СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 53, 2014

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

Индекс журнала в каталоге подписных изданий агентства «Роспечать» — 36832

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 53, 2014

Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 53 (2014). С. 5–29

УДК 517.91/.93

СИНГУЛЯРНЫЕ НАЧАЛЬНЫЕ И КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ДИНАМИЧЕСКИХ МОДЕЛЯХ СТРАХОВАНИЯ С УЧЕТОМ ИНВЕСТИЦИЙ

© 2014 г. **Т. А. БЕЛКИНА, Н. Б. КОНЮХОВА, С. В. КУРОЧКИН**

Аннотация. Приводятся основные результаты исследования двух математических моделей страхования с учетом поведения страховой компании на финансовом рынке — вложение постоянной доли капитала в рисковый актив (акции) и оставшейся доли — в безрисковый актив (банковский счет); заменой параметров — характеристик акций — такая стратегия сводится к случаю вложения всего капитала в рисковый актив. Первая модель основана на классическом процессе риска Краме́ра—Лундберга при экспоненциальном распределении размеров страховых требований (исков); в основе второй модели — модификация классического процесса риска (так называемый процесс риска со случайными премиями) при экспоненциальных распределениях как размеров исков, так и размеров страховых взносов (премий). Для вероятности неразорения страховой компании за бесконечное время (как функции ее начального капитала) возникают сингулярные задачи для линейных интегродифференциальных уравнений (ИДУ) второго порядка, определенных на полубесконечном интервале и обладающих неинтегрируемыми особенностями в нуле и на бесконечности: первая модель приводит к сингулярной начальной задаче с ограничениями для ИДУ с вольтерровым интегральным оператором, вторая — к более сложной краевой задаче с ограничениями и нелокальным условием в нуле для ИДУ с невольтерровым интегральным оператором. Задачи для ИДУ сводятся к эквивалентным сингулярным задачам для обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ). Приводятся теоремы существования и единственности решений с описанием их свойств и глобального поведения, даны асимптотические представления решений в окрестностях особых точек. Предложены эффективные алгоритмы численного нахождения решений, приведены результаты расчетов и дана их экономическая интерпретация.

1. Введение

По теме, указанной в заголовке статьи, дается краткий обзор основных результатов авторов (и сопутствующих ранее полученных) в переработанном и дополненном виде: проводится сравнение двух математических моделей страхования при одинаковом поведении страховой компании на финансовом рынке, предполагающем вложение текущего капитала (ТК) компании в рисковый актив — акции, цена которых моделируется геометрическим броуновским движением. (Эти модели охватывают и более общий случай постоянной структуры инвестиций — вложение постоянной доли ТК в рисковый актив (акции), а оставшейся доли — в безрисковый актив (банковский счет при постоянной процентной ставке): этот случай сводится к предыдущему изменением параметров задачи — характеристик акций, что коротко обсуждается далее.)

Модель I основана на классическом процессе риска Краме́ра—Лундберга (КЛ) при экспоненциальном распределении размеров страховых требований (исков). В модели КЛ процесс, описывающий изменение капитала, складывается из детерминированного процесса поступления страховых взносов (премий) и сложного пуассоновского процесса страховых выплат (см., например, [25, 32]). В описанной в [16, 17, 24, 36] модифицированной модели КЛ процесс поступления премий также является сложным пуассоновским процессом, причем с параметрами, отличными от параметров процесса страховых выплат (следуя [16, 24, 36], соответствующую модель будем называть моделью КЛ со стохастическими (случайными) премиями). Модель II основана на модели КЛ со случайными премиями при экспоненциальных распределениях как размеров исков, так и размеров премий.

Одним из центральных вопросов в динамических моделях страхования является определение или оценка вероятности неразорения (ВНР), являющейся традиционной детерминированной характеристикой платежеспособности страховой компании. В большинстве рассматриваемых моделей динамика капитала страховой компании описывается однородным марковским процессом с непрерывным временем. В частности, при инвестировании капитала в рисковые активы этот процесс описывается стохастическим дифференциальным уравнением. В таких процессах для ВНР как функции начального капитала (НК) при определенных предположениях относительно свойств этой функции можно получить ИДУ, используя аппарат производящих операторов (см, например, [10,31] и цитированную там литературу). ИДУ определены на $\mathbb{R}_+$, и неотрицательные на $\mathbb{R}_+$ решения этих ИДУ, не превосходящие единицы и стремящиеся к единице на бесконечности, если таковые существуют, действительно определяют искомую вероятность, что может быть доказано с привлечением вероятностных методов (см. подробнее [9] и цитированную там литературу). В частности, в [9] обоснованы, в указанном смысле, задачи для изучаемых в данной работе моделей I и II.

Для каждой из этих моделей ВНР страховой компании за бесконечное время (как функция ее НК) является решением сингулярной задачи для линейного ИДУ второго порядка, определенного на полубесконечном интервале и обладающего неинтегрируемыми особенностями в нуле и на бесконечности (см. [11–13] и библиографию там). Модель I приводит к сингулярной начальной задаче с ограничениями для ИДУ с вольтерровым интегральным оператором и подробно изучена в [11,12]. Модель II приводит к более сложной краевой задаче (КрЗ) с ограничениями и нелокальным условием в нуле для ИДУ с вольтерровым и невольтерровым интегральными операторами; она поставлена и изучена в [13].

В данной работе представлены основные результаты [11–13] (с учетом результатов, ранее полученных другими авторами): даны постановки сингулярных задач для ИДУ и описаны способы их сведения к эквивалентным сингулярным задачам для ОДУ; приведены теоремы существования и единственности решений, даны асимптотические представления решений в окрестностях особых точек и описано глобальное поведение решений поставленных задач; представлены эффективные алгоритмы численного нахождения решений, приведены результаты расчетов и дана их интерпретация (некоторые опечатки и неточности, допущенные в [11–13], здесь исправлены). Для полноты изложения мы приводим краткие доказательства некоторых утверждений, ввиду их важности, или указываем схему таких доказательств.

Далее, в частности, используются обозначения: $\mathbf{P}(A)$ — вероятность события A; $\mathbf{E}X$ — математическое ожидание случайной величины X. Остальные обозначения будут вводиться по мере необходимости.

2. Постановки сингулярных задач с ограничениями для интегродифференциальных уравнений второго порядка

Прежде всего сформулируем здесь две сингулярные задачи для ИДУ, связанные с моделями I и II и подлежащие изучению. Описание самих моделей, приводящих к таким задачам, дано в следующем разделе.

2.1. Задача 1: сингулярная задача для модели I. В модели I для ВНР $\varphi(u)$ (как функции НК u) возникает ИДУ второго порядка с вольтерровым интегральным оператором. ИДУ определено на $\mathbb{R}_+$ и обладает особенностями при $u \to +0$ и $u \to \infty$. Ставится следующая сингулярная задача для этого ИДУ с ограничениями на область значений решения:

$$(b^2/2)u^2\varphi''(u) + (au + c)\varphi'(u) - \lambda\,[\varphi(u) - (J_m\varphi)(u)] = 0, \quad 0 < u < \infty, \tag{2.1}$$

$$\{|\lim_{u\to+0}\varphi(u)|,\, |\lim_{u\to+0}\varphi'(u)|\} < \infty, \quad \lim_{u\to+0}[c\,\varphi'(u) - \lambda\,\varphi(u)] = 0, \tag{2.2}$$

$$0 \leqslant \varphi(u) \leqslant 1, \qquad u \in \mathbb{R}_+, \tag{2.3}$$

$$\lim_{u\to\infty}\varphi(u) = 1, \qquad \lim_{u\to\infty}\varphi'(u) = 0. \tag{2.4}$$

Здесь, если не оговорено особо, все параметры a, b, c, λ и m — действительные положительные числа, J_m — вольтерров интегральный оператор,

$$(J_m\varphi)(u) = \frac{1}{m}\int\limits_0^u \varphi(u-x)\exp(-x/m)\,dx = \frac{1}{m}\int\limits_0^u \varphi(s)\exp\big(-(u-s)/m\big)\,ds, \quad u \in \mathbb{R}_+, \tag{2.5}$$

где $J_m : C[0,\infty) \to C[0,\infty)$, $C[0,\infty)$ — вещественное линейное пространство непрерывных функций, определенных и ограниченных на $\mathbb{R}_+$.

Второе предельное условие при $u \to 0$ есть следствие первого и самого ИДУ: условия (2.2) влекут в (2.1) предельное равенство $\lim\limits_{u\to+0}[u^2\varphi''(u)] = 0$, обеспечивая вырождение ИДУ (2.1) при $u \to +0$ (любое решение $\varphi(u)$ сингулярной задачи без начальных данных (2.1), (2.2) должно удовлетворять ИДУ (2.1) вплоть до особой точки $u = 0$).

«Укороченная» задача (2.1)–(2.3) (сингулярная задача с ограничениями) всегда имеет тривиальное решение $\varphi(u) \equiv 0$, нетривиальное решение выделяется требованием (2.4).

2.2. Задача 2: сингулярная задача для модели II. В модели II для ВНР $\varphi(u)$ (как функции НК u) возникает ИДУ второго порядка с вольтерровым и невольтерровым интегральными операторами. ИДУ определено на $\mathbb{R}_+$ и обладает особенностями при $u \to +0$ и $u \to \infty$. Ставится следующая сингулярная нелокальная задача для этого ИДУ с ограничениями на область значений решения:

$$(b^2/2)u^2\varphi''(u) + au\varphi'(u) - \lambda[\varphi(u) - (J_m\varphi)(u)] - \lambda_1[\varphi(u) - (J_{1,n}\varphi)(u)] = 0, \quad 0 < u < \infty, \tag{2.6}$$

$$|\lim_{u\to+0}\varphi(u)| < \infty, \qquad \lim_{u\to+0}[u\varphi'(u)] = 0, \tag{2.7}$$

$$(\lambda + \lambda_1)\lim_{u\to+0}\varphi(u) = \frac{\lambda_1}{n}\int\limits_0^\infty \varphi(y)\exp(-y/n)\,dy, \tag{2.8}$$

$$0 \leqslant \varphi(u) \leqslant 1, \qquad u \in \mathbb{R}_+, \tag{2.9}$$

$$\lim_{u\to+\infty}\varphi(u) = 1, \qquad \lim_{u\to+\infty}\varphi'(u) = 0. \tag{2.10}$$

Здесь, если не оговорено особо, все параметры a, b, λ, λ_1, m и n — действительные положительные числа, J_m — вольтерров интегральный оператор, определенный в (2.5), и $J_{1,n}$ — невольтерров интегральный оператор,

$$(J_{1,n}\varphi)(u) = \frac{1}{n}\int\limits_0^\infty \varphi(u+y)\exp(-y/n)\,dy = \frac{1}{n}\int\limits_u^\infty \varphi(s)\exp(-(s-u)/n)\,ds, \quad u \in \mathbb{R}_+, \tag{2.11}$$

где $J_{1,n} : C[0,\infty) \to C[0,\infty)$.

Второе равенство в (2.11) можно трактовать как преобразование невольтеррового интегрального оператора с отклоняющимся аргументом в сингулярный вольтерров оператор. По крайней мере, суммарный оператор $J_{m,n} : (J_{m,n}\varphi)(u) = \lambda\,(J_m\varphi)(u) + \lambda_1\,(J_{1,n}\varphi)(u)$, $u \in \mathbb{R}_+$, есть сингулярный невольтерров[1] оператор.

Предельные условия в нуле (2.7) и нелокальное соотношение (2.8) влекут в (2.6) предельное равенство $\lim\limits_{u\to+0}[u^2\varphi''(u)] = 0$, обеспечивая вырождение ИДУ (2.6) при $u \to +0$ (решение $\varphi(u)$ сингулярной задачи (2.6)–(2.10), если таковое существует, должно удовлетворять ИДУ (2.6) вплоть до особой точки $u = 0$). Из условий (2.7) также следует, что первая производная от решения, вообще говоря, может быть неограниченной, но интегрируемой в нуле функцией.

«Укороченная» задача (2.6)–(2.9) (сингулярная задача с ограничениями и нелокальным условием в нуле) всегда имеет тривиальное решение $\varphi(u) \equiv 0$, нетривиальное решение выделяется требованием (2.10).

3. Происхождение задач: динамические модели страхования с инвестициями в рисковые активы и вероятность неразорения страховой компании

3.1. Классическая модель теории риска Кра́мера—Лундберга. Классический процесс риска в непрерывном времени (с детерминированным процессом поступления премий с постоянной интенсивностью $c > 0$) имеет вид (см., например, [25, 32]):

$$R_t = u + ct - \sum_{k=1}^{N(t)} Z_k, \qquad t \geqslant 0. \tag{3.1}$$

[1]По поводу определений (не)вольтерровых операторов для классов систем функционально-дифференциальных уравнений (включающих ИДУ как частный случай), в том числе нелинейных и сингулярных, и исследований этих уравнений см., например, [7, 23, 34] и библиографию там.

Здесь R_t — величина капитала страховой компании в момент времени t; u — величина НК; c — скорость поступления страховых взносов (c — величина премии в единицу времени, ct — совокупный страховой взнос к моменту времени t); сумма в правой части — совокупные страховые выплаты; $N(t)$ — однородный пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda > 0$ ($\mathbf{E}N(t) = \lambda t$, $N(0) = 0$), определяющий для любого $t > 0$ число исков, предъявленных клиентами страховой компании за временной промежуток $(0, t]$; $Z_1, Z_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $F(x)$ ($F(0) = 0$, $\mathbf{E}Z_1 = m < \infty$), которые определяют размеры предъявленных исков и не зависят от процесса $N(t)$ (Z_j — выплата по иску с номером j, случайный момент предъявления которого и определяет момент j-го скачка процесса $N(t)$).

Для процесса риска (3.1) приведем классическое определение относительной «нагрузки безопасности» — величины, характеризующей ожидаемый «удельный доход» страховой компании в единицу времени (см., например, [25, 32]).

Определение 3.1. *Нагрузкой* (*коэффициентом*) *безопасности* для процесса риска (3.1) называется величина

$$\rho_1 = (c - \lambda m)/(m\lambda), \tag{3.2}$$

а условие

$$c - \lambda m > 0 \tag{3.3}$$

отвечает положительности чистого ожидаемого дохода.

Обозначим $\tau = \inf\{t : R_t < 0\}$ — момент разорения, тогда $\mathbf{P}(\tau < \infty)$ — вероятность разорения в течение бесконечного промежутка времени.

Следующее утверждение является классическим результатом теории риска КЛ (см., например, [32]).

Утверждение 3.1. *При выполнении условия* (3.3) *и существовании константы* $R > 0$ (*«коэффициент Лундберга»*), *такой, что справедливо равенство*

$$\int_0^\infty [1 - F(x)] \exp(Rx) dx = c/\lambda, \tag{3.4}$$

вероятность разорения $\xi(u)$ (*как функция НК*) *допускает оценку*

$$\xi(u) = \boldsymbol{P}(\tau < \infty) \leqslant \exp(-Ru), \qquad u \geqslant 0. \tag{3.5}$$

При этом, если распределение величин страховых выплат экспоненциально,

$$F(x) = 1 - \exp(-x/m), \qquad m > 0, \qquad x \geqslant 0, \tag{3.6}$$

то $R = (c - \lambda m)/(mc) > 0$, *и ВНР* $\varphi(u) = 1 - \xi(u)$ *задается точной формулой*:

$$\varphi(u) = \varphi_1(u) = 1 - \frac{\lambda m}{c} \exp\left(-\frac{c - \lambda m}{mc}\, u\right), \qquad 0 \leqslant u < \infty. \tag{3.7}$$

Замечание 3.1. Уравнение (3.4) в модели КЛ называется характеристическим уравнением. Оно может быть записано также в виде

$$\lambda[\mathbf{E} \exp(RZ_i) - 1] - cR = 0. \tag{3.8}$$

Если существует положительное решение R этого уравнения, то процесс $\exp(-RR_t)$ является мартингалом, при этом $\mathbf{E} \exp(-RR_t) = \exp(-Ru)$ (в чем можно убедиться непосредственно с учетом (3.8)). Использование этого факта позволяет легко получать оценки для вероятности разорения, в частности, оценку (3.5) и более общие оценки (см., например, [32]).

Замечание 3.2. Интересна история создания теории коллективного риска и теории случайных процессов. Приведем очень краткие сведения об этом (подробнее см., например, [24, 35] и сайт ВШЭ по адресу `www.hse.ru/news/avant/85659995.html`).

Одним из признанных основателей теории коллективного риска является шведский ученый Филип Лундберг (Ernest Filip Oskar Lundberg, 1876–1965). Возникновение математической теории коллективного риска связано с именем выдающегося шведского математика Гаральда Крамéра

(Carl Harald Cramér, 1893–1985). Ссылки на основные публикации этих ученых и описание их результатов можно найти, в частности, в [32].

Днем рождения финансовой математики считается 29 марта 1900 года: в этот день Луи Башелье (L. Bachelier), ученик Анри Пуанкаре, защитил диссертацию под названием «Теория спекуляции» [28], в которой, в частности, обосновал, что эволюция цен активов на финансовом рынке может быть описана некоторым случайным процессом с непрерывными траекториями (который теперь называют винеровским процессом или броуновским движением). По стечению обстоятельств, только спустя много десятилетий Луи Башелье был признан отцом-основателем финансовой математики.

Наряду с винеровским процессом, понятие пуассоновского процесса, введенное Лундбергом при разработке теории коллективного риска, послужило основой для создания современной теории случайных процессов.

3.2. Модель Крамéра—Лундберга со случайными премиями. В этой модели, описанной в [16, 17] (см. также [24, раздел 9.5]), процесс риска в непрерывном времени имеет вид:

$$R_t = u + \sum_{i=1}^{N_1(t)} C_i - \sum_{j=1}^{N(t)} Z_j, \qquad t \geqslant 0. \tag{3.9}$$

Здесь R_t — величина капитала страховой компании в момент времени t; u — величина НК; первая сумма в правой части — совокупный страховой взнос к моменту времени t, $N_1(t)$ — пуассоновский процесс с интенсивностью $\lambda_1 > 0$ ($\mathbf{E}N_1(t) = \lambda_1 t$; $N_1(0) = 0$), определяющий для любого $t > 0$ число премий, внесенных клиентами страховой компании за временной промежуток $(0, t]$; $C_1, C_2, \ldots$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с функцией распределения $G(y)$ ($G(0) = 0$, $\mathbf{E}C_1 = n < \infty$), которые определяют размеры премий и предполагаются независимыми от процесса $N_1(t)$ (C_i — взнос с номером i, случайный момент поступления которого и определяет момент i-го скачка процесса $N_1(t)$); вторая сумма — совокупные страховые выплаты — та же, что в (3.1). Процессы суммарных премий и суммарных исков также предполагаются независимыми.

Для процесса риска (3.9) введем определение относительной нагрузки безопасности, по аналогии с определением 3.1 для классической модели КЛ.

Определение 3.2. *Нагрузкой безопасности* для процесса риска (3.9) называется величина

$$\rho_2 = (\lambda_1 n - \lambda m)/(\lambda m), \tag{3.10}$$

а условие

$$\lambda_1 n - \lambda m > 0 \tag{3.11}$$

отвечает положительности чистого ожидаемого дохода.

Если размеры исков и премий экспоненциально распределены,

$$F(x) = 1 - \exp(-x/m), \quad G(y) = 1 - \exp(-y/n), \quad m, n > 0, \quad x, y \geqslant 0, \tag{3.12}$$

то ВНР $\varphi(u)$ удовлетворяет интегральному уравнению (ИУ)

$$(\lambda + \lambda_1)\varphi(u) = \lambda\,(J_m\varphi)(u) + \lambda_1\,(J_{1,n}\varphi)(u), \qquad u \in \mathbb{R}_+. \tag{3.13}$$

При выполнении условия (3.11) ВНР $\varphi(u)$ как положительное на $\mathbb{R}_+$ решение ИУ (3.13), не превосходящее единицы, дается точной формулой [16]:

$$\varphi(u) = \varphi_2(u) = 1 - \frac{\lambda\,(n+m)}{n\,(\lambda+\lambda_1)} \exp\left(-\frac{\lambda_1 n - \lambda m}{mn(\lambda+\lambda_1)}\,u\right), \quad u \in \mathbb{R}_+. \tag{3.14}$$

Замечание 3.3. В модели КЛ со случайными премиями характеристическое уравнение, обеспечивающее мартингальность процесса $\exp(-RR_t)$ и возможность получения оценок для вероятности разорения, в том числе оценки типа (3.5), имеет вид (см. [16, 36])

$$\lambda[\mathbf{E}\exp(RZ_i) - 1] + \lambda_1[\mathbf{E}\exp(-RC_i) - 1] = 0, \tag{3.15}$$

или, что эквивалентно,

$$\lambda\int\limits_0^\infty \exp{(Rx)}dF(x)+\lambda_1\int\limits_0^\infty \exp{(-Ry)}dG(y)=\lambda+\lambda_1. \tag{3.16}$$

3.3. Модели страхования с инвестициями в рисковые активы. Рассмотрим теперь случай, когда капитал непрерывно инвестируется в акции, динамика цены которых описывается моделью геометрического броуновского движения:

$$dS_t=S_t(a\,dt+b\,dw_t),\qquad t\geqslant 0. \tag{3.17}$$

Здесь S_t — цена акции в момент времени t, a — ожидаемая доходность акции, $0<b$ — волатильность, $\{w_t\}$ — стандартный винеровский процесс.

Обозначив через X_t капитал компании на момент времени t, получаем $X_t=\theta_t S_t$, где θ_t — количество акций в портфеле. Тогда изменение капитала во времени описывается соотношением

$$dX_t=\theta_t dS_t+dR_t,$$

где R_t — исходный процесс риска.

Принимая во внимание (3.17), получаем:

$$dX_t=aX_t\,dt+bX_t\,dw_t+dR_t,\qquad t\geqslant 0. \tag{3.18}$$

При этом в моделях с инвестициями в рисковые активы, в отличие от исходных процессов риска, положительность «нагрузки безопасности», т. е. выполнение условия (3.3) (классическая модель) или условия (3.11) (модель КЛ со стохастическими премиями), не предполагается.

Для динамического процесса (3.18) с исходным процессом риска (3.1) функция ВНР $\varphi(u)$ удовлетворяет следующему линейному ИДУ (см., например, [10, 31] и библиографию там):

$$\lambda\int\limits_0^u \varphi(u-z)\,dF(z)-\lambda\,\varphi(u)+(au+c)\,\varphi'(u)+(b^2/2)\,u^2\,\varphi''(u)=0,\quad u\in\mathbb{R}_+. \tag{3.19}$$

При этом в особой точке $u=0$ должно выполняться предельное условие, обеспечивающее вырождение ИДУ (3.19) при $u\to+0$:

$$\lim_{u\to+0}\,[c\varphi'(u)-\lambda\varphi(u)]=0. \tag{3.20}$$

Из (3.19), в предположении экспоненциального распределения размеров выплат (3.6), получаем ИДУ (2.1) для модели I.

Для динамического процесса (3.18) с исходным процессом риска (3.9) функция ВНР $\varphi(u)$ удовлетворяет на $\mathbb{R}_+$ следующему линейному ИДУ, полученному в [17]:

$$(b^2/2)u^2\varphi''(u)+au\varphi'(u)=\lambda\left[\varphi(u)-\int\limits_0^u\varphi(u-x)\,dF(x)\right]+\lambda_1\left[\varphi(u)-\int\limits_0^\infty\varphi(u+y)dG(y)\right]. \tag{3.21}$$

При этом в особой точке $u=0$ должно выполняться предельное нелокальное условие, обеспечивающее вырождение ИДУ (3.21) при $u\to+0$:

$$(\lambda+\lambda_1)\lim_{u\to+0}\varphi(u)=\lambda_1\int\limits_0^\infty\varphi(y)\,dG(y) \tag{3.22}$$

(по аналогии с локальным условием (3.20) для модели I). По поводу необходимости условия типа (3.22) см. подробнее в [13] и здесь далее (в [17] это условие для (3.21) не приводится и не обсуждается).

Из (3.21), в предположении экспоненциального распределения (3.12) размеров выплат и размеров премий, получаем ИДУ (2.6) для модели II.

Замечание 3.4. Рассматриваемые модели охватывают и более общие стратегии инвестиций с постоянной структурой, когда в акции (с ожидаемой доходностью μ и волатильностью σ) вкладывается не весь ТК, а только его фиксированная доля α $(0<\alpha<1)$, а оставшаяся положительная доля $1-\alpha$ инвестируется в безрисковый актив — банковский счет при постоянной процентной ставке $r > 0$. Случай $0 < \alpha < 1$ сводится к случаю $\alpha = 1$ простой заменой параметров задачи (характеристик акций), а именно: $a = \alpha\mu + (1-\alpha)r$ и $b = \alpha\sigma$ (подробнее см. [11–13]). В результате достаточно рассмотреть только модели с вложением всего ТК в рисковые активы, что и осуществляется в [11–13] и данной работе.

Сингулярные задачи и отвечающие им модели становятся другими, если некоторые из параметров в рассматриваемых ИДУ обращаются в нуль: при $b = 0$ получаем вырожденные задачи для страховых моделей с вложением всего ТК в безрисковые активы, при $c = 0$ или $\lambda_1 = 0$ — задачи для нестраховых моделей типа благотворительного фонда (отсутствуют страховые взносы). При этом переходы по параметрам от исходных задач к новым являются сингулярными при малых и/или больших значениях НК. Такие задачи и отвечающие им модели, представляющие самостоятельный математический интерес и интерес в теории коллективного риска, в данной работе не рассматриваются (за исключением тех вырожденных задач, которые получаются при $a = b = 0$ и отвечают моделям без инвестиций). Заметим только, что для модели I наиболее полное исследование задачи (2.1)–(2.4), включающее все «вырожденные» случаи, осуществлено в [30].

Замечание 3.5. Для модели I сингулярная задача для ИДУ (2.1), рассматриваемого на всей положительной полуоси (задача 1), впервые была поставлена и полностью исследована в [11, 12, 30]. Однако первый результат для ВНР $\varphi(u)$ как решения ИДУ (2.1) в предположении существования этого решения был получен в [31] и относился к асимптотическому представлению $\varphi(u)$ при больших значениях НК u.

Теорема 3.1 (см. [31])**.** *Пусть $b > 0$, а размеры выплат имеют экспоненциальное распределение, т. е. выполнено* (3.6). *Тогда*:

1. *Если выполнено «условие надежности акций», а именно, справедливо неравенство*

$$\rho = 2a/b^2 > 1, \tag{3.23}$$

то имеет место асимптотическое представление

$$\varphi(u) = 1 - Ku^{1-\rho}[1 + o(1)], \quad u \to \infty, \tag{3.24}$$

с некоторой константой $K > 0$.

2. *Если $\rho < 1$, то $\varphi(u) \equiv 0$, $u \in \mathbb{R}_+$.*

4. Задача 1: формулировка основных результатов

Сингулярная задача для ИДУ (2.1)–(2.4) с ограничениями на область значений решения может быть представлена в эквивалентном параметризованном виде:

$$(b^2/2)u^2\varphi''(u) + (au + c)\varphi'(u) - \lambda[\varphi(u) - (J_m\varphi)(u)] = 0, \quad u \in \mathbb{R}_+, \tag{4.1}$$

$$\lim_{u\to+0}\varphi(u) = C_0, \qquad \lim_{u\to+0}\varphi'(u) = \lambda C_0/c, \tag{4.2}$$

$$\lim_{u\to\infty}\varphi(u) = 1, \qquad \lim_{u\to\infty}\varphi'(u) = 0, \tag{4.3}$$

$$0 \leqslant \varphi(u) \leqslant 1, \qquad u \in \mathbb{R}_+, \tag{4.4}$$

где C_0 — неизвестный параметр, значение которого подлежит определению.

Ниже сформулированы основные следствия из результатов [11, 12].

4.1. Существование, единственность и поведение решения; сопутствующая сингулярная задача Коши для ОДУ.

Лемма 4.1. *Пусть в ИДУ* (4.1) *все параметры — фиксированные действительные числа, где $c > 0$, $\lambda > 0$, $m > 0$, а числа $a, b \in \mathbb{R}$ имеют любой знак, и пусть существует решение $\varphi_1(u) = \varphi(u, C_0)$ сингулярной линейной задачи* (4.1)–(4.3) (*без ограничений на область значений решения*) *для некоторого $C_0 \in \mathbb{R}$.*

Тогда такое C_0 единственно, $0 < C_0 < 1$, функция $\varphi(u) = \varphi_1(u)$ удовлетворяет требованиям (4.4) *и является единственным решением сингулярной линейной задачи с ограничениями* (4.1)–(4.4)*, причем $\varphi'(u) > 0$ для любого конечного $u \in \mathbb{R}_+$, так что $\varphi(u)$ — строго возрастающая на $\mathbb{R}_+$ функция.*

Доказательство. 1. Докажем единственность. Предположим противное: пусть $\varphi_2(u)$ — другое решение задачи (4.1)–(4.3). Тогда возможны два варианта: первый вариант, когда

$$\lim_{u\to+0}\varphi_2(u)=\lim_{u\to+0}\varphi_1(u), \tag{4.5}$$

и второй вариант, когда

$$\lim_{u\to+0}\varphi_2(u)\neq\lim_{u\to+0}\varphi_1(u). \tag{4.6}$$

Для случая выполнения (4.5) рассмотрим разность $\widetilde{\varphi}(u)=\varphi_2(u)-\varphi_1(u)$. Тогда $\widetilde{\varphi}(u)$ есть решение ИДУ (4.1), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{u\to+0}\widetilde{\varphi}(u)=\lim_{u\to\infty}\widetilde{\varphi}(u)=0. \tag{4.7}$$

Если нетривиальное решение задачи (4.1), (4.7) существует и принимает положительные значения на $\mathbb{R}_+$, то оно должно иметь положительный максимум на $\mathbb{R}_+$ (если $\widetilde{\varphi}(u)$ не принимает положительных значений на $\mathbb{R}_+$, то рассматриваем функцию $-\widetilde{\varphi}(u)$). Пусть $0<\widetilde{u}$ — точка максимума этого решения: $\widetilde{\varphi}(\widetilde{u})=\max\limits_{u\in[0,\infty)}\widetilde{\varphi}(u)>0$. Тогда должно быть $\widetilde{\varphi}'(\widetilde{u})=0$, $\widetilde{\varphi}''(\widetilde{u})\leqslant 0$. Но из ИДУ (4.1) с учетом формулы (2.5) получаем противоречие:

$$(b^2/2)\widetilde{u}^2\widetilde{\varphi}''(\widetilde{u})=\lambda\widetilde{\varphi}(\widetilde{u})-\lambda m^{-1}\exp\left(-\widetilde{u}/m\right)\int_0^{\widetilde{u}}\widetilde{\varphi}(s)\exp\left(s/m\right)ds\geqslant$$

$$\geqslant\lambda\widetilde{\varphi}(\widetilde{u})\left[1-m^{-1}\exp\left(-\widetilde{u}/m\right)\int_0^{\widetilde{u}}\exp\left(s/m\right)ds\right]=\lambda\widetilde{\varphi}(\widetilde{u})\exp\left(-\widetilde{u}/m\right)>0. \tag{4.8}$$

Следовательно, $\widetilde{\varphi}(u)\equiv 0$.

Рассмотрим случай выполнения (4.6). Тогда, как легко проверить, можно составить такую линейную комбинацию решений $\widehat{\varphi}(u)=c_1\varphi_1(u)+c_2\varphi_2(u)$, что $\widehat{\varphi}(u)\not\equiv 1$ и является решением ИДУ (4.1), удовлетворяющим предельным условиям

$$\lim_{u\to+0}\widehat{\varphi}(u)=\lim_{u\to\infty}\widehat{\varphi}(u)=1.$$

Если существует $\widehat{u}$ такое, что $\widehat{\varphi}(\widehat{u})>1$, то рассуждаем так же, как в первом варианте. Если предположить, что $\widehat{\varphi}(u)\leqslant 1$ для любого $u\geqslant 0$, то это противоречит условиям (4.2), из которых следует, что $\lim\limits_{u\to+0}\widehat{\varphi}'(u)=\lambda/c>0$. Следовательно, не существует другого решения задачи (4.1)–(4.3), удовлетворяющего условию (4.6).

2. Остальные утверждения аналогично доказываются от противного. □

Далее, ИДУ (4.1) второго порядка можно свести к ОДУ третьего порядка, что является важным и упрощающим для исследований обстоятельством. Для этого достаточно осуществить в (4.1) дифференцирование и, учитывая равенство

$$(J_m\varphi)'(u)=[\varphi(u)-(J_m\varphi)(u)]/m, \tag{4.9}$$

убрать в полученном ИДУ третьего порядка интеграл $(J_m\varphi)(u)$, используя исходное ИДУ (4.1).

В результате получим, в частности, что сингулярная начальная задача (4.1), (4.2) для ИДУ перейдет в сингулярную задачу Коши (ЗК) для ОДУ.

Лемма 4.2. *Пусть в ИДУ* (4.1) *все параметры — фиксированные действительные числа, где* $c>0$, $b\neq 0$, $\lambda\neq 0$, $m>0$, $a\in\mathbb{R}$.

Тогда при любом фиксированном значении параметра $C_0\in\mathbb{R}$ *сингулярная «интегродифференциальная» начальная задача* (4.1), (4.2) *эквивалентна сингулярной «дифференциальной» ЗК вида*:

$$(b^2/2)u^2\varphi'''(u)+\left[c+(b^2+a)u+b^2u^2/(2m)\right]\varphi''(u)+(a-\lambda+c/m+au/m)\,\varphi'(u)=0,\ u>0, \tag{4.10}$$

$$\lim_{u\to+0}\varphi(u)=C_0,\quad \lim_{u\to+0}\varphi'(u)=\lambda C_0/c,\quad \lim_{u\to+0}\varphi''(u)=[m(\lambda-a)-c)\lambda C_0/(mc^2). \tag{4.11}$$

Доказательство. В одну сторону (от ИДУ (4.1) к ОДУ (4.10)) утверждение очевидно — оно следует из описанного выше способа получения ОДУ (4.10). Третье предельное условие в (4.11) есть следствие первых двух и самого ОДУ (4.10), обеспечивая его вырождение при $u \to +0$.

Пусть теперь $\widetilde{\varphi}(u) = \widetilde{\varphi}(u, C_0)$ — решение сингулярной ЗК (4.10), (4.11). Надо доказать, что $\widetilde{\varphi}(u)$ удовлетворяет ИДУ (4.1).

Обозначим левую часть ИДУ (4.1) с функцией $\widetilde{\varphi}(u)$ через $g(u)$. Надо показать, что $g(u) \equiv 0$. В самом деле, учитывая способ получения ОДУ (4.10), нетрудно убедиться (см. подробнее [12, 30]), что $g(u)$ удовлетворяет ОДУ первого порядка

$$g'(u) + g(u)/m = 0, \quad u > 0,$$

общее решение которого имеет вид

$$g(u) = \widetilde{C} \exp(-u/m), \quad u \geqslant 0,$$

где $\widetilde{C}$ — произвольная постоянная. Но, учитывая, что $\widetilde{\varphi}(u)$ удовлетворяет условиям (4.11), получаем из ИДУ (4.1), что $g(0) = 0$. Это влечет $\widetilde{C} = 0$, т. е. $g(u) \equiv 0$. □

Линейное ОДУ третьего порядка (4.10) обладает иррегулярными (сильными) особенностями[1] ранга 1 при $u \to +0$ и при $u \to \infty$ Для изучения сингулярных ЗК в окрестностях особых точек полученного ОДУ третьего порядка в [11, 12] используются также результаты [15, 21, 22].

Лемма 4.3. *Пусть выполнены условия леммы* 4.2. *Тогда*:

1. *Решение* $\varphi(u, C_0)$ *сингулярной ЗК* (4.10), (4.11) *для ОДУ* (*соответственно, эквивалентной начальной задачи* (4.1), (4.2) *для ИДУ*) *существует, единственно и при малых и представимо асимптотическим рядом*

$$\varphi(u, C_0) \sim C_0 \left[1 + \frac{\lambda}{c}\left(u + \sum_{k=2}^{\infty} D_k u^k/k\right)\right], \qquad u \sim +0, \tag{4.12}$$

где постоянные коэффициенты D_k *не зависят от* C_0 *и определяются формальной подстановкой ряда* (4.12) *в ОДУ* (4.10), *а именно, по рекуррентным формулам*:

$$D_2 = -[(a - \lambda)/c + 1/m], \tag{4.13}$$

$$D_3 = -[D_2(b^2 + 2a - \lambda + c/m) + a/m]/(2c), \tag{4.14}$$

$$D_k = -\{D_{k-1}[(k-1)(k-2)b^2/2 + (k-1)a - \lambda + c/m] + D_{k-2}[(k-3)b^2/2 + a]/m\}/[c(k-1)], \tag{4.15}$$
$$k = 4, 5, \ldots.$$

2. *Все решения ОДУ* (4.10) (*сингулярной начальной задачи* (4.1), (4.2) *для ИДУ*) *имеют конечные пределы при* $u \to \infty$ *тогда и только тогда, когда выполнено неравенство* (3.23) — *«условие надежности акций»*.

Теорема 4.1. *Пусть в ИДУ* (4.1) *все параметры* a, b^2, c, λ, m — *фиксированные положительные числа, и пусть выполняется условие* (3.23). *Тогда*:

1. *Сингулярная линейная задача с ограничениями* (4.1)–(4.4) *для ИДУ имеет, и при том единственное, решение* $\varphi(u)$, *которое является бесконечно дифференцируемой на* $(0, \infty)$ *строго возрастающей на* $\mathbb{R}_+$ *функцией. При положительных значениях всех параметров в ИДУ* (4.1) *неравенство* (3.23) *является необходимым и достаточным условием существования решения задачи* (4.1)–(4.4).

2. *Решение* $\varphi(u)$ *может быть получено как решение сингулярной начальной задачи с параметром* (4.1), (4.2) *для ИДУ* (*оно же есть решение эквивалентной сингулярной ЗК с параметром* (4.10), (4.11) *для ОДУ*), *где параметр* $C_0 > 0$ *выбирается из требований* (4.3) *как условие нормировки решения на бесконечности, а ограничения* (4.4) *выполняются для такого решения автоматически.*

3. *При малых* $u > 0$ *для решения* $\varphi(u)$ *справедливо асимптотическое представление* (4.12), *где* $0 < C_0 < 1$.

[1]По поводу классификации особых точек типа полюса для систем линейных ОДУ см., например, монографии [14, 18–20, 26], дополняющие друг друга.

4. *При больших u для решения $\varphi(u)$ справедливо представление*

$$\varphi(u) = 1 - K\, u^{1-2a/b^2}[1 + o(1)], \qquad u \to \infty, \tag{4.16}$$

где $K = C_0\widetilde{K} > 0$ (значения $C_0 > 0$ и $\widetilde{K} > 0$ не могут быть найдены методами локального анализа.

5. *При выполнении неравенства $i_{\mathrm{r,I}} \geqslant 0$, где*

$$i_{\mathrm{r,I}} = m(a - \lambda) + c \tag{4.17}$$

определяет «фактор риска» для модели I, решение $\varphi(u)$ — вогнутая на $\mathbb{R}_+$ функция, а если $i_{\mathrm{r,I}} < 0$, то $\varphi(u)$ выпукла на некотором отрезке $[0, \widehat{u}]$, где $0 < \widehat{u}$ — точка перегиба.

Замечание 4.1. Утверждение 5 теоремы 4.1 здесь более точное, чем приведенное в [11, 12, 30], где постулируется без доказательства, что при более сильном неравенстве $i_{r,\mathrm{I}} > 0$ решение $\varphi(u)$ сингулярной линейной задачи (4.1)–(4.4) есть вогнутая на $\mathbb{R}_+$ функция. Это несложное утверждение для малых значений $u > 0$ очевидно и следует из разложения (4.12) и формулы (4.13): $\varphi''(u) < 0$ при малых $u \geqslant 0$. При этом $\varphi''(u)$ не может поменять знак с ростом u. В самом деле, пусть для некоторого $\widetilde{u} > 0$ будет $\varphi''(\widetilde{u}) = 0$. Тогда из (4.10) получим $\varphi'''(\widetilde{u}) < 0$, но при $u > \widetilde{u}$ должно быть $\varphi''(u) > 0$, так что приходим к противоречию.

Кроме того, что не было замечено ранее, при $i_{r,\mathrm{I}} = 0$ решение $\varphi(u)$ остается вогнутой на $\mathbb{R}_+$ функцией. Это следует из формул (4.12)–(4.14), откуда $\varphi''(0) = 0$, $\varphi'''(0) = -am/(2c) < 0$, так что в окрестности нуля величина $\varphi''(u)$ становится отрицательной и, как и выше, не может поменять знак с ростом u. Из тех же формул (4.12)–(4.14) следует, что при $i_{r,\mathrm{I}} < 0$ (а не при $i_{r,\mathrm{I}} \leqslant 0$, как ошибочно указано в [11, 12, 30]) функция $\varphi(u)$ выпукла на некотором отрезке $[0, \widehat{u}]$, где $0 < \widehat{u}$ — точка перегиба.

Замечание 4.2. Интересно заметить, что при $a < 0$ утверждение леммы 4.2 вместе с утверждением 1 леммы 4.3 оказались востребованными в исследованиях [29] модели оптимального управления инвестициями «при наличии ограничений на заимствования, включающих возможность коротких позиций». В этой, вообще говоря, нелинейной модели поведение функции Беллмана при малых значениях аргумента описывается сингулярной линейной ЗК вида (4.10), (4.11), а выполнения условия (3.23) не требуется.

Замечание 4.3. При выполнении условия (3.3) функция (3.7) является точным решением вырожденной задачи, к которой исходная сингулярная задача (2.1)–(2.4) сводится, если формально положить $a = b = 0$, а именно, решением следующей задачи для ИДУ:

$$c\varphi'(u) - \lambda[\varphi(u) - (J_m\varphi)(u)] = 0, \quad u \in \mathbb{R}_+, \quad c\varphi'(0) - \lambda\varphi(0) = 0, \quad \lim_{u\to\infty}\varphi(u) = 1. \tag{4.18}$$

Эта задача эквивалентна ЗК с параметром и условием нормировки решения на бесконечности:

$$c\varphi''(u) + (c/m - \lambda)\,\varphi'(u) = 0, \qquad u \in \mathbb{R}_+, \tag{4.19}$$

$$\varphi(0) = C_0, \qquad \varphi'(0) = \lambda C_0/c, \qquad \lim_{u\to\infty}\varphi(u) = 1. \tag{4.20}$$

Отсюда $C_0 = 1 - \lambda\, m/c$, $0 < C_0 < 1$, $\varphi'(0) > 0$, $\varphi''(0) < 0$, и справедлива формула (3.7), определяющая точное классическое решение для модели КЛ с положительной нагрузкой безопасности.

Замечание 4.4. Для задач (4.18) и (4.19), (4.20) величина $c = \lambda m$ является критическим значением параметра бифуркации: при $c \leqslant \lambda m$ эти задачи решений не имеют[1]. Для модели I, благодаря инвестициям, неравенство $\varphi(u) > 0$ на $\mathbb{R}_+$ выполняется даже при отрицательной величине фактора риска, т. е. при $i_{r,\mathrm{I}} < 0$, где $i_{r,\mathrm{I}}$ определено в (4.17).

[1] Для ВНР $\varphi(u)$ в классической модели КЛ при $c \leqslant \lambda m$ будет $\varphi(u) \equiv 0$ (см., например, [32]), что отвечает тривиальному решению начальной задачи для ИДУ в (4.18) (соответственно, для ОДУ (4.19)), а условие нормировки на бесконечности относится только к нетривиальным решениям.

4.2. Алгоритм численного нахождения решения. Приведенные выше утверждения теоремы 4.1 позволяют численно находить решение задачи (4.1)–(4.4) из решения вспомогательной сингулярной ЗК (4.10), (4.11) с параметром C_0, значение которого определяется из требований (4.3) как условий нормировки решения на бесконечности. Следуя, в частности, улучшенному алгоритму из [13], это можно осуществить следующим образом. В (4.10) полагаем $\psi(u) = \varphi'(u)$ и, учитывая (4.11), рассмотрим вспомогательную сингулярную ЗК:

$$(b^2/2)u^2\psi''(u) + [c + (b^2+a)u + b^2u^2/(2m)]\psi'(u) + [a - \lambda + c/m + au/m]\psi(u) = 0, \ \ u > 0, \tag{4.21}$$

$$\lim_{u\to+0}\psi(u) = 1, \quad \lim_{u\to+0}\psi'(u) = [m(\lambda - a) - c]/(mc) = -i_{r,\mathrm{I}}/(mc). \tag{4.22}$$

Решение $\psi(u)$ этой задачи существует, единственно и при малых $u > 0$ представимо асимптотическим рядом

$$\psi(u) \sim 1 + \sum_{k=2}^{\infty} D_k u^{k-1}, \quad \psi'(u) \sim \sum_{k=2}^{\infty}(k-1)D_k u^{k-2}, \quad u \sim +0, \tag{4.23}$$

где коэффициенты D_k ($k \geqslant 2$) определены в (4.13)–(4.15). Разложения (4.23) используем для приближенного переноса предельных условий (4.22) из особой точки $u = 0$ в близкую регулярную точку $u_0 > 0$. Решение $\varphi(u)$ исходной задачи (4.1)–(4.4) находим, используя соотношение

$$\varphi(u) = \left[1 + \frac{\lambda}{c}\int_0^u \psi(s)ds\right]\left[1 + \frac{\lambda}{c}\int_0^\infty \psi(s)ds\right]^{-1}, \tag{4.24}$$

где $\psi(u)$ — решение задачи (4.21), (4.22).

Результаты расчетов для модели I при различных значениях параметров задачи приведены в [11, 12, 30] и в данной работе.

В заключение этого раздела заметим, что исследование вспомогательной сингулярной ЗК (4.1), (4.2) для ОДУ является также частью решения оптимизационной задачи — об оптимальном управлении инвестициями страховой компании (о решении такой оптимизационной задачи для модели I см. в [11]).

5. Задача 2: формулировка основных результатов

Сингулярную нелокальную задачу с ограничениями (2.6)–(2.10) для ИДУ перепишем в эквивалентном параметризованном виде:

$$(b^2/2)u^2\varphi''(u) + au\varphi'(u) - \lambda[\varphi(u) - (J_m\varphi)(u)] - \lambda_1[\varphi(u) - (J_{1,n}\varphi)(u)] = 0, \quad u \in \mathbb{R}_+, \tag{5.1}$$

$$\lim_{u\to+0}\varphi(u) = C_0, \qquad \lim_{u\to+0}[u\varphi'(u)] = 0, \tag{5.2}$$

$$\lim_{u\to+0}\varphi(u) = C_0 = \frac{\lambda_1}{n(\lambda+\lambda_1)}\int_0^\infty \varphi(y)\exp(-y/n)\,dy, \tag{5.3}$$

$$\lim_{u\to+\infty}\varphi(u) = 1, \qquad \lim_{u\to+\infty}\varphi'(u) = 0, \tag{5.4}$$

$$0 \leqslant \varphi(u) \leqslant 1, \qquad u \in \mathbb{R}_+. \tag{5.5}$$

Здесь C_0 — параметр, удовлетворяющий нелокальному условию (5.3).

Далее мы формулируем основные следствия из результатов [13] с некоторыми дополнениями и замечаниями (допущенные в [13] неточности и опечатки здесь исправлены).

5.1. Единственность решения и сопутствующая сингулярная нелокальная задача для ОДУ четвертого порядка.

Лемма 5.1. *Пусть в ИДУ* (5.1) *все параметры — фиксированные действительные числа, причем* $b^2 > 0$, $\lambda > 0$, $\lambda_1 > 0$, $m > 0$, $n > 0$, *а число* $a \in \mathbb{R}$ *любого знака. Тогда*:

1. *Если существует решение* $\varphi_1(u) = \varphi(u, C_0)$ *сингулярной линейной КрЗ с ограничениями* (5.1)–(5.5) *при некотором* $C_0 \in \mathbb{R}$, *то такое решение единственно.*
2. *Если существует решение* $\varphi(u) = \varphi(u, C_0)$ *сингулярной линейной КрЗ* (*без ограничений*) (5.1)–(5.4) *при некотором* $C_0 \in \mathbb{R}$, *то для такого решения выполняются ограничения* (5.5) *и* $0 < C_0 < 1$.

Доказательство. 1. Докажем единственность. Предположим противное: пусть $\varphi_2(u)$ — другое решение задачи (5.1)–(5.5). Тогда возможны два варианта: первый вариант, когда

$$\lim_{u\to+0} \varphi_1(u) = \lim_{u\to+0} \varphi_2(u), \tag{5.6}$$

и второй вариант, когда

$$\lim_{u\to+0} \varphi_1(u) \neq \lim_{u\to+0} \varphi_2(u). \tag{5.7}$$

Для случая выполнения (5.6) рассмотрим разность $\widetilde{\varphi}(u) = \varphi_2(u) - \varphi_1(u)$. Тогда $\widetilde{\varphi}(u)$ есть решение ИДУ (5.1), удовлетворяющее условиям

$$\lim_{u\to+0} \widetilde{\varphi}(u) = \lim_{u\to\infty} \widetilde{\varphi}(u) = 0. \tag{5.8}$$

Если нетривиальное решение задачи (5.1), (5.8) существует и принимает положительные значения на $\mathbb{R}_+$, то оно должно иметь положительный максимум на $\mathbb{R}_+$ (если $\widetilde{\varphi}(u)$ не принимает положительных значений на $\mathbb{R}_+$, то рассматриваем функцию $-\widetilde{\varphi}(u)$). Пусть $0 < \widetilde{u}$ — точка максимума этого решения: $\widetilde{\varphi}(\widetilde{u}) = \max\limits_{u\in[0,\infty)} \widetilde{\varphi}(u) > 0$. Тогда должно быть $\widetilde{\varphi}'(\widetilde{u}) = 0$, $\widetilde{\varphi}''(\widetilde{u}) \leqslant 0$. Но из ИДУ (5.1) с учетом формул (2.5) и (2.11) получаем противоречие:

$$(b^2/2)\widetilde{u}^2\widetilde{\varphi}''(\widetilde{u}) = \lambda\,[\widetilde{\varphi}(\widetilde{u}) - (J_m\widetilde{\varphi})(\widetilde{u})] + \lambda_1\,[\widetilde{\varphi}(\widetilde{u}) - (J_{1,n}\widetilde{\varphi})(\widetilde{u})] \geqslant \lambda\widetilde{\varphi}(\widetilde{u})\exp\left(-\widetilde{u}/m\right) > 0. \tag{5.9}$$

Следовательно, $\widetilde{\varphi}(u) \equiv 0$.

Рассмотрим случай выполнения (5.7). Тогда, как нетрудно проверить, можно составить такую линейную комбинацию решений $\widehat{\varphi}(u) = c_1\varphi_1(u) + c_2\varphi_2(u)$, что $\widehat{\varphi}(u) \not\equiv 1$ и является решением ИДУ (5.1), удовлетворяющим предельным условиям

$$\lim_{u\to+0} \widehat{\varphi}(u) = \lim_{u\to\infty} \widehat{\varphi}(u) = 1.$$

Если существует $u \in \mathbb{R}_+$ такое, что $\widehat{\varphi}(u) > 1$, то рассуждаем так же, как для первого варианта. Если предположить, что $\widehat{\varphi}(u) \leqslant 1$ $\forall u > 0$, то получим неравенство

$$(J_{1,n}\widehat{\varphi})(0) = \frac{1}{n}\int\limits_0^\infty \widehat{\varphi}(y)\exp\left(-y/n\right)dy < 1.$$

Отсюда, учитывая предельное равенство $\lim\limits_{u\to+0} \widehat{\varphi}(u) = 1$, получим противоречие: условие (5.3) не выполняется. Следовательно, не существует другого решения задачи (5.1)–(5.5), удовлетворяющего условию (5.7).

2. Пусть теперь $\varphi(u) = \varphi(u, C_0)$ — решение сингулярной линейной КрЗ без ограничений (5.1)–(5.4) при некотором $C_0 \in \mathbb{R}$. Докажем выполнение ограничения $\varphi(u) < 1$ для любого конечного $u \in \mathbb{R}_+$. Для этого сначала покажем, что при $u \to +0$ функция $\varphi(u)$ не может принимать наибольшее положительное значение. Предположим противное: $\varphi(u) \leqslant C_0$ для любого $u \in \mathbb{R}_+$, где $\lim\limits_{u\to+0} \varphi(u) = C_0 > 0$. Но из (5.3) получаем противоречие: $(\lambda + \lambda_1)C_0 \leqslant \lambda_1 C_0$, что влечет $C_0 \leqslant 0$.

Пусть теперь в какой-то конечной точке $u > 0$ будет $\varphi(u) \geqslant 1$. Тогда функция $\varphi(u)$ должна иметь максимум на $\mathbb{R}_+$, превосходящий 1. Но, совершенно аналогично доказательству неравенства (5.9), в точке максимума получим противоречие.

Аналогично доказывается, что $\varphi(u)$ не может принимать наименьшее отрицательное значение при $u \to +0$ и не может иметь отрицательный минимум на $\mathbb{R}_+$. □

Далее, ИДУ (5.1) второго порядка можно свести к ОДУ четвертого порядка, что, как и для модели I, является важным и упрощающим для исследований обстоятельством. Для этого достаточно осуществить в (5.1) два дополнительных дифференцирования и, учитывая наряду с (4.9) равенство

$$(J_{1,n}\varphi)'(u) = [(J_{1,n}\varphi)(u) - \varphi(u)]/n, \tag{5.10}$$

убрать в полученном ИДУ четвертого порядка интегралы $(J_m\varphi)(u)$ и $(J_{1,n}\varphi)(u)$, используя исходное ИДУ (5.1) и промежуточное вспомогательное ИДУ третьего порядка.

В результате справедлива приведенная ниже лемма 5.2, где введены обозначения:

$$\begin{gathered} a_1 = 2(2 + a/b^2), \quad a_2 = (n-m)/(mn), \quad a_3 = 2\left[1 + (2a - \lambda - \lambda_1)/b^2\right], \\ a_4 = 2(1 + a/b^2)(n-m)/(mn), \qquad a_5 = -1/(mn), \\ a_6 = 2\left[a(n-m) + \lambda m - \lambda_1 n\right]/(b^2 mn), \qquad a_7 = -2a/(b^2 mn). \end{gathered} \tag{5.11}$$

Лемма 5.2. *Пусть для параметров в ИДУ* (5.1) *выполнены условия леммы* 5.1. *Тогда линейная сингулярная КрЗ* (5.1)–(5.4) *для ИДУ* (*без ограничений и с нелокальным условием в нуле*) *эквивалентна следующей линейной сингулярной КрЗ для ОДУ с нелокальным условием в нуле*:

$$u^2\varphi''''(u) + (a_1 + a_2 u)u\varphi'''(u) + (a_3 + a_4 u + a_5 u^2)\varphi''(u) + (a_6 + a_7 u)\varphi'(u) = 0, \quad u \in \mathbb{R}_+, \tag{5.12}$$

$$\lim_{u\to+0}\varphi(u) = C_0, \quad \lim_{u\to+0}[u\varphi'(u)] = \lim_{u\to+0}[u^2\varphi''(u)] = \lim_{u\to+0}[u^3\varphi'''(u)] = 0, \tag{5.13}$$

$$\lim_{u\to+0}\varphi(u) = C_0 = \frac{\lambda_1}{n(\lambda+\lambda_1)}\int\limits_0^\infty \varphi(y)\exp\left(-y/n\right)dy, \tag{5.14}$$

$$\lim_{u\to\infty}\varphi(u) = 1, \quad \lim_{u\to\infty}\varphi'(u) = \lim_{u\to\infty}\varphi''(u) = \lim_{u\to\infty}\varphi'''(u) = 0. \tag{5.15}$$

Здесь C_0 — параметр, а значения a_j ($j = \overline{1,7}$) определены в (5.11).

Доказательство. В одну сторону (от ИДУ (5.1) к ОДУ (5.12)) утверждение очевидно — оно следует из описанного выше способа получения ОДУ (5.12). Пусть теперь $\widetilde{\varphi}(u) = \widetilde{\varphi}(u, C_0)$ — решение сингулярной КрЗ (5.12)–(5.15). Надо доказать, что $\widetilde{\varphi}(u)$ удовлетворяет ИДУ (5.1).

Обозначим левую часть (5.1) с этой функцией $\widetilde{\varphi}(u)$ через $g(u)$ и покажем, что $g(u) \equiv 0$. Нетрудно убедиться, учитывая способ получения ОДУ (5.12) (см. подробнее [13]), что $g(u)$ удовлетворяет ОДУ

$$g''(u) + \frac{(n-m)}{mn}\,g'(u) - \frac{1}{mn}\,g(u) = 0, \qquad 0 < u < \infty. \tag{5.16}$$

Общее решение ОДУ (5.16) имеет вид

$$g(u) = c_1\exp\left(-u/m\right) + c_2\exp\left(u/n\right), \qquad u \geqslant 0, \tag{5.17}$$

где c_1 и c_2 — произвольные постоянные.

Учитывая определение $g(u)$ и предельные условия (5.15), получаем $\lim\limits_{u\to\infty}[g(u)/u^2] = 0$, что в (5.17) влечет $c_2 = 0$. Наконец, учитывая условия (5.13) и (5.14), получаем $g(0) = 0$, что в (5.17) влечет $c_1 = 0$. □

5.2. Вспомогательная сингулярная краевая задача для ОДУ третьего порядка и ее исследование. Полагая $\varphi'(u) = \psi(u)$, понижаем порядок ОДУ (5.12) и получаем для функции $\psi(u)$ вспомогательную линейную сингулярную КрЗ вида:

$$u^3\psi'''(u) + (a_1 + a_2 u)u^2\psi''(u) + (a_3 + a_4 u + a_5 u^2)u\psi'(u) + (a_6 u + a_7 u^2)\psi(u) = 0, \quad u \in \mathbb{R}_+, \tag{5.18}$$

$$\lim_{u\to+0}[u\psi(u)] = \lim_{u\to+0}[u^2\psi'(u)] = \lim_{u\to+0}[u^3\psi''(u)] = 0, \tag{5.19}$$

$$\lim_{u\to+\infty}\psi(u) = \lim_{u\to+\infty}\psi'(u) = \lim_{u\to+\infty}\psi''(u) = 0. \tag{5.20}$$

ОДУ (5.18) обладает регулярной особенностью при $u \to +0$ и иррегулярной особенностью ранга 1 при $u \to \infty$. Для изучения сингулярных ЗК в окрестностях особых точек этого ОДУ используются, в частности, результаты [15, 21, 22] (подробнее см. [13]).

Сингулярная КрЗ (5.18)–(5.20) всегда имеет тривиальное решение $\psi \equiv 0$. Нас будет интересовать существование нетривиального решения этой задачи, выделяемого условием нормировки, приведенным ниже в лемме 5.3.

Лемма 5.3. *Пусть выполнены условия леммы* 5.2, *и пусть* $\psi(u)$ — *нетривиальное решение вспомогательной линейной сингулярной КрЗ* (5.18)–(5.20), *такое, что* $\psi(u) \in L_1(\mathbb{R}_+)$ *и нормировано требованием*

$$\int_0^\infty [1 + (\lambda_1/\lambda)\exp(-s/n)]\ \psi(s)\,ds = 1. \tag{5.21}$$

Тогда функция $\varphi(u)$, *определенная равенством*

$$\varphi(u) = (\lambda_1/\lambda)\int_0^\infty \psi(s)\exp(-s/n)\,ds + \int_0^u \psi(s)\,ds, \quad u \geqslant 0, \tag{5.22}$$

является решением как линейной сингулярной КрЗ (5.12)–(5.15) *для ОДУ, так и основной линейной нелокальной сингулярной КрЗ с ограничениями* (5.1)–(5.5) *для ИДУ.*

В результате достаточно доказать существование нетривиального решения $\psi(u)$ вспомогательной линейной сингулярной КрЗ (5.18)–(5.20), удовлетворяющего условиям леммы 5.3, и найти это решение.

Чтобы разобраться с этой вспомогательной КрЗ, прежде всего следует изучить особые точки ОДУ (5.18) и свести сингулярную КрЗ (5.18)–(5.20) к эквивалентной КрЗ на конечном интервале без особенностей. Для переноса предельных граничных условий из особых точек используются результаты теории устойчивых начальных многообразий решений, или многообразий условной устойчивости по Ляпунову (см., например, [2, 3, 6]), причем учитывается понятие допустимых граничных условий в особых точках типа полюса (см., например, [5, 27]).

5.2.1. Перенос предельных условий из особой точки $u = 0$. ОДУ (5.18) обладает регулярной (слабой) особенностью при $u = 0$ с характеристическими показателями μ_j $(j = 0, 1, 2)$:

$$\mu_0 = 0, \qquad \mu_1 = -1/2 - a/b^2 + \sqrt{(1/2 + a/b^2)^2 + 2(\lambda + \lambda_1 - a)/b^2}, \tag{5.23}$$

$$\mu_2 = -1/2 - a/b^2 - \sqrt{(1/2 + a/b^2)^2 + 2(\lambda + \lambda_1 - a)/b^2}. \tag{5.24}$$

Из формул для $\mu_{1,2}$ также следуют равенства

$$\mu_1 + 1 = 1/2 - a/b^2 + \sqrt{(1/2 - a/b^2)^2 + 2(\lambda + \lambda_1)/b^2},$$

$$\mu_2 + 1 = 1/2 - a/b^2 - \sqrt{(1/2 - a/b^2)^2 + 2(\lambda + \lambda_1)/b^2}.$$

В результате по крайней мере при $\lambda + \lambda_1 > 0$ справедливо

$$\mu_0 = 0, \qquad \mu_1 > -1, \qquad \mu_2 < -1. \tag{5.25}$$

Это, в частности, означает, что сингулярная ЗК (5.18), (5.19) обладает двухпараметрическим семейством решений, значения которых порождают в трехмерном фазовом пространстве ОДУ (5.18) (переменных ψ, ψ', ψ'') двумерное линейное подпространство — плоскость, проходящую через начало координат и зависящую от u как от параметра. Эта плоскость задается в $\mathbb{R}^3$ одним линейным соотношением.

Далее, используя результаты теории переноса граничных условий из особых точек для систем линейных ОДУ и результаты по сингулярным ЗК для систем нелинейных ОДУ, получаем справедливость следующего утверждения (его несложное доказательство см. в [13]):

Лемма 5.4. *Пусть в ОДУ* (5.18) *величины* a_j $(j = \overline{1,7})$ *определены по формулам* (5.11), *где значения параметров* a, b, λ, λ_1, m, n *удовлетворяют предположениям леммы* 5.1. *Тогда предельные условия* (5.19) *для решений ОДУ* (5.18) *при достаточно малых* $u > 0$ *эквивалентны линейному соотношению*

$$u^2\psi''(u) = \alpha(u)u\psi'(u) + \beta(u)\psi(u), \qquad 0 < u \leqslant u_0. \tag{5.26}$$

Здесь пара функций $\{\alpha(u), \beta(u)\}$ *является решением нелинейной сингулярной ЗК*

$$u\alpha' = (1 - a_1 - a_2u)\alpha - \alpha^2 - \beta - (a_3 + a_4u + a_5u^2), \tag{5.27}$$

$$u\beta' = (2 - a_1 - a_2u)\beta - \alpha\beta - (a_6u + a_7u^2), \qquad u > 0, \tag{5.28}$$

$$\lim_{u\to+0} \alpha(u) = \alpha_0 = \mu_1 - 1, \quad \lim_{u\to+0} \beta(u) = 0, \tag{5.29}$$

где μ_1 *определено в* (5.23). *Решение* $\{\alpha(u), \beta(u)\}$ *сингулярной ЗК* (5.27)–(5.29) *для достаточно малых* $u > 0$ *существует, единственно и является голоморфной функцией в точке* $u = 0$:

$$\alpha(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k u^k, \qquad \beta(u) = \sum_{k=1}^{\infty} \beta_k u^k, \qquad |u| \leqslant u_0, \qquad u_0 > 0. \tag{5.30}$$

Здесь α_0 *определено в* (5.29), *а коэффициенты* α_k, β_k *при* $k \geqslant 1$ *определяются из* (5.27), (5.28) *формальной подстановкой разложений* (5.30), *что приводит к рекуррентным формулам*:

$$\beta_1 = -\frac{a_6}{\alpha_0 + a_1 - 1}, \qquad \alpha_1 = -\frac{\beta_1 + a_2\alpha_0 + a_4}{2\alpha_0 + a_1}; \tag{5.31}$$

$$\beta_2 = -\frac{a_7 + a_2\beta_1 + \alpha_1\beta_1}{\alpha_0 + a_1}, \qquad \alpha_2 = -\frac{\beta_2 + \alpha_1^2 + a_2\alpha_1 + a_5}{2\alpha_0 + a_1 + 1}; \tag{5.32}$$

$$\beta_k = -\frac{a_2\beta_{k-1} + \sum\limits_{l=1}^{k-1} \alpha_l\beta_{k-l}}{\alpha_0 + a_1 + k - 2}, \qquad \alpha_k = -\frac{\beta_k + \sum\limits_{l=1}^{k-1} \alpha_l\alpha_{k-l}}{2\alpha_0 + a_1 + k - 1}, \qquad k = 3, 4, \ldots. \tag{5.33}$$

В результате перенос граничных условий (5.19) из особой точки $u = 0$ в близкую регулярную точку $u = u_0 > 0$ осуществляется с помощью соотношения (5.26): в точке $u = u_0$ имеем граничное условие

$$u_0^2\psi''(u_0) = \alpha(u_0)u_0\psi'(u_0) + \beta(u_0)\psi(u_0), \tag{5.34}$$

где приближенные значения $\alpha(u_0)$ и $\beta(u_0)$ с заданной точностью можно находить с помощью разложений (5.30)–(5.33). При этом для вычислений важно, что в окрестности особой точки $u = 0$ условие (5.34) устойчиво переносится слева направо — в направлении от этой особой точки[1].

Замечание 5.1. В [13] не было замечено, что утверждение леммы 5.4 остается справедливым и при $a \leqslant 0$, что может представлять интерес при изучении некоторых других моделей страховой и/или финансовой математики (ср. с замечанием 4.2).

Замечание 5.2. Для полноты изложения, учитывая результаты общей теории линейных ОДУ с регулярной (слабой) особой точкой (см., например, [26, § 2]), зафиксируем следующее представление для двухпараметрического семейства решений $\psi(u, q_0, q_1)$ сингулярной ЗК (5.18), (5.19):

$$\psi(u, q_0, q_1) = q_0\{1 + \psi_1(u) + Au^{\mu_1} \ln(u) [1 + \psi_2(u)]\} + q_1u^{\mu_1} [1 + \psi_2(u)]. \tag{5.35}$$

(В предположениях леммы 5.4 оно может быть получено для малых $u > 0$ из соотношения (5.26).) Здесь q_0, q_1 — произвольные постоянные, μ_1 определено в (5.23), $\psi_j(u)$ — голоморфные в нуле функции, $\psi_j(0) = 0$ $(j = 1, 2)$, а постоянная A зависит от параметров ОДУ (5.18), причем $A = 0$, если μ_1 — нецелое число. Коэффициенты сходящихся рядов по степеням u для функций $\psi_j(u)$ $(j = 1, 2)$ могут быть получены из ОДУ (5.26) формальной подстановкой всех разложений.

5.2.2. Перенос предельных условий из бесконечно удаленной особой точки. При $u \to \infty$ ОДУ (5.18) обладает иррегулярной (сильной) особенностью ранга 1.

Сингулярную ЗК (5.18), (5.20) перепишем в виде

$$\psi'''(u) + \left[a_2 + \frac{a_1}{u}\right]\psi''(u) + \left[a_5 + \frac{a_4}{u} + \frac{a_3}{u^2}\right]\psi'(u) + \left[\frac{a_7}{u} + \frac{a_6}{u^2}\right]\psi(u) = 0, \quad 0 < u < \infty, \tag{5.36}$$

$$\lim_{u\to+\infty} \psi(u) = \lim_{u\to+\infty} \psi'(u) = \lim_{u\to+\infty} \psi''(u) = 0. \tag{5.37}$$

Характеристические показатели ОДУ (5.36), отвечающие за поведение решений при больших u, имеют вид:

$$\nu_0 = 0, \qquad \nu_1 = -1/m < 0, \qquad \nu_2 = 1/n > 0. \tag{5.38}$$

Чтобы полностью разобраться с поведением решений ОДУ (5.36) при $u \to \infty$, надо найти первую поправку по теории возмущений (при больших u) к показателю $\nu_0 = 0$, что подробно осуществлено

[1] См. [13]; подробнее см. в [4] изучение этого вопроса при переносе устойчивых многообразий решений для достаточно общих систем линейных ОДУ с особенностями типа полюса в граничных точках.

в [13] с учетом результатов [15, 21, 22]. Как следствие этого изучения и использования результатов общей теории линейных ОДУ с иррегулярными особыми точками, справедливо следующее утверждение.

Лемма 5.5. *Пусть в ОДУ* (5.18) *величины* a_j $(j = \overline{1,7})$ *определены по формулам* (5.11)*, где все параметры* a, b, n, m, λ, λ_1 — *фиксированные действительные числа, причем* $a > 0$, $b^2 > 0$, $n > 0$, $m > 0$, *а значения* λ *и* λ_1 *любого знака* $(\lambda, \lambda_1 \in \mathbb{R})$. *Тогда сингулярная ЗК* (5.18), (5.20) *обладает двухпараметрическим семейством решений* $\psi(u, p_1, p_2)$, *причем при больших* u *справедливо представление*

$$\psi(u, p_1, p_2) = p_1 u^{-2a/b^2}[1 + \xi_1(u)/u] + p_2 u^{-2} \exp(-u/m)[1 + \xi_2(u)/u]. \tag{5.39}$$

Здесь p_1, p_2 — *произвольные постоянные, а функции* $\xi_j(u)$ $(j = 1, 2)$ *имеют конечные пределы при* $u \to \infty$ *и при больших* u *представимы асимптотическими рядами*

$$\xi_j(u) \backsim \sum_{k=0}^{\infty} \xi_k^{(j)}/u^k, \qquad j = 1, 2, \tag{5.40}$$

где коэффициенты этих рядов могут быть получены из ОДУ (5.18) *формальной подстановкой всех разложений. Все решения семейства* $\psi(u, p_1, p_2)$ *интегрируемы на бесконечности тогда и только тогда, когда выполняется неравенство* (3.23).

Значения решений (5.39) порождают в трехмерном фазовом пространстве ОДУ (5.18) (переменных ψ, ψ', ψ'') двумерное линейное подпространство — плоскость, проходящую через начало координат и зависящую от u как от параметра. Эта плоскость задается в $\mathbb{R}^3$ одним линейным соотношением.

Более точно, снова используя результаты теории переноса граничных условий из особых точек для систем линейных ОДУ и результаты по сингулярным ЗК для систем нелинейных ОДУ, получаем справедливость следующего утверждения (доказательство см. в [13]).

Лемма 5.6. *Пусть выполнены предположения леммы* 5.5. *Тогда предельные граничные условия* (5.20) *для решений ОДУ* (5.18) *для достаточно больших* u *эквивалентны линейному соотношению*

$$\psi''(u) = \gamma(u)\psi'(u) + \varkappa(u)\psi(u), \qquad u \geqslant u_\infty. \tag{5.41}$$

Здесь пара функций $\{\gamma(u), \varkappa(u)\}$ *есть решение сингулярной нелинейной ЗК*

$$\gamma' = -\left(a_2 + a_1/u\right)\gamma - \gamma^2 - \varkappa - \left(a_5 + a_4/u + a_3/u^2\right), \tag{5.42}$$

$$\varkappa' = -\left(a_2 + a_1/u\right)\varkappa - \gamma\varkappa - \left(a_7/u + a_6/u^2\right), \qquad u_\infty \leqslant u < \infty, \tag{5.43}$$

$$\lim_{u\to+\infty} \gamma(u) = \gamma_0 = -1/m, \qquad \lim_{u\to+\infty} \varkappa(u) = 0. \tag{5.44}$$

Решение $\{\gamma(u), \varkappa(u)\}$ *сингулярной ЗК* (5.42)–(5.44) *существует для достаточно больших* u, *единственно и представимо асимптотическими рядами*:

$$\gamma(u) \sim \gamma_0 + \sum_{k=1}^{\infty} \gamma_k/u^k, \qquad \varkappa(u) \sim \sum_{k=1}^{\infty} \varkappa_k/u^k, \qquad u \gg 1. \tag{5.45}$$

Здесь γ_0 *определено в* (5.44)*, а коэффициенты* γ_k, $\varkappa_k$ *при* $k \geqslant 1$ *определяются из* (5.42), (5.43) *формальной подстановкой разложений* (5.45)*, что приводит к рекуррентным формулам*:

$$\varkappa_1 = -a_7/(a_2 + \gamma_0), \qquad \gamma_1 = -(a_1\gamma_0 + \varkappa_1 + a_4)/(a_2 + 2\gamma_0), \tag{5.46}$$

$$\varkappa_2 = [\varkappa_1(1 - a_1 - \gamma_1) - a_6]/(a_2 + \gamma_0), \quad \gamma_2 = [\gamma_1(1 - a_1 - \gamma_1) - \varkappa_2 - a_3]/(a_2 + 2\gamma_0), \tag{5.47}$$

$$\varkappa_k = \left[(k - 1 - a_1)\varkappa_{k-1} - \sum_{l=1}^{k-1} \gamma_l \varkappa_{k-l}\right] \Big/ (a_2 + \gamma_0), \tag{5.48}$$

$$\gamma_k = \left[\gamma_{k-1}(k - 1 - a_1) - \varkappa_k - \sum_{l=1}^{k-1} \gamma_l \gamma_{k-l}\right] \Big/ (a_2 + 2\gamma_0), \qquad k = 3, 4, \ldots. \tag{5.49}$$

Тогда, в частности, представление (5.39), (5.40) *для двухпараметрического семейства* $\psi(u, p_1, p_2)$ *решений сингулярной ЗК* (5.36), (5.37) *может быть получено из соотношения* (5.41) *формальной подстановкой всех разложений.*

В результате перенос граничных условий (5.20) из бесконечности в конечную точку $u = u_\infty \gg 1$ осуществляется с помощью соотношения (5.41): в точке $u = u_\infty$ имеем граничное условие

$$\psi''(u_\infty) = \gamma(u_\infty)\psi'(u_\infty) + \varkappa(u_\infty)\psi(u_\infty), \tag{5.50}$$

где приближенные значения $\gamma(u_\infty)$, $\varkappa(u_\infty)$ могут быть найдены с помощью разложений (5.46)–(5.49). Для вычислений важно, что при больших u условие (5.50) устойчиво переносится справа налево — в направлении от особой точки $u = \infty$.

5.2.3. Эквивалентная однородная регулярная краевая задача с недостающим числом граничных условий. Существование нетривиального решения и его свойства.

Лемма 5.7. *Пусть в ОДУ* (5.18) *будет*: *коэффициенты* a_j $(j = \overline{1,7})$ *определены по формулам* (5.11), *где все величины* a, b^2, n, m, λ, λ_1 — *положительные числа. Тогда вспомогательная сингулярная линейная КрЗ* (5.18)–(5.20), *определенная на* $\mathbb{R}_+$, *эквивалентна следующей однородной линейной КрЗ на конечном интервале* $0 < u_0 \leqslant u \leqslant u_\infty$ *без особенностей*:

$$u^3\psi'''(u) + (a_1 + a_2u)u^2\psi''(u) + (a_3 + a_4u + a_5u^2)u\psi'(u) + (a_6u + a_7u^2)\psi(u) = 0, \ u_0 \leqslant u \leqslant u_\infty, \tag{5.51}$$

$$u_0^2\psi''(u_0) = \alpha(u_0)u_0\psi'(u_0) + \beta(u_0)\psi(u_0), \tag{5.52}$$

$$\psi''(u_\infty) = \gamma(u_\infty)\psi'(u_\infty) + \varkappa(u_\infty)\psi(u_\infty). \tag{5.53}$$

Здесь функции $\alpha(u)$ *и* $\beta(u)$ *определены в лемме* 5.4, $\gamma(u)$ *и* $\varkappa(u)$ — *в лемме* 5.6, *а значения* u_0, u_∞ $(0 < u_0 \ll 1,\ u_\infty \gg 1)$, *вообще говоря, могут меняться в некоторых диапазонах, зависящих от параметров задачи* (*подвижные границы*); *однородная двухточечная КрЗ* (5.51)–(5.53) *является недоопределенной по числу граничных условий* (*ОДУ третьего порядка с двумя разделенными краевыми условиями*) *и всегда имеет нетривиальное решение.*

Принимая во внимание формулы (5.23), (5.24) и представления (5.35) и (5.39) для двухпараметрических семейств решений сингулярных ЗК (5.18), (5.19) и (5.18), (5.20), соответственно, получаем справедливость следующей теоремы.

Теорема 5.1. *Пусть для ОДУ* (5.18) *выполнены условия леммы* 5.7, *где значения параметров* a, b^2, n, m, λ, λ_1 *фиксированы, и пусть выполняется неравенство* (3.23) — *«условие надежности портфеля активов».*

Тогда сингулярная КрЗ (5.18)–(5.20) *имеет, и притом единственное* (*с точностью до множителя нормировки*), *нетривиальное решение* $\psi(u)$, $\psi(u) \in L_1(0, \infty)$, *и для него справедливы следующие утверждения*:

1. *Если выполнено условие*

$$0 < a < \lambda + \lambda_1, \tag{5.54}$$

то $\mu_1 > 0$ *и* $\lim\limits_{u\to+0} \psi(u) = D_1 > 0$; *при этом неравенство* $|\lim\limits_{u\to+0} \psi'(u)| < \infty$ *справедливо тогда и только тогда, когда выполнено дополнительное требование*

$$\lambda + \lambda_1 > b^2 + 2a. \tag{5.55}$$

Более точно, в этом случае $\mu_1 > 1$ *и справедливо*

$$\lim_{u\to+0} \psi'(u) = D_1D_2 = D_1\,[a(m-n) + \lambda_1 n - \lambda m]\,/\,[mn(b^2 + 2a - \lambda - \lambda_1], \tag{5.56}$$

откуда $D_2 \leqslant 0$, *если выполнено условие* $i_{\mathrm{r,II}} \geqslant 0$, *где величина*

$$i_{\mathrm{r,II}} = a(m-n) + \lambda_1 n - \lambda m \tag{5.57}$$

определяет «фактор риска» для модели II, и $D_2 > 0$, *если* $i_{\mathrm{r,II}} < 0$.

При нарушении условия (5.55), *т. е. когда*

$$\lambda + \lambda_1 \leqslant b^2 + 2a, \tag{5.58}$$

будет $0 < \mu_1 \leqslant 1$, *а функция* $\psi'(u)$ *становится неограниченной, но интегрируемой при* $u \to +0$.

2. *Если выполнены неравенства*

$$a \geqslant \lambda + \lambda_1 > 0, \tag{5.59}$$

то будет $-1 < \mu_1 \leqslant 0$, *а функция* $\psi(u)$ *становится неограниченной, но интегрируемой при* $u \to +0$.

3. *Поведение* $\psi(u)$ *при больших* u *следует из леммы* 5.5, *а именно, справедливо асимптотическое представление в главном*

$$\psi(u) = q_1 u^{-2a/b^2}[1 + o(1)], \qquad u \to \infty, \tag{5.60}$$

где $q_1 \neq 0$, *и, в силу* (3.23), $\psi(u)$ *интегрируема при* $u \to \infty$.

5.3. Существование, единственность и поведение решения исходной сингулярной нелокальной задачи с ограничениями для ИДУ.

Теорема 5.2. *Пусть выполнены предположения теоремы* 5.1, *и пусть* $\psi(u)$ — *нетривиальное решение вспомогательной сингулярной КрЗ* (5.18)–(5.20) *для ОДУ, нормированное требованием* (5.21). *Тогда*:

1. *Функция* $\psi(u)$ *положительна для каждого конечного значения* $u \in \mathbb{R}_+$, *а функция* $\varphi(u)$, *определенная равенством* (5.22), *есть единственное решение исходной сингулярной КрЗ с ограничениями и нелокальным условием в нуле для ИДУ, т. е. задачи* (5.1)–(5.5), *и является строго возрастающей на* $\mathbb{R}_+$ *функцией.*

2. *Если выполнены неравенства* (5.54), *то производная* $\varphi'(u)$ *имеет конечный предел при* $u \to +0$, *причем при выполнении дополнительного требования* (5.55) *вторая производная* $\varphi''(u)$ *также имеет конечный предел при* $u \to +0$ (*равный неотрицательной* (*отрицательной*) *величине, если* $i_{\mathrm{r,II}} \geqslant 0$ (*соответственно, если* $i_{\mathrm{r,II}} < 0$)), *а при выполнении неравенства* (5.58) $\varphi''(u)$ *становится неограниченной, но интегрируемой в нуле функцией. Если выполнены неравенства* (5.59), *то производная* $\varphi'(u)$ *становится неограниченной, но интегрируемой в нуле функцией.*

3. *При больших* u *для решения* $\varphi(u)$ *справедливо представление*

$$\varphi(u) = 1 - K\, u^{1-2a/b^2}\, [1 + o(1)], \qquad u \to \infty, \tag{5.61}$$

где $K > 0$ (*постоянная* K *не может быть найдена методами локального анализа*).

4. *Если выполняются условия* (5.54), (5.55) *и* $i_{\mathrm{r,II}} < 0$, *то функция* $\psi(u) = \varphi'(u)$ *достигает положительного максимума в некоторой точке* $\widetilde{u} > 0$, *а функция* $\varphi(u)$ *имеет в ней перегиб.*

Замечание 5.3. При выполнении условия (3.11) функция (3.14) является точным решением вырожденной задачи, к которой основная сингулярная задача (2.6)–(2.10) приводится формально, если положить $a = b = 0$, а именно, сингулярной нелокальной задачи для интегрального уравнения:

$$(\lambda + \lambda_1)\varphi(u) = \lambda\,(J_m\varphi)(u) + \lambda_1\,(J_{1,n}\varphi)(u), \qquad u \in \mathbb{R}_+, \tag{5.62}$$

$$\varphi(0) = C_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda + \lambda_1}(J_{1,n}\varphi)(0), \quad \lim_{u\to+\infty}\varphi(u) = 1. \tag{5.63}$$

Эта задача эквивалентна линейной КрЗ на полуоси для ОДУ второго порядка с нелокальным условием в нуле:

$$\varphi''(u) = \frac{\lambda m - \lambda_1 n}{mn(\lambda + \lambda_1)}\,\varphi'(u), \quad u \in \mathbb{R}_+, \quad \varphi(0) = C_0 = \frac{\lambda_1}{\lambda + \lambda_1}(J_{1,n}\varphi)(0), \quad \lim_{u\to\infty}\varphi(u) = 1. \tag{5.64}$$

Тогда нетрудно получить, что $C_0 = 1 - \lambda\,(n + m)/[n\,(\lambda + \lambda_1)]$, $0 < C_0 < 1$,

$$\varphi'(0) = D_1 = \lambda\,(n + m)(\lambda_1\, n - \lambda\, m)/[mn^2\,(\lambda + \lambda_1)^2] > 0,$$

$$\varphi''(0) = D_1 D_2 = -D_1(\lambda_1\, n - \lambda\, m)/[mn\,(\lambda + \lambda_1)] < 0,$$

и справедлива формула (3.14), определяющая точное решение для модели КЛ со стохастическими премиями и положительной нагрузкой безопасности.

Величина $\lambda_1 = \lambda m/n$ является критическим значением параметра бифуркации: при $\lambda_1 \leqslant \lambda m/n$ задача (5.62), (5.63) (соответственно, задача (5.64)) решений не имеет.

5.4. Об алгоритмах численного нахождения решения. Как следует из приведенных выше утверждений, основным элементом решения исходной сингулярной КрЗ с ограничениями и нелокальным условием в нуле для ИДУ, т. е. задачи (2.6)–(2.10), является нахождение нетривиальных решений вспомогательной однородной КрЗ для ОДУ (5.51)–(5.53), определенной на конечном отрезке $[u_0, u_\infty]$ без особенностей и с недостающим числом граничных условий.

Для решения линейных КрЗ на конечном интервале без особенностей, как хорошо известно, эффективными являются методы дифференциальной прогонки. Для нахождения нетривиальных решений КрЗ (5.51)–(5.53) важны результаты [4], где, наряду с кратким обзором вариантов дифференциальной прогонки, исследуются вопросы устойчивости вычислений в окрестностях особых точек при решении КрЗ (в том числе спектральных), полученных из сингулярных КрЗ переносом граничных условий из особых точек. В частности, КрЗ (5.51)–(5.53) получена из сингулярной КрЗ (5.18)–(5.20) коротко описанными выше методами локального переноса граничных условий из особых точек, а для нахождения ее нетривиальных решений важны приемы [4], применяемые для устойчивого нахождения собственных функций в спектральных задачах. Отличие здесь состоит в том, что, насколько нам известно, до [13] такие приемы не применялись для решения однородных КрЗ с недостающим числом краевых условий.

В [13] предложены и реализованы экономичные способы решения КрЗ (5.51)–(5.53) по числу уравнений прогонки и числу арифметических действий, на чем здесь подробно останавливаться не будем. Отметим только, что один из алгоритмов основан на сочетании двух вариантов глобально устойчивого метода ортогональной дифференциальной прогонки — варианта прогонки [1] и ее модификации, предложенной в [8]; подобный подход может представлять интерес и для решения других КрЗ. Более экономичный вариант для решения данной задачи допускает замену при прямой прогонке уравнений метода [1] на решение ЗК (5.27)–(5.29) и (5.42)–(5.44) (соответственно, слева направо от точки $u = u_0 > 0$ до точки $u = \widehat{u}$ и справа налево от точки $u = u_\infty < \infty$ до точки $u = \widehat{u}$, $u_0 < \widehat{u} < u_\infty$) с сохранением при обратной прогонке уравнений метода [8].

Далее, с учетом утверждения теоремы 5.2, после нахождения нетривиального решения $\psi(u)$ КрЗ (5.18)–(5.20), нормированного требованием (5.21), решение $\varphi(u)$ исходной КрЗ с ограничениями (5.1)–(5.5) для ИДУ может быть найдено по формуле (5.22).

6. Численные примеры: сравнение результатов расчетов для моделей I и II

Расчеты осуществлялись в программной среде пакета Maple[1] 14.01 с задаваемой точностью вычислений и дополнительными приемами контроля количества верных знаков.

Прежде всего сформулируем *условия сравнения результатов расчетов для моделей I и II* (а также их сравнения с данными для исходных моделей риска 1 и 2, т. е. моделей без инвестиций):

1. задаваемые значения параметров a, b^2, λ, m в модели II (модели 2) те же, что и в модели I (модели 1);
2. значение c в модели I (модели 1) связаны со значениями λ_1 и n в модели II (модели 2) соотношением $\lambda_1 n = c$, т. е. ожидаемые размеры премий в единицу времени одинаковы в обеих моделях.

При $a > 0$, $b \neq 0$ для всех примеров расчетов выполняется «условие надежности акций»: $2a/b^2 > 1$; факторы риска $i_{\mathrm{r,I}}$ и $i_{\mathrm{r,II}}$ определены в (4.17) и (5.57), соответственно.

Далее приводятся графики зависимости ВНР от НК при выполнении условий сравнения моделей I и II (моделей 1 и 2) для некоторых наборов параметров задач.

Прежде всего сравним точные решения (3.7) и (3.14) для моделей 1 и 2. Нетрудно видеть, что справедливо следующее утверждение.

Утверждение 6.1. *Пусть параметры λ, m, c, λ_1, n — фиксированные положительные числа, и пусть $c = \lambda_1 n > \lambda m$, что, в частности, для нагрузок безопасности влечет $\rho_1 = \rho_2 > 0$.*

Тогда $\varphi_2(u) < \varphi_1(u)$ для любого конечного $u > 0$. Кроме того, если при фиксированном $c > 0$ будет $n \to 0$, $\lambda_1 = c/n \to \infty$ (или $n \to \infty$, $\lambda_1 = c/n \to 0$), то $\varphi_2(u) \to \varphi_1(u)$ для любого $u \in \mathbb{R}_+$ (соответственно, $\varphi_2(u) \to 0$ для любого конечного $u \in \mathbb{R}_+$).

[1] Лицензия ВЦ РАН.

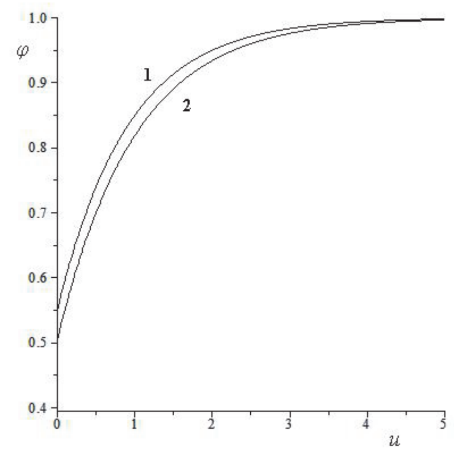

Рис. 1а.

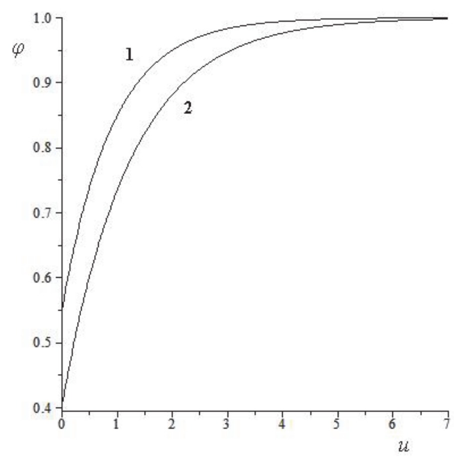

Рис. 1б.

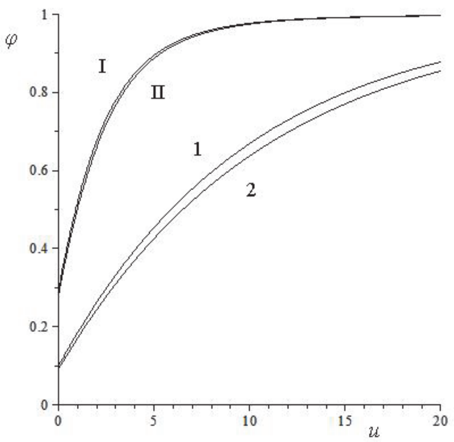

Рис. 2а.

