

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ



СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ  
НАПРАВЛЕНИЯ

Том 68, № 4, 2022

Дифференциальные и функционально-дифференциальные уравнения

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-4

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Научный журнал  
Издается с 2003 г.

Издание зарегистрировано Федеральной службой по надзору в сфере связи,  
информационных технологий и массовых коммуникаций (Роскомнадзор)  
Свидетельство о регистрации ПИ № ФС77-67931 от 13 декабря 2016 г.  
Учредитель: Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования «Российский университет дружбы народов»

---

**Главный редактор**

*Р. В. Гамкрелидзе,*

д.ф.-м.н., профессор,  
академик РАН,

Математический институт им.  
В. А. Стеклова РАН, Москва,  
Россия

**E-mail:** gam@mi.ras.ru

**Зам. главного редактора**

*А. Л. Скубачевский,*

д.ф.-м.н., профессор,  
Российский университет  
дружбы народов, Москва,  
Россия

**E-mail:** skubachevskii-al@rudn.ru

**Ответственный секретарь**

*Е. М. Варфоломеев,*

к.ф.-м.н.,  
Российский университет  
дружбы народов, Москва,  
Россия

**E-mail:** varfolomeev-em@rudn.ru

**Члены редакционной коллегии**

*А. А. Аграчев,* д.ф.-м.н., профессор, Международная школа передовых исследований (SISSA), Триест, Италия; Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

*П. С. Красильников,* д.ф.-м.н., профессор, Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), Москва, Россия

*А. Б. Муравник,* д.ф.-м.н., Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

*А. В. Овчинников,* к.ф.-м.н., доцент, Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия; Всероссийский институт научной и технической информации РАН, Москва, Россия

*В. Л. Попов,* д.ф.-м.н., профессор, член-корр. РАН, Математический институт им. В. А. Стеклова РАН, Москва, Россия

*А. В. Сарычев,* д.ф.-м.н., профессор, Флорентийский университет, Флоренция, Италия

## Современная математика. Фундаментальные направления

ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)

4 выпуска в год

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Входит в перечень рецензируемых научных изданий ВАК РФ.

Включен в каталог подписных изданий агентства «Роспечать», индекс 36832.

Индексируется в РИНЦ и международных базах данных *MathSciNet* и *Zentralblatt Math*.

Полный текст журнала размещен в базах данных компании *EBSCO Publishing* на платформе *EBSCOhost*.

Языки: русский, английский. Все выпуски журнала переводятся на английский язык издательством Springer и публикуются в серии *Journal of Mathematical Sciences (New York)*.

### Цели и тематика

Журнал *Современная математика. Фундаментальные направления* — периодическое международное рецензируемое научное издание в области математики. Журнал посвящен следующим актуальным темам современной математики:

- обыкновенные дифференциальные уравнения,
- дифференциальные уравнения в частных производных,
- математическая физика,
- вещественный и функциональный анализ,
- комплексный анализ,
- математическая логика и основания математики,
- алгебра,
- теория чисел,
- геометрия,
- топология,
- алгебраическая геометрия,
- группы Ли и теория представлений,
- теория вероятностей и математическая статистика,
- дискретная математика.

Журнал ориентирован на публикацию обзорных статей и статей, содержащих оригинальные научные результаты.

Правила оформления статей, архив публикаций в открытом доступе и дополнительную информацию можно найти на сайте журнала: <http://journals.rudn.ru/cmfd>, <http://www.mathnet.ru/cmfd>.

---

**Редактор: Е. М. Варфоломеев**

**Компьютерная верстка: Е. М. Варфоломеев**

**Адрес редакции:**

115419, г. Москва, ул. Орджоникидзе, д. 3  
тел. +7 495 955-07-10; e-mail: [cmfdj@rudn.ru](mailto:cmfdj@rudn.ru)

Подписано в печать 25.10.2022. Формат 60×84/8.

Бумага офсетная. Печать офсетная. Гарнитура Quant Antiqua.

Усл. печ. л. 21,86. Тираж 110 экз. Заказ 1347.

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего образования

«Российский университет дружбы народов» (РУДН)

117198, Москва, Россия, ул. Миклухо-Маклая, д. 6

**Отпечатано в типографии ИПК РУДН**

115419, Москва, Россия, ул. Орджоникидзе, д. 3

тел. +7 495 952-04-41; e-mail: [publishing@rudn.ru](mailto:publishing@rudn.ru)

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University)



CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS

Volume 68, No. 4, 2022

Differential and Functional Differential Equations

DOI: 10.22363/2413-3639-2022-68-4

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Founded in 2003

Founder: PEOPLES' FRIENDSHIP UNIVERSITY OF RUSSIA

---

**EDITOR-IN-CHIEF**

*Revaz Gamkrelidze*,  
Steklov Mathematical Institute  
of Russian Academy of Sciences,  
Moscow, Russia  
**E-mail:** gam@mi.ras.ru

**DEPUTY EDITOR**

*Alexander Skubachevskii*,  
RUDN University  
Moscow, Russia  
**E-mail:** skubachevskii-al@rudn.ru

**EXECUTIVE SECRETARY**

*Evgeniy Varfolomeev*,  
RUDN University  
Moscow, Russia  
**E-mail:** varfolomeev-em@rudn.ru

**EDITORIAL BOARD**

*Andrei Agrachev*, International School for Advanced Studies (SISSA), Trieste, Italy; Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*Pavel Krasil'nikov*, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

*Andrey Muravnik*, RUDN University, Moscow, Russia

*Alexey Ovchinnikov*, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia; Russian Institute for Scientific and Technical Information of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*Vladimir Popov*, Steklov Mathematical Institute of Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia

*Andrei Sarychev*, University of Florence, Florence, Italy

**CONTEMPORARY MATHEMATICS. FUNDAMENTAL DIRECTIONS**  
Published by the Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University),  
Moscow, Russian Federation

**ISSN 2413-3639 (print), 2949-0618 (online)**

4 issues per year

<http://journals.rudn.ru/cmfd>

Indexed by *Russian Index of Science Citation*, *MathSciNet*, *Zentralblatt Math*.

The full texts can be found in the *EBSCOhost* databases by *EBSCO Publishing*.

Languages: Russian, English. English translations of all issues are published in *Journal of Mathematical Sciences (New York)*.

**Aims and Scope**

*Contemporary Mathematics. Fundamental Directions* is a peer-reviewed international academic journal publishing papers in mathematics. The journal is devoted to the following actual topics of contemporary mathematics:

- Ordinary differential equations
- Partial differential equations
- Mathematical physics
- Real analysis and functional analysis
- Complex analysis
- Mathematical logic and foundations of mathematics
- Algebra
- Number theory
- Geometry
- Topology
- Algebraic geometry
- Lie groups and the theory of representations
- Probability theory and mathematical statistics
- Discrete mathematics

The journal is focused on publication of surveys as well as articles containing novel results.

Guidelines for authors, free accessible archive of issues, and other information can be found at the journal's website: <http://journals.rudn.ru/cmfd>, <http://www.mathnet.ru/eng/cmfd>.

---

**Editor: E. M. Varfolomeev**

**Computer design: E. M. Varfolomeev**

**Address of the Editorial Office:**

3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia

Tel. +7 495 955-07-10; e-mail: [cmfdj@rudn.ru](mailto:cmfdj@rudn.ru)

Print run 110 copies.

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia

6 Miklukho-Maklaya str., 117198 Moscow, Russia

**Printed at RUDN Publishing House:**

3 Ordzhonikidze str., 115419 Moscow, Russia

Tel. +7 495 952-04-41; e-mail: [publishing@rudn.ru](mailto:publishing@rudn.ru)

## СОДЕРЖАНИЕ

<i>Апушкинская Д. Е., Лазарева Г. Г., Ожишев В. А.</i> Влияние численной диффузии на скорость роста вязких пальцев при численной реализации модели Писмана методом конечных объемов . . . . .	553
<i>Верон Л.</i> Сингулярные краевые задачи для квазилинейных уравнений со смешанной реакцией-диффузией . . . . .	564
<i>Волков С. В.</i> Построение плоских векторных полей с непростой особой точкой заданной топологической структуры . . . . .	575
<i>Гринес В. З., Лерман Л. М.</i> Неавтономная динамика: классификация, инварианты, реализация . . . . .	596
<i>Задорожний В. Г., Тихомиров Г. С.</i> О системе дифференциальных уравнений со случайными параметрами . . . . .	621
<i>Зверева М. Б.</i> Модель деформаций струнной системы на графе-звезде с нелинейным условием в узле . . . . .	635
<i>Мерзон А., Жевандров П., Де ла Пас Мендес Х. Э., Ромеро Родригес М. И.</i> Явное решение задачи Дирихле в невыпуклом угле . . . . .	653
<i>Подольский А. В., Шапошникова Т. А.</i> Усреднение параболического уравнения в перфорированной области с односторонним динамическим граничным условием: критический случай . . . . .	671
<i>Христиченко М. Ю., Нечепуренко Ю. М., Гребенников Д. С., Бочаров Г. А.</i> Численный анализ стационарных решений систем с запаздывающим аргументом в математической иммунологии . . . . .	686
<i>Шафаревич А. И., Щегорцова О. А.</i> Комплексный росток Маслова и квазиклассические сжатые состояния в задаче Коши для уравнения Шредингера с дельта-потенциалом . . . . .	704
<i>Юнес Г. А., Эль Хатиб Н., Вольперт В. А.</i> Существование решения задачи со свободной границей для систем «реакция-диффузия» . . . . .	716

## CONTENTS

<i>Apushkinskaya D. E., Lazareva G. G., Okishev V. A.</i> Influence of numerical diffusion on the growth rate of viscous fingers in the numerical implementation of the Peaceman model by the finite volume method . . . . .	553
<i>Véron L.</i> Boundary singular problems for quasilinear equations involving mixed reaction-diffusion . . . . .	564
<i>Volkov S. V.</i> Construction of the planar vector fields with nonsimple critical point of prescribed topological structure . . . . .	575
<i>Grines V. Z., Lerman L. M.</i> Nonautonomous dynamics: classification, invariants, and implementation . . . . .	596
<i>Zadorozhniy V. G., Tikhomirov G. S.</i> On a system of differential equations with random parameters . . . . .	621
<i>Zvereva M. B.</i> A model of string system deformations on a star graph with nonlinear condition at the node . . . . .	635
<i>Merzon A., Zhevandrov P., De la Paz Méndez J. E., Romero Rodríguez M. I.</i> Explicit solution of a Dirichlet problem in nonconvex angle . . . . .	653
<i>Podolskiy A. V., Shaposhnikova T. A.</i> Homogenization of a parabolic equation in a perforated domain with a unilateral dynamic boundary condition: critical case . . . . .	671
<i>Khristichenko M. Yu., Nechepurenko Yu. M., Grebennikov D. S., Bocharov G. A.</i> Numerical analysis of stationary solutions of systems with delayed argument in mathematical immunology . . . . .	686
<i>Shafarevich A. I., Shchegortsova O. A.</i> Maslov complex germ and semiclassical contracted states in the Cauchy problem for the Schrödinger equation with delta potential . . . . .	704
<i>Younes G. A., El Khatib N., Volpert V. A.</i> Existence of solution of a free boundary problem for reaction-diffusion systems . . . . .	716

## ВЛИЯНИЕ ЧИСЛЕННОЙ ДИФФУЗИИ НА СКОРОСТЬ РОСТА ВЯЗКИХ ПАЛЬЦЕВ ПРИ ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ МОДЕЛИ ПИСМАНА МЕТОДОМ КОНЕЧНЫХ ОБЪЕМОВ

Д. Е. АПУШКИНСКАЯ, Г. Г. ЛАЗАРЕВА, В. А. ОКИШЕВ

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

Рассмотрена численная модель вытеснения нефти смесью воды и полимера на основе модели Писмана. Проведены численные эксперименты с помощью пакета DuMu<sup>x</sup>, представляющего собой программную библиотеку, предназначенную для моделирования нестационарных гидродинамических задач в пористых средах. Пакет программ использует вариант метода конечных объемов «vertex-centered». Исследовано влияние диффузии на скорость роста «вязких пальцев». Получены зависимости скорости переднего фронта от значения модельной диффузии для трех моделей вязкости. Показано, что влияние численной диффузии на скорость роста «вязких пальцев» ставит ограничения на расчеты при малых значениях модельной диффузии.

**Ключевые слова:** математическое моделирование, модель Писмана, вязкие пальцы, пористые среды, пакет DuMu<sup>x</sup>, численная диффузия

**Для цитирования:** Д. Е. Апушкинская, Г. Г. Лазарева, В. А. Окишев. Влияние численной диффузии на скорость роста вязких пальцев при численной реализации модели Писмана методом конечных объемов // *Соврем. мат. Фундам. направл.* 2022. Т. 68, № 4. С. 553–563. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-553-563>

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Процессы вытеснения более вязкой жидкости менее вязкой или газом широко распространены в современной нефтедобыче. Одна из технологий предполагает вытеснение нефти из пористого пласта смесью воды и полимера. При смешивающемся вытеснении менее вязкая вытесняющая жидкость прорывается через слой вытесняемой, образуя в ней неустойчивые структуры, называемые *вязкими пальцами*, или неустойчивостью Саффмана—Тейлора [20]. Несмотря на то, что точное решение задачи вытеснения с гладкой границей раздела существует, оно является неустойчивым, и любое возмущение на границе раздела сред приводит к росту «пальцев», что вызывает трудности точного описания параметров роста таких структур. Тем не менее в ряде случаев существует оценка длины вязких пальцев (см., например, [3]).

Эта неустойчивость обычно исследуется не на примере фильтрационного процесса, а на примере течения в узком канале между двумя параллельными пластинами, в так называемой *ячейке Хеле—Шоу*. Это обусловлено как более простой организацией наблюдения при проведении экспериментов [5, 21], так и удобством построения возмущенных аналитических решений [14, 16–18], что упрощает верификацию и валидацию построенных численных моделей [10, 15, 17, 27]. Однако

---

Работа выполнена при поддержке Министерства науки и высшего образования Российской Федерации (Мегагрант, соглашение № 075-15-2022-1115).

большую практическую значимость для нефтедобывающей отрасли имеет описание указанной неустойчивости именно в случае фильтрационного процесса [19, 22–24].

Несмотря на наличие применимой в ряде случаев аналитической оценки длины вязких пальцев (см., например, [20]), основным методом исследования остается численное моделирование [19, 22–24]. Как и в других задачах, одним из важнейших вопросов при использовании этого метода исследования является разделение двух типов эффектов: 1) присущих математической непрерывной модели явления и 2) обусловленных погрешностями аппроксимации уравнений и накоплением ошибки вычислений в ЭВМ. При численном описании процесса фильтрации сходным влиянием на скорость роста пальцев обладают модельная и численная диффузии. *Модельная диффузия* характеризуется совокупным действием жидкостной диффузии и дисперсии. При моделировании аппроксимация потока вносит в получаемое решение погрешности, влияние которых на решение похоже на воздействие физического диффузионного процесса. Такую погрешность можно определить как *численную диффузию*, которая накладывает определенные требования на выбор расчетной сетки.

В работе представлены результаты численного моделирования вытеснения нефти смесью воды и полимера на основе модели Писмана [6, 7]. Численные эксперименты реализованы с помощью пакета DuMu<sup>x</sup>, см. [13], представляющего собой программную библиотеку, предназначенную для моделирования нестационарных гидродинамических задач в пористых средах. Пакет программ использует вариант метода конечных объемов «*vertex-centered*».

Исследовано влияние диффузии на скорость роста «вязких пальцев». Получены зависимости скорости переднего фронта (передней границы зоны смешивания) от значения модельной диффузии для трех моделей вязкости. Показано, что влияние численной диффузии на скорость роста «вязких пальцев» ставит ограничения на расчеты при малых значениях модельной диффузии.

## 2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Рассмотрим участок пласта, заполненный нефтью. В начальный момент времени с левой границы рассматриваемого участка начинается закачка смеси воды и полимера как результат работы горизонтальной нагнетающей скважины, находящейся на большом расстоянии. Вытесняемая нефть уходит через правую границу. Поскольку уровень водонасыщенности в зоне полимерного заводнения мы считаем постоянным, соответствующим уровню поршневого вытеснения, то для описания процесса смешивающегося вытеснения используется традиционная однофазная модель Писмана:

$$\begin{cases} \phi \partial_t c + \operatorname{div}(u \cdot c) = D \Delta c, \\ u = -km(c) \nabla p, \\ \operatorname{div}(u) = 0, \end{cases} \quad (1)$$

где  $\phi$  — пористость породы,  $c$  — концентрация химического вещества в воде,  $u = u(u_1, u_2)$  — скорость потока,  $D$  — коэффициент диффузии,  $k$  — проницаемость породы,  $m = \frac{1}{\mu(c)}$  — функция обратной вязкости смеси,  $p$  — давление. Закон сохранения массы  $\phi \partial_t c + \operatorname{div}(u \cdot c) = D \Delta c$  с учетом уравнения неразрывности  $\operatorname{div}(u) = 0$  может быть записан следующим образом:

$$\phi \partial_t c + u \nabla c = D \Delta c. \quad (2)$$

Областью, в которой изучается решение системы уравнений (1), является бесконечная полоса  $\Pi(H) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \in (0, H)\}$  ширины  $H$ . На горизонтальных границах полосы ставятся условия периодичности. Положим, что задано некоторое условие на постоянный поток при  $x = -\infty$ :  $u(-\infty, y) = q_0 e_1$ ,  $q_0 \in \mathbb{R}$ , где  $e_1$  — единичный орт по оси абсцисс. Тогда

$$\int_0^H u_1(t, x, y) dy = q_0 H \quad \forall x \in \mathbb{R}. \quad (3)$$

Такое условие задает постоянную скорость закачки на нагнетающей скважине, которая в рассматриваемом случае предполагается расположенной на бесконечности.



Заметим, что мы имеем следующую картину начала процесса смешивания: левая часть прямоугольника  $\Pi_-(H) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \Pi(H) : x < 0\}$  заполнена раствором воды и полимера с концентрацией  $c_{min}$ . Правая часть  $\Pi_+(H) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \Pi(H) : x > 0\}$  заполнена нефтью с концентрацией  $c_{max}$ . В процессе заводнения средняя концентрация в направлении потока будет плавно меняться от  $c_{min}$  до  $c_{max}$ , при этом существенное отличие от крайних значений будет лишь в ограниченной, но растущей зоне смешивания (см. рис. 1). На схеме передний фронт  $\Gamma_f$  движется со скоростью  $v^f$ , а задний фронт  $\Gamma_b$  — со скоростью  $v^b$ .

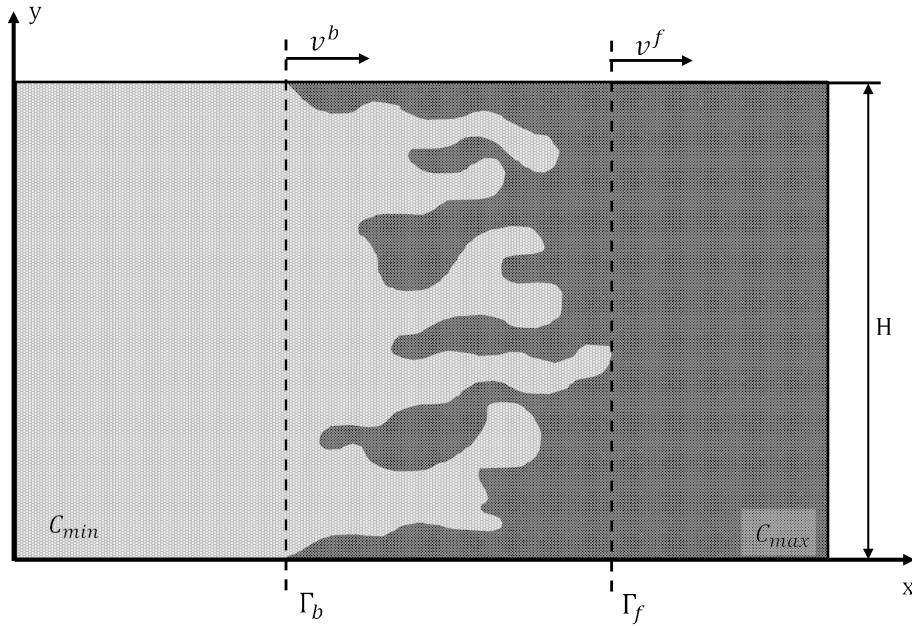


Рис. 1: Схема зоны смешивания. Черным цветом выделена зона, заполненная нефтью, серым — смесью воды и полимера. Зона смешивания ограничена пунктирными линиями  $\Gamma_f$  и  $\Gamma_b$ , которые соответственно являются передним и задним фронтами зоны смешивания.

Fig. 1: Schema of the mixing zone. The zone filled with oil is highlighted in black, and the zone filled with a mixture of water and polymer is marked with gray. The mixing zone is limited by the dashed lines  $\Gamma_f$  and  $\Gamma_b$ , which are respectively the leading and trailing fronts of the mixing zone.

Для обезразмеривания использованы следующие характерные величины:

$$\tilde{x} = \frac{x}{H}, \quad \tilde{y} = \frac{y}{H}, \quad E = \frac{q_0}{\phi H} t, \quad \tilde{u} = \frac{u}{q_0}, \quad \tilde{p} = \frac{k}{q_0 H} p. \tag{4}$$

После обезразмеривания область  $\Pi(H)$  сведется к единичной полосе  $\Pi(1)$ , скорость закачки  $q_0$  станет равна единице, а система уравнений (1)-(2) примет вид:

$$\begin{cases} \partial_t c + \tilde{\nabla}(\tilde{u} \cdot c) = \frac{1}{Pe} \tilde{\Delta} c, \\ \tilde{u} = -m(c) \tilde{\nabla} \tilde{p}, \\ \tilde{\nabla} \tilde{u} = 0, \end{cases} \tag{5}$$

где  $Pe = \frac{q_0 H}{D}$  — число Пекле [26].

### 3. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Численные эксперименты реализовались с помощью пакета DuMu<sup>x</sup>, представляющего собой программную библиотеку, предназначенную для моделирования нестационарных гидродинамических задач в пористых средах. Пакет программ DuMu<sup>x</sup> является открытым программным обеспечением и построен на оболочке DUNE (Distributed and Unified Numerics Environment), см. [13]. Данный пакет предназначен для эксплуатации только на операционных системах, входящих в семейство дистрибутивов Linux. В нашем случае использовалась Ubuntu 20.04, установленная на компьютер с четырехъядерным процессором Intel Core i5-10300H CPU @ 2,50 ГГц.

Решение системы уравнений (5) основано на неявном методе конечных объемов «vertex-centered» и модели двухфазного потока 2pnc, см. [12]. Область расчета представляет собой прямоугольник длиной 60 м и шириной 31,415 м (высота пласта). Дискретизация осуществлялась с помощью прямоугольной сетки размером в 98766 ячеек, с шагом по времени  $\tau=10$  минут.

Расчеты производились для трех моделей вязкости:

- линейной:  $\mu_1(c) = A + B_1c$ ;
- квадратичной:  $\mu_2(c) = A + B_2c^2$ ;
- экспоненциальной:  $\mu_e(c) = A + B_e e^{kc}$ ;

где  $A = 0,3 \cdot 10^{-3}$ ,  $B_1 = 3,8$ ,  $B_2 = 2533$ ,  $B_e = 0,017 \cdot 10^{-3}$  и  $k = 3853$ .

Вязкость рассчитывалась как функция концентрации полимера. Проницаемость пласта предполагалась изотропной. В целях стимуляции возникновения неустойчивостей в динамической картине потока жидкости, приводящих к появлению вязких пальцев, была введена модельная вариация проницаемости пласта от 77,2 до 82,9 мД согласно закону логнормального распределения. Заданы следующие параметры для пласта, начальные и граничные условия:

- пористость  $\phi = 0,188$ ;
- плотность нефти  $0,773 \frac{\text{г}}{\text{см}^3}$ ;
- вязкость нефти  $\mu_n = 1,4$  сП;
- на левой границе поставлено условие на постоянный поток раствора  $3,68425 \cdot 10^{-3} \frac{\text{кг}}{\text{м} \cdot \text{с}}$ , что соответствует площадной скорости закачки  $10 \frac{\text{м}^2}{\text{сут}}$ ;
- начальное условие на водонасыщенность задается в соответствии с уровнем поршневого вытеснения и равна 0,5363.

Для оптимизации процесса расчета по времени параллельно запускалось четыре симуляции, каждая в своем терминале, т. е. на одну симуляцию выделялось одно ядро процессора. Это было связано с ограниченными ресурсами компьютера и необходимостью провести наибольшее количество численных экспериментов. Надо отметить, что помимо высоких требований к вычислительной мощности компьютера, потребовался большой объем памяти для хранения полученных данных. При запуске симуляции с помощью MPIrun, время расчета сократилось не более чем в полтора раза. Таким образом, параллельный запуск на четырех ядрах работал быстрее, чем последовательный запуск четырех симуляций с использованием MPIrun. Однако запуск MPIrun не принес существенного преимущества в скорости вычислений.

### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ

Для проведения расчетов в конфигурационных файлах WettingPhaseViscosityModel и PolymerDiffusionCoefficient изменялись модель вязкости и значение модельной диффузии. Визуализация реализована с использованием приложения Paraview.

С ростом модельной диффузии вязкие пальцы размываются (см. рис. 2, 3) и при значениях  $D \geq 10^{-4}$  пропадают. В этом случае мы имеем поршневое вытеснение (см. рис. 2 d). На рис. 4 показано, что длина пальцев в один и тот же момент времени при  $D = 10^{-9}$  значительно больше, чем при  $D = 10^{-6}$ . Также можно отметить, что скорость переднего фронта постепенно увеличивается с ростом модельной диффузии.

Для определения скорости роста пальцев необходимо определить зависимость положения переднего и заднего фронтов от времени (см. рис. 5 а, b, с, d). Скорость переднего фронта можно оценить как коэффициент наклона линейного приближения соответствующих графиков (см. рис. 5). Заметим, что при значениях модельной диффузии  $D \geq 10^{-4}$  график зависимости

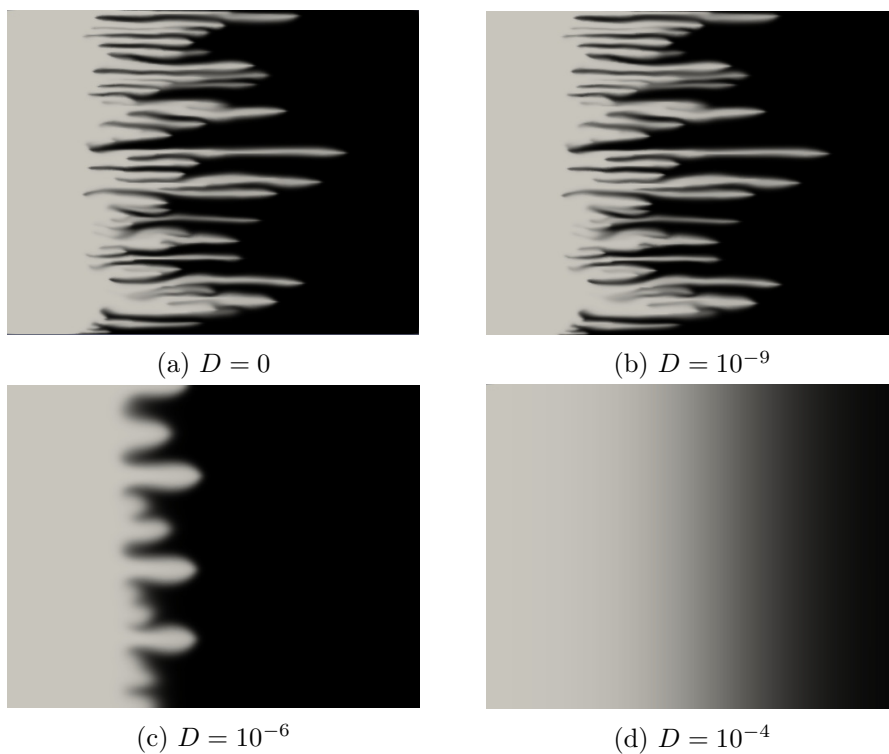


Рис. 2: Карты концентраций для различных значений модельной диффузии  $D$  при  $t = 626525$  с (экспоненциальная модель вязкости).

Fig. 2: Concentration maps for different values of model diffusion  $D$  for  $t = 626525$  sec (exponential viscosity model).

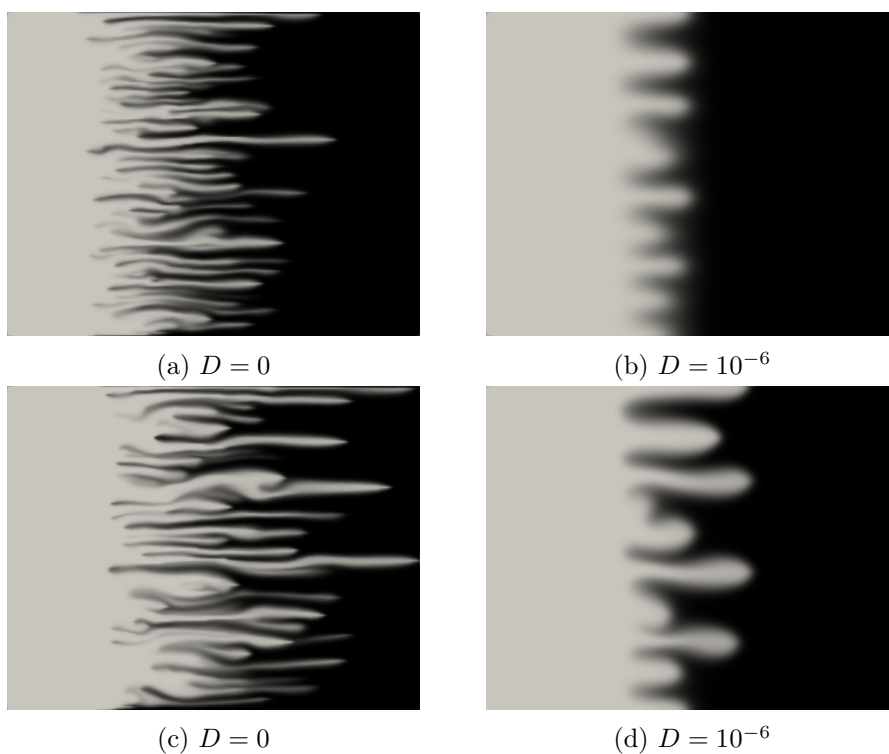


Fig. 3: Карты концентраций для линейной (a, b) и квадратичной (c, d) моделей вязкости при различных значениях модельной диффузии  $D$  при  $t = 907350$  с.

Fig. 3: Concentration maps for linear (a, b) and quadratic (c, d) viscosity models for different values of model diffusion  $D$  for  $t = 907350$  sec.

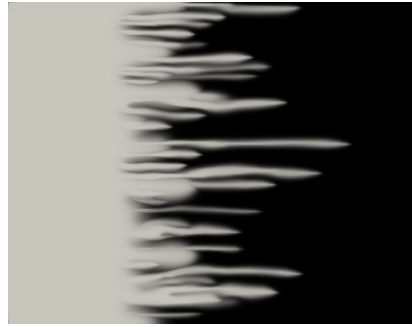


Рис. 4: Наложение карт концентраций при  $D = 10^{-9}$  и  $D = 10^{-6}$  при  $t = 626525$  с (экспоненциальная модель вязкости).

Fig. 4: Overlay of concentration maps for  $D = 10^{-9}$  and  $D = 10^{-6}$  for  $t = 626525$  sec (exponential viscosity model).

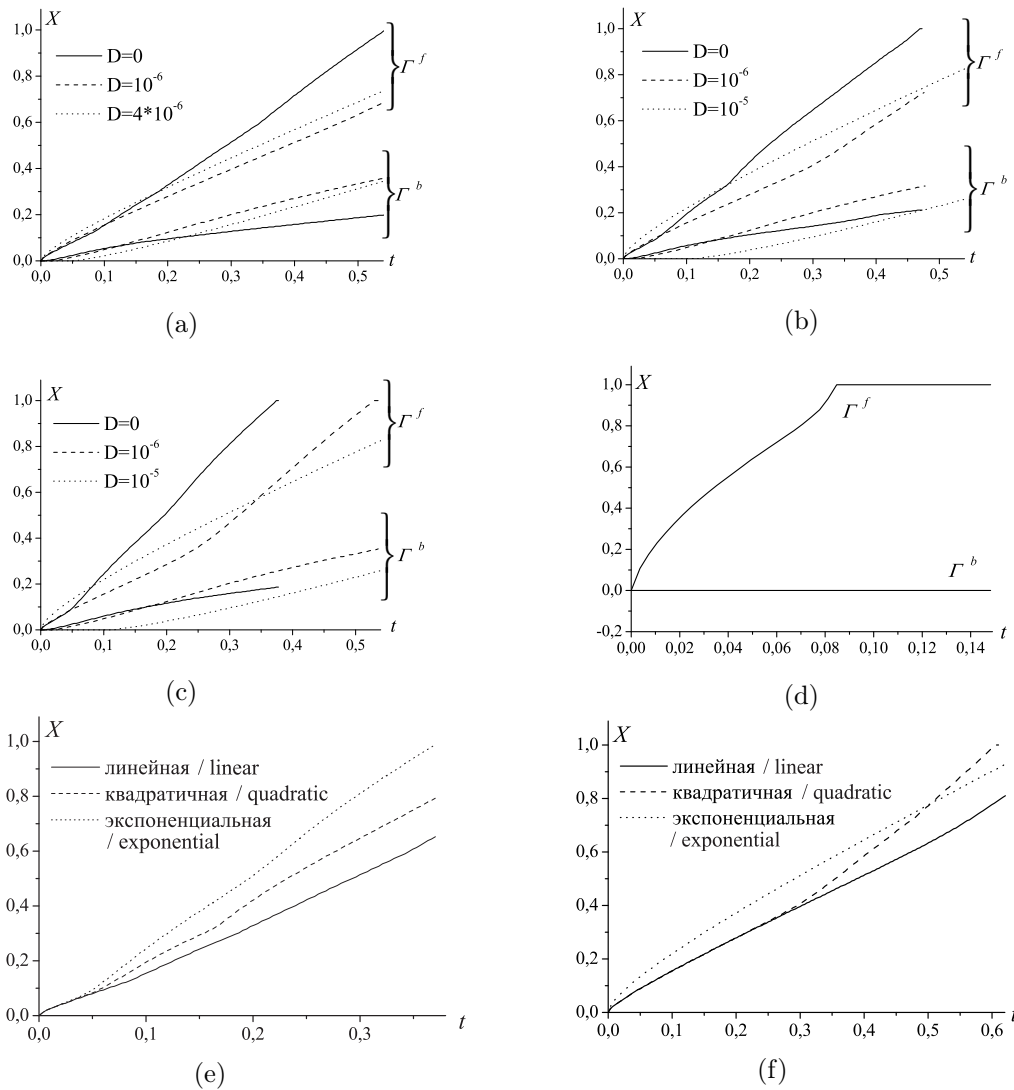


Fig. 5: Зависимость положения фронтов от времени: для линейной (а), квадратичной (b) и экспоненциальной (c) функций вязкости, для  $D = 10^{-4}$ (d), переднего фронта для  $D = 0$  (e) и для  $D = 10^{-6}$  (f).

Fig. 5: Dependence of front positions on time: for linear (a), quadratic (b), and exponential (c) viscosity functions, for  $D = 10^{-4}$ (d), leading front for  $D = 0$  (e) and  $D = 10^{-6}$  (f).

положения заднего фронта от времени становится параллельным оси абсцисс (см. рис. 5 d), что говорит нам об увеличении длины вязких пальцев. С увеличением модельной диффузии скорости фронтов постепенно возрастают для любой модели вязкости.

В случае нулевой модельной диффузии (см. рис. 5 e) положения передних фронтов сильно отличаются для разных моделей вязкости. Причем для экспоненциальной модели вязкости скорость переднего фронта выше, а для линейной ниже, чем для квадратичной. Углы наклона графиков, а значит, и скорости движения фронтов, сильно различаются.

Аналогичным образом соотносятся положения фронтов для модельной диффузии  $D = 10^{-6}$  для разных моделей вязкости (см. рис. 5 f). При этом графики положения передних фронтов для линейной и экспоненциальной моделей вязкостей параллельны, а для квадратичной и экспоненциальной совпадают в начале расчета. Это показывает, что скорости передних фронтов при  $D = 10^{-6}$  почти совпадают для всех трех моделей вязкости.

Графики зависимости скорости переднего фронта от значения модельной диффузии для разных моделей вязкости приведены на рис. 6. Они показывают, что рост скорости переднего фронта при достаточно малом коэффициенте диффузии нарушает монотонный характер зависимости скорости от диффузии. Количественные различия скоростей составляют величины не более единицы (см. рис. 6 b). Более того, минимум скоростей достигается при  $D = 10^{-6}$ – $10^{-5}$  во всех случаях. Возможно, этот факт говорит о том, что численная диффузия больше этой величины. Поэтому добавка модельной диффузии не вносит изменений в результат вычислений. Вычисления на более грубых сетках показали, что эта тенденция сохраняется.

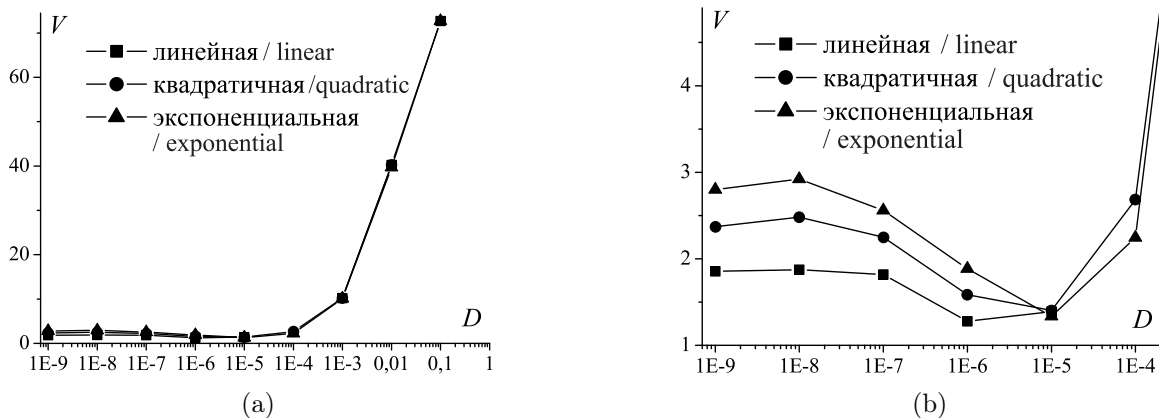


Рис. 6: Зависимость скорости переднего фронта от диффузии в диапазоне от 0 до 0,1 (a) и от 0 до  $10^{-4}$  (b).

Fig. 6: Dependence of the leading front velocity on diffusion in the range from 0 to 0.1 (a) and from 0 to  $10^{-4}$  (b).

Грубо оценить численную диффузию  $D_{num}$  можно по формуле:  $D_{num} = u \frac{\Delta x}{2}$ . Такая априорная оценка согласуется с наблюдаемыми результатами, но требует уточнений для используемого метода конечных объемов «vertex-centered». В ряде случаев существуют более тонкие оценки величины численной диффузии. Например, известна оценка влияния численной диффузии на решение уравнений Навье—Стокса при моделировании поверхностных волн в случае применения метода конечных объемов. В работе [4] предлагается методика оценки численной диффузии, выражаемой коэффициентом уменьшения амплитуды волны при прохождении ею одной своей длины (коэффициентом затухания). Вывод более тонкой оценки численной диффузии для решения системы (5) является следующим необходимым шагом в дальнейших исследованиях.

### 5. Выводы

Рассмотрена численная модель вытеснения нефти смесью воды и полимера на основе модели Писмана. Проведены численные эксперименты с помощью пакета DuMu<sup>x</sup>, представляющего собой программную библиотеку, предназначенную для моделирования нестационарных гидродинамических задач в пористых средах. Пакет программ использует вариант метода конечных

объемов «vertex-centered». Исследовано влияние диффузии на скорость роста «вязких пальцев». Получены зависимости скорости переднего фронта от значения модельной диффузии для трех моделей вязкости. Показано, что влияние численной диффузии на скорость роста «вязких пальцев» ставит ограничения на расчеты при малых значениях модельной диффузии.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Азиз Х., Сеттари Э. Математическое моделирование пластовых систем. — М.—Ижевск: Инст. комп. иссл., 2004.
2. Ламб Г. Гидродинамика. — М.—Л.: Гостехиздат, 1947.
3. Логвинов О. А. Об устойчивости боковой поверхности вязких пальцев, образующихся при вытеснении жидкости из ячейки Хеле—Шоу// Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Мат. Мех. — 2011. — № 2. — С. 40–46.
4. Тятюшкина Е. С., Козелков А. С., Куркин А. А., Курулин В. В., Ефремов В. Р., Уткин Д. А. Оценка численной диффузии метода конечных объемов при моделировании поверхностных волн// Вычисл. техн. — 2019. — 24, № 1. — С. 106–119.
5. Arun R., Dawson S. T. M., Schmid P. J., Laskari A., McKeon B. J. Control of instability by injection rate oscillations in a radial Hele—Shaw cell// Phys. Rev. Fluids. — 2020. — 5. — 123902.
6. Bakharev F., Campoli L., Enin A., Matveenko S., Petrova Y., Tikhomirov S., Yakovlev A. Numerical investigation of viscous fingering phenomenon for raw field data// Transp. Porous Med. — 2020. — 132. — С. 443–464.
7. Bakharev F., Enin A., Groman A., Kalyuzhnik A., Matveenko S., Petrova Yu., Starkov I., Tikhomirov S. S. Velocity of viscous fingers in miscible displacement// J. Comput. Appl. Math. — 2022. — 402. — 113808.
8. Booth R. J. S. Miscible flow through porous media. — Канд. дисс., 2008.
9. Booth R. J. S. On the growth of the mixing zone in miscible viscous fingering// J. Fluid Mech. — 2010. — 655. — С. 527–539.
10. Chen Ch., Yang X. A second-order time accurate and fully-decoupled numerical scheme of the Darcy—Newtonian—Nematic model for two-phase complex fluids confined in the Hele—Shaw cell// J. Comput. Phys. — 2022. — 456. — 111026.
11. De Wit A., Homsy G. M. Viscous fingering in reaction-diffusion systems// J. Chem. Phys. — 1999. — 110. — С. 8663–8675.
12. DuMu<sup>x</sup> Code Documentation (doxygen), Ver. 3.5. — <https://dumux.org/docs/doxygen/master/a01628.html>, 2022.
13. DuMu<sup>x</sup> Handbook, Ver. 3.5. — <http://dumux.org>, 2022.
14. Fontana J., Juel A., Bergemann N., Heil M., Hazel A. Modelling finger propagation in elasto-rigid channels// J. Fluid Mech. — 2021. — 916. — A27.
15. Karimi F., Maleki Jirsaraei N., Azizi S. Simulation of viscous fingering due to Saffman—Taylor instability in Hele—Shaw cell// J. Nanoelectron. Materials. — 2019. — 12, № 3. — С. 309–318.
16. Kupervasser O. Laplacian growth without surface tension in filtration combustion: analytical pole solution// В сб.: «Pole solutions for flame front propagation. Mathematical and analytical techniques with applications to engineering». — Cham: Springer, 2015. — С. 85–107.
17. Lu D., Municchi F., Christov I. C. Computational analysis of interfacial dynamics in angled Hele—Shaw cells: instability regimes// Transp. Porous Med. — 2020. — 131. — С. 907–934.
18. Lustri Ch. J., Green Ch. C., McCue S. W. Hele—Shaw bubble via exponential asymptotics// SIAM J. Appl. Math. — 2020. — 80, № 1. — С. 289–311.
19. Noskov M. D., Istomin A. D., Kesler A. G. Stochastic-deterministic modeling of the development of hydrodynamic instability in filtration of mixing fluids// J. Eng. Phys. Thermophys. — 2002. — 75. — С. 352–358.
20. Saffman P. G., Taylor G. The penetration of a fluid into a porous medium or a Hele—Shaw cell containing a more viscous fluid// Proc. Roy. Soc. London. A. — 1958. — 245. — С. 312–329.
21. Singh P., Lalitha R., Mondal S. Saffman—Taylor instability in a radial Hele—Shaw cell for a shear-dependent rheological fluid// J. Non-Newtonian Fluid Mech. — 2021. — 294. — 104579.
22. Skopintsev A. M., Dontsov E. V., Kovtunenkov P. V., Baykin A. N., Golovin S. V. The coupling of an enhanced pseudo-3D model for hydraulic fracturing with a proppant transport model// Eng. Fracture Mech. — 2020. — 236. — 107177.
23. Smirnov N. N., Kisselev A. B., Nikitin V. F., Zvyaguin A. V., Thiercelin M., Legros J. C. Hydraulic fracturing and filtration in porous medium// SPE Russian Oil and Gas Technical Conference and Exhibition, Moscow, Russia, October 2006.
24. Smirnov N. N., Nikitin V. F., Maximenko A., Thiercelin M., Legros J. C. Instability and mixing flux in frontal displacement of viscous fluids from porous media// Phys. Fluids. — 2005. — 17. — 084102.

25. *Sorbie K. S.* Polymer-improved oil recovery. — Dordrecht: Springer, 1991.
26. *Tan C. T., Homsy G. M.*, Stability of miscible displacements in porous media: rectilinear flow// *Phys. Fluids*. — 1986. — 29, № 11. — С. 3549–3556.
27. *Yang X.* Fully-discrete, decoupled, second-order time-accurate and energy stable finite element numerical scheme of the Cahn–Hilliard binary surfactant model confined in the Hele–Shaw cell// *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.* — 2022. — 56, № 2. — С. 651–678.

Д. Е. Апушкинская  
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия  
E-mail: apushkinskaya-de@rudn.ru

Г. Г. Лазарева  
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия  
E-mail: lazareva-gg@rudn.ru

В. А. Окишев  
Российский университет дружбы народов, Москва, Россия  
E-mail: okishev-va@rudn.ru

DOI 10.22363/2413-3639-2022-68-4-553-563

UDC 519.63

## Influence of numerical diffusion on the growth rate of viscous fingers in the numerical implementation of the Peaceman model by the finite volume method

D. E. Apushkinskaya, G. G. Lazareva, and V. A. Okishev

*Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia*

A numerical model of oil displacement by a mixture of water and polymer based on the Peaceman model is considered. Numerical experiments were carried out using the DuMu<sup>x</sup> package, which is a software library designed for modeling nonstationary hydrodynamic problems in porous media. The software package uses the vertex-centered variant of finite volume method. The effect of diffusion on the growth rate of “viscous fingers” has been studied. The dependencies of the leading front velocity on the value of model diffusion are obtained for three viscosity models. It is shown that the effect of numerical diffusion on the growth rate of “viscous fingers” imposes limitations on calculations for small values of model diffusion.

**Keywords:** mathematical modeling, Peaceman model, viscous fingers, porous media, DuMu<sup>x</sup> package, numerical diffusion

**For citation:** D. E. Apushkinskaya, G. G. Lazareva, V. A. Okishev, “Influence of numerical diffusion on the growth rate of viscous fingers in the numerical implementation of the Peaceman model by the finite volume method,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2022, vol. 68, No. 4, 553–563. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-553-563>



## REFERENCES

1. K. Aziz and A. Settari, *Matematicheskoe modelirovanie plastovykh sistem* [Petroleum Reservoir Simulation], Inst. Komp. Issl., Moscow–Izhevsk, 2004 (Russian translation).
2. H. Lamb, *Gidrodinamika* [Hydrodynamics], Gostekhizdat, Moscow–Leningrad, 1947 (Russian translation).
3. O. A. Logvinov, “Ob ustoychivosti bokovoy poverkhnosti vyazkikh pal'tsev, obrazuyushchikhsya pri vytesnenii zhidkosti iz yacheyki Khele–Shou” [On the stability of the lateral surface of viscous fingers formed when liquid is displaced from a Hele–Shaw cell], *Vestn. Mosk. un-ta. Ser. 1. Mat. Mekh.* [Bull. Moscow Univ. Ser. 1. Math. Mech.], 2011, № 2, 40–46 (in Russian).
4. E. S. Tyatyushkina, A. S. Kozelkov, A. A. Kurkin, V. V. Kurulin, V. R. Efremov, and D. A. Utkin, “Otsenka chislennoy diffuzii metoda konechnykh ob'emov pri modelirovanii poverkhnostnykh voln” [Estimation of the numerical diffusion of the finite volume method in the simulation of surface waves], *Vychisl. tekhn.* [Computer Engineering], 2019, **24**, № 1, 106–119 (in Russian).
5. R. Arun, S. T. Dawson, P. J. Schmid, A. Laskari, and B. J. McKeon, “Control of instability by injection rate oscillations in a radial Hele–Shaw cell,” *Phys. Rev. Fluids*, 2020, **5**, 123902.
6. F. Bakharev, L. Campoli, A. Enin, S. Matveenko, Y. Petrova, S. Tikhomirov, and A. Yakovlev, “Numerical investigation of viscous fingering phenomenon for raw field data,” *Transp. Porous Med.*, 2020, **132**, 443–464.
7. F. Bakharev, A. Enin, A. Groman, A. Kalyuzhnuk, S. Matveenko, Yu. Petrova, I. Starkov, and S. S. Tikhomirov, “Velocity of viscous fingers in miscible displacement,” *J. Comput. Appl. Math.*, 2022, **402**, 113808.
8. R. J. Booth, *Miscible Flow through Porous Media*, Thesis, 2008.
9. R. J. Booth, “On the growth of the mixing zone in miscible viscous fingering,” *J. Fluid Mech.*, 2010, **655**, 527–539.
10. Ch. Chen and X. Yang, “A second-order time accurate and fully-decoupled numerical scheme of the Darcy–Newtonian–Nematic model for two-phase complex fluids confined in the Hele–Shaw cell,” *J. Comput. Phys.*, 2022, **456**, 111026.
11. A. De Wit and G. M. Homsy, “Viscous fingering in reaction-diffusion systems,” *J. Chem. Phys.*, 1999, **110**, 8663–8675.
12. DuMu<sup>x</sup> Code Documentation (doxygen), Ver. 3.5, <https://dumux.org/docs/doxygen/master/a01628.html>, 2022.
13. DuMu<sup>x</sup> Handbook, Ver. 3.5, <http://dumux.org>, 2022.
14. J. Fontana, A. Juel, N. Bergemann, M. Heil, and A. Hazel, “Modelling finger propagation in elasto-rigid channels,” *J. Fluid Mech.*, 2021, **916**, A27.
15. F. Karimi, N. Maleki Jirsaraei, and S. Azizi, “Simulation of viscous fingering due to Saffman–Taylor instability in Hele–Shaw cell,” *J. Nanoelectron. Materials*, 2019, **12**, No. 3, 309–318.
16. O. Kupervasser, “Laplacian growth without surface tension in filtration combustion: analytical pole solution,” In: *Pole solutions for flame front propagation. Mathematical and analytical techniques with applications to engineering*, Springer, Cham, 2015, pp. 85–107.
17. D. Lu, F. Municchi, and I. C. Christov, “Computational analysis of interfacial dynamics in angled Hele–Shaw cells: instability regimes,” *Transp. Porous Med.*, 2020, **131**, 907–934.
18. Ch. J. Lustri, Ch. C. Green, and S. W. McCue, “Hele–Shaw bubble via exponential asymptotics,” *SIAM J. Appl. Math.*, 2020, **80**, No. 1, 289–311.
19. M. D. Noskov, A. D. Istomin, and A. G. Kesler, “Stochastic-deterministic modeling of the development of hydrodynamic instability in filtration of mixing fluids,” *J. Eng. Phys. Thermophys.*, 2002, **75**, 352–358.
20. P. G. Saffman and G. Taylor, “The penetration of a fluid into a porous medium or a Hele–Shaw cell containing a more viscous fluid,” *Proc. Roy. Soc. London. A*, 1958, **245**, 312–329.
21. P. Singh, R. Lalitha, and S. Mondal, “Saffman–Taylor instability in a radial Hele–Shaw cell for a shear-dependent rheological fluid,” *J. Non-Newtonian Fluid Mech.*, 2021, **294**, 104579.
22. A. M. Skopintsev, E. V. Dontsov, P. V. Kovtunenkov, A. N. Baykin, and S. V. Golovin, “The coupling of an enhanced pseudo-3D model for hydraulic fracturing with a proppant transport model,” *Eng. Fracture Mech.*, 2020, **236**, 107177.
23. N. N. Smirnov, A. B. Kisselev, V. F. Nikitin, A. V. Zvyaguin, M. Thiercelin, and J. C. Legros, “Hydraulic fracturing and filtration in porous medium,” *SPE Russian Oil and Gas Technical Conference and Exhibition*, Moscow, Russia, October 2006.
24. N. N. Smirnov, V. F. Nikitin, A. Maximenko, M. Thiercelin, and J. C. Legros, “Instability and mixing flux in frontal displacement of viscous fluids from porous media,” *Phys. Fluids*, 2005, **17**, 084102.
25. K. S. Sorbie, *Polymer-Improved Oil Recovery*, Springer, Dordrecht, 1991.
26. C. T. Tan and G. M. Homsy, “Stability of miscible displacements in porous media: rectilinear flow,” *Phys. Fluids*, 1986, **29**, No. 11, 3549–3556.



27. X. Yang, “Fully-discrete, decoupled, second-order time-accurate and energy stable finite element numerical scheme of the Cahn–Hilliard binary surfactant model confined in the Hele–Shaw cell,” *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, 2022, **56**, No. 2, 651–678.

D. E. Apushkinskaya

Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia

E-mail: apushkinskaya-de@rudn.ru

G. G. Lazareva

Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia

E-mail: lazareva-gg@rudn.ru

V. A. Okishev

Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia

E-mail: okishev-va@rudn.ru

## СИНГУЛЯРНЫЕ КРАЕВЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ КВАЗИЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СМЕШАННОЙ РЕАКЦИЕЙ-ДИФФУЗИЕЙ

Л. ВЕРОН

*Institut Denis Poisson, Université de Tours, Тур, Франция*

Мы изучаем существование решений задачи

$$\begin{aligned} -\Delta u + u^p - M|\nabla u|^q &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ u &= \mu \quad \text{на } \partial\Omega \end{aligned} \quad (1)$$

в ограниченной области  $\Omega$ , где  $p > 1$ ,  $1 < q < 2$ ,  $M > 0$ ,  $\mu$  — неотрицательная мера Радона в  $\partial\Omega$ , а также связанной с ней задачи с изолированной граничной особенностью в точке  $a \in \partial\Omega$ ,

$$\begin{aligned} -\Delta u + u^p - M|\nabla u|^q &= 0 \quad \text{в } \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{на } \partial\Omega \setminus \{a\}. \end{aligned} \quad (2)$$

Трудность заключается в оппозиции двух нелинейных членов, имеющих разную природу. Существование решений задачи (1) достигается при емкостном условии

$$\mu(K) \leq c \min \left\{ \text{cap}_{\frac{\partial\Omega}{p, p'}}^{\partial\Omega}, \text{cap}_{\frac{\partial\Omega}{q, q'}}^{\partial\Omega} \right\} \quad \text{для всех компактов } K \subset \partial\Omega.$$

Задача (2) зависит от нескольких критических условий на  $p$  и  $q$ , а также от соотношения величин  $q$  и  $\frac{2p}{p+1}$ .

**Ключевые слова:** уравнение реакции-диффузии, сингулярная краевая задача, задача с данными-мерами, задача с граничной особенностью

**Для цитирования:** Л. Верон. Сингулярные краевые задачи для квазилинейных уравнений со смешанной реакцией-диффузией // Современ. мат. Фундам. направл. 2022. Т. 68, № 4. С. 564–574. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-564-574>

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Пусть  $\Omega \subset \mathbb{R}^N$  — ограниченная область в  $C^2$ ,  $p > 1$ ,  $1 < q < 2$  и  $M > 0$ . Мы получим некоторые результаты, касающиеся сингулярного граничного поведения положительных функций, удовлетворяющих в  $\Omega$  уравнению

$$\mathcal{L}_{p,q,M} u := -\Delta u + u^p - M|\nabla u|^q = 0. \quad (1.1)$$

Основная характеристика оператора  $\mathcal{L}_{p,q,M}$  состоит в том, что в нем проявляется конкуренция между членом поглощения  $u^p$  и членом-источником  $|\nabla u|^q$ , и эти члены имеют разную природу. Следствием этой конкуренции является возникновение богатого разнообразия явлений. Основная часть результатов была получена в сотрудничестве с М. F. Bidaut-Véron и М. Garcia-Huidobro [7]. В нашем исследовании главное внимание уделяется двум направлениям:

1. существование решений с мерой в качестве граничных данных;
2. описание решений с изолированной граничной особенностью.

Если  $q = \frac{2p}{p+1}$ , то уравнение (1.1) инвариантно относительно преобразований масштабирования  $T_\ell$ ,  $\ell > 0$  определяемых равенством

$$T_\ell[u](x) = \ell^{\frac{2}{p-1}}u(\ell x). \tag{1.2}$$

Если  $1 < q < \frac{2p}{p+1}$ , то член поглощения является доминирующим, и поведение сингулярных решений моделируется уравнением Эмдена–Фаулера

$$-\Delta u + u^p = 0. \tag{1.3}$$

Если  $q > \frac{2p}{p+1}$ , то член-источник является доминирующим, и поведение сингулярных решений моделируется уравнением эйконала

$$u^p - M|\nabla u|^q = 0. \tag{1.4}$$

Другим уравнением, которое играет важную роль, является уравнение Риккати

$$-\Delta u - M|\nabla u|^q = 0. \tag{1.5}$$

Если  $q = \frac{2p}{p+1}$ , то ни один из членов реакции не является доминирующим, и определяющим становится значение  $M$ .

Важным инструментом построения решений является существование естественных суб- и суперрешений, которые естественным образом упорядочены, если они имеют одинаковые граничные данные: уравнения Эмдена–Фаулера (соответственно, уравнение Риккати) дает субрешение (соответственно, суперрешение) для уравнения (1.1).

Задачи о краевых особенностях и краевые задачи с данными-мерами для соответствующих операторов изучались в последнее время, но с другими соотношениями между членами реакций. В следующем уравнении, изученном в [16], два эффекта реакции суммируются, даже если они имеют разную природу:

$$-\Delta u + u^p + M|\nabla u|^q = 0. \tag{1.6}$$

В этом случае один термин может стать доминирующим, не отменяя действие другого. Уравнения только с одним членом поглощения,  $u^p$  или  $M|\nabla u|^q$ , дают естественные суперрешения.

В уравнении

$$-\Delta u - u^p - M|\nabla u|^q = 0, \tag{1.7}$$

оба члена реакции являются членами-источниками. Уравнения только с одним членом-источником,  $u^p$  или  $M|\nabla u|^q$ , дают естественные субрешения. В [5] проводится анализ задачи, представляющий некоторую аналогию с настоящей работой.

Сингулярная краевая задача для в определенной степени похожего уравнения

$$-\Delta u - u^p + M|\nabla u|^q = 0 \tag{1.8}$$

изучена в [10]. В нем два члена реакции также находятся в оппозиции друг другу: ситуация похожа на ту, которая исследуется нами, но эта оппозиция дает существенно иной эффект.

## 2. УСТРАНИМЫЕ ГРАНИЧНЫЕ ОСОБЕННОСТИ

Предположим, что  $\Omega$  — ограниченная область в  $C^2$  и  $0 \in \partial\Omega$ . Положим  $\rho(x) = \text{dist}(x, \partial\Omega)$ .

**Теорема 2.1.** Пусть  $p \geq \frac{N+1}{N-1}$ ,  $M > 0$ , и пусть  $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\bar{\Omega} \setminus \{0\})$  — неотрицательная функция, которая удовлетворяет условиям

$$\mathcal{L}_{p,q,M}u = 0 \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus \{0\}. \tag{2.1}$$

Предположим, что выполняется одно из следующих условий:

- (i)  $p = \frac{N+1}{N-1}$  и  $1 < q < \frac{N+1}{N}$ ;
- (ii)  $p > \frac{N+1}{N-1}$  и  $1 < q \leq \frac{2p}{p+1}$ .

Тогда  $u \in L^1(\Omega) \cap L^p_\rho(\Omega)$ ,  $\nabla u \in L^q_\rho(\Omega)$  и

$$\int_{\Omega} (-u\Delta\zeta + (u^p - M|\nabla u|^q)\zeta) dx = 0 \quad \text{для всех } \zeta \in \mathbb{X}(\Omega), \quad (2.2)$$

где

$$\mathbb{X}(\Omega) := \{\zeta \in C^1(\overline{\Omega}) : \zeta = 0 \text{ на } \partial\Omega, \Delta\zeta \in L^\infty(\Omega)\}. \quad (2.3)$$

Кроме того, если выполнено (i) или одно из следующих условий:

$$\begin{aligned} \text{(iii)} \quad & p > \frac{N+1}{N-1} \text{ и } 1 < q < \frac{2p}{p+1}; \\ \text{(iv)} \quad & p > \frac{N+1}{N-1}, q = \frac{2p}{p+1} \text{ и} \end{aligned}$$

$$M < m^{**} := (p+1) \left( \frac{(N-1)p - (N+1)}{2p} \right)^{\frac{p}{p+1}}, \quad (2.4)$$

тогда  $u = 0$ .

**Замечание.** Заметим, что в случае (i) существуют положительные функции, удовлетворяющие условиям (2.1) с особенностью, сосредоточенной в 0. Эта особенность не обнаруживается в смысле распределений. То же самое происходит для решений задачи

$$-\Delta u = u^p \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus \{0\}, \quad (2.5)$$

когда  $\frac{N+1}{N-1} \leq p < \frac{N+1}{N-3}$ , см. [9].

*Доказательство теоремы 2.1.*

*Шаг 1: априорная оценка.* Если  $M \geq 0$ ,  $1 < q < \min\{p, 2\}$  и функция  $u \geq 0$  удовлетворяет условиям (2.1), тогда мы сначала докажем с помощью модификации метода Келлера—Оссермана, что при некотором  $c_1 > 0$

$$u(x) \leq c_1 \max \left\{ M^{\frac{1}{p-q}} |x|^{-\frac{q}{p-q}}, |x|^{-\frac{2}{p-1}} \right\} \quad \text{для всех } x \in \Omega. \quad (2.6)$$

Как следствие, используя свойства регулярности эллиптических уравнений (см., например, [14]) и преобразование масштабирования  $T_\ell$ , что возможно при  $q \leq \frac{2p}{p+1}$ , получаем оценку градиента

$$|\nabla u(x)| \leq c_2 \max \left\{ |x|^{-\frac{p}{p-q}}, |x|^{-\frac{p+1}{p-1}} \right\} \quad \text{для всех } x \in \Omega \cap B_1. \quad (2.7)$$

*Шаг 2: замена неизвестной функции.* Положим  $u = v^b$  при  $0 < b \leq 1$ , тогда  $v$  удовлетворяет уравнению

$$-\Delta v - (b-1) \frac{|\nabla v|^2}{v} + \frac{1}{b} v^{(p-1)b+1} = Mb^{q-1} v^{(b-1)(q-1)} |\nabla v|^q. \quad (2.8)$$

Задача состоит в том, чтобы избавиться от слагаемого в правой части. Это делается следующим образом: при  $\epsilon > 0$  в силу неравенства Гельдера имеем

$$v^{(b-1)(q-1)} |\nabla v|^q \leq \frac{q\epsilon^{\frac{2}{q}}}{2} \frac{|\nabla v|^2}{v} + \frac{2-q}{2\epsilon^{\frac{2}{2-q}}} v^{\frac{(2b-1)q-2(b-1)}{2-q}}.$$

Тогда из уравнения (2.8) получаем

$$-\Delta v + \left( 1 - b - M \frac{qb^{q-1}\epsilon^{\frac{2}{q}}}{2} \right) \frac{|\nabla v|^2}{v} + \frac{1}{b} v^{(p-1)b+1} - Mb^{q-1} \frac{2-q}{2\epsilon^{\frac{2}{2-q}}} v^{\frac{(2b-1)q-2(b-1)}{2-q}} \leq 0. \quad (2.9)$$

Теперь возникает вопрос, как управлять показателем степени  $v$ , чтобы поглощение стало преобладающим при больших  $v$ . Для этого необходимо

$$\frac{(2b-1)q - 2(b-1)}{2-q} \leq (p-1)b + 1 \iff q \leq \frac{2p}{p+1}.$$

Отметим, что это условие не зависит от  $b$ . Зафиксируем

$$b = \frac{2}{(N-1)(p-1)} \iff (p-1)b + 1 = \frac{N+1}{N-1},$$

что является порогом устранимости изолированных граничных особенностей решений уравнения Эмдена–Фаулера. При таком выборе остается только проконтролировать знак коэффициента при  $\frac{|\nabla v|^2}{v}$ .

- (i) Если  $p > \frac{N+1}{N-1}$ ,  $q < \frac{2p}{p+1}$ , то выберем  $\epsilon = \left(\frac{2(1-b)}{Mqb^{q-1}}\right)^{\frac{q}{2}}$ . Тогда (2.9) преобразуется в виду
- $$-\Delta v + \frac{(N-1)(p-1)}{4} v^{\frac{N+1}{N-1}} \leq A. \tag{2.10}$$

Согласно результату Гмиры–Верона [15],  $v$  остается ограниченным, и утверждение следует из соответствующего выбора пробных функций и стандартных результатов о регулярности [14].

- (ii) Если  $p > \frac{N+1}{N-1}$ ,  $q = \frac{2p}{p+1}$ , то мы выбираем такое же  $b$ , но более тонко подбираем  $\epsilon$ , учитывая  $M$ .
- (iii) Если  $p = \frac{N+1}{N-1}$ ,  $q < \frac{N+1}{N}$ , то используем (2.6) для улучшения оценки (2.7), и затем с помощью итераций выводим ограниченность  $u$ . Это подробно описано в [7].  $\square$

Теорему 2.1 можно распространить на более общие граничные сингулярные множества.

**Теорема 2.2.** *Предположим, что  $p > \frac{N+1}{N-1}$  и  $\frac{N+1}{N-1} < r < p$ . Пусть выполнено одно из следующих условий:*

- (i)  $q = \frac{2p}{p+1}$ ,

$$M < m_{r}^{**} := (p+1) \left(\frac{p-r}{p(r-1)}\right)^{\frac{p}{p+1}}; \tag{2.11}$$

- (ii)  $1 < q < \frac{2p}{p+1}$ ,  $r \leq 3$ ,  $M$  – произвольное.

Тогда если  $K \subset \partial\Omega$  – компактное множество такое, что  $\text{cap}_{\frac{\partial\Omega}{r}, r'}^{\partial\Omega}(K) = 0$ , то любое решение  $u$  задачи

$$\mathcal{L}_{p,q,M} u = 0 \text{ в } \Omega, \quad u = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus K \tag{2.12}$$

тождественно равно 0.

*Доказательство.* Принцип доказательства в определенной степени аналогичен: положим  $u = v^b$  при некотором  $b \in (0, 1)$  и сведем (2.10) к неравенству типа

$$-\Delta v + C_1 v^r \leq C_2 \text{ в } \Omega, \quad v = 0 \text{ на } \partial\Omega \setminus K, \tag{2.13}$$

где  $C_1, C_2 > 0$ . Поскольку  $\text{cap}_{\frac{\partial\Omega}{r}, r'}^{\partial\Omega}(K) = 0$ , по теореме об устранимости (см. [18])  $v$  ограничено сверху, и результат легко получается при подходящем выборе пробных функций.  $\square$

### 3. ЗАДАЧИ С ДАННЫМИ-МЕРАМИ

Естественным пространством пробных функций для изучения краевых задач является пространство  $\mathbb{X}(\Omega)$ , определенное формулой (2.3).

**Определение 3.1.** Пусть  $\mu \in \mathfrak{M}(\partial\Omega)$  и  $p, q \geq 1$ . Борелевская функция  $u$ , определенная в  $\Omega$ , является *слабым решением* задачи

$$\begin{aligned} -\Delta u + |u|^{p-1}u - M|\nabla u|^q &= 0 && \text{в } \Omega, \\ u &= \mu && \text{на } \partial\Omega, \end{aligned} \tag{3.1}$$

если  $u \in L^1(\Omega) \cap L^p_\rho(\Omega)$ ,  $\nabla u \in L^q_\rho(\Omega)$  и

$$\int_{\Omega} (-u\Delta\zeta + (|u|^{p-1}u - M|\nabla u|^q)\zeta) dx = - \int_{\partial\Omega} \frac{\partial\zeta}{\partial\mathbf{n}} d\mu \quad \text{для всех } \zeta \in \mathbb{X}(\Omega). \quad (3.2)$$

Следующие две задачи, в которых  $\mu$  является мерой Радона на  $\partial\Omega$ , естественным образом связаны с задачей (3.1).

1. Уравнение Эмдена—Фаулера:

$$\begin{aligned} -\Delta v + |v|^{p-1}v &= 0 && \text{в } \Omega, \\ v &= \mu && \text{на } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.3)$$

2. Уравнение Риккати:

$$\begin{aligned} -\Delta w - M|\nabla w|^q &= 0 && \text{в } \Omega, \\ w &= \mu && \text{на } \partial\Omega. \end{aligned} \quad (3.4)$$

В [18] доказано, что задача (3.3) допускает решение, обязательно единственное, тогда и только тогда, когда

$$\text{для любого борелевского множества } E \subset \partial\Omega : \text{cap}_{\frac{\partial\Omega}{p}, p'}(E) = 0 \implies |\mu|(E) = 0. \quad (3.5)$$

Относительно задачи (3.4) в [8] доказано, что она имеет решение, если для некоторого  $C > 0$   $\mu$  удовлетворяет условию

$$\text{для любого борелевского множества } E \subset \partial\Omega : |\mu|(E) \leq C \text{cap}_{\frac{\partial\Omega}{2-q}, q'}(E). \quad (3.6)$$

Комбинируя эти два результата, мы получим следующую теорему.

**Теорема 3.1.** Пусть  $p > 1$ ,  $1 < q < 2$ ,  $\mu$  — неотрицательная мера Радона на  $\partial\Omega$ , которая при некотором  $C > 0$  удовлетворяет

$$\mu(E) \leq C \min \left\{ \text{cap}_{\frac{\partial\Omega}{2-q}, q'}(E), \text{cap}_{\frac{\partial\Omega}{p}, p'}(E) \right\} \quad \text{для любого борелевского множества } E \subset \partial\Omega. \quad (3.7)$$

Тогда существует  $c_0 > 0$  такое, что для любого  $0 < c \leq c_0$  существует неотрицательное слабое решение (3.2) с граничными данными  $c\mu$ . Кроме того, граничным следом и является мера  $c\mu$ .

**Замечание.** Никаких условий на  $\text{cap}_{\frac{\partial\Omega}{p}, p'}$  (соответственно, на  $\text{cap}_{\frac{\partial\Omega}{2-q}, q'}$ ) не требуется, если  $1 < p < \frac{N+1}{N-1}$  (соответственно,  $1 < q < \frac{N+1}{N}$ ) в силу теоремы вложения Соболева—Морри.

*Сокращенное доказательство.* Поскольку положительное решение  $v_\mu$  уравнения (3.3) является субрешением  $\mathcal{L}_{p,q,M}u = 0$  и меньше любого решения  $w_\mu$  уравнения (3.4), которое является суперрешением для  $\mathcal{L}_{p,q,M}u = 0$ , то из [11] следует, что существует функция  $u \in W_{loc}^{1,2}(\Omega)$ , которая удовлетворяет  $v_\mu \leq u \leq w_\mu$  в  $\Omega$  и

$$\mathcal{L}_{p,q,M}u = 0 \quad \text{в } \Omega. \quad (3.8)$$

Функция  $u$  принадлежит  $C^1$ . Следовательно, по принципу сэндвича,

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\rho(x)=\delta} w_\mu Z dS(x) = \int_{\partial\Omega} Z d\mu = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\rho(x)=\delta} v_\mu Z dS(x) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\rho(x)=\delta} u Z dS(x) \quad (3.9)$$

для всех  $Z \in C(\bar{\Omega})$ ,  $Z \geq 0$ . Ограничение  $Z \geq 0$  можно снять, и это означает, что  $u$  допускает граничный след в динамическом определении граничного следа [19]. Поэтому мы обозначим  $u = u_\mu$ . Чтобы утверждать, что  $u_\mu$  является слабым решением в смысле определения 3.1, нам потребуются некоторые оценки. Обозначим через  $\mathbb{P}_\Omega[\cdot]$  оператор Пуассона в  $\Omega$ .

Оценка решений: выполняется

$$v_\mu \leq \mathbb{P}_\Omega[\mu] \leq w_\mu \leq c\mathbb{P}_\Omega[\mu],$$

(см. [8]) и

$$0 \leq v_\mu \leq u_\mu \leq w_\mu \leq c\mathbb{P}_\Omega[\mu].$$

Если  $\mu$  удовлетворяет условию (3.6), то существует  $C' > 0$  такое, что при  $0 < c \leq C'$  существует неотрицательное решение  $z \in L^1(\Omega) \cap L^p_\rho(\Omega)$  задачи

$$\begin{aligned} -\Delta z - z^p &= 0 && \text{в } \Omega, \\ z &= c\mu && \text{на } \partial\Omega \end{aligned} \quad (3.10)$$

(см. [2]). Оно очевидно удовлетворяет  $c\mathbb{P}_\Omega[\mu] \leq z$ . Тогда  $w_\mu \in L^p_\rho(\Omega) \implies u_\mu \in L^p_\rho(\Omega)$ .

Для градиента положим  $\phi = \mathbb{G}_\Omega[u_\mu^p]$ , тогда  $\phi \geq 0$  и

$$-\Delta(u_\mu + \phi) = |\nabla u_\mu|^q \geq 0.$$

По теореме Дуба

$$-\Delta(u_\mu + \phi) \in L^1_\rho(\Omega) \implies |\nabla u_\mu| \in L^q_\rho(\Omega).$$

Так как  $u_\mu \in L^p_\rho(\Omega)$ ,  $|\nabla u_\mu| \in L^q_\rho(\Omega)$  и  $u_\mu$  имеет граничный след  $\mu$ , то нетрудно доказать, что это слабое решение.  $\square$

Условие (3.7) в большинстве случаев можно упростить, используя классические результаты о бесселевых емкостях [1], которые дают в общем виде

$$\text{cap}_{\beta,b}^{\partial\Omega}(E) \leq c \left( \text{cap}_{\alpha,a}^{\partial\Omega}(E) \right)^\theta \quad \text{для всех борелевских множеств } E \subset \partial\Omega$$

при подходящих условиях, включающих  $a, p > 1$ ,  $\alpha, \beta > 0$  и  $\theta \geq 1$ . Докажем два следствия.

**Следствие 3.1.** *Предположим, что  $p \geq \frac{N+1}{N-1}$  и  $\frac{2p}{p+1} \leq q < 2$ . Если  $\mu$  — неотрицательная мера Радона на  $\partial\Omega$ , удовлетворяющая при некотором  $C > 0$  условию*

$$\mu(E) \leq C \text{cap}_{\frac{2-p}{2}, q'}^{\partial\Omega}(E) \quad \text{для всех борелевских множеств } E \subset \partial\Omega, \quad (3.11)$$

то выполняется утверждение теоремы 3.1.

**Следствие 3.2.** *Предположим, что  $\frac{N+1}{N} \leq q < \frac{2p}{p+1}$ . Если  $\mu$  — неотрицательная мера Радона на  $\partial\Omega$  такая, что при некоторой константе  $C > 0$  для любого борелевского множества справедливо  $E \subset \partial\Omega$ ,*

$$\mu(E) \leq C \text{cap}_{\frac{2}{p}, p'}^{\partial\Omega}(E), \quad (3.12)$$

то выполняется утверждение теоремы 3.1.

**Замечание.** Отметим, что в силу следствий 3.1, 3.2 и замечания после теоремы 3.1 мы покрываем весь диапазон  $(p, q) \in (1, \infty) \times (1, 2)$  и показываем, что используется единственная бесселева емкость.

#### 4. ОТДЕЛИМЫЕ РЕШЕНИЯ

Отделимые решения уравнения (1.1) выражаются в сферических координатах  $x = (r, \sigma)$  в  $\mathbb{R}^N \sim \mathbb{R}_+ \times S^{N-1}$  в виде

$$u(x) = u(r, s) = r^{-\alpha} \omega(s).$$

Для уравнения (1.1) существование таких решений в конусе  $C_S := (0, \infty) \times S$ , порожденном сферической областью  $S \subseteq S^{N-1}$ , накладывает условия  $q = \frac{2p}{p+1}$  и  $\alpha = \frac{2}{p-1}$ . Тогда  $\omega$  удовлетворяет

$$\mathcal{S}_{p,M} \omega := -\Delta' \omega + \alpha(N-2-\alpha)\omega + |\omega|^{p-1} \omega - M(\alpha^2 \omega^2 + |\nabla' \omega|^2)^{\frac{p}{p+1}} = 0 \quad \text{в } S, \quad (4.1)$$

где  $\Delta'$  — оператор Лапласа—Бельтрами на  $S^{N-1}$ .

1. Если  $S = S^{N-1}$ , то положительные решения единственны и постоянны. Задача вполне разрешима.
2. Если мы имеем дело с граничными особенностями, то модельным случаем является  $S = S_+^{N-1}$ , а проблема изолированных граничных особенностей принимает вид

$$\mathcal{S}_{p,M} \omega = 0 \quad \text{в } S_+^{N-1}, \quad \omega = 0 \quad \text{на } \partial S_+^{N-1}. \quad (4.2)$$

При  $M = 0$  в [15] доказано, что не существует положительного решения, если  $p \geq \frac{N+1}{N-1}$ . Наш основной результат состоит в следующем.

**Теорема 4.1.** *Существует положительное решение  $\omega$  задачи (4.2), если выполняется одно из следующих условий:*

- (i)  $1 < p < \frac{N+1}{N-1}$  и  $M \geq 0$ ;
- (ii)  $p = \frac{N+1}{N-1}$  и  $M > 0$ ;
- (iii)  $1 < p < 3$  или  $p > \frac{N+1}{N-1}$  и  $M \geq M_{N,p}$  для некоторого явного значения  $M_{N,p} > 0$ .

*Сокращенное доказательство.* Существование получается построением суперрешений (фактически достаточно больших констант) и субрешений вида  $\delta\phi_1$ , где  $\phi_1$  — первая собственная функция оператора  $-\Delta'$  в  $W_0^{1,2}(S^{N-1})$  и  $\delta > 0$  достаточно малое. Таким образом,  $\mathcal{S}_{p,M}(\delta\phi_1) \leq 0$  и существование снова следует согласно [11].  $\square$

Результат существования (iii) довольно точен, поскольку имеет место следующее утверждение.

**Теорема 4.2.** *Пусть  $p > \frac{N+1}{N-1}$ . Если  $M \leq t^{**}$  (см. (2.4)), то не существует положительного решения  $\omega$  задачи (4.2).*

Доказательство тонкое и основано на преобразовании  $\omega = \eta^b$ ,  $b > 0$ .

## 5. СИНГУЛЯРНЫЕ РЕШЕНИЯ

В докритическом случае при  $1 < p < \frac{N+1}{N-1}$  и  $0 < q < \frac{N+1}{N}$  для любых  $M > 0$  и  $k > 0$  существуют *минимальные фундаментальные решения* — положительные решения уравнения (1.1) в  $\Omega$ , обращающиеся в нуль на  $\partial\Omega \setminus \{0\}$  и такие, что

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u_k(x)}{\mathbb{P}_\Omega(x)} = k. \quad (5.1)$$

Они являются решениями уравнения  $\mathcal{L}_{p,q,M}u = 0$  в  $\Omega$  такими, что  $u = k\delta_0$  на  $\partial\Omega$ .

Отображение  $k \mapsto u_k$  является возрастающим (между минимальными решениями, поскольку единственность может не выполняться), и имеет место

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{u_\infty(x)}{\mathbb{P}_\Omega(x)} = \infty. \quad (5.2)$$

Поскольку функции  $u_k$  равномерно локально ограничены сверху в  $\bar{\Omega} \setminus \{0\}$  оценкой (2.6), существует  $u_\infty = \lim_{k \rightarrow \infty} u_k$ .

Чтобы охарактеризовать  $u_\infty$ , мы введем следующую задачу:

$$\begin{aligned} -\Delta'\psi + \alpha(N-2-\alpha)\psi + |\psi|^{p-1}\psi &= 0 && \text{в } S_+^{N-1}, \\ \psi &= 0 && \text{на } \partial S_+^{N-1}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Существование и единственность положительного решения задачи (5.3) при  $1 < q < \frac{N+1}{N-1}$  доказаны в [15]. Чтобы описать особенность в точке 0, мы предполагаем, что  $\partial\mathbb{R}_+^N \sim \mathbb{R}^{N-1}$  является касательной гиперплоскостью к  $\partial\Omega$  в точке 0, а вектор нормали  $\mathbf{e}_N$  — вектор внутренней единичной нормали к  $\Omega$  в точке 0. Будем говорить, что  $\Omega$  находится в *нормальной ситуации* в точке 0. Наш основной результат о поведении положительного решения вблизи изолированной особенности на границе состоит в следующем.

**Теорема 5.1.** *Пусть  $\Omega$  —  $C^2$ -гладкая область и  $0 \in \partial\Omega$  в нормальной ситуации в точке 0,  $1 < p < \frac{N+1}{N-1}$ ,  $1 < q < \frac{N+1}{N}$  и  $M > 0$ . Предположим, что  $u$  — положительная функция, удовлетворяющая условию (2.1).*



1. Если  $1 < q < \frac{2p}{p+1}$ , тогда

(i) либо

$$\lim_{r \rightarrow 0} r^\alpha u(r, \cdot) = \psi \text{ локально равномерно на } S_+^{N-1}, \quad (5.4)$$

где  $\psi$  — единственное положительное решение задачи (5.3);

(ii) либо существует  $k \geq 0$  такое, что выполняется равенство (5.1). Если  $k = 0$ , тогда  $u \equiv 0$  в  $\Omega$ .

2. Если  $q = \frac{2p}{p+1}$ , тогда

(i) либо  $u \geq u_\infty$  и

$$\psi \leq \liminf_{r \rightarrow 0} r^\alpha u(r, \cdot) \leq \limsup_{r \rightarrow 0} r^\alpha u(r, \cdot) = \bar{\omega} \text{ локально равномерно на } S_+^{N-1}, \quad (5.5)$$

где  $\bar{\omega}$  — максимальное положительное решение задачи (4.2);

(ii) либо выполнено утверждение (ii) случая 1.

*Доказательство.* Доказательство громоздкое и использует сведение задачи к квазиавтономному уравнению второго порядка, как это было сделано в [15].  $\square$

**Замечание.** В случае 1(i)  $u = u_\infty$  — единственное положительное решение (1.1), обращающееся в нуль на  $\partial\Omega \setminus \{0\}$  и удовлетворяющее условию (5.2).

Если  $\frac{2p}{p+1} < q < p$ , то разрушение решения моделируется уравнением эйконала (1.4). Скорость разрушения имеет порядок  $r^{-\gamma}$ , где показатель степени  $\gamma$  равен

$$\gamma = \frac{q}{p-q}.$$

Обратите внимание, что в этом диапазоне  $\gamma > \alpha$ . Это уравнение существенно изотропно, поэтому трудно построить сингулярные решения, обращающиеся в нуль на границе, кроме одной точки. Тонкими построениями с использованием суб- и суперрешений получен следующий результат.

**Теорема 5.2.** *Предположим, что  $M > 0$ ,  $p > 1$  и  $\frac{2p}{p+1} < q < \min\{2, p\}$ . Тогда существует положительное решение  $u \in \mathbb{R}_+^N$  уравнения (1.1), которое обращается в нуль на  $\partial\mathbb{R}_+^N \setminus \{0\}$  и такое, что*

$$c_3 \phi_1(\sigma) r^{-\gamma} \leq u(r, s) \leq c_4 \max \left\{ r^{-\alpha}, M^{\frac{1}{p-q}} r^{-\gamma} \right\} \quad (5.6)$$

для всех  $(r, s) \in (0, r^*) \times \overline{S_+^{N-1}}$  при некотором  $r^* \in (0, \infty]$ , где  $c_3, c_4 > 0$  зависят от  $N, p, q$ . Если  $Nq > (N-1)p$ , то  $r^* = \infty$ .

Результат можно адаптировать к решению в ограниченной области  $\Omega$  с изолированной особенностью в точке  $0 \in \partial\Omega$ .

## 6. ОТКРЫТЫЕ ЗАДАЧИ

**Задача 1.** В работах M. F. Bidaut-Véron, M. Garcia-Huidobro и L. Véron доказано, что если

$$\max \left\{ \frac{N}{N-1}, \frac{2p}{p+1} \right\} < q < \min\{2, p\} \text{ и } M > 0,$$

то существует бесконечно много радиальных решений уравнения (1.1) в  $B_R \setminus \{0\}$  для малых  $R$ , которые удовлетворяют

$$u(r) = \xi_M r^{-\beta} (1 + o(1)) \text{ при } r \rightarrow 0, \quad (6.1)$$

где

$$\beta = \frac{2-q}{q-1} \text{ и } \xi_M = \frac{1}{\beta} \left( \frac{(N-1)q - N}{M(p-1)} \right)^{\frac{1}{p-1}}. \quad (6.2)$$

Эти решения обладают тем свойством, что скорость их разрушения меньше, чем у явного радиального отделимого решения. Было бы интересно построить аналогичные решения уравнения (1.1) в  $\mathbb{R}_+^N$  (или, что более вероятно, в  $B_R^+$ ), которые обращаются в нуль на  $\partial\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ .

**Задача 2.** Можно ли определить граничный след для любого положительного решения уравнения (1.1) в  $\mathbb{R}_+^N$ , учитывая тот факт, что такой результат справедлив по отдельности для положительных решений уравнений (1.3) и (1.5)? Заметим, что если  $u \in L_\rho^p(\Omega)$ , то применима теория неотрицательных супергармонических с точностью до возмущения в  $L_\rho^1(\Omega)$  функций [12]: таким образом,  $\nabla u \in L_\rho^q(\Omega)$  и существует неотрицательная мера Радона  $\mu$  такая, что  $u$  является решением задачи (3.1). Далее, если  $\nabla u \in L_\rho^q(\Omega)$ , то может быть легко адаптирована теория граничного следа положительных решений уравнения Эмдена—Фаулера, развитая в [17]. В этом случае существуют замкнутое множество  $\mathcal{S} \subset \partial\Omega$  и неотрицательная мера Радона  $\mu$  в  $\mathcal{R} := \partial\Omega \setminus \mathcal{S}$  такие, что

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\{x: \rho(x)=\tau\} \cap B_\epsilon(x)} u dS(x) = \infty \quad (6.3)$$

для всех  $x \in \mathcal{S}$  и  $\epsilon > 0$ , и

$$\lim_{\tau \rightarrow 0} \int_{\{x: \rho(x)=\tau\}} \zeta(x) u dS(x) = \int_{\mathcal{R}} \zeta d\mu \quad (6.4)$$

для всех  $\zeta \in C(\overline{\Omega})$ , обращающихся в нуль в окрестности  $\mathcal{S}$ . Трудность для уравнения (1.1) возникает из-за того, что в некоторых граничных точках  $x$  выполняется

$$\int_{\Omega \cap B_\epsilon(x)} u^p \rho dx = \int_{\Omega \cap B_\epsilon(x)} |\nabla u|^q \rho dx = \infty \quad (6.5)$$

при некотором  $\epsilon > 0$ .

**Задача 3.** Единственны ли слабые решения задачи Дирихле (3.1) с граничными данными-мерами? Обратим внимание, что существует мало результатов единственности для решений с изолированными граничными особенностями, которые могут быть получены с использованием методов масштабирования (при геометрических ограничениях на область).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Adams D., Hedberg L. Function spaces and potential theory. — London—Berlin—Heidelberg—New York: Springer, 1996.
2. Adams D. R., Pierre M. Capacitary strong type estimates in semilinear problems// Ann. Inst. Fourier (Grenoble). — 1991. — 41. — С. 117–135.
3. Alarcón S., García-Melián J., Quaas A. Nonexistence of positive supersolutions to some nonlinear elliptic problems// J. Math. Pures Appl. — 2013. — 90. — С. 618–634.
4. Baras P., Pierre M. Singularités éliminable pour des équations semi-linéaires// Ann. Inst. Fourier. — 1984. — 34, № 1. — С. 185–206.
5. Bidaut-Véron M. F., Garcia-Huidobro M., Véron L. A priori estimates for elliptic equations with reaction terms involving the function and its gradient// Math. Ann. — 2020. — 378. — С. 13–58.
6. Bidaut-Véron M. F., Garcia-Huidobro M., Véron L. Measure data problems for a class of elliptic equations with mixed absorption-reaction// Adv. Nonlinear. Stud. — 2020. — 21. — С. 261–280.
7. Bidaut-Véron M. F., Garcia-Huidobro M., Véron L. Boundary singular solutions of a class of equations with mixed absorption-reaction// Calc. Var. Part. Differ. Equ. — 2022. — 61, № 3. — 113.
8. Bidaut-Véron M. F., Hoang G., Nguyen Q. H., Véron L. An elliptic semilinear equation with source term and boundary measure data: the supercritical case// J. Funct. Anal. — 2015. — 269. — С. 1995–2017.
9. Bidaut-Véron M. F., Ponce A., Véron L. Isolated boundary singularities of semilinear elliptic equations// Calc. Var. Part. Differ. Equ. — 2011. — 40. — С. 183–221.
10. Bidaut-Véron M. F., Véron L. Trace and boundary singularities of positive solutions of a class of quasilinear equations// Discr. Cont. Dyn. Syst. — 2022. — в печати.
11. Boccardo L., Murat F., Puel J. P. Résultats d'existence pour certains problèmes elliptiques quasilinéaires// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (4). — 1984. — 11. — С. 213–235.
12. Doob J. L. Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart. — London—Berlin—Heidelberg—New York: Springer, 1984.
13. Gidas B., Spruck J. Global and local behaviour of positive solutions of nonlinear elliptic equations// Commun. Pure Appl. Math. — 1981. — 34. — С. 525–598.
14. Gilbarg D., Trudinger N. Elliptic partial differential equations of second order. — London—Berlin—Heidelberg—New York: Springer, 1983.

15. *Gmira A., Véron L.* Boundary singularities of solutions of some nonlinear elliptic equations// Duke Math. J. — 1991. — 64. — C. 271–324.
16. *Marcus M., Nguyen P. T.* Elliptic equations with nonlinear absorption depending on the solution and its gradient// Proc. Lond. Math. Soc. — 2015. — 111. — C. 205–239.
17. *Marcus M., Véron L.* The boundary trace of positive solutions of semilinear elliptic equations: the subcritical case// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1998. — 144. — C. 200–231.
18. *Marcus M., Véron L.* Removable singularities and boundary traces// J. Math. Pures Appl. — 2001. — 80. — C. 879–900.
19. *Marcus M., Véron L.* Nonlinear elliptic equations involving measures. — Berlin: de Gruyter, 2014.
20. *Nguyen P. T., Véron L.* Boundary singularities of solutions to elliptic viscous Hamilton–Jacobi equations// J. Funct. Anal. — 2012. — 263. — C. 1487–1538.
21. *Véron L.* Singular solutions of some nonlinear elliptic equations// Nonlinear Anal. — 1981. — 5. — C. 225–242.
22. *Véron L.* Local and global aspects of quasilinear degenerate elliptic equations. — Hackensack: World Scientific, 2017.

Laurent Véron

Institut Denis Poisson, Université de Tours, Тур, Франция

E-mail: [veronl@univ-tours.fr](mailto:veronl@univ-tours.fr)

DOI 10.22363/2413-3639-2022-68-4-564-574

UDC 517.957

## Boundary singular problems for quasilinear equations involving mixed reaction-diffusion

L. Véron

*Institut Denis Poisson, Université de Tours, Tours, France*

We study the existence of solutions to the problem

$$\begin{aligned} -\Delta u + u^p - M|\nabla u|^q &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u &= \mu && \text{on } \partial\Omega \end{aligned} \quad (1)$$

in a bounded domain  $\Omega$ , where  $p > 1$ ,  $1 < q < 2$ ,  $M > 0$ ,  $\mu$  is a nonnegative Radon measure in  $\partial\Omega$ , and the associated problem with a boundary isolated singularity at  $a \in \partial\Omega$ ,

$$\begin{aligned} -\Delta u + u^p - M|\nabla u|^q &= 0 && \text{in } \Omega, \\ u &= 0 && \text{on } \partial\Omega \setminus \{a\}. \end{aligned} \quad (2)$$

The difficulty lies in the opposition between the two nonlinear terms which are not on the same nature. Existence of solutions to (1) is obtained under a capacity condition

$$\mu(K) \leq c \min \left\{ \text{cap}_{\frac{\partial\Omega}{p}, p'}, \text{cap}_{\frac{\partial\Omega}{q}, q'} \right\} \quad \text{for all compacts } K \subset \partial\Omega.$$

Problem (2) depends on several critical exponents on  $p$  and  $q$  as well as the position of  $q$  with respect to  $\frac{2p}{p+1}$ .

