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{b}^\top \\ 1 & 0 & 1 & \mathbf{a}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{b} & \mathbf{a} & C \end{pmatrix} \rightsquigarrow \\ \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & \mathbf{0}^\top \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{b}^\top \\ 1 & 0 & 0 & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{b} & \mathbf{0} & C \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \mathbf{0}^\top \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{0}^\top \\ 0 & 0 & 0 & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{b} & C \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\text{corank } B_2(G_1) = \text{corank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{a}^\top \\ 1 & 0 & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & C \end{pmatrix}, \quad \text{corank } B_2(G_2) = \text{corank} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{b} & C \end{pmatrix}.$$

Далее,

$$B(G_1 \setminus \{v_2\}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{0}^\top \\ 1 & 1 & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{b} & C \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0}^\top \\ 0 & 0 & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{b} & C \end{pmatrix},$$

$$B(G_2 \setminus \{v'_2\}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & (\mathbf{a} + \mathbf{b})^\top \\ 0 & 1 & \mathbf{a}^\top \\ \mathbf{a} + \mathbf{b} & \mathbf{a} & C \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{a}^\top \\ 1 & 0 & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{a} & \mathbf{b} & C \end{pmatrix}.$$

т. е.

$$\text{corank } B_2(G_1) = \text{corank } B(G_2 \setminus \{v'_2\}), \quad \text{corank } B_2(G_2) = \text{corank } B(G_1 \setminus \{v_2\}).$$

Отсюда следует справедливость утверждения для второй вершины.

Третья вершина рассматривается аналогично второй вершине. \square

Лемма 3.5. Пусть меченый граф G_2 получен из меченого графа G_1 применением четвертого граф-преобразования. Тогда вершина графа G_1 принадлежит одной компоненте тогда и только тогда, когда соответствующая ей вершина в G_2 принадлежит одной компоненте.

Доказательство. 1. Рассмотрим преобразование Ω_4 . Имеем

$$B(G_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ 1 & \mathbf{0} & A_1^\top & B_4 & A_5 & A_6 \\ \mathbf{0} & 1 & A_2^\top & A_5^\top & B_7 & A_8 \\ 1 & 1 & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top & B_9 \end{pmatrix},$$

$$B(G_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_1^\top & B_4 & A_5 + (1) & A_6 + (1) \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top + (1) & B_7 & A_8 + (1) \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top + (1) & A_8^\top + (1) & B_9 \end{pmatrix},$$

где через (1) обозначена матрица соответствующего размера, состоящая из единиц.

Поскольку существует цепочка элементарных преобразований, переводящая матрицу $B(G_2)$ в матрицу $B(G_1)$ (см. лемму 5.1 из [14]), мы получаем справедливость утверждения для всех вершин с номерами $i > 2$.

Рассмотрим оставшиеся две вершины. Мы рассмотрим только первую (вторая рассматривается аналогично).

Имеем

$$B_1(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & A_1^\top & B_4 & A_5 & A_6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_2^\top & A_5^\top & B_7 & A_8 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top & B_9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & A_1^\top & B_4 & A_5 + (1) & A_6 + (1) \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top + (1) & B_7 & A_8 + (1) \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top + (1) & A_8^\top + (1) & B_9 \end{pmatrix},$$

$$B_1(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_1^\top & B_4 & A_5 + (1) & A_6 + (1) \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top + (1) & B_7 & A_8 + (1) \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top + (1) & A_8^\top + (1) & B_9 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_1^\top & B_4 & A_5 & A_6 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top & B_7 & A_8 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top & B_9 \end{pmatrix},$$

$$B(G_1 \setminus \{v_1\}) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & A_1^\top & B_4 & A_5 & A_6 \\ \mathbf{1} & A_2^\top & A_5^\top & B_7 & A_8 \\ \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top & B_9 \end{pmatrix},$$

$$B(G_2 \setminus \{v'_1\}) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{1} & A_1^\top & B_4 & A_5 + (1) & A_6 + (1) \\ \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top + (1) & B_7 & A_8 + (1) \\ \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top + (1) & A_8^\top + (1) & B_9 \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\text{corank } B_1(G_1) = \text{corank } B(G_2 \setminus \{v'_1\}), \quad \text{corank } B_1(G_2) = \text{corank } B(G_1 \setminus \{v_1\}).$$

Отсюда следует справедливость утверждения для первой вершины.

2. Рассмотрим преобразование $\Omega_g A'$. Имеем

$$B(G_1) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 & A_1 \\ \mathbf{1} & A_1^\top & A_2 \end{pmatrix}, \quad B(G_2) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 & A_1 \\ \mathbf{1} & A_1^\top & A_2 + (1) \end{pmatrix}.$$

Справедливость утверждения для вершин с номерами $i > 1$ очевидна. Рассмотрим только первую вершину. Имеем

$$B_1(G_1) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 & A_1 \\ \mathbf{1} & A_1^\top & A_2 \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 & A_1 \\ \mathbf{1} & A_1^\top & A_2 + (1) \end{pmatrix},$$

$$B_1(G_2) = \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 & A_1 \\ \mathbf{1} & A_1^\top & A_2 + (1) \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 & A_1 \\ \mathbf{1} & A_1^\top & A_2 \end{pmatrix},$$

$$B(G_1 \setminus \{v_1\}) = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ A_1^\top & A_2 \end{pmatrix}, \quad B(G_2 \setminus \{v'_1\}) = \begin{pmatrix} A_0 & A_1 \\ A_1^\top & A_2 + (1) \end{pmatrix},$$

т. е.

$$\text{corank } B_1(G_1) = \text{corank } B(G_2 \setminus \{v'_1\}), \quad \text{corank } B_1(G_2) = \text{corank } B(G_1 \setminus \{v_1\}).$$

Отсюда следует справедливость утверждения для первой вершины. \square

Рассмотрим теперь взаимное расположение двух вершин меченого графа.

Определение 3.2. Рассмотрим две вершины v_i и v_j меченого графа G , принадлежащие разным компонентам. Будем говорить, что в этих вершинах *пересекаются две компоненты* (или эти вершины *лежат на одних и тех же компонентах*), если либо $v_i = v_j$, либо v_i принадлежит одной компоненте графа $G \setminus \{v_j\}$, т. е. $\text{corank } B_i(G \setminus \{v_j\}) \neq \text{corank } B(G \setminus \{v_j, v_i\})$ при $i < j$ или $\text{corank } B_{i-1}(G \setminus \{v_j\}) \neq \text{corank } B(G \setminus \{v_j, v_i\})$ при $i > j$. В противном случае будем говорить, что в вершинах *пересекаются разные компоненты*.

Обозначим через $\widehat{C}^{i,j,\dots,k}$ (соответственно, $\widehat{C}_{i,j,\dots,k}$) матрицу, полученную из матрицы C удалением столбцов (соответственно, строк) с номерами i, j, \dots, k . Вместо $\widehat{B}(G)$ будем писать $\widehat{B}(G)$.

Лемма 3.6. Пусть $B(G) = \begin{pmatrix} \mathbf{b}_1 & \mathbf{b}_2 & C \end{pmatrix}$. В вершинах v_1 и v_2 пересекаются разные компоненты тогда и только тогда, когда векторы \mathbf{b}_1 и \mathbf{b}_2 линейно выражаются через столбцы матрицы C .

Доказательство. Пусть

$$B(G) = \begin{pmatrix} a & b & \mathbf{d}^\top \\ b & c & \mathbf{e}^\top \\ \mathbf{d} & \mathbf{e} & F \end{pmatrix},$$

и вершины v_1 и v_2 принадлежат разным компонентам, т. е., используя лемму 3.1, вектор $\begin{pmatrix} a \\ b \\ \mathbf{d} \end{pmatrix}$

линейно выражается через столбцы матрицы $\begin{pmatrix} b & \mathbf{d}^\top \\ c & \mathbf{e}^\top \\ \mathbf{e} & F \end{pmatrix}$, а вектор $\begin{pmatrix} a+1 \\ b \\ \mathbf{d} \end{pmatrix}$ — нет, и вектор

$\begin{pmatrix} b \\ c \\ \mathbf{e} \end{pmatrix}$ линейно выражается через столбцы матрицы $\begin{pmatrix} a & \mathbf{d}^\top \\ b & \mathbf{e}^\top \\ \mathbf{d} & F \end{pmatrix}$, а вектор $\begin{pmatrix} b \\ c+1 \\ \mathbf{e} \end{pmatrix}$ — нет (все

вычисления производятся над \mathbb{Z}_2).

(\implies) Пусть в вершинах v_1 и v_2 пересекаются разные компоненты. Тогда

$$\text{corank } B_1(G \setminus \{v_2\}) = \text{corank } B(G \setminus \{v_1, v_2\}),$$

и по лемме 3.1 вектор $\begin{pmatrix} a \\ \mathbf{d} \end{pmatrix}$ линейно выражается через столбцы матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{d}^\top \\ F \end{pmatrix}$. Тогда вектор

$\begin{pmatrix} b \\ \mathbf{e} \end{pmatrix}$ линейно выражается через столбцы матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{d}^\top \\ F \end{pmatrix}$. Поскольку вектор $\begin{pmatrix} b \\ c+1 \\ \mathbf{e} \end{pmatrix}$

линейно не выражается через столбцы матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{d}^\top \\ \mathbf{e}^\top \\ F \end{pmatrix}$, то мы получаем требуемое.

(\impliedby) Сразу следует из леммы 3.1. \square

Лемма 3.7. Пусть в вершинах v_i и v_j , $i < j$, пересекаются две компоненты. Тогда

$$\text{corank } B_{j-1}(G \setminus \{v_i\}) = \text{corank } B_i(G \setminus \{v_j\}).$$

Доказательство. Без ограничения общности будем считать, что $i = 1$ и $j = 2$. Имеем

$$B(G) = \begin{pmatrix} a & b & \mathbf{d}^\top \\ b & c & \mathbf{e}^\top \\ \mathbf{d} & \mathbf{e} & F \end{pmatrix}.$$

По леммам 3.1 и 3.6, сумма векторов $\begin{pmatrix} a \\ b \\ \mathbf{d} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} b \\ c \\ \mathbf{e} \end{pmatrix}$ линейно выражается через столбцы матрицы $\begin{pmatrix} \mathbf{d}^\top \\ \mathbf{e}^\top \\ F \end{pmatrix}$. Совершая элементарные преобразования, получаем

$$\begin{aligned} \text{corank } B_{j-1}(G \setminus \{v_i\}) &= \text{corank} \begin{pmatrix} c+1 & \mathbf{e}^\top \\ \mathbf{e} & F \end{pmatrix} = \text{corank} \begin{pmatrix} b+1 & \mathbf{e}^\top \\ \mathbf{d} & F \end{pmatrix} = \\ &= \text{corank} \begin{pmatrix} a+1 & \mathbf{d}^\top \\ \mathbf{d} & F \end{pmatrix} = \text{corank } B_i(G \setminus \{v_j\}). \end{aligned}$$

□

Лемма 3.8. *Отношение, порожденное «пересечением двух компонент», является отношением эквивалентности.*

Доказательство. 1. Рефлексивность, т. е. то, что отношение имеет место, когда две вершины совпадают, очевидна.

2. Симметричность (если в вершинах v_i и v_j пересекаются две компоненты, то и в вершинах v_j и v_i пересекаются две компоненты) сразу следует из леммы 3.7.

3. Транзитивность. Покажем, что, если v_i и v_j лежат на одних и тех же компонентах, v_j и v_k лежат на одних и тех же компонентах, то v_i и v_k лежат на одних и тех же компонентах.

Без ограничения общности будем считать, что $(i, j, k) = (1, 2, 3)$. Пусть

$$B(G) = \begin{pmatrix} a & b & c & \mathbf{k}^\top \\ b & d & e & \mathbf{l}^\top \\ c & e & f & \mathbf{m}^\top \\ \mathbf{k} & \mathbf{l} & \mathbf{m} & Q \end{pmatrix} = (\mathbf{p}_1 \quad \mathbf{p}_2 \quad \mathbf{p}_3 \quad \tilde{Q}).$$

Поскольку вершины v_s , $s = 1, 2, 3$, лежат на разных компонентах, то векторы \mathbf{p}_s линейно выражаются через столбцы матрицы $\hat{B}^s(G)$.

Пусть в вершинах v_1 и v_3 пересекаются разные компоненты. Тогда по лемме 3.6 векторы \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_3 линейно выражаются через столбцы матрицы $\hat{B}^{1,3}(G)$.

Если вектор \mathbf{p}_1 (соответственно вектор \mathbf{p}_3) линейно выражается через столбцы матрицы $\hat{B}^{1,2,3}(G)$, то вектор \mathbf{p}_2 линейно выражается через столбцы матрицы $\hat{B}^{1,2}(G)$ (соответственно матрицы $\hat{B}^{2,3}(G)$). Таким образом, в вершинах v_1 и v_2 (соответственно в вершинах v_2 и v_3) пересекаются разные компоненты. Получили противоречие с тем, что в вершинах v_1 и v_2 (соответственно в вершинах v_2 и v_3) пересекаются две компоненты.

Пусть векторы \mathbf{p}_1 и \mathbf{p}_3 линейно не выражаются через столбцы матрицы $\hat{B}^{1,2,3}(G)$. Тогда вектор $\mathbf{p}_1 + \mathbf{p}_3$ линейно выражается через столбцы матрицы $\hat{B}^{1,2,3}(G)$ (линейные комбинации берутся над \mathbb{Z}_2), а вектор \mathbf{p}_2 линейно выражается через столбцы матрицы $\hat{B}^{1,2}(G)$ или $\hat{B}^{2,3}(G)$, но не выражается через столбцы матрицы $\hat{B}^{1,2,3}(G)$. В первом случае, т. е. когда вектор \mathbf{p}_2 линейно выражается через столбцы матрицы $\hat{B}^{1,2}(G)$, получим, что в вершинах v_1 и v_2 пересекаются разные компоненты, а во втором случае — что в вершинах v_2 и v_3 пересекаются разные компоненты. □

Посмотрим как граф-преобразования влияют на пары вершин.

Лемма 3.9. *Пусть меченый граф G_2 получен из меченого графа G_1 применением первого граф-преобразования, при котором добавляется вершина с меткой $(0, \alpha)$. Тогда в двух вершинах графа G_1 , принадлежащих разным компонентам, пересекаются две компоненты тогда и только тогда, когда в соответствующих двух вершинах графа G_2 пересекаются две компоненты.*

Доказательство. Мы знаем (см. лемму 3.2), что при первом граф-преобразовании в добавляемой вершине пересекается одна компонента, и соответствующие при этом преобразовании вершины графов G_1 и G_2 одновременно принадлежат одной или разным компонентам.

Пусть $V(G_1) = \{v_1, \dots, v_n\}$, $V(G_2) = \{v'_1, \dots, v'_{n+1}\}$ и

$$A(G_2) = \begin{pmatrix} A(G_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 0 \end{pmatrix}, \quad B(G_2) = \begin{pmatrix} B(G_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 1 \end{pmatrix}.$$

Предположим, что вершины v_i, v_j , $i > j$, принадлежат разным компонентам. Тогда очевидно, что равенство $\text{corank } B_j(G_1 \setminus \{v_i\}) = \text{corank } B(G_1 \setminus \{v_i, v_j\})$ равносильно равенству $\text{corank } B_j(G_2 \setminus \{v'_i\}) = \text{corank } B(G_2 \setminus \{v'_i, v'_j\})$. Отсюда получаем утверждение леммы. \square

Лемма 3.10. *Пусть меченый граф G_2 получен из меченого графа G_1 применением второго граф-преобразования, при котором добавляются две вершины. Тогда в двух вершинах графа G_1 , принадлежащих разным компонентам, пересекаются две компоненты тогда и только тогда, когда в соответствующих двух вершинах графа G_2 пересекаются две компоненты. Кроме того, если две добавляемые вершины в графе G_2 , принадлежат разным компонентам, то в них пересекаются две компоненты.*

Доказательство. Пусть $V(G_1) = \{v_1, \dots, v_n\}$ и $V(G_2) = \{v'_1, \dots, v'_{n+2}\}$. Тогда

$$A(G_2) = \begin{pmatrix} A(G_1) & \mathbf{c} & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\top & a & a \\ \mathbf{c}^\top & a & a \end{pmatrix}, \quad B(G_2) = \begin{pmatrix} B(G_1) & \mathbf{c} & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\top & a+1 & a \\ \mathbf{c}^\top & a & a+1 \end{pmatrix}.$$

Мы знаем (см. лемму 3.3), что добавляемые при втором граф-преобразовании вершины одновременно либо принадлежат одной компоненте, либо разным, и соответствующие при этом преобразовании вершины графов G_1 и G_2 также одновременно принадлежат одной или двум компонентам.

Справедливость первого утверждения, т. е. равносильность равенств

$$\text{corank } B_j(G_1 \setminus \{v_i\}) = \text{corank } B(G_1 \setminus \{v_i, v_j\}), \quad \text{corank } B_j(G_2 \setminus \{v'_i\}) = \text{corank } B(G_2 \setminus \{v'_i, v'_j\}),$$

где v_i, v_j , $i < j < n+1$, принадлежат разным компонентам, легко следует из преобразований, приведенных в лемме 3.3.

Докажем второе утверждение (про добавляемые вершины). Имеем

$$\begin{aligned} \text{corank } B_{n+1}(G_2) = \text{corank } B(G_2 \setminus \{v'_{n+1}\}) &\iff \text{corank } B_{n+2}(G_2) = \text{corank } B(G_2 \setminus \{v'_{n+2}\}) \iff \\ &\iff \text{corank} \begin{pmatrix} B(G_1) & \mathbf{c} & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\top & a+1 & a \\ \mathbf{c}^\top & a & a \end{pmatrix} = \text{corank} \begin{pmatrix} B(G_1) & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\top & a+1 \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

так как вершины v'_{n+1}, v'_{n+2} принадлежат разным компонентам. Поскольку

$$\begin{pmatrix} B(G_1) & \mathbf{c} & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\top & a+1 & a \\ \mathbf{c}^\top & a & a \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} B(G_1) & \mathbf{0} & \mathbf{c} \\ \mathbf{0}^\top & 1 & 0 \\ \mathbf{c}^\top & 0 & a \end{pmatrix},$$

то

$$\text{corank} \begin{pmatrix} B(G_1) & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\top & a \end{pmatrix} = \text{corank} \begin{pmatrix} B(G_1) & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\top & a+1 \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что вектор-столбец \mathbf{c} линейно не выражается через столбцы матрицы $B(G_1)$. Если бы он выражался, то первая матрица была бы эквивалентна матрице

$$\begin{pmatrix} B(G_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & d \end{pmatrix},$$

а вторая —

$$\begin{pmatrix} B(G_1) & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & d+1 \end{pmatrix}.$$

Получаем противоречие. Следовательно, поскольку матрицы у нас симметрические, ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} B(G_1) & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\top & a \end{pmatrix}$$

больше ранга матрицы $B(G_1)$ как минимум на два, т. е.

$$\begin{aligned} \operatorname{corank} \begin{pmatrix} B(G_1) & \mathbf{c} \\ \mathbf{c}^\top & a \end{pmatrix} \neq \operatorname{corank} B(G_1) &\iff \\ \iff \operatorname{corank} B_{n+1}(G_2 \setminus \{v'_{n+2}\}) \neq \operatorname{corank} B(G_2 \setminus \{v'_{n+1}, v'_{n+2}\}). & \end{aligned}$$

□

Лемма 3.11. Пусть меченый граф G_2 получен из меченого графа G_1 применением третьего граф-преобразования. Тогда в двух вершинах графа G_1 , принадлежащих разным компонентам, пересекаются две компоненты тогда и только тогда, когда в соответствующих двух вершинах графа G_2 пересекаются две компоненты.

Доказательство. Пусть $V(G_1) = \{v_1, \dots, v_n\}$ и $V(G_2) = \{v'_1, \dots, v'_n\}$. Имеем

$$B(G_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \mathbf{0}^\top \\ 1 & 1 & 0 & \mathbf{a}^\top \\ 1 & 0 & 1 & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{a} & \mathbf{b} & C \end{pmatrix}, \quad B(G_2) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & (\mathbf{a} + \mathbf{b})^\top \\ 0 & 1 & 0 & \mathbf{b}^\top \\ 0 & 0 & 1 & \mathbf{a}^\top \\ \mathbf{a} + \mathbf{b} & \mathbf{b} & \mathbf{a} & C \end{pmatrix}.$$

Используя лемму 3.8, утверждение леммы для пар вершин (v_1, v_i) , (v_2, v_i) , (v_3, v_i) , (v_i, v_j) при $i, j > 3$, доказываем аналогично лемме 3.4.

Рассмотрим оставшиеся случаи. Из-за симметрии достаточно рассмотреть следующие две пары: (v_1, v_2) , (v_2, v_3) . Мы рассмотрим только одну пару, вторая рассматривается аналогично.

Рассмотрим пару (v_1, v_2) . Надо показать, что равенства (надо следить за нумерацией вершин в новом графе)

$$\operatorname{corank} B_1(G_1 \setminus \{v_1\}) = \operatorname{corank} B(G_1 \setminus \{v_1, v_2\}) \quad \text{и} \quad \operatorname{corank} B_1(G_2 \setminus \{v'_1\}) = \operatorname{corank} B(G_2 \setminus \{v'_1, v'_2\})$$

выполняются или не выполняются одновременно.

По лемме 3.6 первое равенство выполняется тогда и только тогда, когда векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ и

$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix}$ линейно выражаются через столбцы матрицы $\begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top \\ 0 & \mathbf{a}^\top \\ 1 & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{b} & C \end{pmatrix}$. Прибавляя вторую и третью

строку к первой строке, мы получим, что векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix}$ линейно выражаются через

столбцы матрицы $\begin{pmatrix} 0 & (\mathbf{a} + \mathbf{b})^\top \\ 0 & \mathbf{a}^\top \\ 1 & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{b} & C \end{pmatrix}$. Прибавляя к вектору $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$ векторы $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}$ и

меняя местами вторую и третью строки, получим, что векторы $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \mathbf{a} + \mathbf{b} \end{pmatrix}$ и $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ \mathbf{a} \end{pmatrix}$ линейно

выражаются через столбцы матрицы $\begin{pmatrix} 0 & (\mathbf{a} + \mathbf{b})^\top \\ 1 & \mathbf{b}^\top \\ 0 & \mathbf{a}^\top \\ \mathbf{b} & C \end{pmatrix}$. Последнее условие по лемме 3.6 равно-

сильно второму равенству. Поскольку везде были совершены равносильные переходы, мы получаем справедливость утверждения. □

Лемма 3.12. Пусть меченый граф G_2 получен из меченого графа G_1 применением четвертого граф-преобразования. Тогда в двух вершинах графа G_1 , принадлежащих разным компонентам, пересекаются две компоненты тогда и только тогда, когда в соответствующих двух вершинах графа G_2 пересекаются две компоненты.

Доказательство. Пусть $V(G_1) = \{v_1, \dots, v_n\}$ и $V(G_2) = \{v'_1, \dots, v'_n\}$.

1. Рассмотрим преобразование $\Omega_g A$. Имеем

$$B(G_1) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ 1 & \mathbf{0} & A_1^\top & B_4 & A_5 & A_6 \\ \mathbf{0} & 1 & A_2^\top & A_5^\top & B_7 & A_8 \\ 1 & 1 & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top & B_9 \end{pmatrix} = (\mathbf{b}_1 \quad \mathbf{b}_2 \quad C),$$

$$B(G_2) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & 1 & A_1^\top & B_4 & A_5 + (1) & A_6 + (1) \\ 1 & \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top + (1) & B_7 & A_8 + (1) \\ 1 & 1 & A_3^\top & A_6^\top + (1) & A_8^\top + (1) & B_9 \end{pmatrix} = (\mathbf{b}_2 \quad \mathbf{b}_1 \quad \tilde{C}),$$

здесь и далее $\mathbf{1}$ — это вектор-столбец, состоящий из единиц.

Справедливость утверждения для пар вершин (v_1, v_i) , (v_2, v_i) , (v_i, v_j) , $i, j > 3$, доказывается аналогично лемме 3.5 (мы пользуемся тем фактом, что отношение, порожденное «пересечением двух компонент», является отношением эквивалентности, см. лемму 3.8).

Осталось рассмотреть пару (v_1, v_2) . Пусть вершины v_1 и v_2 лежат на разных компонентах. Используя лемму 3.1 и элементарные преобразования над строками, легко показать, что вектор \mathbf{b}_1 линейно выражается через столбцы матрицы C тогда и только тогда, когда вектор \mathbf{b}_2 линейно выражается через столбцы матрицы \tilde{C} .

2. Рассмотрим преобразование $\Omega_g A'$. Доказательство этого пункта полностью аналогично доказательству пункта 2 леммы 3.5. \square

3.3. Инвариант и графы Буше. Пусть G — меченый граф. На множестве вершин, принадлежащих разным компонентам, рассмотрим отношение эквивалентности, порожденное «пересечением двух компонент». Обозначим через $\vartheta(G)$ число классов эквивалентности, имеющих нечетное число элементов. Из лемм 3.9, 3.10, 3.11 и 3.12 следует следующая теорема.

Теорема 3.1. Число $\vartheta(G)$ инвариантно при граф-преобразованиях, т. е. является инвариантом граф-зацеплений.

Пример 3.1. Рассмотрим второй граф Буше BW_3 (см. рис. 4) и снабдим каждую вершину оснащением 0 (знаки вершин нас не интересуют). Рассмотрим граф-зацепление, порожденное этим графом. Легко показать, что данное граф-зацепление содержит четыре компоненты и $\vartheta(BW_3) = 7$.

Легко видеть, что для любого виртуального зацепления с числом компонент, равным 4, инвариант ϑ строго меньше семи. Таким образом, мы получаем, что данное граф-зацепление нереализуемо.

Замечание 3.2. Отметим, что нереализуемость граф-зацепления, порожденного третьим графом Буше W_7 (см. рис. 15), у которого все вершины, кроме центральной, имеют оснащение 0, доказывается с помощью четности [5, 20, 21] и эквивалентности из [13].

4. ОРИЕНТАЦИЯ НА ГРАФ-ЗАЦЕПЛЕНИЯХ И ПОЛИНОМ ДЖОНСА

В данном разделе мы определяем *ориентированное граф-зацепление*. Для ориентированных граф-зацеплений мы строим число закрученности, которое в реализуемом случае совпадает с настоящим числом закрученности зацепления. С помощью этого числа мы подправляем скобку Кауфмана (см. [2, 14]) и получаем полином Джонса.

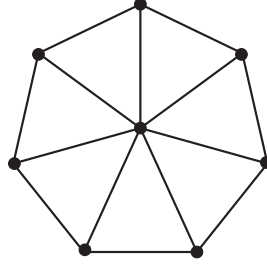


Рис. 15. Третий граф Буше W_7 .

4.1. Удаление вершин из графа. Сформулируем леммы, показывающие, как меняются ранги и коранги матриц смежности при удалении вершин из графа. В дальнейшем эти леммы помогут нам корректно определить число закрученности для граф-зацепления.

Пусть G — меченый граф с множеством вершин $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$.

Лемма 4.1. Пусть вершина v_i графа G принадлежит разным компонентам. Тогда существует граф $G_{cs(v_i)} \in \{G\}$, полученный из графа G четвертыми граф-преобразованиями, такой, что вершина v'_i графа $G_{cs(v_i)}$, соответствующая вершине v_i , имеет знак, противоположный знаку $\text{sgn}(v_i)$ вершины v_i . Кроме того, если вершина v_i принадлежит разным компонентам, то и вершина v'_i принадлежит разным компонентам.

Доказательство. Если вершина принадлежит разным компонентам, то по лемме 3.2 к ней нельзя применить первое граф-преобразование. Рассмотрим четыре случая.

1. Пусть оснащение вершины v_i равно 1. Тогда мы применяем к этой вершине четвертое граф-преобразование $\Omega_g A'$ и сразу получаем вершину v'_i .
2. Пусть оснащение вершины v_i равно 0 и есть смежная с ней вершина, имеющая оснащение 0. Тогда мы применяем четвертое граф-преобразование $\Omega_g A$ и сразу получаем вершину v'_i .
3. Пусть оснащение вершины v_i равно 0 и есть смежная с ней вершина v_j , имеющая оснащение 1. Тогда мы применяем сначала четвертое граф-преобразование $\Omega_g A'$ к вершине v_j , а потом это же преобразование к вершине, соответствующей вершине v_i , чтобы получить вершину v'_i .
4. Пусть v_i — изолированная вершина с оснащением 0. В этом случае вершина v_i принадлежит одной компоненте, и мы получаем противоречие с условием леммы.

Второе утверждение леммы сразу следует из леммы 3.5. □

Лемма 4.2. Пусть вершина $v_k \in V(G)$ принадлежит разным компонентам.

1. Если в двух вершинах v_i и v_j , $i, j \neq k$, пересекаются две компоненты графа G , то в графе $G \setminus \{v_k\}$ вершины, соответствующие вершинам v_i и v_j , либо принадлежат одной компоненте, либо в них опять пересекаются две компоненты.
2. Пусть вершина v_i , $i < k$, принадлежит одной компоненте графа G . Тогда вершина графа $G \setminus \{v_k\}$, соответствующая вершине v_i , также принадлежит одной компоненте графа $G \setminus \{v_k\}$ и, кроме того, $\text{corank } B_i(G) - \text{corank } B(G) = \text{corank } B_i(G \setminus \{v_k\}) - \text{corank } B(G \setminus \{v_k\})$.

Доказательство. 1. Первое утверждение следует из леммы 3.6. Докажем только второе утверждение.

2. Пусть $i = n - 1$, $k = n$ и $V(G \setminus \{v_n\}) = \{v_1, \dots, v_{n-1}\}$. Имеем

$$B(G) = \begin{pmatrix} F & \mathbf{d} & \mathbf{e} \\ \mathbf{d}^\top & a & c \\ \mathbf{e}^\top & c & b \end{pmatrix}, \quad B(G \setminus \{v_n\}) = \begin{pmatrix} F & \mathbf{d} \\ \mathbf{d}^\top & a \end{pmatrix}$$

и

$$\text{corank } B_n(G) = \text{corank } B(G \setminus \{v_n\}), \quad \text{corank } B_{n-1}(G) \neq \text{corank } B(G \setminus \{v_{n-1}\}).$$

По лемме 3.1 вектор $\begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ c \\ b \end{pmatrix}$ линейно выражается через вектор $\begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ a \\ c \\ b \end{pmatrix}$ и столбцы матрицы $\begin{pmatrix} F \\ \mathbf{d}^\top \\ \mathbf{e}^\top \end{pmatrix}$, а вектор $\begin{pmatrix} \mathbf{d} \\ a \\ c \end{pmatrix}$ линейно не выражается через вектор $\begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ c \\ b \end{pmatrix}$ и столбцы матрицы $\begin{pmatrix} F \\ \mathbf{d}^\top \\ \mathbf{e}^\top \end{pmatrix}$. Следовательно, вектор $\begin{pmatrix} \mathbf{e} \\ c \\ b \end{pmatrix}$ линейно выражается через столбцы матрицы $\begin{pmatrix} F \\ \mathbf{d}^\top \\ \mathbf{e}^\top \end{pmatrix}$.
Получаем

$$\begin{aligned} \text{corank } B_{n-1}(G) &= \text{corank} \begin{pmatrix} F & \mathbf{d} & \mathbf{e} \\ \mathbf{d}^\top & a+1 & c \\ \mathbf{e}^\top & c & b \end{pmatrix} = \text{corank} \begin{pmatrix} F & \mathbf{d} & \mathbf{0} \\ \mathbf{d}^\top & a+1 & 0 \\ \mathbf{0}^\top & 0 & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \text{corank} \begin{pmatrix} F & \mathbf{d} \\ \mathbf{d}^\top & a+1 \end{pmatrix} + 1 = \text{corank } B_{n-1}(G \setminus \{v_n\}) + 1, \\ \text{corank } B(G \setminus \{v_{n-1}\}) &= \text{corank} \begin{pmatrix} F & \mathbf{e} \\ \mathbf{e}^\top & b \end{pmatrix} = \text{corank} \begin{pmatrix} F & \mathbf{0} \\ \mathbf{0}^\top & 0 \end{pmatrix} = \\ &= \text{corank } F + 1 = \text{corank } B(G \setminus \{v_{n-1}, v_n\}) + 1. \end{aligned}$$

Используя следствие 3.1 и последние равенства, мы получаем справедливость второго утверждения леммы. \square

Лемма 4.3. Пусть вершина v_i принадлежит одной компоненте графа G . Тогда число $w_i = \text{sgn}(v_i)(-1)^{\text{corank } B_i(G) - \text{corank } B(G)}$ инвариантно при четвертых граф-преобразованиях.

Доказательство. 1. Пусть граф \tilde{G} с множеством вершин $V(\tilde{G}) = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ получен из графа G четвертым граф-преобразованием $\Omega_g A'$ в вершине v_j . Возможны два случая: $i = j$ и $i \neq j$.

Рассмотрим первый случай. Будем считать, что $i = j = 1$. Имеем

$$B(G) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 & A_1 \\ \mathbf{1} & A_1^\top & A_2 \end{pmatrix}, \quad B(\tilde{G}) = \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 & A_1 \\ \mathbf{1} & A_1^\top & A_2 + (1) \end{pmatrix}.$$

Тогда $\text{sgn}(v_i) = -\text{sgn}(v'_i)$, $\text{corank } B(G) = \text{corank } B(\tilde{G})$ и

$$\text{corank } B_i(\tilde{G}) = \text{corank} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 & A_1 \\ \mathbf{1} & A_1^\top & A_2 + (1) \end{pmatrix} = \text{corank} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 & A_1 \\ \mathbf{0} & A_1^\top & A_2 \end{pmatrix} = \text{corank } B(G \setminus \{v_i\}).$$

Поскольку $\text{corank } B_i(G) \neq \text{corank } B(G \setminus \{v_i\})$, получаем $\text{corank } B_i(\tilde{G}) = \text{corank } B_i(G) \pm 1$ и $w_i = w'_i$.

Рассмотрим второй случай. Будем считать, что $j = 1$ и $i = 2$. Имеем

$$B(G) = \begin{pmatrix} 0 & a & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ a & b & \mathbf{c}^\top & \mathbf{d}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{c} & A_0 & A_1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{d} & A_1^\top & A_2 \end{pmatrix}, \quad B(\tilde{G}) = \begin{pmatrix} 0 & a & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ a & b+a & \mathbf{c}^\top & \mathbf{d}^\top + (a)^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{c} & A_0 & A_1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{d} + (a) & A_1^\top & A_2 + (1) \end{pmatrix}.$$

Тогда $\text{sgn}(v_i) = \text{sgn}(v'_i)$, $\text{corank } B(G) = \text{corank } B(\tilde{G})$ и $\text{corank } B_i(\tilde{G}) = \text{corank } B_i(G)$, т. е. $w_i = w'_i$.

2. Пусть граф \tilde{G} с множеством вершин $V(\tilde{G}) = \{v'_1, \dots, v'_n\}$ получен из графа G четвертым граф-преобразованием $\Omega_g 4$ в вершинах v_j и v_k . Возможны два случая: $i \in \{j, k\}$ и $i \notin \{j, k\}$.

Рассмотрим первый случай. Будем считать, что $i = j = 1$ и $k = 2$. Имеем

$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & A_1^\top & B_4 & A_5 & A_6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_2^\top & A_5^\top & B_7 & A_8 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top & B_9 \end{pmatrix},$$

$$B(\tilde{G}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_1^\top & B_4 & A_5 + (1) & A_6 + (1) \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top + (1) & B_7 & A_8 + (1) \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top + (1) & A_8^\top + (1) & B_9 \end{pmatrix}.$$

Тогда $\text{sgn}(v_i) = -\text{sgn}(v'_i)$, $\text{corank } B(G) = \text{corank } B(\tilde{G})$ и

$$\begin{aligned} \text{corank } B_i(\tilde{G}) &= \text{corank} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_1^\top & B_4 & A_5 + (1) & A_6 + (1) \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top + (1) & B_7 & A_8 + (1) \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top + (1) & A_8^\top + (1) & B_9 \end{pmatrix} = \\ &= \text{corank} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_1^\top & B_4 & A_5 & A_6 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top & B_7 & A_8 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top & B_9 \end{pmatrix} = \text{corank } B(G \setminus \{v_i\}). \end{aligned}$$

Поскольку $\text{corank } B_i(G) \neq \text{corank } B(G \setminus \{v_i\})$, получаем $\text{corank } B_i(\tilde{G}) = \text{corank } B_i(G) \pm 1$ и $w_i = w'_i$.
Рассмотрим второй случай. Будем считать, что $j = 1$, $k = 2$ и $i = 3$. Имеем

$$\begin{aligned} B(G) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & a & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 1 & 1 & h & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ a & h & b & \mathbf{c}^\top & \mathbf{d}^\top & \mathbf{e}^\top & \mathbf{f}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{c} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{d} & A_1^\top & B_4 & A_5 & A_6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{e} & A_2^\top & A_5^\top & B_7 & A_8 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{f} & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top & B_9 \end{pmatrix}, \\ B(\tilde{G}) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & h & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 1 & 1 & a & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ h & a & b & \mathbf{c}^\top & \mathbf{d}^\top + (h)^\top & \mathbf{e}^\top + (a)^\top & \mathbf{f}^\top + (a+h)^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{c} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & \mathbf{d} + (h) & A_1^\top & B_4 & A_5 + (1) & A_6 + (1) \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & \mathbf{e} + (a) & A_2^\top & A_5^\top + (1) & B_7 & A_8 + (1) \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & \mathbf{f} + (a+h) & A_3^\top & A_6^\top + (1) & A_8^\top + (1) & B_9 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Тогда $\text{sgn}(v_i) = \text{sgn}(v'_i)$, $\text{corank } B(G) = \text{corank } B(\tilde{G})$ и $\text{corank } B_i(\tilde{G}) = \text{corank } B_i(G)$, т. е. $w_i = w'_i$. \square

Лемма 4.4. Пусть в вершинах v_i и v_j , $i < j$, пересекаются две компоненты. Тогда

$$\text{sgn}(v_i) \text{sgn}(v_j) (-1)^{\text{corank } B_{j-1}(G \setminus \{v_i\})} = \text{sgn}(v'_i) \text{sgn}(v'_j) (-1)^{\text{corank } B_{j-1}(G_{cs(v_i)} \setminus \{v'_i\})},$$

где $V(G_{cs(v_i)}) = \{v'_1, \dots, v'_n\}$, и соответствующие вершины графов G и $G_{cs(v_i)}$ имеют одинаковые номера.

Доказательство. Без ограничения общности считаем, что $i = 1$, $j = 2$. Из определения 3.2 и из леммы 3.7 следует, что

$$\text{corank } B_{j-1}(G \setminus \{v_i\}) = \text{corank } B_i(G \setminus \{v_j\}) \neq \text{corank } B(G \setminus \{v_i, v_j\}).$$

Согласно лемме 4.3 и доказательству леммы 4.1, достаточно рассмотреть три случая.

1. Пусть оснащение вершины v_1 равно 1, и к ней применяется граф-преобразование $\Omega_g A'$. Имеем

$$B(G) = \begin{pmatrix} 0 & a & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ a & b & \mathbf{c}^\top & \mathbf{d}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{c} & A_0 & A_1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{d} & A_1^\top & A_2 \end{pmatrix}, \quad B(G_{cs(v_i)}) = \begin{pmatrix} 0 & a & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ a & b+a & \mathbf{c}^\top & \mathbf{d}^\top + (a)^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{c} & A_0 & A_1 \\ \mathbf{1} & \mathbf{d} + (a) & A_1^\top & A_2 + (1) \end{pmatrix},$$

где (a) — это вектор, состоящий из $a \in \{0, 1\}$.

Применяя лемму 3.7 и элементарные преобразования, получаем

$$\begin{aligned} \text{corank } B_{j-1}(G_{cs(v_i)} \setminus \{v'_i\}) &= \text{corank} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 & A_1 \\ \mathbf{1} & A_1^\top & A_2 + (1) \end{pmatrix} = \text{corank} \begin{pmatrix} 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ \mathbf{0} & A_0 & A_1 \\ \mathbf{0} & A_1^\top & A_2 \end{pmatrix} = \\ &= \text{corank } B(G \setminus \{v_i, v_j\}), \end{aligned}$$

т. е.

$$\text{corank } B_{j-1}(G_{cs(v_i)} \setminus \{v'_i\}) = \text{corank } B_{j-1}(G \setminus \{v_i\}) \pm 1.$$

Учитывая равенства $\text{sgn}(v_i) = -\text{sgn}(v'_i)$ и $\text{sgn}(v_j) = \text{sgn}(v'_j)$, получаем требуемое утверждение.

2. Пусть оснащение вершины v_1 равно 0 и существует вершина v_k , смежная с вершиной v_1 и имеющая оснащение 0. В этом случае мы применяем к ним четвертое граф-преобразование $\Omega_g A$.

Возможны два случая: $v_k = v_2$ и $v_k \neq v_2$. В первом случае имеем

$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ 1 & \mathbf{0} & A_1^\top & B_4 & A_5 & A_6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_2^\top & A_5^\top & B_7 & A_8 \\ 1 & 1 & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top & B_9 \end{pmatrix},$$

$$B(G_{cs(v_i)}) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_1^\top & B_4 & A_5 + (1) & A_6 + (1) \\ 1 & \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top + (1) & B_7 & A_8 + (1) \\ 1 & 1 & A_3^\top & A_6^\top + (1) & A_8^\top + (1) & B_9 \end{pmatrix}.$$

Применяя элементарные преобразования, получаем

$$\begin{aligned} \text{corank } B_{j-1}(G_{cs(v_i)} \setminus \{v'_i\}) &= \text{corank} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & A_1^\top & B_4 & A_5 + (1) & A_6 + (1) \\ 1 & A_2^\top & A_5^\top + (1) & B_7 & A_8 + (1) \\ 1 & A_3^\top & A_6^\top + (1) & A_8^\top + (1) & B_9 \end{pmatrix} = \\ &= \text{corank} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & A_1^\top & B_4 & A_5 & A_6 \\ 1 & A_2^\top & A_5^\top & B_7 & A_8 \\ 1 & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top & B_9 \end{pmatrix} = \text{corank } B_{j-1}(G \setminus \{v_i\}). \end{aligned}$$

Учитывая равенства $\text{sgn}(v_i) = -\text{sgn}(v'_i)$ и $\text{sgn}(v_j) = -\text{sgn}(v'_j)$, получаем требуемое утверждение.

Во втором случае (пусть $k = 3$) имеем

$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ a & b & h & \mathbf{c}^\top & \mathbf{d}^\top & \mathbf{e}^\top & \mathbf{f}^\top \\ 1 & h & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{c} & \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ 1 & \mathbf{d} & \mathbf{0} & A_1^\top & B_4 & A_5 & A_6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{e} & \mathbf{1} & A_2^\top & A_5^\top & B_7 & A_8 \\ 1 & \mathbf{f} & \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top & B_9 \end{pmatrix},$$

$$B(G_{cs(v_i)}) = \begin{pmatrix} 1 & h & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ h & b & a & \mathbf{c}^\top & \mathbf{d}^\top + (h)^\top & \mathbf{e}^\top + (a)^\top & \mathbf{f}^\top + (a+h)^\top \\ 1 & a & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{c} & \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{d} + (h) & 1 & A_1^\top & B_4 & A_5 + (1) & A_6 + (1) \\ 1 & \mathbf{e} + (a) & \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top + (1) & B_7 & A_8 + (1) \\ 1 & \mathbf{f} + (a+h) & 1 & A_3^\top & A_6^\top + (1) & A_8^\top + (1) & B_9 \end{pmatrix}.$$

Применяя лемму 3.7 и элементарные преобразования, получаем

$$\begin{aligned} \text{corank } B_{j-1}(G_{cs(v_i)} \setminus \{v'_i\}) &= \text{corank} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_1^\top & B_4 & A_5 + (1) & A_6 + (1) \\ 1 & \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top + (1) & B_7 & A_8 + (1) \\ 1 & 1 & A_3^\top & A_6^\top + (1) & A_8^\top + (1) & B_9 \end{pmatrix} = \\ &= \text{corank} \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_1^\top & B_4 & A_5 & A_6 \\ 1 & \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top & B_7 & A_8 \\ 1 & 1 & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top & B_9 \end{pmatrix} = \text{corank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ 0 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_1^\top & B_4 & A_5 & A_6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_2^\top & A_5^\top & B_7 & A_8 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top & B_9 \end{pmatrix} = \\ &= \text{corank } B(G \setminus \{v_i, v_j\}), \end{aligned}$$

т. е.

$$\text{corank } B_{j-1}(G_{cs(v_i)} \setminus \{v'_i\}) = \text{corank } B_{j-1}(G \setminus \{v_i\}) \pm 1.$$

Учитывая равенства $\text{sgn}(v_i) = -\text{sgn}(v'_i)$ и $\text{sgn}(v_j) = \text{sgn}(v'_j)$, получаем требуемое утверждение.

3. Пусть оснащение вершины v_1 равно 0 и существует вершина v_k , смежная с вершиной v_1 и имеющая оснащение 1. В этом случае мы применяем четвертое граф-преобразование $\Omega_g A'$ к v_k , а потом это же преобразование — к вершине, соответствующей вершине v_1 в полученном графе.

Возможны два случая: $v_k = v_2$ и $v_k \neq v_2$. В первом случае имеем

$$\begin{aligned} B(G) &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ 1 & 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ 1 & \mathbf{0} & A_1^\top & B_4 & A_5 & A_6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_2^\top & A_5^\top & B_7 & A_8 \\ 1 & 1 & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top & B_9 \end{pmatrix}, \\ B(G_{cs(v_i)}) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top \\ 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ 1 & 1 & A_1^\top & B_4 + (1) & A_5 + (1) & A_6 \\ 1 & \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top + (1) & B_7 & A_8 + (1) \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top + (1) & B_9 + (1) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Применяя элементарные преобразования, получаем

$$\text{corank } B_{j-1}(G_{cs(v_i)} \setminus \{v'_i\}) = \text{corank} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ 1 & A_1^\top & B_4 + (1) & A_5 + (1) & A_6 \\ \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top + (1) & B_7 & A_8 + (1) \\ 1 & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top + (1) & B_9 + (1) \end{pmatrix} =$$

$$= \text{corank} \begin{pmatrix} 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{1} & A_1^\top & B_4 & A_5 & A_6 \\ \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top & B_7 & A_8 \\ \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top & B_9 \end{pmatrix} = \text{corank } B_i(G \setminus \{v_j\}).$$

Учитывая равенства $\text{sgn}(v_i) = -\text{sgn}(v'_i)$ и $\text{sgn}(v_j) = -\text{sgn}(v'_j)$, получаем требуемое утверждение.

Во втором случае (пусть $k = 3$) имеем

$$B(G) = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ a & b & h & \mathbf{c}^\top & \mathbf{d}^\top & \mathbf{e}^\top & \mathbf{f}^\top \\ 1 & h & 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{c} & \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{d} & \mathbf{0} & A_1^\top & B_4 & A_5 & A_6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{e} & \mathbf{1} & A_2^\top & A_5^\top & B_7 & A_8 \\ \mathbf{1} & \mathbf{f} & \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top & B_9 \end{pmatrix},$$

$$B(G_{cs(v_i)}) = \begin{pmatrix} 0 & a+h & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top \\ a+h & b & a & \mathbf{c}^\top & \mathbf{d}^\top + (a+h)^\top & \mathbf{e}^\top + (a)^\top & \mathbf{f}^\top + (h)^\top \\ 1 & a & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{c} & \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{d} + (a+h) & \mathbf{1} & A_1^\top & B_4 + (1) & A_5 + (1) & A_6 \\ \mathbf{1} & \mathbf{e} + (a) & \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top + (1) & B_7 & A_8 + (1) \\ \mathbf{0} & \mathbf{f} + (h) & \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top + (1) & B_9 + (1) \end{pmatrix}.$$

Применяя лемму 3.7 и элементарные преобразования, получаем

$$\text{corank } B_{j-1}(G_{cs(v_i)} \setminus \{v'_i\}) = \text{corank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top \\ 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & A_1^\top & B_4 + (1) & A_5 + (1) & A_6 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top + (1) & B_7 & A_8 + (1) \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top + (1) & B_9 + (1) \end{pmatrix} =$$

$$= \text{corank} \begin{pmatrix} 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ 1 & 1 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{1} & \mathbf{1} & A_1^\top & B_4 & A_5 & A_6 \\ \mathbf{1} & \mathbf{0} & A_2^\top & A_5^\top & B_7 + (1) & A_8 + (1) \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top + (1) & B_9 + (1) \end{pmatrix} = \text{corank} \begin{pmatrix} 1 & 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top \\ 0 & 0 & \mathbf{0}^\top & \mathbf{0}^\top & \mathbf{1}^\top & \mathbf{1}^\top \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & B_0 & A_1 & A_2 & A_3 \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & A_1^\top & B_4 & A_5 & A_6 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_2^\top & A_5^\top & B_7 & A_8 \\ \mathbf{0} & \mathbf{1} & A_3^\top & A_6^\top & A_8^\top & B_9 \end{pmatrix} =$$

$$= \text{corank } B(G \setminus \{v_i, v_j\}),$$

т. е.

$$\text{corank } B_{j-1}(G_{cs(v_i)} \setminus \{v'_i\}) = \text{corank } B_{j-1}(G \setminus \{v_i\}) \pm 1.$$

Учитывая равенства $\text{sgn}(v_i) = -\text{sgn}(v'_i)$ и $\text{sgn}(v_j) = \text{sgn}(v'_j)$, получаем требуемое утверждение. \square

4.2. Ориентированные граф-зацепления и полином Джонса. Пусть G — меченый граф с k компонентами и $V(G) = \{v_1, \dots, v_n\}$. Поскольку при удалении вершины, принадлежащей разным компонентам, число компонент граф-зацепления уменьшается на единицу (см. следствие 3.1), то существует последовательность $(v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}})$, состоящая из $k-1$ вершины $v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}}$, такая, что граф $(\dots((G \setminus \{v_{i_1}\}) \setminus \{v_{i_2}\}) \dots) \setminus \{v_{i_{k-1}}\}$, полученный последовательным удалением вершин последовательности, имеет одну компоненту.

Лемма 4.5. Для любой последовательности $(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{k-1}})$ знаков $\alpha_{i_j} \in \{\pm\}$ найдется такой меченый граф $G(v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}})$, полученный из G четвертыми граф-преобразованиями, что меченый граф $G' = G(v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}}) \setminus \{v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}}\}$ имеет одну компоненту и знаки вершин графа $G(v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}})$, соответствующих вершинам v_{i_j} , $j = 1, \dots, k-1$, графа G , совпадают с α_{i_j} .

Доказательство. Заметим, что четвертые граф-преобразования меняют знаки только тех вершин, к которым они применяются. Далее, поскольку удаление вершины из графа не влияет на знаки и попарную смежность оставшихся вершин, то утверждение леммы легко доказывается по индукции с использованием леммы 4.1. \square

Поскольку граф G' имеет одну компоненту, то мы можем определить *число закрученности* w_i каждой его вершины v'_i , положив $w_i = (-1)^{\text{corank} B_i(G')} \text{sgn}(v'_i)$, и *число закрученности* его самого: $w(G') = \sum_{i=1}^{n-k+1} w_i$.

Определение 4.1. *Число закрученности* $w_i(G)$ графа G в вершине $v_i \in V(G)$ по отношению к последовательности вершин $(v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}})$ со знаками $(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{k-1}})$ — это число закрученности вершины графа G' , соответствующей вершине v_i , если $i \neq i_j$, и $w_{i_j}(G) = \alpha_{i_j}$ иначе. *Число закрученности* графа G по отношению к последовательности вершин $(v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}})$ со знаками $(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{k-1}})$ — это

$$w(G) = \sum_{i=1}^n w_i(G).$$

Замечание 4.1. Из лемм 4.3 и 4.4 следует корректность определения числа закрученности, т. е. зависимость его не от выбора графа $G(v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}})$, а только от знаков удаляемых вершин. Действительно, из этих лемм следует, что вершина, принадлежащая одной компоненте, всегда имеет одно и то же число закрученности, и для каждого класса эквивалентности вершин, порожденного отношением «пересечение двух компонент», число закрученности каждой вершины этого класса однозначно определяется числом закрученности произвольной вершины из этого класса.

Определение 4.2. Пусть даны две последовательности вершин $(v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}})$ и $(v_{j_1}, \dots, v_{j_{k-1}})$ со знаками $(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{k-1}})$ и $(\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_{k-1}})$ соответственно, удаление которых из соответствующих графов $G(v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}})$ и $G(v_{j_1}, \dots, v_{j_{k-1}})$ приводит к графам с одной компонентой. Мы скажем, что эти последовательности *эквивалентны*, если числа закрученности в вершинах v_{i_p} (соответственно v_{j_p}), $p = 1, \dots, k-1$, по отношению к двум последовательностям совпадают.

Определение 4.3. Будем говорить, что на меченом графе G задана *ориентация*, если задан класс эквивалентности последовательностей вершин со знаками, дающих граф с одной компонентой.

Лемма 4.6. Пусть меченый граф G имеет две компоненты. Предположим, что вершины v_i и v_j , $i \neq j$, принадлежат разным компонентам и к ним можно применить второе уменьшающее граф-преобразование. Тогда существует вершина v_k , $k \neq i, j$, которая тоже принадлежит разным компонентам.