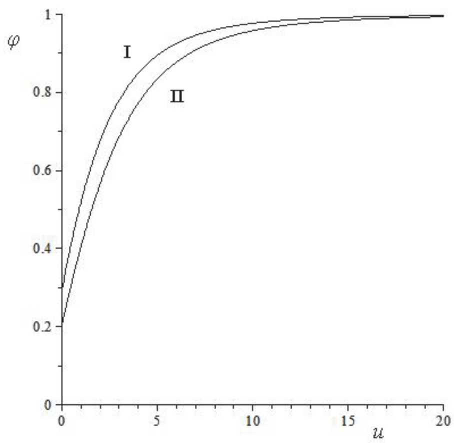

Рис. 2б.

Это утверждение проиллюстрировано на рис. 1а, 1б. Здесь и далее цифрой 1 помечены графики точных решений (3.7), а цифрой 2 — графики точных решений (3.14). Значения параметров к рис. 1а, 1б (точные решения вырожденных задач для ИДУ — для моделей без инвестиций): $a = b = 0$, $m = 0,5$, $\lambda = 0,09$; 1: $c = 0,1$; 2 (рис. 1а): $n = 0,1$, $\lambda_1 = 1$; 2 (рис. 1б): $n = 0,4$, $\lambda_1 = 0,25$ ($c = \lambda_1 n > \lambda m$).

Утверждения теорем 4.1 и 5.2 проиллюстрированы на рис. 2–5, где цифрой I помечены графики к модели I, а цифрой II — к модели II. Значения параметров к рис. 2а, 2б: $m = 1$, $\lambda = 0,09$; 1,2: $a = b = 0$; 1: $c = 0,1$; 2: $n = 0,1$, $\lambda_1 = 1$; I, II: $a = 0,02$, $b = 0,1$; I: $c = 0,1$; II (рис. 2а): $n = 0,1$, $\lambda_1 = 1$; II (рис. 2б): $n = 0,9$, $\lambda_1 = 1/9$ ($c = \lambda_1 n > \lambda m$; I: $0 < a < \lambda$, $i_{\mathrm{r,I}} > 0$; II: $0 < a < \lambda + \lambda_1$, $\lambda + \lambda_1 > b^2 + 2a$, $i_{\mathrm{r,II}} > 0$). Значения параметров к рис. 3: $b = 0,1$, $m = 1$, $\lambda = 0,09$; I: $c = 0,02$; II: $n = 0,2$, $\lambda_1 = 0,1$ ($c = \lambda_1 n < \lambda m$); а) для верхнего графика $a = 0,1$ (I: $a > \lambda$, $i_{\mathrm{r,I}} > 0$; II: $a < \lambda + \lambda_1$, $\lambda + \lambda_1 < b^2 + 2a$, $i_{\mathrm{r,II}} > 0$); б) для нижнего графика $a = 0,02$ (I: $a < \lambda$, $i_{\mathrm{r,I}} < 0$; II: $a < \lambda + \lambda_1$, $\lambda + \lambda_1 > b^2 + 2a$, $i_{\mathrm{r,II}} < 0$); для обеих моделей I и II результаты численных расчетов совпадают с графической точностью (различие в другом масштабе см. на рис. 4а, 4б). На рис. 4а, 4б — графики разностей $\varphi_{\mathrm{I}}(u) - \varphi_{\mathrm{II}}(u)$ к графически совпадающим графикам на рис. 3: рис. 4а (рис. 4б) отвечает верхнему графику (нижнему графику) на рис. 3. Значения параметров к рис. 5а, 5б: $a = 0,2$, $b = 0,1$, $m = 1$, $\lambda = 0,05$; рис. 5а: I: $c = 0,02$ ($c < \lambda m$, $i_{\mathrm{r,I}} > 0$); II: $n = 0,2$, $\lambda_1 = 0,1$ ($\lambda_1 n < \lambda m$, $a > \lambda + \lambda_1$, $i_{\mathrm{r,II}} > 0$); рис. 5б: I: $c = 0,08$ ($c > \lambda m$, $i_{\mathrm{r,I}} > 0$); II: $n = 0,8$, $\lambda_1 = 0,1$ ($\lambda_1 n > \lambda m$, $a > \lambda + \lambda_1$, $i_{\mathrm{r,II}} > 0$).

Подробные данные по расчетам с указанием значений $\varphi(0)$, $\varphi'(0)$, $\varphi''(0)$ и других величин для моделей I и II (моделей 1 и 2) приведены в [13].

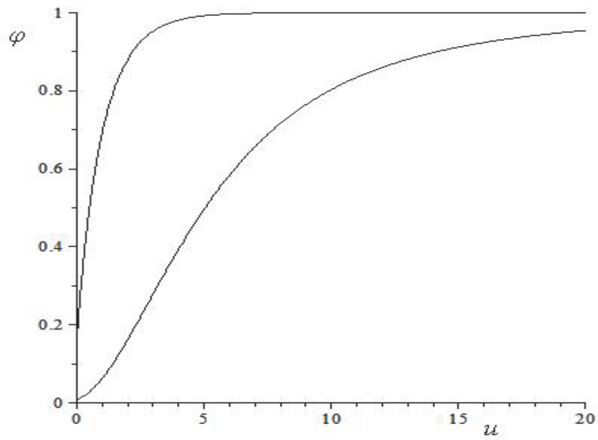

Рис. 3.

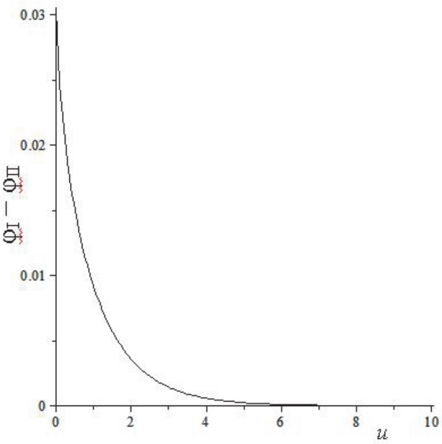

Рис. 4а.

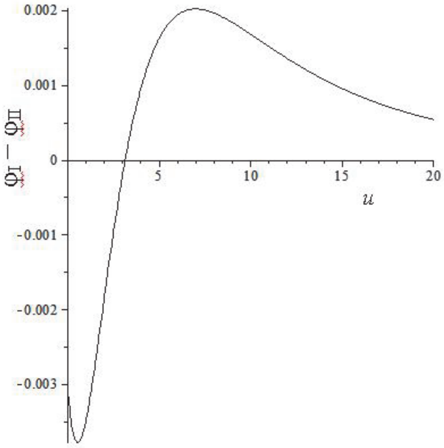

Рис. 4б.

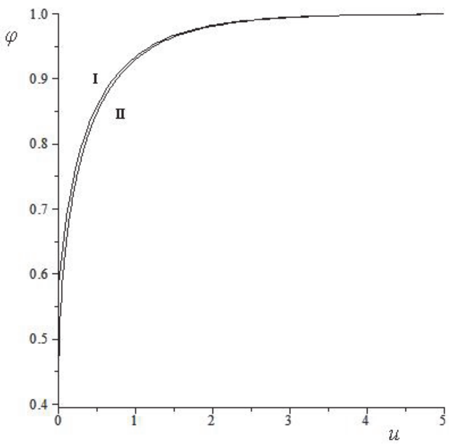

Рис. 5а.

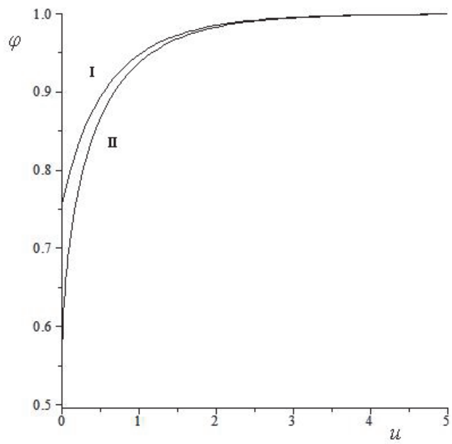

Рис. 5б.

7. Заключительные замечания и экономическая интерпретация результатов

1. Изучение модели I показало, что при больших значениях начального капитала (НК) использование рисковых активов при постоянной структуре инвестиционного портфеля не является благоприятным с точки зрения неразорения. Однако, при малых значениях НК, как особенно показывают случаи нарушения положительности нагрузки безопасности, рисковые активы являются

эффективным инструментом минимизации совокупного риска: в то время, как при отсутствии инвестиций разорение неминуемо, при их наличии величина вероятности неразорения (ВНР) быстро нарастает с ростом НК u (даже при отрицательных значениях фактора риска, когда вторая производная от ВНР при малых u положительна).

Проведенное в [10, 11] исследование оптимальной стратегии в случае экспоненциального распределения размера требований показало, что доля рисковых вложений при стремлении текущего капитала (ТК) x к бесконечности должна быть бесконечно малой функцией порядка $O(1/x)$.

2. Корректная постановка и исследование сингулярной КрЗ с ограничениями (2.6)–(2.10) для ИДУ (модель II) были осуществлены нами в [13] с целью нахождения ВНР в модели страхования со стохастическими премиями и инвестициями капитала в рисковый актив, построения алгоритма вычисления ВНР как функции НК и проведения численных расчетов. При этом важно отметить, что доказательство существования решения поставленной КрЗ является также необходимым этапом на пути теоретического обоснования вида функции, определяющей ВНР в рассматриваемой модели.

Эвристические рассуждения, основанные на некоторых естественных соображениях и приведенные в [17] (так же как и непосредственное применение аппарата производящих операторов для марковских процессов), позволяют получить уравнение для ВНР как функции НК (в данном случае линейное ИДУ) в предположении, что ВНР есть дважды непрерывно дифференцируемая функция НК. Тогда для изучения, например, асимптотики ВНР при больших значениях НК с использованием полученного ИДУ необходимо, с одной стороны, доказать, что ВНР действительно является дважды непрерывно дифференцируемой функцией, а с другой стороны, обосновать предельное условие стремления к единице на бесконечности для соответствующего решения этого ИДУ. Это обоснование может быть проделано, например, с использованием верхних оценок для вероятности разорения (ВР), подобных оценке Лундберга в классической модели, показывающей, что при положительной нагрузке безопасности ВР стремится к нулю при стремлении НК к бесконечности (для модели КЛ со случайными премиями такая оценка приводится, например, в [36]). Однако в [17] при исследовании данного вопроса в модели с инвестированием капитала в рисковый актив таких доказательств проделано не было, и в результате полученная там функция как асимптотика решения ИДУ содержит неопределенную аддитивную константу. При этом остается в итоге необоснованным утверждение, что эта функция определяет асимптотику ВНР (хотя бы при каком-то значении этой константы).

Подход, используемый в [13] и данной работе и основанный на корректной постановке и изучении задачи (2.6)–(2.10) для ИДУ на всей неотрицательной полуоси, доказательстве существования ее решения, с учетом результатов [9], позволяет избежать указанных выше проблем. В частности, пропадает необходимость в доказательстве дважды непрерывной дифференцируемости ВНР и получении для нее верхних оценок при больших значениях НК (для модели I для обоснования полученной в [31] асимптотики ВНР при больших значениях НК использовались и уточнялись оценки из [33], но для модели II аналогичные оценки в [17] получены не были). Кроме того, отпадает необходимость и в доказательстве нижних оценок для ВР (для модели I такие оценки см. в [31], а также см. [33]).

3. Дополнительно используемый подход позволяет провести численные расчеты для ВНР, сравнить результаты этих расчетов для моделей I и II и дать их экономическую интерпретацию.

Адекватность построенных решений и расчетов демонстрирует, в частности, факт близости графиков функций ВНР в моделях I и II при часто поступающих премиях малой величины в модели II, если только ожидаемые премии в единицу времени равны для обеих моделей. Этот факт говорит также в пользу возможности приближенного рассмотрения процесса поступления премий как детерминированного процесса в предположении, что премии поступают гораздо чаще, чем предъявляются иски (такое предположение лежит в основе классической модели КЛ).

В то же время результаты расчетов позволяют проанализировать, в каких случаях использование классической модели КЛ в качестве исходного процесса риска может завышать или занижать ВНР по сравнению с теми ее значениями, которые дает модель, основанная на процессе риска со стохастическими премиями. В частности, при выполнении условия положительности нагрузки безопасности в исходной модели, ВНР, вычисленная в соответствии с моделью I, оказывается завышенной на всей неотрицательной полуоси значений НК. При этом для обеих моделей применение инвестиций существенно увеличивает ВНР для небольших значений НК по сравнению с соответствующими моделями без инвестиций (классической моделью КЛ и моделью КЛ со стохастическими премиями). При отрицательных же значениях нагрузки безопасности, когда в исходных моделях риска разорение наступает с вероятностью единица, применение инвестиций с постоянной структурой портфеля при условии его надежности всегда дает положительные значения ВНР.

Таким образом, применение инвестиций эффективно компенсирует собственный риск страховщика при высоких значениях этого риска. Этот вывод, сделанный на основе изучения решений задач на всей неотрицательной полуоси, невозможно было сделать на основании сравнения лишь их асимптотического поведения при больших значениях НК, как в [31], где утверждалось, что «в страховании инвестиции в рисковые активы опасны». Оказывается, что при небольших значениях НК вывод другой: инвестиции в рисковые активы при небольших значениях НК не только не опасны, но и необходимы в целях повышения платежеспособности. Более точно об этом говорят результаты исследования оптимального управления инвестициями в модели КЛ при наличии ограничений с целью минимизации ВР, опирающиеся, в частности, на результаты исследования модели I (см. [29]).

Сравнение результатов расчетов для ВНР по моделям I и II при неположительных нагрузках безопасности в исходных моделях риска и при одинаковых ожидаемых премиях показало, что выводы зависят от факторов риска моделей $i_{r,\mathrm{I}}$ и $i_{r,\mathrm{II}}$, определенных в (4.17) и (5.57), соответственно. Наиболее рискованными являются случаи отрицательности этого фактора — в этих случаях график ВНР имеет перегиб.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (коды проектов 11-01-00219-а и 13-01-00784-а).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абрамов А. А.* О переносе граничных условий для систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений (вариант метода прогонки)// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1961. — *1*, № 1. — С. 733–737.
2. *Абрамов А. А.* О переносе условия ограниченности для некоторых систем обыкновенных линейных дифференциальных уравнений// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1961. — *1*, № 4. — С. 733–737.
3. *Абрамов А. А., Балла К., Конюхова Н. Б.* Перенос граничных условий из особых точек для систем обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ВЦ АН СССР, 1981.
4. *Абрамов А. А., Диткин В. В., Конюхова Н. Б., Парийский Б. С., Ульянова В. И.* Вычисление собственных значений и собственных функций обыкновенных дифференциальных уравнений с особенностями// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1980. — *20*, № 5. — С. 1155–1173.
5. *Абрамов А. А., Конюхова Н. Б.* Перенос допустимых граничных условий из особой точки для систем линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: ВЦ АН СССР, 1985.
6. *Абрамов А. А., Конюхова Н. Б., Балла К.* Устойчивые начальные многообразия и сингулярные краевые задачи для систем обыкновенных дифференциальных уравнений// Comput. Math. Banach Cent. Publ. — 1984. — *13*. — С. 319–351.
7. *Азбелев Н. В., Максимов В. П., Рахматулина Л. Ф.* Введение в теорию функционально-дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1991.
8. *Бахвалов Н. С.* Численные методы. — Москва: Наука, 1973.
9. *Белкина Т. А.* Теоремы достаточности для вероятности неразорения в динамических моделях страхования с учетом инвестиций// В сб.: «Анализ и моделирование экономических процессов». — 2011. — № 8. — С. 61–74.
10. *Белкина Т. А., Конюхова Н. Б., Куркина А. О.* Оптимальное управление инвестициями в динамических моделях страхования: I. Инвестиционные стратегии и вероятность разорения// Обозрение прикладной и промышленной математики (секция: «Финансовая и страховая математика»). — 2009. — *16*, № 6. — С. 961–981.
11. *Белкина Т. А., Конюхова Н. Б., Куркина А. О.* Оптимальное управление инвестициями в динамических моделях страхования: II. Модель Крамéра—Лундберга с экспоненциальным распределением размера требований// Обозрение прикладной и промышленной математики (секция: «Финансовая и страховая математика»). — 2010. — *17*, № 1. — С. 3–24.

12. *Белкина Т. А., Конюхова Н. Б., Курочкин С. В.* Сингулярная начальная задача для линейного интегродифференциального уравнения, возникающего в моделях страховой математики// Spectr. Evolution Probl. — 2011. — *21*, № 1. — С. 40–54.
13. *Белкина Т. А., Конюхова Н. Б., Курочкин С. В.* Сингулярная краевая задача для интегродифференциального уравнения в модели страхования со случайными премиями: анализ и численное решение// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2012. — *52*, № 10. — С. 1812–1846.
14. *Беллман Р.* Теория устойчивости решений дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во иностр. лит., 1954.
15. *Биргер Е. С., Ляликова* (*Конюхова*) *Н. Б.* О нахождении для некоторых систем обыкновенных дифференциальных уравнений решений с заданным условием на бесконечности// I: Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1965. — *5*, № 6. — С. 979–990; II: Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1966. — *6*, № 3. — С. 446–453.
16. *Бойков А. В.* Модель Краме́ра—Лундберга со стохастическими премиями// Теория вероятностей и ее применения. — 2002. — *47*, № 3. — С. 549–553.
17. *Бойков А. В.* Стохастические модели капитала страховой компании и оценивание вероятности неразорения// Дисс. к.ф.-м.н. — М.: Матем. ин-т им. В. А. Стеклова РАН, 2003.
18. *Вазов В.* Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Мир, 1968.
19. *Камке Э.* Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям. — М.: Наука, 1976.
20. *Коддингтон Э. А., Левинсон Н.* Теория обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Изд-во иностр. лит., 1958.
21. *Конюхова Н. Б.* Сингулярные задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных уравнений// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1983. — *23*, № 3. — С. 629–645.
22. *Конюхова Н. Б.* Сингулярные задачи Коши для систем обыкновенных дифференциальных и функционально-дифференциальных уравнений. — М.: ВЦ АН СССР, 1988.
23. *Конюхова Н. Б.* Сингулярные задачи Коши для некоторых систем нелинейных функционально-дифференциальных уравнений// Дифф. уравн. — 1995. — *31*, № 8. — С. 1340–1347.
24. *Королев В. Ю., Бенинг В. Е., Шоргин С. Я.* Математические основы теории риска. — М.: Физматлит, 2007.
25. *Мельников А. В., Волков С. Н., Нечаев М. Л.* Математика финансовых обязательств. — М.: ГУ ВШЭ, 2001.
26. *Федорюк М. В.* Асимптотические методы для линейных обыкновенных дифференциальных уравнений. — М.: Наука, 1983.
27. *Abramov A. A., Konyukhova N. B.* Transfer of admissible boundary conditions from a singular point for systems of linear ordinary differential equations// Sov. J. Numer. Anal. Math. Model. — 1986. — *1*, № 4. — С. 245–265.
28. *Bachelier L.* Théorie de la spéculation// Ann. de l'Éc. Norm. (3). — 1900. — *17*. — С. 21–86. (Переиздано в: *Coothner P. H.* (ред.) The random character of stock market prices. — Cambridge: MIT Press, 1967. — P. 517–531).
29. *Belkina T., Hipp C., Luo S., Taksar M.* Optimal constrained investment in the Cramer—Lundberg model// Scand. Actuar. J. — 2014. — DOI: 10.1080/03461238.2012.699001. — В печати.
30. *Belkina T. A., Konyukhova N. B., Kurochkin S. V.* Singular problems for integro-differential equations in dynamic insurance models// В сб.: «Differential and difference equations with applications». — New York: Springer, 2013. — С. 27–44.
31. *Frolova A., Kabanov Yu., Pergamenshchikov S.* In the insurance business risky investments are dangerous// Finance Stoch. — 2002. — *6*, № 2. — С. 227–235.
32. *Grandell J.* Aspects of risk theory. — Berlin—New York: Springer, 1991.
33. *Kalashnikov V., Norberg R.* Power tailed ruin probabilities in the presence of risky investments// Stochastic Process. Appl. — 2002. — *98*. — С. 211–228.
34. *Konyukhova N. B.* Singular problems for systems of nonlinear functional-differential equations// Spectr. Evolution Probl. — 2010. — *20*. — С. 199–214.
35. *Ramos A.* Controlled Markov models. An application to the ruin problem// PhD Thesis. — Madrid: Universidad Carlos III de Madrid, 2009.
36. *Zinchenko N., Andrusiv A.* Risk processes with stochastic premiums// Theory Stoch. Process. — 2008. — *14* (*30*), № 3-4 — С. 189–208.

Т. А. Белкина
117418 Москва, Нахимовский просп., 47, ЦЭМИ РАН
E-mail: `tbel@cemi.rssi.ru`

Н. Б. Конюхова
119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН
E-mail: nadja@ccas.ru

С. В. Курочкин
119333 Москва, ул. Вавилова, 40, ВЦ РАН
E-mail: kuroch@ccas.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 53 (2014). С. 30–63

УДК 519.21+517.9

АНАЛИЗ БЕЛОГО ШУМА В ПРИЛОЖЕНИЯХ К СТОХАСТИЧЕСКИМ УРАВНЕНИЯМ В ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

© 2014 г. **И. В. МЕЛЬНИКОВА, М. А. АЛЬШАНСКИЙ**

Введение

Стохастические дифференциальные уравнения возникают в многочисленных приложениях как математические модели, отражающие случайные воздействия типа белого шума на рассматриваемую систему. В дальнейшем мы ограничимся случаем гауссовского белого шума. Намерение ввести шум в дифференциальное уравнение встречает несколько препятствий, одно из которых связано с тем, что процесс белого шума (неформально) определяется как случайный процесс, значения которого при разных t являются независимыми одинаково распределенными случайными величинами с равными нулю математическими ожиданиями и бесконечными отклонениями. Это означает, что белый шум не является случайным процессом в обычном смысле.

Можно выделить два подхода к преодолению препятствия, связанного с сингулярностью белого шума. Первый состоит в использовании исчисления Ито. Главная идея этого подхода может быть в общих чертах описана следующим образом. Вместо того, чтобы работать собственно с шумом, работают с его «первообразной» — броуновским движением $B(t)$, или винеровским процессом. Основы этой теории были заложены Н. Винером [35], который первым ввел математическую модель броуновского движения, построив вероятностную меру на пространстве всех непрерывных на отрезке $[0;1]$ функций так, что эти функции можно считать траекториями процесса броуновского движения. В силу конструкции меры Винера эти непрерывные траектории оказываются нигде не дифференцируемыми с вероятностью единица.

В основе исчисления Ито лежит понятие интеграла от стохастического процесса $X(t)$ по броуновскому движению — интеграла Ито:

$$\int_0^T X(t)\,dB(t).$$

Этот математический аппарат позволяет изучать задачу Коши для стохастического дифференциального уравнения вида

$$dX(t) = a(t, X(t))\,dt + b(t, X(t))\,dB(t), \quad X(0) = \zeta,$$

которое, на самом деле, представляет собой краткую запись интегрального уравнения

$$X(t) - \zeta = \int_0^t a(s, X(s))\,ds + \int_0^t b(s, X(s))\,dB(s).$$

Такие уравнения называются уравнениями Ито, а их решения — процессами Ито. Эти процессы можно считать функционалами траекторий броуновского движения, и исчисление Ито часто называют анализом броуновских функционалов.

Второй подход появился в последних декадах XX столетия и известен как анализ белого шума. Этот термин появился в работе Т. Хиды [13], где он предложил рассматривать функционалы броуновского движения как функционалы белого шума. Поскольку белый шум можно считать

Работа частично поддержана министерством образования и науки РФ (Программа 1.1016.2011), РФФИ, проект 13-01-00090, и программой государственной поддержки лидирующих университетов РФ (соглашение №. 02.A03.21.0006 от 27.08.2013).

производной броуновского движения, траектории которого непрерывны, но нигде не дифференцируемы в обычном смысле, естественно считать траектории белого шума элементами пространства Шварца $\mathcal{S}'$ обобщенных функций медленного роста. Поэтому при построении вероятностного пространства белого шума, являющегося базовым понятием анализа белого шума, берут $\Omega = \mathcal{S}'$ и вводят гауссовскую нормализованную меру μ на σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{S}')$ борелевских подмножеств $\mathcal{S}'$. Построение этой меры основано на знаменитой теореме Бохнера—Минлоса—Сазонова. Этой теме и дальнейшему развитию анализа белого шума посвящена обширная литература (см., например, [7, 15, 17, 20–25, 30]).

Анализ белого шума дает математический аппарат, в рамках которого все случайные переменные рассматриваются как функционалы траекторий белого шума, т. е. функции, определенные на $\mathcal{S}'$. Для того, чтобы охватить все необходимые функционалы, Хида построил обобщение теории обобщенных функций Шварца на случай функций, определенных на $\mathcal{S}'$. С помощью теории оснащенных гильбертовых пространств он построил тройку Гельфанда

$$(\mathcal{S}) \subset (L^2) \subset (\mathcal{S})^*, \tag{1}$$

которая является аналогом хорошо известной тройки $\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'$. Здесь (L^2) — пространство всех случайных величин на $\mathcal{S}'$ с конечным моментом второго порядка; в тройке (1) оно играет роль пространства $L^2(\mathbb{R})$. Значения белого шума принадлежат пространству $(\mathcal{S})^*$ в правой части тройки (1). Оно называется пространством обобщенных случайных величин, или распределений Хиды над пространством основных функций Хиды $(\mathcal{S})$.

В работе [20] Кондратьев и Стрейт расширили пространство Хиды обобщенных случайных величин $(\mathcal{S})^*$, столкнувшись с необходимостью охватить некоторые функционалы белого шума, необходимые в приложениях. Они ввели в рассмотрение пространство $(\mathcal{S})_{-\rho}$ как правый элемент тройки Гельфанда с тем же пространством (L^2) в центре и более узким пространством основных функций $(\mathcal{S})_\rho$, где $0 \leqslant \rho \leqslant 1$ — фиксированный параметр. Пространства основных и обобщенных случайных величин Хиды стали частным случаем пространств Кондратьева и Стрейта, соответствующими случаю параметра $\rho = 0$, а именно, справедливы следующие вложения:

$$(\mathcal{S})_\rho \subset (\mathcal{S})_0 = (\mathcal{S}) \subset (L^2) \subset (\mathcal{S})^* = (\mathcal{S})_{-0} \subset (\mathcal{S})_{-\rho}.$$

Чрезвычайно важным является то, что в рамках анализа белого шума, процесс белого шума оказывается бесконечно дифференцируемой функцией переменной t со значениями в пространстве обобщенных случайных величин. Кроме того, становится возможным перейти от рассмотрения проинтегрированных уравнений Ито к изучению собственно дифференциальных уравнений.

Математический аппарат анализа белого шума позволяет не только ввести шум непосредственно в уравнение, но также ставить и решать стохастические дифференциальные уравнения без ограничений, связанных с такими понятиями, как адаптированность рассматриваемых процессов к фильтрации, порожденной броуновским движением, и предсказуемость. Наличие этих свойств у подынтегрального выражения существенно для определения интеграла Ито и, следовательно, для всех построений исчисления Ито. Адаптированность случайного процесса к фильтрации можно грубо описать как зависимость его значения в любой момент t только от истории броуновского движения до момента t (которая представлена фильтрацией) и независимость от будущего. В рамках анализа белого шума можно изучать и решать некоторые уравнения с «предвосхищением» (*anticipating equations*) (см., например, [2, 8, 26, 29]). Это дает перспективу введения «зависимости от будущего» в математическую модель, что уже нашло применения, например, в финансовой математике, где позволило моделировать рынки с учетом влияния инсайдерской информации (см., например, [1, 7, 16, 31]).

Стохастические дифференциальные уравнения в бесконечномерных гильбертовых пространствах начали изучать в начале 80-х (см. [18, 19], где впервые рассмотрено обобщение исчисления Ито на случай стохастических процессов со значениями в гильбертовом пространстве). Дальнейшее развитие этой теории можно найти в более поздних работах, таких, например, как [4, 5, 12]. Такие уравнения имеют многочисленные приложения в физике, математической биологии и финансовой математике (см., например, [11, 28, 33]).

Ввиду преимуществ, которыми обладает анализ белого шума по сравнению с исчислением Ито, представляется разумным и естественным расширить эту теорию на гильбертовозначный случай.

Первая попытка такого расширения была предпринята в работе [10], где были введены пространства основных и обобщенных случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве и, с помощью преобразования Эрмита, изучены уравнения с аддитивным шумом. В настоящей работе рассматривается несколько другой подход, предложенный в работе [27]. Мы используем пространства скалярнозначных основных случайных величин чтобы определить обобщенные случайные величины со значениями в гильбертовом пространстве как линейные непрерывные операторы на этих пространствах со значениями в гильбертовом пространстве $\mathbb{H}$, следуя подходу к определению обобщенных функций со значениями в банаховом пространстве, использованному в работе [9]. Полученные таким образом пространства обобщенных $\mathbb{H}$-значных случайных величин имеют ту же линейную и топологическую структуру, что и пространства, построенные в [10], однако предлагаемый подход позволяет определить в гильбертовозначном случае S-преобразование, которое оказывается мощным инструментом исследования. С его помощью удается естественным образом определить произведение Уика и доказать связь между интегралом Ито и интегралом Хицуды—Скорохода от операторнозначных случайных величин и, таким образом, обосновать постановку стохастических дифференциальных уравнений в пространствах гильбертовозначных обобщенных случайных величин как обобщение соответствующих уравнений Ито. Все это позволило получить результат о существовании единственного решения задачи Коши для уравнения с мультипликативным шумом.

Дадим описание настоящей работы по разделам.

В разделе 1 рассмотрено определение и основные свойства пространств обобщенных $\mathbb{H}$-значных случайных величин $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$, где $\mathbb{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство, и даны определения $\mathbb{H}$-значного цилиндрического белого шума и Q-белого шума как $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$-значных процессов. В разделе 2 обсуждаются понятия непрерывности, дифференцируемости и интегрируемости $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$-значных функций.

В разделе 3 введено S-преобразование обобщенных $\mathbb{H}$-значных случайных величин, которое оказывается эффективным инструментом исследования линейных стохастических дифференциальных уравнений, и дана характеристическая теорема S-преобразований обобщенных $\mathbb{H}$-значных случайных величин. В разделе 4 с помощью S-преобразования определено произведение Уика операторнозначной и гильбертовозначной обобщенных случайных величин.

Раздел 5 посвящен понятию интеграла Хицуды—Скорохода от функции со значениями в пространстве операторнозначных обобщенных случайных величин. Показано (теорема 5.2), что этот интеграл можно считать обобщением интеграла Ито в бесконечномерном случае. Это оправдывает постановку стохастических дифференциальных уравнений в пространствах гильбертовозначных обобщенных случайных величин, которые рассмотрены далее в разделе 6.

В разделе 6 получен результат о существовании и единственности решения задачи Коши для линейного бесконечномерного стохастического дифференциального уравнения с аддитивным шумом и с мультипликативным шумом. Заметим, что условия, при которых получены эти результаты, не требуют предсказуемости или адаптированности начальных значений задачи Коши.

1. Обобщенные случайные величины

Вероятностное пространство белого шума играет фундаментальную роль в нашей конструкции пространств гильбертовозначных обобщенных случайных величин. Дадим его определение и рассмотрим его основные свойства.

Пусть $\mathcal{S}'$ — пространство медленно растущих распределений над пространством быстро убывающих основных функций $\mathcal{S}$. Пространство $\mathcal{S}$ является счетно-гильбертовым. Это означает, что

$$\mathcal{S} = \bigcap_{p\in\mathbb{N}} \mathcal{S}_p, \quad \text{где} \quad \mathcal{S}_p = \left\{\varphi \in L^2(\mathbb{R}) \mid (\varphi,\varphi)_p < \infty \right\}, \tag{1.1}$$

и скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_p$ определяется равенством

$$(\varphi,\psi)_p := (\hat{D}^p\varphi, \hat{D}^p\psi)_{L^2(\mathbb{R})}, \quad \text{где} \quad \hat{D} = -\frac{d^2}{dx^2} + x^2 + 1.$$

Обозначим через $|\cdot|_p$ норму, порожденную этим скалярным произведением. Из определения пространств $\mathcal{S}_p$ следует, что для любого p вложение $\mathcal{S}_{p+1} \hookrightarrow \mathcal{S}_p$ является ядерным оператором, т. е.

пространство $\mathcal{S}$ ядерное. В силу этого, по теореме Бохнера—Минлоса—Сазонова (см., например, [17, теорема 4.7]), существует единственная вероятностная мера μ, определенная на борелевской σ-алгебре $\mathcal{B}(\mathcal{S}')$ подмножеств $\mathcal{S}'$, удовлетворяющая условию

$$\int\limits_{\mathcal{S}'} e^{i\langle\omega,\theta\rangle} d\mu(\omega) = e^{-\frac{1}{2}|\theta|_0^2}, \quad \theta \in \mathcal{S}, \tag{1.2}$$

где $|\cdot|_0$ — норма пространства $L^2(\mathbb{R})$ (в дальнейшем через $(\cdot,\cdot)_0$ будем обозначать скалярное произведение в $L^2(\mathbb{R})$).

Мера μ называется нормализованной гауссовской мерой на $\mathcal{S}'$, т. к. для любых $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n \in \mathcal{S}$, ортогональных в $L^2(\mathbb{R})$, случайная величина $\omega \mapsto (\langle\omega,\theta_1\rangle, \langle\omega,\theta_2\rangle, \ldots, \langle\omega,\theta_n\rangle)$ является гауссовской с плотностью распределения

$$\frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod\limits_{i=1}^{n} |\theta_i|_0} \exp\Big(-\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{|\theta_i|_0^2}\Big).$$

Эквивалентно,

$$E\Big(f\big(\langle\cdot,\theta_1\rangle, \ldots, \langle\cdot,\theta_n\rangle\big)\Big) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \prod\limits_{i=1}^{n} |\theta_i|_0} \int\limits_{\mathbb{R}^n} f(x_1, \ldots, x_n) e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n} \frac{x_i^2}{|\theta_i|_0^2}} dx_1 \ldots dx_n \tag{1.3}$$

для любой $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, такой, что существует интеграл в правой части равенства.

Тройка $(\mathcal{S}', \mathcal{B}(\mathcal{S}'), \mu)$ называется вероятностным пространством белого шума.

Обозначим через (L^2) пространство $L^2(\mathcal{S}', \mu; \mathbb{R})$ всех $\mathbb{R}$-значных интегрируемых с квадратом по μ функций (случайных величин), определенных на $\mathcal{S}'$. Обозначим через $\|\cdot\|_0$ норму этого пространства. Из равенства (1.3) следует, что для любых $\theta, \eta \in \mathcal{S}$ выполняются следующие равенства:

$$\big(\langle\cdot,\theta\rangle, \langle\cdot,\eta\rangle\big)_{(L^2)} = E\Big(\langle\cdot,\theta\rangle\langle\cdot,\eta\rangle\Big) = (\theta,\eta)_0, \quad \|\langle\cdot,\theta\rangle\|_0^2 = E\langle\cdot,\theta\rangle^2 = |\theta|_0^2. \tag{1.4}$$

Отсюда следует, что отображение $\theta \mapsto \langle\cdot,\theta\rangle$ можно по непрерывности продолжить с $\mathcal{S}$ на $L^2(\mathbb{R})$. Таким образом, случайная величина $\langle\cdot,\theta\rangle$ определена как элемент пространства (L^2) для любого $\theta \in L^2(\mathbb{R})$. Равенство (1.2) остается верным для $\theta \in L^2(\mathbb{R})$, а равенство (1.3) остается верным для $\theta_1, \ldots, \theta_n \in L^2(\mathbb{R})$. В частности, для любого $t \geqslant 0$ случайная величина

$$B(t) := \langle\cdot, 1_{[0;t]}\rangle \tag{1.5}$$

определена как элемент пространства (L^2). Она является гауссовской с равным нулю математическим ожиданием, а из равенства (1.4) следует, что

$$E\big[B(t)B(s)\big] = (1_{[0;t]}, 1_{[0;s]})_0 = \min\{t,s\}, \quad E\big[B^2(t)\big] = |1_{[0;t]}|_0^2 = t.$$

Более того, при $0 \leqslant s < t$ имеет место равенство

$$E\big[(B(t) - B(s))^4\big] = E\big[\langle\cdot, 1_{(s,t]}\rangle^4\big] = \frac{1}{\sqrt{2\pi(t-s)}} \int\limits_{\mathbb{R}} x^4 e^{-\frac{x^2}{2(t-s)}} dx = 3(t-s)^2.$$

Отсюда по теореме Колмогорова о непрерывности (см. [34]) следует, что $B(t)$ имеет непрерывную версию, которая является броуновским движением. Будем далее обозначать ее тем же символом.

Как это обычно делается в теории обобщенных функций, запишем неформально правую часть равенства (1.5) в виде интеграла: $\langle\omega, 1_{[0;t]}\rangle = \int\limits_0^t \omega(s)\,ds$ для любого $\omega \in \mathcal{S}'$. Таким образом, получим

$$B(t) = \int\limits_0^t \omega(s)\,ds. \tag{1.6}$$

Равенство (1.6) означает, что элементы пространства $\mathcal{S}'$, являющиеся элементарными исходами, в рамках аппарата вероятностного пространства белого шума можно представлять себе как траектории белого шума, который является производной броуновского движения.

1.1. Пространства обобщенных случайных величин: $(\mathcal{S})_{-\rho}$. Пусть $\{\xi_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис пространства $L^2(\mathbb{R})$, состоящий из функций Эрмита

$$\xi_k(x) = \pi^{-\frac{1}{4}}\big((k-1)!\big)^{-\frac{1}{2}}\ e^{-\frac{x^2}{2}} h_{k-1}(x),$$

где $\{h_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ — полиномы Эрмита

$$h_k(x) = (-1)^n e^{\frac{x^2}{2}} \frac{d^k}{dx^k}\, e^{-\frac{x^2}{2}}.$$

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими известными оценками функций Эрмита (см. [14]):

$$\int\limits_0^t \xi_i(s)\,ds = O(i^{-\frac{3}{4}}), \tag{1.7}$$

$$\xi_i(t) = O\big(i^{-\frac{1}{4}}\big), \tag{1.8}$$

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\xi_i(t)| = O(i^{-\frac{1}{12}}). \tag{1.9}$$

Пусть $\mathcal{T} \subset \big(\mathbb{N}\cup\{0\}\big)^{\mathbb{N}}$ — множество всех финитных мультииндексов. Стохастические полиномы Эрмита определяются следующими равенствами:

$$\mathbf{h}_\alpha(\omega) := \prod_k h_{\alpha_k}\big(\langle\omega,\,\xi_k\rangle\big), \quad \omega\in\mathcal{S}', \alpha\in\mathcal{T}.$$

Произведение здесь, на самом деле, является конечным, так как каждый мультииндекс α финитный и, значит, $h_{\alpha_k}(x) = h_0(x) = 1$ для всех достаточно больших k.

Пусть $\alpha,\beta\in\mathcal{T}$ и $n = \max\{k\in\mathbb{N}\,|\,\alpha_k\neq 0$ или $\beta_k \neq 0\}$. Из равенства (1.3) и ортогональности полиномов Эрмита в пространстве $L^2\left(\mathbb{R};\, \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}\,dx\right)$ следует

$$\begin{aligned}
(\mathbf{h}_\alpha,\,\mathbf{h}_\beta)_{(L^2)} &= E\left[\prod_{k=1}^n h_{\alpha_k}\big(\langle\omega,\xi_k\rangle\big)\prod_{k=1}^n h_{\beta_k}\big(\langle\omega,\xi_k\rangle\big)\right] = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}\prod\limits_{i=1}^n |\xi_i|_0}\int\limits_{\mathbb{R}^n}\prod_{k=1}^n h_{\alpha_k}(x_k)\prod_{k=1}^n h_{\beta_k}(x_k) e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{k=1}^n \frac{x_k^2}{|\xi_k|_0^2}}\,dx_1\ldots dx_n = \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}}}\prod_{k=1}^n\int\limits_{\mathbb{R}} h_{\alpha_k}(x_k)h_{\beta_k}(x_k)e^{-\frac{1}{2}x_k^2}dx_k = \begin{cases}0, & \alpha\neq\beta,\\ \alpha!, & \alpha=\beta,\end{cases} \qquad \alpha! := \prod_k \alpha_k!.
\end{aligned} \tag{1.10}$$

Таким образом, стохастические полиномы Эрмита образуют ортогональную систему в пространстве (L^2). Более того, $\{\mathbf{h}_\alpha\,|\,\alpha\in\mathcal{T}\}$ — ортогональный базис пространства (L^2) (см. [15, теорема 2.2.3]). Из этого факта и равенства (1.10) следует, что для скалярного произведения и нормы в (L^2) выполняются следующие равенства:

$$(\Phi,\Psi)_{(L^2)} = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} \alpha!\Phi_\alpha\overline{\Psi}_\alpha, \quad \|\Phi\|^2_{(L^2)} = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}}\alpha!\Phi_\alpha^2,$$

где

$$\Phi = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}}\Phi_\alpha\mathbf{h}_\alpha, \quad \Psi = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}}\Psi_\alpha\mathbf{h}_\alpha, \quad \Phi_\alpha = \frac{1}{\alpha!}(\Phi,\mathbf{h}_\alpha)_{(L^2)}, \quad \Psi_\alpha = \frac{1}{\alpha!}(\Psi,\mathbf{h}_\alpha)_{(L^2)}.$$

В силу равенства (1.10) можно неформально представлять себе пространство (L^2) как

$$L^2\left(\mathbb{R}^\infty;\,\prod_{k=1}^\infty \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x_k^2}{2}}\,dx_k\right),$$

отождествляя любой элемент $\omega\in\mathcal{S}'$ с последовательностью его «коэффициентов Фурье» $\langle\omega,\xi_k\rangle$ по системе функций Эрмита. Таким образом, интегрируемые с квадратом случайные величины на вероятностном пространстве белого шума $(\mathcal{S}',\mathcal{B}(\mathcal{S}'),\mu)$ можно считать функциями бесконечного множества действительных переменных. Эта линейная структура области определения случайных величин приводит к обобщению на бесконечномерный случай теории распределений Шварца, при этом пространство (L^2) играет ту же роль, что $L^2(\mathbb{R})$ в тройке

$$\mathcal{S} \subset L^2(\mathbb{R}) \subset \mathcal{S}'.$$

В результате появляется тройка Гельфанда

$$(\mathcal{S})_\rho \subset (L^2) \subset (\mathcal{S})_{-\rho}, \tag{1.11}$$

где $\rho \in [0;1]$ фиксировано. Тройка (1.11) была впервые введена в работе [20] и используется в [15, 21] и других работах. Рассмотрим ее построение подробнее.

Напомним, что благодаря тому, что функции Эрмита ξ_i являются собственными функциями дифференциального оператора $\hat{D} = -\dfrac{d^2}{dx^2} + x^2 + 1$, для которых выполняются равенства $\hat{D}\xi_i = (2i)\xi_i$, $i \in \mathbb{N}$, пространства $\mathcal{S}_p$, определенные равенствами (1.1), можно описать в терминах разложений по функциям Эрмита следующим образом:

$$\mathcal{S}_p = \left\{ \varphi = \sum_{i=1}^{\infty} \varphi_i \xi_i \in L^2(\mathbb{R}) \;\middle|\; (\varphi, \varphi)_p = \sum_{i=1}^{\infty} |\varphi_i|^2 (2i)^{2p} < \infty \right\}.$$

Пространства $(\mathcal{S}_p)_\rho$ определяются по аналогии с $\mathcal{S}_p$:

$$(\mathcal{S}_p)_\rho = \Big\{ \varphi = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} \varphi_\alpha \mathbf{h}_\alpha \in (L^2) : \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} (\alpha!)^{1+\rho} |\varphi_\alpha|^2 (2\mathbb{N})^{2p\alpha} < \infty \Big\},$$

с нормами $|\cdot|_{p,\rho}$, порожденными скалярными произведениями

$$(\varphi, \psi)_{p,\rho} = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} (\alpha!)^{1+\rho} \varphi_\alpha \overline{\psi}_\alpha (2\mathbb{N})^{2p\alpha}, \quad (2\mathbb{N})^{p\alpha} := \prod_{i \in \mathbb{N}} (2i)^{p\alpha_i}.$$

Чтобы прояснить эту аналогию, заметим, что другой способ определить скалярное произведение $(\cdot,\cdot)_{p,\rho}$ при $\rho = 0$ — сделать это в терминах так называемого оператора вторичного квантования $\Gamma(\hat{D})$, который обычно определяется через отождествление пространства (L^2) с пространством Фока $\bigoplus\limits_{n=0}^{\infty} \hat{L}^2(\mathbb{R}^n)$ с помощью разложения хаоса Винера—Ито (см., например, [21]). Для упрощения изложения определим его эквивалентным образом, положив для любого $\alpha \in \mathcal{T}$

$$\Gamma(\hat{D})\mathbf{h}_\alpha := \prod_{i=1}^{\infty} (2i)^{\alpha_i} h_{\alpha_i}\big(\langle \cdot, \xi_i \rangle\big).$$

Тогда

$$(\varphi, \psi)_{p,0} = \Big(\Gamma(\hat{D})^p \varphi, \Gamma(\hat{D})^p \psi \Big)_{(L^2)}.$$

Пространство $(\mathcal{S})_\rho$ определяется как $(\mathcal{S})_\rho = \bigcap\limits_{p \in \mathbb{N}} (\mathcal{S}_p)_\rho$ с топологией проективного предела и называется пространством основных случайных переменных.

Пространство $(\mathcal{S})_{-\rho}$ определяется как $(\mathcal{S})_{-\rho} = \bigcup\limits_{p \in \mathbb{N}} (\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}$ с топологией индуктивного предела, где $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}$ — сопряженное к пространству $(\mathcal{S}_p)_\rho$. Элементы $(\mathcal{S})_{-\rho}$ называются обобщенными случайными величинами. Пространство $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}$ можно отождествить с гильбертовым пространством всех формальных разложений $\Phi = \sum\limits_{\alpha \in \mathcal{T}} \Phi_\alpha \mathbf{h}_\alpha$, удовлетворяющих условию

$$\sum_{\alpha \in \mathcal{T}} (\alpha!)^{1-\rho} |\Phi_\alpha|^2 (2\mathbb{N})^{-2p\alpha} < \infty,$$

со скалярным произведением

$$(\Phi, \Psi)_{-p,-\rho} = \sum_{\alpha \in \mathcal{T}} (\alpha!)^{1-\rho} \Phi_\alpha \overline{\Psi}_\alpha (2\mathbb{N})^{-2p\alpha}.$$

Будем обозначать норму пространства $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}$ через $|\cdot|_{-p,-\rho}$. Для $\Phi = \sum\limits_{\alpha\in\mathcal{T}} \Phi_\alpha \mathbf{h}_\alpha \in (\mathcal{S})_{-\rho}$, $\varphi = \sum\limits_{\alpha\in\mathcal{T}} \varphi_\alpha \mathbf{h}_\alpha \in (\mathcal{S})_\rho$ имеем:

$$\langle \Phi, \varphi\rangle = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} \alpha! \Phi_\alpha \overline{\varphi}_\alpha.$$

В дальнейшем важную роль играет понятие ограниченного множества в пространстве $(\mathcal{S})_\rho$.

Определение 1.1. Множество $M \subseteq (\mathcal{S})_\rho$ называется *ограниченным*, если для любой последовательности $\{\varphi_n\} \subseteq M$ и любой последовательности $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}$, сходящейся к нулю, последовательность $\{\varepsilon_n \varphi_n\}$ сходится к нулю в $(\mathcal{S})_\rho$.

Нетрудно получить следующую характеристику ограниченных множеств в $(\mathcal{S})_\rho$.

Предложение 1.1. *Множество ограничено в $(\mathcal{S})_\rho$ тогда и только тогда, когда оно ограничено в любом $(\mathcal{S}_p)_\rho$, $p \in \mathbb{N}$.*

1.2. Пространства гильбертовозначных обобщенных случайных величин: $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$**.** Пусть $\mathbb{H}$ — сепарабельное комплексное гильбертово пространство со скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$ и соответствующей нормой $\|\cdot\|$. Через $(L^2)(\mathbb{H})$ будем обозначать пространство всех $\mathbb{H}$-значных функций, определенных на $\mathcal{S}'$, интегрируемых с квадратом по Бохнеру по гауссовской мере μ, определенной на $\mathcal{B}(\mathcal{S}')$.

Пусть $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ — ортонормированный базис в $\mathbb{H}$. Тогда семейство $\{\mathbf{h}_\alpha e_j\}_{\alpha\in\mathcal{T},j\in\mathbb{N}}$ $\mathbb{H}$-значных функций образует ортогональный базис пространства $(L^2)(\mathbb{H})$. Любая функция $f \in (L^2)(\mathbb{H})$ раскладывается в ряд Фурье по этому базису следующим образом:

$$f = \sum_{\alpha\in\mathcal{T},j\in\mathbb{N}} f_{\alpha,j}\mathbf{h}_\alpha e_j = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} f_\alpha \mathbf{h}_\alpha = \sum_{j=1}^\infty f_j e_j, \tag{1.12}$$

$$f_{\alpha,j} \in \mathbb{R},\ f_\alpha = \sum_j f_{\alpha,j} e_j \in \mathbb{H},\ f_j = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} f_{\alpha,j}\mathbf{h}_\alpha \in (L^2),$$

при этом

$$\|f\|^2_{(L^2)(\mathbb{H})} = \sum_{\alpha\in\mathcal{T},j\in\mathbb{N}} \alpha! |f_{\alpha,j}|^2 = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} \alpha! \|f_\alpha\|^2_{\mathbb{H}} = \sum_{j=1}^\infty \|f_j\|^2_{(L^2)}.$$

Обозначим через $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ пространство всех линейных непрерывных операторов $\Phi : (\mathcal{S})_\rho \to \mathbb{H}$, оснащенное топологией равномерной сходимости на ограниченных подмножествах пространства $(\mathcal{S})_\rho$. Будем называть эту сходимость сильной сходимостью в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ а элементы этого пространства называть $\mathbb{H}$-значными обобщенными случайными величинами над пространством основных функций (случайных величин) $(\mathcal{S})_\rho$. Действие $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ на основную случайную величину $\varphi \in (\mathcal{S})_\rho$ будем обозначать через $\Phi[\varphi]$.

Для построения анализа $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$-значных функций переменной $t \in \mathbb{R}$ сначала опишем структуру этого пространства.

Предложение 1.2. *Любой элемент $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ является ограниченным оператором из $(\mathcal{S}_p)_\rho$ в $\mathbb{H}$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$.*

Доказательство. Предположим противное. Пусть $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$. Для любого $p \in \mathbb{N}$ выберем $\varphi_p \in (\mathcal{S}_p)_\rho$ так, что $|\varphi_p|_{p,\rho} = 1$ и $\|\Phi[\varphi_p]\| \geqslant p$. В силу неравенств $|\varphi_k|_{p,\rho} \leqslant |\varphi_k|_{k,\rho}$, которые верны для всех $k > p$, последовательность $\left\{\dfrac{\varphi_k}{k}\right\}$ сходится к нулю в пространстве $(\mathcal{S})_\rho$. В то же время, имеем $\left\|\Phi\left[\dfrac{\varphi_k}{k}\right]\right\| \geqslant 1$, что противоречит непрерывности Φ. □

Пространство основных функций $(\mathcal{S})_\rho$ является счетно-гильбертовым ядерным пространством, так как для любого $p \in \mathbb{N}$ оператор вложения $I_{p,p+1} : (\mathcal{S}_{p+1})_\rho \hookrightarrow (\mathcal{S}_p)_\rho$ является оператором Гильберта—Шмидта. Чтобы проверить это, возьмем следующий ортонормированный базис пространства $(\mathcal{S}_{p+1})_\rho$:

$$\left\{\frac{\mathbf{h}_\alpha}{(\alpha!)^{\frac{1+\rho}{2}}(2\mathbb{N})^{(p+1)\alpha}}\right\}.$$

Имеем:

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{T}}\left|\frac{\mathbf{h}_\alpha}{(\alpha!)^{\frac{1+\rho}{2}}(2\mathbb{N})^{(p+1)\alpha}}\right|^2_{p,\rho}=\sum_{\alpha\in\mathcal{T}}\frac{1}{(2\mathbb{N})^{2\alpha}}. \tag{1.13}$$

В [15] доказано, что $A(p):=\sum\limits_{\alpha\in\mathcal{T}}\frac{1}{(2\mathbb{N})^{p\alpha}}$ сходится для любого $p>1$. Таким образом, ряд (1.13) сходится.

Благодаря ядерности пространства $(\mathcal{S})_\rho$ имеет место следующая характеристика обобщенных $\mathbb{H}$-значных случайных величин.

Предложение 1.3. *Любой элемент $\Phi\in(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ является оператором Гильберта—Шмидта из $(\mathcal{S}_p)_\rho$ в $\mathbb{H}$ для некоторого $p\in\mathbb{N}$.*

Доказательство. Пусть $\Phi\in(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$. В силу предложения 1.2 элемент Φ ограничен как оператор, действующий из $(\mathcal{S}_p)_\rho$ в $\mathbb{H}$ для некоторого $p\in\mathbb{N}$. Обозначим через $\tilde{\Phi}$ его продолжение на $(\mathcal{S}_p)_\rho$ по непрерывности. Тогда оператор Φ может быть записан в виде $\tilde{\Phi}I_{p,p+1}$ как оператор, действующий из $(\mathcal{S}_{p+1})_\rho$ в $\mathbb{H}$, а значит, является оператором Гильберта—Шмидта как композиция оператора Гильберта—Шмидта $I_{p,p+1}$ и ограниченного оператора $\tilde{\Phi}$. □

Далее в разделе 2 для исследования топологии равномерной сходимости на ограниченных подмножествах пространства $(\mathcal{S})_\rho$, которую мы ввели в пространстве $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$, нам понадобится представление этого пространства в виде счетного объединения сепарабельных гильбертовых пространств.

Для любого $\Phi\in(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ обозначим через Φ_j линейный функционал, определенный для $\varphi\in(\mathcal{S})_\rho$ равенством $\langle\Phi_j,\varphi\rangle:=(\Phi[\varphi],e_j)$. Пусть p таково, что Φ является оператором Гильберта—Шмидта из $(\mathcal{S}_p)_\rho$ в $\mathbb{H}$. Тогда все Φ_j, $j\in\mathbb{N}$ принадлежат одному и тому же сопряженному пространству $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}$ и поэтому раскладываются в ряды

$$\Phi_j=\sum_{\alpha\in\mathcal{T}}\Phi_{\alpha,j}\mathbf{h}_\alpha,\quad \sum_{\alpha\in\mathcal{T}}(\alpha!)^{1-\rho}|\Phi_{\alpha,j}|^2(2\mathbb{N})^{-2p\alpha}<\infty.$$

Обозначим через $\|\Phi\|_{-p,-\rho}$ норму Гильберта—Шмидта $\Phi:(\mathcal{S}_p)_\rho\to\mathbb{H}$. Имеем:

$$\begin{aligned}\|\Phi\|^2_{-p,-\rho}&=\sum_{\alpha\in\mathcal{T}}\left\|\Phi\left[\frac{\mathbf{h}_\alpha}{(\alpha!)^{\frac{1+\rho}{2}}(2\mathbb{N})^{p\alpha}}\right]\right\|^2=\sum_{\alpha\in\mathcal{T}}\sum_{j=1}^{\infty}\left|\left\langle\Phi_j,\frac{\mathbf{h}_\alpha}{(\alpha!)^{\frac{1+\rho}{2}}(2\mathbb{N})^{p\alpha}}\right\rangle\right|^2=\\&=\sum_{\alpha\in\mathcal{T},j\in\mathbb{N}}(\alpha!)^{1-\rho}|\Phi_{\alpha,j}|^2(2\mathbb{N})^{-2p\alpha}.\end{aligned}\tag{1.14}$$

Обозначим через $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$ пространство операторов Гильберта—Шмидта, действующих из $(\mathcal{S}_p)_\rho$ в $\mathbb{H}$. Это сепарабельное гильбертово пространство. Операторы $\mathbf{h}_\alpha\otimes e_j$, $\alpha\in\mathcal{T}$, $j\in\mathbb{N}$, определенные равенством

$$(\mathbf{h}_\alpha\otimes e_j)\varphi:=\big(\mathbf{h}_\alpha,\varphi\big)_{(L^2)}e_j,\quad \varphi\in(\mathcal{S}_p)_\rho,$$

образуют в нем ортогональный базис. Из предложения 1.3 следует, что

$$(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})=\bigcup_{p\in\mathbb{N}}(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$$

и любой $\Phi\in(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ имеет следующее разложение:

$$\Phi[\cdot]=\sum_{j\in\mathbb{N}}\langle\Phi_j,\cdot\rangle e_j=\sum_{\alpha\in\mathcal{T},j\in\mathbb{N}}\Phi_{\alpha,j}(\mathbf{h}_\alpha\otimes e_j)=\sum_{\alpha\in\mathcal{T}}\Phi_\alpha(\mathbf{h}_\alpha,\cdot)_{(L^2)},$$

где $\Phi_j=(\Phi[\cdot],e_j)\in(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}$ для некоторого $p\in\mathbb{N}$, $\Phi_\alpha=\sum\limits_{j\in\mathbb{N}}\Phi_{\alpha,j}e_j\in\mathbb{H}$, при этом

$$\begin{aligned}\|\Phi\|^2_{-p,-\rho}&=\sum_{j\in\mathbb{N}}|\Phi_j|^2_{-p,-\rho}=\sum_{\alpha\in\mathcal{T},j\in\mathbb{N}}(\alpha!)^{1-\rho}|\Phi_{\alpha,j}|^2(2\mathbb{N})^{-2p\alpha}=\\&=\sum_{\alpha\in\mathcal{T}}(\alpha!)^{1-\rho}\|\Phi_\alpha\|^2(2\mathbb{N})^{-2p\alpha}<\infty.\end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$(\mathcal{S}_{-p_1})_{-\rho}(\mathbb{H}) \subseteq (\mathcal{S}_{-p_2})_{-\rho}(\mathbb{H}), \quad p_1 < p_2, \tag{1.15}$$

и

$$\|\Phi\|_{-p_1,-\rho} \geqslant \|\Phi\|_{-p_2,-\rho}, \quad \Phi \in (\mathcal{S}_{-p_1})_{-\rho}(\mathbb{H}). \tag{1.16}$$

1.3. Основные примеры гильбертовозначных обобщенных случайных процессов. Сначала введем последовательность независимых одинаково распределенных броуновских движений на вероятностном пространстве белого шума.

Для этого возьмем некоторую биекцию $n(\cdot,\cdot) : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, удовлетворяющую условию

$$n(i,j) \geqslant ij, \quad i,j \in \mathbb{N}. \tag{1.17}$$

Это может быть сделано разными способами, например, с помощью следующей таблицы:

i \ j	1	2	3	4	5	6	7	$\dots$
1	1	3	6	10	15	21	28	$\dots$
2	2	5	9	14	20	27		
3	4	8	13	19	26			
4	7	12	18	25				
5	11	17	24					$n(i,j)$.
6	16	23						
7	22							
	$\dots$							

Определим последовательность линейных операторов $\mathfrak{I}_j$, $j \in \mathbb{N}$, в пространстве $L_2(\mathbb{R})$, положив

$$\mathfrak{I}_j f = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \xi_i) \xi_{n(i,j)}. \tag{1.18}$$

Пусть $L^2(\mathbb{R})_j$ — замыкание линейной оболочки множества $\{\xi_{n(i,j)}, i \in \mathbb{N}\}$. Для любого $j \in \mathbb{N}$ оператор $\mathfrak{I}_j$ является изометрическим изоморфизмом пространств $L^2(\mathbb{R})$ и $L^2(\mathbb{R})_j$, так как для любых $f, g \in L^2(\mathbb{R})$ имеем

$$(\mathfrak{I}_j f, \mathfrak{I}_j g)_{L^2(\mathbb{R})_j} = \sum_{i=1}^{\infty} (f, \xi_i)(g, \xi_i) = (f, g)_0. \tag{1.19}$$

Пространства $L^2(\mathbb{R})_j$ с разными индексами j порождаются непересекающимися семействами функций ξ_i, поэтому они являются попарно ортогональными подпространствами $L^2(\mathbb{R})$. Более того, $\{\xi_i\}_{i=1}^{\infty} = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \{\xi_{n(i,j)}\}_{i=1}^{\infty}$, откуда следует

$$L^2(\mathbb{R}) = \bigoplus_{j=1}^{\infty} L^2(\mathbb{R})_j.$$

В последствии нам потребуются ортогональные проекторы π_j, $j \in \mathbb{N}$, пространства $L_2(\mathbb{R})$ на $L_2(\mathbb{R})_j$, определенные равенствами

$$\pi_j \xi_n = \begin{cases} \xi_n, & n \in \{n(i,j), i \in \mathbb{N}\}, \\ 0, & n \notin \{n(i,j), i \in \mathbb{N}\}. \end{cases} \tag{1.20}$$

Положим $1^j_{[a,b]} := \mathfrak{I}_j 1_{[a,b]}$, где $1_{[a,b]}$ — индикатор отрезка $[a,b]$. Для любых $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ функции $1^{j_1}_{[a,b]}$ и $1^{j_2}_{[c,d]}$, где $j_1 \neq j_2$, ортогональны в $L^2(\mathbb{R})$.

Рассмотрим случайные процессы, определенные равенствами

$$\beta_j(t) := \langle \cdot, 1^j_{[0,t]} \rangle, \quad j = 1, 2, \dots, \ t \in \mathbb{R}. \tag{1.21}$$

В силу (1.4) и (1.19) имеем:

$$E\left[\beta_j(t)\beta_j(s)\right] = (1^j_{[0,t]}, 1^j_{[0,s]})_0 = (1^j_{[0,t]}, 1^j_{[0,s]})_{L^2(\mathbb{R})_j} = (1_{[0,t]}, 1_{[0,s]})_0 = \min\{t; s\},$$

кроме того,

$$E\left[\beta_{j_1}(t)\beta_{j_2}(s)\right] = (1^{j_1}_{[0,t]}, 1^{j_2}_{[0,s]})_0 = 0$$

при $j_1 \neq j_2$. Отсюда следует, что $\{\beta_j(t)\}_{j=1}^\infty$ — последовательность независимых броуновских движений.

Для них имеют место разложения

$$\beta_j(t) = \left\langle \cdot, \sum_{i=1}^\infty \int_0^t \xi_i(s)\, ds\, \xi_{n(i,j)} \right\rangle = \sum_{i=1}^\infty \int_0^t \xi_i(s)\, ds \,\langle \cdot, \xi_{n(i,j)}\rangle = \\ = \sum_{i=1}^\infty \int_0^t \xi_i(s)\, ds\, \mathbf{h}_{\varepsilon_{n(i,j)}},$$

где $\varepsilon_n := (0, 0, \ldots, \underset{n}{1}, 0, \ldots)$.

Случайный процесс, определенный формальным рядом

$$W(t) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \beta_j(t) e_j = \sum_{n\in\mathbb{N}} W_{\varepsilon_n}(t)\, \mathbf{h}_{\varepsilon_n}, \quad W_{\varepsilon_n}(t) := \int_0^t \xi_{i(n)}(s)\, ds\, e_{j(n)} \in \mathbb{H}, \tag{1.22}$$

где $i(n)$, $j(n) \in \mathbb{N}$ таковы, что $n(i(n), j(n)) = n$, и $t \in \mathbb{R}$, называется цилиндрическим винеровским процессом.

Пусть $Q \in \mathcal{L}_1(\mathbb{H}; \mathbb{H})$ — положительный оператор[1], определенный следующим разложением[2]:

$$Q = \sum_{j=1}^\infty \sigma_j^2 (e_j \otimes e_j). \tag{1.23}$$

Конечность следа Q означает $\sum\limits_{j=1}^\infty \sigma_j^2 < \infty$.

Случайный процесс, определенный равенством

$$W_Q(t) = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sigma_j \beta_j(t) e_j = \sum_{n\in\mathbb{N}} W^Q_{\varepsilon_n}(t)\, \mathbf{h}_{\varepsilon_n}, \quad W^Q_{\varepsilon_n}(t) := \sigma_j \int_0^t \xi_{i(n)}(s)\, ds\, e_{j(n)} \in \mathbb{H},\ t \in \mathbb{R}, \tag{1.24}$$

называется Q-винеровским процессом.

Легко проверить, что $W_Q(t) \in (L^2)(\mathbb{H})$, но $W(t) \notin (L^2)(\mathbb{H})$ для всех $t \in \mathbb{R}$. В то же время, для любого $x \in \mathbb{H}$ имеем:

$$E\big(W(t), x\big)^2 = \sum_{j\in\mathbb{N}} (e_j, x)^2 E\big[\beta_j^2(t)\big] = t\|x\|^2.$$

Таким образом, $\big(W(t), x\big) \in L^2(\mathcal{S}', \mathcal{B}(\mathcal{S}'), \mu)$. Из оценки (1.7) и условия (1.17), следует, что

$$\|W(t)\|^2_{-1,-\rho} = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \left| \int_0^t \xi_i(s)\, ds \right|^2 \big(2n(i,j)\big)^{-2} \leqslant \sum_{i,j\in\mathbb{N}} O\left(i^{-\frac{3}{2}-2} j^{-2}\right) < \infty.$$

Поэтому $W(t) \in (\mathcal{S}_{-1})_{-\rho}(\mathbb{H}) \subset (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ для любого $0 \leqslant \rho \leqslant 1$.

Определим $\mathbb{H}$-значный Q-белый шум равенством

$$\mathbb{W}_Q(t) := \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \sigma_j \xi_i(t)\, \mathbf{h}_{\varepsilon_{n(i,j)}} e_j = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{W}^Q_{\varepsilon_n}(t)\, \mathbf{h}_{\varepsilon_n}, \quad \mathbb{W}^Q_{\varepsilon_n}(t) = \sigma_j \xi_{i(n)}(t)\, e_{j(n)} \in \mathbb{H},$$

[1] Через $\mathcal{L}_1(\mathbb{H}; \mathbb{H})$ обозначаем пространство операторов с конечным следом, действующих из $\mathbb{H}$ в $\mathbb{H}$.

[2] Для $v \in V$, $u \in U$, где V и U — гильбертовы пространства, обозначим через $v \otimes u$ оператор, действующий из U в V, определенный равенством $(v \otimes u)h := v(u, h)_U$.

полученным формальным дифференцированием равенства (1.24), и цилиндрический белый шум — равенством

$$\mathbb{W}(t) := \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \xi_i(t)\,\mathbf{h}_{\varepsilon_{n(i,j)}} e_j = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mathbb{W}_{\varepsilon_n}(t)\,\mathbf{h}_{\varepsilon_n}, \quad \mathbb{W}_{\varepsilon_n}(t) = \xi_{i(n)}(t)\,e_{j(n)} \in \mathbb{H}, \tag{1.25}$$

полученным формальным дифференцированием равенства (1.22). В силу оценки (1.8) имеем $\|\mathbb{W}_Q(t)\|^2_{-1,-\rho} < \infty$, и $\|\mathbb{W}(t)\|^2_{-1,-\rho} < \infty$. Таким образом, и Q-белый шум и цилиндрический белый шум принадлежат $(\mathcal{S}_{-1})_{-\rho}(\mathbb{H}) \subset (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$, $\rho \in [0;1]$.

В следующем разделе мы определим дифференцирование и интегрирование по переменной $t \in \mathbb{R}$ для $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$-значных функций и покажем, что для всех $t \in \mathbb{R}$ выполнены равенства

$$\frac{d}{dt}W_Q(t) = \mathbb{W}_Q(t) \quad \text{и} \quad \frac{d}{dt}W(t) = \mathbb{W}(t).$$

2. Анализ $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$-значных функций

Чтобы ввести дифференцирование и интегрирование $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$-значных функций переменной $t \in \mathbb{R}$, сначала опишем более детально топологию в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$, определенную как топология равномерной сходимости на ограниченных подмножествах пространства $(\mathcal{S})_\rho$. Для этого нам понадобится понятие ограниченности множества в пространстве $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$, которое определяется так же, как и в $(\mathcal{S})_\rho$.

Определение 2.1. Множество $\mathcal{M} \subseteq (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ называется *ограниченным*, если для любых последовательностей $\{\Phi_n\} \subseteq \mathcal{M}$ и $\{\varepsilon_n\} \subset \mathbb{R}$ сходимость $\varepsilon_n \to 0$ влечет за собой сходимость $\{\varepsilon_n\Phi_n\}$ к нулю в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$.

Следующее предложение дает характеристику ограниченных множеств в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$.

Предложение 2.1. *Множество $\mathcal{M}$ ограничено в пространстве $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ тогда и только тогда, когда для любого ограниченного множества $M \subset (\mathcal{S})_\rho$*

$$\{\Phi[\varphi] \mid \Phi \in \mathcal{M}, \varphi \in M\}$$

является ограниченным множеством в $\mathbb{H}$.

Доказательство. Чтобы доказать необходимость условия, возьмем некоторое ограниченное подмножество $\mathcal{M}$ пространства $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$. Предположим, существует ограниченное $M \subset (\mathcal{S})_\rho$ такое, что для любого $n \in \mathbb{N}$ существуют $\varphi_n \in M$ и $\Phi_n \in \mathcal{M}$, для которых $\|\Phi_n[\varphi_n]\| > n$. Тогда $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}} \left\|\dfrac{1}{n}\Phi_n[\varphi_k]\right\| \geqslant \left\|\dfrac{1}{n}\Phi_n[\varphi_n]\right\| > 1$ и, следовательно, $\left\{\dfrac{1}{n}\Phi_n\right\}$ не сходится к нулю равномерно на ограниченном множестве $\{\varphi_k, k \in \mathbb{N}\} \subseteq M$. Таким образом, $\left\{\dfrac{1}{n}\Phi_n\right\}$ не сходится к нулю в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$.

Достаточность условия очевидна. □

Предложение 2.2. *Множество $\mathcal{M} \subset (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ ограничено тогда и только тогда, когда существуют такие $p \in \mathbb{N}$ и $K > 0$, что для любого $\Phi \in \mathcal{M}$ неравенство $\|\Phi[\varphi]\| \leqslant K|\varphi|_{p,\rho}$ выполняется для всех $\varphi \in (\mathcal{S})_\rho$.*

Доказательство. Сначала докажем необходимость этого условия. Предположим, что для любого $p \in \mathbb{N}$ существуют $\Phi_p \in \mathcal{M}$ и $\varphi_p \in M$ такие, что $\|\Phi_p[\varphi_p]\| > p|\varphi_p|_{p,\rho}$. Обозначим

$$\psi_n := \frac{\varphi_n}{|\varphi_n|_{n,\rho}}.$$

Множество $M = \{\psi_n \,|\, n \in \mathbb{N}\}$ ограничено в $(\mathcal{S})_\rho$, так как для любого $p \in \mathbb{N}$ выполнено $|\psi_n|_{p,\rho} = \dfrac{|\varphi_n|_{p,\rho}}{|\varphi_n|_{n,\rho}} \leqslant 1$ при $n > p$. В силу предложения 2.1 множество $\{\Phi[\varphi] \mid \Phi \in \mathcal{M}, \varphi \in M\}$ ограничено в $\mathbb{H}$, что противоречит неравенству $\|\Phi\,[\psi_n]\| > n$.

Для доказательства достаточности возьмем p и $K > 0$ так, что для любых $\Phi \in \mathcal{M}$ и $\varphi \in (\mathcal{S})_\rho$ выполнено

$$\|\Phi[\varphi]\| \leqslant K|\varphi|_{p,\rho}. \tag{2.1}$$

Возьмем ограниченное множество $M \subset (\mathcal{S})_\rho$. Поскольку в силу предложения 1.1 оно ограничено в любом $(\mathcal{S}_p)_\rho$, из (2.1) следует, что множество $\{\Phi[\varphi] \mid \Phi \in \mathcal{M}, \varphi \in M\}$ ограничено в $\mathbb{H}$. Доказательство завершается применением предложения 2.1. □

Отсюда следует:

Предложение 2.3. *Множество $\mathcal{M}$ ограничено в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ тогда и только тогда, когда $\mathcal{M} \subset (\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$ и $\mathcal{M}$ ограничено в $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$.*

Доказательство. Пусть $\mathcal{M}$ ограничено в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$. В силу предложения 2.2 любой $\Phi \in \mathcal{M}$ ограничен как оператор, действующий из $(\mathcal{S}_p)_\rho$ в $\mathbb{H}$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$, при этом

$$\|\Phi\|_{\mathcal{L}((\mathcal{S}_p)_\rho;\mathbb{H})} \leqslant K$$

для некоторого $K > 0$. Обозначая через $\tilde{\Phi}$ продолжение Φ по непрерывности на $(\mathcal{S}_p)_\rho$ и взяв произвольный ортонормированный базис $\{\zeta_i\}_{i=1}^\infty$ в $(\mathcal{S}_{p+1})_\rho$, получаем

$$\|\Phi\|^2_{\mathcal{L}_2\left((\mathcal{S}_{p+1})_\rho;\mathbb{H}\right)} = \|\tilde{\Phi} I_{p,p+1}\|^2_{\mathcal{L}_2\left((\mathcal{S}_{p+1})_\rho;\mathbb{H}\right)} = \sum_{i=1}^\infty \left\|\tilde{\Phi} I_{p,p+1}\zeta_i\right\|^2_{\mathbb{H}} \leqslant$$
$$\leqslant K^2 \sum_{i=1}^\infty \|I_{p,p+1}\zeta_i\|^2_{\mathbb{H}} = K^2 \|I_{p,p+1}\|_{\mathcal{L}_2\left((\mathcal{S}_{p+1})_\rho;(\mathcal{S}_p)_\rho\right)}.$$

Обратное очевидно. □

Следующее предложение дает характеристику сильной сходимости в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$.

Предложение 2.4. *Пусть $\Phi_n = \sum\limits_\alpha \Phi_\alpha^{(n)} \mathbf{h}_\alpha$, $\Psi = \sum\limits_\alpha \Psi_\alpha \mathbf{h}_\alpha \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$. Следующие утверждения эквивалентны*:

1. *$\{\Phi_n\}$ сходится к Ψ в пространстве $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$.*
2. *Для любого $\alpha \in \mathcal{T}$ выполнено $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Phi_\alpha^{(n)} - \Psi_\alpha\| = 0$, вся $\{\Phi_n\}$ и Ψ принадлежат $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$ и $\{\Phi_n\}$ ограничена в этом пространстве.*
3. *Все элементы последовательности $\{\Phi_n\}$ и Ψ принадлежат $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|\Phi_n - \Psi\|_{-p,-\rho} = 0$.*

Доказательство. $1 \Rightarrow 2$. Пусть $\{\Phi_n\}$ сходится к Ψ в пространстве $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$. Тогда для любого $\alpha \in \mathcal{T}$ имеем

$$\|\Phi_\alpha^{(n)} - \Psi_\alpha\| = \frac{1}{\alpha!} \|\Phi^{(n)}[\mathbf{h}_\alpha] - \Psi[\mathbf{h}_\alpha]\| \to 0, \quad n \to \infty.$$

В силу предложения 1.3, $\Psi \in (\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$. Для любого ограниченного множества $M \subset (\mathcal{S})_\rho$ при достаточно больших n для всех $\varphi \in M$ выполнено неравенство $\|\Phi_n[\varphi] - \Psi[\varphi]\| < 1$, следовательно,

$$\|\Phi_n[\varphi]\| \leqslant 1 + \|\Psi\|_{-p,-\rho} |\varphi|_{p,\rho} \leqslant 1 + \|\Psi\|_{-p,-\rho} K_p,$$

где $K_p = \sup\limits_{\varphi\in M} |\varphi|_{p,\rho}$. В силу предложения 2.1 последовательность $\{\Phi_n\}$ ограничена в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$. Из предложения 2.3 следует, что последовательность принадлежит некоторому $(\mathcal{S}_{-q})_{-\rho}(\mathbb{H})$ и ограничена в нем.

$2 \Rightarrow 3$. Пусть $\{\Phi_n\}$ и Ψ удовлетворяют условию 2. В силу (1.15) и (1.16) можно считать, что существует такое q, что для всех $p > q$ последовательность $\{\Phi_n\}$ и Ψ принадлежат $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$ и $\{\Phi_n\}$ ограничена по норме каждого из этих пространств некоторым $K > 0$.

Пусть $\operatorname{Index}\alpha := \max\{n \in \mathbb{N}, \alpha_n \neq 0\}$. Верна следующая оценка:

$$\begin{aligned}
&\|\Phi_n - \Psi\|^2_{-(p+1),-\rho} = \\
&= \sum_{\operatorname{Index}\alpha \leqslant k} (\alpha!)^{1-\rho} \|\Phi_\alpha^{(n)} - \Psi_\alpha\|^2 (2\mathbb{N})^{-2(p+1)\alpha} + \sum_{\operatorname{Index}\alpha > k} (\alpha!)^{1-\rho} \|\Phi_\alpha^{(n)} - \Psi_\alpha\|^2 (2\mathbb{N})^{-2(p+1)\alpha} \leqslant \\
&\leqslant \max_{\operatorname{Index}\alpha \leqslant k} \Big[(\alpha!)^{1-\rho} \|\Phi_\alpha^{(n)} - \Psi_\alpha\|^2\Big] \sum_{\operatorname{Index}\alpha \leqslant k} (2\mathbb{N})^{-2(p+1)\alpha} + \\
&\qquad + \sum_{\operatorname{Index}\alpha > k} \Big[(\alpha!)^{1-\rho} \big(2\|\Phi_\alpha^{(n)}\|^2 + 2\|\Psi_\alpha\|^2\big)(2\mathbb{N})^{-2p\alpha}\Big](2\mathbb{N})^{-2\alpha} \leqslant \\
&\leqslant \max_{\operatorname{Index}\alpha \leqslant k} \Big[(\alpha!)^{1-\rho} \|\Phi_\alpha^{(n)} - \Psi_\alpha\|^2\Big] A(2p+1) + 4K^2 \sum_{\operatorname{Index}\alpha > k} (2\mathbb{N})^{-2\alpha}.
\end{aligned}$$

Для любого $\varepsilon > 0$ сначала выберем k так, что

$$\sum_{\operatorname{Index}\alpha > k} (2\mathbb{N})^{-2\alpha} < \frac{\varepsilon}{8K^2}.$$

Затем выберем N так, что для всех $n > N$ выполнено

$$\max_{\operatorname{Index}\alpha \leqslant k} \Big[(\alpha!)^{1-\rho} \|\Phi_\alpha^{(n)} - \Psi_\alpha\|^2\Big] < \frac{\varepsilon}{2A(2p+2)}.$$

Тогда $\|\Phi_n - \Psi\|^2_{-(p+1),-\rho} < \varepsilon$ для всех $n > N$.

$3 \Rightarrow 1$. Очевидно. □

Будем понимать предел функции $\Phi(\cdot) : \mathbb{R} \to (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ в точке $t_0 \in \mathbb{R}$ в смысле сильной сходимости в пространстве $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$. Производная будет определена как обычно, с пределом, понимаемым в вышеописанном смысле.

Следующее следствие вытекает из предложения 2.4.

Следствие 2.1. *Пусть* $t_0 \in (a,b)$, $\Phi(t) = \sum\limits_\alpha \Phi_\alpha(t)\mathbf{h}_\alpha \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ *для всех* $t \in (a,b) \setminus \{t_0\}$. *Пусть* $\Psi = \sum\limits_\alpha \Psi_\alpha \mathbf{h}_\alpha \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$, *тогда следующие утверждения эквивалентны*:

1. $\lim\limits_{t\to t_0} \Phi(t) = \Psi$ *в пространстве* $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$.
2. $\lim\limits_{t\to t_0} \|\Phi_\alpha(t) - \Psi_\alpha\| = 0$ *для любого* $\alpha \in \mathcal{T}$ *и существуют* $\delta > 0$, $p \in \mathbb{N}$, $M > 0$ *такие, что* $\|\Phi(t)\|_{-p,-\rho} \leqslant M$ *для всех* $t \in (a;b)$, *удовлетворяющих* $0 < |t - t_0| < \delta$, $\Psi \in (\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$.
3. *Существуют* $\delta > 0, p \in \mathbb{N}$ *такие, что* $\Phi(t) \in (\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$ *для всех* $t \in (a;b)$, *таких, что* $0 < |t - t_0| < \delta$, $\Psi \in (\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$ *и* $\lim\limits_{t\to t_0} \|\Phi(t) - \Psi\|_{-p,-\rho} = 0$.

Доказательство целиком повторяет шаги доказательства предложения 2.4, поэтому мы его опускаем. Применяя следствие 2.1, получаем следующее утверждение.

Следствие 2.2. *Пусть* $t_0 \in (a,b)$, $\Phi(t) = \sum\limits_\alpha \Phi_\alpha(t)\mathbf{h}_\alpha \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ *для всех* $t \in (a,b) \setminus \{t_0\}$.

1. $\Phi(t)$ *дифференцируема в точке* t_0, *при этом* $\dfrac{d}{dt}\Phi(t_0) = \Psi$.
2. *Для любого* $\alpha \in \mathcal{T}$ *функция* $\Phi_\alpha : (a;b) \to \mathbb{H}$ *дифференцируема в точке* t_0, $\Psi := \sum\limits_\alpha \Phi'_\alpha(t_0)\mathbf{h}_\alpha$ *принадлежит* $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$ *и существуют* $\delta > 0$, $p \in \mathbb{N}$, $M > 0$ *такие, что*
$$\left\|\frac{\Phi(t) - \Phi(t_0)}{t - t_0}\right\|_{-p,-\rho} \leqslant M \quad \text{для всех} \quad t \in (a;b) \quad \text{таких, что} \quad 0 < |t - t_0| < \delta.$$
3. $\dfrac{d\Phi}{dt} := \lim\limits_{t\to t_0} \dfrac{\Phi(t) - \Phi(t_0)}{t - t_0}$ *существует в пространстве* $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$ *для некоторого* p.

Используя это следствие, можно доказать, что цилиндрический винеровский процесс $W(t)$, определенный равенством (1.22), дифференцируем всюду в $\mathbb{R}$ и его производная совпадает с белым шумом $\mathbb{W}(t)$, определенным равенством (1.25). Это действительно так, поскольку для любого $t_0 \in \mathbb{R}$ и любого $n \in \mathbb{N}$ имеем $\dfrac{dW_{\varepsilon_n}}{dt}(t_0) = \mathbb{W}_{\varepsilon_n}(t_0)$. Более того, используя оценку (1.9), получаем

$$\left\| \frac{W(t)-W(t_0)}{t-t_0} \right\|_{-p,-\rho} = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \left\| \frac{1}{t-t_0} \int_{t_0}^{t} \xi_i(\tau)\, d\tau e_j \right\|^2 (2\mathbb{N})^{-2p\varepsilon_{n(i,j)}} \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \left(\sup_{t\in\mathbb{R}} |\xi_i(t)| \right)^2 (2n(i,j))^{-2p} \leqslant K \sum_{i,j\in\mathbb{N}} i^{-2p-\frac{1}{6}} j^{-2p} < \infty$$

для любого $p \geqslant 1$, что показывает, что условие 2 следствия 2.2 выполнено.

Похожим образом, используя оценку (1.9) и известное свойство функций Эрмита

$$\xi_1'(t) = \xi_2(t), \quad \xi_i'(t) = \sqrt{\frac{i}{2}}\xi_{i-1}(t) + \sqrt{\frac{i+1}{2}}\xi_{i+1}(t),\ i = 2, 3, \ldots,$$

из которых следует оценка

$$\sup_{t\in\mathbb{R}} |\xi_i^{(n)}(t)| = O(i^{-\frac{1}{12}+\frac{n}{2}}),$$

можно показать, что $\mathbb{W}(t)$ бесконечно дифференцируема как $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$-значная функция.

Будем называть функцию $\Phi(\cdot) : \mathbb{R} \to (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ интегрируемой на измеримом множестве $C \subset \mathbb{R}$, если существует такое $p \in \mathbb{N}$, что $\Phi(t) \in (\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$ для всех $t \in C$ и Φ интегрируема по Бохнеру на C как функция со значениями в гильбертовом пространстве $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$.

Из равенства (1.14), выражающего норму $\|\cdot\|_{-p,-\rho}$, следует, что для любого $\alpha \in \mathcal{T}$ имеем оценку

$$\|\Phi_\alpha\|^2_{\mathbb{H}} \leqslant \frac{(2\mathbb{N})^{2p\alpha}}{(\alpha!)^{1-\rho}} \|\Phi\|^2_{-p,-\rho},$$

из которой следует, что если $\Phi(t) = \sum\limits_{\alpha} \Phi_\alpha(t)\mathbf{h}_\alpha$ интегрируема на C, то для любого $\alpha \in \mathcal{T}$ функция $\Phi_\alpha(t)$ интегрируема по Бохнеру на C как $\mathbb{H}$-значная функция. Более того, имеет место следующее достаточное условие интегрируемости.

Предложение 2.5. *Пусть функция* $\Phi(\cdot) : \mathbb{R} \to (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ *задана разложением*

$$\Phi(t) := \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} \Phi_\alpha(t)\mathbf{h}_\alpha.$$

Если для любого $\alpha \in \mathcal{T}$ *функции* $\Phi_\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{H}$ *интегрируемы с квадратом по Бохнеру на множестве* $C \subset \mathbb{R}$ *с мерой Лебега* $\mu_L(C) < \infty$, $\Phi(t) \in (\mathcal{S}_{-q})_{-\rho}(\mathbb{H})$ *для всех* $t \in C$ *и*

$$\sum_{\alpha} (\alpha!)^{1-\rho} \int_C \|\Phi_\alpha(t)\|^2_{\mathbb{H}} dt \big(2\mathbb{N}\big)^{-2q\alpha} < \infty \tag{2.2}$$

для некоторого $q \in \mathbb{N}$, *тогда* $\Phi(t)$ *интегрируема на* C *и*

$$\int_C \Phi(t)\, dt = \sum_{\alpha} \int_C \Phi_\alpha(t)\, dt\, \mathbf{h}_\alpha. \tag{2.3}$$

Доказательство. Пусть $\{\alpha^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ — фиксированное упорядочение множества мультииндексов $\mathcal{T}$. Пусть оно таково, что $\lim\limits_{k\to\infty} |\alpha^{(k)}| = \infty$ и $\lim\limits_{k\to\infty} \operatorname{Index} \alpha^{(k)} = \lim\limits_{n\to\infty} \max\{n \in \mathbb{N}, \alpha_n^{(k)} \neq 0\} = \infty$. Поскольку $\Phi(t) \in (\mathcal{S}_{-q})_{-\rho}(\mathbb{H})$, последовательность

$$F_n(t) := \sum_{k=1}^{n} \Phi_{\alpha^{(k)}}(t)\mathbf{h}_{\alpha^{(k)}}$$

сходится к $\Phi(t)$ в этом пространстве для любого $t \in C$. Из равенства

$$\|\Phi_{\alpha^{(k)}}(t)\mathbf{h}_{\alpha^{(k)}}\|_{-p,-\rho} = (\alpha!)^{\frac{1-\rho}{2}} \|\Phi_{\alpha^{(k)}}(t)\|_{\mathbb{H}} (2\mathbb{N})^{-p\alpha}$$

следует, что любая $\Phi_{\alpha^{(k)}}(t)\mathbf{h}_{\alpha^{(k)}}$, $k\in\mathbb{N}$, и, следовательно, все $F_n(t)$ интегрируемы по Бохнеру как $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$-значные функции для всех $p\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Таким образом, имеем $\int\limits_C\|F_n(t)\|_{-p,-\rho}dt<\infty$ для любого $p\in\mathbb{N}\cup\{0\}$. Легко также видеть, что

$$\int\limits_C \Phi_{\alpha^{(k)}}(t)\mathbf{h}_{\alpha^{(k)}}dt=\int\limits_C \Phi_{\alpha^{(k)}}(t)dt\mathbf{h}_{\alpha^{(k)}}$$

(заметим, что левая часть — интеграл Бохнера $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$-значной функции, а интеграл в правой части — интеграл Бохнера $\mathbb{H}$-значной функции). Таким образом,

$$\int\limits_C F_n(t)\,dt=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_C \Phi_{\alpha^{(k)}}(t)\,dt\mathbf{h}_{\alpha^{(k)}}. \tag{2.4}$$

Используя условие (2.2), получаем

$$\begin{aligned}\int\limits_C\|F_n(t)\|_{-q,-\rho}dt&\leqslant\sqrt{\mu_L(C)}\left(\int\limits_C\|F_n(t)\|^2_{-q,-\rho}dt\right)^{\frac12}=\\&=\sqrt{\mu_L(C)}\left(\sum_{k=1}^{n}\big((\alpha^{(k)})!\big)^{1-\rho}\int\limits_C\|\Phi_{\alpha^{(k)}}(t)\|^2_{\mathbb{H}}dt(2\mathbb{N})^{-2q\alpha^{(k)}}\right)^{\frac12}\leqslant\\&\leqslant\sqrt{\mu_L(C)}\left(\sum_{k=1}^{\infty}\big((\alpha^{(k)})!\big)^{1-\rho}\int\limits_C\|\Phi_{\alpha^{(k)}}(t)\|^2_{\mathbb{H}}dt(2\mathbb{N})^{-2q\alpha^{(k)}}\right)^{\frac12}=:M.\end{aligned}$$

Отсюда следует, что так как $\|F_n(t)\|_{-q,-\rho}\to\|\Phi(t)\|_{-q,-\rho}$ при $t\in C$, то по теореме Фату $\int\limits_C\|\Phi(t)\|_{-q,-\rho}dt<\infty$ и

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_C\|F_n(t)\|_{-q,-\rho}dt=\int\limits_C\|\Phi(t)\|_{-q,-\rho}dt.$$

Поэтому $\Phi(t)$ интегрируема по Бохнеру на C как $(\mathcal{S}_{-q})_{-\rho}(\mathbb{H})$-значная функция.