**Keywords:** reaction-diffusion equation, boundary singular problem, measure as boundary data, isolated boundary singularity

**For citation:** L. Véron, “Boundary singular problems for quasilinear equations involving mixed reaction-diffusion,” *Sourem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2022, vol. 68, No. 4, 564–574. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-564-574>



## REFERENCES

1. D. Adams and L. Hedberg, *Function Spaces and Potential Theory*, Springer, London–Berlin–Heidelberg–New York, 1996.
2. D. R. Adams and M. Pierre, “Capacitary strong type estimates in semilinear problems,” *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, 1991, **41**, 117–135.
3. S. Alarcón, J. García-Melián, and A. Quaas, “Nonexistence of positive supersolutions to some nonlinear elliptic problems,” *J. Math. Pures Appl.*, 2013, **90**, 618–634.
4. P. Baras and M. Pierre, “Singularités éliminable pour des équations semi-linéaires,” *Ann. Inst. Fourier*, 1984, **34**, No. 1, 185–206.
5. M. F. Bidaut-Véron, M. Garcia-Huidobro, and L. Véron, “A priori estimates for elliptic equations with reaction terms involving the function and its gradient,” *Math. Ann.*, 2020, **378**, 13–58.
6. M. F. Bidaut-Véron, M. Garcia-Huidobro, and L. Véron, “Measure data problems for a class of elliptic equations with mixed absorption-reaction,” *Adv. Nonlinear. Stud.*, 2020, **21**, 261–280.
7. M. F. Bidaut-Véron, M. Garcia-Huidobro, and L. Véron, “Boundary singular solutions of a class of equations with mixed absorption-reaction,” *Calc. Var. Part. Differ. Equ.*, 2022, **61**, No. 3, 113.
8. M. F. Bidaut-Véron, G. Hoang, Q. H. Nguyen, and L. Véron, “An elliptic semilinear equation with source term and boundary measure data: the supercritical case,” *J. Funct. Anal.*, 2015, **269**, 1995–2017.
9. M. F. Bidaut-Véron, A. Ponce, and L. Véron, “Isolated boundary singularities of semilinear elliptic equations,” *Calc. Var. Part. Differ. Equ.*, 2011, **40**, 183–221.
10. M. F. Bidaut-Véron and L. Véron, “Trace and boundary singularities of positive solutions of a class of quasilinear equations,” *Discr. Cont. Dyn. Syst.*, to appear (2022).
11. L. Boccardo, F. Murat, and J. P. Puel, “Résultats d’existence pour certains problèmes elliptiques quasilinéaires,” *Ann. Sc. Norm. Super. Pisa Cl. Sci. (4)*, 1984, **11**, 213–235.
12. J. L. Doob, *Classical Potential Theory and Its Probabilistic Counterpart*, Springer, London–Berlin–Heidelberg–New York, 1984.
13. B. Gidas and J. Spruck, “Global and local behaviour of positive solutions of nonlinear elliptic equations,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1981, **34**, 525–598.
14. D. Gilbarg and N. Trudinger, *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer, London–Berlin–Heidelberg–New York, 1983.
15. A. Gmira and L. Véron, “Boundary singularities of solutions of some nonlinear elliptic equations,” *Duke Math. J.*, 1991, **64**, 271–324.
16. M. Marcus and P. T. Nguyen, “Elliptic equations with nonlinear absorption depending on the solution and its gradient,” *Proc. Lond. Math. Soc.*, 2015, **111**, 205–239.
17. M. Marcus and L. Véron, “The boundary trace of positive solutions of semilinear elliptic equations: the subcritical case,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1998, **144**, 200–231.
18. M. Marcus and L. Véron, “Removable singularities and boundary traces,” *J. Math. Pures Appl.*, 2001, **80**, 879–900.
19. M. Marcus and L. Véron, *Nonlinear Elliptic Equations Involving Measures*, de Gruyter, Berlin, 2014.
20. P. T. Nguyen and L. Véron, “Boundary singularities of solutions to elliptic viscous Hamilton–Jacobi equations,” *J. Funct. Anal.*, 2012, **263**, 1487–1538.
21. L. Véron, “Singular solutions of some nonlinear elliptic equations,” *Nonlinear Anal.*, 1981, **5**, 225–242.
22. L. Véron, *Local and Global Aspects of Quasilinear Degenerate Elliptic Equations*, World Scientific, Hackensack, 2017.

Laurent Véron

Institut Denis Poisson, Université de Tours, Tours, France

E-mail: veronl@univ-tours.fr

## ПОСТРОЕНИЕ ПЛОСКИХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ С НЕПРОСТОЙ ОСОБОЙ ТОЧКОЙ ЗАДАННОЙ ТОПОЛОГИЧЕСКОЙ СТРУКТУРЫ

С. В. Волков

*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

Рассматривается задача построения  $n$ -линейных ( $n \geq 2$ ) плоских векторных полей с изолированной особой точкой и заданными сепаратрисами определенных типов. Такие построения основаны на использовании векторной алгебры, качественной теории динамических систем второго порядка и классических методов исследования их особых точек. Эта задача по существу является обратной задачей качественной теории обыкновенных дифференциальных уравнений, и ее решение может быть использовано для синтеза математических моделей управляемых динамических систем различной физической природы.

**Ключевые слова:** векторное поле, ОДУ, топологическая структура, особая точка, сепаратриса, обратная задача качественной теории ОДУ, математическая модель, программируемое движение, управляемая частица

**Для цитирования:** С. В. Волков. Построение плоских векторных полей с непростой особой точкой заданной топологической структуры // Соврем. мат. Фундам. направл. 2022. Т. 68, № 4. С. 575–595. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-575-595>

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Векторное поле  $\vec{v} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$  связано с соответствующей системой обыкновенных дифференциальных уравнений (ОДУ)

$$\dot{x} = P(x, y), \quad \dot{y} = Q(x, y), \quad (1.1)$$

и наоборот. Поэтому построение векторного поля  $\vec{v}$  с требуемыми свойствами по существу является обратной задачей качественной теории ОДУ и предполагает восстановление уравнений (1.1) из их фазового портрета заданной топологической структуры. Топологическая структура векторного поля класса  $C^0$  полностью определяется набором его особых орбит (а именно, особых точек, сепаратрис и предельных циклов), их типами и взаимным расположением [9]. В частности, эта информация может быть представлена как:

- (1) набор интегральных кривых [6];
- (2) набор простых особых точек заданных типов (седла, фокусы, узлы) [1];
- (3) набор предельных циклов заданных типов [2];
- (4) непростая критическая точка со своими сепаратрисами заданных типов [13];
- (5) набор всех особых орбит, топологическая структура которых задана в некоторой ограниченной области фазовой плоскости [3, 17, 18].

---

Публикация подготовлена при поддержке Программы РУДН «5-100».



Примерами таких задач являются обратные задачи классической механики, а именно: задача Ньютона об определении сил, под действием которых планеты движутся по законам Кеплера [14]; задача Бертрана о нахождении позиционной силы, заставляющей частицу двигаться по коническому сечению вне зависимости от начальных условий этой частицы [11]; задача Суслова о поиске силовой функции, при которой голономная система с  $n$  степенями свободы имеет  $n - 1$  заданных независимых интегралов [8]; задача Мещерского — обратная задача динамики частицы с переменной массой, заключающаяся в нахождении закона изменения массы для обеспечения требуемой траектории и заданного закона движения частицы по этой траектории [7]; и другие проблемы, рассмотренные в [4]. В дальнейшем заметный рост интереса к обратным задачам теории ОДУ был вызван потребностями теории управления, когда к требованию существования заданных фазовых орбит добавились требования устойчивости, оптимальности и другие свойства движений управляемых систем [5].

В работе рассматривается построение плоских векторных полей, компоненты которых являются однородными полиномами одинаковой степени, а фазовые портреты которых имеют только одну изолированную непростую особую точку с сепаратрисами заданных типов. Известные решения этой задачи предполагают построение рациональной дроби, представляющей собой разность наклонов искомого векторного поля и центрального векторного поля с центром в особой точке. Набор нулей этой дроби и их свойства должны соответствовать заданному набору сепаратрис и их типам. Такой подход, обратный методу раздутья для исследования особых точек системы (1.1), можно охарактеризовать как алгебраический.

Целью данной статьи является представление другого метода, основанного на использовании скалярных и векторных произведений искомого и указанного выше центрального векторных полей, причем последнее является векторным полем направлений сравнения. Такой подход можно назвать геометрическим, и его главной особенностью является возможность использовать любое векторное поле класса  $C^0$  в качестве векторного поля направлений сравнения. Это позволяет строить векторные поля любой топологической структуры, приемлемой для векторных полей этого класса (случай, указанный выше в пункте (5)).

В данной статье геометрический подход применяется для решения задач указанного в заглавии типа.

## 2. ПОСТАНОВКА ОСНОВНОЙ ЗАДАЧИ

Построим векторные поля  $\vec{v} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$ , удовлетворяющие следующим требованиям:

- (i) компоненты  $P(x, y)$  и  $Q(x, y)$  являются однородными полиномами одинаковой степени, причем  $P(x, y)^2 + Q(x, y)^2 \neq 0$  за исключением случая  $x = y = 0$ ;
- (ii) топологическая структура фазового портрета определяется:
  - (a) по заданному набору его интегральных прямых

$$\Lambda_i : \omega_i(x, y) \equiv a_i x + b_i y = 0 \quad (i = \overline{1, m}); \quad (2.1)$$

- (b) по заданным типам сепаратрис  $L_{ij}$  ( $i = \overline{1, m}$ ,  $j = 1, 2$ ), лежащих на соответствующих прямых  $\Lambda_i$ :

$$\Lambda_i = L_{i1} \cup \{O\} \cup L_{i2} \quad (i = \overline{1, m}),$$

где  $O(0; 0)$  — особая точка.

**Замечание 2.1.** Поскольку векторное поле  $\vec{v} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$  связано с системой дифференциальных уравнений (1.1), поставленная задача идентична задаче построения правых частей  $P(x, y), Q(x, y)$  этих уравнений, фазовый портрет которых удовлетворяет требованиям пунктов (i) и (ii). Таким образом, мы можем использовать результаты [6, 10, 12] для обоснования приведенного ниже решения поставленной задачи.

## 3. ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ И ПРЕДПОЛОЖЕНИЯ

Согласно [10], существует четыре типа сепаратрис особых точек, а именно: *параболическая*, *гиперболическая*, *параболическая слева* и *параболическая справа*. Последние два типа называются *смешанными*.

Обозначим через  $K(\theta)$  открытый сектор, ограниченный сепаратрисой  $L$  и лучом, исходящими из начала координат  $O$  и образующими угол  $\theta$ , отсчитываемый от  $L$  с учетом знака. Тогда сепаратрису  $L$  можно назвать *параболической справа* (соответственно, *слева*), если существует  $\theta > 0$  такое, что для всех орбит в  $K(-\theta)$  (соответственно,  $K(\theta)$ ) сепаратриса  $L$  является касательной в особой точке, а для орбит в  $K(\theta)$  (соответственно,  $K(-\theta)$ ) не является.

Очевидно, что типы смежных сепаратрис  $L_{ij}$  и  $L_{i+1,j}$  критической точки ( $i = \overline{1, m}$ ;  $j = 1, 2$ ;  $L_{m+1,1} = L_{12}$ ,  $L_{m+1,2} = L_{11}$ ) определяют тип ограничиваемого ими сектора  $S_{ij}$ . Эти секторы могут быть гиперболическими, эллиптическими, параболическими справа и параболическими слева. В частности, сектор  $S_{ij}$  называется *параболическим справа* (соответственно, *слева*), если при достаточно малом  $\theta > 0$  для всех орбит в  $K_{ij}(\theta)$  (соответственно,  $K_{i+1,j}(-\theta)$ ) сепаратриса  $L_{ij}$  (соответственно,  $L_{i+1,j}$ ) является касательной в особой точке  $O$ , а все орбиты в  $K_{i+1,j}(-\theta)$  (соответственно,  $K_{ij}(\theta)$ ) не имеют касательной в точке  $O$ .

Приведенная выше классификация сепаратрис и секторов используется в дальнейшем для формулировки требований подпункта (b) в разделе 2.

**Замечание 3.1.** Для любого векторного поля рассматриваемого типа все лучи, исходящие из критической точки  $O$ , являются изоклинами. Поэтому топологическая структура такого векторного поля и соответствующей системы (1.1) полностью определяется по следующим данным:

- (1) совокупность сепаратрис, лежащих в какой-либо полуплоскости, с началом  $O$ , находящимся на границе;
- (2) типы этих сепаратрис;
- (3) направления векторного поля на этих сепаратрисах;
- (4) четность степени особенности в  $O(0;0)$  (т. е. четность степени  $P(x,y)$  и  $Q(x,y)$ , см. [15]).

**Замечание 3.2.** Свойства фазового портрета (2)–(4) в замечании 3.1 могут быть выражены в аналитической форме с помощью скалярного  $\vec{r} \cdot \vec{v}$  и векторного  $\vec{r} \times \vec{v}$  произведений, где вектор положения точки фазовой плоскости  $\vec{r} = \{x, y, 0\}$  и  $\vec{v} = \{P, Q, 0\}$  даны в правой прямоугольной системе координат  $Oxyz$ .

**Предположение 3.1.** Пусть полуплоскость, упомянутая в пункте (1) замечания 3.1, ограничена осью  $y$  и включает в себя все точки  $(x, y)$  с неотрицательными абсциссами. Тогда предположим, что:

- (1) сепаратрисы  $L_{11}$  и  $L_{12}$  — отрицательная и положительная полуоси оси  $y$  соответственно, т. е.  $y|_{L_{11}} < 0$  и  $y|_{L_{12}} > 0$ ;
- (2) сепаратрисы  $L_{i1}$  и  $L_{i2}$  находятся справа и слева от оси  $y$  соответственно, т. е.  $x|_{L_{i1}} > 0$  и  $x|_{L_{i2}} < 0$  ( $i = \overline{2, m}$ );
- (3)  $S_{ik}$  обозначает открытый сектор, ограниченный соседними сепаратрисами  $L_{ik}$  и  $L_{i+1,k}$  ( $i = \overline{1, m}$ ;  $k = 1, 2$ ), где  $L_{m+1,1} = L_{12}$  и  $L_{m+1,2} = L_{11}$ .

**Предположение 3.2.** Предположим для определенности и удобства, что

$$\begin{aligned} a_1 > 0, \quad b_1 = 0, \quad b_i \geq 0 \quad (i = \overline{2, m}), \\ a_i b_{i+1} - a_{i+1} b_i > 0 \quad (i = \overline{1, m-1}). \end{aligned} \quad (3.1)$$

Из (3.1) следует, что

- (1)  $\Lambda_1$  совпадает с осью  $y$ ;
- (2) числа  $u_2, u_3, \dots, u_m$ , где  $u_i = -a_i/b_i$ , образуют возрастающую последовательность, определяющую расположение прямых  $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$  относительно друг друга.

**Предположение 3.3.** В силу пункта (1) замечания 3.1 не будет неоднозначности, если в дальнейшем для простоты мы будем опускать второй индекс  $k$  во всех обозначениях  $L_{ik}$  и  $S_{ik}$  ( $i = \overline{1, m}$ ), а  $L_{12}$  обозначать как  $L_{m+1}$ .

#### 4. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ

**4.1.** В соответствии с (2.1)  $\vec{n}_i = \{a_i; b_i; 0\}$  является нормалью соответствующей сепаратрисы  $L_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ). Тогда ее вектор направления  $\vec{\tau}_i = \{b_i; -a_i; 0\}$  есть векторное произведение

$$\vec{\tau}_i = \vec{n}_i \times \vec{k} \quad (i = \overline{1, m}), \quad (4.1)$$

где  $\vec{k} = \{0; 0; 1\}$  — единичный вектор направления оси  $z$ .

Учитывая уравнения сепаратрис (2.1), мы можем, согласно [6], представить искомое векторное поле следующим образом:

$$\vec{v} = (-1)^{\alpha_1} \lambda_1 \omega_2 \cdot \dots \cdot \omega_m \vec{\tau}_1 + \dots + (-1)^{\alpha_m} \lambda_m \omega_1 \cdot \dots \cdot \omega_{m-1} \vec{\tau}_m, \quad (4.2)$$

где  $\alpha_i = 1, 2$  и  $\lambda_i$  — однородные полиномы  $s$ -й степени, положительные на соответствующей выколоте прямой  $\Lambda_i$ :

$$\deg_{(x,y)} \lambda_i = s \quad (s = 0, 1, 2, 3, \dots), \quad \lambda_i|_{\Lambda_i \setminus \{0\}} > 0 \quad (i = \overline{1, m}). \quad (4.3)$$

**4.2.** Требования пункта (3) в замечании 3.1 могут быть легко удовлетворены соответствующим выбором  $\alpha_i$  в (4.2). Это сразу следует из вида

$$\vec{v}|_{L_i} = (-1)^{\alpha_i} \lambda_i \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^m \omega_j|_{L_i} \cdot \vec{\tau}_i$$

который принимает равенство (4.2) на соответствующей сепаратрисе  $L_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ).

**4.3.** Чтобы сформулировать условия, обеспечивающие искомые типы секторов  $S_i$  в терминах скалярных и векторных произведений векторов  $\vec{r}$  и  $\vec{v}$ , сначала заметим, что

$$\vec{r} \times \vec{\tau}_i = \vec{r} \times (\vec{n}_i \times \vec{k}) = -\omega_i \vec{k} \quad (i = \overline{1, m}). \quad (4.4)$$

Тогда для вектора (4.2) получим

$$\vec{r} \times \vec{v} = -\lambda \omega_1 \dots \omega_m \vec{k}, \quad (4.5)$$

где

$$\lambda = (-1)^{\alpha_1} \lambda_1 + \dots + (-1)^{\alpha_m} \lambda_m. \quad (4.6)$$

Теперь мы можем сформулировать следующие утверждения.

**Утверждение 4.1.** Сектор  $S_i$  является параболическим справа, если

- (a)  $(\lambda \omega_1 \dots \omega_m)|_{S_i} < 0$  и  $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_i} > 0$ ,  $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_{i+1}} > 0$  (рис. 1, 1.a); либо
- (b)  $(\lambda \omega_1 \dots \omega_m)|_{S_i} > 0$  и  $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_i} < 0$ ,  $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_{i+1}} < 0$  (рис. 1, 1.b).

**Утверждение 4.2.** Сектор  $S_i$  является параболическим слева, если

- (a)  $(\lambda \omega_1 \dots \omega_m)|_{S_i} < 0$  и  $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_i} < 0$ ,  $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_{i+1}} < 0$  (рис. 1, 2.a); либо
- (b)  $(\lambda \omega_1 \dots \omega_m)|_{S_i} > 0$  и  $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_i} > 0$ ,  $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_{i+1}} > 0$  (рис. 1, 2.b).

**Утверждение 4.3.** Сектор  $S_i$  является гиперболическим, если

- (a)  $(\lambda \omega_1 \dots \omega_m)|_{S_i} < 0$  и  $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_i} < 0$ ,  $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_{i+1}} > 0$  (рис. 1, 3.a); либо
- (b)  $(\lambda \omega_1 \dots \omega_m)|_{S_i} > 0$  и  $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_i} > 0$ ,  $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_{i+1}} < 0$  (рис. 1, 3.b).

**Утверждение 4.4.** Сектор  $S_i$  является эллиптическим, если

- (a)  $(\lambda \omega_1 \dots \omega_m)|_{S_i} < 0$  и  $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_i} > 0$ ,  $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_{i+1}} < 0$  (рис. 1, 4.a); либо
- (b)  $(\lambda \omega_1 \dots \omega_m)|_{S_i} > 0$  и  $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_i} < 0$ ,  $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_{i+1}} > 0$  (рис. 1, 4.b).

**4.4.** Чтобы доказать утверждения 4.1–4.4, мы применим технику Фроммера [12] для изучения особых точек дифференциального уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \frac{Q(x, y)}{P(x, y)}, \quad (4.7)$$

соответствующего рассматриваемому векторному полю. В соответствии с этим сначала подставим  $y = u(x) \cdot x$  в равенство (4.7), что приводит к уравнению

$$xu' = \varphi(u), \quad \text{где} \quad \varphi = \frac{Q(1, u)}{P(1, u)} - u. \quad (4.8)$$



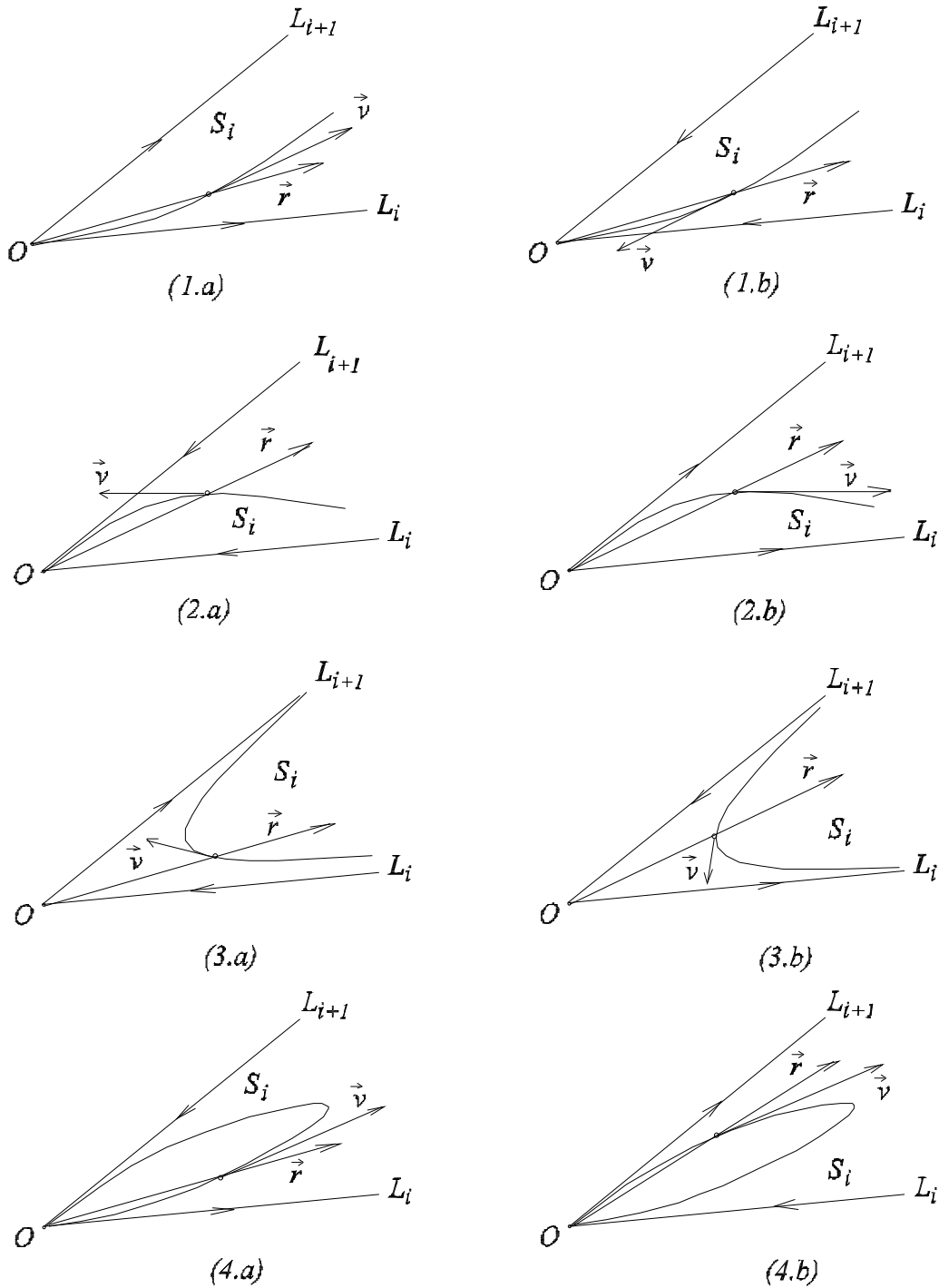


РИС. 1. Зависимость типа сектора особой точки от взаимных направлений векторов  $\vec{v}$  и  $\vec{r} \times \vec{v}$ : (1.a) и (1.б) для секторов, параболических справа; (2.a) и (2.б) для секторов, параболических слева; (3.a) и (3.б) для гиперболических секторов; (4.a) и (4.б) для эллиптических секторов.

FIG. 1. Dependence of the sector type of critical point on the mutual directions of the vectors  $\vec{v}$  and  $\vec{r} \times \vec{v}$ : (1.a) and (1.b) for sectors parabolic on the right; (2.a) and (2.b) for sectors parabolic on the left; (3.a) and (3.b) for hyperbolic sectors; (4.a) and (4.b) for elliptic sectors.

Вещественные корни  $\varphi(u) = 0$  дают конечные наклоны сепаратрис. Далее, чтобы узнать, существуют ли сепаратрисы, лежащие на оси  $y$ , мы должны подставить  $x = w(y) \cdot y$  в (4.7) и рассмотреть полученное уравнение

$$yw' = \psi(w), \quad \text{где} \quad \psi(w) = \frac{P(w, 1)}{Q(w, 1)} - w. \tag{4.9}$$

Если  $\psi(0) \neq 0$ , то не существует сепаратрис, в противном случае сепаратрисы существуют. Таким образом, для вектора (4.2) с компонентами

$$P(x, y) = \sum_{j=1}^m (-1)^{\alpha_j} \lambda_j b_j \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \omega_k, \quad Q(x, 1) = \sum_{j=1}^m (-1)^{\alpha_j} \lambda_j (-a_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m \omega_k \tag{4.10}$$

мы имеем

$$\varphi(u) = -\frac{\lambda(1, u) \prod_{j=2}^m b_j (u - u_j)}{P(1, u)}, \quad \psi(w) = \frac{\lambda(w, 1) \prod_{j=1, j \neq k}^m a_j (w - w_j)}{Q(w, 1)} \tag{4.11}$$

в равенствах (4.8) и (4.9), соответственно, где  $k$  таково, что  $a_k = 0$ ,

$$P(1, u) = \sum_{j=2}^m (-1)^{\alpha_j} \lambda_j(1, u) b_j \prod_{\substack{k=2 \\ k \neq j}}^m b_k (u - u_k), \tag{4.12}$$

$$Q(w, 1) = \sum_{j=1}^m (-1)^{\alpha_j} \lambda_j(w, 1) (-a_j) \prod_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^m a_k (w - w_k) \tag{4.13}$$

для  $P$  и  $Q$  из (4.10). Из равенств (4.11)–(4.13) следует, что

$$\varphi(u_i) = 0, \quad P(1; u_i) \neq 0 \quad (i = \overline{2, m}), \quad \psi(0) = 0, \quad Q(0; 1) \neq 0.$$

Следовательно,  $L_{i,k}$  ( $i = \overline{1, m}; k = 1, 2$ ) — сепаратрисы особой точки  $O$  векторного поля (4.2) (см. [10, 12]).

Согласно [10, 12], тип сепаратрисы  $L_i$  ( $i = \overline{2, m}$ ) зависит от поведения производной  $\varphi'(u)$  в соответствующей достаточно малой проколотой окрестности  $(u_i - \varepsilon, u_i) \cup (u_i, u_i + \varepsilon)$ , где  $\varepsilon > 0$ .

**Предложение 4.1.** *Если  $\varphi'(u) > 0$  (соответственно,  $< 0$ ) при  $u \in (u_i - \varepsilon, u_i) \cup (u_i + \varepsilon, u_i)$ , то соответствующая сепаратриса  $L_i$  является параболической (соответственно, гиперболической).*

**Предложение 4.2.** *Если  $\varphi'(u) > 0$  (соответственно,  $< 0$ ) при  $u \in (u_i - \varepsilon, u_i)$  и  $\varphi'(u) < 0$  (соответственно,  $> 0$ ) при  $u \in (u_i, u_i + \varepsilon)$ , то сепаратриса  $L_i$  является параболической справа (соответственно, слева).*

Аналогично, тип сепаратрисы  $L_1$  определяется свойствами знака  $\varphi'(w)$  в достаточно малой окрестности точки  $w = 0$ .

**4.5.** В этом подразделе мы применим предложения 4.1 и 4.2 для доказательства утверждений 4.1–4.4.

В случае пункта (а) в утверждении 4.1:

(i) из неравенства  $(\lambda \omega_1 \cdot \dots \cdot \omega_m)|_{S_i} < 0$  ( $i = \overline{2, m-1}$ ) следует, что

$$\frac{1}{x^{m+s}} \cdot \left( \lambda \prod_{j=1}^m \omega_j \right) \Big|_{y=ux} = \lambda(1, u) \prod_{j=2}^m b_j (u - u_j)$$

является убывающей функцией от  $u$  на  $(u_i, u_i + \varepsilon)$  и возрастающей на  $(u_{i+1} - \varepsilon, u_{i+1})$  при достаточно малом  $\varepsilon > 0$  и любом  $x > 0$ ;

(ii) из неравенств  $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_i} > 0$  и  $(\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_{i+1}} > 0$  следует, что

$$P(1, u_i) > 0, \quad P(1, u_{i+1}) > 0,$$

а значит, по построению  $\vec{v}$  в равенстве (4.2)

$$\text{sign } P(1, u_j) = \text{sign } (\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_j} \quad (j = \overline{2, m}).$$

Из (i) и (ii) получаем, что  $\varphi'(u_i + 0) > 0$  и  $\varphi'(u_{i+1} - 0) < 0$  для  $\varphi(u)$  из (4.11). Следовательно, по предложениям 4.1 и 4.2 сектор  $S_i$  является параболическим справа (рис. 1, 1.a).

В пунктах (a) и (b) утверждения 4.1 соответствующие неравенства отличаются друг от друга только знаками неравенств. Это означает, что  $\varphi'(u_i + 0)$  одна и та же в обоих случаях, а значит, и  $\varphi'(u_{i+1} - 0)$ . Следовательно, в обоих случаях сектор  $S_i$  является параболическим (рис. 1, 1.a и 1.b).

Для установления типа сектора  $S_1$  сначала заметим, что

$$\left( \frac{\lambda \cdot \prod_{j=1}^m \omega_j}{\vec{r} \cdot \vec{v}} \right) \Big|_{x=wy} = \frac{\lambda(w, 1) \cdot \prod_{j=1, j \neq k}^m a_j(w - w_j)}{Q(w, 1) + wP(w, 1)}, \quad (4.14)$$

где  $k$ -й множитель в правой части следует опустить, если соответствующее  $a_k = 0$ . Из равенства (4.14) следует, что если выполняются условия утверждения 4.1, то  $\psi(w)$  из (4.11) является убывающей функцией  $w$  на всем интервале  $(-w_2, -w_2 + \varepsilon)$  и возрастающей функцией на всем  $(-\varepsilon, 0)$ , где  $w_2 = 1/u_2$  и  $\varepsilon$  — достаточно малое положительное число. Следовательно,  $\psi'(-w_2 + 0) < 0$  и  $\psi'(0 - 0) > 0$ . Тогда, согласно предложениям 4.1 и 4.2, сектор  $S_1$  является параболическим справа. Аналогично можно доказать утверждение 4.1 для сектора  $S_m$ . Таким образом, утверждение 4.1 полностью доказано.

Аналогичное доказательство работает для утверждений 4.2–4.4.

**Замечание 4.1.** Задача, поставленная в разделе 2, допускает бесконечно много решений, так как существует бесконечно много наборов  $\lambda_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) в (4.6), удовлетворяющих тем же требованиям пунктов (i) и (ii) из раздела 2. Это следует из утверждений 4.1–4.4, где на типы секторов  $S_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) влияет только знак  $\lambda$ , а не его величина.

**4.6.** Пусть  $C$  — окружность с центром в начале координат  $O$ ,  $C_i$  — ее дуга, проведенная между двумя соседними сепаратрисами, ограничивающими сектор  $S_i$ ,  $\beta_i$  — угол, опирающийся в начале координат на  $C_i$ ,  $\theta$  — угол, который векторное поле  $\vec{v}$  образует с положительной полуосью  $x$  ( $i = \overline{1, m}$ ). Если  $\Delta\vartheta_i$  — это приращение  $\theta$ , когда начало  $\vec{v}$  обходит дугу  $C_i$  против часовой стрелки, то

$$\Delta\vartheta_i = \begin{cases} \beta_i, & \text{если сектор } S_i \text{ — параболический;} \\ -\pi + \beta_i, & \text{если сектор } S_i \text{ — гиперболический;} \\ \pi + \beta_i, & \text{если сектор } S_i \text{ — эллиптический.} \end{cases} \quad (4.15)$$

Доказательство равенства (4.15) использует рис. 1.

Плоское векторное поле  $\vec{v}$  называется *четным* (соответственно, *нечетным*), если  $\vec{v}(-x, -y) \uparrow\uparrow \vec{v}(x, y)$  (соответственно,  $\vec{v}(-x, -y) \uparrow\downarrow \vec{v}(x, y)$ ) при любых  $x$  и  $y$ . Тогда из (4.15) следует, что векторное поле рассматриваемого типа четно (соответственно, нечетно) тогда и только тогда, когда количество гиперболических и эллиптических секторов его фазового портрета в полуплоскости, ограниченной любой из прямых  $\omega_i = 0$ , нечетно (соответственно, четно). Этот факт следует учитывать при решении конкретных задач.

## 5. ПРИМЕРЫ ПОСТРОЕНИЯ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ

Утверждения 4.1–4.4 позволяют свести решение основной задачи, поставленной в разделе 2, к подходящему выбору множителей  $\lambda_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) в (4.2). В этом разделе рассматриваются некоторые примеры использования такого подхода.

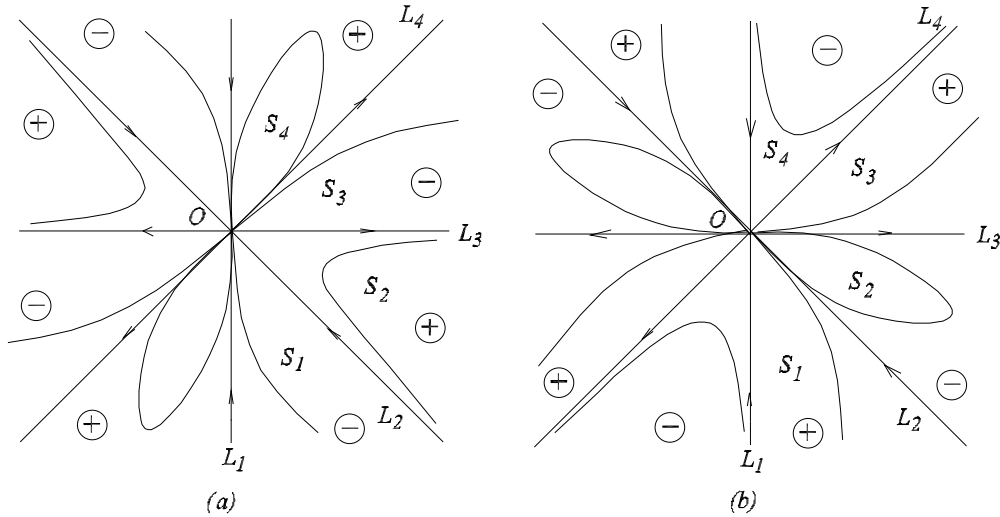


Рис. 2. Нечетные векторные поля  
 FIG. 2. Odd vectors fields

**5.1. Векторные поля с сепаратрисами несмешанного типа.** Для получения векторных полей, фазовые портреты которых имеют сепаратрисы только несмешанного типа, достаточно ограничить выбор  $\lambda_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) положительными константами. Тогда  $\lambda$  из (4.6) также постоянно, и поэтому каждое  $\omega_i$  ( $i = \overline{1, m}$ ) входит в правую часть равенства (4.5) только в первой степени.

5.1.1. Построение нечетных векторных полей.

**Пример 5.1.** Построить векторное поле с топологической структурой, заданной схемой (а) на рис. 2, и сепаратрисами  $L_{ik}$  ( $i = \overline{1, 4}; k = 1, 2$ ), лежащими на соответствующих прямых

$$\omega_1 \equiv x = 0, \quad \omega_2 \equiv x + y = 0, \quad \omega_3 \equiv y = 0, \quad \omega_4 \equiv -x + y = 0. \tag{5.1}$$

*Решение.* Используя направляющие векторы сепаратрис

$$\vec{\tau}_1 = \{0; -1\}, \quad \vec{\tau}_2 = \{1; -1\}, \quad \vec{\tau}_3 = \{1; 0\}, \quad \vec{\tau}_4 = \{1; 1\}, \tag{5.2}$$

мы представим в соответствии с [6] искомый вектор в виде

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{\tau}_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 - \lambda_2 \vec{\tau}_2 \omega_1 \omega_3 \omega_4 - \lambda_3 \vec{\tau}_3 \omega_1 \omega_2 \omega_4 + \lambda_4 \vec{\tau}_4 \omega_1 \omega_2 \omega_3, \tag{5.3}$$

где  $\lambda_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) — положительные константы, а знаки перед ними обеспечивают такие направления этого вектора на  $L_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ), как показано стрелками на схеме (а) рис. 2.

Для  $\vec{v}$  из (5.3) имеем

$$\vec{r} \times \vec{v} = -\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 (\lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4) \vec{k}. \tag{5.4}$$

Из (5.4) следует, что знак проекции  $\vec{r} \times \vec{v}$  на ось  $z$  совпадает в секторе  $S_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) с показанным внутри этого сектора на схеме (а) рис. 2, если

$$\lambda = \lambda_1 - \lambda_2 - \lambda_3 + \lambda_4 < 0.$$

В частности,  $\lambda_1 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1, \lambda_2 = 2$  удовлетворяют последнему неравенству и при подстановке в (5.3) дают искомый вектор

$$\vec{v} = \vec{\tau}_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 - 2 \vec{\tau}_2 \omega_1 \omega_3 \omega_4 - \vec{\tau}_3 \omega_1 \omega_2 \omega_4 + \vec{\tau}_4 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \tag{5.5}$$

с компонентами

$$\begin{aligned} P &= -2xy(-x + y) - x(x + y)(-x + y) + (x + y)xy, \\ Q &= -(x + y)y(-x + y) + 2xy(-x + y) + x(x + y)y. \end{aligned} \tag{5.6}$$

Для этого вектора

$$\vec{r} \times \vec{v} = \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \vec{k}. \tag{5.7}$$

Утверждения 4.1–4.4 в сочетании с равенствами (5.5) и (5.7) приводят к результатам, согласующимся с топологической структурой, заданной схемой (а) на рис. 2.  $\square$

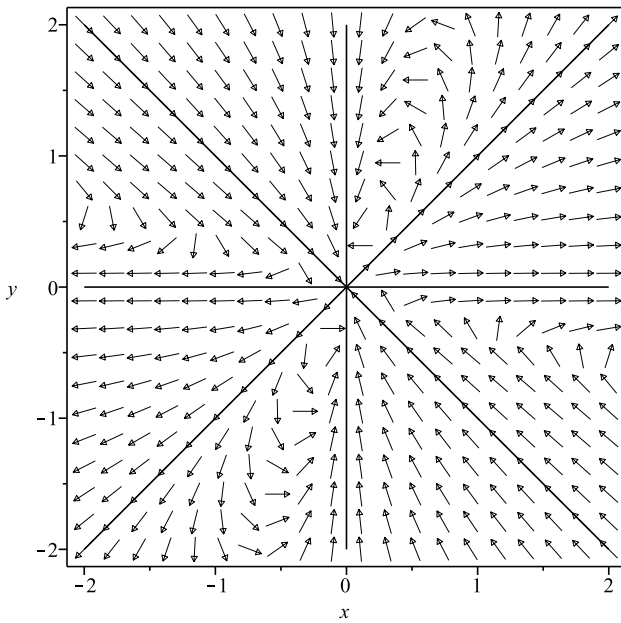


Рис. 3. Векторное поле (5.5).

FIG. 3. Vector field (5.5).

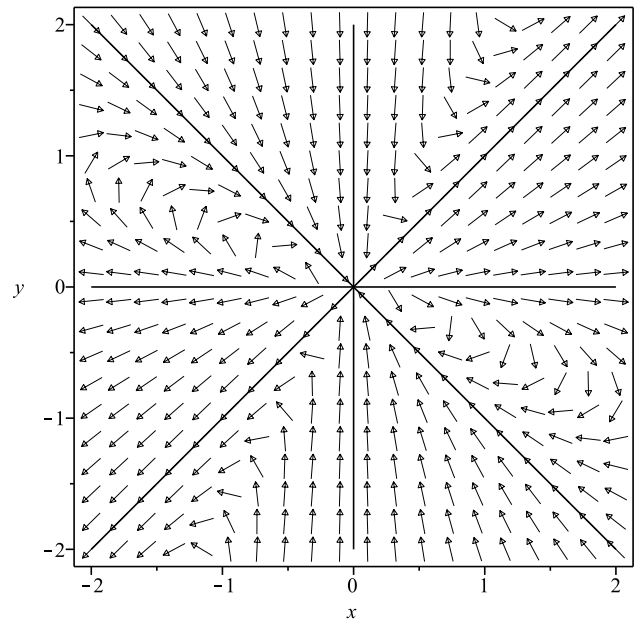


Рис. 4. Векторное поле (5.8).

FIG. 4. Vector field (5.8).

Чтобы получить векторное поле (5.5) в графической форме (рис. 3), можно использовать функцию `fieldplot` из пакета *MAPLE plot*, выполнив следующие команды:

```
with(plots, implicitplot):
P := (x, y) -> -2 * x * y * (-x + y) - x * (x + y) * (-x + y) + x * (x + y) * y;
Q := (x, y) -> -(x + y) * y * (-x + y) + 2 * x * y * (-x + y) + x * (x + y) * y;
F1 := fieldplot([P, Q], -2.0..2.0, -2.0..2.0, arrows = SLIM, fieldstrength = fixed);
G1 := implicitplot(x + y = 0, x = -2.0..2.0, y = -2.0..2.0, style = line);
G2 := implicitplot(-x + y = 0, x = -2.0..2.0, y = -2.0..2.0, style = line);
G3 := implicitplot(x = 0, x = -2.0..2.0, y = -2.0..2.0, style = line);
G4 := implicitplot(y = 0, x = -2.0..2.0, y = -2.0..2.0, style = line);
display(F1, G1, G2, G3, G4, axes = boxed, scaling = constrained);
```

Понятно, что использование функции `fieldplot` не является достаточной проверкой правильности аналитического решения, однако может быть полезно как вспомогательный инструмент обнаружения ошибок.

**Пример 5.2.** Чтобы показать зависимость типов сепаратрис  $L_i$  и секторов  $S_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) от значений  $\lambda_1, \dots, \lambda_4$ , в примере 5.1 возьмем  $\lambda_1 = 2$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 1$ . Тогда в (5.3) мы получим векторное поле

$$\vec{v} = 2\vec{\tau}_1\omega_2\omega_3\omega_4 - \vec{\tau}_2\omega_1\omega_3\omega_4 - \vec{\tau}_3\omega_1\omega_2\omega_4 + \vec{\tau}_4\omega_1\omega_2\omega_3 \quad (5.8)$$

с компонентами

$$\begin{aligned} P &= -xy(-x + y) - x(x + y)(-x + y) + (x + y)xy, \\ Q &= -2(x + y)y(-x + y) + xy(-x + y) + (x + y)xy \end{aligned} \quad (5.9)$$

и векторным произведением

$$\vec{r} \times \vec{v} = -\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4\vec{k}. \quad (5.10)$$

Согласно утверждениям 4.1–4.4, векторное поле (5.8) имеет топологическую структуру, соответствующую схеме (b) на рис. 2.

**Замечание 5.1.** Векторные произведения (5.7) и (5.10) отличаются друг от друга только знаком. Следовательно:

- (i) векторные поля (5.5) и (5.8) имеют одинаковую совокупность сепаратрис;

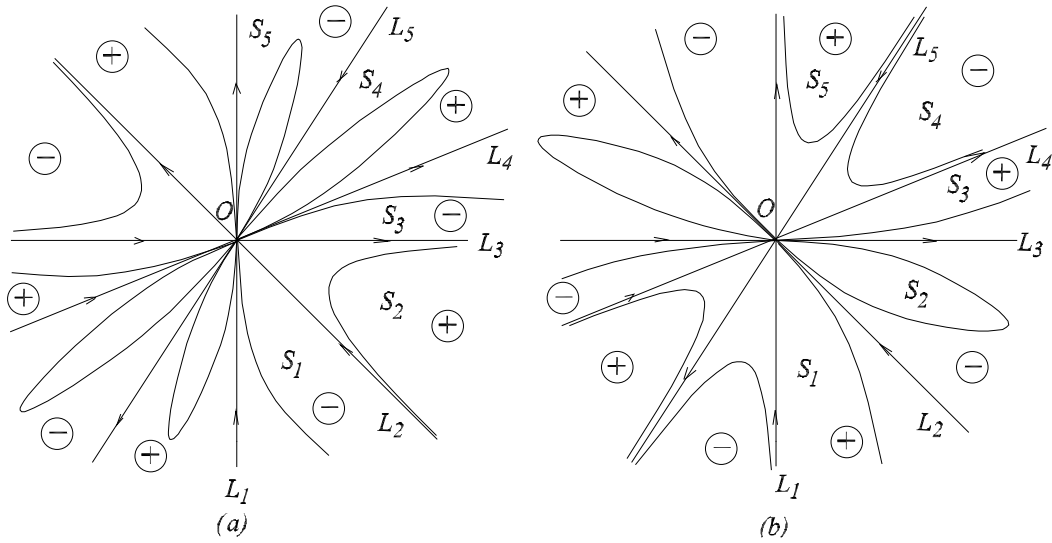


Рис. 5. Четные векторные поля

FIG. 5. Even vector fields

(ii) сепаратриса, параболическая (соответственно, гиперболическая) для одного из этих векторных полей, является гиперболической (соответственно, параболической) для другого.

Из пунктов (i) и (ii) следует, что (см. рис. 2):

- гиперболический сектор векторного поля (5.5) является эллиптическим сектором векторного поля (5.8) и наоборот;
- сектор, параболический справа для векторного поля (5.5), является параболическим слева для векторного поля (5.8) и наоборот.

Выполняя программный код из примера 5.1 при условии, что в этом коде  $P$  и  $Q$  заменены их выражениями из (5.9), мы получаем графическое представление векторного поля (5.8) (см. рис. 4).

5.1.2. Построение четных векторных полей.

**Пример 5.3.** Построить векторное поле с топологической структурой, заданной схемой (а) на рис. 5, с уравнениями соответствующих сепаратрис  $L_{i,k}$  ( $i = \overline{1,5}; k = 1, 2$ )

$$\begin{aligned} \omega_1 \equiv x = 0, \quad \omega_2 \equiv x + y = 0, \quad \omega_3 \equiv y = 0, \\ \omega_4 \equiv -x + 2y = 0, \quad \omega_5 \equiv -2x + y = 0. \end{aligned} \tag{5.11}$$

Решение. Возьмем

$$\vec{\tau}_1 = \{0; -1\}, \quad \vec{\tau}_2 = \{1; -1\}, \quad \vec{\tau}_3 = \{1; 0\}, \quad \vec{\tau}_4 = \{2; 1\}, \quad \vec{\tau}_5 = \{1; 2\} \tag{5.12}$$

в качестве направляющих векторов сепаратрис  $L_i$  ( $i = \overline{1,5}$ ), соответственно. Тогда для получения искомого векторного поля  $\vec{v}$  требуемых направлений на  $L_i$  запишем (4.2) в виде

$$\vec{v} = -\lambda_1 \vec{\tau}_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5 + \lambda_2 \vec{\tau}_2 \omega_1 \omega_3 \omega_4 \omega_5 + \lambda_3 \vec{\tau}_3 \omega_1 \omega_2 \omega_4 \omega_5 - \lambda_4 \vec{\tau}_4 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_5 - \lambda_5 \vec{\tau}_5 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4. \tag{5.13}$$

Для этого вектора

$$\vec{r} \times \vec{v} = -(-\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 - \lambda_5) \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5 \vec{k}. \tag{5.14}$$

Из утверждений 4.1–4.4 следует, что типы секторов  $S_i$  ( $i = \overline{1,5}$ ) векторного поля  $\vec{v}$  из (5.13) согласуются с показанными на схеме (а) на рис. 5, если

$$\lambda = -\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 - \lambda_4 - \lambda_5 > 0.$$

Например, полагая  $\lambda_1 = \lambda_4 = \lambda_5 = 1$ ,  $\lambda_2 = \lambda_3 = 2$ , мы удовлетворим последнее неравенство и в (5.13) получим

$$\vec{v} = -\vec{\tau}_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5 + 2\vec{\tau}_2 \omega_1 \omega_3 \omega_4 \omega_5 + 2\vec{\tau}_3 \omega_1 \omega_2 \omega_4 \omega_5 - \vec{\tau}_4 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_5 - \vec{\tau}_5 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4. \tag{5.15}$$

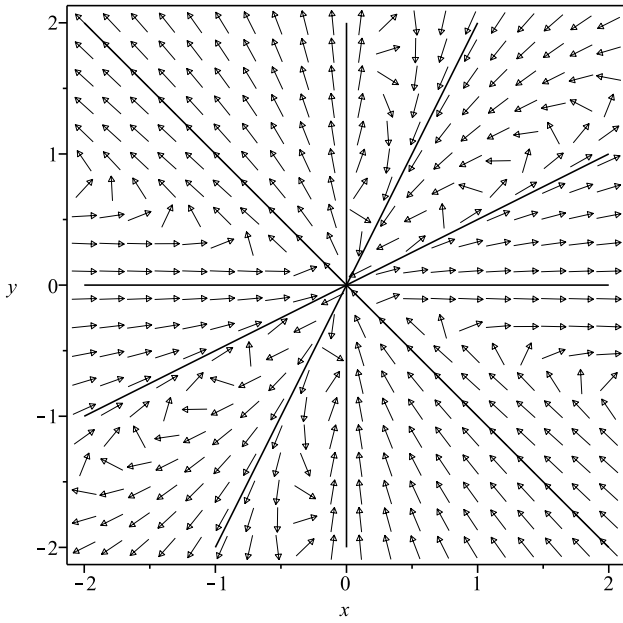


РИС. 6. Векторное поле (5.13)

FIG. 6. Vector field (5.13)

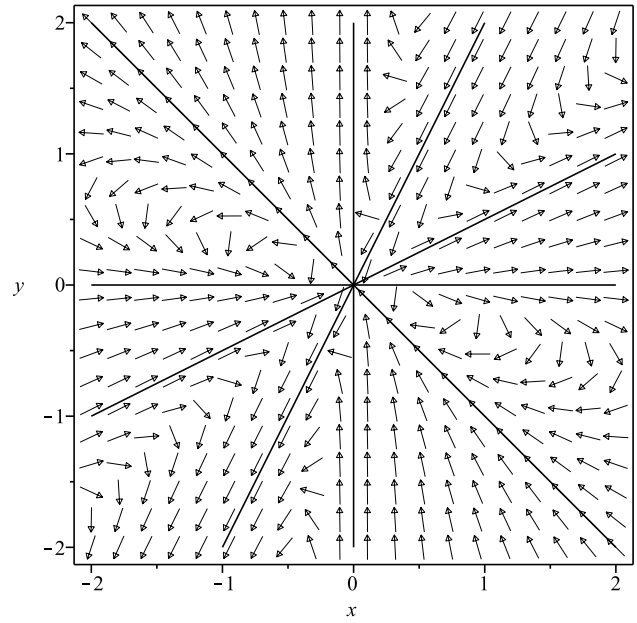


РИС. 7. Векторное поле (5.18)

FIG. 7. Vector field (5.18)

В этом случае

$$\vec{r} \times \vec{v} = -\omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5 \vec{k}. \quad (5.16)$$

Проектируя равенство (5.15) на оси  $x$  и  $y$ , получим компоненты искомого векторного поля:

$$\begin{aligned} P &= 2xy(-x+2y)(-2x+y) + 2x(x+y)(-x+2y)(-2x+y) - \\ &\quad - 2x(x+y)y(-2x+y) - x(x+y)y(-x+2y), \\ Q &= (x+y)y(-x+2y)(-2x+y) - 2xy(-x+2y)(-2x+y) - \\ &\quad - x(x+y)y(-2x+y) - 2x(x+y)y(-x+2y). \end{aligned} \quad (5.17)$$

Выполним следующий программный код в среде *MAPLE*:

```
with(plots, implicitplot);
P := (x, y) -> 2 * x * y * (-x + 2 * y) * (-2 * x + y) + 2 * x * (x + y) * (-x + 2 * y) * (-2 * x + y) - 2 * x * (x + y) * y * (-2 * x + y) - x * (x + y) * y * (-x + 2 * y);
Q := (x, y) -> (x + y) * y * (-x + 2 * y) * (-2 * x + y) - 2 * x * y * (-x + 2 * y) * (-2 * x + y) - x * (x + y) * y * (-2 * x + y) - 2 * x * (x + y) * y * (-x + 2 * y);
F1 := fieldplot([P, Q], -2.0..2.0, -2.0..2.0, arrows = SLIM, fieldstrength = fixed);
G1 := implicitplot(x + y = 0, x = -2.0..2.0, y = -2.0..2.0, style = line);
G2 := implicitplot(-x + 2 * y = 0, x = -2.0..2.0, y = -2.0..2.0, style = line);
G3 := implicitplot(x = 0, x = -2.0..2.0, y = -2.0..2.0, style = line);
G4 := implicitplot(y = 0, x = -2.0..2.0, y = -2.0..2.0, style = line);
G5 := implicitplot(-2 * x + y = 0, x = -2.0..2.0, y = -2.0..2.0, style = line);
display(F1, G1, G2, G3, G4, G5, axes = boxed, scaling = constrained);
```

и получим графическое представление векторного поля (5.13) (см. рис. 6).  $\square$

**Пример 5.4.** Чтобы еще раз обратить внимание на соотношение между типами сепаратрис и секторов двух векторных полей одного вида (5.13), для которых векторные произведения  $\vec{r} \times \vec{v}$  различаются только знаками (см. замечание 5.1), положим  $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = 1$  в (5.13). Таким образом, мы получим векторное поле

$$\vec{v} = -\vec{\tau}_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \omega_5 + \vec{\tau}_2 \omega_1 \omega_3 \omega_4 \omega_5 + \vec{\tau}_3 \omega_1 \omega_2 \omega_4 \omega_5 - \vec{\tau}_4 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_5 - \vec{\tau}_5 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \quad (5.18)$$

с компонентами

$$\begin{aligned}
 P &= xy(-x + 2y)(-2x + y) + x(x + y)(-x + 2y)(-2x + y) - \\
 &\quad - 2x(x + y)y(-2x + y) - x(x + y)y(-x + 2y), \\
 Q &= (x + y)y(-x + 2y)(-2x + y) - xy(-x + 2y)(-2x + y) - \\
 &\quad - x(x + y)y(-2x + y) - 2x(x + y)y(-x + 2y)
 \end{aligned}
 \tag{5.19}$$

и векторным произведением

$$\vec{r} \times \vec{v} = -\omega_1\omega_2\omega_3\omega_4\omega_5\vec{k}.
 \tag{5.20}$$

Учитывая направления  $\vec{v}$  из (5.18) на  $L_i$  ( $i = \overline{1, 5}$ ) и знаки проекции  $(\vec{r} \times \vec{v})_z$  в  $S_i$  ( $i = \overline{1, 5}$ ), для  $\vec{r} \times \vec{v}$  из (5.20) мы можем утверждать, что согласно утверждениям 4.1–4.4 векторное поле (5.18) имеет топологическую структуру, заданную схемой (b) на рис. 5.

Результаты сравнения схем (a) и (b) на рис. 5 (или рис. 6 и 7) согласуются с замечанием 5.1.

**5.2. Векторные поля с сепаратрисами смешанных типов.** Если  $1 \leq s \leq m$  для  $s$  в (4.3), то  $\lambda_1, \dots, \lambda_m$  можно выбрать так, что

$$\lambda = \lambda_0\omega_{i_1}\omega_{i_2} \dots \omega_{i_s}$$

в (4.6), где  $\lambda_0$  — константа, а  $\{i_1, \dots, i_s\}$  —  $s$ -элементное подмножество  $m$ -элементного множества  $\{1, 2, \dots, m\}$ . В этом случае правая часть в (4.5) содержит множители  $\omega_{i_1}^2, \dots, \omega_{i_s}^2$ . Следовательно,  $(u - u_{i_q})^2$  является множителем числителя  $\varphi(u)$  в (4.11), если  $\omega_{i_q} \neq x$ , а  $(w - w_{i_q})^2$  — множитель числителя  $\psi(w)$  в (4.11), если  $\omega_{i_q} \neq y$ , где  $q = \overline{1, s}$ . Следовательно, производные  $\varphi'(u)$  и  $\psi'(w)$  меняют знаки при соответствующих  $u = u_{i_q}$  и  $w = w_{i_q}$  ( $q = \overline{1, s}$ ), соответственно. Таким образом, согласно предложению 4.2,  $L_{i_1}, \dots, L_{i_s}$  — сепаратрисы смешанного типа.

*5.2.1. Векторные поля с двумя сепаратрисами смешанного типа.* Предположим, что векторное поле  $\vec{v}$  в (4.2) имеет только две сепаратрисы смешанного типа, лежащие на одной прямой  $\omega_q = 0$ ,  $q \in \{1, 2, \dots, m\}$ . Пусть

$$\lambda_i = \bar{\lambda}_i\bar{\omega}_i, \quad \bar{\omega}_i \equiv \bar{a}_ix + \bar{b}_iy \quad (i = \overline{1, m}),
 \tag{5.21}$$

где  $\bar{\lambda}_i, \bar{a}_i, \bar{b}_i$  — константы, а  $\bar{\lambda}_i > 0$ . Тогда искомый вектор (4.2) принимает вид

$$\vec{v} = (-1)^{\alpha_1}\lambda_1\vec{\tau}_1\omega_2 \dots \omega_m\bar{\omega}_1 + \dots + (-1)^{\alpha_m}\lambda_m\vec{\tau}_m\omega_1 \dots \omega_{m-1}\bar{\omega}_m.$$

В силу (4.4) для этого вектора

$$\vec{r} \times \vec{v} = -\lambda_0\omega_1 \dots \omega_q^2 \dots \omega_m\vec{k},
 \tag{5.22}$$

если

$$(-1)^{\alpha_1}\bar{\lambda}_1\bar{\omega}_1 + \dots + (-1)^{\alpha_m}\bar{\lambda}_m\bar{\omega}_m = \lambda_0\omega_q,$$

где  $\lambda_0$  — константа. Таким образом, построение искомого векторного поля сводится к решению системы уравнений

$$\begin{cases}
 (-1)^{\alpha_1}\bar{\lambda}_1\bar{a}_1 + \dots + (-1)^{\alpha_m}\bar{\lambda}_m\bar{a}_m = \lambda_0a_q, \\
 (-1)^{\alpha_1}\bar{\lambda}_1\bar{b}_1 + \dots + (-1)^{\alpha_m}\bar{\lambda}_m\bar{b}_m = \lambda_0b_q
 \end{cases}$$

при положительных  $\bar{\lambda}_1, \dots, \bar{\lambda}_m$ .

**Утверждение 5.1.** Пусть  $M_q(\theta) = K_q(\theta) \cup K_q(-\theta)$ , где  $\theta$  положительно для определенности. Тогда соответствующая сепаратриса  $L_q$  является параболической справа (соответственно, слева), если при достаточно малых  $\theta$

$$(\lambda_0\omega_1 \dots \omega_q^2 \dots \omega_m)|_{M_q(\theta)} \cdot (\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_q} > 0 \quad (\text{соответственно, } < 0).$$

Для доказательства этого утверждения заметим, что векторному произведению  $\vec{r} \times \vec{v}$  из (5.22) соответствует функция

$$\varphi(u) = -\frac{\lambda_0b_q^2(u - u_q)^2 \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq q}}^m b_j(u - u_j)}{P(1, u)} \quad (i = \overline{2, m})$$



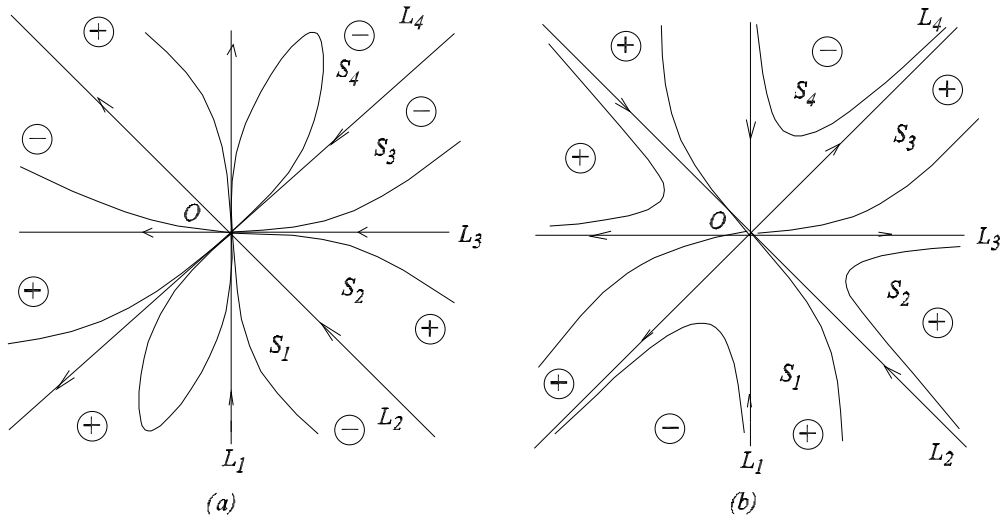


Рис. 8. Векторные поля с сепаратрисами смешанных типов.

FIG. 8. Vector fields with separatrices of mixed types.

в (4.8) и ее производная

$$\varphi'(u) = -\frac{2\lambda_0 b_q^2 (u - u_q) \prod_{\substack{j=2 \\ j \neq q}}^m b_j (u - u_j) + o(u - u_q)}{P(1, u)}. \quad (5.23)$$

Предположим, что

$$(\lambda_0 \omega_1 \dots \omega_q^2 \dots \omega_m)|_{M_q(\theta)} > 0 \quad \text{и} \quad (\vec{r} \cdot \vec{v})|_{L_q} > 0 \quad (5.24)$$

для малых положительных  $\theta$ . Из (5.23) и (5.24) мы заключаем, что  $\varphi'(u) > 0$ , если  $u \in (u_q - \varepsilon; u_q)$ , и  $\varphi'(u) < 0$ , если  $u \in (u_q; u_q + \varepsilon)$  для достаточно малых положительных  $\varepsilon$ . Следовательно, согласно предложению 4.2, сепаратриса  $L_q$  является параболической справа. Те же рассуждения применимы и к случаю с обратными знаками неравенства в (5.24).

Таким же образом можно доказать утверждение 5.1 для  $q = 1$ , рассматривая  $\psi(w)$  в (4.9) в достаточно малой области  $M_1(\theta)$ .

**Пример 5.5.** Построим векторное поле с топологической структурой, показанной на схеме (а) рис. 8, с уравнениями сепаратрис

$$\omega_1 \equiv x = 0, \quad \omega_2 \equiv x + y = 0, \quad \omega_3 \equiv y = 0, \quad \omega_4 \equiv -x + y = 0. \quad (5.25)$$

*Решение.* Пусть

$$\vec{\tau}_1 = \{0; -1\}, \quad \vec{\tau}_2 = \{1; -1\}, \quad \vec{\tau}_3 = \{1; 0\}, \quad \vec{\tau}_4 = \{1; 1\} \quad (5.26)$$

— направляющие векторы соответствующих сепаратрис  $L_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ). Чтобы обеспечить требуемые направления искомого векторного поля  $\vec{v}$  на  $L_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ), указанные стрелками на схеме (а) рис. 8, предположим, что

$$\vec{v} = -\bar{\lambda}_1 \vec{\tau}_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \bar{\omega}_1 + \bar{\lambda}_2 \vec{\tau}_2 \omega_1 \omega_3 \omega_4 \bar{\omega}_2 - \bar{\lambda}_3 \vec{\tau}_3 \omega_1 \omega_2 \omega_4 \bar{\omega}_3 - \bar{\lambda}_4 \vec{\tau}_4 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \bar{\omega}_4, \quad (5.27)$$

где

$$\bar{\lambda}_i > 0, \quad \bar{\omega}_i \equiv \bar{a}_i x + \bar{b}_i y, \quad \bar{b}_i > 0 \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (5.28)$$

$$-\frac{\bar{a}_i}{\bar{b}_i} < -\frac{\bar{a}_{i+1}}{\bar{b}_{i+1}} \quad (i = 1, 2, 3). \quad (5.29)$$

Поскольку для  $\vec{v}$  из (5.27)

$$\vec{r} \times \vec{v} = (\bar{\lambda}_1 \bar{\omega}_1 - \bar{\lambda}_2 \bar{\omega}_2 + \bar{\lambda}_3 \bar{\omega}_3 - \bar{\lambda}_4 \bar{\omega}_4) \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \vec{k},$$

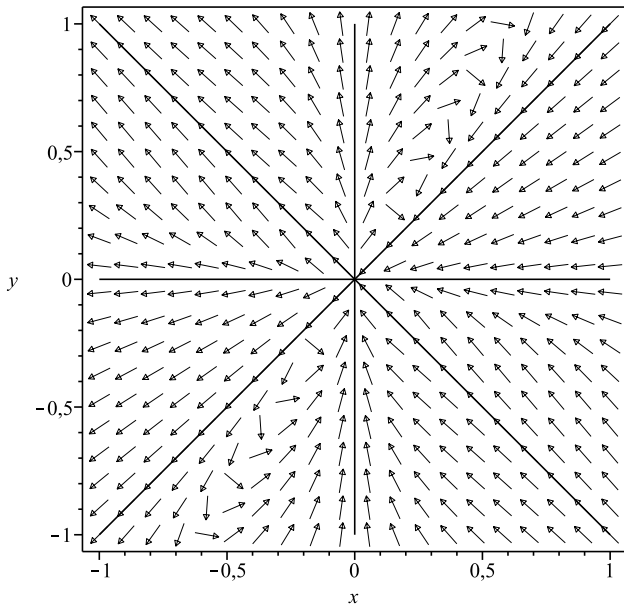


Рис. 9. Векторное поле из примера 5.5.

FIG. 9. Vector field from Example 5.5.

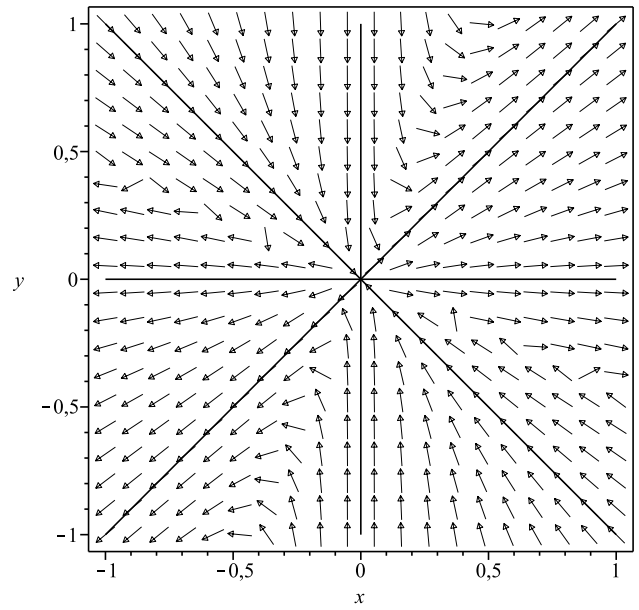


Рис. 10. Векторное поле из примера 5.6.

FIG. 10. Vector field from Example 5.6.

то требования к типам секторов  $S_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ) выполняются по утверждению 5.1, если

$$\bar{\lambda}_1 \bar{\omega}_1 - \bar{\lambda}_2 \bar{\omega}_2 + \bar{\lambda}_3 \bar{\omega}_3 - \bar{\lambda}_4 \bar{\omega}_4 = -\lambda_0 \omega_4, \quad \text{где } \lambda_0 > 0.$$

Заменяя  $\omega_4$  и  $\bar{\omega}_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ) их явными выражениями (5.25) и (5.28) в последнем равенстве, сведем задачу к решению системы линейных уравнений

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_1 \bar{a}_1 - \bar{\lambda}_2 \bar{a}_2 + \bar{\lambda}_3 \bar{a}_3 + \bar{\lambda}_4 \bar{a}_4 = \lambda_0, \\ \bar{\lambda}_1 \bar{b}_1 - \bar{\lambda}_2 \bar{b}_2 + \bar{\lambda}_3 \bar{b}_3 + \bar{\lambda}_4 \bar{b}_4 = -\lambda_0 \end{cases} \quad (5.30)$$

для положительных значений  $\bar{\lambda}_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ). В частности, при

$$\bar{\omega}_1 \equiv 2x + y, \quad \bar{\omega}_2 \equiv x + 2y, \quad \bar{\omega}_3 \equiv -x + 2y, \quad \bar{\omega}_4 \equiv -2x + y, \quad (5.31)$$

удовлетворяющих (5.28) и (5.29), система (5.30) принимает вид

$$\begin{cases} 2\bar{\lambda}_1 - \bar{\lambda}_2 - \bar{\lambda}_3 + 2\bar{\lambda}_4 = \lambda_0, \\ \bar{\lambda}_1 - 2\bar{\lambda}_2 + 2\bar{\lambda}_3 - \bar{\lambda}_4 = -\lambda_0. \end{cases}$$

Общее решение этой системы можно записать следующим образом:

$$\bar{\lambda}_1 = \frac{1}{3}(3\lambda_0 + 4\bar{\lambda}_3 - 5\bar{\lambda}_4), \quad \bar{\lambda}_2 = \frac{1}{3}(3\lambda_0 + 5\bar{\lambda}_3 - 4\bar{\lambda}_4). \quad (5.32)$$

Чтобы получить частное решение, положим  $\lambda_0 = \bar{\lambda}_3 = \bar{\lambda}_4 = 1$ . Далее, согласно (5.32),  $\bar{\lambda}_1 = \frac{2}{3}$ ,  $\bar{\lambda}_2 = \frac{4}{3}$ . Подставив такие  $\lambda_0$ ,  $\bar{\lambda}_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ) и (5.25), (5.26), (5.31) в (5.27), получим компоненты искомого векторного поля:

$$P = \frac{4}{3}xy(y-x)(x+2y) - x(x+y)y(y-x)(2y-x) + x(x+y)y(y-2x),$$

$$Q = \frac{2}{3}(x+y)y(y-x)(2x+y) - \frac{4}{3}xy(y-x)(x+2y) + x(x+y)y(y-2x).$$

Эти компоненты, предварительно умноженные на 3, используем в следующем программном коде:

```

with(plots, implicitplot);
P := (x, y) -> 4 * x * y * (-x + y) * (x + 2 * y) - 3 * x * (x + y) * (-x + y) * (-x + 2 * y) + 3 *
(x + y) * x * y * (-2 * x + y);
Q := (x, y) -> 2 * (x + y) * y * (-x + y) * (2 * x + y) - 4 * x * y * (-x + y) * (x + 2 * y) + 3 * x *
(x + y) * y * (-2 * x + y);
F1 := fieldplot([P, Q], -1.0..1.0, -1.0..1.0, arrows = SLIM, fieldstrength = fixed);
G1 := implicitplot(x + y = 0, x = -1.0..1.0, y = -1.0..1.0, style = line);
G2 := implicitplot(-x + y = 0, x = -1.0..1.0, y = -1.0..1.0, style = line);
G3 := implicitplot(x = 0, x = -1.0..1.0, y = -1.0..1.0, style = line);
G4 := implicitplot(y = 0, x = -1.0..1.0, y = -1.0..1.0, style = line);
display(F1, G1, G2, G3, G4, axes = boxed, scaling = constrained);

```

Выполнив этот код, получим векторное поле, показанное на рис. 9.  $\square$

5.2.2. *Векторные поля с четырьмя сепаратрисами смешанного типа.* Пусть начало координат  $O$  разбивает две прямые (2.1), скажем,  $\omega_q = 0$  и  $\omega_k = 0$ , на четыре сепаратрисы смешанного типа, а все остальные сепаратрисы — несмешанного типа. Для построения векторного поля с таким набором сепаратрис достаточно, в силу предыдущего, положить в (4.2)

$$\lambda_i = \bar{\lambda}_i(\xi_i x^2 + 2\eta_i xy + \zeta_i y^2),$$

где  $\bar{\lambda}_i, \xi_i, \eta_i, \zeta_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) — некоторые константы такие, что

$$\bar{\lambda}_i, \xi_i, \zeta_i > 0, \quad \eta_i^2 - 4\xi_i\zeta_i < 0, \quad \lambda = \lambda_0\omega_q\omega_k \text{ в (4.6).}$$

**Пример 5.6.** Построим векторное поле с топологической структурой, заданной схемой (b) на рис. 8, и сепаратрисами, заданными уравнениями (5.25).

*Решение.* Во-первых, используя направляющие векторы (5.26) сепаратрис, мы представим искомое векторное поле в виде

$$\vec{v} = \bar{\lambda}_1 \vec{r}_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \bar{\omega}_1 - \bar{\lambda}_2 \vec{r}_2 \omega_1 \omega_3 \omega_4 \bar{\omega}_2 - \bar{\lambda}_3 \vec{r}_3 \omega_1 \omega_2 \omega_4 \bar{\omega}_3 + \bar{\lambda}_4 \vec{r}_4 \omega_1 \omega_2 \omega_3 \bar{\omega}_4, \quad (5.33)$$

где

$$\bar{\omega}_i \equiv \xi_i x^2 + 2\eta_i xy + \zeta_i y^2, \quad \bar{\lambda}_i, \xi_i, \zeta_i > 0, \quad \eta_i^2 - 4\xi_i\zeta_i < 0 \quad (i = \overline{1, 4}), \quad (5.34)$$

а  $\bar{\lambda}_i, \xi_i, \eta_i, \zeta_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) — константы. Знаки, стоящие перед членами в правой части (5.33), выбраны так, что на сепаратрисе  $L_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) вектор  $\vec{v}$  имеет то же направление, что и соответствующая стрелка на схеме (b) на рис. 8. Далее с учетом (4.4) получаем

$$\vec{r} \times \vec{v} = -(\bar{\lambda}_1 \bar{\omega}_1 - \bar{\lambda}_2 \bar{\omega}_2 - \bar{\lambda}_3 \bar{\omega}_3 + \bar{\lambda}_4 \bar{\omega}_4) \omega_1 \omega_2 \omega_3 \omega_4 \vec{k}. \quad (5.35)$$

Предположим, что

$$\bar{\lambda}_1 \bar{\omega}_1 - \bar{\lambda}_2 \bar{\omega}_2 - \bar{\lambda}_3 \bar{\omega}_3 + \bar{\lambda}_4 \bar{\omega}_4 = \lambda_0 \omega_2 \omega_3, \quad \text{где } \lambda_0 > 0. \quad (5.36)$$

Тогда равенство (5.35) принимает вид

$$\vec{r} \times \vec{v} = -\lambda_0 \omega_1 \omega_2^2 \omega_3^2 \omega_4 \vec{k},$$

где знак  $-\lambda_0 \omega_1 \omega_2^2 \omega_3^2 \omega_4$  внутри каждого из секторов  $S_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) идентичен знаку, отмеченному в этом секторе на схеме (b) рис. 8. Следовательно, согласно утверждениям 4.1–4.4 все эти сектора относятся к требуемым типам.

Чтобы найти  $\bar{\lambda}_i, \xi_i, \eta_i, \zeta_i$ , удовлетворяющие (5.36), заменим  $\omega_i$  и  $\bar{\omega}_i$  в (5.35) их выражениями (5.25) и (5.34), соответственно:

$$\begin{aligned} & (\bar{\lambda}_1 \xi_1 - \bar{\lambda}_2 \xi_2 - \bar{\lambda}_3 \xi_3 + \bar{\lambda}_4 \xi_4) x^2 + 2(\bar{\lambda}_1 \eta_1 - \bar{\lambda}_2 \eta_2 - \bar{\lambda}_3 \eta_3 + \bar{\lambda}_4 \eta_4) xy + \\ & + (\bar{\lambda}_1 \zeta_1 - \bar{\lambda}_2 \zeta_2 - \bar{\lambda}_3 \zeta_3 + \bar{\lambda}_4 \zeta_4) y^2 = \lambda_0 [a_2 a_3 x^2 + (a_2 b_3 + b_2 a_3) xy + b_2 b_3 y^2]. \end{aligned} \quad (5.37)$$

Приравнявая коэффициенты при подобных членах в левой и правой частях равенства (5.37), получаем

$$\begin{cases} \bar{\lambda}_1 \xi_1 - \bar{\lambda}_2 \xi_2 - \bar{\lambda}_3 \xi_3 + \bar{\lambda}_4 \xi_4 = \lambda_0 a_2 a_3, \\ \bar{\lambda}_1 \eta_1 - \bar{\lambda}_2 \eta_2 - \bar{\lambda}_3 \eta_3 + \bar{\lambda}_4 \eta_4 = \lambda_0 (a_2 b_3 + b_2 a_3) / 2, \\ \bar{\lambda}_1 \zeta_1 - \bar{\lambda}_2 \zeta_2 - \bar{\lambda}_3 \zeta_3 + \bar{\lambda}_4 \zeta_4 = \lambda_0 b_2 b_3. \end{cases}$$

Для упрощения этих равенств положим  $\lambda_0 = \bar{\lambda}_1 = \dots = \bar{\lambda}_4 = 1$  и подставим  $a_2 = 1$ ,  $b_2 = 1$ ,  $a_3 = 0$ ,  $b_3 = 1$ , согласно (5.25):

$$\begin{cases} \xi_1 - \xi_2 - \xi_3 + \xi_4 = 0, \\ \eta_1 - \eta_2 - \eta_3 + \eta_4 = 1/2, \\ \zeta_1 - \zeta_2 - \zeta_3 + \zeta_4 = 1. \end{cases} \quad (5.38)$$

Частное решение

$$\eta_1 = \eta_4 = 1/2, \quad \eta_2 = \eta_3 = 1/4, \quad \xi_1 = \xi_2 = \xi_3 = \xi_4 = 1, \quad \zeta_1 = \zeta_2 = 1, \quad \zeta_3 = \zeta_4 = 1/2$$

системы (5.38) удовлетворяет всем неравенствам (5.34) и соответствует

$$\begin{aligned} \bar{\omega}_1 &\equiv x^2 + xy + y^2, & \bar{\omega}_2 &\equiv x^2 + 0,5xy + 0,5y^2, \\ \bar{\omega}_3 &\equiv x^2 + 0,5xy + 0,5y^2, & \bar{\omega}_4 &\equiv x^2 + xy + y^2. \end{aligned} \quad (5.39)$$

Подставляя (5.25), (5.26), (5.39) и  $\bar{\lambda}_i = 1$  ( $i = \overline{0,4}$ ) в (5.33), получим искомое векторное поле  $\vec{v}$  с компонентами

$$\begin{aligned} P &= -xy(y-x)(x^2 + 0,5xy + 0,5y^2) - \\ &\quad - x(x+y)(y-x)(x^2 + 0,5xy + 0,5y^2) + x(x+y)y(x^2 + xy + y^2), \\ Q &= -(x+y)y(y-x)(x^2 + xy + y^2) + \\ &\quad + xy(y-x)(x^2 + 0,5xy + 0,5y^2) + x(x+y)y(x^2 + 0,5xy + 0,5y^2). \end{aligned} \quad (5.40)$$

Графическое изображение этого векторного поля на рис. 10 получается выполнением программного кода из примера 5.5 при условии, что в этом коде  $P$  и  $Q$  заменены их выражениями из (5.40).  $\square$

**Замечание 5.2.** Если  $\vec{r} \times \vec{v} = \prod_{i=1}^m \omega_i^{\alpha_i}$  и  $\alpha_i > 1$ , то соответствующая строка  $\omega_i = 0$  разбивается, вообще говоря, на  $\alpha_i$  сепаратрис при сколь угодно малом возмущении компонент векторного поля. Таким образом, все сепаратрисы смешанного типа являются неустойчивыми элементами фазовых портретов и поэтому представляют меньший интерес для приложений, чем сепаратрисы несмешанного типа, соответствующие  $\alpha_i = 1$ .

**Замечание 5.3.** Начало координат  $O$  является неустойчивой критической точкой для любого векторного поля рассматриваемого типа, если его степень сингулярности  $d \geq 2$ . В этом случае даже малые гладкие возмущения компонент векторного поля расщепляют  $O$  на критические точки меньших степеней сингулярности (см. [15]). Все эти новые критические точки находятся в произвольно малой окрестности  $O$ , если возмущения достаточно малы. Это позволяет использовать результаты настоящей работы для построения математических моделей динамических систем при условии, что их свойства могут быть связаны со свойствами векторных полей, перечисленными в разделе 2. Реализация такой возможности демонстрируется в примере 6.1 в разделе 6.

## 6. ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИЙ УПРАВЛЕНИЯ ПРОГРАММИРУЕМЫМ ДВИЖЕНИЕМ ЧАСТИЦЫ НА ПЛОСКОСТИ

Предположим, что целью управляемого плоского движения частицы является ее движение со скоростями, образующими векторное поле  $\vec{v} = \{P(x, y), Q(x, y)\}$  типа, описанного в разделе 2. Тогда соответствующие уравнения (1.1) можно рассматривать как параметры программируемого движения частицы и использовать для нахождения управляющих сил, реализующих это движение. Например, из уравнений

$$\frac{d}{dt}[\dot{x} - P(x, y)] = -\mu[\dot{x} - P(x, y)], \quad \frac{d}{dt}[\dot{y} - Q(x, y)] = -\mu[\dot{y} - Q(x, y)], \quad (6.1)$$

где  $\mu$  — произвольная положительная функция, следует экспоненциальная сходимости  $\dot{x}$  и  $\dot{y}$  к их программным значениям  $P$  и  $Q$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Из (6.1) мы получаем компоненты ускорения  $\ddot{\vec{r}}$ :

$$\begin{aligned}\ddot{x} &= \left[ \frac{\partial P(x, y)}{\partial x} - \mu \right] \dot{x} + \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} \dot{y} + \mu P(x, y), \\ \ddot{y} &= \frac{\partial Q(x, y)}{\partial x} \dot{x} + \left[ \frac{\partial Q(x, y)}{\partial y} - \mu \right] \dot{y} + \mu Q(x, y).\end{aligned}\tag{6.2}$$

Подставляя этот вектор в уравнение динамики

$$M\ddot{\vec{r}} = \vec{F}(\vec{r}, \dot{\vec{r}})\tag{6.3}$$

частицы массы  $M$ , мы находим искомую управляющую силу  $F(t, \vec{r}, \dot{\vec{r}})$ .

**Пример 6.1.** Предположим, что частица единичной массы начинает свое движение в плоскости  $Oxy$  при следующих начальных условиях:

$$x(0) = x_{0i}, \quad y(0) = y_{0i}, \quad \dot{x}(0) = 0, \quad \dot{y}(0) = 0,\tag{6.4}$$

где  $(x_{0i}, y_{0i})$  — точка соответствующего сектора  $S_i$  ( $i = 1, 2, 3, 4$ ) фазового портрета, приведенного в примере 5.1 (схема (а) на рис. 2). Найдем силу, действующую на частицу так, чтобы ее скорость образовывала векторное поле с тем же набором сепаратрис и топологической структурой, что и в примере 5.1.

*Решение.* В этих условиях векторное поле (5.5) можно рассматривать как поле программируемых скоростей частиц. Поэтому замена  $P$  и  $Q$  в (6.2) их выражениями из (5.6) дает компоненты искомой силы, поскольку  $M = 1$ :

$$\begin{aligned}F_x &= (6xy - 2y^2 + 3x^2 - \mu)\dot{x} + (3x^2 - 4xy)\dot{y} - \mu(3x^2y + 2xy^2 - x^3), \\ F_y &= 3y^2\dot{x} + (-3y^2 + 6xy - \mu)\dot{y} - \mu(y^3 - 3xy^2).\end{aligned}\tag{6.5}$$

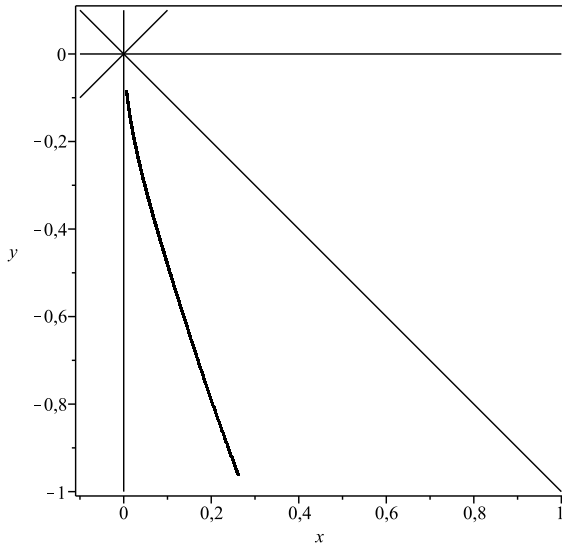
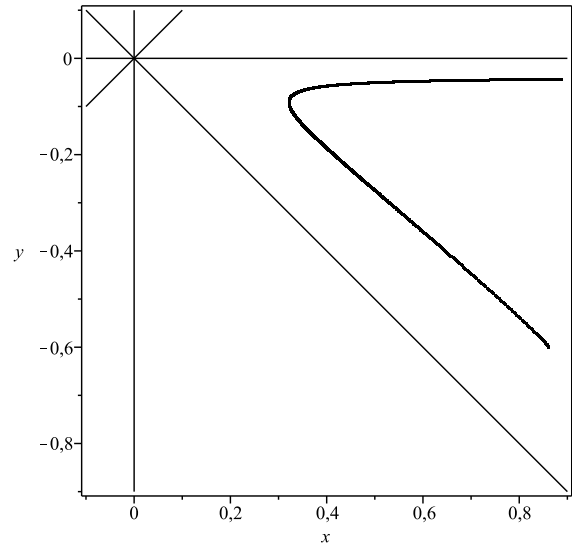
Для проверки этого решения можно взять некоторую точку  $(x_{0i}, y_{0i})$  в каждом из секторов  $S_i$  ( $i = \overline{1, 4}$ ) в качестве начального положения частицы и проинтегрировать уравнения (6.5) численно, комбинируя процедуру `Iter`

```
Iter := proc(x, y, n :: integer, m, h)
local Itv, Itc, i, w1, w2, u, v; Itv := array(1..n, 1..2); Itc := array(1..n, 1..2);
Itv[1, 1] := 0; Itv[1, 2] := 0; Itc[1, 1] := x; Itc[1, 2] := y;
w1 := -m * x * (3 * x * y + 2 * y^2 - x^2); w2 := -m * y^2 * (y - 3 * x);
for i from 2 to n do
Itv[i, 1] := Itv[i - 1, 1] + w1 * h; Itv[i, 2] := Itv[i - 1, 2] + w2 * h;
Itc[i, 1] := Itc[i - 1, 1] + Itv[i - 1, 1] * h + (1/2) * w1 * h^2;
Itc[i, 2] := Itc[i - 1, 2] + Itv[i - 1, 2] * h + (1/2) * w2 * h^2;
u := Itc[i, 1]; v := Itc[i, 2];
w1 := (6 * u * v - 2 * v^2 + 3 * u^2 - m) * Itv[i, 1] + (3 * u^2 - 4 * u * v) * Itv[i, 2] - m * (-3 *
u^2 * v + 2 * u * v^2 - u^3);
w2 := 3 * v^2 * Itv[i, 1] + (-3 * v^2 + 6 * u * v - m) * Itv[i, 2] - m * (v^3 - 3 * u * v^2) end do;
eval(Itc);
convert(Itc, matrix)
end proc;
```

с функцией `pointplot` пакета *MAPLE*, т. е.:

```
Ai := Iter(x0i, y0i, n, m, h);
with(plots);
pointplot(Ai, symbol = point);
```

В частности:

Рис. 11. Кривая, исходящая из  $M_{01}$ FIG. 11. Curve emanating from  $M_{01}$ Рис. 12. Кривая, исходящая из  $M_{02}$ FIG. 12. Curve emanating from  $M_{02}$ 

— для точки  $M_{01}(0,26; -0,96)$  в  $S_1$ , выполнив код

```
A1 := Iter(.26, -.96, 5650, 2, 0.1e - 1);
with(plots); pointplot(A1, symbol = point);
```

получим график кривой, изображенный на рис. 11;

— для точки  $M_{02}(0,86; -0,6)$  в  $S_2$ , выполнив код

```
A2 := Iter(.86, -.6, 1785, 2, 0.1e - 1);
with(plots); pointplot(A2, symbol = point);
```

получим график кривой, изображенный на рис. 12;

— для точки  $M_{03}(0,0086; 0,005)$  в  $S_3$ , выполнив код

```
A3 := Iter(0.86e - 2, 0.5e - 2, 17150, 10, .2);
with(plots); pointplot(A3, symbol = point);
```

получим график кривой, изображенный на рис. 13;

— для точки  $M_{04}(0,3; 0,42)$  в  $S_4$ , выполнив код

```
A4 := Iter(0.3, 0.42, 19650, 2, 0.01);
with(plots); pointplot(A4, symbol = point);
```

получим график кривой, изображенный на рис. 14.

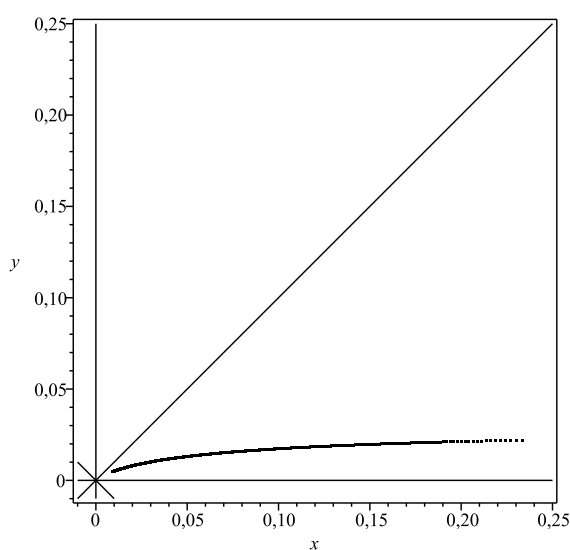
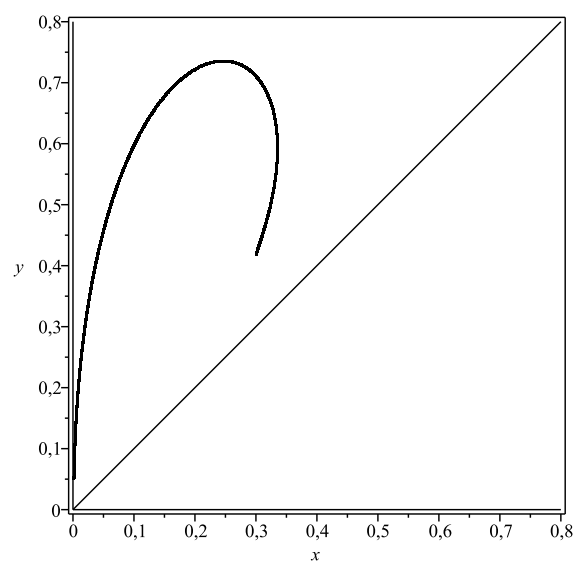
Полученные таким образом кривые, их форма и расположение относительно сепаратрис согласуются с заданным поведением управляемой частицы в секторах  $S_i$  ( $i = \overline{1,4}$ ).  $\square$

**Замечание 6.1.** Пусть в классической задаче двух тел одно тело является управляемым спутником с массой  $M$ , пренебрежимо малой по сравнению с массой другого тела, которое является точкой, находящейся в начале координат  $O$  инерциальной системы отсчета  $Oxy$ . Если программа относительного движения спутника задана в виде векторного поля скорости типа, указанного в разделе 2, то разница между уравнением (6.3) и уравнением относительного движения двух тел (см. [16, пункт 8.2])

$$M\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{r} + \vec{F}_c \quad (6.6)$$

дает управляющую силу

$$\vec{F}_c = \vec{F} + \frac{\mu}{r^3}\vec{r}, \quad \mu = \text{const} > 0. \quad (6.7)$$

Рис. 13. Кривая, исходящая из  $M_{03}$ FIG. 13. Curve emanating from  $M_{03}$ Рис. 14. Кривая, исходящая из  $M_{04}$ FIG. 14. Curve emanating from  $M_{04}$ 

Таким образом, объединяя уравнения (6.6) и (6.7), получим математическую модель управляемого движения спутника в плоскости  $Oxy$ . Характер этого движения зависит от типа сектора, в котором находится спутник.