Доказательство. Пусть $i = 1$ и $j = 2$. Тогда

$$B(G) = \begin{pmatrix} a+1 & a & \mathbf{b}^\top \\ a & a+1 & \mathbf{b}^\top \\ \mathbf{b} & \mathbf{b} & C \end{pmatrix}$$

и $\det B(G) = 0$. Поскольку первый и второй столбцы матрицы $B(G)$ не являются нулевыми и не пропорциональны друг другу, то найдется номер k такой, что k -й столбец линейно выражается через остальные столбцы матрицы $B(G)$. Следовательно, вершина v_k принадлежит разным компонентам. \square

Пусть на графе G задана ориентация, т. е. задана последовательность вершин $(v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}})$ со знаками $(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{k-1}})$. Определим ориентацию любого графа \tilde{G} , полученного из G применением одного граф-преобразования. Если мы применяем первое, третье, второе увеличивающее или четвертое граф-преобразование, то ориентация на \tilde{G} будет порождаться последовательностью вершин, соответствующей последовательности $(v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}})$, с теми же самыми знаками. Если мы применяем второе уменьшающее граф-преобразование, то мы сначала, используя лемму 4.6, выбираем последовательность вершин $(v_{j_1}, \dots, v_{j_{k-1}})$ со знаками $(\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_{k-1}})$, эквивалентную последовательности $(v_{i_1}, \dots, v_{i_{k-1}})$ со знаками $(\alpha_{i_1}, \dots, \alpha_{i_{k-1}})$, такую, что вершины v_{j_p} не участвуют в

нашем втором граф-преобразовании, и тогда на графе \tilde{G} задается ориентация с помощью последовательности, соответствующей последовательности $(v_{j_1}, \dots, v_{j_{k-1}})$ со знаками $(\alpha_{j_1}, \dots, \alpha_{j_{k-1}})$. В этом случае мы скажем, что графы G и \tilde{G} имеют одинаковую ориентацию.

Лемма 4.7. Пусть вершина v_i меченого графа G принадлежит разным компонентам. Тогда существует граф \tilde{G} , полученный из G вторым увеличивающим граф-преобразованием, в котором в добавленных вершинах и в вершине, соответствующей вершине v_i , пересекаются две компоненты.

Доказательство. В качестве графа \tilde{G} можно взять граф, полученный из G добавлением двух вершин с оснащением 0, которые смежны только вершине v_i . \square

Лемма 4.8. Число закрученности ориентированного меченого графа изменяется на (± 1) при граф-преобразовании $\Omega_g 1$. Более точно, оно изменяется на -1 при добавлении вершины со знаком «+» и на $+1$ при добавлении вершины со знаком «-».

Число закрученности инвариантно при граф-преобразованиях $\Omega_g 2 - \Omega_g 4'$.

Доказательство. 1. Изменение на ± 1 при первом граф-преобразовании была доказана в [14], а инвариантность при четвертых граф-преобразованиях следует из лемм 4.3 и 4.4.

2. Инвариантность при втором граф-преобразовании следует из возможности выбрать такую последовательность вершин, дающую ориентацию, что каждая ее вершина не участвует в нашем втором граф-преобразовании, а также из лемм 4.2 и 4.3 и инвариантности для меченых графов с одной компонентой, см. [14, лемма 5.4].

3. Рассмотрим третье граф-преобразование. Используя лемму 4.7 и инвариантность относительно второго граф-преобразования, мы можем считать, что ориентация на графе задана с помощью последовательности вершин, не принимающих участие в нашем граф-преобразовании. Справедливость утверждения в этом случае следует из лемм 4.2 и 4.3 и инвариантности для меченых графов с одной компонентой, см. [14, лемма 5.4]. \square

Определение 4.4 (см. [2, 14]). Мы назовем подмножество из $V(G)$ состоянием для графа G . Скобка Кауфмана меченого графа G — это полином (Лорана)

$$\langle G \rangle(a) = \sum_s a^{\alpha(s) - \beta(s)} (-a^2 - a^{-2})^{\text{corank } A(G(s))},$$

где сумма берется по всем состояниям s графа G , $\alpha(s)$ равно количеству вершин с метками $(a, -)$ из s и вершин с метками $(b, +)$ из $V(G) \setminus s$, $\beta(s) = |V(G)| - \alpha(s)$.

Теорема 4.1 (см. [2, 14]). Скобка Кауфмана меченого графа инвариантна при $\Omega_g 2 - \Omega_g 4'$ граф-преобразованиях и умножается на $(-a^{\pm 3})$ при $\Omega_g 1$ граф-преобразовании.

Определение 4.5. Граф-зацепление называется *ориентированным*, если на каждом его представителе задана ориентация, и для любых двух представителей G' и G'' существует такая последовательность меченых графов $G_1 = G', G_2, \dots, G_s = G''$, что графы G_p и G_{p+1} имеют одинаковую ориентацию.

Замечание 4.2. Легко видеть, что для задания ориентации на граф-зацеплении достаточно задать ориентацию лишь на одном его представителе.

Определение 4.6. Пусть \mathfrak{F} — ориентированное граф-зацепление. Определим его полиномом Джонса как $X(G) = (-a)^{-3w(G)} \langle G \rangle$, где G — произвольный представитель граф-зацепления \mathfrak{F} .

Замечание 4.3. По правде говоря, чтобы получить «настоящий» полином Джонса, нужно изменить переменную полинома $X(G)$, положив $a = q^{-1/4}$, но это, в сущности, — лишь изменение обозначений.

Из леммы 4.8 и теоремы 4.1 сразу следует следующая теорема.

Теорема 4.2. Полином Джонса является инвариантом ориентированных граф-зацеплений.

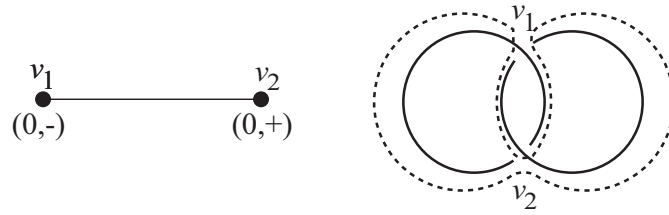


Рис. 16. Граф-зацепление и зацепление Хопфа (пунктирная линия — это поворачивающий обход).

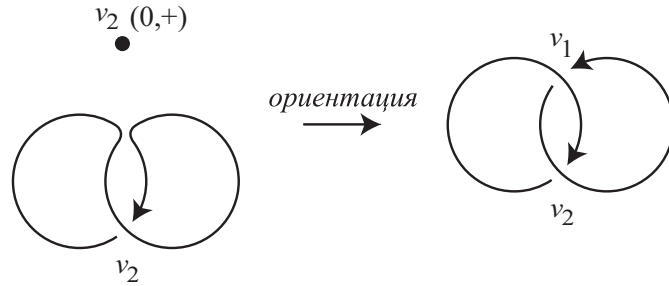


Рис. 17. Ориентация на зацеплении Хопфа.

4.3. Примеры. 1. Самое простое нетривиальное граф-зацепление, имеющее две компоненты, — это граф-зацепление, порожденное меченым графом G , состоящим из одной изолированной вершины v с оснащением 1 (знак вершины не важен, поскольку меченые графы с разными знаками эквивалентны). Для графа G имеем два состояния $s_1 = \emptyset$ и $s_2 = \{v\}$. Пусть для определенности знак вершины v равен $+$. Тогда $\alpha(s_1) = 1$, $\beta(s_1) = 0$, $\text{corank } A(G(s_1)) = 0$ и $\alpha(s_2) = 0$, $\beta(s_2) = 1$, $\text{corank } A(G(s_2)) = \text{corank } (1) = 0$. Получаем скобку Кауфмана $\langle G \rangle(a) = a + a^{-1}$. На этом граф-зацеплении можно выбрать две ориентации: в первом случае число закрученности, например, будет равно $+1$, а во втором случае -1 . Получаем два полинома Джонса: $-a^{-2} - a^{-4}$ и $-a^4 - a^2$.

2. Рассмотрим граф-зацепление, порожденное меченым графом G , изображенным на рис. 16 слева. Этот граф получается из зацепления Хопфа (см. рис. 16 справа). Для графа G имеем четыре состояния $s_1 = \emptyset$, $s_2 = \{v_1\}$, $s_3 = \{v_2\}$, $s_4 = \{v_1, v_2\}$. Тогда $\alpha(s_1) = 1$, $\beta(s_1) = 1$, $\text{corank } A(G(s_1)) = 0$; $\alpha(s_2) = 2$, $\beta(s_2) = 0$, $\text{corank } A(G(s_2)) = \text{corank } (0) = 1$; $\alpha(s_3) = 0$, $\beta(s_3) = 2$, $\text{corank } A(G(s_3)) = \text{corank } (0) = 1$; $\alpha(s_4) = 1$, $\beta(s_4) = 1$, $\text{corank } A(G(s_4)) = \text{corank } \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0$.

Получаем скобку Кауфмана $\langle G \rangle(a) = -a^4 - a^{-4}$. На этом граф-зацеплении можно выбрать две ориентации. Рассмотрим одну из них, которая задается последовательностью (v_1) со знаком « $-$ » (см. рис. 17). Тогда граф $G \setminus \{v_1\}$ состоит из одной вершины v_2 с меткой $(0, +)$, и число закрученности этого графа равно -1 . Таким образом, число закрученности ориентированного меченого графа G равно -2 , и полином Джонса равен $-a^{10} - a^2$.

3. Рассмотрим граф-зацепление, порожденное вторым графом Буше BW_3 с метками, изображенными на рис. 18. Мы знаем (см. пример 3.1), что это граф-зацепление содержит четыре компоненты и является нереализуемым.

Скобка Кауфмана равна $a^{-15} - 3a^{-11} + 6a^{-7} - 3a^{-3} + 7a - 3a^5 + 4a^9 - a^{13}$. Зададим ориентацию на графе с помощью последовательности вершин (v_7, v_2, v_3) со знаками $(-, +, -)$.

Заметим, что ориентированный меченый граф $BW_3 \setminus \{v_7\}$ может быть реализован ориентированными кольцами Борромео (см. рис. 19). Тогда число закрученности меченого графа BW_3 равно -1 . В результате получаем полином Джонса $-a^{-12} + 3a^{-8} - 6a^{-4} + 3 - 7a^4 + 3a^8 - 4a^{12} + a^{16}$.

4. Рассмотрим граф-зацепление, порожденное первым графом Буше W_5 с метками, изображенными на рис. 20 (петлевой граф, соответствующий этому меченому графу, см. [13], был сообщен авторам Л. Зулли). Легко проверить, что это граф-зацепление содержит одну компоненту, т. е. является граф-узлом.

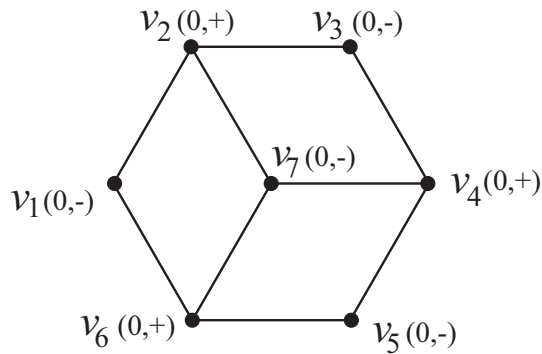


Рис. 18. Меченый второй граф Буше.

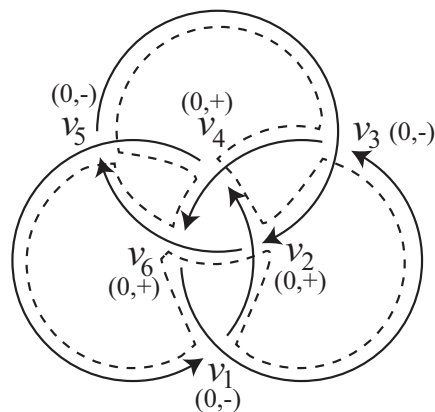


Рис. 19. Кольца Борромео (пунктирная линия — это поворачивающий обход).

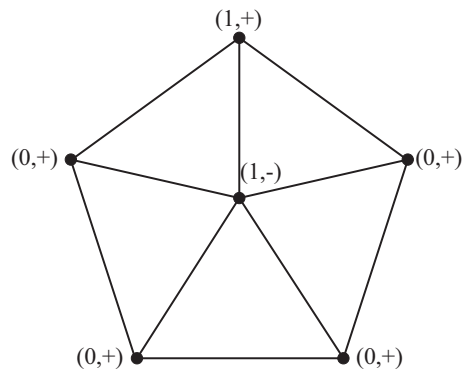


Рис. 20. Граф-зацепление с тривиальным полиномом Джонса.

Используя четность и эквивалентность между множеством граф-узлов и множеством гомотопических классов петлевых графов (см. [13, 15, 20, 22]), легко показать, что данный граф-узел является нереализуемым, а следовательно, и нетривиальным. Оказывается, что его скобка Кауфмана равна 1, а число закрученности — 0. Таким образом, *мы имеем пример нетривиального граф-узла, имеющего тривиальный полином Джонса.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Илютко Д.П. Оснащенные 4-графы: эйлеровы циклы, гауссовы циклы и поворачивающие обходы// Мат. сб. — 2011. — 202, № 9. — С. 53–76.
2. Илютко Д.П., Мантуров В.О. Граф-зацепления// Докл. РАН. Сер. Мат. — 2009. — 428, № 5. — С. 591–594.

3. *Ильютко Д. П., Мантуров В. О., Никонов И. М.* Четность в теории узлов и граф-зацепления// *Соврем. мат. Фундам. направл.* — 2011. — 41. — С. 3–163.
4. *Мантуров В. О.* Теория узлов. — Москва—Ижевск: РХД, 2005.
5. *Мантуров В. О.* Четность в теории узлов// *Мат. сб.* — 2010. — 201, № 5. — С. 65–110.
6. *Прасолов В. В., Сосинский А. Б.* Узлы, зацепления, косы и трехмерные многообразия. — МЦНМО, 1997.
7. *Bar-Natan D., Garoufalidis S.* On the Melvin—Morton—Rozansky conjecture// *Inv. Math.* — 1996. — 125. — С. 103–133.
8. *Bouchet A.* Circle graph obstructions// *Comb. Theor. Ser. B J.* — 1994. — 60. — С. 107–144.
9. *Chmutov S. V., Duzhin S. V., Lando S. K.* Vassiliev knot invariants. I, II, III// *Adv. Sov. Math.* — 1994. — 21. — С. 117–147.
10. *Chmutov S., Duzhin S., Mostovoy J.* Introduction to Vassiliev knot invariants. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2012.
11. *Cohn M., Lempel A.* Cycle decomposition by disjoint transpositions// *J. Combin. Theory Ser. A.* — 1972. — 13. — С. 83–89.
12. *Goussarov M., Polyak M., Viro O.* Finite type invariants of classical and virtual knots// *Topology.* — 2000. — 39. — С. 1045–1068.
13. *Ilyutko D. P.* An equivalence between the set of graph-knots and the set of homotopy classes of looped graphs// *J. Knot Theory Ramifications.* — 2012. — 21, № 1. — DOI: 10.1142/S0218216512500010.
14. *Ilyutko D. P., Manturov V. O.* Introduction to graph-link theory// *J. Knot Theory Ramifications.* — 2009. — 18, № 6. — С. 791–823.
15. *Ilyutko D. P., Manturov V. O.* Graph-links// In: *Introductory Lectures on Knot Theory, Selected Lectures Presented at the Advanced School and Conference on Knot Theory and its Applications to Physics and Biology, Series of Knots and Everything.* — World Scientific, 2012. — 46. — С. 135–161.
16. *Kamada N., Kamada S.* Abstract link diagrams and virtual knots// *J. Knot Theory Ramifications.* — 2000. — 9, № 1. — С. 93–109.
17. *Kauffman L. H.* Virtual knots// *Talks at MSRI Meeting, January 1997 and AMS meeting at University of Maryland, College Park, March 1997.*
18. *Kauffman L. H.* Virtual knot theory// *Eur. J. Combin.* — 1999. — 20, № 7. — С. 663–690.
19. *Manturov V. O.* Knot theory. — Boca Raton: CRC-Press, 2004.
20. *Manturov V. O.* On free knots// *arXiv:math.GT/0901.2214.*
21. *Manturov V. O.* On free knots and links// *arXiv:math.GT/0902.0127.*
22. *Manturov V. O., Ilyutko D. P.* Virtual knots: the state of the art. — Singapore: World Scientific, 2012.
23. *Moran G.* Chords in a circle and linear algebra over $GF(2)$ // *J. Combin. Theory Ser. A.* — 1984. — 37. — С. 239–247.
24. *Read R. C., Rosenstiehl P.* On the Gauss crossing problem// *Colloq. Math. Soc. Janos Bolyai.* — North-Holland, Amsterdam—New-York, 1976. — С. 843–876.
25. *Reidemeister K.* Knotentheorie. — Berlin: Springer, 1932.
26. *Soboleva E.* Vassiliev knot invariants coming from Lie algebras and 4-invariants// *J. Knot Theory Ramifications.* — 2001. — 10, № 1. — С. 161–169.
27. *Traldi L.* A bracket polynomial for graphs. II. Links, Euler circuits and marked graphs// *J. Knot Theory Ramifications.* — 2010. — 19. — С. 547–586.
28. *Traldi L.* A bracket polynomial for graphs. III. Vertex weights// *arXiv:math.GT, math.CO/0905.4879.*
29. *Traldi L.* Binary nullity, Euler circuits and interlace polynomials// *arXiv:math.CO/0903.4405.*
30. *Traldi L., Zulli L.* A bracket polynomial for graphs// *J. Knot Theory Ramifications.* — 2009. — 18. — С. 1681–1709.

Д. П. Ильютко

Механико-математический факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова

Лаборатория дискретной и вычислительной геометрии им. Б. Н. Делоне, ЯрГУ им. П. Г. Демидова

E-mail: ilyutko@yandex.ru

В. С. Сафина

Механико-математический факультет, МГУ имени М. В. Ломоносова

E-mail: timofeeva_vs_mgu@mail.ru

О БОЛЬШИХ ПОДГРАФАХ ГРАФА РАССТОЯНИЙ, ИМЕЮЩИХ МАЛЕНЬКОЕ ХРОМАТИЧЕСКОЕ ЧИСЛО

© 2013 г. **А. А. КОКОТКИН, А. М. РАЙГОРОДСКИЙ**

Аннотация. В настоящей работе доказано, что в каждом дистанционном графе на плоскости есть индуцированный подграф, содержащий более 91 процента вершин исходного графа и имеющий хроматическое число, не большее четырех. С помощью этого результата найден порядок роста пороговой вероятности для свойства случайного графа быть изоморфным некоторому дистанционному графу на плоскости. Предложены обобщения результатов на другие размерности.

1. ВВЕДЕНИЕ И ФОРМУЛИРОВКИ ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Хроматическое число $\chi(\mathbb{R}^d)$ пространства \mathbb{R}^d — это наименьшее количество цветов, в которые можно так покрасить \mathbb{R}^d , чтобы среди точек одного цвета не нашлось пары точек на расстоянии единица, т. е.

$$\chi(\mathbb{R}^d) = \min \{k \in \mathbb{N} : \exists V_1, \dots, V_k, \mathbb{R}^d = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k, \forall i, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i, \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \neq 1\},$$

где ρ — обычное евклидово расстояние.

Легко показать, что для любого d величина $\chi(\mathbb{R}^d)$ конечна. Проблема отыскания хроматического числа пространства была впервые поставлена на рубеже 40-х — 50-х годов XX века (см. [3, 5, 8, 9, 12, 17, 20, 21]). Несмотря на значительный интерес, вызванный этой проблемой, она до сих пор, по существу, остается нерешенной. Конечно, $\chi(\mathbb{R}^1) = 2$, однако уже для плоскости лучшее, что мы знаем, это оценка

$$4 \leq \chi(\mathbb{R}^2) \leq 7.$$

Для трехмерного пространства мы имеем

$$6 \leq \chi(\mathbb{R}^3) \leq 15$$

(см. [13, 19]), наконец для растущей размерности

$$(1.239 \dots + o(1))^d \leq \chi(\mathbb{R}^d) \leq (3 + o(1))^d$$

(см. [3, 4, 6, 18]).

Поставленная задача может быть переформулирована в терминах теории графов. Прежде всего, *дистанционным графом* (или *графом расстояний*) назовем конечный граф $G = (V, E)$, вершины которого суть точки евклидова пространства, а ребра соединяют только пары точек, отстоящих друг от друга на расстояние единица. Иными словами,

$$V \subset \mathbb{R}^d, |V| < \infty, E \subseteq \{(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in V \times V : \rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 1\}.$$

Напомним, что *хроматическое число* $\chi(G)$ графа $G = (V, E)$ — это наименьшее количество цветов, в которые можно так покрасить его вершины, чтобы вершины одного цвета не соединялись ребром, т. е.

$$\chi(G) = \min \{k \in \mathbb{N} : \exists V_1, \dots, V_k, V = V_1 \sqcup \dots \sqcup V_k, \forall i, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \notin E\}.$$

П. Эрдеши и Н. де Брёйн фактически доказали (см. [15]), что $\chi(\mathbb{R}^d) = \max \chi(G)$, где максимум берется по всем графам расстояний в \mathbb{R}^d . Таким образом, изучение хроматических чисел графов расстояний играет исключительную роль при исследовании проблемы отыскания хроматического числа пространства.

В основной части настоящей работы мы будем рассматривать только случай евклидовой плоскости. Тот факт, что $\chi(\mathbb{R}^2) \leq 7$, означает, конечно, что для любого графа расстояний $G = (V, E)$

на плоскости $\chi(G) \leq 7$. Как следствие, $\alpha(G) \geq \frac{|V|}{7}$, коль скоро через $\alpha(G)$ мы обозначили *число независимости* графа G , т. е. наибольшее количество его вершин, никакие две из которых не соединены ребром:

$$\alpha(G) = \max \{|V'| : V' \subset V, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V', (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \notin E\}.$$

Таким образом, в любом «двумерном» графе расстояний на n вершинах найдется индуцированный подграф, имеющий не менее $\frac{n}{7}$ вершин и хроматическое число 1. Это утверждение допускает ряд нетривиальных обобщений и уточнений. Нам удалось доказать следующие результаты для графов расстояний на плоскости.

Теорема 1. В любом графе расстояний $G = (V, E)$ на n вершинах найдется такой индуцированный подграф $G' = (V', E')$, что $|V'| \geq \left\lceil \frac{n}{\kappa} \right\rceil$ и $\chi(G') = 1$, где $\kappa = 4.36 \dots$

Теорема 2. В любом графе расстояний $G = (V, E)$ на n вершинах найдется такой индуцированный подграф $G' = (V', E')$, что $|V'| \geq \left\lceil \frac{2n}{\kappa} \right\rceil$ и $\chi(G') \leq 2$.

Теорема 3. В любом графе расстояний $G = (V, E)$ на n вершинах найдется такой индуцированный подграф $G' = (V', E')$, что $|V'| \geq \left\lceil \frac{3n}{\kappa} \right\rceil$ и $\chi(G') \leq 3$.

Теорема 4. В любом графе расстояний $G = (V, E)$ на n вершинах найдется такой индуцированный подграф $G' = (V', E')$, что $|V'| \geq \left\lceil \frac{4n}{\kappa} \right\rceil$ и $\chi(G') \leq 4$.

Наиболее интересной является теорема 4. Фактически в ней утверждается, что в каждом графе расстояний на плоскости есть индуцированный подграф, который почти целиком совпадает с исходным графом (содержит не менее 91.7% его вершин) и допускает раскраску в 4 цвета. Если бы в этом утверждении величину 91.7 удалось заменить на 100, то, ввиду теоремы Эрдеша—де Брёйна, это бы означало, что $\chi(\mathbb{R}^2) = 4$.

Заметим, что, конечно, теоремы 1–3 являются следствиями теоремы 4. Однако мы будем доказывать их именно в таком порядке из соображений удобства. Заметим также, что теорема 1 встречалась ранее в литературе, но мы начнем именно с ее доказательства в разделе 3: так проще будет описывать общий подход.

Итак, дальнейшая структура статьи следующая. В разделе 2 мы сформулируем задачу о реализации случайного графа графом расстояний на плоскости. Там же мы приведем соответствующие основные утверждения — теоремы 5 и 6. В третьем разделе мы докажем теоремы 1–4, а также новую теорему 8, являющуюся главным инструментом в наших доказательствах. В разделе 4 мы докажем теоремы 5, 6. Пятый раздел мы посвятим обобщениям полученных результатов на другие размерности.

2. ПОСТАНОВКА ВЕРОЯТНОСТНОЙ ЗАДАЧИ И ФОРМУЛИРОВКИ СООТВЕТСТВУЮЩИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

Зачастую задачи теории графов допускают нетривиальную интерпретацию в терминах *случайного графа*. Напомним, что одной из наиболее популярных моделей случайного графа является модель, предложенная П. Эрдемем и А. Реньи на рубеже 50-х—60-х годов XX века (см. [1, 7, 10, 11, 16]). Речь идет о вероятностном пространстве $G(n, p) = (\Omega_n, \mathcal{B}_n, P_n)$. Здесь

$$\Omega_n = \{G = (V, E) : |V| = n\}$$

— множество всевозможных графов на n вершинах (без петель и кратных ребер), сигма-алгебра \mathcal{B}_n представляет собой множество всех подмножеств Ω_n , а

$$P_n(G) = p^{|E|}(1-p)^{C_n^2-|E|}.$$

Иначе говоря, можно считать, что ребра случайного графа появляются независимо друг от друга с вероятностью p . Заметим, что в модели Эрдеша—Реньи величина p может зависеть от n .

Нас будет интересовать в дальнейшем, с какой вероятностью случайный граф в модели $G(n, p)$ допускает реализацию на плоскости в качестве графа расстояний. Как это часто бывает в науке

о случайных графах, при одних значениях p эта вероятность будет стремиться к нулю, а при других — к единице. Определим некоторую критическую величину p , отвечающую за вышеупомянутый «фазовый переход», следующим образом:

$$p^*(n) = \sup \left\{ p \in [0, 1] : P_n(G \text{ реализуется на плоскости как граф расстояний}) > \frac{1}{2} \right\}.$$

Такая величина называется *пороговой вероятностью*, и она определена корректно ввиду классических результатов о существовании пороговых вероятностей для монотонных свойств случайных графов (см. [11]).

Мы можем доказать следующие результаты.

Теорема 5. При $p = \frac{c}{n}$, где $c < 1$, выполнено

$$P_n(G \text{ реализуется на плоскости как граф расстояний}) \rightarrow 1, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема 6. При $p = \frac{c}{n}$, где $c > t_0 = 14.797\dots$, выполнено

$$P_n(G \text{ реализуется на плоскости как граф расстояний}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Теоремы 5 и 6 означают, что $\frac{1-\varepsilon}{n} \leq p^*(n) \leq \frac{t_0+\varepsilon}{n}$ со сколь угодно малым положительным ε и $n \geq n_0(\varepsilon)$. Тем самым, мы знаем порядок роста пороговой вероятности.

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ГЕОМЕТРИЧЕСКИХ РЕЗУЛЬТАТОВ

3.1. Доказательство теоремы 1.

Доказательство. Прежде всего напомним, что *верхней плотностью* измеримого множества $S \subset \mathbb{R}^d$ называется величина

$$\nu = \nu(S) = \overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \sup_{C_s} \frac{\mu(S \cap C_s)}{\mu(C_s)},$$

где супремум берется по всем кубам со стороной s , а μ — это мера Лебега.

Будем говорить, далее, что *на множестве S реализуется расстояние a* , если найдутся такие точки $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$, что $\rho(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = a$.

Нам понадобится следующая теорема, доказанная Д. Ларманом и К. А. Роджерсом в 1972 году (см. [18]).

Теорема 7. Пусть в \mathbb{R}^d существует граф расстояний $G = (V, E)$, $|V| = n$, с числом независимости $\alpha(G) < D$. Тогда, если измеримое множество в \mathbb{R}^d имеет верхнюю плотность $\nu \geq D/n$, то все расстояния $a > 0$ на этом множестве реализуются.

Сами Ларман и Роджерс формулировали теорему в несколько иных терминах, но нам потребуется именно такая переформулировка. Из нее мы немедленно получаем

Следствие 1. Если в \mathbb{R}^d найдется такое измеримое множество с верхней плотностью $\nu \geq \nu_0$, что на нем какое-либо расстояние $a > 0$ не реализуется, то для любого графа расстояний G в \mathbb{R}^d , имеющего n вершин, выполнено $\alpha(G) \geq \nu_0 n$.

В действительности следствие 1 — это просто еще одна переформулировка теоремы 7.

Х. Крофт в своей работе (см. [14, 18]) 1967 года приводит пример измеримого множества на плоскости с верхней плотностью $\nu = \nu_0 = 0.2293\dots$ и без расстояния единица. Из этого примера и следствия 1 немедленно получаем существование в каждом n -вершинном дистанционном графе на плоскости индуцированного подграфа $G' = (V', E')$, у которого $|V'| \geq \nu_0 n$ и $\chi(G') = 1$. Замечая, что $\nu_0 = \frac{1}{\chi}$, завершаем доказательство теоремы 1. □

Подчеркнем, что результат Крофта по-прежнему остается лучшим из известных, а потому в рамках предложенного подхода теорема 1 дает наиболее точную оценку. Поскольку конструкция Крофта нам еще понадобится, опишем ее подробнее.

Пусть на плоскости дана правильная треугольная решетка Λ_ε , в которой расстояние между ближайшими узлами равно $2 - 2\varepsilon$. Здесь ε — достаточно маленькое число, которое будет оптимально подобрано позднее. Рассмотрим круг B_ε радиуса $\frac{1}{2} - \varepsilon$ и правильный шестиугольник H , центр симметрии которого совпадает с центром B_ε и длина диагонали которого равна единице. Положим $T_\varepsilon = (B_\varepsilon \cap H) \setminus \partial(B_\varepsilon \cap H)$ — открытая «черепашка». Для каждого $\mathbf{x} \in \Lambda_\varepsilon$ обозначим через $\varphi_{\mathbf{x}}(T_\varepsilon)$ копию множества T_ε , получающуюся в результате параллельного переноса, при котором центр симметрии T_ε переходит в \mathbf{x} . Множество Крофта — это $K_\varepsilon = \bigcup_{\mathbf{x} \in \Lambda} \varphi_{\mathbf{x}}(T_\varepsilon)$. Выбор величины ε осуществляется так, чтобы значение $\nu(K_\varepsilon)$ было наибольшим.

3.2. Доказательства теорем 2–4.

Доказательство. Для доказательства нам потребуется новый результат, являющийся усилением теоремы Лармана-Роджерса.

Теорема 8. Пусть в \mathbb{R}^d задан некоторый граф расстояний $G = (V, E)$, $|V| = n$. Предположим, что существуют такие числа $k \in \mathbb{N}$ и $\nu_0 \in (0, 1)$, что для любого индуцированного подграфа $G' = (V', E')$ с $|V'| \geq [\nu_0 n]$ выполнено $\chi(G') > k$. Тогда для всякого набора измеримых множеств S_1, S_2, \dots, S_k в \mathbb{R}^d с условием, что множество $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$ имеет верхнюю плотность $\nu \geq \nu_0$, верно, что каково бы ни было $a > 0$, найдется S_i , на котором реализуется расстояние a .

Следствие 2. Если для данного $\nu_0 \in (0, 1)$ найдутся такие k множеств S_1, S_2, \dots, S_k в \mathbb{R}^d , что верхняя плотность множества $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$ не меньше ν_0 и некоторое расстояние $a > 0$ не достигается ни на одном из S_i , то для любого графа расстояний G в \mathbb{R}^d , имеющего n вершин, найдется индуцированный подграф $G' = (V', E')$ с $|V'| \geq [\nu_0 n]$, для которого выполнено $\chi(G') \leq k$.

Следствие очевидно (собственно, оно является переформулировкой теоремы), а теорему 8 мы докажем в пункте 3.3. Сейчас мы с помощью следствия завершим доказательства теорем 2–4.

Сделаем параллельный перенос множества Крофта K_ε вдоль линий решетки на расстояние $1 - \varepsilon$. Получим четыре конгруэнтных непересекающихся множества. Берем 2, 3, 4 из них и получаем, с помощью следствия, доказательство теорем 2, 3, 4 соответственно. \square

3.3. Доказательство теоремы 8.

Доказательство. Пусть $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ — вершины данного графа. Зафиксируем измеримые множества S_1, S_2, \dots, S_k , удовлетворяющие условию теоремы. Тогда для $S = S_1 \cup S_2 \cup \dots \cup S_k$ выполнено

$$\overline{\lim}_{s \rightarrow \infty} \sup_{C_s} \frac{\mu(S \cap C_s)}{\mu(C_s)} \geq \nu_0 > \nu_0 - \frac{1}{n},$$

где супремум, напомним, берется по всем кубам со стороной s .

Значит, по определению верхнего предела существует $\delta > 0$, при котором для любого s_0 найдется такое $s > s_0$, что

$$\sup_{C_s} \frac{\mu(S \cap C_s)}{\mu(C_s)} > \nu_0 - \frac{1}{n} + \frac{\delta}{n}.$$

Далее по определению супремума получаем, что при прежних ограничениях на δ, s_0 и s существует такой куб C_s , что

$$\frac{\mu(S \cap C_s)}{\mu(C_s)} > \nu_0 - \frac{1}{n} + \frac{\delta}{n}. \quad (*)$$

Пусть $a > 0$ — произвольное фиксированное число. Мы хотим доказать, что найдется S_i , на котором реализуется расстояние a . Рассмотрим векторы $a\mathbf{x}_1, a\mathbf{x}_2, \dots, a\mathbf{x}_n$. Покажем теперь, что существуют такие s и C_s , с которыми для любого $i = 1, \dots, n$ выполнено

$$\frac{\mu(\{S + a\mathbf{x}_i\} \cap C_s)}{\mu(C_s)} > \nu_0 - \frac{1}{n}.$$

Введем обозначения: $a\mathbf{x}_i = (x_i^1, \dots, x_i^d)$, $b = \max_{i,j} \{x_i^j\}$, где $i = 1, \dots, n$, $j = 1, \dots, d$.

Возьмем s_0 настолько большим, что

$$\frac{s_0^d - (s_0 - 2b)^d}{s_0^d} < \frac{\delta}{n}.$$

Это, конечно, можно сделать, так как выражение в левой части неравенства с ростом s_0 стремится к нулю. Мы знаем (см. (*)), что для этого s_0 найдутся такие $s > s_0$ и C_s , что

$$\frac{\mu(S \cap C_s)}{\mu(C_s)} > \nu_0 - \frac{1}{n} + \frac{\delta}{n}.$$

Положим

$$B = \{\mathbf{y} \in C_s : \rho(\mathbf{y}, \partial C_s) < b\}, \tilde{C}_s = C_s \setminus B.$$

Заметим, что та часть S , которая содержалась в \tilde{C}_s , после сдвига на $a\mathbf{x}_i$ останется в C_s . Тогда для каждого i получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\mu(\{S + a\mathbf{x}_i\} \cap C_s)}{\mu(C_s)} &\geq \frac{\mu(S \cap \tilde{C}_s)}{\mu(C_s)} = \frac{\mu(S \cap C_s)}{\mu(C_s)} - \frac{\mu(S \cap B)}{\mu(C_s)} \geq \frac{\mu(S \cap C_s)}{\mu(C_s)} - \frac{\mu(B)}{\mu(C_s)} > \\ &> \left(\nu_0 - \frac{1}{n} + \frac{\delta}{n} \right) - \frac{s^d - (s - 2b)^d}{s^d} > \nu_0 - \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

Итак, мы доказали, что существуют такие s и C_s , с которыми для любого i выполнено

$$\frac{\mu(\{S + a\mathbf{x}_i\} \cap C_s)}{\mu(C_s)} > \nu_0 - \frac{1}{n}.$$

Суммируем полученные неравенства по i :

$$\sum_{i=1}^n \mu(\{S + a\mathbf{x}_i\} \cap C_s) > (\nu_0 n - 1) \mu(C_s).$$

Стало быть, найдется такая точка $\mathbf{x}^* \in C_s$, что \mathbf{x}^* принадлежит по крайней мере $\lfloor \nu_0 n \rfloor$ множествам вида $\{S + a\mathbf{x}_i\}$. Без ограничения общности можно считать, что найдется m , не меньшее $\lfloor \nu_0 n \rfloor$, для которого имеет место $\mathbf{x}^* \in \{S + a\mathbf{x}_i\}$ при всех $i = 1, 2, \dots, m$. Или, что то же самое,

$$\mathbf{x}^* - a\mathbf{x}_i \in S \text{ при } i = 1, 2, \dots, m.$$

Но по условию индуцированный подграф G' на вершинах $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_m$ имеет хроматическое число $\chi(G') > k$. Рассмотрим изоморфный ему граф $G^* = (V^*, E^*)$, где

$$V^* = \{\mathbf{x}^* - a\mathbf{x}_i : i = 1, 2, \dots, m\},$$

$$E^* = \{(\mathbf{x}^* - a\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}^* - a\mathbf{x}_{i_2}) : (\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}_{i_2}) \in E\}.$$

Поскольку его хроматическое число также больше k , то найдется множество S_j и точки $\mathbf{x}^* - a\mathbf{x}_{i_1}, \mathbf{x}^* - a\mathbf{x}_{i_2} \in S_j$, соединенные ребром. Но тогда на множестве S_j реализуется расстояние a . Теорема доказана. □

4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ВЕРОЯТНОСТНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

4.1. Доказательство теоремы 5.

Доказательство. Нам понадобится теорема, доказанная в [11] в несколько более общей формулировке.

Теорема 9. Пусть $p = \frac{c}{n}$, $c < 1$. Тогда с вероятностью, стремящейся к единице, все компоненты случайного графа в $G(n, p)$ суть деревья или одноцикловые графы.

Осталось заметить, что любое дерево или одноцикловый граф очевидным образом реализуются на плоскости как графы расстояний, и тем самым завершить доказательство теоремы. □

4.2. Доказательство теоремы 6.

Доказательство. В теореме 4 утверждается, что в любом графе расстояний $G = (V, E)$ на плоскости найдется большой индуцированный подграф с хроматическим числом, не превосходящим четырех. Иными словами, в таком графе всегда есть четверка непересекающихся независимых множеств вершин большой суммарной мощности. В связи с этим рассмотрим случайную величину $Z_s = Z_s(G)$, равную количеству упорядоченных четверок непересекающихся независимых множеств вершин суммарной мощности s в графе G :

$$Z_s(G) = |\{(V_1, V_2, V_3, V_4) : V_i \subset V, V_i \cap V_j = \emptyset, \forall i, \forall \mathbf{x}, \mathbf{y} \in V_i, (\mathbf{x}, \mathbf{y}) \notin E, |V_1 \sqcup \dots \sqcup V_4| = s\}|.$$

Мы доказали, что для любого плоского графа расстояний $Z_{4k}(G) > 0$, где $k = \lfloor \nu n \rfloor - 1$, $\nu = 0, 2293 \dots$. Стало быть, если $Z_{4k}(G) = 0$, то G не реализуется на плоскости как граф расстояний. Это означает, что если мы покажем, что при $p = \frac{c}{n}$, где $c > t_0 = 14, 797 \dots$ и $n \rightarrow \infty$, выполнено $MZ_{4k} \rightarrow 0$, то мы докажем теорему.

Нетрудно видеть, что

$$MZ_{4k} = \sum_{k_1 + \dots + k_4 = 4k} C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} C_{n-(k_1+k_2)}^{k_3} C_{n-(k_1+k_2+k_3)}^{k_4} (1-p)^{\sum_{i=1}^4 C_{k_i}^2}.$$

В силу выпуклости биномиального коэффициента

$$\sum_{i=1}^4 C_{k_i}^2 \geq 4C_k^2.$$

Очевидно также, что максимальное значение величины

$$C_n^{k_1} C_{n-k_1}^{k_2} C_{n-(k_1+k_2)}^{k_3} C_{n-(k_1+k_2+k_3)}^{k_4}$$

достигается тогда и только тогда, когда максимален полиномиальный коэффициент

$$P(k_1, k_2, k_3, k_4) = \frac{(4k)!}{k_1! k_2! k_3! k_4!},$$

т. е. при $k_1 = k_2 = k_3 = k_4 = k$. Отсюда

$$\begin{aligned} MZ_{4k} &\leq n^3 C_n^k C_{n-k}^k C_{n-2k}^k C_{n-3k}^k (1-p)^{4C_k^2} = \\ &= n^3 \frac{n!}{(k!)^4 (n-4k)!} \left(1 - \frac{c}{n}\right)^{2k^2 - 2k} = Q_1(n) \frac{\left(\frac{n}{e}\right)^n \left(1 - \frac{c}{n}\right)^{(2n^2\nu^2 - 2n\nu)}}{\left(\frac{n\nu}{e}\right)^{4n\nu} \left(\frac{n-4n\nu}{e}\right)^{n-4n\nu}} = f(n), \end{aligned}$$

где $Q_1(n)$ — функция, растущая не быстрее некоторого полинома. Далее, очевидно,

$$f(n) = Q_2(n) \frac{e^{-2cn\nu^2}}{\nu^{4n\nu} (1-4\nu)^{n-4n\nu}} = Q_2(n) e^{-n(4\nu \ln \nu + (1-4\nu) \ln(1-4\nu) + 2c\nu^2)},$$

где $Q_2(n)$ — тоже функция, имеющая полиномиальный порядок роста.

Для того, чтобы последнее выражение стремилось к нулю, достаточно, чтобы

$$4\nu \ln \nu + (1-4\nu) \ln(1-4\nu) + 2c\nu^2 > 0 \Leftrightarrow c > \frac{4\nu \ln \nu + (1-4\nu) \ln(1-4\nu)}{-2\nu^2}.$$

Подставляя значение ν , убеждаемся, что при $c > t_0$ это условие выполнено. Теорема доказана. \square

5. ОБОБЩЕНИЯ ВЕРОЯТНОСТНЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ

В этом разделе мы сначала поговорим про обобщения полученных нами вероятностных результатов на случай $d \geq 3$. Затем мы отдельно рассмотрим случай $d = 1$.

5.1. Пороговые вероятности для реализации графом расстояний в размерностях $d \geq 3$.

Положим

$$p_d^*(n) = \sup \left\{ p \in [0, 1] : P_n(G \text{ реализуется в } \mathbb{R}^d \text{ как граф расстояний}) > \frac{1}{2} \right\}.$$

В частности, $p^*(n) = p_2^*(n)$. Сразу ясно, что для любого $d \geq 3$ выполнен аналог теоремы 5, откуда $p_d^*(n) \geq \frac{1-\varepsilon}{n}$ со сколь угодно малым положительным ε и $n \geq n_0(\varepsilon)$.

Для получения верхних оценок величины $p_d^*(n)$ нам понадобятся обобщения теоремы 4. Как мы помним, доказательство теоремы 4 основано на результате Крофта и теореме 8. Понятно, что и сейчас мы сможем использовать последнюю теорему; нам лишь нужны аналоги результата Крофта в размерностях $d \geq 3$. Эти аналоги недавно были получены в работе [2]. А именно, пусть $m_1(\mathbb{R}^d)$ — это супремум верхних плотностей таких измеримых множеств $S \subset \mathbb{R}^d$, что в S не реализуется расстояние 1. В этих терминах конструкция Крофта дает неравенство $m_1(\mathbb{R}^2) \geq 0.2293\dots$. Подобные неравенства установлены в статье [2] для $d \in \{3, \dots, 8\}$:

$$\begin{aligned} m_1(\mathbb{R}^3) &\geq 0.09877, & m_1(\mathbb{R}^4) &\geq 0.04413, \\ m_1(\mathbb{R}^5) &\geq 0.01833, & m_1(\mathbb{R}^6) &\geq 0.00806, \\ m_1(\mathbb{R}^7) &\geq 0.00352, & m_1(\mathbb{R}^8) &\geq 0.00165. \end{aligned}$$

Напомним, что в конце пункта 3.2 мы использовали 4 конгруэнтных копии множества Крофта. На самом деле конструкции из работы [2] устроены совершенно аналогично: они тоже имеют решетчатую природу, и для каждого d в \mathbb{R}^d уместятся 2^d их конгруэнтных копий. В итоге обобщением теоремы 4 служит следующий результат.

Теорема 10. *Положим*

$$\begin{aligned} \nu_3 &= 0.09877, & \nu_4 &= 0.04413, & \nu_5 &= 0.01833, \\ \nu_6 &= 0.00806, & \nu_7 &= 0.00352, & \nu_8 &= 0.00165. \end{aligned}$$

Тогда для любого $d \in \{3, \dots, 8\}$ в любом n -вершинном графе расстояний $G = (V, E)$ в \mathbb{R}^d найдется такой индуцированный подграф $G' = (V', E')$, что $|V'| \geq \lfloor 2^d \nu_d n \rfloor$ и $\chi(G') \leq 2^d$.

Дальнейшая технология полностью совпадает с той, что была разработана в пункте 4.2 для доказательства теоремы 6. Теперь для данного d нужно брать $k = \lfloor \nu_d n \rfloor - 1$ и добиваться того, чтобы величина $MZ_{2^d k}$ стремилась к нулю (или хотя бы была меньше $1/2$ при больших n).

Пусть $p = \frac{c}{n}$. Тогда выкладки из пункта 4.2 преобразуются к виду

$$\begin{aligned} MZ_{2^d k} &\leq Q_1(n) \frac{n!}{(k!)^{2^d} (n - 2^d k)!} \left(1 - \frac{c}{n}\right)^{2^{d-1} k^2 - 2^{d-1} k} = \\ &= Q_2(n) e^{-n(2^d \nu_d \ln \nu_d + (1 - 2^d \nu_d) \ln(1 - 2^d \nu_d) + 2^{d-1} c \nu_d^2)}. \end{aligned}$$

В итоге нам нужно

$$c > \frac{2^d \nu_d \ln \nu_d + (1 - 2^d \nu_d) \ln(1 - 2^d \nu_d)}{-2^{d-1} \nu_d^2}.$$

Теорема 11. *Положим*

$$\begin{aligned} c_3 &= 55.272\dots, & c_4 &= 164.528\dots, & c_5 &= 504.285\dots, \\ c_6 &= 1365.170\dots, & c_7 &= 3624.758\dots, & c_8 &= 8675.785\dots \end{aligned}$$

Тогда при каждом d и $p = \frac{c}{n}$, где $c > c_d$, выполнено

$$P_n(G \text{ реализуется в } \mathbb{R}^d \text{ как граф расстояний}) \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

Иными словами,

$$\frac{1 - \varepsilon}{n} \leq p_d^*(n) \leq \frac{c_d + \varepsilon}{n}.$$

Из выкладок, приведенных в статье [2], а также из неравенства, определяющего величины c_d через величины ν_d , следует, что c_d растет как экспонента. В этой связи интересно установить более сильные нижние оценки пороговой вероятности, нежели не зависящая от d нынешняя оценка $p_d^* \geq \frac{1 - \varepsilon}{n}$.

5.2. Пороговые вероятности для реализации графом расстояний в размерности $d = 1$.

Здесь мы изучим величину $p_1^*(n)$. Любопытно, что ее поведение будет разительно отличаться от поведения всех остальных величин $p_d^*(n)$. А именно, зависимость от n будет другой.

Теорема 12. Для любого $\varepsilon > 0$ существует такое n_0 , что при всех $n \geq n_0$ выполнено

$$\frac{\sqrt[3]{3} - \varepsilon}{n^{4/3}} \leq p_1^*(n) \leq \frac{\sqrt[3]{12} + \varepsilon}{n^{4/3}}.$$

Доказательство. Начнем с доказательства нижней оценки. Пусть $p = \frac{c}{n^{4/3}}$, где $c < \sqrt[3]{3}$. Хорошо известно, что при любом $p = o\left(\frac{1}{n}\right)$ случайный граф с асимптотической вероятностью 1 не содержит циклов, т. е. является лесом. Значит, и при нашем p случайный граф — «почти наверняка» лес. Допустим, мы доказали, что к тому же степень каждой вершины случайного графа не превосходит двойки с вероятностью, которая при больших n строго больше половины. Тогда нужная оценка получена: лес, у которого каждая вершина имеет степень 0, 1 или 2, — это линейный лес, т. е. граф, компоненты которого суть простые цепи или изолированные вершины; ясно, что такой граф реализуется как граф расстояний на прямой.

Итак, пусть Y_3 — случайная величина, равная количеству вершин случайного графа, имеющих степень не ниже тройки. В силу классического неравенства Маркова нам достаточно убедиться в том, что $MY_3 < \frac{1}{2} + o(1)$. В самом деле,

$$\begin{aligned} MY_3 &= n \sum_{i=3}^{n-1} C_{n-1}^i p^i (1-p)^{n-1-i} = \\ &= n \left(1 - (1-p)^{n-1} - (n-1)p(1-p)^{n-2} - \frac{(n-1)(n-2)}{2} p^2 (1-p)^{n-3} \right) = \\ &= n \left(1 - \left(1 - (n-1)p + \frac{(n-1)(n-2)}{2} p^2 - \frac{(n-1)(n-2)(n-3)}{6} p^3 + O(n^4 p^4) \right) - \right. \\ &\quad \left. - (n-1)p \left(1 - (n-2)p + \frac{(n-2)(n-3)}{2} p^2 - \frac{(n-2)(n-3)(n-4)}{6} p^3 + O(n^4 p^4) \right) - \right. \\ &\quad \left. - \frac{(n-1)(n-2)}{2} p^2 \left(1 - (n-3)p + \frac{(n-3)(n-4)}{2} p^2 - \frac{(n-3)(n-4)(n-5)}{6} p^3 + O(n^4 p^4) \right) \right) = \\ &= \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{6} p^3 + O(n^5 p^4) = \frac{n^4 p^3}{6} + o(1) = \frac{n^4 c^3}{6n^4} + o(1) < \frac{1}{2} + o(1). \end{aligned}$$

Нижняя оценка доказана.

Для доказательства верхней оценки применим неравенство Чебышёва:

$$P_n(Y_3 = 0) = P_n(Y_3 \leq 0) = P_n(-Y_3 \geq 0) = P_n(MY_3 - Y_3 \geq MY_3) \leq \frac{DY_3}{(MY_3)^2}.$$

Допустим, мы показали, что $\frac{DY_3}{(MY_3)^2} < \frac{1}{2} + o(1)$. Тогда с вероятностью, большей половины при больших n , в случайном графе есть вершины степени 3 или выше. Но графы с такими вершинами нельзя реализовать на прямой.

Итак, мы уже знаем, что при $p = \frac{c}{n^{4/3}}$ выполнено $MY_3 = \frac{n^4 p^3}{6} + o(1)$. В книге [11] на с. 69 (лемма 3.10) приведено неравенство

$$DY_3 \leq MY_3 + n^2 p(1-p) (C_{n-2}^2 p^2 (1-p)^{n-4})^2.$$

Заметим, что

$$0 < n^2 p(1-p) (C_{n-2}^2 p^2 (1-p)^{n-4})^2 < n^2 p \left(\frac{n^2}{2} p^2 \right)^2 = \frac{n^6 p^5}{4} = o(1).$$

Значит, с учетом условия $c > \sqrt[3]{12}$ имеем

$$\begin{aligned} \frac{DY_3}{(MY_3)^2} &\leq \frac{MY_3 + n^2 p(1-p) (C_{n-2}^2 p^2 (1-p)^{n-4})^2}{(MY_3)^2} = \\ &= \frac{MY_3 + o(1)}{(MY_3)^2} = \frac{6}{n^4 p^3} + o(1) = \frac{6}{c^3} + o(1) < \frac{1}{2} + o(1). \end{aligned}$$

Теорема доказана. □

Теорема 12 допускает уточнение. А именно, можно показать, что

$$\frac{\sqrt[3]{6 \ln 2} - \varepsilon}{n^{4/3}} \leq p_1^*(n) \leq \frac{\sqrt[3]{6 \ln 2} + \varepsilon}{n^{4/3}}.$$

Иными словами, в одномерном случае мы знаем точное значение пороговой вероятности. Этот факт является прямым следствием теоремы 3.5 из книги [11]. В нашем случае теорема 3.5 утверждает, что при $p \sim \frac{x}{n^{4/3}}$ вероятность того, что максимальная степень вершины случайного графа не больше двух, асимптотически равна $e^{-x^3/6}$. В частности, если $x = \sqrt[3]{6 \ln 2}$, то последняя величина — это $1/2$. Дальнейшие рассуждения совпадают с рассуждениями из доказательства теоремы 12.

Стоит отметить, что, когда мы говорим о реализации графа G дистанционным графом H , мы не просто требуем наличия гомоморфизма из G в H , мы хотим, чтобы в образе не было совпадающих вершин. Для случаев $d \geq 2$ это замечание не является принципиальным. Однако для текущего случая это имеет значение. Если бы мы разрешили совпадающие вершины, то реализация графа на прямой была бы просто равносильна двудольности, и тогда пороговая вероятность снова имела бы порядок $\frac{1}{n}$.

Благодарности. Авторы очень признательны рецензенту за полезные замечания.

Настоящая работа выполнена при финансовой поддержке гранта 12-01-00683 Российского Фонда Фундаментальных Исследований и гранта поддержки ведущих научных школ НШ-2519.2012.1.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Колчин В. Ф. Случайные графы. — М.: Физматлит, 2002.
2. Кунавский А. Б., Райгородский А. М., Титова М. В. О плотнейших множествах без расстояния единица в пространствах малых размерностей// Тр. МФТИ. — 4, № 1. — 2012. — С. 91–110.
3. Райгородский А. М. Проблема Борсука и хроматические числа метрических пространств// Усп. мат. наук. — 2001. — 56, № 1. — С. 107–146.
4. Райгородский А. М. О хроматическом числе пространства// Усп. мат. наук. — 2000. — 55, № 2. — С. 147–148.
5. Райгородский А. М. Хроматические числа. — М.: МЦНМО, 2003.
6. Райгородский А. М. Линейно-алгебраический метод в комбинаторике. — М.: МЦНМО, 2007.
7. Райгородский А. М. Модели случайных графов. — М.: МЦНМО, 2011.
8. Сойфер А. Хроматическое число плоскости: его прошлое, настоящее и будущее// Мат. просвещ. — 2004. — 8.
9. Agarwal P. K., Pach J. Combinatorial geometry. — New York: John Wiley and Sons Inc., 1995.
10. Alon N., Spencer J. The probabilistic method. — Wiley-Interscience Ser. Discr. Math. Optim., 2000.
11. Bollobás B. Random graphs. — Cambridge Univ. Press, 2001.
12. Brass P., Moser W., Pach J. Research problems in discrete geometry. — Springer, 2005.