Мы также получаем $\int\limits_C\|\Phi(t)\|_{-q,-\rho}dt<M$ и

$$\int\limits_C\|F_n(t)-\Phi(t)\|_{-q,-\rho}dt\leqslant\int\limits_C\|F_n(t)\|_{-q,-\rho}dt+\int\limits_C\|\Phi(t)\|_{-q,-\rho}dt\leqslant 2M.$$

Так как $\|F_n(t)-\Phi(t)\|_{-q,-\rho}\to 0$, то по теореме Фату получаем $\int\limits_C\|F_n(t)-\Phi(t)\|_{-q,-\rho}dt\to 0$, а в силу того, что

$$\left\|\int\limits_C F_n(t)\,dt-\int\limits_C\Phi(t)\,dt\right\|_{-q,-\rho}\leqslant\int\limits_C\|F_n(t)-\Phi(t)\|_{-q,-\rho}dt,$$

в конце концов, получаем $\lim\limits_{n\to\infty}\int\limits_C F_n(t)\,dt=\int\limits_C\Phi(t)\,dt$ в $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$, так что равенство (2.3) следует из (2.4). $\square$

3. S-преобразование обобщенных случайных величин со значениями в гильбертовом пространстве

Рассмотрим функцию, определенную на $\mathcal{S}'$ равенством $\mathcal{E}_\theta(\cdot) := e^{\langle\cdot,\theta\rangle-\frac{1}{2}|\theta|_0^2}$. Ее называют экспоненциальной функцией, ассоциированной с θ, или ренормализованной экспонентой. Она играет важную роль в анализе белого шума, в частности, она используется в определении S-преобразования.

Для $\mathcal{E}_\theta$ имеет место следующее разложение в ряд по стохастическим полиномам Эрмита:

$$\mathcal{E}_\theta = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} \mathcal{E}_{\alpha,\theta}\mathbf{h}_\alpha, \quad \mathcal{E}_{\alpha,\theta} = \frac{1}{\alpha!}\prod_{i=1}^{\infty}(\theta,\xi_i)_0^{\alpha_i}. \tag{3.1}$$

Это можно увидеть из следующего непосредственного вычисления. Возьмем $\theta\in\mathcal{S}$ и стохастический полином Эрмита $\mathbf{h}_\alpha = \prod\limits_{i=1}^{n} h_{\alpha_i}\big(\langle\cdot,\xi_i\rangle\big)$. Обозначая $\theta^\perp := \theta - \sum\limits_{i=1}^{n}(\theta,\xi_i)_0\xi_i$, получим разложение θ в конечную сумму попарно ортогональных слагаемых:

$$\theta = \sum_{i=1}^{n}(\theta,\xi_i)_0\xi_i + \theta^\perp.$$

Поскольку

$$\mathcal{E}_{\alpha,\theta} = \frac{1}{\alpha!}\big(\mathcal{E}_\theta,\mathbf{h}_\alpha\big)_{(L^2)} = \frac{1}{\alpha!}E\left[\mathcal{E}_\theta\mathbf{h}_\alpha\right] = \frac{1}{\alpha!}\int\limits_{\mathcal{S}'} e^{\langle\omega,\theta\rangle-\frac{1}{2}|\theta|_0^2}\mathbf{h}_\alpha(\omega)\,d\mu(\omega) =$$

$$= \frac{1}{\alpha!}\int\limits_{\mathcal{S}'} e^{\sum\limits_{i=1}^{n}\langle\omega,\xi_i\rangle(\theta,\xi_i)_0+\langle\omega,\theta^\perp\rangle-\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(\theta,\xi_i)_0^2+|\theta^\perp|_0^2\right)}\prod_{i=1}^{n}h_{\alpha_i}\big(\langle\omega,\xi_i\rangle\big)d\mu(\omega),$$

можем применить формулу (1.3), где

$$f(x_1,\dots,x_{n+1}) = e^{\sum\limits_{i=1}^{n}x_i(\theta,\xi_i)_0+x_{n+1}-\frac{1}{2}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(\theta,\xi_i)_0^2+|\theta^\perp|_0^2\right)}\prod_{i=1}^{n}h_{\alpha_i}(x_i).$$

Следовательно,

$$\mathcal{E}_{\alpha,\theta} = E\Big[f\big(\langle\cdot,\xi_1\rangle,\dots,\langle\cdot,\xi_n\rangle,\langle\cdot,\theta^\perp\rangle\big)\Big] =$$

$$= \frac{1}{\alpha!(2\pi)^{\frac{n+1}{2}}|\theta^\perp|_0}\int\limits_{\mathbb{R}^{n+1}} f(x_1,\dots,x_{n+1})e^{-\frac{1}{2}\sum\limits_{i=1}^{n}x_i^2+\frac{x_{n+1}^2}{|\theta^\perp|_0^2}}dx_1\dots dx_{n+1} =$$

$$= \frac{1}{\alpha!}\prod_{i=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{x_i(\theta,\xi_i)_0-\frac{1}{2}(\theta,\xi_i)_0^2}h_{\alpha_i}(x_i)e^{-\frac{1}{2}x_i^2}dx_i\cdot\frac{1}{\sqrt{2\pi}|\theta^\perp|_0}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{x-\frac{1}{2}|\theta^\perp|_0^2-\frac{1}{2}\frac{x^2}{|\theta^\perp|_0^2}}dx.$$

Вспоминая, что для производящей функции полиномов Эрмита

$$\psi(x,t) := e^{xt-\frac{t^2}{2}} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{t^n}{n!}h_n(x)$$

имеет место равенство

$$\big(\psi(\cdot,t),h_n\big)_{L^2\left(\mathbb{R};\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{x^2}{2}}dx\right)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{\mathbb{R}} e^{xt-\frac{t^2}{2}}h_n(x)e^{-\frac{x^2}{2}}dx = t^n, \quad n=0,1,2,\dots,$$

получаем (3.1).

Для любого $\theta\in\mathcal{S}$ экспоненциальная функция $\mathcal{E}_\theta$ принадлежит $(\mathcal{S})_\rho$ при любом $0\leqslant\rho<1$ со следующей оценкой для любого $p\in\mathbb{N}$:

$$|\mathcal{E}_\theta|_{p,\rho} \leqslant 2^{\rho/2}\exp\left[(1-\rho)^{\frac{2\rho-1}{1-\rho}}|\theta|_p^{\frac{2}{1-\rho}}\right] \tag{3.2}$$

(см., например, [21]).

Это позволяет определить S-преобразование элемента $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$, $0 \leqslant \rho < 1$ равенством

$$(\mathrm{S}\Phi)(\theta) := \Phi[\mathcal{E}_\theta], \quad \theta \in \mathcal{S}. \tag{3.3}$$

S-преобразование элемента $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ — это $\mathbb{H}$-значная функция от $\theta \in \mathcal{S}$. Заметим, что если $\Phi \in (L^2)(\mathbb{H})$, то для всех $\theta \in L^2(\mathbb{R})$ имеет место равенство

$$(\mathrm{S}\Phi)(\theta) = \int\limits_{\mathcal{S}'} \Phi(\omega)\mathcal{E}_\theta(\omega)\, d\mu(\omega) = E(\Phi\mathcal{E}_\theta). \tag{3.4}$$

Очень важным свойством экспоненциальных функций $\mathcal{E}_\theta, \theta \in \mathcal{S}$ является то, что они образуют линейно плотное подмножество в $(\mathcal{S})_\rho$ $(0 \leqslant \rho < 1)$ и, таким образом, в (L^2) и в каждом $(\mathcal{S}_p)_\rho$. Отсюда следует, что выполнение равенства $(\mathrm{S}\Phi)(\theta) = 0$ для всех $\theta \in \mathcal{S}$ влечет за собой $\Phi = 0$. Таким образом, каждый элемент пространства $(\mathcal{S})_{-\rho}, (0 \leqslant \rho < 1)$ единственным образом определяется своим S-преобразованием.

Поскольку любой $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ принадлежит $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(\mathbb{H})$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$, из оценки (3.2) следует, что для любого $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ существует $p \in \mathbb{N}$ такое, что

$$\|(\mathrm{S}\Phi)(\theta)\| = \|\Phi[\mathcal{E}_\theta]\| \leqslant \|\Phi\|_{-p,-\rho}\|\mathcal{E}_\theta\|_{p,\rho} \leqslant 2^{\rho/2}\|\Phi\|_{-p,-\rho} \exp\left[(1-\rho)^{\frac{2\rho-1}{1-\rho}}|\theta|_p^{\frac{2}{1-\rho}}\right]. \tag{3.5}$$

Оказывается, оценка такого типа является достаточным условием для $\mathbb{H}$-значной функции, действующей из $\mathcal{S}$ в $\mathbb{H}$, чтобы быть S-преобразованием обобщенной $\mathbb{H}$-значной случайной величины, а именно, справедлива следующая характеристическая теорема.

Теорема 3.1. *Пусть* $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$, $0 \leqslant \rho < 1$. *Тогда функция* $F = \mathrm{S}\Phi$ *удовлетворяет условиям*:

1. *для любого* $\theta, \eta \in \mathcal{S}$ *функция* $F(\theta + z\eta)$ *является целой аналитической функцией от* $z \in \mathbb{C}$;
2. *существуют* $K > 0, a > 0$, $p \in \mathbb{N}$, *такие, что*

$$\|F(\theta)\| \leqslant K \exp\left[a|\theta|_p^{\frac{2}{1-\rho}}\right], \quad \theta \in \mathcal{S}. \tag{3.6}$$

Если функция $F : \mathcal{S} \to \mathbb{H}$ *удовлетворяет условиям* 1 *и* 2, *то существует единственная* $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ *такая, что* $F = \mathrm{S}\Phi$ *для любого* q, *при котором* $e^2\left(\dfrac{2a}{1-\rho}\right)^{1-\rho}\sum\limits_{i=1}^{\infty}(2i)^{-2(q-p)} < 1$, *и верно неравенство*:

$$\|\Phi\|_{-q,-\rho} \leqslant K\left(1 - e^2\left(\frac{2a}{1-\rho}\right)^{1-\rho}\sum_{i=1}^{\infty}(2i)^{-2(q-p)}\right)^{-1/2}. \tag{3.7}$$

Мы опускаем доказательство, так как оно почти полностью повторяет доказательство в $\mathbb{R}$-значном случае (см., например, [21]).

Пример. Рассмотрим S-преобразования Q-белого шума и цилиндрического белого шума. Имеем:

$$\big[\mathrm{S}\mathbb{W}_Q(t)\big](\theta) = \mathbb{W}_Q(t)\big[\mathcal{E}_\theta\big] = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \xi_i(t)\sigma_j e_j(\xi_{n(i,j)}, \theta)_0 = \sum_{j\in\mathbb{N}} \sigma_j e_j[\mathfrak{I}_j^{-1}\pi_j\theta](t), \tag{3.8}$$

и, аналогично,

$$\big[\mathrm{S}\mathbb{W}(t)\big](\theta) = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \xi_i(t) e_j(\xi_{n(i,j)}, \theta)_0 = \sum_{j\in\mathbb{N}} e_j[\mathfrak{I}_j^{-1}\pi_j\theta](t). \tag{3.9}$$

Кроме того, справедливо равенство

$$\big\|\big[\mathrm{S}\mathbb{W}_Q(\cdot)\big](\theta)\big\|^2_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{H})} = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \sigma_j^2\big|(\xi_{n(i,j)}, \theta)_0\big|^2$$

и, так как функции $\xi_i(t)e_j$, $i, j \in \mathbb{N}$, образуют ортонормированный базис в пространстве $L^2(\mathbb{R};\mathbb{H})$,

$$\big\|\big[\mathrm{S}\mathbb{W}(\cdot)\big](\theta)\big\|^2_{L^2(\mathbb{R};\mathbb{H})} = \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \big|(\xi_{n(i,j)}, \theta)_0\big|^2 = |\theta|_0^2.$$

4. Произведение Уика обобщенных случайных величин со значениями в гильбертовых пространствах

Пусть H — еще одно сепарабельное гильбертово пространство. Пространство $\mathcal{L}_2(\mathbb{H}; H)$ операторов Гильберта—Шмидта, действующих из $\mathbb{H}$ в H является сепарабельным гильбертовым пространством, поэтому можем ввести пространство $(\mathcal{S})_{-\rho}\big(\mathcal{L}_2(\mathbb{H}; H)\big)$ $\mathcal{L}_2(\mathbb{H}; H)$-значных обобщенных случайных величин над пространством основных функций $(\mathcal{S})_\rho$ так же, как это сделано в пункте 1.2. Рассмотрим $\Psi \in (\mathcal{S})_{-\rho}\big(\mathcal{L}_2(\mathbb{H}; H)\big)$, $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$. Их S-преобразования удовлетворяют условиям 1 и 2 теоремы 3.1. Для любого $\theta \in \mathcal{S}$ имеем: $\mathrm{S}\Psi(\theta) \in \mathcal{L}_2(\mathbb{H}; H)$, $\mathrm{S}\Phi(\theta) \in \mathbb{H}$, поэтому значения функции $F(\theta) := \mathrm{S}\Psi(\theta)\mathrm{S}\Phi(\theta)$ принадлежат H, и для любых $\theta, \eta \in \mathcal{S}$ функция $F(\theta + z\eta)$ переменной $z \in \mathbb{C}$ является целой аналитической. Имеем неравенство

$$\|\mathrm{S}\Psi(\theta)\mathrm{S}\Phi(\theta)\|_H \leqslant \|\mathrm{S}\Psi(\theta)\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H};H)}\|\mathrm{S}\Phi(\theta)\|_{\mathbb{H}} \leqslant K_1K_2 \exp\left[(a_1 + a_2)|\theta|_p^{\frac{2}{1-\rho}}\right],$$

где K_1, K_2, a_1, a_2 — константы из условия 2 теоремы 3.1, которое выполнено для Ψ и Φ соответственно (очевидно, можно считать эти условия выполненными с одним и тем же p). Таким образом, F является S-преобразованием некоторой обобщенной случайной величины $\Theta \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H)$. Это обосновывает следующее определение.

Определение 4.1. Пусть $\Psi \in (\mathcal{S})_{-\rho}\big(\mathcal{L}_2(\mathbb{H}; H)\big)$, $\Phi \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ $(0 \leqslant \rho < 1)$. Обобщенная случайная величина $\Theta \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H)$ такая, что

$$\mathrm{S}\Theta = \mathrm{S}\Psi\mathrm{S}\Phi,$$

называется *произведением Уика* Ψ и Φ и обозначается через $\Psi \diamond \Phi$.

Следующие равенства следуют из разложения (3.1):

$$\mathrm{S}\Psi(\theta) = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} \Psi_\alpha \prod_{i=1}^{\infty}(\theta, \xi_i)_0^{\alpha_i}, \quad \mathrm{S}\Phi(\theta) = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} \Phi_\alpha \prod_{i=1}^{\infty}(\theta, \xi_i)_0^{\alpha_i},$$

где $\Psi_\alpha \in \mathcal{L}_2(\mathbb{H}; H)$, $\Phi_\alpha \in \mathbb{H}$. Отсюда следует

$$\mathrm{S}\Psi(\theta)\mathrm{S}\Phi(\theta) = \sum_{\gamma\in\mathcal{T}} \left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} \Psi_\alpha\Phi_\beta\right) \prod_{i=1}^{\infty}(\theta, \xi_i)_0^{\gamma_i}.$$

В силу единственности S-преобразования получаем

$$\Psi \diamond \Phi = \sum_{\gamma\in\mathcal{T}} \left(\sum_{\alpha+\beta=\gamma} \Psi_\alpha\Phi_\beta\right) \mathbf{h}_\gamma.$$

5. Интеграл Хицуды—Скорохода

5.1. Определения и основные свойства. Пусть $Q \in \mathcal{L}_1(\mathbb{H}; \mathbb{H})$ — положительный оператор, определенный равенством (1.23), где $\{e_j\}$ — фиксированный выше ортонормированный базис в $\mathbb{H}$. Обозначим через $\mathbb{H}_Q$ пространство $Q^{\frac{1}{2}}(\mathbb{H})$ со скалярным произведением $(u, v)_{\mathbb{H}_Q} = (Q^{-\frac{1}{2}}u, Q^{-\frac{1}{2}}v)_{\mathbb{H}}$.

Предложение 5.1. *При любом* $t \in \mathbb{R}$ *выполнено* $\mathbb{W}_Q(t) \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H}_Q)$ *для любого* $\rho \in [0; 1)$ *и положительного* $Q \in \mathcal{L}_1(\mathbb{H}; \mathbb{H})$ *вида* (1.23). *Если, кроме того, выполнено условие*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j^{-2} j^{-2p} < \infty \quad \textit{для некоторого } p \in \mathbb{N}, \tag{5.1}$$

то $\mathbb{W}(t) \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H}_Q)$ *для всех* $t \in \mathbb{R}$.

Доказательство. Первое утверждение следует из оценки

$$\|\mathbb{W}^Q_{\varepsilon_{n(i,j)}}\|^2_{\mathbb{H}_Q}\big(2\mathbb{N}\big)^{-2p\varepsilon_{n(i,j)}} = |\xi_i(t)|^2\big(2n(i,j)\big)^{-2p} \leqslant \frac{|\xi_i(t)|^2}{\big(2ij\big)^{2p}} = O\big(i^{-2p-\frac{1}{2}}j^{-2p}\big).$$

Второе утверждение следует из оценки

$$\|\mathbb{W}_{\varepsilon_{n(i,j)}}\|^2_{\mathbb{H}_Q}\big(2\mathbb{N}\big)^{-2p\varepsilon_{n(i,j)}} = |\xi_i(t)|^2\sigma_j^{-2}\big(2n(i,j)\big)^{-2p} \leqslant \frac{|\xi_i(t)|^2}{\sigma_j^2\big(2ij\big)^{2p}} = O\big(\sigma_j^{-2}i^{-2p-\frac{1}{2}}j^{-2p}\big).$$

□

Пусть опять H — еще одно сепарабельное гильбертово пространство. Рассмотрим $\mathcal{L}(\mathbb{H};H)$ — пространство линейных ограниченных операторов из $\mathbb{H}$ в H. Поскольку оно не является сепарабельным гильбертовым пространством, нельзя определить пространство $\mathcal{L}(\mathbb{H};H)$-значных обобщенных случайных величин так же, как выше было определено пространство $(\mathcal{S})_{-\rho}\big(\mathcal{L}_2(\mathbb{H};H)\big)$. Несмотря на это, введем понятие обобщенной операторнозначной случайной величины с помощью следующего определения.

Определение 5.1. Линейный непрерывный оператор $\Phi : (\mathcal{S})_\rho \to \mathcal{L}(\mathbb{H};H)$ называется *обобщенной $\mathcal{L}(\mathbb{H};H)$-значной случайной величиной.*

Предложение 5.2. *Любая обобщенная $\mathcal{L}(\mathbb{H};H)$-значная случайная величина Φ принадлежит пространству $(\mathcal{S})_{-\rho}\big(\mathcal{L}_2(\mathbb{H}_Q;H)\big)$.*

Доказательство. Заметим сначала, что рассуждениями, аналогичными тем, что были проделаны при доказательстве предложения 1.2, можно показать, что любая обобщенная $\mathcal{L}(\mathbb{H};H)$-значная случайная величина Φ принадлежит $\mathcal{L}\big((\mathcal{S}_p)_\rho;\mathcal{L}(\mathbb{H};H)\big)$ для некоторого $p\in\mathbb{N}$, и, таким образом, мы имеем

$$\|\Phi[\varphi]\|_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H}_Q;H)} \leqslant \|\Phi\|_{\mathcal{L}\left((\mathcal{S}_p)_\rho;\mathcal{L}(\mathbb{H};H)\right)}\sqrt{\sum_{j=1}^{\infty}\sigma_j^2}\,\|\varphi\|_{p,\rho}, \quad \varphi\in(\mathcal{S})_\rho.$$

Отсюда следует, что Φ — непрерывный оператор из $(\mathcal{S})_\rho$ в $\mathcal{L}_2(\mathbb{H}_Q;H)$. □

Из предложений 5.1 и 5.2 следует, что для любого обобщенного $\mathcal{L}(\mathbb{H};H)$-значного случайного процесса $\Phi(t)$ произведение Уика $\Phi(t)\diamond\mathbb{W}_Q(t)$ определено для всех t и принадлежит пространству $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$, так как $\Phi(t)$ можно считать $(\mathcal{S})_{-\rho}\big(\mathcal{L}_2(\mathbb{H}_Q;\mathbb{H})\big)$-значным процессом. Взяв оператор Q, удовлетворяющий условию (5.1) и рассматривая $\Phi(t)$ как $(\mathcal{S})_{-\rho}\big(\mathcal{L}_2(\mathbb{H}_Q;\mathbb{H})\big)$-значный процесс, получим, что произведение Уика $\Phi(t)\diamond\mathbb{W}(t)$ также определено и принадлежит пространству $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$ для всех $t\in\mathbb{R}$. Это обосновывает следующее определение.

Определение 5.2. Будем называть обобщенный $\mathcal{L}(\mathbb{H};H)$-значный случайный процесс $\Phi(t)$ *интегрируемым по Хицуде—Скороходу* по Q-белому шуму $\mathbb{W}_Q(t)$ (или цилиндрическому белому шуму $\mathbb{W}(t)$ на $[0;T]$), если $\Phi(t)\diamond\mathbb{W}_Q(t)$ (или $\Phi(t)\diamond\mathbb{W}(t)$, соответственно) интегрируемо на $[0;T]$ как $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$-значная функция. В таком случае будем называть интегралы

$$\int_0^T \Phi(t)\diamond\mathbb{W}_Q(t)\,dt \quad \text{и} \quad \int_0^T \Phi(t)\diamond\mathbb{W}(t)\,dt$$

интегралами Хицуды—Скорохода от $\Phi(t)$.

5.2. Связь интеграла Хицуды—Скорохода и интеграла Ито. В этом разделе мы установим связь между интегралом Ито и интегралом Хицуды—Скорохода, а именно, покажем, что последний является обобщением интеграла Ито по винеровскому процессу. Для простоты рассмотрим случай Q-винеровского процесса и соответствующего Q-белого шума. Доказательство, которое мы представляем, использует идеи [6], где эта связь доказана в одномерном случае. Мы обобщаем их на бесконечномерный случай.

Пусть $\{\mathcal{B}_t, t\geqslant 0\}$ — σ-алгебра, порожденная случайными величинами $(W_Q(s),x)_{\mathbb{H}}$, где $0\leqslant s\leqslant t$, $x\in\mathbb{H}$. Семейство $\{\mathcal{B}_t\}$ называется *фильтрацией*, порожденной Q-винеровским процессом $W_Q(t)$, $t\geqslant 0$. Легко видеть, что $\{\mathcal{B}_t, t\geqslant 0\}$ совпадает с σ-алгеброй, порожденной случайными величинами вида

$$(W(s),x)_{\mathbb{H}} := \sum_{j=1}^{\infty}\beta_j(t)(e_j,x)_{\mathbb{H}}, \quad 0\leqslant s\leqslant t, \quad x\in\mathbb{H}.$$

Здесь скалярное произведение в левой части не определено, так как $W(s)$ не принадлежит H почти наверное. Несмотря на это, ряд в правой части сходится в (L^2), так как

$$\sum_{j=1}^{\infty} E\left[\beta_j(t)(e_j,x)_{\mathbb{H}}\right]^2 = t\sum_{j=1}^{\infty}(e_j,x)_{\mathbb{H}}^2 < \infty.$$

Заметим, что броуновские движения $\beta_j(t)$ ($j \in \mathbb{N}$, $t \geqslant 0$) являются мартингалами относительно $\mathcal{B}_t$.

Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство. $\mathcal{H}$-значный случайный процесс $\Phi(t), t \geqslant 0$ называется *$\mathcal{B}_t$-адаптированным*, если $\Phi(t)$ $\mathcal{B}_t$-измерима для каждого $t \geqslant 0$.

Мы будем далее рассматривать интегралы Ито по определенному выше $\mathbb{H}$-значному Q-винеровскому процессу. Они определены для предсказуемых подынтегральных функций $\Phi(t)$, $t \in [0;T]$, со значениями в $\mathcal{H} = \mathcal{L}_2(\mathbb{H}_Q;H)$. Напомним, что $\mathcal{H}$-значный процесс называется *предсказуемым*, если он измерим как отображение из $\big([0;T] \times \mathcal{S}', \mathcal{P}_T\big)$ в $\big(\mathcal{H}, \mathcal{B}(\mathcal{H})\big)$, где $\mathcal{P}_T$ — предсказуемая σ-алгебра подмножеств $[0;T]\times\mathcal{S}'$. Последняя определяется как σ-алгебра, порожденная множествами вида

$$(s;t] \times B, \quad 0 \leqslant s < t \leqslant T, \quad B \in \mathcal{B}_s.$$

Нам понадобится несколько лемм, которые характеризуют $\mathcal{B}_t$-измеримые случайные величины в терминах их S-преобразований. Они используют операторы $\mathfrak{J}_j$, $j \in \mathbb{N}$, определенные равенствами (1.18), являющиеся изометрическими изоморфизмами $L^2(\mathbb{R})$ и пространств $L^2(\mathbb{R})_j$, и ортогональные проекторы π_j, $j \in \mathbb{N}$, пространства $L^2(\mathbb{R})$ на пространства $L^2(\mathbb{R})_j$, определенные равенствами (1.20).

Лемма 5.1. *Пусть $\mathcal{H}$ — сепарабельное гильбертово пространство. Для любого $\Theta, \Phi \in (L^2)(\mathcal{H})$ равенство $\Theta = E\big(\Phi|\mathcal{B}_t\big)$ верно тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{S}\Theta(\theta) = \mathrm{S}\Phi\left(\sum_{j=1}^{\infty}\theta_{t,j}\right) \tag{5.2}$$

для любого $\theta \in \mathcal{S}$, где $\theta_{t,j} := \mathfrak{J}_j\big(\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta \cdot 1_{[0,t]}\big)$.

Доказательство. Пусть $\theta_{t,j}^{\perp} = \mathfrak{J}_j\big(\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta \cdot 1_{[0,t]^c}\big)$, $j \in \mathbb{N}$, для $\theta \in \mathcal{S}$. Имеем

$$\pi_j\theta = \mathfrak{J}_j\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta = \mathfrak{J}_j\big(\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta \cdot 1_{[0,t]} + \mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta \cdot 1_{[0,t]^c}\big) = \theta_{t,j} + \theta_{t,j}^{\perp},$$

кроме того, функции $\theta_{t,j}$ и $\theta_{t,j}^{\perp}$ ортогональны в $L^2(\mathbb{R})$:

$$(\theta_{t,j}, \theta_{t,j}^{\perp})_0 = \Big(\mathfrak{J}_j\big(\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta \cdot 1_{[0,t]}\big), \mathfrak{J}_j\big(\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta \cdot 1_{[0,t]^c}\big)\Big)_{L_2(\mathbb{R})} = \big(\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta \cdot 1_{[0,t]}, \mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta \cdot 1_{[0,t]^c}\big)_{L_2(\mathbb{R})} = 0.$$

Так как для любых ортогональных в $L^2(\mathbb{R})$ функций θ и η

$$\mathcal{E}_{\theta+\eta} = e^{\langle\cdot,\theta+\eta\rangle - \frac{1}{2}\|\theta+\eta\|_0^2} = e^{\langle\cdot,\theta\rangle - \frac{1}{2}\|\theta\|_0^2} e^{\langle\cdot,\eta\rangle - \frac{1}{2}\|\eta\|_0^2} e^{(\theta,\eta)_0} = \mathcal{E}_\theta\mathcal{E}_\eta, \tag{5.3}$$

отсюда следует, что

$$\mathrm{S}\Theta\left(\sum_{j=1}^{n}\pi_j\theta\right) = E\left(\Theta\mathcal{E}_{\sum\limits_{j=1}^{n}\pi_j\theta}\right) = E\left(\Theta\prod_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{\pi_j\theta}\right) = E\left(\Theta\prod_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{\theta_{t,j}+\theta_{t,j}^{\perp}}\right).$$

Снова используя свойство (5.3), получаем

$$\mathrm{S}\Theta\left(\sum_{j=1}^{n}\pi_j\theta\right) = E\left(\Theta\prod_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{\theta_{t,j}}\prod_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{\theta_{t,j}^{\perp}}\right).$$

Заметим, что для любого $s \in [0;t]$

$$E\left(\beta_j(s)\langle\cdot,\theta_{t,j}^{\perp}\rangle\right) = \Big(\langle\cdot,\mathfrak{J}_j 1_{[0,s]}\rangle, \langle\cdot,\mathfrak{J}_j\big(\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta \cdot 1_{[0,t]^c}\big)\rangle\Big)_{(L^2)} =$$

$$= \Big(\mathfrak{J}_j 1_{[0,s]}, \mathfrak{J}_j\big(\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta \cdot 1_{[0,t]^c}\big)\Big)_{L_2(\mathbb{R})} = \big(1_{[0,s]}, \mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta \cdot 1_{[0,t]^c}\big)_{L_2(\mathbb{R})} = 0,$$

таким образом, случайные величины $\langle\cdot,\theta^{\perp}_{t,j}\rangle$ и, следовательно, $\mathcal{E}_{\theta^{\perp}_{t,j}}$, $j\in\mathbb{N}$, не зависят от $\mathcal{B}_t$. Приближая θ в $L_2(\mathbb{R})$ финитными ступенчатыми функциями, можно легко доказать, что случайные величины $\langle\cdot,\theta_{t,j}\rangle$, $j\in\mathbb{N}$, и, следовательно, функции $\mathcal{E}_{\theta_{t,j}}$ являются $\mathcal{B}_t$-измеримыми. Таким образом, если $\Theta=E\big(\Phi|\mathcal{B}_t\big)$, в силу свойств условных математических ожиданий имеем

$$\mathrm{S}\Theta\left(\sum_{j=1}^{n}\pi_j\theta\right)=E\left(E\big(\Phi|\mathcal{B}_t\big)\prod_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{\theta_{t,j}}\prod_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{\theta^{\perp}_{t,j}}\right)=$$
$$=E\left(E\left(\Phi\prod_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{\theta_{t,j}}\middle|\mathcal{B}_t\right)\right)E\left(\prod_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{\theta^{\perp}_{t,j}}\right)=E\left(\Phi\prod_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{\theta_{t,j}}\right)E\left(\prod_{j=1}^{n}\mathcal{E}_{\theta^{\perp}_{t,j}}\right).$$

Снова используя равенство (5.3), получаем

$$\mathrm{S}\Theta\left(\sum_{j=1}^{n}\pi_j\theta\right)=E\left(\Phi\mathcal{E}_{\sum\limits_{j=1}^{n}\theta_{t,j}}\right)E\left(\mathcal{E}_{\sum\limits_{j=1}^{n}\theta^{\perp}_{t,j}}\right)=\mathrm{S}\Phi\left(\sum_{j=1}^{n}\theta_{t,j}\right).\tag{5.4}$$

Поскольку сходимость последовательности θ_n к θ в $L_2(\mathbb{R})$ влечет за собой сходимость $E\big(\Phi\mathcal{E}_{\theta_n}\big)$ к $E\big(\Phi\mathcal{E}_{\theta}\big)$ в $\mathcal{H}$ для любого $\Phi\in(L^2)(\mathcal{H})$, получаем равенство (5.2), устремляя $n\to\infty$ в равенстве (5.4). □

Следствие 5.1. $\Phi\in(L^2)(\mathcal{H})$ *является* $\mathcal{B}_t$*-измеримой тогда и только тогда, когда*

$$\mathrm{S}\Phi(\theta)=\mathrm{S}\Phi\left(\sum_{j\in\mathbb{N}}\theta_{t,j}\right),\quad \theta_{t,j}:=\mathfrak{I}_j\big(\mathfrak{I}_j^{-1}\pi_j\theta\cdot 1_{[0,t]}\big),\quad \theta\in\mathcal{S}.$$

Лемма 5.2. *Если случайная величина* $\Phi\in(L^2)(\mathcal{H})$ *является* $\mathcal{B}_t$*-измеримой, то для любых* $k\in\mathbb{N}$, $b>t>0$ *верно*

$$\mathrm{S}\Big(\Phi\langle\cdot,1^k_{(t,b]}\rangle\Big)(\theta)=(1^k_{(t,b]},\theta)_{L_2(\mathbb{R})}\mathrm{S}\Phi(\theta),\quad \theta\in\mathcal{S}.\tag{5.5}$$

Доказательство. Имеем:

$$\begin{aligned}&\mathrm{S}\Big(\Phi\langle\cdot,1^k_{(t,b]}\rangle\Big)(\theta)=\\&=E\left(\Phi\langle\cdot,1^k_{(t,b]}\rangle\mathcal{E}_\theta\right)=e^{-\frac{|\theta|_0}{2}}E\left(\Phi\frac{d}{d\alpha}e^{\alpha\langle\cdot,1^k_{(t,b]}\rangle+\langle\cdot,\theta\rangle}\Big|_{\alpha=0}\right)=\\&=e^{-\frac{|\theta|_0}{2}}\frac{d}{d\alpha}E\left(\Phi\, e^{\langle\cdot,\alpha1^k_{(t,b]}+\theta\rangle-\frac12|\alpha1^k_{(t,b]}+\theta|_0^2}\,e^{\frac12|\alpha1^k_{(t,b]}+\theta|_0^2}\right)\Big|_{\alpha=0}=\\&=e^{-\frac{|\theta|_0}{2}}\frac{d}{d\alpha}\left(e^{\frac12|\alpha1^k_{(t,b]}+\theta|_0^2}\mathrm{S}\Phi\big(\alpha1^k_{(t,b]}+\theta\big)\right)\Big|_{\alpha=0}.\end{aligned}\tag{5.6}$$

Далее, имеем

$$\frac{d}{d\alpha}e^{\frac12|\alpha1^k_{(t,b]}+\theta|_0^2}\Big|_{\alpha=0}=\frac{d}{d\alpha}e^{\frac12\left(\alpha^2|1^k_{(t,b]}|_0^2+2\alpha(1^k_{(t,b]},\theta)_{L_2(\mathbb{R})}+|\theta|_0^2\right)}\Big|_{\alpha=0}=\big(1^k_{(t,b]},\theta\big)_{L_2(\mathbb{R})}e^{\frac{|\theta|_0}{2}}.$$

Кроме того, в силу $\mathcal{B}_t$-измеримости Φ, предложения 5.1 и равенства

$$(1^k_{(t,b]})_{t,j}=\mathfrak{I}_j\big(\mathfrak{I}_j^{-1}\pi_j1^k_{(t,b]}\cdot1_{[0,t]}\big)=\begin{cases}\mathfrak{I}_j\big(0\cdot1_{[0,t]}\big)=0, & k\neq j,\\ \mathfrak{I}_j\big(1_{(t,b]}\cdot1_{[0,t]}\big)=0, & k=j,\end{cases}$$

получим

$$\mathrm{S}\Phi\big(\alpha1^k_{(t,b]}+\theta\big)=\mathrm{S}\Phi\Big(\sum_{j\in\mathbb{N}}\big(\alpha(1^k_{(t,b]})_{t,j}+\theta_{t,j}\big)\Big)=\mathrm{S}\Phi\Big(\sum_{j\in\mathbb{N}}\theta_{t,j}\Big).$$

Отсюда следует, что $\dfrac{d}{d\alpha}\mathrm{S}\Phi\big(\alpha1^k_{(t,b]}+\theta\big)=0$. Таким образом, из равенства (5.6) следует (5.5). □

Теорема 5.1. *Для любого предсказуемого $\mathcal{L}_2(\mathbb{H}_Q; H)$-значного процесса, удовлетворяющего условию*

$$E\left[\int_0^T \|\Phi(t)\|^2_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H}_Q;H)} dt\right] < \infty, \tag{5.7}$$

верно равенство

$$\int_0^T \Psi(t)\, dW_Q(t) = \int_0^T \Psi(t) \diamond \mathbb{W}_Q(t)\, dt. \tag{5.8}$$

Доказательство. Чтобы доказать утверждение, вспомним, что интеграл Ито по Q-винеровскому процессу сначала определяется для так называемых элементарных процессов, т. е. для процессов вида

$$\Psi(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \Psi_k 1_{(t_k,t_{k+1}]}(t), \tag{5.9}$$

где $0 = t_0 < t_1 < \cdots < t_N = T$, а Ψ_k — $\mathcal{L}(\mathbb{H}; H)$-значные $\mathcal{B}_{t_k}$-измеримые случайные величины для всех $k = 0, 1, \ldots, N-1$. Затем определение распространяется на все предсказуемые $\mathcal{L}_2(\mathbb{H}_Q; H)$-значные подынтегральные функции, удовлетворяющие условию (5.7). Используя равенство

$$E\left\|\int_0^T \Psi(t)\, dW_Q(t)\right\|_H^2 = E\left[\int_0^T \|\Psi(t)\|^2_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H}_Q;H)} dt\right] =: |||\Psi|||_T,$$

которое можно проверить для любого элементарного процесса $\Psi(t)$, и тот факт, что любой предсказуемый процесс $\Psi(t)$ со значениями в $\mathcal{L}_2(\mathbb{H}_Q; H)$ может быть аппроксимирован последовательностью элементарных процессов $\{\Psi^{(n)}(t)\}_{n=1}^{\infty}$, $t \in [0; T]$, сходящихся к Ψ по норме $|||\cdot|||_T$, можно определить интеграл $\int\limits_0^T \Psi(t)\, dW_Q(t)$ как предел в $(L^2)(H)$ соответствующей последовательности интегралов от элементарных процессов $\int\limits_0^T \Psi^{(n)}(t)\, dW_Q(t)$.

Таким образом, достаточно доказать равенство (5.8) для элементарного процесса $\Psi(t)$ вида (5.9). Поскольку операторы $g_i \otimes e_j$, $i, j \in \mathbb{N}$, где $\{g_i\}_{i=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в H, образуют линейно плотное подмножество в $\mathcal{L}_2(\mathbb{H}_Q; H)$, можно без ограничения общности предположить, что Ψ_k имеют вид

$$\Psi_k = \sum_{i,j=1}^{M} \psi_{k,i,j}(g_i \otimes e_j), \quad \psi_{k,i,j} \in (L^2),$$

где функции $\psi_{k,i,j}$ $\mathcal{B}_{t_k}$-измеримы для всех $i, j = 1, \ldots, M$, $k = 0, 1, \ldots N-1$. Рассмотрим S-преобразование левой части равенства (5.8). Для любого $\theta \in \mathcal{S}$ имеем:

$$\mathrm{S}\left[\int_0^T \Psi(t)\, dW_Q(t)\right](\theta) = \mathrm{S}\left[\sum_{k=0}^{N-1} \Psi_k\big(W_Q(t_{k+1}) - W_Q(t_k)\big)\right](\theta) =$$

$$= \mathrm{S}\left[\sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i,j=1}^{M} \psi_{k,i,j}(g_i \otimes e_j) \sum_{j=1}^{\infty} \sigma_j\big(\beta_j(t_{k+1}) - \beta_j(t_k)\big)e_j\right] = \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i,j=1}^{M} \sigma_j \mathrm{S}\left[\psi_{k,i,j}\langle 1^j_{(t_k,t_{k+1}]}, \cdot\rangle\right](\theta) g_i.$$

В силу леммы 5.2 получим

$$\begin{aligned}\mathrm{S}\left[\int_0^T \Psi(t)\,dW_Q(t)\right](\theta) &= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i,j=1}^{M} \sigma_j\big(1^j_{(t_k,t_{k+1}]},\theta\big)_{L_2(\mathbb{R})}\mathrm{S}\psi_{k,i,j}(\theta)g_i = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i,j=1}^{M} \sigma_j\big(1_{(t_k,t_{k+1}]},\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta\big)_{L_2(\mathbb{R})}\mathrm{S}\psi_{k,i,j}(\theta)g_i = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1}\sum_{i,j=1}^{M} \sigma_j\int_{t_k}^{t_{k+1}}\big[\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta\big](t)dt\mathrm{S}\psi_{k,i,j}(\theta)g_i = \\ &= \sum_{k=0}^{N-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\sum_{i=1}^{M}\sum_{j=1}^{M}\mathrm{S}\psi_{k,i,j}(\theta)\big[\sigma_j g_i\mathfrak{J}_j^{-1}\pi_j\theta\big](t)dt.\end{aligned}$$

Вспоминая формулу (3.8) и определение Ψ_k, окончательно получим

$$\begin{aligned}\mathrm{S}\left[\int_0^T \Psi(t)\,dW_Q(t)\right](\theta) &= \sum_{k=0}^{N-1}\int_{t_k}^{t_{k+1}}\mathrm{S}\Psi_k(\theta)\mathrm{S}\mathbb{W}_Q(t)(\theta)dt = \\ &= \int_0^T \mathrm{S}\big[\Psi(t)\diamond\mathbb{W}_Q(t)\big](\theta)dt = \mathrm{S}\Big[\int_0^T\Psi(t)\diamond\mathbb{W}_Q(t)dt\Big](\theta).\end{aligned}$$

В силу единственности S-преобразования это равенство влечет за собой (5.8). □

Следующая теорема устанавливает связь между интегралом Ито по цилиндрическому винеровскому процессу и интегралом Хицуды—Скорохода по цилиндрическому белому шуму. Она доказывается аналогично, с использованием равенства (3.9) вместо (3.8).

Теорема 5.2. *Для любого предсказуемого $\mathcal{L}_2(\mathbb{H};H)$-значного процесса, удовлетворяющего условию*

$$E\left[\int_0^T \|\Phi(t)\|^2_{\mathcal{L}_2(\mathbb{H};H)}dt\right] < \infty,$$

верно равенство

$$\int_0^T \Psi(t)\,dW(t) = \int_0^T \Psi(t)\diamond\mathbb{W}(t)\,dt. \tag{5.10}$$

6. Стохастические дифференциальные уравнения в пространствах обобщенных гильбертовозначных случайных величин

Для того, чтобы рассмотреть стохастические дифференциальные уравнения в гильбертовых пространствах как дифференциальные уравнения в пространствах обобщенных гильбертовозначных случайных величин, сначала распространим действие линейных операторов, действующих из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$, где $\mathcal{H}_i$ — сепарабельные гильбертовы пространства, на соответствующие пространства обобщенных случайных величин.

Пусть сначала $A \in \mathcal{L}(\mathcal{H}_1,\mathcal{H}_2)$. Определим его действие как оператора из $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathcal{H}_1)$ в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathcal{H}_2)$ равенством

$$A\Phi := \sum_{\alpha\in\mathcal{T}} A\Phi_\alpha\mathbf{h}_\alpha, \ \text{for} \ \ \Phi = \sum_{\alpha\in\mathcal{T}}\Phi_\alpha\mathbf{h}_\alpha \in (\mathcal{S})_{-\rho}(\mathcal{H}_1). \tag{6.1}$$

Определенный таким образом, оператор A становится линейным непрерывным оператором, действующим из $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathcal{H}_1)$ в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathcal{H}_2)$.

Если A неограничен, определим $(\operatorname{dom} A)$ как множество всех $\sum\limits_{\alpha\in\mathcal{T}}\Phi_\alpha\mathbf{h}_\alpha\in(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathcal{H}_1)$ таких, что $\Phi_\alpha\in\operatorname{dom} A$ для всех $\alpha\in\mathcal{T}$ и условие

$$\sum_{\alpha\in\mathcal{T}}(\alpha!)^{1-\rho}\|A\Phi_\alpha\|^2_{H_2}\big(2\mathbb{N}\big)^{-2p\alpha}<\infty$$

выполнено для некоторого $p\in\mathbb{N}$.

Тогда равенство (6.1) определяет на $(\operatorname{dom} A)$ линейный оператор, действующий из $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathcal{H}_1)$ в $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathcal{H}_2)$. Нетрудно проверить его замкнутость для оператора A, замкнутого как оператор, действующий из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$.

Предложение 6.1. *Пусть A — линейный замкнутый оператор из $\mathcal{H}_1$ в $\mathcal{H}_2$. Для любого $\Phi\in(\operatorname{dom}A)\subseteq(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathcal{H}_1)$, $\rho\in[0;1)$, верно $\big[\mathrm{S}\Phi\big](\theta)\in\operatorname{dom}A\subseteq\mathcal{H}_1$ при всех $\theta\in\mathcal{S}$, и*

$$\big[\mathrm{S}A\Phi\big](\theta)=A\big[\mathrm{S}\Phi\big](\theta),\quad \theta\in\mathcal{S}.$$

6.1. Уравнения с аддитивным шумом. Пусть $\mathbb{H}$ и H — сепарабельные гильбертовы пространства, A — замкнутый линейный оператор, действующий в H, $B\in\mathcal{L}(\mathbb{H},H)$. Рассмотрим следующую стохастическую задачу Коши:

$$dX(t)=AX(t)dt+BdW(t),\quad X(0)=\zeta, \tag{6.2}$$

где $W(t)$ — $\mathbb{H}$-значный цилиндрический винеровский процесс. Это дифференциальная форма записи уравнения Ито

$$X(t)=\int_0^t AX(t)\,dt+\int_0^t B\,dW(t).$$

Из связи между интегралами Ито и Хицуды—Скорохода следует, что во введенных выше пространствах обобщенных гильбертовозначных случайных величин это уравнение может быть записано в виде

$$X(t)=\int_0^t AX(t)\,dt+\int_0^t B\diamond\mathbb{W}(t)\,dt.$$

Принимая во внимание то, что $B\diamond\mathbb{W}(t)=B\mathbb{W}(t)$ в силу того, что B детерминирован, видим, что задача Коши (6.2) в введенных выше пространствах обобщенных случайных величин принимает следующий вид:

$$X'(t)=AX(t)+B\mathbb{W}(t),\quad t\geqslant 0,\qquad X(0)=\zeta, \tag{6.3}$$

где $\mathbb{W}(t)$ — $\mathbb{H}$-значный белый шум. В этом разделе мы получим результат о существовании и единственности решения этой задачи в пространстве $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$, т. е. о существовании и единственности $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$-значной дифференцируемой функции $X(t)$, удовлетворяющей (6.3).

Теорема 6.1. *Пусть A является генератором полугруппы $\{S(t),t\geqslant 0\}$ класса C_0 в гильбертовом пространстве H, $B\in\mathcal{L}(\mathbb{H},H)$, $\mathbb{W}$ — определенный выше цилиндрический белый шум. Тогда*

$$X(t)=S(t)\zeta+\int_0^t S(t-s)B\mathbb{W}(s)ds \tag{6.4}$$

— единственное решение задачи Коши (6.3) *в пространстве $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$ для любого $\zeta\in\big(\operatorname{dom}A\big)$.*

Доказательство. Пусть $X(t)=\sum\limits_\alpha X_\alpha(t)\mathbf{h}_\alpha\in(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$, $\zeta=\sum\limits_\alpha\zeta_\alpha\mathbf{h}_\alpha\in\big(\operatorname{dom}A\big)$. Процесс $X(t)$ является решением задачи (6.3), только если функции $X_\alpha(t)$ являются решениями задач Коши

$$X'_{\varepsilon_n}(t)=AX_{\varepsilon_n}(t)+B\mathbb{W}_{\varepsilon_n}(t),\quad X_{\varepsilon_n}(0)=\zeta_{\varepsilon_n},\quad \text{при } \alpha=\varepsilon_n,\ n\in\mathbb{N}, \tag{6.5}$$

$$X'_\alpha(t)=AX_\alpha(t),\quad X_\alpha(0)=\zeta_\alpha\qquad \text{при } \alpha\neq\varepsilon_n \tag{6.6}$$

в пространстве H.

Поскольку A является генератором полугруппы класса C_0, а $\zeta_\alpha\in\operatorname{dom}A$,

$$X_\alpha(t):=S(t)\zeta_\alpha \tag{6.7}$$

— единственное решение задачи (6.6) для любого $\alpha \neq \varepsilon_n,\ n \in \mathbb{N}$.

Для любого $n \in \mathbb{N}$ функция $B\mathbb{W}_{\varepsilon_n}(t) = Be_j\xi_i(t)$, где $i, j \in \mathbb{N}$ и $n = n(i,j)$, непрерывно дифференцируема при любом $t \in \mathbb{R}$. Поэтому функция

$$v_n(t) := \int_0^t S(t-s)B\mathbb{W}_{\varepsilon_n}(s)\,ds = \int_0^t S(s)B\mathbb{W}_{\varepsilon_n}(t-s)\,ds$$

дифференцируема и, в силу известных свойств полугрупп класса C_0, непрерывна и принимает значения, принадлежащие $\operatorname{dom} A$ при всех $t > 0$. Таким образом, по [32, теорема 2.4], задача Коши (6.5) имеет единственное решение

$$X_{\varepsilon_n}(t) = S(t)\zeta_{\varepsilon_n} + \int_0^t S(t-s)B\mathbb{W}_{\varepsilon_n}(s)\,ds, \quad n \in \mathbb{N}. \tag{6.8}$$

Рассмотрим $X(t) = \sum\limits_{\alpha} X_\alpha(t)\mathbf{h}_\alpha$, где $X_\alpha(t)$ определены равенствами (6.7) и (6.8). Покажем, что $X(t) \in (\mathcal{S})_{-0}(H)$ и верно (6.4).

Пусть $M > 0$ и $a > 0$ таковы, что $\|S(t)\| \leqslant Me^{at}$ при $t \geqslant 0$. Из оценки

$$\int_0^t \big\|S(t-s)B\mathbb{W}_{\varepsilon_n}(s)\big\|_H^2\,ds \leqslant M^2\|B\|^2 \int_0^t e^{2a(t-s)}|\xi_{i(n)}(s)|^2\,ds \leqslant M^2\|B\|^2 e^{2at}$$

следует, что при $p \geqslant 1$ имеем

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \int_0^t \big\|S(t-s)B\mathbb{W}_{\varepsilon_n}(s)\big\|_H^2\,ds(2\mathbb{N})^{-2p\varepsilon_n} < \infty.$$

В силу предложения 2.5, отсюда следует, что интеграл $\int\limits_0^t S(t-s)B\mathbb{W}(s)ds$ существует как элемент $(\mathcal{S})_{-0}(H)$ при всех $t \geqslant 0$ и

$$\int_0^t S(t-s)B\mathbb{W}(s)ds = \sum_{n=1}^{\infty} \int_0^t S(t-s)B\mathbb{W}_{\varepsilon_n}(s)\,ds.$$

Очевидно, $S(t)\zeta = \sum\limits_{\alpha\in\mathcal{T}} S(t)\zeta_\alpha\mathbf{h}_\alpha \in (\mathcal{S})_{-0}(H)$, таким образом, $X(t)$ в равенстве (6.4) определен как элемент $((S))_{-0}(H)$.

Для завершения доказательства достаточно показать, что $X(t)$ дифференцируема при $t \geqslant 0$. Тогда (6.3) следует из (6.5), (6.6) и замкнутости A.

Пусть $t \in [0;T)$, тогда, поскольку $\zeta_\alpha \in \operatorname{dom} A$ для всех $\alpha \in \mathcal{T}$, имеем

$$\left\|\frac{S(t+h)\zeta_\alpha - S(t)\zeta_\alpha}{h}\right\| = \frac{1}{|h|}\left\|\int_t^{t+h} S(s)A\zeta_\alpha\,ds\right\| \leqslant Me^{aT}\|A\zeta_\alpha\|.$$

Так как $\zeta \in (\operatorname{dom} A) \subset (\mathcal{S})_{-0}(H)$, имеем $\|A\zeta\|_{-p,-0}^2 = \sum\limits_{\alpha\in\mathcal{T}} (\alpha!)\|A\zeta_\alpha\|^2(2\mathbb{N})^{-2p\alpha} < \infty$ для некоторого $p \in \mathbb{N}$, таким образом, для всех $h \in \mathbb{R}$ таких, что $t+h \in [0;T]$, имеем

$$\left\|\frac{S(t+h)\zeta - S(t)\zeta}{h}\right\| \leqslant Me^{aT}\|A\zeta\|_{-p,-0}. \tag{6.9}$$

Кроме того,

$$\left\| \frac{1}{h} \left(\int_0^{t+h} S(t+h-s)\mathbb{W}_{\varepsilon_{n(i,j)}}(s)\,ds - \int_0^t S(t-s)\mathbb{W}_{\varepsilon_n}(s)\,ds \right) \right\| =$$

$$= \frac{1}{|h|} \left\| \int_t^{t+h} S(s)\xi_i(t+h-s)Be_j\,ds + \int_0^t S(s)\big(\xi_i(t+h-s)-\xi_i(t-s)\big)Be_j \right\| \leqslant$$

$$\leqslant Me^{aT}\|B\|\big(\sup_{[0;T]}|\xi_i(t)| + T\sup_{[0;T]}|\xi_i'(t)|\big) = O(i^{\frac{5}{12}})$$

в силу оценки (6.9) равномерно по h таким, что $t+h\in[0;T]$. Отсюда следует, что

$$\left\| \frac{1}{h} \left(\int_0^{t+h} S(t+h-s)B\mathbb{W}(s)\,ds - \int_0^t S(t-s)B\mathbb{W}(s)\,ds \right) \right\|_{-p,\rho} \leqslant K \qquad (6.10)$$

при $p \geqslant 2$ для некоторых $K > 0$ и h, таких, что $t+h \in [0;T]$. Из (6.9) и (6.10) следует, что $\left\| \dfrac{X_\alpha(t+h)-X_\alpha(t)}{h} \right\|_{-p,-0}$ ограничено при $t+h\in[0;T]$ для некоторого $p\in\mathbb{N}$. В силу следствия 2.2 отсюда и из дифференцируемости всех X_α, $\alpha\in\mathcal{T}$, следует, что $X'(t)$ существует. □

6.2. Пример. Стохастическое уравнение теплопроводности. Рассмотрим следующую задачу Коши для уравнения теплопроводности:

$$\begin{aligned}
&\frac{\partial u(t,\bar{x})}{\partial t} = \triangle u(t,\bar{x}), && t\geqslant 0, \quad \bar{x}=(x_1,\dots,x_m)\in\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^m,\\
&u(t,\bar{x}) = 0, && t\geqslant 0, \quad \bar{x}\in\partial\mathcal{D},\\
&u(0,\bar{x}) = \zeta(\bar{x}), && \bar{x}\in\partial\mathcal{D}.
\end{aligned}$$

Через $\partial\mathcal{D}$ обозначаем границу области $\mathcal{D}\subset\mathbb{R}^m$. Эту задачу можно записать как задачу Коши для дифференциально-операторного уравнения

$$\frac{du(t)}{dt} = Au(t), \quad t\geqslant 0, \quad u(0)=\zeta \qquad (6.11)$$

в гильбертовом пространстве $\mathbb{H} = L^2\big(\mathcal{D}\big)$, где $A=\Delta$ с областью определения $\operatorname{dom} A$ в пространствах Соболева:

$$\operatorname{dom} A = \left\{ u\in L^2\big(\mathcal{D}\big) \,\middle|\, u\in\mathcal{H}^{2,2}\cap\mathcal{H}_0^{1,2} \right\}.$$

Предположим, что $\mathcal{D}=[0;1]^m$. В этом случае множество функций

$$\left\{ \varphi_{n_1,\dots,n_m}(x_1,\dots,x_m) := 2^{m/2}\prod_{k=1}^m \sin\left(\pi n_k x_k\right) \,\middle|\, n_1,\dots,n_m\in\mathbb{N}\cup\{0\} \right\} \qquad (6.12)$$

состоит из собственных функций определенного выше оператора A и образует ортонормированный базис в $\mathbb{H}$. Соответствующие собственные значения

$$\left\{ -\sum_{k=1}^m \pi^2 n_k^2 \,\middle|\, n_1,\dots,n_m\in\mathbb{N}\cup\{0\} \right\} \qquad (6.13)$$

образуют его спектр. Зафиксируем некоторое упорядочение множеств (6.12) и (6.13) и обозначим их через $\{e_j\}_{j=1}^\infty$ и $\{\lambda_j\}_{j=1}^\infty$ соответственно. Оператор A порождает полугруппу класса C_0, определенную формулой

$$S(t)u = \sum_{j=1}^\infty e^{\lambda_j t}(e_j,u)_{\mathbb{H}}e_j.$$

Рассмотрим следующее стохастическое возмущение задачи (6.11):

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + \mathbb{W}(t), \quad u(0)=\zeta.$$

По теореме 6.1 эта задача имеет единственное решение в пространстве $(\mathcal{S})_{-\rho}(\mathbb{H})$. Для него есть точная формула (6.4), откуда мы получаем

$$X(t) = \sum_{j=1}^{\infty} e^{\lambda_j t}(e_j, \zeta)_{\mathbb{H}} e_j + \sum_{i,j=1}^{\infty} \int\limits_0^t e^{\lambda_j(t-s)}\xi_i(s)\, ds \mathbf{h}_{\varepsilon_{n(i,j)}} e_j.$$

Рассмотрим норму $X(t)$ в $(\mathcal{S}_{-p})_{-\rho}(H)$. Имеем

$$\|X(t)\|^2_{-p,-\rho} = \|S(t)\zeta\|^2_{\mathbb{H}} + \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \left| \int\limits_0^t e^{\lambda_j(t-s)}\xi_i(s)\, ds \right|^2 \bigl(2n(i,j)\bigr)^{-2p}. \tag{6.14}$$

Легко увидеть, что она конечна для любого $p \geqslant 1$. Таким образом, решение принимает значения в $(\mathcal{S}_{-1})_{-0}(H)$.

Заметим, что, поскольку мы имеем

$$\sum_{i\in\mathbb{N}} \left| \int\limits_0^t e^{\lambda_j(t-s)}\xi_i(s)\, ds \right|^2 = \left\| e^{\lambda_j(t-\cdot)} 1_{[0;t]} \right\|_0^2 = \int\limits_0^t e^{2\lambda_j(t-s)} ds = \frac{1-e^{2\lambda_j t}}{2|\lambda_j|} \leqslant \frac{1}{2|\lambda_j|},$$

ряд в правой части равенства (6.14) сходится при $p = 0$ и $\rho = 0$, только если $m = 1$. Таким образом, это единственный случай, когда решение принимает значения в пространстве $(L^2)(H) = (\mathcal{S}_{-0})_{-0}(H)$.

6.3. Уравнения с мультипликативным шумом. Пусть H и $\mathbb{H}$ — сепарабельные гильбертовы пространства, A — линейный замкнутый оператор, действующий в H, $B(\cdot) \in \mathcal{L}\bigl(H, \mathcal{L}(\mathbb{H}; H)\bigr)$, $\zeta \in (\mathrm{dom} A) \subseteq (\mathcal{S})_{-\rho}(H)$. Рассмотрим следующую задачу Коши:

$$dX(t) = AX(t)dt + B(X(t))dW(t),\ t \geqslant 0, \quad X(0) = \zeta,$$

где $W(t)$ — $\mathbb{H}$-значный цилиндрический винеровский процесс. Она соответствует следующему интегральному уравнению Ито:

$$X(t) = \zeta + \int\limits_0^t AX(s)ds + \int\limits_0^t B(X(s))dW(s),\ t \geqslant 0.$$

Заменяя интеграл Ито на интеграл Хицуды—Скорохода и дифференцируя по t, мы приходим к задаче Коши

$$\frac{dX(t)}{dt} = AX(t) + B\bigl(X(t)\bigr) \diamond \mathbb{W}(t),\ t \geqslant 0, \quad X(0) = \zeta. \tag{6.15}$$

Изучим существование и единственность ее решения в пространстве $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$, где $\rho \in [0;1)$, т. е. существование и единственность $(\mathcal{S})_{-\rho}(H)$-значной дифференцируемой функции, удовлетворяющей (6.15). Заметим, что если Q — ядерный оператор, действующий в $\mathbb{H}$ и удовлетворяющий условию предложения 5.1 для некоторого $p \in \mathbb{N}$, то из того факта, что для любого $X(t) \in (\mathcal{S})_{-\rho}(H)$ имеем $B\bigl(X(t)\bigr) \in (\mathcal{S})_{-\rho}\bigl(\mathcal{L}_2(\mathbb{H}_Q; \mathbb{H})\bigr)$, следует, что произведение Уика в уравнении (6.15) определено.

Применяя S-преобразование к задаче (6.15), получим следующую задачу:

$$\frac{d}{dt}\hat{X}(t,\theta) = A\hat{X}(t,\theta) + B\bigl(\hat{X}(t,\theta)\bigr)\hat{\mathbb{W}}(t,\theta),\ t \geqslant 0, \quad \hat{X}(0,\theta) = \hat{\zeta}(\theta), \quad \theta \in \mathcal{S}, \tag{6.16}$$

где $\hat{X}(t,\theta) := \mathrm{S}[X(t)](\theta)$, $\hat{\mathbb{W}}(t,\theta) := \mathrm{S}[\mathbb{W}(t)](\theta)$, $\hat{\Phi}(\theta) := \mathrm{S}\Phi(\theta)$ и $\hat{\zeta}(\theta) := \mathrm{S}\zeta(\theta)$.

Будем предполагать впоследствии, что оператор B в уравнении удовлетворяет следующему условию:

Предположение 6.1. *Для любого* $y \in \mathbb{H}$

(B1) $B(\mathrm{dom}A)y \subseteq \mathrm{dom}A$;

(B2) *Ограничен оператор* $C(\cdot)y : \mathrm{dom}A \to \mathcal{L}(H)$, *определенный равенством*

$$C(x)y := AB(x)y - B(Ax)y, \quad x \in \mathrm{dom}A;$$

(B3) $\ker B(\cdot)y = \{0\}$ *для всех* $y \in \mathbb{H}$, $y \neq 0$.

Заметим, что из принципа равномерной ограниченности следует, что если оператор B удовлетворяет предположению 6.1, то существует $M_{AB} > 0$ такое, что выполняется следующая оценка:

$$\|C(x)y\| \leqslant M_{AB}\|x\|\,\|y\|, \quad x \in \mathrm{dom}A,\ y \in \mathbb{H}. \tag{6.17}$$

Пусть A является генератором полугруппы $\{U(t),\, t \geqslant 0\}$ класса C_0. Пусть $M > 0$ и $a \in \mathbb{R}$ таковы, что выполнено

$$\|U(t)\| \leqslant Me^{at}, \quad t \geqslant 0. \tag{6.18}$$

Используем метод последовательных приближений для доказательства существования решения задачи (6.16).

Определим последовательность линейных операторов $\{T_k(t,\theta)\}$, $t \geqslant 0$, $\theta \in \mathcal{S}$, положив

$$T_0(t,\theta) = U(t),$$

$$T_k(t,\theta)x = \int_0^t U(t-s)B\big(T_{k-1}(s,\theta)x\big)\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds, \quad x \in H,\ k = 1, 2, \ldots.$$

Для получения главного результата нам понадобится несколько лемм.

Лемма 6.1. *Для любых* $t \geqslant 0$, $\theta \in \mathcal{S}$ *и* $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ *выполняется следующая оценка*:

$$\|T_k(t,\theta)\|_{\mathcal{L}(H)} \leqslant M^{k+1}\|B\|^k e^{at}|\theta|_0^k\sqrt{\frac{t^k}{k!}}, \tag{6.19}$$

где $M > 0$ *и* $a \in \mathbb{R}$ — *константы из оценки* (6.18), $\|B\| = \|B\|_{\mathcal{L}(H,\mathcal{L}(\mathbb{H};H))}$.

Доказательство. Предположим, что (6.19) выполняется для некоторого $k \in \mathbb{N}$. Тогда для любого $x \in H$ имеем:

$$\begin{aligned}
\|T_{k+1}(t,\theta)x\| &= \left\|\int_0^t U(t-s)B\big(T_k(s,\theta)x\big)\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds\right\| \leqslant \\
&\leqslant \int_0^t \big\|U(t-s)B\big(T_k(s,\theta)x\big)\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\big\|\,ds \leqslant \\
&\leqslant M\|B\|\int_0^t e^{a(t-s)}\|T_k(s,\theta)x\|\|\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\|\,ds \leqslant \\
&\leqslant M^{k+2}\|B\|^{k+1}e^{at}|\theta|_0^k\int_0^t\sqrt{\frac{s^k}{k!}}\,\|\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\|\,ds\,\|x\| \leqslant \\
&\leqslant M^{k+2}\|B\|^{k+1}e^{at}|\theta|_0^k\left(\int_0^t\frac{s^k}{k!}\,ds\right)^{1/2}\left(\int_0^t\|\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\|^2\,ds\right)^{1/2}\|x\| \leqslant \\
&\leqslant M^{k+2}\|B\|^{k+1}e^{at}|\theta|_0^k\sqrt{\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}}\|\hat{\mathbb{W}}(\cdot,\theta)\|_{L^2(\mathbb{R};H)}\,\|x\| \leqslant \\
&\leqslant M^{k+2}\|B\|^{k+1}e^{at}|\theta|_0^{k+1}\sqrt{\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}}\,\|x\|.
\end{aligned}$$

Поскольку оценка (6.19) верна при $k = 0$, отсюда следует по индукции, что она верна для всех $k \in \mathbb{N}$. □

Лемма 6.2. *Для любых* $t \geqslant 0$, $\theta \in \mathcal{S}$, $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\zeta \in (\mathrm{dom} A)$ *выполнена оценка*

$$\|AT_k(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta)\| \leqslant M^{k+1}\|B\|^{k-1}|\theta|_0^k e^{at}\sqrt{\frac{t^k}{k!}}\Big(\|B\|\|A\hat{\zeta}(\theta)\| + kM_{AB}\|\hat{\zeta}(\theta)\|\Big), \tag{6.20}$$

где $M > 0$ *и* $a \in \mathbb{R}$ — *константы из оценки* (6.18), $\|B\| = \|B\|_{\mathcal{L}(H,\mathcal{L}(\mathbb{H};H))}$, M_{AB} — *константа из оценки* (6.17).

Доказательство. При $k = 0$, используя свойства полугрупп класса C_0, получим:

$$\|AT_0(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta)\| = \|AU(t)\hat{\zeta}(\theta)\| = \|U(t)A\hat{\zeta}(\theta)\| \leqslant Me^{at}\|\hat{\zeta}(\theta)\|. \tag{6.21}$$

Далее, имеем:

$$\begin{aligned}
AT_k(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta) &= \int_0^t AU(t-s)B\big(T_{k-1}(s,\theta)\hat{\zeta}(\theta)\big)\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds = \\
&= \int_0^t U(t-s)AB\big(T_{k-1}(s,\theta)\hat{\zeta}(\theta)\big)\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds = \\
&= \int_0^t U(t-s)\Big[B\big(AT_{k-1}(s,\theta)\hat{\zeta}(\theta)\big)\hat{\mathbb{W}}(s,\theta) + C\big(T_{k-1}(s,\theta)\hat{\zeta}(\theta)\big)\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\Big]\,ds.
\end{aligned}$$

Если (6.20) верно для некоторого $k \in \mathbb{N}$, в силу полученного выше представления и оценки (6.19), получаем:

$$\begin{aligned}
&\Big\|AT_{k+1}(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta)\Big\| \leqslant \\
&\leqslant \int_0^t Me^{a(t-s)}\Bigg[M^{k+1}\|B\|^k|\theta|^k_{L_2(\mathbb{R})}e^{as}\sqrt{\frac{s^k}{k!}}\Big(\|B\|\|A\hat{\zeta}(\theta)\| + kM_{AB}\|\hat{\zeta}(\theta)\|\Big)\|\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\| + \\
&\qquad + M_{AB}M^{k+1}\|B\|^k e^{as}|\theta|^k_{L_2(\mathbb{R})}\sqrt{\frac{s^k}{k!}}\|\hat{\zeta}(\theta)\|\|\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\|\Bigg]\,ds = \\
&= M^{k+2}\|B\|^k|\theta|^k_{L_2(\mathbb{R})}e^{at}\Big(\|B\|\|A\hat{\zeta}(\theta)\| + (k+1)M_{AB}\|\hat{\zeta}(\theta)\|\Big)\int_0^t\sqrt{\frac{s^k}{k!}}\|\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\|\,ds \leqslant \\
&\leqslant M^{k+2}\|B\|^k|\theta|^k_{L_2(\mathbb{R})}e^{at}\Big(\|B\|\|A\hat{\zeta}(\theta)\| + (k+1)M_{AB}\|\hat{\zeta}(\theta)\|\Big)\times \\
&\qquad \times\Bigg(\int_0^t\frac{s^k}{k!}\,ds\Bigg)^{1/2}\Bigg(\int_0^t\|\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\|^2\,ds\Bigg)^{1/2} \leqslant \\
&\leqslant M^{k+2}\|B\|^k|\theta|_0^{k+1}e^{at}\sqrt{\frac{t^{k+1}}{(k+1)!}}\Big(\|B\|\|A\hat{\zeta}(\theta)\| + (k+1)M_{AB}\|\hat{\zeta}(\theta)\|\Big).
\end{aligned}$$

Отсюда и из (6.21), по индукции, следует утверждение леммы. □

Рассмотрим ряд

$$T(t,\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} T_k(t,\theta). \tag{6.22}$$

Из леммы 6.1 следует, что для любых $n, m \in \mathbb{N}$ верна следующая оценка:

$$\sum_{k=n}^{n+m} \|T_k(t,\theta)\| \leqslant Me^{at} \sum_{k=n}^{n+m} \frac{\left(M\sqrt{2}\|B\||\theta|_0\sqrt{t}\right)^k}{\sqrt{k!}} \frac{1}{\sqrt{2^k}} \leqslant \\ \leqslant Me^{at} \left(\sum_{k=n}^{n+m} \frac{\left(2M^2\|B\|^2|\theta|_0^2 t\right)^k}{k!}\right)^{1/2} \left(\sum_{k=n}^{n+m} \frac{1}{2^k}\right)^{1/2}. \tag{6.23}$$

Отсюда следует, что ряд (6.22) абсолютно сходится в $\mathcal{L}(H)$ для любых $t \geqslant 0$, $\theta \in \mathcal{S}$. Таким образом, $T(t,h) \in \mathcal{L}(H)$.

Предложение 6.2. *Для любых* $\zeta \in (\mathrm{dom} A)$, $\theta \in \mathcal{S}$ *функция* $\hat{X}(t,\theta) := T(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta)$ *является единственным решением задачи* (6.16).

Доказательство. Из предложения 6.1 и свойств полугрупп класса C_0 следует, что $T_0(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta) \in \mathrm{dom} A$ для любых $\zeta \in (\mathrm{dom} A)$, $t \geqslant 0$ и $\theta \in \mathcal{S}$. Условие (B1) влечет за собой $B\big(\mathrm{dom} A\big)\hat{W}(t,\theta) \subseteq \mathrm{dom} A$ для всех $t \geqslant 0$ и $\theta \in \mathcal{S}$. По индукции отсюда следует, что $T_k(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta) \in \mathrm{dom} A$ для всех $\zeta \in (\mathrm{dom} A), k \in \mathbb{N}$, $t \geqslant 0$ и $\theta \in \mathcal{S}$. Из (B1) также следует, что $B\big(T_k(s,\theta)\hat{\zeta}(\theta)\big)\hat{\mathbb{W}}(t,\theta) \in \mathrm{dom} A$. Кроме того, имеем

$$\frac{d}{dt} U(t-s) B\big(T_k(s,\theta)\hat{\zeta}(\theta)\big)\hat{\mathbb{W}}(t,\theta) = AU(t-s)B\big(T_k(s,\theta)\hat{\zeta}(\theta)\big)\hat{\mathbb{W}}(t,\theta), \quad t \geqslant 0, \theta \in \mathcal{S}.$$

Таким образом, для любого $\zeta \in (\mathrm{dom} A)$ получаем

$$\frac{d}{dt} T_0(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta) = AT_0(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta), \tag{6.24}$$

$$\frac{d}{dt} T_k(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta) = \int_0^t AU(t-s)B\big(T_{k-1}(s,\theta)\hat{\zeta}(\theta)\big)\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds + B\big(T_{k-1}(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta)\big)\hat{\mathbb{W}}(t,\theta). \tag{6.25}$$

Поскольку A замкнут, можем переписать равенство (6.25) в виде

$$\frac{d}{dt} T_k(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta) = AT_k(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta) + B\big(T_{k-1}(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta)\big)\hat{\mathbb{W}}(t,\theta). \tag{6.26}$$

В силу леммы 6.2 получаем следующую оценку:

$$\sum_{k=n+1}^{m} \|AT_k(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta)\| \leqslant \\ \leqslant Me^{at}\left(\sum_{k=n+1}^{m} \frac{(\sqrt{2}M\|B\||\theta|_0\sqrt{t})^k}{\sqrt{k!}} \frac{1}{\sqrt{2^k}}\right)\|A\hat{\zeta}(\theta)\| + \\ + \frac{M}{\|B\|}e^{at}\left(\sum_{k=n+1}^{m} \frac{(\sqrt{2}M\|B\||\theta|_0\sqrt{t})^k}{\sqrt{k!}} \frac{k}{\sqrt{2^k}}\right) M_{AB}\|\hat{\zeta}(\theta)\| \leqslant \\ \leqslant Me^{at}\left(\sum_{k=n+1}^{m} \frac{\left(2M^2\|B\|^2|\theta|_0^2 t\right)^k}{k!}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=n+1}^{m} \frac{1}{2^k}\right)^{1/2}\|A\hat{\zeta}(\theta)\| + \\ + \frac{M}{\|B\|}e^{at}\left(\sum_{k=n+1}^{m} \frac{\left(2M^2\|B\|^2|\theta|_0^2 t\right)^k}{k!}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=n+1}^{m} \frac{k^2}{2^k}\right)^{1/2} M_{AB}\|\hat{\zeta}(\theta)\|.$$

Из этой оценки следует, что ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty} AT_k(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta)$ сходится в пространстве H для всех $\theta \in \mathcal{S}$, $\zeta \in (\mathrm{dom} A)$. Суммируя равенства (6.24) и (6.26) по $k \in \mathbb{N}$, получим в правой части ряд, сходящийся в H при всех $t \geqslant 0$, $\theta \in \mathcal{S}$. Таким образом, доказано, что $\hat{X}(t,\theta) = T(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta)$ является решением задачи (6.16).

Чтобы доказать единственность, заметим, что если $\hat{X}(\cdot,\theta)$ — решение задачи (6.16) для некоторого $\theta\in\mathcal{S}$, то это решение уравнения

$$\hat{X}(t,\theta)=U(t)\hat{\zeta}(\theta)+\int\limits_0^t U(t-s)B(\hat{X}(s,\theta))\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds.\quad t\geqslant 0.$$

(Обратное, вообще говоря, неверно.) Поэтому достаточно доказать, что уравнение

$$\int\limits_0^t U(t-s)B(\hat{X}(s,\theta))\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds=0,\quad t\geqslant 0, \tag{6.27}$$

имеет только тривиальное решение $X(\cdot,h)\equiv 0$ на $[0;\infty)$ для любого $\theta\in\mathcal{S}$.

Применяя преобразование Лапласа к обеим частям (6.27), получим при $\operatorname{Re}\lambda>a$:

$$\int\limits_0^\infty dt\,e^{\lambda t}\int\limits_0^t U(t-s)B(\hat{X}(s,\theta))\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds=\int\limits_0^\infty ds\int\limits_s^\infty e^{\lambda t}U(t-s)B(\hat{X}(s,\theta))\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,dt=$$
$$=\int\limits_0^\infty ds\int\limits_0^\infty e^{\lambda(t+s)}U(t)B(\hat{X}(s,\theta))\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,dt=(\lambda-A)^{-1}\int\limits_0^\infty e^{\lambda s}B(\hat{X}(s,\theta))\hat{\mathbb{W}}(s,\theta)\,ds.$$

Из свойств резольвенты A и преобразования Лапласа следует, что если $\hat{X}(\cdot,\theta)$ — решение уравнения (6.27) при любом $\theta\in\mathcal{S}$, то $B(\hat{X}(\cdot,\theta))\hat{\mathbb{W}}(\cdot,\theta)\equiv 0$ на $[0;\infty)$ для любого $\theta\in\mathcal{S}$. Полагая $\theta=\xi_{n(i,j)}, i,j\in\mathbb{N}$, получим $B(\hat{X}(\cdot,\theta))\hat{\mathbb{W}}(\cdot,\theta)=B(\xi_i(\cdot)\hat{X}(\cdot,\xi_{n(i,j)}))e_j\equiv 0$ на $[0;\infty)$. Следовательно, $\hat{X}(\cdot,\theta)\equiv 0$ на $[0;\infty)$ для всех $\theta\in\mathcal{S}$. □

Теорема 6.2. *Пусть A — линейный, плотно определенный в H генератор полугруппы класса C_0, $B(\cdot):H\to\mathcal{L}(\mathbb{H};H)$ удовлетворяет предположению* 6.1. *Тогда задача Коши* (6.15) *имеет единственное решение в пространстве $(\mathcal{S})_{-0}(H)$ для любого $\zeta\in(\mathrm{dom}A)\subseteq(\mathcal{S})_{-0}(H)$.*

Доказательство. Из предложения 6.2 следует, что в условиях теоремы задача (6.16) имеет единственное решение $\hat{X}(t,\theta)=T(t,\theta)\hat{\zeta}(\theta)$ для любых $\zeta\in(\mathrm{dom}A)$, $\theta\in\mathcal{S}$. При этом из (6.23) следует оценка:

$$\|T(t,\theta)\|\leqslant\sum_{k=0}^\infty\|T_k(t,\theta)\|\leqslant Me^{at}\sum_{k=0}^\infty\frac{\left(M\sqrt{2}\|B\||\theta|_0\sqrt{t}\right)^k}{\sqrt{k!}}\,\frac{1}{\sqrt{2^k}}\leqslant$$
$$\leqslant Me^{at}\left(\sum_{k=0}^\infty\frac{\left(2M^2\|B\|^2|\theta|_0^2t\right)^k}{k!}\right)^{1/2}\left(\sum_{k=0}^\infty\frac{1}{2^k}\right)^{1/2}=M\sqrt{2}\,e^{at}\exp\left(M^2\|B\|^2|\theta|_0^2t\right).$$

В силу (3.5) имеем:

$$\|\hat{\zeta}(\theta)\|\leqslant\|\zeta\|_{-p,-0}\exp\left(|h|_p^2\right),\quad\theta\in\mathcal{S},$$

для некоторого $p\in\mathbb{N}$. Следовательно, для всех $t\geqslant 0$ имеем следующую оценку:

$$\begin{aligned}\|\hat{X}(t,\theta)\|&\leqslant M\sqrt{2}\,e^{at}\exp\left(M^2\|B\|^2|\theta|_0^2t+|\theta|_p^2\right)\|\zeta\|_{-p,-0}\leqslant\\&\leqslant M\sqrt{2}\,e^{at}\exp\Big(\left(M^2\|B\|^2t+1\right)|\theta|_p^2\Big)\|\zeta\|_{-p,-0},\quad\theta\in\mathcal{S}.\end{aligned}\tag{6.28}$$

Отсюда следует, что для любого $t\geqslant 0$ $\hat{X}(t,\theta)$ является S-преобразованием единственной обобщенной случайной величины $X(t)\in(\mathcal{S})_{-0}(H)$, которая является единственным решением задачи (6.16). □

6.4. Пример из популяционной динамики. Рассмотрим пример введения стохастического возмущения в уравнение в частных производных. Рассмотрим упрощенный пример уравнения, возникающего в популяционной динамике.

Начнем с детерминированного уравнения

$$\frac{\partial u(t,s)}{\partial t} = -\frac{\partial u(t,s)}{\partial s} - m(s)u(t,s), \quad t \geqslant 0, \quad 0 \leqslant s \leqslant 1. \tag{6.29}$$

Это уравнение Мак Кендрика—фон Ферстера популяции, структурированной по возрасту. Здесь t — время, s обозначает возраст, $u(t,s)$ — функция плотности, так что $u(t,s)ds$ представляет собой количество особей в популяции, возраст которых лежит в интервале $[s; s+ds]$ в момент t. Структура популяции меняется в результате процессов старения и смерти. Старение моделируется первым слагаемым в правой части, так как оператор $-\dfrac{\partial}{\partial s}$ является генератором полугруппы правого сдвига. Множитель $m(s)$ представляет собой долю особей возраста s, которые погибают. Предположим, что $m \in L_\infty[0;1]$. Для простоты рассмотрим граничное условие

$$u\,(t,0) = 0, \quad t > 0. \tag{6.30}$$

Начальная структура популяции описывается условием

$$u(0,s) = \varphi(s), \quad 0 \leqslant s \leqslant 1. \tag{6.31}$$

Задача (6.29)–(6.31) может быть записана как задача Коши

$$u'(t) = Au(t), \ t \geqslant 0, \quad u(0) = \varphi \tag{6.32}$$

в гильбертовом пространстве $H = L^2[0,1]$, где A — оператор, определенный равенством

$$[A\varphi](s) = -\frac{d}{ds}\varphi(s) - m(s)\varphi(s) \tag{6.33}$$

с областью определения

$$\mathrm{dom}(A) = \left\{\varphi \in H, \ \varphi' \in H, \varphi(0) = 0, \ t > 0\right\}.$$

Используя методы теории возмущения полугрупп, можно показать, что A является генератором полугруппы класса C_0 в H (см., например, [3, параграф 3.5]).

Предположим теперь, что процесс гибели особей подвержен случайным флуктуациям вследствие влияния внешней среды. Естественно полагать, что функция m представляет среднее значение доли погибающих особей. Таким образом, мы должны заменить эту функцию в уравнении на $m + \mu(t)$, где $\mu(t)$ — «шум». Здесь возникает проблема, связанная с тем, что в данной ситуации невозможно использовать определенные выше гауссовские белые шумы (Q-белый шум и цилиндрический белый шум) непосредственно, так как для любого t величина $\mu(t)$ должна быть функцией переменной s такой, что умножение на нее является ограниченным оператором в $H = L^2[0,1]$. Чтобы преодолеть эту проблему, положим $\mathbb{H} = L^2[0;1]$ и рассмотрим следующий оператор:

$$\big[B(u)v\big](s) := \varepsilon(s)u(s)\int\limits_0^1 \psi(s-\tau)v(\tau)\,d\tau, \quad u \in H, \quad v \in \mathbb{H},$$

где $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ и $\varepsilon \in L_\infty[0;1]$ — фиксированные функции. Взяв подходящую функцию в качестве множителя ψ в свертке (это может быть, например, подходящий элемент последовательности, сходящейся в некотором смысле к δ-функции Дирака), мы можем сделать B как оператор, действующий на u, оператором умножения на «гладкую аппроксимацию v».

Для любых $u \in H$ и $v \in \mathbb{H}$ имеем:

$$\|B(u)v\|_H \leqslant \sup_{t\in\mathbb{R}} |\psi(t)| \|u\|_H \|v\|_{\mathbb{H}}.$$

Таким образом, $B(\cdot) \in \mathcal{L}\big(H; \mathcal{L}(\mathbb{H}; H)\big)$.

Рассмотрим стохастическое возмущение задачи Коши (6.32) вида (6.15) с определенным выше оператором B. Поскольку значения $\mathbb{W}(t)$ при каждом t представлены рядом

$$\mathbb{W}(t) := \sum_{i,j\in\mathbb{N}} \xi_i(t) e_j(s) \mathbf{h}_{\varepsilon_{n(i,j)}}(\omega),$$

расходящимся в $\mathbb{H}$ для любого $\omega \in \mathcal{S}'$, где $\{e_j\}$ — фиксированный ортонормированный базис в $\mathbb{H}\big(= L^2[0;1]\big)$, можно неформально представлять себе эти значения нерегулярными функциями переменной s. Когда в уравнении в качестве аргумента v оператора B мы подставляем «$\diamond\mathbb{W}(t)$», мы получаем своего рода гладкую аппроксимацию такой функции. Таким образом, оператор $B(\cdot)\diamond\mathbb{W}(t)$ в уравнении можно считать оператором определенного рода умножения на сглаженные значения белого шума, что представляется вполне естественным способом введения стохастического возмущения в оператор умножения на $m(s)$.

Для любых $v \in \mathbb{H}$, $u \in \mathrm{dom}(A)$ имеем:

$$\big[C(u)v\big](s) := \big[AB(u)v - B(Au)v\big](s) = -u(s)\int\limits_0^1 \psi'(s-\tau)v(tau)\,d\tau.$$

Таким образом, $C(\cdot)v$ — ограниченный оператор в H и условие (B2) предположения 6.1 выполнено. Условия (B1) и (B3), очевидно, также выполнены, и в результате задача Коши (6.32) удовлетворяет условиям теоремы 6.1 и, следовательно, имеет единственное решение в пространстве $(\mathcal{S})_{-0}(H)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Biagini F., Øksendal B.* A general stochastic integral approach to insider trading// Appl. Math. Optim. — 2005. — *52*, №4. — С. 167—181.
2. *Buckdahn R.* Anticipating linear stochastic differential equations. — Springer, 1989. — С. 18–23.
3. *Clément Ph., Heijmans H. J. A. M., Angenent S., van Duijn C. J., de Pagter B.* One-parameter semigroups. — Amsterdam etc.: North-Holland, 1987.
4. *Da Prato G.* Stochastic evolution equations by semigroup methods. — Barcelona: Center de Recerca Matematica, 1997.
5. *Da Prato G., Zabczyk J.* Stochastic equations in infinite dimensions. — Cambridge: Cambridge Univ. Press., 1992.
6. *Deck Th., Potthoff J., Våge G.* A rewiev of white noise analysis from a probabilistic standpoint// Acta Appl. Math. — 1997. — *48*, №1. — С. 91–112.
7. *DiNunno G., Øksendal B., Proske F.* Malliavin calculus for Lévy processes with applications to finance. — Berlin—Heidelberg: Springer, 2009.
8. *Esunge J.* A class of anticipating linear stochastic differential equations// Commun. Stoch. Anal. — 2009. — *3*, № 1. — С. 155–164.
9. *Fattorini H. O.* The Cauchy problem. — Addison-Wesley: Reading. Mass. etc., 1993.
10. *Filinkov A., Sorensen J.* Differential equations in spaces of abstract stochastic distributions// Stoch. Stoch. Rep. — 2002. — *72*, № 3-4. — С. 129–173.
11. *Filipović D.* Term-structure models. A graduate course. — Berlin: Springer, 2009.
12. *Gawarecki L., Mandrekar V.* Stochastic differential equations in infinite dimensions with applications to stochastic partial differential equations. — Berlin—Heidelberg: Springer-Verlag, 2011.
13. *Hida T.* Analysis of Brownian functionals. — Ottawa: Carleton Univ., 1975.
14. *Hille E., Phillips R. S.* Functional analysis and semigroups. — Providence: AMS, 1957.
15. *Holden H., Øksendal B., Ubøe J., Zhang T.* Stochastic partial differential equations. A modelling, white noise functional approach. — Basel: Birkhauser, 1996.
16. *Hu Y., Øksendal B.* Optimal smooth portfolio selection for an insider// J. Appl. Probab. — 2007. — *44*, №3. — С. 742-–752.
17. *Huang Z., Yan J.* Introduction to infinite dimensional stochastic analysis. — Dordrecht: Kluver Academic Publishers, 2000.
18. *Ichikawa A.* Stability of semilinear stochastic evolution equations// J. Math. Anal. App. — 1982. — *90*. — С. 12–44.
19. *Ichikawa A.* Semilinear stochastic evolution equations: boundedness, stability and invariant measures// Stochastics. — 1984. — *12*. — С. 1—39.
20. *Kondratiev Yu. G., Streit L.* Spaces of white noise distribution: constructions, descriptions, applications. I// Rep. Math. Phys. — 1993. — *33*. — С. 341–366.
21. *Kuo H.-H.* White noise distribution theory. — Boca Raton: CRC Press, 1996.
22. *Kubo I., Takenaka S.* Calculus on Gaussian white noise. I// Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. — 1980. — *56A*. — С. 376–380.
23. *Kubo I., Takenaka S.* Calculus on Gaussian white noise. II// Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. — 1980. — *56A*. — С. 411–416.

24. *Kubo I., Takenaka S.* Calculus on Gaussian white noise. III// Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. — 1981. — *57A*. — С. 433–437.
25. *Kubo I., Takenaka S.* Calculus on Gaussian white noise. IV// Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. — 1982. — *58A*. — С. 186–189.
26. *Lèon J. A., Protter P.* Some formulas for anticipative Girsanov transformations// В сб.: «Chaos expansions, multiple Wiener—Itô integrals and their applications». — Boca Raton: CRC Press, 1994. — С. 267–291.
27. *Melnikova I. V., Alshanskiy M. A.* The generalized well-posedness of the Cauchy problem for an abstract stochastic equation with multiplicative noise// Proc. Steklov Inst. Math. — 2013. — *280*, (Suppl. 1). — С. 134–150.
28. *Musiela M., Rutkowski M.* Martingale methods in financial modelling. — Berlin: Springer, 2005.
29. *Nualart D., Pardoux E.* Stochastic calculus with anticipating integrands// Probab. Theory Related Fields. — 1988. — *78*. — С. 535–581.
30. *Obata N.* White noise calculus and Fock space. — Berlin: Springer, 1994.
31. *Øksendal B.* A universal optimal consumption rate for an insider// Math. Finance. — 2006. — *16*, №1. — С. 119-–129.
32. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. — New York: Springer, 1983.
33. *Shreve S. E.* Stochastic calculus for finance. II. Continuous-time models. — New York: Springer, 2004.
34. *Stroock D. W., Varadhan S. R. S.* Multidimensional diffusion processes. — Berlin—Heidelberg—New York: Springer, 1979.
35. *Wiener N.* Differential space// J. Math. Phys. (M.I.T.). — 1923. — *2*. — С. 131–174.

И. В. Мельникова
Уральский федеральный университет
Институт математики и компьютерных наук
Кафедра математического анализа и теории функций
E-mail: Irina.Melnikova@usu.ru

М. А. Альшанский
Уральский федеральный университет
Институт радиоэлектроники и информационных технологий
Кафедра вычислительных методов и уравнений математической физики
E-mail: mxalsh@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 53 (2014). С. 64–132

УДК 517.972+517.982.22

ВВЕДЕНИЕ В СУБЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ

© 2014 г. **И. В. ОРЛОВ**

Аннотация. На основе понятия компактного субдифференциала построено развитое субдифференциальное исчисление первого и высших порядков, вплоть до формулы Тейлора и теории экстремумов. Введен и изучен обширный класс субгладких отображений, к которым применим построенный формализм. Разработан аппарат исследования одномерных экстремальных вариационных задач с субгладким интегрантом, включая достаточные условия. Рассмотрен ряд примеров.