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Альмухамедов М. И. Обратная задача качественной теории дифференциальных уравнений // Изв. вузов. Сер. Мат. — 1963. — № 4. — С. 3–6.
2. Альмухамедов М. И. О конструировании дифференциального уравнения, имеющего своими предельными циклами заданные кривые // Изв. вузов. Сер. Мат. — 1965. — № 1. — С. 12–16.
3. Волков С. В. Управление квазилинейными динамическими системами с двумя степенями свободы // Докл. РАН. — 2002. — 384, № 1. — С. 43–46.
4. Галиуллин А. С. Обратные задачи динамики. — М.: Мир, 1984.
5. Галиуллин А. С. Методы решения обратных задач динамики. — М.: Наука, 1986.
6. Еругин Н. П. Построение всего множества систем дифференциальных уравнений, имеющих заданную интегральную кривую // Прикл. мат. мех. — 1952. — 16, № 6. — С. 659–670.
7. Мещерский И. В. Работы по механике тел переменной массы. — М.—Л.: Гостехиздат, 1948.
8. Сулов Г. К. О силовой функции, допускающей данные частные интегралы // Докт. дисс. — Киев: Киевский ун-т, 1890.
9. Andronov A. A., Leontovich E. A., Gordon I. I., Maier A. G. Qualitative theory of second-order dynamic systems on a plane. — New York: John Wiley & Sons, 1973.
10. Argémi J. Sur les points singuliers multiples de systèmes dynamiques dans  $\mathbb{R}^2$  // Ann. Mat. Pura Appl. (4). — 1968. — 79. — С. 35–69.
11. Bertrand M. J. Théorème relatif au mouvement d'un point attiré vers un centre fixe // Comp. Rend. Acad. Sci. — 1873. — 77. — С. 849–853.
12. Frommer M. Die integralkurven einer gervonlichen differentialgleichung erster ordnung in der umgebung rationaler unbestimmtheitsstellen // Math. Ann. — 1928. — 99. — С. 222–272.
13. Jaumes G. Synthèse d'un système dynamique correspondant a un portrait topologique donné // Int. J. Nonlinear Mech. — 1972. — 7, № 6. — С. 597–608.
14. Newton I. Philosophiae Naturalis Principia Mathematica. — London, 1687.
15. Schecter S., Singer M. F. Separatrices at singular points of planar vector fields // Acta Math. — 1980. — 145. — С. 47–78.
16. Shaub H., Junkins L. J. Analytical mechanics and aerospace systems. — <https://www.fisica.net/mecanicaclassica/Analytical%20Mechanics%20of%20Aerospace%20Systems.pdf>, 2002.
17. Sverdllove R. Inverse problems for dynamical systems // J. Differ. Equ. — 1981. — 42, № 1. — С. 72–105.
18. Volkov S. V. Modelling of the controlled motion of a point on a plane // J. Appl. Math. Mech. — 2005. — 69. — С. 173–182.

С. В. Волков

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия

E-mail: volkov-sv@rudn.ru

DOI 10.22363/2413-3639-2022-68-4-575-595

UDC 517.911+517.925.54+517.925.71

## Construction of the planar vector fields with nonsimple critical point of prescribed topological structure

S. V. Volkov

*Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia*

The problem of constructing  $n$ -linear ( $n \geq 2$ ) plane vector fields with isolated critical point and given separatrices of prescribed types is considered. Such constructions are based on the use of vector algebra, the qualitative theory of second-order dynamic systems and classical methods for investigating their critical points. This problem is essentially an inverse problem of the qualitative theory of ordinary differential equations, and its solution can be used to synthesize mathematical models of controlled dynamical systems of various physical nature.

**Keywords:** vector field, ODE, phase portrait, topological structure, critical point, separatrix, inverse problem of qualitative theory of ODE, mathematical model, programmed motion, controlled particle

**For citation:** S. V. Volkov, "Construction of the planar vector fields with nonsimple critical point of prescribed topological structure," *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2022, vol. 68, No. 4, 575–595. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-575-595>

### REFERENCES

1. M. I. Almukhamedov, "Obratnaya zadacha kachestvennoy teorii differentsial'nykh uravneniy" [An inverse problem of the qualitative theory of ordinary differential equations], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1963, No. 4, 3–6 (in Russian).
2. M. I. Almukhamedov, "O konstruirovani differentsial'nogo uravneniya, imeyushchego svoimi predel'nymi tsiklami zadannye krivye" [On the construction of a differential equation having given curves as limit cycles], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1965, No. 1, 12–16 (in Russian).
3. S. V. Volkov, "Upravlenie kvazilineynymi dinamicheskimi sistemami s dvumya stepenyami svobody" [Control of the quasi-linear dynamical systems with two degrees of freedom], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2002, 384, No. 1, 43–46 (in Russian).
4. A. S. Galiullin, *Obratnye zadachi dinamiki* [Inverse Problems of Dynamics], Mir, Moscow, 1984 (in Russian).
5. A. S. Galiullin, *Metody resheniya obratnykh zadach dinamiki* [Methods for Solving Inverse Problems of Dynamics], Nauka, Moscow, 1986 (in Russian).
6. N. P. Erugin, "Postroenie vsego mnozhestva sistem differentsial'nykh uravneniy, imeyushchikh zadannuyu integral'nyu krivuyu" [Construction of the totality of systems of differential equations that have a given integral curve], *Prikl. mat. mekh.* [Appl. Math. Mech.], 1952, 16, No. 6, 659–670 (in Russian).
7. I. V. Meshcherskiy, *Raboty po mekhanike tel peremennoy massy* [Researches on the Mechanics of Bodies of Variable Mass], Gostekhizdat, Moscow–Leningrad, 1948 (in Russian).
8. G. K. Suslov, *O silovoy funktsii, dopuskayushchey dannye chastnye integraly* [On the Force Function, Admitting Given Particular Integrals], Doctoral Thesis, Kiev Univ., Kiev, 1890.





9. A. A. Andronov, E. A. Leontovich, I. I. Gordon, and A. G. Maier, *Qualitative Theory of Second-Order Dynamic Systems on a Plane*, John Wiley & Sons, New York, 1973.
10. J. Argémi, “Sur les points singuliers multiples de systèmes dynamiques dans  $\mathbb{R}^2$ ,” *Ann. Mat. Pura Appl. (4)*, 1968, **79**, 35–69.
11. M. J. Bertrand, “Théorème relatif au mouvement d’un point attiré vers un centre fixe,” *Comp. Rend. Acad. Sci.*, 1873, **77**, 849–853.
12. M. Frommer, “Die integralkurven einer gewissen differentialgleichung erster ordnung in der umgebung rationaler unbestimmtheitsstellen,” *Math. Ann.*, 1928, **99**, 222–272.
13. G. Jaumes, “Synthèse d’un système dynamique correspondant a un portrait topologique donné,” *Int. J. Nonlinear Mech.*, 1972, **7**, No. 6, 597–608.
14. I. Newton, *Philosophiæ Naturalis Principia Mathematica*, London, 1687.
15. S. Schecter and M. F. Singer, “Separatrices at singular points of planar vector fields,” *Acta Math.*, 1980, **145**, 47–78.
16. H. Shaub and L. J. Junkins, *Analytical mechanics and aerospace systems*, <https://www.fisica.net/mecanicaclassica/Analytical%20Mechanics%20of%20Aerospace%20Systems.pdf>, 2002.
17. R. Sverdlove, “Inverse problems for dynamical systems,” *J. Differ. Equ.*, 1981, **42**, No. 1, 72–105.
18. S. V. Volkov, “Modelling of the controlled motion of a point on a plane,” *J. Appl. Math. Mech.*, 2005, **69**, 173–182.

S. V. Volkov

Peoples’ Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia

E-mail: volkov-sv@rudn.ru

## НЕАВТОНОМНАЯ ДИНАМИКА: КЛАССИФИКАЦИЯ, ИНВАРИАНТЫ, РЕАЛИЗАЦИЯ

В. З. ГРИНЕС, Л. М. ЛЕРМАН

*Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,  
Нижний Новгород, Россия*

Работа является кратким обзором результатов, полученных в неавтономной динамике, опираясь на понятие равномерной эквивалентности неавтономных систем. Этот подход к изучению неавтономных систем был предложен в работе [10] и развит далее в работах второго автора, а недавно — совместно обоими авторами. Такой подход видится плодотворным и перспективным, поскольку он позволяет развить неавтономный аналог теории динамических систем для указанных классов систем и дать классификацию некоторых естественных классов неавтономных систем, используя инварианты комбинаторного типа. Мы показываем это для классов неавтономных градиентно-подобных векторных полей на замкнутых многообразиях размерности один, два и три. В последнем случае появляется новый инвариант эквивалентности, тип дикого вложения устойчивых и неустойчивых многообразий [14, 17], как было показано в недавней работе авторов [5].

**Ключевые слова:** неавтономная динамика, неавтономное векторное поле, градиентно-подобное векторное поле, равномерная эквивалентность, дикое вложение

**Для цитирования:** В. З. Гринес, Л. М. Лерман. Неавтономная динамика: классификация, инварианты, реализация // *Соврем. мат. Фундам. направл.* 2022. Т. 68, № 4. С. 596–620. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-596-620>

### 1. ВВЕДЕНИЕ

При изучении неавтономных векторных полей (НВП) на  $C^\infty$ -гладком замкнутом многообразии  $M$  одним из первых является вопрос о том, что классифицировать? Изучение автономных систем начинается с изучения множества простейших траекторий — состояний равновесия, замкнутых траекторий. Классифицируются их типы, исследуется количество таких траекторий, а также поведение траекторий, которые проходят вблизи простейших. После этого делается попытка изучения глобальной структуры фазового пространства динамической системы на траектории с помощью разработанных методов теории динамических систем.

Такой подход неприменим для исследования неавтономных систем, так как сразу не представляется возможным выделение множества простейших решений и, как следствие, отсутствует объект классификации. На самом деле, существует подход к исследованию неавтономных систем, восходящий к Бебутову [1], позволяющий, в определенном смысле, свести задачу изучения неавтономной системы к изучению некоторой автономной системы, тесно связанной с неавтономной. В настоящее время такая автономная система называется *косым произведением*, или *расширением* [38, 39]. Недостатком такого подхода является топологическая сложность фазового пространства полученной автономной системы и сложность ее динамики даже в самых простейших случаях. Мы не будем здесь подробно останавливаться на этом подходе, см., например, [38, 39].

Мы опишем подход к изучению неавтономных систем, начатый в [10] и продолженный в серии работ [5, 9, 28]. Под *неавтономным векторным полем* (НВП) на  $M$  понимается равномерно непрерывное отображение  $v : \mathbb{R} \rightarrow V^k(M)$ , где  $V^k(M)$  — банахово пространство  $C^k$ -гладких векторных полей на  $M$ , наделенное  $C^k$ -нормой. Такое НВП имеет решения, графики которых в расширенном фазовом пространстве  $M \times \mathbb{R}$ , т. е. интегральные кривые (ИК), определяют ориентированное слоение  $\mathcal{F}_v$ . Снабдим  $M$  некоторой римановой метрикой и определим в  $M \times \mathbb{R}$  метрику, являющуюся прямым произведением двух метрик: римановой метрики в  $M$  и стандартной метрики в  $\mathbb{R}$ . Так как  $M$  замкнуто, то любое решение поля  $v$  определено при всех  $t \in \mathbb{R}$ . Напомним, что *эквиворфизмом* двух сепарабельных метрических пространств  $(X, d)$ ,  $(Y, \rho)$  с метриками  $d, \rho$  называется такой гомеоморфизм  $h : X \rightarrow Y$ , для которого  $h, h^{-1}$  являются равномерно непрерывными отображениями.

**Определение 1.1.** Два НВП на  $M$  называются *равномерно эквивалентными*, если существует эквиворфизм расширенного фазового пространства, переводящий каждую интегральную кривую первого НВП в интегральную кривую второго НВП с сохранением направления времени (другими словами, переводящий первое ориентированное слоение во второе с сохранением ориентации на слоях).

Ясно, что такое отношение эквивалентности различает НВП, в которых асимптотическое поведение интегральных кривых различно. Это соотношение позволяет ввести понятие структурно устойчивого НВП.

**Определение 1.2.** НВП  $v$  называется *структурно устойчивым*, если существует окрестность  $\mathcal{U}$  поля  $v$  в пространстве НВП на  $M$  такая, что все НВП из этой окрестности равномерно эквивалентны.

Развитие современной теории автономных динамических систем показало, что отношение топологической эквивалентности, введенное для таких систем, слишком жестко, чтобы получить классификацию произвольных многомерных динамических систем, так как структура таких систем слишком сложна, в частности, из-за явления Ньюхауса [25]. Тем не менее, возможна классификация систем с «простой» динамикой. Таким образом, если мы хотим получить классификацию автономных и неавтономных систем с помощью некоторого инварианта комбинаторного типа, то следует ограничить разумным образом рассматриваемый класс систем.

В неавтономном случае первое ограничение, которое мы введем, звучит следующим образом: каждая интегральная кривая векторного НВП поля  $v$  обладает экспоненциальной дихотомией как на  $\mathbb{R}_+$ , так и на  $\mathbb{R}_-$ , причем типы этих дихотомий могут быть различными. Заметим, что экспоненциальная дихотомия данной интегральной кривой является требованием к поведению решений линейной системы, полученной линеаризацией исходной системы на данной интегральной кривой.

## 2. ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНАЯ ДИХОТОМИЯ И ТЕОРЕМА АДАМАРА—ПЕРРОНА

В дальнейшем одним из основных предположений относительно НВП изучаемого класса будет наличие экспоненциальной дихотомии их решений. Более точно это касается линеаризации векторного поля на рассматриваемом решении. Для удобства читателя напомним соответствующие понятия и результаты. Более подробно этот материал можно найти в [6, 7, 15, 21, 31].

В стандартном координатном пространстве  $\mathbb{R}^n$  рассмотрим систему линейных однородных дифференциальных уравнений

$$\dot{x} = A(t)x, \quad \sup_{t \in \mathbb{R}} \|A(t)\| \leq K, \quad (2.1)$$

с непрерывной ограниченной матрицей  $A(t)$ . Все решения такой системы определены на всей оси  $\mathbb{R}$ . Пусть  $t, \tau \in \mathbb{R}$ . Обозначим через  $G(t, \tau) = G(t)G^{-1}(\tau)$  нормированную фундаментальную матрицу системы уравнений (2.1), где  $G(t)$  — произвольная фундаментальная матрица системы:  $G'(t) \equiv A(t)G(t)$ ,  $\det G(t) \neq 0$ .

**Определение 2.1.** Говорят, что уравнение (2.1) обладает *экспоненциальной дихотомией решений* на полуоси  $\mathbb{R}_+$ , если существует непрерывное семейство проекционных операторов  $P(t)$ ,

$P^2(t) = P(t)$ , инвариантное относительно  $G$ :  $G(t, \tau)P(\tau) \equiv P(t)G(t, \tau)$ , и такие положительные постоянные  $C, \lambda, \nu$ , что выполняются следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \|G(t, \tau)P(\tau)\| &\leq C \exp[-\lambda(t - \tau)] \quad \text{при } t \geq \tau \geq 0, \\ \|G(t, \tau)(E - P(\tau))\| &\leq C \exp[\nu(t - \tau)] \quad \text{при } 0 \leq t \leq \tau. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Геометрически это условие означает, что при любом  $t \in \mathbb{R}_+$  линейное пространство  $\mathbb{R}_t^n = \mathbb{R}^n \times \{t\}$  распадается на два взаимно дополнительных линейных подпространства  $\mathcal{S}(t) = P(t)\mathbb{R}^n$  и  $\mathcal{U}(t) = (E - P(t))\mathbb{R}^n$ , инвариантных относительно оператора  $G(t, \tau)$  и таких, что любой вектор из подпространства  $\mathcal{S}(\tau)$  экспоненциально быстро сжимается равномерно относительно разности  $t - \tau$  при увеличении  $t \geq \tau$ , а любой вектор в  $\mathcal{U}(\tau)$  при этом экспоненциально сжимается при уменьшении  $t \leq \tau$ , пока  $t \geq 0$ .

Важно отметить, что подпространство  $\mathcal{S}(0)$  (а поэтому и все  $\mathcal{S}(t)$ ) определяется однозначно, так как оно в точности состоит из начальных условий тех решений, которые ограничены при  $t \in \mathbb{R}_+$ . Подпространство  $\mathcal{U}(0)$  не определяется однозначно: можно выбрать любое дополнительное подпространство  $U_1(0)$  к  $\mathcal{S}(0)$  и продолжить его вперед оператором  $G(t, 0)$ . Тогда вторая оценка в (2.2) остается верной при, может быть, другой положительной константе  $C'$ . Если взять другое дополнительное подпространство  $U_2(0)$ , то два подпространства  $G(t, 0)U_1(0)$  и  $G(t, 0)U_2(0)$  будут изменяться во времени под действием  $G(t, 0)$ , асимптотически приближаясь друг к другу при  $t \rightarrow +\infty$ .

Если объединить все подпространства  $\mathcal{S}(t)$ ,  $t \geq 0$ , в  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ , то мы получаем при  $t \in \mathbb{R}_+$  инвариантное относительно  $G(t, \tau)$  множество, состоящее из интегральных кривых. Это множество можно назвать *линейным устойчивым многообразием* для интегральной кривой  $x = 0$  системы (2.1). Ввиду первой оценки в (2.2), все интегральные кривые на этом линейном устойчивом многообразии асимптотически стремятся друг к другу при  $t \rightarrow +\infty$ .

Аналогичные понятия существуют для экспоненциальной дихотомии на  $\mathbb{R}_-$  и на всем  $\mathbb{R}$ . Например, для случая  $\mathbb{R}_-$  и любых  $t, \tau \in \mathbb{R}_-$  экспоненциальная дихотомия означает существование непрерывного семейства проекционных операторов  $Q(t) : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ ,  $Q^2(t) = Q(t)$ , инвариантных относительно  $G$ , и таких положительных постоянных  $C, \lambda, \nu$ , что выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \|G(t, \tau)Q(\tau)\| &\leq C \exp[\nu(t - \tau)] \quad \text{при } t \leq \tau \leq 0, \\ \|G(t, \tau)(E - Q(\tau))\| &\leq C \exp[-\lambda(t - \tau)] \quad \text{при } \tau \leq t \leq 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

В этом случае однозначно определяются неустойчивые подпространства  $\mathcal{U}(t) = G(t, 0)Q(0)\mathbb{R}^n$ ,  $t \leq 0$ , т. к. они соответствуют начальным условиям тех решений системы (2.1), которые ограничены при  $t \leq 0$ , а устойчивые многообразия  $\mathcal{S}(t) = G(t, 0)(E - Q(0))\mathbb{R}^n$  не определены однозначно. Для экспоненциальной дихотомии на  $\mathbb{R}$ , где  $t, \tau \in \mathbb{R}$  произвольны, оба подпространства  $\mathcal{S}, \mathcal{U}$  определены однозначно. Аналогично, как для  $\mathbb{R}_+$ , можно объединить все подпространства  $\mathcal{U}(t)$ ,  $t \leq 0$ , в  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_-$  и получить инвариантное относительно  $G(t, \tau)$  множество, состоящее из интегральных кривых при  $t \in \mathbb{R}_-$ . Это множество можно назвать *линейным неустойчивым многообразием*. В силу первой оценки в (2.3) все интегральные кривые на линейном неустойчивом многообразии асимптотически стремятся друг к другу при  $t \rightarrow -\infty$ .

Теперь обсудим, как эти понятия можно применить к НВП на многообразии. Здесь единой системы координат, вообще говоря, не существует, поэтому следует уточнить что подразумевается под линеаризацией векторного поля на данном решении. Пусть  $v$  — НВП на гладком замкнутом многообразии  $M$  и  $x(t)$  — его единственное решение, такое что  $x(\tau) = x_0$ . Тогда для любых  $t, \tau \in \mathbb{R}$  определен диффеоморфизм  $\Phi_\tau^t : M_\tau \rightarrow M_t$ . Его дифференциал  $D\Phi_\tau^t$  при применении к  $T_{x_0}M$  является линейным отображением из  $T_{x_0}M_\tau$  в  $T_{x(t)}M_t$ . Используя риманову метрику на  $M$ , мы получаем средства для измерения норм векторов и углов между двумя векторами в касательном пространстве к любой точке на  $M$ . Говорят, что решение  $x(t) = x(t; \tau, x_0) = \Phi_\tau^t(x_0)$  обладает *экспоненциальной дихотомией* типа  $(p, n - p)$  на полуоси  $t \geq 0$ , если существует непрерывное семейство проекционных операторов  $P(t) : T_{x(t)}M_t \rightarrow T_{x(t)}M_t$ ,  $P^2(t) = P(t)$ ,  $\dim \text{Ker} P(t) = n - p$ , инвариантное относительно  $D\Phi_\tau^t$ , т. е.  $D\Phi_\tau^t P(\tau) = P(t)D\Phi_\tau^t$ , нормы которых отделены от нуля и

бесконечности, и положительные константы  $C, \lambda$  такие, что выполняются неравенства

$$\begin{aligned} \|D\Phi_\tau^t P(\tau)\| &\leq C \exp[-\lambda(t - \tau)] \quad \text{при } t \geq \tau \geq 0, \\ \|D\Phi_t^\tau (E - P(t))\| &\leq C \exp[\lambda(\tau - t)] \quad \text{при } t \geq \tau \geq 0. \end{aligned}$$

Геометрическая картина опять та же:  $P(t)$  определяет непрерывное по  $t$  разложение каждого  $T_{x(t)}M_t$  в прямое произведение двух его линейных дополнительных подпространств  $P(t)T_{x(t)}M$  и  $(E - P(t))T_{x(t)}M$ , это разложение инвариантно относительно семейства операторов  $D\Phi_\tau^t$ , и необходимые экспоненциальные оценки имеют место. Ясно, что на замкнутом гладком многообразии из существования таких оценок относительно данной метрики следует их существование относительно другой римановой метрики (с другими значениями постоянных).

Если задано решение векторного поля  $v$  и  $\gamma$  его интегральная кривая в многообразии  $M \times \mathbb{R}$  (аналогично, можно работать на многообразии с краем  $M \times \mathbb{R}_+$  или  $M \times \mathbb{R}_-$ ), то с помощью экспоненциального отображения римановой метрики можно построить локальную систему координат  $(x, t)$  в *равномерной окрестности*<sup>1</sup> кривой  $\gamma$ , где  $x$  являются некоторыми координатами в  $\mathbb{R}^n$ . Эти координаты можно выбрать таким образом, что для любого  $t \in \mathbb{R}$  (или  $t \in \mathbb{R}_+, t \in \mathbb{R}_-$ ) след  $\gamma$  на  $M_t$  (т. е.  $\gamma \cap M_t$ ) в этих координатах является началом координат  $x = 0$ . В таких координатах система дифференциальных уравнений, соответствующая  $v$ , записывается в виде

$$\dot{x} = F(t, x) = A(t)x + f(t, x). \quad (2.4)$$

Здесь матрица  $A(t)$  (равномерно) непрерывна, ограничена, а  $f$  — вектор-функция, представляющая члены более высокого порядка по координате  $x$  равномерно относительно  $t$  в начале координат. Такие свойства правой части системы (2.4) следуют из равномерной непрерывности отображения  $v : \mathbb{R} \rightarrow V^k(M)$ .

Если фиксированное решение системы неавтономных дифференциальных уравнений обладает экспоненциальной дихотомией<sup>2</sup>, то при некоторых дополнительных условиях в некоторой равномерной окрестности  $U \subset M \times \mathbb{R}$  соответствующей интегральной кривой  $\gamma$  существует гладкое локальное устойчивое многообразие. Это составляет содержание известной теоремы Адамара—Перрона [2, 15, 35]. Такое устойчивое многообразие содержит все интегральные кривые, проходящие через  $U$  и приближающиеся к  $\gamma$  при  $t \rightarrow +\infty$ . Термин «содержать» здесь означает, что для любой такой интегральной кривой существует такой момент времени  $t_0$ , что для всех  $t \geq t_0$  связанная часть интегральной кривой действительно принадлежит окрестности  $U$ . Время  $t_0$  зависит, конечно, от выбора интегральной кривой.

Напомним формулировку теоремы Адамара—Перрона для интегральной кривой с экспоненциальной дихотомией. Пусть задана система (2.4), где  $A(t)$  — непрерывная ограниченная матрица, а  $f(x, t)$  — вектор-функция второго порядка малости при  $x = 0$ , заданная в некоторой равномерной окрестности прямой  $x = 0$  в  $D^n \times \mathbb{R}_+$  для любого  $t \in \mathbb{R}_+$ , и все ее производные по  $x$  до порядка  $k \geq 1$  являются равномерно непрерывными функциями при  $t \geq 0$ . Предположим, что решение  $x = 0$  обладает экспоненциальной дихотомией на  $\mathbb{R}_+$  типа  $(p, n - p)$ . Тогда существует линейная замена переменных  $x = B(t)y$  с непрерывно дифференцируемой ограниченной обратимой матрицей  $B$  такой, что после замены переменных система  $x = 0$  принимает вид

$$\dot{y}_1 = C(t)y_1 + F_1(y_1, y_2, t), \quad \dot{y}_2 = D(t)y_2 + F_2(y_1, y_2, t), \quad (2.5)$$

где линейная система  $\dot{y}_1 = C(t)y_1$  обладает экспоненциальной дихотомией на  $\mathbb{R}_+$  типа  $(p, 0)$  и система  $\dot{y}_2 = D(t)y_2$  обладает экспоненциальной дихотомией на  $\mathbb{R}_+$  типа  $(0, n - p)$  с вектор-функциями  $F_1, F_2$  со свойствами, аналогичными свойствам вектор-функции  $f$ . Для системы (2.5) справедлива следующая теорема.

**Теорема 2.1** (Адамар—Перрон). *Существует равномерная окрестность  $U \subset \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$  решения  $y_1 = 0, y_2 = 0$  и  $C^1$ -гладкая функция  $y_2 = G(y_1, t), G(0, t) \equiv 0, G_{y_1}(0, t) \equiv 0$ , такие, что*

<sup>1</sup>Под равномерной окрестностью интегральной кривой  $\gamma \subset M \times \mathbb{R}$  понимается содержащее  $\gamma$  открытое множество  $V \subset M \times \mathbb{R}$ , эквивормфное множеству  $D^n \times \mathbb{R}$ , граница которого  $\partial V = \partial D^n \times \mathbb{R}$  равномерно удалена на конечное расстояние от точек кривой  $\gamma$ .

<sup>2</sup>Здесь требование экспоненциальной дихотомии может быть ослаблено до неравномерной экспоненциальной дихотомии, при сохранении существования локального устойчивого многообразия [15].

подмногообразии в  $\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}_+$ , являющееся графиком  $(y_1, G(y_1, t), t)$  этой функции, инвариантно относительно системы (2.5):

$$D(t)G(y_1, t) + F_2(y_1, G(y_1, t), t) \equiv G_{y_1}[C(t)y_1 + F_1(y_1, G(y_1, t), t)].$$

Это подмногообразие содержит все ИК  $(y_1(t), y_2(t), t)$ , ограниченные в  $U$ , и для этих решений справедлива следующая оценка:  $\|y_1(t)\| + \|y_2(t)\| \leq L \exp[-\kappa t]$ . Все остальные решения, не принадлежащие этому подмногообразию, покидают окрестность  $U$  в момент времени  $t_1$ , зависящий от решения.

Локальное устойчивое многообразие для  $\gamma$  в  $M \times \mathbb{R}_+$  можно расширить с помощью диффеоморфизмов  $\Phi_\tau^t$  для всех  $t \in \mathbb{R}$ , что дает для  $\gamma$  единственное глобальное устойчивое многообразие  $W^s(\gamma)$  на  $M \times \mathbb{R}$ . Все интегральные кривые, принадлежащие этому многообразию, асимптотичны друг к другу при  $t \rightarrow +\infty$  и обладают экспоненциальной дихотомией одного и того же типа на  $\mathbb{R}_+$ , возможно, с другими константами  $C, \lambda, \nu$ . Точное утверждение о глобальном устойчивом многообразии выглядит следующим образом.

**Теорема 2.2.** Пусть задана НВП  $v$  и  $\gamma$  — его интегральная кривая. Предположим, что  $\gamma$  обладает экспоненциальной дихотомией на  $\mathbb{R}_+$  типа  $(p, n - p)$ . Тогда существует  $C^1$ -гладкое вложение  $J : \mathbb{R}^p \times \mathbb{R} \rightarrow M \times \mathbb{R}$  такое, что для любого  $t \in \mathbb{R}$  ограничение на  $\mathbb{R}^p \times \{t\}$  отображения  $J$ ,  $J_t : \mathbb{R}^p \rightarrow M_t$ , также является  $C^1$ -гладким вложением равномерно зависящим от  $t$  в  $C^1$ -топологии на компактных множествах в  $\mathbb{R}^p$  и образ  $J$  является инвариантным подмногообразием для  $v$ , т. е. состоит из целых интегральных кривых.

Аналогично, если интегральная кривая  $\gamma$  обладает экспоненциальной дихотомией на  $\mathbb{R}_-$  типа  $(p, n - p)$ , то теорема Адамара—Перрона, примененная к системе с обращенным временем  $t \rightarrow -t$ , дает единственное неустойчивое инвариантное многообразие размерности  $n - p$  в некоторой равномерной окрестности  $\gamma$  в  $M \times \mathbb{R}_-$ . Это многообразие можно продолжить по времени диффеоморфизмами  $\Phi_\tau^t$  до глобального неустойчивого многообразия интегральной кривой  $\gamma$ . Для случая, когда интегральная кривая  $\gamma$  обладает экспоненциальной дихотомией на  $\mathbb{R}$  типа  $(p, n - p)$ , то как устойчивые, так и неустойчивые многообразия  $\gamma$  определены однозначно, они пересекают друг друга трансверсально вдоль  $\gamma$ . В случае, когда интегральная кривая  $\gamma$  обладает экспоненциальной дихотомией решений на всей оси  $\mathbb{R}$ , будем называть ее  $h$ -кривой (гиперболической кривой).

Пересечения устойчивых или неустойчивых многообразий интегральных кривых с сечением  $M_0$  будем называть *слоями*, устойчивыми или неустойчивыми.

Что можно сказать о неустойчивом многообразии для ИК, обладающей экспоненциальной дихотомией на  $\mathbb{R}_+$ ? В случае, когда образ оператора  $P(t)$  равен нулю, эта интегральная кривая является вполне неустойчивой на  $\mathbb{R}_+$ , а ее локальное неустойчивое многообразие на  $\mathbb{R}_+$  является равномерной окрестностью ИК  $\gamma$ .

Предположим, что ядро оператора  $P(t)$  нетривиально и имеет размерность  $0 < p < n = \dim M$ . Пусть  $\mathcal{S}(t) = P(t)T_{\gamma(t)}M$  — устойчивое подпространство. Выберем любое дополнительное линейное подпространство  $U(0)$  для  $\mathcal{S}(0)$  в  $T_{\gamma(0)}M$  и продолжим его дифференциалами  $D\Phi_0^t$ . Обозначим  $\mathcal{U}(t) = D\Phi_0^t(\mathcal{U}(0))$ . Разложим вектор  $\xi \in U(t)$  в прямую сумму  $\xi = \xi_+ + \xi_-$ ,  $\xi_+ \in L_+(t)$ ,  $\xi_- \in (E - P(t))T_{\gamma(t)}M$ . В силу оценок в (2.2) векторы  $D\Phi_0^t(\xi_+)$  экспоненциально сжимаются при  $t \rightarrow +\infty$ , а векторы  $D\Phi_0^t(\xi_-)$  экспоненциально сжимаются в обратном направлении. Это приводит к тому свойству, что любые два таких дополнительных подпространства асимптотически приближаются друг к другу под действием  $D\Phi_0^t$  при  $t \rightarrow +\infty$ . В этом смысле можно говорить о неустойчивом направлении для  $\gamma$ . Для нелинейной системы это приводит к понятию гладкого неустойчивого многообразия в равномерной окрестности  $\gamma$ . Именно, продолжения под действием диффеоморфизмов  $\Phi_0^t$  двух любых гладких локальных дисков размерности  $n - p$ , трансверсальных к  $W^s(\gamma)$  при  $t = 0$ , стремятся друг к другу в  $C^1$ -топологии при  $t \rightarrow +\infty$ . Это является неавтономным аналогом  $\lambda$ -леммы Смейла, см. [40].

**Замечание 2.1.** Наиболее знакомый случай экспоненциальной дихотомии для неавтономной линейной системы — это случай действительной периодической системы, когда матрица  $A(t)$  является непрерывной  $T$ -периодической. Тогда справедливо представление Флоке для ее вещественной фундаментальной матрицы  $\Phi(t) = S(t) \exp[tB]$  с  $T$ -периодической (или  $2T$ -периодической)

дифференцируемой невырожденной матрицей  $S(t)$ . Это представление означает, что система обладает экспоненциальной дихотомией тогда и только тогда, когда матрица  $B$  не имеет собственных значений на мнимой оси. Это эквивалентно условию, что линейная периодическая система не имеет мультипликаторов на единичной окружности. Например, если  $n = 2$ , то вещественная матрица монодромии  $\Phi(T)$  может иметь:

- 1) оба собственных значения (мультипликатора) внутри единичного круга комплексной плоскости  $\mathbb{C}$  (устойчивый случай);
- 2) одно собственное значение внутри круга и одно — вне круга, тогда оба они вещественны (седловой случай);
- 3) оба собственных значения вне единичного круга в плоскости  $\mathbb{C}$  (вполне неустойчивый случай).

Тогда соответствующими подпространствами  $\mathcal{S}(t)$  являются:  $\mathbb{R}^2$  — для первого случая;  $l_s$  — для второго случая, где  $l_s$  — собственная прямая матрицы  $\Phi(T)$ , соответствующая единственному вещественному мультипликатору внутри единичного круга  $\mathbb{C}$ ; и начало координат — для третьего случая. Аналогично строятся подпространства  $\mathcal{U}(t)$ .

Примером неперодического случая с экспоненциальной дихотомией является система с матрицей  $A(t) = A_0 + \varepsilon B(t)$ , при условии, что спектр матрицы  $A_0$  не пересекает мнимую ось, с вещественной непрерывной равномерно ограниченной матрицей  $B(t)$  и достаточно малым  $\varepsilon$  (см. [7]).

### 3. ГРАДИЕНТНО-ПОДОВНЫЕ НВП

Для того чтобы выделить системы с простой структурой, наложим следующие ограничения на класс изучаемых неавтономных векторных полей. Пусть  $v$  — НВП рассматриваемого класса.

**Предположение 3.1.** *Каждая интегральная кривая  $\gamma$  поля  $v$  обладает экспоненциальной дихотомией как на  $\mathbb{R}_+$  так и на  $\mathbb{R}_-$ , и типы этих дихотомий для данной  $\gamma$  могут быть различными.*

Из предположения 3.1 и теоремы 2.2 следует, что многообразие  $M \times \mathbb{R}$  разбивается на глобальные устойчивые и неустойчивые многообразия, что позволяет сделать следующее предположение.

**Предположение 3.2.** *Множество глобальных устойчивых и неустойчивых многообразий поля  $v$  конечно.*

Напомним, что пересечение любого глобального устойчивого (неустойчивого) многообразия поля  $v$  с  $M_0 = M \times \{0\}$  является вложенным гладким подмногообразием, названным выше устойчивым (неустойчивым) слоем.

**Предположение 3.3.** *Любой устойчивый слой пересекается с любым неустойчивым слоем в  $M_0$  трансверсально. При этом, если сумма их размерностей совпадает с размерностью многообразия  $M_0$ , то пересечение состоит из конечного числа точек, а если сумма их размерностей больше размерности  $M_0$ , то пересечение состоит из конечного числа связных компактных многообразий.*

Весьма существенной для возможной классификации рассматриваемых векторных полей является информация о том, как разные устойчивые (соответственно — неустойчивые) слои примыкают друг к другу на  $M_0$ , т. е. информация о взаимном расположении устойчивых (неустойчивых) слоев разных размерностей. Ключевым понятием здесь является введенное Смейлом понятие границы глобального устойчивого (неустойчивого) многообразия гиперболических состояний равновесия и замкнутых траекторий автономных векторных полей. Мы сформулируем это понятие для НВП  $v$  рассматриваемого класса.

Пусть НВП  $v$  удовлетворяет предположению 3.1, т. е. через каждую точку многообразия  $M \times \mathbb{R}$  проходит устойчивое многообразие. Рассмотрим какое-то из этих многообразий  $W^s$ , и пусть  $w_0^s$  — его слой на  $M_0$ . Выберем некоторую последовательность  $x_n \in w_0^s$ , которая сходится к точке  $x_* \notin w_0^s$ . Обозначим через  $W^s(x_*)$  глобальное устойчивое многообразие, содержащее интегральную кривую, проходящую через точку  $x_*$ . Возникает естественный вопрос о взаимном расположении многообразий  $W^s$  и  $W^s(x_*)$ . Назовем множество предельных точек произвольных последовательностей  $x_n \in w_0^s$  с описанным выше свойством *границей Смейла* для  $w_0^s$ . Как следует из теоремы 2.2 о глобальном устойчивом многообразии, пересечение  $W^s$  с сечением  $M_0 = M \times \{0\}$  есть

образ иммерсии  $i_0 : \mathbb{R}^p \rightarrow M_0, p = \dim W^s - 1$ . Таким образом, граница Смейла для  $w_0^s = W^s \cap M_0$  есть множество  $\partial w_0^s = \text{clos}(w_0^s) \setminus w_0^s$  ( $\text{clos}(A)$  означает замыкание множества  $A$ ). Будем называть множество  $\partial W^s = \bigcup_{t \in \mathbb{R}^+} \Phi_0^t(\partial w_0^s)$  границей Смейла для многообразия  $W^s$ .

Характерной чертой автономных градиентно-подобных систем (потоков и диффеоморфизмов) является уменьшение размерности при переходе к границе Смейла устойчивых (и неустойчивых) многообразий. Мы положим это в основу следующего предположения

**Предположение 3.4.** *Для любого глобального устойчивого (неустойчивого) многообразия  $W^s$  ( $W^u$ ) его граница Смейла  $\partial W^s$  ( $\partial W^u$ ) состоит из целых устойчивых (неустойчивых) многообразий меньшей размерности.*

Еще одно предположение касается поведения интегральных кривых, которое препятствует возможным бифуркациям из бесконечности. Для иллюстрации возможности такой бифуркации, рассмотрим уравнение

$$\dot{\varphi} = \cos \varphi (\sin^2 \varphi + \exp[-t^2] - \mu),$$

зависящее от параметра  $\mu$ , в котором при переходе через  $\mu = 0$  происходит рождение интегральных кривых нового типа (из бесконечности) (см. рис. 1).

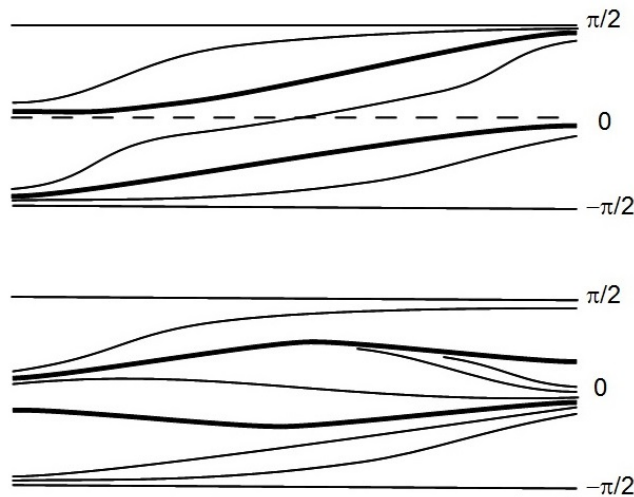


Рис. 1. Бифуркация из бесконечности:  $\mu = 0$  и  $\mu > 0$   
 FIG. 1. Bifurcation from infinity:  $\mu = 0$  и  $\mu > 0$

Рассмотрим разбиение  $M \times \mathbb{R}$  на устойчивые многообразия поля  $v$ , полагая, что вышеприведенные предположения выполняются для  $v$ . Выберем по одной ИК из каждого устойчивого многообразия и обозначим их как  $\Gamma_1^+, \dots, \Gamma_k^+$ . Они разделены в  $M \times \mathbb{R}_+$  в том смысле, что можно выбрать некоторые достаточно тонкие равномерные окрестности каждой выбранной ИК, чтобы их замыкания не пересекались друг с другом и были расположены на конечном положительном расстоянии. Стоит отметить, что существенно рассматривать ИК в  $M \times \mathbb{R}_+$ , поскольку в  $M \times \mathbb{R}$  эти кривые могут быть неотделимы, т. е. некоторые из них могут асимптотически приближаться друг к другу при  $t \rightarrow -\infty$ . Такие равномерные окрестности, являющиеся произвольно тонкими, могут быть построены с помощью функций Ляпунова для рассматриваемых интегральных кривых. Конструкция этих окрестностей такова, что векторы на их границе либо все направлены внутрь, либо все наружу, либо, если они касаются границы, то времена, соответствующие отрезкам ИК, принадлежащим границе, равномерно отделены от нуля и бесконечности.

Аналогично выберем по одной интегральной кривой  $\Gamma_1^-, \dots, \Gamma_r^-$  на каждом неустойчивом многообразии и рассмотрим их в  $M \times \mathbb{R}_-$ . Пусть  $\varepsilon$  — константа, характеризующая минимальную тонкость соответствующих однородных окрестностей. Наше последнее предположение имеет следующий вид.



**Предположение 3.5.** Для любого достаточно малого  $\varepsilon$  существует такое число  $T(\varepsilon) > 0$ , что для любой интегральной кривой всякий связный интервал времени, при котором точки этой интегральной кривой лежат вне объединения  $\varepsilon$ -окрестностей кривых  $\Gamma_1^+, \dots, \Gamma_k^+$  и  $\Gamma_1^-, \dots, \Gamma_r^-$ , меньше  $T(\varepsilon)$ .

**Определение 3.1.** Неавтономное векторное поле  $v$ , для которого выполнены предположения 3.1–3.5, будем называть *градиентно-подобным*.

Как упоминалось выше, этот класс НВП в несколько иной форме впервые был выделен в [10] для двумерных замкнутых многообразий  $M$ , в настоящей форме это было сделано в [9].

Представляется желательным, чтобы класс рассматриваемых неавтономных векторных полей обладал двумя основными свойствами:

1. системы этого класса являются грубыми (структурно устойчивыми);
2. для случаев малой размерности ( $\dim M = 1, 2$ ) они могут быть классифицированы некоторыми инвариантами комбинаторного типа.

В качестве класса НВП, где эта проблема решена, напомним результаты, полученные для случая наименьшей размерности  $\dim M = 1$ , т. е. для скалярных неавтономных градиентно-подобных уравнений на окружности  $S^1$ , см. [28].

#### 4. ГРАДИЕНТНО-ПОДОВНЫЕ НВП НА $S^1$

Введем циклическую координату  $\theta$  на  $S^1$ ,  $\theta + 2\pi n \equiv \theta \pmod{2\pi}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Тогда НВП  $v$  задается  $2\pi$ -периодической функцией  $f(\theta, t)$ , зависящей от  $t$ ,  $f(\theta + 2\pi, t) \equiv f(\theta, t)$ , являющейся правой частью скалярного дифференциального уравнения  $\dot{\theta} = f(\theta, t)$ . Требование на  $v$  быть равномерно непрерывным отображением  $v : \mathbb{R} \rightarrow V^k(S^1)$  означает, что производные от  $f$  по  $\theta$  до порядка  $k$  существуют и являются равномерно непрерывными функциями относительно  $t$ .

В этом случае экспоненциальная дихотомия любой ИК на  $\mathbb{R}, \mathbb{R}_+, \mathbb{R}_-$  может быть только типов  $(1, 0)$  или  $(0, 1)$ , и ее устойчивые (неустойчивые) многообразия могут быть размерности либо два, либо один. При выполнении предположений 3.1–3.5 относительно  $v$  комбинаторный инвариант поля  $v$  строится следующим образом. Рассмотрим интегральные кривые с экспоненциальной дихотомией типа  $(0, 1)$  на  $\mathbb{R}_+$ . Такие интегральные кривые совпадают с их неустойчивыми одномерными многообразиями, следовательно, их число конечно. Отметим на  $S_0^1$  множество точек  $\{m_1^+, m_2^+, \dots, m_k^+\}$ , являющихся следами ИК с экспоненциальной дихотомией типа  $(0, 1)$  на  $\mathbb{R}_+$ . Другое множество точек  $\{m_1^-, m_2^-, \dots, m_l^-\}$  состоит из следов интегральных кривых с типом экспоненциальной дихотомии  $(1, 0)$  на  $\mathbb{R}_-$ . Эти интегральные кривые также совпадают с их неустойчивыми одномерными многообразиями, поэтому их число конечно. Эти два набора точек не пересекаются в силу предположения 3.3. Каждая точка  $m_i^+$  на  $S_0^1$  принадлежит некоторому интервалу между двумя соседними точками  $m_j^-, m_{j+1}^-$  (см. рис. 2), представляющему собой некоторый неустойчивый слой. Не исключено, что несколько точек  $m_i^+$  принадлежат одному и тому же неустойчивому слою. То же может выполняться и для точек  $m_j^-$ : они принадлежат интервалам, т. е. 1-слоям, являющимся следами 2-мерных устойчивых многообразий (см. рис. 2).

Очевидно, что равномерно эквивалентные градиентные НВП на  $S^1$  могут приводить к геометрически различным наборам точек  $m_i^+, m_j^-$ . Поэтому следует ввести отношение эквивалентности. Два таких набора вызываются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм  $h : S_0^1 \rightarrow S_0^1$  такой, что  $h$  отображает множество точек  $\{m_1^+, m_2^+, \dots, m_k^+\}$ ,  $\{m_1^-, m_2^-, \dots, m_l^-\}$  первого набора в аналогичное множество второго набора. Класс эквивалентности таких наборов будем называть  $D$ -инвариантом.

**Теорема 4.1** (см. [28]). Два скалярных градиентно-подобных уравнения на  $S^1$  равномерно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют одинаковый  $D$ -инвариант.

Построение эквивморфизма  $H : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ , который осуществляет равномерную эквивалентность градиентно-подобных НВП  $v_1, v_2$ , имеющих одинаковый  $D$ -инвариант, т. е. переводит

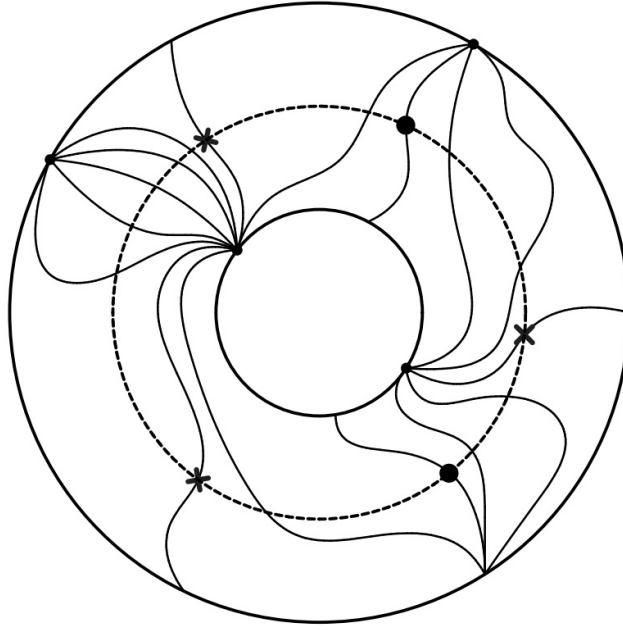


Рис. 2. D-инвариант на  $S^1$ , жирные точки — устойчивые слои, крестики — неустойчивые слои.

FIG. 2. D-invariant of  $S^1$ , stable layers are indicated with bold dots, unstable layers are indicated with crosses.

слоение на ИК поля  $v_1$  в слоение на ИК поля  $v_2$ , строится с помощью локальных функций Ляпунова вблизи ИК, проходящих через точки  $\{m_1^+, m_2^+, \dots, m_k^+\}$ ,  $\{m_1^-, m_2^-, \dots, m_l^-\}$  и далее продолжением на множество между ними в  $S^1 \times \mathbb{R}$ . Аналогичная конструкция применяется для доказательства следующей теоремы.

**Теорема 4.2.** *Любое скалярное НВП градиентно-подобного типа на  $S^1$  структурно устойчиво.*

Примерами градиентно-подобных скалярных дифференциальных уравнений являются, в частности, асимптотически автономные векторные поля на  $S^1$  с (возможно) различными типами предельных систем в  $\pm\infty$ . Напомним (см. [30]), что НВП  $v$  на гладком замкнутом многообразии  $M$  называется *асимптотически автономным*, если отображение  $v : \mathbb{R} \rightarrow V^r(M)$  имеет пределы  $v_-, v_+ \in V^r(M)$  при  $t \rightarrow \mp\infty$ , которые являются  $C^k$ -гладкими векторными полями на  $M$ . Для случая  $S^1$  асимптотическая автономность векторного поля означает, что функция  $f$ , определяющая скалярное дифференциальное уравнение, имеет предельные функции  $f_-, f_+$  класса  $C^r$ .

В качестве иллюстрирующего примера рассмотрим скалярное дифференциальное уравнение  $\dot{\theta} = f(\theta, t)$  с функцией  $f(\theta, t)$ , которая при  $t \geq T$  не зависит от  $t$  и совпадает с функцией  $f_+(\theta)$ , а при  $t \leq -T$  — совпадает с функцией  $f_-(\theta)$ . Таким образом, рассматриваемое неавтономное дифференциальное уравнение относится к классу так называемых *переходных* (*transitory*) систем, введенных в [33]. Некоторые свойства таких систем изучались также в [11].

Будем предполагать, что уравнения  $\dot{\theta} = f_+(\theta)$  и  $\dot{\theta} = f_-(\theta)$  являются структурно устойчивыми, т. е. имеют конечное число простых нулей, и класс  $r$  гладкости функций  $f, f_+, f_-$  по  $\theta$  равен 1 или выше. Пусть  $m_i^+, i = 1, \dots, k$ , являются нулями функции  $f_+$ , а  $m_j^-, j = 1, \dots, n$ , являются нулями функции  $f_-$ . Тогда рассматриваемое дифференциальное уравнение имеет при  $t \geq T$  постоянное решение  $\theta(t) = m_i^+$ , а при  $t \leq -T$  — постоянное решение  $\theta(t) = m_j^-$ . Решения из первого набора обладают экспоненциальной дихотомией на  $\mathbb{R}_+$ , а решения из второго набора — на  $\mathbb{R}_-$ . Действительно, линейризация дифференциального уравнения на любом из решений первого набора имеет вид:  $\dot{\xi} = \lambda_i \xi$ ,  $\lambda_i = f'_+(m_i^+)$ . Поэтому при  $\lambda_i < 0$  имеем: в пространстве  $\mathbb{R}$  начальных условий (где  $t = T$ ) оператор  $P$  есть тождественное отображение  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , фундаментальная матрица  $G(t)$  есть

$\exp[\lambda_i t]$ , постоянные  $C = 1$ ,  $\lambda = \lambda_i$ , и при  $t \geq \tau \geq T$  справедливо равенство

$$|G(t)PG^{-1}(\tau)| = \xi(t - \tau) = e^{\lambda_i(t-\tau)}.$$

Если  $\lambda_i > 0$ , то оператор  $P$  есть проекция в нуль, постоянные  $C = 1$ ,  $\nu = \lambda_i$ , и при  $T \leq t \leq \tau$  справедливо равенство

$$|G(t)(E - P)G^{-1}(\tau)| = e^{\lambda_i(t-\tau)}.$$

Если некоторое решение  $\theta(t)$  асимптотически стремится при  $t \rightarrow +\infty$  к одному из решений  $m_i^+$  с  $\lambda_i < 0$ , то это решение можно записать в виде  $\theta(t) = m_i^+ + x(t)$ , где  $|x(t)| \rightarrow 0$  при  $t \rightarrow \infty$ , поскольку решение  $\theta(t)$  принадлежит устойчивому многообразию решения  $m_i^+$ . Линеаризация дифференциального уравнения на решении  $\theta(t)$  есть

$$\xi' = f'_+(\theta(t))\xi = [f'_+(m_i^+) + r(t)]\xi, \quad r(t) = f'_+(m_i^+ x(t)) - f'_+(m_i^+).$$

Поскольку  $f'_+(m_i^+) = \lambda_i^+ < 0$ , то соответствующая оценка имеет вид

$$|\xi(t, \tau)| \leq e^{\lambda_i^+(t-\tau) + \int_{\tau}^t |f'_+(m_i^+ x(s)) - f'_+(m_i^+)| ds}. \quad (4.1)$$

Напомним, что первая производная  $f'_+$  является непрерывной функцией на окружности, поэтому она равномерно непрерывна. При достаточно больших  $t > T$  функция  $|x(t)|$  может быть сделана сколь угодно малой. В частности, выбирая  $\kappa < |\lambda_i^+|/2$ , можно при всех  $t > T$  считать величину  $|f'_+(m_i^+ x(s)) - f'_+(m_i^+)|$  меньшей  $\kappa$ . Тогда неравенство (4.1) можно записать в виде

$$|\xi(t, \tau)| \leq e^{\lambda_i^+(t-\tau) + \kappa(t-\tau)} \leq e^{\lambda_i^+(t-\tau)/2}.$$

Это означает, что решение  $\theta(t)$  также обладает экспоненциальной дихотомией того же типа  $(1, 0)$ , как и решение  $\theta = m_i^+$ .

Все вышесказанное справедливо также для решений  $\theta = m_j^-$  и решений, асимптотически стремящихся к ним при  $t \rightarrow -\infty$ . Таким образом, для НВП  $\dot{\theta} = f(\theta, t)$  все предположения 3.1–3.5 выполнены, кроме предположения 3.3. Для его выполнения нужно наложить некоторые условия на функцию  $f(\theta, t)$ ,  $t \in [-T, T]$ . Именно, нужно обеспечить, чтобы интегральные кривые с начальными точками  $(m_j^-, -T)$ ,  $(m_j^-, -T)$ , для которых показатели  $\lambda_j^- < 0$ , при продолжении на интервал  $(-T, T)$  в своей крайней точке при  $t = T$  не попадали в те точки  $(m_i^+, T)$ , для которых соответствующие показатели  $\lambda_i^+$  положительны. Аналогичное свойство должно выполняться в обратную сторону по времени: интегральные кривые с начальными точками  $(m_i^+, T)$ , для которых показатели  $\lambda_i^+ > 0$ , при их продолжении при убывании времени на интервал  $(-T, T)$  в своей крайней точке при  $t = -T$  не должны попадать в те точки  $(m_j^-, -T)$ , для которых соответствующие показатели  $\lambda_j^-$  отрицательны (см. рис. 3). Понятно, что эти условия можно выполнить, подбирая подходящую функцию  $f$ .

Опишем еще, для более полного понимания, разбиение расширенного фазового пространства  $S^1 \times \mathbb{R}$  на устойчивые и неустойчивые многообразия. Каждое устойчивое многообразие состоит из ИК, которые при  $t \rightarrow +\infty$  асимптотически сближаются друг с другом. Поэтому, ввиду конструкции переходного НВП, при  $t \geq T$  такие ИК стремятся к одной ИК, задаваемой как  $\theta = m_i^+$ , у которой показатель  $f'_+(m_i^+) < 0$ . Ее область притяжения при  $t \geq T$  есть полуполоса, ограниченная двумя соседними ИК того же вида, но у которых показатели положительны. Ввиду того, что  $f_+$  имеет только простые нули, имеются либо две такие соседние ИК, либо они совпадают, тогда замыкание этой полуполосы есть полуцилиндр  $S^1 \times \mathbb{R}_+$  и функция  $f_+$  имеет только два простых нуля.

Для получения полного устойчивого многообразия нужно продолжить полученную полуполоску на полуцилиндр  $S^1 \times (-\infty, T)$ . Для этого достаточно проследить за границами полуполосы. Этими границами являются интегральные кривые  $\theta = m_{i-1}^+$  и  $\theta = m_{i-1}^+$ , соседние к кривой  $\theta = m_i^+$ . Продолжение назад по времени этих ИК определяется структурой слоения на ИК в переходном слое  $S^1 \times [-T, T]$ . Важно то, что продолжение каждой из этих ИК, в силу предположения 3.3, попадает при  $t = -T$  строго внутрь одного интервала, крайними точками которого являются соседние простые нули  $m_{j-1}^-$ ,  $m_{j+1}^-$  функции  $f_-$ , у которых  $f'_-(m_{j-1}^-) < 0$ . Теперь продолжение устойчивого многообразия есть полуполоса между двумя полученными продолженными назад

ИК (см. рис. 3). Имеются еще одномерные устойчивые многообразия, которые просто совпадают с ИК, являющимися границами устойчивых многообразий. Аналогично строятся остальные устойчивые многообразия, и подобная конструкция дает неустойчивые многообразия, начиная с ИК, стремящихся к одной ИК вида  $\theta = m_j^-$ , для которой  $f'_-(m_j^-) > 0$ .

$D$ -инвариант данного НВП состоит из класса эквивалентности набора точек на  $S_0^1$ , состоящего из следов ИК с дихотомией  $(0, 1)$  на  $\mathbb{R}_+$  и следов ИК с дихотомией  $(1, 0)$  на  $\mathbb{R}_-$ .

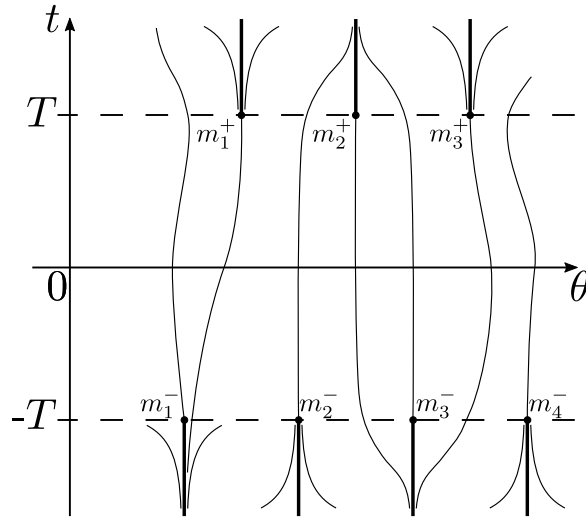


Рис. 3. Правильные переходы ИК в переходном ДУ  
 FIG. 3. Proper transitions of integral curves in a transitional differential equation

5. НЕАВТОНОМНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ НА ПОВЕРХНОСТЯХ

Следующей размерностью для исследования является два. Итак, рассмотрим неавтономное градиентно-подобное векторное поле  $v$  на гладкой замкнутой поверхности  $M$ . Здесь типы экспоненциальной дихотомии интегральных кривых могут быть  $(2, 0)$ ,  $(1, 1)$ ,  $(0, 2)$ , поэтому устойчивые многообразия могут быть трех размерностей:  $\dim W^s = 3$  (все интегральные кривые на таком устойчивом многообразии являются вполне устойчивыми интегральными кривыми),  $\dim W^s = 2$  (все интегральные кривые на таком многообразии являются седловыми интегральными кривыми) и  $\dim W^s = 1$  (такое многообразие состоит из единственной вполне неустойчивой интегральной кривой). В сечении  $M_0 = M \times \{0\}$  получаем конечное множество точек, являющихся следами одномерных устойчивых многообразий. К этим точкам примыкает конечное множество гладких кривых, являющихся следами двумерных устойчивых многообразий. Дополнение к замыканию множества кривых состоит из конечного числа областей, гомеоморфных диску и являющихся следами трехмерных устойчивых многообразий. Такое разбиение  $M_0$  является *клеточным комплексом*. Мы будем называть полученный комплекс *s-комплексом*.

Аналогично, используя неустойчивые многообразия поля  $v$ , получаем клеточное разбиение  $M_0$ , которое назовем *v-комплексом*.

В силу градиентно-подобности граница Смейла любой устойчивой кривой на  $M_0$  состоит из одной или двух точек. Таким образом, ее замыкание топологически является либо отрезком, либо замкнутой кривой. Итак, мы получаем вложенный в  $M_0$  граф, называемый *s-графом*. Аналогично определяется *u-граф*, который строится посредством неустойчивых двумерных многообразий.

Построенный выше *s-комплекс* на  $M_0$  позволяет описать взаимосвязь между топологией многообразия  $M$  и количеством и типами слоев устойчивых многообразий неавтономного градиентного векторного поля  $v$ .

**Теорема 5.1** (см. [9]). Пусть  $v$  — неавтономное градиентно-подобное векторное поле на многообразии  $M$ , а  $L_q$  — количество устойчивых слоев размерности  $q + 1$ ,  $q \in \{0, 1, 2\}$ . Тогда выполняются следующие неравенства типа Морса:

$$L_0 \geq b_0, \quad L_1 - L_0 \geq b_1 - b_0, \quad L_2 - L_1 + L_0 = b_2 - b_1 + b_0 = \chi(M),$$

где  $b_0, b_1, b_2$  — ранги соответствующих групп гомологий многообразия  $M$  (числа Бетти).

Для градиентно-подобного векторного поля на гладком двумерном многообразии  $M$  справедливы следующие основные теоремы (см. [9, 10]).

**Теорема 5.2.** *Любое градиентно-подобное векторное поле на  $M$  структурно устойчиво.*

Объединение  $s$ - и  $u$ -графов дает вложенный граф  $G$  на  $M_0$ , соответствующий НВП  $v$ . Тогда  $s$ - и  $u$ -графы назовем  $s$ - и  $u$ -подграфами графа  $G$ . Два вложенных графа  $G_1, G_2$  называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм  $h : M_0 \rightarrow M_0$  такой, что  $h$  переводит  $s$ -подграф графа  $G_1$  в  $s$ -подграф графа  $G_2$  и  $u$ -подграф графа  $G_1$  переводит в  $u$ -подграф графа  $G_2$ . Класс эквивалентности таких вложенных графов называется *различающим графом* (или  $D$ -графом) неавтономного векторного поля.

**Теорема 5.3.** *Два градиентно-подобных неавтономных векторных поля на двумерном многообразии  $M$  равномерно эквивалентны тогда и только тогда, когда они имеют эквивалентные  $D$ -графы.*

На рис. 4 представлены варианты неэквивалентных представителей различающих графов с одинаковыми  $s$ - и  $u$ -подграфами. В силу теоремы 5.3, НВП, соответствующие этим  $D$ -графам, равномерно неэквивалентны. Геометрически это очевидно, т. к. левый  $D$ -граф имеет две седловые ИК с дихотомией  $(1, 1)$  на  $\mathbb{R}$ , а правый  $D$ -граф имеет 4 таких ИК.

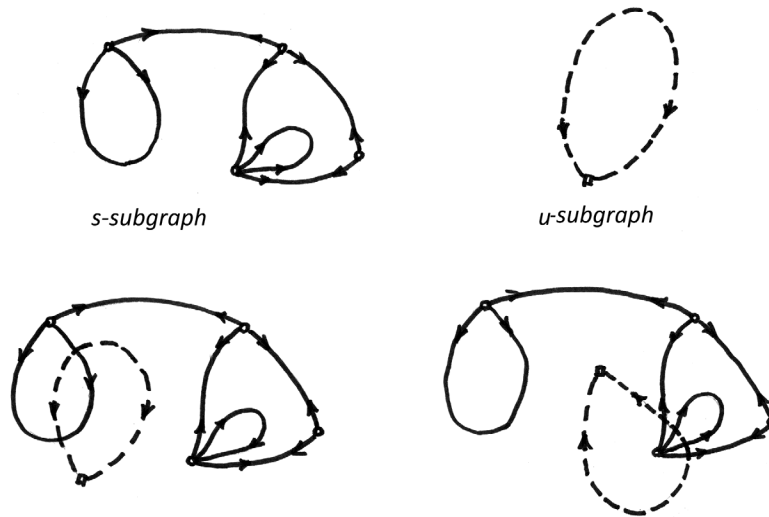


РИС. 4.  $s$ -подграф,  $u$ -подграф и неэквивалентные  $D$ -графы.  
 FIG. 4.  $s$ -subgraph,  $u$ -subgraph, and nonequivalent  $D$ -graphs.

## 6. РЕАЛИЗАЦИЯ

Проблема реализации любого заданного  $D$ -графа градиентно-подобным НВП на двумерной поверхности  $M$  решается следующим образом.  $D$ -граф определяет два клеточных комплекса, устойчивый и неустойчивый, заданные  $s$ -подграфом и  $u$ -подграфом. Согласно неравенствам Морса, связывающим числа Бетти и соответствующие им числа устойчивых слоев, существует функция Морса  $f_+$ , для которой число вполне неустойчивых критических точек равно количеству вершин  $s$ -подграфа, число седловых критических точек равно числу его ребер, и число устойчивых критических точек равно числу 2-клеток устойчивого комплекса. Определим некоторую риманову метрику на  $M$ . Тогда функция  $f_+$  задает автономное градиентное векторное поле  $v_+$  на  $M$ , положения равновесия которого совпадают с критическими точками  $f_+$ .

Аналогичным образом строится гладкая функция Морса  $f_-$  на  $M$  и связанное с ней градиентное автономное векторное поле  $v_-$ . Определим НВП на  $M$  таким образом, что оно совпадает с  $v_+$  для всех  $t \geq T > 0$ , с  $v_-$  для всех  $t \leq -T < 0$  и с некоторым переходным неавтономным векторным полем  $V_t$  при  $t \in (-T, T)$ .

Задание  $D$ -графа гарантирует, что два автономных векторных поля  $v_-, v_+$  в  $V^r(M)$  можно соединить гладкой кривой  $V_t$  так, что получившееся НВП представляет собой неавтономное градиентно-подобное векторное поле  $v$  на  $M$ , для которого выполняются все предположения 3.1–3.5. В частности, продолженные назад по  $t < T$  интегральные полупрямые, соответствующие источникам поля  $v_+$ , попадают при  $t = -T$  на неустойчивые 2-многообразия поля  $v_-$ . Тогда полученные соответствующие интегральные кривые поля  $v$  обладают экспоненциальной дихотомией типа  $(0, 2)$  на всем  $\mathbb{R}$  и, следовательно, совпадают со своими глобальными одномерными устойчивыми многообразиями в  $M \times \mathbb{R}$ . Аналогичным образом, продолжения вперед по времени для  $t > -T$  интегральных полупрямых, соответствующих стокам поля  $v_-$ , будут при  $t = T$  принадлежать устойчивым 2-многообразиям стоков поля  $v_+$ . Тогда соответствующие интегральные кривые поля  $v$  обладают экспоненциальной дихотомией типа  $(2, 0)$  на всем  $\mathbb{R}$  и, следовательно, совпадают со своими одномерными глобальными неустойчивыми многообразиями в  $M \times \mathbb{R}$ .

Для выполнения предположения 3.3 переходное поле  $V_t$  должно обеспечить следующее свойство: действие (назад по времени) диффеоморфизма  $\Phi_T^0$ , порожденного полем  $V_t$ , на любую одномерную устойчивую сепаратрису седла поля  $v_+$  на сечении  $t = T$  должно давать гладкую кривую на сечении  $M_0$ , которая пересекает трансверсально в конечном числе точек гладкие кривые на  $M_0$ , являющиеся образами при диффеоморфизме  $\Phi_{-T}^0$  (вперед по времени) любой одномерной неустойчивой сепаратрисы седла поля  $v_-$  на сечении  $t = -T$ .

## 7. НЕАВТОНОМНЫЕ ГРАДИЕНТНО-ПОДОБНЫЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ НА $M^3$

Пусть теперь  $M$  — гладкое замкнутое трехмерное многообразие, а  $v$  — неавтономное градиентно-подобное векторное поле на  $M$ . Возможные здесь типы экспоненциальной дихотомии —  $(3, 0)$ ,  $(2, 1)$ ,  $(1, 2)$ ,  $(0, 3)$ . Конечный набор различных устойчивых многообразий порождают на  $M_0$  клеточный комплекс ( $s$ -комплекс) и, аналогично, двойственный клеточный комплекс, порожденный конечным набором неустойчивых многообразий ( $u$ -комплекс). Размерность три является первой, где такой комплекс может содержать дико вложенные в  $M_0$  клетки. Например, замыкание гладкого одномерного слоя в  $M_0$ , соответствующего двумерному неустойчивому многообразию, может быть дико вложенным в своей граничной точке (являющейся следом ИК с экспоненциальной дихотомией типа  $(3, 0)$ ), см. [14, 17]. Кроме того, двумерные слои, являющиеся следами трехмерных устойчивых многообразий, также могут быть дико вложены в точках их границы, являющихся следами ИК с дихотомией типа  $(0, 3)$ . Примеры такого поведения были построены в недавней статье [5]. Поскольку  $v$  градиентно-подобно, мы имеем разбиение  $M \times \mathbb{R}$  на устойчивые и неустойчивые глобальные многообразия. Следы этих многообразий на  $M_0$  дают слои, составляющие  $s$ - и  $u$ -комплексы, являющиеся клеточными комплексами. Назовем  $s$ -подграфом множество на  $M_0$ , образованное устойчивыми слоями размерностей 2, 1, 0. Аналогично определяется  $u$ -подграф. Объединение  $s$ - и  $u$ -подграфов будем называть  $D$ -графом векторного поля  $v$ . Заметим, что исследования конкретных примеров показывают, что слои  $s$ -подграфа и  $u$ -подграфа графа  $G$  могут иметь точки дикости.

Два  $D$ -графа  $G_1, G_2$  на  $M_0$  неавтономных векторных полей  $v_1, v_2$  называются эквивалентными, если существует гомеоморфизм  $h : M_0 \rightarrow M_0$ , переводящий  $s$ -подграф графа  $G_1$  в  $s$ -подграф графа  $G_2$  и  $u$ -подграф графа  $G_1$  в  $u$ -подграф графа  $G_2$ . Отметим, что гомеоморфизм, осуществляющий эквивалентность  $D$ -графов, переводит точки дикости одного графа в точки дикости другого.

Сначала приведем примеры векторных полей, где слои  $D$ -графов обладают точками дикости. Это было сделано в [5], и конструкция использует две идеи. Первая идея принадлежит Лерману и Вайнштейну [3, 4] и состоит в конструкции неавтономной надстройки над заданным диффеоморфизмом  $f : M \rightarrow M$  замкнутого многообразия  $M$ . Вторая идея принадлежит Д. Пикстону [36] и была в дальнейшем развита Бонатти, Гринесом, Починкой и др. в [17, 18, 26] (см. раздел 8.2).

**7.1. Неавтономные надстройки.** Полезная конструкция для поиска неавтономных систем с нужными свойствами была предложена Лерманом и Вайнштейном [3, 4]. Ими введено понятие неавтономной надстройки над заданным диффеоморфизмом  $f : M \rightarrow M$  замкнутого многообразия  $M$ . Именно, пусть  $M_f$  — многообразие надстройки над  $f$  со слоением, состоящим из траекторий соответствующего потока.  $M_f$  является гладким расслоением над  $S^1$ . Наделим  $M_f$

некоторой римановой метрикой и рассмотрим его накрытие  $\tilde{M}_f$ , порожденное стандартным накрытием  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z} = S^1$ . Обозначим через  $p : \tilde{M}_f \rightarrow M_f$  естественную проекцию. Поскольку  $\mathbb{R}$  стягиваемо, то накрытие  $\tilde{M}_f$  диффеоморфно прямому произведению  $M \times \mathbb{R}$ . Если поднять посредством  $p$  метрику на  $\tilde{M}_f$  из  $M_f$ , то  $\tilde{M}_f$  не будет, вообще говоря, эквиморфным  $M \times \mathbb{R}$ . Слоение на траектории потока в  $\tilde{M}_f$  поднимается до слоения на  $\tilde{M}_f$ , которое обозначим  $L_f$ . Возникает естественный вопрос: является ли слоение  $L_f$  эквиморфным слоению на интегральные кривые некоторого неавтономного векторного поля на  $M$ ?

**Определение 7.1.** Говорят, что диффеоморфизм  $f : M \rightarrow M$  *воспроизводится* неавтономным векторным полем  $v$  на  $M$ , если существует эквиморфизм  $\Phi : M \times \mathbb{R} \rightarrow \tilde{M}_f$ , переводящий интегральные кривые поля  $v$  в слои слоения  $L_f$ . Здесь  $M \times \mathbb{R}$  рассматривается с равномерной структурой прямого произведения.

В связи с этим представляют интерес следующие утверждения.

**Утверждение 7.1.** Пусть  $f : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{T}^n$  — гиперболический автоморфизм тора  $\mathbb{T}^n$ . Тогда пространство  $\tilde{\mathbb{T}}_f^n$  не эквиморфно  $\mathbb{T}^n \times \mathbb{R}$ .

Более того, это же утверждение справедливо для любого диффеоморфизма Аносова. С другой стороны, справедливо такое утверждение.

**Утверждение 7.2.** Диффеоморфизм Плькина на  $S^2$  воспроизводится периодическим векторным полем на  $S^2$ .

**Замечание 7.1.** Как известно, существуют такие диффеоморфизмы  $f : M \rightarrow M$ , что надстройка  $M_f$  над таким диффеоморфизмом не диффеоморфна прямому произведению  $M \times S^1$ , но для некоторой его итерации  $f^n$  соответствующая надстройка  $M_{f^n}$  диффеоморфна  $M \times S^1$ . Фактически многообразие  $M_{f^n}$  является  $k$ -кратным накрытием  $M_f$ . В качестве примера такой ситуации можно взять  $M = S^1$  с координатой  $\varphi \pmod{2\pi}$  и диффеоморфизм  $f(\varphi) = -\varphi \pmod{2\pi}$ . Тогда  $S^1_f$  гомеоморфно бутылке Клейна, но  $f^2(\varphi) = \varphi$  и, следовательно,  $S^1_{f^2} = S^1 \times S^1 = \mathbb{T}^2$  (т. е. двумерный тор, являющийся двулистным накрытием бутылки Клейна). Таким образом, многообразие  $\tilde{S}^1_f$  эквиморфно  $S^1 \times \mathbb{R}$ .

Обозначим через  $\pi_M : M \times \mathbb{R} \rightarrow M$  стандартную проекцию на первый сомножитель. Для любого неавтономного векторного поля  $v$  на многообразии  $M$  отображение  $\Phi_0^t : M_0 \rightarrow M_t$  из сечения  $M_0 = M \times \{0\}$  в многообразии  $M_t = M \times \{t\}$ , порожденное решениями  $v$  с начальными точками на  $M_0$ ,  $\pi_M(M_t) = M$ , диффеотопно<sup>1</sup> тождественному отображению  $\text{id}_M$  для всех  $t \in \mathbb{R}$ . В частности, если  $v$  — периодическое векторное поле на многообразии  $M$ , то его отображение Пуанкаре за период диффеотопно тождественному отображению  $\text{id}_M$ .

Приведем теорему из работы [5], которая дает достаточное условие на диффеоморфизм  $f$ , чтобы он воспроизводился потоком, порожденным неавтономным периодическим векторным полем  $v$ . Сначала сформулируем техническую лемму.

**Лемма 7.1.** Если  $f$  диффеотопно  $\text{id}_M$ , то существует диффеотопия  $F_t : M \rightarrow M$ ,  $t \in [0, 1]$ , соединяющая  $\text{id}_M$  и  $f$  и такая, что диффеоморфизмы  $F_t$  гладко зависят от  $t$  и для некоторого достаточно малого  $\varepsilon > 0$  выполняются условия  $F_t \equiv \text{id}_M$ , когда  $t \in [0, \varepsilon]$ , и  $f_t \equiv f$ , когда  $t \in [1 - \varepsilon, 1]$ .

**Теорема 7.1.** Предположим, что для некоторого  $n \in \mathbb{N}$  диффеоморфизм  $f^n : M \rightarrow M$  диффеотопен  $\text{id}_M$ . Тогда справедливы утверждения:

1.  $M_f$  послойно<sup>2</sup> диффеоморфно  $M \times S^1$ ;
2. существует периодическое векторное поле  $v$  на  $M$ , которое воспроизводит диффеоморфизм  $f$ .

<sup>1</sup> Два диффеоморфизма  $f, g$  гладкого многообразия  $M$  диффеотопны, если их можно соединить непрерывной дугой  $F_t$ ,  $F_0 = f$ ,  $F_1 = g$  такой, что каждая  $F_t$  является диффеоморфизмом  $M$ .

<sup>2</sup> Термин «послойно» означает существование диффеоморфизма  $\Psi : M_f \rightarrow M \times S^1$ , действующего как  $(x, s) \rightarrow (\psi(x, s), s)$ .

Это теорема позволяет по данному диффеоморфизму, обладающему дико вложенными сепаратрисными многообразиями, строить соответствующие неавтономные периодические потоки, устойчивые и неустойчивые многообразия которых также обладают точками дикости.

8. ДИФФЕОМОРФИЗМЫ С ДИКО ВЛОЖЕННЫМИ СЕПАРАТРИСАМИ

Этот раздел содержит некоторые определения и результаты, которые можно найти в книге [26]; некоторые из них мы приведем для удобства читателя.

8.1. Дикое вложение.

**Определение 8.1.** Топологическое вложение  $\lambda : X \rightarrow Y$   $m$ -мерного многообразия  $X$  в  $n$ -мерное многообразие  $Y$  ( $m \leq n$ ) называется *локально плоским в точке*  $\lambda(x) \in Y$ , если существует такая карта  $(U, \psi)$ ,  $\lambda(x) \in U$ ,  $\psi : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  в многообразии  $Y$ , что  $\psi(\lambda(X) \cap U) = D^m \subset \mathbb{R}^n$ . Здесь  $\mathbb{R}^m \subset \mathbb{R}^n$  есть подпространство точек из  $\mathbb{R}^n$ , у которых последние  $n - m$  координат равны нулю, или  $\psi(\lambda(X) \cap U) = \mathbb{R}_+^m$  ( $\mathbb{R}_+^m \subset \mathbb{R}^m$  есть множество точек в  $\mathbb{R}^m$ , у которых последние координаты неотрицательны).

Вложение  $\lambda$  называется *ручным* (или *локально плоским*), а многообразие  $X$  — *ручно вложенным*, если  $\lambda$  является локально плоским в каждой точке  $\lambda(x) \in Y$ . В противном случае, вложение  $\lambda$  называется *диким*, а многообразие  $X$  называется *дико вложенным*. Если вложение  $\lambda$  не является локально плоским в точке  $\lambda(x)$ , то эта точка называется *точкой дикости*. Стоит отметить, что определение ручного вложенного многообразия совпадает с определением топологического подмногообразия.

Каждое топологическое вложение в пространство  $\mathbb{R}^2$  (соответственно,  $S^2$ ) является ручным, см. [34]. В пространстве  $\mathbb{R}^3$  (соответственно,  $S^3$ ) уже есть дикие дуги и дикие 2-сферы. Один из первых примеров дикой дуги был построен Артином и Фоксом [14]. Соответствующая дуга является гладкой везде, за исключением ее граничной точки (см. рис. 5). Дикость полученной дуги также следует из приведенного ниже критерия, доказанного в [27].

**Утверждение 8.1.** Пусть  $\ell$  — компактная дуга в  $\mathbb{R}^3$ , гладкая всюду, кроме граничной точки  $O$ . Тогда  $\ell$  является локально плоской в точке  $O$  тогда и только тогда, когда для каждого  $\varepsilon$ -шара  $B_\varepsilon(O)$  с центром в  $O$  существует подмножество  $U \subset B_\varepsilon(O)$ , диффеоморфное замкнутому 3-шару такому, что  $O$  является внутренней точкой  $U$ , и пересечение  $\partial U \cap \ell$  состоит из единственной точки.

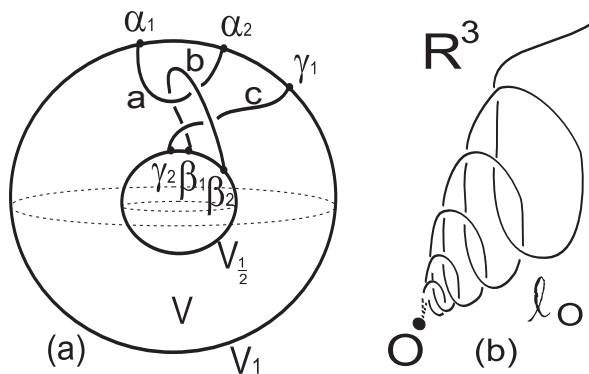


Рис. 5. Конструкция дикой кривой в  $\mathbb{R}^3$   
 FIG. 5. Construction of a wild curve in  $\mathbb{R}^3$

**8.2. Диффеоморфизмы типа Пикстона на  $S^3$ .** Примеры неавтономных потоков с точками дикости устойчивых и неустойчивых многообразий строятся как неавтономные надстройки над диффеоморфизмами, введенными Пикстоном [36]. Перейдем к их конструкции. Пусть  $V$  — гладкое замкнутое ориентируемое 3-многообразие, фундаментальная группа которого допускает нетривиальный гомоморфизм  $\eta_V : \pi_1(V) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Обозначим через  $(V, \eta_V)$  многообразие  $V$ , снабженное гомоморфизмом  $\eta_V$ .



**Определение 8.2.** Многообразия  $(V, \eta_V)$  и  $(V', \eta_{V'})$  называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм  $\varphi : V \rightarrow V'$  такой, что  $\eta_{V'} \varphi_* = \eta_V$ .

**Определение 8.3.** Два гладких подмногообразия  $a \subset V$  и  $a' \subset V'$  называются *эквивалентными*, если существует гомеоморфизм  $\varphi : V \rightarrow V'$  такой, что  $\eta_{V'} \varphi_* = \eta_V$  и  $\varphi(a) = a'$ .

**Определение 8.4.** Гладкое подмногообразие  $a \subset V$  называется  $\eta_V$ -*существенным*, если  $\eta_V(i_{a*}(\pi_1(a))) \neq 0$ , где  $i_a : a \rightarrow V$  есть отображения включения.

Проиллюстрируем эти определения для многообразия  $S^2 \times S^1$ . Представим многообразие  $S^2 \times S^1$  как пространство орбит  $\mathbb{R}^3 \setminus \{O\} / a^s$ , где  $a^s$  — гомотетия, заданная формулой  $a^s(x) = 0,5x$  ( $x = (x_1, x_2, x_3)$ ). Легко проверить<sup>1</sup>, что естественная проекция  $p : \mathbb{R}^3 \setminus O \rightarrow S^2 \times S^1$  является накрывающим отображением, которое индуцирует эпиморфизм  $\eta_{S^2 \times S^1} : \pi_1(S^2 \times S^1) \rightarrow \mathbb{Z}$ .

Обозначим  $\hat{\gamma}_0 = p(Ox_1^+)$ ,  $\hat{\lambda}_0 = p(Ox_2x_3 \setminus O)$ , где  $Ox_1^+$  — положительная полуось, а  $Ox_2x_3$  — координатная плоскость  $x_1 = 0$ . На рис. 6 показан сферический слой, ограниченный сферами радиусов 1 и 0,5. Если мы отождествим точки, которые лежат на границе сферического слоя и принадлежат одному и тому же радиусу, проходящему через точку  $O$ , мы получим многообразие  $S^2 \times S^1$ . Более того, если мы отождествим крайние точки отрезка с одинаковыми номерами (1), то мы получим узел  $\hat{\gamma}_0$ , и если мы отождествим крайние точки, лежащие на одном и том же луче, принадлежащие окружностям с одинаковыми числами (2) и ограничивающие 2-кольцо, то мы получим тор  $\hat{\lambda}_0$  ( $\hat{\gamma}_0$  и  $\hat{\lambda}_0$  вложены в  $S^2 \times S^1$ ).

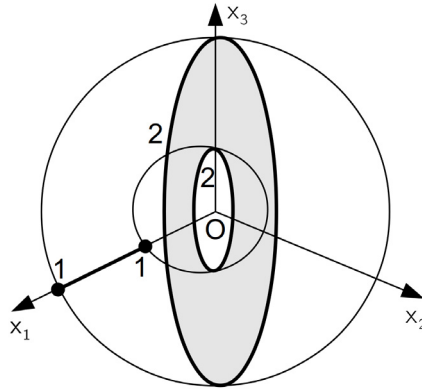


Рис. 6. Конструкция существенных узла и тора, вложенных в  $S^2 \times S^1$   
 FIG. 6. Construction of essential node and torus embedded in  $S^2 \times S^1$

Легко проверить, что  $\hat{\gamma}_0$  (соответственно,  $\hat{\lambda}_0$ ) является  $\eta_{S^2 \times S^1}$ -существенным узлом (соответственно, тором) в многообразии  $(S^2 \times S^1, \eta_{S^2 \times S^1})$ .

**Определение 8.5.** Узел (тор)  $\hat{\gamma}$  ( $\hat{\lambda}$ ) в многообразии  $(S^2 \times S^1, \eta_{S^2 \times S^1})$  называется *тривиальным*, если он эквивалентен узлу (тору)  $\hat{\gamma}_0$  ( $\hat{\lambda}_0$ ).

**Утверждение 8.2.** Каждый  $\eta_{S^2 \times S^1}^s$ -существенный тор  $\hat{\lambda} \subset (S^2 \times S^1, \eta_{S^2 \times S^1}^s)$  ограничивает заполненный тор  $S^2 \times S^1$ .

**Утверждение 8.3.** Узел  $\hat{\gamma}$  (соответственно, тор  $\hat{\lambda}$ ) в многообразии  $(S^2 \times S^1, \eta_{S^2 \times S^1}^s)$  является тривиальным тогда и только тогда, когда существует его трубчатая окрестность  $N(\hat{\gamma})$  (соответственно,  $N(\hat{\lambda})$ ) в многообразии  $S^2 \times S^1$  такая, что многообразие  $(S^2 \times S^1) \setminus N(\hat{\gamma})$  (соответственно,  $(S^2 \times S^1) \setminus N(\hat{\lambda})$ ) гомеоморфно заполненному тору (паре заполненных торов).

Обозначим через  $\mathcal{P}$  класс диффеоморфизмов Морса—Смейла, у которых неблуждающее множество состоит из источника  $\alpha_f$ , седла  $\sigma_f$  и стоков  $\omega_f^1, \omega_f^2$ . Фазовый портрет диффеоморфизма

<sup>1</sup>Рассмотрим гомотопический класс  $[c] \in \pi_1(S^2 \times S^1)$  петли  $c : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow S^2 \times S^1$ . Тогда петля  $c : [0, 1] \rightarrow S^2 \times S^1$  подымается в кривую  $\bar{c} : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ , соединяющую точку  $x$  с точкой  $(a^s)^n(x)$  для некоторого  $n \in \mathbb{Z}$ , где  $n$  не зависит от поднятия. Тогда мы определяем  $\eta_{S^2 \times S^1}^s([c]) = n$ .

из класса  $\mathcal{P}$  показан на рис. 7. Пикстон построил пример из класса  $\mathcal{P}$ , упомянутого выше, поэтому мы называем класс  $\mathcal{P}$  *классом Пикстона*. Мы опускаем ниже индекс  $f$  в обозначениях неподвижных точек.

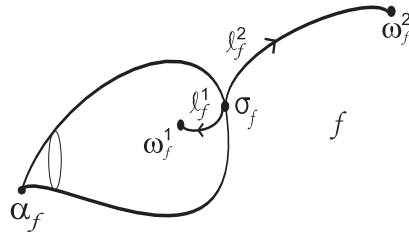


Рис. 7. Фазовый портрет диффеоморфизма из класса  $\mathcal{P}$   
 FIG. 7. Phase portrait of a diffeomorphism from the class  $\mathcal{P}$

Удивительным фактом является существование счетного множества несопряженных диффеоморфизмов в классе  $\mathcal{P}$ . Чтобы понять это, мы опишем ниже узловой топологический инвариант, предложенный в [17]. Более того, этот инвариант объясняет существование в классе  $\mathcal{P}$  диффеоморфизмов, для которых седловая неподвижная точка обладает дико вложенными одномерными и двумерными сепаратрисами.

Обозначим через  $\ell_1, \ell_2$  неустойчивые 1-мерные сепаратрисы точки  $\sigma$ . Согласно Смейлу [40], замыкание  $\text{cl}(\ell_i)$  ( $i = 1, 2$ ) гомеоморфно простой компактной дуге, состоящей из самой сепаратрисы и двух ее граничных точек:  $\sigma$  и стока. Более того, замыкания сепаратрис  $\ell_1$  и  $\ell_2$  содержат разные стоки (см. [26, следствие 2.2]). Для определенности, пусть  $\omega_i$  принадлежит  $\text{cl}(\ell_i)$  (см. рис. 7). При  $i = 1, 2$  обозначим  $V_i = W^s(\omega_i) \setminus \{\omega_i\}$ . Обозначим через  $\hat{V}_i = V_i/f$  соответствующее пространство орбит, и пусть  $p_i : V_i \rightarrow \hat{V}_i$  — естественная проекция, которая является накрытием, индуцирующим эпиморфизм  $\eta_i : \pi_1(\hat{V}_i) \rightarrow \mathbb{Z}$ . Так как для рассматриваемого стока  $\omega_i$  ограничение  $f|_{V_i}$  топологически сопряжено с  $a : \mathbb{R}^3 \setminus \{O\} \rightarrow \mathbb{R}^3 \setminus \{O\}$ , то многообразие  $(\hat{V}_i, \eta_i)$  эквивалентно многообразию  $(S^2 \times S^1, \eta_{S^2 \times S^1}^s)$  и множество  $\hat{\ell}_i = p_i(\ell_i)$  является  $\eta_i$ -существенным узлом в многообразии  $\hat{V}_i$  таким, что  $\eta_i(i_{i_*}(\pi_1(\hat{\ell}_i))) = \mathbb{Z}$  (см. [26, теорема 2.3]).

В [17, теорема 1] было доказано, что по крайней мере один из узлов  $\hat{\ell}_1, \hat{\ell}_2$  тривиален (см. также [26, предложение 4.3]). Для определенности мы предположим ниже, что узел  $\hat{\ell}_1$  тривиален.

Следующий результат был доказан в [17, теорема 3] (см. также [26, теорема 4.3]).

**Утверждение 8.4.** *Диффеоморфизмы  $f, f' \in \mathcal{P}$  топологически сопряжены тогда и только тогда, когда узлы  $\hat{\ell}_2(f)$  и  $\hat{\ell}_2(f')$  эквивалентны.*

Следовательно, класс эквивалентности узла  $\hat{\ell}_2(f)$  является полным топологическим инвариантом для диффеоморфизмов класса Пикстона. Более того, справедлива следующая теорема о реализации (см. [17, теорема 2] и [26, теорема 4.4]).

**Утверждение 8.5.** *Для каждого узла  $\hat{\ell} \subset (S^2 \times S^1, \eta_{S^2 \times S^1}^s)$  такого, что  $\eta_{S^2 \times S^1}^s(i_{i_*}(\pi_1(\hat{\ell}))) = \mathbb{Z}$ , существует диффеоморфизм  $f : S^3 \rightarrow S^3$  из класса  $\mathcal{P}$  такой, что узлы  $\hat{\ell}$  и  $\hat{\ell}^2(f)$  являются эквивалентными.*

Мазур построил пример существенного и нетривиального узла, вложенного в  $S^2 \times S^1$ , см. [32]. Согласно предложению 8.5, существует диффеоморфизм  $f$  из класса Пикстона такой, что в точности одна неустойчивая одномерная сепаратриса и устойчивая двумерная сепаратриса седловой точки  $\sigma$  являются дико вложенными.

На рис. 8 показан узел Мазура  $\hat{i}_\sigma^u$ , который появляется в фактор-пространстве  $\hat{W}^s(\omega_2)$ , и существенный тор  $\hat{i}_\sigma^s$ , вложенный  $\hat{W}^u(\alpha)$ , который является трубчатой окрестностью узла Мазура.

Существует счетное множество попарно не эквивалентных существенных узлов в  $S^2 \times S^1$  (серия таких узлов была построена недавно в работе [12]). Таким образом, из утверждений 8.4 и 8.5 следует существование счетного множества топологически не сопряженных диффеоморфизмов из класса Пикстона.

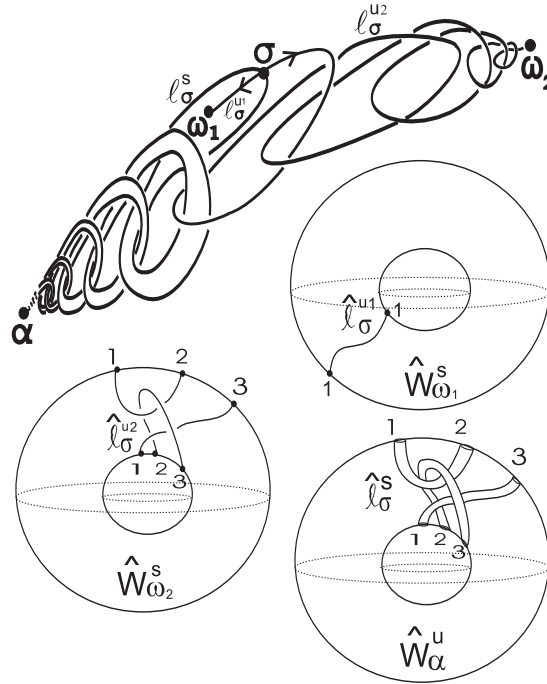


Рис. 8. Фазовый портрет диффеоморфизма из класса  $\mathcal{P}$  и проекция седловых сепаратрис в фактор пространствах

FIG. 8. Phase portrait of a diffeomorphism from the class  $\mathcal{P}$  and the projection of saddle separatrices in factor spaces

9. ПЕРИОДИЧЕСКИЕ ВЕКТОРНЫЕ ПОЛЯ НА  $S^3$  С ДИКО ВЛОЖЕННЫМИ СЕПАРАТРИСНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ

Теперь мы построим периодическое векторное поле на  $S^3$  с диким вложением замыкания 2-мерного неустойчивого многообразия и замыкания 3-мерного устойчивого многообразия для седловой ИК с экспоненциальной дихотомией на  $\mathbb{R}$  типа  $(2, 1)$ .