13. *Coulson D.* A 15-colouring of 3-space omitting distance one// *Discrete Math.* — 2002. — 256. — С. 83–90.
14. *Croft H. T.* Incident incidents// *Eureka (Cambridge).* — 1967. — 30. — С. 22–26.
15. *De Bruijn N. G., Erdős P.* A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations// *Proc. Koninkl. Nederl. Acad. Wet. Ser. A.* — 54, № 5. — 1951. — С. 371–373.
16. *Janson S., Luczak T., Ruciński A.* *Random graphs.* — New York: Wiley, 2000.
17. *Klee V., Wagon S.* *Old and new unsolved problems in plane geometry and number theory.* — Math. Association of America, 1991.
18. *Larman D. G., Rogers C. A.* The realization of distances within sets in Euclidean space// *Mathematika.* — 1972. — 19. — С. 1–24.
19. *Nechushtan O.* Note on the space chromatic number// *Discrete Math.* — 2002. — 256. — С. 499–507.
20. *Soifer A.* *The mathematical coloring book.* — Springer, 2009.
21. *Székely L. A., Erdős P.* On unit distances and the Szemerédi–Trotter theorems// *Paul Erdős and his Mathematics, Bolyai Series Budapest, J. Bolyai Math. Soc., Springer, 11.* — 2002. — С. 649–666.

А. А. Кокоткин

141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9.

E-mail: kokocan@yandex.ru

А. М. Райгородский

141700, Московская область, г. Долгопрудный, Институтский переулок, 9.

E-mail: mraigor@yandex.ru

ОБ ОБЪЕМЕ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОКТАЭДРА С НЕТРИВИАЛЬНЫМИ СИММЕТРИЯМИ

© 2013 г. В. А. КРАСНОВ

Аннотация. В настоящей статье с помощью формулы Деревнина—Медных объема гиперболического тетраэдра получены явные интегральные формулы объема произвольных гиперболических октаэдров, обладающих m - и $2|m$ -симметриями, в терминах определяющих их двугранных углов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Вычисление объемов многогранников в трехмерном пространстве является очень старой и трудной проблемой. По-видимому, первый серьезный результат об объеме треугольной пирамиды получен еще Архимедом, а в 16 веке Тарталья выразил объем евклидова тетраэдра через квадраты длин его ребер, хотя задачу нахождения объема тетраэдра через длины его ребер впервые решил, по-видимому, Пьеро де Франческа. Затем эта задача рассматривалась Л. Пачоли. Тарталья же повторил ее решение в работе «General trattato di numeri et misure» [7]. В настоящее время результат Тартальи известен как детерминантная формула Кэли—Менгера. Заметим, что аналогичная формула имеет место и для многомерных симплексов.

В сферическом и гиперболическом случаях ситуация более сложная. Объем бипрямоугольного тетраэдра (ортосхемы) в сферическом случае был найден Л. Шлефли [17], а Н. И. Лобачевский [6] и Я. Бойяи [8] независимо друг от друга вычислили объем гиперболической ортосхемы. Объем идеального гиперболического тетраэдра был найден еще в 1835 году Н. И. Лобачевским [6], а в 1982 году Дж. Милнор [13] представил этот результат в более элегантно виде. В свою очередь, Э. Б. Винбергом [3] были получены формулы объемов гиперболических тетраэдров, имеющих хотя бы одну вершину на бесконечности.

Что касается формулы объема произвольного гиперболического тетраэдра, то она долгое время была неизвестна. Лишь на рубеже веков эта проблема была полностью решена в работах Ю. Чо и Х. Кима [9], Дж. Мураками и У. Яно [16], а также Дж. Мураками и А. Ушиджимы [15], но формулы, полученные вышеперечисленными математиками, являются довольно громоздкими и трудно обозримыми. Следует отметить, что во всех вышеперечисленных работах объем выражался как алгебраическая сумма 16 значений дилוגарифмов Эйлера или спецфункций Лобачевского. Геометрический смысл полученных формул удалось объяснить Г. Лейбону [12] с точки зрения симметрий Редже, а их полное геометрическое доказательство было дано Я. Моханти [14].

В 2004 году Д. А. Деревниным и А. Д. Медных [10] была предложена более компактная интегральная формула объема гиперболического тетраэдра в терминах его двугранных углов. Нельзя не упомянуть, что еще в 1906 году итальянский герцог Г. Сфорца нашел формулу для вычисления объема неевклидова тетраэдра. К сожалению, выдающаяся работа Г. Сфорца [18] долгое время была полностью забыта и приобрела широкую известность лишь после дискуссии А. Д. Медных с Х. М. Монтезиносом на конференции в Испании в августе 2006 года.

В 2002 году Я. Моханти [14] был вычислен объем симметричного идеального октаэдра, а в 2008 году Н. В. Абросимовым, М. Годой-Молина и А. Д. Медных [2] были получены формулы объемов трехмерных сферических многогранников, обладающих нетривиальными симметриями, в частности, m - и $2|m$ -октаэдров. Наконец, в 2011 году Г. А. Байгонакова, М. Годой-Молина и А. Д. Медных [4] вычислили объем гиперболического m -октаэдра в простейшей геометрической ситуации.

Статья представлена в редакцию 15 ноября 2012 года.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта РФФИ № 12-01-31507 мол_а.

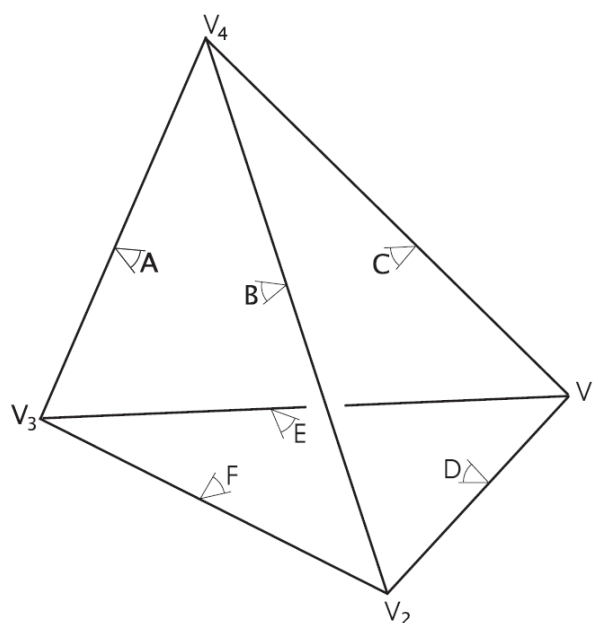


Рис. 1

В настоящей же статье с помощью формулы Деревнина—Медных объема гиперболического тетраэдра получены явные интегральные формулы объема произвольных гиперболических октаэдров, обладающих mmm - и $2|m$ -симметриями.

2. НЕКОТОРЫЕ ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Будем рассматривать задачу вычисления объема многогранника на сфере S^3 и в гиперболическом пространстве H^3 . Кроме того, для простоты будем предполагать, что мы имеем дело с пространствами постоянной кривизны $K = 1$ и $K = -1$ соответственно.

Пусть T — гиперболический тетраэдр, двугранные углы которого суть A, B, C, D, E, F . Кроме того, будем полагать, что A, B, C — двугранные углы при ребрах с общей вершиной, а D, E, F — противоположные им двугранные углы (см. рис. 1).

Обозначим через

$$G = \langle -\cos \alpha_{ij} \rangle_{i,j=1,2,3,4} = \begin{pmatrix} 1 & -\cos A & -\cos B & -\cos F \\ -\cos A & 1 & -\cos C & -\cos E \\ -\cos B & -\cos C & 1 & -\cos D \\ -\cos F & -\cos E & -\cos D & 1 \end{pmatrix}$$

матрицу Грама тетраэдра T . Рассмотрим присоединенную матрицу $H = \langle c_{ij} \rangle_{i,j=1,2,3,4}$, где $c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$, при этом M_{ij} — ij -й минор матрицы G . В следующей теореме приведены некоторые основные соотношения для двугранных углов и длин ребер гиперболического тетраэдра.

Теорема 2.1. Пусть $T = T(A, B, C, D, E, F)$ — гиперболический тетраэдр, двугранные углы которого A, B, C лежат при одной вершине, а D, E, F — противоположные им двугранные углы (см. рис. 1). Кроме того, пусть l_{ij} — длина ребра, соединяющего вершины v_i и v_j . Тогда:

- (a) $\det G < 0$;
 - (b) $c_{ii} > 0$;
 - (c) $\operatorname{ch} l_{ij} = \frac{c_{ij}}{\sqrt{c_{ii}c_{jj}}}$.
- (2.1)

Доказательство теоремы 2.1 приведено, например, в работе [19].

Основным инструментом при вычислении объемов трехмерных неевклидовых многогранников является формула Шлефли для дифференциала объема. Заметим, что Л. Шлефли [17] доказал

эту формулу для сферического n -мерного пространства, а позднее Х. Кнезер [11] обобщил ее и на гиперболический случай. Однако нас будет интересовать лишь ее частный случай, когда $n = 3$.

Теорема 2.2 (дифференциальная формула Шлефли). Пусть P — выпуклый многогранник в пространстве \mathbb{S}^3 или \mathbb{H}^3 . Если многогранник P непрерывно деформируется в пространстве, не изменяя своего комбинаторного строения, а его двугранные углы изменяются дифференцируемым образом, то и объем $V = V(P)$ также изменяется дифференцируемым образом, и его дифференциал выражается по формуле:

$$K dV = \frac{1}{2} \sum_i l_i d\alpha_i, \quad (2.2)$$

где K — кривизна пространства, l_i — длина i -го ребра многогранника, а суммирование ведется по всем ребрам многогранника P . При этом $d\alpha_i$ обозначает дифференциал двугранного угла α_i при i -м ребре.

В дальнейшем нам также понадобится интегральная формула объема гиперболического тетраэдра, предложенная, как было сказано во введении, Д. А. Деревниным и А. Д. Медных в работе [10].

Теорема 2.3 (Д. А. Деревнин, А. Д. Медных, 2004). Пусть $T = T(A, B, C, D, E, F)$ — гиперболический тетраэдр, двугранные углы которого A, B, C лежат при одной вершине, а D, E, F — противоположные им двугранные углы. Тогда объем гиперболического тетраэдра выражается интегралом по отрезку вещественной прямой с вещественнозначной подынтегральной функцией:

$$V(T) = -\frac{1}{4} \int_{Z_2}^{Z_1} \ln \left| \frac{\sin \frac{\xi}{2} \sin \frac{\xi+A+B+D+E}{2} \sin \frac{\xi+A+C+D+F}{2} \sin \frac{\xi+B+C+E+F}{2}}{\cos \frac{\xi+A+B+C}{2} \cos \frac{\xi+A+E+F}{2} \cos \frac{\xi+B+D+F}{2} \cos \frac{\xi+C+D+E}{2}} \right| d\xi, \quad (2.3)$$

где

$$Z_1 = \operatorname{arctg} \frac{k_2}{k_1} - \operatorname{arctg} \frac{k_4}{k_3},$$

$$Z_2 = \operatorname{arctg} \frac{k_2}{k_1} + \operatorname{arctg} \frac{k_4}{k_3},$$

а вещественные числа k_1, k_2, k_3 и k_4 имеют вид:

$$k_1 = -(\cos(A+B+C+D+E+F) + \cos(A+D) + \cos(B+E) + \cos(C+F) +$$

$$+ \cos(D+E+F) + \cos(D+B+C) + \cos(A+E+C) + \cos(A+B+F)),$$

$$k_2 = \sin(A+B+C+D+E+F) + \sin(A+D) + \sin(B+E) + \sin(C+F) +$$

$$+ \sin(D+E+F) + \sin(D+B+C) + \sin(A+E+C) + \sin(A+B+F)),$$

$$k_3 = 2(\sin A \sin D + \sin B \sin E + \sin C \sin F),$$

$$k_4 = \sqrt{k_1^2 + k_2^2 - k_3^2}.$$

Заметим, что доказательство этой формулы основывается на геометрических соотношениях между длинами ребер тетраэдра и его двугранными углами, определенных теоремой синусов-тангенсов. Кроме того, одним из ключевых шагов доказательства является применение дифференциальной формулы Шлефли (2.2). В работе [10] было показано, что из формулы Деревнина—Медных вытекает формула Мураками—Яно [16]. Однако формулу (2.3) можно легко получить и из формулы Мураками—Яно, осуществив тем самым ее обратный вывод.

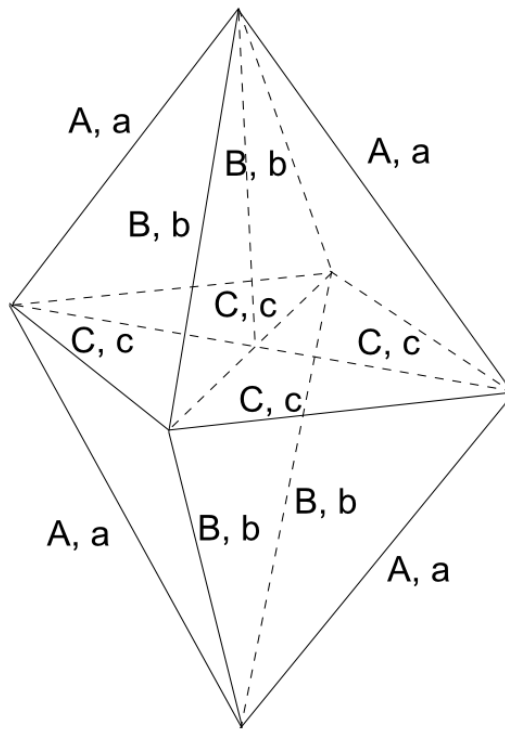


Рис. 2

3. ОБЪЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОКТАЭДРА, ОБЛАДАЮЩЕГО mmm -СИММЕТРИЕЙ

Рассмотрим октаэдр O , обладающий mmm -симметрией, то есть октаэдр, остающийся инвариантным при отражениях от трех взаимно перпендикулярных плоскостей, пересекающих O по его реберным циклам (рис. 2). Заметим, что у такого октаэдра все восемь граней попарно конгруэнтны между собой. Обозначим через a, b, c длины ребер mmm -октаэдра, а через A, B, C — величины его двугранных углов. Таким образом, $O = O(a, b, c, A, B, C)$.

Замечание 3.1. В настоящем разделе мы будем рассматривать гиперболические mmm -октаэдры, у которых все вершины собственные. В самом деле, если предположить существование идеального октаэдра, обладающего mmm -симметрией, то очевидно, что в данном случае $A = B = C = \frac{\pi}{2}$, так как сумма двугранных углов при каждой вершине будет равна 2π (см., например, [3]). В свою очередь, такой октаэдр в силу теоремы Ушиджимы [19] не может быть реализован в пространстве Лобачевского.

Наконец, если гиперболический mmm -октаэдр имеет две или четыре вершины на абсолюте, то посредством очевидных разбиений вычисление его объема сводится к задаче об объеме четырехугольной пирамиды с бесконечно удаленной вершиной, полностью решенной Э.Б. Винбергом в [3].

В евклидовом случае имеет место следующая теорема [5].

Теорема 3.1 (Р. В. Галиулин, С. Н. Михалев, И. Х. Сабитов, 2004). Пусть $O(a, b, c, A, B, C)$ — евклидов октаэдр, обладающий mmm -симметрией. Тогда его объем $V = V(O)$ может быть найден из уравнения

$$9V^2 = 2(a^2 + b^2 - c^2)(a^2 + c^2 - b^2)(b^2 + c^2 - a^2). \quad (3.1)$$

Что касается неевклидовых случаев, то здесь длины ребер mmm -октаэдра могут быть выражены через двугранные углы по правилу синусов-тангенсов (см. [2, 4]).

Теорема 3.2 (правило синусов-тангенсов). Пусть $O = O(a, b, c, A, B, C)$ — неевклидов октаэдр, обладающий mmm -симметрией. Тогда

1. для \mathbb{S}^3 :

$$\frac{\sin A}{\operatorname{tg} a} = \frac{\sin B}{\operatorname{tg} b} = \frac{\sin C}{\operatorname{tg} c} = \bar{T}, \quad (3.2)$$

где \bar{T} — положительное число, удовлетворяющее уравнению

$$\bar{T}^2 + \frac{(1 + \cos A)(1 + \cos B)(1 + \cos C)}{1 + \cos A + \cos B + \cos C} = 0;$$

2. для \mathbb{H}^3 :

$$\frac{\sin A}{\operatorname{th} a} = \frac{\sin B}{\operatorname{th} b} = \frac{\sin C}{\operatorname{th} c} = \bar{T}, \quad (3.3)$$

где \bar{T} — положительное число, удовлетворяющее уравнению

$$\bar{T}^2 - \frac{(1 + \cos A)(1 + \cos B)(1 + \cos C)}{1 + \cos A + \cos B + \cos C} = 0.$$

Таким образом, формулы (3.2) и (3.3) показывают, что неевклидов октаэдр, обладающий mmm -симметрией, однозначно с точностью до изометрии определяется лишь набором двугранных углов, то есть $O = O(A, B, C)$.

Для сферического пространства задача вычисления объема октаэдра, обладающего mmm -симметрией, полностью решена в работе [2]. А именно, имеет место

Теорема 3.3. Пусть $O = O(A, B, C)$ — сферический октаэдр, обладающий mmm -симметрией. Тогда его объем $V = V(O)$ задается следующим выражением:

$$V(O) = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} (\operatorname{arth}(\cos A \cos t) + \operatorname{arth}(\cos B \cos t) + \operatorname{arth}(\cos C \cos t) + \operatorname{arth}(\cos t)) \frac{dt}{\cos t}, \quad (3.4)$$

где $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ — корень уравнения

$$\operatorname{tg}^2 \theta + \frac{(1 + \cos A)(1 + \cos B)(1 + \cos C)}{1 + \cos A + \cos B + \cos C} = 0.$$

Кроме того, θ может быть найдено из правила синусов-тангенсов

$$\frac{\sin A}{\operatorname{tg} a} = \frac{\sin B}{\operatorname{tg} b} = \frac{\sin C}{\operatorname{tg} c} = \operatorname{tg} \theta.$$

Доказательство формулы (3.4) основано на проверке того, что выполнена формула (2.2), что для сферического mmm -октаэдра равносильно проверке системы равенств:

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial A} = 2a, \\ \frac{\partial V}{\partial B} = 2b, \\ \frac{\partial V}{\partial C} = 2c. \end{cases}$$

Нетрудно показать, что объем V является единственным решением данной системы, удовлетворяющим начальному условию $V \rightarrow 0$ при $a = b = c \rightarrow 0$. Полное доказательство теоремы 3.3 приведено в работе [2].

Для вычисления объема гиперболического mmm -октаэдра прежде всего заметим, что его в силу mmm -симметрии можно разбить на 8 попарно конгруэнтных между собой тетраэдров \tilde{T} , двугранные углы которых равны $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}$ (рис. 2.3).

Такое разбиение можно получить, «разрезав» октаэдр вдоль трех плоскостей симметрии. При этом три двугранных угла тетраэдра разбиения в силу попарной ортогональности плоскостей симметрии будут прямыми. В свою очередь, три других двугранных угла будут равны половинам двугранных углов исходного октаэдра $O = O(A, B, C)$, так как отражение относительно плоскости является движением гиперболического пространства \mathbb{H}^3 и, следовательно, сохраняет двугранные углы.

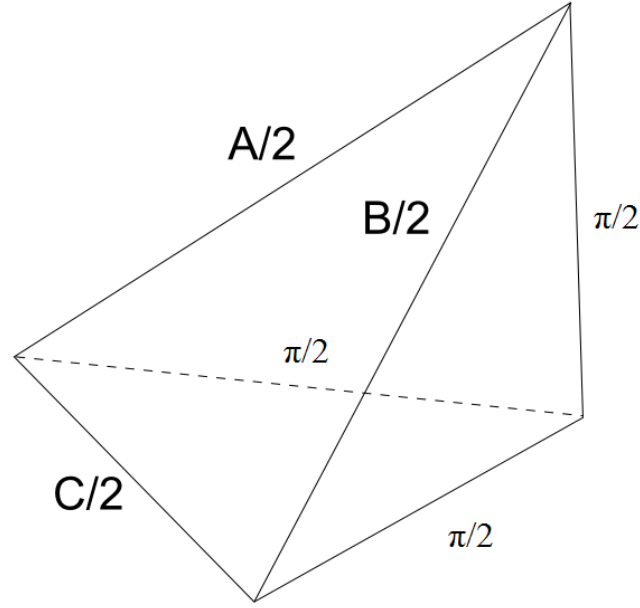


Рис. 3

Таким образом,

$$V(O) = 8V(\tilde{T}). \quad (3.5)$$

В свою очередь, объем тетраэдра \tilde{T} может быть легко вычислен по формуле (2.3). Имеем:

$$V(\tilde{T}) = -\frac{1}{4} \int_{\tilde{Z}_2}^{\tilde{Z}_1} \ln \left| \frac{\sin \frac{\xi}{2} \cos \frac{2\xi+A+B}{4} \cos \frac{2\xi+A+C}{4} \cos \frac{2\xi+B+C}{4}}{\cos \frac{2\xi+A+B+\pi}{4} \cos \frac{2\xi+A+C+\pi}{4} \cos \frac{2\xi+B+C+\pi}{4} \cos \frac{2\xi+3\pi}{4}} \right| d\xi, \quad (3.6)$$

где

$$\tilde{Z}_1 = \operatorname{arctg} \frac{\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1} - \operatorname{arctg} \frac{k_4}{k_3},$$

$$\tilde{Z}_2 = \operatorname{arctg} \frac{\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1} + \operatorname{arctg} \frac{\tilde{k}_4}{k_3},$$

а числа \tilde{k}_1 , \tilde{k}_2 , \tilde{k}_3 и \tilde{k}_4 имеют вид:

$$\tilde{k}_1 = \sqrt{2} \left(\sin \left(\frac{2A+\pi}{4} \right) + \sin \left(\frac{2B+\pi}{4} \right) + \sin \left(\frac{2C+\pi}{4} \right) - \sin \left(\frac{2A+2B+2C+\pi}{4} \right) \right),$$

$$\tilde{k}_2 = -\sqrt{2} \left(\sin \left(\frac{2A-\pi}{4} \right) + \sin \left(\frac{2B-\pi}{4} \right) + \sin \left(\frac{2C-\pi}{4} \right) - \sin \left(\frac{2A+2B+2C-\pi}{4} \right) \right),$$

$$\tilde{k}_3 = 2 \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right),$$

$$\tilde{k}_4 = \sqrt{\tilde{k}_1^2 + \tilde{k}_2^2 - \tilde{k}_3^2}.$$

Таким образом, из формул (3.5) и (3.6) получаем теорему.

Теорема 3.4. Пусть $O = O(A, B, C)$ – гиперболический октаэдр, обладающий mmm-симметрией. Тогда его объем $V = V(O)$ выражается формулой

$$V(O) = -2 \int_{\tilde{Z}_2}^{\tilde{Z}_1} \ln \left| \frac{\sin \frac{\xi}{2} \cos \frac{2\xi+A+B}{4} \cos \frac{2\xi+A+C}{4} \cos \frac{2\xi+B+C}{4}}{\cos \frac{2\xi+A+B+\pi}{4} \cos \frac{2\xi+A+C+\pi}{4} \cos \frac{2\xi+B+C+\pi}{4} \cos \frac{2\xi+3\pi}{4}} \right| d\xi, \quad (3.7)$$

где

$$\tilde{Z}_1 = \operatorname{arctg} \frac{\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1} - \operatorname{arctg} \frac{\tilde{k}_4}{\tilde{k}_3},$$

$$\tilde{Z}_2 = \operatorname{arctg} \frac{\tilde{k}_2}{\tilde{k}_1} + \operatorname{arctg} \frac{\tilde{k}_4}{\tilde{k}_3},$$

а вещественные числа $\tilde{k}_1, \tilde{k}_2, \tilde{k}_3$ и \tilde{k}_4 имеют вид

$$\tilde{k}_1 = \sqrt{2} \left(\sin \left(\frac{2A + \pi}{4} \right) + \sin \left(\frac{2B + \pi}{4} \right) + \sin \left(\frac{2C + \pi}{4} \right) - \sin \left(\frac{2A + 2B + 2C + \pi}{4} \right) \right),$$

$$\tilde{k}_2 = -\sqrt{2} \left(\sin \left(\frac{2A - \pi}{4} \right) + \sin \left(\frac{2B - \pi}{4} \right) + \sin \left(\frac{2C - \pi}{4} \right) - \sin \left(\frac{2A + 2B + 2C - \pi}{4} \right) \right),$$

$$\tilde{k}_3 = 2 \left(\sin \frac{A}{2} + \sin \frac{B}{2} + \sin \frac{C}{2} \right),$$

$$\tilde{k}_4 = \sqrt{\tilde{k}_1^2 + \tilde{k}_2^2 - \tilde{k}_3^2}.$$

Таким образом, (3.7) является интегральной формулой, выражающей объем произвольного гиперболического mmm-октаэдра в терминах определяющих его двугранных углов A, B, C .

Замечание 3.2. К формуле (3.7) можно прийти и обратным путем. А именно, используя результаты теорем 2.1 и 3.2, элементарными вычислениями можно легко установить, что длины ребер двугранных углов $\frac{A}{2}, \frac{B}{2}, \frac{C}{2}$ тетраэдра \tilde{T} равны длинам ребер двугранных углов A, B, C октаэдра O соответственно. Значит, если подходящим образом склеить 8 одинаковых экземпляров \tilde{T} , то получится в точности гиперболический mmm-октаэдр $O(A, B, C)$.

Замечание 3.3. В работе [4] показано, что если в (3.3) $\bar{T} = 1$, то формула объема гиперболического октаэдра, обладающего mmm-симметрией, имеет очень простой вид:

$$V(O) = 2 \left(\int_0^{\operatorname{arth}(\sin A)} \frac{xdx}{\operatorname{ch}x} + \int_0^{\operatorname{arth}(\sin B)} \frac{xdx}{\operatorname{ch}x} - \int_0^{\operatorname{arth}(\sin C)} \frac{xdx}{\operatorname{ch}x} \right)$$

при $a \leq b \leq c$.

В той же работе получены компактные формулы, выражающие двугранные углы гиперболического mmm-октаэдра через длины его ребер, то есть $O = O(a, b, c)$:

$$\frac{\sin A}{\operatorname{th} a} = \frac{\sin B}{\operatorname{th} b} = \frac{\sin C}{\operatorname{th} c} = \frac{2\sqrt{(xy-z)(yz-x)(xz-y)}}{2xyz - x^2 - y^2 - z^2 + 1}, \quad (3.8)$$

где $x = \operatorname{ch} a, y = \operatorname{ch} b, z = \operatorname{ch} c$.

Выразив из формул (3.8) величины двугранных углов A, B, C через длины ребер a, b, c и подставив полученные выражения в (3.7), можно получить интегральную формулу объема произвольного гиперболического октаэдра, обладающего mmm-симметрией, в терминах длин его ребер.

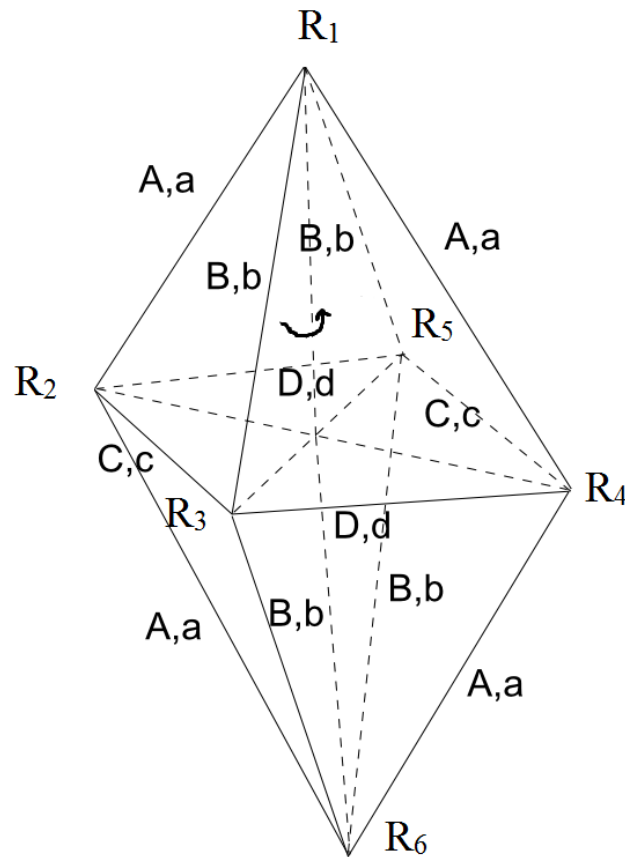


Рис. 4

4. ОБЪЕМ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ОКТАЭДРА, ОБЛАДАЮЩЕГО $2|m$ -СИММЕТРИЕЙ

А теперь рассмотрим гиперболический октаэдр $O = O(a, b, c, d, A, B, C, D)$, допускающий $2|m$ -симметрию, то есть вращение вокруг оси на угол π и отражение относительно перпендикулярной ей плоскости (рис. 3.1).

Замечание 4.1. Как и в разделе 3, мы будем предполагать, что все вершины гиперболического $2|m$ -октаэдра собственные. Действительно, если октаэдр $O = O(a, b, c, d, A, B, C, D)$ имеет вершины на абсолюте, то подходящими разбиениями задачу вычисления его объема можно также свести к задаче об объеме пирамид с бесконечно удаленными вершинами [3].

В евклидовом случае формула объема октаэдра, обладающего $2|m$ -симметрией, была получена в работе [5]. Имеет место

Теорема 4.1 (Р. В. Галиулин, С. Н. Михалев, И. Х. Сабитов, 2004). Пусть $O(a, b, c, A, B, C)$ — евклидов октаэдр, обладающий $2|m$ -симметрией. Тогда его объем $V = V(O)$ может быть найден как положительный корень уравнения

$$9V^2 = (2a^2 + 2b^2 - c^2 - d^2)(a^2 - b^2 + cd)(b^2 - a^2 + cd). \tag{4.1}$$

В свою очередь, объем сферического $2|m$ -октаэдра был вычислен в работе [2]. Попутно в [2] показано, что длины ребер сферического октаэдра, обладающего $2|m$ -симметрией, равно как и $m|m$ -октаэдра (см. раздел 3), могут быть выражены через двугранные углы. Таким образом, $O = O(A, B, C, D)$. Для объема сферического $2|m$ -октаэдра справедлива следующая теорема, доказательство которой приведено в [2].

Теорема 4.2. Пусть $O = O(A, B, C, D)$ — сферический октаэдр, обладающий $2|m$ -симметрией. Тогда его объем $V = V(O)$ задается следующим выражением:

$$V(O) = 2 \int_{\frac{\pi}{2}}^{\theta} \left(\operatorname{arth}(\cos A \cos t) + \operatorname{arth}(\cos B \cos t) + \operatorname{arth}\left(\cos \frac{C+D}{2} \cos t\right) + \operatorname{arth}\left(\cos \frac{C-D}{2} \cos t\right) \right) \frac{dt}{\cos t}, \quad (4.2)$$

где $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ — корень уравнения

$$\cos^2 \theta + \frac{\cos A + \cos B + \cos \frac{C+D}{2} + \cos \frac{C-D}{2}}{\cos A \cos B \left(\cos \frac{C+D}{2} + \cos \frac{C-D}{2} \right) + (\cos A + \cos B) \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}} = 0.$$

Кроме того, θ может быть найдено из правила синусов-тангенсов для сферического $2|m$ -октаэдра

$$\frac{\sin A}{\operatorname{tga}} = \frac{\sin B}{\operatorname{tgb}} = \frac{\sin \frac{C+D}{2}}{\operatorname{tg} \frac{c+d}{2}} = \frac{\sin \frac{C-D}{2}}{\operatorname{tg} \frac{c-d}{2}} = \operatorname{tg} \theta.$$

Для вычисления объема $2|m$ -октаэдра $O = O(a, b, c, d, A, B, C, D)$ в гиперболическом случае разобьем O в силу $2|m$ -симметрии на две конгруэнтные пирамиды $R_1 R_2 R_3 R_4 R_5$ и $R_6 R_2 R_3 R_4 R_5$, «разрезав» исходный многогранник плоскостью симметрии $R_2 R_3 R_4 R_5$.

В свою очередь, каждую из пирамид можно разбить на два равных тетраэдра, проведя диагональ основания пирамиды. Например, объем пирамиды $R_1 R_2 R_3 R_4 R_5$ можно представить в виде суммы объемов тетраэдров $R_1 R_2 R_3 R_4$ и $R_1 R_2 R_4 R_5$, которые, как видно из рис. 5, конгруэнтны между собой.

Следовательно,

$$V(O) = 4V(R_1 R_2 R_3 R_4). \quad (4.3)$$

Таким образом, вычисление объема октаэдра O сводится к нахождению двугранного угла x при ребре $R_1 R_2$.

Для нахождения двугранного угла x будем использовать технику, которая применялась еще Н. И. Лобачевским в [6], а позднее была использована в работах [2, 4]. Обозначим плоский угол при вершине R_2 грани $R_1 R_2 R_3$ через α и рассмотрим пересечение тетраэдра $R_1 R_2 R_4 R_5$ со сферой достаточно малого радиуса с центром в вершине R_2 . Как известно, в малом пространстве Лобачевского устроено так же, как и евклидово [6]. Поэтому, не нарушая общности, предположим, что полученное пересечение — сферический прямоугольный треугольник с гипотенузой α и внутренними непрямыми углами $\frac{C}{2}$ и x (рис. 6).

Применяя формулу котангенсов для данного сферического прямоугольного треугольника, получаем

$$\cos \alpha = \operatorname{ctg} \frac{C}{2} \operatorname{ctg} x,$$

откуда

$$x = \operatorname{arcctg} \frac{\cos \alpha}{\operatorname{ctg} \frac{C}{2}}. \quad (4.4)$$

Наконец, чтобы выразить $\cos \alpha$ через двугранные углы исходного октаэдра $O = O(a, b, c, d, A, B, C, D)$, рассмотрим пересечение тетраэдра $R_1 R_2 R_3 R_5$ со сферой бесконечно малого радиуса. Предварительно обозначив плоский угол при вершине R_2 грани $R_1 R_2 R_5$ через β , получим, что рассматриваемое пересечение представляет собой сферический треугольник с углами $\frac{C}{2}$, $\frac{D}{2}$, A и длинами сторон α и β , образующих между собой угол A (рис. 7).

Применим к полученному сферическому треугольнику вторую теорему косинусов. Имеем:

$$\cos \frac{D}{2} = -\cos \frac{C}{2} \cos A + \sin \frac{C}{2} \sin A \cos \alpha,$$

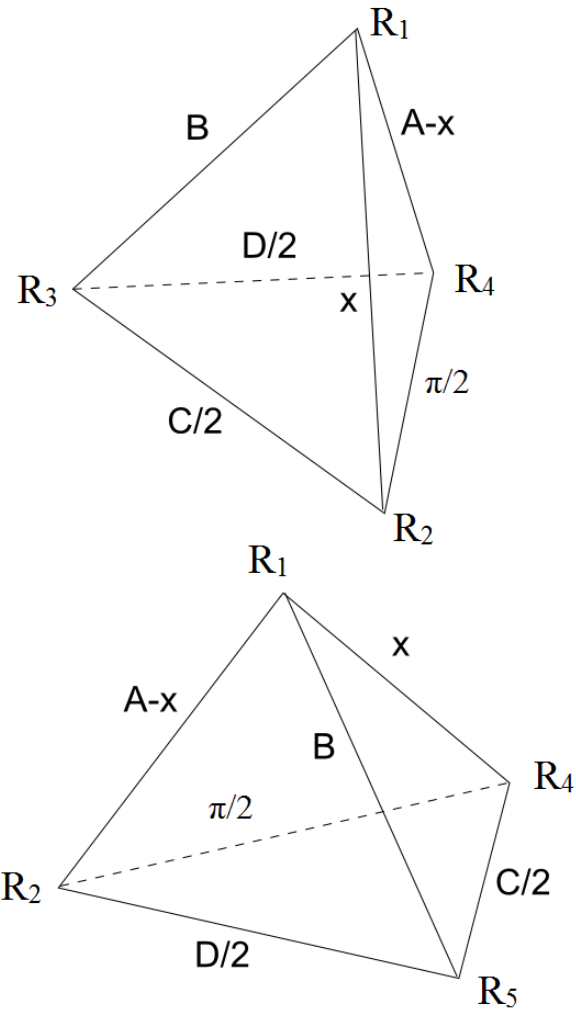


Рис. 5

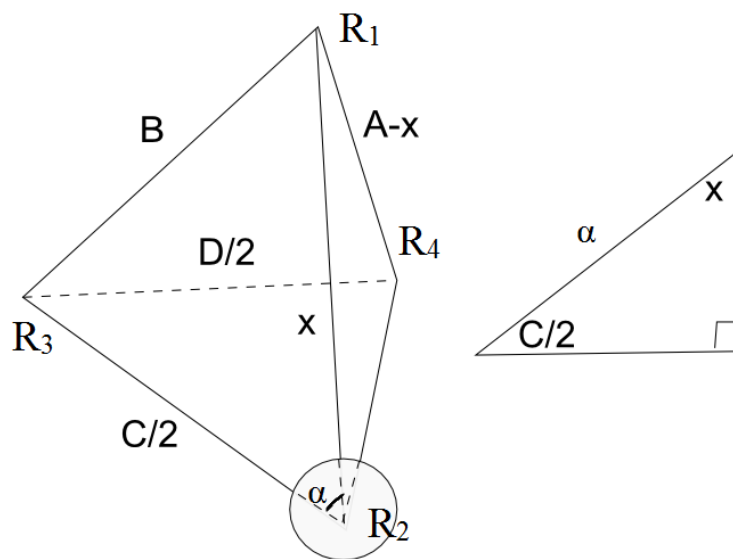


Рис. 6

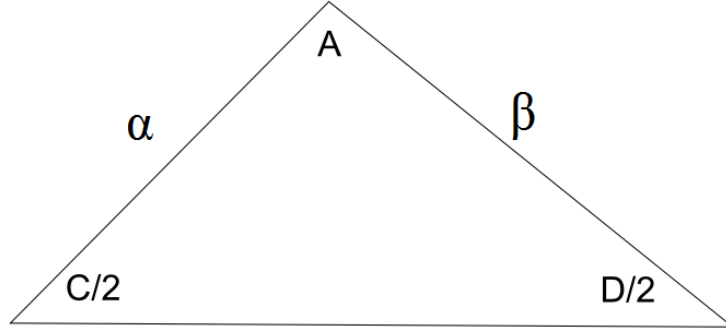


Рис. 7

откуда

$$\cos \alpha = \frac{\cos \frac{D}{2} + \cos \frac{C}{2} \cos A}{\sin \frac{C}{2} \sin A}. \quad (4.5)$$

Следовательно,

$$x = \operatorname{arccctg} \frac{\cos \frac{D}{2} + \cos \frac{C}{2} \cos A}{\cos \frac{C}{2} \sin A}. \quad (4.6)$$

Замечание 4.2. Формула (4.6) показывает, что двугранные углы тетраэдров разбиения могут быть выражены через двугранные углы исходного октаэдра O . Поэтому в силу пункта (с) теоремы 2.1 длины ребер октаэдра O являются функциями от его двугранных углов. Следовательно, $O = O(A, B, C, D)$.

Таким образом, в силу формулы Деревнина—Медных (2.3), объем тетраэдра $R_1 R_2 R_3 R_4$ равен:

$$V(R_1 R_2 R_3 R_4) = -\frac{1}{4} \int_{z_2}^{z_1} \ln \left| \frac{\sin \frac{\xi}{2} \sin \frac{2\xi+2B+D+2\lambda+\pi}{4} \sin \frac{2\xi+2A+2B+C-2\lambda+\pi}{4} \sin \frac{2\xi+2A+C+D}{4}}{\cos \frac{\xi+A+B}{2} \cos \frac{2\xi+2B+C+D}{4} \cos \frac{2\xi+C+2\lambda+\pi}{4} \cos \frac{2\xi+2A+D-2\lambda+\pi}{4}} \right| d\xi, \quad (4.7)$$

где

$$\begin{aligned} z_1 &= \operatorname{arctg} \frac{p_2}{p_1} - \operatorname{arctg} \frac{p_4}{p_3}, \\ z_2 &= \operatorname{arctg} \frac{p_2}{p_1} + \operatorname{arctg} \frac{p_4}{p_3}, \\ \lambda &= \operatorname{arccctg} \frac{\cos \frac{D}{2} + \cos \frac{C}{2} \cos A}{\cos \frac{C}{2} \sin A}, \end{aligned}$$

а вещественные числа p_1, p_2, p_3 и p_4 имеют вид:

$$\begin{aligned} p_1 &= \sin A + \sin B + \sin \left(\frac{2A+2B+C+D}{2} \right) + \sin \left(\frac{C+D}{2} \right) - \\ &\quad - \cos \left(\frac{D+2\lambda}{2} \right) - \cos \left(\frac{2A+C-2\lambda}{2} \right) - \cos \left(\frac{2A+2B+D-2\lambda}{2} \right) - \cos \left(\frac{2B+C+2\lambda}{2} \right), \\ p_2 &= \sin \left(\frac{2A+C-2\lambda}{2} \right) + \sin \left(\frac{D+2\lambda}{2} \right) + \sin \left(\frac{2B+C+2\lambda}{2} \right) + \sin \left(\frac{2A+2B+D-2\lambda}{2} \right) + \\ &\quad + \cos \left(\frac{2A+2B+C+D}{2} \right) + \cos \left(\frac{C+D}{2} \right) + \cos A + \cos B, \\ p_3 &= 2 \left(\sin B + \sin \frac{D}{2} \sin \lambda + \sin \frac{C}{2} \sin(A-\lambda) \right), \\ p_4 &= \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - p_3^2}. \end{aligned}$$

Окончательно, подставив (4.7) в (4.3), получим следующую теорему.

Теорема 4.3. Пусть $O = O(A, B, C, D)$ — гиперболический октаэдр, обладающий $2|m$ -симметрией. Тогда его объем $V = V(O)$ выражается интегралом по отрезку вещественной прямой с вещественнозначной подынтегральной функцией:

$$V(O) = \int_{z_1}^{z_2} \ln \left| \frac{\sin \frac{\xi}{2} \sin \frac{2\xi+2B+D+2\lambda+\pi}{4} \sin \frac{2\xi+2A+2B+C-2\lambda+\pi}{4} \sin \frac{2\xi+2A+C+D}{4}}{\cos \frac{\xi+A+B}{2} \cos \frac{2\xi+2B+C+D}{4} \cos \frac{2\xi+C+2\lambda+\pi}{4} \cos \frac{2\xi+2A+D-2\lambda+\pi}{4}} \right| d\xi, \quad (4.8)$$

где

$$\begin{aligned} z_1 &= \operatorname{arctg} \frac{p_2}{p_1} - \operatorname{arctg} \frac{p_4}{p_3}, \\ z_2 &= \operatorname{arctg} \frac{p_2}{p_1} + \operatorname{arctg} \frac{p_4}{p_3}, \\ \lambda &= \operatorname{arccctg} \frac{\cos \frac{D}{2} + \cos \frac{C}{2} \cos A}{\cos \frac{C}{2} \sin A}, \end{aligned}$$

а вещественные числа p_1, p_2, p_3 и p_4 имеют вид

$$\begin{aligned} p_1 &= \sin A + \sin B + \sin \left(\frac{2A + 2B + C + D}{2} \right) + \sin \left(\frac{C + D}{2} \right) - \\ &- \cos \left(\frac{D + 2\lambda}{2} \right) - \cos \left(\frac{2A + C - 2\lambda}{2} \right) - \cos \left(\frac{2A + 2B + D - 2\lambda}{2} \right) - \cos \left(\frac{2B + C + 2\lambda}{2} \right), \\ p_2 &= \sin \left(\frac{2A + C - 2\lambda}{2} \right) + \sin \left(\frac{D + 2\lambda}{2} \right) + \sin \left(\frac{2B + C + 2\lambda}{2} \right) + \sin \left(\frac{2A + 2B + D - 2\lambda}{2} \right) + \\ &+ \cos \left(\frac{2A + 2B + C + D}{2} \right) + \cos \left(\frac{C + D}{2} \right) + \cos A + \cos B, \\ p_3 &= 2 \left(\sin B + \sin \frac{D}{2} \sin \lambda + \sin \frac{C}{2} \sin(A - \lambda) \right), \\ p_4 &= \sqrt{p_1^2 + p_2^2 - p_3^2}. \end{aligned}$$

Таким образом, формула (4.8) является интегральной формулой, выражающей объем произвольного гиперболического октаэдра, обладающего $2|m$ -симметрией, через величины двугранных углов.

Замечание 4.3. В работе [15] приведены компактные формулы, выражающие двугранные углы произвольного тетраэдра через длины ребер. Поэтому объем тетраэдра $R_1 R_2 R_3 R_4$, а значит и $2|m$ -октаэдра O , можно при желании выразить через длины ребер a, b, c, d . Значит, $O = O(a, b, c, d)$.

Автор благодарит своего научного руководителя В.П. Лексина за полезные советы и ценные замечания при подготовке статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Абросимов Н.В. Об объемах многогранников в пространстве постоянной кривизны// Вестн. Кемеров. гос. ун-та. — 2011. — 3/1 (47). — С. 7–13.
2. Абросимов Н.В., Годой-Молина М., Медных А.Д. Об объеме сферического октаэдра с симметриями// Соврем. мат. и ее прилож. — 2008. — 60. — С. 3–12.
3. Алексеевский Д.В., Винберг Э.Б., Солодовников А.С. Геометрия пространств постоянной кривизны// Итоги науки и техники. Совр. пробл. мат. Фундам. направления. — 1988. — 29. — С. 1–146.
4. Байгонакова Г.А., Годой-Молина М., Медных А.Д. О геометрических свойствах гиперболического октаэдра, обладающего mm -симметрией// Вестн. Кемеров. гос. ун-та. — 2011. — 3/1 (47). — С. 13–18.
5. Галиулин Р.В., Михалев С.Н., Сабитов И.Х. Некоторые приложения формулы для объема октаэдра// Мат. заметки. — 2004. — 1 (76). — С. 27–43.
6. Лобачевский Н.И. Воображаемая геометрия. Полное собр. соч. Т. 3. — М.-Л.:1949.
7. Сабитов И.Х. Объемы многогранников. — М.: МЦНМО, 2009.
8. Bolyai J. Appendix. The theory of space. — Janos Bolyai (F. Kerteszi ed.). — Budapest, 1987.
9. Cho Yu., Kim H. On the volume formula for hyperbolic tetrahedra// Discrete Comput. Geom. — 1999. — 22. — С. 347–366.

10. *Derevnin D. A., Mednykh A. D.* A formula for the volume of hyperbolic tetrahedron// *Rus. Math. Surv.* — 2005. — 60, № 2. — С. 346.
11. *Kneser H.* Der Simplexinhalt in der nichteuklidischen Geometrie// *Deutsche Math.* — 1936. — 1. — С. 337–340.
12. *Leibon G.* The symmetries of hyperbolic volume. — Preprint, 2002.
13. *Milnor J.* Hyperbolic geometry: the first 150 years// *Bull. Amer. Math. Soc.* — 1982. — 6, № 1. — С. 307–332.
14. *Mohanty Y.* The Regge symmetry is a scissors congruence in hyperbolic space// *Algebr. Geom. Topol.* — 2003. — 3. — С. 1–31.
15. *Murakami J., Ushijima A.* A volume formula for hyperbolic tetrahedra in terms of edge lengths// *J. Geom.* — 2005. — 83, № 1-2. — С. 153–163.
16. *Murakami J., Yano M.* On the volume of a hyperbolic and spherical tetrahedron// *Comm. Anal. Geom.* — 2005. — 13. — С. 379–400.
17. *Schläfli L.* Theorie der vielfachen Kontinuität. In: *Gesammelte mathematische Abhandlungen.* — Basel: Birkhäuser, 1950.
18. *Sforza G.* Spazi metrico-proiettivi// *Ric. Esten. Different. Ser.* — 1906. — 8, № 3. — С. 3–66.
19. *Ushijima A.* A volume formula for generalized hyperbolic tetrahedra// *Non-Euclid. Geom.* — 2006. — 581. — С. 249–265.

В. А. Краснов

Московский государственный областной социально-гуманитарный институт, Коломна

Российский университет дружбы народов, Москва

E-mail: vladimir.krasnov3107@gmail.com



О КОМБИНАТОРИКЕ РАЗВЕДЕНИЙ

© 2013 г. М. В. КРИСМАН

Аннотация. Многие инварианты узлов строятся по разведениям узла в его перекрестках. Для их вычисления необходимо знать, на сколько компонент связности распадается диаграмма узла после разведения. В настоящей работе демонстрируется, как исследовать этот вопрос, используя модификацию теоремы Зулли вместе с модификацией спектральной теории графов.

1. ВВЕДЕНИЕ

В работе [16] Зулли предложил прекрасный метод подсчета числа кривых в некотором состоянии. Под *состоянием* мы понимаем выбор *ориентированного* или *неориентированного* разведения в каждом перекрестке ориентированной диаграммы виртуального узла.

Неориентированное: $d_i = 1$	
Ориентированное: $d_i = 0$	
$\Delta = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$	

Используя это соглашение (которое отличается от принятого в [16]), принцип подсчета Зулли можно описать следующим образом. Пусть D — гауссова диаграмма виртуального узла K , а G — граф пересечений диаграммы D . Пусть A — матрица смежности графа пересечений (см. рис. 1). Занумеруем перекрестки произвольным образом номерами от 1 до n и положим $d_i = 0$, если i -й перекресток разведен ориентированно, и $d_i = 1$ в противном случае. Пусть $\Delta = \text{diag}(d_1, \dots, d_n)$ — диагональная матрица с этими значениями на диагонали. Для всякого состояния S обозначим число кривых в узле K после разведения через $\#_D(S)$.

Принцип подсчета петель Зулли (ПППЗ): число кривых в разведении $S = (d_1, \dots, d_n)$ равно $\#_D(S) = \text{nullity}_{\mathbb{Z}_2}(A + \Delta) + 1$.

В настоящей статье мы вводим *уточненный принцип подсчета петель* (УППП). Целью уточнения является упрощения процесса вычислений комбинаторных инвариантов узлов. Этот принцип особенно удобен для применения к бесконечным семействам узлов. Подобные семейства часто возникают в теории виртуальных узлов [5, 6].

Хотя принцип Зулли работает для всякого меченого графа пересечений, уточненный принцип подсчета петель требует введения *линейно упорядоченных графов*. Линейно упорядоченный граф — это простой граф, вершины которого пронумерованы числами от 1 до n , а на ребрах поставлены стрелки в направлении от вершины с меньшим номером к вершине с большим номером: $u \rightarrow v$, если $u < v$. Поскольку гауссова диаграмма с отмеченной точкой дает канонический порядок стрелок, ее граф пересечения G превращается в линейно упорядоченный граф \vec{G} относительно этого порядка. Обозначим через $\vec{A}_{\vec{G}}$ *косую матрицу смежности* графа \vec{G} . В силу нашего принципа ориентации ребер графа элементы косой матрицы смежности, находящиеся над главной диагональю, неотрицательны, а находящиеся ниже диагонали — неположительны. На самой диагонали находятся только нули.

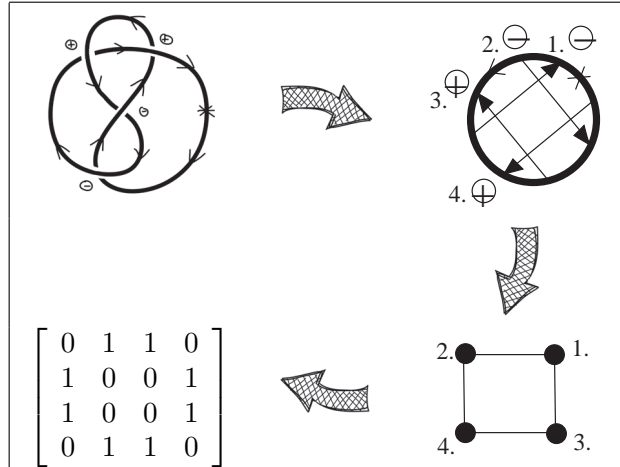


Рис. 1. Узел и его гауссова диаграмма, граф пересечений и матрица смежности.

УППП применяется также к разведению в произвольном наборе перекрестков. Пусть S_o — множество ориентированных разведений, S_u — множество неориентированных разведений, а S_\emptyset — множество неразведенных перекрестков. Мы будем называть тройку $S = (S_o, S_u, S_\emptyset)$ *частичным разведением* виртуального узла. Если D — гауссова диаграмма диаграммы виртуального узла, обозначим через D_\emptyset диаграмму, получающуюся из D удалением всех стрелок, соответствующих элементам множества S_\emptyset . Пусть O — разведение, соответствующее выбору ориентированного разведения для каждой стрелки гауссовой диаграммы.

Для произвольной квадратной матрицы A обозначим через $m_0(A)$ кратность нуля как корня характеристического многочлена для A . Тогда уточненный принцип подсчета петель может быть сформулирован следующим образом:

Уточненный принцип подсчета петель (УППП): Пусть $S = (S_o, S_u, S_\emptyset)$ — *частичное состояние*. Пусть \vec{G}_\emptyset — *линейно упорядоченный граф* D_\emptyset .