СОДЕРЖАНИЕ

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 14-21-00066, Воронежский госуниверситет).

1. Постановка проблемы и исходные задачи

1.1. Введение. Обещания нужно выполнять. В заключительных замечаниях к статье о компактных субдифференциалах в банаховых пространствах и их применении к вариационным функционалам [19] авторы решились на следующее обещание:

«Авторы отдают себе отчет в том, что существенное приложение теории K-субдифференциалов к невыпуклым вариационным задачам с негладким интегрантом должно включать, как минимум, обобщение уравнения Эйлера—Лагранжа, условия Лежандра, уравнения Якоби и условий Лежандра—Якоби. Базой таких приложений неизбежно обязано служить K-субдифференциальное исчисление высшего порядка.

Построение исчисления высшего порядка (вообще говоря, "больное место" общей теории субдифференциалов), в рамках предложенной выше методики является вполне обозримой задачей, которую авторы надеются разрешить в оптимальные сроки.»

В настоящей работе строится такое субдифференциальное исчисление вместе с (пока одномерными) вариационными применениями.

Субдифференциалы, как инструмент негладкого анализа, достаточно давно получили признание в математике (см., например, [1, 4, 9–11, 29]). Начиная с классического субдифференциала выпуклого функционала (описанного в известной монографии Р. Рокафеллара [24]), появились и продолжают появляться новые определения субдифференциалов, рассчитанные на применение к различным классам экстремальных и других негладких задач (такие как известный субдифференциал Ф. Кларка, субдифференциал Б. Н. Пшеничного и многие другие (см. [8, 20–22]). В большинстве своем это определения для отображений в евклидовых пространствах, но имеются и более общие.

С целью применения к исследованию проблемы Радона—Никодима для интеграла Бохнера, первым из авторов несколько лет назад был введен и в совместных работах с Ф. С. Стонякиным (см. [16, 17, 39]) подробно изучен *компактный субдифференциал* (*K-субдифференциал*) для отображений вещественного аргумента в ЛВП. В случае пространств Фреше K-субдифференциал оказался адекватным инструментом и позволил найти топологическое решение проблемы Радона—Никодима (см. [27, 28]).

Естественным образом возник вопрос о переносе понятия на случай векторного аргумента. Вопрос диктуется не только внутренней логикой теории, но и соображением (возможно, более важным) о приложениях в вариационном исчислении. Приложения субдифференциалов к вариационным задачам с негладким интегрантом составляют неотъемлемую часть современного негладкого анализа (см., например, [2, 3, 5–7, 23, 35, 36]). Характерно, что в новейшей математической классификации MSC-2010 раздел «Негладкий анализ» входит в блок «Вариационное исчисление».

Движение по намеченному пути сразу же приводит нас от K-субдифференциала как компактного выпуклого множества (случай фиксированного направления) к многозначному субаддитивному оператору с компактными выпуклыми значениями (K-оператору). Таким образом, возникает потребность хотя бы в минимальном аппарате теории K-операторов. При всем богатстве потока работ по мультиоператорам (см., например, [12–14, 25, 26]), этот объект, насколько нам известно, не изучался.

Дуальная трудность состоит в том, что ограниченные K-операторы образуют не банахово пространство, а банахов конус, который не содержится ни в каком банаховом пространстве. Теория абстрактных локально выпуклых конусов возникла сравнительно недавно (см., например, [37, 38, 40, 41]), а описание абстрактных нормированных конусов также оказалось новой задачей.

Таким образом, обрисовались рамки существенно нового подхода, в котором место дифференциала Фреше (линейного оператора) занимает K-субдифференциал Фреше (многозначный сублинейный оператор). При этом место банахова пространства линейных ограниченных операторов занимает банахов конус ограниченных K-операторов.

Теория K-субдифференциалов первого порядка для этого случая была построена в наших с З. И. Халиловой работах [18, 19, 32–34] и включает в себя приложения к экстремальным вариационным задачам с негладким интегрантом.

Соответствующая функциональная база описана во втором разделе настоящей работы. Она включает в себя элементы теории абстрактных нормированных конусов, общей теории сублинейных операторов и функционалов, теории сублинейных K-операторов и K-функционалов.

На этой основе в третьем разделе работы построено K-субдифференциальное исчисление первого порядка. Отметим, что здесь, помимо необходимого технического аппарата, описан удобный для приложений новый класс *субгладких отображений*, которые заведомо K-субдифференцируемы. Установлено также, что любое K-субдифференцируемое на отрезке отображение почти всюду дифференцируемо в обычном смысле.

Примененный подход позволяет без труда дать индуктивное определение K-субдифференциалов второго и высших порядков. Четвертый раздел работы посвящен K-субдифференциальному исчислению высшего порядка. Получены аналоги основных результатов классического анализа Фреше, от теоремы Юнга до формулы Тейлора и теории экстремумов (включая достаточные условия). Частично эти результаты изложены в наших работах [19, 34]. Отметим следующие моменты. Во-первых, в случае нормированных пространств K-субдифференцируемость n-го порядка влечет обычную дифференцируемость $(n-1)$-го порядка, что существенно упрощает приложения. Во-вторых, понятие субгладкости распространяется на случай n-го порядка; такие отображения заведомо n раз K-субдифференцируемы.

Наконец, в пятом разделе работе детально рассмотрены приложения K-субдифференциального исчисления к исследованию экстремальных вариационных задач с *субгладким интегрантом* (одномерный случай). Получены субгладкие аналоги основной вариационной леммы, уравнения Эйлера—Лагранжа, простого и усиленного условий Лежандра, а также условий Лежандра—Якоби для основного вариационного функционала. Рассмотрен ряд примеров.

1.2. K-субдифференциал для отображений скалярного аргумента с приложениями к интегралу Бохнера (краткий обзор). K-субдифференциал для отображений отрезка возник в наших с Ф. С. Стонякиным работах [16, 17, 39] с целью приложений к интегралу Бохнера. Как известно, проблема Радона—Никодима для интеграла Бохнера состоит в том, что далеко не для всех банаховых пространств класс неопределенных интегралов Бохнера совпадает с классом сильно абсолютно непрерывных отображений. В связи с этим возникла идея ввести подходящее расширение классической дифференцируемости. Субдифференциалы Рокафеллара и Кларка, как и другие известные нам типы субдифференциалов, не устраивали нас по ряду причин. Возникло понятие *компактного субдифференциала* (*K-субдифференциала*), которое позволило, в конечном счете, найти топологическое решение проблемы Радона—Никодима в классе пространств Фреше. В этом кратком обзоре мы приводим только два результата по бохнеровской тематике (теоремы 1.4 и 1.5). Подробное изложение можно найти в работах [16, 17, 39] и кандидатской диссертации Ф. С. Стонякина [27].

Начнем с определения *K-предела*. Далее $U(0)$ — окрестность нуля в вещественном отделимом ЛВП E, $\overline{co}$ — замкнутая выпуклая оболочка множества в E.

Определение 1.1. Пусть $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ — убывающая при $\delta \searrow +0$ система замкнутых выпуклых подмножеств E с непустым пересечением B. Множество B назовем *K-пределом* системы $\{B_\delta\}_{\delta>0}$:

$$B = K\text{-}\lim_{\delta\to+0} B_\delta,$$

если

$$\forall U(0) \subset E\; \exists \delta_U > 0 :\; (0 < \delta < \delta_U) \Rightarrow (B_\delta \subset B + U(0)). \tag{1.1}$$

Замечание 1.1.

1. Сходимость типа (1.1) можно характеризовать как внешнее равномерное топологическое стягивание множеств B_δ к их компактному пересечению. Отметим, что в случае компактных B_δ условие (1.1) в пространстве Фреше выполнено автоматически.
2. Если множество B одноточечно, то (1.1) — обычное условие стягивания к точке.
3. Свойства K-пределов будут изложены далее в п. 3.1, в рамках более общего определения.

Перейдем к определению *компактного субдифференциала*. Далее $f : I = [a; b] \to \mathbb{R}$.

Определение 1.2. *K-субдифференциал* отображения f в точке $x \in I$ есть K-предел замкнутых выпуклых оболочек разностных отношений:

$$\partial_K f(x) = \underset{\delta \to +0}{K\text{-}\lim}\, \overline{co} \left\{ \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \middle| 0 < |h| < \delta \right\}.$$

Замечание 1.2.

1. Очевидно, K-субдифференциал есть обобщение обычной производной:

$$(\exists f'(x)) \Rightarrow (\partial_K f(x) = \{f'(x)\}).$$

Если $\partial_K f(x)$ — одноточечный, то верно и обратное.

2. Для вещественных функций $f : I \to \mathbb{R}$ справедлива формула

$$\partial_K f(x) = \left[\underline{\frac{df}{dx}}(x); \overline{\frac{df}{dx}}(x) \right];$$

при этом $\left(\exists\, \partial_K f(x)) \Leftrightarrow \left(\underline{\dfrac{df}{dx}}(x) \text{ и } \overline{\dfrac{df}{dx}}(x) \right) \text{ конечны} \right)$. В частности, в угловых точках имеем

$$\partial_K f(x) = \left[\frac{df}{dx}(x-0); \frac{df}{dx}(x+0) \right].$$

Таким образом, для выпуклых вещественных функций K-субдифференциал совпадает с обычным субдифференциалом.

Отметим, что K-субдифференциал может существовать и в точках осцилляций.

Пример 1.1. Пусть $f(x) = x \sin \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$. Здесь $\partial_K f(0) = \left[\underline{\dfrac{df}{dx}}(0); \overline{\dfrac{df}{dx}}(0) \right] = [-1; 1]$.

Приведем ряд простейших свойств K-субдифференциалов.

Теорема 1.1. *Справедливы следующие утверждения*:

а) (f *K-субдифференцируемо в точке* x) $\Rightarrow$ (f *непрерывно в точке* x);
б) $\partial_K(f_1 + f_2)(x) \subset \partial_K f_1(x) + \partial_K f_2(x)$ (*субаддитивность*);
в) $\partial_K(\lambda f)(x) = \lambda f(x)$;
г) $(A \in L(E; F)) \Rightarrow (\partial_K(Af)(x) = A(\partial_K f(x))$;
д) $([a; b] \xrightarrow{f} [c; d] \xrightarrow{g} E) \Rightarrow (\partial_K(g(f))(x) \subset \partial_K f(x)\, \partial_K g(f(x))$;
е) $(f : [a; b] \to \mathbb{R},\ g : [a; b] \to E) \Rightarrow (\partial_K(fg)(x) \subset \partial_K f(x) g(x) + f(x) \partial_K g(x))$.

В случае, когда одно из отображений дифференцируемо в обычном смысле, включения в пунктах (б), (д), (е), *превращаются в точные равенства.*

Далее, в случае пространства Фреше E определению 1.2 можно придать секвенциальную форму.

Теорема 1.2. *Пусть E — пространство Фреше, $f : I \to E$. Тогда f K-субдифференцируемо в точке $x \in E$ в том и только в том случае, если для любой последовательности $h_k \to 0$ последовательность $\left\{ \dfrac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k} \right\}$ имеет конечный частичный предел. При этом $\partial_K f(x)$ есть множество всех таких частичных пределов*:

$$\partial_K f(x) = \left\{ \underset{k \to \infty}{\text{part.lim}}\, \frac{f(x+h_k) - f(x)}{h_k} \middle| h_k \to 0 \right\}.$$

Приведем также теорему о среднем для K-субдифференциалов.

Теорема 1.3. *Если отображение f непрерывно на $[a; b]$ и K-субдифференцируемо на $(a; b)$, то*

$$f(b) - f(a) \in \overline{co} \left(\bigcup_{a<x<b} \partial_K f(x) \right) (b-a).$$

В частности, если E — банахово пространство, то

$$\| f(b) - f(a) \| \leqslant \sup_{a<x<b} (\sup \| \partial_K f(x) \|)(b-a).$$

Важную информацию о связи K-субдифференцируемости почти всюду с обычной дифференцируемостью почти всюду дает следующий результат.

Теорема 1.4. *Пусть E — пространство Фреше, $f : I \to E$. Если отображение f K-субдифференцируемо почти всюду на I, и при этом f почти всюду сепарабельнозначно на I, то f дифференцируемо в обычном смысле почти всюду на I.*

В частности, утверждение теоремы справедливо, если f непрерывно и почти всюду K-субдифференцируемо на I (и тем более, если f всюду K-субдифференцируемо на I).

Наконец, приведем одно из приложений теории K-субдифференциалов к интегралу Бохнера. Известна так называемая *проблема Радона—Никодима*, состоящая в том, что (в отличие от скалярного случая) не все сильно абсолютно непрерывные отображения $f : I \to E$ (при $\dim E = \infty$) почти всюду дифференцируемы. Нами с Ф.С. Стонякиным получен следующий результат.

Теорема 1.5. *Пусть отображение $F : [a;b] \to E$ абсолютно непрерывно и K-субдифференцируемо почти всюду на $[a;b]$. Тогда любой селектор $\widehat{\partial}_K F$ многозначного отображения $\partial_K F$ интегрируем по Бохнеру на $[a;b]$, причем*

$$F(x) = F(a) + (B)\int_a^x \widehat{\partial}_K F(t)dt \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

В частности, если E — пространство Фреше, то F дифференцируемо в обычном смысле почти всюду на $[a;b]$, и справедливо равенство:

$$F(x) = F(a) + (B)\int_a^x F'(t)dt \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

В заключение этого пункта отметим, что в наших с Ф.С. Стонякиным работах получено общее топологическое решение проблемы Радона—Никодима для интеграла Бохнера, на котором мы здесь не будем останавливаться.

2. Сублинейные операторы в нормированных конусах

2.1. Абстрактные нормированные конусы и их свойства. Конус выпуклых компактов. Перенос понятия K-субдифференциала на случай отображений векторного аргумента приводит к сублинейным операторам с компактными выпуклыми значениями. Такие операторы образуют уже не линейное пространство, а выпуклый (абстрактный) конус. Таким образом, построение замкнутого K-субдифференциального исчисления, включающего субдифференциалы высших порядков, приводит к необходимости с самого начала работать в рамках нормированных конусов. Эта теория была развита в работах З.И. Халиловой [32–34] и наших совместных работах [18, 19].

Мы рассматриваем здесь только *выпуклые конусы*. Напомним общее определение.

Определение 2.1. *Конусом* (выпуклым) назовем некоторое множество векторов $X = \{x\}$, снабженное операциями сложения векторов и умножения на неотрицательные скаляры. При этом операции обладают следующими свойствами:

1. $(x + y) + z = x + (y + z)$; $x + y = y + x \quad (\forall\, x, y, z \in X)$;
2. $\lambda(\mu x) = (\lambda\mu)x$; $(\lambda + \mu)x = \lambda x + \mu x$; $\lambda(x + y) = \lambda x + \lambda y \quad (\forall x,\, y \in X\ \forall \lambda \geqslant 0,\ \mu \geqslant 0)$.

Замечание 2.1. Тривиальным примером конуса служит вещественное векторное пространство. В большинстве публикаций рассматриваются конусы, вложенные в векторные пространства (см. [38, 40]). Однако, начиная с 80-х годов прошлого века, активно исследуются и абстрактные конусы, разрабатывается общая теория локально выпуклых конусов (см. [37, 41]). По известному критерию («*cancellation law*»), выпуклый конус X может быть изоморфно вложен в некоторое векторное пространство тогда и только тогда, когда $(x + z = y + z) \Rightarrow (x = y)$ для любых $x, y, z \in X$. Простейший пример абстрактного конуса — конус всех подмножеств векторного пространства.

Тем не менее, теория нормированных конусов, основанная на общей теории локально выпуклых конусов, не обнаружена нами в литературе. Эта теория, как вспомогательный блок, изложена в нашей работе.

Дадим определение *нормированного конуса*.

Определение 2.2. Выпуклый конус X назовем *нормированным*, если для любого его элемента $x \in X$ определена неотрицательная величина (*конус-норма*) $\|x\|$, обладающая следующими свойствами:

1. $(\|x\| = 0) \Leftrightarrow (x = 0)$;
2. $\|x + y\| \leqslant \|x\| + \|y\|$;
3. $\|\lambda x\| = \lambda \|x\| \quad (\forall \lambda \geqslant 0)$.

Конус-норма индуцирует *локально выпуклую конус-топологию* в X, и, в частности приводит к следующим понятиям.

Определение 2.3. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — нормированный конус. Введем понятия:

а) *ε-окрестность точки* $x \in X : O_\varepsilon(x) = \{x + h |\, h \in X,\, \|h\| < \varepsilon\}$.

б) *Сходящаяся последовательность* $x_n \to x : \forall\, \varepsilon > 0\; \exists N\; (n \geqslant N) \Rightarrow (x_n \in O_\varepsilon(x))$.

в) *Квазифундаментальная последовательность* $\{x_n\}$:
$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\; N(n \geqslant N, p \geqslant 0) \Rightarrow (x_{n+p} \in O_\varepsilon(x_n)).$$

г) *Квазиполнота*: X — *квазиполный конус*, если любая квазифундаментальная последовательность в X сходится. Квазиполный нормированный конус будем называть *банаховым конусом*.

д) *Квазиметрика*: если $y = x + h$, то полагаем $d(x, y) = \|h\|$.

е) *Ограниченность*: множество $B \subset X$ *ограничено*, если $\sup\limits_{x \in B} \|x\| < +\infty$.

Общие топологические понятия вводятся в X обычным образом.

Замечание 2.2. Конус-норма (как и вообще конус-топология) порождает не классическую равномерность в X, а лишь «направленную» *квазиравномерность*. В частности, квазиметрика, вообще говоря, не симметрична: если существует $d(x, y)$, то $d(y, x)$ может не существовать.

Важный для нас тип конусов образуют *конусы компактных выпуклых подмножеств*.

Определение 2.4. Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — нормированный конус. Обозначим через X_K множество всех компактных выпуклых подмножеств X. Нетрудно проверить, что X_K образует выпуклый конус относительно поэлементного сложения множеств и умножения на неотрицательные скаляры. Нулем в X_K является множество $\{0\}$.

Замечание 2.3.

1. В конусе X_K возможно, например (в случае векторного пространства X), умножение и на отрицательные скаляры, однако $(-1)C$ не есть противоположный элемент к C.
2. Конус X_K индуктивно упорядочен отношением вложения.
3. Вообще говоря (при $X \not\subset \mathbb{R}$), конус X_K не удовлетворяет «*cancellation law*».

Введем норму в X_K: $\|C\| = \sup\limits_{x \in C} \|x\|$.

Замечание 2.4. Легко видеть, что $\|C\|$ обладает всеми свойствами конус-нормы и согласована с отношением порядка в X_K.

Покажем теперь, что квазиполнота конуса X влечет квазиполноту и конуса X_K.

Лемма 2.1. *Пусть последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ квазифундаментальна в нормированном конусе X. Если некоторая подпоследовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^\infty$ сходится в E к $x_0 \in E$, то и последовательность $\{x_n\}_{n=1}^\infty$ сходится в X к x_0.*

Доказательство. Зафиксируем $\varepsilon > 0$. Согласно определению сходимости, $x_{n_k} \in O_{\varepsilon/2}(x_0)$ для достаточно больших номеров n_k. В свою очередь, согласно определению квазифундаментальности, для достаточно больших номеров $n > N(\varepsilon)$ при любом $n_k > n$ верно $x_n \in O_{\varepsilon/2}(x_{n_k})$. В итоге получаем при $n > N(\varepsilon)$:
$$x_n \in \bigcup_{x_{n_k} \in O_{\varepsilon/2}(x_0)} \Big(O_{\varepsilon/2}(x_{n_k})\Big) \subset \bigcup_{x \in O_{\varepsilon/2}(x_0)} \Big(O_{\varepsilon/2}(x)\Big) = O_{\varepsilon/2}(x_0) + O_{\varepsilon/2}(0) \subset O_\varepsilon(x_0),$$
т. е. $x_n \to x_0$. $\square$

Лемма 2.2. *Пусть X — банахов конус. Для ограниченных подмножеств $B \subset X$ введем норму $\|B\| = \sup\limits_{y \in B} \|y\|$. Тогда если $\{C_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность компактов из X такая, что $\sum\limits_{i=1}^{\infty} \|C_i\| < \infty$, то множество*

$$\sum_{i=1}^{\infty} C_i := \Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} y_i \Big| \, y_i \in C_i \Big\} \tag{2.1}$$

— также компакт в X.

Доказательство. Заметим сначала, что любой ряд справа в (2.1) абсолютно сходится, так как

$$\sum_{i=1}^{\infty} \|y_i\| \leqslant \sum_{i=1}^{\infty} \|C_i\| < \infty.$$

Отсюда, в силу квазиполноты F, обычным образом вытекает сходимость рядов $\sum\limits_{i=1}^{\infty} y_i$.

Далее введем пространство $\prod\limits_{i=1}^{\infty} C_i$, компактное в тихоновской топологии произведения, определяемой квазиметрикой

$$d(y, z) = \sum_{i=1}^{\infty} \|h_i\|$$

при $y = \{y_i\}_{i=1}^{\infty}$, $z = \{z_i\}_{i=1}^{\infty}$, $h_i = \{h_i\}_{i=1}^{\infty}$, $z_i = y_i + h_i$ $(i \in \mathbb{N})$. Рассмотрим отображение

$$\Sigma : \prod_{i=1}^{\infty} C_i \to F, \ \Sigma(y) = \sum_{i=1}^{\infty} y_i.$$

Очевидно, $(z = y + h) \Rightarrow (\Sigma(z) = \Sigma(y) + \Sigma(h))$, откуда следует

$$d\Big(\Sigma(y), \Sigma(z)\Big) = \sum_{i=1}^{\infty} \|h_i\| = d(y, z).$$

Следовательно, Σ — непрерывное отображение, откуда по теореме Вейерштрасса множество $\Sigma\Big(\prod\limits_{i=1}^{\infty} C_i\Big) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} C_i$ — компакт в X. □

Приведем теперь основной результат этого раздела.

Теорема 2.1. *Если X — банахов конус, то нормированный конус X_K — также банахов.*

Доказательство. Покажем, что любая квазифундаментальная последовательность $\{C_n\}_{n=1}^{\infty}$ в X_K содержит сходящуюся подпоследовательность. По условию фундаментальности, $C_n = C_{n+p} + H_{np}$, где $\|H_{np}\| \to 0$ при $n \to \infty$ равномерно по p.

Возьмем произвольную последовательность $\{\varepsilon_k > 0\}$ такую, что $\sum \varepsilon_k < +\infty$, и затем выберем возрастающую последовательность номеров $\{n_k\}$ так, чтобы

$$\|H^k := H_{n_k, n_{k+1} - n_k}\| \leqslant \varepsilon_k.$$

Покажем, что соответствующая подпоследовательность $\{C_{n_k} = C_{n_{k+1}} + H^k\}_{k=1}^{\infty}$ сходится в X_K. Положим

$$\widetilde{H}^k = \Big\{ \sum_{i=k}^{\infty} h_i \Big| \, h_i \in H^i \Big\} = \sum_{i=k}^{\infty} H^i \quad (k = 1, 2, \ldots).$$

Поскольку $\sum\limits_{i=k}^{\infty} \|H^i\| \leqslant \sum\limits_{i=k}^{\infty} \varepsilon_i < \infty$, то в силу леммы 2.2 множества $\widetilde{H}^k$ компактны в X. Поскольку выпуклость $\widetilde{H}^k$ следует из определения, то $\widetilde{H}^k \in X_K$.

Положим

$$C_0 := C_{n_1} + H^1 = C_{n_1} + (H^1 + \widetilde{H}^2) = C_{n_2} + \widetilde{H}^2 = \ldots = C_{n_k} + \widetilde{H}^k = \ldots.$$

Из $\|\widetilde{H}^k\| \to 0$ следует $C_{n_k} \to C_0$ в X_K. Тогда по лемме 2.1 также и $C_n \to C_0$, т. е. X_K — квазиполный конус. □

Замечание 2.5. Простейшим примером банахова конуса X_K является конус

$$\mathbb{R}_K = \Big\{[x_1; x_2] \subset \mathbb{R} \,\Big|\, x_1 \leqslant x_2\Big\}.$$

Это единственный (в классе банаховых пространств X) пример конечномерного конуса X_K. Конус $\mathbb{R}_K$ можно отождествить с полуплоскостью

$$\mathbb{R}^2_+ = \Big\{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \,\Big|\, x_1 \leqslant x_2\Big\}.$$

При этом порядок в $\mathbb{R}^1_+$, соответствующий вложению в $\mathbb{R}_K$, следующий:

$$\Big((x_1, x_2) \preceq (y_1, y_2)\Big) \Leftrightarrow \Big(y_1 \leqslant x_1,\ y_2 \geqslant x_2\Big).$$

Заметим, что этот порядок не соответствует обычному порядку в $\mathbb{R}$ при диагональном вложении

$$\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}^2_+ \quad (x \in \mathbb{R} \mapsto (x, x) \in \mathbb{R}^2_+).$$

В общем случае также, индуктивный порядок в X_K, определяемый вложением, не связан с возможным исходным порядком в X.

Замечание 2.6. В случае индуктивно упорядоченного конуса X, будем говорить, что конус-норма в X *согласована с порядком*, если $(x_1 \leqslant x_2) \Rightarrow (\|x_1\| \leqslant \|x_2\|)$. В этом случае возможна более грубая топология, также порождаемая нормой:

$$O_\varepsilon(x) = \{y \in X |\ x \preceq y \preceq x + h;\ \|h\| < \varepsilon\}.$$

2.2. Сублинейные операторы и функционалы. Использование сублинейных операторов с компактными выпуклыми значениями удобнее проводить на основе достаточно развитой общей теории сублинейных операторов со значениями в упорядоченном конусе. Такое развитие общей теории сублинейных операторов излагается здесь впервые. Оно далеко не полно, но это тот минимум, который позволяет далее достаточно свободно строить основной аппарат K-субдифференциального исчисления.

Определение 2.5. Пусть E — выпуклый конус, F — индуктивно упорядоченный выпуклый конус. Оператор $A : E \to F$ назовем *сублинейным*, если:

1. $A(h_1 + h_2) \preceq Ah_1 + Ah_2$;
2. $A(\lambda h) = \lambda Ah$ $(\forall h_1, h_2 \in E, \forall \lambda \geqslant 0)$.

Оператор A назовем *надлинейным*, если условие (1) заменить условием

3. $A(h_1 + h_2) \succeq Ah_1 + Ah_2$.

Определение 2.6. Пусть, в условиях определения 2.5, $F = \mathbb{R}$. Тогда сублинейный оператор $f : E \to \mathbb{R}$ назовем *сублинейным функционалом*. В этом случае условия (1)-(2) перепишутся в следующем виде:

4. $f(h_1 + h_2) \leqslant f(h_1) + f(h_2)$; $f(\lambda h) = \lambda f(h) \quad (\lambda \geqslant 0)$.

Соответственно, для надлинейного функционала первое из неравенств (4) заменяется неравенством

5. $f(h_1 + h_2) \geqslant f(h_1) + f(h_2)$.

Замечание 2.7.

1. Иногда в определении сублинейного оператора равенство (2) заменяется неравенством $A(\lambda h) \preceq \lambda Ah$. У нас не возникнет потребность в таком ослаблении условия, т. к. K-субдифференциал всегда обладает свойством (2).
2. Очевидно, сублинейность функционала f равносильна надлинейности функционала $(-f)$. Простейшим примером сублинейного функционала в нормированном конусе служит сама норма: $f(h) = \|h\|$.

В случае векторного пространства E легко описать связь сублинейности и линейности функционалов.

Теорема 2.2. *Пусть E — векторное вещественное пространство, $f : E \to \mathbb{R}$ — сублинейный (соответственно — надлинейный) функционал. Тогда f линеен в том и только в том случае, если*

$$(f(-h) = -f(h) \quad (\forall h \in E)). \tag{2.2}$$

Доказательство. Необходимость утверждения теоремы очевидна. Обратно, пусть f сублинеен и выполнено условие (2.2). Тогда $\forall\, h_1,\, h_2 \in E$ имеем:

$$\begin{cases} \text{а).}\ f(h_1 + h_2) \leqslant f(h_1) + f(h_2); \\ \text{б).}\ (-f(-h_1 - h_2) \leqslant f(-h_1) + f(-h_2) = -f(h_1) - f(h_2)) \Rightarrow \\ \qquad \Rightarrow (f(h_1 + h_2) = -f(-h_1 - h_2) \geqslant f(h_1) + f(h_2)). \end{cases}$$

Отсюда следует аддитивность: $f(h_1 + h_2) = f(h_1) + f(h_2)$. Кроме того, позитивная однородность f вместе с равенством (2.2) влечет полную вещественную однородность f. Таким образом, функционал f линеен. □

Результат переносится и на сублинейные операторы $A : E \to F$, если F — упорядоченное векторное пространство.

Введем теперь для произвольных отображений в нормированных конусах понятия непрерывности и полунепрерывности.

Определение 2.7. Пусть E, F — нормированные конусы, отображение $\Phi : E \to F$ определено в некоторой окрестности $U(x)$ точки $x \in E$. Назовем Φ *непрерывным в точке x*, если

$$\exists y\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ (\|h\| < \delta) \Rightarrow (\Phi(x + h) = \Phi(x) + y,\ \text{где } \|y\| < \varepsilon).$$

Пусть, кроме того, конус F индуктивно упорядочен и норма в F согласована с порядком. Назовем отображение Φ *полунепрерывным сверху в точке x*, если

$$\exists y\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ (\|h\| < \delta) \Rightarrow (\Phi(x + h) \preceq \Phi(x) + y,\ \text{где } \|y\| < \varepsilon);$$

Φ *полунепрерывно снизу в точке x*, если

$$\exists y\ \forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ (\|h\| < \delta) \Rightarrow (\Phi(x) \preceq \Phi(x + h) + y,\ \text{где } \|y\| < \varepsilon).$$

Замечание 2.8. Одновременная полунепрерывность сверху и снизу равносильна полной непрерывности Φ лишь в случае, когда F — векторное пространство (в частности, для функционалов). В общем же случае мы можем только утверждать, что из полной непрерывности следует полунепрерывность сверху. Возможно, здесь следует ввести «ко-непрерывность» с условием: $\Phi(x) = \Phi(x + h) + y,\ \|y\| < \varepsilon$.

Обратимся теперь к вопросу о непрерывности сублинейных операторов. Вначале введем для них понятие *нормы*. Далее, E и F — нормированные конусы, F индуктивно упорядочен (согласованно с нормой: $(y_1 \preceq y_2) \Rightarrow (\|y_1\| \preceq \|y_2\|)$).

Определение 2.8. Пусть оператор $A : E \to F$ — сублинейный. Положим (по аналогии с линейным случаем):

$$\|A\| := \sup_{\|h\| \leqslant 1} \|Ah\|.$$

Если $\|A\| < +\infty$, назовем оператор A *ограниченным*.

Нетрудно проверить сохранение обычных свойств операторной нормы (с учетом $\lambda \geqslant 0$).

Предложение 2.1. *Пусть $A(A_i) : E \to F$ — сублинейные ограниченные операторы. Тогда*:

1. $(\|A\| = 0) \Leftrightarrow (A = 0)$;
2. $\|A_1 + A_2\| \leqslant \|A_1\| + \|A_2\|$;
3. $\|\lambda A\| = \lambda \|A\|\ (\lambda \geqslant 0)$.

Замечание 2.9. Свойства сублинейной операторной нормы позволяют ввести *нормированный операторный конус* $L_{sub}(E; F)$ ограниченных сублинейных операторов $A : E \to F$. Конус $L_{sub}(E; F)$ индуктивно упорядочен отношением $(A_1 \preceq A_2) \Leftrightarrow (A_1 h \preceq A_2 h\ (\forall h \in E))$. Важным обстоятельством является то, что, в случае банахова конуса F, конус $L_{sub}(E; F)$ — также банахов.

Теорема 2.3. *Пусть E и F — нормированные конусы, F индуктивно упорядочен. Тогда конус $L_{sub}(E;F)$ также нормированный. Если, кроме того, конус F — банахов, то $L_{sub}(E;F)$ — также банахов конус.*

Доказательство. Очевидно, сублинейная операторная норма создает в $L_{sub}(E;F)$ структуру нормированного конуса в соответствии с определением 2.8. Пусть теперь F — банахов конус. Докажем, что конус $L_{sub}(E;F)$ — также банахов.

Пусть последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ квазифундаментальна в конусе $L_{sub}(E;F)$. Следовательно, согласно определению 2.3,

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N\; (n \geqslant N,\, p > 0) \Rightarrow\; (A_n h = A_{n+p}h + B_{np}h, \;\; \text{где } \|B_{np}\| < \varepsilon). \tag{2.3}$$

1. Зафиксируем $h \in E$, $\|h\| \leqslant 1$ и покажем, что последовательность $\{A_n h\}_{n=1}^{\infty}$ квазифундаментальна в F. Действительно, в силу (2.3)

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, N\; (n \geqslant N,\, p > 0) \Rightarrow\; (A_n h = A_{n+p}h + B_{np}h), \tag{2.4}$$

причем из неравенства $\|B_{np}\| < \varepsilon$ следует $\|B_{np}h\| \leqslant \|B_{np}\|\,\|h\| < \varepsilon\|h\|$. Таким образом, последовательность $\{A_n h\}_{n=1}^{\infty}$ квазифундаментальна $\forall\, h \in E$, $\|h\| \leqslant 1$. Но тогда $\forall\, h \in E$, $h \neq 0$, имеем

$$\{A_n h\}_{n=1}^{\infty} = \|h\| \left\{ A_n \left(\frac{h}{\|h\|} \right) \right\}_{n=1}^{\infty},$$

откуда следует квазифундаментальность $\{A_n h\}_{n=1}^{\infty}$. В силу квазиполноты F, $\forall\, h \in E$ в F существует предел

$$Ah := \lim_{n\to\infty} A_n h.$$

2. Проверим сублинейность оператора $A : E \to F$:

а) $A(h_1 + h_2) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n(h_1 + h_2) \leqslant \lim\limits_{n\to\infty} (A_n h_1 + A_n h_2) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n h_1 + \lim\limits_{n\to\infty} A_n h_2 = Ah_1 + Ah_2$;

б) $A(\lambda h) = \lim\limits_{n\to\infty} A_n(\lambda h) = \lim\limits_{n\to\infty} (\lambda A_n h) = \lambda \lim\limits_{n\to\infty} A_n h = \lambda Ah$ (при $\lambda \geqslant 0$).

3. Проверим ограниченность по норме оператора A. В силу [19, лемма 2.1], квазифундаментальная последовательность $\{A_n\}_{n=1}^{\infty}$ ограничена: $\|A_n\| \leqslant C$ $(n = 1, 2, \ldots)$. Отсюда следует, что

$$\|A_n h\| \leqslant C\|h\| \;(\forall\, h \in E\; \forall\, n \in N).$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем $\|Ah\| \leqslant C\|h\|$, откуда $\|A\| \leqslant C$. Таким образом, $A \in L_{sub}(E;F)$.

4. Проверим, что $A_n \to A$ в $L_{sub}(E;F)$. Из условия (2.4), переходя к пределу при $p \to \infty$, получаем:

$$A_n h = Ah + B_n h.$$

При этом из неравенства $\|B_{np}\| < \varepsilon$ в пределе следует $\|B_n\| \leqslant \varepsilon$ при $n \geqslant N(\varepsilon)$, т. е. $B_n \to 0$ в $L_{sub}(E;F)$. Следовательно, $A_n = A + B_n \to A$ в $L_{sub}(E;F)$ при $n \to \infty$.

Таким образом, нормированный конус $L_{sub}(E;F)$ — квазиполный, т. е. $L_{sub}(E;F)$ — банахов конус. □

Выясним связь ограниченности сублинейного оператора с его непрерывностью. Она отличается от классического линейного случая.

Теорема 2.4. *Для сублинейного оператора $A : E \to F$ следующие условия равносильны*:

1. $\|A\| < \infty$;
2. *A непрерывен в нуле*;
3. *A равномерно полунепрерывен сверху на E.*

Доказательство. 1. Если A ограничен по норме, то из неравенства $\|Ah\| \leqslant \|A\|\,\|h\|$ немедленно следует непрерывность A в нуле.

2. Пусть A непрерывен в нуле. Тогда

$$\forall\, \varepsilon > 0\; \exists\, \delta > 0\; (\|h\| \leqslant \delta) \Rightarrow (\|Ah\| \leqslant \varepsilon). \tag{2.5}$$

При этом, ввиду субаддитивности A, для любого $x \in E$:

$$A(x + h) \leqslant Ax + Ah, \;\; \text{где } \|Ah\| \leqslant \varepsilon,$$

т. е. A равномерно субнепрерывен всюду на E.

3. Пусть A равномерно субнепрерывен всюду на E. Нетрудно видеть, что при этом A непрерывен в нуле, т. е. выполнено условие (2.5). Отсюда получаем:

$$\|A\| = \sup_{\|h\|\leqslant 1} \|Ah\| = \sup_{\|h\|\leqslant 1} \left\| A\left(\frac{\delta h}{\|h\|}\frac{\|h\|}{\delta}\right)\right\| = \sup_{\|h\|\leqslant 1}\left(\frac{\|h\|}{\delta} A\left(\frac{\delta h}{\|h\|}\right)\right) \leqslant \frac{\varepsilon}{\delta} < \infty,$$

т. е. A ограничен по норме. □

Замечание 2.10. По аналогии с линейным случаем, нетрудно доказать, что все сублинейные функционалы $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ автоматически ограничены.

Перейдем к общим свойствам сублинейных ограниченных операторов. Вначале рассмотрим вопрос о сублинейной композиции и сублинейных операторных матрицах.

Теорема 2.5. *Пусть E, F, G — нормированные конусы, причем F и G индуктивно упорядочены. Если $A \in L_{sub}(E; F)$, $B \in L_{sub}(F; G)$, то композиция $B \cdot A \in L_{sub}(E; G)$, причем*

$$\|B \cdot A\| \leqslant \|A\|\,\|B\|. \tag{2.6}$$

Доказательство. Сублинейность $B \cdot A$ очевидна. Неравенство (2.6) проверяется по той же схеме, что и для линейных ограниченных операторов в нормированных пространствах. □

Перейдем к вопросу о матрице сублинейных операторов. Далее подразумевается, что *прямая сумма* $E = \bigoplus\limits_{j=1}^{n} E_j$ и декартово произведение $F = \prod\limits_{i=1}^{m} F_i$ нормированных конусов определяются аналогично случаю нормированных пространств. Вначале рассмотрим вопрос о *разложении сублинейного оператора в прямую сумму*; он отличается от случая нормированных пространств.

Предложение 2.2. *Пусть E_j $(j = \overline{1,n})$ и F — нормированные конусы, $A \in L_{sub}\Big(\bigoplus\limits_{j=1}^{n} E_j; F\Big)$. Обозначим $P_j : E \to E_j$ канонические проекции, и положим $A_j = A \cdot P_j$ $(j = \overline{1,n})$. Тогда справедлива оценка*:

$$\left(A \preceq \bigoplus_{j=1}^{n} A_j = \sum_{j=1}^{n} A\cdot P_j\right) \Leftrightarrow \left(Ah \preceq \sum_{j=1}^{n} A_j h_j \quad (\forall\, h = h_1 + \ldots + h_n \in E)\right).$$

Перейдем к вопросу о *покоординатном разложении сублинейного оператора*; здесь равенство сохраняется.

Предложение 2.3. *Пусть E и F_i $(i = \overline{1,m})$ — нормированные конусы, $A \in L_{sub}\Big(E; \prod\limits_{i=1}^{m} F_i\Big)$. Обозначим $Q_i : F_i \to F$ канонические инъекции и положим $A^i = Q_i \cdot A$ $(i = \overline{1,m})$. Тогда справедливо равенство*:

$$\left(A = (A^i)_{i=1}^{m} = \sum_{i=1}^{m} Q_i \cdot A\right) \Leftrightarrow \left(Ah = (A^i h)_{i=1}^{m} \quad (\forall h \in E)\right).$$

Из результатов предложений 2.2 и 2.3 следует общее утверждение о разложении сублинейного оператора в матрицу.

Теорема 2.6. *Пусть E_j и F_i — нормированные конусы, $A \in L_{sub}\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} E_j; \prod\limits_{i=1}^{m} F_i\Big)$, где $j = \overline{1,n}$ и $i = \overline{1,m}$. Обозначим, как и ранее, через $P_j : E \to E_j$ и $Q_i : F_i \to F$ соответствующие канонические проекции и инъекции, и положим $A_{ij} = Q_i A P_j$ $(i = \overline{1,m}$, $j = \overline{1,n})$. Тогда справедлива оценка*:

$$\left(A \preceq (A_{ij})_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}} = \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{n} Q_i \cdot A \cdot P_j\right) \Leftrightarrow \left(Ah \preceq \Big(\sum_{j=1}^{n} A_{ij} h_j\Big)_{i=1}^{m} \quad (\forall h = h_1 + \ldots + h_n \in E)\right).$$

Введем теперь бисублинейные операторы и выпишем аналог известного изоморфизма между пространствами линейных и билинейных операторов.

Определение 2.9. Пусть E_1, E_2, F — выпуклые конусы, F индуктивно упорядочен. Оператор $B : E_1 \times E_2 \to F$ назовем *бисублинейным*, если он сублинеен по каждой переменной в отдельности, т. е.

1. $B(h_1 + h_2, k) \preceq B(h_1, k) + B(h_2, k)$; $\quad B(h, k_1 + k_2) \preceq B(h, k_1) + B(h, k_2)$;
2. $B(\lambda h, k) = \lambda B(h, k)$; $\quad B(h, \mu k) = \mu B(h, k)$ $(\lambda,\ \mu \geqslant 0)$.

Определение 2.10. Пусть, в условиях определения 2.9, конусы E_1, E_2, F нормированы. Введем норму бисублинейного оператора B равенством:

$$\|B\| = \sup_{\|h\| \leqslant 1,\, \|k\| \leqslant 1} \|B(h, k)\|.$$

Если $\|B\| < \infty$, назовем оператор B *ограниченным*.

По аналогии с предложением 2.1 и теоремой 2.4, сформулируем свойства нормы бисублинейного оператора и связь его ограниченности с непрерывностью.

Теорема 2.7. *В условиях определений* 2.9-2.10 *верно*:

1. $(\|B\| = 0) \Leftrightarrow (B = 0)$;
2. $\|B_1 + B_2\| \leqslant \|B_1\| + \|B_2\|$;
3. $\|\lambda B\| = \lambda \|B\| \quad (\forall\, \lambda \geqslant 0)$;
4. $\|B(h, k)\| \leqslant \|B\|\, \|h\|\, \|k\|$.

Для бисублинейного оператора $B : E_1 \times E_2 \to F$ *следующие условия равносильны*:

а) $\|B\| < \infty$;
б) B *непрерывен в нуле*;
в) B *равномерно полунепрерывен сверху на* $E_1 \times E_2$.

Замечание 2.11. Свойства нормы бисублинейного оператора позволяют, по аналогии с сублинейным случаем, ввести нормированный операторный конус, индуктивно упорядоченный отношением

$$(B_1 \preceq B_2) \Leftrightarrow (B_1(h, k) \preceq B_2(h, k)) \quad (\forall h \in E_1,\ k \in E_2).$$

Обозначим его $L_{sub}(E_1, E_2; F)$.

Теорема 2.8. *Если* E_1, E_2, F — *нормированные конусы,* F *индуктивно упорядочен, то конус* $L_{sub}(E_1,\ E_2;\ F)$ — *также нормированный и индуктивно упорядоченный. При этом, если* F — *банахов конус, то конус* $L_{sub}(E_1,\ E_2;\ F)$ — *также банахов.*

Наконец, справедлив аналог классической изометрии между пространством линейных и билинейных ограниченных операторов.

Теорема 2.9. *В условиях и обозначениях теоремы* 2.8 *имеет место изометрия*:

$$L_{sub}(E_1, E_2; F) \cong L_{sub}(E_1; L_{sub}(E_2; F)), \tag{2.7}$$

которая устанавливается с помощью биекции

$$(B : E_1 \times E_2 \to F) \leftrightarrow (A_B : E_1 \to L_{sub}(E_2; F)),\ (A_B h)k = B(h, k).$$

Замечание 2.12. Нетрудно аналогичным образом ввести понятие полисублинейного оператора $P : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$, его нормы, а также нормированный упорядоченный конус полисублинейных ограниченных операторов $L_{sub}(E_1, \ldots E_n; F)$. Аналог изометрии (2.7) имеет вид:

$$L_{sub}(E_1, \ldots, E_n; F) \cong L_{sub}(E_1; L_{sub}(E_2, \ldots, E_n; F)). \tag{2.8}$$

Далее в случае $E_1 = \ldots = E_n$ левую часть (2.8) будем кратко обозначать $L^n_{sub}(E; F)$.

Замечание 2.13. Используя определение 2.9, нетрудно задать бисублинейный оператор

$$B : \Big(\prod_{i=1}^{n} E_i^1\Big) \times \Big(\prod_{j=1}^{m} E_j^2\Big) \to F$$

как бисублинейную операторную матрицу $B = (B_{ij})_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}$, где

$$B_{ij} \in L_{sub}(E_i^1, E_j^2; F) \cong L_{sub}(E_i^1; L_{sub}(E_j^2; F)).$$

В частности, в теории K-субдифференциалов для нас особенно будет важен случай квадратной бисублинейной «матрицы Гессе»:

$$B = (B_{ij})_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}, \quad B : \Big(\prod_{i=1}^{n} E_i\Big) \times \Big(\prod_{j=1}^{n} E_j\Big) \to F.$$

2.3. Сублинейные K-операторы и K-функционалы. Здесь мы опишем важный тип сублинейных операторов, которые возникают далее в работе при общем определении компактных субдифференциалов. Начнем с общих определений.

Определение 2.11. Пусть E — выпуклый конус, F — нормированный конус, F_K — нормированный упорядоченный конус выпуклых компактных подмножеств F (см. определение 2.4). Сублинейный оператор $A : E \to F_K$ назовем *сублинейным K-оператором*, или, коротко, *K-оператором*.

Сублинейный оператор $f : E \to \mathbb{R}_K$ назовем *сублинейным K-функционалом*, или, коротко, *K-функционалом*.

В случае нормированного конуса E, банахов конус сублинейных ограниченных K-операторов $L_{sub}(E; F_K)$ будем более коротко обозначать $L_K(E; F)$; банахов конус сублинейных ограниченных K-функционалов $L_{sub}(E; \mathbb{R}_K) = L_K(E; \mathbb{R})$ более коротко обозначим E_K^*.

Замечание 2.14. Если F — нормированное пространство, то для K-операторов из $L_K(E; F)$ можно ввести умножение на отрицательные скаляры: $((-\lambda)A)h = -A(\lambda h)$ $(\lambda \geqslant 0)$, а также *«скалярную разность»* K-операторов: $A - B = A + (-1)B$.

При этом $\|-A\| = \|A\|$, $\|A - B\| \geqslant |\|A\| - \|B\||$, однако, вообще говоря, $(A - B) + B \neq A$.

Для сублинейных K-функционалов возможно точное описание.

Теорема 2.10. *Пусть E — выпуклый конус, $f : E \to \mathbb{R}_K$. Тогда f — сублинейный K-функционал в том и только в том случае, если*

$$f(h) = [\underline{f}(h); \overline{f}(h)],$$

где $\underline{f} : E \to \mathbb{R}$ — надлинейный функционал, $\overline{f} : E \to \mathbb{R}$ — сублинейный функционал, $\underline{f}(h) \leqslant \overline{f}(h)$ $(\forall h \in E)$.

При этом в случае нормированного конуса E, K-функционал $f = [\underline{f}; \overline{f}]$ ограничен в том и только в том случае, если $\underline{f}$ равномерно полунепрерывен снизу на E, $\overline{f}$ равномерно полунепрерывен сверху на E.

Доказательство. 1. Так как значения f — компактные отрезки в $\mathbb{R}$, то можно принять обозначение $f(h) = [\underline{f}(h); \overline{f}(h)]$, где $-\infty < \underline{f}(h) \leqslant \overline{f}(h) < +\infty$. Согласно свойству субаддитивности f, для любых h_1, $h_2 \in E$ верно:

$$[\underline{f}(h_1 + h_2); \overline{f}(h_1 + h_2)] \subset [\underline{f}(h_1); \overline{f}(h_1)] + [\underline{f}(h_2); \overline{f}(h_2)] = [\underline{f}(h_1) + \underline{f}(h_2); \overline{f}(h_1) + \overline{f}(h_2)],$$

что равносильно системе неравенств:

$$\begin{cases} \underline{f}(h_1 + h_2) \geqslant \underline{f}(h_1) + \underline{f}(h_2); \\ \overline{f}(h_1 + h_2) \leqslant \overline{f}(h_1) + \overline{f}(h_2). \end{cases}$$

Аналогично, $\forall \lambda \geqslant 0$, $\forall h \in E$ имеем:

$$[\underline{f}(\lambda h); \overline{f}(\lambda h)] = \lambda[\underline{f}(h); \overline{f}(h)] = [\lambda \underline{f}(h); \lambda \overline{f}(h)],$$

что равносильно системе равенств $\{\underline{f}(\lambda h) = \lambda \underline{f}(h); \overline{f}(\lambda h) = \lambda \overline{f}(h)\}$.

Таким образом, $\underline{f}$ надлинеен, $\overline{f}$ сублинеен. Обратное утверждение проверяется аналогично.

2. Если f ограничен по норме, то согласно теореме 2.4 f равномерно полунепрерывен сверху на E, т. е.

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in E\ (\|h\| < \delta) \Rightarrow ([\underline{f}(x + h); \overline{f}(x + h)] \subset (\underline{f}(x) - \varepsilon; \overline{f}(x) + \varepsilon)). \tag{2.9}$$

Условие справа в (2.9) равносильно системе неравенств

$$\begin{cases} \underline{f}(x+h) > \underline{f}(x) - \varepsilon; \\ \overline{f}(x+h) < \overline{f}(x) + \varepsilon, \end{cases}$$

что означает равномерную полунепрерывность для $\underline{f}$ (снизу) и $\overline{f}$ (сверху). □

Замечание 2.15. Отметим также, что для любого K-функционала (не только суб- или надлинейного) $f = [\underline{f}; \overline{f}] : E \to \mathbb{R}_K$ свойство *полунепрерывности сверху* в точке $x \in E$ можно записать в следующем виде:

$$\underline{f}(x) \leqslant \varliminf_{n\to 0} \underline{f}(x+h) \leqslant \varlimsup_{n\to 0} \overline{f}(x+h) \leqslant \overline{f}(x).$$

Приведем простой класс примеров сублинейных ограниченных K-функционалов.

Пример 2.1. Пусть E — нормированное пространство, $\mathcal{C}$ — выпуклый компакт в E^* (в сильной топологии). Положим

$$f_{\mathcal{C}}(h) = \mathcal{C} \cdot h. \tag{2.10}$$

Тогда $f_{\mathcal{C}} \in E^*_K$, $\|f_{\mathcal{C}}\| = \|\mathcal{C}\|$. В случае, если E — вещественное гильбертово пространство, можно взять $\mathcal{C} \subset E$ и положить $f_{\mathcal{C}}(h) = (\mathcal{C}, h)$. В частности, при $E = \mathbb{R}$ имеем $f_{[a;b]}(h) = [a; b] \cdot h$.

Отметим, что K-функционал допускает представление

$$f_{\mathcal{C}}(h) = [\underline{f}_{\mathcal{C}}(h); \overline{f}_{\mathcal{C}}(h)], \quad \text{где } \underline{f}_{\mathcal{C}}(h) = \min(\mathcal{C} \cdot h),\ \overline{f}_{\mathcal{C}}(h) = \max(\mathcal{C} \cdot h).$$

Построенный пример нетрудно обобщить на *K-операторы конечного ранга* $A : E \to \mathbb{R}^n_K$

$$Ah = \prod_{i=1}^{n} (\mathcal{C}_i \cdot h) \quad (\mathcal{C}_i \subset E^*),$$

а также на K-операторы со значениями в $(l_p)_K$, $p \geqslant 1$,

$$Ah = \prod_{i=1}^{n} (\mathcal{C}_i \cdot h) \quad \Big(\mathcal{C}_i \subset E^*,\ \sum_{i=1}^{\infty} \|\mathcal{C}_i\|^p < +\infty\Big).$$

Помимо рассмотренных в пункте 2.2 общих свойств сублинейных операторов, опишем некоторые специальные свойства сублинейных K-операторов. Вначале введем понятие *K-композиции*.

Определение 2.12. Пусть E, F, C — нормированные конусы, $A \in L_K(E; F)$, $B \in L_K(F; G)$. *K-композицией* $[B \cdot A]$ K-операторов A и B назовем многозначное отображение

$$[B \cdot A]h = \overline{co}\Big(\bigcup_{k \in Ah} Bk \Big).$$

Имеет место следующий неочевидный факт.

Теорема 2.11. *Если* $A \in L_K(E; F)$, $B \in L_K(F; G)$, *то* $[B \cdot A] \in L_K(E; G)$. *При этом выполнено неравенство*

$$\|[B \cdot A]\| \leqslant \|A\| \cdot \|B\|.$$

Доказательство. Пусть $D = \bigcup\limits_{y \in Ah} By$. Для произвольной последовательности $\{z_n\}_{n=1}^{\infty} \subset D$ возможны два случая.

1. Вся последовательность $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$, или хотя бы некоторая ее подпоследовательность, содержится в одном By, при некотором $y \in Ah$. Так как множество By компактно, то из $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность.

2. Никакая подпоследовательность из $\{z_n\}_{n=1}^{\infty}$ не содержится в каком-либо одном By, где $y \in Ah$, т. е. в каждом By может содержаться только конечное число z_n. Следовательно, существует некоторая последовательность $\{y_k\}_{k=1}^{\infty} \subset Ah$, такая, что каждое By_k содержит некоторую точку z_{n_k}.

а). Так как Ah — компакт, то из $\{y_k\}_{n=1}^{\infty}$ можно выделить некоторую сходящуюся подпоследовательность $y_{k_i} \to y_0 \in Ah$. Так как B непрерывен как отображение в $\widetilde{F}_K$, то

$$By_{k_i} \subset By_0 + E_{k_i}, \quad \text{где } \|E_{k_i}\| = \sup_{z \in E_{k_i}} \|z\| \to 0.$$

б). Следовательно, для любого $i = 1, 2, \dots$ найдется такой элемент $\widetilde{z_i} \in By_0$, что $z_{n_{k_i}} = \widetilde{z_i} + e_i$, где $e_i \in E_{k_i}$, $\|e_i\| \to 0$ при $i \to \infty$.

Так как последовательность $\{\widetilde{z_i}\}_{i=1}^{\infty}$ содержится в компакте By_0, то из нее можно выделить некоторую сходящуюся подпоследовательность $\widetilde{z_{i_j}} \to z_0 \in By_0$. При этом $\widetilde{z_{i_j}} = e_{i_j} + z_{n_{k_{i_j}}}$, где $\|e_{i_j}\| \to 0$, $j \to \infty$, откуда следует, что $z_{n_{k_{i_j}}} \to z_0$ при некотором $z_0 \in \overline{D}$. Следовательно, множество $\overline{D}$ компактно, откуда множество $\overline{co}(D) = \overline{co}(\overline{D})$ также компактно.

Сублинейность отображения $[B \cdot A] : E \to G_K$ проверяется непосредственно. □

Замечание 2.16. Нетрудно аналогичным образом ввести *бисублинейные K-операторы* $B : E_1 \times E_2 \to F_K$. В этом случае каноническая изометрия между упорядоченными конусами бисублинейных и сублинейных операторов (2.7) принимает вид

$$L_K(E_1, E_2; F) \cong L_{sub}(E_1; L_K(E_2; F)),$$

а в случае полисублинейных операторов

$$L_K(E_1, \dots, E_n; F) \cong L_{sub}(E_1; L_K(E_2, \dots, E_n; F)).$$

Перейдем к вопросу о матрице сублинейных K-операторов. Вначале рассмотрим вопрос о *разложении сублинейного K-оператора в прямую сумму*; здесь сохраняется результат предложения 2.2.

Предложение 2.4. *Пусть E_j $(j = \overline{1,n})$ и F — нормированные конусы, $A \in L_K\Big(\bigoplus\limits_{j=1}^{n} E_j; F\Big)$. Обозначим $P_j : E \to E_j$ канонические проекции, и положим $A_j = A \cdot P_j$ $(j = \overline{1,n})$. Тогда справедлива оценка*

$$\Big(A \preceq \bigoplus_{j=1}^{n} A_j = \sum_{j=1}^{n} A \cdot P_j\Big) \Leftrightarrow \Big(Ah \preceq \sum_{j=1}^{n} A_j h_j \quad (\forall\, h = h_1 + \ldots + h_n \in E)\Big).$$

Перейдем к вопросу о *покоординатном разложении сублинейного K-оператора*. Здесь удобнее перейти к так называемому *K-набору* координатных операторов.

Предложение 2.5. *Пусть E и F_i $(i = \overline{1,m})$ — нормированные конусы, $A \in L_K\Big(E; \prod\limits_{i=1}^{m} F_i\Big)$. Обозначим $Q_i : F_i \to F$ канонические инъекции и положим $A^i h = Q_i \cdot (Ah)$ $(i = \overline{1,m})$. Введем «K-набор» K-операторов $A^i : E \to (F_i)_K$:*

$$(A^1, \dots, A^m)_K h = \prod_{i=1}^{m} (A^i h) \in \Big(\prod_{i=1}^{m} F_i\Big)_K.$$

Тогда справедлива оценка

$$\Big(A \preceq (A^1, \dots, A^m)_K\Big) \Leftrightarrow \Big(Ah \subset \prod_{i=1}^{m} (A^i h)\Big).$$

При этом прямоугольная оценка точна по проекциям: $P^i(Ah) = A^i h$ $(i = \overline{1,m})$.

Из результатов предложений 2.2 и 2.3 следует общее утверждение о разложении сублинейного K-оператора в так называемую K-матрицу.

Теорема 2.12. *Пусть E_j $(j = \overline{1,n})$ и F_i $(i = \overline{1,m})$ — нормированные конусы, $A \in L_K\Big(\sum\limits_{j=1}^{n} E_j; \prod\limits_{i=1}^{m} F_i\Big)$. Обозначим, как и ранее, через $P_j : E \to E_j$ и $Q_i : F_i \to F$ соответствующие канонические проекции и инъекции, и положим $A_{ij} h_j = Q_i(A P_j h)$ $(i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n})$.*

Тогда справедлива оценка

$$\Big(A \preceq (A_{ij})_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}} := \Big(\sum_{j=1}^{n} Q_i \cdot (AP_j)\Big)_K^{i=\overline{1,m}} \Leftrightarrow \Big(Ah \subset \Big(\prod_{i=1}^{m}\Big(\sum_{j=1}^{n} A_{ij}h_j\Big)\Big).$$

Опишем детально частный случай K-матриц для *сублинейных K-функционалов и K-операторов конечного ранга*. Вначале опишем разложение в прямую сумму K-функционалов.

Предложение 2.6. *Пусть E_j $(j = \overline{1,n})$ — нормированные конусы, $f = [\underline{f};\overline{f}] \in \Big(\bigoplus_{j=1}^{n} E_j\Big)_K^*$. Положим*

$$f_j = f \cdot P_j = [\underline{f} \cdot P_j; \overline{f} \cdot P_j] = [\underline{f_j}; \overline{f}_j] \quad (j = \overline{1,n}).$$

Тогда справедлива оценка

$$\Big(f \preceq \bigoplus_{j=1}^{n} f_j = \sum_{j=1}^{n} f \cdot P_j\Big) \Leftrightarrow \Big([\underline{f}(h); \overline{f}(h)] \subset \Big[\sum_{j=1}^{n} \underline{f_j}(h_j); \sum_{j=1}^{n} \overline{f}_j(h_j)\Big]\Big) \quad (\forall\, h = h_1 + \ldots + h_n \in E).$$

Перейдем к разложению в K-набор сублинейного K-оператора конечного ранга.

Предложение 2.7. *Пусть E — нормированный конус, $A \in L_K(E;\mathbb{R}^m)$, $Q_i : \mathbb{R}_{(i)} \to \mathbb{R}^m$ — канонические инъекции. Положим*

$$f_i h = [\underline{f_i}(h); \overline{f}_i(h)] = Q_i(Ah), \quad f_i \in (E)_K^* \quad (i = \overline{1,m}).$$

Введем «K-набор» K-функционалов $f_i : E \to \mathbb{R}_K$:

$$(f^1, \ldots, f^m)_K \cdot h = \prod_{i=1}^{m} [\underline{f_i}(h); \overline{f}_i(h)] \in \mathbb{R}^m.$$

Тогда справедлива оценка

$$\Big(A \preceq (f^1, \ldots, f^m)_K\Big) \Leftrightarrow \Big(Ah \subset \prod_{i=1}^{m} [\underline{f_i}(h); \overline{f}_i(h)]\Big) \quad (\forall h \in E).$$

При этом прямоугольная оценка точна по проекциям: $P^i(Ah) = [\underline{f_i}(h); \overline{f}_i(h)]$.

Наконец, опишем общее разложение K-оператора конечного ранга в K-матрицу.

Теорема 2.13. *Пусть E_j $(j = \overline{1,n})$ — нормированные конусы, $A \in L_K\Big(\sum_{j=1}^{n} E_j; \mathbb{R}^m\Big)$. Положим*

$$f_{ij}(h_j) = [\underline{f_{ij}}(h_j); \overline{f}_{ij}(h_j)] = Q_i(AP_j h) \quad (i = \overline{1,m};\ j = \overline{1,n}).$$

Тогда $\forall\, h = h_1 + \ldots + h_n \in E$ справедлива оценка

$$\Big(A \preceq ([\underline{f_{ij}}; \overline{f}_{ij}])_K = \Big(\Big[\sum_{j=1}^{n} \underline{f_{ij}}; \sum_{j=1}^{n} \overline{f}_{ij}\Big]\Big)_K^{i=\overline{1,m}}\Big) \Leftrightarrow \Big(Ah \subset \Big(\prod_{i=1}^{m}\Big[\sum_{j=1}^{n} \underline{f_{ij}}(h_j); \sum_{j=1}^{n} \overline{f}_{ij}(h_j)\Big]\Big). \tag{2.11}$$

Замечание 2.17. Приведем полезную для приложений *параметрическую модель K-матрицы* (в случае K-операторов конечного ранга).

Вводим «нижнюю» и «верхнюю» матрицы K-оператора A:

$$\underline{A} = (\underline{f_{ij}})_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}, \quad \overline{A} = (\overline{f}_{ij})_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}}.$$

Тогда оценка (2.11) позволяет интерпретировать K-матрицу $[\underline{f_{ij}}; \overline{f}_{ij}]$ как набор матриц

$$\Big((1 - t_i)\underline{f_{ij}} + t_i \cdot \overline{f}_{ij}\Big)_{i=\overline{1,m}}^{j=\overline{1,n}} \quad (0 \leqslant t_i \leqslant 1).$$

Будем записывать это множество как *m-мерный матричный прямоугольник* $[\underline{A}; \overline{A}]$, стягивающий (вдоль главной диагонали) матрицы $\underline{A}$ и $\overline{A}$. Вершинами этого прямоугольника служат 2^m матриц, часть строк которых берется из $\underline{A}$, а другая часть строк — из $\overline{A}$.

Перейдем к *бисублинейным K-функционалам*. Здесь справедлив аналог теоремы 2.10.

Теорема 2.14. *Пусть E_1, E_2 — выпуклые конусы, $\varphi : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}_K$. Тогда φ — бисублинейный K-функционал в том и только в том случае, если*

$$\varphi(h_1, h_2) = [\underline{\varphi}(h_1, h_2); \overline{\varphi}(h_1, h_2)],$$

где $\underline{\varphi} : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ — бинадлинейный функционал, $\overline{\varphi} : E_1 \times E_2 \to \mathbb{R}$ — бисублинейный функционал, $\underline{\varphi}(h_1, h_2) \leqslant \overline{\varphi}(h_1, h_2)$.

При этом, если E_1, E_2 — нормированные конусы, то K-функционал $\varphi = [\underline{\varphi}; \overline{\varphi}]$ ограничен в том и только в том случае, когда $\underline{\varphi}$ полунепрерывен снизу, $\overline{\varphi}$ полунепрерывен сверху на $E_1 \times E_2$.

Рассматривая, по аналогии сублинейным случаем, бисублинейный K-функционал

$$B \in L_K(E_1 \bigoplus \ldots \bigoplus E_n, E_1 \bigoplus \ldots \bigoplus E_n; \mathbb{R}),$$

мы приходим к порожденной им квадратной бисублинейной K-матрице

$$M_B = (\varphi_{ij} = [\underline{\varphi_{ij}}; \overline{\varphi_{ij}}])_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,n}}.$$

Аналогом оценки (2.11) здесь служит следующая квадратичная оценка.

Теорема 2.15. *В рассмотренных условиях справедлива оценка*

$$B(h)^2 \subset M_B \cdot (h)^2 \subset \prod_{j=1}^{n} \sum_{i=1}^{n} [\underline{\varphi_{ji}}(h_i, h_j); \overline{\varphi_{ji}}(h_i, h_j)].$$

Отметим в заключение, что замечание 2.17 естественным образом распространяется и на бисублинейные K-матрицы.

2.4. Симметризация сублинейных функционалов и K-функционалов. Как уже отмечалось в примере 2.1, естественное вложение $\mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}_K$ $(x \mapsto \{x\})$ инъективно, сохраняет операции, но не сохраняет порядок: $(x_1 < x_2$ в $\mathbb{R}) \not\Rightarrow (\{x_1\} \preceq \{x_2\}$ в $\mathbb{R}_K)$; более того, $\{x_1\}$ и $\{x_2\}$ несравнимы. Вследствие несогласованности исходного порядка в $\mathbb{R}$ и порядка по вложению в $\mathbb{R}_K$, возникает «дисбаланс» между сублинейными функционалами $f : E \to \mathbb{R}$ и однозначными сублинейными функционалами $f : E \to \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}_K$:

1. если K-функционал $f = [\underline{f}; \overline{f}] : E \to \mathbb{R} \hookrightarrow \mathbb{R}_K$ (т. е. $\underline{f} = \overline{f}$) сублинеен относительно вложения в $\mathbb{R}_K$, то f — *линейный функционал*;
2. если функционал $f : E \to \mathbb{R}$ сублинеен относительно обычного порядка в $\mathbb{R}$ (например, $f(x) = \|x\|$), то линейность f отсюда не следует.

Таким образом, если $f : E \to \mathbb{R}$ сублинеен, то функционал $\{f\} : h \mapsto \{f(h)\}$, вообще говоря, не сублинеен. Наша цель — устранить этот «дисбаланс» с помощью простого преобразования «*симметризации*». Вначале введем его для функционалов $f : E \to \mathbb{R}$. Далее E — нормированное пространство.

Определение 2.13. Пусть функционал $f : E \to \mathbb{R}$ сублинеен. Введем симметризованный K-функционал f^s равенством:

$$f^s(h) = [-f(-h); f(h)] =: [\underline{f}^s(h); \overline{f}^s(h)]. \tag{2.12}$$

Предложение 2.8. *Если $f : E \to \mathbb{R}$ сублинеен, то определение* (2.12) *корректно и K-функционал $f^s : E \to \mathbb{R}_K$ также сублинеен. При этом $f^s(-h) = -f^s(h)$.*

Доказательство. Если f сублинеен, то $\overline{f^s} = f$ также сублинеен. Для $\underline{f}^s$ имеем:

$$\underline{f}^s(h + k) = -f(-h - k) \geqslant -f(-h) - f(-k) = \underline{f}^s(h) + \underline{f}^s(k); \quad \underline{f}^s(\lambda h) = -f(-\lambda h)f(-h) = \lambda \underline{f}(h).$$

Таким образом, $\underline{f}^s$ надлинеен, т. е. $f^s = [\underline{f}^s; \overline{f^s}]$ сублинеен. При этом:

$$f^s(-h) = [-f(h); f(-h)] = -[-f(-h); f(h)] = -f^s(h).$$

□

Теперь распространим определение симметризации на сублинейные K-функционалы.

Определение 2.14. Пусть K-функционал $f : E \to \mathbb{R}_K$ сублинеен. Введем *симметризованный K-функционал* f^s равенством

$$f^s(h) = [\min(\underline{f}(h), -\overline{f}(-h)); \max(\overline{f}(h); -\underline{f}(-h))]. \tag{2.13}$$

Предложение 2.9. *Если $f : E \to \mathbb{R}_K$ сублинеен, то определение* (2.13) *корректно и K-функционал $f^s : E \to \mathbb{R}_K$ также сублинеен. При этом $f^s(-h) = -f^s(h)$.*

Доказательство. Если f сублинеен, то имеем импликации:

$$(\underline{f} \text{ надлинеен}) \Rightarrow (-\underline{f}(-h) \text{ сублинеен}) \Rightarrow (\overline{f^s}(h) = \max(\overline{f}(h), -\underline{f}(-h)) \text{ сублинеен});$$
$$(\overline{f} \text{ сублинеен}) \Rightarrow (-\overline{f}(-h) \text{ надлинеен}) \Rightarrow (\underline{f^s}(h) = \min(\underline{f}(h), -\overline{f}(-h)) \text{ надлинеен}).$$

Нечетность f^s проверяется аналогично случаю $f : E \to \mathbb{R}$. □

Замечание 2.18.

1. Из сублинейности f в обоих рассмотренных случаях непосредственно следует неравенство $\underline{f^s} \leqslant \overline{f^s}(h)$.
2. Нечетность f^s влечет его однородность $\forall\, \lambda \in \mathbb{R}:\ f^s(\lambda h) = \lambda f^s(h)$. Однако отсюда не следует линейность функционала f^s ввиду его многозначности.
3. Повторная симметризация не меняет вид f^s: $f^{ss} = f^s$.

Наконец отметим, что в случае $f : E \to \mathbb{R}$ симметризации f и $\{f\}$ совпадают, что решает поставленную в начале пункта задачу.

Предложение 2.10. *Если $f : E \to \mathbb{R}$ сублинеен, то $\{f\}^s = f^s$. Таким образом, в этом случае формулы* (2.12) *(для f) и* (2.13) *(для $\{f\}$) дают один и тот же результат. В частности, если f линеен, то $f^s = \{f\}$.*

Доказательство. Имеем:

$$\{f\}^s(h) = [\min(f(h), -f(-h));\ \max(f(h), -f(-h))] = [-f(-h); f(h)] = f^s(h).$$

□

Замечание 2.19. Отметим в заключение, что процедуру симметризации можно применить также и к сублинейным операторам $A : E \to F$, $B : E \to F_K$, если конус F *решеточно* упорядочен. Заметим также, что записанные в этом разделе свойства K-функционалов распространяются на случай симметризованных функционалов.

3. Компактные субдифференциалы. Исчисление первого порядка

3.1. K-пределы и их основные свойства. Понятие K-предела, введенное ранее в пункте 1.2, мы изложим здесь уже в категории нормированных конусов.

Определение 3.1. Пусть E — нормированный конус, $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ — убывающая по вложению при $\delta \searrow +0$ система замкнутых выпуклых подмножеств E с непустым компактным пересечением B. Множество B назовем *K-пределом* системы $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ при $\delta \to +0$:

$$B = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B_\delta,$$

если $\forall\, U(0) \subset E\ \exists\, \delta_U > 0\ (0 < \delta < \delta_U) \Rightarrow (B_\delta \subset B + U)$.

Таким образом, «K-сходимость» множеств B_δ, в рамках определения 3.1 (как и ранее в рамках определения 1.1) можно охарактеризовать как равномерное внешнее топологическое стягивание множеств B_δ к их компактному пересечению.

Перейдем к простейшим свойствам K-пределов. Следующие два свойства легко следуют из определения и не используют в доказательстве компактность K-предела.

Предложение 3.1. *Пусть в условиях определения* 3.1 *существует* $\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B^1_\delta$. *Если* $B^2_\delta \subset B^1_\delta$ $(\forall\, \delta > 0)$, *то существует и* $\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B^2_\delta$, *причем выполнено включение*:

$$\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B^2_\delta \subset \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B^1_\delta.$$

Предложение 3.2. *Если существует* $\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B_\delta$, *то при любом* $\lambda \geqslant 0$ *существует и* $\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}(\lambda B_\delta)$, *причем выполнено равенство*:

$$\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}(\lambda B_\delta) = \lambda\, \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B_\delta.$$

Доказательство свойства *обобщенной аддитивности* уже требует компактности хотя бы одного из двух K-пределов.

Предложение 3.3. *Если существуют K-пределы* $\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B^1_\delta$ *и* $\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B^2_\delta$, *то существует и K-предел их замкнутой суммы (по Минковскому)* $\{\overline{B^1_\delta + B^2_\delta}\}_{\delta>0}$, *причем выполнено равенство*:

$$\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\, \overline{(B^1_\delta + B^2_\delta)} = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B^1_\delta + \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B^2_\delta.$$

Доказательство. Обозначим пределы справа, соответственно, через B^1 и B^2. Непосредственно проверяется, что выполняется включение

$$\bigcap_{\delta>0} \overline{(B^1_\delta + B^2_\delta)} \supset \bigcap_{\delta>0} B^1_\delta + \bigcap_{\delta>0} B^2_\delta = B^1 + B^2.$$

Для проверки обратного включения воспользуемся свойством из определения 3.1. Для заданной окрестности нуля $U = U(0) \in E$ выберем такую окрестность нуля $U' = U'(0) \in E$ и подходящее $\delta_{U'}$, чтобы $U' + U' \subset U$ и выполнялось:

$$\left(0 < \delta < \delta_{U'}\right) \Leftrightarrow \left(B^1_\delta \subset B^1 + U', B^2_\delta \subset B^2 + U'\right).$$

Отсюда следует:

$$\overline{(B^1_\delta + B^2_\delta)} \subset (B^1 + U') + (B^2 + U') = (B^1 + B^2) + (U' + U') \subset (B^1 + B^2) + U.$$

Таким образом, условие из определения 3.1 для $B^1(h) + B^2(h)$ выполнено. При этом

$$\bigcap_{\delta>0} \overline{(B^1_\delta + B^2_\delta)} \subset \bigcap_{U(0)\in E} [B^1 + B^2) + U] = B^1 + B^2,$$

так как $B^1 + B^2$ замкнуто. Таким образом, условие из определения 3.1 для $B^1 + B^2$ также выполнено и равенство доказано. □

Предложение 3.4. *Пусть* $B^1_\delta \subset E_1$, $B^2_\delta \subset E_2$ $(\forall\delta > 0)$, *где* E_1, E_2 — *нормированные конусы. Если существуют K-пределы* $\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B^1_\delta$ *и* $\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B^2_\delta$, *то существует и K-предел их декартова произведения* $\{B^1_\delta \times B^2_\delta\}_{\delta>0}$ *в* $E_1 \times E_2$, *причем имеет место равенство*:

$$\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}(B^1_\delta \times B^2_\delta) = (\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B^1_\delta) \times (\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B^2_\delta). \tag{3.1}$$

Доказательство. Обозначим пределы справа в (3.1), соответственно, через B^1 и B^2. Тогда

$$\bigcap_{\delta>0}(B^1_\delta \times B^2_\delta) = \left(\bigcap_{\delta>0} B^1_\delta\right) \times \left(\bigcap_{\delta>0} B^2_\delta\right) = B^1 \times B^2,$$

т. е. условие из определения 3.1 для $B^1 \times B^2$ выполнено. Далее, для любых окрестностей $U_i(0) \in E_i$ $(i = 1, 2)$ выберем такие $\delta_{U_i} > 0$, что

$$(0 < \delta < \delta_{U_i}) \Rightarrow (B^1_\delta \subset B^2_\delta), \qquad i = 1, 2.$$

Пусть $U = U_1 \times U_2, \delta_U = \min(\delta_{U_1}, \delta_{U_2})$. Следовательно,

$$(0 < \delta < \delta_{U_i}) \Rightarrow B^1 \times B^2 \subset (B^1_\delta + U_1) \times (B^2_\delta + U_2) = (B^1 \times B^2) + (U_1 + U_2) \subset (B^1 \times B^2) + U,$$

т. е., условие из определения 3.1 для $B^1 \times B^2$ также выполняется. Следовательно, равенство (3.1) доказано. □

Наконец, справедлив следующий важный критерий «K-сходимости», который мы, по аналогии с известным признаком Вейерштрасса, назовем *признаком Вейерштрасса для K-пределов*.

Теорема 3.1. *В условиях и обозначениях определения* 3.1 *K-предел* $\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B_\delta$ *существует тогда и только тогда, когда найдется такой выпуклый компакт* $\widetilde{B}\subset E$, *что*

$$\forall\, U(0)\subset E \quad \exists \delta_U>0: \ \ (0<\delta<\delta_U)\Rightarrow (B_\delta\subset \widetilde{B}+U(0)). \tag{3.2}$$

При этом $\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B_\delta\subset \widetilde{B}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть $B=\underset{\delta\to 0}{K\text{-}\lim} B_\delta$. Тогда, подставляя $B=\widetilde{B}$ во второе условие из определения 3.1, мы сразу же приходим к условию (3.2).

Достаточность. Пусть (3.2) выполнено. Тогда $B=\bigcap\limits_{\delta>0} B_\delta$ компактно, т. к.

$$(B=\bigcap_{\delta>0} B_\delta\subset \tilde{B}+U)\ \Rightarrow\ (B\subset \bigcap_{U(0)}(\widetilde{B}+U)=\widetilde{B}).$$

Допустим, что $B\neq \underset{\delta\to 0}{K\text{-}\lim} B_\delta$, т. е. условие из определения 3.1 не выполняется. Следовательно, существует такая открытая окрестность $U_0(0)\subset E$ и такая последовательность $\delta_n\searrow 0$, что

$$B_{\delta_n}\bigcap B+U_0\neq\varnothing,\ n=1,2,\ldots. \tag{3.3}$$

Выберем $\forall\, n\in\mathbb{N}$ точку $x_n\in B_{\delta_n}\backslash(B+U_0)$. Так как $\delta_n\to 0$, то из (3.2) следует

$$d(x_n,B)\to 0 \text{ при } n\to\infty.$$

Из определения квазиметрики теперь следует, что $\forall\, n$ существует такой $\tilde{x}_n\in\tilde{B}$, что $d(x_n,\tilde{x}_n)\to 0$ при $n\to\infty$.

Ввиду компактности $\tilde{B}$, из последовательности $\{\tilde{x}_n\}_{n=1}^{\infty}\subset B$ можно выделить сходящуюся подпоследовательность $\tilde{x}_{n_k}\to x_0\in\tilde{B}$ при $k\to\infty$.

При этом, в силу (3.3), $x_{n_k}\notin B+U_0$ $(k=1,2,\ldots)$, откуда следует в пределе $x_0\notin B$. С другой стороны, из-за убывания $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ последовательность $\{x_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ сходится в каждом B_δ, начиная с некоторого номера n_{k_0} (для которого $\delta_{n_{k_0}}\leqslant\delta$).

Следовательно, ввиду замкнутости B_δ имеем $x_0\in B_\delta$ $\forall\,\delta>0$, откуда $x_0\in B$. Получено противоречие, следовательно, условие из определения 3.1 выполнено. □

Замечание 3.1.

1. Условие (3.2) можно, видимо, трактовать как условие «полунепрерывности сверху» отображения $\delta\mapsto B_\delta$ в конусе E_B выпуклых замкнутых ограниченных подмножеств E.
2. Теорема 3.1 служит далее базой для получения критериев K-субдифференцируемости.

3.2. K-субдифференциалы по направлению. Определяя K-субдифференциалы в нормированных конусах, мы стараемся придерживаться классической схемы Гато—Адамара—Фреше: дифференциал по направлению — слабый дифференциал — дифференциал Гато — дифференциал Фреше. Замена основных объектов следующая: пространства $\mapsto$ конусы, линейные операторы $\mapsto$ сублинейные операторы, дифференциалы $\mapsto$ K-субдифференциалы.

Всюду далее E, F — нормированные конусы, $U(x)$ — окрестность точки $x\in E$, $h\in E$ — произвольное направление в E, $\overline{co}$ — замкнутая выпуклая оболочка множества в F.

Определение 3.2. Назовем *K-субдифференциалом* отображения f в точке x следующий K-предел (если он существует):

$$\partial_K f(x,h)=\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\overbrace{\overline{co}\,\{Y\in F\,|\,f(x+th)=f(x)+tY,\,0<t<\delta\}}^{\partial_\delta f(x,h)}. \tag{3.4}$$

В случае, когда F — нормированное пространство, выражение под знаком K-предела в (3.4) можно выразить в более привычной форме, через разностные отношения:

$$\partial_K f(x,h)=\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\,\overline{co}\left\{\frac{f(x+th)-f(x)}{t}\,\middle|\, 0<t<\delta\right\}.$$

Заметим, что если конус F не погружается в векторное пространство, то в (3.4) при каждом фиксированном $t>0$ определяется Y, вообще говоря, *не единственным образом*.

Приведем некоторые *элементарные свойства* K-субдифференциалов по направлению.

Предложение 3.5. *Справедливы соотношения*:

1. $\partial_K(\lambda f)(x,h)=\lambda\partial_K f(x,h)$ $(\forall\lambda\geqslant 0)$;
2. $\partial_K(f_1+f_2)(x,h)\subset\partial_K f_1(x,h)+\partial_K f_2(x,h)$.

Доказательство. Имеем:

$$\partial_K(f_1+f_2)(x,h)=\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\,\overline{co}\left\{\frac{f_1(x+th)+f_2(x+th)-f_1(x)-f_2(x)}{t}\,\middle|\,0<t<\delta\right\}=$$

$$=\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\,\overline{co}\left(\left\{\frac{f_1(x+th)-f_1(x)}{t}\right\}+\left\{\frac{f_2(x+th)-f_2(x)}{t}\right\}\,\middle|\,0<t<\delta\right)\subset$$

$$\subset\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\left[\overline{co}\left\{\frac{f_1(x+th)-f_1(x)}{t}\,\middle|\,0<t<\delta\right\}+\overline{co}\left\{\frac{f_2(x+th)-f_2(x)}{t}\,\middle|\,0<t<\delta\right\}\right]=$$

$$=\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\left[\overline{\overline{co}\left\{\frac{f_1(x+th)-f_1(x)}{t}\,\middle|\,0<t<\delta\right\}+\overline{co}\left\{\frac{f_2(x+th)-f_2(x)}{t}\,\middle|\,0<t<\delta\right\}}\right].$$

Таким образом, получаем:

$$\partial_K(f_1+f_2)(x,h)\subset\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\,\overline{co}\left\{\frac{f_1(x+th)-f_1(x)}{t}\,\middle|\,0<t<\delta\right\}+$$

$$+\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\,\overline{co}\left\{\frac{f_2(x+th)-f_2(x)}{t}\,\middle|\,0<t<\delta\right\}=\partial_K f_1(x,h)+\partial_K f_2(x,h).$$

□

В случае, если F — нормированное пространство, свойство однородности по f выполнено в полном объеме:

3. $\partial_K(\lambda f)(x,h)=\lambda\partial_K f(x,h)\quad(\forall\lambda\in\mathbb{R})$.

Предложение 3.6. *Справедливо соотношение*:

1. $\partial_K(f)(x,\lambda h)=\lambda\partial_K f(x,h)\quad(\forall\lambda\geqslant 0)$;

В случае, если F — нормированное пространство, свойство однородности по h выполнено в полном объеме:

2. $\partial_K f(x,\lambda h)=\lambda\partial_K f(x,h)\quad(\forall\lambda\in\mathbb{R})$.

Доказательство. Имеем:

$$\partial_K f(x,\lambda h)=\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\,\overline{co}\left\{\frac{f(x+t(\lambda h))-f(x)}{t}\,\middle|\,0<t<\delta\right\}=$$

$$=\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\,\overline{co}\left\{\frac{f(x+(t\lambda)h)-f(x)}{t\lambda}\lambda\,\middle|\,0<t\lambda<\lambda\delta\right\}=$$

$$=\left|\tilde\delta=\lambda\delta,\ \tilde\delta\to+0,\ t\lambda=\tilde t\right|=\underset{\tilde\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\left[\lambda\overline{co}\left\{\frac{f(x+\tilde th)-f(x)}{\tilde t}\,\middle|\,0<\tilde t<\tilde\delta\right\}\right]=\lambda\partial_K f(x,h).$$

□

Предложение 3.7. *Если $f=(f_1,f_2):E\to F_1\times F_2$, то справедливы равенства*:

$$pr_{F_i}(\partial_K f(x,h))=\partial_K f_i(x,h)\quad(i=1,2).$$

В частности,

$$\partial_K(f_1,f_2)(x,h)\subset\partial_K f_1(x,h)\times\partial_K f_2(x,h).$$

Выделим важный случай K-субдифференцирования функционала $f:E\to\mathbb{R}$. Здесь можно дать простую формулу для вычисления $\partial_K f(x,h)$.

Теорема 3.2. *Функционал $f : E \to \mathbb{R}$ K-субдифференцируем в точке x по направлению h тогда и только тогда, когда существуют конечные верхняя и нижняя производные f по направлению h в этой точке*: $\overline{\partial} f(x,h)$ *и* $\underline{\partial} f(x,h)$. *При этом имеет место равенство*:

$$\partial_K f(x,h) = \Big[\underline{\partial} f(x,h);\ \overline{\partial} f(x,h)\Big]. \tag{3.5}$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $\varphi(t) = f(x+th)$, $\varphi : [0;1] \to \mathbb{R}$. Поскольку при $0 < t \leqslant 1$

$$\frac{f(x+th) - f(x)}{t} = \frac{\varphi(t) - \varphi(0)}{t},$$

то отсюда следует

$$\partial_K f(x,h) = \partial_K \varphi(0) = \Big[\frac{d\varphi}{\underline{dt}}(0);\ \frac{\overline{d\varphi}}{dt}(0)\Big] = \Big[\underline{\partial f}(x,h);\ \overline{\partial f}(x,h)\Big].$$

□

Замечание 3.2. Формулы для вычисления $\underline{\partial} f(x,h)$ и $\overline{\partial} f(x,h)$ имеют обычный вид, коническая структура E его не усложняет:

$$\underline{\partial} f(x,h) = \varliminf_{t\to+0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}, \quad \overline{\partial} f(x,h) = \varlimsup_{t\to+0} \frac{f(x+th) - f(x)}{t}.$$

Как следствие, отметим уже приведенный в пункте 1.2 результат (замечание 1.2).

Следствие 3.1. *Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ K-субдифференцируема в точке $x \in \mathbb{R}$ тогда и только тогда, когда существуют и конечны нижняя и верхняя частные производные в этой точке*: $\dfrac{df}{\underline{dx}}(x)$ *и* $\dfrac{\overline{df}}{dx}(x)$. *При этом имеет место равенство*

$$\partial_K f(x) = \left[\frac{df}{\underline{dx}}(x); \frac{\overline{df}}{dx}(x)\right].$$

Следствие 3.2. *Отображение $f = (f_1, \dots, f_m) : E \to \mathbb{R}^m$ K-субдифференцируемо в точке $x \in \mathbb{R}$ по направлению h тогда и только тогда, когда все координатные функционалы f_i K-субдифференцируемы в этой точке по направлению h. При этом выполнена оценка*

$$\partial_K (f_1, \dots, f_m)(x,h) \subset \prod_{j=1}^{m} \Big[\underline{\partial} f_j(x,h);\ \overline{\partial} f_j(x,h)\Big]. \tag{3.6}$$

При этом прямоугольная оценка (3.6) *точна по проекциям.*

3.3. Слабый K-субдифференциал, K-субдифференциал Гато, K-субдифференциал Фреше. Отправляясь от K-субдифференциала по фиксированному направлению h и действуя по аналогии с классической схемой, мы теперь вводим слабый K-субдифференциал как сублинейный K-оператор по h, K-субдифференциал Гато — как ограниченный сублинейный K-оператор, и наконец, K-субдифференциал Фреше «по схеме Гато» плюс «равномерная по направлениям сходимость в K-пределе $\partial_K f(x,h)$».

Далее, как и в пункте 3.2, E и F — нормированные конусы, $U(x)$ — окрестность точки $x \in E$, $f : E \supset U(x) \to F$.

Определение 3.3. Будем говорить, что отображение f *слабо K-субдифференцируемо* в точке x, если f K-субдифференцируемо в этой точке по любому направлению $h \in E$ и K-субдифференциал по направлению $\partial_K f(x,h)$ сублинеен по h. Примем в этом случае обозначение $\partial_K f(x)h = \partial_K f(x,h)$. Здесь $\partial_K f(x) : E \to F_K$ — сублинейный K-оператор.

Определение 3.4. Будем говорить, что отображение f *K-субдифференцируемо по Гато* в точке x, если f слабо K-субдифференцируемо в этой точке и слабый K-субдифференциал $\partial_K f(x)$ ограничен (или, что равносильно, равномерно полунепрерывен сверху на E). В этом случае сублинейный ограниченный оператор $\partial_K f(x)$ назовем *K-субдифференциалом Гато* отображения f в точке x.

Определение 3.5. Будем говорить, что отображение f *K-субдифференцируемо по Фреше* (или *сильно K-субдифференцируемо*) в точке x, если f K-субдифференцируемо по Гато в этой точке и сходимость в K-пределе

$$\partial_K f(x)h = K\text{-}\lim_{\delta\to+0} \overline{co}\{Y \in F | f(x+h) = f(x) + tY,\ 0 < t < \delta\} \tag{3.7}$$

равномерна по всем направлениям h, $0 < \|h\| \leqslant 1$. В этом случае K-оператор $\partial_K f(x)$ назовем *K-субдифференциалом Фреше* (или *сильным K-субдифференциалом*) отображения f в точке x.