Начнем с некоторого диффеоморфизма  $f$  класса Пикстона на  $S^3$ , который имеет один гиперболический источник  $\alpha$ , одно седло  $\sigma$  типа  $(2, 1)$  (2-мерное устойчивое и 1-мерное неустойчивое многообразия) и два гиперболических стока  $\omega_1, \omega_2$ . Устойчивое 2-мерное многообразие неподвижной точки  $\sigma$  содержит в своем замыкании неподвижную точку  $\alpha$ , т. е. все траектории диффеоморфизма  $f$  с начальными точками на  $W^s(\sigma)$ , за исключением самой  $\sigma$ , имеют единственную  $\alpha$ -предельную точку  $\alpha$  и единственную  $\omega$ -предельную точку  $\sigma$ . Замыкание множества  $W^s(\sigma)$  есть топологически вложенная сфера  $\Sigma$  в  $S^3$ , она является границей двух открытых 3-шаров  $D_1$  и  $D_2$ . Неподвижная точка  $\omega_1$  (сток) лежит внутри шара  $D_1$ , другой сток  $\omega_2$  лежит внутри другого шара  $D_2$ . Мы предполагаем, что одномерная сепаратриса точки  $\sigma$ , которая входит в  $D_2$ , является дико вложенной. Отсюда следует, что устойчивое многообразие  $W^s(\sigma)$  также является дико вложенным в точке  $\alpha$  (см. рис. 8).

Теперь рассмотрим надстройку над  $f$ . Как следует из результатов Серфа [20], любые два сохраняющие ориентацию диффеоморфизма в  $S^3$  могут быть соединены гладкой дугой. Отсюда следует, что  $f$  диффеотопен  $\text{id}_{S^3}$  и многообразие  $M_f$  гомеоморфно  $S^3 \times S^1$ , более того, структура прямого произведения может быть получена с помощью некоторого диффеоморфизма. Фиксируем эту структуру и рассмотрим далее многообразие надстройки как стандартное  $S^3 \times S^1$ . Таким образом, поток надстройки имеет одну вполне неустойчивую периодическую траекторию, одну седловую периодическую траекторию типа  $(3, 2)$  и две вполне устойчивые периодические траектории, все они являются гиперболическими периодическими траекториями. Проекция любой из этих периодических траекторий на базу является гомеоморфизмом.

Напомним, что поток надстройки является потоком Морса–Смейла. Все его периодические траектории гиперболические, а любая другая траектория стремится к одной из этих периодических при  $t \rightarrow \pm\infty$ . Конструкция неавтономной надстройки (см. пункт 7.1) дает периодическое

векторное поле на  $S^3$ , которое обозначим  $v_P$ . Это поле имеет в точности четыре периодические интегральные кривые, обладающие экспоненциальной дихотомией решений на  $\mathbb{R}$  (т. е. они являются  $h$ -кривыми). Типы их дихотомии различны: две вполне устойчивые периодические траектории дают две вполне устойчивые ИК, тип их дихотомии  $(3, 0)$  (при этом размерность устойчивого многообразия соответствующей интегральной кривой равна 4). Седловая периодическая траектория в  $S^3_f$  приводит к седловой ИК поля  $v_P$  с дихотомией типа  $(2, 1)$ , а вполне неустойчивая периодическая траектория дает вполне неустойчивую ИК с дихотомией типа  $(0, 3)$ . Все остальные ИК стремятся к этим четырем ИК при  $t \rightarrow +\infty$  и при  $t \rightarrow -\infty$ . Таким образом, любая такая интегральная кривая обладает экспоненциальной дихотомией на  $\mathbb{R}_-$  и  $\mathbb{R}_+$  в зависимости от типа той периодической ИК, к которой она стремится. В силу конструкции очевидно, что предположения 3.1–3.4, характеризующие градиентно-подобность неавтономного векторного поля, выполняются для поля  $v_P$  автоматически. Выполнение предположения 3.5 следует из существования равномерных непересекающихся окрестностей  $U_j$  четырех  $h$ -кривых,  $j = \overline{1, 4}$  таких, чтобы время перехода с одной компоненты границы множества  $M \times \mathbb{R} \setminus \cup_j U_j$  на ее другую компоненту было ограничено сверху и снизу положительными постоянными, не зависящими от выбора ИК.

Теперь напомним, что диффеоморфизм  $f$  имеет одномерное неустойчивое многообразие  $W^u(\sigma)$  седловой неподвижной точки  $\sigma$ . Для потока надстройки в  $S^3 \times S^1$  мы получаем двумерное гладкое неустойчивое многообразие  $W^u(\gamma_\sigma)$  седловой периодической траектории  $\gamma_\sigma$ . Многообразие  $W^u(\gamma_\sigma)$  есть прямое произведение  $W^u(\sigma) \times S^1$ , это следует из конструкции надстройки. Если замыкание одной из двух неустойчивых сепаратрис точки  $\sigma$  дико вложено в  $S^3$  (см. выше), то замыкание одной из связных компонент  $W^u(\gamma_\sigma) \setminus \gamma_\sigma$  есть дико вложенная поверхность  $S^3 \times S^1$ . Предположим для определенности, что сток  $\omega_2$  является  $\omega$ -предельным множеством для всех траекторий на дико вложенной сепаратрисе седла  $\sigma$ . Следующее пояснение характеризует это дико вложение. Выберем гладкий 3-диск  $D$ , трансверсальный периодической траектории  $\gamma_{\omega_2}$  в некоторой ее точке. Тогда дико вложенная компонента пересекает этот диск вдоль гладкого луча с граничной точкой  $D \cap \gamma_{\omega_2}$ , являющейся точкой дикости. Структура прямого произведения дает периодическую траекторию  $\gamma_{\omega_2}$  с примыкающим к ней дико вложенным неустойчивым многообразием. Аналогично, выбирая трехмерный гладкий открытый диск  $D$ , трансверсальный вполне неустойчивой периодической траектории  $\gamma_\alpha$ , получаем в  $D$  пересечение  $D \cap W^s(\gamma_\sigma)$ , т. е. открытое кольцо, замыкание одной из границ которого является диким в точке  $D \cap \gamma_\alpha$  (см. выше). Структура прямого произведения дает вполне неустойчивую периодическую траекторию  $\gamma_\alpha$  и примыкающую к нему устойчивое многообразие  $W^s(\gamma_\sigma)$  с диким вложением вдоль  $\gamma_\alpha$ . Более подробно аналогичный факт доказан в [37] с привлечением результатов из [23]. Теперь, применяя конструкцию неавтономной надстройки, получаем следующее утверждение.

**Теорема 9.1.** *Существует гладкое периодическое векторное поле  $v_P$  на  $S^3$ , которое является градиентно-подобным, имеет в точности четыре периодические  $h$ -кривые, обладающие экспоненциальной дихотомией на  $\mathbb{R}$ : вполне неустойчивую (типа  $(0, 3)$ ), одну седловую типа  $(2, 1)$  и две вполне устойчивые типа  $(3, 0)$ . Остальные интегральные кривые стремятся к этим  $h$ -кривым при  $t \rightarrow +\infty$  и при  $t \rightarrow -\infty$ . Кроме того, замыкания 2-мерного неустойчивого и 3-мерного устойчивого многообразия седловой периодической ИК являются дико вложенными.*

Как упоминалось выше, существует счетное множество топологически не сопряженных диффеоморфизмов из класса Пикстона. Из конструкции неавтономной надстройки следует, что существует счетное множество топологически не эквивалентных периодических векторных полей на  $S^3$ . Тем не менее, описанная выше простая структура слоения  $F_{v_P}$  позволяет сформулировать гипотезу.

**Теорема 9.2.** *Векторное поле  $v_P$  структурно устойчиво в смысле определения 1.2.*

В силу теоремы 9.2 при достаточно малом возмущении поля  $v_P$  его равномерная структура сохраняется, но, в зависимости от выбранного возмущения, возмущенное векторное поле может стать почти периодическим или даже не рекуррентным по времени.

## 10. ВАРИАЦИИ НА ТЕМУ ПИКСТОНА

Покажем здесь, как, используя близкие идеи, можно строить другие неавтономные непериодические градиентно-подобные векторные поля на  $S^3$ . Сначала представим явным образом оба комплекса ( $s$ - и  $u$ -) для периодического поля Пикстона  $v_P$ . Его  $s$ -комплекс состоит из двух 3-клеток, одной 2-клетки и одной 0-клетки, причем замыкание 2-клетки имеет точку дикости в 0-клетке. Его  $u$ -комплекс состоит из одной 3-клетки, одной 1-клетки и двух 0-клеток, причем замыкание 1-клетки имеет точку дикости в одной из 0-клеток.

Для построения других (не периодических) неавтономных векторных полей, используя периодическое поле Пикстона, мы рассмотрим сначала поле  $v_P$  для  $t \geq T > 0$ . Тогда на сечении  $t = T$  слои его устойчивых многообразий образуют  $s$ -комплекс поля Пикстона. При  $t \leq -T$  мы рассмотрим векторное поле  $-v_P$ , тогда на сечении  $t = -T$  мы получим разбиение на следы неустойчивых многообразий — неустойчивые слои, т. е.  $u$ -комплекс, совпадающий с  $s$ -комплексом поля Пикстона. Теперь два векторных поля  $v_P(T)$  и  $-v_P(-T)$  нужно соединить гладкой кривой в пространстве  $V^1(S^3)$  так, чтобы склеенное неавтономное векторное поле  $v_1$  было градиентно-подобно. Поскольку  $V^1(S^3)$  — банахово пространство, две его любые точки можно соединить кривой (например, отрезком). Однако нужно обеспечить, чтобы полученное поле  $v_1$  было градиентно-подобным. В частности, двумерная клетка  $s$ -комплекса при продолжении назад по времени до  $t = 0$  и двумерная клетка  $u$ -комплекса при продолжении вперед по времени до  $t = 0$  должны пересекаться трансверсально (например, по замкнутой кривой), а предельная точка устойчивого двумерного слоя (через которую проходит вполне неустойчивая ИК) должна лежать в одном из двух неустойчивых 3-мерных слоев. Также, продолжение вперед по времени до  $t = 0$  интегральной кривой, соответствующей нульмерному неустойчивому слою, должно принадлежать трехмерному устойчивому слою. Построение кривой, соединяющей  $v_P(T)$  и  $-v_P(-T)$ , с нужными свойствами можно осуществить с помощью построения соответствующего семейства диффеоморфизмов сферы  $S^3$ , осуществляющих нужный сдвиг двумерных слоев.

Другое неавтономное градиентно-подобное векторное поле  $v_2$ , использующее периодическое поле Пикстона, можно построить на основе его  $u$ -комплекса. Для этого нужно взять при  $t \leq -T$  поле  $v_P$ , а при  $t \geq T$  — поле  $-v_P$ , и соединить их между сечениями  $t = -T$ ,  $t = T$  нужным семейством векторных полей так, чтобы получилось неавтономное векторное поле  $v_2$ , у которого не пересекаются 1-мерный устойчивый слой поля  $-v_P$  при его продолжении назад по времени в силу склеенного поля с  $t = T$  до  $t = 0$  и продолжение вперед по времени в силу склеенного поля с  $t = -T$  до  $t = 0$  неустойчивого 1-мерного слоя поля  $v_P$ .

Структуры построенных неавтономных векторных полей  $v_1$ ,  $v_2$  в силу их конструкции таковы, что они являются градиентно-подобными, а их  $D$ -графы различны, т. е. они не являются равномерно эквивалентными. Также они являются структурно-устойчивыми, хотя это утверждение также пока следует рассматривать как гипотезу.

11. СТРУКТУРА СЛОЕНИЯ  $\mathcal{F}_v$  ДЛЯ ПОЧТИ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ГРАДИЕНТНО-ПОДОБНЫХ ВЕКТОРНЫХ ПОЛЕЙ  $v$ 

В этом разделе мы уточним структуру слоения  $\mathcal{F}_v$  для классического случая неавтономных векторных полей  $v$ , почти периодически зависящих от времени [8, 22]. В этом случае, кроме исследования структуры слоения  $\mathcal{F}_v$  векторного поля  $v$ , удастся показать существование почти периодических решений поля  $v$ , как в классических теоремах Америо, Фавара и др. [13, 24], но используя другие идеи.

Почти периодичность такого НВП определяется стандартным образом как почти периодичность отображения  $v : \mathbb{R} \rightarrow V^k(M)$ , см. [22]. Решение  $x : \mathbb{R} \rightarrow M$  векторного поля  $v$  называется *почти периодическим* (по Бохнеру [16]), если множество сдвигов  $\{x(t+s)\}$ ,  $s \in \mathbb{R}$ , предкомпактно в топологии равномерной сходимости таких отображений на всем  $\mathbb{R}$ . Замыкание  $\overline{\{x(t)\}}_{t \in \mathbb{R}}$  почти периодического решения может быть нетривиально гомотопически вложенным множеством в  $M$ .

Сформулируем соответствующие результаты для слоения  $\mathcal{F}_v$  для случаев, когда размерность многообразия  $M$  равна 1 и 2.

Рассмотрим неавтономное скалярное градиентно-подобное дифференциальное уравнение на окружности  $M = S^1$ , равномерно почти периодически зависящее от времени. Тогда справедлива следующая теорема.

**Теорема 11.1.** *Если градиентно-подобное скалярное уравнение на  $S^1$  равномерно почти периодически, то число вполне устойчивых ИК равно числу вполне неустойчивых ИК. Более того, каждое устойчивое (неустойчивое) многообразие содержит единственную почти периодическую ИК, являющуюся  $h$ -кривой. При обходе окружности  $S_0^1$  следы устойчивых и неустойчивых почти периодических интегральных кривых чередуются. Любая другая интегральная кривая стремится при  $t \rightarrow +\infty$  к устойчивой почти периодической интегральной кривой, а при  $t \rightarrow -\infty$  — к соседней неустойчивой почти периодической интегральной кривой.*

**Замечание 11.1.** Как следует из предыдущей теоремы, слоение  $\mathcal{F}_v$  скалярного почти периодического градиентно-подобного векторного поля имеет такой же  $D$ -инвариант, как  $D$ -инвариант некоторого скалярного периодического градиентно-подобного поля. В силу теоремы 4.1, почти периодическое градиентно-подобное векторное поле равномерно эквивалентно периодическому градиентно-подобному векторному полю.

Теперь рассмотрим градиентно-подобное почти периодическое неавтономное векторное поле  $v$  на двумерной замкнутой поверхности  $M$ . Структурная устойчивость такого  $v$  и его почти периодичность по времени позволяет доказать следующую теорему.

**Теорема 11.2.** *Пусть  $v$  — неавтономное почти периодическое градиентно-подобное векторное поле на замкнутой поверхности  $M$ . Тогда интегральные кривые, соответствующие вершинам  $D$ -графа, являются почти периодическими вполне устойчивыми или вполне неустойчивыми  $h$ -кривыми, в зависимости от типа соответствующей вершины  $D$ -графа. Более того,  $s$ -подграф и  $u$ -подграф графа  $D$ -графа двойственны друг другу: каждая двумерная клетка  $s$ -комплекса содержит ровно одну неустойчивую вершину  $u$ -комплекса и наоборот. Каждое ребро  $s$ -подграфа может пересекаться не более чем с одним ребром  $u$ -подграфа. Если такое пересечение двух ребер существует, то интегральная кривая, соответствующая этому пересечению, является почти периодической (седловой)  $h$ -кривой с типом дихотомии  $(1,1)$ .  $D$ -граф почти периодического градиентно-подобного векторного поля эквивалентен  $D$ -графу некоторого периодического градиентного векторного поля на  $M$ , т. е. почти периодическое градиентно-подобное векторное поле на  $M$  равномерно эквивалентно некоторому периодическому градиентно-подобному векторному полю.*

В случае периодического векторного поля  $v$  класса Пикстона на трехмерной сфере оно, по теореме 1.2, структурно устойчиво относительно малых равномерных возмущений вида  $v + \varepsilon v_1$ , задаваемых ограниченным равномерно непрерывным отображением  $v_1 : \mathbb{R} \rightarrow V^r(S^3)$  в банахово пространство  $V^r(S^3)$ ,  $r \geq 1$ . В частности, такое возмущение может быть выбрано почти периодическим. В этом случае, поскольку любая из четырех периодических ИК обладает экспоненциальной дихотомией на  $\mathbb{R}$  (различных типов), возмущенное почти периодическое векторное поле будет иметь в малой равномерной окрестности каждой ИК почти периодическую ИК того же типа дихотомии. Более того, возмущенное векторное поле будет градиентно-подобным, и любая из его ИК будет стремиться к одной из четырех почти периодических ИК и обладать экспоненциальной дихотомией на  $\mathbb{R}_\pm$ . Выбрав возмущение малым, но не рекуррентным по времени, мы получим векторное поле с такой же структурой слоения, но особые ИК будут не рекуррентны.

**Благодарности.** Данная работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант 22-11-00027), кроме раздела 11, поддержанного Министерством науки и высшего образования (грант 0729-2020-0036), и раздела 7, выполненного в лаборатории динамических систем и приложений НИУ ВШЭ Министерства науки высшего образования РФ (соглашение 075-15-2022-1101).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Алексеев В. М., Фомин С. В. Михаил Валерьевич Бебутов // Усп. мат. наук. — 1970. — 25, № 3. — С. 237–239.

2. *Аносов Д. В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны// Тр. МИАН. — 1967. — 90. — С. 3–210.
3. *Вайнштейн А. Г., Лерман Л. М.* Неавтономные надстройки над диффеоморфизмами и геометрия близости// Усп. мат. наук. — 1976. — 31, № 5. — С. 231–232.
4. *Вайнштейн А. Г., Лерман Л. М.* Равномерные структуры и эквивалентность диффеоморфизмов// Мат. заметки. — 1978. — 23, № 5. — С. 739–752.
5. *Гринес В. З., Лерман Л. М.* Неавтономные векторные поля на  $S^3$ : простая динамика и дикое вложение сепаратрис// Теор. мат. физ. — 2022. — 212, № 1. — С. 15–32.
6. *Далецкий Ю. Л., Крейн М. Г.* Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1970.
7. *Демидович Б. П.* Лекции по математической теории устойчивости. — М.: Наука, 1967.
8. *Левитан Б. М., Жиков В. В.* Почти-периодические функции и дифференциальные уравнения. — М.: МГУ, 1978.
9. *Лерман Л. М.* О неавтономных динамических системах типа Морса—Смейла// Дисс. канд. физ.-мат. наук. — Горький: Горьк. гос. ун-т, 1975.
10. *Лерман Л. М., Шильников Л. П.* О классификации грубых неавтономных систем с конечным числом ячеек// Докл. АН СССР. — 1973. — 209, № 3. — С. 544–547.
11. *Морозов А. Д., Морозов К. Е.* Транзиторный сдвиг в задаче о флаттере// Нелин. динамика. — 2015. — 11, № 3. — С. 447–457.
12. *Akhmet'ev P. M., Medvedev T. V., Pochinka O. V.* On the number of the classes of topological conjugacy of Pixton diffeomorphisms// Qual. Theory Dyn. Syst. — 2021. — 20. — 76.
13. *Amerio L.* Soluzioni quasi-periodiche, o limitate, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati// Ann. Mat. Pura Appl. — 1955. — 39. — С. 97–119.
14. *Artin E., Fox R.* Some wild cells and spheres in three-dimensional space// Ann. Math. — 1948. — 49. — С. 979–990.
15. *Barreira L., Valls C.* Stability of nonautonomous differential equations. — Berlin—Heidelberg: Springer, 2008.
16. *Bochner S.* Sur les fonctions presque périodiques de Bohr// C. R. — 1925. — 180. — С. 1156–1158.
17. *Bonatti Ch., Grines V.* Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere  $S^3$ // J. Dyn. Control Syst. — 2000. — 6, № 4. — С. 579–602.
18. *Bonatti Ch., Grines V., Medvedev V., Pecou E.* Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds// Topology. — 2004. — 43. — С. 369–391.
19. *Bonatti C., Grines V. Z., Pochinka O.* Topological classification of Morse—Smale diffeomorphisms on 3-manifolds// Duke Math. J. — 2019. — 168, № 13. — С. 2507–2558.
20. *Cerf J.* Sur les difféomorphismes de la sphère de dimension trois ( $\Gamma_4 = 0$ ). — Berlin: Springer, 1968.
21. *Coppel W. A.* Stability and asymptotic behavior of differential equations. — Boston: D.C. Heath and Company, 1965.
22. *Corduneanu C.* Almost periodic oscillations and waves. — New York: Springer, 2009.
23. *Daverman R. J., Venema G. A.* Embedding in manifolds. — Providence: AMS, 2009.
24. *Favard J.* Sur les équations différentielles á coefficients presque-périodiques// Acta Math. — 1927. — 51. — С. 31–81.
25. *Gonchenko S. V., Shilnikov L. P., Turaev D. V.* On dynamical properties of multidimensional diffeomorphisms from Newhouse regions// Nonlinearity. — 2008. — 21, № 5. — С. 923–972.
26. *Grines V., Medvedev T., Pochinka O.* Dynamical systems on 2-and 3-manifolds. — Cham: Springer, 2016.
27. *Harrold O. G., Griffith H. C., Posey E. E.* A characterization of tame curves in three-space// Trans. Am. Math. Soc. — 1955. — 79. — С. 12–34.
28. *Lerman L. M., Gubina E. V.* Nonautonomous gradient-like vector fields on the circle: classification, structural stability and autonomization// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S. — 2020. — 13, № 4. — С. 1341–1367.
29. *Lerman L. M., Shilnikov L. P.* Homoclinical structures in nonautonomous systems: nonautonomous chaos// Chaos. — 1992. — 2, № 3. — С. 447–454.
30. *Marcus L.* Asymptotically autonomous differential equations// В сб.: «Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations. III». — Princeton: Princeton Univ. Press, 1956. — С. 17–29.
31. *Massera J. L., Schäffer J. J.* Linear differential equations and function spaces. — New York—London: Academic Press, 1966.
32. *Mazur B.* A note on some contractible 4-manifolds// Ann. Math. — 1961. — 73, № 1. — С. 221–228.
33. *Mosovskiy B. A., Meiss J. D.* Transport in transitory dynamical systems// SIAM J. Appl. Dyn. Syst. — 2011. — 10, № 1. — С. 35–65.

34. *Newman M. H. A.* Elements of the topology of plane sets of points. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1964.
35. *Perron O.* Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen// *Math. Z.* — 1930. — 32. — С. 703–728.
36. *Pixton D.* Wild unstable manifolds// *Topology.* — 1977. — 16, № 2. — С. 167–172.
37. *Pochinka O., Shubin D.* On 4-dimensional flows with wildly embedded invariant manifolds of a periodic orbit// *Appl. Math. Nonlinear Sci. Ser.* — 2020. — 5, № 2. — С. 261–266.
38. *Sell G.* Nonautonomous differential equations and topological dynamics. I// *Trans. Am. Math. Soc.* — 1967. — 127. — С. 241–262.
39. *Sell G.* Nonautonomous differential equations and topological dynamics. II// *Trans. Am. Math. Soc.* — 1967. — 127. — С. 263–283.
40. *Smale S.* Morse inequality for a dynamical systems// *Bull. Am. Math. Soc.* — 1960. — 66. — С. 43–49.

В. З. Гринес

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,  
Нижний Новгород, Россия  
E-mail: vgrines@yandex.ru

Л. М. Лерман

Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики»,  
Нижний Новгород, Россия  
E-mail: lerman1@mm.unn.ru

DOI 10.22363/2413-3639-2022-68-4-596-620

UDC 517.9

## Nonautonomous dynamics: classification, invariants, and implementation

V. Z. Grines and L. M. Lerman

*National Research University “Higher School of Economics,” Nizhniy Novgorod, Russia*

The work is a brief review of the results obtained in nonautonomous dynamics based on the concept of uniform equivalence of nonautonomous systems. This approach to the study of nonautonomous systems was proposed in [10] and further developed in the works of the second author, and recently — jointly by both authors. Such an approach seems to be fruitful and promising, since it allows one to develop a nonautonomous analogue of the theory of dynamical systems for the indicated classes of systems and give a classification of some natural classes of nonautonomous systems using combinatorial type invariants. We show this for classes of nonautonomous gradient-like vector fields on closed manifolds of dimensions one, two, and three. In the latter case, a new equivalence invariant appears, the wild embedding type for stable and unstable manifolds [14, 17], as shown in a recent paper by the authors [5].

**Keywords:** nonautonomous dynamics, nonautonomous vector field, gradient-like vector field, uniform equivalence, wild embedding

**For citation:** V. Z. Grines, L. M. Lerman, “Nonautonomous dynamics: classification, invariants, and implementation,” *Sovrem. Mat. Fundam. Naprav.*, 2022, vol. 68, No. 4, 596–620. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-596-620>





## REFERENCES

1. V. M. Alekseev and S. V. Fomin, “Mikhail Valer’evich Bebutov” [Mikhail Valerievich Bebutov], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1970, **25**, № 3, 237–239 (in Russian).
2. D. V. Anosov, “Geodezicheskie potoki na zamknutykh rimanovykh mnogoobraznykh otritsatel’noy krivizny” [Geodesic flows on closed Riemannian manifolds of negative curvature], *Tr. MIAN* [Proc. Moscow Inst. Phys. Tech.], 1967, **90**, 3–210 (in Russian).
3. A. G. Vainshtein and L. M. Lerman, “Neavtonomnye nadstroyki nad diffeomorfizmami i geometriya blizosti” [Nonautonomous extensions over diffeomorphisms and proximity geometry], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1976, **31**, № 5, 231–232 (in Russian).
4. A. G. Vainshtein and L. M. Lerman, “Ravnomernye struktury i ekvivalentnost’ diffeomorfizmov” [Uniform structures and equivalence of diffeomorphisms], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1978, **23**, № 5, 739–752 (in Russian).
5. V. Z. Grines and L. M. Lerman, “Neavtonomnye vektornye polya na  $S^3$ : prostaya dinamika i dikoe vlozhenie separatriis” [Nonautonomous vector fields on  $S^3$ : simple dynamics and wild separatrix embedding], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 2022, **212**, № 1, 15–32 (in Russian).
6. Yu. L. Daletskiy and M. G. Kreyn, *Ustoychivost’ resheniy differentsial’nykh uravneniy v banakhovom prostranstve* [Stability of Solutions of Differential Equations in a Banach Space], Nauka, Moscow, 1970 (in Russian).
7. B. P. Demidovich, *Lektsii po matematicheskoy teorii ustoychivosti* [Lectures on the Mathematical Theory of Stability], Nauka, Moscow, 1967 (in Russian).
8. B. M. Levitan and V. V. Zhikov, *Pochti-periodicheskie funktsii i differentsial’nye uravneniya* [Almost Periodic Functions and Differential Equations], MSU, Moscow, 1978 (in Russian).
9. L. M. Lerman, *O neavtonomnykh dinamicheskikh sistemakh tipa Morsa–Smeyla* [On Nonautonomous Dynamical Systems of the Morse–Smale Type], Thesis, Gor’k. Gos. Univ., Gor’kiy, 1975.
10. L. M. Lerman and L. P. Shil’nikov, “O klassifikatsii grubyykh neavtonomnykh sistem s konechnym chislom yacheek” [On the classification of rough nonautonomous systems with a finite number of cells], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1973, **209**, № 3, 544–547 (in Russian).
11. A. D. Morozov and K. E. Morozov, “Tranzitornyy sdvig v zadache o flattere” [Transitory shift in the flutter problem], *Nelin. dinamika* [Nonlinear Dynamics], 2015, **11**, № 3, 447–457 (in Russian).
12. P. M. Akhmet’ev, T. V. Medvedev, and O. V. Pochinka, “On the number of the classes of topological conjugacy of Pixton diffeomorphisms,” *Qual. Theory Dyn. Syst.*, 2021, **20**, 76.
13. L. Amerio, “Soluzioni quasi-periodiche, o limitate, di sistemi differenziali non lineari quasi-periodici, o limitati,” *Ann. Mat. Pura Appl.*, 1955, **39**, 97–119.
14. E. Artin and R. Fox, “Some wild cells and spheres in three-dimensional space,” *Ann. Math.*, 1948, **49**, 979–990.
15. L. Barreira and C. Valls, *Stability of Nonautonomous Differential Equations*, Springer, Berlin–Heidelberg, 2008.
16. S. Bochner, “Sur les fonctions presque périodiques de Bohr,” *C. R.*, 1925, **180**, 1156–1158.
17. Ch. Bonatti and V. Grines, “Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere  $S^3$ ,” *J. Dyn. Control Syst.*, 2000, **6**, № 4, 579–602.
18. Ch. Bonatti, V. Grines, V. Medvedev, and E. Pecou, “Topological classification of gradient-like diffeomorphisms on 3-manifolds,” *Topology*, 2004, **43**, 369–391.
19. C. Bonatti, V. Z. Grines, and O. Pochinka, “Topological classification of Morse–Smale diffeomorphisms on 3-manifolds,” *Duke Math. J.*, 2019, **168**, № 13, 2507–2558.
20. J. Cerf, *Sur les Difféomorphismes de la Sphère de Dimension Trois* ( $\Gamma_4 = 0$ ), Springer, Berlin, 1968.
21. W. A. Coppel, *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*, D.C. Heath and Company, Boston, 1965.
22. C. Corduneanu, *Almost Periodic Oscillations and Waves*, Springer, New York, 2009.
23. R. J. Daverman and G. A. Venema, *Embedding in Manifolds*, AMS, Providence, 2009.
24. J. Favard, “Sur les équations différentielles à coefficients presque-périodiques,” *Acta Math.*, 1927, **51**, 31–81.
25. S. V. Gonchenko, L. P. Shilnikov, and D. V. Turaev, “On dynamical properties of multidimensional diffeomorphisms from Newhouse regions,” *Nonlinearity*, 2008, **21**, № 5, 923–972.
26. V. Grines, T. Medvedev, and O. Pochinka, *Dynamical Systems on 2- and 3-Manifolds*, Springer, Cham, 2016.
27. O. G. Harrold, H. C. Griffith, and E. E. Posey, “A characterization of tame curves in three-space,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1955, **79**, 12–34.
28. L. M. Lerman and E. V. Gubina, “Nonautonomous gradient-like vector fields on the circle: classification, structural stability and autonomization,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S.*, 2020, **13**, № 4, 1341–1367.

29. L. M. Lerman and L. P. Shilnikov, “Homoclinical structures in nonautonomous systems: nonautonomous chaos,” *Chaos*, 1992, **2**, № 3, 447–454.
30. L. Marcus, “Asymptotically autonomous differential equations,” In: *Contributions to the Theory of Nonlinear Oscillations. III*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1956, pp. 17–29.
31. J. L. Massera and J. J. Schäffer, *Linear Differential Equations and Function Spaces*, Academic Press, New York–London, 1966.
32. B. Mazur, “A note on some contractible 4-manifolds,” *Ann. Math.*, 1961, **73**, № 1, 221–228.
33. B. A. Mosovsky and J. D. Meiss, “Transport in transitory dynamical systems,” *SIAM J. Appl. Dyn. Syst.*, 2011, **10**, № 1, 35–65.
34. M. H. Newman, *Elements of the Topology of Plane Sets of Points*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1964.
35. O. Perron, “Die Stabilitätsfrage bei Differentialgleichungen,” *Math. Z.*, 1930, **32**, 703–728.
36. D. Pixton, “Wild unstable manifolds,” *Topology*, 1977, **16**, № 2, 167–172.
37. O. Pochinka and D. Shubin, “On 4-dimensional flows with wildly embedded invariant manifolds of a periodic orbit,” *Appl. Math. Nonlinear Sci. Ser.*, 2020, **5**, № 2, 261–266.
38. G. Sell, “Nonautonomous differential equations and topological dynamics. I,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1967, **127**, 241–262.
39. G. Sell, “Nonautonomous differential equations and topological dynamics. II,” *Trans. Am. Math. Soc.*, 1967, **127**, 263–283.
40. S. Smale, “Morse inequality for a dynamical systems,” *Bull. Am. Math. Soc.*, 1960, **66**, 43–49.

V. Z. Grines

National Research University “Higher School of Economics,” Nizhniy Novgorod, Russia

E-mail: [vgrines@yandex.ru](mailto:vgrines@yandex.ru)

L. M. Lerman

National Research University “Higher School of Economics,” Nizhniy Novgorod, Russia

E-mail: [lermanl@mm.unn.ru](mailto:lermanl@mm.unn.ru)

## О СИСТЕМЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ СО СЛУЧАЙНЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

В. Г. Задорожний, Г. С. Тихомиров

*Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия*

Получены явные формулы для математического ожидания и вторых моментных функций решения линейной системы обыкновенных дифференциальных уравнений со случайным параметром и векторной случайной правой частью. Задача сводится к детерминированной задаче Коши для систем линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Получена явная формула решения линейных систем уравнений в частных производных первого порядка с постоянными коэффициентами. Приведен пример, показывающий, что случайные факторы могут оказывать стабилизирующее влияние на линейную систему дифференциальных уравнений.

**Ключевые слова:** линейная система обыкновенных дифференциальных уравнений со случайным параметром и векторной случайной правой частью, моментные функции, система линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, явная формула решения

**Для цитирования:** В. Г. Задорожний, Г. С. Тихомиров. О системе дифференциальных уравнений со случайными параметрами // Соврем. мат. Фундам. направл. 2022. Т. 68, № 4. С. 621–634. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-621-634>

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим векторную задачу Коши

$$\frac{dx}{dt} = a(t)\varepsilon(\omega)Ax + f(t, \omega), \quad (1.1)$$

$$x(t_0) = x_0, \quad (1.2)$$

где  $\mathbb{R}$  — множество действительных чисел,  $x : \mathbb{R} \rightarrow X$  — векторная функция, принимающая значения в  $n$ -мерном вещественном пространстве  $X$  со скалярным произведением  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  и нормой  $\|x\| = \langle x, x \rangle^{\frac{1}{2}}$ ,  $A$  — оператор в пространстве  $X$ ,  $f$  — векторный случайный процесс,  $\varepsilon$  — случайная величина,  $t_0 \in \mathbb{R}$ ,  $x_0$  — случайный вектор,  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — заданная функция. Наша цель — найти математическое ожидание  $E[x(t)]$  решения задачи (1.1), (1.2) и моментные функции второго порядка. Задача связана с задачей стабилизации решений дифференциальных уравнений с помощью случайных помех. На примере показана возможность стабилизации случайным шумом.

Если  $\varepsilon, f, x_0$  не являются случайными параметрами, то эта задача изучается даже в стандартных курсах обыкновенных дифференциальных уравнений.



Решение задачи (1.1), (1.2) записывается в виде

$$x(t, \omega) = \exp \left( \varepsilon(\omega) \int_{t_0}^t a(s) ds A \right) x_0 + \int_{t_0}^t \exp \left( \varepsilon(\omega) \int_{\tau}^t a(s) ds A \right) f(\tau, \omega) d\tau.$$

Если  $\varepsilon$  — заданное число, а  $f$  зависит от случайных событий, то для решения задачи (1.1), (1.2) можно написать моментные функции любого порядка.

Мы можем формально представить выражение для математического ожидания как

$$\begin{aligned} E[x(t, \omega)] &= E \left[ \exp \left( \varepsilon(\omega) \int_{t_0}^t a(s) ds A \right) x_0 + \int_{t_0}^t \exp \left( \varepsilon(\omega) \int_{\tau}^t a(s) ds A \right) f(\tau, \omega) d\tau \right] = \\ &= \int_{\Omega} \left[ \exp \left( \varepsilon(\omega) \int_{t_0}^t a(s) ds A \right) x_0 + \int_{t_0}^t \exp \left( \varepsilon(\omega) \int_{\tau}^t a(s) ds A \right) f(\tau, \omega) d\tau \right] d\omega. \end{aligned}$$

Здесь  $\Omega$  — пространство случайных событий. Иногда удается вычислить интегралы (см. [4]), но трудности очевидны. Для некоторых дифференциальных уравнений со случайными коэффициентами формулы для моментных функций решения можно найти в [4]. Математическое ожидание решения скалярного дифференциального уравнения первого порядка было получено Адомианом, см. [1, с. 245].

Предположим, что известен характеристический функционал (см. [3, с. 323], [4, с. 30]) для  $\varepsilon, f$ :

$$\psi(z, u) = E \left[ \exp \left( i\varepsilon(\omega)z + i \int_T \langle f(s, \omega), u(s) \rangle ds \right) \right],$$

где  $E$  — знак математического ожидания по функции распределения случайных процессов  $\varepsilon, f$  (ниже зависимость от случайных событий  $\omega$  в записи не отражается),  $T = [t_0, t_1] \subset \mathbb{R}$ ,  $z \in \mathbb{R}$ ,  $u$  — интегрируемая вектор-функция на отрезке  $T$ , т. е.  $u \in L_1(T)$ , где  $L_1(T)$  — пространство интегрируемых вектор-функций на отрезке  $T$  с нормой  $\|u\|_1 = \int_T \|u(t)\| dt$ .

В дальнейшем используется понятие вариационной производной. Напомним ее определение, см. [4, с. 14]. Пусть  $X$  банахово пространство,  $u \in L_1(T)$ ,  $h \in L_1(T)$ ,  $y : L_1(T) \rightarrow X$ . Если  $y(u+h) - y(u) = \int_T \varphi(t, u)h(t)dt + o(h)$ , где интеграл понимается в смысле Лебега и является линейным ограниченным по переменной  $h \in L_1(T)$  оператором, то  $\varphi : T \times L_1(T) \rightarrow X$  называется *вариационной производной* отображения  $y$  и обозначается  $\frac{\delta y(u)}{\delta u(t)}$ .

## 2. СВЕДЕНИЕ К ДЕТЕРМИНИРОВАННОЙ ЗАДАЧЕ

Введем обозначение  $w = w(z, u) = \exp(i\varepsilon z + i \int_T \langle f(s, \omega), u(s) \rangle ds)$ . Умножая равенства (1.1), (1.2) на  $w$  и записывая математическое ожидание полученных равенств, получаем

$$E \left[ \frac{dx}{dt} w \right] = E[\varepsilon a(t) A x w] + E[f(t) w], \quad (2.1)$$

$$E[x(t_0) w] = E[x_0 w]. \quad (2.2)$$

Введем обозначение  $y = y(t, z, u) = E[x(t) w]$ . Тогда (формально)

$$y(t, 0, 0) = E[x(t)], \quad \frac{\partial y}{\partial t} = E \left[ \frac{dx}{dt} w \right], \quad \frac{\partial y}{\partial z} = E[i\varepsilon w x], \quad \frac{\delta_p \psi}{\delta u(t)} = E[iw f(t)],$$

где  $\frac{\delta_p \psi}{\delta u(t)}$  — частная вариационная производная (см. [4, с. 14]) по переменной  $u$ . Если  $x_0$  не зависит от  $\varepsilon$  и  $f$ , то равенства (2.1), (2.2) можно записать в виде

$$\frac{\partial y}{\partial t} = -ia(t)A \frac{\partial y}{\partial z} - i \frac{\delta_p \psi}{\delta u(t)}, \quad y(t_0, z, u) = E[x_0] \psi(z, u). \quad (2.3)$$

**Определение 2.1.**  $y(t, 0, 0)$  называется *математическим ожиданием*  $E[x(t)]$  решения задачи (1.1), (1.2), где  $y$  — детерминированное решение задачи Коши (2.3) в некоторой окрестности точки с компонентами  $z = 0, u = 0$ .

### 3. РЕШЕНИЕ ЛИНЕЙНОЙ ОДНОРОДНОЙ ЗАДАЧИ

Рассмотрим линейную однородную задачу

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a(t)A \frac{\partial y}{\partial z}, \tag{3.1}$$

$$y(t_0, z) = y_0(z)\xi, \tag{3.2}$$

где  $y_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  (здесь  $\mathbb{C}$  — это множество комплексных чисел),  $\xi \in Y, Y$  — комплексное нормированное пространство,  $a : T \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция. Это линейная система дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка [2, 5–9, 12]. Пусть  $I$  обозначает тождественный оператор, действующий в пространстве  $Y$ , а  $y_0(z) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k z^k$  является аналитической функцией на  $\mathbb{R}$ . Введем операторную функцию

$$\Phi = y_0 \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds \right) = \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds \right)^k. \tag{3.3}$$

Этот ряд абсолютно и равномерно сходится при  $|z| \leq l$  для любого  $l > 0$ . В этом случае следующие ряды абсолютно сходятся:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds \right)^{k-1} &= \frac{dy_0}{dz} \Big|_{z=zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds}, \\ \sum_{k=0}^{\infty} |b_k| \left\| zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds \right\|^k, \quad \sum_{k=1}^{\infty} k |b_k| \left\| zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds \right\|^{k-1}. \end{aligned} \tag{3.4}$$

**Теорема 3.1.** Если  $y_0$  является аналитической функцией на  $\mathbb{R}$  и  $a : T \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция, тогда существует производная  $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$  и выполняется равенство

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds \right)^{k-1}.$$

*Доказательство.* Пусть  $\Delta z$  является приращением переменной  $z$ . Поскольку ряд (3.4) сходится, то мы имеем

$$\begin{aligned} &\left\| \frac{1}{\Delta z} \left[ \Phi(t, z + \Delta z) - \Phi(t, z) - \Delta z \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds \right)^{k-1} \right] \right\| = \\ &= \left\| \frac{1}{\Delta z} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds + \Delta z I \right)^k \right] - \right. \\ &- \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds \right)^k - \Delta z \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds \right)^{k-1} \left. \right\| = \\ &= \left\| \frac{1}{\Delta z} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left( \sum_{m=0}^k C_k^m \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds \right)^{k-m} (\Delta z)^m I - \right. \right. \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \left\| \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds \right)^k - \Delta z k \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds \right)^{k-1} \right\| = \\
& = \left\| \frac{1}{\Delta z} \left[ \sum_{k=2}^{\infty} b_k \left( \sum_{m=2}^k C_k^m \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds \right)^{k-m} (\Delta z)^m I \right) \right] \right\| = \\
& = \left\| \Delta z \sum_{k=2}^{\infty} b_k \left( \sum_{m=2}^k C_k^m \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds \right)^{k-m} (\Delta z)^m I \right) \right\| \leq \\
& \leq |\Delta z| \sum_{k=2}^{\infty} |b_k| \left\| zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds + (\Delta z)I \right\|^k.
\end{aligned}$$

Поскольку ряд (3.3) сходится, то последнее выражение стремится к нулю при  $\Delta z \rightarrow 0$ . Переходя к пределу при  $\Delta z$ , стремящемся к нулю, получаем требуемое утверждение.  $\square$

**Теорема 3.2.** Если  $y_0$  — аналитическая функция на  $\mathbb{R}$  и  $a : T \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция, то существует производная  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  и

$$\frac{\partial \Phi}{\partial t} = a(t)A \frac{\partial \Phi}{\partial z}. \quad (3.5)$$

*Доказательство.* Пусть  $\Delta t$  — приращение переменной  $t$ , тогда

$$\begin{aligned}
& \left\| \frac{1}{\Delta t} \left[ \Phi(t + \Delta t, z) - \Phi(t, z) - a(t)A \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right] \right\| = \\
& = \left\| \frac{1}{\Delta t} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds + A \int_t^{t+\Delta t} a(s) ds \right)^k - \right. \right. \\
& \left. \left. - \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds \right)^k - a(t)A \Delta t \sum_{k=1}^{\infty} k b_k \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds \right)^{k-1} \right] \right\| = \\
& = \left\| \frac{1}{\Delta t} \left[ \sum_{k=0}^{\infty} b_k \left( \sum_{m=1}^k C_k^m \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds \right)^{k-m} (\Delta t A a(t) + o(\Delta t))^m - \right. \right. \right. \\
& \left. \left. - \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds \right)^k - a(t)A \Delta t k \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds \right)^{k-1} \right] \right\| = \\
& = \left\| \frac{1}{\Delta t} \left[ \sum_{k=2}^{\infty} b_k \left( \sum_{m=2}^k C_k^m \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds \right)^{k-m} (\Delta t A a(t) + o(\Delta t))^m \right) - \right. \right. \\
& \left. \left. - \sum_{k=2}^{\infty} b_k C_k^1 \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds \right)^{k-1} o(\Delta t) \right] \right\| \leq \\
& \leq |\Delta t| \left\| \sum_{k=2}^{\infty} b_k \left( \sum_{m=2}^k C_k^m \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds \right)^{k-m} (A a(t) + o(\Delta t))^m (\Delta t)^{m-2} \right) \right\| +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \left| \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right| \sum_{k=2}^{\infty} |b_k| k \left\| zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds \right\|^{k-1} \leq \\
 & \leq |\Delta t| \sum_{k=2}^{\infty} |b_k| \left\| \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds + Aa(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right)^{k-m} \left( Aa(t) + \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right) \right\|^k + \\
 & \quad + \left| \frac{o(\Delta t)}{\Delta t} \right| \sum_{k=2}^{\infty} |b_k| k \left\| zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds \right\|^{k-1}.
 \end{aligned}$$

В последнем неравенстве мы использовали  $|\Delta t| \leq 1$ . Поскольку ряд (3.4) сходится, последнее выражение стремится к нулю при  $\Delta t \rightarrow 0$ . Тогда, согласно определению производной,  $\frac{\partial \Phi}{\partial t}$  существует и равна  $a(t)A \frac{\partial \Phi}{\partial z}$ . □

**Замечание.** Если  $a$  непрерывна на  $T$  и  $y_0$  является аналитической функцией на  $\mathbb{R}$ , то  $\Phi = y_0 \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds \right)$  является решением операторной задачи Коши

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial \Phi}{\partial t} &= a(t)A \frac{\partial \Phi}{\partial z}, \\
 \Phi(t_0, z) &= y_0(zI) = y_0(z)I.
 \end{aligned} \tag{3.6}$$

Теперь предположим, что для уравнения (3.1) начальное условие имеет более общий вид

$$y(t_0, z) = y_0(z) = \sum_{j=1}^n y_{0j}(z) e_j, \tag{3.7}$$

где  $e_j$  — ортогональный базис в  $Y$ .

**Теорема 3.3.** Пусть  $y_j : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  — аналитическая функция на  $\mathbb{R}$ ,  $a$  — непрерывная функция на  $T$  и  $\Phi_j = y_{0j} \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds \right)$ . Тогда

$$y(t, z) = \sum_{j=1}^n \Phi_j(t, z) e_j = \sum_{j=1}^n y_{0j} \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s) ds \right) e_j \tag{3.8}$$

является решением уравнения (3.1) с начальным условием (3.7).

*Доказательство.* Используя равенство (3.6), получаем

$$\frac{\partial y}{\partial t} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial \Phi_j(t, z)}{\partial t} e_j = \sum_{j=1}^n a(t)A \frac{\partial \Phi_j(t, z)}{\partial z} e_j = a(t)A \frac{\partial}{\partial z} \sum_{j=1}^n \Phi_j e_j = a(t)A \frac{\partial y}{\partial z},$$

т. е. функция (3.8) является решением уравнения (3.1). Далее

$$y(t_0, z) = \sum_{j=1}^n \Phi_j(t_0, z) e_j = \sum_{j=1}^n y_{0j}(z) e_j = y_0(z),$$

следовательно, начальное условие (3.7) выполнено. □

#### 4. ЛИНЕЙНОЕ НЕОДНОРОДНОЕ УРАВНЕНИЕ

Рассмотрим линейную неоднородную задачу

$$\frac{\partial y}{\partial t} = a(t)A \frac{\partial y}{\partial z} + b(t, z), \tag{4.1}$$

$$y(t_0, z) = y_0(z) = \sum_{j=1}^n y_{0j}(z)e_j, \quad (4.2)$$

где  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $b = \sum_{j=1}^n b_j(t, z)e_j$ ,  $y_0(z) = \sum_{j=1}^n y_{0j}(z)e_j$  заданы.

**Теорема 4.1.** Если  $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  — непрерывная функция,  $y : \mathbb{R} \rightarrow Y$  — аналитическая вектор-функция на  $\mathbb{R}$  и  $b$  — вектор-функция, непрерывная по  $t$  и аналитическая по  $z$  на  $\mathbb{R}$ , то

$$y(t, z) = \sum_{j=1}^n y_{0j} \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s)ds \right) e_j + \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n b_j \left( s, zI + A \int_s^t a(\tau)d\tau \right) e_j ds \quad (4.3)$$

является решением задачи Коши (4.1), (4.2).

*Доказательство.* Отметим, что

$$b_j \left( s, zI + A \int_s^t a(\tau)d\tau \right), \quad y_{0j} \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s)ds \right), \quad j = 1, 2, \dots, n$$

удовлетворяет уравнению (3.6).

Отсюда получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial t} = a(t)A \frac{\partial}{\partial z} \sum_{j=1}^n y_{0j} \left( zI + A \int_{t_0}^t a(s)ds \right) e_j + \sum_{j=1}^n b_j(t, z)e_j + \\ + \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n a(t)A \frac{\partial}{\partial z} b_j \left( s, zI + A \int_s^t a(\tau)d\tau \right) e_j ds = a(t)A \frac{\partial y}{\partial z} + b(t, z). \end{aligned}$$

Следовательно,  $y$  является решением уравнения (4.1). Далее

$$y(t_0, z) = \sum_{j=1}^n y_{0j}(zI)e_j = \sum_{j=1}^n y_{0j}(z)Ie_j = \sum_{j=1}^n y_{0j}(z)e_j = y_0(z),$$

т. е. выполняется и начальное условие (4.2).  $\square$

**Замечание.** Уравнение (4.1) представляет собой векторное представление линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Явный вид (4.3) решений этой системы ранее не встречался.

## 5. НАХОЖДЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОЖИДАНИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1.1), (1.2)

Вернемся к задаче (2.3). Она имеет вид (4.1), (4.2) (где  $u$  — параметр).

**Теорема 5.1.** Если  $\psi$  — аналитическая функция переменной  $z$  на  $\mathbb{R}$  и существуют вариационные производные  $\frac{\delta \psi}{\delta u_j(s)}$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , то

$$y = \psi \left( zI - iA \int_{t_0}^t a(\tau)d\tau, u \right) E[x_0] - i \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n \frac{\delta_p \psi \left( zI - iA \int_s^t a(\tau)d\tau, u \right)}{\delta u_j(s)} e_j ds \quad (5.1)$$

является решением задачи (2.3).

*Доказательство.* Отметим, что  $y(t_0, z) = \psi(zI)E[x_0] = \psi(z)IE[x_0] = \psi(z)E[x_0]$ , т. е. начальное условие выполнено. Далее, согласно формуле (4.3) имеем



$$\begin{aligned}
 y(t, z, u) &= \sum_{j=1}^n \psi \left( zI - iA \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau, u \right) E[x_0] e_j - i \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n \frac{\delta_p \psi \left( zI - iA \int_s^t a(\tau) d\tau, u \right)}{\delta u_j(s)} e_j ds = \\
 &= \psi \left( zI - iA \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau, u \right) E[x_0] - i \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n \frac{\delta_p \psi \left( zI - iA \int_s^t a(\tau) d\tau, u \right)}{\delta u_j(s)} e_j ds.
 \end{aligned}$$

□

Используя определение  $M[x(t_0)] = y(t, 0, 0)$  из (5.1), получаем следующий результат.

**Теорема 5.2.** Если  $\psi$  — аналитическая функция переменной  $z$  на  $\mathbb{R}$ , имеющая вариационную производную  $\frac{\delta_p \psi}{\delta u(t)}$ , тогда

$$E[x(t)] = \psi \left( -iA \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau, 0 \right) E[x_0] - i \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n \frac{\delta_p \psi \left( -iA \int_s^t a(\tau) d\tau, 0 \right)}{\delta u_j(s)} e_j ds \quad (5.2)$$

является математическим ожиданием решения задачи Коши (1.1), (1.2).

Если  $\varepsilon, f$  независимы, то  $\psi(z, u) = \psi_\varepsilon(z)\psi_f(u)$ , где  $\psi_\varepsilon(z) = E[\exp i\varepsilon z]$  — характеристическая функция  $\varepsilon$ , а  $\psi_f(u) = E[\exp(i \int_T \langle f(s), u(s) \rangle ds)]$  — характеристический функционал для  $f$ .

**Теорема 5.3.** Если случайная величина  $\varepsilon$  и векторный случайный процесс  $f$  независимы, существует вариационная производная  $\frac{\delta \psi_f}{\delta u(s)}$ , а  $\psi_\varepsilon$  является аналитической функцией на  $\mathbb{R}$ , то

$$E[x(t)] = \psi_\varepsilon \left( -iA \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right) E[x_0] - i \int_{t_0}^t \psi_\varepsilon \left( -iA \int_s^t a(\tau) d\tau \right) E[f(s)] ds \quad (5.3)$$

является математическим ожиданием решения задачи Коши (1.1), (1.2).

*Доказательство.* Воспользуемся формулой (5.3). При этом  $\psi_f(0) = 1$ ,

$$\frac{\delta \psi_f(0)}{\delta u_j(s)} = \frac{\delta}{\delta u_j(s)} E \left[ \exp \left( i \int_T \langle f(s), u(s) \rangle ds \right) \right] \Big|_{u=0} = E \left[ \exp \left( i \int_T \langle f(s), u(s) \rangle ds \right) ds i f_j(s) \right] \Big|_{u=0} = i E[f(s)]_j.$$

Поскольку  $\varepsilon$  и  $f$  независимы, то

$$\begin{aligned}
 \psi \left( -iA \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau, 0 \right) &= \psi_\varepsilon \left( -iA \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right) \psi_f(0) = \psi_\varepsilon \left( -iA \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau \right), \\
 \frac{\delta_p \psi \left( -iA \int_s^t a(\tau) d\tau, 0 \right)}{\delta u_j(s)} e_j &= \psi_\varepsilon \left( -iA \int_s^t a(\tau) d\tau \right) \frac{\delta \psi_f(0)}{\delta u_j(s)} e_j = i \psi_\varepsilon \left( -iA \int_s^t a(\tau) d\tau \right) E[f(s)]_j e_j.
 \end{aligned} \quad (5.4)$$

Подставляя эти выражения в формулу (5.3), получаем (5.4).

□

## 6. ПРИМЕР

Требуется найти математическое ожидание решения задачи Коши

$$\begin{aligned}\frac{dx_1}{dt} &= 2\epsilon t x_2 + f_1(t), \\ \frac{dx_2}{dt} &= -2\epsilon t x_1 + f_2(t), \\ x_1(0) &= x_{10}, \quad x_2(0) = x_{20},\end{aligned}$$

где  $\epsilon$  — случайная величина,  $f_1, f_2$  — случайные процессы с характеристическим функционалом

$$\begin{aligned}\psi(z, u_1, u_2) &= \exp \left( imz - \frac{1}{2}\sigma^2 z^2 + i \int_0^T (E[f_1(s)]u_1(s) + E[f_2(s)]u_2(s)) ds - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T b_{11}(s_1, s_2) u_1(s_1) u_1(s_2) ds_1 ds_2 - \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^T b_{22}(s_1, s_2) u_2(s_1) u_2(s_2) ds_1 ds_2 \right).\end{aligned}$$

Здесь  $m, \sigma > 0$  — заданные числа,  $b_{11}, b_{22}$  — заданные ковариационные функции.

*Решение.* Эта задача имеет форму задачи (4.1), (4.2). В нашем случае

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad a(t) = 2t, \quad f(t) = \begin{pmatrix} f_1(t) \\ f_2(t) \end{pmatrix},$$

$E[f_1(t)], E[f_2(t)]$  — математические ожидания случайных процессов  $f_1, f_2$ , а  $b_{11}, b_{22}$  — элементы ковариационной матрицы случайных процессов  $f_1, f_2$ . Пусть  $E[f_1(t)] = 2t$ ,  $E[f_2(t)] = t^2$ . Из вида характеристического функционала следует, что  $\epsilon$  и  $f$  независимы, поэтому для нахождения математического ожидания  $E[x(t)]$  можно использовать формулу (5.4). В таком случае

$$\begin{aligned}E[x(t)] &= \exp \left( im \left( -iA \int_0^t 2\tau d\tau \right) - \frac{1}{2}\sigma^2 \left( -iA \int_0^t 2\tau d\tau \right)^2 \right) \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} + \\ &\quad + \int_0^t \exp \left( im \left( -iA \int_s^t 2\tau d\tau \right) - \frac{1}{2}\sigma^2 \left( -iA \int_s^t 2\tau d\tau \right)^2 \right) \begin{pmatrix} 2s \\ s^2 \end{pmatrix} ds.\end{aligned}$$

Хорошо известно, что  $\exp(At)$  является суммой сходящегося матричного ряда

$$\exp(At) = I + At + \frac{(At)^2}{2!} + \frac{(At)^3}{3!} + \dots + \frac{(At)^k}{k!} + \dots$$

Это матричная функция, вектор-столбцы которой  $\varphi_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$  являются решениями системы дифференциальных уравнений  $\frac{dx}{dt} = Ax$  с начальными условиями  $\varphi_j(0) = e_j$ ,  $j = 1, 2, \dots, n$ , где  $e_j$  — единичный вектор. Находим собственные значения и собственные векторы матрицы  $A$ . Корни  $\lambda_1 = i$ ,  $\lambda_2 = -i$  уравнения  $\lambda^2 + 1 = 0$  являются собственными значениями матрицы  $A$  и  $h_1 = (-i \ 1)^T$ ,  $h_2 = (i \ 1)^T$  — соответствующие собственные векторы (здесь  $T$  — знак транспонирования). Общее решение системы уравнений  $\frac{dx}{dt} = Ax$  имеет вид

$$x(t) = c_1 \exp(it) \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} + c_2 \exp(-it) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} = c_1(\cos t + i \sin t) \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} + c_2(\cos t - i \sin t) \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда общее действительное решение имеет вид

$$x_r(t) = c_3 \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}.$$

Здесь  $c_3, c_4$  — произвольные вещественные числа.

Запишем начальное условие  $x(0) = e_1$ :

$$c_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + c_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Тогда  $c_3 = 1, c_4 = 0$  и  $\varphi_1(t) = \begin{pmatrix} \cos t \\ -\sin t \end{pmatrix}$  — решение, которое удовлетворяет первому начальному условию. Аналогично находим второе решение  $\varphi_2(t) = \begin{pmatrix} \sin t \\ \cos t \end{pmatrix}$  и

$$\exp(At) = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}.$$

Находим

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$\exp(At)^2 = \begin{pmatrix} \exp(-t^2) & 0 \\ 0 & \exp(-t^2) \end{pmatrix}.$$

Используя эти выражения, находим

$$E[x(t)] = \begin{pmatrix} \cos m\tau^2 & \sin m\tau^2 \\ -\sin m\tau^2 & \cos m\tau^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-\frac{\sigma^2 t^4}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{\sigma^2 t^4}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix} +$$

$$+ \int_0^t \begin{pmatrix} \cos m(t^2 - s^2) & \sin m(t^2 - s^2) \\ -\sin m(t^2 - s^2) & \cos m(t^2 - s^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-\frac{\sigma^2(t^2 - s^2)^2}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{\sigma^2(t^2 - s^2)^2}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2s \\ s^2 \end{pmatrix} ds. \quad (6.1)$$

## 7. СМЕШАННЫЕ МОМЕНТНЫЕ ФУНКЦИИ

Смешанные моментные функции  $E[x(t)\varepsilon]$  и  $E[x(t)f^T(\xi)]$  для решения задачи (1.1), (1.2) также представляют интерес. Мы можем их найти аналогично тому, как находили математическое ожидание решения. Тем не менее, формула для  $y(t, z, u)$  позволяет сделать это короче.

Согласно определению,  $y(t, z, u) = E[x(t)w]$ , где  $w = \exp\left(i\varepsilon z + i \int_T \langle f(t), u(t) \rangle dt\right)$ . Тогда

$$\frac{\partial y(t, z, u)}{\partial z} \Big|_{z=0, u=0} = E[x(t)w(z, u)i\varepsilon] \Big|_{z=0, u=0} = iE[x(t)\varepsilon]$$

Используя формулу (5.1), имеем

$$E[x(t)\varepsilon] = \left( \frac{1}{i} \frac{\partial \psi \left( zI - iA \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau, u \right)}{\partial z} E[x_0] - \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial z} \frac{\delta_p \psi \left( zI - iA \int_s^t a(\tau) d\tau, u \right)}{\delta u(s) ds} \right) \Big|_{z=0, u=0} =$$

$$= \frac{1}{i} \frac{\partial \psi \left( -iA \int_{t_0}^t a(\tau) d\tau, 0 \right)}{\partial z} E[x_0] - \int_{t_0}^t \frac{\partial}{\partial z} \frac{\delta_p \psi \left( -iA \int_s^t a(\tau) d\tau, 0 \right)}{\delta u(s) ds}.$$

Аналогично (но сложнее)

$$\frac{\partial y(t, z, u)}{\delta u(\xi)} \Big|_{z=0, u=0} = E[x(t)w(z, u)if^T(\xi)] \Big|_{z=0, u=0} = iE[x(t)f^T(\xi)],$$

$$E[x(t)f^T(\xi)] = \left( \frac{1}{i} \frac{\delta\psi(zI - iA \int_{t_0}^t a(\tau)d\tau, u)}{\delta u(\xi)} E[x_0] - \int_{t_0}^t \frac{\delta_p^2 \psi(zI - iA \int_s^t a(\tau)d\tau, u)}{\delta u(s)\delta u(\xi)} ds \right) \Big|_{z=0, u=0} =$$

$$= \frac{1}{i} \frac{\delta_p \psi \left( -iA \int_{t_0}^t a(\tau)d\tau, 0 \right)}{\delta u(\xi)} E[x_0] - \int_{t_0}^t \frac{\delta_p^2 \psi \left( -iA \int_s^t a(\tau)d\tau, 0 \right)}{\delta u(s)\delta u(\xi)} ds.$$

8. ВТОРАЯ МОМЕНТНАЯ ФУНКЦИЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ (1.1), (1.2)

Умножим уравнение (1.1) на  $x^T(\tau)w$  и усредним по функции распределения для  $\varepsilon, f$ , получим

$$E\left[\frac{dx}{dt}x^T(\tau)w\right] = E[a(t)\varepsilon Ax x^T(\tau)w]E[f(t)x^T(\tau)w]. \quad (8.1)$$

Введем отображение  $\zeta(t, \tau, z, u) = E[x(t)x^T(\tau)w]$ .

$$\zeta(t, \tau, z, u) = \zeta(\tau, t, z, u), \quad \zeta(t, \tau, 0, 0) = E[x(t)x^T(\tau)]. \quad (8.2)$$

Уравнение (8.1) с помощью  $\zeta$  записывается в виде

$$\frac{\partial \zeta(t, \tau, z, u)}{\partial t} = -iA \frac{\partial \zeta(t, \tau, z, u)}{\partial z} - i \left( \frac{\delta_p y(\tau, z, u)}{\delta u(t)} \right)^T. \quad (8.3)$$

Умножим условие (1.2) на  $x^T(t_0)w$  и усредним по функции распределения для  $\varepsilon, f$ , получим

$$E[x(t_0)x^T(t_0)w] = E[x(t_0)x^T(t_0)]\psi(x, u) \quad (8.4)$$

(мы воспользовались независимостью  $x_0$  от  $\varepsilon, f$ ).

**Определение 8.1.** Второй моментной функцией  $E[x(t)x^T(\tau)]$  решения задачи (1.1), (1.2) называется  $\zeta(t, \tau, 0, 0)$ , где  $\zeta(t, \tau, z, u)$  — симметричное по переменным  $t, \tau$  решение уравнения (8.3), удовлетворяющее условию (8.5).

Запишем уравнение (8.3) при  $\tau = t_0$ .

$$\frac{\partial \zeta(t, t_0, z, u)}{\partial t} = -iA \frac{\partial \zeta(t, t_0, z, u)}{\partial z} - i \left( \frac{\delta_p y(t_0, u)}{\delta u(t)} \right)^T. \quad (8.5)$$

Задача (8.3), (8.5) имеет вид задачи (4.1), (4.2). Решение находим по формуле (4.3):

$$\zeta(t, t_0, z, u) = \psi \left( zI - iA \int_{t_0}^t a(\xi)d\xi, u \right) E[x_0 x_0^T] - i \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{\delta_p y \left( t_0, zI - iA \int_s^t a(\xi)d\xi, u \right)}{\delta u(s)} \right)_{jk}^T e_{jk} ds.$$

Здесь  $\frac{\delta_p y}{\delta u}_{jk}$  — элементы матрицы с индексами  $jk$ ,  $e_{jk} = 0$  при  $j \neq k$ , и  $e_{jj} = 1$ . Поскольку  $\zeta$  симметрично по двум первым переменным, то

$$\zeta(t_0, \tau, z, u) = \psi \left( zI - iA \int_{t_0}^{\tau} a(\xi)d\xi, u \right) E[x_0 x_0^T] - i \int_{t_0}^{\tau} \sum_{j=1}^n \left( \frac{\delta_p y \left( t_0, zI - iA \int_s^{\tau} a(\xi)d\xi, u \right)}{\delta u(s)} \right)_{jk}^T e_{jk} ds. \quad (8.6)$$

Задача (8.3), (8.6) имеет вид задачи (4.1), (4.2). По формуле (4.3) находим

$$\zeta(t, \tau, z, u) = \psi \left( zI - iA \int_{t_0}^t a(\xi)d\xi - iA \int_s^t a(\xi)d\xi, u \right) E[x_0 x_0^T] -$$

$$\begin{aligned}
 & -i \int_{t_0}^{\tau} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{\delta_p y \left( t_0, zI - iA \int_s^{\tau} a(\xi) d\xi - iA \int_{t_0}^t a(\xi) d\xi, u \right)}{\delta u(s)} \right)_{jk}^T e_{jk} ds - \\
 & -i \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{\delta_p y \left( s, zI - iA \int_s^t a(\xi) d\xi, u \right)}{\delta u(s)} \right)_{jk}^T e_{jk} ds. \quad (8.7)
 \end{aligned}$$

Подставляя (5.1) в (8.7), получаем другое представление для  $\zeta$ :

$$\begin{aligned}
 \zeta(t, \tau, z, u) = & \psi \left( zI - iA \int_{t_0}^t a(\xi) d\xi - iA \int_s^t a(\xi) d\xi, u \right) E[x_0 x_0^T] - \\
 & -i \int_{t_0}^{\tau} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{\delta_p \psi \left( zI - iA \int_s^{\tau} a(\xi) d\xi - iA \int_{t_0}^t a(\xi) d\xi, u \right) E[x_0]}{\delta u(s)} \right)_{jk}^T e_{jk} ds - \\
 & -i \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{\delta_p \psi \left( zI - iA \int_s^t a(\xi) d\xi - iA \int_{t_0}^{\tau} a(\xi) d\xi, u \right) E[x_0]}{\delta u(s)} \right)_{jk}^T e_{jk} ds - \\
 & - \int_{t_0}^t d\sigma \int_{t_0}^{\tau} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{\delta_p^2 \psi \left( zI - iA \int_{\sigma}^t a(\xi) d\xi - i \int_{\mu}^{\tau} a(\xi) d\xi, u \right)}{\delta u(\mu) \delta u(\sigma)} \right)_{jk}^T e_{jk} d\mu. \quad (8.8)
 \end{aligned}$$

Отметим, что  $\zeta$  симметрично по переменным  $t, \tau$ .

**Теорема 8.1.** Если  $\psi$  — аналитическая функция переменной  $z$  на  $\mathbb{R}$ , имеющая две вариационные производные по переменной  $u$ , то вторая моментная функция имеет вид

$$\begin{aligned}
 E[x(t)x^T(\tau)] = & \psi \left( -iA \int_{t_0}^t a(\xi) d\xi - iA \int_s^t a(\xi) d\xi, 0 \right) E[x_0 x_0^T] - \\
 & - \left( i \int_{t_0}^{\tau} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{\delta_p y \left( t_0, -iA \int_s^{\tau} a(\xi) d\xi - iA \int_{t_0}^t a(\xi) d\xi, u \right)}{\delta u(s)} \right)_{jk}^T e_{jk} ds - \right. \\
 & \left. - i \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{\delta_p y \left( s, -iA \int_s^t a(\xi) d\xi, u \right)}{\delta u(s)} \right)_{jk}^T e_{jk} ds \right) \Bigg|_{u=0},
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
E[x(t)x^T(\tau)] = & \left( \psi \left( -iA \int_{t_0}^t a(\xi)d\xi - iA \int_s^t a(\xi)d\xi, u \right) E[x_0x_0^T] - \right. \\
& - i \int_{t_0}^{\tau} \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{\delta_p \psi \left( -iA \int_s^{\tau} a(\xi)d\xi - iA \int_{t_0}^t a(\xi)d\xi, u \right) E[x_0]}{\delta u(s)} \right)_{jk}^T e_{jk} ds - \\
& - i \int_{t_0}^t \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left( \frac{\delta_p \psi \left( -iA \int_s^t a(\xi)d\xi - iA \int_{t_0}^{\tau} a(\xi)d\xi, u \right) E[x_0]}{\delta u(s)} \right)_{jk}^T e_{jk} ds - \\
& \left. - \int_{t_0}^t d\sigma \int_{t_0}^{\tau} \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n \left( \frac{\delta_p^2 \psi \left( -iA \int_{\sigma}^t a(\xi)d\xi - i \int_{\mu}^{\tau} a(\xi)d\xi, u \right)}{\delta u(\mu)\delta u(\sigma)} \right)_{jk}^T e_{jk} d\mu \right) \Big|_{u=0}.
\end{aligned}$$

*Доказательство.* Согласно определению

$$E[x(t)x^T(\tau)] = \zeta(t, \tau, 0, 0).$$

Подставляя в (8.7), (8.8)  $z = 0$ ,  $u = 0$ , находим  $E[x(t)x^T(\tau)]$ . □

## 9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе получены явные формулы (5.3), (5.4) для математического ожидания решения задачи (1.1), (1.2), формулы для нахождения смешанных моментных функций  $E[x(t)\varepsilon]$ ,  $E[x(t)f^T(\xi)]$  и формула (4.3) решения задачи Коши для линейной неоднородной системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка (4.1), (4.2). Более сложным оказывается получение формулы для второй моментной функции  $E[x(t)x^T(\tau)]$  решения задачи (1.1), (1.2).

Заметим, что рассматриваемая система является линейной, поэтому устойчивость решений эквивалентна устойчивости нулевого решения линейной однородной системы, см. [2, с. 136]. Если  $\varepsilon = 1$ , то система в примере устойчива по Ляпунову (поскольку спектр матрицы  $A$  лежит на мнимой оси и нет кратных собственных значений, см. [8]).

Из формы математического ожидания решения (8.1)

$$E[x(t)] = \begin{pmatrix} \cos m\tau^2 & \sin m\tau^2 \\ -\sin m\tau^2 & \cos m\tau^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \exp(-\frac{\sigma^2 t^4}{2}) & 0 \\ 0 & \exp(-\frac{\sigma^2 t^4}{2}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_{10} \\ x_{20} \end{pmatrix}.$$

Отсюда следует, что математическое ожидание  $E[x(t)]$  стремится к нулю при  $t \rightarrow +\infty$ , т. е. имеет место асимптотическая устойчивость в среднем (см. [10, с. 231]) системы со случайным фактором  $\varepsilon$ . Таким образом, в данном примере случайные факторы оказывают стабилизирующее влияние на систему.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Адомьян Д. Стохастические системы. — М.: Мир, 1987.
2. Боровских А. В., Перов А. И. Дифференциальные уравнения. — М.: Юрайт, 2016.
3. Гельфанд И. М., Виленкин Н. Я. Обобщенные функции. Некоторые применения гармонического анализа. Оснащенные гильбертовы пространства. — М.: Физматлит, 1961.
4. Задоржний В. Г. Методы вариационного анализа. — Москва—Ижевск: Рег. и хаот. динамика, 2006.
5. Зайцев В. Ф., Полянин А. Д. Справочник по дифференциальным уравнениям с частными производными первого порядка. — М.: Физматлит, 2003.

6. Курант Р. Уравнения с частными производными. — М.: Мир, 1964.
7. Степанов В. В. Курс дифференциальных уравнений. — М.: МГУ, 2004.
8. Федорюк М. В. Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980.
9. Филиппов А. Ф. Сборник задач по дифференциальным уравнениям. — М.—Ижевск: Рег. и хаот. динамика, 2000.
10. Хасьминский Р. З. Устойчивость систем дифференциальных уравнений при случайных возмущениях их параметров. — М.: Наука, 1969.
11. Adomian D. Stochastic systems. — New York—London etc.: Academic press, 1983.
12. Courant R., Hilbert D. Methods of mathematical physics. Vol. II: Partial differential equations. — New York—London: Interscience Publishers, 1962.

В. Г. Задорожний

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: zador@amm.vsu.ru

Г. С. Тихомиров

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

E-mail: tgs.gami@bk.ru

DOI 10.22363/2413-3639-2022-68-4-621-634

UDC 517.972

## On a system of differential equations with random parameters

V. G. Zadorozhniy and G. S. Tikhomirov

*Voronezh State University, Voronezh, Russia*

An explicit formula for the mathematical expectation and second moment functions of a solution to a linear system of ordinary differential equations with a random parameter and a vector random right-hand side is obtained. The problem is reduced to the deterministic Cauchy problem for systems of first-order linear partial differential equations. We obtain an explicit formula for a solution of linear systems of partial differential equations of the first order with constant coefficients. An example is given showing that random factors can have a stabilizing effect on a linear system of differential equations.

**Keywords:** linear system of ordinary differential equations with a random parameter and a vector random right-hand side, moment functions, system of first-order linear partial differential equations, explicit solution

**For citation:** V. G. Zadorozhniy, G. S. Tikhomirov, “On a system of differential equations with random parameters,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2022, vol. 68, No. 4, 621–634. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-621-634>

## REFERENCES

1. D. Adomian, *Stokhasticheskie sistemy* [Stochastic Systems], Mir, Moscow, 1987 (Russian translation).
2. A. V. Borovskikh and A. I. Perov, *Differentsial'nye uravneniya* [Differential Equation], Yurayt, Moscow, 2016 (in Russian).



3. I. M. Gel'fand and N. Ya. Vilenkin, *Obobshchennye funktsii. Nekotorye primeneniya garmonicheskogo analiza. Osnashchennye gil'bertovy prostranstva* [Generalized Functions. Some Applications of Harmonic Analysis. Framed Hilbert Spaces], Fizmatlit, Moscow, 1961 (in Russian).
4. V. G. Zadorozhniy, *Metody variatsionnogo analiza* [Variation Analysis Methods], Reg. i Khaot. Dinamika, Moscow–Izhevsk, 2006 (in Russian).
5. V. F. Zaytsev and A. D. Polyagin, *Spravochnik po differentsial'nykh uravneniyam s chastnymi proizvodnymi pervogo poryadka* [Handbook of First Order Partial Differential Equations], Fizmatlit, Moscow, 2003 (in Russian).
6. R. Courant, *Uravneniya s chastnymi proizvodnymi* [Partial Differential Equations], Mir, Moscow, 1964 (Russian translation).
7. V. V. Stepanov, *Kurs differentsial'nykh uravneniy* [Course of Differential Equations], MSU, Moscow, 2004 (in Russian).
8. M. V. Fedoryuk, *Obyknovennyye differentsial'nyye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], Nauka, Moscow, 1980 (in Russian).
9. A. F. Filippov, *Sbornik zadach po differentsial'nykh uravneniyam* [Collection of Problems on Differential Equations], Reg. i Khaot. Dinamika, Moscow–Izhevsk, 2000 (in Russian).
10. R. Z. Khas'minskiy, *Ustoychivost' sistem differentsial'nykh uravneniy pri sluchaynykh vozmushcheniyakh ikh parametrov* [Stability of Systems of Differential Equations under Random Perturbations of Their Parameters], Nauka, Moscow, 1969 (in Russian).
11. D. Adomian, *Stochastic Systems*, Academic press, New York–London etc., 1983.
12. R. Courant and D. Hilbert, *Methods of Mathematical Physics. Vol. II: Partial Differential Equations*, Interscience Publishers, New York–London, 1962.

V. G. Zadorozhniy  
Voronezh State University, Voronezh, Russia  
E-mail: zador@amm.vsu.ru

G. S. Tikhomirov  
Voronezh State University, Voronezh, Russia  
E-mail: tgs.gami@bk.ru



## МОДЕЛЬ ДЕФОРМАЦИЙ СТРУННОЙ СИСТЕМЫ НА ГРАФЕ-ЗВЕЗДЕ С НЕЛИНЕЙНЫМ УСЛОВИЕМ В УЗЛЕ

М. Б. ЗВЕРЕВА<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия

<sup>2</sup>Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Россия

В настоящей работе проведено исследование модели деформаций системы стилтсьесовских струн, расположенных вдоль геометрического графа-звезды, с нелинейным условием в узле. Такого рода условие возникает за счет наличия в узле ограничителя на перемещение струн под воздействием внешней нагрузки. В работе установлены необходимые и достаточные условия экстремума энергетического функционала; доказаны теоремы существования и единственности решения; проанализированы критические нагрузки, при которых происходит соприкосновение струн с ограничителем; установлена зависимость решения от длины ограничителя.

**Ключевые слова:** система стилтсьесовских струн, граф-звезда, ограничитель на перемещение струн, существование и единственность решения, анализ критических нагрузок

**Для цитирования:** М. Б. Зверева. Модель деформаций струнной системы на графе-звезде с нелинейным условием в узле // Соврем. мат. Фундам. направл. 2022. Т. 68, № 4. С. 635–652. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-635-652>

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Математические модели, описываемые в терминах ветвящегося аргумента, т. е. аргумента, принимающего значения из некоторого геометрического графа, возникают при анализе процессов в сложных системах, допускающих представление в виде набора одномерных континуумов, взаимодействующих только через концы. Такого рода объекты достаточно типичны. Например, упругие сетки, решетки стержней, электрические цепи, акустические сети, волноводы, гидравлические системы и пр. Активный математический интерес к исследованию таких задач привел к появлению многочисленных публикаций. Особенно отметим работы Ю. В. Покорного [7, 8, 20–22], В. Л. Прядиева [10], О. М. Пенкина [3, 4], А. В. Боровских [19], В. В. Провоторова [9, 24, 25], В. А. Юрко [26], М. Ш. Бурлуцкой [1, 13, 14], А. П. Хромова [2], Р. Ч. Кулаева [5, 6], J. von Below [11, 12], S. Nicaise [16]. Однако во всех этих работах рассматривались задачи с линейными граничными условиями. В данной статье для дифференциального уравнения второго порядка с импульсными особенностями в коэффициентах и правой части, порождаемыми наличием локализованных внешних нагрузок (упругих опор, сосредоточенных сил), исследуется граничная задача на геометрическом графе-звезде с нелинейным условием в узле.

Мы предполагаем, что граф-звезда  $\Gamma$  ориентирован от узла, состоит из ребер-интервалов  $\gamma_i = (0, l_i)$ , занумерованных произвольным образом ( $i = 1, 2, \dots, n$ ), и внутренней вершины 0

(узла). Здесь и далее используется терминология из [7]. Через  $\partial\Gamma$  обозначается множество граничных вершин графа  $\Gamma$ . В нашем случае им соответствуют точки  $l_i$  на каждом из ребер. Введем множества  $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \partial\Gamma$ ;  $R(\Gamma) = \bigcup_{i=1}^n \gamma_i$ .

Скалярной функцией  $z(x)$ , заданной на графе  $\Gamma$ , называется отображение  $z : \Gamma \rightarrow \mathbb{R}$ . Сужение  $z(x)$  на ребро  $\gamma_i$  будем обозначать как  $z_i(x)$ .

Исзуемая математическая модель имеет вид

$$\begin{cases} -(p_i u'_i)(x) + \int_0^x u_i dQ_i = F_i(x) - F_i(+0) - (p_i u'_i)(+0), & i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in \gamma_{i\sigma_i}, \\ \sum_{i=1}^n p_i(+0) u'_i(+0) \in N_{[-m, m]} u(0), \\ u_1(0) = u_2(0) = \dots = u_n(0) = u(0), \\ u_i(l_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \quad (1.1)$$

Здесь функция  $u(x)$  описывает отклонение жестко закрепленной в граничных вершинах  $\Gamma$  системы струн, соединенных между собой в узле, от положения равновесия, совпадающего с  $\Gamma$ , под воздействием внешней силы, определяемой с помощью функции  $F(x)$ ;  $p(x)$  характеризует упругие свойства струн;  $Q(x)$  описывает распределение упругой реакции внешней среды. Функции  $u_i(x)$  определяются в точках  $x = 0$  и  $x = l$  предельными значениями. Условие жесткого закрепления струн означает, что  $u(a) = 0$ , где  $a \in \partial\Gamma$ , или  $u_i(l_i) = 0$ . Условие соединения струн в узле имеет вид  $u_1(+0) = u_2(+0) = \dots = u_n(+0) = u(0)$ . Через  $N_{[-m, m]} u(0)$  обозначен нормальный конус в точке  $u(0)$  к отрезку  $[-m, m]$ , определяемый как числовое множество

$$N_{[-m, m]} u(0) = \{\xi : \xi(c - u(0)) \leq 0 \quad \forall c \in [-m, m]\},$$

где  $u(0) \in [-m, m]$ .

Нелинейное условие

$$\sum_{i=1}^n p_i(+0) u'_i(+0) \in N_{[-m, m]} u(0) \quad (1.2)$$

возникает за счет наличия ограничителя, представленного отрезком  $[-m, m]$ , на перемещение струн в узле. Из (1.2) вытекает, что если внешняя сила такова, что  $|u(0)| < m$ , то  $\sum_{i=1}^n p_i(+0) u'_i(+0) = 0$ . Иначе выполняются условия  $u(0) = m$ ,  $\sum_{i=1}^n p_i(+0) u'_i(+0) \geq 0$ , либо условия  $u(0) = -m$ ,  $\sum_{i=1}^n p_i(+0) u'_i(+0) \leq 0$ .

Из уравнения в (1.1) вытекает, что в каждой точке  $\xi_i \in \gamma_i$ , в которой хотя бы одна из функций  $p_i$ ,  $Q_i$ ,  $F_i$  терпит разрыв, имеет место равенство

$$-p_i(\xi_i + 0) u'_i(\xi_i + 0) + p_i(\xi_i - 0) u'_i(\xi_i - 0) + u_i(\xi_i) \Delta Q_i(\xi_i) = \Delta F_i(\xi_i), \quad (1.3)$$

где  $\Delta F_i(\xi_i) = F_i(\xi_i + 0) - F_i(\xi_i - 0)$ ,  $\Delta Q_i(\xi_i) = Q_i(\xi_i + 0) - Q_i(\xi_i - 0)$ . Здесь скачок  $\Delta Q_i(\xi_i)$  соответствует упругости опоры (пружины), закрепленной в точке  $\xi_i$  ребра с номером  $i$ ; скачок  $\Delta F_i(\xi_i)$  равен сосредоточенной в точке  $\xi_i$  силе. В данной работе мы не рассматриваем случай, когда в узле имеется упругая опора (пружина) или сосредоточена внешняя сила, однако на ребрах такие особенности допускаются.

Переменная  $x$  на каждом ребре принадлежит специальному расширению  $(0, l_i)$ , обозначаемому через  $\gamma_{i\sigma_i}$ , на котором всякая точка  $\xi_i$  разрыва хотя бы одной из функций  $p_i$ ,  $Q_i$ ,  $F_i$  заменяется парой  $\{\xi_i - 0, \xi_i + 0\}$ .

Мы предполагаем, что

- (i) функции  $p$ ,  $F$  имеют ограниченную вариацию на каждом ребре, причем,  $\inf_{R(\Gamma)} p > 0$ ;
- (ii) функция  $Q$  не убывает на каждом ребре;
- (iii) функции  $p$ ,  $F$ ,  $Q$  непрерывны в точках из  $\partial\Gamma$ ;

$$\sum_{i=1}^n (Q_i(0+0) - Q(0)) = 0, \quad \sum_{i=1}^n (F_i(0+0) - F(0)) = 0.$$

Решение  $u(x)$  задачи (1.1) мы ищем в классе  $E$  абсолютно непрерывных на  $\bar{\Gamma}$  функций  $u(x)$ , производные которых  $u'(x)$  являются на каждом ребре функциями ограниченной вариации.

Модель (1.1) может быть переписана как

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\Gamma}(pu')(x) + \frac{dQ}{d\Gamma}(x)u(x) = \frac{dF}{d\Gamma}(x), & x \in R_\sigma(\Gamma), \\ \frac{d}{d\Gamma}(pu')(0) \in N_{[-m,m]}u(0), \\ u(a) = 0, & a \in \partial\Gamma, \end{cases} \quad (1.4)$$

где обозначено

$$\frac{d}{d\Gamma}(pu')(x) = \begin{cases} \frac{d}{d\sigma_i}(p_i u'_i)(x), & x \neq 0, \\ \sum_{i=1}^n p_i(+0)u'_i(+0), & x = 0, \end{cases} \quad (1.5)$$

$$\frac{dQ}{d\Gamma} = \begin{cases} \frac{dQ_i}{d\sigma_i}(x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0, \end{cases} \quad (1.6)$$

$$\frac{dF}{d\Gamma} = \begin{cases} \frac{dF_i}{d\sigma_i}(x), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (1.7)$$

Здесь знак  $\frac{d}{d\sigma_i}$  означает дифференцирование по  $\sigma_i$ -мере, порождаемой на каждом ребре графа соответствующей возрастающей функцией

$$\sigma_i(x) = x + p_i^+(x) + p_i^-(x) + Q_i(x) + F_i^+(x) + F_i^-(x),$$

где  $p_i^+(x), p_i^-(x), F_i^+(x), F_i^-(x)$  — неубывающие функции из жорданова представления функций ограниченной вариации  $p_i(x) = p_i^+(x) - p_i^-(x), F_i(x) = F_i^+(x) - F_i^-(x)$ . В точке  $x = 0$  производные  $\frac{dQ}{d\Gamma}$  и  $\frac{dF}{d\Gamma}$  определяются нулевыми значениями, поскольку мы в данной работе не рассматриваем случай, когда в узле имеется упругая опора (пружина) или сосредоточена внешняя сила. Решения  $u$  задачи (1.4) принадлежат  $E$ , поэтому условие непрерывности в узле здесь сразу включено в класс допустимых решений. Множество  $R_\sigma(\Gamma)$  представляет собой объединение по всем ребрам множеств  $\gamma_{i\sigma_i}$  с всевозможными точками разрыва  $p, Q, F$ , за исключением узла.

Модель (1.1) получена вариационным методом из задачи о минимизации функционала потенциальной энергии

$$\Phi(u) = \int_{\Gamma} \frac{pu'^2}{2} dx + \int_{\Gamma} \frac{u^2}{2} dQ - \int_{\Gamma} u dF$$

при условиях  $u(a) = 0, a \in \partial\Gamma, |u(0)| \leq m$ .

Аналог данной задачи для случая отрезка был рассмотрен в работе [15].

Статья устроена следующим образом. Во втором разделе приведены необходимые определения и результаты. В третьем разделе содержится точное описание модели и вариационное обоснование. В четвертом разделе установлены основные результаты работы. В частности, доказаны теоремы существования и единственности решения, проанализирована зависимость решения от длины ограничителя.

## 2. ИСПОЛЬЗУЕМЫЕ ПОНЯТИЯ И ФАКТЫ

Будем говорить, что определенная на ребре  $\gamma_i$  функция  $z(x)$  имеет *ограниченную вариацию* на этом ребре, если:

1. функция  $z(x)$  имеет конечные односторонние пределы в граничных точках  $x = 0$  и  $x = l_i$  ребра  $\gamma_i$ ;

2. найдется константа  $c_i$  такая, что для любого разбиения ребра  $\gamma_i$  точками  $0 = x_0^i < x_1^i < \dots < x_{n_i}^i = l_i$  сумма  $\sum_{j=0}^{n_i-1} |z(x_{j+1}^i) - z(x_j^i)| \leq c_i$ , где в граничных точках ребра функция  $z$  определяется предельными значениями.

Определенная на ребре  $\gamma_i$  функция  $z(x)$  называется *абсолютно непрерывной* на этом ребре, если для любого  $\varepsilon > 0$  найдется  $\delta > 0$  такое, что какова бы ни была конечная система принадлежащих ребру  $\gamma_i$  попарно непересекающихся интервалов  $\{(\alpha_i, \beta_i)\}_{i=1}^{n_i}$  такая, что  $\sum_{i=1}^{n_i} (\beta_i - \alpha_i) < \delta$ , то выполняется неравенство  $\sum_{j=1}^{n_i} |z(\beta_i) - z(\alpha_i)| < \varepsilon$ .

Будем называть определенную на  $\bar{\Gamma}$  функцию *абсолютно непрерывной* на  $\bar{\Gamma}$ , если она является абсолютно непрерывной на каждом ребре  $\gamma_i$  и непрерывной в узле, т. е. такой, что односторонние пределы по ребрам совпадают и их общее значение равно значению функции в узле, непрерывной в точках из  $\partial\Gamma$ .

Важную роль в настоящей статье будет играть интегро-дифференциальное уравнение вида

$$-(\tilde{p}v')(x) + \int_0^x v d\tilde{Q} = \tilde{F}(x) - \tilde{F}(0) - (\tilde{p}v')(+0), \quad x \in \overline{[0, l]}_\sigma, \tag{2.1}$$

исследуемое в работах [15, 23]. Предполагается, что функции  $\tilde{p}, \tilde{F}, \tilde{Q}$  имеют ограниченную вариацию на отрезке  $[0, l]$ , причем  $\inf_{[0, l]} \tilde{p} > 0$ ; функции  $\tilde{p}, \tilde{F}, \tilde{Q}$  непрерывны в точках  $x = 0, x = l$ . Решения уравнения (2.1) рассматриваются в классе абсолютно непрерывных на отрезке  $[0, l]$  функций, производная которых имеет ограниченную вариацию на  $[0, l]$ . В случае гладких функций  $\tilde{p}, \tilde{Q}, \tilde{F}$  уравнение (2.1) эквивалентно уравнению

$$-(\tilde{p}v)' + \tilde{Q}'v = \tilde{F}'.$$

В общем случае уравнение (2.1) содержит разрывные функции  $\tilde{p}, \tilde{F}, \tilde{Q}$  наряду с интегралом Стильтеса. Сохраняя явное присутствие скалярного аргумента, (2.1) обнаруживает и его особые значения: это те точки, в которых производная  $v'(x)$  и функции  $\tilde{p}, \tilde{F}, \tilde{Q}$  могут иметь разрыв, те значения верхнего предела в интеграле, когда этот интеграл может терять смысл. Например, если в (2.1) точка  $x$  совпадает с одной из точек  $\xi$  разрыва функции  $\tilde{Q}$ , и если при этом  $\tilde{Q}(\xi) \neq \tilde{Q}(\xi-0)$  и  $\tilde{Q}(\xi) \neq \tilde{Q}(\xi+0)$ , то соответствующее значение  $\int_0^\xi v(x)d\tilde{Q}(x)$  отлично как от  $\int_0^{\xi-0} v(x)d\tilde{Q}(x)$ , так и от  $\int_0^{\xi+0} v(x)d\tilde{Q}(x)$ , что приводит к потере смысла  $v'(\xi)$  в (2.1). При этом каждый из символов  $\int_0^{\xi-0} v d\tilde{Q}$  и  $\int_0^{\xi+0} v d\tilde{Q}$  требует дополнительных разъяснений. Например, то ли  $\int_0^{\xi-0} v d\tilde{Q}$  обозначает интеграл по интервалу  $(0, \xi)$ , то ли несобственный интеграл  $\lim_{\delta \downarrow 0} \int_0^{\xi-\delta} v d\tilde{Q}$ . Чтобы устранить отмеченные поводы для возможных недоразумений, мы проводим конструкцию, описанную в [15, 18], заменяя каждую особую точку  $\xi$  парой  $\{\xi - 0, \xi + 0\}$ .

Обозначим через  $S$  множество точек, в которых функции  $\tilde{p}, \tilde{F}, \tilde{Q}$  имеют ненулевые простые скачки, т. е. различные левый и правый пределы. Через  $\overline{[0, l]}_\sigma$  обозначим множество  $[0, l]$ , полученное заменой точек  $\xi \in S$  на соответствующие пары  $\{\xi - 0, \xi + 0\}$ . Мы полагаем, что  $\xi - 0 > x$  для всех  $x < \xi$  и  $\xi + 0 < x$  для всех  $x > \xi$ .

Множеству  $\overline{[0, l]}_\sigma$  можно дать следующее корректное определение как одномерному метрическому пространству. Рассмотрим жорданово представление функций ограниченной вариации  $\tilde{p}, \tilde{Q}, \tilde{F}$  в виде  $\tilde{p} = \tilde{p}^+ - \tilde{p}^-, \tilde{Q} = \tilde{Q}^+ - \tilde{Q}^-, \tilde{F} = \tilde{F}^+ - \tilde{F}^-$ . Обозначим через  $\sigma(x)$  функцию

$$\sigma(x) = x + \tilde{p}^+(x) + \tilde{p}^-(x) + \tilde{Q}^+(x) + \tilde{Q}^-(x) + \tilde{F}^+(x) + \tilde{F}^-(x). \tag{2.2}$$

Не ограничивая общности, можем считать, что функция  $\sigma(x)$  имеет разрывы только в точках из  $S$ . Введем на множестве  $[0, l] \setminus S$  метрику  $\rho(x, y) = |\sigma(x) - \sigma(y)|$ . Если  $S \neq \emptyset$ , то это метрическое пространство, очевидно, не является полным. Его стандартное метрическое пополнение с точностью до изоморфизма совпадает с  $\overline{[0, l]}_\sigma$ , индуцируя в нем топологию.