- (A) Если $S_u = \emptyset$, $\#_D(S) = m_0(\vec{A}_{\vec{G}_\emptyset}) + 1$.
- (B) Если $j \in S_u \neq \emptyset$, то существуют гауссовы диаграммы $D_j^f(S)$ и $D_j^s(S)$, называемые *двулистными накрытиями* D , такие что $\#_{D_j^f(S)}(O) = 2\#_D(S) = \#_{D_j^s(S)}(O)$ (см. раздел 2.4).
- (C) $m_0(\vec{A}_{\vec{G}_\emptyset})$ может быть вычислена непосредственно через более простые линейно-упорядоченные графы с известными характеристическими полиномами.

Часть (A) УППП доказывается аналогично ПППЗ. В данном случае основное различие состоит в вычислениях гомологий над \mathbb{Q} вместо \mathbb{Z}_2 . Часть (B) УППП означает, что всякая задача подсчета числа петель может быть сведена к подсчету петель в полностью ориентированном состоянии. Для этого мы строим гауссову диаграмму по топологическому двулистному накрытию неориентируемой поверхности $\Sigma_D(S)$, ассоциированной с D и S (см. раздел 2.4). Часть (C) доказывается при помощи *спектральной теории графов* [7, 8], модифицированной для случая линейно упорядоченных графов. В самом деле, мы демонстрируем, как вычислять характеристические полиномы линейно упорядоченных графов, используя зеркальные образы, джойны, слияние и добавление ребер. Результаты несколько отличаются от стандартного симметричного случая. Хочется надеяться, что УППП будет рассматриваться и как интересное приложение спектральной теории графов, и как удобный инструмент для специалистов в комбинаторной теории узлов.

Остановимся на этом месте и обсудим, почему УППП необходим. В [16] Зулли ввел ПППЗ для вычисления полинома Джонса узла. Помимо полинома Джонса существует множество инвариантов виртуальных узлов, вычисление которых требует подсчета числа петель. В работе [3] показано, что существует формула вычисления полинома Конвея через гауссовы диаграммы. Используемые в формуле диаграммы могут быть описаны следующим образом: это *восходящие* диаграммы (первое прохождение по всякой стрелке происходит в направлении стрелки), которые после применения

ориентированного разведения для всех стрелок имеют одну компоненту. В работе [4] этот инвариант также распространяется на случай длинных виртуальных узлов. В работе [6] показано, что это расширение на класс длинных виртуальных узлов может быть использовано для определения бесконечного множества эквивалентных расширений полинома Конвея на длинные виртуальные узлы, удовлетворяющих одним и тем же скейн-соотношениям. Кроме этого, подсчет числа петель позволяет обобщить многие другие инварианты узлов (см. [1]). Таким образом, УППП полезен для упрощения вычисления этих новых инвариантов, особенно для бесконечных семейств узлов (таких как торические узлы, узлы на кренделе, скрученные последовательности, дробные скрученные последовательности и другие).

Автор вдохновлялся впечатляющими результатами Зулли и Тралди [15], Тралди [14], Мантурова и Ильютко [9], а также Ильютко, Мантурова и Никонова [10]. В этих работах \mathbb{Z}_2 -дефект матрицы смежности использован для распространения идей теории узлов на теорию графов. Зулли и Тралди предложили идею графов переплетения петель, в то время как Ильютко, Мантуров и Никонов развили понятие граф-зацеплений. Есть надежда, что представленные здесь приемы приведут к новым открытиям в области граф-зацеплений и графов переплетения петель.

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 мы определим понятие линейно упорядоченных графов и установим справедливость частей (A) и (B) УППП. В разделе 3 мы разовьем вариант спектральной теории графов, применимый к линейно упорядоченным графам, и тем самым установим часть (C) УППП. В разделе 4 мы проиллюстрируем принцип подсчета петель вычислением однокомпонентных поддиаграмм узлов на кренделе для различных видов разведений. Мы заключим раздел 5 описанием некоторых открытых проблем и задач.

Благодарности. Автор крайне благодарен анонимному рецензенту, нашедшему ошибку в утверждении теоремы 5. Автор также благодарен К. Фроману, А. Лоуренсу и М. Саито за интерес, проявленный к данной работе.

2. ПОДСЧЕТ ПЕТЕЛЬ ПО ГАУССОВОЙ ДИАГРАММЕ

2.1. Гауссовы диаграммы, графы пересечения и линейно упорядоченные графы. Мы предполагаем, что читатель знаком с понятием диаграммы виртуального узла (см., например, [11]). Всякую виртуальную диаграмму можно рассмотреть как иммерсию $S^1 \rightarrow \mathbb{R}^2$, где двойные точки представлены либо классическими перекрестками (с локальной ориентацией \oplus или \ominus), либо виртуальными. Остальные точки являются регулярными точками иммерсии. Отметим некоторую регулярную точку и будем в дальнейшем полагать ее фиксированной; обозначим ее через $*$. Гауссова диаграмма задается соединением всех прообразов в S^1 каждой классической двойной точки отрезком на плоскости \mathbb{R}^2 . Эти отрезки ориентируются в направлении от дуги, образующей переход, к дуге, образующей проход. Каждую стрелку мы также снабдим меткой, отвечающей локальной ориентации перекрестка: \oplus или \ominus . Прообраз отмеченной точки также будет обозначаться через $*$. Описанная конструкция проиллюстрирована рис. 2.

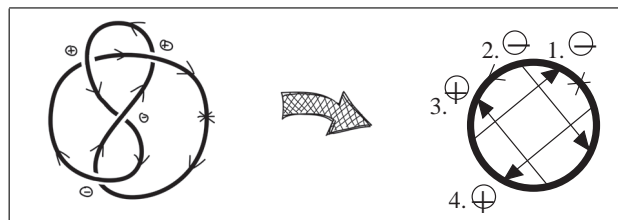


Рис. 2. Виртуальный узел с отмеченной точкой и его гауссова диаграмма.

Для подсчета числа петель направление стрелок и знаки на них неважны; единственная информация, которую необходимо знать — характер каждого разведения: ориентированное или неориентированное. Таким образом, мы будем рассматривать только хордовую диаграмму, соответствующую данной гауссовой диаграмме. Обозначим через $\mathcal{D}(S^1, *)$ набор хордовых диаграмм на S^1 с отмеченной точкой $*$.

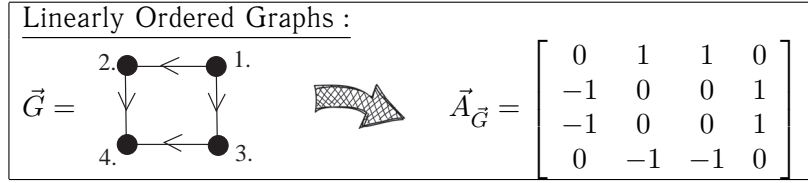


Рис. 3. Линейно упорядоченный граф и косая матрица смежности узла на рис. 1.

Если $D \in \mathcal{D}(S^1, *)$, то хорды D имеют *канонический порядок*. Хорда, конечная точка которой встречается первой при обходе окружности против часовой стрелки, начиная от отмеченной точки, получает номер 1. Удалим эту хорду из диаграммы. Теперь хорду, конец которой встретится первым при обходе полученной диаграммы, обозначим номером 2. Будем продолжать процесс до тех пор, пока каждая хорда не получит свой номер.

Для всякой хорды $D \in \mathcal{D}(S^1, *)$ определим граф пересечений G_D следующим образом (см. [13]). Вершины G_D находятся во взаимно-однозначном соответствии с хордами D . Две вершины u, v соединяются ребром, если соответствующие им хорды на гауссовой диаграмме пересекаются. Каждая вершина графа G_D снабжается меткой, совпадающей с номером соответствующей хорды согласно каноническому порядку. Обозначим через $l(v)$ метку в вершине $v \in V(G_D)$. Пусть i — хорда в диаграмме $D \in \mathcal{D}(S^1, *)$. Тогда назовем *степенью* i степень соответствующей вершины в G_D .

Граф пересечений может быть направлен в соответствии с каноническим порядком. Если $u, v \in V(G_D)$ и $u \sim v$, ребро получает направление к v , если $l(u) < l(v)$, и к u в противном случае. Предполагается, что все графы пересечения G_D диаграммы $D \in \mathcal{D}(S^1, *)$ снабжены метками и направлены в соответствии с каноническим порядком. Иллюстрация для случая виртуального узла, изображенного на рис. 1, дана на рис. 3.

Многие из полученных нами результатов справедливы не только для направленных графов пересечений хордовых диаграмм, но и для класса направленных графов, который мы будем называть классом *линейно упорядоченных графов*: пусть G — граф с n вершинами, помеченными числами $1, \dots, n$. Если v — вершина графа G , обозначим через $l(v)$ метку на ней. Нанесем на ребра графа G стрелки таким образом, что для пары вершин u, v $u \rightarrow v$, если и только если $l(u) < l(v)$. Граф с направленными таким образом ребрами будем называть *линейно упорядоченным*. Линейно упорядоченный граф будет обозначаться \vec{G} .

Косая матрица смежности графа \vec{G} определяется как матрица смежности направленного графа \vec{G} . В частности, столбцы матрицы упорядочены в соответствии с метками на вершинах. Элемент a_{ij} матрицы равен 1, если $i \sim j$ и $l(i) < l(j)$, 0, если $i \not\sim j$, и -1 , если $i \sim j$ и $l(i) > l(j)$. По построению все элементы косой матрицы смежности, лежащие над главной диагональю, неотрицательны, а все элементы под диагональю — неположительны (ср. с [8]). Косая матрица смежности будет обозначаться $\vec{A}_{\vec{G}}$. Эта конструкция проиллюстрирована на рис. 3. Характеристический полином $\det(xI - \vec{A}_{\vec{G}})$ матрицы $\vec{A}_{\vec{G}}$ будет обозначаться через $\vec{P}_{\vec{G}}(x)$.

2.2. Состояния, разведения и ленты. *Частичное состояние* S виртуального узла K — это выбор в каждом перекрестке ориентированного разведения, неориентированного или отсутствия разведения. Пусть S_o — множество перекрестков K , в которых выбрано ориентированное разведение, S_u — множество перекрестков с неориентированными разведениями, а S_\emptyset — множество перекрестков, в которых не выбрано разведение. Будем писать $S = (S_o, S_u, S_\emptyset)$. Будем через O обозначать такое частичное состояние, в котором во всех перекрестках выбрано ориентированное разведение. Под *полуориентированным разведением* будем понимать всякое частичное разведение с $S_u = \emptyset$.

Пусть теперь $D \in \mathcal{D}(S^1, *)$. Частичное состояние $S = (S_o, S_u, S_\emptyset)$ — это разбиение хорд диаграммы D на три набора S_o, S_u, S_\emptyset , среди которых не более двух пустых. *Частичное разведение* — это компактная поверхность $\Sigma_D(S)$, определяемая следующим образом. Прежде всего, цикл в D рассматривается как граница диска D^2 . Пусть D_\emptyset — диаграмма, получаемая из D удалением всех хорд из множества S_\emptyset . Для каждой хорды $i \in S_o$ приклеим незакрученную ленту к концам хорды i в D_\emptyset , как показано на левой части рис. 4. Для каждой хорды $i \in S_u$ приклеим ленту, закрученную на пол-оборота, как показано на правой части рис. 4. Полученная поверхность и будет обозначаться $\Sigma_D(S)$ (см. рис. 5).

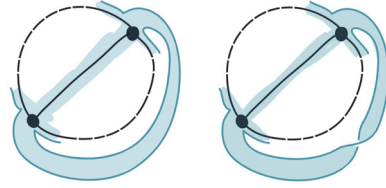


Рис. 4. Приклеивание незакрученной ленты (слева) и закрученной на пол-оборота ленты (справа).

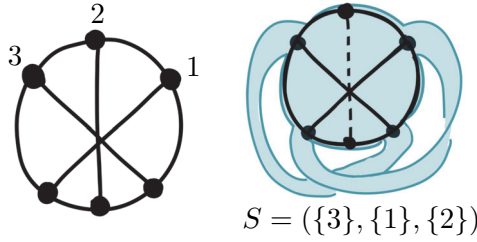


Рис. 5. Хордовая диаграмма D (слева) и частичное разведение $\Sigma_D(S)$ (справа).

Определение 1. Число компонент границы поверхности $\Sigma_D(S)$ будет обозначаться через $\#_D(S)$. Число замкнутых кривых в частичном разведении виртуального узла K будет обозначаться через $\#(K|S)$.

Лемма 1. Пусть S — частичное состояние диаграммы виртуального узла K с отмеченной точкой. Пусть D — хордовая диаграмма гауссовой диаграммы узла K с каноническими метками (тем самым частичное разведение S порождает разбиение хорд D на множества). Тогда $\#(K|S) = \#_D(S)$.

Доказательство. Заметим, что ориентированное разведение перекрестка порождает двухкомпонентное зацепление. Неориентированное разведение дает узел. Заметим также, что превращение классического перекрестка узла K в виртуальный эквивалентно удалению соответствующей хорды из диаграммы D . Процедура приклейки лент, описанная в определении поверхности $\Sigma_D(S)$, в точности моделирует этот процесс. Таким образом, число компонент границы $\Sigma_D(S)$ в точности совпадает с числом вложенных кривых в частичном состоянии. \square

Для дальнейшего нам будет удобно присвоить обозначения концам каждой хорды и углам каждой ленты. Конец хорды i , встреченный первым при обходе против часовой стрелки, начиная с отмеченной точки, будет обозначаться a_i . Другой конец той же хорды будет обозначаться b_i . Два угла содержащей a_i стороны i -й ленты получают обозначения a'_i и a''_i , где a'_i предшествует a_i при обходе против часовой стрелки, а a''_i — следует за a_i . Аналогично, два угла противоположной стороны ленты получают обозначения b'_i и b''_i . Данная конструкция продемонстрирована на рис. 6. Заметим, что введенная система обозначений не зависит от выбора разведения.

2.3. Полуориентированные разведения: теорема Зулли над \mathbb{Q} . В этом разделе мы докажем справедливость части (A) УППП. Сначала мы докажем, что число кривых в частичном состоянии может быть вычислено через рациональный дефект косоj матрицы смежности. Затем мы покажем, что эта величина равна кратности нуля как корня характеристического многочлена косоj матрицы смежности.

Теорема 1 (Теорема Зулли над \mathbb{Q}). Пусть $D \in \mathcal{D}(S^1, *)$, и пусть $S = (S_o, S_u, S_\emptyset)$ — частичное состояние диаграммы D , причем $S_u = \emptyset$. Пусть далее \vec{G}_\emptyset — канонический линейно упорядоченный граф D_\emptyset . Тогда

$$\#_D(S) = \text{nullity}_{\mathbb{Q}}(\vec{A}_{\vec{G}_\emptyset}^t) + 1 = \text{nullity}_{\mathbb{Q}}(\vec{A}_{\vec{G}_\emptyset}) = \dim H_1(\partial\Sigma_D(S), \mathbb{Q}).$$

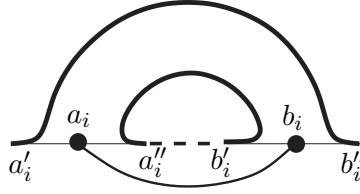
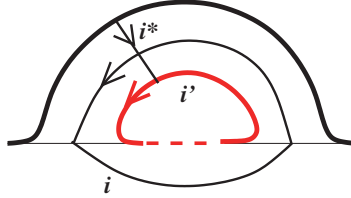


Рис. 6. Обозначение концов хорды и углов соответствующей ленты.

Рис. 7. 1-циклы i , i' и i^* .

Доказательство. Пусть n — число хорд в диаграмме D_\emptyset . Определим

$$j: (\Sigma_D(S), \emptyset) \rightarrow (\Sigma_D(S), \partial\Sigma_D(S))$$

— вложение пар. Согласно [16] достаточно показать, что косая матрица смежности $\vec{A}_{\vec{G}_\emptyset}$ представляет отображение

$$\begin{aligned} j_*: H_1(\Sigma_D(S); \mathbb{Q}) &\rightarrow H_1(\Sigma_D(S), \partial\Sigma_D(S); \mathbb{Q}) \cong \\ &\cong H^1(\Sigma_D(S); \mathbb{Q}) \quad (\text{двойственность Лефшеца}) \cong \\ &\cong \text{Hom}_{\mathbb{Q}}(H_1(\Sigma_D(S); \mathbb{Q}), \mathbb{Q}). \end{aligned}$$

Рассмотрим ленту $I \times I$, приклеенную вдоль дуг $a'_k a''_k$ и $b'_k b''_k$. Пусть c_k — 1-симплекс на ленте с концами a_k и b_k , соответствующий средней дуге ленты. Центральная дуга ленты — гомеоморфный образ $\{1/2\} \times [0, 1]$ в $\Sigma_D(S)$. Этот 1-симплекс ориентирован от b_k к a_k . Будем через c'_k обозначать 1-симплекс хорды с номером k . Ориентируем c'_k от a_k к b_k . Тогда сумма $c_k + c'_k$ — 1-цикл в $Z(\Sigma_D(S), \mathbb{Q})$ (см. рис. 7). Будем обозначать такой 1-цикл хорды k тем же символом.

Множество определенных таким образом 1-циклов k образует базис в $H_1(\Sigma_D(S), \mathbb{Q})$. Будем обозначать этот базис через $\mathcal{B} = \{1, 2, \dots, n\}$. Выбор базиса в $H_1^*(\Sigma_D(S), \mathbb{Q})$ может быть сделан каноническим следующим образом. Начнем с отмеченной точки и будем двигаться согласно ориентации. Дуга, направленная от a'_i к a''_i , будет рассматриваться как 1-цикл в $Z(\Sigma_D(S), \partial\Sigma_D(S); \mathbb{Q})$. Обозначим этот класс через i^* . Согласно доказательству двойственности Пуанкаре—Александера (см. [12, теорема 5.3.13]) упорядоченный набор $\{1^*, \dots, n^*\}$ может быть взят в качестве упорядоченного базиса $H_1(\Sigma_D(S), \partial\Sigma_D(S); \mathbb{Q})$.

Вслед за Зулли в [16] заменим класс $i \in \mathcal{B}$ на гомологичный ему класс i' , такой что $j_*(i) = j_*(i')$ (изображен красным на рис. 7). Класс i' — это класс 1-симплекса от a''_i до b'_i , объединенного с дугой от b'_i до a''_i вдоль границы i -й ленты. В таких обозначениях очевидно, что $j_*(i) = j_*(i')$. Более того, можно заметить, что $j_*(i')$ по модулю границы — это i -я строка косой матрицы смежности. В самом деле, если хорда с номером k пересекает хорду с номером i и $i < k$, то вклад в линейную комбинацию составит $+1$. С другой стороны, если $k < i$, то вклад составит -1 . Поскольку поверхность ориентируема, остаток рассуждения из [16] может быть применен без изменений для доказательства того, что

$$\dim_{\mathbb{Q}}(\ker(j_*)) + 1 = \dim_{\mathbb{Q}}(H_1(\partial\Sigma_D(S), \mathbb{Q})),$$

что и завершает доказательство. \square

Чтобы установить справедливость части (А) УППП, остается показать, что число петель в полностью ориентированном состоянии может быть вычислено непосредственно через характеристический многочлен. Прежде всего необходимо проидентифицировать собственные вектора в

собственном подпространстве, отвечающем $\lambda = 0$. Будем пользоваться обозначениями из теоремы 1. Обозначим через $\mathcal{E}(0)$ собственное подпространство $\vec{A}_{\vec{G}_\emptyset}$, отвечающее $\lambda = 0$. Порождающий набор собственных векторов для $\mathcal{E}(0)$ может быть построен следующим образом. Обозначим через $(S)_D$ множество компонент границы поверхности $\Sigma_D(S)$. Положим $\iota(C)$ равным множеству дуг $a'_i b''_i$ и $a''_i b'_i$ на i -й ленте, содержащихся в компоненте $C \in \mathcal{S}_D$. Пусть $c \in \iota(C)$. Если $c = a'_i b''_i$ для некоторого i , положим $\sigma(c) = 1$. Если же $c = a''_i b'_i$ для некоторого i , положим $\sigma(c) = -1$. Для $c \in \iota(C)$, лежащего на i -й ленте, обозначим через e_c вектор длины n (где n — количество хорд), i -я компонента которого равна 1, а остальные — 0.

Следствие 1. В данных выше обозначениях справедливы следующие утверждения.

1. Для всех $C \in \mathcal{S}_D$ элемент $\theta_C = \sum_{c \in \iota(C)} \sigma(c) e_c \in \ker \vec{A}_{\vec{G}_\emptyset}$.
2. Набор векторов $\beta(D) = \{\theta_C : C \in \mathcal{S}_D\}$ порождает собственное подпространство $\vec{A}_{\vec{G}_\emptyset}$, соответствующее $\lambda = 0$, а потому линейно зависим.
3. Если $\beta(D) \neq \{\vec{0}\}$, то существует элемент $\beta(D)$, который может быть удален из этого набора для получения базиса $\mathcal{E}(0)$.
4. Размерность собственного подпространства, соответствующего $\lambda = 0$, равна алгебраической кратности 0 как корня характеристического многочлена.

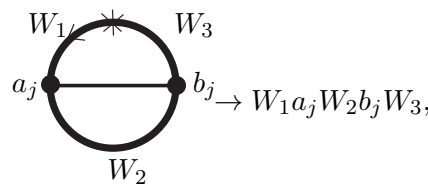
Доказательство. Для доказательства первого утверждения заметим, что благодаря нашему выбору знаков θ_C — это гомологический класс $\pm[C]$, записанный в терминах базиса \mathcal{B} , определенного в доказательстве теоремы 1. Таким образом, θ_C лежит в ядре $\vec{A}_{\vec{G}_\emptyset}$. Второе и третье утверждение следуют из теоремы 1. Для доказательства последнего утверждения заметим, что, поскольку $\vec{A}_{\vec{G}_\emptyset}$ — кососимметрическая матрица над \mathbb{R} , она диагонализуема над \mathbb{C} . С другой стороны, из первых трех утверждений следует, что у $\mathcal{E}(0)$ имеется базис, состоящий из векторов над рациональными числами. Следовательно, размерность собственного подпространства над полем комплексных чисел совпадает с размерностью над полем рациональных чисел, что в точности равно алгебраической кратности. \square

2.4. Неориентированные разведения: двулистные накрытия $\Sigma_D(S)$. Теперь рассмотрим случай частичного разведения S , в котором хотя бы одна стрелка разведена неориентируемо. В таком случае $\Sigma_D(S)$ неориентируема. В силу этого доказательство теоремы 1 не может быть применено. Возникающая проблема может быть решена с использованием ориентированного двулистного накрытия $\Sigma_D(S)$ и рассмотрением его как хордовой диаграммы.

Пусть $S = (S_o, S_u, S_\emptyset)$ — частичное состояние диаграммы $D \in \mathcal{D}(S^1, *)$. Заметим, что если множество S_u непусто, поверхность $\Sigma_D(S)$ неориентируема.

Мы построим ориентированное двулистное накрытие $\Sigma_D^2(S)$ поверхности $\Sigma_D(S)$ следующим образом. Возьмем две копии $\Sigma_D(S)$ в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$, одну из которых покрасим синим цветом, а другую — красным. Рассмотрим скрученную ленту B на синем экземпляре $\Sigma_D(S)$ и ее копию на B' на красном. Проведем горизонтальный разрез на B и аналогичный ему на B' . Таким образом, каждая из лент оказывается разделенной на две половины: B_1, B_2 и B'_1, B'_2 соответственно. Пришьем половину B_1 к B'_2 и B_2 к B'_1 , сохраняя скручивание на пол-оборота. В результате получится двулистное ориентируемое накрытие для $\Sigma_D(S)$. Описанный процесс показан на рис. 8.

Пусть $S = (S_o, S_u, S_\emptyset)$ — частичное состояние диаграммы D . Через A обозначим множество букв a_i, b_i , а через \bar{A} — множество букв вида \bar{a}_i, \bar{b}_i . Двигаясь против часовой стрелки, начиная с отмеченной точки $*$, выпишем D_\emptyset в виде слова в этом алфавите:



где W_k — слово (возможно, пустое) в алфавите $A \setminus \{a_j, b_j\}$. Для каждого слова W в алфавите A обозначим через \bar{W} слово W , записанное в обратном порядке, причем всякая буква x из A

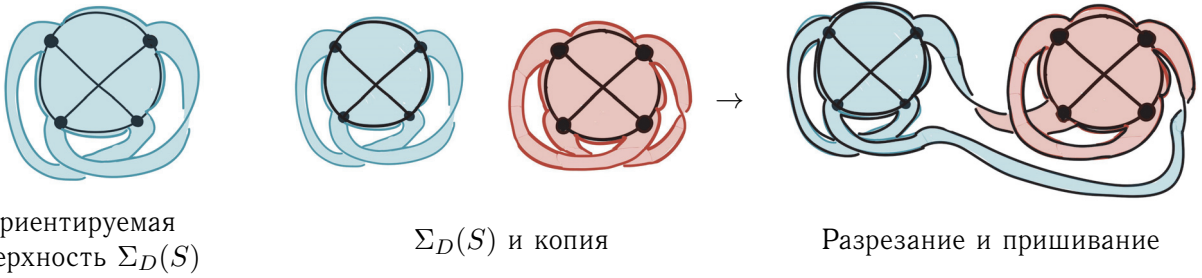


Рис. 8. Построение ориентированного двулистного накрытия $\Sigma_D^2(S)$.

заменяется на букву $\bar{x} \in \bar{A}$. Определим слова $W_j^f(S)$ и $W_j^s(S)$ следующим образом:

$$W_j^f(S) = W_1 \bar{W}_2 \bar{a}_j \bar{W}_1 \bar{W}_3 W_2 b_j W_3,$$

$$W_j^s(S) = W_1 a_j W_2 \bar{W}_1 \bar{W}_3 \bar{b}_j \bar{W}_2 W_3.$$

Пометим $4n - 2$ точки на S^1 против часовой стрелки в соответствии с порядком букв в $W_j^f(S)$ или $W_j^s(S)$. Определим гауссову диаграмму двулистного накрытия $D_j^f(S)$ или $D_j^s(S)$ соответственно, проведя хорды по следующему правилу:

1. для всякого $i \neq j$, если $i \in S_o$, $a_i b_i$ и $\bar{a}_i \bar{b}_i$ — хорда,
2. для всякого $i \neq j$, если $i \in S_u$, $\bar{a}_i b_i$ и $a_i \bar{b}_i$ — хорда,
3. в $D_j^f(S)$ $\bar{a}_j b_j$ — хорда, в $D_j^s(S)$ $a_j \bar{b}_j$ — хорда.

Лемма 2. Пусть $S = (S_o, S_u, S_\emptyset)$ — разведение, причем $|S_u| \geq 1$. Если $j \in S_u$, то

$$\#_{D_j^s(S)}(O) = 2\#_D(S) = \#_{D_j^f(S)}(O).$$

Доказательство. Построим поверхность Σ' следующим образом. Возьмем копию $\Sigma_D(S)$ в $\mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}$ и линию l в \mathbb{R}^2 , не пересекающую D . Обозначим через D' отражение D относительно l . Начиная с $*$, будем обозначать концы хорд D следующим образом. Если концы хорды и углы ленты обозначены, как обычно, $a_i, b_i, a'_i, a''_i, b'_i, b''_i$, соответствующие им точки при отражении относительно l получают обозначение $\bar{a}_i, \bar{b}_i, \bar{a}'_i, \bar{a}''_i, \bar{b}'_i, \bar{b}''_i$ соответственно. Если хорда i не принадлежит S_u , проведем неперекрученную ленту от a_i к b_i и от \bar{a}_i к \bar{b}_i . Если хорда i принадлежит S_u , проведем *неперекрученную* ленту от a_i к \bar{b}_i и от b_i к \bar{a}_i . Описанная конструкция для примера, изображенного на рис. 8, показана на рис. 9.

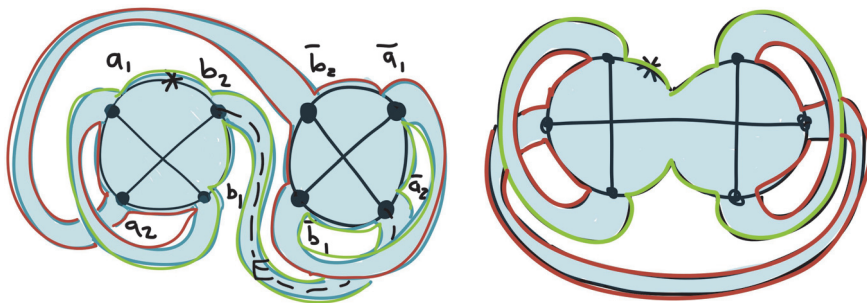


Рис. 9. Стягивание вдоль ребра для получения двулистного накрытия.

Нам требуется показать, что Σ' гомеоморфна $\Sigma_D^2(S)$ и эта информация содержится в разведении O как $D_j^f(S)$, так и $D_j^s(S)$. Заметим прежде всего, что для хорды j имеется две скрученные ленты. Первая (f) из них идет от a_j к \bar{b}_j , а вторая (s) — от b_j к \bar{a}_j . В первую очередь возьмем вторую ленту и обозначим ее через E . Лента — это прямоугольник $I \times I$, одна сторона которого лежит на левой копии S^1 , а другая — на правой. Две другие стороны прямоугольника — дуги, идущие от одной копии S^1 к другой. Представим теперь следующий путь: от отмеченной точки на первой

копии к b'_j , затем по дуге $b'_j \bar{a}'_j$ ко второй копии S^1 . Будем двигаться против часовой стрелки по \bar{D} , пока не достигнем дуги $\bar{a}''_j b''_j$, затем вдоль этой дуги по D . Остановимся в отмеченной точке. Поскольку ленты соединены в точности как в $\Sigma_D^2(S)$, мы можем заключить, что $\Sigma' \approx \Sigma_D^2(S)$.

Деформируем вложение поверхности так, что E стянется в интервал и копии S^1 окажутся склеенными по этому интервалу (см. правую часть рис. 9). Эта процедура также отождествляет конечные точки хорды в D и хорды в \bar{D} , создавая тем самым новую хорду (но уменьшая общее число хорд на единицу). Более того, возникает выделенная окружность S^1 . В самом деле, окружность — это путь, описанный в предыдущем абзаце. Получившаяся диаграмма — это $D_j^s(S)$ (с точностью до эквивалентности хордовых диаграмм). Разведение O каждой из этих диаграмм — поверхность, гомеоморфная $\Sigma_D^2(S)$. Аналогично, мы можем стянуть вдоль другой неперекрытой ленты j , чтобы получить $D_j^f(S)$. \square

3. ВЫЧИСЛЕНИЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ

В предыдущих разделах мы свели задачу подсчета петель в частичных состояниях к поиску характеристических многочленов косых матриц смежности линейно упорядоченных графов. К счастью, эта задача частично решается в рамках существующих теорий. Ее решение является одним из главных достижений спектральной теории графов [7, 8]. К сожалению, теория симметрических матриц смежности должна быть полностью перестроена для случая линейно упорядоченных графов. Тем не менее многие из идей, возникающих в симметрическом случае, могут быть использованы в нашей ситуации. В общем случае мы будем накладывать более сильные условия для получения аналогичных результатов. Полученные формулы будут немного иными.

3.1. Зеркальные образы. В симметрическом случае свойства определителя гарантируют, что выбор порядка вершин не влияет на характеристический многочлен. В случае косой матрицы смежности это уже не так. Это, однако же, остается справедливым в случае зеркального образа.

Теорема 2. Пусть $D \in \mathcal{D}(S^1, *)$ и \bar{D} — ее зеркальный образ. Здесь \bar{D} оснащается каноническим порядком при движении против часовой стрелки, начиная от отмеченной точки. Пусть \vec{G} — линейно упорядоченный граф пересечений D и \bar{G} — линейно упорядоченный граф пересечений \bar{D} . Тогда

$$\vec{P}_{\vec{G}}(x) = \vec{P}_{\bar{G}}(x).$$

Доказательство. Пусть D имеет n хорд. Будем использовать формулу Лейбница для определителя матрицы. Для метки i в D обозначим через $\tau(i)$ каноническую маркировку зеркального образа хорды i в \bar{D} . Тогда $\tau \in \mathbb{S}_n$, симметрической группе n элементов. Пусть A — каноническая матрица смежности для D , а \bar{A} — каноническая матрица смежности для \bar{D} . В таком случае $a_{ij} = \bar{a}_{\tau(j)\tau(i)}$. Положим $A' = xI - A$. Тогда в соответствии с формулой Лейбница для $\det(A')$

$$\begin{aligned} \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_n} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^n a'_{i\sigma(i)} &= \sum_{\sigma \tau^{-1} \in (\mathbb{S}_n)\tau^{-1}} \text{sign}(\sigma \tau^{-1}) \prod_{i=1}^n a'_{i\sigma \tau^{-1}(i)} = \sum_{\tau^{-1}\sigma \in \tau^{-1}(\mathbb{S}_n)} \text{sign}(\tau^{-1}\sigma) \prod_{i=1}^n a'_{i\tau^{-1}\sigma(i)} = \\ &= \sum_{\tau^{-1}\sigma \in \tau^{-1}(\mathbb{S}_n)} \text{sign}(\tau^{-1}\sigma) \prod_{i=1}^n \bar{a}'_{\sigma(i)\tau(i)} = \sum_{\tau^{-1}\sigma \in \tau^{-1}(\mathbb{S}_n)} \text{sign}(\tau^{-1}\sigma) \prod_{j=1}^n \bar{a}'_{j\tau\sigma^{-1}(j)} = \\ &= \sum_{\tau^{-1}\sigma \in \tau^{-1}(\mathbb{S}_n)} \text{sign}(\tau\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^n \bar{a}'_{j\tau\sigma^{-1}(j)} = \sum_{\tau\sigma^{-1} \in \tau(\mathbb{S}_n)^{-1}} \text{sign}(\tau\sigma^{-1}) \prod_{j=1}^n \bar{a}'_{j\tau\sigma^{-1}(j)} = \\ &= \sum_{\gamma \in \mathbb{S}_n} \text{sign}(\gamma) \prod_{j=1}^n \bar{a}'_{j\gamma(j)} = \det(xI - \bar{A}), \end{aligned}$$

что и завершает доказательство. \square

3.2. Добавление ребра. Пусть \vec{G} — линейно упорядоченный граф с n вершинами. Пусть $u, v \in V(\vec{G})$, причем $l(v) = l(u) + 1$ и u и v не являются смежными. Обозначим через $\vec{G} + uv$ линейно упорядоченный граф, полученный из \vec{G} добавлением ориентированного ребра от u к v . Через $\vec{G} - u$ обозначим граф, получаемый из \vec{G} удалением вершины u и перенумеровкой оставшихся естественным образом. Наконец, для всякой квадратной матрицы X через $\theta_{uv}(X)$ обозначим (u, v) элемент $\text{adj}(X)$ — матрицы, присоединенной к X . Здесь мы используем обозначения, введенные в [7, 8]. Мы предлагаем читателю сравнить результаты, полученные в данном разделе, с аналогичными свойствами симметрических матриц смежности, представленными уравнениями (5.1.4) и (5.1.5) в [7].

Теорема 3. В описанных выше обозначениях характеристический многочлен косой матрицы смежности для $\vec{G} + uv$ задается следующей формулой:

$$\vec{P}_{\vec{G}+uv}(x) = \vec{P}_{\vec{G}-u-v}(x) + \vec{P}_{\vec{G}}(x) + \theta_{uv}(xI - A_{\vec{G}}) - \theta_{vu}(xI - A_{\vec{G}}).$$

Доказательство. Утверждение доказывается в силу полилинейного разложения определителя. Пусть косая матрица смежности для \vec{G} задается равенством

$$\vec{A}_{\vec{G}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A & -a & -b & B \\ \hline a^t & 0 & 0 & -c^t \\ \hline b^t & 0 & 0 & -d^t \\ \hline C & c & d & D \end{array} \right], \quad xI - \vec{A}_{\vec{G}} = \left[\begin{array}{c|c|c|c} A' & a & b & B' \\ \hline -a^t & x & 0 & c^t \\ \hline -b^t & 0 & x & d^t \\ \hline C' & -c & -d & D' \end{array} \right].$$

В таком случае полилинейное разложение $|xI - \vec{A}_{\vec{G}+uv}|$ дает:

$$\begin{aligned} \left| \begin{array}{c|c|c|c} A' & a & b & B' \\ \hline -a^t & x & -1 & c^t \\ \hline -b^t & 1 & x & d^t \\ \hline C' & -c & -d & D' \end{array} \right| &= \left| \begin{array}{c|c|c|c} A' & \vec{0} & b & B' \\ \hline -a^t & 0 & 0 & c^t \\ \hline -b^t & 1 & x & d^t \\ \hline C' & \vec{0} & -d & D' \end{array} \right| + \left| \begin{array}{c|c|c|c} A' & \vec{0} & \vec{0} & B' \\ \hline -a^t & 0 & -1 & c^t \\ \hline -b^t & 1 & 0 & d^t \\ \hline C' & \vec{0} & \vec{0} & D' \end{array} \right| + \\ &+ \left| \begin{array}{c|c|c|c} A' & a & b & B' \\ \hline -a^t & x & 0 & c^t \\ \hline -b^t & 0 & x & d^t \\ \hline C' & -c & -d & D' \end{array} \right| - \left| \begin{array}{c|c|c|c} A' & a & \vec{0} & B' \\ \hline -a^t & x & 1 & c^t \\ \hline -b^t & 0 & 0 & d^t \\ \hline C' & -c & \vec{0} & D' \end{array} \right|. \end{aligned}$$

Первый определитель в правой части — это $\theta_{uv}(xI - \vec{A}_{\vec{G}})$. Второе выражение — $\vec{P}_{\vec{G}-u-v}(x)$. Третье — $\vec{P}_{\text{vec}G}(x)$. Последнее — $\theta_{vu}(xI - \vec{A}_{\vec{G}})$. Таким образом, теорема доказана. \square

Следствие 2. Пусть \vec{G} — линейно упорядоченный граф с вершинами u, v , такой что $l(v) = l(u) + 1$, $u \approx v$, и вершина v в \vec{G} является соседней с u , если и только если она соседняя с v . Тогда

$$\vec{P}_{\vec{G}+uv}(x) = \vec{P}_{\vec{G}-u-v}(x) + \vec{P}_{\vec{G}}(x).$$

Доказательство. Рассмотрим полилинейное разложение, данное в теореме 3. По условию $a = b$, $c = d$. Таким образом $\theta_{uv}(xI - \vec{A}_{\vec{G}}) = \theta_{vu}(xI - \vec{A}_{\vec{G}})$. \square

3.3. Джойны. Пусть \vec{G}_1 и \vec{G}_2 — линейно упорядоченные графы, число вершин которых равно n_1 и n_2 соответственно. Мы можем сконструировать линейно упорядоченный граф $\vec{G}_1 \sqcup \vec{G}_2$ следующим образом. Графом будет несвязное объединение \vec{G}_1 и \vec{G}_2 . Вершины, соответствующие \vec{G}_1 , промаркированы как в \vec{G}_1 . Вершина v в \vec{G}_2 получит в $\vec{G}_1 \sqcup \vec{G}_2$ метку $l(v) + n_1$. Следующее утверждение в точности повторяет результат для симметрических матриц смежности [8].

Теорема 4. Характеристический многочлен для $\vec{G}_1 \sqcup \vec{G}_2$ задается равенством

$$\vec{P}_{\vec{G}_1 \sqcup \vec{G}_2}(x) = \vec{P}_{\vec{G}_1}(x) \cdot \vec{P}_{\vec{G}_2}(x).$$

По данным линейно упорядоченным графам \vec{G}_1 и \vec{G}_2 , число вершин которых равно n_1 и n_2 соответственно, мы можем построить джойн, обозначаемый $\vec{G}_1 \vec{\vee} \vec{G}_2$, взяв несвязное объединение \vec{G}_1 и \vec{G}_2 , переобозначив каждую вершину v графа \vec{G}_2 в $l(v) + n_1$ и соединив каждую вершину \vec{G}_1

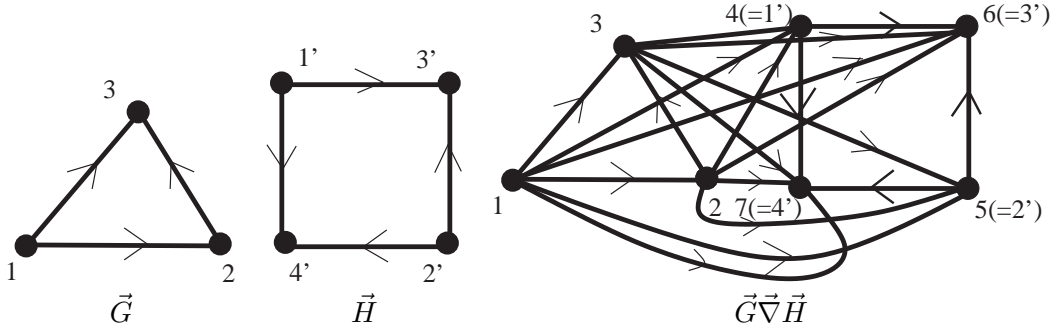


Рис. 10. Джойн \vec{G} и \vec{H} .

с каждой вершиной \vec{G}_2 . Новые ребра будут направлены от $u \in V(\vec{G}_1)$ к $v \in V(\vec{G}_2)$. В таком случае косяк матрица смежности задается выражением

$$\begin{bmatrix} \vec{A}_1 & J \\ -J^t & \vec{A}_2 \end{bmatrix},$$

где J обозначает матрицу подходящего размера, состоящую из одних единиц. Пример построения джойна приведен на рис.10.

Читателю стоит сравнить описанное понятие джойна с джойном, введенным в [8, теорема 2.1.5, следствие 2.1.6 и предложение 2.1.7].

Теорема 5. *Характеристический многочлен косої матрицы смежности для $\vec{G} \vec{\vee} \vec{H}$ удовлетворяет следующему равенству:*

$$\vec{P}_{\vec{G} \vec{\vee} \vec{H}} = \vec{P}_{\vec{G}}(x) \vec{P}_{\vec{H}}(x) + (\vec{P}_{K_1 \vec{\vee} \vec{G}}(x) - x \vec{P}_{\vec{G}}(x)) (\vec{P}_{K_1 \vec{\vee} \vec{H}}(x) - x \vec{P}_{\vec{H}}(x)).$$

Доказательство. Положим $|\vec{G}| = n \geq 1$ и $|\vec{H}| = m \geq 1$. Обозначим $N = n + m$. Будем проводить доказательство индукцией по N . Если $N = 2$, то $n = m = 1$. В этом случае и правая, и левая часть равенства имеют вид $x^2 + 1$.

Пусть теперь утверждение теоремы верно вплоть до $N - 1$, причем $N - 1 \geq 1$, $\vec{G} \vec{\vee} \vec{H}$ имеет $N = n + m$ вершин. Прежде всего мы покажем, что производные левой и правой части совпадают. Затем мы покажем, что значения обеих частей в нуле совпадают. Заметим, что производная может быть выражена следующим образом:

$$\vec{P}'_{\vec{G}}(x) = \sum_{j=1}^n \vec{P}_{\vec{G}-j}(c),$$

где $\vec{G} - j$ обозначает линейно упорядоченный граф G , вершина j которого удалена, а оставшиеся перенумерованы соответствующим образом (из номеров всех вершин с номером большим, чем $l(j)$ вычитается единица). Доказательство этого факта совпадает с доказательством [8, теорема 2.3.1] (на эту книгу мы будем давать ссылки и в дальнейшем).

Мы можем заключить, что производная левой части имеет вид

$$\vec{P}'_{\vec{G} \vec{\vee} \vec{H}}(x) = \sum_{j \in V(\vec{G} \vec{\vee} \vec{H})} \vec{P}_{(\vec{G} \vec{\vee} \vec{H})-j}(x) = \sum_{j \in V(\vec{G})} \vec{P}_{(\vec{G}-j) \vec{\vee} \vec{H}}(x) + \sum_{j \in V(\vec{H})} \vec{P}_{\vec{G} \vec{\vee} (\vec{H}-j)}(x).$$

Применим предположение индукции к каждому слагаемому. Получаем

$$\begin{aligned} \vec{P}_{(\vec{G}-j) \vec{\vee} \vec{H}}(x) &= \vec{P}_{\vec{G}-j}(x) \vec{P}_{\vec{H}}(x) + (\vec{P}_{K_1 \vec{\vee} (\vec{G}-j)}(x) - x \vec{P}_{\vec{G}-j}(x)) (\vec{P}_{K_1 \vec{\vee} \vec{H}}(x) - x \vec{P}_{\vec{H}}(x)), \\ \vec{P}_{\vec{G} \vec{\vee} (\vec{H}-j)}(x) &= \vec{P}_{\vec{G}}(x) \vec{P}_{\vec{H}-j}(x) + (\vec{P}_{K_1 \vec{\vee} \vec{G}}(x) - x \vec{P}_{\vec{G}}(x)) (\vec{P}_{K_1 \vec{\vee} (\vec{H}-j)}(x) - x \vec{P}_{\vec{H}-j}(x)). \end{aligned}$$

Производная правой части записывается следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{P}_{\vec{H}}(x) \sum_{j \in V(\vec{G})} \vec{P}_{\vec{G}-j}(x) + \vec{P}_{\vec{G}}(x) \sum_{j \in V(\vec{H})} \vec{P}_{\vec{H}-j}(x) + (\vec{P}_{K_1 \vec{\nabla} \vec{G}}(x) - x \vec{P}_{\vec{G}}(x))' (\vec{P}_{K_1 \vec{\nabla} \vec{H}}(x) - x \vec{P}_{\vec{H}}(x)) + \\ + (\vec{P}_{K_1 \vec{\nabla} \vec{G}}(x) - x \vec{P}_{\vec{G}}(x)) (\vec{P}_{K_1 \vec{\nabla} \vec{H}}(x) - x \vec{P}_{\vec{H}}(x))'. \end{aligned}$$

Теперь возьмем производные членов в скобках. Для $\vec{C} = \vec{G}$ или \vec{H} получим:

$$\begin{aligned} (\vec{P}_{K_1 \vec{\nabla} \vec{C}}(x) - x \vec{P}_{\vec{C}}(x))' &= \vec{P}'_{K_1 \vec{\nabla} \vec{C}}(x) - x \vec{P}'_{\vec{C}}(x) - \vec{P}_{\vec{C}}(x) = \\ &= \sum_{j \in V(K_1 \vec{\nabla} \vec{C})} \vec{P}_{(K_1 \vec{\nabla} \vec{C})-j}(x) - x \sum_{j \in V(\vec{C})} \vec{P}_{\vec{C}-j}(x) - \vec{P}_{\vec{C}}(x) = \\ &= \sum_{j \in V(\vec{C})} \vec{P}_{K_1 \vec{\nabla}(\vec{C}-j)}(x) - x \sum_{j \in V(\vec{C})} \vec{P}_{\vec{C}-j}(x). \end{aligned}$$

Сравнивая полученные выражения для производной левой и правой части, мы видим, что они совпадают. Для завершения доказательства нам требуется показать, что

$$\vec{P}_{\vec{G} \vec{\nabla} \vec{H}}(0) = \vec{P}_{\vec{G}}(0) \vec{P}_{\vec{H}}(0) + \vec{P}_{K_1 \vec{\nabla} \vec{G}}(0) \vec{P}_{K_1 \vec{\nabla} \vec{H}}(0).$$

В конечном итоге для доказательства этого утверждения мы будем пользоваться формулой Лейбница. Обозначим через A косую матрицу смежности для \vec{G} , а через B — косую матрицу смежности для \vec{H} . Заметим, что определитель косой матрицы смежности для $K_1 \vec{\nabla} \vec{G}$, где вершина, помеченная единицей, соответствует вершине, добавленной к \vec{G} , равен $\vec{j}_n^t \text{adj}(A) \vec{j}_n$. Для $K_1 \vec{\nabla} \vec{H}$ определитель равен $\vec{j}_m^t \text{adj}(B) \vec{j}_m$, где \vec{j}_m — матрица размера $m \times 1$, состоящая из одних единиц.

Пусть M обозначает косую матрицу смежности для $\vec{G} \vec{\nabla} \vec{H}$. Напомним формулу Лейбница для определителя матрицы:

$$\det(M) = \begin{vmatrix} A & J \\ -J^t & A_2 \end{vmatrix} = \sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{n+m}} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n+m} m_{i\sigma(i)}.$$

Пусть $\sigma \in \mathbb{S}_{n+m}$, и пусть k — количество чисел i между 1 и n , таких что $\sigma(i) > n$. Пусть $X = \{i_1, \dots, i_k\}$ — множество таких элементов.

Докажем следующее утверждение: *если $k \geq 2$, то существует $\tau \in \mathbb{S}_{n+m}$, такое что*

$$\text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n+m} m_{i\sigma(i)} + \text{sign}(\tau) \prod_{i=1}^{n+m} m_{i\tau(i)} = 0.$$

Элементов j между $n+1$ и m , таких что $\sigma(j) < n+1$, должно быть ровно k . Обозначим их множество через $Y = \{j_1, \dots, j_k\}$. Заметим, что для $i \in X$, $j \in Y$ $m_{i\sigma(i)} = 1$, $m_{j\sigma(j)} = -1$. Таким образом, если мы возьмем произвольную перестановку $\sigma(X)$ или $\sigma(Y)$ и ее композицию с σ , что даст нам новую перестановку $\gamma \in \mathbb{S}_{n+m}$, то значение выражения

$$\prod_{i=1}^{n+m} m_{i\gamma(i)}$$

останется неизменным. Поскольку $k \geq 2$, число четных и нечетных перестановок совпадает. Таким образом, утверждение доказано.

Далее, если $k = 0$, $\sigma = \tau\gamma$, где τ, γ не пересекаются, $\tau \in \mathbb{S}_n$, а γ — перестановка элементов $\{n+1, \dots, m\}$. Мы можем заключить, что

$$\sum_{\sigma \in \mathbb{S}_{n+m}, k=0} \text{sign}(\sigma) \prod_{i=1}^{n+m} m_{i\sigma(i)} = \det(A) \det(B).$$

Теперь пусть $k = 1$. В этом случае в $\prod_{i=1}^{n+m}$ входит $n-1$ элемент A , $m-1$ элемент B , 1 и -1 . Единица определяет координату по строкам i , $1 \leq i \leq n$, и координату по столбцам j , $n+1 \leq j \leq m$. -1

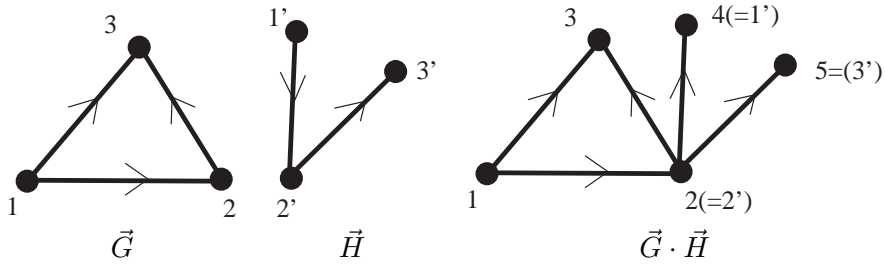


Рис. 11. Слияние по вершинам 2 графа \vec{G} и $2'$ графа \vec{H} .

определяет координату по строкам i' , $n + 1 \leq i' \leq m$, и координату по столбцам j , $1 \leq j' \leq n$. Вместе они тем самым определяют кофактор $A(i, j')$ и кофактор $B(i', j)$.

Мы установим взаимно-однозначное соответствие с перестановками вида $\sigma_1\sigma_2$, где $\sigma_1 \in \mathbb{S}(1, \dots, n)$, $\sigma_2 \in \mathbb{S}(n + 1, \dots, m)$ и $\text{sign}(\sigma)\text{sign}(\sigma_1\sigma_2) = -1$. В самом деле, в данных выше обозначениях определим σ_1 как $\sigma|X$ и $\sigma_1(i) = j'$. Определим σ_2 как $\sigma|Y$ и $\sigma_2(i') = j$. Теперь возьмем разложение σ_1 и σ_2 на несвязные циклы. Пусть τ_1 — цикл σ_1 , содержащий i , а τ_2 — цикл σ_2 , содержащий i' . Заметим, что $\tau_1(ij)\tau_2$ — перестановка, отправляющая $i \rightarrow j$ и $i' \rightarrow j'$. Отсюда следует, что $\sigma = \sigma_1(ij)\sigma_2$ и $\text{sign}(\sigma)\text{sign}(\sigma_1\sigma_2) = -1$.

Таким образом определено взаимно-однозначное соответствие между слагаемыми элементов $\det(M)$ при $k = 1$ и произведением

$$(\vec{j}_n^t \text{adj}(A)\vec{j}_n)(\vec{j}_m^t \text{adj}(B)\vec{j}_m).$$

Замечание: лишняя -1 компенсирует тот факт, что перестановка в M содержит дополнительную транспозицию (ij) .

Отсюда следует, что желаемая формула в нуле справедлива. Следовательно, наше рассуждение о производных доказывает, что формула верна для всех N . Индуктивное доказательство завершено. \square

3.4. Слияние. Пусть G и H — несвязные ненаправленные графы с вершинами u и v соответственно. Слияние G и H в вершинах u и v — это граф, полученный отождествлением вершин u и v . Обозначается слияние через $G \cdot H$. Для линейно упорядоченных графов \vec{G} , \vec{H} с вершинами u, v соответственно слияние $\vec{G} \cdot \vec{H}$ определяется как слияние $G \cdot H$, где все ребра G ориентированы, как в \vec{G} , а каждая вершина w из $\vec{H} - v$ снабжена меткой $l(w) + n$. Вершина $u(=v)$ промаркирована u . Поскольку u меньше любой вершины из $\vec{H} - v$, соседней с которой является, все ребра, соединяющие u и $x \in V(\vec{H} - v)$, направлены $u \rightarrow x$. Эта конструкция изображена на рис. 11.