В случае нормированного пространства F равенство (3.7) принимает вид:

$$\partial_K f(x)h = K\text{-}\lim_{\delta\to+0} \overline{co} \left\{ \frac{f(x+th) - f(x)}{t};\ 0 < t < \delta \right\}.$$

Приведем теперь критерии для всех типов K-субдифференцируемости в терминах малости остаточного члена (доказательство опирается на признак Вейерштрасса для K-пределов). С этой целью введем понятие *многозначного малого отображения*.

Определение 3.6. Обозначим через F_B нормированный выпуклый конус всех замкнутых ограниченных выпуклых подмножеств F с суммой $\overline{(B_1 + B_2)}$ и с нормой $\|B\| = \sup\limits_{y\in B} \|y\|$.

Отображение $\Psi : \mathbb{R} \supset U(0) \to F_B$ назовем *малым* (в нуле), если $\|\Psi(t)\| \to 0$ при $t \to 0$. Примем обычную запись: $\Psi(t) \to 0$ при $t \to 0$.

Теорема 3.3. *Отображение f слабо K-субдифференцируемо в точке x в том и только в том случае, если найдутся сублинейный K-оператор $B : E \to F_K$ и отображение $\psi : E \to F_B$ такие, что*

$$f(x+h) \in f(x) + Bh + \psi(h), \quad \textit{где}\ \ \frac{\psi(th)}{t} \to 0\ \ \textit{при}\ \ t \to +0 \quad (\forall h \in E). \tag{3.8}$$

При этом $\partial_K f(x)h \subset Bh$ ($\forall h \in E$).

В случае нормированного пространства F представление (3.8) *можно переписать в виде*

$$\frac{f(x+th) - f(x)}{t} \in Bh + \lambda(t,h), \quad \textit{где}\ \ \lambda(t,h) \to 0\ \ \textit{при}\ \ t \to +0 \quad (\forall h \in E).$$

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть f слабо K-субдифференцируемо в точке x. Тогда для любого фиксированного $h \in S_1$ применимо условие (3.8). Полагая $U = U_\varepsilon(0)$, найдем $\delta = \delta_h(\varepsilon) > 0$, для которого

$$(\delta < \delta_h(\varepsilon)) \Rightarrow (\partial_\delta f(x,h) \subset Bh + U_\varepsilon), \tag{3.9}$$

причем оператор $Bh = \partial_K f(x)h$ — сублинейный по h. Так как при этом $\delta_h(\varepsilon)$ можно уменьшать, то без ограничения общности можно считать, что $\delta_h(\varepsilon)$ строго убывает к нулю при $\varepsilon \searrow 0$. Тогда существует обратная функция $\varepsilon = \varepsilon_h(\delta)$ (также строго убывающая к нулю при $\delta \searrow 0$), для которой

$$\partial_\delta f(x,h) \subset Bh + U_{\varepsilon_h}(\delta).$$

Так как (для y из (3.9)) верно, что $y \in \partial_\delta f(x,h)$ при $0 < t < \delta$, то отсюда получаем

$$f(x+th) \in f(x) + B(th) + t\varepsilon_h(t), \tag{3.10}$$

где $\varepsilon_h(t) \to 0$ при $t \to 0$. Положим $\psi(th) = t\varepsilon_h(t)$ (в частности, $\psi(h) = \varepsilon_h(1)$). Тогда

$$\psi(th)/t = \varepsilon_h(t) \to 0 \text{ при } t \to 0,$$

т. е. условие (3.8) выполняется.

Проверим достаточность. Пусть выполняется (3.8). Тогда, заменяя $h \mapsto th$ в (3.8), получим:

$$f(x+th) \in f(x) + B(th) + \psi(th),$$

что равносильно включению (для y из (3.9))

$$y \in Bh + \frac{\psi(th)}{t}.$$

Следовательно,

$$\partial_\delta f(x,h) \subset Bh + U_\varepsilon$$

при $\delta \leqslant \delta_h(\varepsilon)$, т. е. условие выполнено для любого h, $\|h\| = 1$, откуда отображение f K-субдифференцируемо по любому направлению h. □

Теорема 3.4. *Отображение f K-субдифференцируемо по Гато в точке x в том и только в том случае, если выполнена оценка* (3.8)*, где $B \in L_K(E; F)$.*

Доказательство. Если (3.8) выполнено, то по теореме 3.3 $\partial_K f(x)h =: Ah \subset Bh$, откуда $\|A\| \leqslant \|B\| < \infty$, т. е. A ограничен. Таким образом, отображение f K-субдифференцируемо по Гато в точке x. Обратно, если f K-субдифференцируемо по Гато в точке x, подставим в (3.8) $Bh = \partial_K f(x)h$. □

Теорема 3.5. *Отображение f K-субдифференцируемо по Фреше в том и только в том случае, если выполнена оценка* (3.8)*, где $B \in L_K(E; F)$ и*

$$\frac{\psi(th)}{t} \rightrightarrows 0 \ \text{ при } t \to +0 \ (\text{равномерно по } \|h\| \leqslant 1); \tag{3.11}$$

или, что равносильно,

$$\|\psi(h)\| = o(\|h\|).$$

Доказательство. Если выполнено (3.11), то, повторяя выкладку из доказательства достаточности в теореме 3.3, получим:

$$\partial_K f(x)h \subset Ah + \frac{\psi(th)}{t}.$$

Так как $\psi(h) \to 0$ при $\|h\| \to 0$, то $(\psi(th)/t) \rightrightarrows 0$ при $t \to 0$, $\|h\| \leqslant 1$. Следовательно,

$$Ah \subset \partial_K f(x,t)h \subset Ah + U \text{ при } |t| < \delta_U \ (\forall \|h\| \leqslant 1),$$

т. е. выполнено определение K-субдифференцируемости по Фреше.

Обратно, если f K-субдифференцируемо по Фреше, т. е.

$$\partial_\delta f(x,h) \rightrightarrows \partial_K f(x,h) \ \text{ при } \ \delta \to +0, \ \|h\| \leqslant 1,$$

то в доказательстве необходимости теоремы 3.3 определение $\delta_h(\varepsilon)$, а значит, и определение $\psi(th)$, не зависит от выбора h, т. е. зависит только от $\|\tilde{h} = th\| = t$. Таким образом, заменяя $th = \tilde{h}$, получаем

$$f(x + \tilde{h}) \in f(x) + \partial_K f(x, \tilde{h}) + \psi(\tilde{h}),$$

где $\psi(\tilde{h}) \to 0$ при $\|\tilde{h}\| \to 0$, т. е. выполнено (3.11). □

Отметим некоторые *свойства сильных K-субдифференциалов*, непосредственно вытекающие из определения и критерия 3.5. Прежде всего, это очевидная связь между K-субдифференцируемостью и непрерывностью.

Теорема 3.6. *Если отображение f сильно K-субдифференцируемо в точке x, то f непрерывно в этой точке.*

Далее, в случае нормированных пространств очевидно, что $\partial_K f(x)$ — обобщение производной Фреше. Менее очевидно, что существует и обратная связь.

Теорема 3.7. *Пусть E, F — нормированные пространства, $f : E \supset U(x) \to F$. Тогда*:

1. *Если f сильно дифференцируемо в точке x, то f также и сильно K-субдифференцируемо в точке x, причем $\partial_K f(x) = f'(x)$.*
2. *Обратно, если f дифференцируемо по каждому направлению в точке x, причем* (*обозначая $\partial f(x,h) = \lim\limits_{t \to +0}(f(x+th) - f(x)/t)$*):

$$\partial f(x, -h) = -\partial f(x, h),$$

и f сильно K-субдифференцируемо в точке x, то f сильно дифференцируемо (*в обычном смысле*) *в этой точке.*

Доказательство. 1. Очевидно, существование $\partial f(x,h)$ влечет равенство $\partial_K f(x;h) = \partial f(x,h)$, так как определение одноточечного K-предела сводится к обычному условию стягивания.

2. Далее, для K-оператора с одноточечными значениями свойство сублинейности (при условии $A(-h) = -Ah$) переходит в свойство линейности. Таким образом, $\partial_K f(x) \in L(E;F)$, а в этом случае определение 3.5 сильной K-субдифференцируемости тождественно определению сильной дифференцируемости по Фреше. □

Простой пример $\partial_K f \neq f'$ дает функция $f(x) = |x|$. Имеем $\partial_K f(x) = f'(x) = \operatorname{sign} x$ при $x \neq 0$, $\partial_K f(0) = [-1;1]$.

Здесь мы также выделим важный *случай K-субдифференцирования функционалов*.

Замечание 3.3. В случае сильного K-субдифференцирования функционалов $f : E \to \mathbb{R}$, а также (покоординатно) отображений $f : E \to \mathbb{R}^m$ нам удобнее будет использовать *симметризованный K-субдифференциал* $\partial^s_K f(x)h$. Используя равенства (3.5) и (2.12), получаем:

$$\partial^s_K f(x)h = [\min(\underline{\partial} f(x,h), -\overline{\partial} f(x,-h)); \max(\overline{\partial} f(x,h), -\underline{\partial} f(x,-h))]. \tag{3.12}$$

Смысл симметризации легко уяснить, переходя к языку нижних и верхних частных производных. Фиксируя нормированное направление h, равенство (3.5) можно переписать в виде:

$$\partial_K f(x)h = \left[\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x+0); \frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x+0)\right] \tag{3.13}$$

(где справа выписаны нижняя и верхняя правосторонние частные производные f в точке x по прямой $\{\lambda h \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$ с положительным направлением h).

Тогда

$$\partial_K f(x)(-h) = \left[-\frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x-0); -\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x-0)\right] \tag{3.14}$$

(где справа выписаны уже левосторонние нижняя и верхняя производные f в точке x).

Отсюда, подставляя (3.13) и (3.14) в (3.12), получаем:

$$\partial^s_K f(x)h = \left[\min\left(\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x+0); \frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x-0)\right); \max\left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x+0); \frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x-0)\right)\right] = \left[\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x); \frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x)\right] \tag{3.15}$$

Теорема 3.8. *Пусть E — нормированный конус. Если функционал $f : E \to \mathbb{R}$ сильно K-субдифференцируем в точке x, то $\forall\, h \in E$ справедливо равенство*

$$\partial_K f(x)h = \left[\underline{\partial} f(x)h; \overline{\partial} f(x)h\right], \tag{3.16}$$

где $\underline{\partial} f(x)$ — надлинейный, полунепрерывный снизу по h функционал, $\overline{\partial} f(x)$ — сублинейный, полунепрерывный сверху по h функционал.

В частности, если E — нормированное пространство и $\|h\| = 1$, то

$$\partial^s_K f(x)h = \left[\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x); \frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x)\right]. \tag{3.17}$$

Доказательство. Равенство (3.16) для K-субдифференциала по направлению было доказано в теореме 3.2. Так как $\partial_K f(x)$ — сублинейный ограниченный K-функционал, то требуемые свойства функционалов $\underline{\partial} f(x,h)$ и $\overline{\partial} f(x,h)$ вытекают из теоремы 2.10. Равенство (3.17) выведено в замечании 3.3. □

3.4. Общие свойства сильных K-субдифференциалов. Мы начнем с необходимого условия K-субдифференцируемости.

Теорема 3.9. *Пусть $E_1, \ldots, E_n$, F — нормированные конусы. Если отображение $f : E_1 \times \ldots \times E_n \to F$ K-субдифференцируемо в точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$ по совокупности переменных, то f K-субдифференцируемо в этой точке по каждой из переменных в отдельности. При этом справедлива оценка*

$$\partial_K f(x_1, \ldots, x_n)(h_1, \ldots, h_n) \subset \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_K (x_1, \ldots, x_n)h_i.$$

Доказательство. 1. По определению частных K-субдифференциалов

$$\partial_\delta f^{x_j}(x_i, h_i) = \overline{co}\left\{ y_j \,\middle|\, f(x_j + th_j, x_i) = f(x_1, x_2) + ty_j \; 0 < t < \delta \right\} \; (i, j = 1, 2).$$

С другой стороны,

$$\partial_\delta f((x_1, x_2), (h_1, 0)) = \overline{co}\left\{ y_1 \,\middle|\, f(x_1 + th_1, x_2) = f(x_1, x_2) + ty_1 \; 0 < t < \delta \right\},$$

$$\partial_\delta f((x_1, x_2), (0, h_2)) = \overline{co}\left\{ y_2 \,\middle|\, f(x_1, x_2 + th_2) = f(x_1, x_2) + ty_2 \; 0 < t < \delta \right\}.$$

Переходя в этих равенствах к пределу по направлениям $(h_1, 0)$ и $(0, h_2)$ соответственно, получим:

$$\partial_K^{x_1} f(x_1, x_2) h_1 = \partial_K f(x_1, x_2)(h_1, 0), \; \partial_K^{x_2} f(x_1, x_2) h_2 = \partial_K f(x_1, x_2)(0, h_2).$$

2. Если отображение f слабо K-субдифференцируемо в точке (x_1, x_2), $h = (h_1, h_2) = (h_1, 0) + (0, h_2)$, то, ввиду сублинейности K-субдифференциалов по h,

$$\partial_K f(x_1, x_2)(h_1, h_2) \subset \partial_K f(x_1, x_2)(h_1, 0) + \partial_K f(x_1, x_2)(0, h_2) = \partial_K^{x_1} f(x_1, x_2) h_1 + \partial_K^{x_2} f(x_1, x_2) h_2.$$

□

Следствие 3.3. *Пусть $E_1, \ldots, E_n$ — нормированные пространства. Если функционал $f : E_1 \times \ldots \times E_n \to \mathbb{R}$ сильно K-субдифференцируем в точке x, то имеет место «формула полного K-субдифференциала» ($\forall\, h = (h_1, \ldots, h_n) \in E_1 \times \ldots \times E_n$) в оценочной форме:*

$$\partial_K^s f(x)(h_1, \ldots h_n) \subset \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial f}{\partial h_i}\Big)_K^s (x) h_i = \left[\sum_{i=1}^{n} \underline{\frac{\partial f}{\partial h_i}}(x); \sum_{i=1}^{n} \overline{\frac{\partial f}{\partial h_i}}(x)\right], \tag{3.18}$$

где через $(\partial f/\partial h_i)_K^s$ обозначены симметризованные частные K-субдифференциалы по переменным $h_i \in E_i$.

В частности, если функционал $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сильно K-субдифференцируем в точке x, то в этой точке существуют и конечны нижние и верхние частные производные f по всем переменным, причем выполнена оценка

$$\partial_K^s f(x)(h_1, \ldots h_n) \subset \left[\sum_{i=1}^{n} \underline{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(x) h_i; \sum_{i=1}^{n} \overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(x) h_i\right] = \left[\underline{\nabla} f(x); \overline{\nabla} f(x)\right] \cdot h,$$

где $\underline{\nabla} f(x) = \Big(\underline{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(x)\Big)_{i=\overline{1,n}}$, $\overline{\nabla} f(x) = \Big(\overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(x)\Big)_{i=\overline{1,n}}$.

Теперь рассмотрим вопрос о покоординатной K-субдифференцируемости отображения $f : E \to F_1 \times \ldots \times F_m$, где E, $F_1, \ldots, F_m$ — нормированные конусы.

Теорема 3.10. *Отображение f K-субдифференцируемо в точке $x \in E$ тогда и только тогда, когда все координатные отображения f_j, $j = \overline{1, m}$, K-субдифференцируемы в точке x. При этом справедлива оценка*

$$\partial_K f(x) h \subset \prod_{j=1}^{m} (\partial_K f_j(x) h). \tag{3.19}$$

В частности, если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, то последняя оценка принимает вид

$$\partial_K^s f(x) h \subset \prod_{j=1}^{m} \left(\left[\underline{\frac{df_j}{dx}}(x); \overline{\frac{df_j}{dx}}(x) \right] \cdot h \right). \tag{3.20}$$

При этом прямоугольные оценки (3.19) *и* (3.20) *точны по проекциям.*

Доказательство. Напомним свойство покоординатной сходимости для K-предела (предложение 3.4):

$$K\text{-}\lim_{\delta \to +0} (B_\delta^1 \times \ldots \times B_\delta^n) = (K\text{-}\lim_{t \to +0} B_\delta^1) \times \ldots \times (K\text{-}\lim_{t \to +0} B_\delta^n).$$

Отсюда, применяя определение K-субдифференциала к отображению

$$f = (f_1, \ldots, f_m) : E \to F_1 \times \ldots \times F_m,$$

получаем ($\forall\, h \in E$):

$$\partial_K f(x,h) = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\Big\{(y_1,\dots,y_m)\in F_1\times F_2\times\ldots\times F_m \;\Big|\; (f_1(x+th),\dots,f_m(x+th)) =$$
$$= (f_1(x),\dots,f_m(x)) + t(y_1,\dots,y_m);\ 0<t<\delta\Big\} \subset$$
$$\subset \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\Big[\Big\{y_1\in F_1 \;\Big|\; f_1(x+th)=f_1(x)+ty_1;\ 0<t<\delta\Big\}\times\ldots\times$$
$$\times\Big\{y_m\in F_m \;\Big|\; f_m(x+th)=f_m(x)+ty_m;\ 0<t<\delta\Big\}\Big] =$$
$$= \Big(\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\Big\{y_1\in F_1 \;\Big|\; f_1(x+th)=f_1(x)+ty_1;\ 0<t<\delta\Big\}\Big)\times\ldots\times$$
$$\times\Big(\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\Big\{y_m\in F_m \;\Big|\; f_m(x+th)=f_m(x)+ty_m;\ 0<t<\delta\Big\}\Big) =$$
$$= \partial_K f_1(x,h)\times\ldots\times\partial_K f_m(x,h). \tag{3.21}$$

При этом, в силу предложения 3.4, $\partial_K f(x,h)$ существует тогда и только тогда, когда существуют все $\partial_K f_j(x,h)$, $j=\overline{1,m}$. Далее, в силу предложения 2.3, $\partial_K f(x,h)$ — сублинейный ограниченный (по h) K-оператор тогда и только тогда, когда $\partial_K f_j(x,\cdot)\in L_K(E;F_j)$, $j=\overline{1,m}$. Наконец, в силу точности по проекциям оценки в (3.21), сходимость в K-пределе $\partial_K f(x,h)$ равномерна по $\|h\|\leqslant 1$ тогда и только тогда, когда это справедливо для всех K-пределов $\partial_K f_j(x,h)$ $j=\overline{1,m}$. Таким образом, оценка (3.19) выполнена и точна по проекциям. □

Перейдем к вопросу о K-матрице Якоби для отображений $f:\prod\limits_{i=1}^{n}E_i\to\prod\limits_{j=1}^{m}F_j$, где E_i $(i=\overline{1,n})$, F_j $(j=\overline{1,m})$ — нормированные конусы. Используя предыдущие результаты, нетрудно получить следующее утверждение.

Теорема 3.11. *Если отображение f K-субдифференцируемо в точке $x=(x_1,\dots x_n)$, то*

$$\partial_K f(x_1,\dots x_n)(h_1,\dots,h_n)\subset\prod_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\Big)_K(x_1,\dots,x_n)h_i\Big). \tag{3.22}$$

Доказательство. Последовательно применяя теоремы 3.10 и 3.9, имеем:

$$\partial_K f(x_1,\dots x_n)(h_1,\dots,h_n)\subset\prod_{j=1}^{m}\big(\partial_K f_j(x_1,\dots x_n)(h_1,\dots,h_n)\big)\subset\prod_{j=1}^{m}\Big(\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\Big)_K(x_1,\dots,x_n)h_i\Big).$$

□

Определение 3.7. K-матрицу сублинейных K-операторов

$$J_K f(x)=\Big(\Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\Big)_K(x)\Big)_K^{i=\overline{1,n},\,j=\overline{1,m}}\qquad\Big(\Big(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\Big)_K(x)\in L_K(E_i;F_j)\Big)$$

назовем *K-матрицей Якоби* отображения f в точке x.

Выделим случай евклидовых пространств, где оценка (3.22) существенно уточняется.

Теорема 3.12. *Пусть $E_1,\dots,E_n$ — нормированные пространства. Если отображение $f: E_1\times\ldots\times E_n\to\mathbb{R}^m$ сильно K-субдифференцируемо в точке x, то $\forall\, h=(h_1,\dots,h_n)$ справедлива оценка*

$$\partial_K^s f(x)(h_1,\dots,h_n)\subset\prod_{j=1}^{m}\Big[\sum_{i=1}^{n}\underline{\frac{\partial f_j}{\partial h_i}}(x);\sum_{i=1}^{n}\overline{\frac{\partial f_j}{\partial h_i}}(x)\Big].$$

В частности, в случае $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ получаем

$$\partial_K^s f(x)(h_1,\dots,h_n)\subset\prod_{j=1}^{m}\Big[\sum_{i=1}^{n}\underline{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}}(x)h_i;\sum_{i=1}^{n}\overline{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}}(x)h_i\Big]=\prod_{j=1}^{m}\Big([\underline{\nabla} f_j(x);\overline{\nabla} f_j(x)],\,h\Big)=[\underline{J}_f(x);\overline{J}_f(x)]\cdot h,$$

где $\underline{J}_f(x) = \Big(\underline{\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}}(x)\Big)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}$, $\overline{J}_f(x) = \Big(\overline{\dfrac{\partial f_j}{\partial x_i}}(x)\Big)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}$ — *соответственно, нижняя и верхняя матрицы Якоби* f *в точке* x, $[\underline{J}_f(x); \overline{J}_f(x)]$ — m*-мерный отрезок, стягивающий эти матрицы* (*см. замечание* 2.14).

Доказательство. Доказательство непосредственно следует из теоремы 3.10 и следствия 3.3. □

Перейдем к вопросу о K-субдифференцировании композиции.

Теорема 3.13. *Если отображение* $f : E \to F$ K*-субдифференцируемо в точке* $x \in E$, *отображение* $g : F \to G$ K*-субдифференцируемо в точке* $y = f(x) \in F$, *то композиция* $g \circ f : E \to G$ *также* K*-субдифференцируема в точке* $x \in E$. *При этом*

$$\partial_K(g \circ f)(x)h \subset [\partial_K g(y) \cdot \partial_K f(x)]h. \tag{3.23}$$

Доказательство. Обозначим $Ah = \partial_K f(x)h$, $Bk = \partial_K g(y)k$. Применяя теорему 3.3 к f в точке x и к g в точке y, соответственно, получаем:

$$f(x+h) \in f(x) + Ah + \varphi(h), \text{ где } \frac{\varphi(th)}{t} \to 0 \text{ при } t \to 0 \quad (\forall h \in E),$$

$$g(y+k) \in g(y) + Bk + \psi(h), \text{ где } \frac{\psi(tk)}{t} \rightrightarrows 0 \text{ при } t \to 0 \ (\forall k \in E, \ \|k\| \leqslant 1).$$

Подставляя во второе включение $y = f(x)$, $f(x+h) = f(x) + k$, получаем:

$$g(f(x+h)) \in g(f(x)) + Bk + \psi(k) \in B(Ah + \varphi(h)) + \psi(Ah + \varphi(h)). \tag{3.24}$$

Поскольку отображение f K-субдифференцируемо по Гато в точке x, а отображение g K-субдифференцируемо по Фреше в точке y, то:

а). Так как B субаддитивен, то из (3.24) получаем:

$$\begin{aligned} g(f(x+h) &\in g(f(x)) + B(Ah) + [B(\varphi(h)) + \psi(Ah + \varphi(h))] \subset \\ &\subset [BA]h + [B(\varphi(h)) + \psi(Ah + \varphi(h))]. \end{aligned} \tag{3.25}$$

При этом $[BA] \in L_K(E; G)$ в силу сублинейности и ограниченности A и B.

б). Так как $(\varphi(th)/t) \to 0)$ при $t \to 0$ для любого $h \in E$ и B непрерывен в нуле, то

$$\frac{B(\varphi(th))}{t} = B\left(\frac{\varphi(th)}{t}\right) \to 0 \quad \text{при } t \to 0.$$

в). Так как $\psi(tk)/(t) \rightrightarrows 0$ при $t \to 0$ ($\|k\| \leqslant 1$), то для любого фиксированного $h \in E$

$$\frac{\psi(A(th) + \varphi(th))}{t} = \frac{\psi\left(t\left[Ah + \dfrac{\varphi(th)}{t}\right]\right)}{t} =: \frac{\psi(tk_t)}{t} \rightrightarrows 0$$

при $t \to 0$, так как множество Ah ограничено при $\|h\| \leqslant 1$, $\dfrac{\varphi(th)}{t} \to 0$ и, следовательно, множество $k_t = Ah + \dfrac{\varphi(th)}{t}$ ограничено при достаточно малых t. Отсюда, обозначая

$$\lambda(h) = B(\varphi(h)) + \psi(Ah + \varphi(h)),$$

получаем:

$$(\lambda(th)/t) \to 0 \text{ при } t \to 0 \, \forall \, h \in E. \tag{3.26}$$

Поскольку из (3.25) следует

$$(g \circ f)(x+h) \in (g \circ f)(x) + [BA]h + \lambda(h),$$

то отсюда и из (3.26) по теореме 3.3 следует K-субдифференцируемость по Гато $g \circ f$ и оценка (3.23).

2. Если f также K-субдифференцируемо по Фреше в точке x, то $\dfrac{\varphi(th)}{t} \rightrightarrows 0$ при $t \to 0$, $\|h\| \leqslant 1$. Отсюда следует уточнение пункта б) в первой части доказательства:

$$\frac{B\left(\varphi(th)\right)}{t} = B\left(\frac{\varphi(th)}{t}\right) \rightrightarrows 0 \qquad \text{при } t \to 0, \ \|h\| \leqslant 1.$$

Следовательно, в пункте в) доказательства первой части имеем теперь:

$$\frac{\lambda(th)}{t} = B\left(\frac{\varphi(th)}{t}\right) + \frac{\psi(A(th)+\varphi(th))}{t} \rightrightarrows 0$$

при $t \to 0$, $\|h\| \leqslant 1$. Итак,

$$(g\circ f)(x+h) \in (g\circ f)(x) + [BA]h + \lambda(h),$$

где $\lambda(h) \to 0$ при $\|h\| \to 1$. Отсюда по теореме 3.3 следует, что отображение $(g\circ f)$ K-субдифференцируемо по Фреше в точке x. □

Для приложений важен вопрос о K-матрице Якоби композиции.

Рассмотрим случай

$$E = \prod_{i=1}^{n} E_i \xrightarrow{f=(f_1,..,f_m)} F = \prod_{j=1}^{m} F_j \xrightarrow{g=(g_1,\ldots,g_l)} \prod_{k=1}^{l} G_k = G.$$

Напомним, что в определении 2.12 была введена *K-композиция* $[B\cdot A]$ K-операторов. Это позволяет ввести соответствующее произведение K-матриц:

$$(A_{ij})_K \times (B_{jk})_K = \Big(\sum_j [A_{ij}\cdot B_{jk}]\Big)_K.$$

Теорема 3.14. *Если отображение f K-субдифференцируемо в точке $x\in E$, а отображение g K-субдифференцируемо в точке $y = f(x)\in F$, то справедлива оценка* (*в обозначениях определения* 2.12):

$$\partial_K(g\circ f)(x) \preceq J_K(g\circ f)(x) \preceq J_K g(y)\times J_K f(x) = \left(\sum_{j=1}^{m}\left[\left(\frac{\partial g_k}{\partial y_j}\right)_K(y)\cdot\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_K(x)\right]\right)_K^{k=\overline{1,l},\, i=\overline{1,n}}, \quad (3.27)$$

или

$$\partial_K(g\circ f)(x) \preceq J_K(g\circ f)(x) \subset \prod_{k=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[\left(\frac{\partial g_k}{\partial y_j}\right)_K(y)\cdot\left(\frac{\partial f_j}{\partial x_i}\right)_K(x)\right]h_i\right) \quad (h=(h_1,\ldots,h_n)\in E).$$

В частности, если в условиях теоремы выполняется $E=\mathbb{R}^n$, $F=\mathbb{R}^m$, $G=\mathbb{R}^l$, то

$$\partial_K^s(g\circ f)(x) \subset (J_K g(y)\times J_K f(x))h = \prod_{k=1}^{l}\left(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\left[\underline{\frac{\partial g_k}{\partial y_j}}(y);\overline{\frac{\partial g_k}{\partial y_j}}(y)\right]\cdot\left[\underline{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}}(x);\overline{\frac{\partial f_j}{\partial x_i}}(x)\right]\cdot h_i\right). \quad (3.28)$$

В случае, если f дифференцируемо в обычном смысле, оценка (3.28) *принимает вид*

$$J_K^s(g\circ f)(x)h \subset \prod_{k=1}^{l}\left[\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\underline{\frac{\partial g_k}{\partial y_j}}(y)\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)h_i;\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\overline{\frac{\partial g_k}{\partial y_j}}(y)\frac{\partial f_j}{\partial x_i}(x)h_i\right].$$

Доказательство. Оценка (3.28) вытекает из последовательного применения теорем 3.10 и 3.11. □

Рассмотрим теперь вопрос о K-субдифференцировании оператора композиции.

Теорема 3.15. *Пусть $B(u)(x) = f(u(x))$, где $B: C^1(I)\to C(I)$. Если f всюду K-субдифференцируема на I, то оператор композиции $B(u)(x)$ также всюду K-субдифференцируем в $C^1(I)$, причем*

$$\big(\partial_K B(u)h\big)(x) \subset \big(\partial_K f(u(x))h\big)h(x) = [\underline{\partial} f(u(x));\overline{\partial} f(u(x))]h(x).$$

Доказательство. Рассмотрим отображение

$$B(u)(x) = f(u(x)), \quad B: C^1(I)\to C(I),$$

где f — заданная K-субдифференцируемая функция. Зафиксируем направление $h(\cdot)\in C^1(I)$, $t\neq 0$. Тогда

$$\frac{B(u+th)-B(u)}{t}(x) = \frac{f(u(x)+th(x))-f(u(x))}{t} = \frac{f(u(x)+th(x))-f(u(x))}{th(x)}\cdot h(x).$$

Перейдем к выпуклым оболочкам:

$$co\left\{\frac{B(u+th)-B(u)}{t}\,|0<t<\tau\right\}(x)=co\left\{\frac{f(u(x)+th(x))-f(u(x))}{th(x)}\cdot h(x)|0<t<\tau\right\}.$$

Пусть $|th(x)|=|k(x)|$, тогда

$$co\left\{\frac{f(u(x)+th(x))-f(u(x))}{th(x)}\cdot h(x)|0<t<\tau\right\}=co\left\{\frac{f(u(x)+k(x))-f(u(x))}{k(x)}\cdot h(x)|0<t<\tau\right\}\subset$$

$$\subset co\left\{\frac{f(u(x)+k(x))-f(u(x))}{k(x)}|0<|k(x)|<\tau|h(x)|\right\}\cdot h(x).$$

Отсюда, переходя к замыканиям, получаем:

$$\partial^\tau B(u,h)(x)=\overline{co\left\{\frac{B(u+th)-B(u)}{t}\middle|0<t<\tau\right\}(x)}\subset\overline{co\left\{\frac{B(u+th)-B(u)}{t}\middle|0<t<\tau\right\}(x)}\subset$$

$$\subset\overline{co\left\{\frac{f(u(x)+k(x))-f(u(x))}{k(x)}\middle|0<|k(x)|<\tau|h(x)|\right\}}h(x)=$$

$$=\left(\overline{co}\left\{\frac{f(u(x)+k(x))-f(u(x))}{k(x)}\middle|0<|k(x)|<\tau|h(x)|\right\}\right)\cdot h(x)=\partial_{\tau|h(x)|}f(u(x),h(x)).$$

Переходя к K-пределам, находим:

$$\left(K\text{-}\lim_{\tau\to0}\partial_\tau B(u,h)\right)(x)\subset K\text{-}\lim_{\tau\to0}\left(\partial_\tau B(u,h)(x)\right)\subset$$

$$\subset K\text{-}\lim_{\tau\to0}\left(\big(\partial_{\tau|h(x)|}f(u(x)\big)\,h(x)\right)=\left(K\text{-}\lim_{\tau\to0}\partial_{\tau|h(x)|}f(u(x))\right)h(x).$$

Отсюда имеем

$$\big(\partial_K B(u)h\big)(x)\subset\big(\partial_K f(u(x))h\big)h(x)=[\underline{\partial}f(u(x));\overline{\partial}f(u(x))]h(x).$$

□

Отметим, наконец, случай композиции с билинейным оператором (аналог «производной произведения»).

Теорема 3.16. *Пусть E — нормированный конус, F_1, F_2, G — нормированные пространства. Если отображение $f=(f_1,f_2):E\to F_1\times F_2$ K-субдифференцируемо в точке $x\in E$, и $B:F_1\times F_2\to G$ — билинейный непрерывный оператор, то отображение $B(f_1,f_2):E\to G$ также K-субдифференцируемо в точке x, причем*

$$\partial_K B(f_1,f_2)(x)h\subset B(f_1(x),\partial_K f_2(x)h)+B(\partial_K f_1(x)h,f_2(x)).$$

Доказательство. По теореме 3.13 о K-субдифференцировании композиции

$$\partial_K B(f_1,f_2)\subset[(\partial_K B)(f_1(x),f_2(x))\circ\partial_K(f_1,f_2)(x)].$$

При этом для любого $h:\partial_K(f_1,f_2)(x)h\subset\partial_K f_1(x)h\times\partial_K f_2(x)h$. Поскольку

$$\partial_K(f_1,f_2)(x):h\longmapsto\partial_K(f_1,f_2)(x)h\subset(\partial_K f_1(x)h)\times(\partial_K f_2(x)h),$$

$$\partial_K f_1(x):h\longmapsto\partial_K f_1(x)h,\ \partial_K f_2(x):h\longmapsto\partial_K f_2(x)h,$$

то $\partial_K(f_1,f_2)(x)h\subset[\partial_K f_1(x)h\times\partial_K f_2(x)h]$.

Итак,

$$\partial_K B(f_1,f_2)(x)h\subset[\partial_K B(f_1(x),f_2(x))h\circ\partial_K(f_1,f_2)(x)h];\ \partial_K(f_1,f_2)(x)h\subset[\partial_K f_1(x)h\times\partial_K f_2(x)h].$$

Так как билинейный оператор B дифференцируем по Фреше, то

$$\partial_K B(f_1(x),f_2(x))=B(f_1(x),\cdot)+B(\cdot,f_2(x)),$$

следовательно,

$$\partial_K B(f_1,f_2)(x)h \subset [\partial_K B(f_1(x),f_2(x))h \circ [\partial_k f_1(x)h \times \partial_K f_2(x)h]] =$$
$$= [(B(f_1(x),\cdot) + B(\cdot, f_2(x)))[\partial_K f_1(x)h \times \partial_K f_2(x)h]] =$$
$$= [(B(f_1(x), \partial_K f_2(x))h + B(\partial_K f_1(x), f_2(x))h] = B(f_1(x),\, \partial_K f_2(x))h + B(\partial_K f_1(x),\, f_2(x))h.$$

□

3.5. Теорема о среднем для K-субдифференцируемых отображений. Напомним классическую схему вывода теоремы о среднем в банаховых пространствах.

1. Формула конечных приращений для непрерывных отображений $f : \mathbb{R} \supset [a;b] \to F$: для возрастающей непрерывной на $[a;b]$ и дифференцируемой на $(a;b)$ функции $g(x)$ и замкнутого выпуклого множества $B \subset F$ справедлива импликация

$$(f'(x) \in g'(x)\cdot B,\ a < x < b) \Rightarrow (f(b) - f(a) \in [g(b) - g(a)]\cdot B).$$

2. Общая форма теоремы о среднем для непрерывных на отрезке и дифференцируемых внутри него отображений $f : E \supset U([a;b]) \to F$:

$$f(b) - f(a) \in \overline{co}\{f'(x) | a < x < b\}\cdot(b-a).$$

3. Простейшая форма теоремы о среднем (в той же ситуации):

$$\|f(b) - f(a)\| \leqslant \sup_{x\in(a;b)} \|f'(x)\|\cdot\|b-a\|.$$

При переходе к нормированным конусам, придерживаясь в целом изложенной выше схемы, мы вынуждены оценку $f(b) - f(a) \in [g(b) - g(a)]\cdot B$ заменять оценкой: $f(b) \in f(a) + [g(b) - g(a)]\cdot B$.

Теорема 3.17. *Пусть F — нормированный конус, отображения $f : \mathbb{R} \supset [a;b] \to F$ и $g : \mathbb{R} \supset [a;b] \to \mathbb{R}$ непрерывны на $[a;b]$ и K-субдифференцируемы на $(a;b)$, причем g возрастает. Если для некоторого замкнутого выпуклого множества $B \subset F$ выполнена локальная оценка*

$$\partial_K f(x) \in \partial_K g(x)\cdot B \quad (a < x < b),$$

то справедлива глобальная оценка

$$f(b) \in f(a) + [g(b) - g(a)]\cdot B. \tag{3.29}$$

Если, в частности, F — нормированное пространство, то оценку (3.29) *можно записать в виде*

$$f(b) - f(a) \in [g(b) - g(a)]\cdot B.$$

Доказательство. 1. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Используя определение K-субдифференциала, выберем для каждого $x \in [a+\varepsilon; b-\varepsilon]$ такое $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, что

$$(0 < |h| < \delta) \Rightarrow \begin{cases} \{y | f(x+h) = f(x) + h\cdot y\} \subset O_\varepsilon(\partial_K g(x)\cdot B); \\ \dfrac{g(x+h) - g(x)}{h} \in O_\varepsilon(\partial_K g(x)). \end{cases}$$

Отсюда получаем:

$$(f(x+h) = f(x) + h\cdot y,\ 0 < |h| < \delta) \Rightarrow \left(y \in O_{2\varepsilon}\left(\frac{g(x+h) - g(x)}{h}\cdot B\right)\right). \tag{3.30}$$

2. Из покрытия $\{O_\delta(x)\}_{x\in[a+\varepsilon;b-\varepsilon]}$ выберем конечное покрытие $[a+\varepsilon; b-\varepsilon] \subset \bigcup\limits_{i=1}^{n} O_{\delta_i}(x_i)$.

Впишем в это покрытие разбиение $a + \varepsilon = \overline{x}_0 < \overline{x}_1 < \ldots < \overline{x}_m = b - \varepsilon$ так, чтобы каждый отрезок разбиения содержался в некотором $O_{\delta_i}(x_i)$, причем один из его концов совпадал с x_i.

Фиксируем отрезок разбиения $[\overline{x}_{j-1}; \overline{x}_j]$; пусть, например, $x_i = \overline{x}_{j-1}$. Положим $h = \overline{x}_j - \overline{x}_{j-1}$. Тогда из (3.30) получаем:

$$f(\overline{x}_j) = f(\overline{x}_{j-1}) + \Delta\overline{x}_j\cdot y_j, \quad \text{где} \quad y_j \in O_\varepsilon\left(\frac{g(\overline{x}_j) - g(\overline{x}_{j-1})}{\Delta\overline{x_j}}\cdot B\right) \quad (j = \overline{1,m}). \tag{3.31}$$

В равенствах (3.30) последовательной подстановкой $(j=1)\mapsto(j=2)\mapsto\ldots(j=m-1)\mapsto(j=m)$ получаем:

$$f(b-\varepsilon)=f(a+\varepsilon)+\sum_{j=1}^{m}\Delta\overline{x}_j\cdot y_j:=f(a+\varepsilon)+y_\varepsilon.$$

При этом, используя выпуклость B, имеем:

$$y_\varepsilon=(b-a-2\varepsilon)\cdot\sum_{j=1}^{m}\frac{\Delta\overline{x}_j}{b-a-2\varepsilon}\,y_j\in(b-a-2\varepsilon)\cdot\sum_{j=1}^{m}\frac{\Delta\overline{x}_j}{b-a-2\varepsilon}\cdot O_\varepsilon\Big(\frac{g(\overline{x}_j)-g(\overline{x}_{j-1})}{\Delta\overline{x}_j}\cdot B\Big)\subset$$

$$\subset(b-a-2\varepsilon)\cdot O_\varepsilon\Big(\Big[\sum_{j=1}^{m}\frac{\Delta\overline{x}_j}{b-a-2\varepsilon}\cdot\frac{g(\overline{x}_j)-g(\overline{x}_{j-1})}{\Delta\overline{x}_j}\Big]\cdot B\Big)=(b-a-2\varepsilon)\cdot O_\varepsilon\Big(\frac{g(b-\varepsilon)-g(a+\varepsilon)}{b-a-2\varepsilon}\cdot B\Big)=$$

$$=O_\varepsilon([g(b-\varepsilon)-g(a+\varepsilon)]\cdot B).$$

Отсюда получаем:

$$f(b-\varepsilon)\in f(a+\varepsilon)+O_\varepsilon([g(b-\varepsilon)-g(a+\varepsilon)]\cdot B).\tag{3.32}$$

3. Переходя в (3.32) к пределу при $\varepsilon\to 0$, с учетом замкнутости B и непрерывности f и g, получаем:

$$f(b)\in f(a)+[g(b)-g(a)]\cdot B.$$

□

Перейдем к теореме о среднем для отображений вещественного аргумента.

Теорема 3.18. *Пусть F — нормированный конус, отображение $f:\mathbb{R}\supset[a;b]\to F$ непрерывно на $[a;b]$ и K-субдифференцируемо на $(a;b)$. Тогда выполняется оценка*

$$f(b)\in f(a)+\overline{co}\Big(\bigcup_{a<x<b}\partial_K f(x)\Big)\cdot(b-a).\tag{3.33}$$

Если, в частности, F — нормированное пространство, то оценку (3.33) *можно записать в виде*

$$f(b)-f(a)\in\overline{co}\Big(\bigcup_{a<x<b}\partial_K f(x)\Big)\cdot(b-a).$$

Доказательство. Достаточно в условиях теоремы 3.17 положить $g(x)=x$, $B=\overline{co}\Big(\bigcup\limits_{a<x<b}\partial_K f(x)\Big)$, а затем применить формулу (3.29). □

Из последнего результата легко следует общая форма теоремы о среднем в нормированных конусах. Здесь удобнее перейти к локальным обозначениям.

Теорема 3.19. *Пусть E и F — нормированные конусы, отображение $f:E\supset U([x;x+h])\to F$ непрерывно на $[a;b]$ и K-субдифференцируемо на $(a;b)$. Тогда справедлива оценка*

$$f(x+h)\in f(x)+\overline{co}\Big(\bigcup_{0<\theta<1}(\partial_K f(x+\theta h)\cdot h)\Big).\tag{3.34}$$

Если, в частности, F — нормированное пространство, то оценку (3.34) *можно записать в виде*

$$f(x+h)-f(x)\in\overline{co}\Big(\bigcup_{0<\theta<1}(\partial_K f(x+\theta h)\cdot h)\Big).$$

Доказательство. Достаточно применить оценку (3.33) к функции $\varphi(\theta)=f(x+\theta h)$, $\varphi:[0;1]\to F$. □

Наконец, предъявим теорему о среднем с оценкой по норме.

Теорема 3.20. *В условиях теоремы* 3.19 *справедливы представление и оценка*

$$f(x+h) = f(x) + y, \quad \text{где} \quad \|y\| \leqslant \sup_{0<\theta<1} \|\partial_K f(x+\theta h)\| \cdot \|h\|. \tag{3.35}$$

Если, в частности, F — нормированное пространство, то оценку (3.35) *можно записать в виде*

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leqslant \sup_{0<\theta<1} \|\partial_K f(x+\theta h)\| \cdot \|h\|.$$

Доказательство. Здесь следует применить оценку (3.35) и учесть, что

$$\sup_{0<\theta<1} \|\partial_K f(x+\theta h) \cdot h\| \leqslant \Big(\sup_{0<\theta<1} \|\partial_K f(x+\theta h)\|\Big) \cdot \|h\|.$$

□

Выделим теперь важный случай функционалов.

Теорема 3.21. *Пусть E — нормированный конус, отображение $f : E \supset U([x; x+h]) \to \mathbb{R}$ непрерывно на $[x; x+h]$ и K-субдифференцируемо на $(x; x+h)$. Тогда справедлива оценка*

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant \sup_{0<\theta<1} \left(\max\left(\left|\underline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x+\theta h)\right|, \left|\overline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x+\theta h)\right|\right)\right) \cdot \|h\|. \tag{3.36}$$

Если, в частности, $E = \mathbb{R}^n$, то оценка (3.36) *принимает вид*

$$|f(x+h) - f(x)| \leqslant \sup_{0<\theta<1} (\max(\|\underline{\nabla} f(x+\theta h)\|, \|\overline{\nabla} f(x+\theta h)\|)) \cdot \|h\|. \tag{3.37}$$

Из (3.37) вытекает оценка аналогичного типа для отображений $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$.

Следствие 3.4. *Пусть отображение $f = (f_1, \ldots, f_m) : \mathbb{R}^n \supset U([x; x+h]) \to \mathbb{R}^m$ непрерывно на $[x; x+h]$ и K-субдифференцируемо в $(x; x+h)$. Тогда справедлива оценка*

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leqslant \sup_{0<\theta<1} \sum_{j=1}^{m} \max\Big(\|\underline{\nabla} f_j(x+\theta h)\|, \|\overline{\nabla} f_j(x+\theta h)\|\Big) \cdot \|h\|.$$

3.6. K-субдифференцируемость и субгладкость. Напомним определение полунепрерывности сверху (см. пункт 2.2).

Определение 3.8. Пусть E, F — нормированные конусы, F индуктивно упорядочен, $\Lambda : E \supset U(x) \to F$. Будем говорить, что отображение Λ *полунепрерывно сверху* (или *субнепрерывно*) в точке $x \in E$ (обозначение $\Lambda \in C_{sub}(x)$), если

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0 \ (\|h\| < \delta) \Rightarrow (\Lambda(x+h) \preceq \Lambda(x) + y, \text{ где } \|y\| < \varepsilon). \tag{3.38}$$

Основным для нас является то обстоятельство, что в случае субдифференциалов (т. е. при $\Lambda = \partial_K F : E \to L_K(E; F)$) в условии (3.38) можно заменить $\Lambda(x) = \partial_K f(x)$ на произвольный элемент нормированного конуса $L_K(E; F)$. Это и есть *общая форма достаточного условия K-субдифференцируемости.*

Теорема 3.22. *Пусть E, F — нормированные конусы, отображение $f : E \supset U(x) \to F$ непрерывно в точке x и K-субдифференцируемо в проколотой окрестности $\dot{U}(x)$ этой точки. Если для некоторого K-оператора $\mathcal{D}_{f,x} \in L_K(E; F)$ выполнено условие*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists\, \delta > 0 \ (0 < \|h\| < \delta) \Rightarrow (\partial_K f(x+h) \preceq \mathcal{D}_{f,x} + Y, \text{ где } \|Y\| < \varepsilon), \tag{3.39}$$

то f K-субдифференцируемо в точке x, причем $\partial_K f(x) \preceq \mathcal{D}_{f,x}$.

Доказательство. Фиксируем $h \in E$, $\|h\| < \delta_0$. Из условия (3.39) вытекает оценка при $0 < \theta < 1$:

$$\partial_K f(x+\theta h) \preceq \mathcal{D}_{f,x} + Y(\theta h), \text{ где } \|Y(h)\| \to 0 \text{ при } \|h\| \to 0.$$

Отсюда, применяя на отрезке $[x; x+h]$ к f теорему о среднем 3.17, получаем:

$$f(x+h) \in f(x) + \overline{co}\Big(\bigcup_{0<\theta<1} \partial_K f(x+\theta h) \cdot h\Big) \subset f(x) + \overline{co}\Big(\mathcal{D}_{f,x} \cdot h + \bigcup_{0<\theta<1} Y(\theta h) \cdot h\Big) \subset$$

$$\subset f(x) + \mathcal{D}_{f,x} \cdot h + O_\varepsilon(0) \cdot h, \text{ при } \|h\| < \delta = \delta(\varepsilon).$$

Таким образом,

$$f(x+h) \in f(x) + \mathcal{D}_{f,x} \cdot h + o(\|h\|),$$

т. е. выполнено условие критерия сильной K-субдифференцируемости (теорема 3.5) для f в точке x. Напомним, что доказательство этого критерия опирается на признак Вейерштрасса для K-пределов (теорема 3.1). □

Замечание 3.4. Таким образом, в случае отображения $\Lambda = \partial_K f$ условия (3.38) и (3.39) равносильны. Поэтому мы можем принять условие (3.39) за определение *полунепрерывности сверху*, или *субнепрерывности* отображения $\partial_K f$ в точке x: $\partial_K f \in C_{sub}(x)$. Будем писать также в этом случае: $f \in C^1_{sub}(x)$ и называть отображение f *субгладким* (точнее, C^1-*субгладким*) в точке x.

Перейдем к субгладкости частных K-субдифференциалов как достаточному условию K-субдифференцируемости.

Теорема 3.23. *Пусть* $E_1, \ldots, E_n$, F — *нормированные конусы,* $f : E_1 \times \ldots \times E_n \supset U(x) \to F$. *Тогда*

$$(f \in C^1_{sub}(x)) \Leftrightarrow \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_K \in C_{sub}(x);\ i = \overline{1,n}\right) \Rightarrow (f\ K\text{-}\textit{субдифференцируемо в точке } x).$$

Доказательство. Поскольку

$$\partial_K f(x) = \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_K (x), \tag{3.40}$$

то из субнепрерывности $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)_K$ в точке x в силу (3.39) легко следует субнепрерывность $\partial_K f$ в этой точке. Обратно, субнепрерывность $\partial_K f$ в точке x, согласно определению (3.39), с учетом (3.40) означает:

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ (0 < \|h\| < \delta) \Rightarrow \left(\bigoplus_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_K (x+h) \preceq \mathcal{D}_{f,x} + Y, \text{ где } \|Y\| < \varepsilon\right). \tag{3.41}$$

При этом в силу разложения $L_K(\bigoplus\limits_{i=1}^{n} E_i; F) = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} L_K(E_i; F)$ имеем:

$$\mathcal{D}_{f,x} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{D}^i_{f,x},\ Y = \bigoplus_{i=1}^{n} Y^i, \text{ где } \mathcal{D}^i_{f,x},\ Y^i \in L_K(E_i; F).$$

Отсюда и из (3.41) следует $\forall\, i = \overline{1,n}$

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ (0 < \|h\| < \delta) \Rightarrow \left(\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)_K (x+h) \preceq \mathcal{D}^i_{f,x} + Y^i, \text{ где } \|Y^i\| < \varepsilon\right),$$

т. е., в силу (3.39), $\left(\dfrac{\partial f}{\partial x_i}\right)_K \in C_{sub}(x)$ при $i = \overline{1,n}$. □

Рассмотрим теперь случай функционалов $f : E \to \mathbb{R}$, опираясь на результаты пунктов 3.2–3.4. Здесь мы выходим на узловые условия *полунепрерывности снизу* (по x) $\dfrac{\partial f}{\underline{\partial h}}$ и *полунепрерывности сверху* (по x) $\dfrac{\overline{\partial f}}{\partial h}$, которые в совокупности равносильны *субнепрерывности*

$$\partial_K f = \left[\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}; \frac{\overline{\partial f}}{\partial h}\right] : E \to \mathbb{R}_K.$$

Теорема 3.24. *Пусть* E — *нормированный конус,* $f : E \supset U(x) \to \mathbb{R}$. *Тогда*

$$(f \in C^1_{sub}(x)) \Leftrightarrow \left(\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}\ \textit{полунепрерывен снизу в точке } x,\ \frac{\overline{\partial f}}{\partial h}\ \textit{полунепрерывен сверху в точке } x\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (f\ K\text{-}\textit{субдифференцируем в точке } x).$$

Доказательство. Применяя определение субнепрерывности 3.8 в нашем случае, получаем:

$$\forall\,\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ (\|k\|<\delta)\Rightarrow\left(\left[\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x+k);\frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x+k)\right]\subset\left(\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x)-\varepsilon;\frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x)+\varepsilon\right)\right). \tag{3.42}$$

Включение справа в (3.42) равносильно выполнению (при $\|k\|<\delta$) пары неравенств

$$\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x+k)>\frac{\partial f}{\underline{\partial h}}(x)-\varepsilon;\ \frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x+k)<\frac{\overline{\partial f}}{\partial h}(x)+\varepsilon,$$

что в точности означает полунепрерывность в точке x для $\dfrac{\partial f}{\underline{\partial h}}$ (сверху) и $\dfrac{\overline{\partial f}}{\partial h}$ (снизу). □

В частности, для функционалов многих переменных справедливо следующее утверждение.

Теорема 3.25. *Пусть $E_1,\ldots,\ E_n$ — нормированные конусы, $f:E_1\times\ldots\times E_n\supset U(x)\to\mathbb{R}$. Тогда*

$$(f\in C^1_{sub}(x))\Leftrightarrow\left(\underline{\nabla}_K f=\left(\left(\frac{\partial f}{\underline{\partial x_i}}\right)_K\right)_{i=\overline{1,n}}\ \textit{полунепрерывен снизу в точке}\ \ x,\right.$$

$$\left.\overline{\nabla}_K f=\left(\left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial x_i}\right)_K\right)_{i=\overline{1,n}}\ \textit{полунепрерывен сверху в точке}\ x\right)$$

$$\Rightarrow(f\ K\textit{-субдифференцируем в точке}\ \ x).$$

В частности, в случае $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ имеем:

$$(f\in C^1_{sub}(x))\Leftrightarrow\left(\underline{\nabla}f=\left(\frac{\partial f}{\underline{\partial x_i}}\right)_{i=\overline{1,n}}\ \textit{полунепрерывен снизу в точке}\ x,\right.$$

$$\left.\overline{\nabla}f=\left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial x_i}\right)_{i=\overline{1,n}}\ \textit{полунепрерывен сверху в точке}\ x\right)\Rightarrow(f\ K\textit{-субдифференцируем в точке}\ x).$$

Наконец, выразим условия субгладкости в терминах верхней и нижней K-матриц Якоби.

Теорема 3.26. *Пусть $E_1,\ldots,E_n;\ F_1,\ldots,F_m$ — нормированные конусы, $f:E_1\times\ldots\times E_n\supset U(x)\to F_1\times\ldots\times F_m$. Тогда*

$$(f\in C^1_{sub}(x))\Leftrightarrow\ \textit{матрица}\left(\underline{J}_K f=\left(\left(\frac{\partial f_j}{\underline{\partial x_i}}\right)_K\right)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}\ \textit{полунепрерывна снизу (поэлементно) в}\right.$$

$$\left.\textit{точке}\ x,\quad\textit{матрица}\ \overline{J}_K f=\left(\left(\frac{\overline{\partial f_j}}{\partial x_i}\right)_K\right)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}\ \textit{полунепрерывна сверху в точке}\ x\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(f\ K\textit{-субдифференцируемо в точке}\ \ x).$$

В частности, в случае $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ имеем:

$$(f\in C^1_{sub}(x))\Leftrightarrow\left(\ \textit{матрица}\ \underline{J}f=\left(\frac{\partial f_j}{\underline{\partial x_i}}\right)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}\ \textit{полунепрерывна снизу в точке}\ \ x,\right.$$

$$\left.\textit{матрица}\ \overline{J}f=\left(\frac{\overline{\partial f_j}}{\partial x_i}\right)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}\ \textit{полунепрерывна сверху в точке}\ x\right)\Rightarrow$$

$$\Rightarrow(f\ K\textit{-субдифференцируемо в точке}\ \ x).$$

Дадим некоторое описание класса субгладких функционалов на компакте $C^1_{sub}(D)$. Прежде всего, легко видеть, что все такие функционалы удовлетворяют *условию Липшица*.

Теорема 3.27. *Пусть D — компакт в нормированном конусе E. Тогда $Lip(D)\supset C^1_{sub}(D)$.*

Доказательство. Действительно, пусть $f \in C^1_{sub}(D)$, т. е. $\underline{\dfrac{\partial f}{\partial h}}$ и $\overline{\dfrac{\partial f}{\partial h}}$ субнепрерывны на D, соответственно, снизу и сверху. Тогда из соответствующих версий теоремы Вейерштрасса следует ограниченность $\underline{\dfrac{\partial f}{\partial h}}$ и $\overline{\dfrac{\partial f}{\partial h}}$ на D (по норме), а значит, и (равномерная по $x \in D$) ограниченность разностных отношений $(f(x+h) - f(x)/h)$. Это означает локальную липшицевость f на D, что в силу компактности D влечет глобальную липшицевость. $\square$

Простые примеры показывают, что $Lip(D) \neq C^1_{sub}(D)$.

Пример 3.1. Пусть $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ при $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$. Непосредственное вычисление показывает:
$$\varliminf_{x\to 0} f'(x) = -1 < f'(0) = 0 < \varlimsup_{x\to 0} f'(x) = 1.$$
Таким образом, $f \notin C^1_{sub}(0)$. При этом, ввиду ограниченности f', $f \in Lip(\mathbb{R})$.

Сравним теперь субгладкость с кусочной гладкостью. Здесь мы будем понимать кусочную гладкость в самом широком смысле:
$$f \in C^1_{p.s.}\left(\bigcup_{i=1}^n D_i\right),$$
если каждое сужение $f\big|_{D_i}$ принадлежит классу $C^1(D_i)$. При этом D_i — произвольные замкнутые области в E, пересекающиеся по границе.

Теорема 3.28. *Если* $D = \bigcup\limits_{i=1}^n D_i \subset E$, *то верно включение*
$$C^1_{p.s.}(D) \subset C^1_{sub}(D).$$

Доказательство. Пусть $f \in C^1_{p.s.}(D)$, $x_0 \in \bigcap\limits_{k=1}^m \partial D_{i_k}$. В силу C^1-гладкости сужений $f\big|_{D_{i_k}}$ в точке x, имеем:
$$\lim_{x \overset{\mathrm{D_{i_k}}}{\to} x_0} f'(x) = \left(f\big|_{D_{i_k}}\right)'(x_0) \quad (k = \overline{1,m}).$$
Отсюда следует:
$$\varlimsup_{x\to x_0} \overline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x) = \max_{1\leqslant k\leqslant m}\left(\frac{\partial}{\partial h}\left(f\big|_{D_{i_k}}\right)(x)\right) \leqslant \max_{1\leqslant k\leqslant m}\left(\frac{\partial}{\partial h}\left(f\big|_{D_{i_k}}\right)(x_0)\right) = \overline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x_0),$$
$$\varliminf_{x\to x_0} \underline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x) = \min_{1\leqslant k\leqslant m}\left(\frac{\partial}{\partial h}\left(f\big|_{D_{i_k}}\right)(x)\right) \geqslant \min_{1\leqslant k\leqslant m}\left(\frac{\partial}{\partial h}\left(f\big|_{D_{i_k}}\right)(x_0)\right) = \underline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x_0),$$
т. е. $\overline{\dfrac{\partial f}{\partial h}}$ и $\underline{\dfrac{\partial f}{\partial h}}$ полунепрерывны в D, соответственно, сверху и снизу. $\square$

Аналогичные выкладки для «кусочно-субгладких» отображений приводят к несколько неожиданному выводу: *«кусочная» субгладкость совпадает с «полной» субгладкостью.*

Теорема 3.29. *Если* $D = \bigcup\limits_{i=1}^n D_i \subset E$, *то* $(C^1_{sub})_{p.s.}(D) = C^1_{sub}(D)$.

Заметим, что существуют и осциллирующие, не всюду дифференцируемые функции класса $C^1_{sub}(D)$.

Пример 3.2. Пусть $f(x) = x \sin\left(\dfrac{\ln x}{\sqrt{2}}\right)$, $x \neq 0$, $f(0) = 0$. Здесь
$$\varliminf_{x\to 0} f'(x) = 1 = \overline{f'}(0); \ \varlimsup_{x\to 0} f'(x) = -1 = \underline{f'}(0).$$

Резюмируя, заметим, что в случае компактной области D имеет место двухсторонняя строгая оценка класса $C^1_{sub}(D)$:
$$C^1_{p.s.}(D) \subsetneqq C^1_{sub}(D) \subsetneqq Lip(D).$$

3.7. Связь K-субдифференцируемости на отрезке с обычной дифференцируемостью. Здесь мы опираемся на результат, полученный Ф. С. Стонякиным (теорема 1.4) в связи с обобщением теоремы Данжуа—Янг—Сакса на случай K-субдифференциалов [28]. Напомним его.

Теорема 3.30. *Пусть F — банахово пространство, $F : \mathbb{R} \supset [a;b] \to F$. Если отображение f непрерывно на $[a;b]$ и K-субдифференцируемо почти всюду на $[a;b]$, то f почти всюду дифференцируемо на $[a;b]$ в обычном смысле.*

Отсюда легко следует, что непрерывная K-субдифференцируемость f в любой точке отрезка влечет обычную дифференцируемость в этой точке.

Теорема 3.31. *Если в условиях теоремы* 3.30 *отображение f непрерывно K-субдифференцируемо в некоторой точке $x \in [a;b]$, то f дифференцируемо в точке x в обычном смысле. В частности, класс непрерывно K-субдифференцируемых на отрезке отображений $C^1_K([a;b],F)$ совпадает с классом $C^1([a;b],F)$ отображений $f : [a;b] \to F$, непрерывно дифференцируемых на $[a;b]$ в обычном смысле.*

Доказательство. Допустим противное: f не дифференцируемо в точке x в обычном смысле, т. е. $\partial_K f(x)$ — неодноточечное множество из F_K. Поскольку в силу теоремы 3.31 f почти всюду дифференцируемо в обычном смысле в некоторой окрестности точки x, то найдется такая последовательность $x_n \to x$ в $[a;b]$, для которой $\{f'(x_n)\} \to \partial_K f(x)$ в нормированном конусе F_K при $n \to \infty$.

Легко видеть, что сходимость одноточечных множеств к многоточечному в F_K *невозможна*. Действительно, по определению сходимости в нормированном конусе имеем:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists N\ (n > N) \Rightarrow (f'(x_n) = \partial_K f(x) + Y, \text{ где } \|Y\| < \varepsilon). \tag{3.43}$$

При этом множество $\partial_K f(x) + Y$ всегда многоточечно, в силу многоточечности $\partial_K f(x)$, поэтому равенство справа в (3.43) невозможно в принципе. Таким образом, f дифференцируемо в точке $x \in [a;b]$. Остается заметить, что для отображений $x \mapsto \{f'(x)\}$ $([a;b] \to F_K)$ и отображения $x \mapsto f'(x)$ $([a;b] \to F)$ свойство непрерывности совпадает, поскольку F изометрично множеству своих одноточечных подмножеств $\widetilde{F} \subset F_K$. □

Эти результаты нетрудно распространить на случай векторного аргумента.

Теорема 3.32. *Пусть E и F — банаховы пространства, $f : E \supset U([a;b]) \to F$. Если отображение f K-субдифференцируемо всюду на $[a;b]$, то f дифференцируемо в обычном смысле всюду на $[a;b] \setminus e$, где*

$$\operatorname{mes} \varphi^{-1}(e) = 0 \quad (\varphi(t) = (1-t)a + tb, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1).$$

В частности, если f непрерывно K-субдифференцируемо всюду на $[a;b]$, то $f \in C^1[a;b]$.

Доказательство. Достаточно применить теоремы 3.30 и 3.31 к композиции

$$\varphi(t) = (1-t)a + tb, \quad \varphi : \mathbb{R} \supset [0;1] \to F.$$

□

Замечание 3.5. Последний результат будет далее играть важную роль в теории K-субдифференциалов высших порядков. Из него будет следовать, что, в случае банаховых пространств, n-кратная K-субдифференцируемость на отрезке влечет $(n-1)$-кратную обычную дифференцируемость.

Таким образом, в рассматриваемой ситуации окажется, что собственно K-субдифференциал (не совпадающий с обычным субдифференциалом) может существовать лишь для старшего порядка и лишь на множестве меры нуль.

4. Компактные субдифференциалы высших порядков

4.1. K-субдифференциалы второго порядка. Теорема Юнга о симметричности. Приведем вначале определение K-субдифференциала 2-го порядка, следуя стандартной индуктивной схеме. Всюду далее E, F — нормированные конусы, $U(x)$ — окрестность $x \in E$, $f : E \supset U(x) \to F$.

Определение 4.1. Пусть отображение f (сильно) K-субдифференцируемо на множестве $U(x)$. Если отображение
$$\partial_K f : E \supset U(x) \to L_K(E;F)$$
K-субдифференцируемо в точке x, то будем говорить, что f *дважды K-субдифференцируемо* в точке x, и введем *K-субдифференциал второго порядка* от f стандартным индуктивным образом:
$$\partial_K^2 f(x) := \partial_K(\partial_K f)(x).$$

Замечание 4.1.

1. В силу определения, $\partial_K^2 f(x) \in L_{sub}(E; L_K(E;F))$. Однако, используя каноническую изометрию конусов сублинейных и бисублинейных операторов (теорема 2.9), можно считать, что $\partial_K^2 f(x) \in L_K(E,E;F)$, т. е. $\partial_K^2 f(x)$ является *бисублинейным ограниченным оператором*.

2. Используя определение $\partial_K f(x)$, приведем выражение $\partial_K^2 f(x)$ через K-предел:
$$\partial_K^2 f(x)h = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\,\overline{co}\Big\{Z|\,\partial_K f(x+th) = \partial_K f(x) + tZ,\ 0<t<\delta\Big\},\ \text{где}\ \ Z \in L_K(E;F).$$
Отсюда, используя свойства K-пределов, можно получить оценку:
$$\partial_K^2 f(x)(h;k) \subset \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\,\overline{co}\Big\{Y \in F_K|\,\partial_K f(x+th)k = \partial_K f(x)k + tY,\ 0<t<\delta\Big\} = \partial_K(\partial_K f(\cdot,k))(x)h.$$
Из последней оценки нетрудно получить следующую:
$$\partial_K f(x)(x+h)k \in \partial_K f(x)k + \partial_K^2 f(x)(h,k) + o(\|h\|\,\|k\|),$$
служащую K-аналогом классической формулы в банаховых пространствах:
$$(f'(x+h) - f'(x))k = f''(x)(h,k) + o(\|h\|\,\|k\|).$$

В случае нормированных пространств E и F, повторная K-субдифференцируемость f, в силу результатов предыдущего пункта, влечет обычную однократную дифференцируемость f в точке x.

Теорема 4.1. *Пусть E, F — нормированные пространства. Если отображение $f : E \supset U(x) \to F$ дважды K-субдифференцируемо в точке x, то f дифференцируемо в обычным смысле в этой точке. В частности, если f дважды K-субдифференцируемо в окрестности $U(x)$, то*
$$\partial_K^2 f(x) = \partial_K(f')(x).$$

Доказательство. Действительно, по условию, отображение $\partial_K f : E \supset U(x) \to L_K(E;F)$ K-субдифференцируемо в точке x, а значит, и непрерывно в этой точке. Таким образом, отображение $f : E \supset U(x) \to F$ непрерывно K-субдифференцируемо в точке x. Но тогда, согласно теореме 3.31, f дифференцируемо (в обычном смысле) в точке x. □

На K-субдифференциалы 2-го порядка обобщается *классическая теорема Юнга о симметричности* второго сильного дифференциала. Вначале введем вспомогательное понятие.

Определение 4.2. Для фиксированных $h,k \in E$ предположим, что существует следующий K-предел:
$$\widehat{\partial}_K^2 f(x)(h,k) = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\,\overline{co}\Big\{z \in F\Big|f(x+th+sk) + f(x) = f(x+th) + f(x+sk) + (st)z\Big|0<t,s<\delta\Big\}, \tag{4.1}$$
который назовем *бисимметрическим вторым K-субдифференциалом* f в точке x по паре направлений (h,k).

Замечание 4.2.

1. В случае, если F — нормированное пространство, равенство (4.1) принимает вид:
$$\widehat{\partial}_K^2 f(x)(h,k) = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\,\overline{co}\bigg\{\frac{f(x+th+sk) - f(x+th) - f(x+sk) + f(x)}{st};\ 0<t,s<\delta\bigg\}. \tag{4.2}$$

2. Если $\widehat{\partial}_K^2 f(x)(h,k)$ — бисублинейный K-оператор, назовем его *слабым бисимметрическим K-субдифференциалом*. Понятия *бисимметрических K-субдифференциалов Гато и Фреше* вводятся аналогично случаю $\partial_K f$.

3. Очевидно, $\widehat{\partial}_K^2 f(x)(h,k) = \widehat{\partial}_K^2 f(x)(k,h)$.

Основной результат этого раздела: в случае *банаховых пространств* E *и* F второй K-субдифференциал $\partial_K^2 f(x)$, если он существует, совпадает со вторым бисимметрическим K-субдифференциалом $\widehat{\partial}_K^2 f(x)$ и, как следствие, является *симметрическим бисублинейным оператором*.

Теорема 4.2. *Пусть* E *и* F — *банаховы пространства,* $f : E \supset U(x) \to F$. *Если отображение* f *дважды* K*-субдифференцируемо в точке* x, *то* f *также бисимметрически* K*-субдифференцируемо в точке* x, *причем*

$$\partial_K^2 f(x)(h,k) = \widehat{\partial}_K^2 f(x)(h,k).$$

В частности,

$$\partial_K^2 f(x)(h,k) = \partial_K^2 f(x)(k,h) \quad (\forall h,k \in E).$$

Доказательство. 1. Согласно общему определению второго K-субдифференциала в банаховых конусах,

$$\partial_K^2 f(x)(h,k) = \underset{\delta_t \to +0}{K\text{-}\lim}\, \overline{co}\Big\{Y \,|\, \partial_K f(x+th)\cdot k = \partial_K f(x)\cdot k + tY,\ 0<t<\delta_t\Big\}. \tag{4.3}$$

Поскольку f дифференцируемо обычным образом в некоторой окрестности точки x, то

$$\partial_K f(x+th)\cdot k = f'(x+th)\cdot k = \lim_{s\to 0}\frac{f(x+th+sk)-f(x+th)}{s}, \tag{4.4}$$

$$\partial_K f(x)\cdot k = f'(x)\cdot k = \lim_{s\to 0}\frac{f(x+sk)-f(x)}{s}. \tag{4.5}$$

Заметим, что в силу повторной K-субдифференцируемости, отображение f' непрерывно, поэтому предел в (4.4) — равномерный по $0<t<\delta_t$.

С учетом (4.4)–(4.5), равенство (4.3) принимает вид:

$$\partial_K^2 f(x)(h;k) = \underset{\delta_t \to +0}{K\text{-}\lim}\, \overline{co}\bigg\{\frac{f'(x+th)-f'(x)}{t}\cdot k,\ 0<t<\delta_t\bigg\}. \tag{4.6}$$

Наконец, вычитая (4.4) и (4.5) почленно, находим:

$$\frac{f'(x+th)-f'(x)}{t}\cdot k = \lim_{s\to +0}\frac{f(x+th+sk)-f(x+th)-f(x+sk)+f(x)}{ts}, \tag{4.7}$$

где $f(x+th+sk)-f(x+th)-f(x+sk)+f(x)$ обозначим через $\widehat{\Delta}^2 f(x;th,sk)$.

2. Из (4.7) следует, что при любом $\varepsilon>0$ для $0<s<\delta_s(\varepsilon)$ и $0<t<\delta_t$ верно:

$$\frac{f'(x+th)-f'(x)}{t}\cdot k \in O_\varepsilon\bigg(\frac{\widehat{\Delta}^2 f(x;th,sk)}{ts}\bigg), \tag{4.8}$$

где $\delta_s(\varepsilon)$ не зависит от выбора $t\in(0;\delta_t)$ в силу равномерности по t предела (4.7). Из (4.7) и (4.8) получаем, что при $0<s<\delta_s(\varepsilon)$, $0<t<\delta_t$

$$\overline{co}\bigg\{\frac{f'(x+th)-f'(x)}{t}\cdot k\,\bigg|\,0<t<\delta_t\bigg\} \subset \overline{co}\bigg\{O_\varepsilon\bigg(\frac{\widehat{\Delta}^2 f(x;th,sk)}{ts}\bigg)\bigg|\,0<t<\delta_t, 0<s<\delta_s(\varepsilon)\bigg\} =$$

$$= \overline{O_\varepsilon}\bigg(\overline{co}\bigg(\frac{\widehat{\Delta}^2 f(x;th,sk)}{ts}\bigg)\bigg|\,0<t<\delta_t, 0<s<\delta_s(\varepsilon)\bigg). \tag{4.9}$$

Переходя в (4.9) к K-пределу при $\delta_t\to 0$, $\delta_s\to 0$, с учетом (4.6) и K-признака Вейерштрасса, имеем при любом $\varepsilon>0$:

$$\partial_K^2 f(x)(h,k) \subset O_\varepsilon\bigg(\underset{\delta_t\to 0,\delta_s\to 0}{K\text{-}\lim}\, \overline{co}\bigg\{\frac{\widehat{\Delta}^2 f(x;th,sk)}{ts}\bigg|\,0<t<\delta_t, 0<s<\delta_s\bigg\}\bigg) = \overline{O_\varepsilon}(\widehat{\partial}_K^2 f(x)(h,k)). \tag{4.10}$$

Так как множество $\widehat{\partial}_K^2 f(x)(h,k)$ замкнуто, то переходя справа в (4.10) к пересечению по всем $\varepsilon>0$, приходим к включению:

$$\partial_K^2 f(x)(h,k) \subset \widehat{\partial}_K^2 f(x)(h,k). \tag{4.11}$$

3. Проверим теперь справедливость обратного включения. Из (4.7) следует, что при любом $\varepsilon > 0$ для $0 < s < \delta_s(\varepsilon)$ и $0 < t < \delta_t$ верно:

$$\frac{\widehat{\Delta}^2 f(x;th,sk)}{ts} \in O_\varepsilon\biggl(\frac{f'(x+th)-f'(x)}{t}\cdot k\biggr). \tag{4.12}$$

Из (4.7) и (4.12) получаем, что при $0 < s < \delta_s(\varepsilon)$, $0 < t < \delta_t$

$$\overline{co}\biggl\{\frac{\widehat{\Delta}^2 f(x;th,sk)}{ts}\bigg|0<t<\delta_t, 0<s<\delta_s(\varepsilon)\biggr\} \subset \overline{co}\biggl\{O_\varepsilon\biggl(\frac{f'(x+th)-f'(x)}{t}\cdot k\biggr)\bigg|0<t<\delta_t\biggr\} =$$
$$= \overline{O_\varepsilon}\biggl(\overline{co}\biggl(\frac{f'(x+th)-f'(x)}{t}\cdot k\biggr)\bigg|0<t<\delta_t\biggr). \tag{4.13}$$

Переходя в (4.13) к пределу при $\delta_t \to 0$, $\delta_s \to 0$, с учетом признака Вейерштрасса имеем при любом $\varepsilon > 0$:

$$\widehat{\partial}_K^2 f(x)(h,k) \subset \overline{O}_\varepsilon\biggl(\underset{\delta_t\to 0,\delta_s\to 0}{K\text{-}\lim}\ \overline{co}\biggl\{\frac{f'(x+th)-f'(x)}{t}\cdot k\bigg|0<t<\delta_t, 0<s<\delta_s\biggr\}\biggr) =$$
$$= \overline{O_\varepsilon}(\partial_K^2 f(x)(h,k)). \tag{4.14}$$

Отсюда, приходим к включению:

$$\widehat{\partial}_K^2 f(x)(h,k) \subset \partial_K^2 f(x)(h,k). \tag{4.15}$$

4. Наконец, из взаимно-обратных включений (4.11) и (4.15) следуют равенства из условий теоремы. □

Замечание 4.3. Отметим, в заключении этого пункта, что симметричность $\partial_K^2 f(x)$ — лишь следствие более важного результата: возможности представления $\partial_K^2 f(x)$ через «одинарный» K-предел (4.2).

4.2. K-субдифференциалы высших порядков. Общая теорема Юнга. Примененный нами подход позволяет использовать индукцию для определения K-субдифференциала n-го порядка. Далее, как и в предыдущем пункте, E и F — нормированные конусы, $U(x)$ — окрестность точки $x \in E$, $f : E \supset U(x) \to F$.

Определение 4.3. Пусть отображение f K-субдифференцируемо $(n-1)$ раз в $U(x)$. Если отображение

$$\partial_K^{n-1} f : E \supset U(x) \to L_K(\underbrace{E,\dots,E}_{n-1};F) =: L_K^{n-1}(E;F)$$

K-субдифференцируемо в точке x, то мы будем говорить, что f *n раз K-субдифференцируемо* в точке x и введем *K-субдифференциал n-го порядка* от f стандартным индуктивным образом:

$$\partial_K^n f(x) := \partial_K(\partial_K^{n-1} f)(x).$$

Замечание 4.4. В силу определения, $\partial_K^n f(x) \in L_{sub}(E; L_K^{n-1}(E;F))$. Однако, используя (как и при $n=2$) каноническую изометрию (теорема 2.9), можно считать, что $\partial_K^n f(x) \in L_K^n(E;F)$, т. е. является *$n$-сублинейным ограниченным K-оператором*.

В случае нормированных пространств E и F n-кратная K-субдифференцируемость f в точке x влечет обычную $(n-1)$-кратную дифференцируемость f в этой точке.

Теорема 4.3. *Пусть E, F — нормированные пространства. Если отображение $f : E \supset U(x) \to F$ n раз K-субдифференцируемо в точке x, то f дифференцируемо $(n-1)$ раз в обычном смысле в этой точке. В частности, если f n раз K-субдифференцируемо в $U(x)$, то*

$$\partial_K^n f(x) = \partial_K\Bigl(f^{(n-1)}\Bigr)(x). \tag{4.16}$$

Доказательство. Достаточно применить индукцию, опираясь на теорему 4.1 ($n=2$). □

Отметим также, по аналогии с теоремой 3.7, связь кратной K-субдифференцируемости с обычной кратной дифференцируемостью.

Теорема 4.4. *Пусть E, F — нормированные пространства. Тогда*:

1. *Если f n раз сильно дифференцируемо в точке $x \in E$, то f n раз сильно K-субдифференцируемо в этой точке, причем*
$$\partial_K^n f(x) = \{f^{(n)}(x)\}.$$
2. *Обратно, пусть f n раз сильно K-субдифференцируемо в точке x. Если для каждого набора направлений $\{h_1, \ldots, h_n\} \subset E$ выполнены условия*:
 а). $\partial_K^n f(x)(h_1, \ldots, h_n)$ *— одноэлементное множество*;
 б). $\partial_K^n f(x)(h_1, \ldots, h_n)$ *антисимметричен по каждому направлению h_i $(i = \overline{1,n})$*;
 — то f сильно дифференцируемо n раз (*в обычном смысле*) *в точке x.*

Далее, для переноса теоремы Юнга на случай K-субдифференциалов n-го порядка нам понадобится понятие полисимметрического K-субдифференциала. Здесь мы для простоты рассмотрим только случай нормированных пространств.

Определение 4.4. Пусть E, F—нормированные пространства, $f : E \supset U(x) \to F$, $(h_1, \ldots, h_n) \subset E$. Выражение
$$\widehat{\Delta}^n f(x, h_1, \ldots, h_n) = f\Big(x + \sum_{k=1}^{n} h_k\Big) - \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_{n-1} \leqslant n} f\Big(x + \sum_{i=1}^{n-1} h_{k_i}\Big) +$$
$$+ \sum_{1 \leqslant k_1 < \ldots < k_{n-2} \leqslant n} f\Big(x + \sum_{i=1}^{n-2} h_{k_i}\Big) - \ldots + (-1)^n f(x)$$
назовем *полисимметрической разностью n-го порядка* для f в точке x, отвечающей набору направлений $(h_1, \ldots h_n)$.

Если существует K-предел
$$\widehat{\partial}_K^n f(x, h_1, \ldots, h_n) = \underset{\delta \to +0}{K\text{-}\lim}\, \overline{co}\Big\{ \frac{\widehat{\Delta}^n f(x; t_1 h_1, t_2 h_2 \ldots, t_n h_n)}{t_1 \ldots t_n} \Big| 0 < t_1, \ldots, t_n < \delta \Big\},$$
то назовем его *полисимметрическим K-субдифференциалом* f в точке x по полинаправлению $(h_1, \ldots, h_n)$.

Замечание 4.5.

1. Если $\widehat{\partial}_K^n f(x, h_1, \ldots, h_n)$ — n-сублинейный K-оператор, назовем его *слабым полисимметрическим K-субдифференциалом.* Понятия полисимметрических K-субдифференциалов Гато и Фреше вводятся аналогично случаю $\partial_K f$.
2. Очевидно,
$$\widehat{\partial}_K^n f(x)(h_1, \ldots, h_n) = \widehat{\partial}_K^n f(x)(h_{p(1)}, \ldots, h_{p(n)})$$
для любой перестановки p набора $(1, \ldots, n)$.

Общая теорема Юнга для K-субдифференциалов n-го порядка имеет следующий вид.

Теорема 4.5. *Пусть E и F — нормированные пространства. Если отображение $f : E \supset U(x) \to F$ n раз K-субдифференцируемо в точке x, то существует и n-симметрический K-субдифференциал f в этой точке, причем эти K-субдифференциалы совпадают*:
$$\partial_K^n f(x)(h_1, \ldots, h_n) = \widehat{\partial}_K^n f(x)(h_1, \ldots, h_n) \quad (\forall h_1, \ldots, h_n \subset E).$$
В частности, $\partial_K^n f(x)$ — симметрический n-сублинейный K-оператор:
$$\partial_K^n f(x)(h_1, \ldots, h_n) = \partial_K^n f(x)(h_{p(1)}, \ldots, h_{p(n)}) \quad (\forall h_1, \ldots, h_n \subset E)$$
для любой перестановки p набора индексов $1, \ldots, n$.

Доказательство. Доказательство может быть проведено по аналогии с доказательством теоремы 4.2 $(n = 2)$. □

4.3. K-субдифференциалы высших порядков от функционалов. Используя теоремы 4.3 и 3.2, нетрудно вывести формулу K-субдифференциала n-го порядка для случая $f : E \to \mathbb{R}$, если E — *нормированное пространство*. Далее для $h \in E$ обозначим через $(h)^n$ диагональный поливектор $\underbrace{(h, \ldots, h)}_{n}$.

Теорема 4.6. *Пусть E — нормированное пространство. Если функционал $f : E \supset U(x) \to \mathbb{R}$ K-субдифференцируем n раз в $U(x)$, то $\forall\, h \in E$ имеет место равенство*

$$\partial_K^n f(x)(h)^n = \left[\underline{\frac{\partial}{\partial h}}\Big(f^{(n-1)}(\cdot)\cdot(h)^{n-1}\Big)(x); \overline{\frac{\partial}{\partial h}}\Big(f^{(n-1)}(\cdot)\cdot(h)^{n-1}\Big)(x)\right] = \left[\underline{\frac{\partial}{\partial h}}; \overline{\frac{\partial}{\partial h}}\right]\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial h^{n-1}}\right)(x)\cdot(h)^n.$$

В частности, в случае $f : \mathbb{R} \supset U(x) \to \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$\partial_K^n f(x) = \left[\underline{\frac{d}{dx}}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right)(x); \overline{\frac{d}{dx}}\left(\frac{d^{n-1} f}{dx^{n-1}}\right)(x)\right] := \left[\underline{\frac{d^n f}{dx^n}}(x); \overline{\frac{d^n f}{dx^n}}(x)\right].$$

Доказательство. Согласно теореме 4.3, из n-кратной K-субдифференцируемости f в $U(x)$ следует $(n-1)$-кратная обычная дифференцируемость f в некоторой окрестности $U(x)$ и равенство $\partial_K^n f(x) = \partial_K(f^{(n-1)})(x)$. При этом $f^{(n-1)} : E \supset U'(x) \to L_{n-1}(E;\mathbb{R})$, откуда при любом фиксированном $h \in E$ имеем:

$$f^{(n-1)}(\cdot)\cdot(h)^{n-1} : E \supset U'(x) \to \mathbb{R}.$$

Из формулы (4.16) для K-субдифференциала по направлению теперь следует

$$\partial_K^n f(x)\cdot(h)^n = \partial_K(f^{(n-1)})(x)(h)^n = \partial_K(f^{(n-1)}(\cdot)\cdot(h)^{n-1})(x)h =$$

$$= \left[\underline{\frac{\partial}{\partial h}}\Big(f^{(n-1)}(\cdot)(h)^{n-1}\Big)(x); \overline{\frac{\partial}{\partial h}}\Big(f^{(n-1)}(\cdot)(h)^{n-1}\Big)(x)\right].$$

□

Рассмотрим далее случай функционала от нескольких переменных $f : E_1 \times \ldots \times E_m \to \mathbb{R}$, где $E_1, \ldots, E_m$ — *нормированные пространства*. Здесь мы опираемся на теорему 3.9 и известную формулу для дифференциалов Фреше, используя стандартные сокращения.

Теорема 4.7. *Пусть $E_1, \ldots, E_m$ — нормированные пространства. Если функционал $f : E_1 \times \ldots \times E_m \supset U(x) \to \mathbb{R}$ K-субдифференцируем n раз в точке $U(x)$, то имеет место оценка*

$$\partial_K^n f(x)(h)^n \subset \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_K \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}h_m\right)^{n-1}\cdot f\right](x)\cdot h_i. \tag{4.17}$$

Доказательство. В силу «формулы полного K-субдифференциала» (теорема 3.3) имеем:

$$\partial_K^n f(x)(h)^n = \partial_K(f^{(n-1)}(\cdot)\cdot(h)^{n-1})\cdot h \subset \sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial}{\partial x_i}\right)_K (f^{(n-1)}(\cdot)\cdot(h)^{n-1})\cdot h_i,$$

что приводит к оценке (4.17). □

Выделим случай функционала $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, когда оценка (4.17) переходит *в точное равенство*.

Теорема 4.8. *Если функционал $f : \mathbb{R}^m \supset U(x) \to \mathbb{R}$ K-субдифференцируем n раз в $U(x)$, то справедливо равенство*

$$\partial_K^n f(x)(h)^n = \left[\sum_{i=1}^m \underline{\frac{\partial}{\partial x_i}}h_i; \sum_{i=1}^m \overline{\frac{\partial}{\partial x_i}}h_i\right]\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}h_m\right)^{n-1}\cdot f\right)(x). \tag{4.18}$$

Доказательство. Достаточно использовать «формулу полного K-субдифференциала» с точным равенством (теорема 3.3) для функционала $f^{(n-1)}(\cdot)\cdot(h)^{n-1}$. □

Замечание 4.6. Отметим, что вводя в случае $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *нижнюю и верхнюю матрицы Якоби n-го порядка*:

$$\underline{J}^n f = \left(\underline{\frac{\partial}{\partial x_{i_n}}} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{n-1}}} \right) \right) =: \left(\underline{\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}} \right),$$

$$\overline{J^n} f = \left(\frac{\overline{\partial}}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_{n-1}}} \right) \right) =: \left(\frac{\overline{\partial^n f}}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} \right),$$

равенство (4.18) можно записать в виде:

$$\partial^n_K f(x) \cdot (h)^n = [\underline{J}^n f(x); \overline{J^n} f(x)] \cdot (h)^n,$$

где $[\underline{J}^n f(x); \overline{J^n} f(x)]$ — (n^m)-мерный матричный отрезок, соединяющий концевые матрицы (по главной диагонали).

В частности, в важном далее для приложений случае $n = 2$, мы получаем равенство

$$\partial^2_K f(x) \cdot (h)^n = [\underline{J}^2 f(x); \overline{J}^2 f(x)] \cdot (h)^2,$$

где $[\underline{J}^2 f(x); \overline{J}^2 f(x)]$ — 2^m-мерный матричный прямоугольник, соединяющий *нижнюю и верхнюю матрицы Гессе*. Вершинами этого прямоугольника служат 2^m матриц, одна часть строк которых берется из $\underline{J}^2 f(x)$, а другая часть строк — из $\overline{J}^2 f(x)$.

Следствие 4.1. *Если отображение $f = (f_1, \dots, f_l) : \mathbb{R}^m \supset U(x) \to \mathbb{R}^l$ K-субдифференцируемо n раз в $U(x)$, то имеет место оценка*

$$\partial^n_K f(x)(h)^n \subset \prod_{j=1}^{l} \left[\sum_{i=1}^{m} \underline{\frac{\partial}{\partial x_i}} h_i ; \sum_{i=1}^{m} \frac{\overline{\partial}}{\partial x_i} h_i \right] \cdot \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \dots + \frac{\partial}{\partial x_m} h_m \right)^n \cdot f_j \right)(x).$$

4.4. K-субдифференциалы и субгладкость высших порядков. Здесь, опираясь на результаты пунктов 3.6 и 4.3, мы вводим понятие *субгладкости n-го порядка* и показываем, что такая субгладкость является достаточным условием K-субдифференцируемости n-го порядка. Вначале приведем обобщение теоремы 3.22.

Теорема 4.9. *Пусть E, F — нормированные конусы, отображение $f : E \supset U(x) \to F$ $(n-1)$ раз K-субдифференцируемо в точке x и n раз K-субдифференцируемо в проколотой окрестности $\dot{U}(x)$. Если отображение $\partial^n_K f : E \supset \dot{U}(x) \to L^n_K(E; F)$ субнепрерывно в точке x ($\partial^n_K f \in C_{sub}(x)$), т. е. при некотором $\mathcal{D}^n_{f,x} \in L^n_K(E; F)$ верно*:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 \; (0 < \|h\| < \delta) \Rightarrow (\partial^n_K f(x+h) \preceq \mathcal{D}^n_{f,x} + Y, \text{ где } \|Y\| < \varepsilon),$$

то f K-субдифференцируемо n раз в точке x, причем $\partial^n_K f(x) \preceq \mathcal{D}^n_{f,x}$.

Доказательство. Достаточно применить теорему 3.22 к отображению

$$\partial^{n-1}_K f : E \supset U(x) \to L^{n-1}_K(E; F),$$

учитывая изоморфизм $L^n_K(E; F) \cong L_K(E; L^{n-1}_{sub}(E; F))$. □

Определение 4.5. Будем говорить, что $f : E \supset U(x) \to F$ — *субгладкое отображение n-го порядка* (или *C^n-субгладкое отображение*) в точке x, и писать $f \in C^n_{sub}(x)$, если $\partial^n_K f \in C_{sub}(x)$. В случае $n = 0$ мы отождествляем классы $C^0_{sub}(x)$ и $C_{sub}(x)$.

Перенесем на случай высших порядков достаточное условие n-кратной K-субдифференцируемости в терминах частных K-субдифференциалов (теорема 3.23).