Таким образом, мы рассматриваем уравнение (2.1) на множестве значений  $x$  из  $\overline{[0, l]}_\sigma$ , не допуская тем самым в (2.1) значения  $x$  из  $S$ . На  $\overline{[0, l]}_\sigma$  значения  $\tilde{p}(\xi \pm 0)$ ,  $\tilde{Q}(\xi \pm 0)$  и  $\tilde{F}(\xi \pm 0)$ , которые были на  $[0, l]$  предельными, оказываются собственными значениями в соответствующих точках из  $\overline{[0, l]}_\sigma$ . Непрерывность функции  $v(\cdot)$  позволяет сохранять обычный смысл интеграла Римана—Стилтьеса для интегрального слагаемого в (2.1) при  $x = \xi - 0$  и  $x = \xi + 0$ , беря в качестве собственных значения, бывшие ранее предельными.

Таким образом, уравнение (2.1) нами рассматривается как бы двухслойно: нижний уровень — для значений  $x \in [0, l]$ , если речь идет о самих решениях  $v(x)$  (под знаком интеграла), и второй уровень — для значений  $x$  в тождестве (2.1), где  $x \in \overline{[0, l]}_\sigma$ .

Заметим, что в каждой точке  $\xi \in S$  имеет место равенство

$$-\tilde{p}(\xi + 0)v'(\xi + 0) + \tilde{p}(\xi - 0)v'(\xi - 0) + v(\xi)\Delta\tilde{Q}(\xi) = \Delta\tilde{F}(\xi).$$

При этом, согласно [23, теорема 1.4],

$$\begin{aligned} v'(\xi + 0) &= \lim_{x \rightarrow \xi + 0} v'(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0+0} \frac{v(\xi + \varepsilon) - v(\xi)}{\varepsilon} = v'_+(\xi), \\ v'(\xi - 0) &= \lim_{x \rightarrow \xi - 0} v'(x) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0-0} \frac{v(\xi + \varepsilon) - v(\xi)}{\varepsilon} = v'_-(\xi). \end{aligned}$$

Зафиксируем номер произвольного ребра  $i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Основным объектом в настоящей статье является уравнение

$$-(p_i u'_i)(x) + \int_0^x u_i dQ_i = F_i(x) - F_i(+0) - (p_i u'_i)(+0), \quad x \in \gamma_{i\sigma_i},$$

в котором функции  $p_i$ ,  $Q_i$ ,  $F_i$  доопределены на отрезок  $[0, l_i]$  предельными значениями

$$\sigma_i(x) = x + p_i^+(x) + p_i^-(x) + Q_i(x) + F_i^+(x) + F_i^-(x),$$

$\gamma_{i\sigma_i} = \overline{[0, l_i]}_{\sigma_i}$ . Заметим, что полученное уравнение может быть продифференцировано по  $\sigma_i$ -мере, порождаемой на каждом ребре соответствующей возрастающей функцией  $\sigma_i(x)$ . Имеем

$$-\frac{d}{d\sigma_i}(p_i u'_i)(x) + \frac{dQ_i}{d\sigma_i}(x)u_i(x) = \frac{dF_i}{d\sigma_i}(x), \quad x \in \gamma_{i\sigma_i} \cup S(\sigma_i),$$

где  $S(\sigma_i)$  — множество точек разрыва функции  $\sigma_i(x)$ . Обозначив через  $R_\sigma(\Gamma) = (\bigcup_{i=1}^n (\gamma_{i\sigma_i} \cup S(\sigma_i))) \setminus \{0\}$ , можем записать  $n$  уравнений в едином виде

$$-\frac{d}{d\Gamma}(p u')(x) + u(x)\frac{dQ}{d\Gamma}(x) = \frac{dF}{d\Gamma}(x), \quad x \in R_\sigma(\Gamma) \quad (2.3)$$

где обозначено  $\frac{d}{d\Gamma}(p u')(x) = \frac{d}{d\sigma_i}(p_i u'_i)(x)$ ,  $\frac{dQ}{d\Gamma}(x) = \frac{dQ_i}{d\sigma_i}(x)$ ,  $\frac{dF}{d\Gamma}(x) = \frac{dF_i}{d\sigma_i}(x)$  при  $x \neq 0$ .

Далее нам понадобятся следующие результаты.

**Лемма 2.1** (см. [15, лемма 3.1]). Пусть  $A(x)$  является функцией ограниченной вариации на  $[0, l]$ . Пусть для любой абсолютно непрерывной на  $[0, l]$  функции  $h(x)$ , производная которой  $h'(x)$  имеет ограниченную вариацию на  $[0, l]$ , удовлетворяющей условиям  $h(0) = h(l) = 0$ , выполняется равенство

$$\int_0^l A dh = 0. \quad (2.4)$$

Тогда

$$A(x - 0) = A(x + 0) \equiv \text{const}$$

для всех  $x \in (0, l)$ .

**Теорема 2.1** (см. [23, теорема 1.5]). Для любых чисел  $u_0, v_0$  и для любой точки  $x_0 \in \overline{[0, l]}_\sigma$  задача

$$\begin{cases} -(\tilde{p}v')(x) + (\tilde{p}v')(0) + \int_0^x v d\tilde{Q} = \tilde{F}(x) - \tilde{F}(0), x \in \overline{[0, l]}_\sigma, \\ v(x_0) = v_0, \\ v'(x_0) = w_0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Рассмотрим однородное уравнение

$$-(\tilde{p}v')(x) + (\tilde{p}v')(0) + \int_0^x v d\tilde{Q} = 0. \quad (2.5)$$

**Лемма 2.2** (см. [23, лемма 1.1]). Пространство решений уравнения (2.5) двумерно.

**Лемма 2.3** (см. [23, предложение 2.2]). Пусть функция  $\tilde{Q}$  не убывает на  $[0, l]$ . Тогда каждое нетривиальное решение уравнения (2.5) может иметь на  $[0, l]$  не более одного нуля.

**Теорема 2.2** (см. [23, теорема 2.1]). Для любой пары решений  $\varphi_1, \varphi_2$  уравнения (2.5) выполняется

$$p(x)(\varphi_1(x)\varphi_2'(x) - \varphi_2(x)\varphi_1'(x)) \equiv \text{const}$$

на  $\overline{[0, l]}_\sigma$ .

Пусть задано замкнутое выпуклое множество  $G \subset H$ , где  $H$  — гильбертово пространство. Пусть  $x \in G$ . Нормальным конусом в точке  $x$  ко множеству  $G$  называется множество

$$N_G(x) = \{\xi \in H : \langle \xi, c - x \rangle \leq 0 \quad \forall c \in G\}.$$

Заметим, что если  $x$  — внутренняя точка  $G$ , то  $N_G(x) = \{0\}$ . Если  $G = [-m, m]$ , где  $m > 0$ , то  $N_G(m) = [0, +\infty)$ ,  $N_G(-m) = (-\infty, 0]$ .

### 3. ВАРИАЦИОННАЯ МОТИВАЦИЯ ПОДХОДА

Пусть точки  $O, A_1, A_2, \dots, A_n$  принадлежат горизонтальной плоскости  $\pi$ . Рассмотрим механическую систему, состоящую из  $n$  струн, соединенных между собой в одной точке, которые в положении равновесия совпадают с отрезками  $OA_1, OA_2, \dots, OA_n$ . Под воздействием внешней силы, направленной перпендикулярно плоскости  $\pi$ , струны отклоняются от равновесного положения. При этом предполагается, что отклонение всех точек струн параллельно прямой, перпендикулярной плоскости  $\pi$ . Введем систему координат, чтобы описать процесс деформаций. Ось  $Ox$  для  $i$ -й струны ( $i = 1, 2, \dots, n$ ) содержит отрезок  $OA_i$  и направлена от  $O$  к  $A_i$ . Ось  $Oy$  направлена перпендикулярно к плоскости  $\pi$  и проходит через точку  $O$ . Таким образом, точке  $O$  соответствует начало координат. Точка  $A_i$  имеет на своей оси  $Ox$  координату  $l_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Граф-звезда  $\Gamma$ , вдоль которого в положении равновесия расположена струнная система, ориентирован от узла и состоит из ребер-интервалов  $\gamma_i = (0, l_i)$  и внутренней вершины  $0$  (узла). Через  $\partial\Gamma$  обозначается множество граничных вершин графа  $\Gamma$ ;  $\bar{\Gamma} = \Gamma \cup \partial\Gamma$ .

Обозначим через  $u(x)$  определенную на  $\bar{\Gamma}$  функцию, описывающую отклонение струнной системы от положения равновесия под воздействием внешней силы, определяемой с помощью функции  $F(x)$ . Будем предполагать, что струнная система жестко закреплена в граничных вершинах, что означает выполнение условий  $u(a) = 0$ ,  $a \in \partial\Gamma$ . Сужения  $u_i(x)$  функции  $u(x)$  на ребра определяют деформации каждой из струн; в качестве аргумента мы используем натуральный параметр, т. е. расстояние от соответствующей точки до общего узла. Обозначим через  $F_i(x)$  сужение  $F(x)$  на ребро  $\gamma_i$ . Физический смысл  $F_i(x)$  — сила, приложенная на участок  $(0, x]$  соответствующего ребра.

Дополнительно мы предполагаем, что в узле вдоль оси  $Oy$  установлен ограничитель на перемещение струн, представленный отрезком  $[-m, m]$ . Таким образом, имеется условие  $|u(0)| \leq m$ . В зависимости от приложенной внешней силы, узловая точка струнной системы либо остается

внутри интервала  $(-m, m)$ , либо касается границ ограничителя. Опишем эту ситуацию в форме единой модели.

Согласно [21, 22], функционал потенциальной энергии для системы стилтьесовских струн имеет вид

$$\Phi(u) = \int_{\Gamma} \frac{pu^2}{2} dx + \int_{\Gamma} \frac{u^2}{2} dQ - \int_{\Gamma} u dF. \quad (3.1)$$

Пусть функции  $p, Q, F$  удовлетворяют условиям (i), (ii), (iii). Поскольку в данной работе мы не рассматриваем случай, когда в узле имеется упругая опора (пружина) или сосредоточена внешняя сила, то интегралы по графу понимаются как соответствующие суммы интегралов Стилтеса по ребрам. Здесь первый интеграл определяет работу силы упругости струн (при малых деформациях), второй интеграл — работу силы упругости внешней среды, третий интеграл — работу внешней силы, под воздействием которой происходит процесс деформаций. Согласно принципу Лагранжа—Гамильтона, реальная форма, принятая струнной системой, минимизирует функционал  $\Phi(u)$ . При этом мы рассматриваем случай, когда выполняются условия

$$u(a) = 0, \quad a \in \partial\Gamma, \quad |u(0)| \leq m. \quad (3.2)$$

Функционал  $\Phi(u)$  с условиями (3.2) будем рассматривать на множестве  $E$  абсолютно непрерывных на  $\bar{\Gamma}$  функций  $u(x)$ , производные которых  $u'(x)$  являются на каждом ребре функциями ограниченной вариации.

Пусть функция  $u_0(x)$  минимизирует функционал  $\Phi(u)$  с условиями (3.2). Тогда

$$\Phi(u_0) \leq \Phi(u)$$

для всех  $u \in E$ , удовлетворяющих (3.2).

Рассмотрим функции  $h \in E$  такие, что  $h(a) = 0, a \in \partial\Gamma, h(0) = 0$ . Пусть  $u(x) = u_0(x) + \lambda h(x)$ , где  $\lambda$  принимает вещественные значения. Заметим, что  $u \in E, u(a) = 0, a \in \partial\Gamma, |u(0)| = |u_0(0)| \leq m$ . Тогда

$$\Phi(u_0) \leq \Phi(u_0 + \lambda h).$$

Зафиксировав  $h$ , рассмотрим функцию  $\varphi_h(\lambda)$  вещественной переменной  $\lambda$ , определяемую как  $\varphi_h(\lambda) = \Phi(u_0 + \lambda h)$ . Тогда для всех  $\lambda \in \mathbb{R}$  верно

$$\varphi_h(0) \leq \varphi_h(\lambda),$$

и по теореме Ферма  $\frac{d}{d\lambda}\varphi_h(\lambda)|_{\lambda=0} = 0$ . Последнее равенство можно переписать как

$$\int_{\Gamma} pu'_0 h' dx + \int_{\Gamma} u_0 h dQ - \int_{\Gamma} h dF = 0. \quad (3.3)$$

Обозначим через  $p_i, Q_i, F_i$  сужения  $p, Q, F$  на ребра  $\gamma_i$ . Доопределим функции  $p_i, Q_i, F_i$  в точках 0 и  $l_i$  предельными значениями. Обозначим  $g_i(x) = \int_0^x u_0 dQ_i$  ( $i = 1, 2, \dots, n$ ). Рассмотрим  $\int_{\Gamma} u_0 h dQ$ .

Имеем

$$\int_{\Gamma} u_0 h dQ = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} h_i u_{0i} dQ_i = \sum_{i=1}^n (h_i g_i)|_0^{l_i} - \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} g_i dh_i.$$

Поскольку  $h_i(l_i) = h_i(0) = 0$ , то  $\int_{\Gamma} u_0 h dQ = - \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} g_i dh_i$ . Аналогично,  $\int_{\Gamma} h dF = - \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} F_i dh_i$ . Тогда равенство (3.3) примет вид

$$\sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \left( p_i u'_{0i} - \int_0^x u_{0i} dQ_i + F_i \right) dh_i = 0. \quad (3.4)$$

Равенство (3.4) верно для всех функций  $h \in E$  таких, что

$$h_i(0) = h_i(l_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.5)$$

Рассмотрим функции  $h$  такие, что  $h_1(0) = h_1(l_1) = 0$ ,  $h_i(x) \equiv 0$  при  $i \geq 2$ . Для таких функций (3.4) примет вид

$$\int_0^{l_1} \left( p_1 u'_{01} - \int_0^x u_{01} dQ_1 + F_1 \right) dh_1 = 0. \quad (3.6)$$

Применив лемму 2.1 к равенству (3.6), получим, что

$$(p_1 u'_{01})(x) - \int_0^x u_{01} dQ_1 + F_1(x) = \text{const}, \quad (3.7)$$

что можно переписать как

$$(p_1 u'_{01})(x) - \int_0^x u_{01} dQ_1 + F_1(x) = F_1(+0) + (p_1 u'_1)(+0).$$

Аналогичными рассуждениями получаем, что верны равенства

$$-(p_i u'_{0i})(x) + \int_0^x u_{0i} dQ_i = F_i(x) - F_i(+0) - (p_i u'_{0i})(+0), \quad i = 1, 2, \dots, n. \quad (3.8)$$

Зафиксируем любое число  $c \in [-m, m]$ . Рассмотрим теперь функции  $h \in E$  такие, что  $h(a) = 0$ ,  $a \in \partial\Gamma$ ,  $h(0) = c - u_0(0)$ . Функции вида  $u = u_0 + \lambda h$ , где  $\lambda \in \mathbb{R}$ , принадлежат классу  $E$  и удовлетворяют условиям  $u(a) = 0$ ,  $a \in \partial\Gamma$ . Рассмотрим условие в узле. Имеем

$$u(0) = u_0(0) + \lambda h(0) = u_0(0) + \lambda(c - u_0(0)) = \lambda c + (1 - \lambda)u_0(0).$$

Так как  $c \in [-m, m]$ ,  $u_0(0) \in [-m, m]$ , отрезок  $[-m, m]$  — выпуклое множество, то для всех  $\lambda \in [0, 1]$  имеем  $u(0) \in [-m, m]$ . Значит, при  $\lambda \in [0, 1]$  верно неравенство

$$\Phi(u_0) \leq \Phi(u_0 + \lambda h).$$

Зафиксировав указанную выше функцию  $h$ , введем функцию  $\varphi_h(\lambda) = \Phi(u_0 + \lambda h)$ , где  $\lambda \in [0, 1]$ . Тогда

$$\varphi_h(0) \leq \varphi_h(\lambda).$$

Значит, для правой производной имеет место неравенство

$$\frac{d^+}{d\lambda} \varphi_h(\lambda)|_{\lambda=0} \geq 0,$$

т. е.

$$\sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \left( p_i u'_{0i} - \int_0^x u_{0i} dQ_i + F_i \right) dh_i + \sum_{i=1}^n h_i(0) F_i(+0) \geq 0. \quad (3.9)$$

С учетом  $h_i(l_i) = 0$ ,  $h_i(0) = h(0) = c - u_0(0)$  и равенства (3.8) перепишем неравенство (3.9) как

$$-\sum_{i=1}^n (p_i u'_{0i})(+0)(c - u_0(0)) \geq 0,$$

т. е.  $\sum_{i=1}^n (p_i u'_{0i})(+0) \in N_{[-m, m]}(u_0(0))$ .

Таким образом, доказана следующая теорема.

**Теорема 3.1.** Пусть функция  $u_0$  минимизирует функционал  $\Phi(u)$  при условиях  $u(a) = 0$ ,  $a \in \partial\Gamma$ ,  $|u(0)| \leq m$ . Тогда  $u_0(x)$  является решением задачи

$$\begin{cases} -(p_i u'_i)(x) + \int_0^x u_i dQ_i = F_i(x) - F_i(+0) - (p_i u'_i)(+0), & i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in \gamma_{i\sigma_i}, \\ \sum_{i=1}^n (p_i u'_i)(+0) \in N_{[-m, m]}(u_0(0)), \\ u_1(0) = u_2(0) = \dots = u_n(0) = u(0), \\ u_i(l_i) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$



С использованием (2.3), (1.5), (1.6), (1.7) полученная модель может быть переписана как

$$\begin{cases} -\frac{d}{d\Gamma}(pu')(x) + \frac{dQ}{d\Gamma}(x)u(x) = \frac{dF}{d\Gamma}(x), & x \in R_\sigma(\Gamma) \\ \frac{d}{d\Gamma}(pu')(0) \in N_{[-m,m]}u(0), \\ u(a) = 0, & a \in \partial\Gamma. \end{cases}$$

4. ОСНОВНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

Пусть выполнены условия (i), (ii), (iii). Рассмотрим задачу (1.1).

Решением задачи (1.1) назовем функцию  $u \in E$ , удовлетворяющую на соответствующих ребрах уравнениям (3.8) (для всех  $x \in [0, l_i]_{\sigma_i}$ ), а также удовлетворяющую условиям  $u(a) = 0, a \in \partial\Gamma$  и  $\sum_{i=1}^n (p_i u'_i)(+0) \in N_{[-m,m]}u(0)$ .

**Теорема 4.1.** *Если решение задачи (1.1) существует, то оно единственно.*

*Доказательство.* Пусть  $v(x)$  и  $w(x)$  — решения задачи (1.1). Рассмотрим функцию  $u(x) = w(x) - v(x)$ . Данная функция удовлетворяет системе

$$\begin{cases} -(p_i u'_i)(x) + \int_0^x u_i dQ_i = -(p_i u'_i)(+0), & i = 1, 2, \dots, n, \\ u_i(l_i) = 0, & i = 1, 2, \dots, n. \end{cases}$$

Предположим, что для некоторого номера  $i$  функция  $u_i(x)$  отлична от нуля. Тогда, согласно лемме 2.3,  $u_i(x)$  сохраняет знак на  $[0, l_i]$ . Пусть для определенности  $u_i(x) > 0$  для всех  $x \in [0, l_i]$ . Поскольку  $u_1(0) = \dots = u_i(0) = \dots = u_n(0) = u(0)$ , то  $u_j(0) > 0$  для всех номеров  $j = 1, 2, \dots, n$ . Так как все функции  $u_j(x)$  удовлетворяют условиям  $u_j(l_j) = 0$ , то из  $u_j(0) > 0$  и леммы 2.3 следует, что  $u_j(x) > 0$  при  $x \in [0, l_j)$  ( $j = 1, 2, \dots, n$ ), при этом  $u'_j(l - 0) < 0$ . В то же время

$$-(p_j u'_j)(x) = \int_x^{l_j} u_j dQ_j - (p_j u'_j)(l_j - 0).$$

Следовательно,  $(p_j u'_j)(x) < 0$ . Тогда для всех номеров  $j = 1, 2, \dots, n$  верно  $(p_j u'_j)(+0) < 0$ .

С другой стороны, так как  $\sum_{i=1}^n (p_i w'_i)(+0) \in N_{[-m,m]}(w(0))$ ,  $\sum_{i=1}^n (p_i v'_i)(+0) \in N_{[-m,m]}(v(0))$ , то для всех  $c \in [-m, m]$  верно

$$\sum_{i=1}^n (p_i w'_i)(+0)(c - w(0)) \leq 0, \quad \sum_{i=1}^n (p_i v'_i)(+0)(c - v(0)) \leq 0.$$

Взяв  $c = v(0)$  в первом неравенстве и  $c = w(0)$  во втором неравенстве, получим

$$\sum_{i=1}^n (p_i w'_i)(+0)(v(0) - w(0)) \leq 0, \quad -\sum_{i=1}^n (p_i v'_i)(+0)(v(0) - w(0)) \leq 0.$$

Сложив последние два неравенства, имеем

$$\sum_{i=1}^n ((p_i w'_i)(+0) - (p_i v'_i)(+0))(v(0) - w(0)) \leq 0,$$

откуда следует, что  $\sum_{i=1}^n (p_i u'_i)(+0)u(0) \geq 0$ , что противоречит неравенствам  $(p_i u'_i)(+0) < 0, i = 1, 2, \dots, n, u(0) > 0$ . Аналогично, случай  $u_i(x) < 0$  на  $[0, l_i]$  не возможен. Значит,  $u(x) \equiv 0$ . Теорема доказана.  $\square$

**Теорема 4.2.** *Пусть функции  $\varphi_1^i(x)$  и  $\varphi_2^i(x)$  являются решениями однородного уравнения*

$$-(p_i u'_i)(x) + (p_i u'_i)(+0) + \int_0^x u_i dQ_i = 0 \tag{4.1}$$

и удовлетворяют условиям

$$\varphi_1^i(0) = 1, \quad \varphi_1^i(l_i) = 0; \quad \varphi_2^i(0) = 0, \quad \varphi_2^i(l_i) = 1, \quad (4.2)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ . Тогда если

$$\left| \frac{\sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} \varphi_1^j(s) dF_j(s)}{\sum_{j=1}^n p_j(+0) \varphi_1^{j'}(+0)} \right| < m,$$

то решение задачи (1.1) имеет вид

$$u_i(x) = \frac{\varphi_1^i(x)}{p_i(+0) \varphi_2^{i'}(+0)} \int_0^x \varphi_2^i(s) dF_i(s) + \frac{\varphi_2^i(x)}{p_i(+0) \varphi_2^{i'}(+0)} \int_x^{l_i} \varphi_1^i(s) dF_i(s) - \frac{\varphi_1^i(x)}{\sum_{j=1}^n p_j(+0) \varphi_1^{j'}(+0)} \left( \sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} \varphi_1^j(s) dF_j(s) \right). \quad (4.3)$$

Если

$$m + \frac{\sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} \varphi_1^j(s) dF_j(s)}{\sum_{j=1}^n p_j(+0) \varphi_1^{j'}(+0)} \leq 0,$$

то решение задачи (1.1) имеет вид

$$u_i(x) = m \varphi_1^i(x) + \frac{\varphi_1^i(x)}{p_i(+0) \varphi_2^{i'}(+0)} \int_0^x \varphi_2^i(s) dF_i(s) + \frac{\varphi_2^i(x)}{p_i(+0) \varphi_2^{i'}(+0)} \int_x^{l_i} \varphi_1^i(s) dF_i(s). \quad (4.4)$$

Если

$$m - \frac{\sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} \varphi_1^j(s) dF_j(s)}{\sum_{j=1}^n p_j(+0) \varphi_1^{j'}(+0)} \leq 0,$$

то решение задачи (1.1) имеет вид

$$u_i(x) = -m \varphi_1^i(x) + \frac{\varphi_1^i(x)}{p_i(+0) \varphi_2^{i'}(+0)} \int_0^x \varphi_2^i(s) dF_i(s) + \frac{\varphi_2^i(x)}{p_i(+0) \varphi_2^{i'}(+0)} \int_x^{l_i} \varphi_1^i(s) dF_i(s), \quad (4.5)$$

где  $i = 1, 2, \dots, n$ .

*Доказательство.* Зафиксируем любое число  $i = 1, 2, \dots, n$ . Заметим, что задача

$$\begin{cases} -(p_i \varphi_1^{i'})(x) + \int_0^x \varphi_1^i dQ_i = -(p_i \varphi_1^{i'})(+0), \\ \varphi_1^i(0) = 1, \\ \varphi_1^i(l_i) = 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение. В самом деле, применив теорему 2.1 и лемму 2.2, получим  $\varphi_1^i(x) = c_1^i u_1^i(x) + c_2^i u_2^i(x)$ , где функции  $u_1^i(x)$  и  $u_2^i(x)$  являются решениями однородного уравнения (4.1) такими, что  $u_1^i(0) = 0$ ,  $u_1^{i'}(+0) = 1$  и  $u_2^i(0) = 1$ ,  $u_2^{i'}(+0) = 0$ . Поскольку функция  $Q_i(x)$  не убывает на  $[0, l_i]$ ,  $u_1^i(0) = 0$ , то согласно лемме 2.3 функция  $u_1^i(x)$  не имеет других нулей. Из условия

$u_1^{i'}(+0) = 1$  следует, что  $u_1^i(x) > 0$  для всех  $x \in (0, l_i]$ , и в частности,  $u_1^i(l_i) > 0$ . Подставив представление для  $\varphi_1^i(x)$  в граничные условия, получим  $c_2^i = 1$ ,  $c_1^i = \frac{-u_2^i(l_i)}{u_1^i(l_i)}$ . Аналогично, существует решение задачи

$$\begin{cases} -(p_i \varphi_2^{i'})(x) + \int_0^x \varphi_2^i dQ_i = -(p_i \varphi_2^{i'})(+0), \\ \varphi_2^i(0) = 0, \\ \varphi_2^i(l_i) = 1. \end{cases}$$

Покажем, что  $\varphi_1^{i'}(+0) \neq 0$ . Так как  $\varphi_1^i(l_i) = 0$ ,  $\varphi_1^i(0) = 1$ , то  $\varphi_1^i(x) > 0$  для всех  $x \in [0, l_i]$ . Значит,  $\varphi_1^{i'}(l_i - 0) < 0$ . Так как

$$-(p_i \varphi_1^{i'})(x) = \int_x^{l_i} \varphi_1^i dQ_i - (p_i \varphi_1^{i'})(l_i - 0),$$

то  $(p_i \varphi_1^{i'})(x) < 0$ , и в частности,  $(p_i \varphi_1^{i'})(+0) < 0$ . Так как  $\varphi_2^i(0) = 0$ ,  $\varphi_2^i(l_i) = 1$ , то  $\varphi_2^{i'}(+0) > 0$ .

Пусть

$$\left| \frac{\sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} \varphi_1^j(s) dF_j(s)}{\sum_{j=1}^n p_j(+0) \varphi_1^{j'}(+0)} \right| < m.$$

Покажем, что функции  $u_i(x)$ , определяемые равенством (4.3), составляют решение задачи (1.1).

Заметим, что

$$u_1(0) = u_2(0) = \dots = u_n(0) = -\frac{\sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} \varphi_1^j(s) dF_j(s)}{\sum_{j=1}^n p_j(+0) \varphi_1^{j'}(+0)}; \quad u_i(l_i) = 0.$$

Зафиксируем любое число  $i = 1, 2, \dots, n$ . Покажем, что во всякой точке  $\xi_i \in (0, l_i)$  разрыва функции  $F_i(x)$  верно  $u_i(\xi_i + 0) = u_i(\xi_i - 0)$ . В самом деле,

$$u_i(\xi_i + 0) - u_i(\xi_i - 0) = \frac{\varphi_1^i(\xi_i)}{p_i(+0) \varphi_2^{i'}(+0)} \varphi_2^i(\xi_i) \Delta F_i(\xi_i) - \frac{\varphi_1^i(\xi_i)}{p_i(+0) \varphi_2^{i'}(+0)} \varphi_2^i(\xi_i) \Delta F_i(\xi_i) = 0.$$

Определим значение функции  $u_i$  в точке  $x = \xi_i$  как  $u_i(\xi_i) = u_i(\xi_i + 0) = u_i(\xi_i - 0)$ .

Так как функции  $\varphi_1^i(x)$  и  $\varphi_2^i(x)$  абсолютно непрерывны и для любых  $\alpha \leq \beta$  выполняется равенство

$$\begin{aligned} u_i(\beta) - u_i(\alpha) &= \frac{1}{p_i(+0) \varphi_2^{i'}(+0)} \left( (\varphi_1^i(\beta) - \varphi_1^i(\alpha)) \int_0^\beta \varphi_2^i(s) dF_i(s) + (\varphi_2^i(\beta) - \varphi_2^i(\alpha)) \int_\beta^{l_i} \varphi_1^i(s) dF_i(s) \right) + \\ &+ \frac{1}{p_i(+0) \varphi_2^{i'}(+0)} \int_\alpha^\beta ((\varphi_1^i(\alpha) - \varphi_1^i(s)) \varphi_2^i(s) + (\varphi_2^i(s) - \varphi_2^i(\alpha)) \varphi_1^i(s)) dF_i(s) - \\ &- \frac{(\varphi_1^i(\beta) - \varphi_1^i(\alpha)) \sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} \varphi_1^j(s) dF_j(s)}{\sum_{j=1}^n p_j(+0) \varphi_1^{j'}(+0)}, \end{aligned}$$

то функция  $u_i(x)$  абсолютно непрерывна на  $[0, l_i]$ .

Покажем, что производная  $u'_i(x)$  от функции  $u_i(x)$  удовлетворяет равенству

$$u'_i(x) = \frac{\varphi_1^{i'}(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \int_0^x \varphi_2^i(s) dF_i(s) + \frac{\varphi_2^{i'}(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \int_x^{l_i} \varphi_1^i(s) dF_i(s) - \\ - \frac{\varphi_1^{i'}(x)}{\sum_{j=1}^n p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)} \left( \sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} \varphi_1^j(s) dF_j(s) \right). \quad (4.6)$$

Обозначим  $\Delta_\varepsilon u_i = u_i(x+\varepsilon) - u_i(x)$ , где  $\varepsilon > 0$ . Докажем утверждение для правой производной (для левой производной доказательство аналогично). Имеем

$$\frac{\Delta_\varepsilon u_i}{\varepsilon} = \frac{1}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \frac{\Delta_\varepsilon \varphi_1^i}{\varepsilon} \int_0^{x+\varepsilon} \varphi_2^i dF_i + \frac{1}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \frac{\Delta_\varepsilon \varphi_2^i}{\varepsilon} \int_{x+\varepsilon}^{l_i} \varphi_1^i dF_i + \\ + \frac{1}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{\varphi_1^i(x)\varphi_2^i(s) - \varphi_2^i(x)\varphi_1^i(s)}{\varepsilon} dF_i(s) - \\ - \frac{1}{\sum_{j=1}^n p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)} \frac{\Delta_\varepsilon \varphi_1^i}{\varepsilon} \left( \sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} \varphi_1^j(s) dF_j(s) \right).$$

Покажем, что

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \left( \int_{x+0}^{x+\varepsilon} \frac{\varphi_1^i(x)\varphi_2^i(s) - \varphi_2^i(x)\varphi_1^i(s)}{\varepsilon} dF_i(s) \right) = 0. \quad (4.7)$$

Имеем

$$\left| \frac{1}{\varepsilon} \int_{x+0}^{x+\varepsilon} (\varphi_1^i(x)\varphi_2^i(s) - \varphi_2^i(x)\varphi_1^i(s)) dF_i(s) \right| \leq \frac{1}{\varepsilon} \left( \max_{x \leq s \leq x+\varepsilon} |\varphi_1^i(x)\varphi_2^i(s) - \varphi_2^i(x)\varphi_1^i(s)| \right) V_{x+0}^{x+\varepsilon}(F_i),$$

где через  $V_{x+0}^{x+\varepsilon}(F_i)$  обозначена вариация функции  $F_i$  на  $[x+0, x+\varepsilon]$ . Заметим, что

$$|\varphi_1^i(x)\varphi_2^i(s) - \varphi_2^i(x)\varphi_1^i(s)| \leq \|\varphi_1^i\| \cdot |\varphi_2^i(s) - \varphi_2^i(x)| + \|\varphi_2^i\| \cdot |\varphi_1^i(x) - \varphi_1^i(s)| \leq \\ \leq \|\varphi_1^i\| \cdot \left| \int_x^s |\varphi_2^{i'}(\tau)| d\tau \right| + \|\varphi_2^i\| \cdot \left| \int_x^s |\varphi_1^{i'}(\tau)| d\tau \right|,$$

где  $\|\varphi_j^i\| = \max_{[0, l_i]} |\varphi_j^i(x)|$ ,  $j = 1, 2$ . Так как функции  $\varphi_1^i, \varphi_2^i$  абсолютно непрерывны на  $[0, l_i]$  и их производные имеют ограниченные вариации, то  $|\varphi_2^{i'}(\tau)| \leq c_{0i}$  и  $|\varphi_1^{i'}(\tau)| \leq c_{0i}$ . Значит,

$$|\varphi_1^i(x)\varphi_2^i(s) - \varphi_2^i(x)\varphi_1^i(s)| \leq (\|\varphi_1^i\| + \|\varphi_2^i\|) c_{0i} \varepsilon.$$

Следовательно,

$$\frac{1}{\varepsilon} \max_{x \leq s \leq x+\varepsilon} |\varphi_1^i(x)\varphi_2^i(s) - \varphi_2^i(x)\varphi_1^i(s)| \leq (\|\varphi_1^i\| + \|\varphi_2^i\|) c_{0i}.$$

Так как  $V_{x+0}^{x+\varepsilon}(F_i) \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow +0$ , получаем равенство (4.7).

Таким образом, равенство (4.6) доказано. Из (4.6) следует, что  $u'_i$  имеет ограниченную вариацию на  $(0, l_i)$ . Таким образом, функция  $u(x)$  принадлежит классу  $E$ .

Поскольку  $|u(0)| < m$ , покажем, что  $\sum_{i=1}^n p_i(+0)u'_i(+0) = 0$ . Имеем

$$p_i(+0)u'_i(+0) = \int_0^{l_i} \varphi_1^i(s) dF_i(s) - \frac{p_i(+0)\varphi_1^{i'}(+0)}{\sum_{j=1}^n p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)} \left( \sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} \varphi_1^j(s) dF_j(s) \right).$$

Таким образом,

$$\sum_{i=1}^n p_i(+0)u'_i(+0) = \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \varphi_1^i(s) dF_i(s) - \frac{\sum_{i=1}^n p_i(+0)\varphi_1^{i'}(+0)}{\sum_{j=1}^n p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)} \left( \sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} \varphi_1^j(s) dF_j(s) \right) = 0.$$

Зафиксировав произвольное  $i = 1, 2, \dots, n$ , покажем, что функция  $u_i(x)$  является решением уравнения из (1.1). Заметим, что

$$\begin{aligned} \int_0^x u_i(s) dQ_i(s) &= \frac{1}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \left( \int_0^x \varphi_1^i(s) \int_0^s \varphi_2^i(\tau) dF_i(\tau) dQ_i(s) + \int_0^x \varphi_2^i(s) \int_s^l \varphi_1^i(\tau) dF_i(\tau) dQ_i(s) \right) - \\ &\quad - \frac{\sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} \varphi_1^j(s) dF_j(s)}{\sum_{j=1}^n p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)} \int_0^x \varphi_1^i(s) dQ_i(s). \end{aligned}$$

Применим теорему Фубини и воспользуемся свойствами функций  $\varphi_1^i, \varphi_2^i$ . Имеем

$$\int_0^x \varphi_1^i(s) \int_0^s \varphi_2^i(\tau) dF_i(\tau) dQ_i(s) = \int_0^x \varphi_2^i(\tau) ((p_i\varphi_1^{i'})'(x) - (p_i\varphi_1^{i'})'(\tau)) dF_i(\tau);$$

$$\begin{aligned} \int_0^x \varphi_2^i(s) \int_s^{l_i} \varphi_1^i(\tau) dF_i(\tau) dQ_i(s) &= \int_0^x \varphi_1^i(\tau) (p_i(\tau)\varphi_2^{i'}(\tau) - p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)) dF_i(\tau) + \\ &\quad + \int_x^{l_i} \varphi_1^i(\tau) ((p_i\varphi_2^{i'})'(x) - p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)) dF_i(\tau) = \\ &= \int_0^x \varphi_1^i(\tau) p_i(\tau)\varphi_2^{i'}(\tau) dF_i(\tau) - p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0) \int_0^{l_i} \varphi_1^i(\tau) dF_i(\tau) + p_i(x)\varphi_2^{i'}(x) \int_x^{l_i} \varphi_1^i(\tau) dF_i(\tau). \end{aligned}$$

Согласно теореме 2.2,  $p_i(\tau)(\varphi_1^i(\tau)\varphi_2^{i'}(\tau) - \varphi_2^i(\tau)\varphi_1^{i'}(\tau)) \equiv const = p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)$ . Тогда

$$\begin{aligned} \int_0^x u_i dQ_i &= \frac{1}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \left( (p_i\varphi_1^{i'})'(x) \int_0^x \varphi_2^i(\tau) dF_i(\tau) + (p_i\varphi_2^{i'})'(x) \int_x^{l_i} \varphi_1^i(\tau) dF_i(\tau) \right) - \\ &\quad - \int_0^{l_i} \varphi_1^i(\tau) dF_i(\tau) + F_i(x) - F_i(+0) - \frac{\sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} \varphi_1^j(s) dF_j(s)}{\sum_{j=1}^n p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)} \int_0^x \varphi_1^i(s) dQ_i(s). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} -p_i(x)u'_i(x) + \int_0^x u_i dQ_i &= \\ &= F_i(x) - F_i(+0) - \int_0^{l_i} \varphi_1^i(\tau) dF_i(\tau) + \frac{p_i(+0)\varphi_1^{i'}(+0)}{\sum_{j=1}^n p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)} \left( \sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} \varphi_1^j(s) dF_j(s) \right) = \\ &= F_i(x) - F_i(+0) - p_i(+0)u'_i(+0), \end{aligned}$$

что и требовалось.

Пусть

$$m + \frac{\sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} \varphi_1^j(s) dF_j(s)}{\sum_{j=1}^n p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)} \leq 0.$$

Покажем, что функции, определяемые равенством (4.4), дают решение задачи (1.1). Проверка свойств функций  $u_i(x)$ , доказательство представления для производной

$$u'_i(x) = m\varphi_1^{i'}(x) + \frac{\varphi_1^{i'}(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \int_0^x \varphi_2^i(s) dF_i(s) + \frac{\varphi_2^{i'}(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \int_x^{l_i} \varphi_1^i(s) dF_i(s)$$

и подстановка в уравнения осуществляются аналогично предыдущему случаю. Заметим, что  $u_i(l_i) = 0$ ,  $u_i(0) = u(0) = m$ ,  $i = 1, 2, \dots, n$ . Покажем, что  $\sum_{i=1}^n p_i(+0)u'_i(+0) \in N_{[-m, m]}u(0)$ . Поскольку  $u(0) = m$ , то нужно доказать, что  $\sum_{i=1}^n p_i(+0)u'_i(+0) \geq 0$ . Имеем

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n p_i(+0)u'_i(+0) &= \sum_{i=1}^n p_i(+0) \left( m\varphi_1^{i'}(+0) + \frac{\varphi_2^{i'}(+0)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \int_0^{l_i} \varphi_1^i(s) dF_i(s) \right) = \\ &= m \sum_{i=1}^n p_i(+0)\varphi_1^{i'}(+0) + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} \varphi_1^i(s) dF_i(s) = \frac{1}{\sum_{i=1}^n p_i(+0)\varphi_1^{i'}(+0)} \left( m + \frac{\sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} \varphi_1^j(s) dF_j(s)}{\sum_{j=1}^n p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)} \right) \geq 0, \end{aligned}$$

так как  $\sum_{i=1}^n p_i(+0)\varphi_1^{i'}(+0) < 0$ .

Случай

$$m - \frac{\sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} \varphi_1^j(s) dF_j(s)}{\sum_{j=1}^n p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)} \leq 0$$

может быть рассмотрен аналогично. Теорема доказана.  $\square$

**Теорема 4.3.** Пусть  $u_0(x)$  – решение задачи (1.1). Тогда  $u_0$  минимизирует функционал  $\Phi(u)$  при условиях  $u(a) = 0$ ,  $a \in \partial\Gamma$ ,  $|u(0)| \leq m$ .

*Доказательство.* Докажем, что для любой функции  $u \in E$ , удовлетворяющей условиям  $u(a) = 0$ ,  $a \in \partial\Gamma$ ,  $|u(0)| \leq m$ , верно  $\Phi(u) - \Phi(u_0) \geq 0$ . Представим функцию  $u(x)$  как  $u(x) = u_0(x) + h(x)$ , где  $h(x) = u(x) - u_0(x)$ . Заметим, что  $h \in E$ ,  $h(a) = 0$ ,  $a \in \partial\Gamma$ . Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(u_0 + h) - \Phi(u_0) &= \int_{\Gamma} (pu'_0)h'dx + \int_{\Gamma} \frac{ph'^2}{2}dx - \int_{\Gamma} hdF + \int_{\Gamma} \frac{h^2}{2}dQ + \int_{\Gamma} hu_0dQ = \\ &= \sum_{i=1}^n h_i(0)F_i(+0) + \sum_{i=1}^n \int_0^{l_i} (p_iu'_{0i} - \int_0^x u_{0i}dQ_i + F_i)dh_i + \int_{\Gamma} \frac{h^2}{2}dQ + \int_{\Gamma} \frac{ph'^2}{2}dx = \\ &= - \sum_{i=1}^n (p_iu'_{0i})(+0)h(0) + \int_{\Gamma} \frac{h^2}{2}dQ + \int_{\Gamma} \frac{ph'^2}{2}dx \geq 0, \end{aligned}$$

так как  $h(0) = u(0) - u_0(0)$ ,  $u(0) \in [-m, m]$ ,  $\sum_{i=1}^n p_i(+0)u'_{0i}(+0) \in N_{[-m,m]}u_0(0)$ . □

**Теорема 4.4.** Пусть  $m \rightarrow 0$ . Тогда решение задачи (1.1) равномерно на  $\bar{\Gamma}$  стремится к решению задачи

$$\begin{cases} -(p_iu'_i)(x) + \int_0^x u_i dQ_i = F_i(x) - F_i(+0) - (p_iu'_i)(+0), & i = 1, 2, \dots, n, \quad x \in \gamma_{i\sigma_i}, \\ u_i(0) = 0, \\ u_i(l_i) = 0, & i = 1, 2, \dots, n. \end{cases} \tag{4.8}$$

*Доказательство.* Воспользуемся формулами из теоремы 4.2 для представления решения  $u_m(x)$  задачи (1.1). Так как  $m \rightarrow 0$ , то

$$\left| \frac{- \sum_{j=1}^n \int_0^{l_j} \varphi_1^j(s) dF_j(s)}{\sum_{j=1}^n p_j(+0)\varphi_1^{j'}(+0)} \right| \geq m.$$

Тогда для всех  $i = 1, 2, \dots, n$

$$\left| u_{im}(x) - \frac{\varphi_1^i(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \int_0^x \varphi_2^i(s) dF_i(s) + \frac{\varphi_2^i(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \int_x^{l_i} \varphi_1^i(s) dF_i(s) \right| = |m\varphi_1^i(x)| \leq c_i|m| \rightarrow 0,$$

поскольку функция  $\varphi_1^i(x)$  ограничена на  $[0, l_i]$ . Таким образом,

$$u_{im}(x) \rightrightarrows u_i(x) = \frac{\varphi_1^i(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \int_0^x \varphi_2^i(s) dF_i(s) + \frac{\varphi_2^i(x)}{p_i(+0)\varphi_2^{i'}(+0)} \int_x^{l_i} \varphi_1^i(s) dF_i(s).$$

Аналогично теореме 4.2 проверяется, что функции  $u_i(x)$  составляют решение задачи (4.8). Теорема доказана. □

**Финансовая поддержка.** Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства просвещения Российской Федерации в рамках выполнения государственного задания в сфере науки (номер темы FZGF-2020-0009); гранта РФФИ и НЦНИ в рамках научного проекта № 20-51-15003 НЦНИ-а.

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бурлуцкая М. Ш. Классическое и обобщенное решения смешанной задачи для системы уравнений первого порядка с непрерывным потенциалом// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2019. — 59, № 3. — С. 380–390.
2. Бурлуцкая М. Ш., Хромов А. П. Оператор Дирака с потенциалом специального вида и периодическими краевыми условиями// Дифф. уравн. — 2018. — 54, № 5. — С. 592–601.

3. Диаб А. Т., Калдыбекова Б. К., Пенкин О. М. О кратности собственных значений в задаче Штурма—Лиувилля на графах// Мат. заметки. — 2016. — 99, № 4. — С. 489–501.
4. Диаб А. Т., Кулешов П. А., Пенкин О. М. Оценка первого собственного значения лапласиана на графе// Мат. заметки. — 2014. — 96, № 6. — С. 885–895.
5. Кулаев Р. Ч. О свойстве неосцилляции уравнения на графе// Сиб. мат. журн. — 2016. — 57, № 1. — С. 85–97.
6. Кулаев Р. Ч., Уртаева А. А. Теоремы Штурма о распределении нулей для уравнения четвертого порядка на графе// Мат. заметки. — 2022. — 111, № 6. — С. 947–952.
7. Покорный Ю. В., Пенкин О. М., Прядиев В. Л., Боровских А. В., Лазарев К. П., Шабров С. А. Дифференциальные уравнения на геометрических графах. — М.: Физматлит, 2005.
8. Покорный Ю. В., Прядиев В. Л. Некоторые вопросы качественной теории Штурма—Лиувилля на пространственной сети// Усп. мат. наук. — 2004. — 59, № 3. — С. 315–350.
9. Провоторов В. В., Хоанг В. Н. Устойчивость трехслойной симметричной дифференциально-разностной схемы в классе суммируемых на сетеподобной области функций// Вестн. рос. ун-тов. Мат. — 2022. — 27, № 137. — С. 80–94.
10. Прядиев В. Л. Интегральный оператор, обращающий начально-краевую задачу для гиперболического уравнения на геометрическом графе// Докл. РАН. — 2008. — 423, № 6. — С. 737–739.
11. von Below J. Kirchhoff laws and diffusion on networks// Linear Algebra Appl. — 1989. — 121. — С. 692–697.
12. von Below J., Lubary J., Vasseur B. Some remarks on the eigenvalue multiplicities of the Laplacian on infinite locally finite trees// Results Math. — 2013. — 63. — С. 1331–1350.
13. Burlutskaya M. Fourier method in a mixed problem for the wave equation on a graph// Dokl. Math. — 2015. — 92, № 3. — С. 735–738.
14. Burlutskaya M. On a resolvent approach in a mixed problem for the wave equation on a graph// Mem. Differ. Equ. Math. Phys. — 2017. — 72. — С. 37–44.
15. Kamenskii M., Wen Ch.-F., Zvereva M. On a variational problem for a model of a Stieltjes string with a backlash at the end// Optimization. — 2020. — 69, № 9. — С. 1935–1959.
16. Kramar Fijavz M., Mugnolo D., Nicaise S. Dynamic transmission conditions for linear hyperbolic systems on networks// J. Evol. Equ. — 2021. — 21, № 3. — С. 3639–3673.
17. Lubary J. A., Sola-Morales J. Nonreal eigenvalues for second order differential operators on networks with circuits// J. Math. Anal. Appl. — 2002. — 275, № 1. — С. 238–250.
18. Pokornyy Yu. V. The Stieltjes integral and derivatives with respect to the measure in ordinary differential equations// Dokl. Math. — 1999. — 59, № 1. — С. 34–37.
19. Pokornyy Yu. V., Borovskikh A. V. Differential equation on networks (geometric graphs)// J. Math. Sci. — 2004. — 119, № 6. — С. 691–718.
20. Pokornyy Yu. V., Pryadiev V. L. On conditions for transmission in the Sturm—Liouville problem on a network// J. Math. Sci. — 2005. — 130, № 5. — С. 5013–5045.
21. Pokornyy Yu. V., Zvereva M. B., Bakhtina Zh. I. On Stieltjes differentials on geometric graphs// Dokl. Math. — 2008. — 78, № 3. — С. 877–879.
22. Pokornyy Yu. V., Zvereva M. B., Bakhtina Zh. I. Stieltjes differential method in the modeling of an irregular system on a geometric graph// Differ. Equ. — 2012. — 48, № 8. — С. 1103–1111.
23. Pokornyy Yu. V., Zvereva M. B., Shabrov S. A. Sturm—Liouville oscillation theory for impulsive problems// Russ. Math. Surv. — 2008. — 63, № 1. — С. 109–153.
24. Provotorov V. V., Sergeev S. M., Hoang V. N. Countable stability of a weak solution of a parabolic differential-difference system with distributed parameters on the graph// Vestn. Saint Petersburg Univ. Appl. Math. Comp. Sci. Control Processes. — 2020. — 16, № 4. — С. 402–414.
25. Provotorov V. V., Sergeev S. M., Part A. A. Solvability of hyperbolic systems with distributed parameters on the graph in the weak formulation// Vestn. Saint Petersburg Univ. Appl. Math. Comp. Sci. Control Processes. — 2019. — 15, № 1. — С. 107–117.
26. Yurko V. A. Inverse spectral problems for differential operators on spatial networks// Russ. Math. Surv. — 2016. — 71, № 3. — С. 539–584.

М. Б. Зверева

Воронежский государственный университет, Воронеж, Россия;

Воронежский государственный педагогический университет, Воронеж, Россия

E-mail: margz@rambler.ru



DOI 10.22363/2413-3639-2022-68-4-635-652

UDC 517.927.2

## A model of string system deformations on a star graph with nonlinear condition at the node

M. B. Zvereva<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Voronezh State University, Voronezh, Russia

<sup>2</sup>Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia

In this paper, a model of deformations of Stieltjes strings system located along a geometric star graph with a nonlinear condition at the node is studied. This kind of condition arises due to the presence of a limiter for the movement of strings in the node under the influence of an external load. In the present paper, the necessary and sufficient conditions for the extremum of the energy functional are established; existence and uniqueness theorems for the solution are proved; the critical loads at which the strings come into contact with the limiter are analyzed; the dependence of the solution on the limiter length is studied.

**Keywords:** Stieltjes strings system, star graph, string movement limiter, existence and uniqueness of solution, critical loads analysis

**For citation:** M. B. Zvereva, “A model of string system deformations on a star graph with nonlinear condition at the node,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2022, vol. 68, No. 4, 635–652. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-635-652>

### REFERENCES

1. M. Sh. Burlutskaya, “Klassicheskoe i obobshchennoe resheniya smeshannoy zadachi dlya sistemy uravneniy pervogo poryadka s nepreryvnym potentsialom” [Classical and generalized solutions of a mixed problem for a system of first-order equations with a continuous potential], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2019, **59**, No. 3, 380–390 (in Russian).
2. M. Sh. Burlutskaya and A. P. Khromov, “Operator Diraka s potentsialom spetsial'nogo vida i periodicheskimi kraevymi usloviyami” [Dirac operator with a potential of special form and with the periodic boundary conditions], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2018, **54**, No. 5, 592–601 (in Russian).
3. A. T. Diab, B. K. Kaldybekova, and O. M. Penkin, “O kratnosti sobstvennykh znacheniy v zadache Shturma–Liuvillya na grafakh” [On the multiplicity of eigenvalues of the Sturm–Liouville problem on graphs], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2016, **99**, No. 4, 489–501 (in Russian).
4. A. T. Diab, P. A. Kuleshov, and O. M. Penkin, “Otsenka pervogo sobstvennogo znacheniya laplasiana na grafe” [Estimate of the first eigenvalue of the Laplacian on a graph], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2014, **96**, No. 6, 885–895 (in Russian).
5. R. Ch. Kulaev, “O svoystve neostsillyatsii uravneniya na grafe” [On the nonoscillation property of an equation on a graph], *Sib. mat. zhurn.* [Sib. Math. J.], 2016, **57**, No. 1, 85–97 (in Russian).
6. R. Ch. Kulaev and A. A. Urtaeva, “Teoremy Shturma o raspredelenii nuley dlya uravneniya chetvertogo poryadka na grafe” [Sturm separation theorems for a fourth-order equation on a graph], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2022, **111**, No. 6, 947–952 (in Russian).
7. Yu. V. Pokornyy, O. M. Penkin, V. L. Pryadiev, A. V. Borovskikh, K. P. Lazarev, and S. A. Shabrov, *Differentsial'nye uravneniya na geometricheskikh grafakh* [Differential Equations on Geometric Graphs], Fizmatlit, Moscow, 2005 (in Russian).



8. Yu. V. Pokornyy and V. L. Pryadiev, “Nekotorye voprosy kachestvennoy teorii Shturma–Liuvillya na prostranstvennoy seti” [Some problems of the qualitative Sturm–Liouville theory on a spatial network], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2004, **59**, No. 3, 315–350 (in Russian).
9. V. V. Provotorov and V. N. Hoang, “Ustoychivost’ trekhslonnoy simmetrichnoy differentsial’no-raznostnoy skhemy v klasse summiruemykh na setepodobnoy oblasti funktsiy” [Stability of a three-layer symmetric differential-difference scheme in the class of functions summable on a network-like domain], *Vestn. ros. un-tov. Mat.* [Bull. Russ. Univ. Math.], 2022, **27**, No. 137, 80–94 (in Russian).
10. V. L. Pryadiev, “Integral’nyy operator, obrashchayushchiy nachal’no-kraevuyu zadachu dlya giperbolicheskogo uravneniya na geometricheskom grafe” [Integral operator inverting the initial-boundary value problem for a hyperbolic equation on a geometric graph], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2008, **423**, No. 6, 737–739 (in Russian).
11. J. von Below, “Kirchhoff laws and diffusion on networks,” *Linear Algebra Appl.*, 1989, **121**, 692–697.
12. J. von Below, J. Lubary, and B. Vasseur, “Some remarks on the eigenvalue multiplicities of the Laplacian on infinite locally finite trees,” *Results Math.*, 2013, **63**, 1331–1350.
13. M. Burlutskaya, “Fourier method in a mixed problem for the wave equation on a graph,” *Dokl. Math.*, 2015, **92**, No. 3, 735–738.
14. M. Burlutskaya, “On a resolvent approach in a mixed problem for the wave equation on a graph,” *Mem. Differ. Equ. Math. Phys.*, 2017, **72**, 37–44.
15. M. Kamenskii, Ch.-F. Wen, and M. Zvereva, “On a variational problem for a model of a Stieltjes string with a backlash at the end,” *Optimization*, 2020, **69**, No. 9, 1935–1959.
16. M. Kramar Fijavz, D. Mugnolo, and S. Nicaise, “Dynamic transmission conditions for linear hyperbolic systems on networks,” *J. Evol. Equ.*, 2021, **21**, No. 3, 3639–3673.
17. J. A. Lubary and J. Sola-Morales, “Nonreal eigenvalues for second order differential operators on networks with circuits,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2002, **275**, No. 1, 238–250.
18. Yu. V. Pokornyy, “The Stieltjes integral and derivatives with respect to the measure in ordinary differential equations,” *Dokl. Math.*, 1999, **59**, No. 1, 34–37.
19. Yu. V. Pokornyy and A. V. Borovskikh, “Differential equation on networks (geometric graphs),” *J. Math. Sci.*, 2004, **119**, No. 6, 691–718.
20. Yu. V. Pokornyy and V. L. Pryadiev, “On conditions for transmission in the Sturm–Liouville problem on a network,” *J. Math. Sci.*, 2005, **130**, No. 5, 5013–5045.
21. Yu. V. Pokornyy, M. B. Zvereva, and Zh. I. Bakhtina, “On Stieltjes differentials on geometric graphs,” *Dokl. Math.*, 2008, **78**, No. 3, 877–879.
22. Yu. V. Pokornyy, M. B. Zvereva, and Zh. I. Bakhtina, “Stieltjes differential method in the modeling of an irregular system on a geometric graph,” *Differ. Equ.*, 2012, **48**, No. 8, 1103–1111.
23. Yu. V. Pokornyy, M. B. Zvereva, and S. A. Shabrov, “Sturm–Liouville oscillation theory for impulsive problems,” *Russ. Math. Surv.*, 2008, **63**, No. 1, 109–153.
24. V. V. Provotorov, S. M. Sergeev, and V. N. Hoang, “Countable stability of a weak solution of a parabolic differential-difference system with distributed parameters on the graph,” *Vestn. Saint Petersburg Univ. Appl. Math. Comp. Sci. Control Processes*, 2020, **16**, No. 4, 402–414.
25. V. V. Provotorov, S. M. Sergeev, and A. A. Part, “Solvability of hyperbolic systems with distributed parameters on the graph in the weak formulation,” *Vestn. Saint Petersburg Univ. Appl. Math. Comp. Sci. Control Processes*, 2019, **15**, No. 1, 107–117.
26. V. A. Yurko, “Inverse spectral problems for differential operators on spatial networks,” *Russ. Math. Surv.*, 2016, **71**, No. 3, 539–584.

M. B. Zvereva

Voronezh State University, Voronezh, Russia;

Voronezh State Pedagogical University, Voronezh, Russia

E-mail: margz@rambler.ru

DOI 10.22363/2413-3639-2022-68-4-653-670

УДК 517.956.3+517.958

## ЯВНОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ В НЕВЫПУКЛОМ УГЛЕ

А. МЕРЗОН<sup>1</sup>, П. ЖЕВАНДРОВ<sup>2</sup>, Х. Э. ДЕ ЛА ПАС МЕНДЕС<sup>3</sup>, М. И. РОМЕРО РОДРИГЕС<sup>4</sup><sup>1</sup>*Instituto de Física y Matemáticas, UMSNH, Морелия, Мексика*<sup>2</sup>*Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UMSNH, Морелия, Мексика*<sup>3</sup>*Escuela Superior de Matemáticas N.2, UAGro, Сьюдад Альтамирано, Мексика*<sup>4</sup>*Facultad de Ciencias Básicas y Aplicadas, Universidad Militar Nueva Granada, Богота, Колумбия*

В этой работе мы даем явное решение краевой задачи Дирихле для уравнения Гельмгольца в невыпуклом угле с периодическими граничными данными. Мы представляем теоремы единственности и существования в соответствующем функциональном классе и даем явную формулу решения в виде интеграла Зоммерфельда. Используется метод комплексных характеристик [14].

**Ключевые слова:** уравнение Гельмгольца, невыпуклый угол, интеграл Зоммерфельда, метод комплексных характеристик

**Для цитирования:** А. Мерзон, П. Жевандров, Х. Э. Де ла Пас Мендес, М. И. Ромеро Родригес. Явное решение задачи Дирихле в невыпуклом угле // Соврем. мат. Фундам. направл. 2022. Т. 68, № 4. С. 653–670. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-653-670>

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим следующую модельную задачу Дирихле для уравнения Гельмгольца в плоском угле  $Q$  величины  $\Phi > \pi$  с комплексной частотой  $\omega \in \mathbb{C}^+ = \{\text{Im } \omega > 0\}$  и периодическими граничными данными:

$$\begin{cases} (-\Delta - \omega^2)u(y) = 0, & y \in Q, \\ u(y, 0) = e^{-ik_1 y_1}, & y_1 > 0, \\ u(y_2 \text{ ctg } \phi, y_2) = e^{\frac{-ik_2 y_2}{\sin \Phi}}, & y_2 > 0, \end{cases} \quad (1.1)$$

где  $k_1, k_2 > 0$  (см. рис. 1).

Заметим, что эта задача аналогична краевой задаче в [12, формула (23)] возникающей в задаче о нестационарной дифракции:

$$\begin{cases} (-\Delta - \omega^2)U(\omega, y) = 0, & y \in Q, \\ U(\omega, y) = -g(\omega)e^{i\omega y_1 \cos \alpha}, & y \in Q_1, \\ U(\omega, y) = -g(\omega)e^{-i\omega y_2 (\cos(\alpha+\Phi)/\sin \Phi)}, & y \in Q_2. \end{cases} \quad (1.2)$$

Однако есть существенные различия. Экспоненты в правой части этой задачи комплексные ( $\text{Im } \omega > 0$ ), поэтому соответствующие функции экспоненциально убывают при  $y_{1,2} \rightarrow +\infty$ , поскольку  $\alpha < \phi < \frac{\pi}{2}$ .

Более того, структура граничных условий в (1.2) связана с первым уравнением через общий параметр  $\omega$ . Это дает уникальную возможность свести задачу (1.2) к разностному уравнению, которое легко решается в явном виде.

Напротив, задача (1.1) имеет периодические граничные условия, которые не зависят от первого уравнения. Это приводит к тому, что соответствующее разностное уравнение не может быть решено так же просто, как в предыдущем случае, за исключением случая, когда  $\Phi = \frac{3\pi}{2}$  (см. раздел 5).

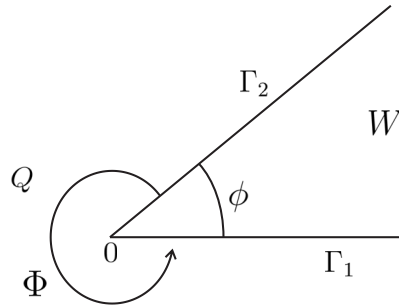


Рис. 1. Краевая задача во внешнем угле  
 FIG. 1. Boundary-value problem in an exterior corner

В свою очередь, задача (1.1) в силу линейности распадается на две задачи для  $u_1, u_2$  таких, что  $U = u_1 + u_2$ :

$$\begin{cases} -\Delta u_1(y, \omega) - \omega^2 u_1(y, \omega) = 0, & y \in Q, \\ u_1(y_1, 0) = e^{-ik_1 y_1}, & y_1 > 0, \\ u_1(y_2 \operatorname{ctg} \phi, y_2) = 0, & y_2 > 0. \end{cases} \quad (1.3)$$

$$\begin{cases} -\Delta u_2(y, \omega) - \omega^2 u_2(y, \omega) = 0, & y \in Q, \\ u_2(y_1, 0) = 0, & y_1 > 0, \\ u_2(y_2 \operatorname{ctg} \phi, y_2) = e^{-\frac{ik_2 y_2}{\sin \phi}}, & y_2 > 0. \end{cases} \quad (1.4)$$

Данная статья посвящена решению модельной задачи (1.3). Решение (1.4) получается из (1.3) простой заменой переменной (см. (2.3), где  $\theta$  заменяется на  $\theta_1 = -\theta + 4\pi - \Phi$ ).

Отметим, что краевая задача в прямом угле  $Q$  или в его дополнении и в других частных углах, величины которых соизмеримы с  $\pi$ , рассматривалась во многих работах [3–7, 18–22, 26]. В этих работах точные результаты были получены с помощью операторных методов. Граничные данные в этих работах принадлежат пространствам Соболева  $H_s(\mathbb{R})$ ,  $s > 0$ . Рассмотрим другой тип граничных данных, а именно периодические функции. Точные решения получены в явном виде, а именно в виде интегралов типа Зоммерфельда. Используем метод автоморфных функций (МАФ) на комплексных характеристиках [14]. Этот метод был разработан А. Комечем для  $\Phi < \pi$  в [10] и затем распространен на  $\Phi > \pi$  в [14, раздел 1.2 и часть 2]. Он позволяет найти все решения-распределения краевой задачи для уравнения Гельмгольца в произвольных углах с общими краевыми условиями. Он применялся, в частности, к нестационарным задачам дифракции на углах [11, 15–17, 23, 24].

Следует отметить, что существует весьма эффективный метод Зоммерфельда—Мальжинца построения решений задач дифракции в углах; с помощью этого метода было получено много важных результатов [2]. Этот метод позволяет получить решение в виде интеграла Зоммерфельда. Важное приложение этого метода для произвольного угла рассмотрено в [8]. Однако этот метод не позволяет доказать единственность, которую обычно доказывают на основе физических соображений. Мы также получаем решение в интегральной форме Зоммерфельда, используя МАФ, что дополнительно позволяет нам доказать единственность в соответствующем функциональном пространстве (см., например, [12]).

Статья организована следующим образом: в разделе 2 мы формулируем основной результат. В разделе 3 краевая задача сводится к разностному уравнению и приводятся необходимые и достаточные условия существования решения. В разделах 4 и 5 мы находим решение разностного уравнения для  $\Phi \neq \frac{3}{2}\pi$  и  $\Phi = \frac{3}{2}\pi$ , соответственно. В разделе 6 мы исследуем асимптотику подынтегральной функции для зоммерфельдовского представления решения. В разделе 7 мы даем представление решения типа Зоммерфельда и набросок доказательства основного результата.

В этой статье мы не приводим подробных доказательств, это будет сделано в другой публикации.

2. ОСНОВНОЙ РЕЗУЛЬТАТ

Будем строить решения задач (1.3) и (1.4) в виде известных интегралов Зоммерфельда, которые имеют вид

$$\int_C e^{-\omega \rho \operatorname{sh} w} v(w + i\theta) dw, \tag{2.1}$$

где  $C$  — некоторый контур на комплексной плоскости. Основную трудность задачи составляет правильное построение множителя  $v(w)$ , обеспечивающее выполнение краевых условий для (2.1).

Для формулировки основного результата нам необходимо описать подынтегральную функцию  $v(w)$  интеграла Зоммерфельда. Построение этого подынтегрального выражения является основным содержанием данной статьи.

Рассмотрим функцию  $\hat{v}_1(w)$ , заданную в виде (3.19), где  $\hat{v}_1^1(w)$  задано в виде (4.10) для  $\Phi \neq \frac{3\pi}{2}$  и (5.5) для  $\Phi = \frac{3\pi}{2}$ , а  $\hat{G}$  имеет вид (3.20). Пусть  $(\rho, \theta)$  — полярные координаты в  $\mathbb{R}_y^2$ ,

$$y_1 = \rho \cos \theta, \quad y_2 = \rho \sin \theta, \quad \rho > 0, \quad \theta \in [2\pi - \Phi, 2\pi],$$

и  $C$  — двухпетлевой контур Зоммерфельда, см. рис. 6.

**Определение 2.1.** Введем  $E$  как пространство функций  $u \in C^\infty(\overline{Q} \setminus \{0\})$ , ограниченных вместе со своими первыми производными в  $\overline{Q} \setminus B_\varepsilon(0) \forall \varepsilon > 0$  и допускающих в нуле следующую асимптотику:

$$\left. \begin{aligned} u(\rho, \theta) &= C(\theta) + o(1) \\ \nabla u(\rho, \theta) &= C_1(\theta)\rho^{-1} + C_2(\theta) + o(1) \end{aligned} \right| \rho \rightarrow 0. \tag{2.2}$$

Наш основной результат состоит в следующем утверждении.

**Теорема 2.1.**

i) Пусть  $\omega \in \mathbb{C}^+, k_1, k_2 > 0$ . Существует решение  $u_1(\rho, \theta)$  задачи (1.3), принадлежащее  $E$ , которое допускает интегральное представление Зоммерфельда

$$u_1(\rho, \theta) = \frac{1}{4\pi \sin \Phi} \int_C e^{-\omega \rho \operatorname{sh} w} \hat{v}_1(w + i\theta) dw, \tag{2.3}$$

где  $\hat{v}_1$  строится по алгоритму, представленному ниже.

ii) Решение  $u_1$  единственно в  $E$ .

**Замечание 2.1.** Интеграл в (2.3) сходится абсолютно, так как бесконечная часть  $C$  принадлежит области сверхэкспоненциального убывания  $e^{-\omega \rho \operatorname{sh} w}$  (см. рис. 6) и  $\hat{v}_1$  допускает асимптотику (6.2). Граничные значения понимаются в смысле распределений.

3. СВЕДЕНИЕ К РАЗНОСТНОМУ УРАВНЕНИЮ. НЕОБХОДИМЫЕ И ДОСТАТОЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ДАННЫХ НЕЙМАНА

Рассмотрим задачу (1.3). МАФ позволяет свести эту задачу к нахождению данных Неймана решения  $u_1$  за несколько шагов. В следующих пунктах мы рассмотрим эти шаги.

Предположим, что решение  $u_1 \in S'(Q) := \{u|_Q, u \in S'(\mathbb{R}^2)\}$ . Первым шагом МАФ является сведение задачи к дополнению первого квадранта и продолжение решения  $u_1$  на всю плоскость, см. [13, 14].

**3.1. Первый шаг: продолжение  $v_l^\beta(x_l)$  на всю плоскость  $\mathbb{R}^2$ .** Рассмотрим линейное преобразование

$$\mathcal{J}(y) : x_1 = y_1 + y_2 \operatorname{ctg} \Phi, \quad x_2 = -\frac{y_2}{\sin \Phi},$$

переводящее угол  $Q$  в прямой угол  $K := \{(x_1, x_2) : x_1 < 0 \text{ или } x_2 < 0\}$ . Это преобразование сводит систему (1.3) к задаче (3.1a)–(3.1c) в дополнении  $K$  первого квадранта для

$$v(x) := u_1(\mathcal{J}^{-1}(y)),$$

$$\begin{cases} \mathcal{H}(D)v(x) = 0, & x \in K, \\ v(x_1, 0) = e^{-ikx_1}, & x_1 > 0, \\ v(0, x_2) = 0, & x_2 > 0, \end{cases} \quad \begin{matrix} (3.1a) \\ (3.1b) \\ (3.1c) \end{matrix}$$

где

$$\mathcal{H}(D) = -\frac{1}{\sin^2 \Phi} \left[ \Delta - 2 \cos \Phi \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \right] - \omega^2. \quad (3.2)$$

Согласно [14, лемма 8.2], если  $v(x) \in S'(K)$  — решение уравнения (3.1a), то существует продолжение решения  $v$  нулем  $v_0 \in S'(\mathbb{R}^2)$  такое, что  $v_0|_K = v$ ,

$$\mathcal{H}(D)v_0(x) = \gamma(x), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad (3.3)$$

где  $\gamma \in S'(\mathbb{R}^2)$  и имеет вид

$$\begin{aligned} \gamma(x) = & \frac{1}{\sin^2 \Phi} \left[ \delta(x_2)v_1^1(x_1) + \delta'(x_2)v_1^0(x_1) + \delta(x_1)v_2^1(x_2) + \delta'(x_1)v_2^0(x_2) - \right. \\ & \left. - 2 \cos \Phi \delta(x_2) \partial_{x_1} v_1^0(x_1) - 2 \cos \Phi \delta(x_1) \partial_{x_2} v_2^0(x_2) \right], \quad x \in \mathbb{R}^2, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$v_l^\beta(x_l) \in S'(\overline{\mathbb{R}^+}) := \left\{ v \in S'(\mathbb{R}) : \text{supp } v \subset \overline{\mathbb{R}^+} \right\}.$$

Мы будем использовать продолжение преобразования Фурье  $F$ , определенного на  $S(\mathbb{R}) \subset S'(\mathbb{R}^2)$ , в  $S'(\mathbb{R}^2)$  по непрерывности:  $\varphi(x_1, x_2) \rightarrow \tilde{\varphi}(z_1, z_2)$ ,  $\varphi \in S(\mathbb{R}^2)$ ,

$$F_{x \rightarrow z}[\varphi](z) = F[\varphi(x)](z) = \tilde{\varphi}(z_1, z_2) := \iint e^{iz_1 x_1 + iz_2 x_2} \varphi(x_1, x_2) dx_1 dx_2. \quad (3.5)$$

Будем обозначать это продолжение знаком «тильда»:  $\tilde{v}(z) = F_{x \rightarrow z}[v(x)]$ ,  $v \in S'(\mathbb{R}^2)$ . Применяя это преобразование к (3.3) и учитывая, что  $\mathcal{H}(z) \neq 0, z \in \mathbb{R}^2$ , получаем

$$\tilde{v}_0(z) = \frac{\tilde{\gamma}(z)}{\mathcal{H}(z)}, \quad z \in \mathbb{R}^2, \quad \tilde{v}_0 \in S'(\mathbb{R}^2). \quad (3.6)$$

Следовательно,

$$v_0(x) = F_{x \rightarrow z}^{-1} \left[ \frac{\tilde{\gamma}(z)}{\mathcal{H}(z)} \right], \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad v(x) = v_0(x)|_K. \quad (3.7)$$

Здесь  $\tilde{\gamma}(z)$  — преобразование Фурье (3.4), и при  $z \in \mathbb{R}^2$  имеем

$$\tilde{\gamma}(z) = \frac{1}{\sin^2 \Phi} \left[ \tilde{v}_1^1(z_1) - \tilde{v}_1^0(z_1)(iz_2 - 2 \cos \Phi iz_1) + \tilde{v}_2^1(z_2) - \tilde{v}_2^0(z_2)(iz_1 - 2 \cos \Phi iz_2) \right], \quad (3.8)$$

где  $\tilde{v}_l^\beta(z_l)$  — преобразование Фурье от  $v_l^\beta(x_l)$ . Таким образом, если известно  $v_l^\beta(x_l)$ , то известно  $v$  из (3.7), и задача (3.10) сводится к нахождению четырех функций  $\tilde{v}_l^\beta(x_l)$ ,  $l = 1, 2, \beta = 0, 1$ .

В нашем случае решение задачи не принадлежит  $C^\infty(\overline{K})$  (оно принадлежит только  $C^\infty(\overline{K} \setminus 0)$ ). Однако и в этом случае решение также описывается с помощью (3.4).

Оказывается, что формула (3.4) остается справедливой и для решений в смысле распределений. Следующие две леммы описывают решение уравнения (3.1a) в терминах его данных Коши.

**Лемма 3.1** (см. [14, Лемма 8.3]). Пусть  $v \in S'(K)$  — решение уравнения (3.1a) в смысле распределений, и пусть  $v_0$  — его продолжение нулем в  $\mathbb{R}^2$ , удовлетворяющее (3.3), (3.4). Тогда существуют данные Коши

$$\left\{ \begin{aligned} v_1^\beta(x_1) &:= \partial_2^\beta v_0(x_1, 0-), & x_1 > 0, \\ v_2^\beta(x_2) &:= \partial_2^\beta v_0(0-, x_2), & x_2 > 0 \end{aligned} \right\} \quad \beta = 0, 1 \quad (3.9)$$

(здесь пределы понимаются в смысле  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^+) := \mathcal{D}'(\mathbb{R})|_{\mathbb{R}^+}$ ).

**Лемма 3.2** (см. [14, Лемма 8.4]). Пусть  $v \in S'(K)$  — решение уравнения (3.1a) в смысле пределов, заданное формулой (3.7), где  $\gamma$  определяется формулой (3.4). Тогда  $v_l^\beta|_{\mathbb{R}^+}$  являются данными Коши для  $v$ .

**Замечание 3.1.** Формула (3.7) и лемма 3.2 показывают, что достаточно найти данные Неймана  $v_1^1, v_2^1$  в (3.4), чтобы решить задачу (3.1a)-(3.1c).

Теперь воспользуемся граничными условиями (3.1b), (3.1c). Пусть  $v \in S'(K)$  — решение (3.1a)-(3.1c) и  $v_0 \in S'(\overline{K})$  — его продолжение нулем, удовлетворяющее (3.3); тогда из (3.9)

$$v_1^0(x_1)\Big|_{\mathbb{R}^+} = e^{-ikx_1}, \quad x_1 > 0, \quad v_2^0(x_2)\Big|_{\mathbb{R}^+} = 0, \quad x_2 > 0. \tag{3.10}$$

Так как  $\text{supp } v_l^0(x_l) \subset \overline{\mathbb{R}^+}$ , то по теории распределений, вообще говоря, мы имеем

$$\begin{cases} v_1^0(x_1) = \left[ e^{-ikx_1} \right]_0 + c_1^0 \delta(x_1) + c_1^1 \delta'(x_1) + \dots + c_1^m \delta^{(m)}(x_1), \\ v_2^0(x_2) = c_2^0 \delta(x_2) + c_2^1 \delta'(x_2) + \dots + c_2^m \delta^{(m)}(x_2), \end{cases}$$

для некоторого  $m \geq 0$ . Здесь  $\left[ e^{-ikx_1} \right]_0$  — продолжение нулем  $e^{ikx_1}, x_1 > 0$ , до отрицательных значений  $x_1$ . Очевидно,  $\left[ e^{-ikx_1} \right]_0 = \Theta(x-1)e^{-ikx_1}$ , где  $\Theta(x)$  — функция Хевисайда. Найдем решение (3.1a)-(3.1c) при

$$c_1^0 = \dots = c_1^m = c_2^0 = \dots = c_2^m = 0.$$

Таким образом, мы положим

$$v_1^0(x_1) = \left[ e^{-ikx_1} \right]_0 \in S'(\mathbb{R}), \quad v_2^0(x_2) = 0. \tag{3.11}$$

Подставляя  $v_1^0$  и  $v_2^0$  из (3.11) в (3.3), получаем

$$\mathcal{H}(D)v_0(x) = \gamma(x), \tag{3.12}$$

где  $\gamma$  содержит только две неизвестные функции  $v_1^1$  и  $v_2^1$ .

МАФ дает необходимые и достаточные условия на функции  $v_1^1$  и  $v_2^1$ , что позволяет найти эти функции в явном виде. Подставляя эти функции в (3.12), получаем  $v_0$  (и, следовательно,  $v$ ) с помощью (3.7), (3.4). Далее мы рассматриваем уравнение (3.12).

**3.2. Второй шаг: преобразование Фурье—Лапласа и поднятие до римановой поверхности. Уравнение связи.** В дополнение к вещественному преобразованию Фурье (3.5) мы будем использовать комплексное преобразование Фурье (или преобразование Фурье—Лапласа (ФЛ)). Пусть

$$f \in S'(\overline{\mathbb{R}^+}) := \left\{ f \in S'(\mathbb{R}) : \text{supp } f \subset \overline{\mathbb{R}^+} \right\}.$$

Тогда по теореме Пэли—Винера [27] (см. также [9, теорема 5.2])  $\tilde{f}(z) = F[f] \in \mathbb{R}$  допускает аналитическое продолжение  $\tilde{f}(z) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^+)$ ,  $\mathbb{C}^+ := \left\{ z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0 \right\}$  и  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0+} \tilde{f}(z_1 + iz_2) = \tilde{f}(z_1)$  в  $S'(\mathbb{R})$  при  $\varepsilon \rightarrow 0+$ . Так как  $v_l^\beta(x_l) \in S'(\overline{\mathbb{R}^+})$ , то существуют преобразования ФЛ

$$\tilde{v}_l^\beta(z_l) \in \mathcal{H}(\mathbb{C}^+), \quad l = 1, 2; \quad \beta = 0, 1. \tag{3.13}$$

В частности, из (3.11) имеем

$$\tilde{v}_1^0(z_1) = \frac{i}{z_1 - k}, \quad z_1 \in \overline{\mathbb{C}^+}, \tag{3.14}$$

где для  $z_1 \in \mathbb{R}$ ,  $\tilde{v}_1^0(z_1) = \lim_{\tau_1 \rightarrow 0+} \tilde{v}_1^0(z_1 + i\tau_1)$  в  $S'(\mathbb{R})$ . Следовательно, используя (3.8), получаем (поскольку  $v_2^0 \equiv 0$ )

$$\tilde{\gamma}(z) = \frac{1}{\sin^2 \Phi} \left[ \tilde{v}_1^1(z_1) + \frac{z_2 - 2 \cos \Phi z_1}{z_1 - k} + \tilde{v}_2^1(z_2) \right], \quad z \in \mathbb{R}^2. \tag{3.15}$$

В МАФ риманова поверхность комплексных нулей символа оператора (3.2) играет существенную роль, поскольку необходимое условие существования решения на  $\tilde{\gamma}(z)$  можно записать в терминах этой поверхности. Символом этого оператора является многочлен

$$\mathcal{H}(z) = \frac{1}{\sin^2 \Phi} \left( z_1^2 + z_2^2 - 2z_1 z_2 \cos \Phi \right) - \omega^2, \quad (z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2.$$

Очевидно,  $\mathcal{H}(z)$  не имеет действительных нулей, но имеет комплексные. Обозначим риманову поверхность комплексных нулей  $\mathcal{H}$  через

$$V := \{z \in \mathbb{C}^2 : \mathcal{H}(z) = 0\}.$$

Комплексную поверхность  $V$  удобно параметризовать, вводя параметр  $w \in \mathbb{C}$ .

Риманова поверхность  $V$  допускает универсальное накрытие  $\hat{V}$ , изоморфное  $\mathbb{C}$  (см. [14, гл. 15]). Пусть  $w$  — параметр на  $\hat{V} \cong \mathbb{C}$ . Тогда формулы

$$\left. \begin{cases} z_1 = z_1(w) = -i\omega \operatorname{sh} w, \\ z_2 = z_2(w) = -i\omega \operatorname{sh}(w + i\Phi) \end{cases} \right| w \in \mathbb{C} \quad (3.16)$$

описывают бесконечнолистное накрытие  $\mathbb{C}$  на  $V$ .

«Поднимем» функции  $\tilde{v}_l^\beta(z_l)$ ,  $z_l \in \mathbb{C}^+$  до  $\hat{V}$ . Для этого мы должны отождествить  $V_l^+ := \{z \in \mathbb{C}^2 : \operatorname{Im} z_l > 0\}$  с областями на  $\hat{V}$ . Это можно сделать разными способами. Например, определим для  $\omega \in \mathbb{C}^+$ ,

$$\Gamma_0 = \Gamma_0(\omega) := \left\{ w_1 + i \operatorname{arctg} \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} \operatorname{th} w_1 \right) \middle| w_1 \in \mathbb{R} \right\}.$$

Очевидно, что при  $w \in \Gamma_0$ ,  $\operatorname{Im}(z_1(w)) = 0$ . Более того,  $\operatorname{arctg} \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} \operatorname{th} w_1 \right) \xrightarrow{w_1 \rightarrow \pm\infty} \pm \operatorname{arctg} \frac{\omega_1}{\omega_2}$ . При  $\alpha \in \mathbb{R}$  определим

$$\Gamma_\alpha = \Gamma_\alpha(w) := \Gamma_0(w) + i\alpha$$

и при  $\alpha < \beta$  определим

$$V_\alpha^\beta := \left\{ w \in \mathbb{C} : \operatorname{arctg} \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} \operatorname{th} w_1 \right) < \operatorname{Im} w < \operatorname{arctg} \left( \frac{\omega_1}{\omega_2} \operatorname{th} w_1 \right) + \beta \right\}.$$

Для  $l = 1, 2$  «поднимем»  $V_l^+$  до  $\hat{V}$ . Обозначим это поднятие через  $\hat{V}_l^+ = \{w \in \hat{V} : (z_l(w)) \in V_l^+\}$ . Тогда

$$\hat{V}_1^+ = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} V_{2k\pi}^{(2k+1)\pi}, \quad \hat{V}_1^- = \bigcup_{k=-\infty}^{\infty} V_{(2k+1)\pi}^{2k\pi}, \quad V_2^\pm = V_1^\pm - 2i\Phi.$$

Обратите внимание, что  $\pm \operatorname{Im}(z_l(\omega, w)) > 0$ ,  $w \in \hat{V}_l^\pm$ . Выберем связную компоненту  $\hat{V}_1^+$ , соответствующую условию  $\operatorname{Im} z_l > 0$  при  $\hat{V}_1^+ := V_0^\pi$ ,  $\hat{V}_2^+ = V_{-\Phi}^{\pi-\Phi}$  (см. рис. 2, где  $\Gamma_\alpha(w)$  представлены для  $\omega_1 \geq 0$ ).

Теперь мы «поднимем»  $\tilde{v}_l^\beta(z_l)$  до  $\hat{V}_l^+$ ,  $l = 1, 2$ ,  $\beta = 0, 1$ , используя (3.16). Получаем из (3.14), (3.11)

$$\hat{v}_1^0(w) = \frac{i}{-i\omega \operatorname{sh} w - k}, \quad w \in \hat{V}_1^+, \quad \hat{v}_2^0(w) = 0, \quad w \in \hat{V}_2^+. \quad (3.17)$$

Далее,  $\hat{v}_l^1(w)$  — аналитические функции в  $\hat{V}_l^+$  по (3.13). Наша цель — найти неизвестные функции  $\hat{v}_l^1$ ,  $l = 1, 2$ . Имея эти функции, мы получаем  $\tilde{\gamma}(z)$  и решение  $v_0(x)$  из (3.7), (3.6).

Обратим внимание, что в случае  $\Phi > \pi$  функция  $\tilde{\gamma}(z)$ , заданная формулой (3.15), не может быть поднята до  $\hat{V}$ , так как  $\hat{\gamma}(w) := \tilde{\gamma}(z_1(w), z_2(w))$  не определена ни в одной точке  $\hat{V}$ . На самом деле  $\hat{v}_1^1(w)$  не определена в  $\hat{V}_2^+$ , а  $\hat{v}_2^1(w)$  не определена в  $\hat{V}_1^+$ , так как  $\hat{V}^* := \hat{V}_1^+ \cap \hat{V}_2^+ = \emptyset$ , см. рис. 2. В случае  $\Phi < \pi$  это пересечение непусто, и такой подъем до  $\hat{V}^*$  возможен [14]. Таким образом, в этом случае существует связь между  $\hat{v}_1^1$  и  $\hat{v}_2^1$ , порожденная (3.6), поскольку  $\mathcal{H}(z)$  имеет нули в  $\hat{V}^*$  и  $\hat{\gamma}(w)$  должно равняться нулю при  $w \in \hat{V}^*$ .

Тем не менее, аналогичная связь между  $\hat{v}_1^1$  и  $\hat{v}_2^1$  существует и в случае  $\Phi > \pi$  (см. [14, гл. 21]). Опишем соответствующую конструкцию. Функция  $\hat{\gamma}(z)$  естественным образом разбивается на два слагаемых, каждое из которых продолжается до  $\hat{V}_1^+$  и  $\hat{V}_2^+$ , соответственно. А именно,

$$\sin^2 \Phi \tilde{\gamma}(z_1, z_2) = \tilde{v}_1(z_1, z_2) + \tilde{v}_2(z_1, z_2),$$

где

$$v_1(z_1, z_2) := \tilde{v}_1^1(z_1) + \frac{z_2 - 2 \cos \Phi z_1}{z_1 - k}, \quad v_2(z_1, z_2) := \tilde{v}_2^1(z_2), \quad (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2.$$



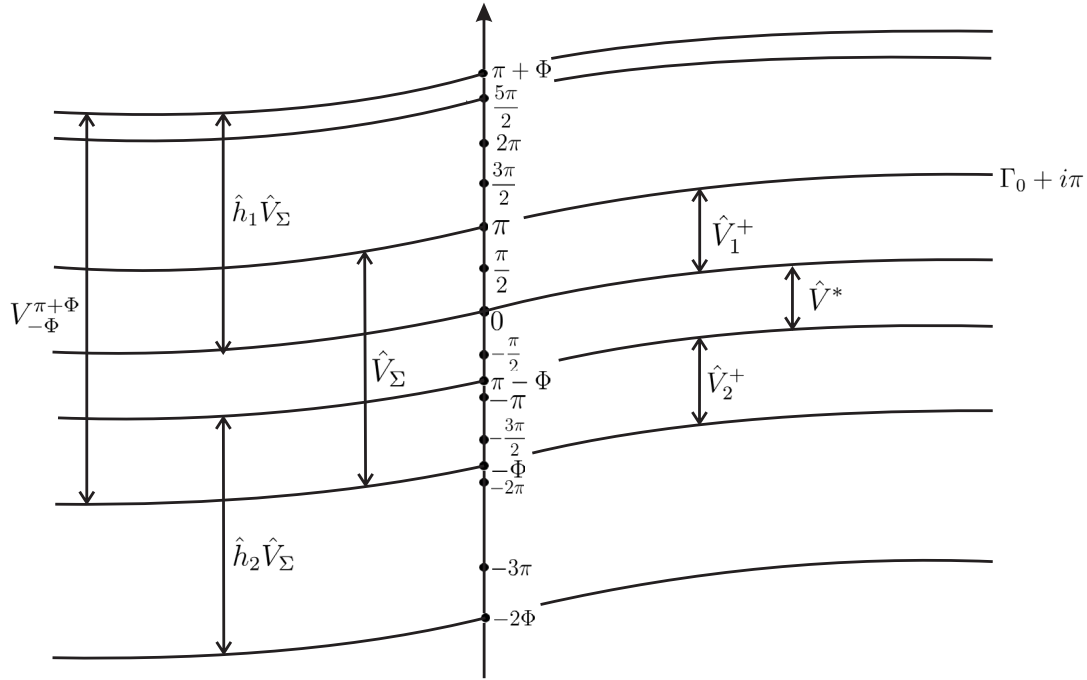


Рис. 2. Уравнение связи  
 FIG. 2. Connection equation

По теореме Пэли–Винера функция  $\tilde{v}_1(z_1, z_2)$  допускает аналитическое продолжение в  $\mathbb{C}_{z_1}^+ \times \mathbb{C}$ , а  $\tilde{v}_2(z_1, z_2)$  допускает аналитическое продолжение в  $\mathbb{C}^+ \times \mathbb{C}_{z_2}^+$ , где  $\mathbb{C}_{z_k}^+ = \{z_k \mid \text{Im } z_k > 0\}$ . Теперь мы можем «поднять»  $\tilde{v}_1$  и  $\tilde{v}_2$  до римановой поверхности  $\hat{V}$  по формулам (3.16). Получаем

$$\hat{v}_1(w) = \hat{v}_1^1(w) + \omega \text{sh}(w - i\Phi) \hat{v}_1^0(w), \quad w \in \hat{V}_1^+, \quad \hat{v}_2(w) = \hat{v}_2^1(w), \quad w \in \hat{V}_2^+. \quad (3.18)$$

Далее из (3.18), (3.17) имеем

$$\hat{v}_1(w) = \hat{v}_1^1(w) - \hat{G}(w), \quad w \in \hat{V}_1^+, \quad (3.19)$$

где

$$\hat{G}(w) := \frac{i\omega \text{sh}(w - i\Phi)}{i\omega \text{sh } w + k}, \quad w \in \mathbb{C}. \quad (3.20)$$

В случае  $\Phi < \pi$  функции  $\hat{v}_1(w)$  и  $\hat{v}_2(w)$  имеют общую область определения  $\hat{V}^*$ , которая непуста, и поэтому уравнение связи имеет следующий вид (см. [14, гл. 10]):

$$\hat{v}_1(w) + \hat{v}_2(w) = 0, \quad w \in \hat{V}^*. \quad (3.21)$$

В случае  $\Phi > \pi$  область  $\hat{V}^* = \emptyset$  (см. рис. 2). Тем не менее, оказывается, что в этом случае существует связь между  $\hat{v}_1$  и  $\hat{v}_2$  такая, что (3.21) выполняется в несколько ином смысле: это уравнение верно для аналитических продолжений  $\hat{v}_1$  и  $\hat{v}_2$ . Сформулируем точно соответствующую теорему.

**Определение 3.1.** Обозначим  $\hat{V}_\Sigma := \hat{V}_1^+ \cup \hat{V}_2^+ \cup \hat{V}^*$ , где  $\hat{V}^* = V_{\pi-\Phi}^0$ . Обратим внимание, что  $\hat{V}_\Sigma = V_{-\Phi}^\pi$  (см. рис. 2).

**Теорема 3.1** (уравнение связи при  $\Phi > \pi$ , см. [14, п. 20.1, теорема 20.1]). Пусть  $v \in S'(K)$  — любое решение уравнения (3.1а) в смысле распределений. Тогда функции (3.18) допускают аналитические продолжения  $[\hat{v}_l]$  вдоль римановой поверхности  $\hat{V}$  из  $\hat{V}_1^+$  в  $\hat{V}_\Sigma$  (см. рис. 2) и

$$[\hat{v}_1(w)] + [\hat{v}_2(w)] = 0, \quad w \in \hat{V}_\Sigma. \quad (3.22)$$

**Замечание 3.2.** Используя уравнение связи (3.22), найдем  $\hat{v}_1$ . Решение  $u_1$  задачи (1.3) задается через (2.3).

**3.3. Третий шаг: сведение к разностному уравнению.** Из (3.22), (3.19) следует, что  $\hat{v}_1^1(w)$  и  $\hat{v}_2^1(w)$  допускают мероморфные продолжения в  $\hat{V}_\Sigma$  и

$$\hat{v}_1^1(w) + \hat{v}_2^1(w) = \hat{G}(w), \quad w \in \hat{V}_\Sigma. \quad (3.23)$$

Мы будем использовать следующие автоморфизмы на  $\hat{V}$  (см. [14, гл. 13] и [12, формула (73)]):

$$h_1 w = -w + \pi i, \quad h_2 w = -w + \pi i - 2i\Phi, \quad w \in \mathbb{C},$$

которые являются симметриями относительно  $i\frac{\pi}{2}$  и  $i\frac{\pi}{2} - i\Phi$ , соответственно.

Иногда мы будем использовать обозначение  $f^{h_l}(w) := f(h_l(w))$ ,  $l = 1, 2$ .

Функции  $\hat{v}_1^1$  и  $\hat{v}_2^1$  являются автоморфными функциями относительно  $h_1$  и  $h_2$ , соответственно:

$$\hat{v}_1^1(-w + \pi i) = \hat{v}_1^1(w), \quad w \in \hat{V}_1^+, \quad (3.24)$$

$$\hat{v}_2^1(-w + \pi i - 2i\Phi) = \hat{v}_2^1(w), \quad w \in \hat{V}_2^+, \quad (3.25)$$

как следует из того, что  $\hat{v}_l^1(z_l)$  зависят только от  $z_l$  и, следовательно, их поднятия  $\hat{v}_l(w)$  до  $\hat{V}_l^+$  удовлетворяют (3.24), (3.25), поскольку  $\text{sh } w$  удовлетворяет (3.24), а  $\text{sh}(w + i\Phi)$  удовлетворяет (3.25).