Пусть \vec{G} — линейно упорядоченный граф и u — его вершина. Определим *продвижение* u в \vec{G} как линейно ориентированный граф, получаемый из \vec{G} удалением вершины u , добавлением вершины v_0 (с $l(v_0) = 1$), у которой соседними будут те же вершины, что и у u , и перемаркировкой всякой вершины w с $l(w) < l(u)$ на $l(w) + 1$. Обозначим продвижение u в \vec{G} через $\vec{G} \leftrightarrow u$.

Следующий результат показывает, что косой спектр слияния связан с косыми спектрами более простых линейно упорядоченных графов. Доказательство очень похоже на доказательство [8, теорема 2.2.3].

Теорема 6. *Характеристический многочлен слияния линейно упорядоченных графов \vec{G} и \vec{H} в u и v задается выражением*

$$\vec{P}_{\vec{G} \cdot \vec{H}}(x) = \vec{P}_{\vec{G}}(x)\vec{P}_{\vec{H}-v}(x) + \vec{P}_{\vec{G}-u}(x)\vec{P}_{\vec{H} \leftrightarrow v}(x) - x\vec{P}_{\vec{G}-u}(x)\vec{P}_{\vec{H}-v}(x).$$

Доказательство. Пусть косые матрицы смежности \vec{G} и \vec{H} имеют следующий вид:

$$\begin{bmatrix} A & \alpha & B \\ -\alpha^t & 0 & \beta^t \\ C & -\beta & D \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} E & \gamma & F \\ -\gamma^t & 0 & \delta^t \\ C & -\beta & D \end{bmatrix}.$$

Здесь «греческие столбцы» в матрицах представляют собой косые матрицы смежности для u и v соответственно. Пусть M является косой матрицей смежности линейно упорядоченного графа $\vec{G} \cdot \vec{H}$. Тогда $xI - M$ имеет вид

$$\begin{bmatrix} A' & \alpha & B' & \vec{0} & \vec{0} \\ \alpha^t & x & -\beta^t & -\gamma^t & -\delta^t \\ C' & \beta & D' & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \gamma & \vec{0} & E' & F' \\ \vec{0} & \delta & \vec{0} & G' & H' \end{bmatrix},$$

где $A', B', C', D', E', F', G', H'$ — матрицы, полученные из A, B, C, D, E, F, G, H вычитанием M из xI . Поскольку определитель полилинеен, $\det(xI - M)$ может быть выражен следующим образом:

$$\begin{vmatrix} A' & \vec{0} & B' & \vec{0} & \vec{0} \\ \alpha^t & x & -\beta^t & -\gamma^t & -\delta^t \\ C' & \vec{0} & D' & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \gamma & \vec{0} & E' & F' \\ \vec{0} & \delta & \vec{0} & G' & H' \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} A' & -\alpha^t & B' & \vec{0} & \vec{0} \\ \alpha^t & x & -\beta^t & -\gamma^t & -\delta^t \\ C' & \beta & D' & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & E' & F' \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & G' & H' \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} A' & \vec{0} & B' & \vec{0} & \vec{0} \\ \alpha^t & x & -\beta^t & -\gamma^t & -\delta^t \\ C' & \vec{0} & D' & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & E' & F' \\ \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} & G' & H' \end{vmatrix}.$$

Второе слагаемое — это $\vec{P}_{\vec{G}}(x)\vec{P}_{\vec{H}-v}(x)$. Третье — $x\vec{P}_{\vec{G}-u}(x)\vec{P}_{\vec{H}-v}(x)$. Первый определитель может быть преобразован, чтобы получить $\vec{P}_{\vec{G}-u}(x)\vec{P}_{\vec{H}\leftrightarrow v}(x)$:

$$\begin{vmatrix} A' & \vec{0} & B' & \vec{0} & \vec{0} \\ \alpha^t & x & -\beta^t & -\gamma^t & -\delta^t \\ C' & \vec{0} & D' & \vec{0} & \vec{0} \\ \vec{0} & \gamma & \vec{0} & E' & F' \\ \vec{0} & \delta & \vec{0} & G' & H' \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} A' & B' & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ C' & D' & \vec{0} & \vec{0} & \vec{0} \\ \alpha^t & -\beta^t & x & -\gamma^t & -\delta^t \\ \vec{0} & \vec{0} & \gamma & E' & F' \\ \vec{0} & \vec{0} & \delta & G' & H' \end{vmatrix}.$$

□

3.5. Строительный кубик: линейно упорядоченные пути. Обозначим через D_n хордовую диаграмму с отмеченной точкой, причем последовательность концов маркированных хорд, начиная от отмеченной точки, задается кодом

$$12132435465 \dots (n-1)(n-2)n(n-1)n.$$

Тогда граф пересечений D_n — это упорядоченный путь \vec{P}_n . Косая матрица смежности для D_n задается выражением

$$\vec{A}_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Теорема 7. Пусть $n \in \mathbb{N}$. Тогда для упорядоченного пути \vec{P}_n справедливы следующие утверждения:

1. рекурсивное соотношение

$$\vec{P}_{\vec{P}_n}(z) = x\vec{P}_{\vec{P}_{n-1}}(x) + \vec{P}_{\vec{P}_{n-2}}(x)$$

с начальными условиями $\vec{P}_{\vec{P}_1}(x) = x$, $\vec{P}_{\vec{P}_2}(x) = x^2 + 1$;

2. решением этого рекурсивного соотношения является

$$\vec{P}_{\vec{P}_n}(x) = \frac{1}{2^{n+1}} \left[\left(1 + \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \right) \left(x + \sqrt{x^2+4} \right)^n + \left(1 - \frac{x}{\sqrt{x^2+4}} \right) \left(x - \sqrt{x^2+4} \right)^n \right];$$

3. решение может быть записано в виде суммы:

$$\vec{P}_{\vec{P}_n}(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{j=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n+1}{2j+1} x^{n-2j} (x^2+4)^j.$$

Доказательство. Для начала вычислим $\det(xI - \vec{A}_n)$:

$$\begin{aligned} & \begin{vmatrix} x & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 1 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = x \vec{P}_{\vec{P}_{n-1}}(x) + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = \\ & = x \vec{P}_{\vec{P}_{n-1}}(x) + \vec{P}_{\vec{P}_{n-2}}(x) + \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & x & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & x & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & x \end{vmatrix} = x \vec{P}_{\vec{P}_{n-1}}(x) + \vec{P}_{\vec{P}_{n-2}}(x). \end{aligned}$$

Второе утверждение теоремы проверяется решением рекурсивного соотношения. Третье утверждение достигается применением биномиальной теоремы и формулы для треугольника Паскаля. \square

3.6. Строительный кубик: полные линейно упорядоченные графы. Обозначим через D_n хордовую диаграмму с отмеченной точкой, причем последовательность концов маркированных хорд, начиная от отмеченной точки, задается кодом

$$123 \dots n123 \dots n.$$

Граф пересечений D_n — это полный граф на n вершинах. Мы будем обозначать этот граф (с каноническим порядком на нем) через \vec{K}_n . Обозначим через \vec{A}_n косую матрицу смежности для \vec{K}_n . Тогда

$$\vec{A}_n = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ -1 & -1 & -1 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Лемма 3. Для косой матрицы смежности \vec{A}_n графа \vec{K}_n справедливы следующие утверждения:

1. для всякого $n \in 2\mathbb{N}$ \vec{A}_n обратима и $\det(\vec{A}_n) = 1$;
2. если $n \notin 2\mathbb{N}$, $\det(\vec{A}_n) = 0$.

Доказательство. Для начала предположим, что $n \notin 2\mathbb{N}$. Достаточно показать, что существует ненулевой вектор в собственном пространстве, отвечающем $\lambda = 0$. В самом деле, если n нечетное,

$$\vec{v}_n = [1 \ -1 \ 1 \ \dots \ -1 \ 1]^t.$$

Непосредственное вычисление показывает, что $\vec{A}_n \cdot \vec{v}_n = 0$ для любого нечетного n . Таким образом, $\det(\vec{A}_n) = 0$ для нечетных n .

Пусть теперь $n \in 2\mathbb{N}$. Легко проверить, что обратной к \vec{A}_n является матрица

$$\vec{A}_n^{-1} = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 & \dots & -1 \\ 1 & 0 & -1 & \dots & -1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку \vec{A}_n^{-1} — матрица над \mathbb{Z} , $\det(\vec{A}_n) = \pm 1$ (поскольку других единиц в \mathbb{Z} нет). Вычислим определитель \vec{A}_n , пользуясь равенством

$$\vec{A}_n^{-1} = \frac{1}{\det(\vec{A}_n)} \text{adj}(\vec{A}_n) = \pm \text{adj}(\vec{A}_n),$$

где $\text{adj}(B)$ обозначает матрицу, присоединенную к B . Доказательство проведем индукцией по n .

Для $n = 2$ $\vec{A}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, а потому $\det(\vec{A}_2) = 1$. Предположим, что наше утверждение верно для всех четных натуральных чисел, меньших n . Обозначим через $B^{\hat{j}}$ матрицу, полученную из B удалением j -того столбца. Для квадратной матрицы B обозначим через $B_i^{\hat{j}}$ матрицу, полученную удалением из B j -того столбца и i -той строки. Разложим определитель, заданный $(1, 2)$ -кофактором \vec{A}_n :

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -1 & & & & \\ \vdots & & & & \\ -1 & & & & \end{vmatrix} &= -\det(\vec{A}_{n-2}) + \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^i \begin{vmatrix} -1 & & & & \\ \vdots & & & & \\ -1 & & & & \end{vmatrix} (\vec{A}_{n-2})^{\hat{i}} = -1 + \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{i+1} \begin{vmatrix} 1 & & & & \\ \vdots & & & & \\ 1 & & & & \end{vmatrix} (\vec{A}_{n-2})^{\hat{i}} = \\ &= -1 + \sum_{i=1}^{n-2} (-1)^{i+1} \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{j-1} \begin{vmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{vmatrix} (\vec{A}_{n-2})^{\hat{i}} = -1 + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{i+j} \begin{vmatrix} & & & & \\ & & & & \\ & & & & \\ & & & & \end{vmatrix} (\vec{A}_{n-2})^{\hat{i}} = \\ &= -1 + \sum_{i=1}^{n-2} \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^{i+j} (\text{adj}(\vec{A}_{n-2}))_{ij} = -1 + \sum_{j=1}^{n-2} (-1)^j = -1. \end{aligned}$$

В третьей снизу строке мы используем индукционное предположение, что $\vec{A}_{n-2}^{-1} = \text{adj}(\vec{A}_{n-2})$. Таким образом, 1 является элементом $(2, 1)$ матрицы $\text{adj}(\vec{A}_n)$. Поскольку $\vec{A}_n^{-1} = \pm \text{adj}(\vec{A}_n)$, элемент $(2, 1)$ матрицы \vec{A}_n^{-1} также равен 1, а следовательно $\det(\vec{A}_n) = 1$. Индуктивное доказательство завершено. \square

Теорема 8. Для полных линейно упорядоченных графов \vec{K}_n верно следующее равенство:

$$\vec{P}_{\vec{K}_n}(x) = \frac{1}{2}((-1+x)^n + (1+x)^n).$$

Доказательство. Мы вновь воспользуемся тем фактом, что

$$\vec{P}'_{\vec{G}}(x) = \sum_{j=1}^n \vec{P}_{\vec{G}-j}(x).$$

Положим $\vec{G} = \vec{K}_n$. Заметим, что для всех $j = 1, \dots, n$ $\vec{G} - j \cong \vec{K}_{n-1}$. Отсюда следует, что $\vec{P}'_{\vec{G}}(x) = n\vec{P}_{\vec{K}_{n-1}}(x)$. Сначала рассмотрим случай четного n . Имеем $\vec{P}_{\vec{G}}^{(n-2)}(x) = \frac{n!}{2}(x^2 + 1)$. Вспомним, что $\vec{P}_{\vec{K}_t}(0) = (-1)^t \det(\vec{A}_t)$ для всех t . В силу леммы 3 мы знаем, что $\vec{P}_{\vec{K}_t}(0) = 1$ для всех четных t и равно 0 для нечетных t . Отсюда мы можем заключить, что

$$\vec{P}_{\vec{K}_n}^{(k)}(0) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!}, & k \leq n-4, \text{ четное } k, \\ 0, & k \leq n-3, \text{ нечетное } k. \end{cases}$$

Согласно теореме Тейлора,

$$\begin{aligned} \vec{P}_{\vec{K}_n}(x) &= \sum_{i=0}^n \frac{\vec{P}_{\vec{K}_n}^{(i)}(0)}{i!} x^i = \frac{n!}{2} \left(\frac{x^n}{n!/2} + \frac{x^{n-2}}{(n-2)!} \right) + \sum_{j=0}^{\frac{n-4}{2}} \frac{n!}{(n-2j)!(2j)!} x^{2j} = \sum_{j=0}^{n/2} \binom{n}{2j} x^{2j} = \\ &= \frac{1}{2}((-1+x)^n + (1+x)^n). \end{aligned}$$

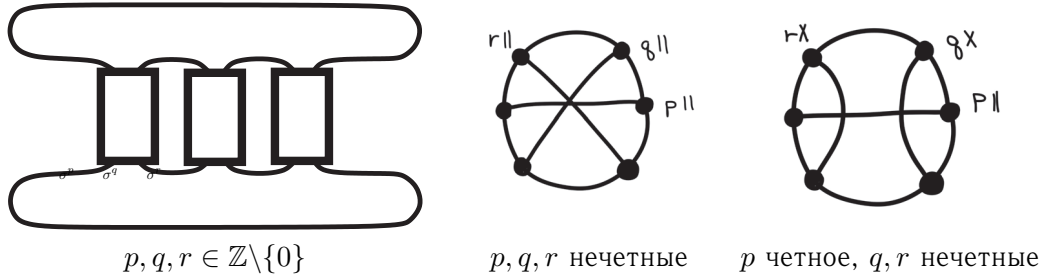


Рис. 12. Два случая узла на кренделе.

Последнее равенство следует из биномиальной теоремы. Пусть теперь n нечетное. В этом случае $\vec{P}_{\vec{G}}^{(n-1)}(x) = n!x$. Рассуждая аналогично случаю четного n , имеем, что

$$\vec{P}_{\vec{K}_n}^{(k)}(0) = \begin{cases} \frac{n!}{(n-k)!}, & \text{нечетное } k, \\ 0, & \text{четное } k. \end{cases}$$

Из теоремы Тейлора и биномиальной теоремы следует, что

$$\vec{P}_{\vec{G}}(x) = \sum_{j=1}^{(n+1)/2} \binom{n}{2j-1} x^{2j-1} = \frac{1}{2}(- (1-x)^n + (1+x)^n).$$

□

4. ПРИЛОЖЕНИЕ К УЗЛАМ НА КРЕНДЕЛЕ

Пусть \mathcal{F} — множество (не обязательно конечное) диаграмм виртуальных узлов (в частности, мы не рассматриваем их с точностью до рейдемейстеровской эквивалентности). Пусть $m \geq 1$ — натуральное число. Пусть, далее, j — натуральное число между 1 и m .

Вопрос (j, m) : *сколькими способами можно построить ориентированное разведение в $m - j$ перекрестках и неориентированное разбиение в j перекрестках по данной диаграмме $K \in \mathcal{F}$, так что в результате будет в точности одна связная компонента?*

Мы будем пользоваться следующим соглашением: если m больше общего числа перекрестков в $K \in \mathcal{F}$, то ответом на вопрос (j, m) примем 0.

В наших обозначениях вопрос (j, m) имеет эквивалентную формулировку: сколько существует частичных состояний $S = (S_o, S_u, S_\emptyset)$, таких что $|S_u| = j$, $|S_o| = m - j$ и $\#(K|S) = 1$ для данной диаграммы $K \in \mathcal{F}$?

Пусть теперь \mathcal{F} — множество диаграмм узлов на кренделе. Мы ответим на вопрос $(0, m)$ и $(1, m)$ для всех m . Пусть $p, q, r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$. Напомним, что зацепление на кренделе — это зацепление вида, продемонстрированного на рис. 12, причем внутри рамок у нас находятся 2-косы $\sigma^p, \sigma^q, \sigma^r$ соответственно [2]. Легко проверить, что зацепление на кренделе $L(p, q, r)$ является узлом на кренделе, если и только если среди чисел p, q, r не более одного четного. Когда все они нечетные, гауссова диаграмма соответствующего узла выглядит подобно изображенной в центре рис. 12. Здесь хорды обозначают p, q или r параллельно идущих хорд. Когда одно из них четное, например, p , гауссова диаграмма выглядит подобно правой части рис. 12. Хорда степени два обозначает p параллельных хорд. Хорды степени 1 обозначают q и r хорд, графами пересечений которых являются полные графы K_q и K_r соответственно.

Мы докажем несколько утверждений, которые будут использованы для ответа на вопрос $(0, m)$ и $(1, m)$. Заметим, что мы не будем выписывать характеристические многочлены в явном виде, а лишь вычислим их значения в нуле и значения их производных в нуле. На диаграмме ниже области помеченные буквой α (или β) содержат хотя бы одну из конечных точек α (β) хорд, со свойством: каждая хорда в области пересекает все прочие хорды в этой области.

Черные хорды, концы которых не лежат ни в α , ни в β области, обозначают одиночные хорды. Если черная хорда проходит через область, она пересекает все хорды, концы которых лежат в этой области.

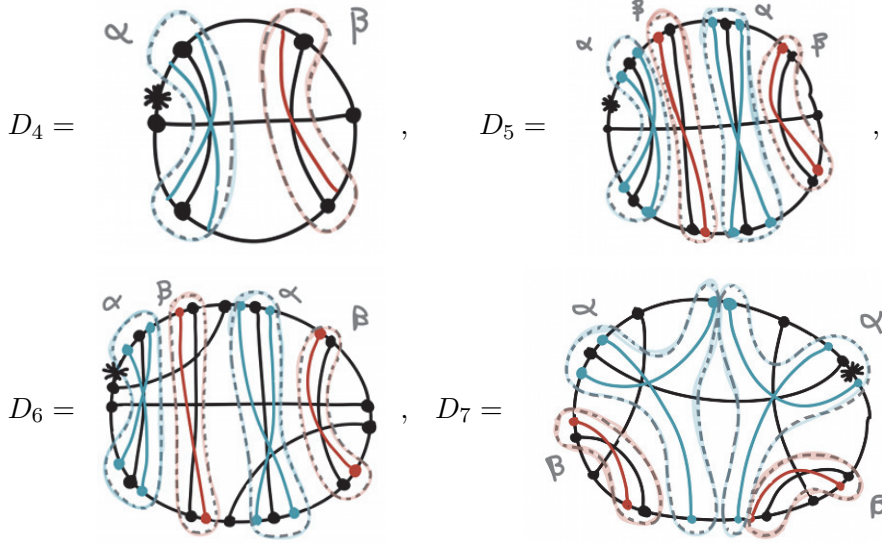


Рис. 13. Диаграммы, рассматриваемые в леммах 4, 5, 6 и 7.

Лемма 4. Пусть \vec{G}_4 — линейно упорядоченный граф, связанный с диаграммой D_4 , изображенной на рис. 13. Тогда

$$\vec{P}_{\vec{G}_4}(0) = \frac{1}{2}(1 - (-1)^{\alpha+\beta}),$$

$$\vec{P}'_{\vec{G}_4}(0) = \frac{1}{4}(1 + (-1)^\alpha + 2\alpha + 2\beta + (-1)^{\alpha+\beta}(1 + 2\alpha + 2\beta)).$$

Доказательство. Рассмотрим линейно упорядоченные графы $\vec{K}_{\alpha+1}$ и $\vec{K}_{\beta+1}$. Образует слияние этих графов по вершинам, помеченным 1 в каждом из них. Тогда \vec{G}_4 есть $\vec{K}_{\alpha+1} \cdot \vec{K}_{\beta+1}$. По теореме 8 мы знаем многочлены $\vec{K}_{\alpha+1}(x)$ и $\vec{K}_{\beta+1}(x)$. Заметим, что продвижение любой вершины $j \in V(\vec{K}_\beta)$ не меняет линейно упорядоченный граф: $\vec{K}_{\beta+1}$ совпадает с $\vec{K}_{\beta+1} \leftrightarrow j$. Поэтому по теореме 6 мы можем вычислить $\vec{P}_{\vec{K}_{\alpha+1} \cdot \vec{K}_{\beta+1}}(x)$. Отсюда мы можем вычислить значение многочлена и его производной в нуле (вычисления могут быть упрощены использованием пакета компьютерных вычислений *Mathematica*). \square

Лемма 5. Пусть \vec{G}_5 — линейно упорядоченный граф, связанный с диаграммой D_5 , изображенной на рис. 13. Тогда

$$\vec{P}_{\vec{G}_5}(0) = \frac{1}{8}(1 + (-1)^\alpha)(1 + (-1)^\beta)((1 + (-1)^{\alpha+1})(1 + (-1)^\beta) + (1 + (-1)^\alpha)(1 + (-1)^{\beta+1})),$$

$$\vec{P}'_{\vec{G}_5}(0) = \frac{1}{16}(8\alpha(1 + (-1)^\beta)(1 + (-1)^{2\alpha+\beta}) + (1 + (-1)^\alpha) \times \\ \times ((1 + (-1)^\alpha)(1 + (-1)^\beta)^2 + 8\beta(1 + (-1)^{\alpha+2\beta}))).$$

Доказательство. Рассмотрим линейно упорядоченные графы $\vec{K}_{\alpha+1}$ и $\vec{K}_{\beta+1}$. Образует слияние этих графов по вершинам, помеченным 1: $\vec{K}_\alpha \cdot \vec{K}_\beta$. Новая вершина, помеченная 1, является соседней с экземпляром \vec{K}_α и с экземпляром \vec{K}_β . Теперь возьмем два экземпляра $\vec{K}_{\alpha+1} \cdot \vec{K}_{\beta+1}$ и образуем слияние по вершинам, помеченным 1. Оказывается, \vec{G}_5 задается $(\vec{K}_{\alpha+1} \cdot \vec{K}_{\beta+1}) \cdot (\vec{K}_{\alpha+1} \cdot \vec{K}_{\beta+1})$. Поскольку мы всегда производим слияние по 1, продвижение не влияет на характеристический многочлен. Из предыдущей леммы мы знаем замкнутую формулу для $\vec{P}_{\vec{K}_{\alpha+1} \cdot \vec{K}_{\beta+1}}(x)$. С другой стороны, удаление вершины 1 из $(\vec{K}_{\alpha+1} \cdot \vec{K}_{\beta+1})$ дает несвязное объединение $\vec{K}_\alpha \sqcup \vec{K}_\beta$. Следовательно,

$\vec{P}_{\vec{G}_{15}}(x)$ может быть вычислен по теореме 6. Отсюда немедленно вытекает формула для многочлена и его производной в нуле. \square

Лемма 6. Пусть \vec{G}_6 — линейно упорядоченный граф, связанный с диаграммой D_6 , изображенной на рис. 13. Тогда

$$\begin{aligned}\vec{P}_{\vec{G}_6}(0) &= 0, \\ \vec{P}'_{\vec{G}_6}(0) &= \frac{3}{4}(-1 + (-1)^{\alpha+\beta})^2.\end{aligned}$$

Доказательство. Прежде всего рассмотрим $\vec{H}_1 = \vec{K}_2 \vec{\nabla}(\vec{K}_\alpha \sqcup \vec{K}_\beta)$. По теореме 5 имеем, что $\vec{P}_{\vec{H}_1}(x)$ зависит только от $\vec{P}_{\vec{K}_\alpha}(x)$, $\vec{P}_{\vec{K}_\beta}(x)$, $\vec{P}_{\vec{K}_1 \vec{\nabla}(\vec{K}_\alpha \sqcup \vec{K}_\beta)}(x)$ и $\vec{P}_{\vec{K}_3}(x)$. Легко видеть, что $\vec{K}_1 \vec{\nabla}(\vec{K}_\alpha \sqcup \vec{K}_\beta)$ совпадает с $\vec{K}_{\alpha+1} \cdot \vec{K}_{\beta+1}$, вычисленным в лемме 4.

Обозначим через \vec{H}_2 линейно упорядоченный граф, получаемый удалением синих и красных стрелок в правой части D_6 и получающейся одиночной хорды внизу справа. Тогда \vec{H}_2 содержит две последовательно идущие хорды с одними и теми же соседними. Поэтому \vec{H}_2 может быть получен из \vec{H}_1 удалением ребра, соединяющего вершины 1 и 2. Из следствия 2 мы можем заключить, что

$$\vec{P}_{\vec{H}_2}(x) = \vec{P}_{\vec{h}_1}(x) - \vec{P}_{\vec{K}_\alpha}(x) \vec{P}_{\vec{K}_\beta}(x).$$

Наконец, мы можем построить линейно упорядоченный граф для D_6 как $\vec{H}_2 \cdot \vec{H}_2$, причем слияние проводится по вершине 2 в первом графе и по вершине 1 во втором. Продвижение вновь не влияет на граф. Таким образом, $\vec{P}_{\vec{G}_6}(x)$ определяется по теореме 6. Многочлен и производная в нуле следуют. \square

Лемма 7. Пусть \vec{G}_7 — линейно упорядоченный граф, связанный с диаграммой D_7 , изображенной на рис. 13. Тогда

$$\begin{aligned}\vec{P}_{\vec{G}_7}(0) &= 0, \\ \vec{P}'_{\vec{G}_7}(0) &= \frac{1}{4}(-1 + (-1)^\beta + (-1)^\alpha + 2(-1)^{\alpha+\beta}(-1)^{2\alpha+\beta} + (-1)^{\alpha+2\beta} + 8\alpha + 8\beta).\end{aligned}$$

Доказательство. Начнем с $\vec{H}_1 = \vec{K}_{\alpha+1} \cdot \vec{K}_{\beta+1}$, где слияние проводится по вершине 1 в $\vec{K}_{\beta+1}$ и по вершине, отличной от 1, в $\vec{K}_{\alpha+1}$. Затем возьмем два экземпляра \vec{H}_1 и $\vec{H}_1 \cdot \vec{H}_1$ по вершинам 1 в графах. Напомним, что \vec{H} обозначает граф пересечений зеркального образа диаграммы. Напомним далее, что по теореме 2 для графов, полученных таким образом, $\vec{P}_{\vec{H}}(x) = \vec{P}_{\vec{H}}(x)$. Следовательно, $\vec{P}_{\vec{G}_7}(x) = \vec{P}_{\vec{H}_1 \cdot \vec{H}_1}(x)$. Дважды применяя теорему 6, мы легко вычислим второй многочлен. Из этого вычисления вытекают требуемые нам факты. \square

Теперь у нас есть все инструменты, чтобы дать ответ на вопрос $(0, m)$ и $(1, m)$. Пусть $p, q, r \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ и $P = |p|, Q = |q|, R = |r|$. Пусть $m \in \mathbb{N}$. Обозначим через $N_0(p, q, r, m)$ число вариантов выбора m перекрестков узла на кренделе $L(p, q, r)$, так что ориентированное разведение в этих перекрестках дает одну компоненту. Обозначим через $N_1(p, q, r, m)$ число вариантов выбора m перекрестков узла на кренделе $L(p, q, r)$, так что ровно в одном перекрестке разведение неориентируемо, в $m-1$ разведение ориентируемо и результат состоит ровно из одной компоненты. Иными словами, N_j — ответ на вопрос (j, m) для набора параметров p, q, r, m .

Теорема 9. Пусть все числа p, q, r, m нечетные. Тогда

$$\begin{aligned}N_0(p, q, r, m) &= \begin{cases} 0, & m \neq 2, \\ PQ + QR + RS, & m = 2, \end{cases} \\ N_1(p, q, r, m) &= \begin{cases} 0, & m > 3, \\ P + Q + R, & m = 1, \\ 2(PQ + QR + RS), & m = 2, \\ 3PQR + 2\binom{P}{2}(Q + R) + 2\binom{Q}{2}(P + R) + 2\binom{R}{2}(P + Q), & m = 3. \end{cases}\end{aligned}$$

Доказательство. Заметим, что если выбрана пара параллельных хорд и разведения у обеих ориентированные, то вне зависимости от дальнейшего выбора хорд и разведений количество компонент будет не меньше двух.

Рассмотрим для начала формулу для N_0 . Если $m = 1$, ориентированные разведения дадут две компоненты. Если $m > 3$, то на диаграмме 12 должна быть выбрана хотя бы одна пара параллельных хорд. Следовательно, в этом случае $N_0 = 0$. Аналогично, если $m = 3$ и выбраны две параллельные хорды, то $N_0 = 0$. Если $m = 3$ и все хорды пересекаются, то можно проверить, что $N_0 = 0$. Если $m = 2$, то число компонент будет равно единице, только если выбрана пара пересекающихся хорд. Таким образом, формула доказана.

Теперь рассмотрим формулу для N_1 . Если $m = 1$, мы неориентированно разводим ровно один перекресток. Это даст нам одну компоненту. Если $m = 2$, число компонент будет равно единице, только если выбрана пара пересекающихся хорд. Одна из них будет разведена ориентированно, другая — неориентированно. Следовательно, искомое количество способов равно $2(PQ + QR + RS)$.

Для $m = 3$ компонента будет одна, если (1) никакие из хорд не параллельны или (2) из двух параллельных хорд одна разводится неориентированно, а третья пересекает их. Вклад случая (1) составляет $2PQR$. Вклад случая (2) составляет $2\binom{P}{2}(Q + R) + 2\binom{Q}{2}(P + R) + 2\binom{R}{2}(P + Q)$.

Когда $m > 3$, мы вынуждены выбрать как минимум две параллельные хорды. Если ни одна из них не разведена неориентированно, мы получаем не меньше двух компонент. Следовательно, $m \leq 4$. Предположим, $m = 4$. Единственная возможность состоит в том, что две хорды параллельны, а из двух хорд каждая пересекает все остальные. Более того, неориентированное разведение должно быть выбрано для одной из параллельных хорд. Непосредственная проверка показывает, что компонент будет две. Формула доказана. \square

Теорема 10. Если одно из чисел p, q, r четное (для определенности предположим, что это p), то:

а). $m = 1$:

$$\begin{aligned} N_0(p, q, r, 1) &= 0, \\ N_1(p, q, r, 1) &= P + Q + R; \end{aligned}$$

б). $m \geq 2$, четное:

$$\begin{aligned} N_0(p, q, r, 1) &= \sum_{k=0}^{m/2} \binom{Q}{2k} \binom{R}{m-2k} + P \binom{Q}{2k} \binom{R}{m-1-2k} + P \binom{R}{2k} \binom{Q}{m-1-2k}, \\ N_1(p, q, r, 1) &= P \sum_{k=0}^{(m-2)/2} \binom{Q}{2k} \binom{R}{m-1-2k} + \binom{Q}{m-1-2k} \binom{R}{2k} + \\ &+ PQ \sum_{k=0}^{(m-2)/2} \binom{Q-1}{k} \binom{R}{m-2-k} + Q \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \binom{R}{2k} \binom{Q-1}{m-1-2k} + \\ &+ PR \sum_{k=0}^{m-2} \binom{R-1}{k} \binom{Q}{m-2-k} + R \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \binom{Q}{2k} \binom{R-1}{m-1-2k}; \end{aligned}$$

в). $m \geq 3$, нечетное:

$$N_0(p, q, r, m) = 0,$$

$$\begin{aligned} N_1(p, q, r, m) &= P \sum_{k=0}^{(m-1)/2} \binom{Q}{2k} \binom{R}{m-1-2k} + \\ &+ P \sum_{k=0}^{(m-3)/2} \binom{Q}{2k} \binom{R}{m-2-2k} + \binom{Q}{m-2-2k} \binom{R}{2k} + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + PQ \sum_{k=0}^{m-2} \binom{Q-1}{k} \binom{R}{m-2-k} + Q \sum_{k=0}^{(m-1)/2} \binom{R}{2k} \binom{Q-1}{m-1-2k} + \\
& + PR \sum_{k=0}^{m-2} \binom{R-1}{k} \binom{Q}{m-2-k} + R \sum_{k=0}^{(m-1)/2} \binom{Q}{2k} \binom{R-1}{m-1-2k}.
\end{aligned}$$

Доказательство. Формула для N_0 сразу следует из леммы 4.

Пусть $S = (S_o, S_u, S_\emptyset)$ — частичное разведение, причем $|S_u| = 1$. Для N_1 выберем в первую очередь хорду a и разведем ее неориентированно. Тогда a должна быть среди p хорд, q хорд или r хорд. Предположим для начала, что a находится среди p параллельных хорд. Немедленно видим, что если из оставшихся $p-1$ хорды выбрать более одной, компонент получится не менее двух. Следовательно, выбрать можно 0 или 1 хорду.

Теперь возьмем двулистное накрытие $\Sigma_D^2(S)$, определенное в разделе 2.4, и стянем вдоль одной из лент, отвечающих a . Это даст нам гауссову диаграмму $D_a^f(S)$ (или $D_a^S(S)$), как описывалось ранее. Вопрос о D превращается вопрос о неориентированном разведении $D_a^f(S)$ для данного выбора a и еще $2(m-1)$ хорд, которое дает *в точности две компоненты*. Заметим, что, кроме a , хорды в $D_a^f(S)$ выбираются парами благодаря обратному образу двулистного накрытия. Обозначим через α число хорд, выбранных среди q хорд, и через β — число хорд, выбранных среди r хорд.

Предположим, что ни одна из параллельных a хорд не разведена ориентированно. Тогда $D_a^f(S)$ совпадает с D_5 , изображенной на рис. 13. По лемме 5, $\vec{P}_{\vec{G}_{15}}(0) = 0$ для всех $\alpha, \beta \geq 1$, и $\vec{P}'_{\vec{G}_{15}}(0) \neq 0$, если α, β не являются одновременно нечетными. Если $\alpha = \beta = 0$, то $m = 1$ и ответом является $P + Q + R$. Если $\alpha = 0, \beta \neq 0$ или $\alpha \neq 0, \beta = 0$, то по лемме 4, $D_a^f(S)$ имеет две компоненты. Следовательно, этот случай дает следующий вклад в формулу для N_1 :

$$\begin{aligned}
\text{нечетное } m: & \quad P \sum_{k=0}^{(m-1)/2} \binom{Q}{2k} \binom{R}{m-1-2k}, \\
\text{четное } m: & \quad P \sum_{k=0}^{(m-2)/2} \binom{Q}{2k} \binom{R}{m-1-2k} + \binom{Q}{m-1-2k} \binom{R}{2k}.
\end{aligned}$$

Пусть теперь одна из хорд, параллельных a , разведена ориентированно. Тогда $D_a^f(S)$ совпадает с D_6 , изображенной на рис. 13. В этом случае мы должны выбрать α, β так, что $\alpha + \beta = m - 2$. По лемме 6, $\vec{P}_{\vec{G}_6}(0) = 0$, если $\alpha \geq 1, \beta \geq 0$ или $\beta \geq 1, \alpha \geq 0$, и $\vec{P}'_{\vec{G}_6}(0) \neq 0$, если четность α и β различна. Если $\alpha = \beta = 0$, то $m = 2$ и D_6 состоит из четырех компонент. Следовательно, этот случай дает следующий вклад в формулу для N_1 :

$$\begin{aligned}
\text{нечетное } m: & \quad P \sum_{k=0}^{(m-3)/2} \binom{Q}{2k} \binom{R}{m-1-2k} + \binom{Q}{m-2-2k} \binom{R}{2k}, \\
\text{четное } m: & \quad 0.
\end{aligned}$$

Теперь рассмотрим случай, когда неориентированное разведение выбрано среди q хорд. Если ориентированно разведено больше одной из p хорд, компонент заведомо больше двух. Значит, из p хорд может быть выбрано либо ни одной, либо одна хорда. Если выбрана одна хорда, то $D_a^f(S)$ совпадает с D_7 , изображенной на рис. 13. Заметим, что $\alpha \geq 1$. По лемме 7, $\vec{P}_{\vec{G}_7}(0) = 0$ для всех $\alpha, \beta \geq 1$, и $\vec{P}'_{\vec{G}_7}(0) \neq 0$ для всех $\alpha, \beta \geq 1$. Если $\beta = 0$, то в силу леммы 4 для всякого выбора α компонент будет две. Следовательно, в данном случае вклад в N_1 имеет вид

$$PQ \sum_{k=0}^{m-2} \binom{Q-1}{k} \binom{R}{m-2-k}.$$

Далее рассмотрим случай, когда ни одна из p хорд не выбрана. Тогда $\alpha + \beta = m$, причем $\alpha \geq 1$. Значит, передвигая при необходимости отмеченную точку (что не влияет на число компонент

границы), мы можем добиться того, что косой характеристический многочлен линейно упорядоченного графа имеет вид $(\vec{P}_{\vec{K}_\beta}(x))^2 \cdot \vec{P}_{\vec{K}_\alpha \cdot \vec{K}_\alpha}(x)$ для всех $\alpha \geq 1, \beta \geq 0$. Мы получим ровно две компоненты в точности, когда β является четным, а $\alpha \geq 1$. Таким образом, вклад в N_1 имеет вид

$$Q \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \binom{R}{2k} \binom{Q-1}{m-1-2k}.$$

Аналогично, вклад в N_1 в случае выбора неориентированного разведения среди r хорд имеет вид

$$PR \sum_{k=0}^{m-2} \binom{R-1}{k} \binom{Q}{m-2-k} + R \sum_{k=0}^{\lfloor \frac{m-1}{2} \rfloor} \binom{Q}{2k} \binom{R-1}{m-1-2k}.$$

Складывая эти вклады и учитывая четность m , получаем искомую формулу. Теорема доказана. \square

5. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ И ЗАДАЧИ

В заключение приведем список открытых вопросов о косых спектрах виртуальных узлов. Автор посвятил некоторое время их изучению, но не достиг существенных успехов. Автор выражает надежду, что данный список приведет к более глубокому изучению этих вопросов.

1. Верно ли, что для всякого частичного состояния S гауссовой диаграммы D его косой спектр определяется косым спектром вполне ориентированного состояния?
2. Верно ли, что для всякого частичного состояния S гауссовой диаграммы D , в котором есть хотя бы одно неориентированное разведение, линейно упорядоченный граф двулистного накрытия может быть восстановлен по операциям на линейно упорядоченном графе \vec{G}_D ?
3. Как соотношения возникают в косых спектрах линейно упорядоченных графов для гауссовых диаграмм, связанных с соотношениями теорий узлов (например, с движениями Рейдемейстера, шестичленными соотношениями, четырехчленными соотношениями)?
4. Каков ответ на вопрос (j, m) для других бесконечнопараметрических семейств виртуальных узлов?
5. Ответы на вопрос (j, m) будут представлять собой линейные комбинации обобщенных гипергеометрических функций; Мы также знаем, что связанные с узлами многочлены и инварианты конечного типа подсчитывают число определенных поддиаграмм гауссовых диаграмм. Существуют ли гипергеометрические равенства, которые могут быть извлечены из этих вычислительных принципов, рейдемейстеровской эквивалентности и мутаций?
6. (В. О. Мантуров) Какие комбинаторные формулы могут быть определены на графах пересечений (или на спектрах графов) для последующей интеграции до инвариантов конечного типа свободных узлов?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Brandenbursky M., Polyak M.* Link invariants via counting surfaces. — Preprint, 2011.
2. *Burde G., Zieschang H.* Knots. — Berlin: Walter de Gruyter & Co., 2003.
3. *Chmutov S., Khoury M. C., Rossi A.* Polyak—Viro formulas for coefficients of the Conway polynomial// arXiv: 0810.3146v1 [math.GT], 2008.
4. *Chmutov S., Polyak M.* Elementary combinatorics for the HOMFLYPT polynomial// arXiv: 0810.4105v2 [math.GT], 2009.
5. *Chrisman M. W.* Twist lattices and the Jones—Kauffman polynomial for long virtual knots// J. Knot Theory Ramifications. — 2010. — 19, № 5. — С. 655–675.
6. *Chrisman M. W.* A lattice of finite-type invariants of virtual knots. — In preparation, 2011.
7. *Cvetković D., Rowlinson P., Simić S.* Eigenspaces of graphs. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1997.
8. *Cvetković D., Rowlinson P., Simić S.* An introduction to the theory of graph spectra. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2010.
9. *Ilyutko D. P., Manturov V. O.* Graph-links// arXiv:1001.0384v1 [math.GT].
10. *Ilyutko D., Nikonov I., Manturov V. O.* Parity in knot theory and graph-links// J. Math. Sci. — 2013. — 193, № 6. — С. 809–965.
11. *Kauffman L. H.* Virtual knot theory// Eur. J. Combin. — 1999. — 20, № 7. — С. 663–690.
12. *Maunder C. R. F.* Algebraic topology. — New York: Dover Publ. Inc., 1996.

13. *Mostovoy J., Chmutov S., Dushin S.* CDBook: Introduction to Vassiliev knot invariants. — <http://www.math.ohio-state.edu/~chmutov/preprints/>.
14. *Traldi L.* A bracket polynomial for graphs. II. Links, Euler circuits and marked graphs// *J. Knot Theory Ramifications*. — 2010. — 19, № 4. — С. 547–586.
15. *Traldi L., Zulli L.* A bracket polynomial for graphs. I// *J. Knot Theory Ramifications*. — 2009. — 18, № 12. — С. 1681–1709.
16. *Zulli L.* A matrix for computing the Jones polynomial of a knot// *Topology*. — 1995. — 34, № 3. — С. 717–729.

М. В. Крисман
Monmouth University,
Department of Mathematics
E-mail: mchrisma@monmouth.edu

О ХРОМАТИЧЕСКИХ ЧИСЛАХ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ И РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕТОК

© 2013 г. **В. О. МАНТУРОВ**

Аннотация. В настоящей работе мы приводим новые верхние оценки для хроматических чисел целочисленных, рациональных и некоторых других решеток. В частности, в работе доказано, что для каждого конкретного целого числа d хроматическое число для \mathbb{Z}^n с критическим расстоянием $\sqrt{2d}$ имеет полиномиальный рост с ростом n , причем показатель не превосходит d (иногда эта оценка является точной). То же самое верно не только для случая евклидовых норм, но также и для любых l_p -норм. Кроме того, мы приводим конкретные оценки для малых размерностей, а также некоторые верхние оценки для хроматических чисел для пространств \mathbb{Q}_p^n , где через \mathbb{Q}_p мы обозначаем кольцо всех рациональных чисел, знаменатели которых не делятся на некоторое простое число.

1. ВВЕДЕНИЕ

Хроматическим числом метрического пространства M с *запрещенным расстоянием* (или *критическим расстоянием*) d мы назовем минимальную мощность множества S , для которого найдется отображение $f : M \rightarrow S$, такое что для любых двух точек $x, y \in M$ на расстоянии d мы имеем $f(x) \neq f(y)$. Обозначим это число $\chi(M, d)$. Для краткости мы будем писать $\chi(M)$ вместо $\chi(M, 1)$.

Хроматические числа евклидовых пространств и линейных пространств над рациональными числами (в случае евклидовой нормы мы будем обозначать последние через \mathbb{Q}^n) изучались многими авторами, см., например, работы [1, 2, 6–8, 12] и ссылки в них.

Хроматические числа целочисленных решеток для норм l_2 и l_1 изучались, например, в работах З. Фюреди и Дж. Канг, где была получена нижняя экспоненциальная оценка для $\chi(\mathbb{Z}^n, \sqrt{r})$ для четных r в норме l_2 и, аналогично, для $\chi(\mathbb{Z}^n, \sqrt{r})$ для четных r в норме l_1 , однако этот результат относился к специальному случаю, когда r зависит от n (например, $r = 2q, n = 4q - 1$ для некоторого целого q). Некоторые более точные оценки были получены в работе [3].

Оказывается, что самые лучшие известные асимптотические верхние оценки для рациональных пространств — это в точности оценки для евклидовых пространств: хроматическое число для \mathbb{Q}^n ограничено сверху $(3 + o(1))^n$ при n , стремящемся к бесконечности [2, 12].

Настоящая работа является систематическим исследованием целочисленных решеток и некоторых их обобщений: решеток над пополнениями кольца целых чисел, решеток над рациональными числами и решеток над рациональными числами с некоторыми запрещенными знаменателями.

Работа организована следующим образом.

В следующем разделе мы имеем дело с маломерными целочисленными решетками, в частности, мы находим те случаи, когда хроматическое число равно трем. Эти результаты ранее не появлялись в литературе.

Основной результат настоящей работы содержится в третьем разделе: мы доказываем, что для фиксированного t хроматическое число $\chi(\mathbb{Z}^n, \sqrt{2m})$ оценивается сверху как cn^m в любой норме l_p , где c не зависит от n .

Этот результат контрастирует с оценкой на рациональных решетках, поскольку в рациональном случае доказано, что *нижняя* оценка является экспоненциальной.

Далее мы вспоминаем некоторые известные нижние оценки, происходящие из теоремы Фрэнкла—Уилсона, которые мы трактуем как оценки для целочисленных решеток.

Автор частично поддержан грантами правительства РФ 11.G34.31.0053, Президента РФ поддержки ведущих научных школ 1410.2012.1, Минобрнауки РФ 14.740.11.0794.

Другим интересным случаем является изучение хроматических чисел рациональных пространств. Мы приводим новые верхние оценки для решеток над кольцами рациональных чисел, знаменатели которых взаимно просты с 5 и 3 соответственно (теоремы 16 и 15 соответственно).

В качестве шага в сторону оценок хроматических чисел рациональных решеток мы рассматриваем решетки над рациональными числами с некоторыми запрещенными знаменателями.

Статья завершается обсуждением и некоторыми открытыми проблемами.

Благодарности. Я благодарен А. М. Райгородскому и А. Б. Купавскому за плодотворные обсуждения настоящей работы, И. Д. Шкрёдову, который обратил мое внимание на работы [14–16], и Дж.-Х. Канг за обсуждение работы [11].

2. МАЛОМЕРНЫЕ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫЕ РЕШЕТКИ

Следующая теорема очевидна (см., например, [6]).

Теорема 1. *Для любого числа k , представимого в виде суммы двух квадратов целых чисел, имеет место $\chi(\mathbb{Z}^2, \sqrt{k}) = 2$. В противном случае $\chi(\mathbb{Z}^2, \sqrt{k}) = 1$. Более того, то же самое утверждение верно для \mathbb{Z}^n .*

Для \mathbb{Z}^3 имеет смысл рассматривать лишь критические расстояния вида $\sqrt{4l+2}$, l — нечетное: в случае нечетных критических расстояний хроматическое число не превосходит двух по соображениях четности; случай, когда под квадратным корнем стоит $4l$, $l \in \mathbb{Z}$, сводится в \mathbb{R}^3 к случаю \sqrt{l} , так как любое представление числа $4l$ в виде суммы трех квадратов состоит из трех квадратов четных чисел.

Теорема 2 (Верхняя оценка: универсальная раскраска). *Для каждого $k = 4l + 2$, $l \in \mathbb{Z}$ имеет место $\chi(\mathbb{Z}^3, \sqrt{k}) \leq 4$.*

Доказательство. Рассмотрим множество точек на трехмерной решетке, у которых сумма всех трех координат является четной. Раскраска оставшихся точек будет получена из исходной раскраски сдвигом на вектор $(1, 0, 0)$.

Рассмотрим следующую «универсальную 4-раскраску» в цвета $(0, 0)$, $(0, 1)$, $(1, 0)$, $(1, 1)$, где тройке целых координат точки из \mathbb{Z}^3 мы сопоставляем два числа, первое из которых представляет собой четность первой координаты, а второе — четность второй координаты.

Ясно, что если две точки на целочисленной трехмерной решетке находятся на расстоянии $\sqrt{4l+2}$, то либо они имеют разную четность координаты z , либо они имеют разную четность координаты x . \square

Чтобы получить нижнюю оценку, нам нужно будет использовать *веретено Райского—Мозера* (см. [5, 13]), и его обобщения. Под двумерным веретеном (для критического расстояния 1) мы понимаем граф с семью вершинами, который выглядит следующим образом: одна вершина A является вершиной двух равносторонних треугольников со стороной один: ABC и $AB'C'$; также имеются два равносторонних треугольника BCD и $B'C'D'$ со стороной 1, у которых точки D и D' также находятся друг от друга на расстоянии 1 (и соединены ребром). При попытке раскрасить этот граф-веретено в три цвета мы приходим к противоречию: A и D должны иметь один и тот же цвет; то же самое верно и для A и D' . С другой стороны, D и D' находятся на расстоянии 1, так что их цвета должны быть различными.

Применяя гомотетию с целым коэффициентом к этому веретено, мы можем получить аналогичный граф с произвольным целочисленным запрещенным расстоянием. Этот граф мы также будем называть *веретеном*.

В размерности n вместо треугольников следует рассматривать пары n -мерных симплексов со стороной 1, (A, A_1, \dots, A_n) и (A, A'_1, \dots, A'_n) , имеющих общую точку A , а также точки B и B' , находящиеся на единичном расстоянии от всех $A_i, i = 1, \dots, n$ (от всех $A'_i, i = 1, \dots, n$, соответственно). При этом требуется также, чтобы B и B' были на расстоянии 1. В этом случае граф не допускает $(n+1)$ -раскраски; это приводит к доказательству того, что $\chi(\mathbb{R}^n, 1) \geq n+2$.

В случае рациональных пространств или целочисленных решеток для конкретных критических расстояний часто невозможно явно построить такое веретено. Тем не менее рассуждение можно немного поправить, рассматривая *обобщенное веретено* (или *веретено Купавского*). Пусть мы

имеем две пары треугольников $(A, B, C, D), (A, B', C', D')$ для некоторого критического расстояния в обозначениях, введенных ранее, причем точки D и D' не находятся на критическом расстоянии. Обозначим расстояние $l(D, D')$ через d . Предположим, что для любой собственной раскраски найдутся две точки \tilde{D}, \tilde{D}' разных цветов и изометрия пространства, переводящая $D \mapsto \tilde{D}, D' \mapsto \tilde{D}'$. Рассмотрим образы всех точек (A, B, C, D, B', C', D') и увидим, что их невозможно покрасить в три цвета.

Это утверждение (в несколько большей общности) для случая евклидовых пространств было доказано А. Б. Купавским [1]. Очевидно, изометрии в случае целочисленных решеток требуют более тонкого подхода, чем изометрии вещественных пространств.

Теперь, чтобы доказать нижние оценки для \mathbb{Z}^3 , нам придется часто использовать конструкцию обобщенного веретена (веретена Купавского). Заметим, что в \mathbb{Z}^3 равенство расстояний $l(D, D')$ и $l(\tilde{D}, \tilde{D}')$ не гарантирует наличия изометрии, переводящей D в \tilde{D} и D' в \tilde{D}' .

Для целочисленного случая нам понадобится следующая

Лемма 1 (Целочисленный аналог леммы Купавского). Пусть $A = (a_1, a_2, a_3)$ — точка в \mathbb{Z}^3 , такая что $a_1 + a_2 + a_3$ является четным и $\text{НОД}(a_1, a_2, a_3) = 1$. Предположим далее, что $m = b_1^2 + b_2^2 + b_3^2$ является четным для некоторых целых чисел b_1, b_2, b_3 , для которых $\text{НОД}(b_1, b_2, b_3) = 1$. Тогда для любой правильной раскраски пространства \mathbb{Z}^3 с запрещенным расстоянием \sqrt{m} найдутся точки $P, Q \in \mathbb{Z}^3$ и изометрия решетки \mathbb{Z}^3 , которая переводит начало координат в точку P , а точку A — в точку Q таким образом, что P и Q имеют разные цвета.

Доказательство. Действительно, найдется цепочка X_0, X_1, \dots, X_k , состоящая из точек решетки \mathbb{Z}^3 , от точки $(0, 0, 0) = X_0$ к точке $(b_1, b_2, b_3) = X_k$, у которой все $X_i, i = 1, \dots, k-1$ таковы, что для каждых двух соседних точек X_i, X_{i+1} вектор $X_{i+1} - X_i$ получается из вектора (a_1, a_2, a_3) в результате изометрии пространства \mathbb{Z}^3 . Теперь, так как X_0 и X_k имеют разные цвета, найдутся соседние точки X_i и X_{i+1} , имеющие разные цвета.

Доказательство существования такой цепочки остается читателю в качестве упражнения. \square

Теорема 3. $\chi(\mathbb{Z}^3, \sqrt{2}) = 4$.

В данном случае можно явно построить веретено: мы берем два треугольника $(0, 0, 0), (0, 1, 1), (1, 0, 1), (1, 1, 2)$ и аналогичную пару треугольников, которая получается из первой пары перестановкой второй и третьей координат. Точки $(1, 1, 2)$ и $(1, 2, 1)$ находятся на расстоянии $\sqrt{2}$.

Примеры запрещенного расстояния, для которого хроматическое число в трехмерном пространстве равно четырем, хорошо известны [6]. В работе [6] М. Бенда и М. Перлес поставили вопрос о существовании запрещенного расстояния в \mathbb{Q}^3 , для которого хроматическое число равно 3.

Теорема 4. Для $k = 10 + 12l, l \in \mathbb{Z}$ имеет место $\chi(\mathbb{Z}^3, \sqrt{k}) = 3$.

Доказательство. Легко можно проверить, что любое разложение числа $10 + 12l, l \in \mathbb{Z}$ в сумму трех квадратов целых чисел имеет вид $a^2 + b^2 + c^2$, где приведение по модулю 6 тройки чисел (a, b, c) совпадает с точностью до порядка с одной из троек: $(1, 3, 0), (5, 3, 0), (3, 3, 2), (3, 3, 4)$.

Далее мы будем красить точки с четной суммой координат следующим образом: для точки с координатами x, y, z мы берем класс вычетов $x + y + z$ по модулю 6, что приводит нас к раскраске в три цвета. Аналогичным образом мы получаем раскраску в три цвета для тех точек, сумма координат которых нечетна. \square

Перейдем теперь к случаю тех запрещенных расстояний для \mathbb{Z}^3 , для которых хроматическое число равно четырем.