Теорема 4.10. *Пусть $E_1, \dots, E_n, F$ — нормированные конусы, $f : E_1 \times \dots \times E_m \supset U(x) \to F$. Тогда*

$$(f \in C^n_{sub}(x)) \Leftrightarrow \left(\left(\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}} \right)_K \in C_{sub}(x), \; (\forall \, 1 \leqslant i_1 \leqslant \dots \leqslant i_n \leqslant m) \right) \Rightarrow \left(\exists \, \partial^n_K f(x) \right).$$

Доказательство. Применяя разложение (3.40), по индукции получаем:

$$\partial_K^n f(x) = \partial_K(\partial_K^{n-1} f)(x) = \bigoplus_{i_1=1}^{n} \left(\frac{\partial}{\partial x_{i_1}} (\partial_K^{n-1} f) \right)_K (x) = \bigoplus_{i_1=1}^{n} \bigoplus_{i_2=1}^{n} \left(\frac{\partial^2}{\partial x_{i_1} \partial x_{i_2}} (\partial_K^{n-2} f) \right)_K (x) = \ldots =$$

$$= \bigoplus_{i_1=1}^{n} \bigoplus_{i_2=1}^{n} \cdots \bigoplus_{i_n=1}^{n} \left(\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}} \right)_K (x). \tag{4.19}$$

В силу равенства (4.19), из субнепрерывности $(\partial^n f/\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n})_K$ в точке x легко следует субнепрерывность $\partial_K^n f$ в этой точке. Обратно, субнепрерывность $\partial_K^n f$ в точке x, согласно определению 4.5, означает:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 \; (0 < \|h\| < \delta) \Rightarrow \left(\bigoplus_{i_1,\ldots,i_n=1} \left(\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}} \right)_K (x+h) \preceq \mathcal{D}_{f,x}^n + Y, \text{ где } \|Y\| < \varepsilon \right). \tag{4.20}$$

При этом

$$\mathcal{D}_{f,x}^n = \bigoplus_{i_1,\ldots,i_n=1} \mathcal{D}_{f,x}^{n,(i_1,\ldots,i_n)}, \quad Y = \bigoplus_{i_1,\ldots,i_n=1} Y^{(i_1,\ldots,i_n)},$$

где $\mathcal{D}_{f,x}^{n,(i_1,\ldots,i_n)}$, $Y^{(i_1,\ldots,i_n)} \in L_K(E_{i_1} \times \ldots \times E_{i_n}; F)$. Отсюда и из (4.20) следует $\forall \, i_1, \ldots, i_n = \overline{1,m}$:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 \; (0 < \|h\| < \delta) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \left(\left(\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}} \right)_K (x+h) \preceq \mathcal{D}_{f,x}^{n,(i_1,\ldots,i_n)} + Y^{(i_1,\ldots,i_n)}, \text{ где } \|Y^{(i_1,\ldots,i_n)}\| < \varepsilon \right),$$

т. е., в силу теоремы 4.9, $\left(\dfrac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}} \right)_K \in C_{sub}(x)$ при $i_1, \ldots, i_n = \overline{1,m}$. □

Рассмотрим теперь случай функционалов $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, опираясь на результаты пунктов 3.6 и 4.3.

Теорема 4.11. *Пусть* $f : \mathbb{R}^m \supset U(x) \to \mathbb{R}$. *Тогда*

$$(f \in C_{sub}^n(x)) \Leftrightarrow \Bigg(\textit{все} \quad \frac{\partial}{\underline{\partial x_{i_n}}} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{n-1}}} \right) \textit{ и } \frac{\overline{\partial}}{\partial x_{i_n}} \left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{n-1}}} \right)$$

$$\textit{полунепрерывны в точке } x, \textit{ соответственно, снизу и сверху} \Bigg) \Rightarrow \left(\exists \, \partial_K^n f(x) \right).$$

Доказательство. В силу теоремы 3.24, соответствующая полунепрерывность элементов пар

$$\left(\frac{\partial^n f}{\underline{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}}}; \frac{\overline{\partial^n f}}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}} \right)$$

влечет субнепрерывность K-функционалов $\left[\underline{\nabla}; \overline{\nabla}\right] \cdot \dfrac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{n-1}}}$, а значит, и субнепрерывность

$$\left[\underline{\nabla}; \overline{\nabla}\right] \cdot J^{n-1} f(x).$$

Тогда из оценки (4.17) следует C^n-субгладкость f в точке x. Обратная импликация следует из точности оценки (4.18) по каждой компоненте кратной прямой суммы. □

Приведем простой пример.

Пример 4.1. Пусть $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$, $f(x) = \sum\limits_{i=1}^{m} (x_i)^{n-1} \cdot |x_i|$. Тогда:

$$\frac{\partial^n f}{\underline{\partial x_i}}(x) = \begin{cases} (n-1)! \operatorname{sign} x_i, \; x_i \neq 0; \\ -(n-1)!, \qquad\quad x_i = 0; \end{cases} \quad \frac{\overline{\partial^n f}}{\partial x_i}(x) = \begin{cases} (n-1)! \operatorname{sign} x_i, \; x_i \neq 0; \\ (n-1)!, \qquad\quad x_i = 0. \end{cases}$$

Кроме того, все смешанные верхние и нижние частные производные от f равны нулю. Легко видеть, что все $(\partial^n f/\underline{\partial x_i^n})$ полунепрерывны снизу, а все $(\overline{\partial^n f}/\partial x_i^n)$ полунепрерывны сверху. Таким образом, в силу теоремы 4.11 имеем $f \in C_{sub}^n(0)$.

Замечание 4.7.

1. Вводя нижнюю и верхнюю K-матрицы Якоби n-го порядка:

$$\underline{J^n} f = \underline{\left(\frac{\partial^n f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}\right)}; \ \overline{J^n} f = \left(\frac{\overline{\partial f_j}}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_n}}\right),$$

теорему 4.11 можно сформулировать так:

$(f \in C^n_{sub}(x)) \Leftrightarrow \big(\underline{J^n} f$ *и* $\overline{J^n} f)$ *полунепрерывны в точке* x, *соответственно, снизу и сверху*$\big)$.

2. Наконец, опираясь на описание класса $C^1_{sub}(D)$ в пункте 3.6 и определение класса $C^n_{sub}(D)$, нетрудно дать примерное описание класса $C^n_{sub}(D)$, где D — компактная область в $\mathbb{R}^m$.

а). Очевидно, $(f \in C^n_{sub}(D)) \Rightarrow (f^{(n-1)} \in Lip(D))$, что мы кратко запишем в виде

$$C^n_{sub}(D) \subset Lip^n(D).$$

Модификация примера 3.1: $f(x) = x^{2n} \sin \dfrac{1}{x}$ $(x \neq 0)$, $f(0) = 0$, показывает, что последнее включение является строгим.

б). Теорема 3.28 без труда переносится на случай кусочной гладкости и субгладкости высших порядков:

$$C^n_{p.s.}(D) \subset C^n_{sub}(D).$$

Это включение также является строгим. При этом «кусочная» субгладкость n-го порядка не отличается от «полной» субгладкости:

$$\left(C^n_{sub}\right)_{p.s.}(D) = C^n_{sub}(D).$$

Таким образом, в случае компактной области $D \subset \mathbb{R}^m$ имеем:

$$C^n_{p.s.}(D) \subsetneqq C^n_{sub}(D) = (C^n_{sub})_{p.s.}(D) \subsetneqq Lip^n(D).$$

4.5. Формула Тейлора в K-субдифференциалах и исследование на экстремум. Мы рассмотрим здесь формулу Тейлора в форме Пеано лишь в случае отображений в *нормированных пространствах*. В этом случае только последнее слагаемое в многочлене Тейлора будет многозначным, что существенно упрощает применение.

Теорема 4.12. *Пусть* E, F — *нормированные пространства,* $f : E \supset U(x) \to F$. *Если* f K-*субдифференцируемо* n *раз в точке* x, *то*

$$\left[f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \cdot (h)^k\right] - \frac{1}{n!}\partial^n_K f(x) \cdot (h)^n = o(\|h\|^n). \tag{4.21}$$

Если при этом f K-*субдифференцируемо* n *раз в окрестности* x, *то равенство* (4.21) *принимает вид*

$$\left[f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \cdot (h)^k\right] - \frac{1}{n!}\partial_K \Big(f^{(n-1)}(\cdot)(h)^{n-1}\Big)(x) h = o(\|h\|^n).$$

Доказательство. 1. Так как f n-кратно K-субдифференцируемо в точке x, то существует $(n-1)$-кратная обычная дифференцируемость f в точке x, откуда получаем:

$$\begin{cases} \partial^l_K f(x) &= \{\partial^l f(x)\} \text{ при } 0 < l \leqslant n-1, \\ \partial^n_K f(x) &= \partial(\partial^{(n-1)} f)(x). \end{cases}$$

Следовательно, (4.26) можно записать в виде:

$$\left(f(x+h) - \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l!} \partial^l f(x)(h)^l\right) - \frac{1}{n!}\partial^n_K f(x)(h)^n = o(\|h\|^n).$$

2. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\mathbf{r_n}(f,h) = f(x+h) - \sum_{l=0}^{n-1} \frac{1}{l!}\partial^l f(x)(h)^l - \frac{1}{n!}\partial^n_K f(x)(h)^n,$$

которая действует из банахового пространства E в банахов конус F_K. Применим математическую индукцию.

а). При $n = 1$ получим определение K-субдифференциала из критерия K-субдифференцируемости: $f(x+h) - f(x) - \partial_K f(x)h = o(\|h\|)$.

б). Воспользуемся индукцией по n. Предположим, что формула (4.26) верна для $n-1$. Вычислим K-субдифференциал вспомогательной функции $\mathbf{r_n}$, получим:

$$\partial_K \mathbf{r_n}(f,h) = f'(x+h) - \sum_{l=1}^{n-1} \frac{1}{(l-1)!}\partial^l f(x)(h)^{l-1} - \frac{1}{(n-1)!}\partial_K^n f(x)(h)^{n-1} =$$

$$= f'(x+h) - \sum_{k=0}^{n-2} \frac{1}{k!}\partial^l f(x)(h)^k - \frac{1}{(n-1)!}\partial_K^{n-1}(f')(x)(h)^{n-1} = \mathbf{r_{n-1}}(f',h),$$

что по допущению индукции означает:

$$\partial_K \mathbf{r_n}(f,h) = \mathbf{r_{n-1}}(f',h) = o(\|h\|^{n-1}).$$

Применяя теорему о среднем, получим:

$$\|\mathbf{r_n}(f,h)\| = \|\mathbf{r_n}(f,h) - r_n(f,0)\| \leqslant \sup_{0<\theta<1} \|\partial_K \mathbf{r_n}(f,\theta h)\| \cdot \|h\| = \sup_{0<\theta<1} \|\mathbf{r_{n-1}}(f',\theta h)\| \cdot \|h\| =$$

$$= \sup_{0<\theta<1} o(\|\theta h\|^{n-1}) \cdot \|h\| = o(\|h\|^{n-1})\,\|h\|) = o(\|h\|^n).$$

Таким образом, мы получили формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано. □

Следствие 4.2. *В условиях теоремы* 4.12 *справедлива оценка*

$$\left[f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \cdot (h)^k\right] \in \left[\frac{1}{n!}\partial_K^n f(x)(h)^n + o(\|h\|^n)\right]. \tag{4.22}$$

Если при этом f K-субдифференцируемо n раз в окрестности x, то оценка (4.22) *принимает вид*

$$\left[f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \cdot (h)^k\right] \in \frac{1}{n!}\partial_K\Big(f^{(n-1)}(\cdot)(h)^{n-1}\Big)(x)h + o(\|h\|^n).$$

Заметим, что условие (4.22) не равносильно условию (4.21), ввиду многозначности обоих слагаемых справа в (4.22). Выделим здесь также случай функционалов, опираясь на результат пункта 4.4.

Теорема 4.13. *Пусть E — нормированное пространство, $f : E \supset U(x) \to \mathbb{R}$. Если функционал f K-субдифференцируем n раз в окрестности x, то*

$$\left[f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \cdot (h)^k\right] - \frac{1}{n!}\left[\underline{\frac{\partial}{\partial h}}; \overline{\frac{\partial}{\partial h}}\right]\Big(f^{(n-1)}(\cdot)(h)^{n-1}\Big)(x)h = o(\|h\|^n). \tag{4.23}$$

В случае $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ равенство (4.23) *принимает вид*

$$\left[f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \cdot (h)^k\right] - \frac{1}{n!}\left[\left(\underline{\frac{\partial}{\partial x_1}}h_1 + \ldots + \underline{\frac{\partial}{\partial x_m}}h_m\right); \left(\overline{\frac{\partial}{\partial x_1}}h_1 + \ldots + \overline{\frac{\partial}{\partial x_m}}h_m\right)\right] \times$$

$$\times\left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1}h_1 + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m}h_m\right)^{n-1} \cdot f(x)\right) = o(\|h\|^n). \tag{4.24}$$

В частности, в случае $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ равенство (4.24) *принимает вид*

$$\left[f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x) \cdot (h)^k\right] - \frac{1}{n!}\left[\underline{\frac{d^n f}{dx^n}}(x); \overline{\frac{d^n f}{dx^n}}(x)\right] \cdot h^n = o(\|h\|^n), \tag{4.25}$$

где $\underline{\dfrac{d^n f}{dx^n}} = \underline{\dfrac{d}{dx}}(f^{(n-1)})$, $\overline{\dfrac{d^n f}{dx^n}} = \overline{\dfrac{d}{dx}}(f^{(n-1)})$.

Замечание 4.8. Многозначное равенство (4.25) можно записать в виде однозначного равенства с параметром:

$$\left[f(x+h)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)\cdot(h)^k\right]-\frac{1}{n!}\left[(1-t)\underline{\frac{d^nf}{dx^n}}(x)++t\cdot\overline{\frac{d^nf}{dx^n}}(x)\right]=o(\|h\|^n)\qquad(0\leqslant t\leqslant 1).$$

В аналогичном виде можно записать также равенства (4.23)-(4.24).

Перейдем к *условиям экстремума в терминах K-субдифференциалов*. Начнем с K-аналога леммы Ферма в традиционной для выпуклого анализа форме.

Теорема 4.14. *Пусть E — нормированное пространство, $f: E\supset U(x)\to\mathbb{R}$. Если функционал f достигает локального экстремума в точке x и K-субдифференцируем в этой точке, то* $\forall h\in E$:

$$(0\in\partial^s_K f(x)h)\Leftrightarrow\left(\underline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x)\leqslant 0\leqslant\overline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x)\right).\tag{4.26}$$

В частности, в случае $f:\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}$ условие (4.26) *принимает вид конечной системы двойных неравенств*:

$$\left\{\underline{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(x)\leqslant 0\leqslant\overline{\frac{\partial f}{\partial x_i}}(x)\right\}_{i=\overline{1,m}}.\tag{4.27}$$

Наконец, в случае $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ система (4.27) *сводится к неравенству*

$$\underline{\frac{df}{dx}}(x)\leqslant 0\leqslant\overline{\frac{df}{dx}}(x).$$

Доказательство. Пусть, например, f достигает минимума в точке x. Тогда $f(x+th)-f(x)\geqslant 0$ при достаточно малых t, откуда следует:

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x+0)\geqslant 0,\ \ \underline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x+0)\geqslant 0;\ \ \overline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x-0)\leqslant 0,\ \ \underline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x-0)\leqslant 0.$$

Отсюда получаем:

$$\overline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x)=\max\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x+0),\,\overline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x-0)\right)\geqslant 0;\ \ \underline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x)=\min\left(\underline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x+0),\,\underline{\frac{\partial f}{\partial h}}(x-0)\right)\leqslant 0.$$

□

Рассмотрим теперь условия 2-го порядка, предварительно введя необходимый аппарат теории квадратичных K-форм.

Определение 4.6. Пусть E — выпуклый конус. Отображение $B: E\to\mathbb{R}_K$ назовем *квадратичной K-формой*, если:

$$B(\lambda h)=\lambda^2\cdot B(h)\quad(\forall h\in E,\ \forall\lambda\geqslant 0).$$

K-форма B *неотрицательна* ($B\geqslant 0$), если

$$\max B(h)\geqslant 0\quad(\forall\ h\in E).$$

K-форма B *положительна* ($B>0$), если

$$\min B(h)>0\quad(\forall\ h\in E\setminus\{0\}).$$

В случае, когда E — нормированный конус, скажем, что K-форма B *положительно определена* ($B\gg 0$), если для некоторой положительной константы γ^2

$$\min B(h)\geqslant\gamma^2\|h\|^2\quad(\forall\ h\in E).$$

Условия $B\leqslant 0$, $B<0$ и $B\ll 0$ вводятся, как обычно, с помощью перехода к K-форме $(-B)$.

Теорема 4.15. *Пусть E — нормированное пространство. Если функционал $f: E\supset U(x)\to\mathbb{R}$ дважды K-субдифференцируем в окрестности точки x, то $\forall h\in E$, $\|h\|=1$, выполнено равенство*

$$(\partial^2_K)f(x)(h)^2=\left[\underline{\frac{\partial}{\partial h}}(f'(\cdot)h);\overline{\frac{\partial}{\partial h}}(f'(\cdot)h)\right]=:\left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial h^2}}(x);\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial h^2}}(x)\right].$$

Приведем необходимое условие второго порядка для минимума.

Теорема 4.16. *Пусть E — нормированное пространство, $f : E \supset U(x) \to \mathbb{R}$. Если функционал f достигает локального минимума в точке x и дважды K-субдифференцируем в окрестности этой точки, то $\forall h \in E$, $\|h\| = 1$, выполнено неравенство*

$$\Big((\partial_K^2)^s f(x)(h)^2 \geqslant 0\Big) \Leftrightarrow \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial h^2}}(x)(h)^2 \geqslant 0\right). \tag{4.28}$$

В частности, в случае $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ неравенство (4.28) *принимает вид условия неотрицательности максимума m-мерного отрезка, соединяющего «нижнюю» и «верхнюю» матрицы Гессе для f*:

$$\max\left[\underline{J}^2 f(x)(h)^2 = \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}(x)\right)(h)^2; \overline{J}^2 f(x)(h)^2 = \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}}\right)(x)(h)^2\right] \geqslant 0. \tag{4.29}$$

Обозначая $J_1^2 f(x), \ldots, J_{2^m}^2 f(x)$ — вершины матричного отрезка, условие (4.29) *можно переписать в более простой форме*:

$$\max_{1 \leqslant k \leqslant 2^m}\Big(J_k^2 f(x)(h)^2\Big) \geqslant 0 \quad (\forall\, h \in \mathbb{R}^m). \tag{4.30}$$

Наконец, в случае $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ матричное неравенство (4.30) *превращается в скалярное неравенство*

$$\overline{\frac{d^2 f}{dx^2}}(x) \geqslant 0.$$

Доказательство. Из повторной K-субдифференцируемости f в окрестности x следует обычная однократная дифференцируемость f и равенство $\partial_K^2 f(x) = \partial_K(f')(x)$. Поэтому условие K-леммы Ферма $0 \in \partial_K{}^s f(x)$ переходит в равенство $f'(x) = 0$.

По K-формуле Тейлора второго порядка, при достаточно малых h имеем:

$$f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \frac{1}{2}\partial_K^2 f(x)(h)^2 = o(\|h\|^2),$$

откуда, с учетом $f'(x) = 0$, получаем:

$$f(x+h) - f(x) \in \frac{1}{2}\partial_K^2 f(x)(h)^2 + o(\|h\|^2). \tag{4.31}$$

Фиксируя теперь $h \in E$ и заменяя в (4.31) $h \mapsto th$, получаем:

$$0 \leqslant \frac{f(x+th) - f(x)}{t^2} \in \frac{1}{2}\partial_K^2 f(x)(h)^2 + \frac{o(t^2)}{t^2},$$

откуда при $t \to 0$, с учетом компактности $\partial_K^2 f(x)(h)^2$, следует $\max \partial_K^2 f(x)(h)^2 \geqslant 0$. □

Выпишем теперь достаточного условие локального минимума в терминах второго K-субдифференциала. Заметим, что вывод условия (4.33) в нем опирается на *конечномерную форму теоремы Крейна—Мильмана* (см. [15]).

Теорема 4.17. *Пусть E — нормированное пространство, $f : E \supset U(x) \to \mathbb{R}$, функционал f дважды K-субдифференцируем в точке x, причем $f'(x) = 0$. Если выполнено условие*

$$\partial_K^2 f(x) \gg 0, \tag{4.32}$$

то f достигает строгого локального минимума в точке x.

В частности, в случае $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ неравенство (4.32) *принимает вид условия положительной определенности набора «крайних» точек m-мерного отрезка* $[\underline{J}^2 f(x); \overline{J}^2 f(x)]$:

$$J_1^2 f(x) \gg 0;\ J_2^2 f(x) \gg 0; \ldots ; J_{2^m}^2 f(x) \gg 0. \tag{4.33}$$

Наконец, в случае $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ система матричных неравенств (4.33) *сводится к одному скалярному неравенству*

$$\underline{\frac{d^2 f}{dx^2}}(x) > 0.$$

Доказательство. По K-лемме Ферма, $0 \in \partial_K{}^s f(x)$, и если существует $\partial^2_K f(x)$, то существует f' в окрестности точки x, т. е. приходим к условию $f'(x) = 0$.

По обобщенной формуле Тейлора второго порядка для любого достаточно малого h получаем: $f(x+h) - f(x) - f'(x)h - \dfrac{1}{2}\partial^2 f(x)(h)^2 = o(\|h\|^2)$, откуда при достаточно малых $\|h\|$ верно:

$$0 \leqslant f(x+h) - f(x) \in \frac{1}{2}\partial^2 f(x)(h)^2 + o(\|h\|^2). \tag{4.34}$$

Выберем ε настолько малым, чтобы при $\|h\| < \varepsilon$ величина $o(\|h\|^2)$ в равенстве (4.34) удовлетворяла условию $\|o(\|h\|^2)\| < \dfrac{\gamma^2}{2}\|h\|^2$. Тогда при $\|h\| < \varepsilon$

$$\Big(\inf \frac{1}{2}\partial^2_K f(x)(th)^2 + o(\|th\|)^2\Big) > \frac{\gamma^2}{2}\|h\|^2 > 0. \tag{4.35}$$

Из формулы Тейлора, как уже отмечалось, вытекает включение

$$f(x+h) - f(x) - f'(x)h \in \frac{1}{2}\partial^2_K f(x)(h)^2 + o(\|h\|^2).$$

Отсюда, в силу (4.35), получаем

$$f(x+h) - f(x) \geqslant \gamma^2\|h\|^2 > 0$$

при достаточно малом $\|h\| > 0$, т. е. f достигает строгого локального минимума в точке x. □

В заключение рассмотрим простой пример.

Пример 4.2. Зададим в $\mathbb{R}^m$ функцию

$$f(x) = \begin{cases} \|x\|^2,\ x_1x_2\ldots x_m \geqslant 0, \\ 2\|x\|^2,\ x_1x_2\ldots x_m \leqslant 0, \end{cases}$$

достигающую, очевидно, строгого минимума в нуле. Имеем

$$\nabla f(x) = \begin{cases} 2x,\ x_1x_2\ldots x_m \geqslant 0, \\ 4x,\ x_1x_2\ldots x_m \leqslant 0, \end{cases}$$

откуда 0 — единственная стационарная точка. Наконец, как легко видеть, все «крайние» матрицы Гессе $J^2_k f(0)$ являются диагональными матрицами, диагонали которых — наборы из чисел 2 и 4. Следовательно,

$$J^2_k f(0) \gg 0 \quad (k = 1, \ldots, 2^m).$$

Таким образом, условие (4.32) теоремы 4.17 выполнено.

5. Приложения к вариационным задачам с субгладким интегрантом

5.1. K-субдифференциал основного вариационного функционала. Напомним классический результат. Пусть

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx \quad (y \in C^1[a;b], f \in C^1(\mathbb{R}^3), u = f(x,y,z)). \tag{5.1}$$

Тогда вариационный функционал (5.1) сильно дифференцируем в $C^1[a;b]$, причем первая вариация Φ имеет вид:

$$\Phi'(y)h = \int_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')h + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')h'\right] dx \quad (\forall h \in C^1[a;b]). \tag{5.2}$$

Наша цель — обобщить равенство (5.2) на случай *субгладких интегрантов*. В этом случае точное равенство переходит в оценку K-субдифференциала $\partial_K\Phi(y)$.

Теорема 5.1. *Пусть для вариационного функционала* (5.1) *интегрант* f *является* C^1*-субгладким*: $f \in C^1_{sub}(\mathbb{R}^3)$ (*см. определение* 3.8). *Тогда* Φ *сильно* K*-субдифференцируем всюду в* $C^1[a;b]$, *причем справедлива оценка*

$$\partial_K \Phi(y)h \subset \left[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y')h + \underline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,y')h'\right)dx; \int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y')h + \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,y')h'\right)dx\right]$$

$$(\forall h \in C^1[a;b]). \tag{5.3}$$

Доказательство. Введем вначале вспомогательный линейный оператор

$$(Ay)(x) = (x, y(x), y'(x)),\ A: C^1[a,b] \to \mathbb{R} \times C^1[a,b] \times C[a,b].$$

Очевидно, оператор A непрерывен. Введем еще два вспомогательных отображения — нелинейный оператор композиции

$$B_f(\widetilde{A})(y) = f(\widetilde{A}(y)),\ \widetilde{A} \in L(C^1[a,b]; \mathbb{R} \times C^1[a,b] \times C[a,b]),$$

$$B_f : L(C^1[a,b]; \mathbb{R} \times C^1[a,b] \times C[a,b]) \to C[a,b],$$

и линейный интегральный функционал

$$G(v) = \int\limits_a^b v(x)dx, \qquad G: C[a,b] \to \mathbb{R}.$$

Тогда вариационный функционал Φ может быть записан в виде композиции

$$\Phi(y) = G(B_f(Ay)). \tag{5.4}$$

Применяя к композиции (5.4) теорему о K-субдифференцировании композиции, получаем

$$\partial_K \Phi(y,h) = \partial_K (G \circ B_f \circ A)(y)h \subset [\partial_K G(v) \cdot [\partial_K^{u_2 u_3} B_f(u) \cdot \partial(A(y))]]h. \tag{5.5}$$

Теперь рассмотрим в отдельности компоненты справа в (5.5).

1. Так как A — линейный непрерывный оператор, то он дифференцируем по Фреше, причем $A'(y) \equiv A$. Следовательно,
$$\partial_K (Ay)(x) = (x, y(x), y'(x)).$$
2. Для оператора $B_f(u) = B_f((u_1,u_2,u_3))$ мы вычисляем K-субдифференциал по u_2, u_3. Применяя теорему 3.13 и следствие 3.3, получаем:
$$\partial_K^{yz} B_f(A(y))h \subset \left[\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y')h + \frac{\partial f}{\underline{\partial z}(x,y,y')h'}; \overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y')h + \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,y')h'\right].$$
3. Так как G — линейный непрерывный функционал, то он дифференцируем по Фреше, причем $G'(v) \equiv G$.

Отсюда:

$$\partial_K \Phi(y)h \subset \int\limits_a^b \left[\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y')h + \frac{\partial f}{\underline{\partial z}(x,y,y')h'}; \overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y')h + \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,y')h'\right]dx =$$

$$= \left[\int\limits_a^b \Big(\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y')h + \underline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,y')h'\Big)dx; \int\limits_a^b \Big(\overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x,y,y')h + \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x,y,y')h'\Big)dx\right]. \tag{5.6}$$

□

Отметим частный случай оценки (5.3), когда интегрант образован внешней композицией субгладкой функции с гладкой.

Теорема 5.2. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b \varphi\left[f(x,y,y')\right]dx \quad (y \in C^1[a;b], f \in C^1(\mathbb{R}^3), \varphi \in C^1_{sub}(\mathbb{R})).$$

Тогда справедлива оценка

$$\partial_K\Phi(y)h \subset \left[\int\limits_a^b \underline{\varphi'}\left(f(x,y,y')\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')h + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')h'\right)dx;\right.$$

$$\left.\int\limits_a^b \overline{\varphi'}\left(f(x,y,y')\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')h + \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')h'\right)dx\right] \quad (\forall h \in C^1[a;b]). \tag{5.7}$$

Доказательство. Пусть

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b \varphi(f(x,y,y'))dx, \tag{5.8}$$

где $f \in C^1$, φ всюду K-субдифференцируема. По формуле (5.6) имеем:

$$\partial_K\Phi(y)h \subset \left[\int\limits_a^b \left(\frac{\partial}{\underline{\partial y}}\varphi(f(x,y,y'))h + \frac{\partial}{\underline{\partial z}}\varphi(f(x,y,y'))h'\right)dx;\right.$$

$$\left.\int\limits_a^b \left(\frac{\overline{\partial}}{\partial y}\varphi(f(x,y,y'))h + \frac{\overline{\partial}}{\partial z}\varphi(f(x,y,y'))h'\right)dx\right]. \tag{5.9}$$

При этом, учитывая гладкость f, имеем:

$$\frac{\partial}{\underline{\partial y}}\varphi(f(x,y,y')) = \varphi'(f(x,y,y'))\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y'); \quad \frac{\partial}{\underline{\partial z}}\varphi(f(x,y,y')) = \varphi'(f(x,y,y'))\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y');$$

$$\frac{\overline{\partial}}{\partial y}\varphi(f(x,y,y')) = \varphi'(f(x,y,y'))\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y'); \quad \frac{\overline{\partial}}{\partial z}\varphi(f(x,y,y')) = \varphi'(f(x,y,y'))\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y'). \tag{5.10}$$

Подставляя (5.10) в (5.9) и вынося общие множители, приходим к оценке (5.7). □

Еще один существенный частный случай представляет внутренняя композиция субгладкой функции с гладкой. Здесь, для простоты, мы рассмотрим композицию только по третьей переменной.

Теорема 5.3. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y,\varphi(y'))dx \quad (y \in C^1[a;b], f \in C^1(\mathbb{R}^3), \varphi \in C^1_{sub}(\mathbb{R})).$$

Тогда справедлива оценка

$$\partial_K\Phi(y)h \subset \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(y'))h\,dx +$$

$$+\left[\int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(y'))\cdot\underline{\varphi'}(y')h'dx; \int\limits_a^b \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(y'))\cdot\overline{\varphi'}(y')h'dx\right] \quad (h \in C^1[a;b]). \tag{5.11}$$

Доказательство. Учитывая гладкость f, имеем:

$$\frac{\partial}{\underline{\partial y}}f(x,y,\varphi(y'))=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(y'))\cdot\underline{\varphi}'(y');\quad \frac{\partial}{\underline{\partial z}}f(x,y,\varphi(y'))=\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(y'))\cdot\underline{\varphi}'(y');$$

$$\frac{\overline{\partial}}{\partial y}f(x,y,\varphi(y'))=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(y'))\cdot\overline{\varphi}'(y');\quad \frac{\overline{\partial}}{\partial z}f(x,y,\varphi(y'))=\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(y'))\cdot\overline{\varphi}'(y'). \tag{5.12}$$

Подставляя (5.12) в (5.6) и вынося общие множители, приходим к оценке (5.11). □

Отметим, в качестве конкретных примеров, случаи интегрантов, образованных композицией гладкой функции и модуля.

Пример 5.1. Пусть

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b|f(x,y,y')|dx\quad (y\in C^1[a;b], f\in C^1(\mathbb{R}^3)). \tag{5.13}$$

Здесь, в обозначениях теоремы 5.2, $\varphi(t)=|t|$, откуда

$$[\underline{\varphi}(t);\overline{\varphi}(t)]=\begin{cases}\operatorname{sign}t,\ t\neq 0;\\ [-1;1],\ t=0.\end{cases} \tag{5.14}$$

Подстановка (5.14) в (5.7), после преобразований, приводит к оценке

$$\partial_K\Phi(y)h\subset\left(\int\limits_{(y'>0)}(\frac{\partial f}{\partial y}h+\frac{\partial f}{\partial z}h')dx-\int\limits_{(y'<0)}(\frac{\partial f}{\partial y}h+\frac{\partial f}{\partial z}h')dx\right)+\int\limits_{(y'=0)}[-1;1](\frac{\partial f}{\partial y}h+\frac{\partial f}{\partial z}h')dx. \tag{5.15}$$

В частности, если $\operatorname{mes}(y'=0)=0$, то оценка (5.15) принимает вид точного равенства:

$$\partial_K\Phi(y)h=\Phi'(y)h=\int\limits_a^b\operatorname{sign}(y')\left(\frac{\partial f}{\partial y}h+\frac{\partial f}{\partial z}h'\right)dx.$$

Пример 5.2. Пусть

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x,y,|y'|)dx\quad (y\in C^1[a;b], f\in C^1(\mathbb{R}^3)).$$

Здесь также $\varphi(t)=|t|$, но уже в обозначениях теоремы 5.3. Подстановка (5.14) в (5.11), после преобразований, приводит к оценке

$$\partial_K\Phi(y)h\subset\int\limits_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,|y'|)hdx+\int\limits_{(y'\neq 0)}\operatorname{sign}(y')\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,|y'|)h'dx+$$

$$+\left[-\int\limits_{(y'=0)}\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,0)h'dx;+\int\limits_{(y'=0)}\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,0)h'dx\right]. \tag{5.16}$$

В частности, если $\operatorname{mes}(y'=0)=0$, то оценка (5.16) принимает вид точного равенства:

$$\partial_K\Phi(y)h=\Phi'(y)h=\int\limits_a^b\left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,|y'|)h+\operatorname{sign}(y')\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,|y'|)h'\right]dx. \tag{5.17}$$

Пример 5.3. Пусть

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x,|y|,y')dx.$$

Здесь, после аналогичных преобразований, приходим к оценке:

$$\partial_K \Phi(y)h \subset \int\limits_a^b \Big(\Big[\frac{\partial f}{\partial z}(x,|y|,y')h'dx + \int\limits_{(y\neq 0)} \operatorname{sign} y \frac{\partial f}{\partial y}(x,|y|,y')hdx +$$

$$+\Big[-\int\limits_{(y=0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,0,y')hdx; + \int\limits_{(y=0)} \frac{\partial f}{\partial y}(x,0,y')hdx\Big]. \tag{5.18}$$

В частности, если $\operatorname{mes}(y=0)=0$, то оценка (5.18) превращается в точное равенство:

$$\partial_K \Phi(y)h = \Phi'(y)h = \int\limits_a^b \Big[\operatorname{sign} y \frac{\partial f}{\partial y}(x,|y|,y')h + \frac{\partial f}{\partial z}(x,|y|,y')h'\Big]dx.$$

5.2. K-аналоги основной вариационной леммы и уравнения Эйлера—Лагранжа. Напомним классическую «основную вариационную лемму»: если

$$\int\limits_a^b \varphi(x)h(x) \equiv 0 \quad (\varphi \in C[a;b], \forall h \in C[a;b]),$$

то $\varphi(x) \equiv 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$. Наше обобщение принимает форму оценки.

Теорема 5.4. *Пусть* $\varphi_1, \varphi_2 \in L_2[a;b]$. *Если*

$$0 \in \Big[\int\limits_a^b \varphi_1(x)h(x)dx; \int\limits_a^b \varphi_2(x)h(x)dx\Big] \quad (\forall h \in C[a;b]),$$

то $0 \in [\varphi_1;\varphi_2] \subset L_2[a;b]$.

Доказательство. Произвольный элемент $\varphi \in [\varphi_1;\varphi_2]$ представим в виде

$$\varphi = (1-t)\varphi_1 + t\varphi_2 = \varphi_1 + t(\varphi_2 - \varphi_1),$$

где $0 \leqslant t \leqslant 1$.

1. Вначале рассмотрим случай гильбертового пространства $L_2[a;b] = H$. Обозначим через $H^1 = \{\varphi_2 - \varphi_1\}^{\perp}$. Тогда для любого $h \in H^1$ выполняется $(\varphi_2 - \varphi_1, h) = 0$, т. е. $\int\limits_a^b \varphi_2 h = \int\limits_a^b \varphi_1 h$. Допустим, что φ_1 неколлинеарно $(\varphi_2 - \varphi_1)$. Тогда существует $h_0 \in H$ такой, что φ_1 неортогонально h_0, т. е. $(\varphi_1, h_0) \neq 0$. Следовательно, $(\varphi_2 - \varphi_1, h_0) = 0$, $(\varphi_1, h_0) \neq 0$, откуда $(\varphi_2, h_0) - (\varphi_1, h_0) = 0$, $(\varphi_1, h_0) \neq 0$. Это возможно тогда и только тогда, когда $(\varphi_2, h_0) = (\varphi_1, h_0) \neq 0$. Отсюда для любого $t \in [0;1]$ получаем:

$$\int\limits_a^b \big((1-t)\varphi_1 + t\varphi_2\big)h_0 dx = \int\limits_a^b \big(\varphi_1 h_0 + t(\varphi_2 - \varphi_1)\big)h_0 dx = \int\limits_a^b \varphi_1 h_0 dx + t\int\limits_a^b (\varphi_2 - \varphi_1)h_0 dx \neq 0.$$

Таким образом, существует h_0 такой, что $0 \overline{\in} \int\limits_a^b [\varphi_1;\varphi_2]h_0 dx$, что противоречит условию леммы. Отсюда получаем, что φ_1 коллинеарен $(\varphi_2 - \varphi_1)$, т. е. весь отрезок $[\varphi_1;\varphi_2]$ состоит из коллинеарных функций $[\varphi_1;\varphi_2] = \{\lambda\varphi_3\}_{\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2}$. Тогда $\int\limits_a^b [\varphi_1;\varphi_2]hdx = \{\lambda \int\limits_a^b \varphi_3 hdx\}_{\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2}$. Следовательно, условие $\Big(0 \in \int\limits_a^b [\varphi_1;\varphi_2]hdx \ \forall h\Big)$ выполнено тогда и только тогда, когда

$$\Big(0 \in \{\lambda \int\limits_a^b \varphi_3 hdx\}_{\lambda_1 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_2} \ \forall h\Big).$$

Возможны два случая:

а). $0 \in [\lambda_1; \lambda_2]$. Тогда $0 \in [\varphi_1; \varphi_2] = \{\lambda \varphi_3\}$.

б). $0 \overline{\in} [\lambda_1; \lambda_2]$, следовательно, $\int\limits_a^b \varphi_3 h dx = 0 \; \forall h$, откуда $(\varphi_3, h) = 0 \; \forall h \Rightarrow \; \varphi_3 = 0 \Leftrightarrow [\varphi_1; \varphi_2] = \{0\}$.

Таким образом, утверждение в $L_2[a;b]$ доказано.

2. Теперь рассмотрим случай, когда $[\varphi_1; \varphi_2] \subset C^1[a;b]$, $h \in C^1[a;b]$, т. е. $0 \in \int\limits_a^b [\varphi_1; \varphi_2] h dx$ при любом $h \in C^1[a;b]$. Так как $C^1[a;b]$ непрерывно плотно вложено в $L_2[a;b]$, то из непрерывности вложения легко следует $0 \in \int\limits_a^b [\varphi_1; \varphi_2] h dx$ и для любого $h \in L_2$. Действительно, для любого $h_0 \in L_2$ существует последовательность $h_n \overset{L_2}{\to} h_0$, где $h_n \in C^1$. Поскольку по условию для любого h_n верно $0 \in \int\limits_a^b [\varphi_1; \varphi_2] h_n dx = \left\{ (1-t) \int\limits_a^b \varphi_1 h_n dx + t \int\limits_a^b \varphi_2 h_n dx \right\}$, то переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем, что $0 \in \int\limits_a^b [\varphi_1; \varphi_2] h_0 \, dx$ при любом $h_0 \in L_2[a;b]$. Отсюда, в силу первой части доказательства, $0 \in [\varphi_1; \varphi_2]$.

□

Напомним теперь классическое уравнение Эйлера—Лагранжа: для вариационного функционала

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y') dx \quad (f \in C^1(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b], y(a) = y_a, y(b) = y_b)$$

условие $\Phi'(y) = 0$ равносильно выполнению уравнения:

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x, y, y') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x, y, y') \right) = 0. \tag{5.19}$$

В частности, если Φ достигает локального экстремума в точке y, то уравнение (5.19) для y верно.

Теорема 5.4 вместе с оценкой (5.3) для K-субдифференциала от Φ позволяют обобщить условие (5.19) на случай C^1-*субгладкого интегранта*; при этом результат принимает форму оценки.

Теорема 5.5. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y') dx \quad (f \in C^1_{sub}(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b], y(a) = y_a, y(b) = y_b). \tag{5.20}$$

Тогда условие $0 \in \partial_K \Phi(y)$ *равносильно выполнению «включения Эйлера—Лагранжа»*:

$$0 \in \left[\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y') - \frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, y') \right); \; \overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y') - \frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, y') \right) \right] \tag{5.21}$$

почти всюду на $[a;b]$. *В частности, если* Φ *достигает локального экстремума в точке* y, *то включение* (5.21) *для* y *выполнено почти всюду на* $[a;b]$.

Доказательство. По K-лемме Ферма, $0 \in \partial^s_K \Phi(y) h$ $(\forall h \in C^1[a;b], \; h(a) = h(b) = 0$. В силу линейности по h обеих частей оценки $\partial_K \Phi(y) h$ (формула (5.3), теорема 5.1), эта же оценка сохраняется и для симметризованного K-функционала:

$$0 \in \partial^s_K \Phi(y) h \subset \left[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y') h + \underline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, y') h' \right) dx; \int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y') h + \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, y') h' \right) dx \right] =$$

$$= \left\{ \int\limits_a^b \left[\left((1-t) \underline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y') + t \overline{\frac{\partial f}{\partial y}}(x, y, y') \right) \cdot h + \right. \right.$$

$$\left. \left. + \left((1-t) \underline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, y') + t \overline{\frac{\partial f}{\partial z}}(x, y, y') \right) h' \right] dx \; \middle| \, 0 \leqslant t \leqslant 1 \right\} =: \Big\{ I_1(t) + I_2(t) \big| \; 0 \leqslant t \leqslant 1 \Big\}. \tag{5.22}$$

Применим к $I_2(t)$ в (5.22) интегрирование по частям:

$$I_2(t) = \left| \begin{array}{c} u = (1-t)\dfrac{\partial f}{\underline{\partial z}}(x,y,y') + t\dfrac{\overline{\partial f}}{\partial z}(x,y,y'); \\ dv = h'dx, \ v = h \\ du = ((1-t)\dfrac{d}{dx}\Big(\dfrac{\partial f}{\underline{\partial z}}(x,y,y')) + t\dfrac{d}{dx}(\dfrac{\overline{\partial f}}{\partial z}(x,y,y')\Big)dx \end{array} \right| =$$

$$= \left((1-t)\frac{\partial f}{\underline{\partial z}}(x,y,y')) + t\frac{\overline{\partial f}}{\partial z}(x,y,y')\right)\cdot h\Big|_a^b - \int\limits_a^b \left[(1-t)\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\underline{\partial z}}(x,y,y')\right) + t\frac{d}{dx}\left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial z}(x,y,y')\right)\right]dx. \tag{5.23}$$

Отсюда, подставляя (5.23) в (5.22), находим:

$$0 \in \left\{ \int\limits_a^b \left[(1-t)\left(\frac{\partial f}{\underline{\partial y}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial f}{\underline{\partial z}}(x,y,y')\Big) + \right.\right.\right.$$

$$\left.\left.\left. + t\left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial y}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial z}(x,y,y')\right)\right)\right]hdx \,\right| \, 0 \leqslant t \leqslant 1 \right\} =$$

$$= \left[\int\limits_a^b \left[\frac{\partial f}{\underline{\partial y}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\Big(\frac{\partial f}{\underline{\partial z}}(x,y,y')\Big)\right]hdx; \int\limits_a^b \left[\frac{\overline{\partial f}}{\partial y}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial z}(x,y,y')\right)\right]hdx\right]. \tag{5.24}$$

Из (5.24) по основной лемме (теорема 5.4) следует включение Эйлера—Лагранжа (5.21). □

Решение включения (5.21) назовем *субэкстремалью* функционала (5.20).

Замечание 5.1. Включение Эйлера—Лагранжа (5.21) можно равносильным образом переписать в виде «уравнения Эйлера—Лагранжа с параметром»:

$$\left[(1-t)\frac{\partial f}{\underline{\partial y}}(x,y,y') + t\frac{\overline{\partial f}}{\partial y}(x,y,y')\right] - \frac{d}{dx}\left[(1-t)\frac{\partial f}{\underline{\partial z}}(x,y,y') + t\frac{\overline{\partial f}}{\partial z}(x,y,y')\right] \overset{\text{п.в.}}{=} 0.$$

Субэкстремаль $y(\cdot)$ является решением этого уравнения при некотором $t \in [0;1]$.

Исследуем, в качестве существенного частного случая, случай модулированного интегранта из примера 5.1.

Теорема 5.6. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b |f(x,y,y')|dx \quad (f \in C^1(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b], y(a) = y_a, y(b) = y_b). \tag{5.25}$$

Для функционала (5.25) *включение Эйлера—Лагранжа принимает вид альтернативы*:

$$\left[\begin{array}{l} \textit{либо } \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,y') - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')\right) = 0 \ (\textit{при } f(x,y,y') \neq 0); \\ \textit{либо } f(x,y,y') = 0 \ (\textit{без дополнительных условий}). \end{array}\right. \tag{5.26}$$

В частности, если $\mathrm{mes}(f(x,y,y') = 0)$, *мы приходим к обычному уравнению Эйлера—Лагранжа для* f (*почти всюду*).

Доказательство. Обозначим через $\varphi(x,y,z) = |f(x,y,z)|$. Используя результат примера (5.1), получаем:

$$\partial_K^y \varphi = \begin{cases} -\dfrac{\partial f}{\partial y}, & f(x,y,z) < 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}, & f(x,y,z) > 0, \\ \left[\dfrac{\partial f}{\partial y}; \dfrac{\partial f}{\partial y}\right], & f(x,y,z) = 0, \end{cases} \qquad \partial_K^z \varphi = \begin{cases} -\dfrac{\partial f}{\partial z}, & f(x,y,z) < 0, \\ \dfrac{\partial f}{\partial z}, & f(x,y,z) > 0, \\ \left[\dfrac{\partial f}{\partial z}; \dfrac{\partial z}{\partial y}\right], & f(x,y,z) = 0. \end{cases}$$

Иначе говоря,

$$\partial_K^y \varphi = \left\{ \begin{array}{c} -\dfrac{\partial f}{\partial y},\ f(x,y,z) < 0; \quad \dfrac{\partial f}{\partial y},\ f(x,y,z) > 0 \\ (2\lambda - 1)\dfrac{\partial f}{\partial y},\ f(x,y,z) = 0, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1 \end{array} \right\},$$

$$\partial_K^z \varphi = \left\{ \begin{array}{c} -\dfrac{\partial f}{\partial z},\ f(x,y,z) < 0; \quad \dfrac{\partial f}{\partial z},\ f(x,y,z) > 0 \\ (2\mu - 1)\dfrac{\partial f}{\partial z},\ f(x,y,z) = 0, \quad 0 \leqslant \mu \leqslant 1 \end{array} \right\}.$$

Отсюда находим сублагранжиан:

$$L_K(\varphi)(y) \overset{\text{п.в.}}{=} \left\{ \begin{array}{c} -\left(\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)\right),\ f(x,y,z) < 0 \quad \left(\dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right)\right),\ f(x,y,z) > 0 \\ (2\lambda - 1)\dfrac{\partial f}{\partial y} - (2\mu - 1)\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right),\ f(x,y,z) = 0, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1; 0 \leqslant \mu \leqslant 1 \end{array} \right\}.$$

Таким образом, включение Эйлера—Лагранжа примет вид:

$$\left[\begin{array}{l} L(f)(y) = \dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right),\ f(x,y,z) \neq 0, \\ \left\{ L_{\alpha\beta}(f)(y) = \alpha\dfrac{\partial f}{\partial y} - \beta\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right), -1 \leqslant \alpha, \beta \leqslant 1 \right\}, \quad f(x,y,z) = 0. \end{array} \right.$$

В частности, при $\alpha = \beta = 0$ равенство $L_{00}(f)(y) \equiv 0$ тождественно выполнено, поэтому включение Эйлера—Лагранжа (5.26) при $f(x,y,z)$ также тождественно выполнено. Таким образом, в нашем случае включение Эйлера—Лагранжа приводится в следующим условиям

$$\left[\begin{array}{ll} \text{либо} & \dfrac{\partial f}{\partial y} - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}\right) = 0, \text{ при } f(x,y,z) \neq 0, \\ \text{либо} & f(x,y,z) = 0 \text{ (без дополнительных условий).} \end{array} \right. \tag{5.27}$$

□

Рассмотрим конкретный пример «*модулированного*» *гармонического осциллятора* (см. [30, 31]).

Пример 5.4. Пусть

$$\Phi(y) = \int_0^{\pi/2} |y'^2 - y^2|\,dx. \tag{5.28}$$

Здесь $f(y,z) = z^2 - y^2$, $L(f)(y) = -2y - 2y''$. При этом $f(y,y') = y'^2 - y^2 = 0 \Leftrightarrow y' = \pm y$, поэтому условие (5.27) примет вид:

$$\left[\begin{array}{ll} \text{либо} & y'' + y = 0, \text{ при } y' \neq \pm y, \\ \text{либо} & y' = \pm y, \text{ при } y' = \pm y. \end{array} \right. \tag{5.29}$$

Решая уравнения в (5.29), приходим к условиям

$$\left[\begin{aligned}&\text{либо}\quad y = C_1\cos x + C_2\sin x,\\ &\text{либо}\quad y = Me^{\pm x}.\end{aligned}\right. \tag{5.30}$$

Рассмотрим функцию

$$y_0(x) = \begin{cases} y = \sin x, \ \text{при } 0 \leqslant x \leqslant \pi/4,\\ y = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4}e^{x}, \ \text{при } \pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/2. \end{cases}$$

Непосредственно проверяется, что функция $y_0(x)$ удовлетворяет паре условий (5.30). Таким образом $y_0(x)$ — субэкстремаль, при этом:

$$\begin{cases} y_0(\pi/4-0) = \sin\pi/4 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = y_0(\pi/4+0),\\ y_0'(\pi/4-0) = \cos\pi/4 = \dfrac{\sqrt{2}}{2} = y_0'(\pi/4+0), \end{cases}$$

откуда следует, что $y_0 \in C^1[0;\pi/2]$.

При этом прямая проверка достаточных условий Лежандра—Якоби показывает, что на экстремали $y_1(x) = \sin x$ вариационный функционал

$$\Phi_1(y) = \int\limits_0^{\pi/4} (y'^2 - y^2)dx$$

достигает строгого локального минимума. Тогда из неравенства

$$\widehat{\Phi}_1(y) = \int\limits_0^{\pi/4} |y'^2 - y^2|dx \geqslant \Phi_1(y) \geqslant \Phi_1(y_1)$$

следует, что вариационный функционал $\widehat{\Phi}_1(y)$ тем более достигает на экстремали $y_1(x)$ строгого локального минимума. Далее, поскольку вариационный функционал

$$\Phi_2(y) = \int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} |y'^2 - y^2|dx$$

неотрицателен и на экстремали $y_2(x) = \dfrac{\sqrt{2}}{2}e^{-\pi/4}e^{x}$ обращается в нуль, то Φ_2 достигает строгого локального минимума на экстремали $y_2(x)$. Наконец, поскольку

$$\Phi(y) = \widehat{\Phi}_1\left(y\Big|_{[0;\pi/4]}\right) + \Phi_2\left(y\Big|_{[\pi/4;\pi/2]}\right),$$

то вариационный функционал $\Phi(y)$ достигает строгого локального минимума на субэкстремали

$$y_0(x) = \begin{cases} y_1(x), \ 0 \leqslant x \leqslant \pi/4,\\ y_2(x), \ \pi/4 \leqslant x \leqslant \pi/2. \end{cases}$$

Таким образом, на данной субэкстремали $y_0(x)$ достигается строгий локальный минимум вариационного функционала (5.28).

В заключении рассмотрим вариационную задачу с модулем под знаком интегранта (см. пример 5.2).

Теорема 5.7. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, |y'|)dx \quad (f \in C^1(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b], y(a) = y_a, y(b) = y_b). \tag{5.31}$$

Для функционала (5.31) *включение Эйлера—Лагранжа принимает вид следующей альтернативы*:

$$\left[\begin{array}{l} \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,y') - \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')\right) = 0 \ (\textit{при } y' > 0); \\ \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,-y') + \dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,-y')\right) = 0 \ (\textit{при } y' < 0); \\ 0 \in \dfrac{\partial f}{\partial y}(x,y,0) + \left[-\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,0)\right); +\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{\partial f}{\partial z}(x,y,0)\right)\right] \ (\textit{при } y' = 0). \end{array}\right.$$

В частности, если $\operatorname{mes}(y'=0)=0$, *мы приходим к уравнению*

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,|y'|) - (\operatorname{sign} y')\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,|y'|)\right) = 0 \quad (\textit{п. в.}) \tag{5.32}$$

Доказательство. Рассмотрим для простоты только случай $\operatorname{mes}(y'=0)=0$. В этом случае интегрирование по частям в (5.16) (пример 5.2) приводит к равенству

$$0 = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,|y'|) - \frac{d}{dx}\left(\operatorname{sign} y' \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,|y'|)\right)\right] h dx = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,|y'|) - \operatorname{sign} y' \frac{\partial f}{\partial z}(x,y,|y'|)\right] h dx$$

при любом $h \in C^1[a;b]$, $h(a)=h(b)=0$. Отсюда стандартным путем следует уравнение (5.32). □

5.3. Второй K-субдифференциал основного вариационного функционала. Напомним классическую формулу второй вариации. Если

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y,y')dx \quad (f \in C^2(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b]), \tag{5.33}$$

то функционал (5.33) дважды сильно дифференцируем всюду в $C^1[a;b]$, причем для любого $h \in C^1[a;b]$:

$$\Phi''(y)(h)^2 = \int\limits_a^b \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x,y,y')h^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x,y,y')h \cdot h' + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x,y,y')h'^2\right] dx. \tag{5.34}$$

Мы обобщим здесь это условие на случай субгладких интегрантов класса $C^2_{sub}(\mathbb{R}^3)$. При этом, как и в случае $\partial_K \Phi$, точное равенство (5.34) переходит в оценку $\partial^2_K \Phi$.

Теорема 5.8. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y,y')dx \quad (f \in C^2_{sub}(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b]). \tag{5.35}$$

Функционал (5.35) *дважды K-субдифференцируем всюду в* $C^1[a;b]$, *причем справедлива оценка*:

$$\begin{gathered} \partial^2_K \Phi(y)(h)^2 \subset \left[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')h^2 + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y')hh'\right) dx;\right. \\ \left.\int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')h^2 + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y')hh'\right) dx\right] + \\ + \left[\int\limits_a^b \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')hh' + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2\right) dx;\ \int\limits_a^b \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')hh' + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2\right) dx\right]. \end{gathered} \tag{5.36}$$

Доказательство. Так как f дважды K-субдифференцируем, то f один раз дифференцируем обычным образом, т. е. существует f'. Тогда вариационный функционал $\Phi(y)$ также один раз дифференцируем в обычном смысле и его дифференциал выглядит следующим образом:

$$\Psi(y)h = \Phi'(y)h = \int_a^b (f'_y(x,y,y')h + f'_z(x,y,y')h')dx. \tag{5.37}$$

Введем вспомогательный линейный оператор

$$(Ay)(x) = (x, y(x), y'(x)),\ A: C^1[a,b] \to \mathbb{R} \times C^1[a,b] \times C[a,b].$$

Очевидно, оператор A непрерывен. Теперь введем оператор композиции

$$B(\widetilde{A}(y)) = \Big(f'_y(\widetilde{A}(y)),\ f'_z(\widetilde{A}(y)) =: \Big(B_1(\widetilde{A}(y)),\ B_2(\widetilde{A}(y))\Big)\Big),$$

где

$$\widetilde{A} \in L(C^1[a,b]; \mathbb{R} \times C^1[a,b] \times C[a,b]).$$

Введем также линейный по u, v и по h интегральный оператор:

$$D(u,v) = \int_a^b [u(x)h(x) + v(x)h'(x)]dx, \qquad D: C[a,b] \to \mathbb{R}.$$

Тогда вариационный функционал Ψ может быть записан в виде композиции

$$\Psi(y)h = D[(B_{f'_y}(A), B_{f'_z}(A))]h. \tag{5.38}$$

Применяя к композиции (5.38) теорему 3.13 о K-субдифференцировании композиции, получаем

$$\partial_K \Psi(y)h = \partial_K (D[(B(Ay)])h \subset [\partial_K D(B(Ay)) \cdot [\partial_K B(Ay) \cdot \partial_K A(y)]]\, h. \tag{5.39}$$

Теперь рассмотрим в отдельности компоненты справа в (5.39).

1. Так как A — линейный непрерывный оператор, то он дифференцируем по Фреше, причем $A'(y) \equiv A$. Следовательно, $\partial_K (Ay)(x) = (x, y(x), y'(x))$.

2. Для операторов $B = (B_1, B_2)$, используя теорему о покоординатной K-субдифференцируемости 3.10, имеем:

$$\partial_K B(Ay)h \subset (\partial_K B_1(Ay)h) \times (\partial_K B_2(Ay)h) \subset$$
$$\subset [\underline{\frac{\partial}{\partial y}}(f'_y(x,y,y'))h + \underline{\frac{\partial}{\partial z}}(f'_y(x,y,y'))h'; \overline{\frac{\partial}{\partial y}}(f'_y(x,y,y'))h + \overline{\frac{\partial}{\partial z}}(f'_y(x,y,y'))h'] \times$$
$$\times [\underline{\frac{\partial}{\partial y}}(f'_z(x,y,y'))h + \underline{\frac{\partial}{\partial z}}(f'_z(x,y,y'))h'; \overline{\frac{\partial}{\partial y}}(f'_z(x,y,y'))h + \overline{\frac{\partial}{\partial z}}(f'_z(x,y,y'))h'].$$

3. Так как D — линейный непрерывный функционал, то он дифференцируем по Фреше, причем $D'(v) \equiv D$. Отсюда:

$$\partial_K \Psi(y)h \subset \int_a^b \Bigg(\left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')h + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y')h';\ \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')h + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y')h \right] \cdot h +$$
$$+ \left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')h + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h';\ \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')h + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h' \right] \cdot h' \Bigg) dx =$$
$$= \left[\int_a^b \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')h^2 + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y')hh' \right) dx;\ \int_a^b \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')h^2 + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y')hh' \right) dx \right] +$$
$$+ \left[\int_a^b \left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')hh' + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2 \right) dx;\ \int_a^b \left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')hh' + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2 \right) dx \right]. \tag{5.40}$$

$\square$

Здесь, как и при оценке $\partial_K \Phi$, мы также выделим случай интегранта, образованного внешней композицией субгладкой функции (теперь уже класса C^2_{sub}) с гладкой функцией.

Теорема 5.9. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b \varphi\left[f(x,y,y')\right] dx \quad (\varphi \in C^2_{sub}(\mathbb{R}), f \in C^2(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b]).$$

Тогда Φ дважды K-субдифференцируем всюду в $C^1[a;b]$, причем справедлива оценка (в краткой записи):

$$\partial_K^2 \Phi(y)(h)^2 \subset \int\limits_a^b \varphi'(f)\left(\frac{\partial}{\partial y}h + \frac{\partial}{\partial z}h'\right)^2 f dx +$$

$$+\left[\int\limits_a^b \underline{\varphi''}(f)\left((f_y)^2h^2 + f_y z h h'\right)dx; \int\limits_a^b \overline{\varphi''}(f)\left((f_y)^2h^2 + f_y z h h'\right)dx\right] +$$

$$+\left[\int\limits_a^b \underline{\varphi''}(f)\left(f_y z h h' + (f_z)^2 h'^2\right)dx; \int\limits_a^b \overline{\varphi''}(f)\left(f_y z h h' + (f_z)^2 h'^2\right)dx\right]. \tag{5.41}$$

Доказательство. Непосредственные вычисления дают:

$$\underline{\varphi}(f)_{y^2} = \underline{\varphi}''(f_y)^2 + \varphi'(f)f_{y^2};\ \ \overline{\varphi}(f)_{y^2} = \overline{\varphi''}(f)(f_y)^2 + \varphi'(f)f_{y^2};$$

$$\underline{\varphi}(f)_{z^2} = \underline{\varphi}''(f_z)^2 + \varphi'(f)f_{z^2};\ \ \overline{\varphi}(f)_{z^2} = \overline{\varphi''}(f)(f_z)^2 + \varphi'(f)f_{z^2};$$

$$\underline{\varphi}(f)_{yz} = \underline{\varphi}'' f_y f_z + \varphi'(f)f_{yz};\ \ \overline{\varphi}(f)_{yz} = \overline{\varphi''}(f)f_y f_z + \varphi'(f)f_{yz}.$$

Подстановка этих величин в (5.36) приводит, после преобразований, к оценке (5.41). □

Рассмотрим, в качестве конкретного примера, класс интегрантов вида $f(x,y,y')|f(x,y,y')|$.

Теорема 5.10. *Пусть*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y,y')|f(x,y,y')|dx \quad (f \in C^2(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b]).$$

Тогда справедлива оценка (в краткой записи):

$$\partial_K^2 \Phi(y)(h)^2 \subset \int\limits_a^b |f|\left(\frac{\partial}{\partial y}h + \frac{\partial}{\partial y}h'\right)^2 f dx + 2\int\limits_{(f\neq 0)} \operatorname{sign} f\left(f_y h + f_z h'\right)^2 dx +$$

$$+\left[-2\int\limits_{(f=0)}\left(f_{y^2}h^2 + f_{yz}hh'\right)dx; +2\int\limits_{(f=0)}\left(f_{y^2}h^2 + f_{yz}hh'\right)dx\right] +$$

$$+\left[-2\int\limits_{(f=0)}\left(f_{yz}hh' + f_{z^2}h'^2\right)dx; +2\int\limits_{(f=0)}\left(f_{yz}hh' + f_{z^2}h'^2\right)dx\right]. \tag{5.42}$$

В частности, если $\operatorname{mes}(f(x,y,y') = 0) = 0$, *то оценка* (5.42) *переходит в точное равенство*:

$$\partial_K^2 \Phi(y)(h)^2 = \Phi''(y)(h)^2 = \int\limits_a^b |f|\left(\frac{\partial}{\partial y}h + \frac{\partial}{\partial z}h'\right)^2 f dx + 2\int\limits_a^b \operatorname{sign} f\left(\frac{\partial f}{\partial y}h + \frac{\partial f}{\partial z}h'\right)^2 f dx.$$

В заключение приведем простейший пример.

Пример 5.5. Пусть

$$\Phi(y) = \int_a^b y'|y'|dx.$$

Здесь применение оценки (5.42) приводит к точному равенству:

$$\partial_K^2 \Phi(y)(h)^2 = \Phi''(y)(h)^2 = 2 \int_{(y'\neq 0)} (\operatorname{sign} y')h'^2 dx = 2 \int_{(y'>0)} h'^2 dx - 2 \int_{(y'<0)} h'^2 dx.$$

В частности, если $\operatorname{mes}(y' = 0) = 0$, получаем:

$$\partial_K^2 \Phi(y)(h)^2 = \Phi_K(y)(h)^2 = 2 \int_a^b (\operatorname{sign} y')h'^2 dx.$$

5.4. K-аналог необходимого условия Лежандра. Напомним классическое необходимое условие Лежандра для минимума основного вариационного функционала:

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx \quad (f \in C^2(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b], y(a) = y_a, y(b) = y_b). \tag{5.43}$$

Если функционал (5.43) достигает локального минимума в точке $y \in C^1[a;b]$, то

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, y') \geqslant 0 \text{ всюду на } [a;b].$$

Мы обобщим здесь это условие на класс интегрантов второго порядка субгладкости. Как и в классическом случае, базовым является соответствующее условие неотрицательности квадратичного функционала.

Теорема 5.11. *Рассмотрим квадратичный функционал*

$$\widetilde{\Phi}(h) = \int_a^b \left[P(x)h'^2 + Q(x)h^2\right] dx \quad (h \in C^1[a;b], h(a) = h(b) = 0).$$

Если коэффициенты $P(x)$ и $Q(x)$ ограничены, $P(x)$ полунепрерывен сверху всюду на $[a;b]$, и $\widetilde{\Phi}(h) \geqslant 0$ при всех допустимых h, то

$$P(x) \geqslant 0 \ \textit{всюду на } [a;b].$$

Доказательство. Допустим противное: $P(x_0) < 0$ в некоторой точке $x_0 \in [a;b]$. Тогда, в силу полунепрерывности сверху в точке x_0, $P(x) < 0$ в некоторой δ-окрестности x_0. Положим, следуя классической схеме:

$$h(x) = \begin{cases} \sqrt{\delta}\left(1 + \dfrac{x - x_0}{\delta}\right) & \text{при } x_0 - \delta \leqslant x \leqslant x_0, \\ \sqrt{\delta}\left(1 - \dfrac{x - x_0}{\delta}\right) & \text{при } x_0 \leqslant x \leqslant x_0 + \delta, \\ 0 \quad \text{при остальных } x \in [a;b]. \end{cases}$$

Стандартная выкладка приводит к равенству

$$\widetilde{\Phi}(h) = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} Q(x)h^2 dx + \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} P(x)h'^2 dx =: \widetilde{\Phi}_Q(h) + \widetilde{\Phi}_P(h). \tag{5.44}$$

Оценим оба слагаемых в (5.44).

В силу ограниченности Q,

$$|\widetilde{\Phi}_Q(h)| \leqslant M_Q \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h^2 dx = 2M_Q\delta. \tag{5.45}$$

В силу теоремы Вейерштрасса для полунепрерывных сверху функций, $P(x) \leqslant -m_P < 0$ при $x \in [x_0-\delta;\, x_0+\delta]$. Отсюда

$$\widetilde{\Phi}_P(h) \leqslant -m_P \int\limits_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} h^2 dx = -m_P\frac{1}{\delta}2\delta = -\frac{m_P}{2}. \tag{5.46}$$

Из (5.45)-(5.46) получаем:

$$\widetilde{\Phi}(h) \leqslant -\frac{m_P}{2} + 2M_Q\delta^2 < 0$$

при достаточно малых $\delta > 0$, что противоречит условию. □

Из теоремы 5.11, общей оценки $\partial^2_K(\Phi)$ (теорема 5.8) и общего необходимого условия минимума в терминах второго K-субдифференциала (теорема 4.16) нетрудно получить необходимое условие второго порядка для минимума вариационного функционала с интегрантом из класса $C^2_{sub}(\mathbb{R}^3)$.

Теорема 5.12. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y,y')dx \quad (f \in C^2_{sub}(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b], y(a) = y_a, y(b) = y_b). \tag{5.47}$$

Если функционал (5.47) *достигает локального минимума в точке* $y \in C^1[a;b]$, *то*

$$\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z^2}(x,y,y') \geqslant 0 \text{ всюду на } [a;b]. \tag{5.48}$$

Доказательство. Применим по формуле (5.36) оценки $\partial^2_K\Phi(y)(h)^2$ интегрирование по частям к слагаемым под интегралами, содержащим множитель hh', и преобразуем полученную сумму отрезков как выпуклую оболочку крайних точек:

$$\partial^2_K\Phi(y)(h)^2 \subset \Bigg[\int\limits_a^b \left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y^2}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y \partial z}}(x,y,y')\right)\right)h^2dx;$$

$$\int\limits_a^b \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y^2}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y \partial z}(x,y,y')\right)\right)h^2dx\Bigg] +$$

$$+\Bigg[\int\limits_a^b \left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2 - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right)h^2\right)dx;$$

$$\int\limits_a^b \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z^2}(x,y,y')h'^2 - \frac{d}{dx}\left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z \partial y}(x,y,y')\right)h^2\right)dx\Bigg] =$$

$$= co\Bigg\{\int\limits_a^b \left[\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y^2}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y \partial z}}(x,y,y') + \frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right)\right)h^2\right]dx;$$

$$\int\limits_a^b \left[\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z^2}(x,y,y')'h^2 + \left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y^2}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y \partial z}}(x,y,y') + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z \partial y}(x,y,y')\right)\right)h^2\right]dx;$$

$$\int\limits_a^b \left[\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2 + \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y^2}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y \partial z}(x,y,y') + \frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right)\right)h^2\right]dx;$$

$$\left.\int\limits_a^b \left[\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z^2}(x,y,y')h'^2 + \left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y^2}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y \partial z}(x,y,y') + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z \partial y}(x,y,y')\right)\right)h^2\right]dx\right\} =:$$

$$=: co\{I_1(h),\, I_2(h),\, I_3(h),\, I_4(h)\}\,. \tag{5.49}$$

Далее, по необходимому условию второго порядка для минимума (теорема 4.16),

$$\max\, \partial_K^2 \Phi(y)(h)^2 \geqslant 0 \quad (\forall\, h \in C^1[a;b],\ h(a) = h(b) = 0).$$

Из оценки (5.49) и последнего условия получаем:

$$\max\, \{I_1(h),\, I_2(h),\, I_3(h),\, I_4(h)\} \geqslant 0. \tag{5.50}$$

Обозначим теперь:

$$P(x) = \max\left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z^2}(x,y,y'),\, \frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z^2}}(x,y,y')\right) = \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z^2}(x,y,y');$$

$$\begin{aligned} Q(x) = \max\Bigg[&\left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y^2}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y \partial z}}(x,y,y') + \frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right)\right), \\ &\left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y^2}}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\underline{\partial y \partial z}}(x,y,y') + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z \partial y}(x,y,y')\right)\right), \\ &\left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y^2}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y \partial z}(x,y,y') + \frac{\partial^2 f}{\underline{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right)\right), \\ &\left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y^2}(x,y,y') - \frac{d}{dx}\left(\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial y \partial z}(x,y,y') + \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z \partial y}(x,y,y')\right)\right)\Bigg]. \end{aligned}$$

Положим $I(h) = \int\limits_a^b (P(x)h'^2 + Q(x)h^2)dx$. Тогда из неравенств $I_k(h) \leqslant I(h)$ $k = \overline{1,4}$ и неравенства (5.50) следует $I(h) \geqslant 0$ при любом $h \in C^1[a;b]$ $h(a) = h(b) = 0$. Применяя теперь к $I(h)$ теорему 5.11, получим

$$P(x) = \frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z^2}(x,y,y') \geqslant 0 \quad (a \leqslant x \leqslant b).$$

□

Приведем конкретный пример с еще одним вариантом модуляции гармонического осциллятора.

Пример 5.6. Пусть

$$\Phi(y) = \int\limits_0^{\pi/2} (y'|y'| - y^2)dx \quad (y \in C^1[0;\frac{\pi}{2}],\ y(0) = 0,\ y(\frac{\pi}{2}) = 1).$$

Ограничимся рассмотрением функций $y \in C^1[0;T]$, для которых множество стационарных точек имеет нулевую меру: $\mathrm{mes}(y' = 0) = 0$. Для таких функций уравнение Эйлера—Лагранжа принимает вид:

$$\left[\begin{array}{ll} y'' + y = 0 & \text{при } y' > 0 \\ \text{(почти всюду на } [0;T]); & \\ y'' - y = 0 & \text{при } y' < 0. \end{array}\right. \tag{5.51}$$

Далее,

$$\frac{\overline{\partial^2 f}}{\partial z^2}(x,y,y') = \begin{cases} 2, & y' \geqslant 0, \\ -2, & y' < 0. \end{cases}$$

Таким образом, ни одна немонотонная функция не удовлетворяет ни условию (5.48), ни сопряженному неравенству для максимума:

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x, y, y') \leqslant 0 \text{ почти всюду на } [a; b].$$

Среди монотонных функций (при данных граничных условиях) уравнению (5.51) удовлетворяют функции $y = \sin x$ и $y = sh\, x / sh\, \frac{\pi}{2}$.

5.5. K-аналог достаточных условий Лежандра—Якоби. Вначале напомним классические результаты, связанные с понятием сопряженной точки.

Определение 5.1. Рассмотрим квадратичный функционал

$$\widetilde{\Phi}(h) = \int\limits_a^b \big(P(x)h'^2 + Q(x)h^2\big)\, dx \quad (P, Q \in C[a; b],\ h \in C^1[a; b]). \tag{5.52}$$

Точка $\widetilde{x} \in (a; b)$ называется *сопряженной* с a для функционала (5.52), если уравнение Эйлера—Лагранжа для $\widetilde{\Phi}$

$$Qh - \frac{d}{dx}(Ph') = 0 \quad (h(a) = 0,\ h'(a) = 1)$$

имеет ненулевое решение $h(x)$ такое, что $h(\widetilde{x}) = 0$.

Достаточное условие Лежандра—Якоби положительной определенности квадратичного функционала (5.52) имеет следующий вид.

Теорема 5.13. *Если для квадратичного функционала* (5.52) *выполнены условия*

1. $P(x) > 0$ *при* $a \leqslant x \leqslant b$,
2. *отрезок* $(a; b]$ *не содержит точек, сопряженных с* a,

то квадратичный функционал (5.52) *положительно определен в* $C^1[a; b]$.

На основе теоремы 5.13 и формулы второй вариации доказываются достаточные условия Лежандра—Якоби для минимума вариационного функционала.

Теорема 5.14. *Пусть для вариационного функционала*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x, y, y')dx \quad (f \in C^2(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a; b], y(a) = y_a, y(b) = y_b).$$

функция y — *экстремаль. Если вдоль* y *выполнены условия*

1. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, y') > 0$ *при* $a \leqslant x \leqslant b$ (*усиленное условие Лежандра*),
2. *для уравнения Якоби*

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, y')h'\right) - \left[-\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(x, y, y')\right) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(x, y, y')\right]h = 0 \quad (h(a) = 0,\ h'(a) = 1) \tag{5.53}$$

выполнено условие Якоби отсутствия сопряженных точек,

то Φ *достигает в точке* y *строгого локального минимума.*

Наша цель — обобщить результат теоремы 5.13 на случай квадратичных функционалов с *ограниченными* и *полунепрерывными снизу* коэффициентами $P(x)$ и $Q(x)$, и на этой основе обобщить результат теоремы 5.14 на случай C^2-субгладкого интегранта. Заметим, что понятие *сопряженной точки* переносится на этот случай без изменений. Сформулируем аналог теоремы 5.13.

Теорема 5.15. *Рассмотрим квадратичный функционал*

$$\widetilde{\Phi}(h) = \int\limits_a^b \big(P(x)h'^2 + Q(x)h^2\big)\, dx \quad (h \in C^1[a; b]), \tag{5.54}$$

коэффициенты которого $P(x)$ *и* $Q(x)$ *ограничены и полунепрерывны снизу на* $[a;b]$. *Если для функционала* (5.52) *выполнены условия Лежандра—Якоби* (1)-(2) *из теоремы* 5.13, *то он положительно определен в* $C^1[a;b]$.

Доказательство. Следуя стандартной схеме доказательства для гладкого случая, добавим к выражению, стоящему под знаком интеграла в (5.54), величину вида $d(wh^2)$; при этом значение интеграла не изменится. Если $w(x)$ удовлетворяет уравнению

$$P(Q+w') = w^2, \tag{5.55}$$

то функционал (5.54) приводится к виду:

$$\widetilde{\Phi}(h) = \int\limits_a^b P(h' + \frac{w}{P}h)^2 dx.$$

Стандартным образом проверяется, что $\widetilde{\Phi}(h) > 0$ при $h \neq 0$, с учетом того, что из полунепрерывности P снизу на $[a;b]$ следует $P(x) \geqslant \gamma^2 > 0$ и ограниченность $(1/P(x))$. Отсюда в силу квадратичности функционала $\widetilde{\Phi}$, следует его положительная определенность.

Остается показать, что уравнение Риккати (5.55) имеет решение. Стандартными преобразованиями оно приводится к уравнению

$$-\frac{d}{dx}(Pu') + Qu = 0,$$

т. е. к уравнению Якоби для функционала (5.54). По условию, это уравнение имеет решение $u(x)$, которое не обращается в нуль при $a < x \leqslant b$. Тогда существует и решение уравнения (5.55), определенное равенством $w = -Pu'u^{-1}$. Итак, функционал (5.54) положительно определен на $C^1[a;b]$.

□

Теперь перейдем к центральному результату — C^2-субгладкому аналогу теоремы 5.14.

Теорема 5.16. *Рассмотрим вариационный функционал*

$$\Phi(y) = \int\limits_a^b f(x,y,y')dx \quad (f \in C^2_{sub}(\mathbb{R}^3), y \in C^1[a;b], y(a) = y_a, y(b) = y_b). \tag{5.56}$$

Предположим, что y — *субэкстремаль функционала* (5.56), *т. е. почти всюду удовлетворяет уравнению Эйлера—Лагранжа. Пусть вдоль субэкстремали* y *выполнены следующие условия*:

1. $\underline{\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y') > 0$ *при* $a \leqslant x \leqslant b$ (*«нижнее» усиленное условие Лежандра*);
2. *для каждого из четырех уравнений Якоби, соответствующих вершинам двумерного матричного отрезка* $[\underline{J}^2 f(x);\ \overline{J}^2 f(x)]$:

$$\frac{d}{dx}\left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')\cdot h'\right] - \left[-\frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y') + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')\right]\cdot h = 0; \tag{5.57}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')\cdot h'\right] - \left[-\frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y') + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right) + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')\right]\cdot h = 0; \tag{5.58}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')\cdot h'\right] - \left[-\frac{d}{dx}\left(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y') + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right) + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')\right]\cdot h = 0; \tag{5.59}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')\cdot h'\right] - \left[-\frac{d}{dx}\left(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}}(x,y,y') + \underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}}(x,y,y')\right) + \overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')\right]\cdot h = 0; \tag{5.60}$$

$$(h(a) = 0,\ h'(a) = 1) \tag{5.61}$$

выполнены условия Якоби отсутствия сопряженных точек.

Тогда функционал (5.56) *достигает строгого локального минимума в точке* y.

Доказательство. Воспользуемся оценкой для $\partial^2_K\Phi(y)(h)^2$, полученной в доказательстве теоремы 5.12:

$$\partial^2_K\Phi(y)(h)^2 \subset co\Big\{\int\limits_a^b\Big[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2+\Big(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')-\frac{d}{dx}\Big(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y')\Big)\Big)h^2\Big]dx;$$

$$\int\limits_a^b\Big[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2+\Big(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')-\frac{d}{dx}\Big(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}+\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y')\Big)\Big)h^2\Big]dx;$$

$$\int\limits_a^b\Big[\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2+\Big(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')-\frac{d}{dx}\Big(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y')\Big)\Big)h^2\Big]dx;$$

$$\int\limits_a^b\Big[\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')h'^2+\Big(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')-\frac{d}{dx}\Big(\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}+\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y')\Big)\Big)h^2\Big]dx\Big\} =:$$

$$=: co\Big\{J_1(h),\ J_2(h),\ J_3(h),\ J_4(h)\Big\}. \tag{5.62}$$

Проведем оценку каждого из интегралов $J_k(h)$, $k=\overline{1,4}$, пользуясь результатом теоремы 5.15.

1. Положим

$$P_1(x)=\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y');\ Q_1(x)=\Big(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}}(x,y,y')-\frac{d}{dx}\Big(\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}+\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial z}}(x,y,y')\Big)\Big).$$

Тогда уравнение Якоби для квадратичного функционала

$$J_1(h)=\int\limits_a^b[P_1(x)h'^2+Q_1(x)h^2]dx$$

примет вид (5.57). Таким образом, если выполнено условие Якоби для уравнения (5.57) и усиленное условие Лежандра

$$P_1(x)=\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')>0\quad(a\leqslant x\leqslant b),$$

то квадратичный функционал $J_1(h)$ положительно определен:

$$J_1(h)\geqslant\gamma_1^2\|h\|^2\quad(\forall h\in C^1[a;b],\ h(a)=h(b)=0).$$

2. Аналогичным образом, обозначая через $P_k(x)$ и $Q_k(x)$, соответственно, коэффициенты при h'^2 и h^2 для функционалов

$$J_k(h)=\int\limits_a^b[P_k(x)h'^2+Q_k(x)h^2]dx\quad(k=2,3,4),$$

мы приходим к условию Якоби для уравнений (5.58)–(5.60) и усиленным условиям Лежандра следующего вида:

$$P_2(x)=\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')>0;\quad P_3(x)=\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')>0;\quad P_4(x)=\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')>0\quad(a\leqslant x\leqslant b).$$

Отсюда вытекает положительная определенность квадратичных функционалов $J_k(h)$, $k=2,3,4$:

$$J_2(h)\geqslant\gamma_2^2\|h\|^2;\quad J_3(h)\geqslant\gamma_3^2\|h\|^2;\quad J_4(h)\geqslant\gamma_4^2\|h\|^2\quad(\forall h\in C^1[a;b],\ h(a)=h(b)=0).$$

Таким образом, обозначая $\gamma^2=\min\{\gamma_1^2,\ \gamma_2^2,\ \gamma_3^2,\ \gamma_4^2\}>0$, приходим к следующему итогу.

При выполнении Якоби для каждого из уравнений (5.57)–(5.60) и усиленного условия Лежандра в форме

$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x,y,y')>0\quad(a\leqslant x\leqslant b),$$

выполнены неравенства
$$J_k(h) \geqslant \gamma^2 \|h\|^2.$$
Но тогда из оценки (5.62) вытекает неравенство $\partial_K^2 \Phi(y)(h)^2 \geqslant \gamma^2\|h\|^2$, т. е. $\partial_K^2\Phi(y)$ также положительно определен. Следовательно, в силу общей теоремы 4.17, Φ достигает строгого локального минимума в точке y. $\square$

Замечание 5.2. При переходе к достаточным условиям максимума в теореме 5.16, условие (1) заменяется на условие:
$$\overline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x, y, y') < 0 \text{ при } a \leqslant x \leqslant b.$$
Условие (2) остается без изменения.

В заключении рассмотрим пример применения теоремы 5.16 к еще одному варианту «модулирования» гармонического осциллятора.

Пример 5.7. Пусть
$$\Phi(y) = \int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2} (y'^2 - y|y|)dx \quad \Big(y \in C^1\Big[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\Big],\ y\Big(\frac{\pi}{2}\Big) = 1,\ y\Big(-\frac{\pi}{2}\Big) = -sh\,\frac{\pi}{2}\Big). \tag{5.63}$$
Здесь уравнение Эйлера—Лагранжа принимает вид:
$$\left[\begin{array}{l} y'' + y = 0 \ \ (y' \geqslant 0), \\ y'' - y = 0 \ \ (y' \leqslant 0). \end{array}\right.$$
Таким образом, функция $y = \sin x$ $\Big(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\Big)$, $y = -shx$ $\Big(-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0\Big)$, является субэкстремалью функционала (5.63); при этом $y \in C^2\Big[-\dfrac{\pi}{2}; \dfrac{\pi}{2}\Big]$.

«*Нижнее*» условие Лежандра для субэкстремали y выполнено:
$$\underline{\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}(x, y, y') = \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(x, y, y') = 2 > 0.$$
«*Нижнее*» уравнение Якоби (5.57) принимает вид:
$$\left[\begin{array}{l} h'' + h = 0 \quad (y' \geqslant 0), \\ \Big(h(-\dfrac{\pi}{2}) = 0,\ h'(-\dfrac{\pi}{2}) = 1\Big) \\ h'' - h = 0 \quad (y' \leqslant 0). \end{array}\right.$$
Отсюда
$$h(x) = \begin{cases} \sin x ch\,\dfrac{\pi}{2} + \cos x sh\,\dfrac{\pi}{2} & \Big(0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}\Big), \\ sh\,\Big(x + \dfrac{\pi}{2}\Big) & \Big(-\dfrac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0\Big), \end{cases}$$
и условие Якоби для уравнения (5.57), как легко видеть, выполнено. Условие Якоби для уравнений (5.57)–(5.61) проверяется аналогично.

Таким образом, вариационный функционал (5.63) достигает на субэкстремали
$$y = \begin{cases} \ \ \sin x, & (0 \leqslant x \leqslant \dfrac{\pi}{2}), \\ -sh\,x, & (-\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant 0) \end{cases}$$
строгого локального минимума.

В заключение скажем несколько слов о *субгладкости*. Как представляется, практические применения построенного в работе формализма определяются именно возможностью работать с субгладкими задачами так же уверенно, как классический анализ работает с гладкими задачами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Басаева Е. К.* О субдифференциалах не всюду определенных выпуклых операторов// Владикавказ. мат. журн. — 2006. — *8*, № 4. — С. 6–12.
2. *Благодатских В. И.* Введение в оптимизацию. — М.: Высшая школа, 2001.
3. *Демьянов В. Ф.* Условия экстремума и вариационные задачи. — СПб.: НИИ Химии СПбГУ, 2000.
4. *Демьянов В. Ф., Рощина В. А.* Обобщенные субдифференциалы и экзостеры// Владикавказ. мат. журн. — 2006. — *8*, № 4. — С. 19-31.
5. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. — М.: Наука, 1990.
6. *Дмитрук А. В.* Выпуклый анализ. Элементарный вводный курс. — М.: Изд. отд. ф-та ВМК МГУ; МАКС Пресс, 2012.
7. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974.
8. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. — М.: Наука, 1988.
9. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Локальный выпуклый анализ// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. — 1982. — *19*. — С. 155–206.
10. *Кутателадзе С. С.* Выпуклые операторы// Усп. мат. наук. — 1979. — *34*, № 1. — С. 167–196.
11. *Левин В. Л.* О субдифференциалах выпуклых функционалов// Усп. мат. наук. — 1970. — *25*, № 4 (154). — С. 183-184.
12. *Линке Ю. Э.* Применения теоремы Майкла и ее обращение к сублинейным операторам// Мат. заметки. — 1992. — *52*, № 1. — С. 67–75.
13. *Линке Ю. Э.* Условия продолжения ограниченных линейных и сублинейных операторов со значениями в пространствах Линденштраусса// Сиб. мат. ж. — 2010. — *51*, № 6. — С. 1340–1358.
14. *Линке Ю. Э.* Универсальные пространства субдифференциалов сублинейных операторов со значениями в конусе ограниченных полунепрерывных снизу функций// Мат. заметки. — 2011. — *89*, № 4. — С. 547–557.
15. *Магарил-Ильяев Г. Г., Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ и его приложения. — М.: Едиториал УРСС, 2003.
16. *Орлов И. В., Стонякин Ф. С.* Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *34*. — С. 121–138.
17. *Орлов И. В., Стонякин Ф. С.* Предельная форма свойства Радона—Никодима справедлива в любом пространстве Фреше// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *37*. — С. 55–69.
18. *Орлов И. В., Халилова З. И.* Компактные субдифференциалы в банаховых конусах// Укр. мат. вестн. — 2013. — *10*, № 4. — С. 532–558.
19. *Орлов И. В., Халилова З. И.* Компактные субдифференциалы в банаховых пространствах и их применение к вариационным функционалам// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2013. — *49*. — С. 99–131.
20. *Половинкин Е. С.* Выпуклый анализ: учебное пособие. — М.: МФТИ, 2006.
21. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — М.: Физматлит, 2004.
22. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1971.
23. *Решетняк Ю. Г.* Условия экстремума для одного класса функционалов вариационного исчисления с негладким интегрантом// Сиб. мат. ж. — 1987. — *28*, № 6. — С. 90–101.
24. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973.
25. *Рубинов А. М.* Сублинейные операторы и их приложения// Усп. мат. наук. — 1977. — *32*, № 4. — С. 113–174.
26. *Рубинов А. М.* Суперлинейные многозначные отображения и их приложения к экономико-математическим задачам. — Ленинград: Наука, 1980.
27. *Стонякин Ф. С.* Аналог теоремы Данжуа—Юнг—Сакса о контингенции для отображений в пространства Фреше и одно его приложение в теории векторного интегрирования// Тр. ИПММ НАН Украины. — 2010. — Том 20. — С. 168–176.
28. *Стонякин Ф. С.* Компактные характеристики отображений и их приложения к интегралу Бохнера в локально выпуклых пространствах// Дисс. к.ф.-м.н. — Симферополь, 2011.
29. *Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ// Соврем. пробл. мат. Фундам. направл. — 1987. — *14*. — С. 5–101.
30. *Тихонов А. И., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Наука, 1977.
31. *Трубецков Д. И., Рожнев А. Г.* Линейные колебания и волны. — М.: Физматлит, 2001.
32. *Халилова З. И.* *K*-сублинейные многозначные операторы и их свойства// Уч. зап. Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. «Физ.-мат. науки». — 2011. — *24 (63)*, № 3. — С. 110–122.

33. *Халилова З. И.* Применение компактных субдифференциалов в банаховых пространствах к вариационным функционалам// Уч. зап. Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. «Физ.-мат. науки». — 2012. — *25 (64)*, № 2. — С. 140–160.
34. *Халилова З. И.* Компактные субдифференциалы высших порядков и их применение к вариационным задачам// Динам. сист. — 2013. — *3(31)*, № 1-2. — С. 115-134.
35. *Bertsekas D. P., Nedic A., Ozdaglar A. E.* Convex analysis and optimization. — Belmont: Athena Scientific, 2003.
36. *Ekeland I., Temam R.* Convex analysis and variational problems. — Oxford: North Holland; New York: Elsevier, 1976.
37. *Fuchssteiner B., Lusky W.* Convex cones. — Amsterdam—New York—Oxford: North-Holland, 1981.
38. *Keimel K., Roth W.* Ordered cones and approximation. — Heidelberg—Berlin—New York: Springer, 1992.
39. *Orlov I. V., Stonyakin F. S.* Compact variation, compact subdifferentiability and indefinite Bochner integral// Methods Funct. Anal. Topology. — 2009. — *15* (*1*). — С. 74–90.
40. *Ranjbari A., Saiflu H.* Some results on the uniform boundedness theorem in locally convex cones// Methods Funct. Anal. Topology. — 2009. — *15*, № 4. — С. 361-368.
41. *Roth W.* A uniform boundedness theorem for locally convex cones// Proc. Am. Math. Soc. — 1998. — *126*, №7. — С. 1973–1982.