Благодаря этой автоморфии мы можем исключить одну неизвестную функцию в недоопределенном уравнении (3.23) и свести его к уравнению со сдвигом, см. [12]. Идея этого метода принадлежит Малышеву [1].

**Лемма 3.3.** Пусть функция  $v \in S'(\mathbb{R})$  удовлетворяет (3.1a)–(3.1c) и  $v_l^1(x_l)$ ,  $l = 1, 2$  — ее данные Неймана. Тогда соответствующие поднятия  $\hat{v}_l^1(w)$ ,  $w \in \hat{V}_l^+$ , на  $\hat{V}$  допускают мероморфные продолжения в  $\mathbb{C}$  (которые мы также обозначаем как  $\hat{v}_l^1$ ) такие, что при  $w \in \mathbb{C}$

$$\hat{v}_1^1(w) + \hat{v}_2^1(w) = \hat{G}(w), \quad (3.26)$$

а также являются  $h_l$ -автоморфными функциями,

$$\hat{v}_1^1(h_1(w)) = \hat{v}_1^1(w), \quad \hat{v}_2^1(h_2(w)) = \hat{v}_2^1(w). \quad (3.27)$$

Теперь мы сведем систему (3.26)–(3.27) к разностному уравнению (также называемому уравнением сдвига). Это сведение является частью МАФ, введенной в [1] для разностных уравнений в углах. Используется автоморфия  $\hat{v}_l^\beta$  на  $\hat{V}$  при автоморфизмах  $h_l$ , и термин МАФ связан с этим наблюдением.

При  $w \in \mathbb{C}$  определим

$$\hat{G}_2(w) := \hat{G}(w) - \hat{G}(h_2(w)) = \frac{i\omega \text{sh}(w - i\Phi)}{i\omega \text{sh } w + k} - \frac{i\omega \text{sh}(w + 3i\Phi)}{i\omega \text{sh}(w + 2i\Phi) + k}. \quad (3.28)$$

Для области  $U$  в  $\mathbb{C}$  мы будем обозначать здесь и далее через  $\mathcal{M}(U)$  множество мероморфных функций на  $U$ .

**Лемма 3.4.** Пусть  $v \in S'(K)$  удовлетворяет (3.1a)–(3.1b). Тогда выполняется уравнение связи (3.22), а функция  $\hat{v}_1^1$  принадлежит  $\mathcal{M}(\mathbb{C}) \cap \mathcal{H}(\hat{V}_1^+)$  и удовлетворяет разностному уравнению

$$\hat{v}_1^1(w) - \hat{v}_1^1(w + 2i\Phi) = \hat{G}_2(w) \quad (3.29)$$

и автоморфному условию (3.27).

Наша цель — найти  $\hat{v}_1^1(w) \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) \cap \mathcal{H}(\hat{V}_1^+)$ , для которого выполнены (3.29), (3.27) и условие  $\hat{v}_1(w) \in \mathcal{H}(\hat{V}_\Sigma)$ . Здесь  $\hat{v}_1$  задается через (3.18). В свою очередь, это условие эквивалентно условию

$$\hat{v}_1(w) = \hat{v}_1^1(w) - \hat{G}(w) \in \mathcal{H}(\hat{V}_\Sigma) \quad (3.30)$$

в силу (3.19).

В следующем пункте мы найдем необходимые и достаточные условия для  $\hat{v}_1^1$ , при которых выполняется условие (3.30).

**3.4. Необходимое и достаточное условие для  $\hat{v}_1^1$ .** Условие аналитичности (3.30), которое следует из уравнения связи (3.22), накладывает некоторые необходимые условия на полюсы функции  $\hat{v}_1^1$ , точнее, ее продолжения, полученного в лемме 3.3. Этот пункт посвящен выводу этих условий и доказательству того факта, что они также достаточны для выполнения (3.22).

Обозначим

$$P := \left\{ p_1, -p_1 \pm \pi i, p_1 + 2\pi i \right\}, \quad p_1 := \text{sh}^{-1} \left( \frac{ik}{\omega} \right) \in \Gamma_0.$$

(См. рис. 3, где положения кривых  $\Gamma_\alpha$  соответствуют случаю  $\text{Re } \omega > 0$ . В дальнейшем мы всегда будем предполагать, что это рассматривается этот случай; при  $\text{Re } \omega < 0$  построение аналогично.)

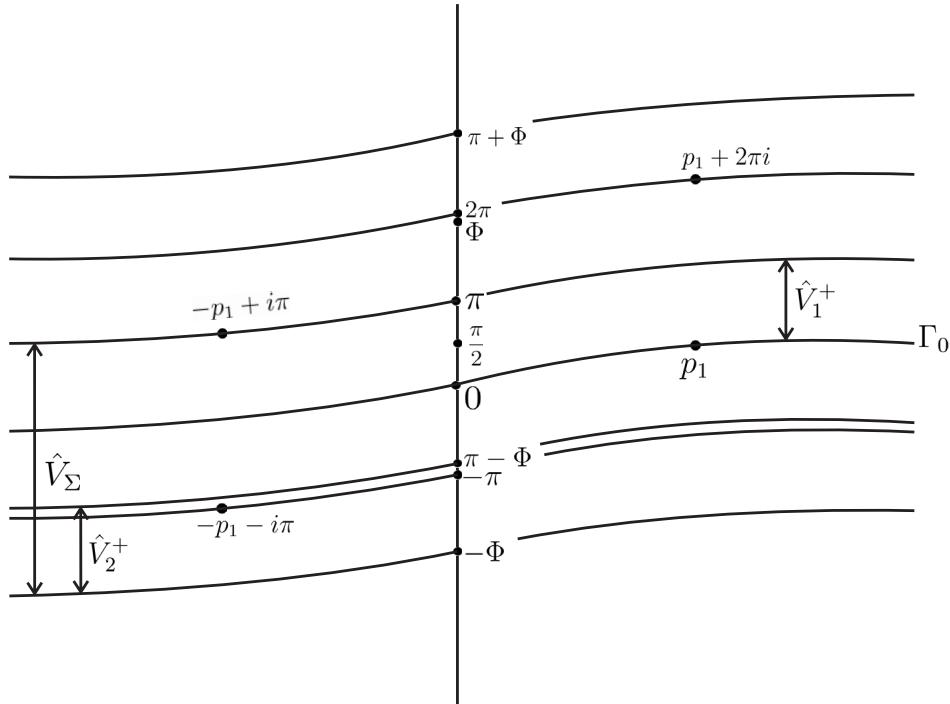


Рис. 3. Необходимые условия  
 FIG. 3. Necessary conditions

Введем следующие два важных параметра:

$$r_1 := \text{res}_{-p_1 \pm \pi i} \hat{G} := -\frac{\text{sh}(p_1 + i\Phi)}{\text{ch } p_1}, \quad r_2 := \text{res}_{p_1} \hat{G} := \frac{\text{sh}(p_1 - i\Phi)}{\text{ch } p_1}. \tag{3.31}$$

В следующем утверждении мы даем необходимое и достаточное условие для  $\hat{v}_1^1$ , гарантирующее выполнение условия (3.28).

**Предложение 3.1.** Пусть  $\hat{v}_1^1 \in \mathcal{M}(\mathbb{C}) \cap \mathcal{H}(\hat{V}_1^+)$  удовлетворяет (3.29) и (3.27). Тогда  $\hat{v}_1 \in \mathcal{H}(\hat{V}_\Sigma)$  тогда и только тогда, когда

$$\hat{v}_1^1 \in \mathcal{H}(V_{-\Phi}^{\Phi+\pi} \setminus P), \tag{3.32}$$

$$\text{res}_{p_1} \hat{v}_1^1 = r_2, \quad \text{res}_{-p_1 - \pi i} \hat{v}_1^1 = r_1. \tag{3.33}$$

**Замечание 3.3.** Из условия (3.32) следует  $\hat{v}_1^1 \in \mathcal{H}(\hat{V}_1^+)$ .

4.  $h_1$ -АВТОМОРФНОЕ РЕШЕНИЕ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ (3.29) В СЛУЧАЕ  $\Phi \neq \frac{3\pi}{2}$

В этом разделе мы строим  $h_1$ -автоморфное решение разностного уравнения (3.29), удовлетворяющее всем условиям утверждения 3.1 при  $\Phi \neq \frac{3\pi}{2}$ . Это ограничение связано со способом получения решения, использующим интеграл типа Коши. Ядро этого интеграла должно быть

аналитическим на контуре интегрирования. Оказывается, найти такое ядро можно только при  $\Phi \neq \frac{3\pi}{2}$ . К счастью, в случае  $\Phi = \frac{3\pi}{2}$  интеграл типа Коши не нужен, так как в этом случае разностное уравнение (3.29) решается элементарными методами (см. раздел 5).

**4.1. Сведение разностного уравнения к сопряженной задаче.** Обозначим

$$\hat{\Pi} := V_{\frac{\pi}{2}-\Phi}^{\frac{\pi}{2}+\Phi}, \quad \hat{\Pi}_{\pm} = \left\{ w \in \hat{\Pi} : \pm \operatorname{Re} w > 0 \right\}, \quad \partial\hat{\Pi}_+ = \hat{\beta} \cup \hat{\gamma} \cup (\hat{\beta} - 2i\Phi),$$

где

$$\hat{\beta} := \left\{ w \in \Gamma_{\frac{\pi}{2}-i\Phi} : \operatorname{Re} w \geq 0 \right\}, \quad \hat{\gamma} := \left\{ w \mid \operatorname{Re} w = 0, \operatorname{Im} w \in \left[ \frac{\pi}{2} - \Phi, \frac{\pi}{2} + \Phi \right] \right\}.$$

Будем искать решение следующей задачи: найти аналитическую функцию в  $\hat{\Pi}_+$ , граничные значения которой на  $\partial\hat{\Pi}_+$ :

$$\hat{a}_1(w + i0), \quad w \in \hat{\beta}; \quad \hat{a}_1(w + 2i\Phi - i0), \quad w \in \hat{\beta} + 2i\Phi, \quad \hat{a}_1(w + 0), \quad w \in \hat{\gamma},$$

— существуют и удовлетворяют следующим условиям сопряжения (см. рис. 4):

$$\hat{a}_1(w + i0) - \hat{a}_1(w + 2i\Phi - i0) = \hat{G}_2(w), \quad w \in \hat{\beta}, \tag{4.1}$$

$$\hat{a}_1(w + 0) = \hat{a}_1(-w + \pi i + 0), \quad w \in \hat{\gamma}. \tag{4.2}$$

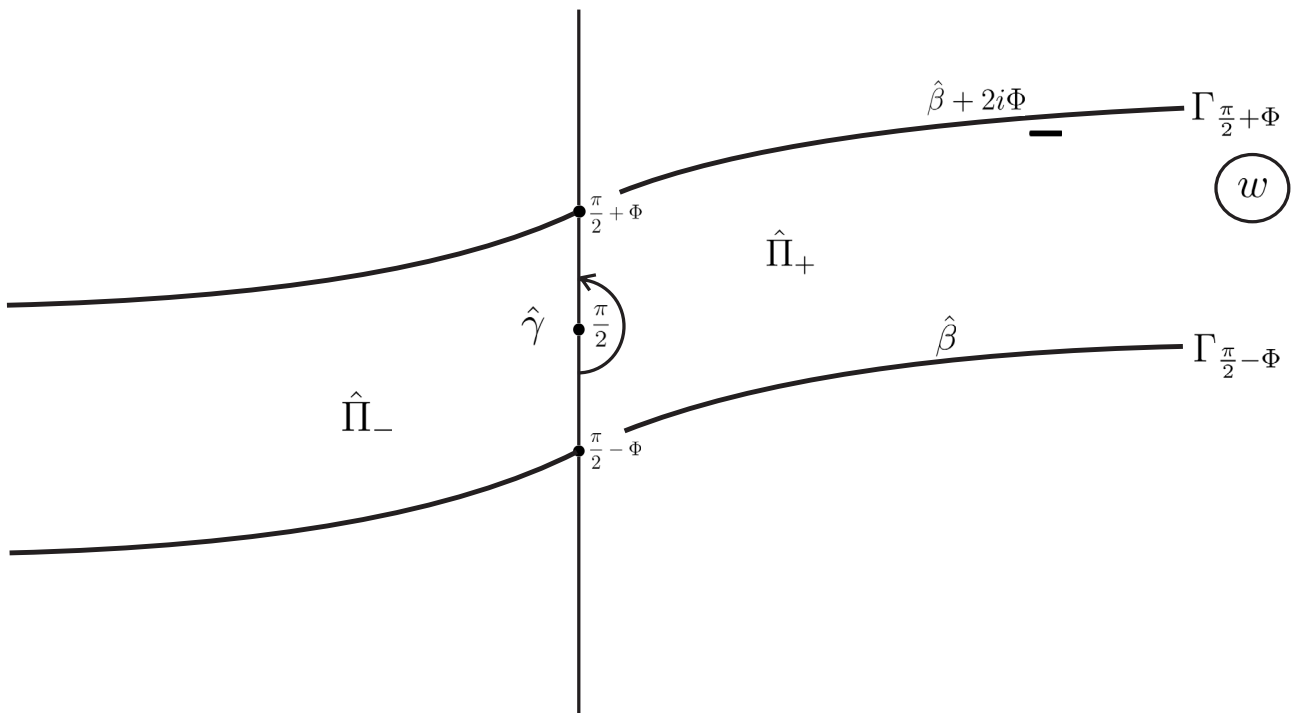


Рис. 4. Сведение к сопряженной задаче

FIG. 4. Reduction to the conjugate problem

**4.2. Решение сопряженной задачи при  $\Phi \neq \frac{3\pi}{2}$ .** Приступим к решению задачи (4.1), (4.2).

Сведем эту задачу к проблеме Римана–Гильберта. С этой целью конформно отобразим  $\hat{\Pi}_+$  на  $\check{\Pi} := \mathbb{C}^* \setminus \check{\beta}$ , где  $\mathbb{C}^*$  — сфера Римана,  $\check{\beta} := t(\beta)$ . Например, определим

$$w \mapsto t = t(w) = \operatorname{cth}^2 \left( \frac{\pi}{2\Phi} \left( w - \frac{\pi i}{2} \right) \right), \quad w \in \hat{\Pi}_+. \tag{4.3}$$

Обозначим обратное преобразование  $w(t) : \check{\Pi} \rightarrow \hat{\Pi}_+$ .

Обратим внимание, что когда  $w \in \hat{\Pi}_+$  стремится к  $\hat{\beta}$ , то  $t(w)$  стремится к  $\check{\beta}$  сверху, а когда  $w \in \hat{\Pi}_+$  стремится к  $\beta + 2i\Phi$ , то  $t(w)$  стремится к  $\check{\beta}$  снизу. Очевидно (см. рис. 5), что

$$t(\check{\gamma}) =: \check{\gamma} = [-\infty, 0], \quad t\left(\pm i\left(\frac{\pi}{2} + \Phi\right)\right) = 0, \quad t(\infty) = 1, \quad t\left(\frac{\pi i}{2}\right) = \infty.$$

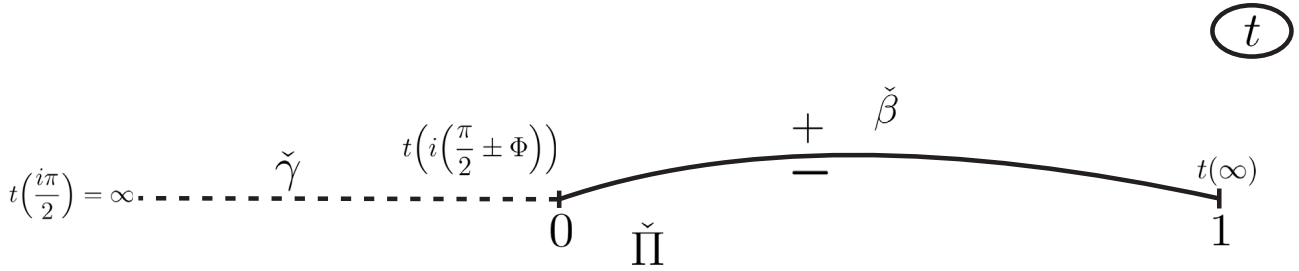


Рис. 5. Проблема Римана–Гильберта  
 FIG. 5. Riemann–Hilbert problem

Тогда задача (4.1), (4.2) эквивалентна задаче Римана–Гильберта для  $\check{a}_1(t) := \hat{a}_1(w(t)), t \in \check{\Pi}_+$ , что одновременно является задачей о скачке (см. [14, гл. 16, 18])

$$\check{a}_1(t + i0) - \check{a}_1(t - i0) = \check{G}_2(t), \quad t \in \check{\beta}. \tag{4.4}$$

Здесь  $\check{G}_2(t) = \hat{G}_2(w(t)), t \in \hat{\Pi}$ ,  $\check{a}_1(t) := \check{a}_1(w(t)), t \in \check{\Pi}_+$ ;  $\check{a}_1(t \pm i0) = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \check{a}_1(t \pm i\varepsilon)$  и для  $t \in \check{\beta}$ ,  $w \in \hat{\beta}$ ,  $w \in \hat{\Pi}_+$ .

Хорошо известно, что частное решение (4.4) задается интегралом типа Коши

$$\check{a}_1(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\check{\beta}} \frac{\check{G}_2(t')}{t' - t} dt', \quad t \in \check{\Pi}. \tag{4.5}$$

Очевидно,  $\check{a}_1(t) \in \mathcal{H}(\check{\Pi})$  и  $\check{a}_1(t) \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 0$ . Более того, существует  $\lim_{t \rightarrow 0} \check{a}_1(t), t \notin \check{\beta}$ .

В следующей лемме мы рассмотрим асимптотику (4.5) при  $t \rightarrow 1$ ; она играет важную роль в описании принадлежности решения к определенному классу, а значит, его единственности.

**Лемма 4.1.** *Функция  $\check{a}_1(t)$  допускает асимптотику*

$$\check{a}_1(t) = -\frac{\check{G}_2(1)}{2\pi i} \ln \frac{1}{t-1} + C + O(t-1), \quad t \rightarrow 1, \tag{4.6}$$

где под  $\ln \frac{1}{t-1}$  понимается некоторая ветвь, которая однозначна на плоскости, разрезанной вдоль  $\check{\beta}$ ;  $C$  зависит только от  $\check{G}_2$ ; кроме того,

$$\frac{d}{dt} \check{a}_1(t) = \frac{\sin \Phi}{\pi} \frac{1}{1-t} + \frac{\check{G}'_2(1)}{2\pi i} \ln(1-t) + C_1 + o(1),$$

где  $C, C_1$  зависят только от  $\check{G}_2$ .

**Предложение 4.1.** При  $\Phi \neq \frac{3\pi}{2}$ :

- i) Существует мероморфное в  $\mathbb{C}$  и аналитическое в  $\hat{\Pi}$  решение  $\hat{a}_1$  задачи (3.29), (3.27), заданное формулами (4.5), (4.3), (3.29).
- ii) Функция  $\hat{a}_1(w)$  допускает асимптотику

$$\begin{aligned} \hat{a}_1(w) &= \pm \frac{\sin \Phi}{\Phi} \left( w - \frac{\pi i}{2} \right) + o\left( e^{\mp \frac{\pi}{2\Phi} w} \right), \quad \operatorname{Re} w \rightarrow \pm \infty, \\ \frac{d}{dw} \hat{a}_1(w) &= \pm \frac{\sin \Phi}{\Phi} + o\left( e^{\mp \frac{\pi}{\Phi} w} \right), \quad \operatorname{Re} w \rightarrow \pm \infty, \end{aligned}$$

равномерную по  $\operatorname{Im} w$ ,  $w \in \hat{\Pi}_+$ .

- iii) Решение  $\hat{a}_1$  имеет полюсы в  $\overline{V_{-\frac{\pi}{2}-\Phi}^{\pi+\Phi}}$  при  $\Phi > \frac{3\pi}{2}$  только в  $q_1 := -p_1 - \pi i + 2i\Phi$ ,  $-q_1 + \pi i = p_1 + 2\pi i - 2i\Phi$  и  $p_1 - 2\pi i$  с вычетами

$$\operatorname{res}_{q_1} \hat{a}_1 = -r_1, \quad \operatorname{res}_{-q_1+\pi i} \hat{a}_1 = r_1, \quad \operatorname{res}_{p_1-2\pi i} \hat{a}_1 = r_2. \tag{4.7}$$

При  $\Phi \leq \frac{3\pi}{2}$  функция  $\hat{a}_1$  имеет полюсы в  $\overline{V_{-\frac{\pi}{2}-\Phi}^{\pi+\Phi}}$  только в  $p_1 + 2\pi i$ ,  $-p_1 - \pi i$  и  $-p_1 + \pi i - 2i\Phi$  с вычетами

$$\operatorname{res}_{p_1+2\pi i} \hat{a}_1 = -r_1, \quad \operatorname{res}_{-p_1-\pi i} \hat{a}_1 = r_1, \quad \operatorname{res}_{-p_1+\pi i-2i\Phi} \hat{a}_1 = r_2. \tag{4.8}$$

**4.3. Решение разностного уравнения, случай  $\Phi \neq \frac{3\pi}{2}$ .** Мы хотим преобразовать  $\hat{a}_1$  в  $\hat{v}_1^1$ ,

которое будет удовлетворять всем условиям утверждения 3.1. Для этого при  $\Phi > \frac{3\pi}{2}$ , во-первых, прибавим  $T_1$  к  $\hat{a}_1$ , удаляя полюсы  $q_1$  и  $-q_1 + \pi i$  (см. (4.7)), так как по этому утверждению функция  $\hat{v}_1^1$  должна быть аналитической в этих точках. Оказывается, можно построить функцию  $T_1$  так, чтобы она породила полюс  $-p_1 - \pi i$  с желаемым вычетом, как того требует то же утверждение.

Во-вторых, прибавим  $T_2$ , получая полюс  $p_1$  с желаемым вычетом в соответствии с тем же утверждением.

Рассмотрим

$$T_1(w) = \frac{\pi}{2\Phi} r_1 \left( \operatorname{cth} \left( \frac{\pi(w - q_1)}{2\Phi} \right) + \operatorname{cth} \left( \frac{\pi(-w + \pi i - q_1)}{2\Phi} \right) \right),$$

где  $r_1$  задано с помощью (3.33) и  $q_1 = -p_1 - \pi i + 2i\Phi$ .

Легко видеть, что функция  $T_1$  удовлетворяет следующим условиям:

$$T_1(-w + \pi i) = T_1(w), \quad T_1(w + 2i\Phi) = T_1(w). \tag{4.9}$$

Далее мы определим

$$T_2(w) := \frac{\pi}{2\Phi} r_2 \left( \operatorname{cth} \left( \frac{\pi(w - p_1)}{2\Phi} \right) + \operatorname{cth} \left( \frac{\pi(-w + \pi i - p_1)}{2\Phi} \right) \right),$$

где  $r_2$  задано по формуле (3.31). Очевидно,  $T_2$  также удовлетворяет (4.9).

Наконец, мы определим

$$\hat{v}_1^1(w) := \begin{cases} \hat{a}_1(w) + T_1(w) + T_2(w), & \Phi > \frac{3\pi}{2}, \\ \hat{a}_1(w) + T_2(w), & \Phi < \frac{3\pi}{2}, \end{cases} \tag{4.10}$$

где  $\hat{a}_1(w)$  дано в утверждении 4.1.

**Теорема 4.1.** Пусть  $\Phi \neq \frac{3\pi}{2}$ .

- i) Функция  $\hat{v}_1^1$  удовлетворяет всем условиям утверждения 3.1.

ii)  $\hat{v}_1^1(w) \in \mathcal{H}\left(\overline{V_{\frac{3\pi}{2}}}\setminus\Gamma_\pi\right)$  и имеет единственный полюс в  $-r_1 + \pi i$  от  $\Gamma_\pi$  с вычетом

$$\operatorname{res}_{-r_1+\pi i} \hat{v}_1^1 = -r_2.$$

iii)  $\hat{v}_1^1(w) \in \mathcal{M}\left(\overline{V_{-\frac{\pi}{2}-\Phi}}\right)$  и имеет единственный полюс в  $r_1 - 2\pi i$  для  $\Phi > \frac{3\pi}{2}$  с вычетом

$$\operatorname{res}_{r_1-2\pi i} \hat{v}_1^1 = r_2.$$

**Следствие 4.1.** При  $\Phi \neq \frac{3\pi}{2}$  единственный полюс  $\hat{v}_1$ , принадлежащий  $\overline{V_{-\frac{3\pi}{2}-\Phi}}$ , равен  $-r_1 + \pi i$ , при этом

$$\operatorname{res}_{-r_1+\pi i} \hat{v}_1 = 2i \sin \Phi.$$

### 5. $h_1$ -ИНВАРИАНТНОЕ РЕШЕНИЕ РАЗНОСТНОГО УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ $\Phi = \frac{3\pi}{2}$

В предыдущих разделах мы построили решение задачи (3.29), (3.27), удовлетворяющее всем условиям утверждения 3.1 при  $\Phi \neq \frac{3\pi}{2}$ .

Тем же методом можно построить решение для  $\Phi = \frac{3\pi}{2}$ . Небольшое техническое неудобство в данном случае возникает из-за того, что функция  $\check{G}_2(t)$  имеет полюс в  $\check{\beta}$ . Тем не менее, можно получить решение со свойствами, указанными в теореме 4.1.

Однако мы предпочитаем искать решение задачи в случае  $\Phi = \frac{3\pi}{2}$  другим способом. Дело в том, что в этом случае легко найти решение разностного уравнения (3.29) в *явном виде* без использования интеграла типа Коши.

Используя теорему Лиувилля, легко показать, что это элементарное решение совпадает с решением, полученным с помощью интеграла типа Коши.

В этом разделе мы строим мероморфное  $h_1$ -инвариантное решение уравнения (3.29).

**5.1. Мероморфное решение разностного уравнения при  $\Phi = \frac{3\pi}{2}$ .** В этом случае построение мероморфного решения разностного уравнения (3.29) проще, чем в случае  $\Phi \neq \frac{3\pi}{2}$ , и  $\hat{v}_1^1$  выражается через элементарные функции. В силу (3.28) при  $\Phi = \frac{3\pi}{2}$  имеем

$$G_2(w) = \frac{i\omega^2 \operatorname{sh} 2w}{\omega^2 \operatorname{sh}^2 w + k^2}. \tag{5.1}$$

Решим в этом случае разностное уравнение (3.29). Сначала мы решаем (3.29) в классе мероморфных функций. Решение легко найти интуитивно, используя  $3\pi i$ -периодичность  $G_2$ . Обозначим

$$m_1(w) := \frac{iw G_2(w)}{3\pi}.$$

Тогда в силу (5.1)  $m_1$  удовлетворяет (3.29). Конечно, это решение не единственное. Все остальные решения отличаются от него на  $3\pi i$ -периодическую функцию. Аналогично случаю  $\Phi \neq \frac{3\pi}{2}$  модифицируем это решение таким образом, чтобы оно удовлетворяло всем условиям утверждения 3.1.

Функция (5.1) не автоморфна относительно  $\hat{h}_1$ . Симметризуем ее.

Введем

$$m(w) := \frac{m_1(w) + m_1(-w + \pi i)}{2}.$$

Тогда

$$m(w) = \frac{\pi + 2iw}{6\pi} \cdot G_2(w). \tag{5.2}$$

**Лемма 5.1.** Функция  $m$  является  $h_1$ -автоморфным решением задачи (3.29).

Теперь модифицируем функцию  $m(w)$  таким образом, чтобы она удовлетворяла условиям (3.32), (3.33) утверждения 3.1. Для этого добавим к  $m$  подходящую  $3\pi i$ -периодическую функцию.

**5.2. Решение разностного уравнения при  $\Phi = \frac{3\pi}{2}$ .** Пусть

$$\begin{aligned} m_1 &:= -\frac{p_1}{3\pi} + \frac{i}{6}, & m_2 &:= -\frac{p_1}{3\pi} - \frac{i}{6}, & m_3 &:= -\frac{p_1}{3\pi} + \frac{i}{2}, \\ m_4 &:= -\frac{p_1}{3\pi} - \frac{i}{2}, & m_5 &:= -\frac{p_1}{3\pi} + \frac{5i}{6}, & m_6 &:= \frac{p_1}{3\pi} + \frac{5i}{6}. \end{aligned} \quad (5.3)$$

Итак, рассмотрим следующие функции (периодические дополнения):

$$\begin{aligned} Q_1(w) &:= \frac{i - m_1}{3} \left[ \operatorname{cth} \frac{w - p_1}{3} - \operatorname{cth} \frac{w - (-p_1 + \pi i)}{3} \right], \\ Q_2(w) &:= -\frac{m_2}{3} \left[ \operatorname{cth} \frac{w - (p_1 - \pi i)}{3} - \operatorname{cth} \frac{w - (-p_1)}{3} \right], \\ Q_3(w) &:= -\frac{m_3}{3} \left[ \operatorname{cth} \frac{w - (p_1 - \pi i)}{3} - \operatorname{cth} \frac{w - (-p_1 - \pi i)}{3} \right], \end{aligned}$$

где  $m_{1,2,3}$  определяются в (5.3). Очевидно, что функции  $Q_{1,2,3}$  являются  $3\pi i$ -периодическими и  $\hat{h}_1$ -автоморфными:

$$Q_{1,2,3}(w + 3\pi i) = Q_{1,2,3}(w), \quad Q_{1,2,3}(\hat{h}_1 w) = Q_{1,2,3}(w).$$

Наконец, определим

$$\begin{aligned} Q(w) &:= Q_1(w) + Q_2(w) + Q_3(w) = \frac{i - m_1}{3} \operatorname{cth} \frac{w - p_1}{3} - \frac{m_2 + m_3}{3} \operatorname{cth} \frac{w - (p_1 - \pi i)}{3} - \\ &- \frac{i - m_1}{3} \operatorname{cth} \frac{w - (-p_1 + \pi i)}{3} + \frac{m_2}{3} \operatorname{cth} \frac{w - (-p_1)}{3} + \frac{m_3}{3} \operatorname{cth} \frac{w - (-p_1 - \pi i)}{3}. \end{aligned} \quad (5.4)$$

Введем

$$\hat{v}_1^1(w) := m(w) + Q(w), \quad (5.5)$$

где  $m$  задается по формуле (5.2) и  $Q$  задается по формуле (5.4).

**Теорема 5.1.**

i) При  $\Phi = \frac{3\pi}{2}$  функция  $\hat{v}_1^1$  удовлетворяет всем условиям утверждения 3.1.

ii) Полюсы  $\hat{v}_1^1$  в  $V_{-\frac{5\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$  равны

$$-p_1 - \pi i, \quad -p_1 + \pi i, \quad p_1, \quad p_1 - 2\pi i$$

со следующими вычетами:

$$\operatorname{res}_{-p_1 - \pi i} \hat{v}_1^1 = i, \quad \operatorname{res}_{-p_1 + \pi i} \hat{v}_1^1 = -i, \quad \operatorname{res}_{p_1} \hat{v}_1^1 = i, \quad \operatorname{res}_{p_1 - 2\pi i} \hat{v}_1^1 = i.$$

Теперь приведем важное свойство функции  $\hat{v}_1$ , аналогичное следствию 4.1 для случая  $\Phi = \frac{3\pi}{2}$ .

**Следствие 5.1.** При  $\Phi = \frac{3\pi}{2}$  функция  $\hat{v}_1$ , заданная формулой (3.30), имеет единственный полюс в  $-p_1 + \pi i$ , принадлежащий  $V_{-\frac{5\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}$ , и вычет  $\operatorname{res}_{-p_1 + \pi i} \hat{v}_1 = -2i$ .

Напомним, что эта функция играет ключевую роль в построении представления типа Зоммерфельда для решения основной задачи. Это представление будет дано в следующем разделе.

## 6. АСИМПТОТИКА $\hat{v}_1$ НА БЕСКОНЕЧНОСТИ

Нам нужно доказать асимптотику (2.2). Для этого нужно найти асимптотику подынтегральной функции  $\hat{v}_1(w)$  на бесконечности.



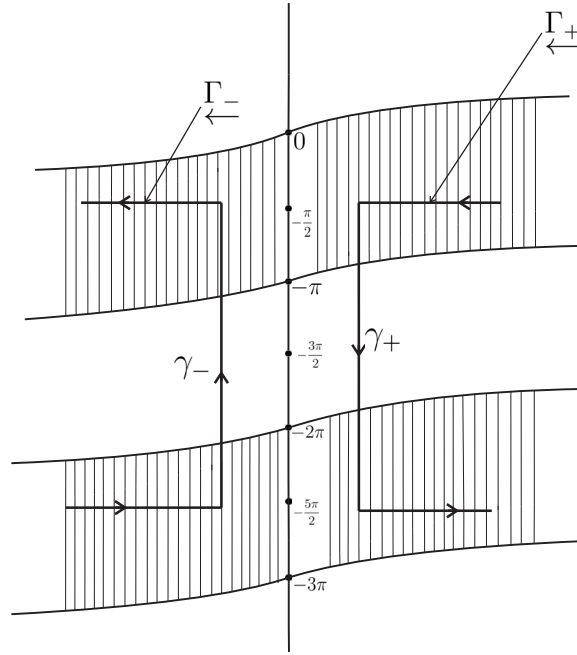


Рис. 6. Двухпетлевой контур Зоммерфельда  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(i)$

FIG. 6. Sommerfeld two-loop contour  $\mathcal{C} = \mathcal{C}(i)$

**6.1. Асимптотика  $\hat{v}_1^1$  на бесконечности.**

**Лемма 6.1.** Для любого  $\Phi \in (\pi, 2\pi)$  функция  $\hat{v}_1^1$  допускает следующую асимптотику:

$$\begin{cases} \hat{v}_1^1(w) = \pm \frac{\sin \Phi}{\Phi} \left( w - \frac{\pi i}{2} \right) + o\left( e^{\mp \frac{\pi}{2\Phi} w} \right), \\ \frac{d}{dw} \hat{v}_1^1(w) = \pm \frac{\sin \Phi}{\Phi} + o\left( e^{\mp \frac{\pi}{2\Phi} w} \right) \end{cases} \quad \left| \quad \operatorname{Re} w \rightarrow \pm \infty. \right. \quad (6.1)$$

**Замечание 6.1.** Асимптотики  $\hat{v}_1^1$  совпадают для случаев  $\Phi \neq \frac{3\pi}{2}$  и  $\Phi = \frac{3\pi}{2}$ .

**6.2. Асимптотика  $\hat{v}_1(w)$ .** Согласно (3.30),  $\hat{v}_1(w) = \hat{v}_1^1(w) - \hat{G}(w)$ ,  $w \in \mathbb{C}$ , где  $\hat{G}(w)$  задается через (3.20). Очевидно,

$$\hat{G}(w) = \pm e^{\mp i\Phi} + o\left( e^{\mp \frac{\pi}{2\Phi} w} \right), \quad \frac{d}{dw} \hat{G}(w) = o\left( e^{\mp \frac{\pi}{2\Phi} w} \right), \quad \operatorname{Re} w \rightarrow \pm \infty.$$

Следовательно, в (6.1)

$$\hat{v}_1(w) = \operatorname{sign}(\operatorname{Re} w) \cdot \frac{\sin \Phi}{\Phi} \left( w - \frac{\pi i}{2} \right) + \operatorname{sign}(\operatorname{Re} w) e^{-\operatorname{sign}(\operatorname{Re} w) w i \Phi} + o\left( e^{-\operatorname{sign}(\operatorname{Re} w) \frac{w\pi}{2\Phi}} \right), \quad (6.2)$$

$$\frac{d}{dw} \hat{v}_1(w) = \operatorname{sign}(\operatorname{Re} w) \frac{\sin \Phi}{\Phi} + o\left( e^{-\operatorname{sign}(\operatorname{Re} w) \frac{w\pi}{2\Phi}} \right), \quad \operatorname{Re} w \rightarrow \pm \infty. \quad (6.3)$$

**7. НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА ОСНОВНОГО РЕЗУЛЬТАТА**

Определим контур  $\mathcal{C}$  как на рис. 6 и определим  $u_1(\rho, \theta)$  с помощью (2.3),  $\hat{v}_1(w)$  с помощью (3.30),  $\hat{v}_1^1(w)$  с помощью (4.10) при  $\Phi \neq \frac{3\pi}{2}$  и с  $\hat{v}_1^1(w)$  с помощью (5.5) при  $\Phi = \frac{3\pi}{2}$ .

Из асимптотики (6.2), (6.3) следует, что  $u_1$ , заданная с помощью (2.3), принадлежит пространству  $E$ , описанному в определении 2.1. Она единственна в силу теоремы Лиувилля и (4.6). Более того, нетрудно показать, что функция (2.3) удовлетворяет уравнению Гельмгольца и граничным условиям. На этом доказательство теоремы 2.1 завершено.

**Благодарности.** П. Жевандров и А. Мерзон благодарят CONACYT-México и CIC-UMSNH, Х.Э. Де ла Пас Мендес благодарит CONACYT-México, и М.И. Ромеро Родригес благодарит проректора по науке Universidad Militar Nueva Granada за частичную финансовую поддержку.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Мальшиев В. А.* Случайные блуждания. Уравнения Винера—Хопфа в четверти плоскости. Автоморфизмы Галуа. — М.: МГУ, 1970.
2. *Babich V. M., Lyalinov M. A., Grikurov V. E.* Diffraction theory: The Sommerfeld—Malyuzhinets Technique. — Oxford: Alpha Science, 2008.
3. *Castro L. P., Kapanadze D.* Dirichlet—Neumann impedance boundary-value problems arising in rectangular wedge diffraction problems// Proc. Am. Math. Soc. — 2008. — 136. — С. 2113–2123.
4. *Castro L. P., Kapanadze D.* Wave diffraction by a 45 degree wedge sector with Dirichlet and Neumann boundary conditions// Math. Comput. Modelling. — 2008. — 48, № 1/2. — С. 114–121.
5. *Castro L. P., Kapanadze D.* Wave diffraction by a 270 degrees wedge sector with Dirichlet, Neumann and impedance boundary conditions// Proc. A. Razmadze Math. Inst. — 2011. — 155. — С. 96–99.
6. *Castro L. P., Speck F.-O., Teixeira F. S.* On a class of wedge diffraction problems posted by Erhard Meister// Oper. Theory Adv. Appl. — 2004. — 147. — С. 213–240.
7. *Castro L. P., Speck F.-O., Teixeira F. S.* Mixed boundary value problems for the Helmholtz equation in a quadrant// Integral Equ. Oper. Theory. — 2006. — 56. — С. 1–44.
8. *Croisille J.-P., Lebeau G.* Diffraction by an elastic immersed wedge. — Berlin—Heidelberg: Springer, 1999.
9. *Kay I.* The diffraction of an arbitrary pulse by a wedge// Commun. Pure Appl. Math. — 1953. — 6. — С. 521–546.
10. *Komech A. I.* Elliptic boundary value problems on manifolds with piecewise smooth boundary// Math. USSR Sb. — 1973. — 21. — С. 91–135.
11. *Merzon A. E., De la Paz Méndez J. E.* DN-scattering of a plane wave by wedges// Math. Methods Appl. Sci. — 2011. — 34, № 15. — С. 1843–1872.
12. *Komech A. I., Mauser N. J., Merzon A. E.* On Sommerfeld representation and uniqueness in scattering by wedges// Math. Methods Appl. Sci. — 2004. — 28. — С. 147–183.
13. *Komech A. I., Merzon A. E.* Limiting amplitude principle in the scattering by wedges// Math. Methods Appl. Sci. — 2006. — 29, № 10. — С. 1147–1185.
14. *Komech A., Merzon A.* Stationary diffraction by wedges. — Cham: Springer, 2019.
15. *Komech A. I., Merzon A. E., De la Paz Méndez J. E.* On uniqueness and stability of Sobolev's solution in scattering by wedges// Z. Angew. Math. Phys. — 2015. — 66, № 5. — С. 2485–2498.
16. *Komech A. I., Merzon A. E., Esquivel Navarrete A., De la Paz Méndez J. E., Villalba Vega T. J.* Sommerfeld's solution as the limiting amplitude and asymptotics for narrow wedges// Math. Methods Appl. Sci. — 2018. — 42. — С. 4957–4970.
17. *Komech A. I., Merzon A. E., De la Paz Méndez J. E.* Time-dependent scattering of generalized plane waves by wedges// Math. Methods Appl. Sci. — 2015. — 38, № 18. — С. 4774–4785.
18. *Meister E.* Some solved and unsolved canonical problems of diffraction theory// В сб.: «Differ. Equ. Math. Phys. Proc. Int. Conf., Birmingham, USA, March 3-8, 1986». — Berlin etc.: Springer, 1987. — С. 320–336.
19. *Meister E., Passow A., Rottbrand K.* New results on wave diffraction by canonical obstacles// Oper. Theory Adv. Appl. — 1999. — 110. — С. 235–256.
20. *Meister E., Penzel F., Speck F.-O., Teixeira F. S.* Some interior and exterior boundary-value problems for the Helmholtz equations in a quadrant// Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A. — 1993. — 123, № 2. — С. 275–294.
21. *Meister E., Penzel F., Speck F.-O., Teixeira F. S.* Two canonical wedge problems for the Helmholtz equation// Math. Methods Appl. Sci. — 1994. — 17. — С. 877–899.
22. *Meister E., Speck F.-O., Teixeira F. S.* Wiener—Hopf—Hankel operators for some wedge diffraction problems with mixed boundary conditions// J. Integral Equ. Appl. — 1992. — 4, № 2. — С. 229–255.
23. *Merzon A. E., Komech A. I., De la Paz Méndez J. E., Villalba T. J.* On the Keller—Blank solution to the scattering problem of pulses by wedges// Math. Methods Appl. Sci. — 2015. — 38, № 10. — С. 2035–2040.
24. *Merzon A. E., Zhevandrov P. N., De la Paz Méndez J. E.* On the behavior of the edge diffracted nonstationary wave in scattering by wedges near the front// Russ. J. Math. Phys. — 2015. — 22, № 4. — С. 491–503.
25. *Muskhlishvili N. I.* Singular integral equations. — Dordrecht: Springer, 1958.
26. *Penzel F., Teixeira F. S.* The Helmholtz equation in a quadrant with Robin's conditions// Math. Methods Appl. Sci. — 1999. — 22. — С. 201–216.
27. *Reed M., Simon B.* Methods of modern mathematical physics II: Fourier analysis, self-adjointness. — New York: Academic Press, 1975.
28. *Sommerfeld A.* Mathematical theory of diffraction. — Boston: Birkhäuser, 2004.

Анатолий Мерзон  
 Instituto de Física y Matemáticas, UMSNH, Морелия, Мексика  
 E-mail: [anatolimx@gmail.com](mailto:anatolimx@gmail.com)

П. Жевандров  
 Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UMSNH, Морелия, Мексика  
 E-mail: [pzhevand@gmail.com](mailto:pzhevand@gmail.com)

Х. Э. Де ла Пас Мендес  
 Escuela Superior de Matemáticas N.2, UAGro, Сьюдад Альтамирано, Мексика  
 E-mail: [jeligio12@gmail.com](mailto:jeligio12@gmail.com)

М. И. Ромеро Родригес  
 Facultad de Ciencias Básicas y Aplicadas, Universidad Militar Nueva Granada, Богота, Колумбия  
 E-mail: [maria.romeror@unimilitar.edu.co](mailto:maria.romeror@unimilitar.edu.co)

DOI 10.22363/2413-3639-2022-68-4-653-670

UDC 517.956.3+517.958

## Explicit solution of a Dirichlet problem in nonconvex angle

A. Merzon<sup>1</sup>, P. Zhevandrov<sup>2</sup>, J. E. De la Paz Méndez<sup>3</sup>, and M. I. Romero Rodríguez<sup>4</sup>

<sup>1</sup>*Instituto de Física y Matemáticas, UMSNH, Morelia Michoacán, México*

<sup>2</sup>*Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UMSNH, Morelia Michoacán, México*

<sup>3</sup>*Escuela Superior de Matemáticas N.2, UAGro, Cd. Altamirano Guerrero, México*

<sup>4</sup>*Facultad de Ciencias Básicas y Aplicadas, Universidad Militar Nueva Granada, Bogotá Colombia*

In the present work, we give an explicit solution of the Dirichlet boundary-value problem for the Helmholtz equation in a nonconvex angle with periodic boundary data. We present uniqueness and existence theorems in an appropriate functional class and we give an explicit formula for the solution in the form of the Sommerfeld integral. The method of complex characteristics [14] is used.

**Keywords:** Helmholtz equation, nonconvex angle, Sommerfeld integral, method of complex characteristics

**For citation:** A. Merzon, P. Zhevandrov, J. E. De la Paz Méndez, M. I. Romero Rodríguez, “Explicit solution of a Dirichlet problem in nonconvex angle,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2022, vol. **68**, No. 4, 653–670. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-653-670>

## REFERENCES

1. V. A. Malyshev, *Random Walks. Wiener–Hopf Equations in the Quadrant of Plane. Galois Automorphisms*, Moscow Univ., Moscow, 1970 (in Russian).
2. V. M. Babich, M. A. Lyalinov, and V. E. Grikurov, *Diffraction Theory: The Sommerfeld–Malyuzhinets Technique*, Alpha Science, Oxford, 2008.
3. L. P. Castro and D. Kapanadze, “Dirichlet–Neumann impedance boundary-value problems arising in rectangular wedge diffraction problems,” *Proc. Am. Math. Soc.*, 2008, **136**, 2113–2123.
4. L. P. Castro and D. Kapanadze, “Wave diffraction by a 45 degree wedge sector with Dirichlet and Neumann boundary conditions,” *Math. Comput. Modelling*, 2008, **48**, No. 1/2, 114–121.
5. L. P. Castro and D. Kapanadze, “Wave diffraction by a 270 degrees wedge sector with Dirichlet, Neumann and impedance boundary conditions,” *Proc. A. Razmadze Math. Inst.*, 2011, **155**, 96–99.



6. L. P. Castro, F.-O. Speck, and F. S. Teixeira, “On a class of wedge diffraction problems posted by Erhard Meister,” *Oper. Theory Adv. Appl.*, 2004, **147**, 213–240.
7. L. P. Castro, F.-O. Speck, and F. S. Teixeira, “Mixed boundary value problems for the Helmholtz equation in a quadrant,” *Integral Equ. Oper. Theory*, 2006, **56**, 1–44.
8. J.-P. Croisille and G. Lebeau, *Diffraction by an Elastic Immersed Wedge*. — Springer, Berlin–Heidelberg, 1999.
9. I. Kay, “The diffraction of an arbitrary pulse by a wedge,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1953, **6**, 521–546.
10. A. I. Komech, “Elliptic boundary value problems on manifolds with piecewise smooth boundary,” *Math. USSR Sb.*, 1973, **21**, 91–135.
11. A. I. Komech, N. J. Mauser, and A. E. Merzon, “On Sommerfeld representation and uniqueness in scattering by wedges,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2004, **28**, 147–183.
12. A. I. Komech and A. E. Merzon, “Limiting amplitude principle in the scattering by wedges,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2006, **29**, No. 10, 1147–1185.
13. A. Komech and A. Merzon, *Stationary Diffraction by Wedges*, Springer, Cham, 2019.
14. A. I. Komech, A. E. Merzon, and J. E. De la Paz Méndez, “On uniqueness and stability of Sobolev’s solution in scattering by wedges,” *Z. Angew. Math. Phys.*, 2015, **66**, No. 5, 2485–2498.
15. A. I. Komech, A. E. Merzon, and J. E. De la Paz Méndez, “Time-dependent scattering of generalized plane waves by wedges,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2015, **38**, No. 18, 4774–4785.
16. A. I. Komech, A. E. Merzon, A. Esquivel Navarrete, J. E. De la Paz Méndez, and T. J. Villalba Vega, “Sommerfeld’s solution as the limiting amplitude and asymptotics for narrow wedges,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2018, **42**, 4957–4970.
17. E. Meister, “Some solved and unsolved canonical problems of diffraction theory,” In: *Differ. Equ. Math. Phys. Proc. Int. Conf., Birmingham, USA, March 3-8, 1986*, Springer, Berlin etc., 1987, pp. 320–336.
18. E. Meister, A. Passow, and K. Rottbrand, “New results on wave diffraction by canonical obstacles,” *Oper. Theory Adv. Appl.*, 1999, **110**, 235–256.
19. E. Meister, F. Penzel, F.-O. Speck, and F. S. Teixeira, “Some interior and exterior boundary-value problems for the Helmholtz equations in a quadrant,” *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, 1993, **123**, No. 2, 275–294.
20. E. Meister, F. Penzel, F.-O. Speck, and F. S. Teixeira, “Two canonical wedge problems for the Helmholtz equation,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 1994, **17**, 877–899.
21. E. Meister, F.-O. Speck, and F. S. Teixeira, “Wiener–Hopf–Hankel operators for some wedge diffraction problems with mixed boundary conditions,” *J. Integral Equ. Appl.*, 1992, **4**, No. 2, 229–255.
22. A. E. Merzon and J. E. De la Paz Méndez, “DN-scattering of a plane wave by wedges,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2011, **34**, No. 15, 1843–1872.
23. A. E. Merzon, A. I. Komech, J. E. De la Paz Méndez, and T. J. Villalba, “On the Keller–Blank solution to the scattering problem of pulses by wedges,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2015, **38**, No. 10, 2035–2040.
24. A. E. Merzon, P. N. Zhevandrov, and J. E. De la Paz Méndez, “On the behavior of the edge diffracted nonstationary wave in scattering by wedges near the front,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2015, **22**, No. 4, 491–503.
25. N. I. Muskhelishvili, *Singular Integral Equations*, Springer, Dordrecht, 1958.
26. F. Penzel and F. S. Teixeira, “The Helmholtz equation in a quadrant with Robin’s conditions,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 1999, **22**, 201–216.
27. M. Reed and B. Simon, *Methods of Modern Mathematical Physics II: Fourier Analysis, Self-Adjointness*, Academic Press, New York, 1975.
28. A. Sommerfeld, *Mathematical Theory of Diffraction*, Birkhäuser, Boston, 2004.

A. Merzon

Instituto de Física y Matemáticas, UMSNH, Morelia Michoacán, México  
E-mail: anatolimx@gmail.com

P. Zhevandrov

Facultad de Ciencias Físico-Matemáticas, UMSNH, Morelia Michoacán, México  
E-mail: pzhevand@gmail.com

J. E. De la Paz Méndez

Escuela Superior de Matemáticas N.2, UAGro, Cd. Altamirano Guerrero, México  
E-mail: jeligio12@gmail.com

M. I. Romero Rodríguez

Facultad de Ciencias Básicas y Aplicadas, Universidad Militar Nueva Granada, Bogotá Colombia  
E-mail: maria.romeror@unimilitar.edu.co

**УСРЕДНЕНИЕ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ  
В ПЕРФОРИРОВАННОЙ ОБЛАСТИ С ОДНОСТОРОННИМ  
ДИНАМИЧЕСКИМ ГРАНИЧНЫМ УСЛОВИЕМ:  
КРИТИЧЕСКИЙ СЛУЧАЙ**

**А. В. Подольский, Т. А. Шапошникова**

*Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

В настоящей работе изучается усреднение параболического уравнения, заданного в области, перфорированной «крошечными» шариками. На границе этих перфораций заданы односторонние динамические граничные ограничения. Мы обращаемся к так называемому «критическому» случаю, который характеризуется связью между коэффициентом в граничном условии, периодом структуры и размером отверстий. В этом случае усредненное уравнение содержит нелокальный «странный» член. Этот член получается как решение вариационной задачи, содержащей обыкновенный дифференциальный оператор.

**Ключевые слова:** усреднение параболического уравнения, перфорированная область, критический случай, странный нелокальный член

**Для цитирования:** А. В. Подольский, Т. А. Шапошникова. Усреднение параболического уравнения в перфорированной области с односторонним динамическим граничным условием: критический случай // *Соврем. мат. Фундам. направл.* 2022. Т. 68, № 4. С. 671–685. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-671-685>

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена изучению асимптотического поведения при  $\varepsilon \rightarrow 0$  решения  $u_\varepsilon$  параболического уравнения  $\partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = f(x, t)$  заданного в области  $\Omega_\varepsilon \subset \mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , перфорированной шарами радиуса порядка  $\varepsilon^\alpha$ ,  $\alpha = \frac{n}{n-2}$ . На границе этих перфораций заданы динамические односторонние ограничения с большим коэффициентом роста  $\varepsilon^{-\alpha}$ . Мы строим усредненное уравнение и доказываем теорему о сходимости в так называемом критическом случае. Этот случай характеризуется появлением «странного» нелокального оператора, который получается как решение некоторого дифференциального неравенства.

Динамические граничные условия возникают при изучении различных физико-химических процессов (обзор этой темы см., например, в [8, 9]). Параболическое уравнение вместе с динамическим краевым условием изучалось во многих работах, в качестве примера укажем [7, 17]. Усреднение начально-краевых задач с динамическим граничным условием изучалось в [6, 20, 21] в случае  $\alpha = 1$ . Критическое соотношение между параметрами задачи широко изучалось в литературе: здесь мы упоминаем работы [4, 15, 16], в которых исследуются задачи с динамическими краевыми условиями, и [1, 10–12], которые посвящены усреднению параболических уравнений и изучению асимптотического поведения соответствующих им аттракторов. В [4, 15, 16] было показано, что усредненная задача содержит нелокальный «странный» член, являющийся решением



некоторого ОДУ. Усреднение задач типа Синьорини и появление «странного» члена изучалось во многих работах, например, [2, 13, 14, 19]. Напротив, в настоящей статье рассматривается усреднение задачи с динамическим краевым условием типа Синьорини.

## 2. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

**2.1. Постановка задачи.** Пусть  $\Omega$  — ограниченная область в  $\mathbb{R}^n$ ,  $n \geq 3$ , с гладкой границей  $\partial\Omega$ . Пусть  $G_0 = \{x : |x| < 1\}$ . Определим  $\delta B = \{x : \delta^{-1}x \in B\}$ ,  $\delta > 0$ . Мы рассматриваем множество

$$G_\varepsilon = \bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} (a_\varepsilon G_0 + \varepsilon j) = \bigcup_{j \in \Upsilon_\varepsilon} G_\varepsilon^j,$$

где  $\varepsilon > 0$ ,  $a_\varepsilon = C_0 \varepsilon^\alpha$ ,  $\alpha = \frac{n}{n-2}$ ,  $C_0 = \text{const} > 0$ ,  $\Upsilon_\varepsilon \subset \mathbb{Z}^n$ , а  $\mathbb{Z}^n$  — набор векторов  $(z_1, z_2, \dots, z_n)$  с целыми коэффициентами  $z_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ . Возьмем  $\Upsilon_\varepsilon = \{j \in \mathbb{Z}^n : \rho(\partial\Omega, \overline{G_\varepsilon^j}) \geq 2\varepsilon\}$ . Отметим, что  $|\Upsilon_\varepsilon| = d\varepsilon^{-n}$ ,  $d = \text{const} > 0$ .

Также мы определим  $S_\varepsilon^j = \partial G_\varepsilon^j$ ,  $T_r^j$  — шар радиуса  $r$  с центром в  $P_\varepsilon^j$ , где  $P_\varepsilon^j$  — центр куба  $Y_\varepsilon^j = \varepsilon Y + j\varepsilon$ ,  $j \in \Upsilon_\varepsilon$ .

Введем множества:  $\Omega_\varepsilon = \Omega \setminus \overline{G_\varepsilon}$ ,  $S_\varepsilon = \partial G_\varepsilon$ ,  $\partial\Omega_\varepsilon = S_\varepsilon \cup \partial\Omega$ ,  $Q_\varepsilon^T = \Omega_\varepsilon \times (0, T)$ ,  $S_\varepsilon^T = S_\varepsilon \times (0, T)$ ,  $\Gamma^T = \partial\Omega \times (0, T)$ , где  $0 < T < \infty$ . В  $Q_\varepsilon^T$  рассмотрим следующую задачу с односторонними ограничениями, заданными на границе  $S_\varepsilon^T$ :

$$\begin{cases} \partial_t u_\varepsilon - \Delta u_\varepsilon = f(x, t), & (x, t) \in Q_\varepsilon^T, \\ u_\varepsilon \geq 0, \quad \varepsilon^{-\gamma} \partial_t u_\varepsilon + \partial_\nu u_\varepsilon \geq 0, & (x, t) \in S_\varepsilon^T, \\ u_\varepsilon (\varepsilon^{-\gamma} \partial_t u_\varepsilon + \partial_\nu u_\varepsilon) = 0, & (x, t) \in S_\varepsilon^T, \\ u_\varepsilon = 0, & (x, t) \in \Gamma^T, \\ u_\varepsilon(x, 0) = 0, & x \in \Omega_\varepsilon, \\ u_\varepsilon(x, 0) = 0, & x \in S_\varepsilon, \end{cases} \quad (2.1)$$

где  $\Delta u \equiv \text{div}(\nabla u)$ ,  $f \in L^2(Q^T)$ ,  $Q^T = \Omega \times (0, T)$ ,  $\partial_\nu u \equiv (\nabla u, \nu)$ ,  $\nu$  — единичный вектор внешней нормали к  $S_\varepsilon$ ,  $\gamma = \frac{n}{n-2}$ ,  $n \geq 3$ .

Через  $H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$  обозначим пространство, которое получается замыканием в  $H^1(\Omega_\varepsilon)$  множества бесконечно дифференцируемых в  $\Omega_\varepsilon$  функций, обращающихся в нуль вблизи границы  $\partial\Omega$ . Определим пространство  $H^{-1}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$  как сопряженное к  $H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$  и обозначим отношение двойственности через  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{\Omega_\varepsilon}$ . Применяя теорему о следах к функциям из пространства  $H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$ , получим, что их следы принадлежат пространству  $H^{1/2}(S_\varepsilon, \partial\Omega)$ . Через  $H^{-1/2}(S_\varepsilon, \partial\Omega)$  обозначим пространство, сопряженное к  $H^{1/2}(S_\varepsilon, \partial\Omega)$ , а через  $\langle \cdot, \cdot \rangle_{S_\varepsilon}$  выразим отношение двойственности.

Далее, мы определим  $\mathbb{K}_\varepsilon = \{\varphi \in H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega) | \varphi \geq 0 \text{ п.в. на } S_\varepsilon\}$ . Легко видеть, что  $\mathbb{K}_\varepsilon$  является замкнутым выпуклым подмножеством  $H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)$ . Наряду с этим множеством рассмотрим  $\mathcal{K}_\varepsilon = \{\varphi \in L^2(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)) | \varphi(t) \in \mathbb{K}_\varepsilon \text{ п.в. } t \in [0, T]\}$ , которое также является замкнутым выпуклым подмножеством в пространстве  $L^2(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega))$ .

Мы говорим, что функция  $u_\varepsilon \in \mathcal{K}_\varepsilon$  такая, что  $u_\varepsilon(x, 0) = 0$  п.в. в  $\Omega_\varepsilon$ ,  $u_\varepsilon(x, 0) = 0$  п.в. на  $S_\varepsilon$  и

$$\partial_t u_\varepsilon \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)), \quad \partial_t u_\varepsilon \in L^2(0, T; H^{-1/2}(S_\varepsilon, \partial\Omega)),$$

является *слабым решением* задачи (2.1), если она удовлетворяет вариационному неравенству

$$\int_0^T \langle \partial_t u_\varepsilon, v - u_\varepsilon \rangle_{\Omega_\varepsilon} dt + \varepsilon^{-\gamma} \int_0^T \langle \partial_t u_\varepsilon, v - u_\varepsilon \rangle_{S_\varepsilon} dt + \int_{Q_\varepsilon^T} \nabla u_\varepsilon \nabla (v - u_\varepsilon) dx dt \geq \int_{Q_\varepsilon^T} f (v - u_\varepsilon) dx dt \quad (2.2)$$

для произвольной функции  $v \in \mathcal{K}_\varepsilon$ .

**Замечание 2.1.** Из интегрального неравенства (2.2) получаем, что  $u_\varepsilon$  также удовлетворяет следующему интегральному неравенству:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle \partial_t \zeta, \zeta - u_\varepsilon \rangle_{\Omega_\varepsilon} dt + \varepsilon^{-\gamma} \int_0^T \langle \partial_t \zeta, \zeta - u_\varepsilon \rangle_{S_\varepsilon} dt + \int_{Q_\varepsilon^T} \nabla \zeta \nabla (\zeta - u_\varepsilon) dx dt \geq \\ & \geq \int_{Q_\varepsilon^T} f(\zeta - u_\varepsilon) dx dt - \frac{1}{2} \|\zeta(x, 0)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 - \frac{1}{2} \varepsilon^{-\gamma} \|\zeta(x, 0)\|_{L^2(S_\varepsilon)}^2, \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $\zeta$  — произвольная функция из множества  $\mathcal{K}_\varepsilon$  такая, что  $\partial_t \zeta \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega))$  и  $\partial_t \zeta \in L^2(0, T; H^{-1/2}(S_\varepsilon, \partial\Omega))$ .

**2.2. Существование, единственность, продолжение.** С помощью метода штрафа (см. [5]) доказывается теорема существования и единственности решения задачи (2.1).

**Теорема 2.1.** *Существует единственное слабое решение  $u_\varepsilon$  задачи (2.1), и справедлива следующая оценка:*

$$\begin{aligned} & \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega))} + \varepsilon^{-\gamma/2} \|u_\varepsilon\|_{L^\infty(0, T; L^2(S_\varepsilon))} + \\ & + \|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon))} + \varepsilon^{-\gamma/2} \|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(0, T; L^2(S_\varepsilon))} \leq K; \end{aligned} \quad (2.4)$$

здесь и ниже константа  $K$  не зависит от  $\varepsilon$ .

*Доказательство.* Штрафная задача, связанная с задачей (2.1), принимает вид

$$\begin{cases} \partial_t u_{\varepsilon, \delta} - \Delta u_{\varepsilon, \delta} = f(x, t), & (x, t) \in Q_\varepsilon^T, \\ \varepsilon^{-\gamma} \partial_t u_{\varepsilon, \delta} + \partial_\nu u_{\varepsilon, \delta} + \delta^{-1} u_{\varepsilon, \delta}^- = 0, & (x, t) \in S_\varepsilon^T, \\ u_{\varepsilon, \delta} = 0, & (x, t) \in \Gamma^T, \\ u_{\varepsilon, \delta}(x, 0) = 0, & x \in \Omega_\varepsilon, \\ u_{\varepsilon, \delta}(x, 0) = 0, & x \in S_\varepsilon, \end{cases}$$

где  $u^-$  — отрицательная часть функции  $u$ , т. е.  $u^- = \inf(u, 0)$ . По решению этой задачи рассмотрим функцию  $u_{\varepsilon, \delta} \in L^2(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega))$  такую, что  $\partial_t u_\varepsilon \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega))$ ,  $\partial_t u_\varepsilon \in L^2(0, T; H^{-1/2}(S_\varepsilon, \partial\Omega))$ ,  $u_{\varepsilon, \delta}(x, 0) = 0$  п.в. в  $\Omega_\varepsilon$ ,  $u_{\varepsilon, \delta}(x, 0) = 0$  п.в. на  $S_\varepsilon$ , и удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\int_0^T \langle \partial_t u_{\varepsilon, \delta}, v \rangle_{\Omega_\varepsilon} dt + \varepsilon^{-\gamma} \int_0^T \langle \partial_t u_{\varepsilon, \delta}, v \rangle_{S_\varepsilon} dt + \int_{Q_\varepsilon^T} \nabla u_{\varepsilon, \delta} \nabla v dx dt + \delta^{-1} \int_{S_\varepsilon^T} u_{\varepsilon, \delta}^- v ds dt = \int_{Q_\varepsilon^T} f v dx dt,$$

где  $v$  — произвольная функция из  $L^2(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega))$ . Существование и единственность решения штрафной задачи можно доказать, используя метод монотонности и приближения Галеркина (см. общий обзор в [5] и аналогичную задачу в [4, 16]). В статье [16] показано, что решение таково, что  $u_{\varepsilon, \delta} \in C([0, T]; L^2(\Omega_\varepsilon))$ ,  $u_{\varepsilon, \delta} \in C([0, T]; L^2(S_\varepsilon))$ ,  $u_{\varepsilon, \delta} \in L^2(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega))$ ,  $\partial_t u_{\varepsilon, \delta} \in L^2(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon))$ ,  $\partial_t u_{\varepsilon, \delta} \in L^2(0, T; L^2(S_\varepsilon))$ . Кроме того, справедливы следующие оценки:

$$\begin{aligned} & \int_0^T \|\partial_t u_{\varepsilon, \delta}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 dt + \varepsilon^{-\gamma} \int_0^T \|\partial_t u_{\varepsilon, \delta}\|_{L^2(S_\varepsilon)}^2 dt + \operatorname{ess\,sup}_{[0, T]} \|\nabla u_{\varepsilon, \delta}(x, t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 \leq K, \\ & \operatorname{ess\,sup}_{[0, T]} \|u_{\varepsilon, \delta}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \varepsilon^{-\gamma} \operatorname{ess\,sup}_{[0, T]} \|u_{\varepsilon, \delta}\|_{L^2(S_\varepsilon)}^2 + \int_0^T \|\nabla u_{\varepsilon, \delta}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 dt \leq K, \end{aligned}$$

где константа  $K$  не зависит от  $\varepsilon$  и  $\delta$ . Значит, существует подпоследовательность (мы сохраняем нумерацию исходной последовательности) такая, что

$$\begin{aligned} & u_{\varepsilon, \delta} \rightharpoonup u_\varepsilon \text{ слабо в } L^2(0, T; H^1(\Omega_\varepsilon, \partial\Omega)), \\ & u_{\varepsilon, \delta} \rightarrow u_\varepsilon \text{ сильно в } L^2(0, T; L^2(S_\varepsilon)), \\ & \partial_t u_{\varepsilon, \delta} \rightharpoonup \partial_t u_\varepsilon \text{ слабо в } L^2(0, T; L^2(\Omega_\varepsilon)), \\ & \partial_t u_{\varepsilon, \delta} \rightharpoonup \partial_t u_\varepsilon \text{ слабо в } L^2(0, T; L^2(S_\varepsilon)). \end{aligned}$$

Далее покажем, что  $u_\varepsilon^- \equiv 0$  на  $S_\varepsilon^T$ . Действительно, возьмем  $u_{\varepsilon,\delta}$  в качестве пробной функции в интегральном тождестве для штрафной задачи и получим

$$\int_{S_\varepsilon^T} (u_{\varepsilon,\delta}^-)^2 dxdt \leq \delta \int_{Q_\varepsilon^T} f u_{\varepsilon,\delta} dxdt \leq \delta \|f\|_{L^2(Q^T)} \|u_{\varepsilon,\delta}\|_{L^2(Q_\varepsilon^T)} \leq K\delta.$$

Следовательно,  $u_{\varepsilon,\delta}^- \rightarrow 0$  сильно в  $L^2(S_\varepsilon^T)$ . В силу монотонности функции  $u \rightarrow u^-$  имеем

$$\int_{S_\varepsilon^T} (u_{\varepsilon,\delta}^- - \psi^-)(u_{\varepsilon,\delta} - \psi) dsdt \geq 0,$$

где  $\psi$  — произвольная функция из  $L^2(S_\varepsilon^T)$ . Перейдем к пределу при  $\delta \rightarrow 0$  в этом неравенстве и получим

$$- \int_{S_\varepsilon^T} \psi^- (u_\varepsilon - \psi) dxdt \geq 0.$$

Возьмем  $\psi = u_\varepsilon - \lambda w$ , где  $w$  — произвольная функция из  $L^2(S_\varepsilon^T)$ ,  $\lambda > 0$ , и перейдем к пределу при  $\lambda \rightarrow 0$ . Таким образом, мы получим

$$\int_{S_\varepsilon^T} u_\varepsilon^- w dxdt \leq 0$$

для произвольной функции  $w \in L^2(S_\varepsilon^T)$ . Следовательно,  $u_\varepsilon^- \equiv 0$  для п.в.  $(x, t) \in S_\varepsilon^T$ , т. е.  $u_\varepsilon \geq 0$  на  $S_\varepsilon^T$ . Следовательно,  $u_\varepsilon \in \mathcal{K}_\varepsilon$ .

Теперь возьмем произвольную функцию  $v \in \mathcal{K}_\varepsilon$  ( $v^- \equiv 0$  п.в. на  $S_\varepsilon^T$ ) и получим

$$\begin{aligned} & \int_0^T \langle \partial_t u_{\varepsilon,\delta}, v - u_{\varepsilon,\delta} \rangle_{\Omega_\varepsilon} dt + \varepsilon^{-\gamma} \int_0^T \langle \partial_t u_{\varepsilon,\delta}, v - u_{\varepsilon,\delta} \rangle_{S_\varepsilon} dt + \\ & + \int_{Q_\varepsilon^T} \nabla u_{\varepsilon,\delta} \nabla (v - u_{\varepsilon,\delta}) dxdt - \int_{Q_\varepsilon^T} f (v - u_{\varepsilon,\delta}) dxdt = \delta^{-1} \int_{S_\varepsilon^T} (v^- - u_{\varepsilon,\delta}^-) (v - u_{\varepsilon,\delta}) dsdt \geq 0. \end{aligned}$$

Переписывая это неравенство, получаем

$$\begin{aligned} & \int_{Q_\varepsilon^T} |\nabla u_{\varepsilon,\delta}|^2 dxdt \leq \int_0^T \langle \partial_t u_{\varepsilon,\delta}, v - u_{\varepsilon,\delta} \rangle_{\Omega_\varepsilon} dt + \varepsilon^{-\gamma} \int_0^T \langle \partial_t u_{\varepsilon,\delta}, v - u_{\varepsilon,\delta} \rangle_{S_\varepsilon} dt + \\ & + \int_{Q_\varepsilon^T} \nabla u_{\varepsilon,\delta} \nabla v dxdt - \int_{Q_\varepsilon^T} f (v - u_{\varepsilon,\delta}) dxdt = \int_0^T \langle \partial_t u_{\varepsilon,\delta}, v \rangle_{\Omega_\varepsilon} dt + \varepsilon^{-\gamma} \int_0^T \langle \partial_t u_{\varepsilon,\delta}, v \rangle_{S_\varepsilon} dt + \int_{Q_\varepsilon^T} \nabla u_{\varepsilon,\delta} \nabla v dxdt - \\ & - \int_{Q_\varepsilon^T} f (v - u_{\varepsilon,\delta}) dxdt - \frac{1}{2} \|u_{\varepsilon,\delta}(x, T)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 - \frac{1}{2} \varepsilon^{-\gamma} \|u_{\varepsilon,\delta}(x, T)\|_{L^2(S_\varepsilon)}^2. \end{aligned}$$

Отображения  $t \rightarrow \|u_{\varepsilon,\delta}(x, t)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2$  и  $t \rightarrow \|u_{\varepsilon,\delta}(x, t)\|_{L^2(S_\varepsilon)}^2$  непрерывны, поэтому последние два члена определены корректно. Более того, из оценки  $u_{\varepsilon,\delta}$  получаем, что последовательность  $u_{\varepsilon,\delta}^2(x, T)$  ограничена в соответствующем пространстве, поэтому можно выделить сходящуюся подпоследовательность. Переходя к пределу при  $\delta \rightarrow 0$ , получаем

$$\begin{aligned} & \int_{Q_\varepsilon^T} |\nabla u_\varepsilon|^2 dxdt + \frac{1}{2} \|u_\varepsilon(x, T)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^{-\gamma} \|u_\varepsilon(x, T)\|_{L^2(S_\varepsilon)}^2 \leq \\ & \leq \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \int_{Q_\varepsilon^T} |\nabla u_{\varepsilon,\delta}|^2 dxdt + \frac{1}{2} \|u_{\varepsilon,\delta}(x, T)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \frac{1}{2} \varepsilon^{-\gamma} \|u_{\varepsilon,\delta}(x, T)\|_{L^2(S_\varepsilon)}^2 \right) \leq \end{aligned}$$



$$\leq \int_0^T \langle \partial_t u_\varepsilon, v \rangle_{\Omega_\varepsilon} dt + \varepsilon^{-\gamma} \int_0^T \langle \partial_t u_\varepsilon, v \rangle_{S_\varepsilon} dt + \int_{Q_\varepsilon^T} \nabla u_\varepsilon \nabla v dx dt - \int_{Q_\varepsilon^T} f(v - u_\varepsilon) dx dt.$$

Таким образом, мы имеем

$$\int_0^T \langle \partial_t u_\varepsilon, v - u_\varepsilon \rangle_{\Omega_\varepsilon} dt + \varepsilon^{-\gamma} \int_0^T \langle \partial_t u_\varepsilon, v - u_\varepsilon \rangle_{S_\varepsilon} dt + \int_{Q_\varepsilon^T} \nabla u_\varepsilon \nabla (v - u_\varepsilon) dx dt \geq \int_{Q_\varepsilon^T} f(v - u_\varepsilon) dx dt.$$

Следовательно, предельная функция  $u_\varepsilon$  является решением (2.1). Оценки (2.4) следуют из оценок функции  $u_{\varepsilon, \delta}$ .

Далее покажем единственность решения. Предположим противное, что существует два решения  $u_\varepsilon^1$  и  $u_\varepsilon^2$ . Возьмем  $u_\varepsilon^2$  в качестве пробной функции в вариационном неравенстве для  $u_\varepsilon^1$  и наоборот. Затем суммируем неравенства и получаем

$$- \int_0^T \langle \partial_t (u_\varepsilon^2 - u_\varepsilon^1), u_\varepsilon^2 - u_\varepsilon^1 \rangle_{\Omega_\varepsilon} dt - \varepsilon^{-\gamma} \int_0^T \langle \partial_t (u_\varepsilon^2 - u_\varepsilon^1), u_\varepsilon^2 - u_\varepsilon^1 \rangle_{S_\varepsilon} dt - \|\nabla (u_\varepsilon^2 - u_\varepsilon^1)\|_{L^2(Q_\varepsilon^T)}^2 \geq 0.$$

Отсюда сразу заключаем, что  $u_\varepsilon^1 = u_\varepsilon^2$  п.в. в  $Q_\varepsilon^T$  и  $S_\varepsilon^T$ . □

Мы будем использовать хорошо известный результат о продолжении (см. [18]).

**Теорема 2.2.** Пусть  $\Omega_\varepsilon$  — определенная выше перфорированная область. Тогда существует оператор продолжения  $P_\varepsilon : H^1(Q_\varepsilon^T) \rightarrow H^1(Q^T)$ ,  $Q^T = \Omega \times (0, T)$ , такой, что

$$\begin{aligned} P_\varepsilon u &= u \quad \text{в } Q_\varepsilon^T, \\ \|P_\varepsilon u\|_{H^1(Q^T)} &\leq K \|u\|_{H^1(Q_\varepsilon^T)}, \\ \|\partial_t (P_\varepsilon u_\varepsilon)\|_{L^2(Q^T)}^2 + \|\nabla_x P_\varepsilon u_\varepsilon\|_{L^2(Q^T)}^2 &\leq K (\|\partial_t u_\varepsilon\|_{L^2(Q_\varepsilon^T)}^2 + \|\nabla_x u_\varepsilon\|_{L^2(Q_\varepsilon^T)}^2). \end{aligned}$$

Следовательно, из оценок (2.4) следует, что существует подпоследовательность (используем обозначение исходной последовательности) такая, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$  имеем

$$\begin{aligned} P_\varepsilon u_\varepsilon &\rightharpoonup u_0 \quad \text{слабо в } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), \\ P_\varepsilon u_\varepsilon &\rightarrow u_0 \quad \text{сильно в } L^2(Q^T), \\ \partial_t (P_\varepsilon u_\varepsilon) &\rightharpoonup \partial_t u_0 \quad \text{слабо в } L^2(Q^T), \end{aligned} \tag{2.5}$$

где  $u_\varepsilon$  — решение задачи (2.1).

**2.3. Теорема усреднения.** Следующая теорема описывает предельную функцию  $u_0$  из (2.5).

**Теорема 2.3.** Пусть  $n \geq 3$ ,  $\alpha = \gamma = \frac{n}{n-2}$ ,  $u_\varepsilon$  — слабое решение задачи (2.1). Тогда функция  $u_0$ , определенная в (2.5), является слабым решением следующей задачи:

$$\begin{cases} \partial_t u_0 - \Delta u_0 + \mathcal{A}_n(u_0 - H_{u_0}) = f(x, t), & (x, t) \in Q^T, \\ \partial_t H_{u_0} + \mathcal{B}_n H_{u_0} \geq \mathcal{B}_n u_0, \quad H_{u_0} \geq 0, \quad H_{u_0}(\partial_t H_{u_0} + \mathcal{B}_n(H_{u_0} - u_0)) = 0, & (x, t) \in Q^T, \\ u_0 = 0, & (x, t) \in \Gamma^T, \\ u_0(x, 0) = 0, & x \in \Omega, \\ H_{u_0}(x, 0) = 0, & x \in \Omega, \end{cases} \tag{2.6}$$

где константы  $\mathcal{A}_n, \mathcal{B}_n$  выражаются в виде

$$\mathcal{A}_n = (n-2)C_0^{n-2}\omega_n, \quad \mathcal{B}_n = (n-2)C_0^{-1}, \quad \omega_n = |\partial G_0|.$$

## 3. НЕЛОКАЛЬНЫЙ СТРАННЫЙ ЧЛЕН

В усредненном уравнении (2.6) появляется нелокальный странный член как решение некоторой задачи, связанной с дифференциальным неравенством. В этом разделе мы докажем существование и единственность этого решения и выведем некоторые его свойства.

Пусть  $\varphi \in L^2(0, T)$  фиксировано. Рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \frac{d}{dt}H_\varphi + \mathcal{B}_n H_\varphi \geq \mathcal{B}_n \varphi, & H_\varphi \geq 0, & \left( \frac{d}{dt}H_\varphi + \mathcal{B}_n H_\varphi - \mathcal{B}_n \varphi \right) H_\varphi = 0, & t \in (0, T), \\ H_\varphi(0) = 0. \end{cases} \quad (3.1)$$

Вариационная формулировка задачи (2.1) имеет следующий вид: найти функцию  $H_\varphi \in H^1(0, T)$ ,  $H_\varphi(0) = 0$ ,  $H_\varphi \geq 0$  при  $t \in (0, T)$  такую, что

$$\int_0^T \frac{d}{dt}H_\varphi(v - H_\varphi)dt + \mathcal{B}_n \int_0^T H_\varphi(v - H_\varphi)dt \geq \mathcal{B}_n \int_0^T \varphi(v - H_\varphi)dt, \quad (3.2)$$

где  $v \in L^2(0, T)$  и  $v \geq 0$  при п.в.  $t \in (0, T)$ .

**Теорема 3.1.** *Существует единственное решение  $H_\varphi \in H^1(0, T)$  вариационного неравенства (3.2).*

*Доказательство.* Сначала покажем единственность решения. Предположим противное, что существует два решения  $H_\varphi^1$  и  $H_\varphi^2$ . Введем функцию  $w = \frac{H_\varphi^1 + H_\varphi^2}{2}$ . Очевидно, что  $w \geq 0$  при п.в.  $t \in (0, T)$ . Затем возьмем  $v = w$  в качестве пробной функции в вариационных неравенствах для двух решений и просуммируем их:

$$-\int_0^T \frac{d}{dt}(H_\varphi^1 - H_\varphi^2)(H_\varphi^1 - H_\varphi^2)dt - \mathcal{B}_n \int_0^T (H_\varphi^1 - H_\varphi^2)^2 dt \geq 0.$$

Далее мы имеем

$$-|(H_\varphi^1 - H_\varphi^2)(T)|^2 - \int_0^T (H_\varphi^1 - H_\varphi^2)^2 dt \geq 0.$$

Отсюда немедленно следует  $H_\varphi^1 = H_\varphi^2$  при  $t \in (0, T)$ .

Мы будем использовать метод штрафа, чтобы доказать существование решения. Уравнение со штрафом, связанное с вариационным неравенством, принимает вид

$$\frac{d}{dt}H_{\varphi,\delta} + \mathcal{B}_n H_{\varphi,\delta} + \frac{1}{\delta}H_{\varphi,\delta}^- = \mathcal{B}_n \varphi \quad (3.3)$$

с начальным условием  $H_{\varphi,\delta}(0) = 0$ . Существование и единственность решения этого уравнения такого, что  $H_{\varphi,\delta} \in H^1(0, T)$ , устанавливается стандартными методами. Далее мы покажем, что решение этой задачи сходится к решению вариационного неравенства при  $\delta \rightarrow 0$ . Во-первых, мы получим априорные оценки, взяв  $H_{\varphi,\delta}$  в качестве пробной функции в интегральном тождестве для штрафной задачи. При  $\tau \in (0, T)$  имеем

$$\int_0^\tau \frac{d}{dt}H_{\varphi,\delta}H_{\varphi,\delta}dt + \mathcal{B}_n \int_0^\tau H_{\varphi,\delta}^2 dt + \delta^{-1} \int_0^\tau (H_{\varphi,\delta}^-)^2 dt = \mathcal{B}_n \int_0^\tau \varphi H_{\varphi,\delta} dt.$$

Отсюда мы получим

$$\frac{1}{2}(H_{\varphi,\delta}(\tau))^2 + \mathcal{B}_n \int_0^\tau H_{\varphi,\delta}^2 dt + \delta^{-1} \int_0^\tau (H_{\varphi,\delta}^-)^2 dt \leq K \|\varphi\|_{L^2(0,T)}^2 + \frac{\mathcal{B}_n}{2} \int_0^\tau H_{\varphi,\delta}^2 dt, \quad (3.4)$$

где константа  $K$  не зависит от  $\delta$ . Таким образом, мы имеем

$$|H_{\varphi,\delta}(\tau)| \leq C,$$

$$\|H_{\varphi,\delta}\|_{L^2(0,T)}^2 + \delta^{-1}\|H_{\varphi,\delta}\|_{L^2(0,T)}^2 \leq C.$$

Тогда возьмем  $\frac{d}{dt}H_{\varphi,\delta}$  в качестве пробной функции в интегральном тождестве для задачи на  $H_{\varphi,\delta}$  и получим

$$\int_0^T \left| \frac{d}{dt}H_{\varphi,\delta} \right|^2 dt + \frac{\mathcal{B}_n}{2}|H_{\varphi,\delta}(T)|^2 + \frac{\delta^{-1}}{2}|H_{\varphi,\delta}^-(T)|^2 = \mathcal{B}_n \int_0^T \varphi \frac{d}{dt}H_{\varphi,\delta} dt.$$

Используя неравенство Коши, получаем

$$\left\| \frac{d}{dt}H_{\varphi,\delta} \right\|_{L^2(0,T)} \leq C\|\varphi\|_{L^2(0,T)}.$$

Следовательно, мы имеем  $\|H_{\varphi,\delta}\|_{H^1(0,T)} \leq K$ .

Таким образом, существует подпоследовательность (по-прежнему с индексом  $\delta$ ) такая, что  $H_{\varphi,\delta} \rightarrow H_\varphi$  равномерно по  $t \in [0, T]$ ,  $H_{\varphi,\delta}^- \rightarrow 0$  сильно в  $L^2(0, T)$  и  $\frac{d}{dt}H_{\varphi,\delta} \rightharpoonup \frac{d}{dt}H_\varphi$  слабо в  $L^2(0, T)$  при  $\delta \rightarrow 0$ . Далее покажем, что  $H_\varphi^- \equiv 0$ . Действительно, имеем

$$\int_0^T (H_{\varphi,\delta}^- - \psi^-)(H_{\varphi,\delta} - \psi) dt \geq 0$$

при произвольной функции  $\psi \in L^2(0, T)$ . Переходя к пределу при  $\delta \rightarrow 0$ , получим

$$- \int_0^T \psi^- (H_\varphi - \psi) dt \geq 0.$$

Взяв  $\psi = H_\varphi - \lambda w$ ,  $w \in L^2(0, T)$ ,  $\lambda > 0$ , мы будем иметь

$$\int_0^T (H_\varphi - \lambda w)^- w dt \leq 0$$

и, переходя к пределу при  $\lambda \rightarrow 0$ , получим, что  $H_\varphi^- \equiv 0$  при п.в.  $t \in (0, T)$ , значит,  $H_\varphi \geq 0$  и  $H_\varphi$  — допустимая функция.

Наконец, возьмем произвольную функцию  $v \in L^2(0, T)$  такую, что  $v \geq 0$  для п.в.  $t \in (0, T)$ , и получим

$$\int_0^T \frac{d}{dt}H_{\varphi,\delta}(v - H_{\varphi,\delta}) dt + \mathcal{B}_n \int_0^T (H_{\varphi,\delta} - \varphi)(v - H_{\varphi,\delta}) dt = \delta^{-1} \int_0^T (v^- - H_{\varphi,\delta}^-)(v - H_{\varphi,\delta}) dt \geq 0.$$

Следовательно, мы имеем

$$\frac{1}{2}|H_{\varphi,\delta}(T)|^2 + \mathcal{B}_n \int_0^T H_{\varphi,\delta}^2 dt \leq \int_0^T \frac{d}{dt}H_{\varphi,\delta}v dt + \mathcal{B}_n \int_0^T H_{\varphi,\delta}v dt - \mathcal{B}_n \int_0^T \varphi(v - H_{\varphi,\delta}) dt.$$

Переходя к пределу при  $\delta \rightarrow 0$ , мы получим

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}|H_\varphi(T)|^2 + \mathcal{B}_n \int_0^T H_\varphi^2 dt &= \lim_{\delta \rightarrow 0} \left( \frac{1}{2}|H_{\varphi,\delta}(T)|^2 + \mathcal{B}_n \int_0^T H_{\varphi,\delta}^2 dt \right) \leq \\ &\leq \int_0^T \frac{d}{dt}H_\varphi v dt + \mathcal{B}_n \int_0^T H_\varphi v dt - \mathcal{B}_n \int_0^T \varphi(v - H_\varphi) dt. \end{aligned}$$

В итоге получаем, что  $H_\varphi$  удовлетворяет условию

$$\int_0^T \frac{d}{dt} H_\varphi(v - H_\varphi) dt + \mathcal{B}_n \int_0^T H_\varphi(v - H_\varphi) dt \geq \mathcal{B}_n \int_0^T \varphi(v - H_\varphi) dt.$$

Значит,  $H_\varphi$  является решением вариационного неравенства.  $\square$

Пусть  $H_\varphi$  и  $H_\psi$  — решения вариационных неравенств с  $\phi$  и  $\psi$  в правой части неравенства. Тогда справедлива следующая лемма.

**Лемма 3.1.** *Оператор  $H_\varphi : L^2(0, T) \rightarrow L^2(0, T)$ , переводящий функцию  $\varphi$  в решение вариационного неравенства (3.2), является непрерывным по Липшицу и монотонным. Другими словами, пусть  $\varphi, \psi \in L^2(0, T)$ , тогда соответствующие решения  $H_\varphi$  и  $H_\psi$  удовлетворяют*

$$\|H_\varphi - H_\psi\|_{L^2(0, T)} \leq \|\varphi - \psi\|_{L^2(0, T)}, \quad \int_0^T (H_\varphi - H_\psi)(\varphi - \psi) dt \geq 0.$$

*Доказательство.* Введем функцию  $w = \frac{H_\varphi + H_\psi}{2}$  и возьмем ее в качестве пробной в вариационных неравенствах для функций  $H_\varphi, H_\psi$ . Затем суммируем полученные выражения и получаем

$$-\int_0^T \frac{d}{dt} (H_\varphi - H_\psi)(H_\varphi - H_\psi) dt - \mathcal{B}_n \int_0^T (H_\varphi - H_\psi)^2 dt \geq -\mathcal{B}_n \int_0^T (\varphi - \psi)(H_\varphi - H_\psi) dt.$$

Переписывая это неравенство, получаем

$$\int_0^T (H_\varphi - H_\psi)^2 dt \leq \int_0^T (\varphi - \psi)(H_\varphi - H_\psi) dt. \quad (3.5)$$

Отсюда получим

$$\|H_\varphi - H_\psi\|_{L^2(0, T)} \leq \|\varphi - \psi\|_{L^2(0, T)}.$$

Последняя оценка дает непрерывность оператора, а (3.5) подразумевает монотонность. Это завершает доказательство.  $\square$

**Замечание 3.1.** Непрерывность и монотонность оператора  $H_\varphi$  влечет существование и единственность решения усредненной задачи (2.6), что можно доказать методом Галеркина (см. [5]).

**Замечание 3.2.** Если в краевом условии для задачи (2.1) взять  $\beta \partial_t u_\varepsilon$ ,  $\beta > 0$ , то в задаче (3.1) будем иметь  $\beta \frac{d}{dt} H_\varphi$ . Переходя к пределу при  $\beta \rightarrow 0$ , получаем условия:  $H_\varphi \geq \varphi$ ,  $H_\varphi \geq 0$ ,  $H_\varphi(H_\varphi - \varphi) = 0$ . Задача имеет очевидное решение  $H_\varphi = \varphi^+$ , где  $\varphi^+ = \sup(0, \varphi)$ . Это приводит к стандартным результатам, например, ср. с результатом статьи [13].

## 4. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ ОБ УСРЕДНЕНИИ

### 4.1. Выбор пробной функции.

*4.1.1. Пространственная составляющая.* Рассмотрим вспомогательные функции  $w_\varepsilon^j$ ,  $j \in \Upsilon_\varepsilon$ , как решение краевых задач

$$\begin{cases} \Delta w_\varepsilon^j = 0, & x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \\ w_\varepsilon^j = 1, & x \in \partial G_\varepsilon^j, \\ w_\varepsilon^j = 0, & x \in \partial T_{\varepsilon/4}^j. \end{cases} \quad (4.1)$$

Мы можем найти в явном виде решение задачи (4.1):

$$w_\varepsilon^j = \frac{|x - P_\varepsilon^j|^{2-n} - (\varepsilon/4)^{2-n}}{a_\varepsilon^{2-n} - (\varepsilon/4)^{2-n}}. \quad (4.2)$$

Положим

$$W_\varepsilon = \begin{cases} w_\varepsilon^j, & x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \\ 1, & x \in G_\varepsilon^j, \\ 0, & x \in \mathbb{R}^n \setminus \bigcup_{j \in \mathcal{Y}_\varepsilon} T_{\varepsilon/4}^j. \end{cases} \quad (4.3)$$

Нетрудно видеть, что  $W_\varepsilon \rightharpoonup 0$  слабо в  $H_0^1(\Omega)$ .

4.1.2. *Временная составляющая.* Рассмотрим  $\varphi = \eta(t)\psi(x)$ ,  $\eta(t) \in C^1([0, T])$ ,  $\psi(x) \in C_0^\infty(\Omega)$  и определим функции  $H_\varphi^{\varepsilon,j}(t)$  как решение набора задач для дифференциального неравенства

$$\begin{cases} \partial_t H_\varphi^{\varepsilon,j} + \mathcal{B}_n H_\varphi^{\varepsilon,j} \geq \mathcal{B}_n \varphi(P_\varepsilon^j, t), & H_\varphi^{\varepsilon,j} \geq 0, & (\partial_t H_\varphi^{\varepsilon,j} + \mathcal{B}_n(H_\varphi^{\varepsilon,j} - \varphi(P_\varepsilon^j, t)))H_\varphi^{\varepsilon,j} = 0, & t \in (0, T), \\ H_\varphi^{\varepsilon,j}(0) = 0. \end{cases} \quad (4.4)$$

Заметим, что  $H_\varphi^{\varepsilon,j}(t) = H_\varphi(P_\varepsilon^j, t)$ , где  $H_\varphi$  — решение задачи

$$\begin{cases} \partial_t H_\varphi + \mathcal{B}_n H_\varphi \geq \mathcal{B}_n \varphi(x, t), & H_\varphi \geq 0, & (\partial_t H_\varphi + \mathcal{B}_n H_\varphi - \mathcal{B}_n \varphi(x, t))H_\varphi = 0, & t \in (0, T), \\ H_\varphi(x, 0) = 0, \end{cases} \quad (4.5)$$

где  $x \in \Omega$  — параметр.

4.1.3. *Пробная функция.* При  $t \in [0, T]$  введем вспомогательную функцию

$$W_{\varphi,\varepsilon}(x, t) = \begin{cases} w_\varepsilon^j(x)(\varphi(x, t) - H_\varphi^{\varepsilon,j}(t)), & x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}, \\ 0, & x \in \Omega \setminus \bigcup_{j \in \mathcal{Y}_\varepsilon} T_{\varepsilon/4}^j. \end{cases} \quad (4.6)$$

Легко видеть, что функция  $W_{\varphi,\varepsilon}$  принадлежит  $H^1(Q_\varepsilon^T)$ . Из теоремы 2.2 следует, что при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} P_\varepsilon W_{\varphi,\varepsilon} &\rightharpoonup 0 \text{ в } L^2(0, T; H_0^1(\Omega)), & P_\varepsilon W_{\varphi,\varepsilon} &\rightarrow 0 \text{ в } L^2(Q^T), \\ \partial_t(P_\varepsilon W_{\varphi,\varepsilon}) &\rightharpoonup 0 \text{ слабо в } L^2(Q^T). \end{aligned} \quad (4.7)$$

**4.2. Преобразование интегрального неравенства.** Рассмотрим функцию  $\zeta = \varphi(x, t) - W_{\varphi,\varepsilon}$ .