Теорема 5. Если $m = a^2 + ab + b^2$ для некоторых целых a, b , то $\chi(\mathbb{Z}^3, \sqrt{2m}) = 4$. В частности, пусть $p = 6k + 1$ — простое число (k — целое). Тогда $\chi(\mathbb{Z}^3, \sqrt{2p}) = 4$.

Доказательство. Действительно, предположим сначала, что $m = a^2 + ab + b^2$ для взаимно простых a, b .

Мы предположим, что наше пространство имеет хроматическое число 3, и попробуем прийти к противоречию. Предположим сначала, что ровно одно из чисел a и b является нечетным; без ограничения общности будем считать, что a нечетно, b четно.

Мы имеем $2m = a^2 + b^2 + (a+b)^2$. Таким образом, расстояние между двумя векторами имеет вид $\sqrt{2m}$, если разности их координат равны $\pm a, \pm b, \pm(a+b)$ с точностью до порядка. Таким образом, у нас есть возможность выбора различных векторов для построения обобщенного веретена.

Рассмотрим сначала два треугольника ABC, BCD со следующими вершинами: $A = (0, 0, 0)$, $B = (a, b, a+b)$, $C = (-b, a+b, a)$, $D = (a-b, a+2b, 2a+b)$.

Мы теперь можем построить другие пары треугольников с начальной вершиной $A = (0, 0, 0)$ посредством перестановки координат и добавления знака «минус» к a и/или к b . Например, имеется пара треугольников с концом $D' = (-a-b, -2a+b, -a+2b)$, противоположным A . Теперь легко видеть, что наибольший общий делитель $\text{НОД}(-a-b, -2a+b, -a+2b)$ равен 1 или 3. Если он равен 3, то, заменяя b на $-b$, мы получаем $\text{НОД}(-a+b, -2a-b, -a-2b) = 1$, что приводит нас к построению веретена.

В случае, когда оба числа a, b являются нечетными, мы заметим, что та же самая пара треугольников может быть получена, если мы начнем с пары чисел $(a, a+b)$: число $(a+b)$ является четным.

В случае, когда a и b не являются взаимно простыми, мы возьмем $c = \text{НОД}(a, b)$, $a = a'c$, $b = b'c$ и построим аналогичное веретено для подрешеток, состоящих из точек пространства со всеми координатами, делящимися на c .

Теперь мы применим лемму 1 и увидим, что после применения изометрии к \mathbb{Z}^3 образы точек \tilde{D} и \tilde{D}' будут иметь различные цвета. Беря образы всех точек A, B, C, D, B', C', D' , мы получим противоречие с тем, что хроматическое число пространства равно 3. \square

Собирая вместе приведенные выше результаты о раскрасках пространства \mathbb{Z}_3 , мы получаем следующую теорему

Теорема 6. *Имеют место следующие оценки:*

1. $\chi(\mathbb{Z}^3, \sqrt{m}) = 2$, если и только если m нечетно и представимо в виде суммы двух квадратов;
2. для четного m $\chi(\mathbb{Z}^3, \sqrt{m})$ равно либо 3, либо 4;
3. если $m \equiv 10 \pmod{12}$, то $\chi(\mathbb{Z}^3, \sqrt{m}) = 3$;
4. если $m = 2(a^2 + b^2 + ab)$, $a, b \in \mathbb{Z}$, то $\chi(\mathbb{Z}^3, \sqrt{m}) = 4$;
5. $\chi(\mathbb{Z}^3, \sqrt{m}) = \chi(\mathbb{Z}^3, 2\sqrt{m})$.

Единственное из утверждений приведенной выше теоремы, которое мы пока не доказали, — это 2. Мы докажем его в несколько шагов.

а) Достаточно доказать его для $m = 2p$ при p .

б) Будем считать, что $m = 2p = a^2 + b^2 + c^2$, где $\text{НОД}(a, b, c) = 1$.

в) Из упражнения на с. 112 следует, что существует цепочка в \mathbb{Z}^3 , соединяющая начало координат с точкой $(0, 1, 1)$, у которой любые два соседних узла находятся на расстоянии \sqrt{m} .

г) Если найдется цепочка вида в) длины l , то мы можем легко построить «такую же» цепочку из начала координат в $(1, 0, 1)$, а также из $(1, 0, 1)$ в $(0, 1, 1)$. Это приводит к построению замкнутой цепочки длины $3l$, что противоречит возможности раскраски пространства в два цвета.

д) Предположим, что цепочка из пункта в) имеет четную длину. Тогда мы можем построить цепочку в \mathbb{Z}^3 четной длины (с длиной звена \sqrt{m}) от начала координат до точки, у которой сумма координат четна. В частности, имеется цепочка четной длины от начала координат до точки $(a+1, b, c+1)$. Таким образом, имеется цепочка нечетной длины от начала координат до $(1, 0, 1)$. Из пункта г) следует противоречие с раскраской в 2 цвета.

Теорема доказана.

Первое критическое расстояние, не охватываемое доказанной теоремой — это $\sqrt{30}$.

Гипотеза 1. *В трехмерном пространстве нет других примеров с хроматическим числом 3, иными словами, $\chi(\mathbb{Z}^3, \sqrt{m}) = 3$ имеет место только для тех m , которые могут быть представлены в виде $2^{2k}l$, где $l \equiv 10 \pmod{12}$.*

Перейдем теперь к случаям размерностей 4 и 5.

Теорема 7. *Имеют место следующие утверждения:*

1. (А. Б. Купавский) Для $k = 4l + 2$, $l \in \mathbb{Z}$, мы имеем $\chi(\mathbb{Z}^4, \sqrt{k}) \leq 4$, $\chi(\mathbb{Z}^5, \sqrt{k}) \leq 8$.

2. $\chi(\mathbb{Z}^4, \sqrt{8k}) = \chi(\mathbb{Z}^4, \sqrt{2k})$.
3. $\chi(\mathbb{Z}^4, \sqrt{4l}) \leq 4$ при нечетных l .

Доказательство. Для доказательства первого утверждения нам достаточно раскрасить единичный куб $\{0, 1\}^4$ (соответственно $\{0, 1\}^5$), который отвечает четностям координат. Действительно, если две точки в \mathbb{Z}^4 (соответственно в \mathbb{Z}^5) имеют одну и ту же четность у всех координат, то квадрат расстояния между этими точками делится на четыре. Кроме того, достаточно раскрасить только «половину» куба, состоящую из тех точек, сумма координат которых четна («нечетная» половина куба рассматривается аналогично). Таким образом, в \mathbb{Z}^4 (на самом деле — в $\{0, 1\}^4$) мы раскрашиваем 8 точек (a, b, c, d) , $a, b, c, d \in \mathbb{Z}_2$, $a + b + c + d \equiv 0$ по модулю 2 в четыре цвета таким образом, что каждые две противоположные точки (x, y, z, t) и $(1 - x, 1 - y, 1 - z, 1 - t)$ имеют один цвет. В пятимерном случае достаточно использовать приведенную выше раскраску для четырехмерного подкуба и добавить дополнительные пару цветов, отвечающие за пятую координату: итого мы получим восемь цветов.

Второй результат следует из того факта, что сумма квадратов четырех целых чисел, из которых по крайней мере одно является нечетным, не может делиться на восемь, так что проблема сводится к случаю, когда все координаты являются четными.

Верхняя оценка в третьем случае получается следующим образом. В качестве цвета мы возьмем пару классов вычетов. Первый класс равен четности первой координаты. Второй класс равен сумме четностей $\left[\frac{x_i}{2}\right]$ по всем $i = 1, 2, 3, 4$. \square

Замечание 1. Заметим сначала, что приведенная выше оценка дает *универсальную раскраску* для всех запрещенных расстояний тех типов, которые приведены в формулировке теоремы. Приведенное выше доказательство первого утверждения может быть обобщено на высшие размерности. Мы обсудим вопрос о верхних оценках для $\chi(\mathbb{Z}^n, 4k + 2)$ в отдельной статье.

3. Для каждого m рост числа $\chi(\mathbb{Z}^n, \sqrt{2m})$ полиномиален по n и имеет степень не больше m

Хорошо известно (см., например, [2]), что для рациональных пространств хроматическое число растет экспоненциально с ростом размерности. Ниже мы доказываем, что в случае целочисленных решеток при фиксированном запрещенном расстоянии это никогда не имеет места.

Начнем с хорошо известной теоремы о целочисленных решетках (см., например, [6]). Раскраска посредством скалярного произведения будет далее использоваться в доказательстве основной теоремы.

Следующая теорема хорошо известна.

Теорема 8. Рост хроматического числа $\chi(\mathbb{Z}^n, \sqrt{2})$ линеен при стремлении n к бесконечности.

Доказательство. Чтобы получить нижнюю оценку (см. [11]), рассмотрим множество точек в \mathbb{Z}^n , у которых в точности одна координата равна ± 1 , а остальные равны нулю. Ясно, что это множество не может быть покрашено менее чем в n цветов при $n \geq 2$.

Верхняя оценка достигается посредством следующей раскраски. В \mathbb{Z}^n рассмотрим следующий вектор: $v = (1, 3, 5, 7, \dots, 2n - 1)$. Для каждого $u \in \mathbb{Z}^n$ рассмотрим скалярное произведение $\langle u, v \rangle$. Ясно, что если два целочисленных вектора u_1, u_2 находятся на расстоянии $\sqrt{2}$, то мы имеем $\langle u_1, v \rangle \neq \langle u_2, v \rangle$. Более точно, разность значений $\langle \cdot, v \rangle$ для этих векторов является целым числом, модуль которого расположен между 2 и $4n - 4$. Следовательно, если мы возьмем класс вычетов этого скалярного произведения по модулю $4n - 2$ в качестве раскраски, мы получим правильную раскраску в $(2n - 1)$ цветов. \square

Идея раскрасок посредством скалярных произведений по модулю некоторых целых чисел будет далее использоваться в более сложных ситуациях. В частности, она будет использована для доказательства нашего главного результата — полиномиальной верхней оценки для хроматического числа целочисленной решетки с фиксированным запрещенным расстоянием.

Теорема 9. Для каждого фиксированного t верхняя оценка для $\chi(\mathbb{Z}^n, \sqrt{2t})$ в любой норме l_α полиномиальна по n и имеет степень не больше t .

Перед тем, как доказывать эту теорему в общем случае, который опирается на некие глубокие факты из аддитивной комбинаторики, построим явную раскраску для некоторого частного случая.

Утверждение 1. $\chi(\mathbb{Z}^n, 2)$ растёт квадратично при $n \rightarrow \infty$.

Докажем верхнюю оценку. Нижняя оценка на самом деле хорошо известна и будет доказана позже.

Пусть n — целое число. Пусть p — простое число, причем $p \leq n \leq 2p$.

Мы докажем квадратичную верхнюю оценку для простого p , которая очевидно влечет квадратичную верхнюю оценку при $n \rightarrow \infty$. Рассмотрим множество $(k, a^k \bmod p)$ из p элементов из абелевой группы $S = \{0, \dots, p-1\} \times \{0, \dots, p-1\}$: где k пробегает $\{1, \dots, p-1\}$, а a является первообразным корнем степени $(p-1)$ из единицы в \mathbb{Z}_p .

Можно легко заметить, что для любых четырех различных элементов a, b, c, d из описанного выше подмножества мы имеем $a - b \neq c - d$. Действительно, если для некоторых $e, f, g, h \in \mathbb{Z}_p$ имеет место $f - e = h - g$ и $h \neq f, e \neq g$, то мы видим, что $a^f - a^e$ отличается от $a^h - a^g$ умножением на a^{f-h} .

Мы построили множество (абелеву группу), в которой нет решений уравнения $a - b = c - d$ при различных a, b, c, d . Модифицируем теперь это множество, чтобы избавиться от решения еще некоторых (более простых) уравнений.

Возьмем теперь множество $S' \subset \mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ целых чисел $(4k - 3, a^k \bmod p)$, где $a^k \bmod p$ рассматривается как целое число между 0 и $p - 1$ (здесь мы пользуемся включением $\mathbb{Z}_p \subset \mathbb{Z}$).

Лемма 2. Для любых четырех различных элементов $a, b, c, d \in S'$ мы имеем:

1. никакая из сумм $\pm a \pm b \pm c \pm d$ не равна нулю.
2. абсолютное значение первой координаты суммы $\pm a \pm b \pm c \pm d$ не превосходит $16p$, а абсолютное значение второй координаты суммы не превосходит $4p$.

Доказательство. Второе утверждение очевидно.

Выше мы доказали, что из $a - b = c - d$ для $a, b, c, d \in S'$ следует, что $a = c$ или $a = b$. Уравнение $a + b + c + d = 0$ не имеет решений, поскольку a, b, c, d положительны, а неравенство $a + b + c - d \neq 0$ вытекает из рассмотрения соответствующих вычетов по модулю 4. \square

Рассматривая теперь S' как подмножество абелевой группы $S'' = \mathbb{Z}_{16p+1} \times \mathbb{Z}_{4p+1}$, мы видим, что для любых четырех различных элементов $a, b, c, d \in S' \subset S''$ имеет место $\pm a \pm b \pm c \pm d \neq 0 \in S''$. Мы назовем p элементов, образующих подмножество $S' \subset S''$, *отмеченными элементами* из S'' . Обозначим эти отмеченные элементы из S'' через q_1, \dots, q_p . Они образуют вектор, который мы будем использовать для построения раскраски.

Для каждого вектора $x = (x_1, \dots, x_p) \in \mathbb{Z}^p$ пусть x'_j — класс вычетов по модулю p от x_j , рассмотренный как целое число от 0 до $p - 1$. Вектору x мы сопоставим элемент (цвет) $f(x) = \sum x'_j q_j \in S''$ из группы S'' .

Лемма 3. Если расстояние между двумя точками x, \tilde{x} равно двум, то $f(x) \neq f(\tilde{x})$ в S'' .

Доказательство. Действительно, так как все элементы q_i ненулевые, две точки, у которых совпадают все координаты, кроме одной, а одна координата отличается на два, имеют разные цвета. Если у двух точек совпадают все координаты, кроме четырех, а каждая из четырех оставшихся координат отличается на ± 1 , то эти точки имеют разные цвета в силу леммы 2. \square

Принимая теперь во внимание, что $|S''|$ имеет порядок роста n^2 при стремлении n к бесконечности, мы получаем утверждение 1.

Возвратимся теперь к доказательству теоремы 9. Нам нужно доказать эту теорему в l_2 -норме. Конструкция, которую мы будем использовать в доказательстве, на самом деле одна и та же для всех норм l_α .

Начнем с нижней оценки. Пусть \mathcal{M} — подмножество множества целых чисел, имеющее мощность $N = |\mathcal{M}|$. Фиксируем целое число m . Следующий вопрос исследовался многими авторами (см., например, работы [14–16] и ссылки в них).

Какова наибольшая мощность подмножества $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$, для которого имеются нетривиальные решения уравнения

$$a_1 + \dots + a_m - a_{m+1} - \dots - a_{2m} = 0, \quad (1)$$

где $a_i, i = 1, \dots, 2m \in \mathcal{M}$? Что можно сказать в случае, когда N стремится к бесконечности?

Ответ зависит, конечно, от того, как мы определим *нетривиальное решение*. Мы возьмем определение из работы [14] (множества, не имеющие нетривиальных решений аналогичных линейных уравнений, называются *множествами Сидона*).

Решение уравнения (1) назовем *тривиальным*, если имеется в точности l различных элементов a_j , так что если мы зафиксируем одно конкретное a_j и положим все a_k , не равные a_j , равными 0, мы по-прежнему будем иметь решение.

Например, при $m = 4$, решение $a_1 = a_3 = 1, a_2 = a_4 = 2$ является тривиальным, в то время как решение $a_1 = 0, a_2 = 2, a_3 = a_4 = 1$ нетривиально.

В работе [14] доказано следующее утверждение

Утверждение 2. *Имеется бесконечная последовательность абелевых групп \mathcal{M}_N и подмножеств в этих группах \mathcal{M}'_N , для которых нет нетривиальных решений уравнения (1), где переменные принадлежат подмножеству, причем n растет как $(1 + o(1))N^{1/m}$, где N и n обозначают мощности множеств \mathcal{M}_N и \mathcal{M}'_N соответственно.*

Заметим, что если N достаточно велико, то мы можем считать, что $n > N^{1/m} \frac{1}{2}$. Следовательно, если мы берем достаточно большое конкретное n , то N может быть выбрано не больше, чем $2n^m = O(n^m)$.

Заметим теперь, что нетривиальные решения уравнения (1) могут быть рассмотрены также и как решения многих других уравнений (2), см. ниже.

Например, если в некотором множестве $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$ мы имеем три элемента a, b, c , образующие арифметическую прогрессию $c + a = 2b$, то это приводит к нетривиальному решению уравнения (1): мы полагаем $a_1 = a, a_2 = c, a_3 = b, a_4 = b$.

Более того, имеет место следующая очевидная

Лемма 4. *Пусть $k < m$ и $\alpha_1, \dots, \alpha_k$ — набор целых чисел, таких что $\sum |\alpha_i| < m$ и $\sum \alpha_i = 0$. Тогда любое решение системы*

$$\sum_{i=1}^k \alpha_i b_i = 0 \quad (2)$$

приводит к решению системы (1).

Доказательство. Действительно, соберем отдельно все положительные α_i и отдельно — все отрицательные α_j . Пусть (b_1, \dots, b_k) — решение уравнения (2). Для каждого положительного α_i выберем α_i штук переменных из числа a_1, \dots, a_m и положим их равными b_i , а для каждой переменной α_j с отрицательным значением мы положим $-\alpha_j$ элементов из числа a_{m+1}, \dots, a_{2m} равными b_j . Это возможно, так как $\sum |\alpha_i| < m$. Теперь мы полагаем оставшиеся a_k равными 0. Утверждение следует. \square

Теперь мы модифицируем множество \mathcal{M}' следующим образом. Пусть $\tilde{\mathcal{M}}' = \mathcal{M}' + s$, где прибавление s означает сдвиг на достаточно большое положительное число. Это число выбирается таким образом, чтобы отношение между минимальным модулем элемента из $\mathcal{M}' + s$ и максимальным модулем элемента из $\mathcal{M}' + s$ было строго больше, чем $\frac{m-2}{m}$. Сначала мы рассматриваем \mathcal{M}' как подмножество множества \mathbb{N} натуральных чисел. Ясно, что s растет линейно с ростом m . Это делается для того, чтобы избежать решений уравнений (2), где переменные берутся из \mathcal{M}' , а сумма коэффициентов не равна нулю. Далее мы «расширяем» группу \mathcal{M} ; новая группа $\tilde{\mathcal{M}}$ также будет циклической группой $\mathbb{Z}_{2f(s)}$, где $f(s)$ — натуральное число, большее, чем модуль максимального элемента из \mathcal{M} , умноженного на $m + 1$.

Теорема 10. *Пусть $\beta_i, i = 1, \dots, k$, — коэффициенты, такие что сумма $\sum |b_i|$ четна и $\sum \beta_i \neq 0$. Тогда у уравнений (1), (2) нет нетривиальных решений в $\tilde{\mathcal{M}}'$; кроме того, для того*

же подмножеств нет нетривиальных решений уравнений

$$\sum_{i=1}^k \beta_i c_i = 0. \quad (3)$$

Иными словами, построив абелеву группу и подмножество, для которых нет решений тех уравнений (1) и (2), у которых сумма коэффициентов равна нулю, мы можем легко «запретить» решения всех уравнений, где сумма коэффициентов не равна нулю, «сдвигая» наши множества на некоторое натуральное число $\mu(m)$, не зависящее от n .

Теперь мы готовы доказать основную теорему. Заметим сначала, что любое разложение четного n в сумму квадратов — это набор целых чисел, которые могут служить коэффициентами уравнений типа (2) или (3). Более того, подставляя элементы из \mathcal{M}' , рассмотренные как целые числа, в уравнения (1), (2) или (3), мы получаем целое число, абсолютное значение которого меньше, чем $\lambda(m)n^m$, где $\lambda(m)$ — это некоторая функция от m , не зависящая от n .

Фиксируем четное натуральное число m .

Рассмотрим все возможные представления числа n в виде суммы квадратов $\sum n_i^2$ целых чисел. Такое представление может содержать не более n слагаемых, более того, сумма этих слагаемых четна.

Выберем теперь множество \mathcal{M}' мощности n и абелеву группу $\mathcal{M}' \supset \mathcal{M}$ мощности $|\tilde{\mathcal{M}}| = O(n^m)$ так, чтобы уравнения (1), (2) не имели решения среди элементов этого множества. Сдвигая на достаточно большое целое число множество $\tilde{\mathcal{M}}$ и подмножество $\tilde{\mathcal{M}}'$ в нем, мы по-прежнему не будем иметь решения уравнения (3) в подмножестве.

Обозначим элементы из $\tilde{\mathcal{M}}'$ на x_1, \dots, x_n и зафиксируем вектор (x_1, \dots, x_n) из \mathbb{Z}^n .

Сопоставим теперь элементам (векторам) $y = \mathbb{Z}^n$ целые числа $\langle x, y \rangle$. Если две точки y, y' находятся на расстоянии $\sqrt{2m}$, то $\langle y - y', x \rangle \neq 0$. Действительно, координаты разности $y - y'$ образуют разложение числа n в сумму квадратов, а числа x_1, \dots, x_n выбраны так, что для них не выполняется ни одно из уравнений (2), (3). Таким образом, скалярные произведения для таких точек различны.

Кроме того, $\langle y'_1, x \rangle$ не превосходит числа $(\max_{x \in \mathcal{M}} |x|)m$, которое растет как $O(n^m)$.

Таким образом, беря класс вычетов этого скалярного произведения по модулю $\lambda(m)n^m + 1$, мы получаем раскраску пространства \mathbb{Z}^n с запрещенным расстоянием $\sqrt{2m}$ в норме l_2 .

Доказательство для любой другой нормы l_α с той же самой оценкой полностью аналогично.

4. Нижние оценки для хроматических чисел целочисленных решеток

Мы получили верхние полиномиальные оценки для хроматических чисел пространств \mathbb{Z}^n . Покажем теперь, что для многих фиксированных m показатели степеней в оценках cn^m для $\chi(\mathbb{Z}^n, \sqrt{2m})$ являются оптимальными.

Пусть S — метрическое пространство и d — критическое расстояние. Назовем (M, D) -критической конфигурацией подмножество $\mathcal{M} \subset S$ мощности M , такое что для любого подмножества $\mathcal{M}' \subset \mathcal{M}$, для которого никакие две точки $a, b \in \mathcal{M}'$ не находятся на критическом расстоянии d , мощность $|\mathcal{M}'|$ не превосходит D .

Согласно принципу Дирихле, если существует критическая (M, D) -конфигурация в S , то $\chi(S, d) \geq \chi(\mathcal{M}, d) \geq \frac{M}{D}$.

Нижняя оценка для $\chi(\mathbb{Z}^n, 2)$ хорошо известна. Мы приведем ее здесь для целостности картины.

Мы построим конкретную критическую конфигурацию. Фиксируем натуральное число n , и пусть $S = \mathbb{Z}^n$, \mathcal{M} — множество всех точек из \mathbb{Z}^n , у которых три координаты равны единице, а остальные равны нулю, а \mathcal{M}' — подмножество множества \mathcal{M} , в котором никакие две точки не находятся на расстоянии два. Ясно, что $|\mathcal{M}| = \binom{n}{3}$. Любая точка из \mathcal{M}' может быть рассмотрена как тройка координат, равных единице (все остальные координаты этой точки равны нулю). Теперь тот факт, что две точки x и y из \mathcal{M}' находятся на расстоянии, не равном двум, означает в точности, что соответствующие им тройки либо не пересекаются, либо имеют в точности две общие координаты. Теперь легко видеть, что количество элементов из \mathcal{M}' , для которых это условие

выполняется, не превосходит n . Таким образом, \mathcal{M} является (M, D) -критической конфигурацией, где $M = |\mathcal{M}| = \frac{n(n-1)(n-2)}{6}$ и $D = n$.

Следовательно, хроматическое число для \mathbb{Z}^n с критическим расстоянием 2 не меньше, чем $\frac{(n-1)(n-2)}{6}$.

Методы нахождения (M, D) -критических конфигураций широко используются для нахождения нижних оценок для хроматических чисел решеток в произвольных размерностях, при этом главным инструментом для нахождения таких конфигураций является теорема Фрэнкла—Уилсона [10]; дальнейшие модификации теоремы Фрэнкла—Уилсона см. в работе [2].

Теорема 11 (Теорема Фрэнкла—Уилсона). *Фиксируем n -элементное множество*

$$\mathcal{N} = \{1, \dots, n\}.$$

Пусть p — степень простого числа, и пусть a — натуральное число, такое что $a < 2p$. Пусть, далее, \mathcal{M} — набор a -элементных подмножеств множества \mathcal{N} , таких что мощность пересечения любых двух из них не равна $a - p$. Тогда

$$|\mathcal{M}| \leq \binom{n}{p-1}.$$

Модификации теоремы Фрэнкла—Уилсона можно прочесть в работе [4].

Мы сейчас покажем, что для многих четных чисел $2m$ показатель m в верхней оценке n^m для хроматического числа $\chi(\mathbb{Z}^n, \sqrt{2m})$ является оптимальным для m , равного степени простого числа. Действительно, достаточно рассмотреть подмножества множества \mathcal{N} как элементы из \mathbb{Z}^n , координаты которых равны 1 и 0 (i -я координата равна единице, если и только если $i \in \mathcal{N}$).

Приводимый ниже факт можно прочесть, например, в работе [2]; однако в точности это же рассуждение ранее использовалось для оценки хроматического числа для \mathbb{R}^n , а не для \mathbb{Z}^n .

Теорема 12. *Пусть p — степень простого числа. Тогда $\chi(\mathbb{Z}^n, \sqrt{2p}) \geq \frac{\binom{n}{2p-1}}{\binom{n}{p-1}}$.*

Доказательство. Действительно, достаточно рассмотреть все векторы длины $2p - 1$ и запретить векторам иметь «пересечение» длины $p - 1$, или, эквивалентно, запретить векторам быть на расстоянии $\sqrt{2p}$. Отсюда получаем требуемое. \square

Таким образом, если p — степень простого числа, то мы доказали, что рост $\chi(\mathbb{Z}^n, \sqrt{2p})$ является полиномиальным по n степени p .

5. ОЦЕНКИ ДЛЯ РАЦИОНАЛЬНЫХ РЕШЕТОК \mathbb{Q}^n

Теорема 13. *Для рационального k , которое может быть представлено в виде суммы двух квадратов рациональных чисел, мы имеем $\chi(\mathbb{Q}^2, \sqrt{k}) = 2$. В противном случае $\chi(\mathbb{Q}^2, \sqrt{k}) = 1$.*

Пусть $m = \frac{p}{q}\sqrt{l}$, где l — нечетное число, представимое в виде суммы двух квадратов целых чисел. Тогда

$$\chi(\mathbb{Q}^3, m) = 2; \quad \chi(\mathbb{Q}^4, m) \leq 4.$$

Доказательство. Утверждения, относящиеся к \mathbb{Q}^2 , очевидны. Перейдем теперь к \mathbb{Q}^3 . Без ограничения общности мы можем считать, что $m = \sqrt{l}$.

Раскрасим пространство \mathbb{Q}^3 в два цвета следующим образом. Пусть $(a, b, c) \in \mathbb{Q}^3$ и d — минимальный общий знаменатель чисел a, b, c . Запишем $a = \frac{a'}{d}$, $b = \frac{b'}{d}$, $c = \frac{c'}{d}$. В качестве цвета мы возьмем вычет по модулю два числа $a' + b' + c'$. Очевидно, что если две точки находятся на расстоянии \sqrt{l} , то они имеют разные цвета.

Заметим теперь следующее. Если хотя бы одно из чисел $a, b, c \in \mathbb{Q}$ имеет четный знаменатель в приведенном виде, то сумма квадратов чисел a, b, c не может быть целым числом. Аналогично, если хотя бы один из трех знаменателей содержит в качестве сомножителя 2^k , то сумма трех квадратов

не может быть квадратом рационального числа, знаменатель которого содержит степень двойки, меньшую чем k .

Теперь мы используем тот факт, что числа, имеющие разные степени двойки в знаменателях, «не взаимодействуют»: сумма квадратов трех целых чисел, по крайней мере одно из которых нечетно, не может быть четной.

Теперь мы продолжим эту раскраску на те точки рациональной решетки, у которых координаты имеют четные знаменатели. Мы сначала сдвинем точки исходной решетки (с их цветами) на векторы $\left(\frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(0, 0, \frac{1}{2}\right)$; далее мы сдвинем нашу раскраску на координатные векторы длины $\frac{1}{4}$ и т. д.

Чтобы получить оценку для хроматического числа пространства \mathbb{Q}^4 , мы сначала раскрасим точки, у которых ни одна из координат не имеет (в приведенной форме) знаменателя, делящегося на четыре. Каждый вектор v такого вида может быть записан как $\left(\frac{a}{2s}, \frac{b}{2s}, \frac{c}{2s}, \frac{d}{2s}\right)$, где s — некоторое нечетное число (возможно, некоторые из чисел a, b, c, d четные). Такой точке мы сопоставим цвет $\alpha(v)$, равный классу вычета элемента a по модулю 2.

Пусть $v_1 = \left(\frac{a}{2s}, \frac{b}{2s}, \frac{c}{2s}, \frac{d}{2s}\right)$ и $v_2 = \left(\frac{a'}{2t}, \frac{b'}{2t}, \frac{c'}{2t}, \frac{d'}{2t}\right)$ — два таких вектора; t и s — нечетные числа. Если $|v_1 - v_2| = l$, то имеет место одна из возможностей: либо все числа $a - a'$, $b - b'$, $c - c'$, $d - d'$ нечетные (в этом случае $\alpha(v) \neq \alpha(v')$), либо все эти числа четные.

Определим теперь $\beta(v)$ следующим образом. Сначала мы определим $\beta(v)$ для точек из \mathbb{Q}^4 , координаты которых имеют нечетные знаменатели: $\beta(v)$ будет просто равно сумме числителей. Далее мы продолжим определение на те точки, координаты которых имеют знаменатели, не делящиеся на 4, посредством параллельных сдвигов на векторы $\left(\frac{1}{2}, 0, 0, 0\right)$, $\left(0, \frac{1}{2}, 0, 0\right)$, $\left(0, 0, \frac{1}{2}, 0\right)$, $\left(0, 0, 0, \frac{1}{2}\right)$.

Теперь мы видим, что если два вектора (v_1, v_2) со знаменателями координат, не делящимися на четыре, находятся на расстоянии \sqrt{l} , то либо $\alpha(v_1) \neq \alpha(v_2)$, либо $\beta(v_1) \neq \beta(v_2)$. Таким образом, мы построили раскраску в четыре цвета α, β для точек, у которых знаменатели координат не делятся на 4.

Теперь мы продолжим эту раскраску сдвигами на векторы $\frac{1}{2^l}$, где $l \geq 2$. Здесь мы используем тот факт, что сумма квадратов четырех целых чисел, хотя бы одно из которых нечетно, не может делиться на 16. \square

Теорема 14. Пусть $m = \sqrt{2l} \frac{p}{q}$, где l — нечетное число, такое что $2l$ представимо в виде суммы квадратов двух целых чисел. Тогда мы имеем:

$$\chi(\mathbb{Q}^4, m) \leq 4, \quad \text{следовательно,} \quad \chi(\mathbb{Q}^3, m) \leq 4.$$

Доказательство. Доказательство для точек из \mathbb{Q}^4 , координаты которых имеют нечетные знаменатели, повторяет рассуждение для \mathbb{Z}^4 из теоремы 7: вместо четностей целых чисел мы берем четности числителей дробей с нечетными знаменателями.

Далее это раскрашивание продолжается на \mathbb{Q}^4 сдвигом на координатные векторы длины $\frac{1}{2^k}$, $k > 0$, как в доказательстве теоремы 13.

Здесь нужно принять во внимание, что сумма четырех квадратов целых чисел не может делиться на 8, если хотя бы одно из этих чисел нечетно. \square

6. РАСКРАСКИ НЕКОТОРЫХ КОНЕЧНЫХ ГРАФОВ

Рассмотрим поля \mathbb{Z}_3 и \mathbb{Z}_5 ; мы построим графы \mathbb{Z}_3^n и \mathbb{Z}_5^n и снабдим их (псевдо)метрикой, которая получается взятием обычной l_2 -метрики по модулю 3 (соответственно по модулю 5).

Имеет место следующая

Теорема 15. $\chi(\mathbb{Z}_3^n, 1) \leq c(\sqrt[3]{9})^n$.

Доказательство. Доказательство проводится индукцией по размерности n . Нам достаточно доказать, что для размерности $n = 2 + 3k$ мы имеем $\chi(\mathbb{Z}_3^n) \leq 3^{2k+1}$ для натуральных k .

Для \mathbb{Z}_3^2 мы будем использовать три цвета для раскраски девяти точек: в качестве цвета мы просто берем класс вычетов суммы трех координат по модулю три.

Пусть теперь у нас имеется правильная раскраска для \mathbb{Z}_3^{2+3k} ; построим правильную раскраску для \mathbb{Z}_3^{5+3k} следующим образом. Мы красим первые $2 + 3k$ координаты в 3^{2k+1} цветов и берем девять цветов для \mathbb{Z}_3^3 . Цвет \mathbb{Z}_3^{5+3k} будет состоять из двух составляющих, одна из которых будет представлять собой цвет первых $2 + 3k$ координат, а вторая — некоторый цвет для последних трех координат. Вторая составляющая будет представлять собой один из девяти цветов, а именно, для трех последних координат $(a, b, c) \in \mathbb{Z}_3^3$ мы в качестве цвета возьмем пару $(b - a, c - a) \in \mathbb{Z}_3 \oplus \mathbb{Z}_3$. Если для двух точек (a, b, c) и (a', b', c') из \mathbb{Z}_3^3 мы имеем $b - a \equiv b' - a' \pmod 3$ и $c - a \equiv c' - a' \pmod 3$, то эти точки будут либо совпадать в случае, если $a = a'$, либо эти точки (a, b, c) и (a', b', c') будут на расстоянии три, если $a \neq a'$. В любом случае, так как расстояние берется по модулю 3, такая раскраска последних трех координат запрещает расстояния, сравнимые с единицей или двойкой по модулю три.

Мы утверждаем, что такая раскраска в для \mathbb{Z}_3^{5+3k} является правильной: никакие две точки на расстоянии, сравнимом с единицей по модулю три, не будут иметь один и тот же цвет. Действительно, если две точки $x, y \in \mathbb{Z}_3^{5+3k}$ находятся на расстоянии, сравнимом с единицей по модулю три, то либо расстояние между их проекциями на первые три координаты сравнимо с единицей по модулю три, либо расстояние между их проекциями на последние три координаты не сравнимо с нулем по модулю три. В первом случае у них различается первая компонента цвета, а во втором случае у них различается вторая компонента цвета.

Этим завершается шаг индукции. \square

Теорема 16. $\chi(\mathbb{Z}_5^n, 1) \leq c'(\sqrt{5})^n$.

Доказательство. Доказательство аналогично приведенному выше доказательству для \mathbb{Z}_3^n . Мы устанавливаем базу индукции, раскрашивая \mathbb{Z}_5 в пять различных цветов; после этого мы раскрашиваем \mathbb{Z}_5^2 в пять цветов таким образом, чтобы две точки имели один цвет тогда и только тогда, когда они находятся на расстоянии, сравнимом с нулем по модулю пять. А именно, для $(a, b) \in \mathbb{Z}_5^2$ мы в качестве цвета берем $a - 2b \pmod 5$. Далее мы осуществляем шаг индукции: для каждых следующих двух координат мы умножаем количество цветов на пять, откуда следует утверждение теоремы. \square

Замечание 1. Приведенные выше оценки остаются верными, если вместо запрещенного расстояния 1 мы запретим все расстояния, сравнимые с единицей по модулю три (соответственно по модулю пять).

7. ОЦЕНКИ ДЛЯ РЕШЕТОК НАД АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ РАСШИРЕНИЯМИ КОЛЬЦА \mathbb{Z}

Пусть p_1, \dots, p_k — набор целых чисел. Через $\mathbb{Q}_{p_1, p_2, \dots, p_k}$ мы обозначим кольцо рациональных чисел с знаменателями, взаимно простыми с $p_1 \dots p_k$. Через \mathbb{Q}_{odd} мы обозначим множество рациональных чисел с нечетными знаменателями.

Теорема 17. $\chi(\mathbb{Q}_{\text{odd}}^n, 1) = 2$. Более того, для любого расширения \mathcal{K} кольца целых чисел, для которого существует гомоморфизм $\mathcal{K} \rightarrow \mathbb{Z}_2$, мы имеем $\chi(\mathcal{K}^n, 1) = 2$.

Доказательство. Действительно, предположим, что все знаменатели координат точек решетки являются нечетными. Тогда в качестве раскраски в два цвета мы берем вычет по модулю два суммы координат числителей. \square

Теорема 18. $\chi(\mathbb{Q}_3^n, 1) \leq c(\sqrt[3]{9})^n$, где c — некоторая универсальная константа. Те же рассуждения остаются верными, если мы заменим \mathbb{Q}_3 на любое подкольцо поля \mathbb{R} , допускающее гомоморфизм на \mathbb{Z}_3 .

Теорема 19. $\chi(\mathbb{Q}_5^n, 1) \leq c'(\sqrt{5})^n$, где c' — некоторая универсальная постоянная. Более того, то же самое остается верным, если мы заменим \mathbb{Q}_5 на подкольцо поля вещественных чисел, допускающее гомоморфизм на \mathbb{Z}_5 .

Последние две теоремы легко следуют из теорем 15 и 16. Идея состоит в использовании координат (x_1, \dots, x_n) по модулю три (соответственно по модулю 5) и применении полученных ранее оценок для $\chi(\mathbb{Z}_3^n)$ (соответственно для $\chi(\mathbb{Z}_5^n)$). Здесь «взятие класса вычетов» понимается в смысле соответствующего гомоморфизма колец.

8. НЕКОТОРЫЕ ОТКРЫТЫЕ ПРОБЛЕМЫ

Мы выдвинули гипотезу о том, что все возможные запрещенные расстояния, для которых хроматическое число пространства \mathbb{Z}^3 равно 3, имеют вид $2^k\sqrt{12l+10}$; кроме того, мы выдвигаем гипотезу о том, что хроматическое число 3 никогда не встречается в решетках больших размерностей.

Наилучшие известные верхние асимптотические оценки для хроматического числа рациональных пространств по-прежнему остаются такими же, как и для евклидовых пространств: $(3+o(1))^n$ (см. [12]); метод получения этих оценок основан на некоторых разбиениях Вороного евклидовых пространств; иными словами, мы делим пространство на ячейки, каждую из которых красим в свой цвет.

Более того, каждая нижняя оценка на $\chi(\mathbb{Q}^n, \sqrt{d})$ для некоторого конкретного n, \sqrt{d} происходит из конкретного конечного графа Γ из \mathbb{Q}^n с критическим расстоянием \sqrt{d} .

Возможность получения точной оценки из *конечного* графа утверждает известная теорема Эрдша—де Брейна [9]. Если мы рассмотрим такой граф для \mathbb{Q}^n и определим D как общий знаменатель всех координат всех точек графа, то мы можем построить гомотетичный ему граф $D\Gamma$ в \mathbb{Z}^n с критическим расстоянием $D\alpha$. Таким образом, все нижние оценки для рациональных решеток на самом деле происходят из целочисленных решеток.

Было бы интересно применить аргумент, приведенный в настоящей работе, для получения более точных оценок для \mathbb{Q}^n . Прямой подход не работает в связи с тем, что когда мы выбираем конкретное запрещенное расстояние, нам придется брать все возможные оценки для $D\alpha$, число которых стремится к бесконечности при стремлении n к бесконечности.

Наши оценки для решеток с рациональными координатами с некоторыми ограничениями на знаменатели несколько лучше оценок для рациональных решеток без ограничений, полученных ранее, но наш подход использует другие идеи: некоторые теоретико-числовые свойства ограничений по модулю p . Было бы интересно получить другие оценки для $\chi(\mathbb{Q}^n)$, комбинируя эти два подхода: подход, предложенный в настоящей работе, и подход, связанный с разбиениями Вороного.

Мы нашли верхние оценки для $\chi(\mathbb{Z}^n, \sqrt{d})$ для любого фиксированного d при n , стремящемся к бесконечности. Если мы фиксируем конкретное значение n , то мы получим: для нечетного d достаточно двух цветов, для d , не делящегося на 3, достаточно $c_1(\sqrt[3]{9})^n$ цветов, а для d , не делящегося на 5, мы получаем $c_2(\sqrt{5})^n$ цветов. Все эти верхние оценки лучше, чем оценки для рациональных решеток, т. е. $(3+o(1))^n$. Таким образом, было бы интересно найти верхнюю оценку для $\max_{30|d}(\chi(\mathbb{Z}^n, \sqrt{d}))$, где максимум берется по всем d , делящимся на 30. Возможно, аналогичные методы могут быть разработаны для других простых чисел, однако, такой подход для чисел, знаменатели которых не делятся на 7, аналогичный предыдущим подходам для чисел, знаменатели которых взаимно просты с 2, 3, 5, приводит к оценке, худшей, чем известная оценка для рациональных решеток.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Кунавский А. Б. О раскрасках сфер, вложенных в \mathbb{R}^n // *Мат. сб.* — 2011. — 202, № 6. — С. 83–110.
2. Райгородский А. М. Проблема Борсука и хроматические числа некоторых метрических пространств// *Усп. мат. наук.* — 56. — 2001. — 1 (337). — С. 107–146.
3. Райгородский А. М. О хроматическом числе пространства с l_p -нормой// *Усп. мат. наук.* — 2004. — 59, № 5. — С. 161–162.
4. Райгородский А. М. *Линейно-алгебраические методы в комбинаторике*, М.: МЦНМО, 2007.
5. Райский Д. Е. Реализация всех расстояний в разложении \mathbb{R}^n на $n+1$ частей// *Мат. заметки.* — 1970. — 7. — С. 194–196.
6. Benda M., Perles M. Introduction to colorings of metric spaces// *Geombinatorics.* — 2000. — 9. — С. 111–126.
7. Brass P., Moser L., Pach J. *Research Problems in Discrete Geometry.* — Springer, 2005.

8. *Cibulka J.* On the chromatic numbers of real and rational spaces// Geombinatorics. — 2008. — 18. — С. 53–65.
9. *De Bruijn N. G., Erdős P.* A colour problem for infinite graphs and a problem in the theory of relations// Nederl. Akad. Wetensch. Proc. Ser. A. — 1951. — 54. — С. 371–373.
10. *Frankl P., Wilson R. M.* Intersection theorems with geometric consequences// Combinatorica. — 1981. — 1. — С. 357–368.
11. *Füredi Z., Kang J.-H.* Distance graphs on \mathbb{Z}^n with l_1 -norm// Theor. Computer Sci. — 2004. — 319. — С. 357–366.
12. *Larman D. G., Rogers C. A.* The realization of distances within sets in euclidean spaces// Mathematica. — 1972. — 19. — С. 1–24.
13. *Moser L., Moser W.* Solution to Problem 10// Canad. Math. Bull. — 1961. — 4. — С. 187–189.
14. *O'Bryant K.* A complete annotated bibliography of work related to Sidon sequences// arXiv:math.NT/0407.117. — 2011.
15. *Ruzsa I.* Solving a linear equation in a set of integers. II// Acta Arith. — 1993. — LXV, № 3. — С. 259–282.
16. *Ruzsa I.* Solving a linear equation in a set of integers. II// Acta Arith. — 1995. — LXXII, № 4. — С. 385–397.

Василий Олегович Мантуров

Механико-математический факультет МГУ им. М. В. Ломоносова

E-mail: vomanturov@yandex.ru

СЛАБЫЕ ЧЕТНОСТИ И ФУНКТОРИАЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

© 2013 г. И. М. НИКОНОВ

Аннотация. В настоящей работе рассматриваются объекты, имеющие два эквивалентных описания: как функториальные отображения и как слабые четности. Функториальные отображения позволяют преобразовывать узлы и продолжать посредством этого инварианты узлов. Мы вводим понятие максимальной слабой четности и описываем ее для узлов на фиксированной замкнутой ориентированной поверхности. При помощи найденной слабой четности строится проекция из виртуальных узлов в классические.

ВВЕДЕНИЕ

Четность перекрестков — понятие, введенное В. О. Мантуровым в 2009 году [2], — определяется как способ оснащения перекрестков диаграмм узла или зацепления числовыми метками 0 и 1, причем приписывание меток должно быть согласовано с движениями Рейдемейстера. Правило согласования можно сформулировать следующим образом: четность перекрестков, не исчезающих и не появляющихся при движении Рейдемейстера, не меняется; сумма (по модулю два) четностей перекрестков, участвующих в движении Рейдемейстера, равна нулю (см. рис. 1).

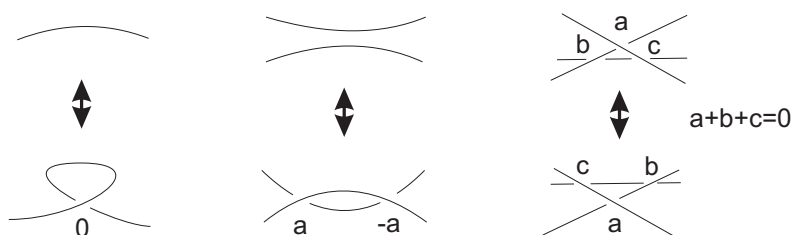


Рис. 1. Аксиомы четности.

Введение дополнительной информации в диаграмму зацепления при помощи четностей позволяет усиливать инварианты узлов [1–5, 9–12]. При помощи новых инвариантов удалось показать нетривиальность свободных узлов, а также их классов кобордантности [3].

Другим приложением теории четностей является построение функториальных отображений. Разделение перекрестков диаграммы на четные и нечетные позволяет трансформировать диаграмму, по-разному преобразуя ее в окрестности перекрестков различных типов, а именно, заменять нечетные перекрестки на виртуальные, а четные оставлять как есть. Из свойств четности (на самом деле, из более слабых условий *слабой четности*) следует, что результатом применения этого преобразования к различным диаграммам одного узла будут диаграммы, соответствующие некоторому другому, виртуальному узлу, то есть функториальное отображение определено на уровне узлов, а не диаграмм [2]. Изучение функториальных отображений и слабых четностей составляет содержание данной работы.

Статья организована следующим образом. В первом разделе даются основные определения. Мы начинаем с определения категории диаграмм узлов и приводим примеры некоторых таких категорий. Далее вводится определение функториального отображения и слабой четности. Затем обсуждаются простейшие свойства слабых четностей.

Второй раздел посвящен описанию слабых четностей для узлов в утолщении фиксированной ориентированной замкнутой поверхности (а также погруженных кривых в ориентированной замкнутой поверхности). Мы доказываем, что гомотопическая слабая четность в данной теории

узлов является максимальной нетривиальной слабой четностью. Отсюда следует, что для классических узлов все слабые четности тривиальны, что обобщает аналогичный результат для четностей [6, Corollary 4.2]. Завершает раздел описание проекции множества виртуальных узлов на классические.

Автор выражает благодарность Д. П. Ильютко и В. О. Мантурову за полезные обсуждения и комментарии.

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке гранта Правительства РФ по постановлению № 220, договор 11.G34.31.0053, РФФИ (гранты № 12-01-31432-а_мол, № 13-01-00830-а), программы поддержки ведущих научных школ РФ (грант № НШ-1410.2012.1), программы «Научные и научно-педагогические кадры инновационной России» (госконтракт 14.740.11.0794).

1. ФУНКТОРИАЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ И СЛАБЫЕ ЧЕТНОСТИ

1.1. Узлы и диаграммы. Общепринятой формой представления узлов и зацеплений являются их диаграммы. Узлу соответствует бесконечно много различных диаграмм, но любые из них можно связать цепочкой преобразований — изотопий диаграмм и движений Рейдемейстера.

Определение 1.1. Пусть \mathcal{K} — некоторый узел. *Категорией диаграмм* узла \mathcal{K} называется категория \mathfrak{K} , объектами которой являются всевозможные диаграммы узла, а морфизмами служат формальные композиции *элементарных морфизмов* — изотопий диаграмм и движений Рейдемейстера.

Замечание 1.1. Наряду с категориями диаграмм конкретного узла можно рассматривать категории, состоящие из диаграмм узлов некоторого класса (классических узлов, виртуальных узлов, плоских узлов, свободных узлов, узлов и кривых на фиксированной поверхности и т.п.). Рассмотрение таких больших категорий удобно, когда изотопический класс узла заранее не определен, что имеет место, например, для образов функториальных отображений. Мы будем называть эти категории *теориями узлов*.

Рассмотрим конкретные примеры типов узлов и их диаграмм.

Определение 1.2. *4-графом* называется любое несвязное объединение четырехвалентных графов и *тривиальных компонент* — окружностей, каждая из которых рассматривается как граф без вершин и с одним (замкнутым) ребром. *Виртуальной диаграммой* называется вложение в плоскость 4-графа, вершины которого разделены на два типа: *классические* и *виртуальные*. В классических вершинах выделена пара противоположных (полу)ребер, называемая *проходом*; другие два (полу)ребра вершины образуют *переход*. Вершины диаграммы называют также *перекрестками*. Диаграмма, не содержащая виртуальных перекрестков, называется *классической*.

Замечание 1.2. При изображении виртуальной диаграммы виртуальные вершины обычно обводятся кружком. Проход в классической вершине обозначается разрывной линией, а переход — сплошной (см. рис. 2).

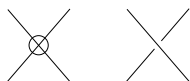


Рис. 2. Виртуальный (слева) и классический (справа) перекрестки диаграммы

Определение 1.3. *Движения виртуальных диаграмм* включают в себя обычные движения Рейдемейстера ($R1, R2, R3$), а также *движение объезда* (DM), при котором произвольная дуга диаграммы, содержащая только виртуальные перекрестки, заменяется на новую дугу с теми же концами, также содержащую только виртуальные перекрестки (см. рис. 3). Класс эквивалентности виртуальных диаграмм по модулю движений называется *виртуальным зацеплением*.

Определение 1.4. *Уникурсальной компонентой* виртуальной диаграммы называется наименьшее по включению непустое множество ребер диаграммы, замкнутое относительно переходов от ребра к противоположному ему (в одном из его концов) ребру. Диаграмма с одной уникурсальной компонентой называется *диаграммой виртуального узла*.

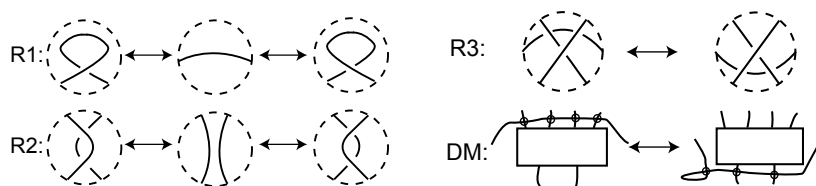


Рис. 3. Движения виртуальных диаграмм

Замечание 1.3. Поскольку количество уникарсальных компонент не меняется при движениях диаграммы, корректно определено понятие *виртуального узла* как класса эквивалентности диаграмм с одной уникарсальной компонентой.

Определение 1.5. Узел (зацепление), имеющий классическую диаграмму, называется *классическим*.

Замечание 1.4. Как следует из результата Куперберга [8], две классические диаграммы, соответствующие одному и тому же (классическому) зацеплению, можно связать последовательностью движений, в которой все промежуточные диаграммы тоже будут классическими. В силу этого для классических узлов по умолчанию мы будем рассматривать категорию, состоящую из их классических диаграмм.

Замечание 1.5. По каждой виртуальной диаграмме D можно построить диаграмму \tilde{D} , содержащую только классические перекрестки и лежащую на некоторой ориентированной поверхности $S(D)$ [7]. Для этого в каждом классическом перекрестке диаграммы располагается крест, а в каждом виртуальном — пара непересекающихся лент (см. рис. 4). Соединяя эти кресты и ленты, мы получим поверхность с краем $S'(D)$, куда вдоль осей лент отображается диаграмма \tilde{D} , получаемая из D разведением виртуальных перекрестков. Заклеивая компоненты края поверхности $S'(D)$ дисками, мы получим искомую замкнутую поверхность $S(D)$.

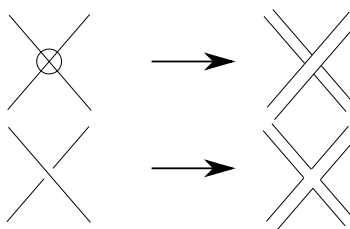


Рис. 4. Построение поверхности $S'(D)$

Наоборот, по замкнутой ориентированной поверхности S и диаграмме \tilde{D} с классическими перекрестками в ней можно построить виртуальную диаграмму следующим образом. Рассмотрим окрестность S' диаграммы \tilde{D} в S . Тогда S' будет ориентированной поверхностью с краем, так что имеется погружение S' в плоскость \mathbb{R}^2 , сохраняющее ориентацию. При этом погружении диаграмма \tilde{D} отобразится в некоторый 4-граф D , в котором образы перекрестков диаграммы \tilde{D} помечаются как классические перекрестки (структура прохода-перехода при этом индуцируется из диаграммы \tilde{D}), а появляющиеся при погружении точки самопересечения помечаются как виртуальные перекрестки. Заметим, что диаграмма D определена неоднозначно, но оказывается, что различные погружения приводят к эквивалентным виртуальным диаграммам.