И. В. Орлов
Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
проспект Вернадского, 4, Симферополь, Украина, 95007
E-mail: igor_v_orlov@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 53 (2014). С. 133–154

УДК 517.9

О НЕВЯЗКИХ РЕШЕНИЯХ МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ СИСТЕМЫ ЭЙЛЕРА

© 2014 г. **В. В. ПАЛИН, Е. В. РАДКЕВИЧ, Н. Н. ЯКОВЛЕВ, Е. А. ЛУКАШЕВ**

Аннотация. Построена нестандартная регуляризация многокомпонентной системы Эйлера, получены аналоги условия Гюгонио и условия устойчивости Лакса. Исследована проблема локальной достижимости точек фазового пространства. Построены двойственные бифуркации однофронтовых решений усеченной системы Эйлера в двухфронтовые решения.

1. Введение

Начнем с физики, которая определяет, во многом, задачи математического языка. При гиперзвуковых течениях, которые характеризуются относительно большими числами Маха, более 5 (несмотря на определенную условность этой границы, она общепринята), возникают серьезные отличия от обычных сверхзвуковых течений с умеренными числами Маха.

Первое отличие заключается в том (см. [8]), что теперь небольшие изменения скорости потока могут быть сравнимы со звуковой скоростью, т. е. обычное использование метода малых возмущений становится неприменимым. Это обстоятельство усложняет вычислительную сторону вопроса, но не затрагивает принципиальную — общие формулировки для расчета остаются прежними.

Более принципиальным моментом является изменение термодинамических свойств среды (см. классические работы [2, 8]). При движении с любой сверхзвуковой скоростью в газе возникает ударная волна. Если движение стационарно, то до ударной волны (вверх по потоку) поток остается невозмущенным — поскольку возмущения распространяются со звуковой скоростью, они не могут появиться раньше ударной волны. На самой ударной волне и непосредственно за ней происходят следующие явления: резко возрастают давление, плотность и температура. При этом, хотя величина давления может расти на пару порядков, а плотность — на порядок, их абсолютная величина невелика (вообще говоря, давление порядка атмосферного или чуть выше, а плотность в несколько раз меньше значений при нормальных условиях), т.к. на тех высотах (более 20 км), на которых эффективен гиперзвуковой полет, атмосфера сильно разрежена. А вот температура в области ударной волны может достигать нескольких тысяч градусов Кельвина, и это обстоятельство сильно меняет термодинамику и может приводить к новым явлениям.

В обычном состоянии у молекул воздуха возбуждены поступательные и вращательные степени свободы, и он подчиняется уравнению состояния идеального газа. При повышении температуры возбуждаются колебательные степени свободы, что приводит к изменению, например, теплоемкости, и, таким образом, уравнение состояния газа становится отличным от идеального.

При дальнейшем повышении температуры возникают явления диссоциации и химических реакций, т. е. бинарные молекулы основных компонент воздуха — азота и кислорода — распадаются, образуя атомарные газы (диссоциация), и, кроме того, например, могут образовываться радикалы — соединения азота с кислородом (NO и др.), — начинают идти химические реакции.

Вследствие изменения физики газов при гиперзвуковых скоростях необходимо включить в рассмотрение более сложное и динамичное представление о газодинамической среде, включая эффекты, связанные с ее микроструктурой, например, диффузионное расслоение. Так, в [3] сделан акцент на рассмотрении диспергирующих сред (в отличие от привычного акцента на эффекты вязкости и теплопроводности).

Еще раз подчеркнем, что изменение свойств среды именно при гиперзвуковых скоростях обусловлено возрастанием температуры и энергии за ударной волной выше некоторого критического уровня. При температурах порядка 1500°K, что соответствует примерно $M{=}7$, возбуждены колебательные степени свободы. При температурах порядка 3000°K, что соответствует примерно

M=10, диссоциируют молекулы кислорода, и начинаются химические реакции с образованием окиси азота, которая, в свою очередь, диссоциирует при дальнейшем повышении температуры. Отмечались явления неравномерного поведения функций, например, давления и концентрации некоторых компонент при установлении равновесного режима (см., например, [4]), а также достаточно интересное поведение температуры, связанное с появлением солитонообразных графиков (см., например, [7]). Отметим, что здесь мы имеем фактически течение многокомпонентной среды. В области собственно ударной волны на расстояниях порядка длины свободного пробега [1] происходит быстрое торможение потока. Как правило, требуется небольшое число столкновений, чтобы погасить выделенную компоненту скорости молекул, поэтому область ударной волны является узкой.

Таким образом, в гиперзвуковом потоке может возникнуть многокомпонентная смесь, и могут возникнуть градиенты концентрации отдельных компонент. Также естественным образом возникают градиенты температуры. Это обусловливает образование диффузионных потоков вещества и тепла. Структура этих потоков может быть достаточно сложной и включать разного рода неустойчивости. Стандартным механизмом, действующим в зоне ударной волны, считается вязкость, которая понимается в некотором условном смысле как действующая на микроуровне, хотя, вообще-то, вязкость — понятие макроскопическое.

В дальнейшем мы рассмотрим другой механизм микроструктурного уровня — диффузионное расслоение. На примере начальной стадии уплотнения в гиперзвуковом потоке для двухкомпонентной системы Эйлера мы приведем визуализацию самовозбуждающихся режимов на основе нестандартной регуляризации системы уравнений Эйлера с использованием вязкости и введения отрицательной диффузии.

При использовании углеводородного горючего наблюдается повышенная чувствительность потока (особенно при относительно длительном периоде работы) в тракте ПЖРД к изменению условий в камере сгорания, когда возникает явление незапуска (*unstart*) [15], сильных осцилляций давления, порядка 400 Гц (см. рис. 8). Мы сознательно, на первой стадии, рассмотрим изотермическую задачу, чтобы найти грубые условия вибрационной газовой динамики, при которых возможно появления *unstart* для гиперзвукового потока. Эти условия помогут сформулировать задачи визуализации характерных свойств гиперзвуковых течений.

2. Многокомпонентная система Эйлера

Здесь мы приведем визуализацию начальной стадии уплотнения в гиперзвуковом потоке для двухкомпонентной системы Эйлера

$$\begin{gathered}
\partial_t\varrho_1+\partial_x(\varrho_1 u_1)=0, \\
\partial_t\varrho_2+\partial_x(\varrho_2 u_2)=0, \\
\partial_t(\varrho_1 u_1)+\partial_x\Big(\varrho_1 u_1^2+P(\varrho_1,\varrho_2)\Big)=0, \\
\partial_t(\varrho_2 u_2)+\partial_x\Big(\varrho_2 u_2^2+P(\varrho_1,\varrho_2)\Big)=0,
\end{gathered} \tag{2.1}$$

где ϱ_1,ϱ_2 и u_1,u_2 — соответственно, плотности и скорости компонент, $P(\varrho_1,\varrho_2)$ — давление.

Хорошо известно, что система уравнений Эйлера имеет много решений. А нет ли среди них решений, естественно отличных от вязких, которые обладали бы свойствами дальнодействия и самовозбуждения, и как их выделить?

Ниже мы приведем визуализацию самовозбуждающихся режимов для сверхзвукового потока с достаточно большим числом Маха на основе нестандартной регуляризации системы уравнений Эйлера с использованием вязкости и введения отрицательной диффузии. Для этих целей мы прежде всего в двухкомпонентной системе Эйлера перейдем к новым переменным: концентрации $c=\varrho_2/\varrho$ активной компоненты, суммарной плотности $\varrho=\varrho_1+\varrho_2$, усредненной скорости $U=(1-c)u_1+cu_2$ и скорости u_2 активной компоненты. В переменных (c,U,u_2,ϱ) система (2.1) примет следующий вид:

$$\begin{gathered}\partial_t c + U\partial_x c - \partial_x(c(U-u_2)) - c(U-u_2)\varrho^{-1}\partial_x\varrho = 0,\\ \partial_t\varrho + \partial_x(\varrho U) = 0,\\ \partial_t(\varrho U) + \partial_x\Big(\varrho U^2 + 2P(\varrho_1,\varrho_2)\Big) + \partial_x\Big(\frac{c}{1-c}\varrho(U-u_2)^2\Big) = 0,\\ \partial_t(c\varrho u_2) + \partial_x\Big(c\varrho u_2^2 + P(\varrho_1,\varrho_2)\Big) = 0.\end{gathered}\tag{2.2}$$

В дальнейшем систему (2.2) будем называть приведенной системой Эйлера. Для простоты будем считать, что давление $P(\varrho_1,\varrho_2) = P(\varrho)$ не зависит от концентрации активной компоненты.

К приведенной системе Эйлера мы применим нестандартную регуляризацию вязкостью (второе, третье и четвертое уравнения) и введением отрицательной диффузии в уравнение для концентрации, используя уравнение Кана—Хилларда:

$$\begin{gathered}\partial_t c + U\partial_x c - \partial_x(c(U-u_2)) - c(U-u_2)\varrho^{-1}\partial_x\varrho = \partial_x^2\Big(\Phi'(c) - \varepsilon^2\partial_x^2 c\Big),\\ \partial_t\varrho + \partial_x(\varrho U) = \varepsilon\partial_x^2\varrho,\\ \partial_t(\varrho U) + \partial_x\Big(\varrho U^2 + 2P(\varrho)\Big) + \partial_x\Big(\frac{c}{1-c}\varrho(U-u_2)^2\Big) = \varepsilon\partial_x^2 U,\\ \partial_t(c\varrho u_2) + \partial_x\Big(c\varrho u_2^2 + P(\varrho)\Big) = \varepsilon\partial_x^2 u_2,\end{gathered}\tag{2.3}$$

где $\Phi'(c) = 4(c-c^-)(c-c_{cr})(c-c^+)$ — потенциал Ван-дер-Ваальса, c_-, c^+ и c_{cr} — заданные константы такие, что $c_-, c_+, c_{cr} \in (0,1)$. Через $K_\varepsilon c = \partial_x^2(\Phi'(c) - \varepsilon^2\partial_x^2 c)$ будем обозначать оператор Кана с симметричным потенциалом $\Phi(c) = (c-c_-)^2(c-c_+)^2$, когда $2c_{cr} = c^+ + c^-$.

Нестандартность определения слабого решения для приведенной системы Эйлера связана с тем, что первое уравнение умножается на тестовую функцию $c(x,t)\,\varphi(x,t)$, где $\varphi(x,t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ — бесконечно дифференцируемая функция с компактным носителем в $\mathbb{R}^2$, в то время как три уравнения для усредненной плотности, U и u_2 стандартно умножаем на тестовые функции $\psi_j(x,t) \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2),\ j = 1,2,3$, соответственно.

Сходства и различия с классическим случаем: имеется четыре семейства волн разрежения и четыре семейства устойчивых ударных волн (см. [16]). Три семейства устойчивых ударных волн (2.2) являются поднятием устойчивых ударных волн усеченной системы Эйлера

$$\begin{gathered}\partial_t\varrho + \partial_x(\varrho U) = 0,\\ \partial_t(\varrho U) + \partial_x\Big(\varrho U^2 + 2P(\varrho)\Big) + \partial_x\Big(\frac{c}{1-c}\varrho(U-u_2)^2\Big) = 0,\\ \partial_t(c\varrho u_2) + \partial_x\Big(c\varrho u_2^2 + P(\varrho)\Big) = 0.\end{gathered}\tag{2.4}$$

В силу приведенного выше определения слабого решения предельный переход при $[c] \to 0$ трех семейств ударных волн, определяемых устойчивыми ударными волнами усеченной системы Эйлера, дает три семейства устойчивых ударных волн, для которых первое приближение $c = \mathrm{const}$ и U, u_2, ϱ — решение усеченной системы Эйлера.

Регуляризация (2.3) для многокомпонентной системы уравнений Эйлера позволяет выделить в ней невязкие решения, описывающие процессы с избыточной энергией (в мезомасштабе), которые прежде всего характеризуются дальнодействием и самовозбуждающимися режимами (например, коагуляция, начальная стадия кристаллизации сплавов). Нестандартные регуляризации классических моделей механики сплошных сред встречались и ранее (см. [6, 11, 12]).

Как мы отмечали выше, для нестандартной регуляризации двухкомпонентной системы Эйлера (2.3) решения задачи Римана, описывающие режимы с самовозбуждением, связаны с тремя семействами устойчивых ударных волн, которые есть поднятие (см. [16]) устойчивых ударных волн усеченной системы Эйлера (2.4). Ниже мы приводим (рис. 1, 2) результаты численного эксперимента, проведенного Ю. Г. Рыковым, В. Лосевым и О. Феодоритовой (ИПМ им. Келдыша). Рисунок справа — увеличенный вид бифуркации фронта ударной волны скорости второй компоненты. Для (2.4), как показал численный эксперимент, в фазовой плоскости переменных (ϱ, U, u_2)

выделяется множество точек, не достижимых цепочками устойчивых ударных волн и волн разрежения. Вход в это множество приводит к появлению бифуркации фронта ударной волны компоненты u_2. При любом фиксированном $c \in (0,1)$ при специальном подборе начальных данных можно получить неклассическое решение задачи Римана (так называемый «горбатый» кинк) с бифуркацией фронта ударной волны компоненты u_2 в два фронта, когда для переднего фронта выполнено условие Гюгонио, в то время как для заднего фронта уравнение для скорости имеет другой характер.

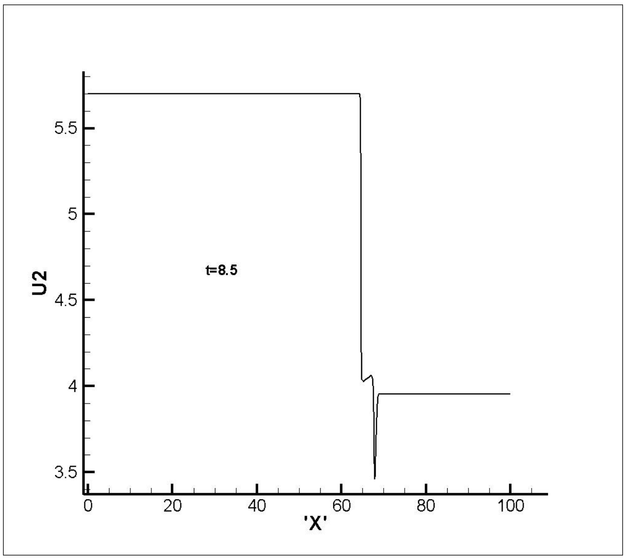

Рис. 1.

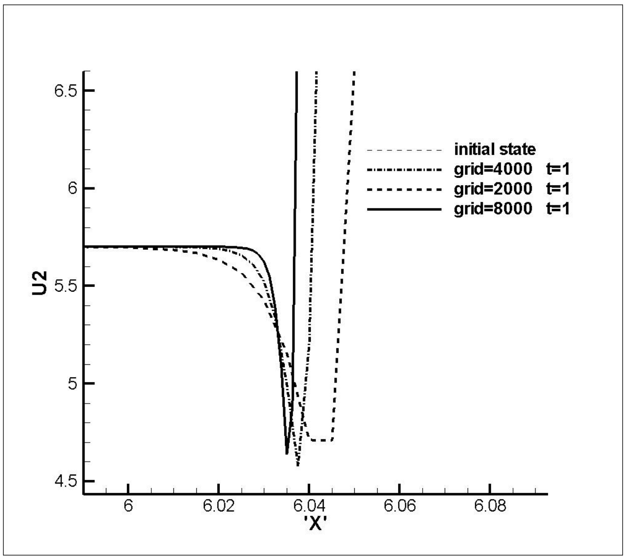

Рис. 2.

Ниже мы приведем построение двух двойственных бифуркаций однофронтового решения в двухфронтовое для упрощенной усеченной системы

$$\begin{aligned} &\partial_t \varrho + \partial_x(\varrho U) = 0, \\ &\partial_t(\varrho U) + \partial_x\Big(\varrho U^2 + 2P(\varrho)\Big) = 0, \\ &\partial_t(c\varrho u_2) + \partial_x\Big(c\varrho u_2^2 + P(\varrho)\Big) = 0, \end{aligned} \tag{2.5}$$

приводящее к неклассическому решению задачи Римана с профилем, например, типа «одногорбого» кинка для скорости второй компоненты u_2, численная реализация которого приведена выше, и профилем типа «полочки» (см. [10, 14]). Бифуркации реализуются распадом решения на две бегущих волны. Бифуркации реализуются как возмущения критических однофронтовых решений. Исследование бифуркаций однофронтового решения в двухфронтовое для полной усеченной системы (2.2) станет предметом исследования ближайшей публикации.

3. Численный эксперимент

Приведенные выше результаты объясняют нестандартность поведения устойчивых ударных волн для приведенной системы. Чтобы пояснить природу такого поведения, мы приведем результаты численного эксперимента для упрощенной приведенной системы

$$\begin{aligned} &\partial_t c + U\partial_x c = 0, \\ &\partial_t \varrho + \partial_x(\varrho U) = 0, \\ &\partial_t(\varrho U) + \partial_x\Big(\varrho U^2 + 2P(\varrho)\Big) = 0, \\ &\partial_t(c\varrho u_2) + \partial_x\Big(c\varrho u_2^2 + P(\varrho)\Big) = 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

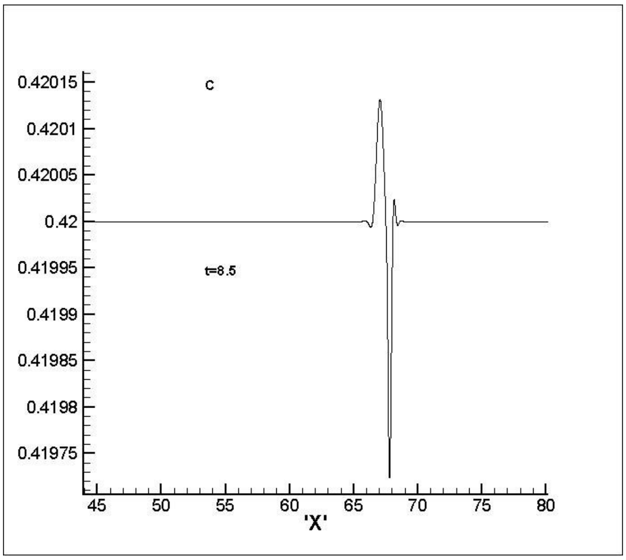

Рис. 3.

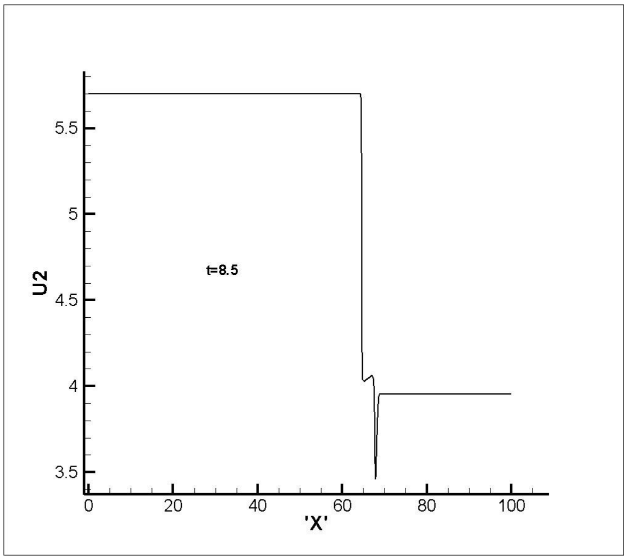

Рис. 4.

и ее усечения

$$\begin{aligned} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho U) &= 0, \\ \partial_t(\varrho U) + \partial_x\Big(\varrho U^2 + 2P(\varrho)\Big) &= 0, \\ \partial_t(c\varrho u_2) + \partial_x\Big(c\varrho u_2^2 + P(\varrho)\Big) &= 0. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Чем интересна система (3.1)? Как было показано численно Ю. Г. Рыковым, В. Лосевым и О. Феодоритовой (ИПМ им. Келдыша), усечение системы Эйлера (3.2) при любом фиксированном $c \in (0,1)$ при специальном подборе начальных данных дает неклассические решения задачи Римана с бифуркацией фронта ударной волны компоненты u_2 в два фронта, когда для переднего фронта выполнено условие Гюгонио, в то время как для заднего фронта уравнение для скорости имеет другой характер.

Анализ численного эксперимента. Начальная постоянная концентрация $c|_{t=0} = c_{cr} = 0,43$ берется из зоны лабильности активной компоненты. Такая концентрация включает механизм (рис. 3) бифуркации фронта ударной волны (рис. 4) для u_2.

Возникший промежуток между передним и задним фронтами ударной волны для u_2 заполняется осцилляциями самовозбудившегося решения.

Отметим, что усредненные компоненты ϱ, U не чувствительны к осцилляциям концентрации активной компоненты.

Пример визуализации. Предложенная регуляризация позволяет получить самовозбуждающиеся решения, по своему характеру визуализирующие реальные процессы в гиперзвуковом потоке, как например так называемый *unstart* (незажигание) в прямоточных ЖРД (рис. 7, 8; см. также [15]).

Слева характерное поведение второй скорости регуляризации (2.3). Длительность осцилляций регулируются входом в неклассическую зону и выхода из нее и может управляться граничными значениями слева для смешанной задачи Римана. Справа характерное давление *unstart*.

4. О природе бифуркаций однофронтовых решений усеченной системы Эйлера

Как мы отмечали выше, основу «странного» поведения решений регуляризации (2.3) составляют бифуркации однофронтовых решений усеченной системы Эйлера в двухфронтовые решения. В этой статье для упрощенной усеченной системы Эйлера (4.2) мы приведем результаты, аналитически доказывающие существование двух двойственных бифуркаций однофронтовых решений в двухфронтовые решения. Перенос полученных результатов на полную усеченную систему (2.4) — предмет исследования ближайшей публикации.

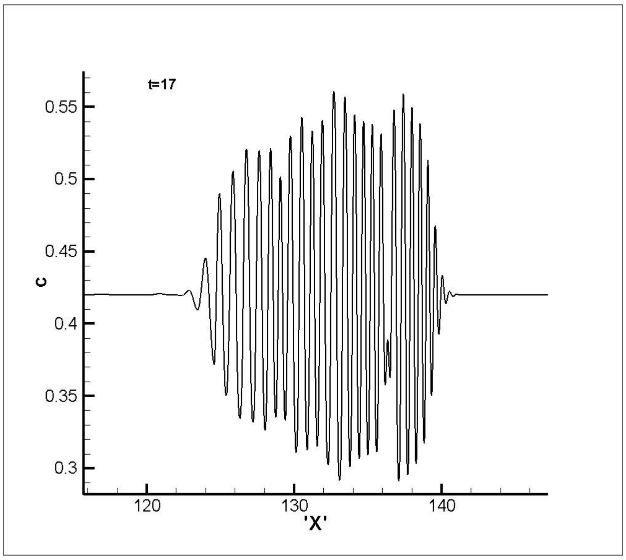

Рис. 5.

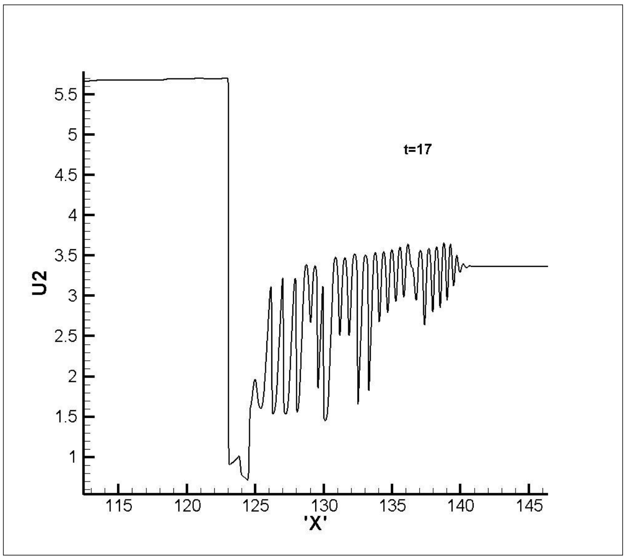

Рис. 6.

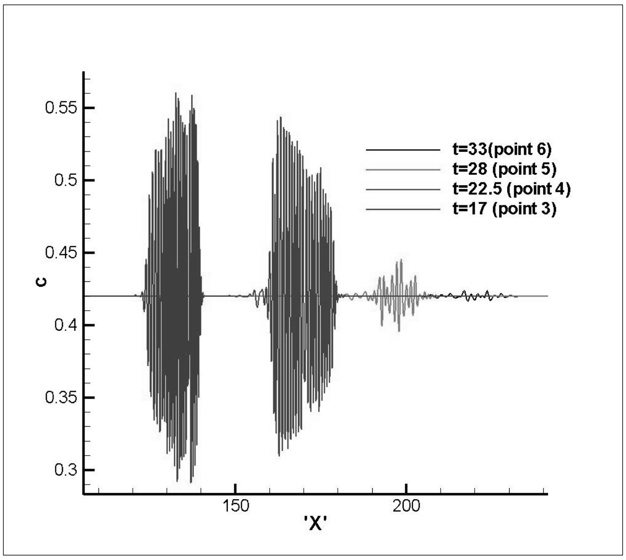

Рис. 7.

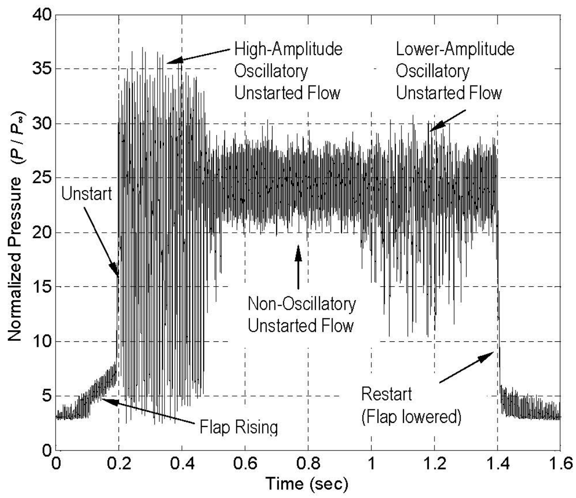

Рис. 8.

Многофронтовые решения. Перейдем к исследованию условий существования двухфронтовых решений усеченной системы Эйлера. Пусть $c_0 = \mathrm{const}$. Рассмотрим упрощенную усеченную систему без квадратичной части

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho U) = 0, \\ \partial_t(\varrho U) + \partial_x(\varrho U^2 + 2P) = 0, \\ \partial_t(c_0 \varrho u_2) + \partial_x(c_0 \varrho u_2^2 + P) = 0, \end{cases} \tag{4.1}$$

$$V = (\varrho,\ U,\ u_2)^T$$

и исследуем задачу Римана для системы (4.1), т. е. задачу Коши с начальными условиями

$$V|_{t=0} = \begin{cases} V_-, & x < 0, \\ V_+, & x > 0. \end{cases}$$

Ее регуляризация вязкостью имеет вид

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + \partial_x(\varrho U) = \varepsilon \partial_x^2 \varrho, \\ \partial_t(\varrho U) + \partial_x(\varrho U^2 + 2P) = \varepsilon \partial_x^2 U, \\ \partial_t(c_0 \varrho u_2) + \partial_x(c_0 \varrho u_2^2 + P) = \varepsilon \partial_x^2 u_2. \end{cases} \tag{4.2}$$

Выбор параметров задачи. Условия знаков. Будем предполагать, что выполнены следующие условия знаков:

$$[\varrho] < 0, \quad [U] < 0, \quad [u_2] < 0, \tag{4.3}$$

а также имеет место уравнение состояния

$$P(\varrho) = p_0 \varrho^\gamma, \tag{4.4}$$

где $p_0 > 0$, $\gamma > 1$ — заданные константы. Кроме того, будем предполагать, что имеет место неравенство

$$0 \leqslant \omega_1 < \omega. \tag{4.5}$$

4.1. Алгебраическое исследование. Перепишем систему (4.1) в форме Коши:

$$\begin{cases} \partial_t \varrho + U\partial_x \varrho + \varrho \partial_x U = 0, \\ \partial_t U + \dfrac{2P'}{\varrho}\partial_x \varrho + U\partial_x U = 0, \\ \partial_t u_2 + \dfrac{c_0 u_2(u_2 - U) + P'}{c_0 \varrho}\partial_x \varrho - u_2 \partial_x U + 2u_2 \partial_x u_2 = 0. \end{cases}$$

Это можно записать в матричном виде:

$$\partial_t V + \mathcal{A}\partial_x V = \varepsilon \partial_x^2 V, \tag{4.6}$$

где

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} U & \varrho & 0 \\ \dfrac{2P'}{\varrho} & U & 0 \\ \dfrac{c_0 u_2(u_2 - U) + P'}{c_0 \varrho} & -u_2 & 2u_2 \end{pmatrix}.$$

Собственные значения этой матрицы имеют вид

$$\lambda_\pm = U \pm \sqrt{2P'}, \quad \lambda_3 = 2u_2, \tag{4.7}$$

и при $\varrho > 0$ нарушение строгой гиперболичности происходит на гиперповерхностях

$$\Sigma_\pm = \{(\varrho, U, u_2) | 2u_2 = U \pm \sqrt{2P'}\}.$$

Критическое многообразие Σ_+. *Условие жордановости.* Будем рассматривать окрестность гиперповерхности Σ_+ (для Σ_- все аналогично). Обозначим

$$\mathcal{A}_\pm = \mathcal{A} - \lambda_\pm E.$$

Тогда на критической поверхности Σ_+ имеем

$$\mathcal{A}_\pm|_{\Sigma_+} = \begin{pmatrix} \mp\sqrt{2P'} & \varrho & 0 \\ \dfrac{2P'}{\varrho} & \mp\sqrt{2P'} & 0 \\ \dfrac{c_0 u_2(\sqrt{2P'} - u_2) + P'}{c_0 \varrho} & -u_2 & \sqrt{2P'} \mp \sqrt{2P'} \end{pmatrix}.$$

Для матрицы $\mathcal{A}_+|_{\Sigma_+}$ получаем, что если выполнено *условие жордановости*

$$c_0 u_2^2 - P' \neq 0, \tag{4.8}$$

то ранг матрицы $\mathcal{A}_+|_{\Sigma_+}$ равен двум, т. е. λ_+ соответствует жорданова клетка размера 2. Соответствующий собственный вектор $\nu = (0, 0, 1)^T$ будем называть критическим.

Некритический собственный вектор. Для матрицы $\mathcal{A}_-$ собственный вектор, соответствующий нулевому собственному значению, имеет вид

$$\nu_- = (\varrho, -\sqrt{2P'}, \alpha_-)^T,$$

где

$$\alpha_- = -u_2 + \frac{u_2^2}{2\sqrt{2P'}} - \frac{\sqrt{2P'}}{4c_0}.$$

Предложение 4.1. *Проекция множества нарушения строгой гиперболичности Σ_+ на плоскость переменных (U, u_2) разделяет плоскость переменных (U, u_2) на две открытых части.*

Отсюда следует несправедливость теоремы А. Майда [13] для усеченной системы Эйлера (2.4).

4.2. Вид одно- и двухфронтовых решений для регуляризованной системы. Будем искать решения системы (4.2) в виде бегущих волн. Для случая, когда решение имеет один общий фронт, положим

$$\varrho = \varrho\left(\frac{x - x^*(t)}{\varepsilon}\right), \quad U = U\left(\frac{x - x^*(t)}{\varepsilon}\right), \quad u_2 = u_2\left(\frac{x - x^*(t)}{\varepsilon}\right). \tag{4.9}$$

Для случая двухфронтового решения положим

$$\varrho = \varrho\left(\frac{x - x^*(t)}{\varepsilon}\right), \quad U = U\left(\frac{x - x^*(t)}{\varepsilon}\right), \quad u_2 = a\left(\frac{x - x^*(t)}{\varepsilon}\right) + b\left(\frac{x - x_1(t)}{\varepsilon}\right). \tag{4.10}$$

Обозначим также

$$\dot{x}^*(t) = \omega, \ \dot{x}_1(t) = \omega_1.$$

Условия стабилизации. Потребуем, чтобы для однофронтовых решений имело место *условие стабилизации*:

$$\begin{gathered} \varrho(\pm\infty) = \varrho_\pm, \ U(\pm\infty) = U_\pm, \ u_2(\pm\infty) = u_{2,\pm}, \\ \dot{\varrho}(\pm\infty) = 0, \ \dot{U}(\pm\infty) = 0, \ \dot{u}_2(\pm\infty) = 0. \end{gathered} \tag{4.11}$$

Для двухфронтовых решений условие стабилизации имеет вид

$$\begin{gathered} \varrho(\pm\infty) = \varrho_\pm, \ U(\pm\infty) = U_\pm, \ a(-\infty) = u_{2,-}, \\ b(-\infty) = 0, \ (a+b)(+\infty) = u_{2,+} \end{gathered} \tag{4.12}$$

Система ОДУ для однофронтового решения. Условия Рэнкина—Гюгонио. После подстановки вида однофронтового решения (4.9) в (4.2) получаем систему ОДУ

$$\begin{cases} -\omega(\varrho - \varrho_-) + (\varrho U - \varrho_- U_-) = \dot{\varrho}, \\ -\omega(\varrho U - \varrho_- U_-) + (\varrho U^2 - \varrho_- U_-^2 + 2(P - P_-)) = \dot{U}, \\ -c_0\omega(\varrho u_2 - \varrho_- u_{2,-}) + c_0(\varrho u_2^2 - \varrho_- u_{2,-}^2) + P - P_- = \dot{u}_2. \end{cases} \tag{4.13}$$

Проинтегрировав эту систему по $(-\infty; +\infty)$ и воспользовавшись условиями стабилизации (4.11), получаем условия Рэнкина—Гюгонио для однофронтового случая:

$$\begin{cases} -\omega[\varrho] + [\varrho U] = 0, \\ -\omega[\varrho U] + [\varrho U^2 + 2P] = 0, \\ -\omega[c_0 \varrho u_2] + [c_0 \varrho u_2^2 + P] = 0. \end{cases} \tag{4.14}$$

4.3. Система ОДУ для двухфронтового решения. Заметим, что регуляризованная система (4.2) допускает факторизацию: первые два уравнения этой системы не содержат неизвестной функции u_2. После подстановки явного вида двухфронтового решения соответствующая первым двум уравнениям (4.2) система ОДУ имеет вид

$$\begin{cases} -\omega\dot{\varrho} + (\varrho U)^{\dot{}} = \ddot{\varrho}, \\ -\omega(\varrho U)^{\dot{}} + (\varrho U^2 + 2P)^{\dot{}} = \ddot{U}. \end{cases} \tag{4.15}$$

Рассмотрим теперь ОДУ, соответствующее третьему уравнению системы (4.2). После подстановки вида двухфронтового решения (4.10) получаем:

$$-\omega c_0(\dot{\varrho}(a+b) + \varrho\dot{a}) - \omega_1 c_0 \varrho\dot{b} + (c_0\varrho(a+b)^2 + P)^{\dot{}} = (a+b)^{\ddot{}}.$$

После перегруппировки это уравнение принимает вид

$$-\omega c_0(\varrho a)^{\dot{}} - \omega_1 c_0(\varrho b)^{\dot{}} + (\omega_1 - \omega)c_0\dot{\varrho}b + (c_0\varrho(a+b)^2 + P)^{\dot{}} = (a+b)^{\ddot{}}.$$

Условия Рэнкина—Гюгонио двухфронтовой задачи. Аналогично тому, как было получено условие Рэнкина—Гюгонио для однофронтового решения, получим:

$$\begin{cases} -\omega[\varrho] + [\varrho U] = 0, \\ -\omega[\varrho U] + [\varrho U^2 + 2P] = 0, \\ -\omega[\varrho u_2] + (\omega - \omega_1)[b]\varrho_- + \left[\varrho u_2^2 + \dfrac{P}{c_0}\right] = 0. \end{cases} \tag{4.16}$$

При этом в последнем уравнении мы воспользовались равенством

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \dot{\varrho}(\tau)b(\tau)d\tau = [b]\varrho_-,$$

которое имеет место при условии (4.5).

5. Бифуркации критических однофронтовых решений

В этом разделе мы приведем построение бифуркаций однофронтового решения в двухфронтовое как возмущение критических однофронтовых решений усеченной системы. Бифуркация реализуется распадом решения на две бегущих волны. Каков сценарий бифуркации? Задача этого раздела — найти условия бифуркации однофронтового решения в двухфронтовое, т. е. природу разветвления фронта ударной волны. Мы покажем ниже, что бифуркация возникает как возмущение критических решений $(\varrho^{cr}, U^{cr}, u_2^{cr})$, исследованных выше.

5.1. Однофронтовое решение. Продолжим исследование однофронтовых решений. Система (4.13) факторизуется, поэтому исследуем сначала первые два уравнения:

$$\begin{gathered} -\omega(\varrho - \varrho_-) + \varrho U - \varrho_- U_- = \dot{\varrho}, \\ -\omega(\varrho U - \varrho_- U_-) + \varrho U^2 - \varrho_- U_-^2 + 2(P - P_-) = \dot{U}. \end{gathered} \tag{5.1}$$

Определим условия Лакса, при которых есть сепаратрисное решение. Тогда существует пара ϱ, U монотонных функций, являющаяся решением системы ОДУ (5.1) и удовлетворяющая условиям стабилизации

$$\begin{gathered} \varrho(\pm\infty; t) = \varrho_\pm(t), \ U(\pm\infty; t) = U_\pm(t), \\ \overset{\circ}{\varrho}(\pm\infty; t) = 0, \ \overset{\circ}{U}(\pm\infty; t) = 0 \end{gathered} \tag{5.2}$$

с условиями Гюгонио

$$\begin{gathered} -\omega[\varrho] + [\varrho U] = 0, \\ -\omega[\varrho U] + [\varrho U^2] = 0, \end{gathered} \tag{5.3}$$

где $\omega = \dot{x}^*$. Из условий Гюгонио получаем

$$\omega = \frac{[\varrho U]}{[\varrho]} = U_- + \varrho_+ \frac{[U]}{[\varrho]},$$

$$-\omega[\varrho U]+[\varrho U^2+2P]=\varrho_+^2\frac{[U]^2}{|[\varrho]|}+\varrho_+[U]^2+2[P]=0.$$

В дальнейшем рассматриваем случай, когда

$$[\varrho]<0,\quad [U]<0. \tag{5.4}$$

Отсюда

$$|[U]|=\sqrt{\frac{2}{\varrho_+\varrho_-}}\sqrt{\frac{[P]}{[\varrho]}}|[\varrho]|,\quad \omega=U_-+\sqrt{\frac{2\varrho_+}{\varrho_-}}\sqrt{\frac{[P]}{[\varrho]}}. \tag{5.5}$$

Как мы установили выше, собственные значения усеченной системы имеют вид

$$\lambda_1(\tau)=U-\sqrt{P'},\quad \lambda_2(\tau)=U+\sqrt{P'},\quad \lambda_3(\tau)=2u_2.$$

Положим $\lambda_j^\pm=\lambda_j(\pm\infty)$. Теперь сформулируем условие Лакса существования сепаратрисного решения системы (5.1) усредненных компонент. Рассмотрим два случая.

Условие 5.1 (Условие устойчивости Лакса). *Пусть для ω выполнено неравенство для ударной волны первого семейства*

$$\lambda_1^+<\lambda_2^+<\omega,\quad \lambda_1^-<\omega<\lambda_2^-. \tag{5.6}$$

Это условие определяет интервал устойчивых скоростей ω для ОДУ усредненных параметров (ϱ,U). Неравенства (5.6) гарантируют существование стабилизирующегося решения системы ОДУ (5.1) для усредненных параметров. Проверим справедливость этих неравенств для скорости ω, определяемой условием Гюгонио при выбранном нами конусе скачков $[\varrho]<0$, $[U]<0$.

Лемма 5.1. *Пусть $\varrho,U>0$, $[\varrho]<0$, $[U]<0$. Дополнительно потребуем, чтобы*

$$\varrho_--2\varrho_+<0. \tag{5.7}$$

Тогда скорость ω, определяемая условиями Гюгонио (5.3)*, удовлетворяет неравенствам* (5.6) *условия Лакса для подсистемы первых двух уравнений* (5.1) *усредненных компонент.*

В силу (5.5) неравенства (5.6) перепишутся в виде

$$U_--\sqrt{P'_-}<\omega=U_-+\sqrt{\frac{2\varrho_+}{\varrho_-}}\sqrt{\frac{[P]}{[\varrho]}}<U_-+\sqrt{P'_-},$$

$$U_++\sqrt{P'_+}=U_--\sqrt{\frac{2}{\varrho_+\varrho_-}}\sqrt{\frac{[P]}{[\varrho]}}|[\varrho]|+\sqrt{P'_+}<\omega=U_-+\sqrt{\frac{2\varrho_+}{\varrho_-}}\sqrt{\frac{[P]}{[\varrho]}},$$

что эквивалентно

$$\sqrt{\frac{2\varrho_+}{\varrho_-}}\sqrt{\frac{[P]}{[\varrho]}}<\sqrt{P'_+}<\sqrt{\frac{2}{\varrho_+\varrho_-}}\sqrt{\frac{[P]}{[\varrho]}}|[\varrho]|+\sqrt{\frac{2\varrho_+}{\varrho_-}}\sqrt{\frac{[P]}{[\varrho]}}=\sqrt{\frac{2\varrho_-}{\varrho_+}}\sqrt{\frac{[P]}{[\varrho]}},$$

или

$$(P_--P_+)-\frac{\varrho_--2\varrho_+}{\varrho_-}(P_--P_+)<P'_+(\varrho_--\varrho_+)<(P_--P_+)+\frac{2\varrho_--\varrho_+}{\varrho_+}(P_--P_+).$$

В силу выпуклости P вниз, имеем

$$(P_--P_+)-P'_+(\varrho_--\varrho_+)>0. \tag{5.8}$$

Учтем неравенство (5.7). Тогда из (5.7) и (5.8) следует справедливость неравенств (5.6). Это завершает доказательство леммы. В дальнейшем будем считать ω выбранным условием Гюгонио однофронтовой задачи.

Нарушение условия Лакса. Теперь докажем существование двух критических решений системы ОДУ (5.1). Пусть в фазовом пространстве ось u_2 направлена вверх, перпендикулярно плоскости усредненных переменных (ϱ, U).

Условие 5.2 (Условие устойчивости Лакса). *Пусть для ω выполнено неравенство для ударной волны первого семейства*:

$$\lambda_1^+ < \lambda_2^+ < \omega < \lambda_3^+, \quad \lambda_1^- < \omega < \lambda_2^- < \lambda_3^-. \tag{5.9}$$

Это условие гарантирует существование стабилизирующегося решения системы ОДУ (4.13). Здесь возможны два сценария управления устойчивыми ударными волнами (и их регуляризациями) для получения критических решений системы (4.13).

Одно критическое решение, которое назовем верхним, получим управлением левым предельным значением $(\varrho_-, U_-, u_{2,-})^\perp$, находясь выше верхней ветви критического многообразия Σ_+, уменьшая $u_{2,-}$ до первого выхода на критическое многообразие Σ^+ в точке $(\varrho_+^{cr}, U_+^{cr}, u_{2,+}^{cr}$.

Второе критическое решение, которое назовем нижним, получим, если в фазовой плоскости будем управлять левым предельным значением $(\varrho_-, U_-, u_{2,-})^\perp$, находясь ниже верхней ветви критического многообразия Σ_+ и увеличивая $u_{2,-}$ до первого выхода на критическое многообразие Σ^+ в точке $(\varrho_-^{cr}, U_-^{cr}, u_{2,-}^{cr})$.

Теорема 5.1. *Пусть выполнены условия леммы* 5.1 *и*

$$\omega^2 - \frac{4[P]}{c_0[\varrho]} > 0. \tag{5.10}$$

Для критического значения управления

$$u_{2,-}^{cr} = \frac{1}{2}\left(\omega + \sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_-}\left(\omega^2 - \frac{4[P]}{c_0[\varrho]}\right)}\right) \tag{5.11}$$

существует монотонно убывающее стабилизирующееся решение уравнения (5.14), *для которого $(\varrho_+^{cr}, U_+^{cr}, u_{2,+}^{cr})$ принадлежат верхней ветви критического многообразия Σ_+, и $u_{2,+}^{cr} = \dfrac{1}{2}\omega$. Более того, не существует однофронтового монотонно убывающего стабилизирующегося решения уравнения* (5.14) *с теми же компонентами (ϱ, U), но для которого $u_{2-} < u_{2,-}^{cr}$, отвечающего верхнему критическому решению.*

Теорема 5.2. *Пусть выполнены условия леммы* 5.1 *и*

$$\frac{4[P]}{c_0[\varrho]} - \omega^2 > 0. \tag{5.12}$$

Для критического значения управления

$$u_{2,-}^{cr} = \frac{1}{2}\omega \tag{5.13}$$

существует однофронтовое монотонно убывающее стабилизирующееся решение $(\varrho^{cr}, U^{cr}, u_2^{cr})$ системы (4.13), *для которого левое предельное значение $(\varrho_-^{cr}, U_-^{cr}, u_{2,-}^{cr}) \in \Sigma_+$, и*

$$u_{2,+}^{cr} = \frac{1}{2}\left(\omega - \sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_+}\left(\frac{4[P]}{c_0[\varrho]} - \omega^2\right)}\right).$$

Более того, не существует монотонно убывающего стабилизирующегося решения уравнения (5.14) *с тем же компонентами (ϱ, U), но для которого $u_{2-} > u_{2,-}^{cr}$, отвечающего нижнему критическому решению.*

Замечание 5.1. Отметим, что условие (5.12) справедливо, если

$$0 < U_- < \sqrt{\frac{2\varrho_+}{\varrho_-}}\left(-1 + \sqrt{\frac{4\varrho_-}{c_0\varrho_+}}\right)\sqrt{\frac{[P]}{[\varrho]}}.$$

Доказательство. Исследуем третье уравнение системы ОДУ (4.13) для однофронтовой задачи:

$$-\omega\, c_0(\varrho u_2 - \varrho_- u_{2,-}) + c_0(\varrho u_2^2 - \varrho_- u_{2,-}^2) + P - P_- = \dot u_2. \tag{5.14}$$

Рассмотрим уравнение для нулевых изоклин

$$-\omega u_2 + u_2^2 - \frac{\varrho_-}{\varrho} u_{2,-}^2 + \frac{\varrho_-}{\varrho}\omega u_{2,-} + \frac{P - P_-}{c_0 \varrho} = 0.$$

Для $2u_{2,-} = \omega + \sqrt{\dfrac{|[\varrho]|}{\varrho_-}\left(\omega^2 - \dfrac{4[P]}{c_0[\varrho]}\right)}$ имеем

$$u_{2,-}(\omega - u_{2,-}) + \frac{P - P_-}{c_0\varrho_-} = \frac{1}{4}\left(\omega + \sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_-}\left(\omega^2 - \frac{4[P]}{c_0[\varrho]}\right)}\right)\left(\omega - \sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_-}\left(\omega^2 - \frac{4[P]}{c_0[\varrho]}\right)}\right) + \frac{P - P_-}{c_0\varrho_-} =$$

$$= \frac{1}{4}\omega^2 - \frac{1}{4}\frac{|[\varrho]|}{\varrho_-}\left(\omega^2 - \frac{4[P]}{c_0[\varrho]}\right) = \frac{1}{4}\frac{\varrho_+}{\varrho_-}\omega^2 + \frac{P - P_+}{c_0\varrho_-} > 0.$$

Тогда уравнение для изоклин перепишется в виде

$$-\omega u_2 + u_2^2 + \frac{1}{4}\frac{\varrho_+}{\varrho}\omega^2 + \frac{P - P_+}{c_0\varrho} = 0.$$

Отсюда дискриминант

$$D = \omega^2 - \frac{\varrho_+}{\varrho}\omega^2 - \frac{4(P - P_+)}{c_0\varrho} = \frac{\varrho - \varrho_+}{\varrho}\omega^2 - \frac{4(P - P_+)}{c_0\varrho} > 0, \quad \forall \tau \in \mathbb{R},$$

поскольку монотонно убывает ($\dot D < 0$, так как $\dot\varrho < 0$) и

$$D^+ = 0,\ D^- = \frac{\varrho_- - \varrho_+}{\varrho_-}\left(\omega^2 - \frac{4[P]}{c_0[\varrho]}\right) > 0$$

в силу условия (5.10). Следовательно, существуют нулевые изоклины $u_\pm = \dfrac{1}{2}(\omega \pm D)$. Отсюда следует существование стабилизирующегося решения уравнения (5.14), которое есть поточечный предел строго монотонно убывающих не критических решений для $u_{2,-} > u_{2,-}^{cr}$.

Последнее. Если $u_{2,-} < u_{2,-}^{cr}$, нетрудно видеть, что $D^+ < 0$ и условие стабилизации (5.2) нарушается. Это завершает доказательство теоремы (5.1). Доказательство теоремы (5.2) аналогично. □

Лемма 5.2. *Для верхнего критического решения справедливы следующие асимптотики*:

$$u_2^{cr} = u_{2,+}^{cr} + \frac{1}{\varrho_+}\frac{1}{\tau} + o\left(\frac{1}{\tau}\right), \quad \tau \to +\infty, \tag{5.15}$$
$$\dot\varrho = o(\dot u_2^{cr}), \quad \tau \to -\infty.$$

Соответственно, для нижнего критического решения имеем

$$u_2^{cr} = u_{2,-}^{cr} + \frac{1}{\varrho_-}\frac{1}{\tau} + o\left(\frac{1}{\tau}\right), \quad \tau \to -\infty, \tag{5.16}$$
$$\dot\varrho = o(\dot u_2^{cr}), \quad \tau \to +\infty.$$

Лемма есть следствие условия устойчивости Лакса (5.9) для ударных волн усеченной системы (2.4), регуляризация которой при этих условиях имеет сепаратрисные решения ОДУ однофронтовой задачи.

5.2. О бифуркации верхнего критического решения. Теперь получим бифуркацию типа горбатого кинка как возмущение верхнего критического решения, существующего при условии

$$\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0} > 0, \quad \omega > \omega_1 > 0.$$

В чем природа такой бифуркации? Как мы показали выше, верхнее критическое решение, которое мы получаем в фазовой плоскости подходом сверху к критическому многообразию Σ_+ (если ось u_2 направлена вертикально вверх), есть предел существования классической однофронтовой ударной волны. Попытка опуститься ниже критического многообразия приводит к распаду классической однофронтовой ударной волны на две: замедление критического решения и со старой скоростью сброс предвестника с немонотонным отрицательным профилем типа горбатого кинка. То есть мы понижаем правое предельное значение $u_{2,+}$, опуская его ниже критического $u_{2,+}^{cr}$ (переход каустики). Таким образом, происходит разрядка критической (неустойчивой) ситуации посредством двухфронтовых ударных волн.

После подстановки вида двухфронтового решения (4.2) в систему ОДУ (4.15), (4.3) при u_2 вида

$$u_2 = a_0\left(\frac{x - x^*(t)}{\varepsilon}\right) + b_0\left(\frac{x - x_1(t)}{\varepsilon}\right) \tag{5.17}$$

получаем третье уравнение системы ОДУ двухфронтовой задачи Римана:

$$\begin{gathered} -\omega c_0(\varrho a_0 - \varrho_- a_0^-) - \omega_1 c_0(\varrho b_0 - \varrho_- b_0^-) + \\ +(\omega_1 - \omega)c_0 \int\limits_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} b_0 ds + c_0(\varrho(a_0 + b_0)^2 - \varrho(a_0^- + b_0^-)^2 + P - P^-\dot{)} = (a_0 + b_0\dot{)}. \end{gathered} \tag{5.18}$$

Выбор критического однофронтового решения. Потребуем выполнения условия

$$\omega^2 > \frac{4[P]}{c_0[\varrho]} \tag{5.19}$$

существования верхнего критического решения. Разложение (5.17) будем искать как возмущение верхнего критического решения. Для этого положим $b_0(x,t) = u_2^{cr}\Big(\dfrac{x - x_1(t)}{\varepsilon}\Big)$, где $\dot{x}_1 = \omega_1$, тем самым ускоряя или замедляя верхнее критическое решение $u_2(x,t)$, где $u_2^{cr}(\tau)$ — решение ОДУ (5.14), отвечающее скорости фронта ω. Предельные константы верхнего критического решения:

$$u_{2,-}^{cr} = \frac{1}{2}\left(\omega + \sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_-}\left(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0}\right)}\right), \ u_{2,+}^{cr} = \frac{1}{2}\omega. \tag{5.20}$$

Тогда для возмущения a_0 получим уравнение

$$\dot{a}_0 = c_0\varrho(a_0 + 2u_2^{cr} - \omega)a_0 - c_0(\omega_1 - \omega)(\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr}) + c_0(\omega_1 - \omega)\int\limits_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds \tag{5.21}$$

с условиями стабилизации

$$a_0^- = 0, \ (\dot{a}_0)^- = (\dot{a}_0)^- = 0.$$

В рассматриваемом случае третье условие Гюгонио двухфронтовой задачи запишется в виде

$$\varrho_+(a_0^+ - \omega)a^+ - \frac{1}{2}(\omega - \omega_1)\varrho_\pm\sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_-}\left(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0}\right)} = 0, \tag{5.22}$$

где плюс или минус в (5.22) выбираем в зависимости от знака $\omega_1 - \omega$. Здесь мы использовали справедливость соотношения

$$-\omega[\varrho u_2^{cr}] + [\varrho(u_2^{cr})^2] + \frac{1}{c_0}[P] = 0,$$

для критического управлении u_2^{cr}. Прежде всего определимся со знаком $\omega_1 - \omega$. Для этого исследуем нулевые изоклины уравнения (5.21):

$$a_\pm = \frac{1}{2}\Big(-(2u_2^{cr} - \omega) \pm \sqrt{D_a}\Big), \quad a_-^- = \sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_-}\Big(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0}\Big)}, \ a_-^+ = 0.$$

Дискриминант

$$D_a = (2u_2^{cr} - \omega)^2 - \frac{4(\omega_1 - \omega)}{\varrho} \int\limits_{\infty}^{\tau} \dot\varrho u_2^{cr} ds + 4(\omega_1 - \omega)\Big(u_2^{cr} - \frac{\varrho_-}{\varrho} u_{2,-}^{cr}\Big).$$

Чтобы определить знак $\omega_1 - \omega$, исследуем поведение дискриминанта. Имеем

$$D_a^- = \frac{|[\varrho]|}{\varrho_-}\Big(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0}\Big),$$

$$D_a^+ = -\frac{4(\omega_1 - \omega)}{\varrho^+}\left(\varrho_- u_{2,-}^{cr} - \varrho_+ u_{2,+}^{cr} + \int\limits_{-\infty}^{\infty} \dot\varrho u_2^{cr} ds\right) \geqslant 0,$$

если

$$Z = \omega - \omega_1 > 0. \tag{5.23}$$

Здесь мы воспользовались тем, что

$$G(Z, \tau) = (\omega - \omega_1)\left(\varrho_- u_{2,-}^{cr} - \varrho u_2^{cr} + \int\limits_{\infty}^{\tau} \dot\varrho u_2^{cr} ds\right) > 0, \quad \tau \in \mathbb{R}, \tag{5.24}$$

поскольку $G(Z, -\infty) = 0$ и

$$\dot G = (\omega - \omega_1)\varrho \dot u_2^{cr} > 0.$$

Таким образом, мы замедляем верхнее критическое решение и возмущение a_0 есть предвестник. Тогда получаем следующую спектральную задачу по параметру Z:

$$\dot a_0 = c_0\varrho(a_0 + 2u_2^{cr} - \omega)a_0 + c_0 Z(\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr}) - c_0 Z \int\limits_{-\infty}^{\tau} \dot\varrho u_2^{cr} ds, \tag{5.25}$$

$$a_0^- = 0, \ (\dot a_0)^- = (\dot a_0)^+ = 0,$$

$$(a_0^+ - \omega)a^+ - \frac{\varrho_-}{2\varrho_+} Z \sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_-}\Big(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0}\Big)} = 0. \tag{5.26}$$

Задача состоит в нахождении стабилизирующегося решения уравнения (5.25).

Немонотонное стабилизирующееся решение этой задачи назовем *одногорбым кинком*, если его график $y = a_-$ стартует из нуля при $\tau = -\infty$ и убывает, находясь между нулевыми изоклинами, до пересечения с нижней изоклиной в точке его минимума. Затем, находясь под нижней изоклиной, возрастает, стабилизируясь к $u_{2,+}^{cr}$ при $\tau \to +\infty$.

Соответственно, *двугорбым кинком* назовем немонотонное стабилизирующееся решение этой задачи, график которого $y = a_-$ стартует из нуля при $\tau = -\infty$ и убывает, находясь между нулевыми изоклинами, до пересечения с нижней изоклиной в точке его минимума. Затем, находясь под нижней изоклиной, возрастает до пересечения с ней в точке его максимума. Далее убывает, находясь между нулевыми изоклинами, и стабилизируется к $u_{2,+}^{cr}$ при $\tau \to +\infty$.

Теорема 5.3. *Пусть выполнены условия леммы* (5.1) *и оценки* (5.19).

1. *Пусть*

$$\omega \geqslant Z \geqslant \sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_-}\Big(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0}\Big)}, \tag{5.27}$$

то существует немонотонное решение задачи (5.25) *с профилем типа одногорбого кинка.*

Более того, существует $Z_* < \sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_-}\Big(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0}\Big)}$ *такое, что для*

$$0 < Z_* \leqslant Z \leqslant \sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_-}\Big(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0}\Big)} \tag{5.28}$$

существует немонотонное решение задачи (5.25) *с профилем типа одногорбого кинка.*

2. *Для*

$$0 < Z < Z_* \tag{5.29}$$

существует немонотонное решение задачи (5.25) *с профилем типа двугорбого кинка.*

Доказательство. Имеем производную

$$\dot{D}_a = 4\Big((2u_2^{cr} - \omega - Z)\dot{u}_2^{cr} + Z[-\frac{1}{\varrho^2}\int\limits_\infty^\tau \dot{\varrho} u_2^{cr} ds + \frac{1}{\varrho}u_2^{cr} - \frac{\varrho_-}{\varrho^2}u_{2,-}^{cr}]\dot{\varrho}\Big).$$

В силу (5.24), если $Z > 0$, то

$$\dot{D}_a > 4(2u_2^{cr} - \omega - Z)\dot{u}_2^{cr} \geqslant 0$$

при

$$Z \geqslant \sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_-}\Big(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0}\Big)}. \tag{5.30}$$

Теперь исследуем производную

$$\dot{a}_- = -\frac{2\Big[(\sqrt{D_a} + 2u_2^{cr} - \omega - Z)\dot{u}_2^{cr} + \frac{1}{\varrho^2}\Big(\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr} - \int\limits_\infty^\tau \dot{\varrho} u_2^{cr} ds\Big)\dot{\varrho}\Big]}{\sqrt{D_a}}.$$

Положим

$$K = \sqrt{D_a} + 2u_2^{cr} - \omega - Z = -2a_- - Z.$$

Отсюда

$$\dot{K} = \frac{4\Big[K\dot{u}_2^{cr} + \frac{1}{\varrho^2}\Big(\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr} - \int\limits_\infty^\tau \dot{\varrho} u_2^{cr} ds\Big)\dot{\varrho}\Big]}{\sqrt{D_a}},$$

или

$$\dot{K} = \frac{4\dot{u}_2^{cr}}{\sqrt{D_a}}\ K + \frac{4\Big(\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr} - \int\limits_\infty^\tau \dot{\varrho} u_2^{cr} ds\Big)}{\varrho^2\sqrt{D_a}}\ \dot{\varrho}.$$

Интегрируя, получим

$$K = \left(\sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_-}\Big(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0}\Big)} + \omega - Z\right) e^{\int\limits_{-\infty}^{\tau} \frac{4}{\sqrt{D_a}}\dot{u}_2^{cr} ds} +$$

$$+ e^{\int\limits_{-\infty}^{\tau} \frac{4}{\sqrt{D_a}}\dot{u}_2^{cr} ds} \int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{-\int\limits_{-\infty}^{s} \frac{4}{\sqrt{D_a}}\dot{u}_2^{cr} ds} \frac{4\Big(\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr} - \int\limits_\infty^\tau \dot{\varrho} u_2^{cr} ds\Big)}{\varrho^2\sqrt{D_a}}\ \dot{\varrho} ds > 0,$$

поскольку $Z \leqslant \omega$. Отсюда в силу леммы (5.2) следует, что $\dot{K} < 0$ для достаточно больших значений $\tau > \tau_*$. Из последнего следует, что

$$\dot{a}_- > 0, \quad \tau > \tau_*$$

т. е. нижняя изоклина возрастает в окрестности $\tau = \infty$. Имеем

$$K^+ - K^- = -\left(\sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_-}\Big(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0}\Big)} + \omega - Z\right)\left(1 - e^{\int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{4}{\sqrt{D_a}}\dot{u}_2^{cr} ds}\right) +$$

$$+e^{-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{4}{\sqrt{D_a}}\dot{u}_2^{cr}ds}\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\int\limits_{-\infty}^{s}\frac{4}{\sqrt{D_a}}\dot{u}_2^{cr}ds}\frac{4\Big(\varrho u_2^{cr}-\varrho_- u_{2,-}^{cr}-\int\limits_{\infty}^{\tau}\dot{\varrho}u_2^{cr}ds\Big)}{\varrho^2\sqrt{D_a}}\,\dot{\varrho}ds.$$

Покажем, что $K^+ - K^- < 0$. Для этого сделаем оценку интеграла:

$$I_1=\int\limits_{-\infty}^{\infty}e^{-\int\limits_{-\infty}^{s}\frac{4}{\sqrt{D_a}}\dot{u}_2^{cr}ds}\frac{4\Big(\varrho_- u_{2,-}^{cr}-\varrho u_2^{cr}+\int\limits_{\infty}^{\tau}\dot{\varrho}u_2^{cr}ds\Big)}{\varrho^2\sqrt{D_a}}\,(-\dot{\varrho})ds\leqslant$$

$$\leqslant\frac{2\varrho_-}{\varrho_+^2}\sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_-}\Big(\omega^2-\frac{4c_s^2}{c_0}\Big)}\;e^{-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{4}{\sqrt{D_a}}\dot{u}_2^{cr}ds}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(-\dot{\varrho})}{\sqrt{D_a}}\,ds,$$

где

$$e^{-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{4}{\sqrt{D_a}}\dot{u}_2^{cr}ds}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(-\dot{\varrho})}{\sqrt{D_a}}\,ds=o(|[\varrho]|).$$

Отсюда следует, что $K^+ - K^- < 0$ при

$$\sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_-}\Big(\omega^2-\frac{4c_s^2}{c_0}\Big)}+\omega-Z-\frac{2\varrho_-}{\varrho_+^2}\sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_-}\Big(\omega^2-\frac{4c_s^2}{c_0}\Big)}\;e^{-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{4}{\sqrt{D_a}}\dot{u}_2^{cr}ds}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(-\dot{\varrho})}{\sqrt{D_a}}\,ds=$$

$$=\sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_-}\Big(\omega^2-\frac{4c_s^2}{c_0}\Big)}\left(1-\frac{2\varrho_-}{\varrho_+^2}e^{-\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{4}{\sqrt{D_a}}\dot{u}_2^{cr}ds}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(-\dot{\varrho})}{\sqrt{D_a}}\,ds\right)+\omega-Z>0,$$

что справедливо при условии $\omega - Z \geqslant 0$ и достаточно малом $|[\varrho]|$. Из $K^+ - K^- < 0$ получаем, что

$$a_-^+ - a_-^- > 0.$$

В тоже время, в окрестности $\tau = -\infty$ в силу леммы (5.2) имеем

$$\dot{K}=\frac{4\dot{u}_2^{cr}}{\sqrt{D_a}}\,K+\frac{4\Big(\varrho u_2^{cr}-\varrho_- u_{2,-}^{cr}-\int\limits_{\infty}^{\tau}\dot{\varrho}u_2^{cr}ds\Big)}{\varrho^2\sqrt{D_a}}\,\dot{\varrho}=\frac{4K\dot{u}_2^{cr}}{\sqrt{D_a}}+o(\dot{u}_2^{cr})<0,$$

следовательно, $\dot{a}_0 >$ в окрестности $\tau = -\infty$, и нижняя изоклина в этой окрестности возрастает. Отсюда следует существование немонотонного стабилизирующего решения задачи (5.25) типа одногорбого кинка. Это завершает доказательство теоремы (5.3). □

Осталось исследовать случай, когда

$$0<Z<\sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_-}\Big(\omega^2-\frac{4c_s^2}{c_0}\Big)}. \tag{5.31}$$

В этом случае в силу леммы (5.2) существует τ_* такое, что

$$\dot{a}_-=-\frac{2(\sqrt{D_a}+2u_2^{cr}-\omega-Z)\dot{u}_2^{cr}}{\sqrt{D_a}}+o(\dot{u}_2^{cr})>0\quad\forall\tau<\tau_*,$$

и такое τ_{**}, что

$$\dot{a}_-=-\frac{2(\sqrt{D_a^+}-Z)\dot{u}_2^{cr}}{\sqrt{D_a}}+o(\dot{u}_2^{cr})<0\quad\forall\tau>\tau_{**},$$

где

$$\varrho_- u_{2,-}^{cr}-\varrho_+ u_{2,+}^{cr}+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dot{\varrho}u_2^{cr}ds=\varrho_+\sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_-}\Big(\omega^2-\frac{4c_s^2}{c_0}\Big)}+\int\limits_{-\infty}^{\infty}\dot{\varrho}(u_2^{cr}-u^{cr})ds>\frac{\varrho_+}{4}Z,$$

если выполнено условие (5.31). Таким образом, существует точка максимума функции a_-. Отсюда следует существование $Z_* < \sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_-}\Big(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0}\Big)}$, и для $Z \in \left[Z_*, \sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_-}\Big(\omega^2 - \frac{4c_s^2}{c_0}\Big)}\right)$ есть немонотонное стабилизирующееся решение задачи (5.25) типа одногорбого кинка.

Для $Z \in (0, Z_*)$ существует решение типа двугорбого кинка, график которого $y = a_-$ стартует из нуля при $\tau = -\infty$ и убывает, находясь между нулевыми изоклинами, до пересечения с нижней изоклиной в точке его минимума. Затем, находясь под нижней изоклиной, возрастает до пересечения с ней в точке его максимума. Далее убывает, находясь между нулевыми изоклинами, и стабилизируется к $u^{cr}_{2,+}$ при $\tau \to +\infty$. Причиной появления решения такого профиля является уменьшение показателя стабилизации u_2^{cr} при $\tau \to -\infty$ с уменьшением Z и увеличением максимума a_-.

5.3. О бифуркации нижнего критического решения. Теперь исследуем возмущение нижнего критического однофронтового решения, существующего при условии

$$\frac{4c_s^2}{c_0} - \omega^2 > 0, \quad \omega > \omega_1 > 0.$$

В этом пункте мы построим бифуркации как возмущения нижнего критического однофронтового решения.

В чем природа такой бифуркации? Как мы показали выше, нижнее критическое решение, которое мы получаем в фазовой плоскости подходом снизу к критическому многообразию Σ_+ (если ось u_2 направлена вертикально вверх), есть предел существования классической однофронтовой ударной волны. Попытка подняться выше критического многообразия приводит к распаду классической однофронтовой ударной волны на две: замедленную критическую волну и со старой скоростью сброс предвестника. Таким образом, происходит разрядка критической (неустойчивой) ситуации посредством двухфронтовых ударных волн.

Итак, рассмотрим ОДУ, соответствующее третьему уравнению системы (4.1) в быстрых переменных для двухфронтовой задачи. После подстановки двухфронтового решения (4.10) в виде $u_2 = a_0\Big(\frac{x - x^*(t)}{\varepsilon}\Big) + b_0\Big(\frac{x - x_1(t)}{\varepsilon}\Big)$ получаем бифуркацию типа горбатого кинка как возмущение верхнего критического решения. В чем природа такой бифуркации? Как мы показали выше, верхнее критическое решение, которое мы получаем в фазовой плоскости подходом сверху к критическому многообразию Σ_+ (если ось u_2 направлена вертикально вверх), есть предел существования классической однофронтовой ударной волны. Попытка подняться выше критического многообразия приводит к распаду классической однофронтовой ударной волны на две: ускорение нижнего критического решения и со старой скоростью сброс послевестника с немонотонным отрицательным профилем. Таким образом, происходит разрядка критической (неустойчивой) ситуации посредством двухфронтовых ударных волн.

Так же как выше, после подстановки вида двухфронтового решения (4.2) в систему (4.15), (4.3) для u_2

$$u_2 = a_0\left(\frac{x - x^*(t)}{\varepsilon}\right) + b_0\left(\frac{x - x_1(t)}{\varepsilon}\right) \tag{5.32}$$

получаем третье уравнение системы ОДУ двухфронтовой задачи Римана:

$$-\omega c_0(\varrho a_0 - \varrho_- a_0^-) - \omega_1 c_0(\varrho b_0 - \varrho_- b_0^-) + \tag{5.33}$$

$$+(\omega_1 - \omega)c_0 \int\limits_{-\infty}^{\tau} \dot\varrho b_0 ds + c_0(\varrho(a_0 + b_0)^2 - \varrho(a_0^- + b_0^-)^2 + P - P^-\dot{)} = (a_0 + b_0\dot{)}.$$

Выбор критического однофронтового решения. Потребуем выполнения условия

$$\frac{4[P]}{c_0[\varrho]} > \omega^2 \tag{5.34}$$

существования нижнего критического решения. Разложение (5.32) будем искать как возмущение нижнего критического решения. Для этого положим $b_0(x,t) = u_2^{cr}\Big(\dfrac{x - x_1(t)}{\varepsilon}\Big)$, где $\dot{x}_1 = \omega_1$, тем самым, ускоряя или замедляя верхнее критическое решение $u_2^{cr}(\tau)$, отвечающее скорости фронта ω. Предельные константы нижнего критического решения:

$$u_{2,-}^{cr} = \frac{1}{2}\omega,\ u_{2,+}^{cr} = \frac{1}{2}\left(\omega - \sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_+}\Big(\frac{4c_s^2}{c_0} - \omega^2\Big)}\right). \tag{5.35}$$

Тогда для возмущения a_0 получим уравнение

$$\dot{a}_0 = c_0\varrho(a_0 + 2u_2^{cr} - \omega)a_0 - c_0(\omega_1 - \omega)(\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr}) + c_0(\omega_1 - \omega)\int\limits_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds \tag{5.36}$$

с условиями стабилизации

$$a_0^- = 0,\ (\dot{a}_0)^- = (\dot{a}_0)^- = 0.$$

В рассматриваемом случае третье условие Гюгонио двухфронтовой задачи запишется в виде:

$$\varrho_+(a_0^+ - \omega)a^+ + \frac{1}{2}(\omega - \omega_1)\varrho_\pm\sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_+}\Big(\frac{4c_s^2}{c_0} - \omega^2\Big)} = 0, \tag{5.37}$$

где плюс или минус в (5.37) выбираем в зависимости от знака $\omega_1 - \omega$. Здесь мы использовали справедливость соотношения

$$-\omega[\varrho u_2^{cr}] + [\varrho(u_2^{cr})^2] + \frac{1}{c_0}[P] = 0$$

для критического управления u_2^{cr}. Прежде всего определимся со знаком $Z = \omega - \omega_1$. Для этого исследуем поведение дискриминанта. Имеем

$$\dot{D}_a = 4\left((2u_2^{cr} - \omega - Z)\dot{u}_2^{cr} + \frac{Z}{\varrho^2}[-\int\limits_{\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds + \varrho\, u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr}]\dot{\varrho}\right) > 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R},$$

поскольку, как мы показали выше,

$$-\int\limits_{\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds + \varrho\, u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr} < 0,$$

и

$$2u_2^{cr} - \omega - Z \leqslant -Z \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

если

$$Z = \omega - \omega_1 > 0. \tag{5.38}$$

Таким образом, мы замедляем нижнее критическое решение и возмущение a_0 есть предвестник. Тогда получаем следующую спектральную задачу по параметру $Z = \omega - \omega_1$:

$$\dot{a}_0 = c_0\varrho(a_0 + 2u_2^{cr} - \omega)a_0 + c_0\ Z(\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr}) - Z\int\limits_{-\infty}^{\tau} \dot{\varrho} u_2^{cr} ds, \tag{5.39}$$

$$a_0^- = 0,\ a_0^+ = a^+(Z,\omega),\ (\dot{a}_0)^\pm = 0,$$

$$\varrho_+(a_0^+ - \omega)a^+ - \frac{1}{2}Z\varrho_-\sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_+}\Big(\frac{4c_s^2}{c_0} - \omega^2\Big)} = 0.$$

Задача состоит в нахождении стабилизирующегося решения уравнения (5.39).

Теорема 5.4. *Пусть выполнены условия леммы* (5.1), *неравенства* (5.34).

1. *Пусть выполнено неравенство*

$$Z > \exp\left(4\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(-\dot u_2^{cr})}{\sqrt{D_a^+}}ds\right)\frac{4(\varrho_- + |[\varrho]|)\sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_+}\left(\frac{4c_s^2}{c_0}-\omega^2\right)}}{\varrho_+^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(-\dot\varrho)}{\sqrt{D_a}}ds. \tag{5.40}$$

Тогда существует монотонно убывающее, стабилизирующееся решение задачи (5.39). *Более того, существует такое*

$$Z_{**} \in \left(0, \exp\left(4\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(-\dot u_2^{cr})}{\sqrt{D_a^+}}ds\right)\frac{4(\varrho_- + |[\varrho]|)\sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_+}\left(\frac{4c_s^2}{c_0}-\omega^2\right)}}{\varrho_+^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(-\dot\varrho)}{\sqrt{D_a}}ds\right),$$

что для

$$Z_{**} \leqslant Z < \exp\left(4\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(-\dot u_2^{cr})}{\sqrt{D_a^+}}ds\right)\frac{4(\varrho_- + |[\varrho]|)\sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_+}\left(\frac{4c_s^2}{c_0}-\omega^2\right)}}{\varrho_+^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(-\dot\varrho)}{\sqrt{D_a}}ds \tag{5.41}$$

также существует монотонно убывающее, стабилизирующееся решение задачи (5.39).

2. *Для*

$$0 < Z < Z_{**} \tag{5.42}$$

существует немонотонное стабилизирующееся решение задачи (5.39) *типа одногорбого кинка.*

Доказательство. Из оценки $D_a > 0$ при справедливости условия (5.38) следует существование нулевых изоклин $a_\pm$. Теперь исследуем производную

$$\dot a_- = -\frac{2\left[(\sqrt{D_a} + 2u_2^{cr} - \omega - Z)\dot u_2^{cr} + \frac{1}{\varrho^2}\left(\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr} - \int\limits_{\infty}^{\tau}\dot\varrho u_2^{cr}ds\right)\dot\varrho\right]}{\sqrt{D_a}}.$$

Положим

$$K = \sqrt{D_a} + 2u_2^{cr} - \omega - Z = -2a_- - Z, \quad 2a_- = -K - Z.$$

Отсюда

$$\dot K = \frac{4\left[K\dot u_2^{cr} + \frac{1}{\varrho^2}\left(\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr} - \int\limits_{\infty}^{\tau}\dot\varrho u_2^{cr}ds\right)\dot\varrho\right]}{\sqrt{D_a}},$$

или

$$\dot K = \frac{4\dot u_2^{cr}}{\sqrt{D_a}}K + + \frac{4\left(\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr} - \int\limits_{\infty}^{\tau}\dot\varrho u_2^{cr}ds\right)}{\varrho^2\sqrt{D_a}}\dot\varrho.$$

Интегрируя, получим

$$K = -Ze^{\int\limits_{-\infty}^{\tau}\frac{4}{\sqrt{D_a}}\dot u_2^{cr}ds} + e^{\int\limits_{-\infty}^{\tau}\frac{4}{\sqrt{D_a}}\dot u_2^{cr}ds}\int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{-\int\limits_{-\infty}^{s}\frac{4}{\sqrt{D_a}}\dot u_2^{cr}ds}\frac{4\left(\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr} - \int\limits_{-\infty}^{\tau}\dot\varrho u_2^{cr}ds\right)}{\varrho^2\sqrt{D_a}}\dot\varrho ds. \tag{5.43}$$

Оценим

$$\int\limits_{-\infty}^{\tau} e^{-\int\limits_{-\infty}^{s}\frac{4}{\sqrt{D_a}}\dot u_2^{cr}ds}\frac{4\left(\varrho u_2^{cr} - \varrho_- u_{2,-}^{cr} - \int\limits_{-\infty}^{\tau}\dot\varrho u_2^{cr}ds\right)}{\varrho^2\sqrt{D_a}}\dot\varrho ds \leqslant$$

$$\leqslant e^{\frac{4}{\sqrt{D_a^+}}(u^{cr}_{2,-}-u^{cr}_{2,+})}\int\limits_{-\infty}^{\tau}\frac{4\Big(\varrho(u^{cr}_{2,-}-u^{cr}_{2})+\int\limits_{-\infty}^{\tau}\dot\varrho(u^{cr}_{2}-u^{cr}_{2,-})ds\Big)}{\varrho^2\sqrt{D_a}}(-\dot\varrho)ds\leqslant$$

$$\leqslant \exp\left(4\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(-\dot u^{cr}_2)}{\sqrt{D_a^+}}ds\right)\frac{4(\varrho_-+|[\varrho]|)\sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_+}\left(\frac{4c_s^2}{c_0}-\omega^2\right)}}{\varrho_+^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(-\dot\varrho)}{\sqrt{D_a}}ds,$$

где

$$\exp\left(4\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(-\dot u^{cr}_2)}{\sqrt{D_a^+}}ds\right)\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(-\dot\varrho)}{\sqrt{D_a}}ds=o(|[\varrho]|).$$

Отсюда следует, что $K<0$, если

$$Z>\exp\left(4\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(-\dot u^{cr}_2)}{\sqrt{D_a^+}}ds\right)\frac{4(\varrho_-+|[\varrho]|)\sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_+}\left(\frac{4c_s^2}{c_0}-\omega^2\right)}}{\varrho_+^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(-\dot\varrho)}{\sqrt{D_a}}ds.$$

Тогда K монотонно возрастает, поскольку $\dot K>0$; соответственно, a_- монотонно убывает. Отсюда следуют существование монотонно убывающего стабилизирующегося решения задачи (5.39). Это завершает доказательство теоремы (5.4). □

Осталось исследовать случай, когда

$$0<Z<\exp\left(4\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(-\dot u^{cr}_2)}{\sqrt{D_a^+}}ds\right)\frac{4(\varrho_-+|[\varrho]|)\sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_+}\left(\frac{4c_s^2}{c_0}-\omega^2\right)}}{\varrho_+^2}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{(-\dot\varrho)}{\sqrt{D_a}}ds. \tag{5.44}$$

В этом случае существует τ_* такое, что $K>0$ при $\tau>\tau_*$. В силу леммы (5.2), в этом случае получим, что

$$\dot K=\frac{4\dot u^{cr}_2}{\sqrt{D_a}}\,K+o(\dot u^{cr}_2)<0$$

при $\tau>\tau_*$. Тогда $\dot a_->0$ для достаточно больших $\tau\tau_*$. В этом случае существует немонотонное стабилизирующееся решение типа одногорбого кинка.

5.4. Проблема трансзвука. Это может быть дополнительным подтверждением существования бифуркации типа двугорбого кинка при возмущении верхнего критического решения и существования бифуркации типа одногорбого кинка при возмущении нижнего критического решения. Рассмотрим случай, пограничный к рассмотренным выше критическим решениям, когда

$$\omega_{cr}^2=\frac{4[P]}{c_0[\varrho]}. \tag{5.45}$$

Также как выше, $\varrho>0$, $U>0$, $[\varrho]<0$, $[U]<0$ и $P=P_0\varrho^\gamma$, $P_o=\mathrm{const}>0$, $\gamma>1$.

О природе трансзвукового потока. Заметим, что функция $\dfrac{1}{2}\omega+S^\pm$, где $S^\pm$ — знакопостоянные, так называемые однофронтовые солитонные функции ($S^+>0$, $S^-<0$, $S^+(\pm\infty)=S^-(\pm\infty)=0$), есть поточечный предел бифуркации верхнего (с двугорбым возмущением) и нижнего (с одногорбым возмущением) критических решений u_2^{cr} при $\omega_1\to\omega_{cr}+\pm0$, соответственно. Таким образом, солитонное решение образуется при разрушении ударной волны. Такой эффект можно назвать трансзвуковым.

Подставив функцию $u_2=\dfrac{1}{2}\omega+S^\pm$ в третье уравнение однофронтовой задачи, получим

$$c_0\varrho S^2+\frac{1}{4}c_0\omega^2(\varrho_--\varrho)+P-P_-=\dot S. \tag{5.46}$$

Теорема 5.5. *Пусть существует стабилизирующееся решение* ϱ, U *первых двух уравнений системы* (4.15), (4.3) *для усредненных компонент* (ϱ, U) (*справедливы условия леммы* (5.1)), *для скорости* ω *выполнено условие* (5.45), *а функция*

$$F(\tau) = -(P - P_-) + \frac{1}{4} c_0 \omega_{cr}^2 (\varrho - \varrho_-) > 0 \quad \forall \tau \in \mathbb{R}$$

(*где* $F(-\infty) = F(\infty) = 0$) *выпукла вверх. Тогда существует два знакопостоянных солитонных решения* ($S^+(\pm\infty) = S^-(\pm\infty) = 0$) *уравнения* (5.46).

Доказательство. Тогда S удовлетворяет уравнениям:

$$\dot{S} = c_0 \varrho S^2 - \frac{[P]}{[\varrho]}(\varrho - \varrho_-) + P - P_-, \qquad (5.47)$$
$$S^- = S^+ = 0.$$

Нужно доказать существование знакопостоянного солитона $S(z)$, $S(\pm\infty) = 0$, где ϱ — положительная, стабилизирующаяся на бесконечности, строго монотонно убывающая функция, $\varrho(-\infty) > \varrho(+\infty)$. Для $P = P_0 \varrho^\gamma < \gamma$, $\gamma > 1$, функция F выпукла вверх. Отсюда следует существование выпуклых верхней и нижней нулевых изоклин $S_\pm = \pm\sqrt{\dfrac{F(\varrho)}{\varrho}}$. Поэтому существует изоклина $S^- < 0$, график которой стартует из нуля и находится при $z \to +\infty$ сначала между нулевыми изоклинами до пересечения с нижней изоклиной в точке минимума функции S^-. Далее, находясь под нижней изоклиной, $S^- \to 0$ при $z \to +\infty$. Наоборот, S^+ стартует из нуля и находится при $z \to +\infty$ выше верхней нулевой изоклины до пересечения с ней в точке максимума функции S^+. Далее, находясь между нулевыми изоклинами, убывая, график $S^- \to 0$ при $z \to +\infty$.

Случай $Z = 0$. Отдельно рассмотрим случай, когда $Z = 0$. В этом случае задача для послевестника имеет вид

$$\dot{a}_0 = c_0 \varrho (a_0 + 2u_2^{cr} - \omega) a_0, \qquad (5.48)$$
$$a_0^- = 0, \ (\dot{a}_0)^\pm = 0.$$

$$a_+ \equiv 0, \quad a_- = -F, \quad F = (2u_2^{cr} - \omega), \ F^- = 0, \ F^+ = -\sqrt{\frac{|[\varrho]|}{\varrho_+}\Big(\frac{4c_s^2}{c_0} - \omega^2\Big)}.$$

Есть стабилизирующееся монотонно убывающее решение! □

6. Заключение

Какие можно сделать выводы?

1. Мы получили семейства бифуркаций верхнего и нижнего критический решений, определяемые, при фиксированном значении ω, выбором либо значения скорости $\omega_1 \in (0, \omega)$, либо значения a_0^+. Эта многозначность связана с тем, что мы не описали неустойчивость, рождающую всплеск (a_0^+) в стадии зарождения бифуркации для усеченной системы Эйлера. Из численного эксперимента (см. [16]) следует, что в полной приведенной системе это можно отнести на счет неустойчивости константы в данных Коши концентрации активной компоненты из области лабильности уравнения Кана. Начальный всплеск определяется уравнением для концентрации в приведенной системе. Рождение всплеска в полной приведенной системе и распад его на две ударной волны можно назвать *внутренней турбулентностью.*

2. В чем природа такой бифуркации? Как мы показали выше, верхнее критическое решение, которое мы получаем в фазовой плоскости подходом сверху к критическому многообразию Σ_+ (если ось u_2 направлена вертикально вверх), есть предел существования классической однофронтовой ударной волны. Попытка опуститься ниже критического многообразия приводит к распаду классической однофронтовой ударной волны на две: замедление верхнего критического решения и со старой скоростью сброс предвестника с немонотонным отрицательным профилем. Таким образом, происходит разрядка критической (неустойчивой) ситуации посредством двухфронтовых ударных волн. То же происходит и при возмущении нижнего критического решения.

3. Полученные бифуркации типа многогорбых кинков имеют сверхзвуковой характер, связанный с критической скоростью $\omega_{cr} = \sqrt{\dfrac{4[P]}{c_0[\varrho]}}$ превышающей скорость звука.

4. Возможно, появление солитонных решений для критической скорости $\omega = \omega_{cr}$ и появление колебаний возмущения (многогорбость) связано с проблемой трансзвука.

5. Все полученные эффекты суть внутренние свойства самой системы Эйлера, связанные со структурой собственного пространства на критических многообразиях $\Sigma_{\pm}$ (появление присоединенных векторов).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Зельдович Я. Б., Компанеец А. С.* Теория детонации. — М.: Гостехиздат, 1955.
2. *Зельдович Я. Б., Райзер Ю. П.* Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений. — М.: Наука, 1966.
3. *Иванов М. Я., Терентьева Л. В.* Элементы газодинамики диспергирующей среды. — М.: Информконверсия, 2002.
4. *Косоруков А. Л., Радвогин Ю. Б.* Осесимметрическое сверхзвуковое обтекание конуса неравновесно реагирующим воздухом// Препринт ИПМ им. М. В. Келдыша. — 1984. — *119*.
5. *Лакс П. Д.* Гиперболические дифференциальные уравнения в частных производных. — М.—Ижевск: НИЦ «Регулярная и хаотическая динамика», 2010.
6. *Митидьери Э., Похожаев С. И.* Априорные оценки и отсутствие решений нелинейных уравнений и неравенств в частных производных. — М.: МАИК «Наука/Интерпериодика», 2001.
7. *Суржиков С. Т.* Расчетное исследование аэротермодинамики гиперзвукового обтекания затупленных тел на примере анализа экспериментальных данных. — М.: ИПМ им. А. Ю. Ишлинского РАН, 2011.
8. *Черный Г. Г.* Течения газа с большой сверхзвуковой скоростью. — М.: Физматлит, 1959.
9. *Эванс Л. К.* Уравнения с частными производными. — Новосибирск: Тамара Рожковская, 1998.
10. *Яковлев Н. Н., Лукашев Е. А., Палин В. В., Радкевич Е. В.* Многокомпонентная система Эйлера, невязкие решения// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — В печати.
11. *Danilov V. G., Omel'yanov G. A., Radkevich E. V.* Hugoniot-type conditions and weak solutions to the phase field system// Eur. J. Appl. Math. — 1999. — *10*. — С. 55–77.
12. *Lukashov E. A., Radkevich E. V.* Solidification and structuresation of instability zones// Appl. Math. — 2010. — *1*. — С. 159–178.
13. *Majda A., Pego R.* Stable viscosity matrices for system of conservation laws// J. Differ. Equ. — 1985. — *56*. — С. 229–262.
14. *Radkevich E. B.* On the nature of bifurcations of one-front solutions of the truncated Euler system// J. Math. Sci. (N. Y.) — 2014. — *196*, № 3. — С. 388–404.
15. *Wagner J. L.* Experimental studies of unstart dynamics in inlet. Isolator configurations in a Mach 5 flow// Dissertation. — Fac. Grad. School, Univ. Texas Austin, 2011.
16. *Yakovlev N. N., Lukashev E. A., Palin V. V., Radkevich E. V.* Nonclassical regularization of the multicomponent Euler system// J. Math. Sci. (N. Y.) — 2014. — *196*, № 3. — С. 322–345.

В. В. Палин
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `grey_stranger84@mail.ru`

Е. В. Радкевич
Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: `evrad07@gmail.com`

Н. Н. Яковлев
Тураевское машиностроительное конструкторское бюро «Союз»
E-mail: `amntksoyuz@mail.ru`

Е. А. Лукашев
Тураевское машиностроительное конструкторское бюро «Союз»
E-mail: `elukashov@yandex.ru`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 53 (2014). С. 155–176

УДК 517.98

АНТИКОМПАКТЫ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К АНАЛОГАМ ТЕОРЕМ ЛЯПУНОВА И ЛЕБЕГА В ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ

© 2014 г. **Ф. С. СТОНЯКИН**

Аннотация. В работе вводится понятие антикомпактного множества (антикомпакта) в пространствах Фреше. Детально исследованы свойства как самих антикомпактов, так и шкалы банаховых пространств, порожденных антикомпактами. Особо рассмотрена система антикомпактных эллипсоидов в гильбертовых пространствах. Доказано существование системы антикомпактов во всяком сепарабельном пространстве Фреше E. На базе построенной теории получены аналоги теоремы Ляпунова о выпуклости и компактности образа векторной меры в классе сепарабельных пространств Фреше: показана выпуклость и компактность замыкания множества значений векторной меры в некотором пространстве $E_{\overline{C}}$, порожденном некоторым антикомпактом $\overline{C}$. Также исследована проблема недифференцируемости интеграла Петтиса по верхнему пределу. Получены условия дифференцируемости неопределенных интегралов Петтиса в терминах новых характеристик — слабой интегральной ограниченности, а также σ-компактной измеримости. Доказан аналог теоремы Лебега о дифференцируемости неопределенного интеграла Петтиса для всякого сильно измеримого подынтегрального отображения.

Введение

Данная работа посвящена новому подходу к двум проблемам теории меры и интеграла в бесконечномерных пространствах Фреше.

Для отображений в конечномерные пространства хорошо известна теорема Ляпунова о выпуклости образа безатомной векторной меры $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to \mathbb{R}^n$, заданной на σ-алгебре подмножеств Σ некоторого пространства Ω [7]. Этот результат имеет многочисленные приложения в оптимальном управлении, математической экономике, математической статистике, теории игр [1, 4, 6, 8]. Ввиду этого известно множество модификаций и обобщений этого результата в конечномерных пространствах, в том числе и относительно современных [19, 20, 24, 27, 30]. В частности, отметим работу с аналогами теоремы Ляпунова для некоторых специальных подмножеств $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ [20].