На каждом  $T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}$  имеем  $\zeta = (1 - w_\varepsilon^j(x))\varphi(x, t) + w_\varepsilon^j(x)H_\varphi^{\varepsilon,j}(t)$ . В частности,  $\zeta = H_\varphi^{\varepsilon,j}(t) \geq 0$  на  $S_\varepsilon^j$ . Следовательно,  $\zeta \geq 0$  на  $S_\varepsilon$  и  $\zeta \in \mathcal{K}_\varepsilon$ . Возьмем  $\zeta$  в качестве пробной функции в интегральном неравенстве (2.3) и получим

$$\begin{aligned} &\int_{Q_\varepsilon^T} (\partial_t \varphi - \partial_t W_{\varphi,\varepsilon})(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon} - u_\varepsilon) dx dt + \varepsilon^{-\gamma} \int_0^T \int_{S_\varepsilon} \partial_t (\varphi - W_{\varphi,\varepsilon})(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon} - u_\varepsilon) ds dt + \\ &\quad + \int_{Q_\varepsilon^T} \nabla(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon}) \nabla(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon} - u_\varepsilon) dx dt \geq \\ &\geq \int_{Q_\varepsilon^T} f(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon} - u_\varepsilon) dx dt + \varepsilon^{-\gamma} \int_{S_\varepsilon^T} g(\varphi - W_{\varphi,\varepsilon} - u_\varepsilon) ds dt - \\ &\quad - \frac{1}{2} \|\varphi(x, 0) - W_{\varphi,\varepsilon}|_{t=0}\|_{L_2(\Omega_\varepsilon)}^2 - \frac{1}{2} \varepsilon^{-\gamma} \|\varphi(x, 0) - W_{\varphi,\varepsilon}|_{t=0}\|_{L_2(S_\varepsilon)}^2. \end{aligned} \quad (4.8)$$

Поскольку  $W_{\varphi,\varepsilon}|_{t=0} = \varphi(x, 0) - H_\varphi^{\varepsilon,j}(0)$  на  $S_\varepsilon$  и  $H_\varphi^{\varepsilon,j}(0) = 0$ , последнее слагаемое равно нулю.

Ввиду того, что (2.5) и (4.7) при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , заключаем, что

$$\begin{aligned} \int_{Q_\varepsilon^T} (\partial_t \varphi - \partial_t W_{\varphi, \varepsilon})(\varphi - W_{\varphi, \varepsilon} - u_\varepsilon) dx dt &\rightarrow \int_{Q^T} \partial_t \varphi (\varphi - u_0) dx dt, \\ \int_{Q_\varepsilon^T} f(x, t)(\varphi - W_{\varphi, \varepsilon} - u_\varepsilon) dx dt &\rightarrow \int_{Q^T} f(x, t)(\varphi - u_0) dx dt, \\ \frac{1}{2} \|\varphi(x, 0) - W_{\varphi, \varepsilon}|_{t=0}\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 &\rightarrow \frac{1}{2} \|\varphi(x, 0)\|_{L^2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (4.9)$$

Используя определение  $W_{\varphi, \varepsilon}$ , мы получим

$$\mathcal{J}_\varepsilon = \varepsilon^{-\gamma} \int_0^T \int_{S_\varepsilon} \partial_t (\varphi - W_{\varphi, \varepsilon})(\varphi - W_{\varphi, \varepsilon} - u_\varepsilon) ds dt = \varepsilon^{-\gamma} \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{S_\varepsilon^j} \frac{d}{dt} H_\varphi^{\varepsilon, j}(t) (H_\varphi^{\varepsilon, j}(t) - u_\varepsilon) ds dt. \quad (4.10)$$

Тогда будем иметь

$$\begin{aligned} \int_{Q_\varepsilon^T} \nabla(\varphi - W_{\varphi, \varepsilon}) \nabla(\varphi - W_{\varphi, \varepsilon} - u_\varepsilon) dx dt &= \\ &= \int_{Q_\varepsilon^T} \nabla \varphi \nabla(\varphi - W_{\varphi, \varepsilon} - u_\varepsilon) dx dt - \int_{Q_\varepsilon^T} \nabla W_{\varphi, \varepsilon} \nabla(\varphi - W_{\varphi, \varepsilon} - u_\varepsilon) dx dt. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Используя (2.5) и (4.7), мы получаем для первого члена в (4.11), что при  $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\int_{Q_\varepsilon^T} \nabla \varphi \nabla(\varphi - W_{\varphi, \varepsilon} - u_\varepsilon) dx dt \rightarrow \int_{Q^T} \nabla \varphi \nabla(\varphi - u_0) dx dt. \quad (4.12)$$

Затем переходим ко второму члену в (4.11). Сначала, используя свойства функций  $w_\varepsilon^j$ , получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 &= \int_{Q_\varepsilon^T} \nabla W_{\varphi, \varepsilon} \nabla(\varphi - W_{\varphi, \varepsilon} - u_\varepsilon) dx dt = \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} \nabla W_{\varphi, \varepsilon} \nabla(\varphi - W_{\varphi, \varepsilon} - u_\varepsilon) dx dt = \\ &= \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} \nabla w_\varepsilon^j \nabla((\varphi(P_\varepsilon^j, t) - H_\varphi^{\varepsilon, j})(\varphi - W_{\varphi, \varepsilon} - u_\varepsilon)) dx dt + \kappa_{1, \varepsilon}, \end{aligned} \quad (4.13)$$

где

$$\kappa_{1, \varepsilon} = \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} \nabla(w_\varepsilon^j(\varphi(x, t) - \varphi(P_\varepsilon^j, t))) \nabla(\varphi - W_{\varphi, \varepsilon} - u_\varepsilon) dx dt.$$

Далее покажем, что  $\kappa_{1, \varepsilon} \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Действительно,  $|\varphi(x, t) - \varphi(P_\varepsilon^j, t)| \leq K_1 |x - P_\varepsilon^j| \leq K_2 \varepsilon$  при  $x \in T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}$ , где константа  $K_2$  не зависит от  $\varepsilon$ . Используя эту оценку, получаем

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} (\varphi(x, t) - \varphi(P_\varepsilon^j, t)) \nabla w_\varepsilon^j \nabla(\varphi - W_{\varphi, \varepsilon} - u_\varepsilon) dx dt \right| &\leq \\ &\leq K \varepsilon \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} (\|\nabla w_\varepsilon^j\|_{L^2(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j})}^2 + \|\nabla(\varphi - W_{\varphi, \varepsilon} - u_\varepsilon)\|_{L^2(T_{\varepsilon/4}^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j})}^2) \leq \\ &\leq K \varepsilon (\|\nabla W_\varepsilon\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2 + \|\nabla(\varphi - W_{\varphi, \varepsilon} - u_\varepsilon)\|_{L^2(\Omega_\varepsilon)}^2) \leq K \varepsilon \rightarrow 0 \end{aligned}$$

при  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Поскольку функция  $W_\varepsilon$  стремится к 0 сильно в  $L^2(\Omega)$ , имеем

$$\sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{T_\varepsilon^j \setminus \overline{G_\varepsilon^j}} w_\varepsilon^j \nabla(\varphi(x, t) - \varphi(P_\varepsilon^j, t)) \nabla(\varphi - W_{\varphi, \varepsilon} - u_\varepsilon) dx dt = \int_0^T \int_{\Omega_\varepsilon} W_\varepsilon \nabla \varphi \nabla(\varphi - W_{\varphi, \varepsilon} - u_\varepsilon) dx dt \rightarrow 0.$$

Учитывая полученные сходимости, заключаем, что  $\kappa_{1, \varepsilon} \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Используя формулу Грина и определение  $w_\varepsilon^j$ , сделаем преобразование

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_1 = & \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{\partial T_{\varepsilon/4}^j} \partial_\nu w_\varepsilon^j (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - H_\varphi^{\varepsilon, j}) (\varphi - W_{\varphi, \varepsilon} - u_\varepsilon) ds dt + \\ & + \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{S_\varepsilon^j} \partial_\nu w_\varepsilon^j (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - H_\varphi^{\varepsilon, j}) (\varphi - W_{\varphi, \varepsilon} - u_\varepsilon) ds dt + \kappa_{1, \varepsilon}, \end{aligned} \quad (4.14)$$

где  $\kappa_{1, \varepsilon} \rightarrow 0$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Используя явную формулу, для функций  $w_\varepsilon^j$  получаем

$$\partial_\nu w_\varepsilon^j |_{\partial T_{\varepsilon/4}^j} = -(n-2) \frac{\varepsilon C_0^{n-2} 2^{2n-2}}{1 - a_\varepsilon^{n-2} \varepsilon^{2-n} 2^{2n-4}}, \quad \partial_\nu w_\varepsilon^j |_{S_\varepsilon^j} = (n-2) \frac{\varepsilon^{-\frac{n}{n-2}}}{C_0(1 - a_\varepsilon^{n-2} \varepsilon^{2-n} 2^{2n-4})}. \quad (4.15)$$

Подставляя (4.15) в интегральные выражения, имеем

$$\begin{aligned} \mathcal{I}_{1, \varepsilon} = & -\frac{C_0^{n-2} 2^{2n-2} (n-2)}{1 - a_\varepsilon^{n-2} \varepsilon^{2-n} 2^{2n-4}} \varepsilon \sum_{j \in \Upsilon} \int_0^T \int_{\partial T_{\varepsilon/4}^j} (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - H_\varphi^{\varepsilon, j}) (\varphi - u_\varepsilon) ds dt, \\ \mathcal{I}_{2, \varepsilon} = & \frac{\varepsilon^{-\frac{n}{n-2}} C_0^{-1} (n-2)}{1 - a_\varepsilon^{n-2} \varepsilon^{2-n} 2^{2n-4}} \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{S_\varepsilon^j} (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - H_\varphi^{\varepsilon, j}) (H_\varphi^{\varepsilon, j} - u_\varepsilon) ds dt. \end{aligned} \quad (4.16)$$

**4.3. Вывод эффективного члена.** Чтобы найти  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{I}_{1, \varepsilon}$ , воспользуемся леммой, введенной в [3]:

**Лемма 4.1.** Пусть  $h_\varepsilon \in H_0^1(\Omega)$  и  $h_\varepsilon \rightharpoonup h_0$  слабо в  $H_0^1(\Omega)$  при  $\varepsilon \rightarrow 0$ , тогда

$$2^{2n-4} \varepsilon \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_{\partial T_{\varepsilon/4}^j} h_\varepsilon ds \rightarrow \omega_n \int_\Omega h dx \text{ as } \varepsilon \rightarrow 0,$$

где  $\omega_n$  — площадь единичной сферы в  $\mathbb{R}^n$ .

Получим

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mathcal{I}_{1, \varepsilon} = -(n-2) C_0^{n-2} \omega_n \int_0^T \int_\Omega (\varphi(x, t) - H_\varphi(x, t)) (\varphi - u_0) dx dt. \quad (4.17)$$

**4.4. Граничные интегралы включения.** Тогда мы имеем

$$\mathcal{I}_{2, \varepsilon} = Q_\varepsilon + (n-2) C_0^{-1} \varepsilon^{-\gamma} \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{S_\varepsilon^j} (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - H_\varphi^{\varepsilon, j}) (H_\varphi^{\varepsilon, j} - u_\varepsilon) ds dt, \quad (4.18)$$

где

$$Q_\varepsilon = (n-2) \frac{(a_\varepsilon^{n-2} \varepsilon^{2-n} 2^{2n-4}) C_0^{-1} \varepsilon^{-\gamma}}{1 - a_\varepsilon^{n-2} \varepsilon^{2-n} 2^{2n-4}} \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{S_\varepsilon^j} (\varphi(P_\varepsilon^j, t) - H_\varphi^{\varepsilon, j}) (H_\varphi^{\varepsilon, j} - u_\varepsilon) ds dt. \quad (4.19)$$

Легко видеть, что  $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} Q_\varepsilon = 0$ .

Поскольку функции  $H_\varphi^{\varepsilon,j}$  удовлетворяют задаче (4.4), имеем

$$\left( \frac{d}{dt} H_\varphi^{\varepsilon,j} + \mathcal{B}_n H_\varphi^{\varepsilon,j} - \mathcal{B}_n \varphi(P_\varepsilon^j, t) \right) u_\varepsilon \geq 0.$$

Следовательно, мы получаем

$$\varepsilon^{-\gamma} \sum_{j \in \Upsilon_\varepsilon} \int_0^T \int_{S_\varepsilon^j} \left( \frac{d}{dt} H_\varphi^{\varepsilon,j} + \mathcal{B}_n H_\varphi^{\varepsilon,j} - \mathcal{B}_n \varphi(P_\varepsilon^j, t) \right) (H_\varphi^{\varepsilon,j}(t) - u_\varepsilon) ds dt \leq 0. \quad (4.20)$$

**4.5. Усредненное уравнение для  $u_0$ .** Используя (4.9)–(4.20), мы заключаем, что  $u_0$  удовлетворяет следующему интегральному неравенству:

$$\begin{aligned} \int_{Q^T} \partial_t \varphi (\varphi - u_0) dx dt + \int_{Q^T} \nabla \varphi \nabla (\varphi - u_0) dx dt + \mathcal{A}_n \int_{Q^T} (\varphi(x, t) - H_\varphi(x, t)) (\varphi - u_0) dx dt \geq \\ \geq \int_{Q^T} f(x, t) (\varphi - u_0) dx dt - \frac{1}{2} \|\varphi(x, 0)\|_{L_2(\Omega)}^2. \end{aligned} \quad (4.21)$$

Учитывая, что линейная оболочка функций

$$\{\psi(x)\eta(t) : \psi \in C_0^\infty(\Omega), \eta \in C^1([0, T])\}$$

плотна в пространстве  $\mathcal{H} = \{u \in L^2(0, T; H_0^1(\Omega)) \mid \partial_t u \in L^2(0, T; H^{-1}(\Omega))\}$ , получаем, что неравенство (4.21) справедливо для произвольной функции  $\varphi \in \mathcal{H}$ . Тогда возьмем  $\varphi = u_0 \pm \lambda w$ , где  $\lambda \geq 0$ ,  $w \in \mathcal{H}$ , в качестве пробной функции в неравенстве (4.21) и перейдем к пределу при  $\lambda \rightarrow 0$ . Отсюда, переходя к пределу, заключаем, что  $u_0$  удовлетворяет интегральному тождеству

$$\int_0^T \langle \partial_t u_0, w \rangle_\Omega dt + \int_{Q^T} \nabla u_0 \nabla w dx dt + \mathcal{A}_n \int_{Q^T} (u_0 - H_{u_0}) w dx dt = \int_{Q^T} f(x, t) w dx dt, \quad (4.22)$$

и  $u_0(x, 0) = 0$  при п.в.  $x \in \Omega$ . Следовательно,  $u_0$  — слабое решение задачи (2.6).

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бекмаганбетов К. А., Чепыжов В. В., Чечкин Г. А. Сильная сходимость аттракторов системы реакции-диффузии с быстро осциллирующими членами в ортотропной пористой среде // Изв. РАН. Сер. Мат. — 2022. — 86, № 6. — С. 47–78.
2. Диаз Ж. И., Гомез-Кастро Д., Подольский А. В., Шапошникова Т. А. Усреднение вариационных неравенств типа Синьорини для р-Лапласиана в перфорированной области для случая  $p \in (1, 2)$  // Докл. РАН — 2017. — 473, № 4. — С. 395–400.
3. Зубова М. Н., Шапошникова Т. А. Об усреднении краевых задач в перфорированных областях с третьим граничным условием и об изменении характера нелинейности задачи в результате усреднения // Дифф. уравн. — 2011. — 47, № 1. — С. 79–91.
4. Зубова М. Н., Шапошникова Т. А. Усреднение уравнения диффузии в области, перфорированной вдоль  $(n - 1)$ -мерного многообразия с динамическими краевыми условиями на границе перфораций: критический случай // Докл. РАН — 2019. — 99, № 3. — С. 245–251.
5. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. — М.: УРСС, 2010.
6. Angulano M. Existence, uniqueness and homogenization of nonlinear parabolic problems with dynamical boundary conditions in perforated media // ArXiv. — 2017. — 1712.01183.
7. Arrieta J. M., Quittner P., Rodriguez-Bernal A. Parabolic problems with nonlinear dynamical boundary conditions and singular initial data // Differ. Integral Equ. — 2011. — 14, № 12. — С. 1487–1510.
8. Bandle C., von Below J., Reichel W. Parabolic problems with dynamical boundary conditions: eigenvalue expansions and blow up // Atti Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., IX. Ser., Rend. Lincei, Mat. Appl. — 2006. — 17, № 1. — С. 35–67.
9. Bejenaru I., Diaz J. I., Vrabie I. I. An abstract approximate controllability result and applications to elliptic and parabolic systems with dynamical boundary conditions // Electron. J. Differ. Equ. — 2001. — 50. — С. 1–19.



10. *Bekmaganbetov K. A., Chechkin G. A., Chepyzov V. V.* Attractors and a «strange term» in homogenized equation// *C. R. Mecanique* — 2020. — 348, № 5. — С. 351–359.
11. *Bekmaganbetov K. A., Chechkin G. A., Chepyzov V. V.* «Strange term» in homogenization of attractors of reaction-diffusion equation in perforated domain// *Chaos Solitons Fractals*. — 2020. — 140. — 110208.
12. *Bekmaganbetov K. A., Chechkin G. A., Toleubay A. M.* Attractors of 2D Navier–Stokes system of equations in a locally periodic porous medium// *Bull. Karaganda Univ. Math.* — 2022. — № 3. — С. 35–50.
13. *Conca C., Murat F., Timofte C.* A generalized strange term Signorini’s type problems// *ESAIM: Math. Model. Numer. Anal.* — 2003. — 3, № 57. — С. 773–805.
14. *Diaz J. I., Gomez-Castro D., Podolskiy A. V., Shaposhnikova T. A.* Homogenization of a net of periodic critically scaled boundary obstacles related to reverse osmosis «nano-composite» membranes// *Adv. Nonlinear Anal.* — 2018. — 9. — С. 193–227.
15. *Diaz J. I., Gomez-Castro D., Shaposhnikova T. A., Zubova M. N.* A nonlocal memory strange term arising in the critical scale homogenisation of a diffusion equation with a dynamic boundary condition// *Electron. J. Differ. Equ.* — 2019. — 2019. — 77.
16. *Diaz J. I., Shaposhnikova T. A., Zubova M. N.* A strange non-local monotone operator arising in the homogenization of a diffusion equation with dynamic nonlinear boundary conditions on particles of critical size and arbitrary shape// *Electron. J. Differ. Equ.* — 2022. — 2022. — 52.
17. *Escher J.* Quasilinear parabolic systems with dynamical boundary conditions// *Commun. Part. Differ. Equ.* — 1993. — 18. — С. 1309–1364.
18. *Gomez D., Lobo M., Shaposhnikova T. A., Zubova M. N.* On critical parameters in homogenization for nonlinear fluxes in perforated domains by thin tubes and related spectral problems// *Math. Methods Appl. Sci.* — 2015. — 38, № 12. — С. 2606–2629.
19. *Gomez D., Perez M. E., Podolskii A. V., Shaposhnikova T. A.* Homogenization of variational inequalities for the p-Laplace operator in perforated media along manifolds// *Appl. Math. Optim.* — 2017. — 475. — С. 1–19.
20. *Timofte C.* Parabolic problems with dynamical boundary conditions in perforated media// *Math. Model. Anal.* — 2003. — 8. — С. 337–350.
21. *Wang W., Duan J.* Homogenized dynamics of stochastic partial differential equations with dynamical boundary conditions// *Commun. Math. Phys.* — 2007. — 275, № 1. — С. 163–186.

А. В. Подольский

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: AVPodolskiy@yandex.ru

Т. А. Шапошникова

Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: shaposh.tan@mail.ru

DOI 10.22363/2413-3639-2022-68-4-671-685

UDC 517.956.225

## Homogenization of a parabolic equation in a perforated domain with a unilateral dynamic boundary condition: critical case

A. V. Podolskiy and T. A. Shaposhnikova

*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

In this paper, we study the homogenization of a parabolic equation given in a domain perforated by “tiny” balls. On the boundary of these perforations, a unilateral dynamic boundary constraints are specified. We address the so-called “critical” case that is characterized by a relation between the coefficient in the boundary condition, the period of the structure and the size of the holes. In this case, the homogenized equation contains a nonlocal “strange” term. This term is obtained as a solution of the variational problem involving ordinary differential operator.

**Keywords:** homogenization of parabolic equation, perforated domain, critical case, strange nonlocal term

**For citation:** A. V. Podolskiy, T. A. Shaposhnikova, “Homogenization of a parabolic equation in a perforated domain with a unilateral dynamic boundary condition: critical case,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2022, vol. **68**, No. 4, 671–685. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-671-685>

### REFERENCES

1. K. A. Bekmaganbetov, V. V. Chepyzhov, and G. A. Chechkin, “Sil’naya skhodimost’ attraktorov sistemy reatsii-diffuzii s bystro ostsilliruyushchimi chlenami v ortotropnoy poristoy srede” [Strong convergence of attractors of a reaction-diffusion system with rapidly oscillating terms in an orthotropic porous medium], *Izv. RAN. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 2022, **86**, No. 6, 47–78 (in Russian).
2. J. I. Diaz, D. Gomez-Castro, A. V. Podolskiy, and T. A. Shaposhnikova, “Usrednenie variatsionnykh neravenstv tipa Sin’orini dlya p-Laplasiana v perforirovannoy oblasti dlya sluchaya  $p \in (1, 2)$ ” [Homogenization of Signorini’s type variational inequalities for the p-Laplacian in a perforated domain for the case  $p \in (1, 2)$ ], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2017, **473**, № 4, 395–400 (in Russian).
3. M. N. Zubova and T. A. Shaposhnikova, “Ob usrednenii kraevykh zadach v perforirovannykh oblastiakh s tret’im granichnym usloviey i ob izmenenii kharaktera nelineynosti zadachi v rezul’tate usredneniya” [On the homogenization of boundary-value problems in perforated domains with the third boundary condition and on the change in the nature of the nonlinearity of the problem as a result of homogenization], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2011, **47**, No. 1, 79–91 (in Russian).
4. M. N. Zubova and T. A. Shaposhnikova, “Usrednenie uravneniya diffuzii v oblasti, perforirovannoy vdol’  $(n - 1)$ -mernogo mnogoobraziya s dinamicheskimi kraevymi usloviyami na granitse perforatsiy: kriticheskiy sluchay” [Homogenization the diffusion equation in a domain perforated along an  $(n - 1)$ -dimensional manifold with dynamic boundary conditions on the boundary of perforations: critical case], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2019, **99**, No. 3, 245–251 (in Russian).
5. J.-L. Lions, *Nekotorye metody resheniya nelineynykh kraevykh zadach* [Some Methods for Solving Nonlinear Boundary-Value Problems], URSS, Moscow, 2010 (Russian translation).
6. M. Angulano, “Existence, uniqueness and homogenization of nonlinear parabolic problems with dynamical boundary conditions in perforated media,” *ArXiv*, 2017, 1712.01183.



7. J. M. Arrieta, P. Quittner, and A. Rodriguez-Bernal, “Parabolic problems with nonlinear dynamical boundary conditions and singular initial data,” *Differ. Integral Equ.*, 2011, **14**, No. 12, 1487–1510.
8. C. Bandle, J. von Below, and W. Reichel, “Parabolic problems with dynamical boundary conditions: eigenvalue expansions and blow up,” *Atti Accad. Naz. Lincei, Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., IX. Ser., Rend. Lincei, Mat. Appl.*, 2006, **17**, No. 1, 35–67.
9. I. Bejenaru, J. I. Diaz, and I. I. Vrabie, “An abstract approximate controllability result and applications to elliptic and parabolic systems with dynamical boundary conditions,” *Electron. J. Differ. Equ.*, 2001, **50**, 1–19.
10. K. A. Bekmaganbetov, G. A. Chechkin, and V. V. Chepyzov, “Attractors and a «strange term» in homogenized equation,” *C. R. Mecanique*, 2020, **348**, No. 5, 351–359.
11. K. A. Bekmaganbetov, G. A. Chechkin, and V. V. Chepyzov, “«Strange term» in homogenization of attractors of reaction-diffusion equation in perforated domain,” *Chaos Solitons Fractals*, 2020, **140**, 110208.
12. K. A. Bekmaganbetov, G. A. Chechkin, and A. M. Toleubay, “Attractors of 2D Navier–Stokes system of equations in a locally periodic porous medium,” *Bull. Karaganda Univ. Math.*, 2022, No. 3, 35–50.
13. C. Conca, F. Murat, and C. Timofte, “A generalized strange term Signorini’s type problems,” *ESAIM: Math. Model. Numer. Anal.*, 2003, **3**, No. 57, 773–805.
14. J. I. Diaz, D. Gomez-Castro, A. V. Podolskiy, and T. A. Shaposhnikova, “Homogenization of a net of periodic critically scaled boundary obstacles related to reverse osmosis «nano-composite» membranes,” *Adv. Nonlinear Anal.*, 2018, **9**, 193–227.
15. J. I. Diaz, D. Gomez-Castro, T. A. Shaposhnikova, and M. N. Zubova, “A nonlocal memory strange term arising in the critical scale homogenisation of a diffusion equation with a dynamic boundary condition,” *Electron. J. Differ. Equ.*, 2019, **2019**, 77.
16. J. I. Diaz, T. A. Shaposhnikova, and M. N. Zubova, “A strange non-local monotone operator arising in the homogenization of a diffusion equation with dynamic nonlinear boundary conditions on particles of critical size and arbitrary shape,” *Electron. J. Differ. Equ.*, 2022, **2022**, 52.
17. J. Escher, “Quasilinear parabolic systems with dynamical boundary conditions,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 1993, **18**, 1309–1364.
18. D. Gomez, M. Lobo, T. A. Shaposhnikova, and M. N. Zubova, “On critical parameters in homogenization for nonlinear fluxes in perforated domains by thin tubes and related spectral problems,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 2015, **38**, No. 12, 2606–2629.
19. D. Gomez, M. E. Perez, A. V. Podolskii, and T. A. Shaposhnikova, “Homogenization of variational inequalities for the p-Laplace operator in perforated media along manifolds,” *Appl. Math. Optim.*, 2017, **475**, 1–19.
20. C. Timofte, “Parabolic problems with dynamical boundary conditions in perforated media,” *Math. Model. Anal.*, 2003, **8**, 337–350.
21. W. Wang and J. Duan, “Homogenized dynamics of stochastic partial differential equations with dynamical boundary conditions,” *Commun. Math. Phys.*, 2007, **275**, No. 1, 163–186.

A. V. Podolskiy

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E-mail: AVPodolskiy@yandex.ru

T. A. Shaposhnikova

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E-mail: shaposh.tan@mail.ru

## ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ СИСТЕМ С ЗАПАЗДЫВАЮЩИМ АРГУМЕНТОМ В МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ИММУНОЛОГИИ

М. Ю. ХРИСТИЧЕНКО, Ю. М. НЕЧЕПУРЕНКО, Д. С. ГРЕБЕННИКОВ, Г. А. БОЧАРОВ

*Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН, Москва, Россия*

Данная работа посвящена разработанной авторами технологии вычисления при фиксированных значениях параметров и трассирования по параметрам стационарных решений систем с запаздыванием и анализа их устойчивости. Обсуждаются результаты применения этой технологии к модели противовирусного иммунного ответа Марчука–Петрова со значениями параметров, соответствующими инфекции гепатита В. Впервые показано наличие свойств бистабильности и гистерезиса в данной модели.

**Ключевые слова:** модель противовирусного иммунного ответа Марчука–Петрова, запаздывающий аргумент, стационарные решения, трассирование по параметрам, численное моделирование, инфекция гепатита В, бистабильность, гистерезис

**Для цитирования:** М. Ю. Христинченко, Ю. М. Нечепуренко, Д. С. Гребенников, Г. А. Бочаров. Численный анализ стационарных решений систем с запаздывающим аргументом в математической иммунологии // *Соврем. мат. Фундам. направл.* 2022. Т. 68, № 4. С. 686–703. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-686-703>

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Математическое моделирование является важнейшим аналитическим инструментом современной математической иммунологии [7, 13]. Интенсивные исследования в области инфекции вирусами SARS-CoV-2 последних лет демонстрируют возможности математических моделей и возникающие задачи по развитию вычислительных методов и технологий их исследования [10]. Фундаментальной по значимости проблемой современной иммунологии является изучение механизмов развития неблагоприятных форм течения вирусных инфекций, в частности, хронического вирусного гепатита В. Известно, что хронический вирусный гепатит является многофакторным заболеванием [8]. Ранее нами путем анализа чувствительности решений математической модели противовирусного иммунного ответа было установлено, что изменение в параметрах активации антигенпрезентирующей функции макрофагов может служить одним из факторов перехода от острой формы инфекции с выздоровлением, к хронической персистенции вирусов [4]. Вместе с тем, систематическое исследование характеристик хронического вирусного гепатита В остается недостаточно изученной проблемой. В частности, необходимо находить области в пространстве параметров математических моделей, отвечающие бистабильным или мультистабильным режимам взаимодействия инфекции и иммунной системы организма, а также изучать возможности переходов между ними. Ключевым для анализа данных свойств является наличие эффективных

методов вычисления и численного анализа устойчивости стационарных решений нелинейных систем дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, используемых для моделирования вирусных инфекций.

Бистабильность, как возможность системы «вирус — организм человека» сосуществовать в двух устойчивых равновесных состояниях, является чрезвычайно важным свойством, поскольку позволяет решать задачу функционального лечения вирусной инфекции путем перехода из хронического состояния с более высокой вирусной нагрузкой в более благоприятное состояние с низкой вирусной нагрузкой за счет активации компонент иммунной системы. Биологические аргументы в подтверждение реалистичности данной концепции представлены в работе [3]. Следует отметить, что перевод инфекционного процесса в состояние с более низкой вирусной нагрузкой является нетривиальной практической задачей, для решения которой необходима активация двух звеньев иммунитета — гуморального и Т-клеточного. При этом мультипликативный эффект вклада антител и цитотоксических Т лимфоцитов в снижение уровня инфекционного процесса позволяет снизить пороги численности данных популяций, требуемые для контроля инфекции на более низком уровне. Изучение принципиальных условий би- и (или) мультистабильности инфекционного процесса и кооперативности звеньев иммунитета в обеспечении контроля уровня вирусной нагрузки возможно провести на основе математической модели вирусного заболевания с применением методов бифуркационного анализа.

Математическая модель противовирусного иммунного ответа, разработанная Г.И. Марчуком и Р.В. Петровым [14], представляет собой эффективный инструмент для исследования условий сосуществования стационарных состояний хронической вирусной инфекции, поскольку обладает необходимой для этого полнотой описания реакций адаптивного иммунитета и калибрована по данным острой инфекции вирусами гепатита В, см. [15]. Ранее с помощью данной модели были изучены отдельные кинетические механизмы хронизации вирусного гепатита В по данным двух вариантов динамики инфекции (острой и хронической) у добровольцев, см. [4]. На основе модели был предсказан мультипликативный эффект антител и цитотоксических Т-клеток в обеспечении защиты организма от вирусной инфекции для гриппа А, вирусного гепатита В и валидирован по данным инфекции ВИЧ, см. [2]. Сформулированная в виде среднеразмерной системы дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом, данная модель является полилинейной функцией от  $n$  аргументов ( $n \leq 4$ ). Это предполагает возможность существования до четырех нетривиальных положений равновесия и, следовательно, наличие мультистабильности в пространстве состояний модели. Предварительное исследование существования стационарных решений в модели Марчука—Петрова было выполнено нами ранее в работах [12, 18]. Целью настоящей работы является развитие методов численного поиска корней систем нелинейных алгебраических уравнений, соответствующих положениям равновесия модели, и анализа их локальной устойчивости. С помощью разработанной технологии будет проведено полноценное исчерпывающее исследование условий сосуществования нескольких стационарных решений и переходов между ними, что необходимо для формирования механизменного понимания различных режимов стационарной динамики хронического вирусного гепатита В.

Работа состоит из шести разделов. В разделе 2 кратко описана рассматриваемая математическая модель противовирусного иммунного ответа Марчука—Петрова. В разделе 3 описан и обоснован предлагаемый метод вычисления и трассирования стационарных решений по параметрам модели. Результаты вычисления стационарных решений модели Марчука—Петрова и анализа зависимости вычисленных решений от параметров модели приводятся в разделе 4, где также дается их содержательная интерпретация. Итог работы подводится в заключительном разделе 5.

## 2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ПРОТИВОВИРУСНОГО ИММУННОГО ОТВЕТА МАРЧУКА—ПЕТРОВА

Математическая модель противовирусного иммунного ответа Марчука—Петрова сформулирована в [4, 14] в виде системы нелинейных дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. Система описывает скорость изменения во времени концентрации следующих популяций: вирусных частиц  $V_f$ ; зараженных вирусами клеток органа-мишени  $C_V$ ; разрушенных клеток органа-мишени  $m$ ; антигенпрезентирующих клеток (макрофагов)  $M_V$ ;  $CD4^+$  Т-лимфоцитов — помощников клеточного иммунитета (Th1)  $H_E$ ;  $CD4^+$  Т-лимфоцитов — помощников гуморального

иммунитета (Th2)  $H_B$ ;  $CD8^+$  Т-лимфоцитов — киллеров  $E$ , уничтожающих зараженные вирусом клетки; В-лимфоцитов  $B$ ; плазматических клеток  $P$ , производящих антитела; антител  $F$ , нейтрализующих вирусы. Будем предполагать далее, что переменные  $V_f$  и  $F$  имеют размерность частиц/мл, а остальные переменные — клеток/мл.

Уравнения модели построены на основе балансных соотношений для скоростей процессов рождения, дифференцировки и гибели компонентов системы «вирус — организм хозяина». Первые три уравнения модели описывают кинетику распространения инфекции в клетках органа-мишени с учетом действия факторов иммунной защиты. В уравнении для вирусной популяции, наряду с секрецией инфекционных вирусных частиц зараженными клетками в течение их функционирования (первое слагаемое в первом уравнении), описывается процесс высвобождения вирусных частиц (например, в случае вирусного гепатита В речь идет о 22-нм частицах HBsAg) в результате разрушения инфицированных клеток  $CD8^+$  Т-лимфоцитами-киллерами. С помощью функции  $\xi(m)$  учитывается ослабление иммунного ответа вследствие разрушения зараженных клеток органа-мишени. Активация  $CD4^+$  Т-лимфоцитов-помощников происходит в результате взаимодействия с антигенпрезентирующими клетками  $M_V$ , а активация  $CD8^+$  Т-лимфоцитов и В-лимфоцитов предполагает наличие сигналов от антигенпрезентирующих клеток и  $CD4^+$  Т-лимфоцитов-помощников. Соответственно, скорости этих процессов описывается билинейными и трилинейными функциями с запаздывающим аргументом, учитывающим длительность прохождения делящимися клетками всех фаз клеточного цикла. Остальные взаимодействия параметризованы с применением закона действующих масс, схемы «хищник — жертва» и экспоненциальной кинетики естественного убывания численности антител, вирусов и клеток.

Система уравнений модели имеет следующий вид:

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt}V_f(t) &= \nu C_V(t) + nb_{CE}C_V(t)E(t) - \gamma_{VF}V_f(t)F(t) - \gamma_{VM}V_f(t) - \\
&\quad - \gamma_{VC}V_f(t) [C^0 - C_V(t) - m(t)], \\
\frac{d}{dt}C_V(t) &= \sigma V_f(t) [C^0 - C_V(t) - m(t)] - b_{CE}C_V(t)E(t) - b_m C_V(t), \\
\frac{d}{dt}m(t) &= b_{CE}C_V(t)E(t) + b_m C_V(t) - \alpha_m m(t), \\
\frac{d}{dt}M_V(t) &= \gamma_{MV}M^0 V_f(t) - \alpha_M M_V(t), \\
\frac{d}{dt}H_E(t) &= b_H^E[\xi(m)\rho_H^E M_V(t - \tau_H^E)H_E(t - \tau_H^E) - M_V(t)H_E(t)] - \\
&\quad - b_p^{H^E} M_V(t)H_E(t)E(t) + \alpha_H^E(H_E^0 - H_E(t)), \\
\frac{d}{dt}E(t) &= b_p^E[\xi(m)\rho_E M_V(t - \tau_E)H_E(t - \tau_E)E(t - \tau_E) - M_V(t)H_E(t)E(t)] - \\
&\quad - b_{EC}C_V(t)E(t) + \alpha_E(E^0 - E(t)), \\
\frac{d}{dt}H_B(t) &= b_H^B[\xi(m)\rho_H^B M_V(t - \tau_H^B)H_B(t - \tau_H^B) - M_V(t)H_B(t)] - \\
&\quad - b_p^{H^B} M_V(t)H_B(t)B(t) + \alpha_H^B(H_B^0 - H_B(t)), \\
\frac{d}{dt}B(t) &= b_p^B[\xi(m)\rho_B M_V(t - \tau_B)H_B(t - \tau_B)B(t - \tau_B) - M_V(t)H_B(t)B(t)] + \alpha_B(B^0 - B(t)), \\
\frac{d}{dt}P(t) &= b_p^P \xi(m)\rho_P M_V(t - \tau_P)H_B(t - \tau_P)B(t - \tau_P) + \alpha_P(P^0 - P(t)), \\
\frac{d}{dt}F(t) &= \rho_F P(t) - \gamma_{FV}F(t)V_f(t) - \alpha_F F(t),
\end{aligned} \tag{2.1}$$

где  $\xi(m) = 1 - m/C^0$ . Биологический смысл параметров системы пояснен в табл. 1 и 2. Для определения решения системы при  $t > 0$  достаточно задать значения  $M_V(t)$  при  $-\tau_5 \leq t \leq 0$ , где  $\tau_5 = \max\{\tau_H^E, \tau_H^B, \tau_E, \tau_B, \tau_P\}$ , значения  $H_E(t)$  при  $-\max\{\tau_H^E, \tau_E\} \leq t \leq 0$ , значения  $E(t)$  при  $-\tau_E \leq t \leq 0$ , значения  $H_B(t)$  при  $-\max\{\tau_H^B, \tau_B, \tau_P\} \leq t \leq 0$ , значения  $B(t)$  при  $-\max\{\tau_B, \tau_P\} \leq t \leq 0$  и

Параметр	Биологический смысл параметра
$\alpha_M$	Константа скорости потери макрофагом стимулированного состояния
$\alpha_H^E$	Константа скорости потери стимулированного состояния Т-хелперами Th1
$\alpha_H^B$	Константа скорости потери стимулированного состояния Т-хелперами Th2
$\alpha_E$	Константа скорости естественной гибели цитотоксических Т-лимфоцитов-эффекторов
$\alpha_B$	Константа скорости естественной гибели В-лимфоцитов
$\alpha_P$	Константа скорости естественной гибели плазматических клеток
$\alpha_F$	Константа скорости естественной гибели антител
$\tau_H^E$	Продолжительность цикла деления Т-хелперов Th1
$\tau_H^B$	Продолжительность цикла деления Т-хелперов Th2
$\tau_E$	Продолжительность цикла делений Т-лимфоцитов-эффекторов
$\tau_B$	Продолжительность цикла делений В-лимфоцитов
$\tau_P$	Продолжительность цикла делений и дифференцировки В-лимфоцитов до появления плазматических клеток
$\rho_H^E$	Число потомков Т-хелпера Th1 в результате 1-го цикла деления
$\rho_H^B$	Число потомков Т-хелпера Th2 в результате 1-го цикла деления
$\rho_E$	Число потомков Т-лимфоцита-эффектора в результате 1-го цикла делений
$\rho_B$	Число потомков В-лимфоцита в результате 1-го цикла делений
$\rho_P$	Число плазматических клеток-потомков В-лимфоцита в результате одного цикла делений
$b_p^B$	Константа скорости стимуляции В-лимфоцита при описании числа В-лимфоцитов
$b_p^P$	Константа скорости стимуляции В-лимфоцита при описании числа плазматических клеток
$b_H^E$	Константа скорости стимуляции Т-хелпера Th1
$b_H^B$	Константа скорости стимуляции Т-хелпера Th2
$b_p^E$	Константа скорости стимуляции Т-лимфоцита-эффектора
$b_p^{HE}$	Коэффициент, характеризующий расход Т-хелперов Th1 на стимуляцию Т-лимфоцитов-эффекторов
$b_p^{HB}$	Коэффициент, характеризующий расход Т-хелперов Th2 на стимуляцию В-лимфоцитов
$\rho_F$	Константа скорости синтеза молекул IgG одной плазматической клеткой
$b_{CE}$	Константа скорости разрушения гепатоцитов Т-лимфоцитами-эффекторами
$b_{EC}$	Константа скорости гибели Т-лимфоцитов-эффекторов вследствие разрушения зараженных клеток

ТАБЛИЦА 1. Параметры развития иммунного ответа.

значения остальных переменных при  $t = 0$ . Однако для единообразия далее мы будем предполагать, что начальные значения всех переменных заданы при  $-\tau_5 \leq t \leq 0$ .

Обозначив вектор переменных системы (2.1) через

$$u(t) = (V_f(t), C_V(t), m(t), M_V(t), H_E(t), E(t), H_B(t), B(t), P(t), F(t))^T,$$

а вектор параметров через

$$p = (M^0, H_E^0, H_B^0, E^0, B^0, P^0, C^0, \alpha_M, \alpha_H^E, \alpha_H^B, \alpha_E, \alpha_B, \alpha_P, \alpha_F, \rho_H^E, \rho_H^B, \rho_E, \rho_B, \rho_P, \rho_F, b_H^E, b_H^B, b_p^E, b_p^B, b_p^P, \gamma_{MV}, \gamma_{FV}, \sigma, b_{CE}, b_m, \alpha_m, \nu, n, \gamma_{VC}, \gamma_{VM}, \gamma_{VF}, b_p^{HE}, b_p^{HB}, b_{EC})^T,$$

Parameter	The biological meaning of the parameter
$\alpha_M$	Rate constant for the loss of the stimulated state by the macrophage
$\alpha_H^E$	Rate constant of loss of stimulated state by Th1 T-helpers
$\alpha_H^B$	Rate constant of loss of stimulated state by Th2 T-helpers
$\alpha_E$	Rate constant of natural death of cytotoxic T-lymphocytes-effectors
$\alpha_B$	Rate constant of natural death of B-lymphocytes
$\alpha_P$	Rate constant of natural death of plasma cells
$\alpha_F$	Rate constant of natural death of antibodies
$\tau_H^E$	Duration of the division cycle of Th1 T-helpers
$\tau_H^B$	Duration of the division cycle of Th2 T-helpers
$\tau_E$	Duration of the division cycle of T-lymphocyte-effectors
$\tau_B$	Duration of the division cycle of B-lymphocytes
$\tau_P$	Duration of the cycle of divisions and differentiation of B-lymphocytes before the appearance of plasma cells
$\rho_H^E$	Number of children of a Th1 T-helper as a result of the 1th division cycle
$\rho_H^B$	Number of children of a Th2 T-helper as a result of the 1th division cycle
$\rho_E$	Number of children of a T-lymphocyte-effector as a result of the 1th division cycle
$\rho_B$	Number of children of a B-lymphocyte as a result of the 1th division cycle
$\rho_P$	Number of plasma cells-descendants of a B-lymphocyte as a result of one cycle of divisions
$b_p^B$	B-lymphocyte stimulation rate constant in describing the number of B-lymphocytes
$b_p^P$	B-lymphocyte stimulation rate constant in describing the number of plasma cells
$b_H^E$	Th1 T-helper stimulation rate constant
$b_H^B$	Th1 T-helper stimulation rate constant
$b_p^E$	T-lymphocyte-effector stimulation rate constant
$b_p^{HE}$	Coefficient characterizing the consumption of Th1 T-helpers for stimulation of T-lymphocytes-effectors
$b_p^{HB}$	Coefficient characterizing the consumption of Th2 T-helpers for stimulation of T-lymphocytes-effectors
$\rho_F$	Rate constant of synthesis of IgG molecules by one plasma cell
$b_{CE}$	Rate constant of destruction of hepatocytes by T-lymphocytes-effectors
$b_{EC}$	Rate constant of death of T-lymphocyte-effectors due to the destruction of infected cells

TABLE 1. Parameters of immune response development.

рассматриваемую модель можно записать в виде

$$\frac{du}{dt}(t) = \mathcal{F}(u(t), u(t - \tau_1), \dots, u(t - \tau_5), \mathbf{p}), \quad (2.2)$$

где  $\mathcal{F} : \mathbb{R}^{10 \times (6)} \rightarrow \mathbb{R}^{10}$  — рациональная 10-компонентная вектор-функция, а  $0 < \tau_1 < \dots < \tau_5$  — задержки.

Задача Коши для системы (2.1) с неотрицательными начальными значениями и неотрицательными параметрами глобально разрешима на любом конечном временном интервале. Данное утверждение можно доказать методом шагов Беллмана, рассматривая линейную систему обыкновенных дифференциальных уравнений, мажорирующую правую часть исходной системы, см. [1, 13]. Кроме того, в этих работах было доказано, что если дополнительно выполнены неравенства  $\gamma_{VM} > 0$  и  $C_V(0) + m(0) \leq C^0$ , то компоненты  $V_f(t), M_V(t), C_V(t), m(t)$  решения задачи Коши для этой системы ограничены глобально, причем  $C_V(t) + m(t) \leq C^0$  при всех  $t > 0$ .



Параметр	Биологический смысл параметра
$b_m$	Константа скорости разрушения зараженных гепатоцитов вследствие цитопатичности вирусов
$\alpha_m$	Константа скорости регенерации гепатоцитов
$M^0$	Концентрация Ia-несущих макрофагов в лимфоузле
$H_E^0$	Концентрация специфических Т-хелперов Th1 в лимфоузле
$H_B^0$	Концентрация специфических Т-хелперов Th2 в лимфоузле
$E^0$	Концентрация специфических предшественников для Т-лимфоцитов-эффекторов в лимфоузле
$B^0$	Концентрация специфических В-лимфоцитов в лимфоузле
$P^0$	Концентрация специфических плазматических клеток в лимфоузле
$C^0$	Концентрация гепатоцитов в печени
$\gamma_{MV}$	Константа скорости антигенной стимуляции макрофагов в лимфоузле
$\gamma_{VM}$	Константа скорости связывания антигенных частиц макрофагами лимфоузла
$\gamma_{FV}$	Константа скорости связывания 1 молекулы IgG с частицей HBsAg
$\gamma_{VF}$	Константа скорости нейтрализации вируса гепатита молекулами IgG
$\sigma$	Константа скорости заражения гепатоцитов
$\nu$	Константа скорости секреции частиц HBsAg одним гепатоцитом в сутки
$n$	Количество частиц HBsAg, высвобождающееся при разрушении гепатоцита Т-лимфоцитом-эффектором
$\gamma_{VC}$	Константа скорости адсорбции вирусов незараженными клетками органа-мишени

ТАБЛИЦА 2. Параметры иммунного гомеостаза и развития вирусной инфекции в клетках-мишенях.

Parameter	The biological meaning of the parameter
$b_m$	Rate constant of destruction of infected hepatocytes due to the cytopathicity of viruses
$\alpha_m$	Hepatocyte regeneration rate constant
$M^0$	Concentration of Ia-carrier macrophages in a lymph node
$H_E^0$	Concentration of specific Th1 T-helpers in the lymph node
$H_B^0$	Concentration of specific Th2 T-helpers in the lymph node
$E^0$	Concentration of specific precursors for T-lymphocyte-effectors in a lymph node
$B^0$	Concentration of specific B-lymphocytes in a lymph node
$P^0$	Concentration of specific plasma cells in a lymph node
$C^0$	Concentration of hepatocytes in the liver
$\gamma_{MV}$	Rate constant of antigenic stimulation of macrophages in a lymph node
$\gamma_{VM}$	Rate constant of binding of antigenic particles by macrophages of a lymph node
$\gamma_{FV}$	Binding rate constant of 1 IgG molecule to HBsAg particle
$\gamma_{VF}$	Rate constant of neutralization of the hepatitis virus by IgG molecules
$\sigma$	Rate constant of hepatocyte infection
$\nu$	Rate constant of secretion of HBsAg particles by one hepatocyte per day
$n$	Number of HBsAg particles released during the destruction of a hepatocyte by a T-lymphocyte-effector
$\gamma_{VC}$	Virus adsorption rate constant by uninfected cells of a target organ

TABLE 2. Parameters of immune homeostasis and development of viral infection in target cells.

## 3. ВЫЧИСЛЕНИЕ И АНАЛИЗ СТАЦИОНАРНЫХ РЕШЕНИЙ

Неотрицательные стационарные решения системы вида (2.2) при заданных значениях параметров являются неотрицательными решениями системы алгебраических уравнений

$$\mathcal{G}(u, \mathbf{p}) = \mathcal{F}(\underbrace{u, \dots, u}_6, \mathbf{p}) = 0. \quad (3.1)$$

Для численного решения систем алгебраических уравнений общего вида в настоящее время используют методы вычислительной алгебры (см. [9]), которые также называют методами символьных вычислений. В частности, такие методы реализованы в процедуре `NSolve` пакета `Mathematica`. Эта процедура основана на вычислении базиса Гребнера с использованием мономиального упорядочения и теоретически позволяет решить произвольную систему конечного числа алгебраических уравнений. Однако с ростом суммарной степени рассматриваемых уравнений сложность вычислений растет, вообще говоря, быстрее, чем экспоненциально, и для успешного нахождения решений могут потребоваться предварительные упрощающие преобразования.

Для модели (2.1) система (3.1) имеет следующий вид:

$$\begin{aligned} \nu C_V + nb_{CE}C_VE - \gamma_{VF}V_fF - \gamma_{VM}V_f - \gamma_{VC}V_f [C^0 - C_V - m] &= 0, \\ \sigma V_f [C^0 - C_V - m] - b_{CE}C_VE - b_m C_V &= 0, \\ b_{CE}C_VE + b_m C_V - \alpha_m m &= 0, \\ \gamma_{MV}M^0V_f - \alpha_M M_V &= 0, \\ [b_H^E(\xi(m)\rho_H^E - 1)]M_V H_E - b_p^{H_E} M_V H_E E + \alpha_H^E (H_E^0 - H_E) &= 0, \\ [b_p^E(\xi(m)\rho_E - 1)]M_V H_E E - b_{EC}C_VE + \alpha_E (E^0 - E) &= 0, \\ [b_H^B(\xi(m)\rho_H^B - 1)]M_V H_B - b_p^{H_B} M_V H_B B + \alpha_H^B (H_B^0 - H_B) &= 0, \\ [b_p^B(\xi(m)\rho_B - 1)]M_V H_B B + \alpha_B (B^0 - B) &= 0, \\ [b_p^P \xi(m)\rho_P]M_V H_B B + \alpha_P (P^0 - P) &= 0, \\ \rho_F P - \gamma_{FV}FV_f - \alpha_F F &= 0, \end{aligned} \quad (3.2)$$

где  $\xi(m) = 1 - m/C^0$ .

В работе [12] показано, что решить систему (3.2) при фиксированных значениях параметров можно с помощью процедуры `NSolve` пакета `Mathematica`, выполнив предварительно упрощающие преобразования, предложенные в работе [18] и сводящие эту систему к системе из четырех уравнений, а именно, к следующей системе уравнений относительно переменных  $V_f$ ,  $C_V$ ,  $H_B$  и  $H_E$ :

$$\begin{aligned} [b_H^B(\xi(m)\rho_H^B - 1)]M_V H_B - b_p^{H_B} R + \alpha_H^B (H_B^0 - H_B) &= 0, \\ M_V H_B B - R &= 0, \\ [b_H^E(\xi(m)\rho_H^E - 1)]M_V H_E - b_p^{H_E} M_V H_E E + \alpha_H^E (H_E^0 - H_E) &= 0, \\ [b_p^E(\xi(m)\rho_E - 1)]M_V H_E E - b_{EC}C_VE + \alpha_E (E^0 - E) &= 0, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} m &= \frac{\sigma V_f (C^0 - C_V)}{\alpha_m + \sigma V_f}, \quad E = \frac{\alpha_m m - b_m C_V}{b_{CE}C_V}, \quad M_V = \frac{\gamma_{MV}M^0 V_f}{\alpha_M}, \\ R &= \left( (\nu C_V + nb_{CE}C_VE - \gamma_{VM}V_f - \gamma_{VC}V_f(C^0 - C_V - m)) \frac{\gamma_{FV}V_f + \alpha_F}{\rho_F \gamma_{VF}V_f} - P_0 \right) \frac{\alpha_P}{b_p^P \xi(m)\rho_P}, \\ P &= \frac{b_p^P \xi(m)\rho_P R}{\alpha_P} + P^0, \quad F = \frac{\rho_F P}{\gamma_{FV}V_f + \alpha_F}, \quad B = \frac{[b_p^B(\xi(m)\rho_B - 1)]R}{\alpha_B} + B^0 \end{aligned}$$

— функции, полученные посредством явного выражения остальных переменных системы (3.2) через переменные  $V_f$ ,  $C_V$ .

Для трассирования решений системы (3.1) по параметрам можно использовать описанный ниже алгоритм, являющийся обобщением алгоритма, предложенного в [16] для трассирования стационарных решений модели динамики инфекции, вызванной вирусами лимфоцитарного хориоменингита (ВЛХМ).

Пусть в пространстве значений вектора параметров  $\mathbf{p}$  задана некоторая гладкая рационально параметризуемая кривая, не имеющая самопересечений. Пусть требуется найти решения системы (3.1) как функции параметра этой кривой. Будем обозначать параметр через  $s$ , а интервал его варьирования через  $\eta$ , предполагая этот интервал замкнутым. Введем обозначение  $\mathcal{S}(s, u) = \mathcal{G}(u, \mathbf{p}(s))$ . Поскольку  $\mathcal{S}(s, u)$  является рациональной функцией переменных  $s$  и  $u$ , множество

$$A = \{(s, u) : \mathcal{S}(s, u) = 0, s \in \eta, u \geq 0\}$$

является частью некоторой действительной алгебраической кривой, см. [11].

Поставленная задача сводится к разбиению множества  $A$  на подмножества вида

$$C = \{(s, u(s)) : s \in \eta_C\}, \tag{3.3}$$

где  $u(s)$  — однозначная аналитическая функция переменного  $s$ , определенная в некотором интервале  $\eta_C \subset \eta$ , и точки, в которых выполняется равенство

$$\det \left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial u}(s, u) \right) = 0. \tag{3.4}$$

Отметим, что поскольку  $A$  является частью алгебраической кривой, число таких точек конечно.

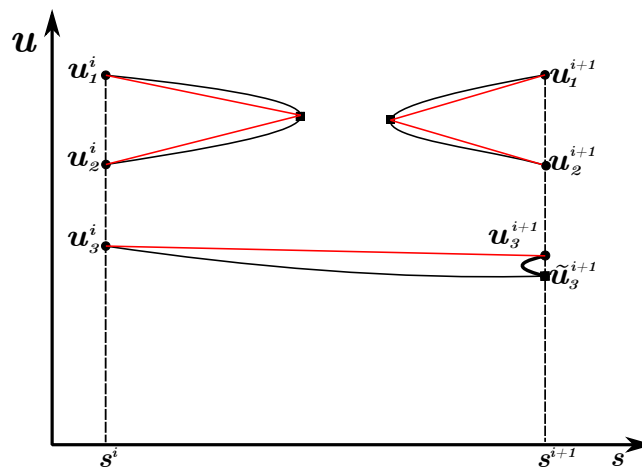


Рис. 1.  $i$ -й шаг второго этапа трассирования решений

FIG. 1.  $i$ -th step of the second stage of solution tracing

Алгоритм построения подмножеств (3.3) состоит из двух этапов. На первом этапе задается достаточно мелкая сетка в интервале  $\eta$  с узлами  $s^1 < \dots < s^N$ , где  $s^1$  — начало, а  $s^N$  — конец этого интервала, и вычисляются множества решений системы (3.1) вида

$$\mathcal{U}(s^i) = \{u_j^i : j = 1, \dots, m_i\} \tag{3.5}$$

с помощью процедуры `NSolve` пакета `Mathematica`, где  $m_i$  — число найденных неотрицательных решений в узле  $s^i$ .

На втором этапе выполняется соединение элементов множеств (3.5), полученных для соседних узлов. Этот этап состоит из  $N - 1$  шага. На  $i$ -ом шаге рассматривается интервал  $[s^i, s^{i+1}]$ . Сначала стационарные решения из множества  $\mathcal{U}(s^i)$  трассируются по параметру от значения  $s^i$  до значения  $s^{i+1}$  путем численного решения задач Коши

$$u(s^i) = u_j^i, \quad \frac{du}{ds} = - \left( \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial u} \right)^{-1} \frac{\partial \mathcal{S}}{\partial s}, \quad j = 1, \dots, m_i, \tag{3.6}$$

с помощью стандартной процедуры численного интегрирования `ode45` среды `MATLAB`, основанной на методах Рунге—Кутты четвертого и пятого порядков. Интегрирование останавливается,

если переменная  $s$  достигает заданного финального значения  $s^{i+1}$ , либо если в процессе интегрирования обнаружится, что функция  $f(s) = \det(\partial\mathcal{S}/\partial u(s, u))$  обращается в нуль на траектории интегрирования. Отметим, что сетку интегрирования по  $s$  процедура ode45 выбирает самостоятельно. В результате трассирования по параметру в узле  $s^{i+1}$  мы получаем множество

$$\tilde{\mathcal{U}}(s^{i+1}) = \{\tilde{u}_j^{i+1} : j = 1, \dots, \tilde{m}_{i+1}\},$$

где  $\tilde{m}_{i+1} \leq m_{i+1}$ . После этого элементы множества  $\tilde{\mathcal{U}}(s^{i+1})$  уточняются элементами множества  $\mathcal{U}(s^{i+1})$  путем выбора элементов множества  $\mathcal{U}(s^{i+1})$ , наиболее близких по норме к элементам множества  $\tilde{\mathcal{U}}(s^{i+1})$ . Если  $\tilde{m}_{i+1} < m_{i+1}$ , то оставшиеся  $m_{i+1} - \tilde{m}_{i+1}$  стационарных решения, не полученные в результате трассирования по параметру от значения  $s^i$  до значения  $s^{i+1}$ , необходимо трассировать по параметру от значения  $s^{i+1}$  до значения  $s^i$  путем решения задач Коши, аналогичных задачам Коши (3.6).

Рисунок 1 поясняет  $i$ -й шаг второго этапа. Круглыми точками обозначены элементы множеств  $\mathcal{U}(s^i)$  и  $\mathcal{U}(s^{i+1})$ , квадратными — конечные точки численного интегрирования. Черные линии обозначают трассирование по параметру  $s$  путем численного интегрирования и уточнение, красные — линейные аппроксимации искомым подмножеств вида (3.3) в интервале  $[s^i, s^{i+1}]$ .

Анализ устойчивости найденного стационарного состояния системы с запаздыванием при фиксированных значениях параметров сводится к решению нелинейной проблемы собственных значений с полиномиальным и экспоненциальным вхождением спектрального параметра. Эффективный метод решения таких проблем описан в работах [16, 18].

#### 4. РЕЗУЛЬТАТЫ ЧИСЛЕННЫХ ЭКСПЕРИМЕНТОВ

С помощью предложенной технологии была исследована зависимость стационарных решений модели Марчука—Петрова от константы скорости антигенной стимуляции макрофагов в лимфоузле  $\gamma_{MV}$ . Этот параметр варьировался в интервале  $[1,7 \cdot 10^{-13}, 1,7 \cdot 10^{-11}]$ . Вычисление стационарных решений и анализ их зависимости от параметра  $\gamma_{MV}$  выполнялся при трех различных наборах параметров, которые мы в дальнейшем будем называть наборами (а), (б) и (с). Набор (а) соответствует острому течению гепатита В. Значения параметров из этого набора приведены в табл. 3. Набор (б) состоит из тех же значений параметров, что и набор (а), за исключением параметра  $\nu$ , который был уменьшен в 3 раза. Набор (с) состоит из тех же значений параметров, что и набор (б), за исключением параметров  $\rho_F$ ,  $b_m$ ,  $b_{CE}$ ,  $b_p^E$ , которые были выбраны равными  $8,5 \cdot 10^6$ ,  $5,2 \cdot 10^{-2}$ ,  $5,2 \cdot 10^{-5}$ ,  $4,1 \cdot 10^{-8}$  соответственно. Биологически, набор значений параметров (б) соответствует вирусной инфекции с малой скоростью размножения вирусов, что является одной из причин хронизации инфекции [13]. Набор значений параметров (с) отвечает ситуации хронической инфекции с более эффективной стимуляцией цитотоксического Т-клеточного иммунного ответа.

В дополнение к варьированию значений параметров модели, мы варьировали чувствительность иммунного ответа к поражению органа мишени, которая описывается с помощью функции  $\xi(m)$ . Так, в экспериментах с набором (с) вместо функции  $\xi(m) = \max\{1 - m/C^0, 0\}$  использовались функции  $\xi(m) = \max\{(1 - m/C^0)^5, 0\}$  и  $\xi(m) = \max\{(1 - m/(0,2C^0)), 0\}$ . На рис. 3-4 приведены зависимости стационарных решений модели Марчука—Петрова от параметра  $\gamma_{MV}$  для наборов (а) и (б). На рис. 5 приведена зависимость стационарных решений модели Марчука—Петрова от параметра  $\gamma_{MV}$  в интервале  $[1,5 \cdot 10^{-11}, 1,7 \cdot 10^{-11}]$  для набора (с) при  $\xi(m) = \max\{(1 - m/C^0)^5, 0\}$ . На рис. 6 приведена зависимость стационарных решений модели Марчука—Петрова от параметра  $\gamma_{MV}$  в интервале  $[1,6 \cdot 10^{-11}, 2,5 \cdot 10^{-11}]$  для набора (с) при  $\xi(m) = \max\{(1 - m/(0,2C^0)), 0\}$ .

Выбор альтернативных параметризаций функции  $\xi(m)$  обусловлен следующими соображениями. Поражение клеток печени вследствие цитопатических эффектов вируса, а также вследствие их уничтожения цитотоксическими лимфоцитами, вызывает супрессию антиген-специфического иммунного ответа. Данная обратная связь параметризована с помощью функции  $\xi(m)$ , где  $m$  — количество пораженных клеток печени,  $m \in [0, C^0]$ . В исходной модели параметризация имеет вид  $\xi(m) = 1 - m/C^0$ . Функция  $\xi(m)$  принимает значения от 0 (полная супрессия иммунного ответа при полном разрушении печени) до 1 (полноценный иммунный ответ при отсутствии повреждений печени). В данной работе предложены две альтернативные параметризации этой

Параметр	Оценка	Параметр	Оценка
$\alpha_M$	1,2 сут <sup>-1</sup>	$b_p^{HB}$	$2,2 \cdot 10^{-13}$ (мл/клеток) <sup>2</sup> · сут <sup>-1</sup>
$\alpha_H^E$	1,0 сут <sup>-1</sup>	$\rho_F$	$1,7 \cdot 10^8$ (частиц/клеток) · сут <sup>-1</sup>
$\alpha_H^B$	1,0 сут <sup>-1</sup>	$b_{CE}$	$1,1 \cdot 10^{-6}$ (мл/частиц) · сут <sup>-1</sup>
$\alpha_E$	0,4 сут <sup>-1</sup>	$b_{EC}$	$2,7 \cdot 10^{-7}$ (мл/клеток) · сут <sup>-1</sup>
$\alpha_B$	0,1 сут <sup>-1</sup>	$b_m$	0,068 сут <sup>-1</sup>
$\alpha_P$	0,4 сут <sup>-1</sup>	$\alpha_m$	0,15 сут <sup>-1</sup>
$\alpha_F$	0,043 сут <sup>-1</sup>	$M^0$	$6,0 \cdot 10^5$ клеток/мл
$\tau_H^E$	0,6 сут	$H_E^0$	$6,0 \cdot 10^2$ клеток/мл
$\tau_H^B$	0,6 сут	$H_B^0$	$6,0 \cdot 10^1$ клеток/мл
$\tau_E$	2,0 сут	$E^0$	$6,0 \cdot 10^2$ клеток/мл
$\tau_B$	2,0 сут	$B^0$	$6,0 \cdot 10^2$ клеток/мл
$\tau_P$	3,0 сут	$P^0$	$2,6 \cdot 10^{-1}$ клеток/мл
$\rho_H^E, \rho_H^B$	2	$C^0$	$3,0 \cdot 10^8$ клеток/мл
$\rho_E, \rho_B$	16	$\gamma_{MV}$	$1,6 \cdot 10^{-11}$ (мл/клеток) · сут <sup>-1</sup>
$\rho_P$	3	$\gamma_{VM}$	0,4 сут <sup>-1</sup>
$b_p^B$	$2,2 \cdot 10^{-9}$ (мл/клеток) <sup>2</sup> · сут <sup>-1</sup>	$\gamma_{FV}$	$1,4 \cdot 10^{-9}$ (мл/частиц) · сут <sup>-1</sup>
$b_p^P$	$4,7 \cdot 10^{-12}$ (мл/клеток) <sup>2</sup> · сут <sup>-1</sup>	$\gamma_{VF}$	$5,0 \cdot 10^{-10}$ (мл/частиц) · сут <sup>-1</sup>
$b_H^E$	$4,5 \cdot 10^{-5}$ (мл/клеток) · сут <sup>-1</sup>	$\sigma$	$3,8 \cdot 10^{-12}$ (мл/клеток) · сут <sup>-1</sup>
$b_H^B$	$4,5 \cdot 10^{-5}$ (мл/клеток) · сут <sup>-1</sup>	$\nu$	83 сут <sup>-1</sup>
$b_p^E$	$1,5 \cdot 10^{-8}$ (мл/клеток) <sup>2</sup> · сут <sup>-1</sup>	$n$	5
$b_p^{HE}$	$1,5 \cdot 10^{-14}$ (мл/клеток) <sup>2</sup> · сут <sup>-1</sup>	$\gamma_{VC}$	$4,2 \cdot 10^{-14}$ (мл/клеток) · сут <sup>-1</sup>

ТАБЛИЦА 3. Значения параметров модели (2.1), соответствующие острому гепатиту В (см. [15]).

Parameter	Estimate	Parameter	Estimate
$\alpha_M$	1.2 day <sup>-1</sup>	$b_p^{HB}$	$2.2 \cdot 10^{-13}$ (ml/cells) <sup>2</sup> · day <sup>-1</sup>
$\alpha_H^E$	1.0 day <sup>-1</sup>	$\rho_F$	$1.7 \cdot 10^8$ (particles/cells) · day <sup>-1</sup>
$\alpha_H^B$	1.0 day <sup>-1</sup>	$b_{CE}$	$1.1 \cdot 10^{-6}$ (ml/particles) · day <sup>-1</sup>
$\alpha_E$	0.4 day <sup>-1</sup>	$b_{EC}$	$2.7 \cdot 10^{-7}$ (ml/cells) · day <sup>-1</sup>
$\alpha_B$	0.1 day <sup>-1</sup>	$b_m$	0.068 day <sup>-1</sup>
$\alpha_P$	0.4 day <sup>-1</sup>	$\alpha_m$	0.15 day <sup>-1</sup>
$\alpha_F$	0.043 day <sup>-1</sup>	$M^0$	$6.0 \cdot 10^5$ cells/ml
$\tau_H^E$	0.6 day	$H_E^0$	$6.0 \cdot 10^2$ cells/ml
$\tau_H^B$	0.6 day	$H_B^0$	$6.0 \cdot 10^1$ cells/ml
$\tau_E$	2.0 day	$E^0$	$6.0 \cdot 10^2$ cells/ml
$\tau_B$	2.0 day	$B^0$	$6.0 \cdot 10^2$ cells/ml
$\tau_P$	3.0 day	$P^0$	$2.6 \cdot 10^{-1}$ cells/ml
$\rho_H^E, \rho_H^B$	2	$C^0$	$3.0 \cdot 10^8$ cells/ml
$\rho_E, \rho_B$	16	$\gamma_{MV}$	$1.6 \cdot 10^{-11}$ (ml/cells) · day <sup>-1</sup>
$\rho_P$	3	$\gamma_{VM}$	0.4 day <sup>-1</sup>
$b_p^B$	$2.2 \cdot 10^{-9}$ (ml/cells) <sup>2</sup> · day <sup>-1</sup>	$\gamma_{FV}$	$1.4 \cdot 10^{-9}$ (ml/particles) · day <sup>-1</sup>
$b_p^P$	$4.7 \cdot 10^{-12}$ (ml/cells) <sup>2</sup> · day <sup>-1</sup>	$\gamma_{VF}$	$5.0 \cdot 10^{-10}$ (ml/particles) · day <sup>-1</sup>
$b_H^E$	$4.5 \cdot 10^{-5}$ (ml/cells) · day <sup>-1</sup>	$\sigma$	$3.8 \cdot 10^{-12}$ (ml/cells) · day <sup>-1</sup>
$b_H^B$	$4.5 \cdot 10^{-5}$ (ml/cells) · day <sup>-1</sup>	$\nu$	83 day <sup>-1</sup>
$b_p^E$	$1.5 \cdot 10^{-8}$ (ml/cells) <sup>2</sup> · day <sup>-1</sup>	$n$	5
$b_p^{HE}$	$1.5 \cdot 10^{-14}$ (ml/cells) <sup>2</sup> · day <sup>-1</sup>	$\gamma_{VC}$	$4.2 \cdot 10^{-14}$ (ml/cells) · day <sup>-1</sup>

TABLE 3. Model parameter values (2.1) corresponding to acute hepatitis B (see [15]).

функции:

$$\xi(m) \equiv \xi_k(m) = \left(1 - \frac{m}{C^0}\right)^k, \quad (4.1)$$

а также

$$\xi(m) \equiv \xi_r(m) = \begin{cases} 1 - \frac{m}{rC^0}, & m \leq rC^0, \\ 0, & m > rC^0, \end{cases} \quad (4.2)$$

которые эквивалентны исходной функции при параметрах  $k = 1$  и  $r = 1$ . При увеличении  $k > 1$  или уменьшении  $r < 1$  функция  $\xi(m)$  быстрее убывает от единицы до нуля (см. рис. 2), что соответствует более сильной чувствительности супрессии иммунного ответа к степени поражения печени. Альтернативные параметризации функции  $\xi(m)$  позволили выявить различные бистабильные режимы со свойством гистерезиса (рис. 5 и 6).

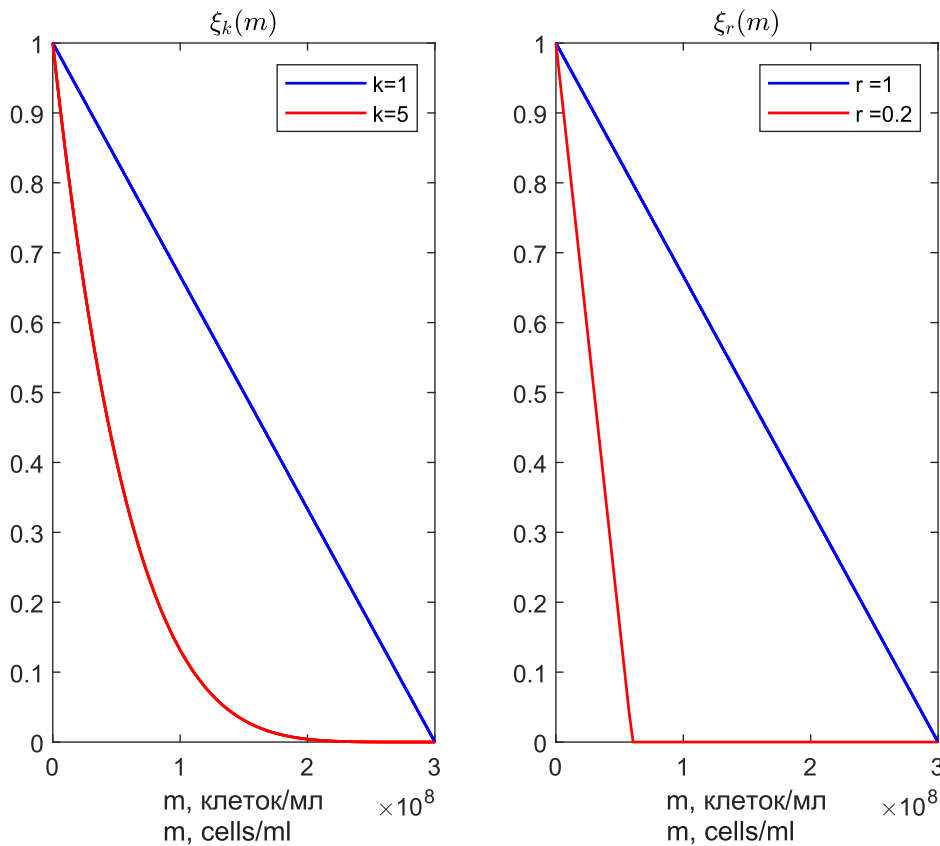


РИС. 2. Параметризация эффекта супрессии антиген-специфического иммунного ответа при повреждении печени с помощью функций  $\xi_k(m)$  и  $\xi_r(m)$  (уравнения (4.1), (4.2)). Данные зависимости показаны красным цветом слева и справа, соответственно. Синяя линия соответствует зависимости  $\xi(m)$  в исходной формулировке модели Марчука—Петрова [1].

FIG. 2. Parameterization of the antigen-specific immune response suppression effect in liver damage using the  $\xi_k(m)$  and  $\xi_r(m)$  functions (Eqs. (4.1) and (4.2)). These dependencies are shown in red on the left and right, respectively. The blue line corresponds to the dependence of  $\xi(m)$  in the original formulation of the Marchuk–Petrov model [1].

**4.1. Моностабильность.** Трассировка стационарных решений по параметру  $\gamma_{MV}$ , представленная на рис. 3, показывает, что для возникновения условия хронической инфекции, т. е. устойчивого сосуществования популяции вирусов и иммунного ответа, требуется существенное снижение эффективности антигенпрезентирования до уровня  $\gamma_{MV} \approx 3 \cdot 10^{-12}$ . При этом уменьшение

скорости размножения вирусов  $\nu$  в 3 раза существенно расширяет интервал значений параметра  $\gamma_{MV}$ , в котором возможно формирование стационарных решений, соответствующих хроническому течению вирусного гепатита В с высокой вирусной нагрузкой (рис. 4). Стоит отметить, что результат, проиллюстрированный на рис. 4, соответствует полученным ранее теоретическим результатам. В работе [4] было приведено следующее условие асимптотической устойчивости тривиального стационарного решения с  $V_f = 0$ :

$$G = \left( \gamma_{VF} \frac{\rho_F P^0}{\alpha_F} + \gamma_{VM} + \gamma_{VC} C^0 \right) (b_{CE} E^0 + b_m) - \sigma C^0 (\nu + nb_{CE} E^0) > 0.$$

Нетрудно проверить, что это условие выполняется для набора параметров (b) и не выполняется для набора (a), что соответствует результатам, проиллюстрированным на рис. 3-4.

**4.2. Бистабильность.** Бистабильность является свойством динамической системы, предполагающим сосуществование двух устойчивых положений равновесия в фазовом пространстве системы. Для модели Марчука—Петрова они соответствуют тяжелой и легкой формам заболевания, если рассматривать вирусную нагрузку как индикатор тяжести вирусного гепатита В. Наличие бистабильности возможно в определённых областях параметров модели, поиск которых был осуществлен с использованием разработанных нами методов. На рис. 5, соответствующем набору параметров (c), показано сосуществование трех нетривиальных положений равновесия, два из которых являются одновременно устойчивыми для некоторого интервала значений параметра  $\gamma_{MV}$  — константы скорости активации антигенпрезентирующих клеток. Ширина интервала сосуществования двух устойчивых стационарных решений достаточно мала, что определяет сложность поиска таких режимов.

Чувствительность иммунного ответа к повреждению клеток печени, описываемая с помощью функции  $\xi(m)$ , существенно влияет на размер области бистабильности по параметру  $\gamma_{MV}$ . Увеличение чувствительности может приводить к появлению свойства ультрачувствительности, которое важно для реализации бистабильности. На рис. 6 показано, что переход от  $\xi(m) = \max\{(1 - m/C^0)^5, 0\}$  к  $\xi(m) = \max\{(1 - m/(0,2C^0)), 0\}$ , приводящий к увеличению производной данной функции, приводит к сужению области существования устойчивого решения с меньшей вирусной нагрузкой.

Отметим, что бистабильность является частным случаем свойства мультистабильности динамических систем. Известно, что реализация свойства мультистабильности является нетривиальной задачей и определяется регуляторными блоками математических моделей, см. [19]. Результаты анализа множества стационарных точек в модели Марчука—Петрова, представленные на рис. 5-6, демонстрируют наличие 4-х стационарных решений, из которых два являются неустойчивыми. Поиск областей значений параметров, в которых возможно сосуществование более чем двух устойчивых стационарных решений, требует дальнейших систематических исследований в данной многопараметрической модели.

**4.3. Гистерезис.** Характер зависимости бистабильности от параметра  $\gamma_{MV}$ , продемонстрированный на рис. 5-6, позволил выявить свойство гистерезиса в модели Марчука—Петрова. *Гистерезис* является свойством динамической системы, которое определяет зависимость её состояния при изменении параметров от предыстории. Так, если система находилась в состоянии с более высокой вирусной нагрузкой, как показано на рис. 5 (верхняя ветвь), то увеличение параметра скорости активации макрофагов от значения  $1,5 \cdot 10^{-11}$  до  $1,52 \cdot 10^{-11}$  не приведет к переходу в состояние с более низкой вирусной нагрузкой. Для этого потребуется его увеличение до значения  $1,58 \cdot 10^{-11}$ , при котором происходит потеря устойчивости и переход системы в другое стационарное состояние с более низкой вирусной нагрузкой. Соответственно, если имеет место снижение скорости активации макрофагов до значения  $1,52 \cdot 10^{-11}$ , то система остается на нижней ветви устойчивого стационарного состояния. Случайные флуктуации данного параметра в области бистабильности будут проявляться в неоднозначности траектории системы, что связано с тем, на какой из ветвей находилась система в процессе изменений.

**4.4. Бифуркации.** Зависимости стационарных решений от параметра  $\gamma_{MV}$ , изображенные на рис. 3, 5 и 6, имеют точки бифуркации. Они хорошо видны на графиках зависимости переменной  $E$  от этого параметра. На рис. 3 видны две точки бифуркации. С ростом значения параметра при

$\gamma_{MV} \approx 3 \cdot 10^{-12}$  происходит потеря устойчивости стационарного решения, изображенного красной линией, при переходе комплексно-сопряженной пары ведущих (с максимальной вещественной частью) собственных значений линеаризованной относительно этого стационарного решения системы из левой полуплоскости в правую. Наши дополнительные расчеты, результаты которых не вошли в данную работу, показали, что эта бифуркация приводит к образованию в окрестности неустойчивого стационарного решения устойчивого периодического решения, период и размах которого растут с ростом значения параметра. Таким образом, в этой точке происходит бифуркация Андронова—Хопфа, см. [17]. Вторая бифуркация происходит при уменьшении значения параметра в точке  $\gamma_{MV} \approx 8,2 \cdot 10^{-12}$ . Неустойчивые стационарные решения, изображенные зеленой и синей линиями, сходятся в одну точку и на этом обрываются. Такая точка бифуркации называется *точкой поворота*, см. [17]. Ведущие собственные значения линеаризованной относительно стационарного решения в этой точке системы представляют собой комплексно-сопряженную пару с положительной вещественной частью.

На рис. 5 видны две точки бифуркации: при  $\gamma_{MV} \approx 1,52 \cdot 10^{-11}$  соединяются устойчивое стационарное решение, изображенное синей линией, и неустойчивое стационарное решение, изображенное зеленой линией, а при  $\gamma_{MV} \approx 1,59 \cdot 10^{-11}$  соединяются устойчивое стационарное решение, изображенное красной линией, и неустойчивое стационарное решение, изображенное зеленой линией. Это так называемые точки *касательной бифуркации*, см. [17]. В этих точках ведущее собственное значение линеаризованной относительно стационарного решения системы вещественно и равно нулю.

На рис. 6 видны три точки бифуркации: при  $\gamma_{MV} \approx 1,62 \cdot 10^{-11}$  сходятся устойчивое стационарное решение, изображенное синей линией, и неустойчивое стационарное решение, изображенное зеленой линией, а при  $\gamma_{MV} \approx 2,25 \cdot 10^{-11}$  сходятся устойчивое стационарное решение, изображенное красной линией, и неустойчивое стационарное решение, изображенное зеленой линией. Эти точки являются точками касательной бифуркации. При  $\gamma_{MV} \approx 1,7 \cdot 10^{-11}$  происходит потеря устойчивости стационарного решения, изображенного красной линией. Так же как в аналогичном случае, изображенном на рис. 3, эта потеря устойчивости происходит при переходе комплексно-сопряженной пары ведущих собственных значений из левой полуплоскости в правую и приводит к образованию в окрестности неустойчивого стационарного решения устойчивого периодического решения, период и размах которого растут с ростом значения параметра. Таким образом, в этой точке происходит бифуркация Андронова—Хопфа.

## 5. ВЫВОДЫ

В данной работе предложены эффективные методы расчета и численного анализа устойчивости стационарных решений нелинейных математических моделей на основе дифференциальных уравнений с запаздывающим аргументом. С помощью предложенных методов для математической модели противовирусного иммунного ответа Марчука—Петрова впервые проведено исследование стационарных решений, соответствующих хроническим формам течения инфекции вирусами гепатита В. Было показано наличие бистабильности для данной модели и свойство гистерезиса, а также определены области в пространстве параметров модели, в которых данные свойства имеют место. Наличие бистабильности позволяет предлагать различные подходы к лечению неблагоприятных вариантов хронического гепатита В, в частности, переводить систему в состояние с более низкой вирусной нагрузкой, на основе разработанного нами ранее метода оптимальных возмущений, см. [5, 6]. Вместе с тем, хроническое течение вирусного гепатита В может иметь место в виде осциллирующей динамики. Исследование соответствующих решений и разработка эффективных методов бифуркационного анализа для систем функционально-дифференциальных уравнений определяет одно из актуальных направлений дальнейших исследований, с приложениями в области патогенеза социально значимых заболеваний, таких как COVID-19, ВИЧ и гепатит С.

**Финансирование.** Разработка алгоритмов и численные эксперименты выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 22-11-00025), биологическая интерпретация результатов выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 20-01-00352).



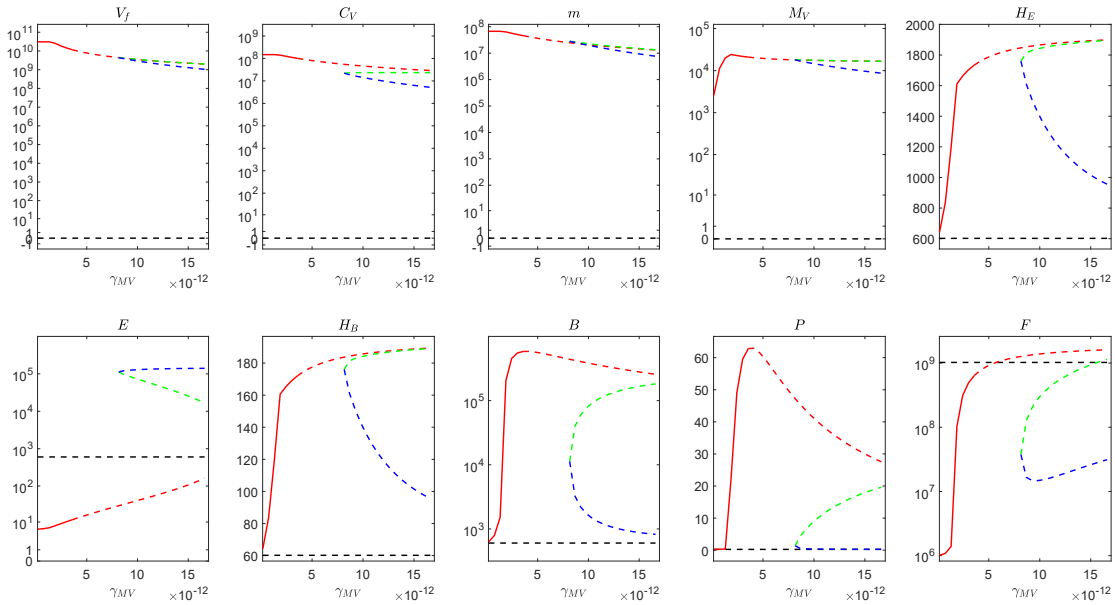


РИС. 3. Зависимость стационарных решений от параметра  $\gamma_{MV} \in [1,7 \cdot 10^{-13}, 1,7 \cdot 10^{-11}]$  (сплошная линия — устойчивое решение, пунктирная — неустойчивое) для набора параметров (а), соответствующего острой форме вирусного гепатита В.

FIG. 3. Dependence of stationary solutions on the parameter  $\gamma_{MV} \in [1,7 \cdot 10^{-13}, 1,7 \cdot 10^{-11}]$  (solid line: stable solution, dotted line: unstable) for the set of parameters (a) corresponding to the acute form of viral hepatitis B.

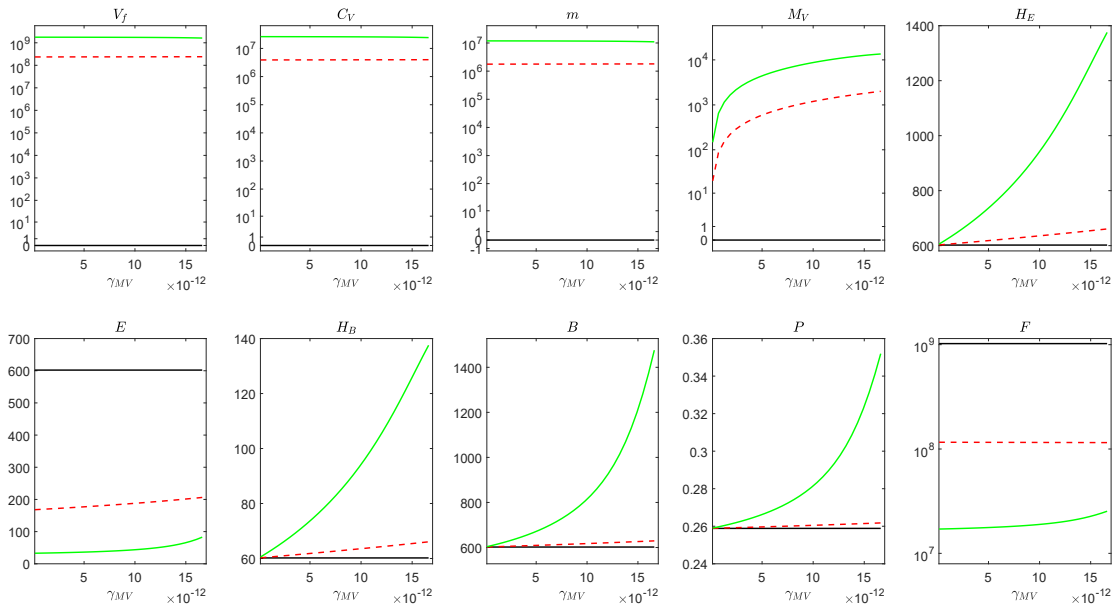


FIG. 4. Зависимость стационарных решений от параметра  $\gamma_{MV} \in [1,7 \cdot 10^{-13}, 1,7 \cdot 10^{-11}]$  (сплошная линия — устойчивое решение, пунктирная — неустойчивое) для набора параметров (б), в котором скорость размножения вирусов  $\nu$  уменьшена в 3 раза по сравнению с острой формой, что расширяет интервал значений параметра  $\gamma_{MV}$ , в котором возможно формирование стационарных решений, соответствующих хроническому течению вирусного гепатита В с высокой вирусной нагрузкой.

FIG. 4. Dependence of stationary solutions on the parameter  $\gamma_{MV} \in [1,7 \cdot 10^{-13}, 1,7 \cdot 10^{-11}]$  (solid line: stable solution, dotted line: unstable) for the set of parameters (b), in which the rate of reproduction of viruses  $\nu$  is reduced by a factor of 3 compared to the acute form, which expands the range of values of the parameter  $\gamma_{MV}$  in which the formation of stationary solutions is possible corresponding to the chronic course of viral hepatitis B with a high viral load.

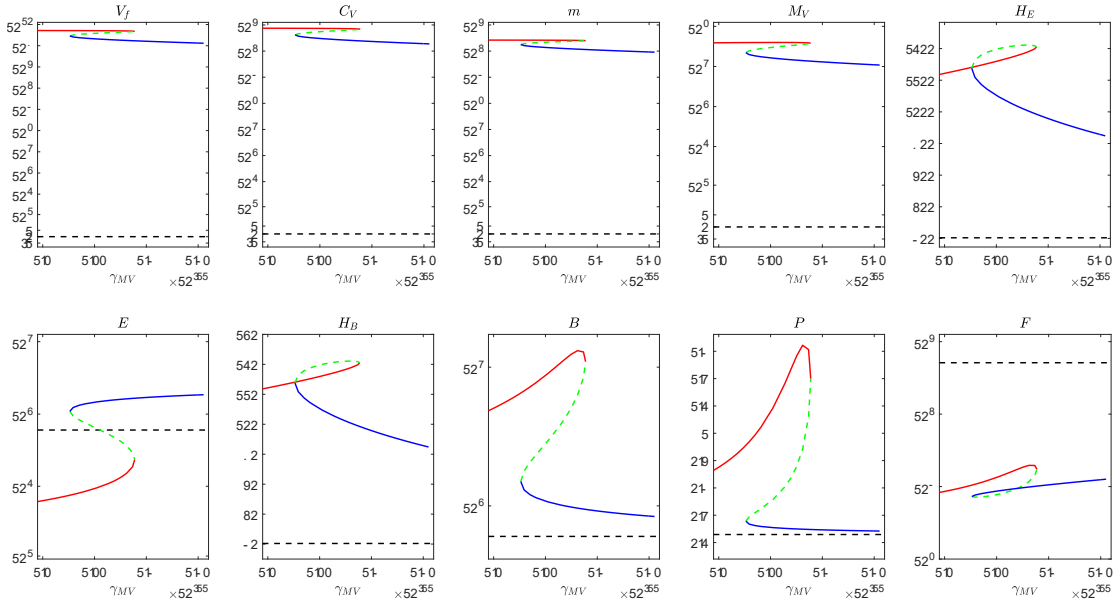


РИС. 5. Зависимость стационарных решений от параметра  $\gamma_{MV} \in [1,5 \cdot 10^{-11}, 1,7 \cdot 10^{-11}]$  (сплошная линия — устойчивое решение, пунктирная — неустойчивое) для набора параметров (с), который отвечает хронической инфекции с более эффективной стимуляцией цитотоксического Т-клеточного иммунного ответа, при  $\xi(m) = (1 - m/C^0)^5$ . Демонстрирует появление бистабильности и гистерезиса в модели Марчука–Петрова.

FIG. 5. Dependence of stationary solutions on the parameter  $\gamma_{MV} \in [1.5 \cdot 10^{-11}, 1.7 \cdot 10^{-11}]$  (solid line: stable solution, dotted line: unstable) for the set of parameters (c), which corresponds to chronic infection with more effective stimulation of the cytotoxic T-cell immune response, at  $\xi(m) = (1 - m/C^0)^5$ . It demonstrates the bistability and hysteresis in the Marchuk–Petrov model.

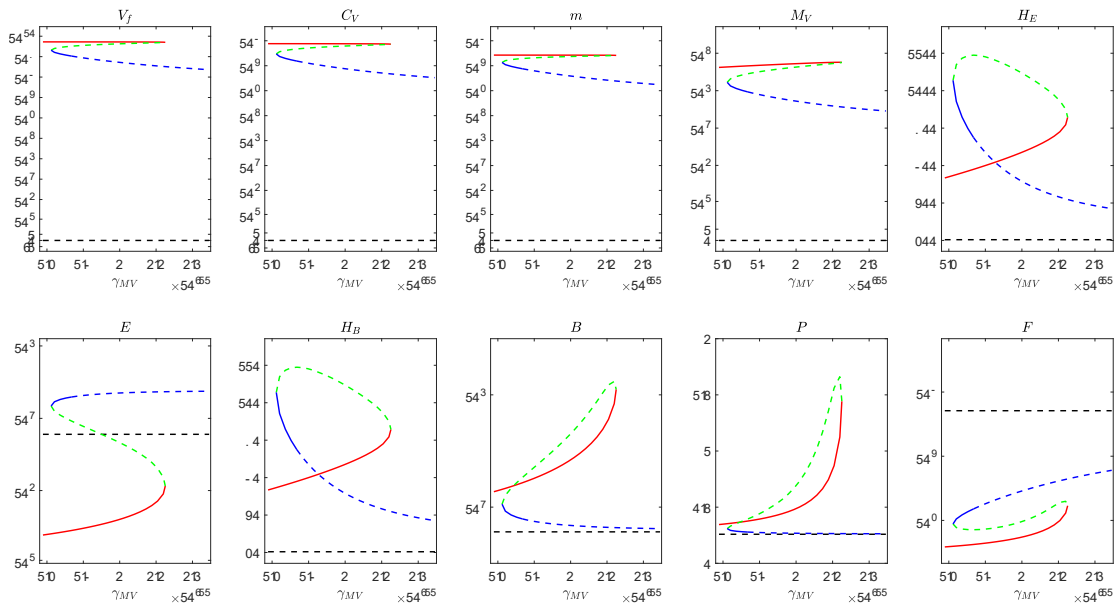


FIG. 6. Зависимость стационарных решений от параметра  $\gamma_{MV} \in [1,6 \cdot 10^{-11}, 2,5 \cdot 10^{-11}]$  (сплошная линия — устойчивое решение, пунктирная — неустойчивое) для набора (с), который отвечает хронической инфекции с более эффективной стимуляцией цитотоксического Т-клеточного иммунного ответа, при  $\xi(m) = (1 - m/(0,2C^0))$ . Демонстрирует появление бистабильности и гистерезиса в модели Марчука–Петрова.