Имеющееся соответствие между виртуальными диаграммами и диаграммами на поверхностях позволяет дать новое определение виртуальных зацеплений. Диаграмму на ориентированной поверхности S можно интерпретировать как проекцию вложения одной или нескольких окружностей в утолщение поверхности $S \times [0, 1]$. Отсюда выводится (см. [7]), что виртуальное зацепление можно определить как вложение несвязного объединения окружностей в утолщения ориентированных поверхностей, рассматриваемое с точностью до изотопии и операции стабилизации (см. рис. 5), меняющей поверхность и ее утолщение.

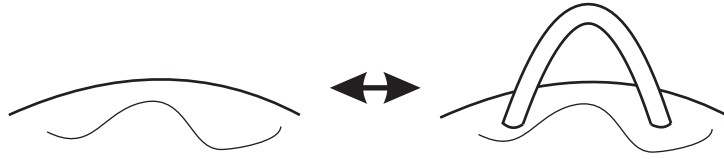


Рис. 5. Операция стабилизации

Последнее определение можно переформулировать следующим образом. Виртуальное зацепление — это класс эквивалентности пар (S, D) , S — связная замкнутая ориентированная поверхность, D — диаграмма в S , у которой все перекрестки классические. Отношение эквивалентности порождено изотопиями, движениями Рейдемейстера и стабилизациями.

Пусть S — двумерная связная замкнутая ориентированная поверхность.

Определение 1.6. *Зацеплением* (соответственно, *узлом*) на поверхности S называется класс эквивалентности (классических) диаграмм (соответственно диаграмм с одной уникарсальной компонентой) на S по модулю изотопий диаграмм и движений Рейдемейстера $R1, R2, R3$.

Замечание 1.6.

1. Классические узлы и зацепления можно рассматривать как узлы на сфере S^2 .
2. Имеется естественное отображение узлов на фиксированной поверхности S во множество виртуальных узлов. На уровне диаграмм это отображение есть вложение категорий: диаграмме D сопоставляется пара (S, D) .

Забывание структуры проход-переход в классических перекрестках диаграмм приводит к новым теориям узлов.

Определение 1.7. *Плоским зацеплением* называется класс эквивалентности виртуальных диаграмм по модулю движений и замен проходов на переходы в любых перекрестках диаграммы. Классы эквивалентности виртуальных диаграмм по модулю замен проходов на переходы в перекрестках диаграммы называются *плоскими диаграммами*. Их можно задавать как вложения в плоскость 4-графов, вершины которых разделены на виртуальные и классические перекрестки, при этом структура «проход-переход» в классических перекрестках не определяется. *Плоским узлом* называется плоское зацепление с одной уникарсальной компонентой.

Для плоских узлов в качестве объектов категории диаграмм мы будем рассматривать плоские диаграммы, а в качестве морфизмов — движения Рейдемейстера и объезда, индуцированные соответствующими движениями на виртуальных диаграммах.

Замечание 1.7. Забывание проходов и переходов в диаграммах узлов на фиксированной поверхности S порождает множество вложений 4-графов в поверхность, которые можно интерпретировать как погружения общего положения для набора окружностей. Классами эквивалентности диаграмм в этом случае будут классы свободной гомотопии набора кривых на поверхности.

1.2. Функториальные отображения.

Определение 1.8. Пусть \mathcal{K} — некоторый узел. *Фунториальным отображением* на категории диаграмм \mathfrak{K} узла \mathcal{K} называется функтор Ψ из категории \mathfrak{K} в категорию диаграмм виртуальных узлов (если узел \mathcal{K} есть виртуальный узел или узел на фиксированной поверхности) либо в категорию плоских диаграмм (если \mathcal{K} — плоский узел или свободный гомотопический класс кривой на фиксированной поверхности), такое что

1. для любой диаграммы $D \in ob(\mathfrak{K})$ диаграмма $\Psi(D)$ получается из D заменой некоторых классических перекрестков на виртуальные;
2. для любого движения Рейдемейстера $f: D_1 \rightarrow D_2$ отображение

$$\Psi(f): \Psi(D_1) \rightarrow \Psi(D_2)$$

представляет собой *то же* движение Рейдемейстера либо движение объезда.

Рассмотрим диаграмму $D \in ob(\mathfrak{K})$. Обозначим через $\mathcal{V}(D)$ множество классических перекрестков диаграммы. Любой элементарный морфизм $f: D \rightarrow D'$ (т. е. изотопия, движение Рейдемейстера или движение объезда) определяет соответствие между перекрестками диаграмм — некоторое частично определенное отображение $f_*: \mathcal{V}(D) \rightarrow \mathcal{V}(D')$. Областью определения (соответственно множеством значений) отображения f_* , если f — изотопия, движение объезда или третье движение Рейдемейстера, будет все множество $\mathcal{V}(D)$ (соответственно $\mathcal{V}(D')$), а если f — первое или второе движение, это будет множество перекрестков диаграммы D (соответственно диаграммы D'), не участвующих в движении. Отображение f_* представляет собой биекцию области определения на множество значений.

Пусть Ψ — функториальное отображение. Тогда на множестве классических перекрестков $\mathcal{V}(D)$ каждой диаграммы $D \in ob(\mathfrak{K})$ определено отображение $\psi_D: \mathcal{V}(D) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, такое что $\psi_D(v) = 0$, если перекресток v сохраняется в диаграмме $\Psi(D)$, и $\psi_D(v) = 1$, если перекресток v в диаграмме $\Psi(D)$ становится виртуальным. Мы будем называть перекресток v *четным* относительно функториального отображения Ψ , если $\psi_D(v) = 0$, и *нечетным*, если $\psi_D(v) = 1$.

Утверждение 1.1. *Отображения ψ_D обладают следующими свойствами:*

- ($\Psi 0$) для любого движения Рейдемейстера $f: D \rightarrow D'$ и любого перекрестка $v \in \mathcal{V}(D)$, не участвующего в движении, $\psi_D(v) = \psi_{D'}(f_*(v))$;
- ($\Psi 2$) если $f: D \rightarrow D'$ — уменьшающее второе движение Рейдемейстера, в котором участвуют перекрестки $u, v \in \mathcal{V}(D)$, то $\psi_D(u) = \psi_D(v)$;
- ($\Psi 3$) если $f: D \rightarrow D'$ — третье движение Рейдемейстера, в котором участвуют перекрестки $u, v, w \in \mathcal{V}(D)$, то $\psi_D(u) = \psi_{D'}(f_*(u))$, $\psi_D(v) = \psi_{D'}(f_*(v))$, $\psi_D(w) = \psi_{D'}(f_*(w))$ и $\psi_D(u) + \psi_D(v) + \psi_D(w) \neq 1$ (как элемент \mathbb{Z}).

Доказательство. Пусть перекресток v не участвует в движении. Тогда соответствующий перекресток $\Psi(v)$ в диаграмме $\Psi(D)$ тоже не принимает участия в движении $\Psi(f)$. Следовательно, перекресток $\Psi(v)$ и его образ $\Psi(f_*(v))$ в диаграмме $\Psi(D')$ имеют одинаковый тип (классический либо виртуальный). Таким образом, $\psi_D(v) = \psi_{D'}(f_*(v))$, и свойство ($\Psi 0$) выполнено.

Пусть f — третье движение Рейдемейстера на перекрестках u, v, w . Чтобы после замены некоторых перекрестков на виртуальные получилось третье движение на тех же вершинах или движение объезда, нужно сделать виртуальными 0, 2 или 3 перекрестка из u, v, w ; замена ровно одного перекрестка приводит к запрещенному движению (см. рис. 6). Кроме того, четности у соответствующих перекрестков диаграмм $\Psi(D)$ и $\Psi(D')$ должны совпадать. Таким образом, верно свойство ($\Psi 3$).

Свойство ($\Psi 2$) доказывается аналогично. □

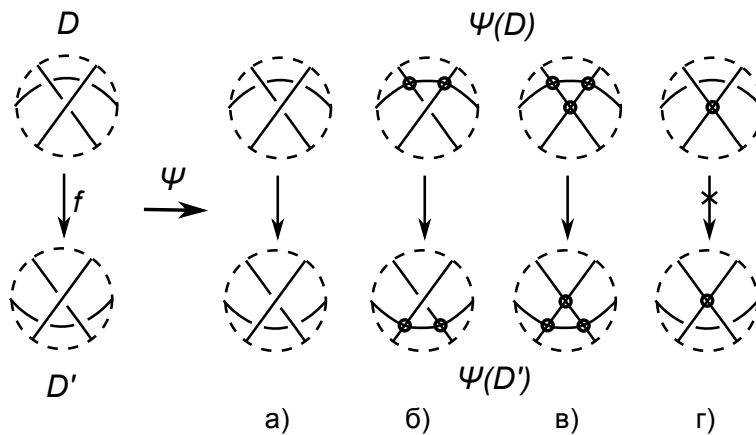


Рис. 6. Доказательство свойства ($\Psi 3$): а) без замены перекрестков остается третье движение Рейдемейстера; б, в) при замене двух или трех перекрестков на виртуальные возникает движение объезда; г) при замене одного перекрестка появляется запрещенное движение.

Определение 1.9. Семейство отображений $\psi_D: \mathcal{V}(D) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, $D \in ob(\mathfrak{K})$, для которого выполнены условия ($\Psi 0$), ($\Psi 2$), ($\Psi 3$), называется *слабой четностью*.

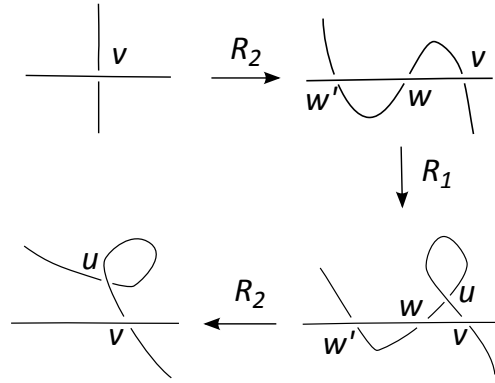


Рис. 7. Доказательство свойства $(\Psi 1)$.

Заметим, что сопоставление слабой четности функториальному отображению, описанное выше, устанавливает взаимно-однозначное соответствие между этими классами. Ниже мы будем в основном использовать понятие слабой четности.

Пример 1.1 (Нулевая слабая четность). Определим слабую четность \mathbb{O} при помощи равенства $\mathbb{O}_D(v) \equiv 0$. Нулевой четности соответствует тождественное функториальное отображение.

Пример 1.2 (Тривиальная слабая четность). Тривиальная слабая четность задается тождеством $\mathbb{O}_D(v) \equiv 1$. Ей соответствует функториальное отображение, которое заменяет все перекрестки на виртуальные. В результате получаются чисто виртуальные диаграммы тривиального узла.

В дальнейшем мы будем рассматривать исключительно нетривиальные слабые четности.

Теорема 1.1. Пусть слабая четность ψ нетривиальна. Тогда она обладает свойством $(\Psi 1)$ если $f: D \rightarrow D'$ — уменьшающее первое движение Рейдемейстера, в котором участвует вершина $u \in \mathcal{V}(D)$, то $\psi_{D'}(u) = 0$.

Доказательство. Пусть ψ — нетривиальная слабая четность в категории диаграмм \mathfrak{K} . Это значит, что найдутся диаграмма D и перекресток в ней v , такой что $\psi_D(v) = 0$. Применим к диаграмме D второе движение Рейдемейстера, как показано на рис. 7. По свойству $(\Psi 2)$ имеем $\psi(w) = \psi(v) = 0$. На дуге vw добавим при помощи первого движения Рейдемейстера перекресток u . Из условия $(\Psi 3)$, примененному к треугольнику uvw , следует, что $\psi(u) = 0$. Теперь уберем при помощи второго движения Рейдемейстера вспомогательные перекрестки w, w' . Таким образом, перекресток u , появляющийся при первом движении рядом с четным перекрестком v , является четным. Обозначим получившуюся диаграмму через D' .

Пусть $f: D_1 \rightarrow D_2$ — увеличивающее первое движение Рейдемейстера в категории диаграмм \mathfrak{K} и $t \in \mathcal{V}(D_2)$ — новый перекресток. Так как диаграммы D и D_1 относятся к одному узлу, имеется последовательность движений Рейдемейстера, переводящая D в D_1 . Тогда мы можем рассмотреть аналогичную последовательность движений (добавляя при необходимости вторые и третьи движения), которая переводит диаграмму D' в D_2 , причем перекресток u переходит в перекресток t . По свойствам $(\Psi 0)$ и $(\Psi 3)$ получаем $\psi_{D_2}(t) = \psi_{D'}(u) = 0$. \square

Большое количество примеров нетривиальных слабых четностей можно получить из обычных четностей.

Пусть G — некоторая группа. Предположим, что узел \mathcal{K} ориентирован, так что на всех диаграммах категории диаграмм узла \mathfrak{K} задана индуцированная ориентация.

Определение 1.10. Ориентированной четностью p на категории диаграмм \mathfrak{K} называется семейство отображений $p_D: \mathcal{V}(D) \rightarrow G$, $D \in ob(\mathfrak{K})$, обладающее следующими свойствами:

- для любого элементарного морфизма $f: D \rightarrow D'$ и любого перекрестка $v \in \mathcal{V}(D)$ из области определения отображения f_* выполнено равенство $p_D(v) = p_{D'}(f_*(v))$;
- если $f: D \rightarrow D'$ — уменьшающее первое движение Рейдемейстера и $v \in \mathcal{V}(D)$ — исчезающий перекресток, то $p_D(v) = 1$, где $1 \in G$ — единица группы;

- если $f: D \rightarrow D'$ — уменьшающее второе или третье движение Рейдемейстера, то

$$\prod p_D(v_i)^{\epsilon(v_i)} = 1,$$

где v_i — вершины, участвующие в движении, $\epsilon(v_i)$ — индекс инцидентности вершины по отношению к исчезающей области (двуугольнику или треугольнику), см. рис. 8 слева, а порядок вершин в произведении определяется ориентацией поверхности, в которой находится диаграмма.

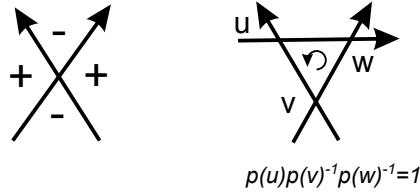


Рис. 8. Индекс инцидентности и соотношения ориентированной четности

На рис. 8 справа указан пример соотношения для ориентированной четности.

Замечание 1.8.

1. Для любой ориентированной четности p и уменьшающего второго движения Рейдемейстера $f: D \rightarrow D'$ на перекрестках u и v выполняется соотношение

$$p_D(u)p_D(v) = 1,$$

поскольку индексы инцидентности перекрестков u и v совпадают.

2. Ориентированная четность не зависит от ориентации узла. Более точно, если семейство отображений p является ориентированной четностью на категории диаграмм узла \mathcal{K} , то оно же является ориентированной четностью на категории диаграмм узла $-\mathcal{K}$, получающегося из \mathcal{K} обращением ориентации (здесь мы отождествляем естественным образом категории диаграмм узлов \mathcal{K} и $-\mathcal{K}$).
3. Четности с коэффициентами, определенные в работе [6], являются ориентированными четностями в силу аксиом четности и соотношений вида $2p(v) = 0$ (см. [6, Lemma 4.4]).

Утверждение 1.2. Пусть p — (ориентированная) четность на категории диаграмм \mathfrak{K} . Тогда семейство отображений $\psi_D: \mathcal{V}(D) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, определяемое по правилу

$$\psi_D(v) = \begin{cases} 1, & p_D(v) \neq 1; \\ 0, & p_D(v) = 1, \end{cases}$$

является нетривиальной слабой четностью на категории диаграмм \mathfrak{K} . Эта слабая четность называется индуцированной слабой четностью.

Доказательство. Свойство $(\Psi 0)$ следует из первого условия в определении ориентированной четности, а свойство $(\Psi 1)$ — из второго условия. Таким образом, ψ не является тривиальной слабой четностью. Из третьего условия определения ориентированной четности вытекает, что четности перекрестков, участвующих во втором движении, одновременно равны либо не равны единице группы коэффициентов, что означает, что выполнено свойство $(\Psi 2)$. Аналогично, если два перекрестка из трех, участвующих в третьем движении Рейдемейстера, имеют тривиальную четность относительно p , то четность третьего перекрестка также тривиальна. Это доказывает свойство $(\Psi 3)$. \square

1.3. Операции на слабых четностях. На слабых четностях можно определить естественное отношение частичного порядка.

Определение 1.11. Пусть ψ, ψ' — слабые четности в категории диаграмм \mathfrak{K} . Будем говорить, что слабая четность ψ не превосходит слабой четности ψ' ($\psi \leq \psi'$), если для любой диаграммы $D \in ob(\mathfrak{K})$ и любой вершины $v \in \mathcal{V}(D)$ выполнено неравенство $\psi_D(v) \leq \psi'_D(v)$.

Теорема 1.2. Пусть $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ — семейство слабых четностей в категории диаграмм \mathfrak{K} . Тогда семейство отображений $\psi_D: \mathcal{V}(D) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, $D \in \text{ob}(\mathfrak{K})$, где $\psi_D(v) = \max_{\alpha \in A} (\psi_\alpha)_D(v)$ для каждого перекрестка $v \in \mathcal{V}(D)$, является слабой четностью. Если все слабые четности ψ_α , $\alpha \in A$, нетривиальны, то слабая четность ψ тоже нетривиальна.

Доказательство. Нам нужно проверить для ψ выполнение свойств $(\Psi 0) - (\Psi 3)$.

$(\Psi 0)$. Пусть $f: D \rightarrow D'$ — движение Рейдемейстера и вершина $v \in \mathcal{V}(D_1)$ не участвует в этом движении. Тогда для любого $\alpha \in A$ имеет место равенство $(\psi_\alpha)_D(v) = (\psi_\alpha)_{D'}(f_*(v))$. Следовательно,

$$\psi_D(v) = \max_{\alpha \in A} (\psi_\alpha)_D(v) = \max_{\alpha \in A} (\psi_\alpha)_{D'}(f_*(v)) = \psi_{D'}(f_*(v)).$$

$(\Psi 2)$. Пусть $f: D \rightarrow D'$ — уменьшающее второе движение Рейдемейстера, в котором участвуют вершины $u, v \in \mathcal{V}(D)$. Тогда $(\psi_\alpha)_D(u) = (\psi_\alpha)_D(v)$ для любого $\alpha \in A$. Следовательно,

$$\psi_D(u) = \max_{\alpha \in A} (\psi_\alpha)_D(u) = \max_{\alpha \in A} (\psi_\alpha)_D(v) = \psi_D(v).$$

$(\Psi 3)$. Пусть $f: D \rightarrow D'$ — третье движение Рейдемейстера, в котором участвуют вершины $u, v, w \in \mathcal{V}(D)$. Тогда, очевидно, $\psi_D(u) = \psi_{D'}(f_*(u))$, $\psi_D(v) = \psi_{D'}(f_*(v))$, $\psi_D(w) = \psi_{D'}(f_*(w))$. Предположим, что $\psi_D(u) + \psi_D(v) + \psi_D(w) = 1 \in \mathbb{Z}$. Без ограничения общности можно считать, что $\psi_D(u) = \psi_D(v) = 0$ и $\psi_D(w) = 1$. Тогда для любого $\alpha \in A$ имеем $(\psi_\alpha)_D(u) = (\psi_\alpha)_D(v) = 0$. Из свойства $(\Psi 3)$ для слабой четности ψ_α следует, что $(\psi_\alpha)_D(w) = 0$. Но тогда $\psi_D(w) = \max_{\alpha \in A} (\psi_\alpha)_D(w) = 0$, и мы приходим к противоречию.

$(\Psi 1)$. Пусть все слабые четности ψ_α , $\alpha \in A$, нетривиальны. Рассмотрим диаграмму D и перекресток v на ней, который получается первым движением Рейдемейстера. По теореме 1.1 $(\psi_\alpha)_D(v) = 0$ для любого $\alpha \in A$. Следовательно, $\psi_D(v) = 0$, и слабая четность ψ нетривиальна. \square

Определение 1.12. Слабую четность ψ из теоремы 1.2 назовем *максимумом на множестве слабых четностей* $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ и обозначим как $\max_{\alpha \in A} \psi_\alpha$.

Отношение порядка на слабых четностях позволяет выделить среди них наименьший и наибольший элементы. Заметим, что минимальной слабой четностью является нулевая слабая четность, поскольку $0 \leq \psi$ для любой слабой четности ψ . Наибольшим элементом среди всех слабых четностей является тривиальная слабая четность. Далее будем рассматривать только нетривиальные слабые четности.

Определение 1.13. Нетривиальную слабую четность ψ в категории диаграмм \mathfrak{K} назовем *максимальной*, если для любой нетривиальной слабой четности ψ' на \mathfrak{K} верно неравенство $\psi' \leq \psi$. В дальнейшем для максимальной слабой четности мы будем использовать обозначение ψ_{\max} .

Следующее утверждение очевидным образом следует из теоремы 1.2: достаточно в качестве семейства слабых четностей $\{\psi_\alpha\}_{\alpha \in A}$ взять множество всех нетривиальных слабых четностей в категории \mathfrak{K} .

Следствие 1.1. В любой категории диаграмм \mathfrak{K} существует единственная максимальная нетривиальная слабая четность.

Ниже мы дадим описание максимальной слабой четности ψ_{\max} для некоторых категорий диаграмм.

Интерпретация слабых четностей как функториальных отображений дает возможность определить умножение слабых четностей.

Определение 1.14. Пусть ψ, ψ' — слабые четности на виртуальных/плоских узлах и Ψ, Ψ' — соответствующие им функториальные отображения. Тогда слабую четность $\psi \circ \psi'$, соответствующую функториальному отображению $\Psi \circ \Psi'$, назовем *произведением* слабых четностей ψ, ψ' .

Замечание 1.9. Несложно проверить, что $\psi \circ \psi' \geq \psi'$ для любых слабых четностей ψ, ψ' . В частности, отсюда следует, что $\psi \circ \psi_{\max} = \psi_{\max}$ для любой нетривиальной слабой четности ψ .

2. СЛАБЫЕ ЧЕТНОСТИ ДЛЯ УЗЛОВ НА ФИКСИРОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Пусть \mathcal{K} — категория диаграмм узла (плоского узла) \mathcal{K} , лежащего на фиксированной двумерной связной замкнутой ориентированной поверхности S .

Пример 2.1 (Гомотопическая слабая четность). Определим следующим образом *гомотопическую слабую четность* ψ_D^{hom} : для диаграммы D и перекрестка $v \in \mathcal{V}(D)$ положим $\psi_D^{hom}(v) = 0$ в том и только том случае, когда в гомотопической группе $\pi_1(S, v)$ выполнено соотношение

$$[D_v] = [D]^l \tag{2.1}$$

для некоторого целого числа l . Здесь D_v — одна из половинок узла в вершине v (см. рис. 9). Иными словами, $\psi_D^{hom}(v) = 0$, если гомотопический класс половинки D_v лежит в подгруппе, порожденной гомотопическим классом узла \mathcal{K} .



Рис. 9. Половинки узла в перекрестке

Заметим, что классы $[D_v]$ и $[D]$ определены неоднозначно: у узла есть две половинки D_v и D'_v в вершине v , с другой стороны, гомотопический класс $[\mathcal{K}]$ равен одному из двух произведений $[D_v][D'_v]$ или $[D'_v][D_v]$. Таким образом, имеется четыре варианта равенства (2.1). Тем не менее, если равенство справедливо для какого-либо одного варианта, то оно верно и для всех остальных (возможно, с другими значениями степени l).

Например, пусть $[D_v] = ([D_v][D'_v])^l$. Тогда $[D'_v] = [D_v]^{-1}[D_v][D'_v] = ([D_v][D'_v])^{1-l}$. В этом случае элементы $[D_v]$ и $[D'_v]$ коммутируют, и $[D_v][D'_v] = [D'_v][D_v]$.

Утверждение 2.1. Семейство отображений ψ^{hom} является слабой четностью.

Доказательство. Пусть D — некоторая диаграмма и v — ее перекресток. Соотношение (2.1) не меняется при гомотопии кривой, образом которой является диаграмма D , если эта гомотопия не затрагивает перекресток v . Следовательно, для ψ^{hom} выполнено свойство $(\Psi 0)$.

Проверим свойство $(\Psi 2)$. Пусть перекрестки u и v диаграммы D участвуют во втором движении Рейдемейстера. Так как двуугольник, образованный вершинами u и v , стягиваем, то мы можем отождествить гомотопические группы $\pi_1(S, u)$ и $\pi_1(S, v)$. При этом половинки узла D_u и D'_u отождествляются с половинками D_v и D'_v . Следовательно, соотношение $[D_u] = [D]^l$ эквивалентно соотношению $[D_v] = [D]^l$. Таким образом, четности перекрестков u и v относительно ψ^{hom} совпадают.

Пусть u, v и w — перекрестки диаграммы D , участвующие в третьем движении Рейдемейстера. Обозначим (в порядке обхода узла) длинные дуги диаграммы D , соединяющие перекрестки u, v и w , как α, β и γ (см. рис. 10). Треугольник, образованный перекрестками, можно стянуть в точку $x \in S$. При этом α, β и γ отождествляются с половинками D_u, D_v и D_w соответственно, и это соответствие не зависит от порядка соединения вершин u, v и w в диаграмме D . Ниже мы будем использовать обозначения α, β и γ для гомотопических классов соответствующих кривых. Эти классы являются элементами группы $\pi_1(S, x)$.

Предположим, что среди перекрестков u, v и w один нечетный и два четных. Не ограничивая общности, можно считать, что нечетным перекрестком является w . Половинки узла в перекрестке u равны соответственно α и $\beta\gamma$. Так как перекресток u четный, имеет место соотношение $\alpha = (\alpha\beta\gamma)^l$ для некоторого $l \in \mathbb{Z}$. Кроме того, как было замечено выше, классы половинок коммутируют, так что $\alpha\beta\gamma = \beta\gamma\alpha$. Аналогично, для перекрестка v выполняются соотношения $\beta = (\beta\gamma\alpha)^m, m \in \mathbb{Z}$, и $\beta\gamma\alpha = \gamma\alpha\beta$. Следовательно, мы имеем

$$\alpha\beta = (\alpha\beta\gamma)^l(\beta\gamma\alpha)^m = (\gamma\alpha\beta)^{l+m},$$

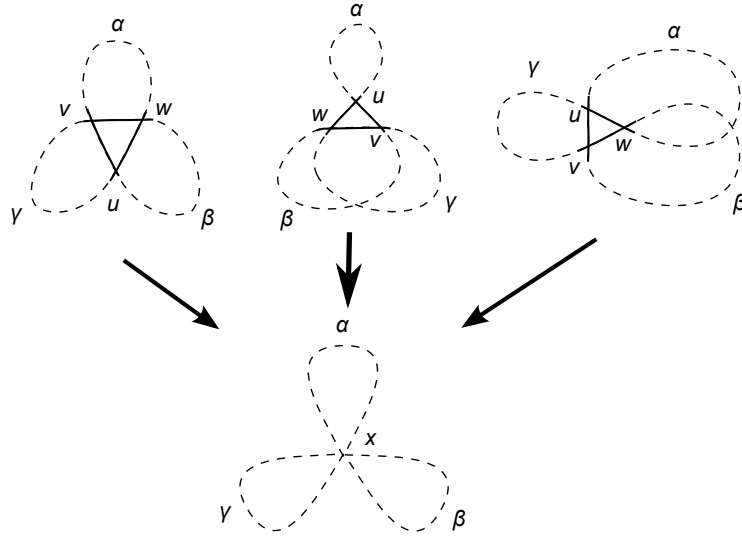


Рис. 10. Стягивание треугольника в точку при различных способах соединения его вершин в диаграмме D

откуда $\gamma = (\gamma\alpha\beta)^{1-l-m}$. Таким образом, перекресток w тоже должен быть четным. Полученное противоречие показывает, что семейство отображений ψ^{hom} обладает свойством $(\Psi 2)$, а значит, является слабой четностью. \square

Теорема 2.1. *Гомотопическая четность является максимальной нетривиальной слабой четностью.*

Ключевой для доказательства теоремы является следующая лемма.

Лемма 2.1. *Пусть D — диаграмма узла на поверхности S и $v \in \mathcal{V}(D)$ — перекресток, такой что $[D_v] = 0 \in \pi_1(S, v)$ для одной из половинок узла в перекрестке v . Тогда для любой нетривиальной слабой четности ψ имеем $\psi_D(v) = 0$.*

Доказательство. Если узел \mathcal{K} является плоским, то есть в категории \mathfrak{K} не различаются проходы и переходы, то гомотопию половинки D_v в точку можно представить как последовательность движений Рейдемейстера. Значит, половинку D_v движениями Рейдемейстера можно преобразовать в простую петлю в окрестности перекрестка v (см. рис. 11). Но тогда $\psi(v)$ будет равно 0 по свойству $(\Psi 1)$.

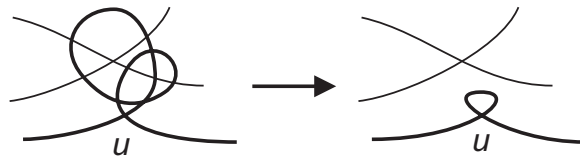


Рис. 11. Доказательство леммы 2.1 для плоского узла на поверхности

Для доказательства леммы в неплоском случае нам потребуются вспомогательные утверждения.

Лемма 2.2. *Для любой нетривиальной слабой четности:*

- четности вершин в альтернированном двуугольнике совпадают;
- число нечетных вершин в альтернированном треугольнике равно 0, 2 либо 3.

Доказательство. Пусть перекрестки u и v образуют альтернированный двуугольник. При помощи первого движения Рейдемейстера образуем на дуге, соединяющей u и v , перекресток w , чтобы к перекресткам u, v и w можно было применить третье движение Рейдемейстера (см. рис. 13). Перекресток w , согласно свойству $(\Psi 1)$, является четным, так что четности перекрестков u и v должны совпадать, чтобы выполнялось свойство $(\Psi 3)$.

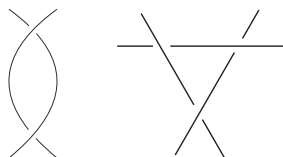


Рис. 12. Альтернированный двуугольник и треугольник

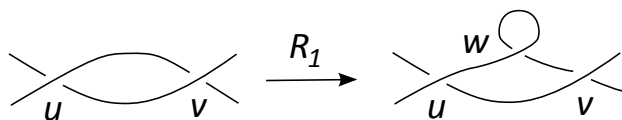


Рис. 13. Доказательство леммы 2.1 для альтернированного двуугольника

Пусть перекрестки u, v и w образуют альтернированный треугольник. При помощи второго движения Рейдемейстера добавим перекрестки t и t' (см. рис. 14). Согласно $(\Psi3)$, количество нечетных перекрестков среди v, w и t может быть равно 0, 2 или 3. Но четности перекрестков t и t' совпадают согласно $(\Psi2)$, а совпадение четностей перекрестков t' и u , образующих альтернированный двуугольник, следует из доказанного выше.

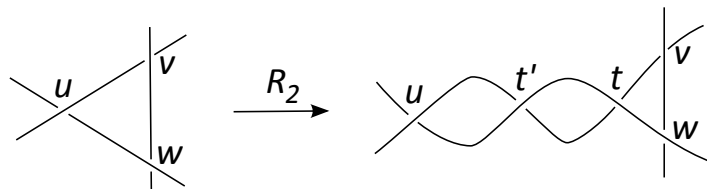


Рис. 14. Доказательство леммы 2.1 для альтернированного треугольника

Таким образом, лемма 2.2 доказана. □

Лемма 2.3. Для любой нетривиальной слабой четности:

- четности вершин u, v в пересеченном двуугольнике совпадают;
- вершина u в пересеченном одноугольнике является четной при любом выборе проходов и переходов в перекрестках (см. рис. 15).

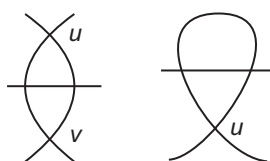


Рис. 15. Пересеченный двуугольник и одноугольник

Доказательство. Рассмотрим пересеченный двуугольник с вершинами u, v . В случае, когда пересекающую дугу можно удалить из двуугольника при помощи третьего движения, совпадение четностей вершин u и v следует из свойства $(\Psi0)$, а также свойства $(\Psi2)$ либо леммы 2.2.

Предположим теперь, что пересекающую дугу из двуугольника удалить третьим движением нельзя (см. рис. 16). Добавим при помощи второго движения Рейдемейстера перекрестки w и w' . Проведенные выше рассуждения показывают, что четности перекрестков u и w совпадают. С другой стороны, четности перекрестков w и w' совпадают согласно свойству $(\Psi2)$, а четности перекрестков w' и v совпадают по лемме 2.2. Таким образом, четности перекрестков u и v равны.

Рассмотрим пересеченный одноугольник с вершиной u (см. рис. 15 справа). При помощи первого движения Рейдемейстера мы можем создать вверху петли перекресток v , который будет четным согласно свойству $(\Psi1)$. Перекрестки u и v будут образовывать пересеченный двуугольник, поэтому их четности будут одинаковы. Следовательно, перекресток u четный. Лемма 2.3 доказана. □

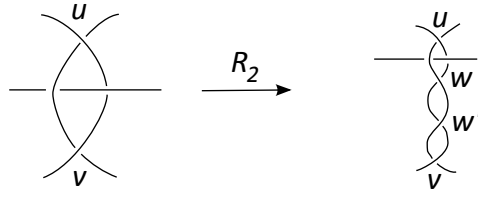


Рис. 16. Доказательство леммы 2.3 для пересеченного двуугольника

Следующая лемма является аналогом леммы 4.7 из работы [6].

Лемма 2.4. Пусть диаграмма D ограничивает на поверхности многоугольник, вершинами которого являются перекрестки v_0, v_1, \dots, v_n . Предположим, что перекрестки v_1, \dots, v_n являются четными относительно некоторой слабой четности ψ . Тогда перекресток v_0 тоже четный относительно ψ .

Доказательство. Доказательство ведется по индукции. При $n = 0, 1, 2$ утверждение следует из свойств $(\Psi 1)$, $(\Psi 2)$ и $(\Psi 3)$ соответственно (а также леммы 2.2).

Пусть утверждение леммы верно при $n \leq k$. Рассмотрим случай $n = k + 1$. Пусть имеется $(k + 2)$ -угольник v_0, v_1, \dots, v_{k+1} , в котором перекрестки v_1, \dots, v_{k+1} четные. Применим увеличивающее второе движение Рейдемейстера к ребрам v_0v_1 и v_kv_{k+1} , создав два новых перекрестка w и w' . На месте $(k + 2)$ -угольника появятся треугольник v_0wv_{k+1} , двуугольник ww' и $(k + 1)$ -угольник $w'v_1 \dots v_k$ (см. рис. 17). По предположению индукции перекресток w' будет четным.

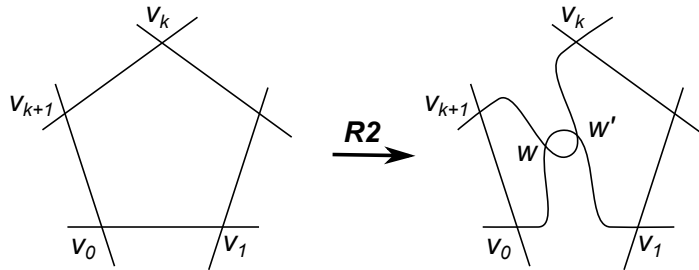


Рис. 17. Доказательство леммы 2.4

Согласно свойству $(\Psi 2)$ четным окажется и перекресток w . Поскольку v_{k+1} тоже является четной, то оставшаяся вершина v_0 в треугольнике v_0wv_{k+1} будет четной по свойству $(\Psi 3)$ либо лемме 2.2.

Лемма 2.4 доказана. \square

Завершим доказательство леммы 2.1.

Рассмотрим перекресток u диаграммы D , половина которого D_u стягивается в точку (см. рис. 18). Процесс стягивания можно представить как проекцию некоторой гомотопии узла в угол-

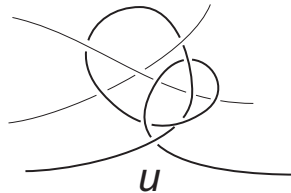


Рис. 18. Гомотопически тривиальная половина

щении поверхности $S \times I$. Данная гомотопия представляется как последовательность изотопий в $S \times I$ и моментов самопересечения узла, которые при проекции выглядят как операции замены прохода на переход в некотором перекрестке (см. рис. 19). Мы модифицируем процесс гомотопии, добавляя в момент замены перекрестка небольшую петлю, чтобы избежать самопересечений (см. рис. 20). В результате мы получим изотопию узла, проекция которой переводит половину D_u в

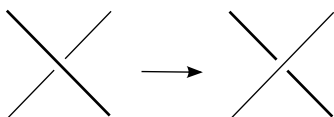


Рис. 19. Замена прохода на переход в перекрестке

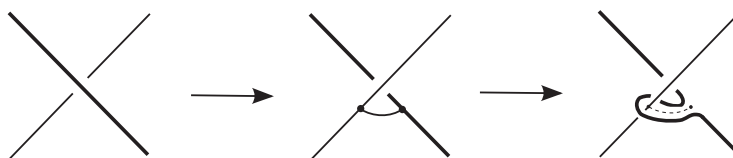


Рис. 20. Добавление петли вместо замены структуры перекрестка

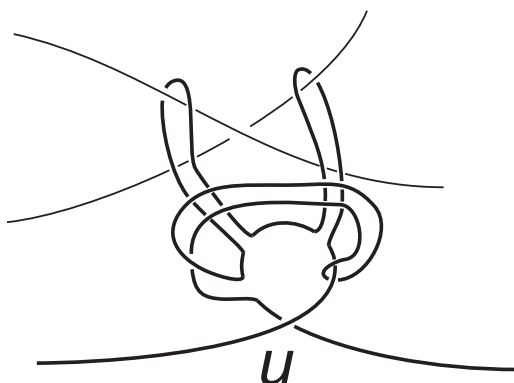


Рис. 21. Стянутая половинка с отростками

маленькую петлю с добавленными «отростками» (см. рис. 21). Применим второе движение Рейдемейстера необходимое число раз, чтобы образовался маленький многоугольник, содержащий перекресток u , все остальные вершины которого соответствуют «отросткам» (см. рис. 22). Заметим,

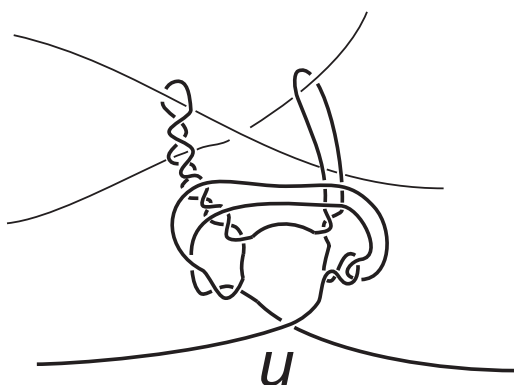


Рис. 22. Добавление перекрестков в конце отростков

что все эти вершины будут четными, поскольку каждый отросток можно разбить вторыми движениями на (возможно, пересеченные) двуугольники (см. левый верхний отросток на рис. 22), так что все перекрестки отростка будут иметь одинаковую четность согласно свойству (Ψ_2) и леммам 2.2, 2.3. Эта четность будет совпадать с четностью первого перекрестка отростка, который является вершиной пересеченного одноугольника, а значит, четен. Таким образом, перекресток u является вершиной многоугольника, остальные вершины которого четны. Следовательно, по лемме 2.4 перекресток u четный.

Лемма 2.1 доказана. □

Доказательство теоремы 1.2. Нам достаточно показать, что для любой слабой четности ψ на категории диаграмм узла в поверхности S соотношение (2.1) влечет четность соответствующего перекрестка.

Обозначим через L множество целых чисел, обладающих следующим свойством: $l \in L$, если для любой диаграммы D , перекрестка $v \in \mathcal{V}(D)$, такого что $[D_v] = [D]^l \in \pi_1(S, v)$ для некоторой половинки D_v узла в v , и любой слабой четности ψ имеет место соотношение $\psi_D(v) = 0$.

Согласно лемме 2.1 выполнено включение $0 \in L$.

Очевидно, что из $l \in L$ следует $1 - l \in L$ (это соответствует переходу от одной половинки к другой). Таким образом, $1 = 1 - 0 \in L$.

Покажем теперь, что из $l \in L$ следует $l - 1 \in L$. Пусть $l \in L$ и для перекрестка v вполне соотношение $[D_v] = [D]^{l-1}$. Завяжем рядом с перекрестком v петлю с гомотопическим типом $[D_u] = [D]$ (здесь мы отождествляем фундаментальные группы с базовыми точками, принадлежащими стягиваемой окрестности точки v). Четность перекрестка v при этом не изменится согласно свойству $(\Psi 0)$. Применим второе движение Рейдемейстера, образовав перекресток w . Гомотопический тип половинки узла в перекрестке w равен

$$[D_w] = [D_v][D_u] = [D]^{l-1}[D] = [D]^l.$$

Так как $l \in L$, перекресток w оказывается четным. Поскольку $1 \in L$, перекресток u тоже четен. Но перекрестки u, v и w образуют треугольник. Значит, согласно свойству $(\Psi 3)$ либо лемме 2.2, перекресток v будет четным.

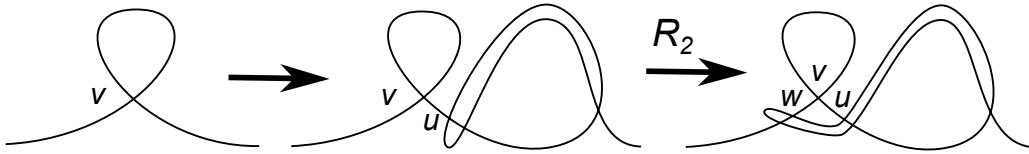


Рис. 23. Доказательство перехода $l \rightarrow l - 1$

Таким образом, все целые числа, не превосходящие 1, лежат в L . Следовательно, $\mathbb{N} \in L$, так как для любого $n \in \mathbb{N}$ выполнено $n = 1 - (1 - n)$ и $1 - n < 1$. Тогда $L = \mathbb{Z}$.

Итак, любой перекресток, четный относительно гомотопической четности, является четным для любой нетривиальной слабой четности. Значит, гомотопическая четность ψ^{hom} является максимальной. \square

Следствие 2.1. *На классических узлах любая слабая четность является нулевой либо тривиальной.*

Доказательство. Классические узлы суть узлы на сфере. Так как фундаментальная группа сферы тривиальна, то все перекрестки являются четными относительно гомотопической четности, то есть $\psi^{hom} = \mathbb{O}$. Так как гомотопическая четность максимальна, любая нетривиальная слабая четность совпадает с нулевой. \square

Таким образом, как и в случае четностей (см. [6, Corollary 4.2]), теория слабых четностей становится тривиальной на классических узлах.

Переформулировка следствия 2.1 на язык функториальных отображений приводит к следующему результату.

Следствие 2.2. *Ограничение любого нетривиального функториального отображения на классические узлы является тождественным отображением. В частности, нетривиальное функториальное отображение виртуальных узлов, принимающее значение в классических диаграммах узлов, есть проекция на классические узлы.*

Опишем теперь все слабые четности для узлов на заданной двумерной поверхности. При этом мы наложим на диаграммы узла некоторое необременительное ограничение — потребуем, чтобы диаграммы проходили через фиксированную точку на поверхности.

Пусть \mathcal{K} — узел в утолщении связной ориентированной замкнутой поверхности S , а z — некоторая точка на поверхности S . Рассмотрим категорию диаграмм \mathfrak{K}_z , объектами которой являются

диаграммы узла \mathcal{K} , содержащие точку z , причем z не является перекрестком. Морфизмы категории — это изотопии и движения Рейдемейстера, оставляющие точку z неподвижной, а также их композиции.

Теорема 2.2. *Имеется естественная биекция между слабыми четностями на категории диаграмм \mathfrak{K}_z и подгруппами фундаментальной группы $H \subset \pi_1(S, z)$ такими, что $[\mathcal{K}] \in H$.*

При заданной подгруппе H соответствующая слабая четность ψ^H определяется следующим образом: перекресток v диаграммы D является четным, т. е. $\psi_D^H(v) = 0$, тогда и только тогда, когда $[\hat{D}_v] \in H$, где \hat{D}_v — это приведенная к z половинка диаграммы в перекрестке v (см. рис. 24).

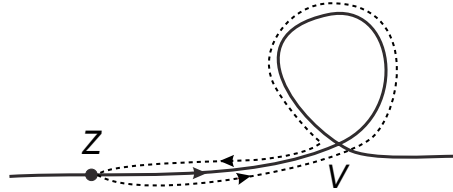


Рис. 24. Приведенная половинка диаграммы в перекрестке v

Замечание 2.1. Определение приведенной половинки зависит от ориентации узла, однако, как мы покажем ниже при доказательстве теоремы, на выполнение условия четности перекрестка выбор ориентации узла влияния не оказывает.

Доказательство. Пусть H — подгруппа в $\pi_1(S, z)$, содержащая элемент $[\mathcal{K}]$. Покажем, что семейство отображений $\psi^H = \{\psi_D^H\}$, $\psi_D^H: \mathcal{V}(D) \rightarrow \mathbb{Z}_2$, $D \in ob(\mathfrak{K}_z)$, определяемое условием

$$\psi_D^H(v) = \begin{cases} 0 & \text{при } [\hat{D}_v] \in H; \\ 1 & \text{иначе,} \end{cases}$$

является слабой четностью.

Покажем сначала, что четность перекрестка не зависит от того, гомотопический класс какой половинки проверяется на принадлежности подгруппе H , а также от ориентации узла.

Рассмотрим перекресток v и обозначим дугу узла, соединяющую (в направлении обхода узла) точки z и v , как γ_1 ; (неприведенную) половинку узла в перекрестке v , не содержащую z , как α ; и дугу, соединяющую (по направлению обхода узла) v и z , как γ_2 (см. рис. 25). Тогда гомотопический

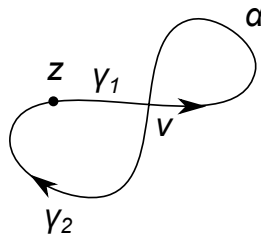


Рис. 25. Перекресток в диаграмме с отмеченной точкой z

класс одной приведенной половинки в перекрестке v равен $[\hat{D}_v] = [\gamma_1 \alpha \gamma_1^{-1}]$, а другой — равен $[\hat{D}'_v] = [\gamma_1 \alpha \gamma_2 \gamma_1 \alpha^{-1} \gamma_1^{-1}] = [D][\hat{D}_v^{-1}]$, где $[D] = [\gamma_1 \alpha \gamma_2]$ — гомотопический класс диаграммы (и узла). Так как $[D] \in H$, половинки $[\hat{D}_v]$ и $[\hat{D}'_v]$ принадлежат либо не принадлежат подгруппе H одновременно.

Приведенная половинка диаграммы в перекрестке при противоположной ориентации узла равна $(-\hat{D})_v = \gamma_2^{-1} \alpha^{-1} \gamma_2$. Тогда имеет место равенство $[(-\hat{D})_v] = [D]^{-1} [\hat{D}_v]^{-1} [D]$. Так как $[D] \in H$, условие $[\hat{D}_v] \in H$ эквивалентно условию $[(-\hat{D})_v] \in H$.

Проверим теперь выполнение условий слабой четности.

Свойство (Ψ_0) следует из того, что гомотопический класс половинки диаграммы в перекрестке не меняется при изотопии и движениях Рейдемейстера, при которых перекресток сохраняется, однако следует проверить ситуацию, когда перекресток диаграммы v переходит через точку z (см. рис. 26). Обозначим через α и β (неприведенные) половинки диаграммы в перекрестке v .

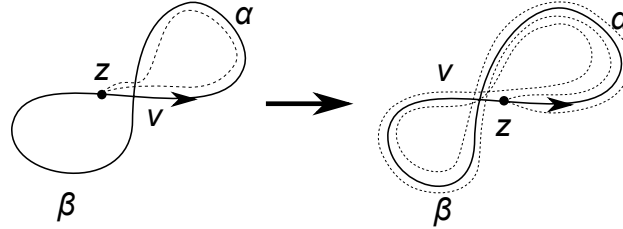


Рис. 26. Переход перекрестка через отмеченную точку z

Короткую дугу, соединяющую v и z , можно стянуть в точку; при этом половинки диаграммы до перехода перекрестка через z можно отождествить с соответствующими половинками после перехода и рассматривать как петли с началом в точке z . Приведенная половинка \hat{D}_v в начальной диаграмме равна α , после перехода ей соответствует приведенная половинка $\hat{D}'_v = \alpha\beta\alpha\beta^{-1}\alpha^{-1}$ (см. рис. 26). Тогда $[\hat{D}'_v] = [D][\hat{D}_v][D]^{-1}$. Так как $[D] \in H$, четность перекрестка при переходе через z не меняется.

Проверим свойство (Ψ_2) . Пусть вершины u и v принимают участие во втором движении Рейдемейстера (см. рис. 27). Тогда $\hat{D}_u = \gamma_1\delta_1\alpha\delta_2\gamma_1^{-1}$ и $\hat{D}_v = \gamma_1\delta_1\alpha\delta_1^{-1}\gamma_1^{-1}$. Так как малые дуги δ_2 и δ_1^{-1} гомотопны как кривые с закрепленными концами, имеет место равенство $[\hat{D}_u] = [\hat{D}_v]$, следовательно, перекрестки u и v имеют одинаковую четность относительно ψ^H .

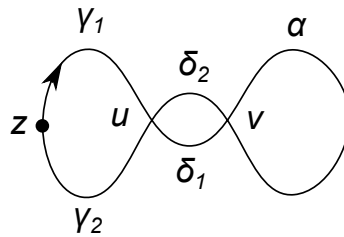


Рис. 27. Доказательство свойства (Ψ_2)

Пусть перекрестки u, v и w участвуют в третьем движении (см. рис. 28). Тогда их приведенные

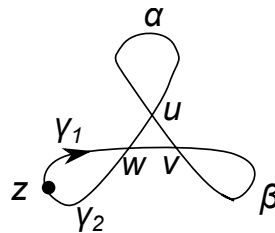


Рис. 28. Доказательство свойства (Ψ_3)

половинки равны $\hat{D}_u = \gamma_1\alpha\gamma_1^{-1}$, $\hat{D}_v = \gamma_1\alpha\beta\alpha^{-1}\gamma_1^{-1}$ и $\hat{D}_w = \gamma_1\alpha\beta\gamma_2\gamma_1\beta^{-1}\alpha^{-1}\gamma_1^{-1}$. Следовательно, $[\hat{D}_w][\hat{D}_v][\hat{D}_u] = [\gamma_1\alpha\beta\gamma_2] = [D] \in H$. Отсюда вытекает, что количество половинок перекрестков, гомотопический класс которых принадлежит подгруппе H , может быть равным 0, 1 или 3. Иными словами, количество нечетных перекрестков среди u, v и w не может быть равно 1, что доказывает свойство (Ψ_3) . Проверка свойства (Ψ_3) для других конфигураций перекрестков производится аналогично.

Таким образом, мы показали, что ψ^H является слабой четностью. Проверим теперь, что любая слабая четность на категории диаграмм \mathfrak{K}_z равна ψ^H для некоторой подгруппы H .

Пусть ψ — некоторая слабая четность на \mathfrak{K}_z .

Предположим, что диаграмма D содержит перекрестки u и v , такие что $[\hat{D}_u] = [\hat{D}_v] \in \pi_1(S, z)$. Покажем, что тогда $\psi_D(u) = \psi_D(v)$. Для этого притянем перекрестки u и v к отмеченной точке (см. рис. 29), так чтобы они попали в стягиваемую окрестность точки z . Заметим, что притягивание

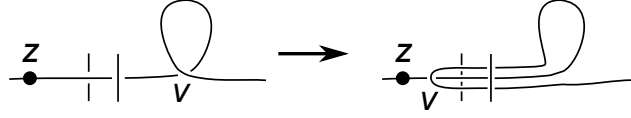


Рис. 29. Притягивание перекрестка к отмеченной точке

перекрестка не меняет гомотопический тип его приведенной половинки.

Обозначим в получившейся диаграмме через α половинку диаграммы в перекрестке u , не содержащую z , через β — длинную дугу диаграммы, соединяющую точки u и v , и через γ — длинную дугу, соединяющую v и z (см. рис. 30). отождествляя между собой точки стягиваемой окрестно-

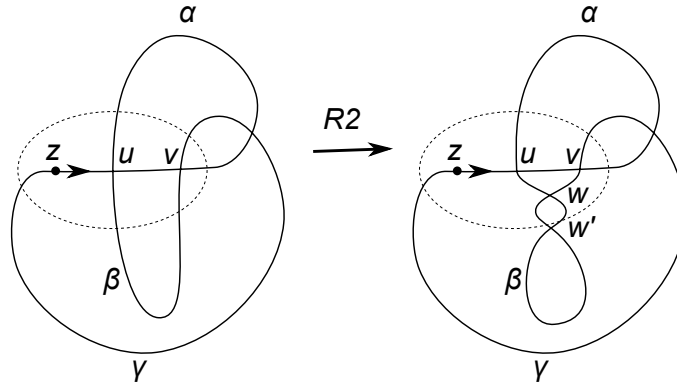


Рис. 30. Диаграмма с притянутыми к отмеченной точке перекрестками u и v . Пунктиром обозначена стягиваемая окрестность точки z

сти, мы будем игнорировать дуги, целиком лежащие в этой окрестности, и рассматривать кривые α, β, γ как замкнутые петли с началом в z . Тогда приведенная половинка в перекрестке u равна $\hat{D}_u = \alpha$, а половинка в перекрестке v равна $\hat{D}_v = \alpha\beta$. Так как по предположению $[\hat{D}_u] = [\hat{D}_v]$, то $[\beta] = 1 \in \pi_1(S, z)$. Применим к диаграмме второе движение Рейдемейстера, добавляющее перекрестки w и w' . Одна из (неприведенных) половинок перекрестка w равна β , а значит, стягиваема. По лемме 2.1 имеем $\psi_D(w) = 0$. Тогда, так как перекрестки u, v и w образуют треугольник, из свойства (Ψ3) либо леммы 2.2 следует, что перекрестки u и v имеют одинаковую четность.