Однако, как показывает множество примеров, теорема Ляпунова неверна для векторных мер со значениями в бесконечномерных пространствах [5, 7, 21]. При этом существует множество аналогов указанной теоремы Ляпунова для бесконечномерных банаховых пространств, которые используются, в частности, в работах [1, 4]. Наиболее известный подход заключается в выделении класса банаховых пространств E с так называемым *свойством Ляпунова*. В каждом таком пространстве E для любой счетно-аддитивной безатомной меры $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to E$ замыкание $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}$ множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ выпукло [5, 21]. Свойством Ляпунова обладают, например, пространства c_0, ℓ_p ($p \in [1; 2) \cup (2; +\infty)$, см. [5]). Но указанным свойством не обладает множество важнейших пространств, в том числе и сепарабельное гильбертово пространство ℓ_2. Также известна теорема Ула о выпуклости множества $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}$ в случае мер ограниченной вариации со значениями в пространствах со свойством Радона—Никодима [21]. Но как свойство Ляпунова, так и свойство Радона—Никодима существенно ограничивают класс рассматриваемых пространств (ни тому, ни другому свойству не удовлетворяют, например, пространства $L_1[a; b]$ и $C[a; b]$). Нельзя не отметить также известный результат о выпуклости и слабой компактности слабого замыкания $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}$ множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ [21] в любом банаховом пространстве. Мы же ставим задачу получить аналог теоремы Ляпунова в бесконечномерном случае без столь существенных сужений на класс пространств, а также без использования слабого замыкания (которое, вообще говоря, не позволяет говорить о представлении точек замыкания множества как предельных точек последовательностей элементов множества [16]).

Работа выполнена при поддержке гранта Республики Крым для молодых ученых в 2014 году.

Далее, существует множество аналогов классического интеграла Лебега для отображений в бесконечномерные пространства Фреше. Наиболее известным и широко употребляемым является интеграл Бохнера, поскольку он сохраняет практически все свойства интеграла Лебега [16, 17, 23]. Однако класс интегрируемых по Бохнеру отображений не является достаточно широким для многих задачах функционального анализа и его приложений [3, 17, 23].

В связи с этим наряду с интегралом Бохнера активно изучаются и используются другие понятия интеграла для отображений в бесконечномерные пространства Фреше [3, 17, 23]. В частности, хорошо известна теория интеграла Петтиса [3, 16, 17], которая активно развивается и в современных исследованиях [18, 23, 25, 28, 29, 32].

Класс интегрируемых по Петтису отображений существенно шире класса отображений, интегрируемых по Бохнеру. Но при этом интеграл Петтиса теряет множество существенных свойств интеграла Бохнера. Так, например, всякий неопределенный интеграл Бохнера $F : I = [a; b] \to E$ (E — пространство Фреше) $F(x) = (B)\int\limits_a^x f(t)dt$ $(a \leqslant x \leqslant b)$ сохраняет свойство дифференцируемости почти всюду на $[a; b]$. Рассмотрим неопределенные интегралы Петтиса, т. е. отображения $F : I = [a; b] \to E$ (E — пространство Фреше) вида

$$F(x) = (P)\int\limits_a^x f(t)dt, \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{1}$$

причем f предполагается сильно измеримым, а также интегрируемым по Петтису на любом измеримом по Лебегу подмножестве $e \subset I$. Как показано в [22, замечание к теореме 1], для произвольного бесконечномерного банахова пространства E существует сильно измеримое и интегрируемое по Петтису отображение $f : I \to E$ такое, что

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{1}{h}(P)\int\limits_x^{x+h} f(t)dt\right\| = \infty \quad \forall t \in I,$$

откуда вытекает отсутствие дифференцируемости отображения F из (4.1) всюду на I. Это означает, что естественной и актуальной является задача поиска условий, при которых F из (4.1) будет дифференцируемым почти всюду на I.

Основная идея настоящей работы — предложить подход к указанным проблемам, основанный на новом понятии *антикомпактного множества* в пространствах Фреше. Поясним суть этого подхода. Весьма известно понятие компактного множества в топологических векторных пространствах. Такие множества обладают рядом весьма важных свойств, не присущих ограниченным множествам в бесконечномерных пространствах. Оказывается, что это как раз и приводит ко многим проблемам бесконечномерного анализа — таким как проблема переноса теоремы Ляпунова о выпуклости образа векторной меры (описана выше), проблема переноса теоремы Радона—Никодима о представимости абсолютно непрерывного отображения в виде интеграла Бохнера, проблема Крейна—Мильмана о существовании крайних точках ограниченных замкнутых множеств, не являющихся компактными и др. Ввиду этого возникла идея «сделать» ограниченные замкнутые множества компактами, но в другом пространстве (причем важно, чтобы это пространство было достаточно удобным). Аппаратом для реализации отмеченной идеи как раз и служит понятие антикомпактного множества, которому и посвящена настоящая работа.

Эти исследования в некотором смысле перекликаются с недавними работами [10, 15, 31], в которых была рассмотрена проблема Радона—Никодима, связанная с отсутствием представимости абсолютно непрерывных отображений в виде интеграла Бохнера для бесконечномерных пространств. При этом в работах [10, 15, 31] был использован результат о разложимости каждого банахова пространства E в виде индуктивного предела банаховых пространств E_C, порожденных абсолютно выпуклыми компактами $C \in \mathcal{C}(E)$. В настоящей работе один из основных результатов — доказательство существования системы антикомпактов во всяком сепарабельном пространстве Фреше. На базе этой системы антикомпактов как раз и удается, в некотором смысле, решить проблему, связанную с переносом теоремы Ляпунова в классе сепарабельных банаховых пространств.

Работа состоит из введения и пяти основных разделов. В первом разделе вводится понятие антикомпактного множества в банаховых пространствах, приведены два ключевых примера систем антикомпактов — системы эллипсоидов в сепарабельных гильбертовых пространствах, а также системы эллипсоидов в пространстве непрерывных функций $C[0;1]$.

Второй раздел посвящен детальному исследованию свойств как антикомпактных множеств, так и шкалы банаховых пространств, порожденных антикомпактами. Особо рассмотрен случай системы эллипсоидов в гильбертовых пространствах. Основной результат раздела 2 — существование системы антикомпактов во всяком сепарабельном пространстве Фреше E (теорема 2.5).

И, наконец, в третьем разделе работы получены аналоги теоремы Ляпунова о выпуклости в классе сепарабельных гильбертовых (теорема 3.4) и банаховых пространств (теорема 3.5) — показана выпуклость и компактность замыкания в некотором пространстве $E_{\overline{C}}$ множества значений векторной меры. При этом рассматриваются аналоги не только самой теоремы Ляпунова, а и более тонкого результата — выпуклости специальных подмножеств значений векторных мер [20]. Отметим, что в гильбертовом случае мы не накладываем никаких существенных условий на меры, кроме ограниченности. В случае же банаховых пространств мы по сути получаем аналог теоремы Ула, но без сужения на класс пространств.

Последние два раздела работы посвящены проблеме недифференцируемости неопределенного интеграла Петтиса. В разделах 4 и 5 работы мы докажем условия дифференцируемости почти всюду сильного интеграла Петтиса отображений в пространства Фреше (1). С этой целью в разделе 4 мы вводим две новые характеристики сильно измеримых и интегрируемых по Петтису отображений — *слабую интегральную ограниченность* (B^w_{int}) и *σ-компактную измеримость* (C^{σ}_{mes}). На базе предложенных понятий нами получено достаточное условие дифференцируемости отображений из (1) в терминах слабой интегральной ограниченности (теорема 4.1), а также необходимое условие — в терминах σ-компактной измеримости (теорема 4.3). Но фактически эти результаты лишь очерчивают проблему: дифференцировать неопределенный интеграл можно лишь для достаточно узких и специальных классов отображений.

Возникает естественная задача получить аналог теоремы Лебега для произвольного сильно измеримого и интегрируемого по Петтису отображения. Такой результат получен нами в разделе 5: доказана интегрируемость по Бохнеру в некотором пространстве $E_{\overline{C}}$, порожденном антикомпактом $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$ всякого сильно измеримого и интегрируемого по Петтису отображения (теорема 5.1) и, как следствие — дифференцируемость почти всюду в $E_{\overline{C}}$ неопределенного интеграла Петтиса (теорема 5.2 и следствие 5.1).

1. Понятие антикомпактного множества. Примеры антикомпактов

Обозначим через $\Omega_{ac}(E)$ набор всех замкнутых абсолютно выпуклых подмножеств пространства Фреше E.

Определение 1.1. Назовем множество $\overline{C} \in \Omega_{ac}$ *антикомпактным* в E, если:

1. $p_{\overline{C}}(a) = 0 \ \Leftrightarrow \ a = 0$ в E (или, $\bigcap\limits_{\lambda>0} \lambda\overline{C} = \{0\}$);
2. любое ограниченное подмножество E содержится и предкомпактно в пространстве $E_{\overline{C}} = (span\ \overline{C},\ p_{\overline{C}}(\cdot))$. Здесь под $p_{\overline{C}}(\cdot)$ мы понимаем функционал Минковского абсолютно выпуклого множества $\overline{C} \subset E$ и считаем, что $E_{\overline{C}}$ пополнено относительно нормы $\|\cdot\|_{\overline{C}} = p_{\overline{C}}(\cdot)$.

Введем обозначение: $\overline{\mathcal{C}}(E)$ — *набор антикомпактных подмножеств* пространства Фреше E.

Приведем примеры антикомпактных множеств (или, сокращенно, антикомпактов) в некоторых пространствах.

Пример 1.1. Пусть $\mathrm{E} = H \cong \ell_2$ — сепарабельное гильбертово пространство. В таких пространствах существует система так называемых эллипсоидов [9]. Пусть $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots)$ — последовательность положительных чисел. Для каждой такой последовательности ε эллипсоидом называется следующее множество:

$$C_\varepsilon = \left\{ x = (x_1, x_2, ..., x_n, ...) \in \ell_2 \ \ | \ \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{\varepsilon_k^2} \leqslant 1 \right\}.$$

Доказано, что C_ε компактно тогда и только тогда, когда $\varepsilon \to 0$ (см. [9]). Отметим, что множество C_ε абсолютно выпукло. Норма $\|\cdot\|_{C_\varepsilon}$, порожденная C_ε в пространстве $H_{C_\varepsilon} = span\ C_\varepsilon$, имеет вид

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{\varepsilon_k^2}\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Лемма 1.1. *Если $\varepsilon \to \infty$, то C_ε — антикомпакт.*

Доказательство. Действительно, поскольку любое ограниченное множество $B \subset H$ поглощается единичным шаром, то, не уменьшая общности рассуждений, вместо B достаточно рассмотреть единичный шар

$$B = \left\{x = \{x_k\} \in \ell_2 \mid \sum_{k=1}^{\infty} x_k^2 \leqslant 1\right\}.$$

Ясно, что $p_B(\cdot) = \|\cdot\|_{\ell_2}$. Так как

$$\|x\|_{\ell_2}^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \varepsilon_k^2 \cdot \frac{|x_k|^2}{\varepsilon_k^2} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\widetilde{x}_k^2|^2}{\widetilde{\varepsilon}_k^2},$$

где $\widetilde{\varepsilon}_k = \dfrac{1}{\varepsilon_k}$ и $\widetilde{x} = (\widetilde{x}_1, \widetilde{x}_2, \ldots, \widetilde{x}_n, \ldots) \in H_{C_\varepsilon}$, $\widetilde{x}_k = \dfrac{x}{\varepsilon_k}$ $(\varepsilon \to +\infty)$, то ввиду $\widetilde{\varepsilon}_k \to 0$ при $k \to \infty$ имеем, что — B компакт в E_{C_ε}, т. е. C_ε антикомпактно в H. □

Теперь покажем, как можно строить примеры антикомпактов в сепарабельных банаховых пространствах. Для этого рассмотрим пример в «типичном» банаховом пространстве числовых последовательностей ℓ_∞. Типичность пространства последовательностей ℓ_∞ мы понимаем в том смысле, что всякое сепарабельное банахово пространство изометрически изоморфно подпространству $\widetilde{E} \subset \ell_\infty$ (см. [5, с. 556]).

Пример 1.2. Для произвольной числовой последовательности $\varepsilon = (\varepsilon_k > 0)_{k=1}^{\infty}$ назовем (*невырожденным*) *эллипсоидом* в $\widetilde{E} \subset \ell_\infty$ множество

$$C_\varepsilon = \left\{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \widetilde{E} \;\middle|\; \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|x_k|}{|\varepsilon_k|} \leqslant 1\right\}.$$

Ясно, что множество C_ε абсолютно выпукло. Норма $\|\cdot\|_{C_\varepsilon}$, порожденная C_ε в $E_{C_\varepsilon} = span\ C_\varepsilon$, имеет вид

$$\|x\|_{C_\varepsilon} := \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|x_k|}{|\varepsilon_k|}. \tag{1.1}$$

Отметим, что если последовательность $\varepsilon \to 0$, то C_ε — компакт в $\widetilde{E}$ (при этом обратное утверждение неверно). Действительно, в таком случае $x_k \to 0$ при $k \to \infty$ равномерно по всем $x \in \widetilde{E}$. Поэтому C_ε равномерно мажорируется последовательностью $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots) \in c_0$, откуда вытекает компактность C_ε в пространстве c_0 (см. [5, с. 336, теорема 1]), а значит и в $\widetilde{E} \subset \ell_\infty$ (здесь мы учитываем замкнутость подпространства $c_0 \subset \ell_\infty$).

Покажем, что для любой возрастающей последовательности положительных чисел $\varepsilon \to +\infty$ множество C_ε антикомпактно.

Лемма 1.2. *Для всякой возрастающей последовательности положительных чисел $\varepsilon \to +\infty$ множество C_ε антикомпактно в $\widetilde{E}$.*

Доказательство. Во-первых, по построению нормы в E_{C_ε}

$$\|x\|_{C_\varepsilon} = \sup_{k \in \mathbb{N}} \frac{|x_k|}{|\varepsilon_k|} \leqslant \frac{1}{\varepsilon_1} \sup_{k \in \mathbb{N}} |x_k| = K\|x\|_{\widetilde{E}}$$

для некоторого $K > 0$. Поэтому E_{C_ε} содержит некоторый шар в $\widetilde{E}$ с центром в нуле.

Во-вторых, предкомпактность любого ограниченного множества $B \subset \widetilde{E}$ в пространстве E_{C_ε} вытекает из наличия последовательности $\left(\dfrac{1}{\varepsilon_1}, \dfrac{1}{\varepsilon_2}, \ldots, \dfrac{1}{\varepsilon_n}, \ldots\right) \in c_0$, равномерно мажорирующей все последовательности из B по норме $E_{C_\varepsilon} \cong \ell_\infty$ (здесь мы снова учитываем замкнутость подпространства $c_0 \subset \ell_\infty$). □

По сути, построением предыдущего примера мы доказали, что во всяком сепарабельном банаховом пространстве существует система антикомпактов. Это — основа всех основных результатов данной работы. Но перед их изложением уделим внимание некоторым общим свойствам антикомпактных множеств, а также свойствам шкалы пространств, которые порождаются антикомпактами.

2. Общие свойства антикомпактов

Данный пункт посвящен детальному исследованию свойств как самих антикомпактных множеств, так и шкалы банаховых пространств $E_{\overline{C}}$, $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$, порожденных антикомпактными множествами в E. Начнем с описания антикомпактов в конечномерных пространствах.

Теорема 2.1. *Если $E = \mathbb{R}^n$, то $\overline{\mathcal{C}}(E)$ состоит из всех ограниченных абсолютно выпуклых замкнутых множеств K.*

Доказательство. 1. Пусть $n = 1$. Тогда любое ограниченное абсолютно выпуклое замкнутое множество имеет вид $C = [-\alpha;\alpha]$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Имеем $E_C = E = \mathbb{R}$, и поэтому всякое ограниченное множество предкомпактно. Это значит, что любое множество вида $C = [-\alpha;\alpha]$ удовлетворяет условию. В то же время для неограниченных множеств C функция $p_C(\cdot)$ не удовлетворяет условию 1 определения 1.1.

2. Если $n > 1$, то рассмотрим координатные функционалы $\ell_1(\cdot), \ell_2(\cdot), \ldots, \ell_n(\cdot) \in E^* = (\mathbb{R}^n)^*$. Для всякого абсолютно выпуклого множества $C \in E$

$$\overline{\ell_i(C)} = [-\alpha;\alpha] \quad \forall i = \overline{1,n}.$$

В силу пункта 1 данного доказательства неограниченное множество не может быть антикомпактным. А ограниченное замкнутое абсолютно выпуклое множество, как нетрудно проверить, антикомпактно.

3. Условие $\bigcap\limits_{\lambda>0} \lambda K = \{0\}$ вытекает из ограниченности множества K. □

Теперь рассмотрим случай сепарабельного гильбертова пространства. Как показано в разделе 1, в таких пространствах существует система антикомпактных эллипсоидов. Пусть $\mathrm{E} = H \cong \ell_2$ — сепарабельное гильбертово пространство, $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n, \ldots)$ — последовательность положительных чисел. Напомним, что для каждой такой последовательности ε эллипсоидом называется множество

$$C_\varepsilon = \left\{ x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_2 \;\;\middle|\;\; \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|x_k|^2}{\varepsilon_k^2} \leqslant 1 \right\}. \tag{2.1}$$

Лемма 1.1 утверждает, что при $\varepsilon \to \infty$ C_ε — антикомпакт. Имеет место следующая теорема.

Теорема 2.2. *Множество C_ε антикомпактно тогда и только тогда, когда $\varepsilon \to +\infty$.*

Доказательство. Достаточность показана в лемме 1.1. Покажем необходимость: пусть ε не сходится к $+\infty$, т. е. существует подпоследовательность $\{\varepsilon_{k_\ell}\}_{\ell=1}^{\infty} \subset \varepsilon$ такая, что $\varepsilon_{k_\ell} \leqslant N$ для некоторого $N \in \mathbb{N}$. Рассмотрим множество

$$\widehat{B} = \{x = (x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots) \in \ell_2 \mid x_k = 0 \text{ при } k \neq k_\ell,\ x_k \in [0;1] \text{ при } k = k_\ell\}.$$

Легко видеть, что $\widehat{B}$ ограничено в H_{C_ε}, но не компактно. □

Теперь мы покажем, что любой антикомпакт в H можно погрузить в некоторый антикомпактный эллипсоид.

Теорема 2.3. *Если множество $C \in \Omega_{ac}(\ell_2)$ антикомпактно, то $\exists C_\varepsilon : C \subset C_\varepsilon$.*

Доказательство. 1. Рассуждениями, аналогичными доказательству теоремы 2.1, можно установить, что если положить $x = (x_1, x_2, \ldots x_n, \ldots) \in C \subset H$ для всякого антикомпактного множества $C \in \Omega_{ac}(\ell_2)$, то $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in C} |x_n| = +\infty$.

2. Пусть $\varepsilon_n = \sup\limits_{x\in C} |x_n|$. Так как $\bigcap\limits_{\lambda<0} \lambda C = \{0\}$, то $\varepsilon_n < +\infty$. Действительно, если $\sup\limits_{x\in C} |x_n| = \infty$, то $\forall k \in \mathbb{N}\ \exists x^{(k)} = (x_{1k}, \ldots, x_{nk}, \ldots) \in C$: $|x_{nk}| = k$. Поэтому $\|x^{(k)}\| \geqslant k$ и $\dfrac{1}{k}\|x^{(k)}\| \geqslant 1 \forall k \in \mathbb{N}$, что противоречит условию $\bigcap\limits_{\lambda<0} \lambda C = \{0\}$ (если положить $\lambda_k = \dfrac{1}{k} \to 0$ при $k \to \infty$).

3. Поскольку $\varepsilon_n < +\infty$, то можно рассмотреть эллипсоид (2.1). Из пункта 1 данного доказательства вытекает, что C_ε — антикомпакт. При этом $C \subset C_\varepsilon$. □

Отметим очевидные свойства антикомпактных множеств в произвольных пространствах Фреше. Через $L(E;F)$ будем обозначать множество линейных непрерывных операторов, действующих из пространства Фреше E в пространство Фреше F.

Предложение 2.1. *Если множество $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$ и $A \in L(E;F)$, где E и F — пространства Фреше, то $A(\overline{C}) \in \overline{\mathcal{C}}(F)$.*

Далее под обозначением $E \hookrightarrow\hookrightarrow F$ будем понимать, что банахово пространство E инъективно компактно вложено в банахово пространство F.

Предложение 2.2. *Если $E \hookrightarrow\hookrightarrow F$, $\varphi : E \to F$ — каноническое вложение, то для любого замкнутого абсолютно выпуклого множества $K \subset E$ такого, что некоторый шар $B(0) \subset K$ и $\bigcap\limits_{\lambda>0} \lambda K = \{0\}$, выполнено*:

$$\varphi(K) \in \overline{\mathcal{C}}(F).$$

Предложение 2.3. *Пусть E — пространство Фреше. Если последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset E$ сходится в E, то она сходится и в $E_{\overline{C}}$ для произвольного $\forall \overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$.*

Доказательство. Отметим лишь, что если $\|\cdot\|$ — произвольная непрерывная полунорма в E, то $\|\cdot\|_{\overline{C}} \leqslant K\|\cdot\|$ для некоторого числа $K > 0$ и всякого антикомпактного множества $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$. □

Переходим к свойствам шкалы пространств, порожденных антикомпактами. Начнем с очевидного свойства.

Предложение 2.4. *Пусть $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$, $\overline{C}' \in \Omega_{ac}(E)$, $\bigcap\limits_{\lambda>0} \lambda\overline{C}' = \{0\}$ и $\overline{C} \subset \overline{C}'$. Тогда $\overline{C}' \in \overline{C}(E)$.*

Теперь докажем значительно более тонкий результат — существование для всякого антикомпакта $\overline{C}'$ такого антикомпакта $\overline{C}''$, что пространство $E_{\overline{C}''} \hookrightarrow\hookrightarrow E_{\overline{C}'}$.

Теорема 2.4. *Если E — банахово пространство и $\overline{C}' \in \overline{C}(E)$, то*

$$\exists \overline{C}'' \in \overline{C}(E): \quad E_{\overline{C}''} \hookrightarrow\hookrightarrow E_{\overline{C}'}.$$

Доказательство. Докажем, что существует непрерывное отображение $\varphi : E_{\overline{C}'} \to E_{\overline{C}'}$ такое, что для любого $C \in \mathcal{C}(E_{\overline{C}'})$ вложение $E_C \hookrightarrow E_{C_\varphi}$ компактно, где $C_\varphi = \overline{co}\ \varphi(C)$. Пусть $\|\cdot\|$ — норма в $E_{\overline{C}'}$. Введем отображение ($\forall x \in E_{\overline{C}'}$):

$$\varphi(x) = \frac{x}{\sqrt{\|x\|}} \ \ (x \neq 0), \quad \varphi(0) = 0.$$

Легко видеть, что функция $\varphi(x)$ непрерывна. Обозначим $C_\varphi = \overline{co}\ \varphi(C) \in \mathcal{C}(E_{\overline{C}'})$ и докажем компактность вложения $E_C \hookrightarrow E_{C_\varphi}$.

а). Пусть $\widetilde{x} \in \partial^{co}C$ ($\partial^{co}C$ — выпуклая граница C). Тогда при некотором $\lambda \geqslant \dfrac{1}{\sqrt{\|\widetilde{x}\|}}$ верно $\lambda x \in \partial^{co}C_\varphi$. Отсюда

$$\|\widetilde{x}\|_{C_\varphi} \leqslant \sqrt{\|\widetilde{x}\|}. \tag{2.2}$$

Если же $x \in C$, $\widetilde{x} = \mu x$ (при некотором $\mu \geqslant 1$), то подставляя $\widetilde{x} = \mu x$ в (2.2), получаем

$$\mu\|x\|_{C_\varphi} = \|\widetilde{x}\|_{C_\varphi} \leqslant \sqrt{\|\mu x\|},$$

откуда

$$\|x\|_{C_\varphi} \leqslant \frac{1}{\mu}\sqrt{\|\mu x\|} = \sqrt{\mu}\sqrt{\|x\|} \leqslant \sqrt{\|x\|}, \tag{2.3}$$

т. е. справедливо

$$(x \in C) \Rightarrow \left(\|x\|_{C_\varphi} \leqslant \sqrt{\|x\|}\right). \tag{2.4}$$

б). Пусть $\{x_k\}_1^\infty \subset C$. Тогда существует подпоследовательность x_{k_n} сходящаяся к некоторому $x_0 \in C$, т. е. $x_{k_n} - x_0 \overset{E}{\to} 0$. При этом $x_{k_n} - x_0 \in C - C = 2C$, т. е. $\dfrac{x_{k_n} - x_0}{2} \in C$ $(n \in \mathbb{N})$. Применяя (2.4) к $x = \dfrac{x_{k_n} - x_0}{2}$, получаем:

$$\left\|\frac{x_{k_n} - x_0}{2}\right\|_{C_\varphi} \leqslant \sqrt{\left\|\frac{x_{k_n} - x_0}{2}\right\|}, \text{ откуда } \quad \|x_{k_n} - x_0\|_{C_\varphi} \leqslant 2\sqrt{\left\|\frac{x_{k_n} - x_0}{2}\right\|} \to 0$$

при $n \to \infty$. Таким образом, $x_{k_n} - x_0 \overset{E_{C_\varphi}}{\to} 0$, т. е. C предкомпактно в E_{C_φ} и, следовательно, вложение $E_C \hookrightarrow E_{C_\varphi}$ компактно. $\square$

Отметим следствие из предыдущего результата.

Следствие 2.1. *Для любых множеств $\overline{C}_1, \overline{C}_2 \in \overline{\mathcal{C}}(E)$ таких, что $E_{\overline{C}_1} \hookrightarrow\hookrightarrow E_{\overline{C}_2}$ существует $\overline{C}_3 \in \overline{\mathcal{C}}(E)$:*

$$E_{\overline{C}_1} \hookrightarrow\hookrightarrow E_{\overline{C}_3} \hookrightarrow\hookrightarrow E_{\overline{C}_2}.$$

Переходим к изложению основного результата данного раздела работы — доказательству существования антикомпактного множества во всяком сепарабельном пространстве Фреше.

Теорема 2.5. *В любом сепарабельном пространстве Фреше существует антикомпактное подмножество.*

Доказательство. 1. Хорошо известно, что всякое сепарабельное банахово пространство $E \cong \widetilde{E}$, где $\widetilde{E}$ — некоторое подпространство пространства последовательностей ℓ_∞ (см. [5, с. 556]). В качестве искомого антикомпакта можно взять любой антикомпактный эллипсоид в $\widetilde{E} \subset \ell_\infty$ (см. лемму 1.2). Итак, теорема доказана в классе сепарабельных банаховых пространств.

2. Пусть теперь E — пространство Фреше. Напомним, что любое пространство Фреше E со счетной определяющей системой полунорм $\{\|\cdot\|_j\}_{j=1}^\infty$ является проективным пределом последовательности банаховых пространств $\widehat{E}_j$, где $\widehat{E}_j$ являются пополнениями по фактор-нормам фактор-пространств $E_j = E/ker\|\cdot\|_j$ $(j \in \mathbb{N})$.

В силу пункта 1 настоящего доказательства $\forall j \in \mathbb{N}$ существует антикомпакт $\widehat{C}_j$, т. е. $E_j \hookrightarrow\hookrightarrow E_{\widehat{C}_j}$. Не уменьшая общности рассуждений, систему антикомпактов $\left\{\widehat{C}_j\right\}_{j=1}^\infty$ можно выбрать неубывающей (если нужно, рассмотрев вместо этого систему множеств $\{\bigcup\limits_{j=1}^{\infty} \widehat{C}_j\}_{N=1}^\infty$, которые антикомпактны в силу предложения 2.4). При таком соглашении

$$\|\cdot\|_{\widehat{C}_j} \geqslant \|\cdot\|_{\widehat{C}_k} \quad \forall k \geqslant j. \tag{2.5}$$

Пусть $\widehat{E} = \prod\limits_{\widehat{C}_j} E_{\widehat{C}_j}$ — прямое произведение пространств $E_{\widehat{C}_j}$. Рассмотрим множество

$$\widehat{C} := \left\{ x \in \widehat{E} \;\;|\;\; \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|x\|_{\widehat{C}_j}}{j^2} < \infty. \right\}$$

Поскольку E — проективный предел пространств $\widehat{E}_j$ и поэтому E может быть плотно и непрерывно вложено в $\prod\limits_{j \in \mathbb{N}} \widehat{E}_j$, то всякое ограниченное множество $C \subset E$ может быть инъективно (ввиду отделимости пространства E) и непрерывно вложено в произведение $\prod\limits_{j \in \mathbb{N}} j^2 \widehat{C}_j$, которое компактно в $\widehat{E}$ по теореме Тихонова в топологии прямого произведения. Далее, в силу (2.5) и сходимости ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\dfrac{1}{j^2}$ можно проверить компактность C в пространстве $E_{\widehat{C}}$, порожденном и пополненном относительно нормы

$$\|x\|_{\widehat{C}}=\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\|x\|_{\widehat{C}_j}}{j^2}.$$

Поэтому C — непустой абсолютно выпуклый компакт в $\widehat{E}$, т. е. $\widehat{C}$ — антикомпакт в E.

□

3. Аналоги теоремы Ляпунова в сепарабельных пространствах Фреше

Теперь мы переходим к обобщению теоремы Ляпунова на случай сепарабельных пространствах Фреше. Начнем с примера, показывающего возможность невыпуклости как самого множества значений некоторой векторной меры, так и его замыкания в $H=\ell_2$.

Пример 3.1. Пусть $H=L_2[0;1]$ — пространство интегрируемых по Лебегу функций с интегрируемым квадратом модуля, Σ — σ-алгебра борелевских подмножеств отрезка $[0;1]$, и в качестве меры рассмотрим классическую меру Лебега на отрезке. Рассмотрим векторную меру со значением в H:

$$\overrightarrow{\mu}(A)=\chi_A(\cdot)\text{ — \textit{характеристическая функция множества} } A.$$

Оказывается, что множество $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}$ невыпукло. Действительно, функции $\overrightarrow{\mu}_1\equiv 0$ и $\overrightarrow{\mu}_2\equiv 1$ принадлежат множеству $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}$. Однако $\overrightarrow{\mu}_3\equiv\dfrac{1}{2}\notin\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}$.

Отметим, что теорема Ула в этой ситуации неприменима, поскольку векторная мера $\overrightarrow{\mu}$ не имеет полной ограниченной вариации.

Рассмотрим вспомогательный результат для мер, представимых в виде интеграла Бохнера, который будет базовым для основных результатов раздела. Мы отправляемся от специальной формы теоремы Ляпунова для подмножеств образов векторных мер в конечномерных пространствах, полученной в [20].

Теорема 3.1. *Если $E=\mathbb{R}^n$, то для всякого вектора $\overrightarrow{p}\in\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ множество*

$$\overrightarrow{\mu}(\Sigma,\overrightarrow{p})=\{\overrightarrow{\mu}(Y)\mid\exists X:\ Y\subseteq X,\ \overrightarrow{\mu}(X)=\overrightarrow{p}\}$$

выпукло и компактно в E.

Покажем справедливость следующего обобщения теоремы 3.1.

Теорема 3.2. *Пусть E — банахово пространство, векторная мера представима в виде неопределенного интеграла Бохнера*

$$\overrightarrow{\mu}(A)=(B)\int\limits_A f(t)dm(t)\quad\forall A\in\Sigma,$$

где m — некоторая безатомная числовая мера. Тогда множество

$$\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma,\overrightarrow{p})}=\{\overrightarrow{\mu}(Y)\mid\exists X:Y\subseteq X,\ \overrightarrow{\mu}(X)=\overrightarrow{p}\}$$

выпукло и компактно в E.

Доказательство. 1. Покажем выпуклость множества

$$R_{\overrightarrow{p}}(f)=\left\{(B)\int\limits_Y f(t)dm(t)\mid\exists X:Y\subseteq X,\ (B)\int\limits_X f(t)dm(t)=\overrightarrow{p}\right\}.$$

Для всякого $\varepsilon>0$ ввиду интегрируемости f по Бохнеру на A можно выбрать простые отображения вида

$$f_\varepsilon(t)=\sum_{k=1}^{n}f(t_k)\chi_{X_k}(t),\quad\text{где } t_k\in X_k,\ f(t_k)=c_k\in E,\ A=\bigcup_{k=1}^{n}X_k,$$

где $\chi_E(t)$ — характеристическая функция множества E, так, чтобы

$$\int\limits_A \|f(t) - f_\varepsilon(t)\| dm(t) < \varepsilon.$$

Пусть $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$. Докажем, что множество

$$R_{\overrightarrow{p}}(f_{\varepsilon_n}) = \left\{ (B)\int\limits_Y f_{\varepsilon_n}(t)dm(t) \mid \exists X : Y \subseteq X,\ (B)\int\limits_X f(t)dm(t) = \overrightarrow{p} \right\}$$

выпукло при произвольном n. Не уменьшая общности, можно положить, что $A_1 \subseteq X,\ A_2 \subseteq X'$ $A_1 \cap A_2 = \varnothing$, где

$$(B)\int\limits_X f(t)dm(t) = (B)\int\limits_{X'} f(t)dm(t) = \overrightarrow{p}.$$

Тогда

$$\overrightarrow{\mu}(A_1) = (B)\int\limits_{A_1} f_\varepsilon(t)dm(t) = \sum_{k=1}^n f(t_k)m\left(X_k \cap A_1\right),$$

$$\overrightarrow{\mu}(A_2) = (B)\int\limits_{A_1} f_\varepsilon(t)dm(t) = \sum_{k=1}^n f(t_k)m\left(X_k \cap A_2\right),$$

откуда

$$\frac{\overrightarrow{\mu}(A_1) + \overrightarrow{\mu}(A_2)}{2} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^n f(t_k)\left(m\left(X_k \cap A_1\right) + m\left(X_k \cap A_2\right)\right) =$$

$$= \sum_{k=1}^n f(t_k)\left(m\left(X_k \cap \widetilde{A}_1\right) + m\left(X_k \cap \widetilde{A}_2\right)\right) = \overrightarrow{\mu}(\widetilde{A}_1 \cup \widetilde{A}_2)$$

для множеств $\widetilde{A}_i$ таких, что $m(\widetilde{A}_i) = \dfrac{1}{2}m(A_i)$ $(i = 1, 2)$. Такие множества можно выбрать в силу безатомности числовой меры m по классической теореме Ляпунова [7]. Таким образом, $R_{\overrightarrow{p}}(f_{\varepsilon_n})$ выпукло при произвольном $n \in \mathbb{N}$.

По построению функций f_{ε_n} и ввиду произвольности выбора $\varepsilon > 0$ можно заключить, что

$$R_{\overrightarrow{p}}(f) = \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} R_{\overrightarrow{p}}(f_{\varepsilon_n})}.$$

В [16] показано, что можно выбрать последовательность функций f_{ε_n} так, чтобы при увеличении n происходило измельчение разбиения множества X. В таком случае $\left\{R_{\overrightarrow{p}}(f_{\varepsilon_n})\right\}_{n=1}^{\infty}$ — неубывающая цепочка выпуклых множеств.

Покажем, что эти множества не убывают. Действительно, для конечнозначных функций f_{ε_n} несложно проверить, что

$$R_{\overrightarrow{p}}(f_{\varepsilon_n}) = \bigcup_X co\{f_{\varepsilon_n}\}m(X),$$

где $co\{f\}$ — выпуклая оболочка множества значений f. А поскольку разбиение при $n \to +\infty$ измельчается и «старые» значения функции сохраняются, то $co\{f_{\varepsilon_{n_1}}\} \subset co\{f_{\varepsilon_{n_2}}\}$ при $n_1 < n_2$.

Итак, множество $R_{\overrightarrow{p}}(f)$ выпукло как замыкание объединения (по включению) возрастающей последовательности выпуклых множеств $R_{\overrightarrow{p}}(f_{\varepsilon_n})$.

2. Компактность $R_{\overrightarrow{p}}(f)$ вытекает из относительной компактности множества [21]

$$R(f) = \left\{ (B)\int\limits_A f(t)dm(t) \mid A \in \Sigma \right\}.$$

□

Переходим к аналогам теоремы Ляпунова. Сформулируем вспомогательный результат в гильбертовом случае, который вытекает из того, что любой конечный числовой заряд имеет ограниченную вариацию [5]. Также специфика гильбертова случая связана с тем, что всякое сепарабельное гильбертово пространство имеет свойство Радона—Никодима.

Предложение 3.1. *Все ограниченные векторные меры $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to H$ имеют слабо ограниченную вариацию.*

Перед изложением основных результатов раздела приведем некоторые вспомогательные понятия и результат из работы [15]. Пусть Σ — некоторая σ-алгебра подмножеств S (эти обозначения будем использовать в определениях 3.1 и 3.2, а также в теоремах 3.3–3.5). Напомним [3, с. 104], что *полной вариацией векторного заряда* $\nu : \Sigma \to E$ относительно нормы $\|\cdot\|$ в E называется отображение $|\nu| : \Sigma \to [0; +\infty]$, которое определяется равенством

$$|\nu|(A) = \sup \sum_{k=1}^{n} \|\nu(A_k)\| \quad \forall A \in \Sigma, \tag{3.1}$$

где супремум берется по всем конечным наборам $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \Sigma$ таким, что $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \subseteqq A$. Легко проверить, что отображение $|\nu|$ — конечная счетно-аддитивная положительная мера на Σ (см. [3, с. 104]). Обозначим через $V(S, E)$ множество всех векторных мер $\nu : \Sigma \to E$, которые имеют конечную полную вариацию $|\nu|(S) < \infty$ относительно нормы $\|\cdot\|$ на E (см. (3.1)). Будем обозначать через $E_C = (span\ C, \|\cdot\|_C)$ банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_C$, равными функционалам Минковского абсолютно выпуклых компактов $C \in \mathcal{C}(E)$.

Определение 3.1. Будем говорить, что ν имеет (*сильную*) *компактную вариацию* на S, если существует компакт $C \in \mathcal{C}(E)$ такой, что $\nu : \Sigma \to E_C$ и $\nu \in V(S, E_C)$. Примем обозначения: $\nu \in V_K(S, E)$, $|\nu|_C$ — полная вариация векторного заряда ν относительно нормы $\|\cdot\|_C$.

Для того, чтобы сформулировать необходимый результат из [15], нам потребуется новая характеристика для мер $\nu \in V_K(S, E)$, а именно — (*сильная*) *компактная абсолютная непрерывность* относительно конечной числовой меры μ на Σ. Обозначим через $AC(S, E)$ множество всех зарядов $\nu \in V(S, E)$, обладающих свойством обычной *абсолютной непрерывности векторной меры относительно* μ, т. е. таких, что мера $|\nu| \ll \mu$ ($\mu(A) = 0 \Rightarrow |\nu|(A) = 0$ или $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists \delta > 0 : (\mu(A) < \delta) \Rightarrow |\nu|(A) < \varepsilon$).

Определение 3.2. Будем говорить, что векторная мера $\nu \in V_K(S, E)$ (*сильно*) *компактно абсолютно непрерывна на S относительно* μ, если существует такой компакт $C \in \mathcal{C}(E)$, что $\nu : \Sigma \to E_C$ и $\nu \in AC(S, E_C)$. Примем обозначение: $\nu \in AC_K(S, E)$.

Приведем важный вспомогательный результат из [15].

Теорема 3.3. *Если $\nu \in AC_K(S, E)$, то найдется такое интегрируемое по Бохнеру отображение $f : S \to E$, что $\forall A \in \Sigma$ верно*

$$\nu(A) = (B) \int\limits_{A} f(t) d\mu(t). \tag{3.2}$$

Переходим к доказательству аналога теоремы Ляпунова в гильбертовом случае: для всякой конечной безатомной меры $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to H$ множество $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)_{E_{\widetilde{C}}}}$ выпукло и компактно в некотором пространстве $E_{\overline{C}}$, $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$. Начнем со специфической формы, аналогичной [20].

Теорема 3.4. *Для всякой ограниченной безатомной векторной меры $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to H$ со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H существует антикомпактное множество $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(H)$ такое, что $\forall \overrightarrow{p} \in \overrightarrow{\mu}(\Sigma) \subset H$ замыкание множества*

$$\overrightarrow{\mu}(\Sigma, \overrightarrow{p}) = \{\overrightarrow{\mu}(Y) \mid \exists X : Y \subseteq X, \overrightarrow{\mu}(X) = \overrightarrow{p}\}$$

в пространстве $H_{\overline{C}}$ выпукло и компактно, причем пространство $H_{\overline{C}}$ гильбертово.

Доказательство. Итак, в силу предложения 3.1 векторная мера $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to H$ имеет слабую ограниченную вариацию, т. е. $\forall \ell \in \ell_2^* \cong \ell_2$ числовая мера $\ell(\overrightarrow{\mu})$ имеет ограниченную вариацию, т. е.

$$V(\mu_k) = V(\ell_k(\overrightarrow{\mu})) = c_k < \infty \quad \forall k \in \mathbb{N}, \tag{3.3}$$

где $\forall h \in H$ выполнено $h = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \langle h, e_k \rangle e_k$, $\{e_k\}_{k=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в H, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ — скалярное произведение в пространстве H, $\ell_k(h) = \langle h, e_k \rangle$.

Выберем последовательность $n_k \to \infty$ так, чтобы последовательность $\left\{\dfrac{c_k}{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ была ограниченной и рассмотрим пространство

$$H_{\widetilde{C}} = \left\{ h \in H : \ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{h_k^2}{n_k^2} < \infty \right\}, \text{ где } h = (h_1, h_2, \ldots, h_k, \ldots).$$

Из (3.3) следует, что $\overrightarrow{\mu} \in V(\Sigma, H_{\widetilde{C}})$. Введем на Σ следующую числовую меру:

$$\mu_{\widetilde{C}}(A) := \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\mu_k|(A)}{n_k}, \tag{3.4}$$

где $|\mu_k|(\cdot) = V_k(\cdot)$ — полная вариация числовой меры μ_k. Отметим, что мера $|\mu_k|(\cdot)$ безатомна в силу безатомности $\overrightarrow{\mu}$. Поскольку $n_k < \infty$, то из (3.4) следует, что μ_k абсолютно непрерывно относительно $\mu_{\widetilde{C}}$ $\forall k$ и векторная мера $\overrightarrow{\mu}$ абсолютно непрерывна относительно числовой меры $\mu_{\widetilde{C}}$. При этом $\overrightarrow{\mu}$ имеет ограниченную вариацию в пространстве $H_{\widetilde{C}}$ и $H \hookrightarrow\!\hookrightarrow H_{\widetilde{C}}$ в силу того, что $\lim\limits_{k\to\infty} n_k = \infty$. Следовательно, мера $\overrightarrow{\mu}$ компактно абсолютно непрерывна и по теореме 3.3

$$\overrightarrow{\mu}(A) = (B) \int\limits_A \overrightarrow{\nu}(\tau) d\mu_{\widetilde{C}}(\tau),$$

где интеграл берется в сепарабельном гильбертовом пространстве $H_{\widetilde{C}}$, $\overrightarrow{\nu} : \Sigma \to H \subset H_{\widetilde{C}}$. Теперь, применив теорему 3.2, получаем, что множество $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}_{H_{\widetilde{C}}}$ выпукло и компактно в $H_{\widetilde{C}}$. □

Отметим аналог обычной теоремы Ляпунова в сепарабельном гильбертовом пространстве, вытекающий из предыдущего результата (если положить $\overrightarrow{p} = \overrightarrow{\mu}(A)$).

Следствие 3.1. *Для всякой ограниченной безатомной векторной меры $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to H$ со значениями в сепарабельном гильбертовом пространстве H существует антикомпактное множество $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(H)$ такое, что $\forall \overrightarrow{p} \in H$ замыкание множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ в пространстве $H_{\overline{C}}$ выпукло и компактно, причем пространство $H_{\overline{C}}$ гильбертово.*

Переходим к финальному результату данного раздела работы. Он утверждает выпуклость и компактность замыкания в некотором пространстве $E_{\overline{C}}$ ($\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$) специального подмножества множества значений векторной меры в сепарабельных пространствах Фреше.

Теорема 3.5. *Пусть E — сепарабельное пространство Фреше, $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to E$ — безатомная векторная мера ограниченной вариации. Тогда $\forall \overrightarrow{p} \in \overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ замыкание множества*

$$\overrightarrow{\mu}(\Sigma, \overrightarrow{p}) = \{\overrightarrow{\mu}(Y) \mid \exists X : Y \subseteq X, \overrightarrow{\mu}(X) = \overrightarrow{p}\}$$

выпукло и компактно в некотором пространстве $E_{\overline{C}}$, $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$.

Доказательство. Из теоремы 2.5 вытекает, что в любом сепарабельном пространстве Фреше существует антикомпакт $\overline{C}$. Тогда из условия $\overrightarrow{\mu} \in BV(\Sigma)$ следует, что $\overrightarrow{\mu}$ имеет компактную вариацию в $E_{\overline{C}}$. Более того, если обозначить через $|\overrightarrow{\mu}(\cdot)|_{\overline{C}}$ полную вариацию векторной меры $\overrightarrow{\mu}$ в пространстве $E_{\overline{C}}$, то несложно понять, что векторная мера $\overrightarrow{\mu}$ абсолютно непрерывна относительно числовой меры $|\overrightarrow{\mu}(\cdot)|_{\overline{C}}$. Следовательно, $\overrightarrow{\mu} \in AC_K(\Sigma, E_{\overline{C}})$ и поэтому $\overrightarrow{\mu}$ представима в виде в виде неопределенного интеграла Бохнера по теореме 3.3. Доказываемое утверждение теперь вытекает из теоремы 3.2. □

И в завершение отметим аналог теоремы Ула в произвольных сепарабельных пространствах Фреше (мы не используем ограничение на класс пространств, но замыкание множества берем не в исходном пространстве, а в некотором пространстве, порожденном антикомпактом).

Следствие 3.2. *В условиях теоремы* 3.5 *замыкание множества*

$$\overrightarrow{\mu}(\Sigma) = \{\overrightarrow{\mu}(A) \mid A \in \Sigma\}$$

выпукло и компактно в некотором пространстве $E_{\overline{C}}$, $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$.

4. Условия дифференцируемости неопределенного интеграла Петтиса в терминах дополнительных характеристик подынтегрального отображения

Вернемся ко второй известной математической проблеме, затронутой в настоящей работе. Напомним, что в отличие от интеграла Бохнера, неопределенный интеграла Петтиса может быть нигде не дифференцируемым. Рассмотрим неопределенные интегралы Петтиса, т. е. отображения $F : I = [a; b] \to X$ (X — пространство Фреше) вида

$$F(x) = (P)\int_a^x f(t)dt, \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{4.1}$$

где f предполагается сильно измеримым, а также интегрируемым по Петтису на любом измеримом по Лебегу подмножестве $e \subset I$. Как показано в [22, замечание к теореме 1], для произвольного бесконечномерного банахова пространства X существует сильно измеримое и интегрируемое по Петтису отображение $f : I \to X$ такое, что

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{1}{h}(P)\int_x^{x+h} f(t)dt\right\| = \infty \quad \forall t \in I,$$

откуда вытекает отсутствие дифференцируемости отображения F из (4.1) всюду на I. Это означает, что естественной и актуальной является задача поиска условий, при которых F из (4.1) будет дифференцируемым почти всюду на I.

С этой целью в данном разделе работы мы вводим две новые характеристики интегрируемых по Петтису отображений — *слабую интегральную ограниченность* (B^w_{int}) и *σ-компактную измеримость* (C^σ_{mes}). На базе предложенных понятий в пункте 4.3 нами получено достаточное условие дифференцируемости отображений из (4.1) в терминах слабой интегральной ограниченности (теорема 4.1), а также необходимое условие — в терминах σ-компактной измеримости (теорема 4.3). В разделе 4 будем обозначать через X — произвольное пространство Фреше, mes — классическую меру Лебега на вещественной прямой, Σ — набор измеримых по Лебегу подмножеств $\mathbb{R}$; X^* — пространство линейных непрерывных функционалов над X, а через $L(X;Y)$ — пространство линейных ограниченных операторов, действующих из банахова пространства X в банахово пространство Y.

4.1. Слабая интегральная ограниченность интегрируемых по Петтису отображений. В данном пункте мы вводим одно новое свойство интегрируемых по Петтису отображений — слабую интегральную ограниченность.

Определение 4.1. Будем называть отображение $f : I = [a; b] \to X$ из (4.1) *слабо интегрально ограниченным в точке* $x \in I$ ($f \in B^w_{int}(x)$), если для любой системы интервалов $I_n = (\alpha_n; \beta_n)$, стягивающихся к x при $n \to \infty$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{F(I_n \cap E_n)}{\mathrm{mes}(I_n)} = 0, \tag{4.2}$$

где $\{E_n\}_{n=1}^\infty$ — произвольная система измеримых множеств, для которой

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mathrm{mes}(I_n \cap E_n)}{\mathrm{mes}(I_n)} = 0. \tag{4.3}$$

Если $A \subset I$ и $f \in B^w_{int}(x)$ для почти всех $x \in A$, то будем называть отображение f *почти всюду слабо интегрально ограниченным на* A. Примем обозначение: $f \in B^w_{int}(A)$.

Непосредственно проверяются простейшие свойства класса $B^w_{int}(I)$.

Предложение 4.1.

1. *Класс* $B^w_{int}(A)$ *является линейным*;
2. $f \in B^w_{int}(A) \Leftrightarrow f \in B^w_{int}(C)$ $\forall$ *измеримого по Лебегу множества* $C \subset A$;
3. *Пусть* $f : I \to X$ *таково, что* $f \in B^w_{int}(I)$, $A \in L(X;Y)$. *Тогда отображение* $Af : I \to Y$ *принадлежит классу* $B^w_{int}(I)$.

Доказательство. Данное утверждение легко вытекает из соответствующих свойств интеграла Петтиса (см., например, [16, с. 91-92]). Отметим лишь, что утверждение 2 справедливо в силу предположения об интегрируемости по Петтису f из (4.1) на произвольном измеримом по Лебегу подмножестве $A \subset I$. □

Проверим два достаточных условия интегральной ограниченности. Будем говорить, что f *локально ограничено* в точке $x \in I$, если

$$\sup_{A:\ \mathrm{mes}(A)=0} \|f((\alpha;\beta)\backslash A)\| = \operatorname{esssup} \|f((\alpha;\beta))\| = C < \infty \text{ для нек. } \quad (\alpha;\beta) \supset x. \tag{4.4}$$

Предложение 4.2.

1. *Если* f *локально ограничено в точке* $x \in I$, *то* $f \in B^w_{int}(x)$.
2. *Если* f *локально ограничено* $\forall\ x \in A \subset I$, *то* $f \in B^w_{int}(A)$.

Доказательство. Пусть $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$ — произвольная система измеримых множеств, удовлетворяющих (4.3). В силу (4.4) для некоторого числа $0 < C < \infty$ имеем

$$\left\| \frac{F(I_n \bigcap E_n)}{\mathrm{mes}(I_n)} \right\| = \left\| \frac{(P) \int\limits_{I_n \bigcap E_n} f(t)dt}{\mathrm{mes}(I_n)} \right\| \leqslant C \frac{\mathrm{mes}(I_n \bigcap E_n)}{\mathrm{mes}(I_n)} \to 0 \quad \text{ при } n \to \infty,$$

откуда и вытекают доказываемые утверждения. □

Предложение 4.3. *Пусть* X — *банахово пространство. Тогда всякое интегрируемое по Бохнеру отображение* $f : I = [a;b] \to X$ *удовлетворяет условию* $f \in B^w_{int}(I)$.

Доказательство. Рассмотрим отображение $F : I = [a;b] \to X$,

$$F(x) = (B) \int\limits_a^x f(t)dt, \quad a \leqslant x \leqslant b.$$

Пусть x — точка Лебега отображения F. Тогда в силу [16, следствие 2 из теоремы 3.8.5] для произвольной системы интервалов $I_n = (\alpha_n;\beta_n)$, стягивающихся к x при $n \to \infty$, верно

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{mes}(I_n)} \int\limits_{I_n} \|f(t) - f(x)\| dt = 0,$$

откуда вытекает, что для произвольной системы измеримых множеств $\{E_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющих (4.3), верно (4.2). Действительно,

$$\varlimsup_{n\to\infty} \left\| \frac{F(I_n \cap E_n)}{\mathrm{mes}(I_n)} \right\| = \varlimsup_{n\to\infty} \left\| \frac{F(I_n \cap E_n)}{\mathrm{mes}(I_n)} - f(x) \frac{\mathrm{mes}(I_n \cap E_n)}{\mathrm{mes}(I_n)} \right\| \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \left\| \frac{1}{\mathrm{mes}(I_n)} \int\limits_{I_n \cap E_n} (f(t) - f(x))\, dt \right\| \leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{mes}(I_n)} \int\limits_{I_n \cap E_n} \|f(t) - f(x)\| dt \leqslant$$

$$\leqslant \varlimsup_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{mes}(I_n)} \int\limits_{I_n} \|f(t) - f(x)\| dt = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\mathrm{mes}(I_n)} \int\limits_{I_n} \|f(t) - f(x)\| dt = 0.$$

Остается лишь заметить то, что почти все точки I являются точками Лебега интегрируемого по Бохнеру отображения f (см. [16, теорема 3.8.5]). □

Замечание 4.1. Из доказательства предыдущего утверждения следует, что если x — точка Лебега интегрируемого по Бохнеру отображения f, то $f \in B^w_{int}(x)$. Обратное утверждение, вообще говоря, неверно. В качестве примера можно привести функцию $F : [-1;1] \to \mathbb{R}$,

$$F(x) = \int\limits_{-1}^{x} \operatorname{sign}(t)dt, \quad -1 \leqslant x \leqslant 1, \tag{4.5}$$

где интеграл понимается в смысле Лебега (для вещественных функций интеграл Бохнера совпадает с интегралом Лебега), а $\operatorname{sign}(x) = 1$ при $x > 0$, $\operatorname{sign}(x) = -1$ при $x < 0$, $\operatorname{sign}(x) = 0$ при $x = 0$.

Легко проверить, что $x = 0$ не является точкой Лебега отображения (4.5). Тем не менее, согласно предложению 4.2 выполнено $f \in B^w_{int}(0)$ ввиду ограниченности f.

Замечание 4.2. Отметим, что отображения $f \in B^w_{int}(I)$ могут быть не интегрируемыми по Бохнеру. Это подтверждает пример 4.1 ниже.

Замечание 4.3. Неопределенный интеграл Петтиса отображения $f \in B^w_{int}(I)$ может быть нигде не дифференцируемым на I, если f не является сильно измеримым. В качестве примера рассмотрим отображение $f : I = [0;1] \to L_\infty[0;1]$, $f(t) = \chi_{[t;1]}(\cdot)$. В [23, пример после теоремы 3.4, теорема 4.4] показано, что f интегрируемо по Петтису, причем

$$\left((P)\int\limits_A f(t)dt\right)(x) = \operatorname{mes}\left(A\bigcap[0;x]\right) \quad \forall x \in I, \quad \forall A \in \Sigma.$$

Следовательно, $f \in B^w_{int}(I)$ (множества I_n и E_n удовлетворяют (4.3), $x \in [0;1]$):

$$\varlimsup_{n\to\infty}\left\|\frac{(P)\int\limits_{I_n\bigcap E_n} f(t)dt}{\operatorname{mes}(I_n)}\right\| = \varlimsup_{n\to\infty} \operatorname{esssup}\left|\frac{\operatorname{mes}(I_n\bigcap E_n\bigcap[0;x])}{\operatorname{mes}(I_n)}\right| \leqslant \lim_{n\to\infty}\frac{\operatorname{mes}(I_n\bigcap E_n)}{\operatorname{mes}(I_n)} = 0.$$

При этом, в [23, пример после теоремы 3.4] доказано, что неопределенный интеграл Петтиса отображения f нигде не имеет обычной производной.

4.2. σ-Компактная измеримость интегрируемых по Петтису отображений. Введем еще одно новое свойство интегрируемых по Петтису отображений — σ-компактную измеримость.

Определение 4.2. Будем говорить, что отображение $f : I = [a;b] \to X$ из (4.1) *σ-компактно измеримо* ($f \in C^\sigma_{\text{mes}}(I)$), если существует такое разбиение I на измеримые по Лебегу подмножества $\{e_N\}_{N=0}^\infty$, что

$$f(e_N) \subset U_N, \ U_N \text{ — компакт в } E \quad \forall N \in \mathbb{N}, \tag{4.6}$$

где $I = \bigcup\limits_{N=0}^\infty e_N$, $\operatorname{mes}(e_0) = 0$, $e_{N_1} \subseteq e_{N_2}$ $\forall N_1, N_2 \in \mathbb{N}$.

Непосредственно проверяются простейшие свойства класса $C^\sigma_{\text{mes}}(I)$.

Предложение 4.4.
1. *Класс $C^\sigma_{\text{mes}}(I)$ является линейным*;
2. $f \in C^\sigma_{\text{mes}}(I) \Leftrightarrow f \in C^\sigma_{\text{mes}}(I')$ $\forall I' \subset I$;
3. *Пусть $f : I \to X$, $f \in C^\sigma_{\text{mes}}(I)$, $A \in L(X;Y)$. Тогда отображение $Af : I \to Y$ принадлежит классу $C^\sigma_{\text{mes}}(I)$.*

Предложение 4.5. *Всякое интегрируемое по Бохнеру отображение $f : I = [a;b] \to X$ удовлетворяет условию $f \in C^\sigma_{\text{mes}}(I)$.*

Доказательство. Вследствие [13, теорема 2], для всякого интегрируемого по Бохнеру отображения $f : I \to E$ существует такой абсолютно выпуклый компакт $C \subset E$, что $\int\limits_I \|f(t)\|_C dt < \infty$, где $\|\cdot\|_C$ — функционал Минковского, порожденный множеством C. Если положить

$$e_N := \{t \in [a;b] \mid \|f(t)\|_C \leqslant N\}, \quad U_N = NC \quad \forall N \in \mathbb{N},$$

то f будет удовлетворять условию (4.6). $\square$

Возникает естественный вопрос: не является ли всякое интегрируемое по Петтису отображение $f : I \to X$, удовлетворяющее условию $f \in C^{\sigma}_{\mathrm{mes}}(I)$, интегрируемым по Бохнеру? На этот вопрос можно дать отрицательный ответ даже в случае гильбертова пространства X. В качестве примера мы рассмотрим следующее отображение [31, пример 2.1].

Пример 4.1. Пусть $X = \ell_2$ — вещественное сепарабельное бесконечномерное гильбертово пространство, $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ — ортонормированный базис в E. Рассмотрим отображение $F : [0; 1] \to X$:

$$\begin{cases} F(0) = 0; \quad F\Big(\dfrac{n}{n+1}\Big) = \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{x_k}{k} \quad (n \in \mathbb{N}); \quad F(1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{x_k}{k}; \\ F \text{ линейно на сегментах } \left[\dfrac{n-1}{n};\ \dfrac{n}{n+1}\right] \quad (n \in \mathbb{N}). \end{cases}$$

1. Ясно, что F дифференцируемо п. в. на I. Покажем, что оно слабо абсолютно непрерывно. Для этого рассмотрим произвольный функционал $\ell \in \ell_2^* \cong \ell_2$, а также функцию $\widetilde{f} = \ell[F]$, $\widetilde{f} : [0; 1] \to \mathbb{R}$. Поскольку $\ell \in \ell_2$, то $\exists\ \alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots) \in \ell_2$:

$$\ell(\beta) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \beta_k \quad \forall\ \beta = (\beta_1, \beta_2, \ldots) \in \ell_2.$$

Нужно показать, что $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0$.

$$\left(\forall N \in \mathbb{N},\ \mathrm{mes}\left(\bigcup_{k=1}^{N} [a_k; b_k]\right) < \delta\right) \Rightarrow \sum_{k=1}^{N} |\widetilde{f}(b_k) - \widetilde{f}(a_k)| < \varepsilon. \tag{4.7}$$

Заметим, что $\widetilde{f}(1) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{\alpha_k}{k}$. Этот ряд сходится, так как

$$\sum_{k=1}^{n} \left|\frac{\alpha_k}{k}\right| \leqslant \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2} \sqrt{\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2}} \leqslant C < \infty \quad \forall n \in \mathbb{N}$$

по неравенству Коши—Буняковского.

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем такое $N_0 \in \mathbb{N}$, что $\sum\limits_{k=N_0+1}^{\infty} \dfrac{\alpha_k}{k} < \dfrac{\varepsilon}{2}$. Тогда для любого $\bigcup\limits_{k=1}^{m} [a_k; b_k] \subseteq \left[\dfrac{N_0}{N_0+1};\ 1\right]$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{m} |\widetilde{f}(b_k) - \widetilde{f}(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.8}$$

Отрезок же $\left[0; \dfrac{N_0}{N_0+1}\right]$ разбивается на N_0 отрезков, на каждом из которых функция $\widetilde{f}$ линейна. Следовательно, $\widetilde{f}$ абсолютно непрерывна на $\left[0; \dfrac{N_0}{N_0+1}\right]$, т. е. $\exists\ \delta > 0$: $\forall \bigcup\limits_{k=1}^{m} [a_k; b_k] \subseteq \left[0; \dfrac{N_0}{N_0+1}\right]$,

$$\mathrm{mes}\left(\bigcup_{k=1}^{m} [a_k; b_k]\right) < \delta \quad \Rightarrow \quad \sum_{k=1}^{m} |\widetilde{f}(b_k) - \widetilde{f}(a_k)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.9}$$

Из неравенств (4.8) и (4.9) вытекает неравенство (4.7).

2. Итак, отображение F слабо абсолютно непрерывно и почти всюду дифференцируемо. Следовательно, F — неопределенный интеграл Петтиса. Действительно,

$$\ell(F(x) - F(0)) = \ell(F(x)) - \ell(F(0)) = \left(\int_0^x (\ell(F(t)))' dt\right) = \int_0^x \ell(F'(t)) dt \quad \forall x \in [0; 1]$$

$\forall \ell \in X^*$, откуда и вытекает, что $F(x) = F(0) + (P) \int\limits_0^x F'(t) dt\ \forall x \in [0; 1]$.

Если положить $e_N := \left[0; \dfrac{N}{N+1}\right]$, то $f = F'$ будет удовлетворять условию (4.6) с компактами $U_N := \bigcup\limits_{n=1}^{N} \left\{\dfrac{x_n}{n}\right\}$, т. е. $f = F' \in C^{\sigma}_{\mathrm{mes}}(I)$. Однако, как показано в [31, пример 2.1], F не имеет сильной ограниченной вариации и поэтому не является неопределенным интегралом Бохнера.

3. Отметим также, что по предложению 4.2 имеем $f = F' \in B^w_{int}(I)$, так как F' непрерывно (и поэтому локально ограничено) п. в. на I в силу кусочной линейности F.

4.3. Дифференцируемость неопределенного интеграла Петтиса в терминах слабой интегральной ограниченности и σ-компактной измеримости. В данном пункте работы мы получим условия дифференцируемости почти всюду сильного интеграла Петтиса отображений в пространства Фреше (4.1):

$$F(x) = (P)\int\limits_a^x f(t)dt, \quad a \leqslant x \leqslant b,$$

в терминах введенных в первых двух пунктах характеристик. Если интегральная ограниченность f приводит к достаточному условию дифференцируемости неопределенного интеграла Петтиса по верхнему пределу (теорема 4.1), то σ-компактная измеримость приводит к необходимому условию (теорема 4.3).

В доказательстве теоремы 4.1 существенно используется изучавшееся нами ранее понятие компактного субдифференциала (см. [9–13, 15, 31]), которое мы вначале напомним. Обозначим через $U(0)$ произвольную замкнутую абсолютно выпуклую окрестность нуля в вещественном отделимом локально выпуклом пространстве (ЛВП) X.

Определение 4.3. Пусть $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ — убывающая по включениям при $\delta \to +0$ система замкнутых выпуклых подмножеств отделимого вещественного ЛВП $X, B \subset X$. Множество $B = \bigcap\limits_{\delta\to+0} B_\delta$ называется *K-пределом* системы $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ при $\delta \to +0$:

$$B = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} B_\delta,$$

если: $\forall U = U(0) \subset X \ \exists \delta_U > 0 : \ (0 < \delta < \delta_U) \Rightarrow (B_\delta \subset B + U(0))$.

Из предыдущего определения вытекает замкнутость и выпуклость множества B. Далее будем обозначать через $I \subset \mathbb{R}$ — некоторый отрезок, $\overline{co}A$ — выпуклую замкнутую оболочку множества A и рассматривать отображения $F : I \to E$.

Определение 4.4. Пусть $x_0 \in I, \ \delta > 0$. *Частным K-субдифференциалом* отображения F в точке x_0, отвечающим данному $\delta > 0$, называется множество

$$\partial_K F(x_0, \delta) = \overline{co}\left\{\frac{F(x_0+h) - F(x_0)}{h} \quad \middle| \quad 0 < |h| < \delta\right\}.$$

Определение 4.5. Отображение $F : I \to X$ называется *компактно субдифференцируемым*, или *K-субдифференцируемым*, в точке $x_0 \in I$, если существует K-предел частных K-субдифференциалов $\partial_K F(x_0) = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim} \partial_K F(x_0, \delta)$. Полученное множество $\partial_K F(x_0)$ называется *компактным субдифференциалом*, или *K-субдифференциалом*, отображения F в точке x_0.

Если отображение F дифференцируемо в точке x_0 в обычном смысле, то оно является компактно субдифференцируемым, причем $\partial_K F(x_0) = F'(x_0)$. В то же время, как показано в [9–13, 15, 31], существуют компактно субдифференцируемые отображения, не имеющие обычной производной.

Следующая теорема является первым основным результатом работы.

Теорема 4.1. *Если в* (4.1) $f \in B^w_{int}(I)$, *то F дифференцируемо почти всюду на I, причем справедливо равенство*

$$F'(x) = f(x) \text{ п. в. на } I. \tag{4.10}$$

Для доказательства нам потребуется следующий вспомогательный результат, полученный ранее в [26, Theorem 1 (ii)].

Теорема 4.2. *Пусть отображение f из* (4.1) *сильно измеримо. Тогда для произвольного числа $\varepsilon > 0$ существует измеримое множество $E_\varepsilon \subset \mathbb{R}$ такое, что* $\mathrm{mes}(I\backslash E_\varepsilon) < \varepsilon$ *и множество*

$$X_F^\varepsilon := \left\{ \frac{F(E)}{\mathrm{mes}(E)} \;\middle|\; E \subset E_\varepsilon,\ \mathrm{mes}(E) > 0,\ E \in \Sigma \right\} \tag{4.11}$$

относительно компактно в X.

Переходим к доказательству теоремы 4.1.

Доказательство. 1. Покажем K-субдифференцируемость отображения F. Положим $\varepsilon_n = \dfrac{1}{n}$ $\forall n \in \mathbb{N}$ и для каждого n выберем соответствующее множество из (4.11) (мы считаем, что $E_{\varepsilon_n} \subset [a;\ b]$). Легко видеть, что множество $E_0 = \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} (I\backslash E_{\varepsilon_n})$ имеет нулевую меру Лебега. Поэтому почти все точки $x \in [a;b]$ принадлежат множеству E_{ε_n} при каком-либо $n \in \mathbb{N}$. Более того, согласно теореме о точках внешней плотности (см. [2, теорема 2, с. 68]), почти все точки каждого из множеств E_{ε_n} будут точками внешней плотности E_{ε_n}. Следовательно, для некоторого множества $e \subset [a;b]$ нулевой меры всякая точка $x \in [a;b]\backslash e$ является точкой внешней плотности какого-либо множества E_{ε_n}, т. е. для любой системы интервалов $\{I_m = (\alpha_m;\ \beta_m)\}_{m=1}^{\infty}$, стягивающейся к точке x, существуют $n \in \mathbb{N}$ и E_{ε_n} из (4.11) такие, что:

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\mathrm{mes}(I_m\backslash E_{\varepsilon_n})}{\mathrm{mes}(I_m)} = 0 \qquad (\alpha_m \leqslant x \leqslant \beta_m, \quad \alpha_m \neq \beta_m)\,. \tag{4.12}$$

Далее,

$$\frac{(P)\int\limits_{I_m} f(t)dt}{\mathrm{mes}(I_m)} = \frac{F(I_m)}{\mathrm{mes}(I_m)} = \frac{F(I_m \cap E_{\varepsilon_n})}{\mathrm{mes}(I_m \cap E_{\varepsilon_n})} \frac{\mathrm{mes}(I_m \cap E_{\varepsilon_n})}{\mathrm{mes}(I_m)} + \frac{F(I_m\backslash E_{\varepsilon_n})}{\mathrm{mes}(I_m)}. \tag{4.13}$$

Отношение $\dfrac{F(I_m\backslash E_{\varepsilon_n})}{\mathrm{mes}(I_m)} \to 0$ при $m \to \infty$ в силу (4.12) и $f \in B^w_{int}(I)$. Из (4.12) также вытекает, что

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\mathrm{mes}(I_m \bigcap E_{\varepsilon_n})}{\mathrm{mes}(I_m)} = 1. \tag{4.14}$$

В силу (4.12)–(4.14), а также относительной компактности множеств $X_F^{1/n} \subset X$ (см. теорему 4.2) вытекает существование частичного предела любой последовательности

$$\frac{F(I_m)}{\mathrm{mes}(I_m)} \quad \text{при } m \to \infty,$$

а также относительная компактность множества всех таких частичных пределов. Следовательно, F K-субдифференцируемо в точке x согласно [12, теорема 3].

2. Далее, сильная измеримость f влечет сепарабельнозначность отображений f и F. А для сепарабельнозначных отображений в пространства Фреше из компактной субдифференцируемости почти всюду вытекает дифференцируемость F почти всюду (см. [14, теорема 4]).

Равенство (4.10) в банаховом случае мы покажем, опираясь на сепарабельнозначность F, а также известный результат [5, п. 17.2.4, следствие 2] о существовании у каждого сепарабельного банахова пространства счетного множества линейных непрерывных функционалов, разделяющих точки: если X — сепарабельное банахово пространство, то существует множество функционалов $\{\ell_n\}_{n=1}^{\infty} \subset X^*$ такое, что $\forall x, y \in X$ $x = y \;\Leftrightarrow\; \ell_n(x) = \ell_n(y)$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

Для всякого $n \in \mathbb{N}$ $\exists e_n : \mathrm{mes}(e_n) = 0$ и $\ell_n(F'(x)) = (\ell_n(F(x)))' = \ell_n(f(x))$ $\forall x \in I\backslash e_n$, т. к.

$$\ell_n(F(x)) = \ell_n\left((P)\int\limits_a^x f(t)dt \right) = \int\limits_a^x \ell_n(f(t))dt \quad \forall x \in [a;b].$$

Ясно, что множество $e = \bigcup\limits_{n=1}^{n} e_n$ имеет нулевую меру. При этом $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\ell_n(F'(x)) = \ell_n(f(x)) \quad \forall x \in I\backslash e,$$

откуда и вытекает равенство (4.10) для банаховых пространств X.

3. Пусть теперь X — пространство Фреше. Обозначим через $\{\|\cdot\|_j\}_{j\in\mathbb{N}}$ — некоторую счетную определяющую систему полунорм в X. Обозначим через $\widehat{X}_j$ пополнения фактор-пространств $X_j = X/ker\|\cdot\|_j$ относительно фактор-норм $\|\cdot\|\widehat{_j} = \|\cdot\|_j$. Для банаховых пространств $\widehat{X}_j\ \forall\ j \in \mathbb{N}$ мы имеем

$$\lim_{h\to 0}\left\|\frac{1}{h}(P)\int\limits_x^{x+h} f(t)dt - f(x)\right\|_j = 0 \quad \forall x \in [a;b]\backslash e_j, \tag{4.15}$$

где $\mathrm{mes}(e_j) = 0$. Тогда (4.15) справедливо для всех $x \in [a;b]\backslash \bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} e_j$. Это означает, что почти всюду на $[a;b]$ равенство (4.15) справедливо при всех $j \in \mathbb{N}$. Следовательно, $F'(x) = f(x)$ почти всюду на I. □

Опираясь на некоторые рассуждения предыдущего доказательства, покажем второй основной данного раздела результат работы.

Теорема 4.3. *Если в* (4.1) *отображение* F *дифференцируемо почти всюду на* I, *то* $f \in C^{\sigma}_{\mathrm{mes}}(I)$.

Доказательство. Рассуждая, как и в пунктах 2-3 предыдущего доказательства, легко проверить, что

$$F'(x) = f(x) \quad \text{для п. в.} \quad x \in I. \tag{4.16}$$

Пусть $\ell \in X^*$ — произвольный линейный непрерывный функционал на X. Тогда из (4.16) следует, что почти все точки $x \in I$ являются точками Лебега функции $\widetilde{f} = \ell(f)$, т. е. для произвольной системы интервалов $\{I_m = (\alpha_m;\ \beta_m)\}_{m=1}^{\infty}$, стягивающейся к точке x

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{\mathrm{mes}(I_m)}\int\limits_{I_m}|\widetilde{f}(t) - \widetilde{f}(x)|dt = 0 \quad \text{почти всюду на } I,$$

откуда $\widetilde{f} \in B^w_{int}(I)$ (в пространстве $\mathbb{R}$) в силу предложения 4.3:

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\widetilde{f}(I_m\cap e_m)}{\mathrm{mes}(I_m)} = 0, \tag{4.17}$$

где $\{e_m\}_{m=1}^{\infty}$ — произвольная система измеримых множеств, для которой

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\mathrm{mes}(I_m\cap e_m)}{\mathrm{mes}(I_m)} = 0.$$

Из (4.17) вытекает, что

$$\lim_{m\to\infty}\ell\left(\frac{F(I_m\cap e_m)}{\mathrm{mes}(I_m)}\right) = 0. \tag{4.18}$$

Рассуждая так же, как и в пункте 1 доказательства предыдущей теоремы, можно получить равенства (4.13) $\forall x \in I\backslash e$, $\mathrm{mes}(e) = 0$. При этом

$$\ell\left(\frac{F(I_m)}{\mathrm{mes}(I_m)}\right) = \ell\left(\frac{F(I_m\cap E_{\varepsilon_n})}{\mathrm{mes}(I_m\cap E_{\varepsilon_n})}\right)\frac{\mathrm{mes}(I_m\cap E_{\varepsilon_n})}{\mathrm{mes}(I_m)} + \ell\left(\frac{F(I_m\backslash E_{\varepsilon_n})}{\mathrm{mes}(I_m)}\right),$$

откуда, переходя к пределу при $m \to \infty$, в силу (4.14), (4.16) и (4.18) мы имеем

$$\ell\left(F'(x)\right) \in \ell\left(\overline{abs.co}\ X_F^{1/n}\right),$$

так как $\dfrac{F(I_m\cap E_{\varepsilon_n})}{\mathrm{mes}(I_m\cap E_{\varepsilon_n})} \in X_F^{1/n} \subset X\ \forall n \in \mathbb{N}$ (под $\overline{abs.co}A$ мы понимаем замкнутую абсолютно выпуклую оболочку множества $A \subset X$).

Итак, $\ell\left(F'(x)\right) \leqslant \sup\ell\left(\overline{abs.co}\ X_F^{1/n}\right)\ \forall \ell \in X^*$. По известному следствию из теоремы Хана—Банаха о строгой функциональной отделимости точки и замкнутого выпуклого множества $\forall x \in E_{1/n}\backslash e$:

$$F'(x) \in \overline{abs.co}\ X_F^{1/n}, \quad \text{или} \quad F'(E_{1/n}\backslash e) \subset \overline{abs.co}\ X_F^{1/n},$$

причем все множества $\overline{abs.co}\ X_F^{1/n}$ компактны как абсолютно выпуклые замыкания компактов (множества $\overline{X}_F^{1/n}$ компактны по теореме 4.2). Для завершения доказательства остается лишь заметить измеримость всех множеств $E_{1/n}\backslash e$. □

5. Аналог теоремы Лебега о дифференцируемости неопределенного интеграла Петтиса с использованием антикомпактов

Итак, в предыдущем разделе мы показали, что класс интегрируемых по Петтису отображений, для которых неопределенный интеграл Петтиса (4.1) почти всюду дифференцируем, достаточно специфичен. Более того, достаточно хорошо известно, что даже в случае дифференцируемости интеграла его производная может в любой точке не совпасть с подынтегральным отображением (см. работу [23]). Возникает естественная задача нахождения аналога теоремы Лебега о дифференцируемости интеграла Петтиса в более универсальном случае. В данном разделе работы мы получим такой результат с использованием понятия антикомпактного множества в пространствах Фреше. Докажем интегрируемость по Бохнеру всякого сильно измеримого и интегрируемого по Петтису отображения.

Теорема 5.1. *Пусть E — пространство Фреше. Если $f : I = [a;b] \to E$ сильно измеримо и интегрируемо по Петтису, то $\exists\ \overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}$ такой, что f интегрируемо в $E_{\overline{C}}$ по Бохнеру.*

Доказательство. Напомним, что сильно измеримо $\Leftrightarrow$ когда f слабо измеримо и почти всюду сепарабельнозначно. Ввиду этого будем полагать, что E — сепарабельное пространство Фреше.

1. Начнем со случая банахова пространства E. Как известно [5], всякое такое пространство E инъективно непрерывно можно вложить в сепарабельное гильбертово пространство $H \cong l_2$. Обозначим через $\varphi : E \to H$ соответствующее непрерывное инъективное вложение. Тогда $\varphi(E) \subset H$ и $H^* \subset (\varphi(E))^* \cong E^*$ (A^* — сопряженное пространство к банахову пространству A). Поэтому сильная измеримость и слабая интегрируемость $f : I \to E$ означает сильную измеримость и слабую интегрируемость $\varphi(f) : I \to H$. Это означает, что для доказательства достаточно рассмотреть случай $E = H$.

2. Итак, $E = H \cong l_2$. Известно, что

$$h \in H \Leftrightarrow h = (h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots) : \sum_{k=1}^{\infty} |h_k|^2 < \infty.$$

Обозначим через $l_k(h) = h_k\ \forall k \in \mathbb{N}(l_k \in H^*)$. Ввиду интегрируемости $f : I \to H$ по Петтису отображение $f_k = l_k(f) : I \to \mathbb{R}$ интегрируемо по Лебегу, т. е.

$$\int_a^b |f_k(t)|dt = C_k < \infty.$$

Необходимо для всякого $f : I \to H$ доказать существование антикомпакта $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(H)$ такого, что $||f(t)||_{H_{\overline{C}}} : I \to \mathbb{R}$ измеримо и

$$\int_a^b ||f(t)||_{H_{\overline{C}}} dt < +\infty.$$

Пусть $H_{\widetilde{C}} = \left\{ h = (h_1, h_2, \ldots, h_n, \ldots) \,\middle|\, \sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{h_k^2}{k^4 C_k^2} < +\infty \right\}$.

$H_{\widetilde{C}}$ — сепарабельное гильбертово пространство с нормой $||h||_{H_{\widetilde{C}}} = \left(\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{h_k^2}{k^4 C_k^2} \right)^{\frac{1}{2}}$. Отметим, что поточечно $\forall t \in [a;b]$

$$||f(t)||_{H_{\widetilde{C}}} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{|f_1(t)|^2}{C_1^2} + \frac{|f_2(t)|^2}{2^4 C_2^2} + \ldots + \frac{|f_n(t)|^2}{n^4 C_n^2} \right)^{\frac{1}{2}},$$

т. е. $f : I \to H_{\widetilde{C}}$ измеримо в пространстве $H_{\widetilde{C}}$ в силу слабой измеримости и сепарабельности. Далее, $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\int_a^b \left(\frac{|f_1(t)|^2}{C_1^2} + \frac{|f_2(t)|^2}{2^4 C_2^2} + \ldots + \frac{|f_n(t)|^2}{n^4 C_n^2} \right)^{\frac{1}{2}} dt <$$

$$< \int_a^b \left(\frac{|f_1(t)|}{C_1} + \frac{|f_2(t)|}{2^2 C_2} + \ldots + \frac{|f_n(t)|}{n^2 C_n} \right) dt =$$

$$= \frac{1}{C_1} \int_a^b |f_1(t)| dt + \frac{1}{2^2 C_2} \int_a^b |f_2(t)| dt + .. + \frac{1}{n^2 C_n} \int_a^b |f_n(t)| dt =$$

$$= 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots . + \frac{1}{n^2} <$$

$$< 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots . + \frac{1}{n^2} + \ldots = K < +\infty.$$

По теореме Фату

$$\int_a^b ||f(t)||_{H_{\widetilde{C}}} dt \leqslant \varliminf_{n \to \infty} \int_a^b \left(\frac{|f_1(t)|^2}{C_1^2} + \ldots + \frac{|f_n(t)|^2}{n^4 C_n^2} \right)^{\frac{1}{2}} dt \leqslant K < +\infty.$$

Итак, f слабо измеримо в $H_{\widetilde{C}}$ ввиду $(H_{\widetilde{C}})^* \subset H^*$,

$$\int_a^b ||f(t)||_{H_{\widetilde{C}}} dt < +\infty,$$

и поэтому $f : I \to H_{\widetilde{C}}$ интегрируемо по Бохнеру, что и требовалось.

3. Перейдем теперь к случаю, когда E — пространство Фреше. Поскольку теорема доказана для банаховых пространств, то $\forall j \in \mathbb{N}$ существует такой абсолютно выпуклый компакт $\widehat{C}_j \subset \widehat{E}_j$, что

$$\int_I \|f(t)\|_{\widehat{C}_j} dt < \infty.$$

Заметим, что $\| \cdot \|_{\lambda C} = \dfrac{1}{\lambda} \| \cdot \|_C \quad \forall \lambda > 0$ и подберем числа n_j $(j \in \mathbb{N})$ так, чтобы

$$\int_I \|f(t)\|_{n_j \widehat{C}_j} dt < \frac{1}{j^2} \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим множество

$$C = \left\{ x \in E \;\middle|\; \sup_{j \in \mathbb{N}} \|x\|_{n_j \widehat{C}_j} \leqslant 1 \right\}.$$

Поскольку E является проективным пределом пространств $\widehat{E}_j$ и поэтому изоморфно некоторому подпространству произведения $\prod\limits_{j \in \mathbb{N}} \widehat{E}_j$, то C изоморфно замкнутому подмножеству произведения $\prod\limits_{j \in \mathbb{N}} n_j \widehat{C}_j$, которое компактно по теореме Тихонова. Следовательно, C является непустым абсолютно выпуклым компактом в E.

Функция $\|f(t)\|_C = \sup\limits_{j \in \mathbb{N}} \|f(t)\|_{n_j \widehat{C}_j}$ измерима как супремум последовательности измеримых функций $\|f(t)\|_{n_j \widehat{C}_j}$. Далее, воспользовавшись теоремой Б. Леви о предельном переходе, имеем

$$\int_I \|f(t)\|_C dt = \int_I \sup_{j \in \mathbb{N}} \|f(t)\|_{n_j \widehat{C}_j} dt \leqslant \int_I \sum_{j=1}^{\infty} \|f(t)\|_{n_j \widehat{C}_j} dt = \sum_{j=1}^{\infty} \int_I \|f(t)\|_{n_j \widehat{C}_j} dt < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty.$$

□

Из свойств интеграла Бохнера, а также предыдущего результата вытекает аналог теоремы Лебега о дифференцируемости неопределенного интеграла Петтиса по верхнему пределу.

Теорема 5.2. *Пусть E — пространство Фреше. Если $f : I = [a;b] \to E$ сильно измеримо и интегрируемо по Петтису, то существует антикомпакт $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$ такой, что*

$$\lim_{h\to 0} \frac{1}{h} \int\limits_{x_0}^{x_0+h} ||f(t) - f(x_0)||_{E_{\overline{C}}} dt = 0$$

для почти всех $x_0 \in I = [a;b]$.

Следствие 5.1. *Если $K \in E$ — фиксированная постоянная, то для всякого $f : [a;b] \to E$ существует такой антикомпакт $\overline{C} \in \overline{\mathcal{C}}(E)$, что отображение*

$$F(x) = K + (P)\int\limits_a^x f(t)dt \qquad (a \leqslant x \leqslant b)$$

почти всюду дифференцируемо в пространстве $E_{\overline{C}}$. При этом

$$F'_{E_{\overline{C}}}(x_0) = f(x_0) \text{ для почти всех } x_0 \in [a;b].$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аркин В. И., Левин В. Л.* Выпуклость значений векторных интегралов, теоремы измеримого выбора и вариационные задачи// Усп. мат. наук. — 1972. — *27*, № 3. — С. 21–77.
2. Брудно А. Л. Теория функций действительного переменного. Избранные главы. — М.: Наука, 1971.
3. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. — М.: Наука, 1985.
4. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи// Усп. мат. наук. — 1968. — *23*, № 6. — С. 51–116.
5. *Кадец В. М.* Курс функционального анализа. — Х.: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006.
6. *Кутателадзе С. С.* Теорема Ляпунова, зоноиды и бэнг-бэнг// В сб. «Алексей Андреевич Ляпунов. 100 лет со дня рождения». — Новосибирск: Акад. изд-во «Гео», 2011. — С. 262–264.
7. *Ляпунов А. А.* О вполне аддитивных вектор-функциях// Изв. АН СССР. Сер. Мат. — 1940. — *4*. — С. 465–478.
8. *Ляпунов А. Н.* Теорема А. А. Ляпунова о выпуклости значений мер// В сб. «Алексей Андреевич Ляпунов. 100 лет со дня рождения». — Новосибирск: Акад. изд-во «Гео», 2011. — С. 257–261.
9. *Орлов И. В.* Гильбертовы компакты, компактные эллипсоиды и компактные экстремумы// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2008. — *29*. — С. 165–175.
10. *Орлов И. В., Стонякин Ф. С.* Предельная форма свойства Радона—Никодима верна в произвольном пространстве Фреше// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *37*. — С. 55–69.
11. *Стонякин Ф. С.* Компактный субдифференциал вещественных функций// Динам. сист. — 2007. — *23*. — С. 99–112.
12. *Стонякин Ф. С.* Секвенциальный подход к понятию компактного субдифференциала для отображений в метризуемые ЛВП// Уч. зап. Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. «Мат. Мех. Информ. и киберн.» — 2008. — *21* (*60*), № 1. — С. 41–53.
13. *Стонякин Ф. С.* K-свойство Радона—Никодима для пространств Фреше// Уч. зап. Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. «Мат. Мех. Информ. и киберн.» — 2009. — *22* (*61*), № 1. — С. 102–113.
14. Стонякин Ф. С. Аналог теоремы Данжуа—Юнг—Сакса о контингенции для отображений в пространства Фреше и одно его приложение в теории векторного интегрирования// Тр. ИПММ НАН Украины. — 2010. — *20*. — С. 168–176.
15. *Стонякин Ф. С.* Сильные компактные характеристики и предельная форма свойства Радона—Никодима для векторных зарядов со значениями в пространствах Фреше// Уч. зап. Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. «Физ.-мат. науки». — 2010. — *23* (*62*), № 1. — С. 131–149.
16. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М: ИЛ, 1962.
17. *Эдвардс Э.* Функциональный анализ. Теория и приложения. — М.: Мир, 1969.
18. *Cascales B., Kadets V., Rodriguez J.* Measurable selectors and set-valued Pettis integral in non-separable Banach spaces// J. Funct. Anal. — 2009. — *256*, № 3. — С. 673–699.

19. *Chen Y., Lai J., Parkes D. C., Procaccia A. D.* Truth, justice, and cake cutting// Games Econom. Behav. — 2013. — *77*, № 1. — С. 284–297.
20. *Dai P., Feinberg E. A.* Extension of Lyapunov's convexity theorem to subranges// arXiv:1102.2534v1 [math.PR]. — 2011.
21. *Diestel J., Uhl J. J.* Vector measures. — Providence: Am. Math. Soc., 1977.
22. *Dilworth S. J., Girardi M.* Nowhere weak differentiability of the Pettis integral// Quaest. Math. — 1995. — *18*, № 4. — С. 365–380.
23. *Kadets V. M., Shumyatskiy B., Shvidkoy R., Tseytlin L., Zheltukhin K.* Some remarks on vector-valued integration// Math. Phys. Anal. Geom. — 2002. — *9*. — С. 48-–65.
24. *Maccheroni F., Marinacci M.* How to cut a pizza fairly: fair division with decreasing marginal evaluations// Soc. Choice Welf. — 2003. — *20*, № 3. — С. 457–465.
25. *Marrafa V.* The variational McShane integral in locconvex spaces// Rocky Mountain J. Math. — 2009. — *39*, № 6. — С. 1993–2013.
26. *Moedomo S., Uhl J. J.* Radon—Nikodym theorems for the Bochner and Pettis integrals// Pacific J. Math. — 1971. — *38*, № 2. — С. 531–536.
27. *Mossel E., Tamuz O.* Truthful fair division// arXiv:1003.5480v2 [cs.GT]. — 2010.
28. *Naralenkov K. M.* On Denjoy type extensions of the Pettis integral// Czechoslovak Math. J. — 2010. — *60*, № 3. — С. 737–750.
29. *Naralenkov K. M.* On continuity and compactness of some vector-valued integrals// Rocky Mountain J. Math. — 2013. — *43*, № 3. — С. 1015–1022.
30. *Neyman J.* Un théorèm d'existence// C. R. Math. Acad. Sci. Paris — 1946. — *222*. — С. 843—845.
31. *Orlov I. V., Stonyakin F. S.* Strong compact properties of the mappings and K-property of Radon—Nikodym// Methods Funct. Anal. Topology. — 2010. — *16*, № 2. — С. 183–196.
32. *Yoon J. H., Park J. M., Kim Y. K., Kim B. M.* The AP-Henstok extension of the Dunford and Pettis integral// J. Chungcheong Math. Soc. — 2010. — *23*, № 4. — С. 879–884.

Ф. С. Стонякин
E-mail: `fedyor@mail.ru`