Пусть теперь имеются перекрестки $u \in \mathcal{V}(D)$ и $v \in \mathcal{V}(D')$, $D, D' \in ob(\mathfrak{K}_z)$, такие что $[\hat{D}_u] = [\hat{D}_v] \in \pi_1(S, z)$. Так как диаграммы D и D' соответствуют одному узлу \mathcal{K} , имеется последовательность движений, преобразующих D в D' . При этих преобразованиях перекресток u может исчезнуть, но мы можем при помощи вторых движений Рейдемейстера добавить к диаграмме D перекресток w , такой что $[\hat{D}_w] = [\hat{D}_u]$, причем этот перекресток будет сохраняться при переходе от D к D' (после некоторой модификации промежуточных диаграмм, состоящей в добавлении к ним перекрестка w при помощи вторых и, возможно, третьих движений Рейдемейстера). Гомотопический тип половинки и четность перекрестка w при движениях сохраняются, поэтому $\psi_D(u) = \psi_D(w) = \psi_{D'}(w) = \psi_{D'}(v)$, где первое и последнее равенства следуют из рассуждений, проведенных ранее.

Определим множество $H \subset \pi_1(S, z)$, состоящее из гомотопических классов приведенных половинок в перекрестках, четных относительно ψ :

$$H = \{[\hat{D}_v] \mid D \in ob(\mathfrak{K}_z), v \in \mathcal{V}(D) \text{ такие, что } \psi_D(v) = 0\}.$$

Тогда проведенные выше рассуждения показывают, что слабая четность ψ задается по правилу

$$\psi_D(v) = \begin{cases} 0 & \text{при } [\hat{D}_v] \in H; \\ 1 & \text{иначе.} \end{cases}$$

Из свойства $(\Psi 1)$ следует, что $[K] \in H$. Нам остается показать, что H является подгруппой в $\pi_1(S, z)$.

Пусть $h_1, h_2 \in H$. На произвольной диаграмме D при помощи вторых движений Рейдемейстера образуем перекрестки u и v , такие что $[\hat{D}_u] = h_1$, $[\hat{D}_v] = h_2$. Тогда $\psi_D(u) = \psi_D(v) = 0$. Притянем перекрестки u и v к отмеченной точке z и при помощи второго движения добавим перекрестки w и w' (см. рис. 30). Тогда имеем $\hat{D}_u = \alpha$, $\hat{D}_v = \alpha\beta$, $\hat{D}_w = \alpha\beta\alpha^{-1}$ (здесь мы опять не обращаем внимания на дуги, целиком лежащие внутри стягиваемой окрестности точки z). Следовательно, $[\hat{D}_w] = [\hat{D}_v][\hat{D}_u]^{-1} = h_2h_1^{-1}$. В силу свойства $(\Psi 3)$ (либо леммы 2.2) перекресток w является четным относительно ψ , а значит, $h_2h_1^{-1} \in H$. Поскольку это включение имеет место для любых $h_1, h_2 \in H$, множество H является подгруппой. Таким образом, $\psi = \psi^H$. \square

Замечание 2.2. Слабую четность, определенную на семействе диаграмм узла \mathcal{K} , проходящих через точку z , можно распространить на множество всех диаграмм узла \mathfrak{K} следующим образом. Фиксируем диаграмму $D_0 \in \mathfrak{K}_z$. Пусть D — произвольная диаграмма узла \mathcal{K} . Так как диаграммы D_0 и D соответствуют одному узлу, имеется изотопия в утолщении поверхности, проекция которой на поверхность переводит диаграмму D_0 в D . При изотопии точка z , рассматриваемая как точка на диаграмме, опишет путь γ с началом в z и концом в точке $w \in D$.

Пусть слабая четность ψ в \mathfrak{K}_z определяется подгруппой $H \subset \pi_1(S, z)$. Путь γ определяет изоморфизм фундаментальных групп $\gamma_*: \pi_1(S, z) \rightarrow \pi_1(S, w)$. Значение слабой четности ψ в перекрестке v диаграммы D может быть определено по правилу: $\psi_D(v) = 0$ тогда и только тогда, когда $[\hat{D}_v] \in \gamma_*(H) \subset \pi_1(S, w)$, где \hat{D}_v — половинка узла в перекрестке v , приведенная к точке w .

Пусть \mathcal{K} — узел на поверхности S и D — диаграмма узла \mathcal{K} , содержащая точку z . Пусть H — подгруппа в $\pi_1(S, z)$, которая содержит класс $[K]$. Подгруппе H соответствует накрытие $p_H: \tilde{S} \rightarrow S$ поверхности S . При этом поднятие \tilde{D} диаграммы D , содержащее отмеченную точку \tilde{z} поверхности \tilde{S} , замыкается, так как $[K] \in H$, а значит, является диаграммой некоторого узла на поверхности \tilde{S} . Мы можем описать слабую четность ψ^H и действие соответствующего функториального отображения Ψ^H посредством накрытия p_H .

Утверждение 2.2.

1. Перекресток v диаграммы D является четным относительно ψ^H тогда и только тогда, когда поднятие $\tilde{D}_v \subset \tilde{D}$ половинки D_v замыкается.
2. Поднятие \tilde{D} диаграммы совпадает с результатом применения к диаграмме D функториального отображения Ψ^H .

Замечание 2.3. Во втором пункте утверждения окрестность диаграммы \tilde{D} в \tilde{S} интерпретируется как поверхность $S'(\tilde{D})$ виртуального узла (см. рис. 31).

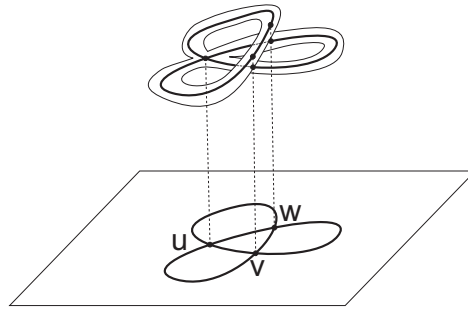


Рис. 31. Диаграмма и ее поднятие

Доказательство. Для любого перекрестка имеем $\psi_D^H(v) = 0 \Leftrightarrow [\hat{D}_v] \in H \Leftrightarrow \tilde{D}_v$ замыкается.

Второй пункт следует из первого и описания виртуальных диаграмм как диаграмм в поверхностях. \square

В случае гомотопической слабой четности описание функториального отображения как поднятия при накрытии приводит к следующему результату.

Теорема 2.3. Пусть \mathcal{K} — узел на связной замкнутой ориентированной поверхности S и D — его диаграмма. Тогда $\Psi^{hom}(D)$, где Ψ^{hom} есть функториальное отображение, отвечающее гомотопической слабой четности, является классической диаграммой узла.

Доказательство. Если S — сфера, то D — классическая диаграмма, и отображение $\Psi^{hom}(D)$ является тождественным.

Пусть род поверхности S больше нуля. Диаграмму $\Psi^{hom}(D)$ можно рассматривать как поднятие диаграммы D на накрывающую поверхность \tilde{S} . В случае гомотопической четности фундаментальная группа $\pi_1(\tilde{S})$ изоморфна циклической подгруппе в $\pi_1(\tilde{S})$, порожденной элементом $[\mathcal{K}]$. Так как универсальное накрытие поверхности S есть плоскость, то \tilde{S} есть факторизация плоскости по свободно действующему преобразованию, причем можно считать, что это преобразование сохраняет метрику постоянной кривизны на плоскости. Следовательно, поверхность \tilde{S} есть плоскость либо цилиндр. В любом случае, \tilde{S} , а значит, и окрестность диаграммы $\Psi^{hom}(D)$ вложима в \mathbb{R}^2 , так что $\Psi^{hom}(D)$ является классической диаграммой. \square

Замечание 2.4. Для плоских узлов на фиксированной поверхности теорема 2.3 означает, что функториальное отображение, соответствующее гомотопической слабой четности, переводит любой узел в тривиальный, так как таковым является любой классический плоский узел.

Следствие 2.3. Мы можем определить проекцию Π виртуальных узлов на классические: для любого виртуального узла \mathcal{K} положим

$$\Pi(\mathcal{K}) = \Psi^{hom}(\bar{\mathcal{K}}),$$

где $\bar{\mathcal{K}}$ есть минимальный представитель узла \mathcal{K} .

Замечание 2.5. Построенная проекция определена на уровне узлов, но не диаграмм, то есть не является функториальным отображением виртуальных узлов в классические. Отображение (многозначное) на уровне диаграмм из виртуальных узлов в классические было построено в работе В. О. Мантурова [12].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Ильютко Д. П., Мантуров В. О., Никонов И. М. Четность в теории узлов и граф-зацепления // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2011. — 41. — С. 3–163.
2. Мантуров В. О. Четность в теории узлов // Мат. сб. — 2010. — 201, №5. — С. 65–110.
3. Мантуров В. О. Четность, свободные узлы, группы и инварианты конечного порядка // Тр. Моск. Мат. об-ва. — 2011. — 72, № 2. — С. 207–222
4. Мантуров В. О. Четность и кобордизмы свободных узлов // Мат. сб. — 2012. — 203, № 2. — С. 45–76.
5. Мантуров В. О. Четность и оценка числа виртуальных перекрестков для виртуальных узлов // Тр. сем. по вект. и тенз. анализу. — 2012. — 28. — С. 192–210.
6. Ilyutko D., Manturov V., Nikonov I. Virtual knot invariants arising from parities // arXiv:1102.5081v1.
7. Kamada N., Kamada S. Abstract link diagrams and virtual knots // J. Knot Theory Ramifications. — 2000. — 9, № 1. — С. 93–109.
8. Kuperberg G. What is a virtual link? // Algebr. Geom. Topol. — 2003. — 3. — С. 587–591.
9. Manturov V. O. On free knots and links // arXiv:math.GT/0902.0127.
10. Manturov V. O. Free knots are not invertible // arXiv:math.GT/0909.2230v2.
11. Manturov V. O. Free knots and parity // Introductory lectures on knot theory. Ser. Knots Everything. — 2012. — 46. — С. 321–345.
12. Manturov V. O. Parity and projection from virtual knots to classical knots // J. Knot Theory Ramifications. — 2013. — 22, № 9. — 20 с.

И. М. Никонов

Механико-математический факультет, МГУ им. М. В. Ломоносова

E-mail: nikonov@mech.math.msu.su

К-ГРУППЫ БРУНСА—ГУБЕЛАДЗЕ ДЛЯ ЧЕТЫРЕХУГОЛЬНОЙ ПИРАМИДЫ© 2013 г. **Ф. Ю. ПОПЕЛЕНСКИЙ, М. В. ПРИХОДЬКО**

Аннотация. В работе изучается относительно недавно построенное обобщение алгебраической K -теории, в котором в качестве дополнительного параметра используется сбалансированный многогранник. Для четырехугольной пирамиды изучается соответствующая группа Стейнберга и вычисляются K -группы.

1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи, в которых так или иначе проявлялись связи алгебраической K -теории с многогранниками, всегда вызывали интерес. В этом направлении, пожалуй, наибольшее значение имеют работы по сравнению друг с другом различных версий высших алгебраических K -теорий ассоциативных колец с 1. Важной работой, заслуживающей отдельного упоминания, является работа Вагонера [9], в которой была доказана эквивалентность алгебраической K -теории Квиллена и K -теории Володина (см. также [1]). Конструкция Вагонера использовала комбинаторику системы корней A_n , а точнее, комбинаторную структуру комплекса P_n , индуцированную на сфере пересечением с камерами Вейля. В дальнейшем было получено более простое (точнее, более короткое) доказательство (см. [8]), в котором использование системы корней A_n несколько замаскировано. В работах А. И. Немытова и Ю. П. Соловьева [2, 3] с помощью других систем корней исследовались изоморфизмы для эрмитовой K -теории инволютивных ассоциативных алгебр с 1.

Другой аспект связи алгебраической K -теории с многогранниками исследован в серии работ В. Брунса и И. Губеладзе (например, см. [6, 7]). Отправной точкой их конструкции служит коммутативное кольцо R с 1 и многогранник P , удовлетворяющий некоторым свойствам. Брунс и Губеладзе построили $GL(R, P)$ — обобщение кольца $GL(R)$, в котором выполняется аналог теоремы о разложении обратимой матрицы в произведение элементарных матриц. Специфика их результатов состоит в том, что в этих кольцах проекторы и «детерминант» $GL(R, P)/[GL(R, P), GL(R, P)]$ не изучены в такой степени, чтобы можно было говорить об обобщении функторов K_0 и K_1 . Вместе с тем им удалось определить аналог $E(R, P)$ подгруппы элементарных матриц $E(R) = [E(R), E(R)] = [GL(R), GL(R)] \subset GL(R)$. Стандартные соотношения в элементарных матрицах

$$[e_{ij}^a, e_{kl}^b] = \begin{cases} 1 & \text{для } j \neq k, i \neq l, \\ e_{il}^{ab} & \text{для } j = k, i \neq l, \\ e_{il}^{-ba} & \text{для } j \neq k, i = l. \end{cases}$$

для широкого класса так называемых сбалансированных многогранников переносятся на группу $E(R, P)$. Этот факт позволяет определить группу Стейнберга $St(E, P)$ и доказать, что она является универсальным центральным расширением $E(R, P)$. Тогда можно определить аналог K_2 Милнора как $K_2(R, P) = \ker(St(R, P) \rightarrow E(R, P))$. Применяя +-конструкцию к $BE(R, P)$, получим аналог высших K -групп Квиллена:

$$K_i(R, P) = \pi_i(BE(R, P)^+), \quad i \geq 2.$$

Возникает естественный вопрос: что из себя представляют группы $K_i(R, P)$ для различных многогранников? Брунс и Губеладзе получили ответ для сбалансированных многоугольников, а именно, они установили, что в действительности имеется всего шесть различных в определенном смысле вариантов, для каждого из которых было доказано, что группа $K_i(R, P)$ изоморфна либо $K_i(R)$ Квиллена, либо прямой сумме двух экземпляров $K_i(R)$ (для трех вариантов Брунс и Губеладзе накладывали на кольцо R дополнительное условие).

В настоящей работе исследуется K -теория Брунса—Губеладзе для четырехугольной пирамиды-многогранника, к которому неприменимы методы исследования работ [7]. Основными нашими результатами являются теоремы 3.2 и 4.1.

Связи K -теории Брунса—Губеладзе с конструкцией Вагонера—Володина будут исследованы с следующих работах.

2. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Многогранники. Пусть P — выпуклый многогранник в \mathbb{R}^n , все вершины которого принадлежат целочисленной решетке \mathbb{Z}^n . В дальнейшем мы всегда будем рассматривать только такие многогранники, дополнительно предполагая, что размерность n минимальна, т. е. линейные оболочки граней P являются гиперплоскостями в \mathbb{R}^n . Тогда любой такой грани F можно поставить в соответствие единственный сюръективный гомоморфизм $\langle F, - \rangle: \mathbb{Z}^n \rightarrow \mathbb{Z}$, ядром которого является множество векторов, параллельных грани F , и такой, что для любого вектора $u \in \mathbb{Z}^n$ с началом в F и концом в P выполняется неравенство

$$\langle F, u \rangle \geq 0.$$

Опорные векторы. Вектор $u \in \mathbb{Z}^n$ называется *опорным* для многогранника P , если существует такая грань $P_u \subset P$, что $\langle P_u, u \rangle = -1$, а для любой другой грани $F \subset P$ $\langle F, u \rangle \geq 0$. В этом случае грань P_u называется *базовой* (для опорного вектора u). Базовая грань для данного опорного вектора определена однозначно; наоборот, у двух различных опорных векторов базовые грани могут совпадать. Множество опорных векторов многогранника P обозначается $\text{Col}(P)$.

Одним из основных свойств опорных векторов является следующее: для любой точки $p \in P \cap \mathbb{Z}^n$ существует такое целое неотрицательное число k , что $p + ku \in P_u$. Это число называется *высотой* точки p над гранью P_u и обозначается $ht_{P_u}(p)$. Высоту точки над гранью можно вычислить следующим образом: для любой точки $q \in F$

$$ht_F(p) = \langle F, p - q \rangle.$$

Это определение не зависит от выбора точки q , так как все векторы, соединяющие точки F , параллельны F .

На множестве опорных векторов можно ввести операцию частичного умножения: если $u, v \in \text{Col}(P)$ и $u + v \in \text{Col}(P)$ и $P_{u+v} = P_u$, то говорят, что определено произведение $uv = u + v$. Вообще говоря, не для всех пар опорных векторов существует их произведение. Кроме того, если определено uv , то не определено vu .

Приведем несколько примеров.

1. Δ_0^n — симплекс в \mathbb{R}^n , одна из вершин которого лежит в начале координат, а у каждой из остальных n вершин есть ровно одна ненулевая координата, равная 1. Для любых двух вершин p_i, p_j симплекса Δ_0^n вектор $\delta_i^j = p_j - p_i$ является опорным. Других опорных векторов нет. Все соотношения описываются формулой

$$\delta_i^j \delta_j^k = \delta_i^k.$$

2. $I \times I = \text{conv} \{(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)\}$ — квадрат со стороной 1. У него четыре опорных вектора:

$$\text{Col}(I \times I) = \{(0, 1), (0, -1), (1, 0), (-1, 0)\},$$

между которыми соотношений нет.

3. Трапеция $T = \text{conv} \{(0, 0), (2, 0), (1, 1), (0, 1)\}$. Множество опорных векторов также состоит из четырех элементов

$$u = (0, -1), \quad v = (1, 0), \quad -v = (-1, 0), \quad w = (1, -1)$$

со следующими соотношениями:

$$uv = w \quad \text{и} \quad w(-v) = u.$$

Сбалансированные многогранники. Многогранник P называется *сбалансированным*, если $\langle P_u, v \rangle \leq 1$ для любых $u, v \in \text{Col}(P)$. Примерами сбалансированных многогранников являются: симплекс, квадрат, трапеция из примера 3, четырехугольная пирамида, несбалансированных — прямоугольный треугольник с катетами 1 и 2.

Проективная эквивалентность. Многогранники P и Q называются *проективно эквивалентными*, если они имеют одинаковые размерности и одинаковую комбинаторную структуру, причем после подходящего аффинного преобразования \mathbb{R}^n , сохраняющего \mathbb{Z}^n , грани P становятся параллельными соответствующим граням Q .

У проективно эквивалентных многогранников системы опорных векторов со структурой умножения совпадают, поэтому соответствующие K -теории естественно изоморфны.

Теорема 2.1 (см. [6,7]). *Сбалансированные многоугольники разбиваются на классы проективной эквивалентности со следующими представителями:*

- a) $P_a = \Delta^2 = \text{conv}\{(0,0), (1,0), (0,1)\}$ — двумерный симплекс;
- b) трапеция $P_b = \text{conv}\{(0,0), (2,0), (1,1), (0,1)\}$;
- c) $P_c = \text{conv}\{(0,0), (3,0), (1,2), (0,1)\}$, здесь $\text{Col}(P_c) = \{u, v, w\}$ с единственным соотношением $uv = w$;
- d_k) серия многоугольников $P_{d,k}$: многоугольник $P_{d,k}$ имеет в точности k опорных векторов с общей базовой гранью, соотношений нет;
- e) единичный квадрат P_e ;
- f) квадрат со стороной 2 и срезанным углом: $P_f = \text{conv}\{(0,0), (2,0), (2,1), (1,2), (0,2)\}$, здесь $\text{Col}(P_f) = \{u, v\}$ без соотношений.

Подобной классификации в других размерностях не существует.

Простейшие примеры трехмерных многогранников с нетривиальной структурой опорных векторов получаются как конусы над многогранниками из теоремы 2.1. Более точно, вложим многогранник $P \subset \mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^{n+1} = \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}$ как $P \times \{0\}$. Определим конус высоты k над P как $C_k P = \text{conv} P \cup \underbrace{(0, \dots, 0, k)}_n$.

Нетрудно видеть, что $C_1 P_a$ — это трехмерный симплекс; он приводит к классической K -теории Квиллена. Многогранники $C_1 P_b, C_1 P_c, C_1 P_d, C_1 P_f$ не являются сбалансированными.

Многогранник $C_1 P_e$ — это четырехугольная пирамида, которой посвящена эта работа.

Среди конусов высоты 2 особо следует выделить $C_2 P_f$ — он сбалансирован и имеет очень интересную структуру опорных векторов; этот случай будет разобран в другом месте.

Удвоение вдоль грани. Для любого многогранника P и его грани F можно определить новый многогранник $P^{\perp F}$, называемый *удвоением* P вдоль грани F . Предположим, что начало координат принадлежит грани F , и рассмотрим стандартное вложение \mathbb{R}^n в \mathbb{R}^{n+1} . В \mathbb{R}^{n+1} многогранник P повернем на 90° вокруг грани F . Вершины повернутого многогранника, который мы обозначим $P^{\perp F}$, могут оказаться вне узлов целочисленной решетки, но можно изменить базис в \mathbb{R}^{n+1} так, что вершины и P и $P^{\perp F}$ будут иметь целочисленные координаты в новом базисе (например, мы всегда можем сделать аффинно-целочисленную замену координат в \mathbb{R}^n так, что грань F будет лежать в плоскости $x_n = 0$, и тогда образы всех вершин при повороте будут иметь целочисленные координаты). Теперь определим многогранник $P^{\perp F}$ как выпуклую оболочку P и $P^{\perp F}$. Если грань F является базовой для v , то будем также писать $P^{\perp v}$.

При удвоении многогранника вдоль грани F количество его граней увеличивается на 1. При этом для любой грани G , кроме F , выпуклую оболочку G и G^{\perp} (образ G при повороте) мы будем рассматривать как образ G при удвоении и обозначать $G^{\perp F}$. Для F положим по определению $F^{\perp F} = P^{\perp}$. Так как соответствие $G^{\perp F} \leftrightarrow G$ является взаимно-однозначным, иногда мы будем отождествлять $G^{\perp F}$ с G .

Пусть теперь P — сбалансированный многогранник и $v \in \text{Col}(P)$ — опорный вектор с базовой гранью G . Тогда v также является опорным и в $P^{\perp F}$ с базовой гранью $G^{\perp F}$. Кроме того, при любом удвоении возникает два новых опорных вектора δ и $-\delta$ с базовыми гранями P и P^{\perp} . Для любого $v \in \text{Col}(P)$ повернутый вектор v^{\perp} является опорным в $P^{\perp F}$ (при этом, если v параллелен F , то

v^{\perp} совпадает с v). При удвоении сбалансированного многогранника вдоль базовой грани получающийся многогранник также будет сбалансированным, причем множество его опорных векторов состоит только из перечисленных выше, т. е.

$$\text{Col}(P^{-F}) = \text{Col}(P) \cup \text{Col}(P^{\perp}) \cup \{\delta, -\delta\}.$$

Последовательность вложенных многогранников

$$\mathfrak{P} = (P = P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset \dots)$$

называется *последовательностью удвоений*, если, во-первых, каждый следующий многогранник является удвоением предыдущего вдоль базовой грани и, во-вторых, для любых $i \in \mathbb{Z}_+$, $v \in \text{Col}(P_i)$ найдется такой индекс $j \geq i$, что $P_{j+1} = P_j^{-v}$.

Так как имеется естественное вложение $\text{Col}(P_i) \subset \text{Col}(P_{i+1})$, можно определить прямой предел $\lim \text{Col}(P_i)$, который мы будем обозначать $\text{Col}(\mathfrak{P})$.

Группа Стейнберга. Для сбалансированного многогранника P и последовательности удвоений $\mathfrak{P} = (P \subset P_1 \subset \dots)$ определим *группу Стейнберга* $St(R, P)$ как группу с образующими x_v^λ , $v \in \text{Col}(\mathfrak{P})$, $\lambda \in R$, удовлетворяющими соотношениям:

$$x_v^\lambda x_v^\mu = x_v^{\lambda+\mu}$$

и

$$[x_u^\lambda, x_v^\mu] = \begin{cases} x_{uv}^{-\lambda\mu}, & \text{если определено } uv, \\ 1, & \text{если } u + v \notin \text{Col}(\mathfrak{P}) \cup \{0\}. \end{cases}$$

Можно показать, что это определение не зависит от выбора последовательности удвоений \mathfrak{P} . Подгруппу в группе $St(R, P)$, порожденную x_v^λ , где $v \in \text{Col}(P_i)$, будем обозначать $St_i(R, P)$ (это определение при $i \neq 0$ уже зависит от выбора последовательности удвоений).

В качестве примера вычислим группу Стейнберга для симплекса Δ_0^n . Обозначим его грани F_1, \dots, F_{n+1} . Для каждой пары граней F_i, F_j определены два опорных вектора $\delta_i^j \in F_i$ и $\delta_j^i \in F_j$ такие, что $\delta_i^j = -\delta_j^i$ и для любых трех граней F_i, F_j, F_k выполняется соотношение $\delta_i^j \delta_j^k = \delta_i^k$ (ср. с примером 1). При удвоении вдоль любой грани $(\Delta_0^n)^{\perp} = \Delta_0^{n+1}$. При этом все существующие грани и соотношения сохраняются, и возникают новая грань F_{n+2} и новые опорные векторы δ_i^{n+2} и δ_{n+2}^i для всех $i = 1, \dots, n+1$. Таким образом определено естественное вложение

$$\mathfrak{J}: St_k(R, \Delta_0^n) \rightarrow St_{k+1}(R, \Delta_0^n).$$

Пусть теперь $St_k(R)$ — классическая группа Стейнберга кольца R . Можно проверить, что отображение

$$\phi: St_{k+n+1}(R) \rightarrow St_0(R, \Delta_0^{k+n}) \cong St_k(R, \Delta_0^n),$$

определенное по формуле

$$\phi(x_{\delta_{ij}^\lambda}^\lambda) = x_{\delta_j^i}^\lambda,$$

является изоморфизмом. Более того, ϕ коммутирует с вложениями $\mathfrak{J}: St_k(R, \Delta_0^n) \rightarrow St_{k+1}(R, \Delta_0^n)$ и стандартным вложением $St_k(R) \rightarrow St_{k+1}(R)$, поэтому прямые пределы $St(R, \Delta_0^n)$ и $St(R)$ также изоморфны.

Элементарные автоморфизмы. Пусть $S(P)$ — полугруппа, порожденная парами $(p, 1)$, где $p \in P \cap \mathbb{Z}^n$, $d \in \mathbb{N}$, относительно поэлементного сложения. Для данного ассоциативного, коммутативного кольца с единицей R определено полугрупповое градуированное кольцо $R[P] = R[S(P)]$, группу сохраняющих градуировку автоморфизмов которого мы будем обозначать $\text{Gr.aut}(R[P])$. Элемент этой группы ϕ называется *элементарным автоморфизмом*, если найдутся такой опорный вектор $v \in \text{Col}(P)$ и такой элемент кольца $\lambda \in R$, что

$$\phi(x) = (1 + \lambda v)^{ht_{P_v}(x)} x$$

для любого $x \in S(P)$. Обозначим этот автоморфизм как e_v^λ , а подгруппу в группе $\text{Gr.aut}(R[P])$, порожденную элементарными автоморфизмами — как $E_0(R, P)$. В работах [6, 7] было показано,

что для сбалансированных многогранников элементарные автоморфизмы удовлетворяют соотношениям, аналогичным соотношениям между элементарными матрицами:

$$e_u^\lambda e_v^\mu = e_v^{\lambda+\mu},$$

$$[e_u^\lambda, e_v^\mu] = \begin{cases} e_{uv}^{-\lambda\mu}, & \text{если определено } uv, \\ 1, & \text{если } u + v \notin \text{Col}(P) \cup \{0\}. \end{cases}$$

Как и в случае группы Стейнберга, для фиксированной последовательности удвоений

$$\mathfrak{P} = (P = P_0 \subset P_1 \subset P_2 \subset \dots)$$

определено кольцо $R[\mathfrak{P}] = \lim_{i \rightarrow \infty} R[S(P_i)]$. В группе его автоморфизмов, сохраняющих градуировку, выделяется подгруппа $E(R, \mathfrak{P})$, порожденная элементарными автоморфизмами. При другом выборе последовательности удвоений получается естественно изоморфная группа, поэтому в дальнейшем вместо $E(R, \mathfrak{P})$ мы будем использовать обозначение $E(R, P)$.

3. Последовательность удвоений четырехугольной пирамиды

Теорема 3.1. Пусть $P = \text{conv} \{(0, 0, 0), (1, 0, 0), (1, 1, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ — четырехугольная пирамида, $\mathfrak{P} = (P \subset P_1 \subset \dots)$ — её последовательность удвоений. Тогда для любого t множество базовых граней P_t можно разбить на три семейства $\mathbf{A} = \mathbf{A}(t), \mathbf{B} = \mathbf{B}(t), \mathbf{C} = \mathbf{C}(t)$, количество граней в каждом из которых соответственно равно a, b и c , так что:

1. Для любых двух граней S_i и S_j одного семейства \mathbf{S} определены два вектора $\delta_i^j(\mathbf{S}) \in \text{Col}(S_i)$ и $\delta_j^i(\mathbf{S}) \in \text{Col}(S_j)$ такие, что

$$\delta_j^i(\mathbf{S}) = -\delta_i^j(\mathbf{S}).$$

2. Для любых трёх различных граней S_i, S_j и S_k одного семейства \mathbf{S}

$$\delta_i^j(\mathbf{S})\delta_j^k(\mathbf{S}) = \delta_i^k(\mathbf{S}).$$

3. Для любой грани A_k семейства \mathbf{A} , кроме указанных выше δ -векторов, существует еще $b \times c$ опорных векторов u_k^{ij} таких, что

$$u_k^{ij}\delta_i^l(\mathbf{B}) = u_k^{lj}, \quad u_k^{ij}\delta_j^l(\mathbf{C}) = u_k^{il} \quad \text{и} \quad \delta_l^k(\mathbf{A})u_k^{ij} = u_l^{ij}.$$

4. Для любого семейства $\mathbf{S}(t)$

$$\mathbf{S}(t) \subseteq \mathbf{S}(t+1).$$

Все указанные выше векторы различны, и других опорных векторов и соотношений между опорными векторами в P_t нет.

Доказательство. Доказывать эту теорему мы будем индукцией по t .

При $t = 0$ семейство \mathbf{A} состоит из единственной грани A , являющейся основанием пирамиды, семейство \mathbf{B} состоит из двух боковых граней, параллельных вектору $(1, 0, 0)$, а семейство \mathbf{C} состоит из двух боковых граней, параллельных вектору $(0, 1, 0)$. Все требуемые соотношения, очевидно, выполняются.

Для индукционного перехода нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.1. Пусть множество граней некоторого многогранника можно разбить на три семейства, удовлетворяющих свойствам 1, 2 и 3 из теоремы 3.1. Тогда:

1. Для любой грани $A_i \in \mathbf{A}$ все опорные векторы, кроме $\delta_i^j(\mathbf{A}), \delta_j^i(\mathbf{A})$ и u_i^{jk} , параллельны ей.
2. Для любой грани $B_i \in \mathbf{B}$ все опорные векторы, кроме $\delta_i^j(\mathbf{B}), \delta_j^i(\mathbf{B})$ и u_i^{jk} , параллельны ей.
3. Для любой грани $C_i \in \mathbf{C}$ все опорные векторы, кроме $\delta_i^j(\mathbf{C}), \delta_j^i(\mathbf{C})$ и u_i^{jk} , параллельны ей.

Доказательство леммы 3.1. Будем доказывать от противного. Предположим, для двух (возможно одинаковых) семейств \mathbf{T}, \mathbf{S} выполняется $\langle T_i, \delta_j^k(\mathbf{S}) \rangle = 1$, тогда $\langle T_i, \delta_j^k(\mathbf{S}) \rangle = -1$, то есть $\delta_j^k(\mathbf{S}) \in \text{Col}(T_i)$. Но это невозможно, так как все векторы из $\text{Col}(T_i)$ имеют вид $\delta_i^p(\mathbf{T})$, если $\mathbf{T} \neq \mathbf{A}$, или $\delta_i^p(\mathbf{T})$ и u_i^{pq} , если $\mathbf{T} = \mathbf{A}$. Теперь пусть $\langle A_i, u_l^{jk} \rangle = 1$ и $l \neq i$, тогда $\langle A_i, \delta_l^i(\mathbf{A})u_l^{jk} \rangle = 0$, то есть $u_l^{jk} \notin \text{Col}(A_i)$, что противоречит второму условию. Осталось проверить, что не может выполняться

равенство $\langle B_i, u_i^{jk} \rangle = 1$. В этом случае $\langle B_i, u_i^{jk} \rangle = \langle B_i, u_i^{jk} \delta_j^i(\mathbf{B}) \rangle = 2$, что невозможно, так как многогранник сбалансированный. \square

(Продолжение доказательства теоремы 3.1.)

Рассмотрим удвоение P_t до P_{t+1} . Удвоение может происходить вдоль одной из граней семейств \mathbf{A}, \mathbf{B} и \mathbf{C} , но последние два варианта полностью идентичны, поэтому рассмотрим первые два случая.

Пусть удвоение происходит вдоль грани $A_i \in \mathbf{A}$. Для краткости обозначим $n = a + 1$. При удвоении возникает новая грань, которую мы обозначим A_n , и новые δ -векторы $\delta_i^n(\mathbf{A}) \in \text{Col}(A_i)$ и $\delta_n^i(\mathbf{A}) \in \text{Col}(A_n)$. Теперь изучим, что происходит с остальными векторами при удвоении. Векторы $\delta_i^j(\mathbf{A})$ обозначим как $\delta_n^j(\mathbf{A})$, $\delta_j^i(\mathbf{A})$ — как $\delta_j^n(\mathbf{A})$, а u_i^{jk} — как u_n^{jk} . Остальные опорные векторы параллельны грани A_i , поэтому их образы при удвоении совпадают с ними самими. Значит, других новых опорных векторов нет, а для перечисленных выше все условия теоремы проверяются непосредственно.

Пусть теперь удвоение происходит вдоль грани $B_i \in \mathbf{B}$. Обозначим $n = b + 1$. При удвоении возникает новая грань, которую мы обозначим B_n , и новые δ -векторы $\delta_i^n(\mathbf{B}) \in \text{Col}(B_i)$ и $\delta_n^i(\mathbf{B}) \in \text{Col}(B_n)$. Теперь изучим, что происходит с остальными векторами при удвоении. Векторы $\delta_i^j(\mathbf{B})$ обозначим как $\delta_n^j(\mathbf{B})$, $\delta_j^i(\mathbf{B})$ — как $\delta_j^n(\mathbf{B})$, а u_k^{ij} — как u_k^{nj} . Остальные опорные векторы параллельны грани B_i , поэтому их образы при удвоении совпадают с ними самими. Условия теоремы опять же проверяются непосредственно.

Удвоение вдоль грани семейства \mathbf{C} рассматривается аналогично. \square

Доказанная теорема полностью описывает структуру группы Стейнберга четырехугольной пирамиды. Множество опорных векторов разбивается на 4 группы: 3 группы δ -векторов и векторы вида u_k^{ij} , причем δ -векторы перемножаются только внутри одной группы и действуют умножением слева или справа на векторы последней группы. Основываясь на этом наблюдении, мы построим матричное представление группы Стейнберга.

Напомним, что для двух матриц $A \in M_{m,n}(R)$ и $B \in M_{p,q}(R)$ их тензорным произведением называется такая матрица $A \otimes B \in M_{mp,nq}(R)$, что её элемент, находящийся на пересечении строки с номером $m(i-1) + j$ и столбца с номером $n(k-1) + l$, равен $A_{jl}B_{ik}$:

$$A \otimes B = \begin{pmatrix} Ab_{11} & Ab_{12} & \cdots \\ Ab_{21} & Ab_{22} & \\ \vdots & & \ddots \end{pmatrix}$$

Элементарные матрицы, отличающиеся от единичной одним недиагональным элементом, мы будем обозначать e_{ij}^λ , а матрицы, отличающиеся от нулевой одним элементом, — \tilde{e}_{ij}^λ .

Пусть $M_k = M_k(R, n)$ — подгруппа в $GL_n(R)$ такая, что для любой матрицы $X \in M_k$:

1. $X_{ii} = 1$ для любого индекса i ,
2. для различных индексов i и j неравенство $X_{ij} \neq 0$ выполняется, только если $i < k$ и $j \geq k$.

В дальнейшем нам понадобится следующее свойство группы M_k :

Утверждение 3.1. Для любых $e_{ij}^\lambda, X \in M_k$

$$e_{ij}^\lambda X = X e_{ij}^\lambda = X + \tilde{e}_{ij}^\lambda,$$

и, следовательно, $M_k \subset E_n(R)$.

Пусть теперь P_t — многогранник из последовательности удвоений четырехугольной пирамиды. Подгруппа $St_t(R, P)$ зависит только от значений a, b и c , поэтому можно обозначить её $S(R, a, b, c)$. Пусть, кроме того, $E(R, a, b, c)$ — группа блочных матриц вида

$$\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix},$$

где $X \in E_b(R) \otimes E_c(R)$, $Y \in M_{bc,a}(R)$ и $Z \in E_a(R)$. Обозначим соответствующие вложения

$$E_b(R) \otimes E_c(R) \xrightarrow{\phi_X} E(R, a, b, c),$$

$$M_{1,a}(R) \otimes M_{b,1}(R) \otimes M_{c,1}(R) \xrightarrow{\hat{\phi}_Y} M_{bc,a}(R) \xrightarrow{\phi_Y} E(R, a, b, c),$$

$$E_a(R) \xrightarrow{\phi_Z} E(R, a, b, c).$$

Теперь определим отображение

$$\phi_{a,b,c}: S(R, a, b, c) \rightarrow E(R, a, b, c)$$

по формулам

$$\begin{aligned}\phi_{a,b,c}(x_{\delta_j^i}^\lambda(\mathbf{A})) &= \phi_Z(e_{ji}^\lambda), \\ \phi_{a,b,c}(x_{\delta_j^i}^\lambda(\mathbf{B})) &= \phi_X(e_{ji}^\lambda \otimes I), \\ \phi_{a,b,c}(x_{\delta_j^i}^\lambda(\mathbf{C})) &= \phi_X(I \otimes e_{ji}^\lambda), \\ \phi_{a,b,c}(x_{u_k^{ij}}^\lambda) &= \phi_Y \circ \hat{\phi}_Y(\tilde{e}_{1k}^\lambda \otimes \tilde{e}_{i1}^1 \otimes \tilde{e}_{j1}^1).\end{aligned}$$

Для доказательства корректности достаточно заметить, что образы всех образующих группы Стейнберга в $E(R, a, b, c)$ выражаются через элементарные матрицы и все необходимые соотношения легко проверяются.

Удвоение вдоль грани индуцирует одно из отображений $E(R, a, b, c) \rightarrow E(R, a + 1, b, c)$, $E(R, a, b, c) \rightarrow E(R, a, b + 1, c)$ или $E(R, a, b, c) \rightarrow E(R, a, b, c + 1)$. В каждом из этих случаев диаграмма вида

$$\begin{array}{ccc} E(R, a, b, c) & \longrightarrow & E(R, a, b, c + 1) \\ \uparrow \phi_{a,b,c} & & \uparrow \phi_{a,b,c+1} \\ S(R, a, b, c) & \longrightarrow & S(R, a, b, c + 1) \end{array}$$

является коммутативной, поэтому существуют прямой предел $\varinjlim E(R, a, b, c)$, который мы обозначим $E_\infty(R, P)$, и отображение $\phi_\infty: St(R, P) \rightarrow E_\infty(R, P)$.

Теорема 3.2. *Группы $E_\infty(R, P)$ и $E(R, P)$ изоморфны.*

Доказательство. Достаточно показать, что существуют сюръективные гомоморфизмы из группы Стейнберга $St(R, P)$ в $E_\infty(R, P)$ и $E(R, P)$ с одинаковыми ядрами. Для $E(R, P)$ таким гомоморфизмом является канонический эпиморфизм $\phi: St(R, P) \rightarrow E(R, P)$, ядро которого изоморфно центру группы Стейнберга (см. [6, 7]). Мы докажем, что ϕ_∞ обладает теми же свойствами.

Проверим, что отображение $\phi_{a,b,c}$ сюръективно. Для любого семейства \mathbf{T} образ подгруппы в группе Стейнберга, порожденной $\delta_j^i(\mathbf{T})$, совпадает с соответствующей подгруппой, порожденной элементарными матрицами, в силу сюръективности канонического отображения $St(R) \rightarrow E(R)$. Таким образом, остается проверить, что для любой матрицы $Y \in M_{bc,a}(R)$ для элемента $\phi_Y(Y)$ существует прообраз в группе Стейнберга. С помощью утверждения 3.1 его можно выписать явно:

$$\phi_{a,b,c} \left(\prod_{i,j,k} x_{u_i^{jk}}^{Y_{aj+k,i}} \right) = \phi_Y(Y).$$

Теперь докажем, что $\ker \phi_\infty = Z(St(R, P))$. В силу того, что $Z(E_\infty(R, P)) = 0$, выполняется включение

$$Z(St(R, P)) \subset \ker \phi_\infty.$$

Для доказательства обратного включения воспользуемся утверждением, использованным в доказательстве предложения 8.2 из [6].

Утверждение 3.2. *Пусть*

1. $\mathfrak{Q} = (Q = Q_0 \subset Q_1 \subset Q_2 \subset \dots)$ — последовательность удвоений некоторого многогранника Q ;
2. $U^{i+1} = \{u \in \text{Col}(Q_{i+1}) \mid \langle Q_i, u \rangle = 1\}$ и $V^{i+1} = \{v \in \text{Col}(Q_{i+1}) \mid \langle Q_i, v \rangle = -1\}$;
3. подгруппы $\mathfrak{U}^{i+1}, \mathfrak{V}^{i+1} \subset St_{i+1}(R, Q)$ порождены x_u^λ и x_v^μ соответственно;
4. для некоторой группы G определен эпиморфизм $\pi: St(R, Q) \rightarrow G$, инъективный на \mathfrak{U}^{i+1} и \mathfrak{V}^{i+1} для всех i .

Тогда

$$\ker \pi \subset Z(St(R, Q)).$$

Пусть удвоение происходит вдоль грани семейства **A**. Тогда $U^{i+1} = \{\delta_j^{a+1}(\mathbf{A})\}$ (a векторов) и $V^{i+1} = \{\delta_{a+1}^j(\mathbf{A})\} \cup \{u_{a+1}^{jk}\}$ ($a + b \times c$ векторов). Для доказательства инъективности достаточно заметить, что после вложения $E(R, a, b, c) \rightarrow E_{a+bc}(R)$ образы всех образующих \mathfrak{U}^{i+1} лежат в одной строке, а образующих \mathfrak{V}^{i+1} — в одном столбце.

Пусть теперь удвоение происходит вдоль грани семейства **C** (случай **B** отличается лишь перестановкой индексов). Тогда $U^{i+1} = \{\delta_j^{c+1}(\mathbf{C})\} \cup \{u_k^{j,c+1}\}$ ($c + a \times b$ векторов) и $V^{i+1} = \{\delta_{c+1}^j(\mathbf{C})\}$ (c векторов). Группа $E(R, a, b, c + 1)$ отличается от $E(R, a, b, c)$ добавлением блоков из b новых строк и столбцов в правый нижний угол блока X и добавлением блока из b новых строк снизу к блоку Y . После замены индексов мы можем считать, что новые блоки были добавлены в левый верхний угол X и сверху к Y . В этом случае образы \mathfrak{U}^{i+1} и \mathfrak{V}^{i+1} лежат в $M_{b+1}(R)$ и $M_{b+1}(R)^T$ соответственно, поэтому отображения на них инъективны в силу утверждения 3.1. \square

4. Вычисление K -групп для пирамиды

Как говорилось во введении, высшие K -группы для коммутативного кольца R и сбалансированного многогранника P определяются как

$$K_i(R, P) = \pi_i(BE(R, P)^+), \quad i \geq 2.$$

В случае, когда P является симплексом, $K_i(R, P)$ совпадает с классической K -теорией Квиллена. Основным результатом этого раздела является следующее утверждение.

Теорема 4.1. Пусть P — четырехугольная пирамида и R — коммутативное кольцо с 1. Тогда

$$K_i(R, P) = K_i(R) \oplus K_i(R) \oplus K_i(R), \quad i \geq 2.$$

Доказательство. С учетом теоремы 3.2 нужно доказать, что имеет место изоморфизм

$$\pi_i(BE_\infty(R, P)^+) = K_i(R) \oplus K_i(R) \oplus K_i(R)$$

для $i \geq 2$.

Рассмотрим группу $G(R, a, b, c)$ блочных матриц $\begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$, где $X \in GL_b(R) \otimes GL_c(R)$, $Y \in M_{bc,a}(R)$ и $Z \in GL_a(R)$. Положим $G(R) = \lim G(R, a, b, c)$, где предел берется относительно вложений, описанных при построении группы $E_\infty(R)$. Нетрудно проверить, что $[G(R), G(R)] = E_\infty(R)$. Отсюда получаем изоморфизм

$$\pi_i(BE_\infty(R, P)^+) = \pi_i(BG(R)^+), \quad i \geq 2.$$

Остается доказать, что

$$\pi_i(BG(R)^+) = K_i(R) \oplus K_i(R) \oplus K_i(R); \tag{*}$$

обратим внимание, что этот факт мы докажем для $i \geq 1$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \pi_1(BG(R)^+) &= (G(R))^{ab} = (GL(R) \times GL(R) \times GL(R))^{ab} = \\ &= K_1(R) \times K_1(R) \times K_1(R) = \pi_1(B(GL(R) \times GL(R) \times GL(R))^+). \end{aligned}$$

Теперь чтобы доказать изоморфизм (*) для $i \geq 2$, достаточно установить изоморфизм в целочисленных гомологиях

$$H_*(G(R), \mathbb{Z}) = H_*(GL(R) \times GL(R) \times GL(R), \mathbb{Z})$$

и воспользоваться теоремой Уайтхеда. \square

Теорема 4.2.

$$H_*(G(R), \mathbb{Z}) = H_*(GL(R) \times GL(R) \times GL(R), \mathbb{Z}).$$

Доказательство. Рассмотрим группу $D(R, a, b, c)$ блочных матриц вида $\begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}$, где $X \in GL_b(R) \otimes GL_c(R)$ и $Z \in GL_a(R)$. Положим $D(R) = \lim D(R, a, b, c)$. Нетрудно видеть, что $D(R) = GL(R) \times GL(R) \times GL(R)$. Рассмотрим отображение $\pi : G(R) \rightarrow D(R)$, которое задается формулой $\pi : \begin{pmatrix} X & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} X & 0 \\ 0 & Z \end{pmatrix}$. Для очевидного вложения $i : D(R) \rightarrow G(R)$ в гомологиях имеет место равенство $\pi_* \circ i_* = id_{H_*(D(R), \mathbb{Z})}$. Чтобы доказать теорему 4.2, остается проверить, что $i_* \circ \pi_* = id_{H_*(G(R), \mathbb{Z})}$. Воспользуемся следующим утверждением.

Лемма 4.1 (см. [4, лемма 3.11], а также [5]). *Пусть группа H является пределом своих подгрупп H_λ по включению. Пусть для эндоморфизма $\rho : H \rightarrow H$ выполняется $\rho(H_\lambda) \subseteq H_\lambda$. Предположим, что для любой H_λ найдутся подгруппа $H_\mu \supseteq H_\lambda$, элемент $a \in H_\mu$ и гомоморфизм $\phi : H_\lambda \rightarrow C_{H_\mu}(H_\lambda)$ такие, что для произвольного элемента $h \in H_\lambda$ выполняется равенство $h \cdot \phi(h) = a \cdot \rho(h) \cdot \phi(h) \cdot a^{-1}$. Тогда $\rho_* = id$ в целочисленных гомологиях группы H .*

Здесь через $C_{H_\mu}(H_\lambda)$ обозначен централизатор группы H_λ в H_μ . Также обратим внимание, что в доказательстве леммы 3.11 в книге [4] имеется неточность, которая была указана и исправлена в работе [5].

В качестве H рассмотрим в $G(R)$ подгруппу, состоящую из матриц вида $h = \begin{pmatrix} I & Y \\ 0 & Z \end{pmatrix}$, где I — единичная матрица. В качестве H_n рассмотрим подгруппы $G(R, n, n, n) \cap H$; ясно, что $H = \lim H_n$. Образ матрицы $h = \begin{pmatrix} I_{n^2, n^2} & Y_{n^2, n} \\ 0_{n, n^2} & Z_{n, n} \end{pmatrix}$ в H_{2n} при стабилизации $H_n \hookrightarrow H_{2n}$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} I_{4n^2, 4n^2} & Y'_{4n^2, n} & 0_{4n^2, n} \\ 0_{n, 4n^2} & Z_{n, n} & 0_{n, n} \\ 0_{n, 4n^2} & 0_{n, n} & I_{n, n} \end{pmatrix}.$$

Здесь индексами обозначены размерности матриц. Матрица Y' получается из Y добавлением нулевых элементов определенным, но для доказательства несущественным, образом. Так же легко видеть, что после стабилизации матрица $i \circ \pi(h)$ имеет вид

$$\begin{pmatrix} I_{4n^2, 4n^2} & 0_{4n^2, n} & 0_{4n^2, n} \\ 0_{n, 4n^2} & Z_{n, n} & 0_{n, n} \\ 0_{n, 4n^2} & 0_{n, n} & I_{n, n} \end{pmatrix}.$$

Для применения леммы 4.1 нужно построить отображение $\phi : H_n \rightarrow C_{H_{2n}}(H_n)$ и элемент $a \in H_{2n}$, удовлетворяющие нужным условиям. Положим

$$\phi(h) = \begin{pmatrix} I_{4n^2, 4n^2} & 0_{4n^2, n} & Y'_{4n^2, n} \\ 0_{n, 4n^2} & I_{n, n} & 0_{n, n} \\ 0_{n, 4n^2} & 0_{n, n} & Z_{n, n} \end{pmatrix}$$

и

$$a = \begin{pmatrix} I_{4n^2, 4n^2} & 0_{4n^2, n} & 0_{4n^2, n} \\ 0_{n, 4n^2} & I_{n, n} & 0_{n, n} \\ 0_{n, 4n^2} & -I_{n, n} & Z_{n, n} \end{pmatrix}.$$

Непосредственными вычислениями с блочными матрицами можно проверить, что $\phi(h)$ коммутирует с образом $s(h)$ любой матрицы $h' \in H_n$ при стабилизации $s : H_n \hookrightarrow H_{2n}$, т. е. $\phi(h) \in C_{H_{2n}}(H_n)$. Аналогично проверяется равенство $s(h) \cdot \phi(h) = a \cdot (i \circ \pi(h)) \cdot \phi(h) \cdot a^{-1}$. Таким образом, по лемме 4.1, примененной к $\rho = i \circ \pi$, в целочисленных гомологиях группы H отображение $i \circ \pi$ индуцирует изоморфизм.

Далее рассмотрим спектральную последовательность Линдона—Хохшильда—Серра с $E_{p,q}^2 = H_p(G(R)/H; H_q(H, \mathbb{Z}))$, сходящуюся к гомологиям группы $G(R)$. Отображение $i \circ \pi$ действует на $G(R)/H$ тождественно, поэтому с учетом вышесказанного $(i \circ \pi)_*$ тождественно на $E_{p,q}^2$. Отсюда следует, что оно тождественно на E^∞ .

Теперь, вообще говоря, возникает стандартная проблема, связанная с присоединенностью при переходе от E^∞ к гомологиям $H_*(E(R), \mathbb{Z})$, поскольку отображение, тождественное на последовательных факторах фильтрации в $H_*(E(R), \mathbb{Z})$, не обязательно тождественным на $H_*(E(R), \mathbb{Z})$.

Однако в нашем случае $(i \circ \pi)_*$ обязано быть тождественным и на $H_*(E(R), \mathbb{Z})$, что можно вывести из соотношения $(i \circ \pi)_* = (i \circ \pi)_*^2$. Теорема 4.2 доказана. \square

Работа поддержана грантами НШ1410.2012.1 и РФФИ 11-01-00057 и 13-01-00664.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Васерштейн Л. Н.* Основы алгебраической K -теории// Усп. мат. наук. — 1976. — 31, № 4. — С. 87–149.
2. *Немытов А. И., Соловьев Ю. П.* BN -пары и эрмитова K -теория. — Алгебра. Сб., посвящ. 90-лет. О. Ю. Шмидта. — М.: Изд. МГУ, 1982. — С. 102–118.
3. *Немытов А. И., Соловьев Ю. П.* Гомотопическое умножение в представляющем пространстве эрмитовой K -теории// Докл. АН СССР. — 1982. — 258, № 1. — С. 30–34.
4. *Berrick A. J.* An approach to algebraic K -theory. — London: Pitman, 1982.
5. *Berrick A. J., Keating M. E.* The K -theory of triangular matrix rings, K -theory// Contemp. Math. — 1986. — 55, part I. — С. 69–74.
6. *Bruns W., Gubeladze J.* Polyhedral K_2 // Manuscripta Math. — 2002. — 109. — С. 367–404.
7. *Bruns W., Gubeladze J.* Higher polyhedral K -groups// J. Pure Appl. Algebra. — 2003. — 184. — С. 175–228.
8. *Suslin A. A.* On equivalence of algebraic K -theories// Comm. Algebra. — 1981. — 9, № 15. — С. 1559–1566.
9. *Wagoner J. B.* Equivalence of algebraic K -theories// J. Pure Appl. Algebra. — 1977. — 11. — С. 245–269.

Ф. Ю. Попеленский

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: popelens@mech.math.msu.su

М. В. Приходько

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова,
механико-математический факультет
E-mail: anxioux@gmail.com