FIG. 6. Dependence of stationary solutions on the parameter  $\gamma_{MV} \in [1.6 \cdot 10^{-11}, 2.5 \cdot 10^{-11}]$  (solid line: stable solution, dotted line: unstable) for the set (c), which responds to chronic infection with more effective stimulation of the cytotoxic T-cell immune response, at  $\xi(m) = (1 - m/(0.2C^0))$ . It demonstrates the bistability and hysteresis in the Marchuk–Petrov model.

## СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Марчук Г. И.* Избранные труды: Т. 4. Математическое моделирование в иммунологии и медицине. — М.: РАН, 2018.
2. *Bocharov G., Grebennikov D., Argilaguet J., Meyerhans A.* Examining the cooperativity mode of antibody and CD8+ T cell immune responses for vaccinology// Trends Immunol. — 2021. — 42. — С. 852–855.
3. *Bocharov G., Grebennikov D., Cebollada Rica P., Domenjo-Vila E., Casella V., Meyerhans A.* Functional cure of a chronic virus infection by shifting the virus–host equilibrium state// Front. Immunol. — 2022. — 13. — 904342.
4. *Bocharov G. A., Marchuk G. I.* Applied problems of mathematical modelling in immunology// Comput. Math. Math. Phys. — 2000. — 40. — С. 1905–1920.
5. *Bocharov G. A., Nechepurenko Yu. M., Khristichenko M. Yu., Grebennikov D. S.* Optimal disturbances of bistable time-delay systems modeling virus infections// Dokl. Math. — 2018. — 98. — С. 313–316.
6. *Bocharov G. A., Nechepurenko Yu. M., Khristichenko M. Yu., Grebennikov D. S.* Optimal perturbations of systems with delayed independent variables for control of dynamics of infectious diseases based on multicomponent actions// J. Math. Sci. — 2021. — 253. — С. 618–641.
7. *Bocharov G., Volpert V., Ludewig B., Meyerhans A.* Multi-scale and integrative modeling approaches// В сб.: «Mathematical Immunology of Virus Infections». — Cham: Springer, 2018. — С. 221–242.
8. *Fanning G. C., Zoulim F., Hou J., Bertoletti A.* Therapeutic strategies for hepatitis B virus infection: towards a cure// Nat. Rev. Drug Discov. — 2019. — 18. — С. 827–844.
9. *Geddes K. O., Czapor S. R., Labahn G.* Algorithms for computer algebra. — Dordrecht: Kluwer, 1992.
10. *Grebennikov D., Karsonova A., Loguinova M., Casella V., Meyerhans A., Bocharov G.* Predicting the kinetic coordination of immune response dynamics in SARS-CoV-2 infection: implications for disease pathogenesis// Mathematics. — 2022. — 10. — С. 3154.
11. *Hartshorne R.* Algebraic geometry. — New York—Heidelberg—Berlin: Springer, 1977.
12. *Khristichenko M. Yu., Nechepurenko Yu. M., Grebennikov D. S., Bocharov G. A.* Modelling chronic hepatitis B using the Marchuk–Petrov model// J. Phys. Conf. Ser. — 2021. — 2099. — 012036.
13. *Marchuk G. I.* Mathematical Models in Immunology. — New York—Berlin etc.: Springer, 1983.
14. *Marchuk G. I.* Mathematical modelling of immune response in infectious diseases. — Dordrecht: Kluwer, 1997.
15. *Marchuk G. I., Romanyukha A. A., Bocharov G. A.* Mathematical model of antiviral immune response. II. Parameters identification for acute viral hepatitis B// J. Theor. Biol. — 1991. — 151. — С. 41–69.
16. *Nechepurenko Yu. M., Khristichenko M. Yu., Grebennikov D. S., Bocharov G. A.* Bistability analysis of virus infection models with time delays// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S. — 2020. — 13. — С. 2385–2401.
17. *Seydel R.* Practical bifurcation and stability analysis. — New York: Springer, 2010.
18. *Sklyarova E. V., Nechepurenko Yu. M., Bocharov G. A.* Numerical steady state analysis of the Marchuk–Petrov model of antiviral immune response// Russ. J. Numer. Anal. Math. Model. — 2020. — 35. — С. 95–110.
19. *Wu S., Zhou T., Tian T.* A robust method for designing multistable systems by embedding bistable subsystems// NPJ Syst. Biol. — 2022. — 8. — С. 1–9.

М. Ю. Христиненко

Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН, Москва, Россия

E-mail: misha.hryst@gmail.com

Ю. М. Нечепуренко

Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН, Москва, Россия

E-mail: yumnec@yandex.ru

Д. С. Гребенников

Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН, Москва, Россия

E-mail: dmitry.ew@gmail.com

Г. А. Бочаров

Институт вычислительной математики им. Г. И. Марчука РАН, Москва, Россия

E-mail: gbocharov@gmail.com

DOI 10.22363/2413-3639-2022-68-4-686-703

UDC 517.929, 517.958

## Numerical analysis of stationary solutions of systems with delayed argument in mathematical immunology

M. Yu. Khristichenko, Yu. M. Nechepurenko, D. S. Grebennikov, and G. A. Bocharov

*Marchuk Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia*

This work is devoted to the technology developed by the authors that allows one for fixed values of parameters and tracing by parameters to calculate stationary solutions of systems with delay and analyze their stability. We discuss the results of applying this technology to Marchuk–Petrov’s antiviral immune response model with parameter values corresponding to hepatitis B infection. The presence of bistability and hysteresis properties in this model is shown for the first time.

**Keywords:** Marchuk–Petrov’s antiviral immune response model, delayed argument, stationary solutions, tracing by parameters, numerical experiment, hepatitis B infection, bistability, hysteresis

**For citation:** M. Yu. Khristichenko, Yu. M. Nechepurenko, D. S. Grebennikov, G. A. Bocharov, “Numerical analysis of stationary solutions of systems with delayed argument in mathematical immunology,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2022, vol. **68**, No. 4, 686–703. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-686-703>

### REFERENCES

1. G. I. Marchuk, *Izbrannye trudy: T. 4. Matematicheskoe modelirovanie v immunologii i meditsine* [Izbrannye trudy: T. 4. Matematicheskoe modelirovanie v immunologii i meditsine], RAN, Moscow, 2018 (in Russian).
2. G. Bocharov, D. Grebennikov, J. Argilaguët, and A. Meyerhans, “Examining the cooperativity mode of antibody and CD8+ T cell immune responses for vaccinology,” *Trends Immunol.*, 2021, **42**, 852–855.
3. G. Bocharov, D. Grebennikov, P. Cebollada Rica, E. Domenjo-Vila, V. Casella, and A. Meyerhans, “Functional cure of a chronic virus infection by shifting the virus–host equilibrium state,” *Front. Immunol.*, 2022, **13**, 904342.
4. G. A. Bocharov and G. I. Marchuk, “Applied problems of mathematical modelling in immunology,” *Comput. Math. Math. Phys.*, 2000, **40**, 1905–1920.
5. G. A. Bocharov, Yu. M. Nechepurenko, M. Yu. Khristichenko, and D. S. Grebennikov, “Optimal disturbances of bistable time-delay systems modeling virus infections,” *Dokl. Math.*, 2018, **98**, 313–316.
6. G. A. Bocharov, Yu. M. Nechepurenko, M. Yu. Khristichenko, and D. S. Grebennikov, “Optimal perturbations of systems with delayed independent variables for control of dynamics of infectious diseases based on multicomponent actions,” *J. Math. Sci.*, 2021, **253**, 618–641.
7. G. Bocharov, V. Volpert, B. Ludewig, and A. Meyerhans, “Multi-scale and integrative modeling approaches,” In: *Mathematical Immunology of Virus Infections*, Springer, Cham, 2018, pp. 221–242.
8. G. C. Fanning, F. Zoulim, J. Hou, and A. Bertoletti, “Therapeutic strategies for hepatitis B virus infection: towards a cure,” *Nat. Rev. Drug Discov.*, 2019, **18**, 827–844.
9. K. O. Geddes, S. R. Czapór, and G. Labahn, *Algorithms for computer algebra*, Kluwer, Dordrecht, 1992.
10. D. Grebennikov, A. Karsonova, M. Loguinova, V. Casella, A. Meyerhans, and G. Bocharov, “Predicting the kinetic coordination of immune response dynamics in SARS-CoV-2 infection: implications for disease pathogenesis,” *Mathematics*, 2022, **10**, 3154.
11. R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer, New York–Heidelberg–Berlin, 1977.



12. M. Yu. Khristichenko, Yu. M. Nechepurenko, D. S. Grebennikov, and G. A. Bocharov, “Modelling chronic hepatitis B using the Marchuk–Petrov model,” *J. Phys. Conf. Ser.*, 2021, **2099**, 012036.
13. G. I. Marchuk, *Mathematical Models in Immunology*, Springer, New York–Berlin etc., 1983.
14. G. I. Marchuk, *Mathematical Modelling of Immune Response in Infectious Diseases*, Kluwer, Dordrecht, 1997.
15. G. I. Marchuk, A. A. Romanyukha, and G. A. Bocharov, “Mathematical model of antiviral immune response. II. Parameters identification for acute viral hepatitis B,” *J. Theor. Biol.*, 1991, **151**, 41–69.
16. Yu. M. Nechepurenko, M. Yu. Khristichenko, D. S. Grebennikov, and G. A. Bocharov, “Bistability analysis of virus infection models with time delays,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 2020, **13**, 2385–2401.
17. R. Seydel, *Practical Bifurcation and Stability Analysis*, Springer, New York, 2010.
18. E. V. Sklyarova, Yu. M. Nechepurenko, and G. A. Bocharov, “Numerical steady state analysis of the Marchuk–Petrov model of antiviral immune response,” *Russ. J. Numer. Anal. Math. Model.*, 2020, **35**, 95–110.
19. S. Wu, T. Zhou, and T. Tian, “A robust method for designing multistable systems by embedding bistable subsystems,” *NPJ Syst. Biol.*, 2022, **8**, 1–9.

M. Yu. Khristichenko

Marchuk Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia  
E-mail: [misha.hrist@gmail.com](mailto:misha.hrist@gmail.com)

Yu. M. Nechepurenko

Marchuk Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia  
E-mail: [yumnech@yandex.ru](mailto:yumnech@yandex.ru)

D. S. Grebennikov

Marchuk Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia  
E-mail: [dmitry.ew@gmail.com](mailto:dmitry.ew@gmail.com)

G. A. Bocharov

Marchuk Institute of Numerical Mathematics of the Russian Academy of Sciences, Moscow, Russia  
E-mail: [gbocharov@gmail.com](mailto:gbocharov@gmail.com)

## КОМПЛЕКСНЫЙ РОСТОК МАСЛОВА И КВАЗИКЛАССИЧЕСКИЕ СЖАТЫЕ СОСТОЯНИЯ В ЗАДАЧЕ КОШИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА С ДЕЛЬТА-ПОТЕНЦИАЛОМ

А. И. ШАФАРЕВИЧ, О. А. ЩЕГОРЦОВА

*Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия*

Описана квазиклассическая асимптотика решения задачи Коши для уравнения Шредингера с дельта-потенциалом, локализованным на поверхности коразмерности 1. Оператор Шредингера с дельта-потенциалом определяется при помощи теории расширений и задается краевыми условиями на этой поверхности. Начальные данные выбираются в виде узкого пика, представляющего собой гауссов пакет, локализованный в малой окрестности точки. Для построения асимптотики используется метод комплексного роста Маслова. Описывается отражение комплексного роста от носителя дельта-потенциала.

**Ключевые слова:** уравнение Шредингера с дельта-потенциалом, квазиклассическая асимптотика решения, метод комплексного роста Маслова

**Для цитирования:** А. И. Шафаревич, О. А. Щегорцова. Комплексный рост Маслова и квазиклассические сжатые состояния в задаче Коши для уравнения Шредингера с дельта-потенциалом // *Соврем. мат. Фундам. направл.* 2022. Т. 68, № 4. С. 704–715. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-704-715>

### 1. ВВЕДЕНИЕ И ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Операторы Шредингера с дельта-потенциалами широко применяются в различных физических и математических задачах; в частности, для описания сильно локализованных полей, порожденных точечными дефектами в материалах. Одной из первых работ, где такие потенциалы применялись к изучению движения электрона в кристаллической решетке, является работа [10], в которой потенциал представляет собой периодическую цепочку дельта-функций. Строгое математическое определение операторов с дельта-потенциалом было дано Ф. А. Березиным и Л. Д. Фаддеевым в работе [1], где было предложено использовать подход, основанный на теории расширений. Теории операторов с точечными потенциалами посвящен ряд монографий; см., например, [8, 9] и цитированную там литературу.

Теория комплексного роста Маслова (см. [2, 3]) позволяет описывать квазиклассические асимптотические решения уравнений с гладкими коэффициентами, локализованные в малой окрестности подмногообразия положительной коразмерности. В простейших ситуациях такие решения описываются функциями  $e^{iS(x,t)/h}\varphi(x,t,h)$ , где  $h$  — квазиклассический малый параметр, фаза  $S$  комплексна и  $\Im S \geq 0$  (указанное многообразие задается уравнением  $\Im S = 0$ ). В общем случае для описания решения используются геометрические объекты — комплексные векторные расслоения над изотопными поверхностями. Если коэффициенты уравнения содержат

---

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (грант № 21-71-00050).

особенности, теория Маслова впрямую неприменима; в частности, соответствующие геометрические объекты должны перестраиваться в точках носителя особенностей коэффициентов. Ниже описана такая перестройка в случае задачи Коши для нестационарного уравнения Шредингера с потенциалом, содержащим особенность типа  $\delta$ -функции, локализованной на поверхности координатности 1. В начальный момент времени волновая функция задается в виде узкого пика, представляющего собой гауссов пакет, локализованный в малой окрестности точки. Близкие задачи, связанные с квазиклассическими асимптотиками с вещественными фазами, изучались в работах [5–7, 11]; в частности, в этих работах описаны перестройки лагранжевых поверхностей, определяющих решение, в точках носителя дельта-потенциала. Отметим, что лагранжевы поверхности преобразуются самым естественным образом — «по законам геометрической оптики»; в то же время, перестройка комплексного ростка, описанная в настоящей работе, нетривиальна и оказывается связана с геометрией поверхности-носителя.

Пусть  $x \in \mathbb{R}^n$ , а  $\delta_M$  —  $\delta$ -функция, определенная на поверхности  $M$ . Будем считать, что  $M \in \mathbb{R}^n$  — гладкое  $(n - 1)$ -мерное ориентированное подмногообразие.

Рассмотрим задачу Коши для уравнения Шредингера:

$$\begin{cases} ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + V(x) \psi + \frac{q(y)}{h} \delta_M \psi, \\ \psi(x, 0) = \tilde{A} e^{i \frac{S_0(x)}{h}}. \end{cases} \tag{1.1}$$

Здесь  $V(x)$  — гладкая вещественная функция в  $\mathbb{R}^n$  (для определенности будем считать, что эта функция равна константе вне некоторого компакта — это предположение никак не влияет на конструкцию асимптотики), а  $q(y)$  — гладкая вещественная функция, заданная на поверхности  $M$ ;  $y = (y_1, y_2, \dots, y_{n-1})$  — локальные координаты на  $M$ ;  $h > 0$  — малый квазиклассический параметр. Начальные условия заданы в виде гауссова пучка: амплитуда имеет вид  $\tilde{A} = h^{-\frac{n}{4}} A$ ,  $A \in \mathbb{R}$ , начальная фаза  $S_0(x)$  — гладкая комплекснозначная функция, заданная формулой

$$S_0(x) = s_0 + \langle p_0, x - x_0 \rangle + \frac{1}{2} \langle x - x_0, Q_0(x - x_0) \rangle, \tag{1.2}$$

где  $s_0 \in \mathbb{R}$ ,  $p_0 \in \mathbb{R}^n$ ,  $Q_0$  — симметричная матрица размера  $n \times n$  с элементами из  $\mathbb{C}$ , причем  $\Im Q_0 > 0$ . Угловыми скобками здесь и всюду далее обозначена стандартная билинейная форма (сумма произведений соответствующих координат) над полем комплексных чисел. Нормировочный множитель  $h^{-n/4}$  введен для того, чтобы гарантировать оценку начальной функции  $\|\psi(x, 0)\|_{L_2} = O(1)$ .

Оператор

$$\hat{H} = -\frac{h^2}{2} \Delta + V(x) + \frac{q(y)}{h} \delta_M$$

введем как самосопряженное расширение оператора с гладким потенциалом  $\hat{H}_0 = -\frac{h^2}{2} \Delta + V(x)$ , ограниченного на функции, равные нулю на  $M$ . Зададим область определения такого оператора краевыми условиями

$$\begin{cases} \psi(r(y) - 0, t) = \psi(r(y) + 0, t), \\ h \left( \frac{\partial \psi}{\partial \nu}(r(y) - 0, t) - \frac{\partial \psi}{\partial \nu}(r(y) + 0, t) \right) = q(y) \psi(r(y), t). \end{cases} \tag{1.3}$$

Здесь  $x = r(y)M$  — параметрические уравнения, задающие поверхность  $M$ ,  $\psi(r(y) \pm 0, t)$  — пределы функции  $\psi$  с положительной и отрицательной сторон от этой поверхности,  $\nu = \nu(y)$  — ориентирующая единичная нормаль к  $M$ .

**Замечание 1.1.** Всяду далее мы считаем, что точка  $x_0$  не лежит на поверхности  $M$ ; чтобы начальная функция  $\psi(x, 0)$  удовлетворяла краевым условиям, ее надо домножить на гладкую финитную функцию, равную единице в некоторой не зависящей от  $h$  окрестности точки  $x_0$  и такой, что ее носитель не пересекается с  $M$ . Такое домножение приведет к изменению начальной функции и всего асимптотического решения на величину  $O(h^\infty)$ ; в дальнейшем мы считаем, что эта процедура выполнена, причем для упрощения формул не будем явно выписывать указанную срезающую функцию.

Ниже описана асимптотика при  $h \rightarrow +0$  решения задачи Коши (1.1). Начальный гауссов пучок распространяется в пространстве и взаимодействует с дельта-потенциалом. После взаимодействия он разбивается на две части, одна из которых проходит дальше, а другая отражается; мы описываем эволюцию прошедшей и отраженной частей гауссова пучка, а также правила склейки этих частей в точках поверхности  $M$ .

**Замечание 1.2.** В каждый момент времени асимптотическое решение представляет собой функцию, локализованную в малой окрестности одной или двух точек в  $\mathbb{R}^n$  и экспоненциально малое вне любой не зависящей от  $h$  окрестности этих точек. В частности, на любом конечном отрезке времени решение экспоненциально мало вне некоторого шара. Будем считать, что поверхность  $M$  делит этот шар на две части — положительную и отрицательную (относительно нормали  $\nu$ ); в действительности на асимптотику, описанную ниже, влияет лишь сколь угодно малая окрестность одной точки  $M$  (точки пересечения этой поверхности с траекторией классической системы Гамильтона, выпущенной из точки  $x_0$  с начальным импульсом  $p_0$ ).

Работа имеет следующую структуру. В разделе 2 мы напомним конструкцию асимптотики решения задачи с гладким потенциалом. В разделе 3 получено решение задачи с потенциалом, содержащим дельта-функцию.

## 2. ЗАДАЧА КОШИ С ГЛАДКИМ ПОТЕНЦИАЛОМ

Напомним структуру асимптотического решения уравнения Шредингера с гладким потенциалом (т. е. в этом разделе мы считаем, что  $q \equiv 0$ ). В этом случае задача Коши имеет вид

$$\begin{cases} ih \frac{\partial \psi}{\partial t} = -\frac{h^2}{2} \Delta \psi + V(x) \psi, \\ \psi(x, 0) = \tilde{A} e^{i \frac{S_0(x)}{h}}, \end{cases} \quad (2.1)$$

и все функции определены так же, как и для (1.1).

Покажем, что решение задачи (2.1) разлагается в асимптотический ряд

$$\psi(x, t, h) \sim h^{-n/4} e^{i \frac{S(x,t)}{h}} \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_k \left( \frac{x - X(t)}{h^{1/2}}, t \right) h^{k/2},$$

$$S(x, t) = \sigma(t) + \langle P(t), x - X(t) \rangle + \langle x - X(t), Q(t)(x - X(t)) \rangle,$$

где  $h^{-n/4}$  — нормировочный множитель. Для этого введем новую переменную  $z = \frac{x - X(t)}{h^{1/2}}$ . Уравнение Шредингера имеет вид

$$ih \frac{\partial \psi}{\partial t} - ih^{1/2} \langle \dot{X}, \frac{\partial \psi}{\partial z} \rangle = -\frac{h}{2} \Delta_z \psi + V(z, t) \psi,$$

где  $V(z, t) = V(h^{1/2}z + X(t))$ . Вместо потенциала  $V(z, t)$  рассмотрим его разложение в ряд Тейлора в окрестности точки  $z = 0$ :

$$V(z, t) \sim V(X(t)) + \sum_{k>0} \frac{1}{k!} \sum_{|s|=k} \frac{\partial^k V}{\partial z^s} \Big|_{z=0} z^s.$$

Заметим, что  $k$ -ые производные по  $z$  выражаются через производные  $x$  как

$$\frac{\partial^k V(z, t)}{\partial z^m} \Big|_{z=0} = h^{k/2} \frac{\partial^k V(x)}{\partial x^m} \Big|_{x=X(t)}$$

( $m$  — мультииндекс,  $|m| = k$ ). В новых координатах функция  $\psi(x, t, h)$ , определенная выше, принимает вид

$$\psi(z, t, h) \sim h^{-n/4} e^{iS(z,t)/h} \sum_{k=0}^N \varphi_k(z, t) h^{k/2},$$

$$S(z, t) = \sigma(t) + h^{1/2} \langle P(t), z \rangle + \frac{h}{2} \langle z, Q(t)z \rangle.$$



Подставив  $\psi(z, t, h)$  в уравнение Шредингера (2.1), получим

$$\begin{aligned} & h^{-n/4} \left( \dot{\sigma} - \langle \dot{X}, P \rangle + \frac{1}{2} \langle P, P \rangle + V(X) \right) \sum_k \varphi_k h^{k/2} + \\ & + h^{-n/4} h^{1/2} \left( \langle \dot{P}, z \rangle - \langle \dot{X}, Qz \rangle + \langle P, Qz \rangle + \langle \nabla_x V(X), z \rangle \right) \sum_k \varphi_k h^{k/2} + \\ & + ih^{-n/4} h^{1/2} \sum_k \langle \dot{X} - P, \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \rangle h^{k/2} + \\ & + h^{-n/4} \frac{h}{2} \left( \langle z, \dot{Q}z \rangle + \langle Qz, Qz \rangle + \langle z, V_{xx}(X)z \rangle \right) \sum_k \varphi_k h^{k/2} - \\ & - ih^{-n/4} h \sum_k \left( \frac{\partial \varphi_k}{\partial t} + \langle Qz, \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \rangle + \frac{1}{2} \text{tr} Q \varphi_k - \frac{i}{2} \Delta \varphi_k \right) h^{k/2} + \\ & + h^{-n/4} \sum_{k \geq 3} \frac{1}{k!} \sum_{|m|=k} h^{k/2} \frac{\partial^k V}{\partial x^m}(X) z^m \sum_j \varphi_j h^{j/2} = 0. \end{aligned}$$

Последнее слагаемое можно переписать в форме

$$h^{-n/4} h \sum_{k \geq 1} h^{\frac{k}{2}} \sum_{s=0}^k \frac{\varphi_s}{(k-s+2)!} \sum_{\substack{|m|=k-s+2 \\ |m| > 2}} \frac{\partial^{|m|} V}{\partial x^m}(X) z^m + U_{N+1}, \quad \|U_{N+1}\|_{L_2} = O(h^{\frac{N+3}{2}}).$$

Собирая коэффициенты при различных степенях  $h^{k/2}$  и опуская нормировочный коэффициент  $h^{-n/4}$ , получим уравнения на функции  $\sigma(t)$ ,  $X(t)$ ,  $P(t)$ ,  $Q(t)$ ,  $\varphi_k(z, t)$ .

Выписав слагаемые при  $h^0$ , получим, что функция  $\sigma(t)$  должна удовлетворять уравнению:

$$\begin{cases} \dot{\sigma}(t) = \langle \dot{X}(t), P(t) \rangle - H(X(t), P(t)), \\ \sigma(0) = S_0(x_0) = s_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

где  $H(x, p) = p^2/2 + V(x)$ .

Рассмотрим задачу Коши для гамильтоновой системы

$$\dot{x} = H_p, \quad \dot{p} = -H_x, \quad x(0) = x_0, \quad p(0) = p_0;$$

пусть  $\{x = X(t), p = P(t)\}$  — решение этой задачи (траектория в фазовом пространстве  $\mathbb{R}_{(x,p)}^{2n}$ ).

Тогда  $\sigma(t)$  определяется формулой

$$\sigma(t) = S_0(x_0) + \int_0^t \left( \frac{p^2}{2} - V(x) \right) \Big|_{x=X(\tau), p=P(\tau)} d\tau.$$

Рассматривая слагаемые при  $h^1$ , получим уравнения на функции  $Q(t)$  и  $\varphi_0(z, t)$ . Функция  $Q(t)$  представляет собой симметричную комплекснозначную матрицу размера  $n \times n$  и удовлетворяет уравнению

$$\langle z, \dot{Q}z \rangle + \langle Qz, Qz \rangle + \langle z, V_{xx}(X(t))z \rangle = 0,$$

или в матричном виде

$$\dot{Q} + Q^2 + H_{xx}(X(t), P(t)) = 0, \quad Q(0) = Q_0. \quad (2.3)$$

Известно, что решение такого уравнения имеет вид  $Q(t) = B(t)(C(t))^{-1}$ , где  $B(t)$  и  $C(t)$  — решения системы в вариациях в матричной форме

$$\dot{C} = H_{pp}B + H_{px}C = B, \quad \dot{B} = -H_{xx}C - H_{xp}B = -V_{xx}(X)C, \quad C(0) = E, \quad B(0) = Q_0.$$

Рассмотрим оставшиеся слагаемые при  $h^1$  и  $h^k$ ,  $k > 1$ . Старшая часть амплитуды  $\varphi_0$  и поправки к ней  $\varphi_k$  ( $k > 0$ ) должны удовлетворять уравнениям переноса

$$\varphi_{k+} \langle Q(t)z, \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \rangle + \frac{1}{2} \operatorname{tr} Q(t) \varphi_k - \frac{i}{2} \Delta_z \varphi_k = \Phi_{k-1},$$

$$\Phi_{-1} = 0, \quad \Phi_k(z, t) = -i \sum_{j=0}^N \frac{\varphi_j}{(k-j+2)!} \sum_{\substack{|m|=k-j+2 \\ |m|>2}} \frac{\partial^{|m|} V}{\partial x^m}(X) z^m, \quad k \geq 0$$

и начальным условиям  $\varphi_0(z, 0) = A$ ,  $\varphi_k(z, 0) = 0$ . Решения этих уравнений — многочлены по переменным  $z$ . Таким образом, получаем следующее предложение.

**Предложение 2.1** (ср. с [3, лемма 3.12]). *На любом конечном (не зависящем от  $h$ ) промежутке времени  $t \in [0, T]$  функция*

$$\psi_N(x, t, h) = h^{-n/4} e^{i \frac{S(x,t)}{h}} \sum_{k=0}^N \varphi_k \left( \frac{x - X(t)}{h^{1/2}}, t \right) h^{k/2}$$

удовлетворяет уравнению (2.1) с точностью до функции  $\omega$ , где  $\|\omega\|_{L_2} = O(h^{\frac{N+1}{2}})$ , и точно удовлетворяет начальному условию.

Учитывая самосопряженность оператора Шредингера, получаем следствие.

**Следствие 2.1.** *Точное решение  $\psi$  задачи (2.1) при  $t \in [0, T]$  имеет вид  $\psi = \psi_N + O(h^{\frac{N-1}{2}})$ .*

### 3. ПОТЕНЦИАЛ С ОСОБЕННОСТЬЮ ТИПА $\delta$ -ФУНКЦИИ

Перейдем к описанию асимптотики при наличии дельта-потенциала. Влияние особенности заключается в том, что при взаимодействии с дельта-потенциалом гауссов пучок разбивается на две части, одна из которых отражается от поверхности-носителя дельта-функции, а другая проходит дальше. Решение задачи строится в виде суммы трех функций, отвечающих падающей, отраженной и прошедшей волнам. Падающий и отраженный пучки определяются с отрицательной стороны от поверхности  $M$ , тогда как прошедшая — с положительной. Для этих функций используются обозначения  $\{+, -, \hat{\cdot}\}$ .

Сформулируем результат. Рассмотрим траекторию  $\{X^+(t), P^+(t)\}$  гамильтоновой системы с гамильтонианом  $H(x, p) = p^2/2 + V(x)$ , заданную условиями

$$X^+(0) = x_0, \quad P^+(0) = p_0. \quad (3.1)$$

Пусть точка  $x_0$  лежит с отрицательной стороны от поверхности  $M$  и за промежуток времени  $t \in [0, T]$  проекция  $X^+(t)$  траектории на пространство  $\mathbb{R}_x^n$  пересекает  $M$  в единственной точке  $x = r(y_0) = X^+(t_0)$ , причем вектор  $\dot{X}^+(t_0)$  не касается  $M$ . Обозначим через  $\{X^-(t), P^-(t)\}$  «отраженную» траекторию той же системы — она задается условиями

$$X^-(t_0) = X^+(t_0), \quad P_n^-(t_0) = -P_n^+(t_0), \quad P_\tau^-(t_0) = P_\tau^+(t_0), \quad (3.2)$$

где  $P_n^+(t_0)$  и  $P_\tau^+(t_0)$  — нормальная и касательная к поверхности  $M$  компоненты вектора  $P^+(t_0)$  в точке  $x = r(y_0)$ .

Рассмотрим систему в вариациях

$$\dot{C} = B, \quad \dot{B} = -V_{xx}(X^+(t))C \quad (3.3)$$

и определим матричные функции  $B^+(t)$  и  $C^+(t)$  размера  $n \times n$ , составленные из вектор-столбцов решений этой системы (3.3), и заданные начальными условиями

$$C^+(0) = E, \quad B^+(0) = Q_0.$$

Пусть  $Q^+(t) = B^+(C^+)^{-1}$ ; определим симметричную матрицу  $Q^-(t_0)$  равенствами

$$\begin{cases} \langle r_i, Q^-(t_0)r_j \rangle = \langle r_i, Q^+(t_0)r_i \rangle + \langle r_{ij}, p^+ - p^- \rangle, \\ \langle p^-, Q^-(t_0)p^- \rangle = \langle p^+, Q^+(t_0)p^+ \rangle + \langle \frac{\partial V}{\partial x}(r(y_0)), p^+ - p^- \rangle, \\ \langle p^-, Q^-(t_0)r_i \rangle = \langle p^+, Q^+(t_0)r_i \rangle. \end{cases} \quad (3.4)$$

Здесь  $r_i = \frac{\partial r}{\partial y^i}(y_0)$ ,  $r_{ij} = \frac{\partial^2 r}{\partial y^i \partial y^j}(y_0)$ ,  $p^+ = P^+(t_0)$  и  $p^- = P^-(t_0)$ .

**Замечание 3.1.** Из приведенных равенств следует, что ограничение формы  $Q^-(t_0)$  на касательную плоскость к  $M$  получается из ограничения формы  $Q^+(t_0)$  сдвигом на вторую фундаментальную форму  $b$  поверхности  $M$ :

$$Q^-(t_0)|_{T_{r(y_0)}M} = Q^-(t_0)|_{T_{r(y_0)}M} + 2P_n^+(t_0)b(r(y_0)).$$

Определим матричные функции  $B^-(t)$  и  $C^-(t)$  как решения системы в вариациях

$$\dot{C} = B, \quad \dot{B} = -V_{xx}(X^-(t))C, \quad (3.5)$$

определенные условиями

$$B^-(t_0) = Q^-(t_0), \quad C^-(t_0) = E. \quad (3.6)$$

Введем функции  $\sigma^+(t)$ ,  $\sigma^-(t)$ ,  $\hat{\sigma}(t)$ :

$$\begin{aligned} \hat{\sigma}(t) = \sigma^+(t) &= S_0(x_0) + \int_0^t \left( \frac{p^2}{2} - V(x) \right) \Big|_{x=X^+(\tau), p=P^+(\tau)} d\tau, \\ \sigma^-(t) &= \sigma^+(t_0) + \int_{t_0}^t \left( \frac{p^2}{2} - V(x) \right) \Big|_{x=X^-(\tau), p=P^-(\tau)} d\tau. \end{aligned} \quad (3.7)$$

Определим функции  $S^+$ ,  $S^-$  и  $\hat{S}$  (фазы падающей, отраженной и прошедшей волн) следующим образом:

$$\begin{aligned} S^+(x, t) &= \hat{S}(x, t) = \sigma^+(t) + \langle P^+(t), x - X^+(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle x - X^+(t), Q^+(t)(x - X^+(t)) \rangle, \\ S^-(x, t) &= \sigma^-(t) + \langle P^-(t), x - X^-(t) \rangle + \frac{1}{2} \langle x - X^-(t), Q^-(t)(x - X^-(t)) \rangle, \end{aligned} \quad (3.8)$$

где  $Q^+(t) = B^+(t)(C^+(t))^{-1}$  и  $Q^-(t) = B^-(t)(C^-(t))^{-1}$ .

Введем новые переменные

$$z^+ = \frac{x - X^+(t)}{h^{1/2}}, \quad z^- = \frac{x - X^-(t)}{h^{1/2}}$$

и рассмотрим функции  $\varphi_k^+(z^+, t)$ ,  $\varphi_k^-(z^-, t)$ ,  $\hat{\varphi}_k^-(z^+, t)$  (старшие части амплитуд падающего, отраженного и прошедшего пучков ( $k = 0$ ) и поправки к ним ( $k > 0$ )), удовлетворяющие уравнениям переноса

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_k + \langle Q(t)z, \frac{\partial \varphi_k}{\partial z} \rangle + \text{tr } Q(t)\varphi_k - \frac{i}{2} \Delta_z \varphi_k &= \Phi_{k-1}, \\ \Phi_{-1} = 0, \quad \Phi_k(z, t) &= -i \sum_{j=0}^k \frac{\varphi_j}{(k+3-j)!} \sum_{|m|=k+3-j} \frac{\partial^{|m|} V}{\partial x^m}(X(t))z^m, \quad k = \overline{0, N}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Здесь для краткости опущены индексы, различающие три пучка. Для падающего пучка в начальный момент времени  $t = 0$  амплитуда совпадает с начальным условием:  $\varphi_0^+(z^+, 0) = A$ ,  $\varphi_k^+(z^+, 0) = 0$ . Для отраженного и прошедшего пучков амплитуды определим с помощью условий в точке  $t_0$ . Для этого введем  $n$ -мерный вектор  $\xi = (y - y_0, t - t_0)h^{-1/2}$ , тогда  $z^\pm|_M \sim z_1^\pm(\xi) + \sum_{i=2}^{\infty} z_k^\pm(\xi)h^{\frac{k-1}{2}}$  (асимптотический ряд), где  $z_k^\pm$  — однородные многочлены от  $\xi$  степени  $k$ .

Потребуем от  $\varphi_k^+(z^+, t)$ ,  $\varphi_k^-(z^-, t)$ ,  $\hat{\varphi}_k^-(z^+, t)$  выполнения следующих условий

$$\varphi_k^-(z_1^-, t_0) = \frac{-q(y_0)\varphi_k^+(z_1^+, t_0) + u_k(\xi)}{2iP_n^+(t_0) + q(y_0)}, \quad \hat{\varphi}_k^-(z_1^+, t_0) = \frac{2iP_n^+(t_0)\varphi_k^+(z_1^+, t_0) + v_k(\xi)}{2iP_n^+(t_0) + q(y_0)}. \quad (3.10)$$

Здесь  $u_k(\xi)$  и  $v_k(\xi)$  — многочлены от  $\xi$ , которые выражаются через амплитуды  $\varphi$  с предыдущими номерами ( $0, \dots, k-1$ ), причем  $u_0 = v_0 = 0$ ; они описаны ниже при доказательстве теоремы.

Решения  $\varphi_k(z, t)$  задач Коши (3.9)–(3.10) представляют собой многочлены от переменным  $z$  степени  $3k$ .

Определим функцию

$$\Psi(x, t, h) = \begin{cases} h^{-n/4} e^{iS^+(x,t)/h} \sum_{k=0}^N \varphi_k^+\left(\frac{x-X^+(t)}{h^{1/2}}, t\right) h^{k/2} + h^{-n/4} e^{iS^-(x,t)/h} \sum_{k=0}^N \varphi_k^-\left(\frac{x-X^-(t)}{h^{1/2}}, t\right) h^{k/2} \\ \text{с отрицательной стороны поверхности } M, \\ h^{-n/4} e^{i\hat{S}(x,t)/h} \sum_{k=1}^N \hat{\varphi}_k\left(\frac{x-X^+(t)}{h^{1/2}}, t\right) h^{k/2} + \omega \\ \text{с положительной стороны поверхности } M, \end{cases} \quad (3.11)$$

где функция  $\omega$  определена ниже (см. доказательство теоремы), причем  $\|\omega\|_{L^2} = O(h^{\frac{N}{2}})$ .

**Теорема 3.1.** *Решение задачи Коши (1.1) при  $t \in [t_0, T]$  представимо в виде  $\psi = \Psi + \varkappa$ , где  $\|\varkappa\|_{L^2} = O(h^{\frac{N}{2}-1})$ .*

*Доказательство.* Обозначим через  $\hat{L}$  нестационарный оператор Шредингера с гладким потенциалом:

$$\hat{L} = -ih \frac{\partial}{\partial t} - \frac{h^2}{2} \Delta + V(x). \quad (3.12)$$

1. Докажем, что при  $\omega = 0$  построенная функция  $\Psi(x, t, h)$  вне поверхности  $M$  удовлетворяет уравнению  $\hat{L}\Psi = O(h^{\frac{N+3}{2}})$  (здесь и далее все оценки понимаются в норме пространства  $L_2$ ). Сделаем замену переменных  $z^j = (x - X^j(t))h^{-1/2}$  (здесь и далее индексом  $j \in \{1, 2, 3\}$  переобозначены символы  $\{+, -, \hat{\cdot}\}$ ), в новых переменных оператор  $\hat{L}$  принимает вид  $\hat{L} = -ih \frac{\partial}{\partial t} + ih^{1/2} \langle \dot{X}^j, \frac{\partial}{\partial z} \rangle - \frac{h}{2} \Delta_z + V(X + h^{1/2}z)$ . Рассмотрим действие оператора  $\hat{L}$  на функцию  $\Psi(z, t, h)$ . Получим

$$\begin{aligned} \hat{L}\Psi &= h^{-n/4} \sum_{j=1}^3 e^{iS^j/h} \left[ \left( \dot{\sigma}^j - \langle \dot{X}^j, P^j \rangle + \frac{1}{2} \langle P^j, P^j \rangle + V(X^j) \right) \sum_{k=0}^N \varphi_k^j h^{k/2} + \right. \\ &+ h^{-n/4} h^{1/2} \left( \langle \dot{P}^j, z^j \rangle - \langle \dot{X}^j, Q^j z^j \rangle + \langle P^j, Q^j z^j \rangle + \langle \nabla_x V(X^j), z^j \rangle \right) \sum_{k=0}^N \varphi_k^j h^{k/2} + \\ &+ ih^{-n/4} h^{1/2} \sum_{k=0}^N \langle \dot{X}^j - P^j, \frac{\partial \varphi_k^j}{\partial z} \rangle h^{k/2} + \\ &+ h^{-n/4} \frac{h}{2} \left( \langle z, \dot{Q}^j z \rangle + \langle Q^j z, Q^j z \rangle + \langle z, \Delta_x V(X) z \rangle \right) \sum_{k=0}^N \varphi_k^j h^{k/2} - \\ &- ih^{-n/4} h \sum_{k=0}^N \left( \frac{\partial \varphi_k^j}{\partial t} + \langle Q^j z, \frac{\partial \varphi_k^j}{\partial z} \rangle + \text{tr } Q^j \varphi_k^j - \frac{i}{2} \Delta \varphi_k^j \right) h^{k/2} + \\ &+ h^{-n/4} \sum_{k \geq 3} \frac{1}{k!} \sum_{|m|=k} h^{k/2} \frac{\partial^k V}{\partial x^m}(X^j) z^m \sum_{l=0}^N \varphi_l^j h^{l/2} \Big], \\ S^\pm(z, t) &= \sigma^j(t) + h^{1/2} \langle P^j(t), z \rangle + \frac{h}{2} \langle z, Q^j z \rangle. \end{aligned}$$

Здесь и далее индексы при переменных  $z^j$  опущены для упрощения записи.

Поскольку  $(X^j, P^j)$  — траектории системы Гамильтона,  $(B^j, C^j)$  — решения системы в вариациях, а  $\sigma^j$  определены формулами (3.7), то соответствующие слагаемые обращаются в нуль и

$$\hat{L}\Psi = h^{-n/4} \sum_{j=1}^3 e^{iS^j/h} \left[ -ih \sum_{k=0}^N \left( \frac{\partial \varphi_k^j}{\partial t} + \langle Q^j z, \frac{\partial \varphi_k^j}{\partial z} \rangle + \text{tr } Q^j \varphi_k^j - \frac{i}{2} \Delta \varphi_k^j \right) h^{k/2} + \right.$$

$$+ h^{-n/4} \sum_{k \geq 3} \frac{1}{k!} \sum_{|m|=k} h^{k/2} \frac{\partial^k V}{\partial x^m} (X^j) z^m \sum_{l=0}^N \varphi_l^j h^{l/2} \Big].$$

В силу того, что  $\varphi_k^j$  — решения соответствующих уравнений переноса, получим

$$\begin{aligned} \hat{L}\Psi &= h^{-n/4} h \sum_{k=N+1}^{\infty} h^{\frac{k}{2}} \sum_{j=0}^k \frac{\varphi_j^i}{(k-j+2)!} \sum_{|m|=k-j+2} \frac{\partial^{|m|} V}{\partial x^m} (X(t)) z^m, \\ \|\hat{L}\Psi\|_{L_2} &= O(h^{\frac{N+3}{2}}). \end{aligned}$$

2. Докажем, что функцию  $\omega$  можно выбрать так, что  $\Psi$  попадет в область определения оператора Шредингера с дельта-потенциалом. Для этого должны выполняться краевые условия (1.3). Решение  $\Psi$  представимо в виде линейной комбинации падающей, прошедшей и отраженной волн. Рассмотрим каждую из них в точках поверхности  $M$ , заданной уравнением  $x = r(y)$ . Определим вектор  $\xi = (y - y_0, t - t_0)h^{-1/2}$ , тогда  $z|_M = z_1(\xi) + \sum_{k=2}^{\infty} z_k(\xi)h^{\frac{k-1}{2}}$ , где  $z_k$  — однородные многочлены от  $\xi$  степени  $k$ . В точках поверхности, заданных координатами  $(y, t)$ , сделаем замену  $(y, t) = (y_0, t_0) + h^{1/2}\xi$ . После этого фазы  $S^+$  и  $S^-$  можно переписать в виде

$$\begin{aligned} S^{\pm}(z_1(\xi), t) &= \sum_{m=0}^{\infty} S_m^{\pm}(\xi)h^{m/2} = \sigma^{\pm}(t_0) + \left( \dot{\sigma}^{\pm}(t_0)\xi^n + \langle P^{\pm}, z_1(\xi) \rangle \right) h^{1/2} + \\ &+ \left( \frac{1}{2}\ddot{\sigma}^{\pm}(\xi^n)^2 + \langle \dot{P}^{\pm}(t_0), z_1(\xi) \rangle \xi^n + \langle P^{\pm}(t_0), z_2(\xi) \rangle + \frac{1}{2} \langle Q^{\pm}(t_0)z_1(\xi), z_1(\xi) \rangle \right) h + \\ &+ \sum_{m=3}^{\infty} S_m^{\pm}(\xi)h^{m/2}, \end{aligned}$$

где  $S_m^{\pm}$  — однородные многочлены от  $\xi$  степени  $m$ . Тогда

$$\frac{i}{h} S^{\pm} = \frac{i}{h} \left( S_0 + S_1 h^{1/2} + S_2 h \right) + \sum_{m=3}^{\infty} S_m h^{\frac{m-2}{2}}.$$

Из построения  $\sigma^{\pm}$  известно, что  $\dot{\sigma}^{\pm} = \frac{1}{2} \langle P^{\pm}, P^{\pm} \rangle - V(X^{\pm})$  и  $\ddot{\sigma}^{\pm} = 2 \langle P^{\pm}, \dot{P}^{\pm} \rangle$ . Заметим, что  $z_1(\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} \frac{\partial r}{\partial y^i} \xi^i - P(t_0)\xi^n$  и  $z_2(\xi) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{\partial^2 r}{\partial y^i \partial y^j} \xi^i \xi^j - \dot{P}(t_0)(\xi^n)^2$ . Учитывая условия (3.2), (3.4), получим, что фазы падающей и отраженной волн на поверхности  $M$  совпадают вплоть до квадратичных по  $\xi$  слагаемых:  $S_0^+ = S_0^-$ ,  $S_1^+ = S_1^-$  и  $S_2^+ = S_2^-$ .

Разложим амплитуды по  $\xi$ , получим

$$\varphi_k^{\pm}(z(\xi), t) = \varphi_k^{\pm}(z_1(\xi), t_0) + \sum_{s \geq 1} \varphi_k^{\pm s}(\xi)h^{s/2}, \quad \hat{\varphi}_k(z(\xi), t) = \hat{\varphi}_k(z_1(\xi), t_0) + \sum_{s \geq 1} \hat{\varphi}_k^s(\xi)h^{s/2},$$

где  $\varphi_k^{\pm s}(\xi)$ ,  $\hat{\varphi}_k^s(\xi)$  — многочлены от  $\xi$ .

Напишем разложения по  $\xi$  для функций, входящих в краевые условия (1.3):

$$\begin{aligned} \Psi^+|_M &= h^{-n/4} e^{\frac{i}{h} S^+(z(\xi), t)} \sum_{k=0}^N \varphi_k^+(z(\xi), t) h^{k/2} = \\ &= h^{-n/4} e^{\frac{i}{h} (S_0^+ + S_1^+(\xi)h^{1/2} + S_2^+(\xi)h)} \sum_{k=0}^N \left( \varphi_k^+(z_1(\xi), t_0) + \chi_k^+(\xi) \right) h^{k/2} + \phi^+, \\ h \frac{\partial \Psi^+}{\partial \nu} \Big|_M &= h^{-n/4} e^{\frac{i}{h} (S_0^+ + S_1^+(\xi)h^{1/2} + S_2^+(\xi)h)} \sum_{k=0}^N \left( i \langle P^+(t_0), \nu(y_0) \rangle \varphi_k^+(z_1(\xi), t_0) + \mu_k^+(\xi) \right) h^{k/2} + \phi_{\nu}^+, \end{aligned}$$

$$q(y)\Psi|_M = h^{-n/4} e^{\frac{i}{h}(S_0^+ + S_1^+(\xi)h^{1/2} + S_2^+(\xi)h)} (q(y_0) \sum_{k=0}^N \varphi_k^+(z_1, t_0) + \gamma_k^+(\xi)) h^{k/2} + \phi_q^+.$$

Здесь  $\chi_k^+(\xi)$ ,  $\mu_k^+(\xi)$ ,  $\gamma_k^+(\xi)$  — многочлены от  $\xi$ , выражающиеся через линейные комбинации функций  $\varphi_0^+, \dots, \varphi_{k-1}^+$  при  $k = \overline{1, N}$ ;  $\chi_0^+ \equiv \mu_0^+ \equiv \gamma_0^+ \equiv 0$  при  $k = \overline{1, N}$ ;  $\phi^+$ ,  $\phi_m^+$  и  $\phi_q^+$  — функции порядка  $O(h^{\frac{N+1}{2}})$ . Аналогично устроены разложения для отраженной и прошедшей волн. Подставляя полученные разложения в краевые условия (1.3), получим из первого условия

$$\begin{aligned} & h^{-n/4} e^{\frac{i}{h}(S_0^+ + S_1^+(\xi)h^{1/2} + S_2^+(\xi)h)} \sum_{k=0}^N (\varphi_k^+(z_1(\xi), t_0) + \varphi_k^-(z_1(\xi), t_0)) h^{k/2} = \\ & = h^{-n/4} e^{\frac{i}{h}(S_0^+ + S_1^+(\xi)h^{1/2} + S_2^+(\xi)h)} \sum_{k=0}^N (\hat{\varphi}_k(z_1(\xi), t_0) + \hat{\chi}_k(\xi) - \chi_k^+(\xi) - \chi_k^-(\xi)) h^{k/2} + \phi. \end{aligned}$$

Второе краевое условие перепишем в виде

$$\begin{aligned} & ih^{-n/4} P_n^+(t_0) e^{\frac{i}{h}(S_0^+ + S_1^+(\xi)h^{1/2} + S_2^+(\xi)h)} \sum_{k=0}^N (\varphi_k^+(z_1(\xi), t_0) - \varphi_k^-(z_1(\xi), t_0) - \hat{\varphi}_k(z_1(\xi), t_0)) h^{k/2} = \\ & = h^{-n/4} e^{\frac{i}{h}(S_0^+ + S_1^+(\xi)h^{1/2} + S_2^+(\xi)h)} \sum_{k=0}^N (q(y_0)\varphi_k(z_1, t_0) + \gamma_k(\xi) + \hat{\mu}_k(\xi) - \mu_k^+(\xi) - \mu_k^-(\xi)) h^{k/2} + \phi_\nu. \end{aligned}$$

Здесь  $\phi = \hat{\phi} - \phi^+ - \phi^-$ ,  $\phi_\nu = \hat{\phi}_q - \phi_q^+ - \phi_q^- + \hat{\phi}_m - \phi_m^+ - \phi_m^-$ ,  $\gamma_k = \hat{\gamma}_k - \gamma_k^+ - \gamma_k^-$ .

Введем обозначения  $\chi_k = \hat{\chi}_k - \chi_k^+ - \chi_k^-$ ,  $\mu_k = \hat{\mu}_k - \mu_k^+ - \mu_k^-$ . Определим функции

$$\begin{aligned} u_k(\xi) &= -(\mu_k(\xi) + \gamma_k(\xi) - iP_n^+(t_0)\chi_k(\xi)), \\ v_k(\xi) &= -(\mu_k(\xi) + \gamma_k(\xi) + iP_n^+(t_0)\chi_k(\xi)). \end{aligned} \quad (3.13)$$

Принимая во внимания условия на амплитуды (3.10), получим, что функция  $\Psi^0 = \Psi|_{\omega=0}$  удовлетворяет условиям

$$\begin{cases} \Psi^0(r(y) - 0, t) - \Psi^0(r(y) + 0, t) = \phi, \\ h \left( \frac{\partial \Psi^0}{\partial \nu}(r(y) - 0, t) - \frac{\partial \Psi^0}{\partial \nu}(r(y) + 0, t) \right) - q(y)\Psi^0(r(y), t) = \phi_\nu. \end{cases} \quad (3.14)$$

Отметим свойства функций  $\phi$ ,  $\phi_m$ : каждая из этих функций представляется в виде

$$h^{\frac{N+1}{2} - \frac{n}{4}} e^{\frac{i}{h}s} g(\xi, y, t, h),$$

где  $s$  — квадратичная по  $\xi$  часть функции  $S^+|_M$ ,  $g(\xi, y, t, h)$  — гладкая функция своих аргументов, растущая при  $|\xi| \rightarrow \infty$  не быстрее многочлена. Нормы функций  $\phi$  и  $\phi_\nu$  удовлетворяют оценкам

$$\|\phi\|_{L^2(M \times [0, T])} = O(h^{\frac{N+1}{2}}), \quad \left\| h \frac{\partial}{\partial y_j} \phi \right\| = O(h^{\frac{N+1}{2}}), \quad \left\| h \frac{\partial}{\partial t} \phi \right\| = O(h^{\frac{N+1}{2}});$$

кроме того, эти функции локализованы в малой окрестности точки  $r(y_0)$  (в частности, экспоненциально малы на конечном, не зависящем от  $h$ , расстоянии от этой точки). Введем в окрестности точки  $r(y_0)$  координаты  $(y, \rho)$ , где  $\rho$  — ориентированное расстояние до  $M$  по нормали. Определим функцию  $\omega$  с положительной стороны от  $M$  в этой окрестности по формуле

$$\omega = e^{-\frac{\rho^2}{h}} \left( \phi + \frac{\rho}{h} (\phi_\nu - q\phi) \right)$$

и продолжим ее во все пространство при помощи гладкой не зависящей от  $h$  функции, равной нулю вне некоторой большей окрестности. Легко видеть, что при этом функция  $\Psi$  точно удовлетворяет краевым условиям (1.3), т. е. лежит в области определения оператора Шредингера с дельта-потенциалом. Кроме того, поскольку

$$\|\omega\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} = O(h^{\frac{N}{2}}), \quad \left\| h \frac{\partial}{\partial x_j} \omega \right\| = O(h^{\frac{N}{2}}), \quad \left\| h \frac{\partial}{\partial t} \omega \right\| = O(h^{\frac{N}{2}}),$$

вне поверхности  $M$  выполнено  $\hat{L}\Psi = O(h^{\frac{N}{2}})$ .

3. Построенная функция  $\Psi$  удовлетворяет уравнению

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = \hat{H}\Psi + f,$$

где  $\hat{H}$  — оператор Шредингера с дельта-потенциалом и  $\|f\|_{L_2} = O(\hbar^{\frac{N}{2}})$ . Теперь утверждение теоремы следует из самосопряженности  $\hat{H}$ .  $\square$

#### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Березин Ф. А., Фаддеев Л. Д. Замечание об уравнении Шредингера с сингулярным потенциалом // Докл. АН СССР. — 1961. — 137, № 5. — С. 1011–1014.
2. Маслов В. П. Комплексный метод ВКБ в нелинейных уравнениях. — М.: Наука, 1977.
3. Маслов В. П. Асимптотические методы и теория возмущений. — М.: Наука, 1988.
4. Маслов В. П., Федорюк М. В. Квазиклассическое приближение для уравнений квантовой механики. — М.: Наука, 1976.
5. Ратью Т., Филатова Т. А., Шафаревич А. И. Некомпактные лагранжевы многообразия, соответствующие спектральным сериям оператора Шредингера с дельта-потенциалом на поверхности вращения // Докл. РАН. — 2012. — 446, № 6. — С. 618–620.
6. Филатова Т. А., Шафаревич А. И. Квазиклассические спектральные серии оператора Шредингера с дельта-потенциалом на прямой и на сфере // Теор. мат. физ. — 2010. — 164, № 2. — С. 279–298.
7. Шафаревич А. И., Щегорцова О. А. Квазиклассическая асимптотика решения задачи Коши для уравнения Шредингера с дельта-потенциалом, локализованным на поверхности коразмерности 1 // Тр. МИАН. — 2020. — 310. — С. 322–331.
8. Albeverio S., Gesztesy F., Høegh-Krohn R., Holden H. Solvable models in quantum mechanics. — Providence: AMS Chelsea Publ., 2005.
9. Albeverio S., Kurasov P. Singular perturbations of differential operators. — Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2000.
10. Kronig R. de L., Penney W. G. Quantum mechanics of electrons in crystal lattices // Proc. R. Soc. London Ser. A. — 1931. — 130. — С. 499–513.
11. Ratiu T. S., Suleimanova A. A., Shafarevich A. I. Spectral series of the Schrödinger operator with delta-potential on a three-dimensional spherically symmetric manifold // Russ. J. Math. Phys. — 2013. — 20, № 3. — С. 326–335.

А. И. Шафаревич

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: shafarev@yahoo.com

О. А. Щегорцова

Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова, Москва, Россия

E-mail: olga.shchegortsova@gmail.com

DOI 10.22363/2413-3639-2022-68-4-704-715

UDC 517.958

## Maslov complex germ and semiclassical contracted states in the Cauchy problem for the Schrödinger equation with delta potential

A. I. Shafarevich and O. A. Shchegortsova

*Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia*

We describe the semiclassical asymptotic behavior of the solution of the Cauchy problem for the Schrödinger equation with a delta potential localized on a surface of codimension 1. The Schrödinger operator with a delta potential is defined using the theory of extensions and is given by the boundary conditions on this surface. The initial data are selected as a narrow peak, which is a Gaussian packet localized in a small neighborhood of the point. To construct the asymptotics, we use the Maslov complex germ method. We describe the reflection of the complex germ from the carrier of the delta potential.

**Keywords:** Schrödinger equation with a delta potential, semiclassical asymptotics of solution, Maslov complex germ method

**For citation:** A. I. Shafarevich, O. A. Shchegortsova, “Maslov complex germ and semiclassical contracted states in the Cauchy problem for the Schrödinger equation with delta potential,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2022, vol. **68**, No. 4, 704–715. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-704-715>

### REFERENCES

1. F. A. Berezin and L. D. Faddeev, “Zamechanie ob uravnenii Shredingera s singulyarnym potentsialom” [A note on the Schrödinger equation with a singular potential], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1961, **137**, No. 5, 1011–1014 (in Russian).
2. V. P. Maslov, *Kompleksnyy metod VKB v nelineynykh uravneniyakh* [Complex Wentzel–Kramers–Brillouin Method in Nonlinear Equations], Nauka, Moscow, 1977 (in Russian).
3. V. P. Maslov, *Asimptoticheskie metody i teoriya vozmushcheniy* [Asymptotic Methods and Perturbation Theory], Nauka, Moscow, 1988 (in Russian).
4. V. P. Maslov and M. V. Fedoryuk, *Kvaziklassicheskoe priblizhenie dlya uravneniy kvantovoy mekhaniki* [Semiclassical Approximation for Equations of Quantum Mechanics], Nauka, Moscow, 1976 (in Russian).
5. T. Ratiu, T. A. Filatova, and A. I. Shafarevich, “Nekompaktnye lagranzhevy mnogoobraziya, sootvetstvuyushchie spektral’nym seriyam operatora Shredingera s del’ta-potentsialom na poverkhnosti vrashcheniya” [Noncompact Lagrangian manifolds corresponding to the spectral series of the Schrödinger operator with delta potential on the rotation surface], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2012, **446**, No. 6, 618–620 (in Russian).
6. T. A. Filatova and A. I. Shafarevich, “Kvaziklassicheskie spektral’nye serii operatora Shredingera s del’ta-potentsialom na pryamoy i na sfere” [Semiclassical spectral series of the Schrödinger operator with a delta potential on a line and on a sphere], *Teor. mat. fiz.* [Theor. Math. Phys.], 2010, **164**, No. 2, 279–298 (in Russian).
7. A. I. Shafarevich and O. A. Shchegortsova, “Kvaziklassicheskaya asimptotika resheniya zadachi Koshi dlya uravneniya Shredingera s del’ta-potentsialom, lokalizovannym na poverkhnosti korazmernosti 1” [Semiclassical asymptotics of the solution of the Cauchy problem for the Schrödinger equation with a delta potential localized on a surface of codimension 1], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2020, **310**, 322–331 (in Russian).





8. S. Albeverio, F. Gesztesy, R. Høegh-Krohn, and H. Holden, *Solvable models in quantum mechanics*, AMS Chelsea Publ., Providence, 2005.
9. S. Albeverio and P. Kurasov, *Singular perturbations of differential operators*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
10. R. de L. Kronig and W. G. Penney, “Quantum mechanics of electrons in crystal lattices,” *Proc. R. Soc. London Ser. A*, 1931, **130**, 499–513.
11. T. S. Ratiu, A. A. Suleimanova, and A. I. Shafarevich, “Spectral series of the Schrödinger operator with delta-potential on a three-dimensional spherically symmetric manifold,” *Russ. J. Math. Phys.*, 2013, **20**, No. 3, 326–335.

A. I. Shafarevich

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E-mail: shafarev@yahoo.com

O. A. Shchegortsova

Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E-mail: olga.shchegortsova@gmail.com

## СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ ДЛЯ СИСТЕМ «РЕАКЦИЯ-ДИФФУЗИЯ»

Г. А. Юнес<sup>1,2</sup>, Н. Эль Хатив<sup>3</sup>, В. А. Вольперт<sup>4</sup>

<sup>1</sup>*Institut Camille Jordan, Виллербанн, Франция*

<sup>2</sup>*University Lyon 1, Виллербанн, Франция*

<sup>3</sup>*Lebanese American University, Библос, Ливан*

<sup>4</sup>*Российский университет дружбы народов, Москва, Россия*

В работе доказывается существование решения новой задачи со свободной границей для систем типа «реакция-диффузия», описывающих рост биологических тканей вследствие притока клеток и пролиферации. Для этого задача сводится к задаче с закрепленной границей через замену переменных. Полученная задача имеет зависящие от времени и положения в пространстве коэффициенты с нелинейными слагаемыми. Затем мы доказываем существование решения для соответствующей линейной задачи и с помощью теоремы о неподвижной точке получаем существование решения нелинейной задачи. Наконец, мы возвращаемся к задаче со свободной границей и делаем вывод о существовании ее решения.

**Ключевые слова:** задача со свободной границей, система реакция-диффузия, рост биологических тканей, существование решения

**Для цитирования:** Г. А. Юнес, Н. Эль Хатив, В. А. Вольперт. Существование решения задачи со свободной границей для систем «реакция-диффузия» // Соврем. мат. Фундам. направл. 2022. Т. 68, № 4. С. 716–731. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-716-731>

### 1. ВВЕДЕНИЕ

Задачи со свободной границей используются для исследования различного рода феноменов, особенно в биологических процессах. Например, они применяются в моделях инвазии рака и терапии в микросредах. В [7] нелинейная система уравнений в частных производных со свободной границей моделирует лучевую терапию рака, где свободной границей является поверхность опухоли. Объем опухоли моделируется как несжимаемая жидкость, и популяция клеток приводит к колебаниям внутреннего давления, что вызывает движение опухолевых клеток. Авторы доказали существование и единственность решения этой системы, а также провели вычислительный эксперимент.

Далее, в моделировании роста и структуры растений задачи со свободной границей используются для описания механизмов ветвления, см. [1]. В этой работе авторы описывают рост и формирование растения как задачу со свободной границей, где растущее растение — это система интервалов, описывающая рост ветвей, чья длина зависит от времени. Система состоит из уравнений диффузии с конвективными слагаемыми, где краевые условия зависят от скорости роста.

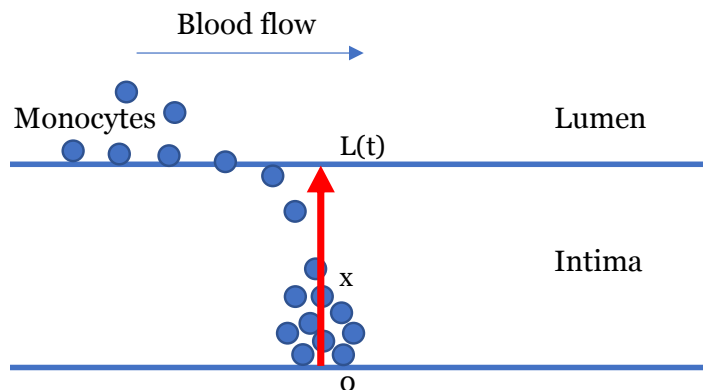


Рис. 1. Схематическое описание поперечного сечения артерии, показывающее проникновение клеток из крови в артериальную стенку и их накопление внутри интимы. Клетки в интиме формируют бляшку, которая растет в направлении, перпендикулярном сосуду, и сужает кровяной поток. Красная стрелка показывает область размера  $L(t)$ , зависящего от времени. Заметим, что клетки внутри интимы могут разделяться, умирать или перемещаться, так что размеры области определяются комбинацией процессов проникновения клеток через стенку и их динамики внутри области.

FIG. 1. Schematic representation of the cross-section of an artery showing the penetration of cells from the blood towards the arterial wall and their accumulation in the intima. The cells in the intima form a plaque which grows in the direction perpendicular to the vessel and narrows the blood flow. The red arrow represents the domain with time-dependent size  $L(t)$ . Note that cells inside the intima can divide, die or move away, such that the width of the domain is determined by the combination of cell influx through the wall and their dynamics inside the domain.

В некоторых других работах исследуются задачи со свободной границей для модели «хищник—жертва» при изучения пространственно-временной динамики экологических систем. В [8] свободная граница описывает фронт распространения хищников в одномерной среде обитания. Уравнения «реакция—диффузия» моделируют плотность популяций хищников и жертв, в которых таксис жертв варьируется от движения к еде до агрегации для выживания. Авторы доказывают существование и единственность решения, используя теорему о сжимающем отображении, и проводят вычислительный эксперимент для исследования поведения взаимодействующих видов и эволюции свободной границы.

Также много математических моделей со свободной границей было разработано для изучения атеросклероза — воспалительного заболевания, ведущего к формированию липидных бляшек на артериальной стенке. В таких моделях рост бляшки приводит к перемещению области. Отметим работу [2], в которой авторы рассматривают повреждение эндотелия и проницаемость для описания изменения радиуса просвета во времени. Анализ показывает, что повреждение эндотелия со временем увеличивается. В [6] область представляет собой артерию, а эндотелий моделируется как интерфейс между просветом и интимой. Авторы используют соответствующие условия передачи и граничные условия для моделирования концентрации изучаемых факторов с помощью УЧП типа «реакция—конвекция—диффузия» в интиме, на клеточной поверхности эндотелия и в просвете. В этой работе изменение проницаемости эндотелия обусловлено увеличением концентрации ЛПНП в эндотелии и воспалительным процессом. Более того, как показано в [3], концентрация различных элементов, скапливающихся под поврежденной частью слоя эндотелия, ведет к внутреннему и внешнему росту бляшки. Ее внешний рост обусловлен давлением крови на стенку и по принятому допущению имеет форму дуги окружности.

В настоящей работе мы изучаем системы «реакция—диффузия» со свободной границей в одномерном случае. Такие задачи возникают в различных ситуациях, особенно в биологии, где накопление клеток приводит к росту размера области. Интересным приложением таких задач является моделирование атеросклероза, характеризующегося проникновением липопротеинов низкой плотности и иммунных клеток в артериальную стенку через тонкий барьер, называемый эндотелием. Их накопление и взаимодействие в субэндотелиальном пространстве ведет к формированию бляшки. На рис. 1 показано движение области вследствие проникновения клеток через эндотелий и их накопления под интимой, слоем артериальной стенки.

Одной из важнейших характеристик задач со свободной границей являются уравнения, описывающие движение. Общепринятый подход, особенно в физических задачах (плавление, рост кристаллов) заключается в движении свободной границы вместе с потоком соответствующих величин через эту границу. Однако этот подход может быть неприменим для биологических тканей, поскольку клетки могут делиться, умирать и затем удаляться. Таким образом, движение свободной границы в случае с биологическими задачами определяется не только потоком клеток или субстанций через границу, но и их динамикой внутри области. В текучей среде движение свободной границы определяется разницей в давлении внутри и снаружи области. Биологические ткани имеют более сложную структуру, возможно, с вязкоупругими или вязкопластичными свойствами, адгезией «клетка—клетка», делением и смертью клеток, их движением и т. д. Движение свободной границы в этом случае определяется конкретными свойствами ткани, клеток и субстанций, которые ее формируют.

В этой работе рассматривается задача со свободной границей для биологической ткани, формируемой клетками, в предположении, что клетки не сжаты. Тогда размер области, которую формируют клетки, в одномерном случае определяется количеством клеток. Мы приведем формулировку задачи в следующем разделе. Наша задача состоит в том, чтобы доказать существование решения этой задачи.

## 2. ОПИСАНИЕ МОДЕЛИ

**2.1. Модель со свободной границей.** Рассмотрим вектор-функции  $u$ ,  $F$  и  $h$ , состоящие из  $m$  компонент, и следующую систему на интервале  $0 < x < L(t)$ , где  $L(t)$  зависит от времени:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + F(u), \quad (2.1)$$

где  $u$  — концентрация элементов, а  $D$  — диагональная матрица с положительными диагональными элементами  $D_j$ ,  $j = 1, \dots, m$ . Граничные условия следующие:

$$x = 0 : \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad x = L(t) : \frac{\partial u}{\partial x} = h(u), \quad (2.2)$$

где  $h(u)$  определяет поток элементов через границу. Длина интервала  $L(t)$  определена как

$$L(t) = L_0 + \int_0^{L(t)} f(u) dx, \quad (2.3)$$

где  $L_0$  — начальная длина, функция  $f$  принадлежит классу  $C^2(\mathbb{R})$ , а интеграл в правой части определяет увеличение длины. Везде ниже будем полагать, что  $0 < \epsilon \leq f(u) < f_0 + f(u) < 1$  для всех  $u \geq 0$  и некоторых положительных констант  $\epsilon$  и  $f_0$ , где неравенства между векторами понимаются в покомпонентном смысле. Более того,  $F(0) \geq 0$  и  $h(u) \geq 0$  для всех  $u \geq 0$ , так что решение задачи (2.1), (2.2) с неотрицательным начальным условием остается неотрицательным при всех  $t \geq 0$ . Другие условия на эти функции сформулированы ниже.

Дифференцируя уравнение (2.3) по  $t$ , получим:

$$L'(t) = f(u(L(t), t))L'(t) + \int_0^{L(t)} \left( \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial u_j}(u(x, t)) \frac{\partial u_j(x, t)}{\partial t} \right) \right) dx =$$

$$= f(u(L(t), t))L'(t) + \int_0^{L(t)} \left( \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial u_j(x, t)}(u(x, t)) \left( D_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + F_j(u(x, t)) \right) \right) \right) dx.$$

Отсюда получаем, что  $L'(t)$  определяется формулой:

$$L'(t) = \frac{\int_0^{L(t)} \left( \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial u_j(x, t)}(u(x, t)) \left( D_j \frac{\partial^2 u_j}{\partial x^2} + F_j(u(x, t)) \right) \right) \right) dx}{1 - f(u(L(t), t))}. \tag{2.4}$$

**2.2. Задача с закрепленной границей.** Пробуя исследовать систему (2.1)–(2.3), сначала сведем ее к системе с закрепленной границей с помощью замены переменной, а затем докажем, что решение такой задачи существует. Это позволит нам доказать существование решения для исходной задачи с подвижной границей.

Сделаем следующую замену переменной:

$$y = \frac{x}{L(t)},$$

где  $y \in [0, 1]$ . Положим  $u(x, t) = u(yL(t), t) = U(y, t)$ . Используя правило дифференцирования сложной функции, имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} + \frac{\partial U}{\partial t} \frac{\partial t}{\partial x} = \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial x} = \frac{1}{L(t)} \frac{\partial U}{\partial y},$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{1}{L^2(t)} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial U}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial U}{\partial t} = -\frac{yL'(t)}{L(t)} \frac{\partial U}{\partial y} + \frac{\partial U}{\partial t}.$$

Подставляя эти выражения в уравнения (2.1), (2.2) и (2.4), мы получаем следующую задачу:

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{D}{L^2(t)} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{yL'(t)}{L(t)} \frac{\partial U}{\partial y} + F(U), \\ y = 0 : \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad y = 1 : \frac{\partial U}{\partial y} = L(t)h(U), \\ L'(t) = \frac{\int_0^1 \left( \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial U_j(y, t)}(U(y, t)) \left( \frac{D_j}{L^2(t)} \frac{\partial^2 U_j}{\partial y^2} + F_j(U(y, t)) \right) \right) \right) L(t)dy}{1 - f(U(1, t))}. \end{cases} \tag{2.5}$$

### 3. СУЩЕСТВОВАНИЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ С ЗАКРЕПЛЕННОЙ ГРАНИЦЕЙ

В этом разделе мы докажем существование решения задачи с закрепленной границей, затем получим аналогичный результат для задачи со свободной границей. Рассмотрим следующую краевую задачу для  $y \in [0, 1]$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial U}{\partial t} = \frac{D}{L^2(t)} \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{yL'(t)}{L(t)} \frac{\partial U}{\partial y} + F(U), \\ y = 0 : \frac{\partial U}{\partial y} = 0, \quad y = 1 : \frac{\partial U}{\partial y} = L(t)h(U), \\ U(y, 0) = 0, \\ L'(t) = \frac{\int_0^1 \left( \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial U_j(y, t)}(U(y, t)) \left( \frac{D_j}{L^2(t)} \frac{\partial^2 U_j}{\partial y^2} + F_j(U(y, t)) \right) \right) \right) L(t)dy}{1 - f(U(1, t))}. \end{cases} \tag{3.1}$$

Введем функции  $N(t)$  и  $V(y, t)$  и рассмотрим следующую линейную задачу для  $y \in [0, 1]$ ,  $t \in [0, T]$ , где  $U_j$ ,  $F_j$  и  $h_j$  — компоненты вектор-функций  $U$ ,  $F$  и  $h$ , соответственно:

$$\begin{cases} \frac{\partial U_j}{\partial t} = \frac{D_j}{N^2(t)} \frac{\partial^2 U_j}{\partial y^2} + \frac{yN'(t)}{N(t)} \frac{\partial U_j}{\partial y} + F_j(V(y, t)), \\ y = 0 : \frac{\partial U_j}{\partial y} = 0, \quad y = 1 : \frac{\partial U_j}{\partial y} = N(t)h_j(V(1, t)), \\ U_j(y, 0) = 0. \end{cases} \quad (3.2)$$

Введем следующие обозначения:  $Q_T$  — цилиндр  $Q_T = [0, 1] \times (0, T)$ , т. е. множество точек  $(y, t)$  из  $\mathbb{R}^2$  таких, что  $y \in [0, 1]$  и  $t \in (0, T)$ ,  $S = \{0, 1\}$ ;  $S_T = S \times (0, T)$ ;  $Q$  — произвольное открытое подмножество  $Q_T$ ;  $l$  — нецелое число такое, что  $0 < l < 1/2$ .

**Теорема 3.1** (существование решения системы (3.2)). *Если выполнены следующие условия:*

- функция  $N$  принадлежит классу  $H^{l/2+1}([0, T])$ ,
- существует константа  $N_0 > 0$  такая, что функция  $N$  ограничена числом  $N_0$  снизу,
- функция  $F_j$  принадлежит классу  $C^1(\mathbb{R})$ ,
- функция  $h_j$  принадлежит классу  $C^1(\mathbb{R})$ ,
- функция  $V$  принадлежит классу  $H^{(l+1)}([0, 1] \times [0, T])$ ,
- $h_j(V(1, 0)) = 0$ ,

то задача (3.2) имеет единственное решение  $U_j \in H^{l+2, l/2+1}(\overline{Q_T})$ , причем

$$|U_j|_Q^{(l+2)} \leq c_j \left( \|h_j\|_{C^1(\mathbb{R})} + \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} + |V|_{Q_T}^{(l+1)} \left( \|h_j\|_{C^1(\mathbb{R})} + c_V \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} \right) \right), \quad (3.3)$$

где  $c_j$  и  $c_V$  — константы.

*Доказательство.* Определим оператор  $\mathcal{L}_j$ :

$$\mathcal{L}_j \left( y, t, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t} \right) = \frac{\partial U_j}{\partial t} - \frac{D_j}{N^2(t)} \frac{\partial^2 U_j}{\partial y^2} - \frac{yN'(t)}{N(t)} \frac{\partial U_j}{\partial y},$$

функцию  $f_j$ :

$$\begin{aligned} f_j : \overline{Q_T} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (y, t) &\longmapsto f_j(y, t) = F_j(V(y, t)), \end{aligned}$$

функцию  $\Phi_j$ :

$$\begin{aligned} \Phi_j : [0, T] &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ t &\longmapsto \Phi_j(t) = h_j(V(1, t)), \end{aligned}$$

и функцию  $b_1$ :

$$\begin{aligned} b_1 : \overline{S_T} &\longrightarrow \mathbb{R}, \\ (y, t) &\longmapsto b_1(y, t) = \frac{1}{N(t)}. \end{aligned}$$

Получим, что

$$\begin{aligned} \left| \frac{D_j}{N^2(t)} \right|_{(0, T)}^{(l/2)} &= \left\langle \frac{D_j}{N^2(t)} \right\rangle_{(0, T)}^{(l/2)} + \left\langle \frac{D_j}{N^2(t)} \right\rangle_{(0, T)}^{(0)} = \sup_{\substack{t, t' \in (0, T) \\ |t-t'| \leq \rho_0}} \frac{D_j |N^2(t') - N^2(t)|}{|t-t'|^{l/2} |N^2(t)N^2(t')|} + \left| \frac{D_j}{N^2(t)} \right|_{(0, T)}^{(0)} \leq \\ &\leq \frac{D_j}{N_0^4} \left( \sup_{\substack{t, t' \in (0, T) \\ |t-t'| \leq \rho_0}} \frac{|N(t')||N(t') - N(t)|}{|t-t'|^{l/2}} + \sup_{\substack{t, t' \in (0, T) \\ |t-t'| \leq \rho_0}} \frac{|N(t)||N(t') - N(t)|}{|t-t'|^{l/2}} \right) + \frac{D_j}{N_0^2} = \\ &= \frac{2D_j}{N_0^4} \left( \langle N \rangle_{[0, T]}^{(0)} \langle N \rangle_{[0, T]}^{(l/2)} \right) + \frac{D_j}{N_0^2} \leq \frac{2D_j c_N}{N_0^4} \left( |N|_{[0, T]}^{(l/2+1)} \right)^2 + \frac{D_j}{N_0^2} < \infty, \end{aligned}$$

где  $c_N$  — константа, и

$$\begin{aligned}
\left| \frac{N'}{N} \right|_{(0,T)}^{(l/2)} &= \left\langle \frac{N'}{N} \right\rangle_{(0,T)}^{(l/2)} + \left\langle \frac{N'}{N} \right\rangle_{(0,T)}^{(0)} = \sup_{\substack{t,t' \in (0,T) \\ |t-t'| \leq \rho_0}} \frac{|N'(t)N(t') - N'(t')N(t)|}{|t-t'|^{l/2}|N(t)N(t')|} + \left| \frac{N'}{N} \right|_{(0,T)}^{(0)} \leq \\
&\leq \frac{1}{N_0^2} \left( \sup_{\substack{t,t' \in (0,T) \\ |t-t'| \leq \rho_0}} \frac{|N'(t)||N(t') - N(t)|}{|t-t'|^{l/2}} + \sup_{\substack{t,t' \in (0,T) \\ |t-t'| \leq \rho_0}} \frac{|N(t)||N'(t) - N'(t')|}{|t-t'|^{l/2}} \right) + \frac{|N'|_{(0,T)}^{(0)}}{N_0} \leq \\
&\leq \frac{1}{N_0^2} |N|_{[0,T]}^{(l/2+1)} \left( \langle N \rangle_{[0,T]}^{(l/2)} + \langle N' \rangle_{[0,T]}^{(l/2)} \right) + \frac{|N'|_{(0,T)}^{(0)}}{N_0} \leq \\
&\leq \frac{1}{N_0^2} |N|_{[0,T]}^{(l/2+1)} \left( (c_N + 1) |N|_{[0,T]}^{(l/2+1)} \right) + \frac{|N|_{[0,T]}^{(l/2+1)}}{N_0} \leq \frac{|N|_{[0,T]}^{(l/2+1)}}{N_0} \left( \frac{(c_N + 1) |N|_{[0,T]}^{(l/2+1)}}{N_0} + 1 \right) < \infty.
\end{aligned}$$

Отсюда мы получаем, что коэффициенты оператора  $\mathcal{L}_j$  принадлежат классу  $H^{l,l/2}(\overline{Q}_T)$ .

Более того, поскольку функция  $N$  ограничена снизу и принадлежит классу  $H^{l/2+1}([0,T]) \subset H^{(l+1)/2}([0,T])$ , можно аналогично доказать, что функция  $b_1$  принадлежит классу  $H^{(l+1)/2}([0,T])$ .

Далее, если  $\Phi_j$  непрерывна и  $|\Phi_j|_{(0,T)}^{(l+1)/2}$  финитна, тогда функция  $\Phi_j(t)$  принадлежит классу  $H^{(l+1)/2}([0,T])$ . Имеем:

$$\begin{aligned}
|\Phi_j|_{(0,T)}^{((l+1)/2)} &= \langle \Phi_j \rangle_{(0,T)}^{(l+1)/2} + \langle \Phi_j \rangle_{(0,T)}^{(0)} = \sup_{\substack{t,t' \in (0,T) \\ |t-t'| \leq \rho_0}} \frac{|\Phi_j(t) - \Phi_j(t')|}{|t-t'|^{(l+1)/2}} + \max_{t \in (0,T)} |\Phi_j(t)| = \\
&= \sup_{\substack{t,t' \in (0,T) \\ |t-t'| \leq \rho_0}} \frac{|h_j(V(1,t)) - h_j(V(1,t'))| |V(1,t) - V(1,t')|}{|V(1,t) - V(1,t')| |t-t'|^{(l+1)/2}} + \max_{t \in (0,T)} |h_j(V(1,t))| \leq \\
&\leq \|h_j\|_{C^1(\mathbb{R})} |V|_{Q_T}^{(l+1)} + \|h_j\|_{C^1(\mathbb{R})} < \infty.
\end{aligned}$$

Таким образом, из того, что функция  $h_j$  принадлежит классу  $C^1(\mathbb{R})$ , а функция  $V$  удовлетворяет условию Гельдера порядка  $(l+1)/2$  на  $(0,T)$ , мы заключаем, что функция  $\Phi_j(t)$  принадлежит пространству  $H^{(l+1)/2}([0,T])$ .

Функция  $\Phi_j(t)$  удовлетворяет условиям согласования порядка  $(l+1)/2$ , если

$$\frac{\partial^k U_j(y,t)}{\partial t^k} \Big|_{t=0} = \frac{\partial^k \Phi_j}{\partial t^k} \Big|_{t=0} \quad (k = 0, \dots, (l+1)/2 \text{ и } y \in S).$$

Из равенства  $h_j(V(1,0)) = U_j(1,0) = 0$  мы получаем, что функция  $\Phi_j(t)$  удовлетворяет условиям согласования порядка  $(l+1)/2$ .

Поскольку  $F_j$  принадлежит классу  $C^1(\mathbb{R})$ , а  $V$  непрерывна и удовлетворяет условию Гельдера порядка  $l+1$ , то функция  $f_j$  непрерывна и  $|f_j|_{Q_T}^{(l)}$  финитна, поскольку:

$$\begin{aligned}
|f_j|_{Q_T}^{(l)} &= \langle f_j \rangle_{y,Q_T}^{(l)} + \langle f_j \rangle_{t,Q_T}^{(l/2)} + \langle f_j \rangle_{Q_T}^{(0)} = \\
&= \sup_{\substack{y,y' \in (0,1) \\ |y-y'| \leq \rho_0}} \frac{|F_j(V(y,t)) - F_j(V(y',t))|}{|y-y'|^l} + \sup_{\substack{t,t' \in (0,T) \\ |t-t'| \leq \rho_0}} \frac{|F_j(V(y,t)) - F_j(V(y,t'))|}{|t-t'|^{l/2}} + |f_j|_{Q_T}^{(0)} = \\
&= \sup_{\substack{y,y' \in (0,1) \\ |y-y'| \leq \rho_0}} \frac{|F_j(V(y,t)) - F_j(V(y',t))| |V(y,t) - V(y',t)|}{|V(y,t) - V(y',t)| |y-y'|^l} + \\
&+ \sup_{\substack{t,t' \in (0,T) \\ |t-t'| \leq \rho_0}} \frac{|F_j(V(y,t)) - F_j(V(y,t'))| |V(y,t) - V(y,t')|}{|V(y,t) - V(y,t')| |t-t'|^{l/2}} + \max_{(y,t) \in Q_T} |F_j(V(y,t))| \leq \\
&\leq \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} |V|_{Q_T}^{(l)} + \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} \leq c_V \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} |V|_{Q_T}^{(l+1)} + \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})}, \tag{3.4}
\end{aligned}$$

где  $c_V$  — константа. Таким образом, функция  $f_j(y, t)$  принадлежит классу  $H^{l, l/2}(\overline{Q_T})$ .

Следовательно, поскольку коэффициенты оператора  $\mathcal{L}_j$  принадлежат пространству  $H^{l, l/2}(\overline{Q_T})$  и  $b_1 \in H^{l+1, (l+1)/2}(\overline{S_T})$ , то для любых функций  $f_j \in H^{l, l/2}(\overline{Q_T})$  и  $\Phi(t) \in H^{(l+1)/2}([0, T])$ , удовлетворяющей условиям согласования порядка  $[(l+1)/2]$ , т. е.  $U_j(1, 0) = \Phi_j(0)$ , в силу [4, теорема 5.3], для всех  $j = 1, \dots, m$  задача (3.2) имеет единственное решение  $U_j(y, t)$  из класса  $H^{l+2, l/2+1}(\overline{Q_T})$ , причем

$$|U_j|_Q^{(l+2)} \leq c_j \left( |f_j|_Q^{(l)} + |\Phi_j|_{(0, T)}^{(l+1)/2} \right) \leq c_j \left( \|h_j\|_{C^1(\mathbb{R})} + \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} + |V|_{Q_T}^{(l+1)} \left( \|h_j\|_{C^1(\mathbb{R})} + c_V \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} \right) \right),$$

где  $c_j$  — константа.  $\square$

Из последнего равенства задачи (3.1) определим  $L(t)$  как:

$$L(t) = \int_0^t \left( \frac{\int_0^1 \left( \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial U_j}(U(y, s)) \left( \frac{D_j}{N^2(s)} \frac{\partial^2 U_j}{\partial y^2} + F_j(U(y, s)) \right) \right) \right) N(s) dy}{1 - f(U(1, s))} \right) ds + L(0), \quad (3.5)$$

где  $U$  — решение задачи (3.2). Обозначим

$$\psi(y, s) = \left( \sum_{j=1}^m \left( \frac{\partial f}{\partial U_j}(U(y, s)) \left( \frac{D_j}{N^2(s)} \frac{\partial^2 U_j}{\partial y^2} + F_j(U(y, s)) \right) \right) \right) N(s).$$

Интегрируя  $\psi(y, s)$  по частям от 0 до 1 по переменной  $y$ , имеем:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \psi(y, s) dy &= \sum_{j=1}^m \int_0^1 \left( \frac{\partial f}{\partial U_j}(U(y, s)) \frac{D_j}{N(s)} \frac{\partial^2 U_j}{\partial y^2} + \frac{\partial f}{\partial U_j}(U(y, s)) F_j(U(y, s)) N(s) \right) dy = \\ &= \sum_{j=1}^m \left[ \left[ \frac{\partial f}{\partial U_j}(U(y, s)) \frac{D_j}{N(s)} \frac{\partial U_j}{\partial y} \right]_0^1 - \int_0^1 \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial^2 f}{\partial U_j \partial U_k}(U(y, s)) \frac{\partial U_k}{\partial y} \frac{D_j}{N(s)} \frac{\partial U_j}{\partial y} \right) dy + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \left( \frac{\partial f}{\partial U_j}(U(y, s)) F_j(U(y, s)) N(s) \right) dy \right] = \\ &= \sum_{j=1}^m \left[ h_j(V(1, s)) \frac{\partial f}{\partial U_j}(U(y, s)) D_j - \int_0^1 \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial^2 f}{\partial U_j \partial U_k}(U(y, s)) \frac{\partial U_k}{\partial y} \frac{D_j}{N(s)} \frac{\partial U_j}{\partial y} \right) dy + \right. \\ &\quad \left. + \int_0^1 \left( \frac{\partial f}{\partial U_j}(U(y, s)) F_j(U(y, s)) N(s) \right) dy \right]. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Отсюда мы заключаем, что  $L$  принадлежит классу  $H^{\frac{(l+3)}{2}}([0, T])$ .

Определим отображение  $A_j$ , действующее в  $H^{l/2+1}([0, T]) \times H^{l+1}([0, 1] \times [0, T])$ :

$$\begin{aligned} A_j : H^{l/2+1}([0, T]) \times H^{l+1}([0, 1] \times [0, T]) &\longrightarrow H^{l/2+1}([0, T]) \times H^{l+1}([0, 1] \times [0, T]), \\ (N(t), V(y, t)) &\longmapsto A_j(N(t), V(y, t)) = (L(t) - L(0), U(y, t)), \end{aligned}$$

где  $U_j$  — решение задачи (3.2), а  $L$  удовлетворяет уравнению (3.5).

**Предложение 3.1.** Пусть вектор-функция  $U$  с компонентами  $U_j$  является решением задачи (3.2). В условиях теоремы 3.1 при  $t \in [0, T]$  оператор  $A_j$  является ограниченным и компактным.



*Доказательство.* Пусть  $B$  — любое ограниченное множество в  $H^{(l+1)/2}([0, T]) \times H^{l+1}([0, 1] \times [0, T])$ . Для всех  $(N, V) \in B$ ,  $U_j$  удовлетворяют неравенству (3.3). Более того, принимая во внимание, что:

$$|L(t) - L(0)|_{(0,T)}^{((l+3)/2)} = \left\langle D_t(L(t) - L(0)) \right\rangle_{(0,T)}^{(l+1)/2} + |D_t(L(t) - L(0))|_{(0,T)}^{(0)} + |L(t) - L(0)|_{(0,T)}^{(0)},$$

имеем

$$\begin{aligned} \left\langle D_t(L(t) - L(0)) \right\rangle_{(0,T)}^{(l+1)/2} &= \left\langle \sum_{j=1}^m \frac{1}{1 - f(U(1, t))} \left[ h_j(V(1, t)) \frac{\partial f}{\partial U_j}(U(y, t)) D_j - \right. \right. \\ &\quad \left. \left. - \int_0^1 \sum_{k=1}^m \left( \frac{\partial^2 f}{\partial U_j \partial U_k}(U(y, t)) \frac{\partial U_k}{\partial y} \frac{D_j}{N(t)} \frac{\partial U_j}{\partial y} \right) dy + \int_0^1 \left( \frac{\partial f}{\partial U_j}(U(y, t)) F_j(U(y, t)) N(t) \right) dy \right] \right\rangle_{[0,T]}^{(l+1)/2} \leq \\ &\leq \frac{m}{f_0} \left( D_j \|h_j\|_{C^1(\mathbb{R})} \|f\|_{C^2(\mathbb{R})} \langle V(1, t) \rangle_{[0,T]}^{(l+1)/2} + \frac{m D_j}{N_0} \|f\|_{C^2(\mathbb{R})} \max_{k=1, \dots, m} \left\langle \frac{\partial U_k}{\partial y} \right\rangle_{t, Q_T}^{(l+1)/2} \left\langle \frac{\partial U_j}{\partial y} \right\rangle_{t, Q_T}^{(l+1)/2} + \right. \\ &\quad \left. + \|f\|_{C^2(\mathbb{R})} \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} \langle N \rangle_{[0,T]}^{(l+1)/2} \right) \leq \frac{m}{f_0} \left( D_j \|h_j\|_{C^1(\mathbb{R})} \|f\|_{C^2(\mathbb{R})} |V(1, t)|_{[0,T]}^{(l+1)/2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{m D_j}{N_0} \|f\|_{C^2(\mathbb{R})} \max_{j=1, \dots, m} \left( \left\langle \frac{\partial U_j}{\partial y} \right\rangle_{t, Q_T}^{(l+1)/2} \right)^2 + \|f\|_{C^2(\mathbb{R})} \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} |N|_{[0,T]}^{(l+1)/2} \right), \\ |D_t(L(t) - L(0))|_{(0,T)}^{(0)} &\leq \frac{m}{f_0} \left( D_j \|h_j\|_{C^1(\mathbb{R})} \|f\|_{C^2(\mathbb{R})} + \frac{m D_j}{N_0} \|f\|_{C^2(\mathbb{R})} \max_{j=1, \dots, m} \left( \left\langle \frac{\partial U_j}{\partial y} \right\rangle_{t, Q_T}^{(l+1)/2} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + \|f\|_{C^2(\mathbb{R})} \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} |N|_{[0,T]}^{(l+1)/2} \right), \end{aligned}$$

$$|L(t) - L(0)|_{(0,T)}^{(0)} \leq \frac{m t}{f_0} \|f\|_{C^2(\mathbb{R})} \left( \frac{D_j}{N_0} |U_j|_Q^{(l+2)} + \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} \right) |N|_{[0,T]}^{(l/2+1)}.$$

Тогда  $|L(t) - L(0)|_{(0,T)}^{((l+3)/2)}$  ограничено для всех  $(N, V) \in B$ . Таким образом, мы заключаем, что образ  $A_j(B)$  множества  $B$  ограничен в  $H^{l/2+2}([0, T]) \times H^{l+2}([0, 1] \times [0, T])$ . Следовательно, оператор  $A_j$ , действующий из  $H^{l/2+1}([0, T]) \times H^{l+1}([0, 1] \times [0, T])$  в  $H^{l/2+2}([0, T]) \times H^{l+2}([0, 1] \times [0, T])$  ограничен.

Так как  $H^{l/2+2}([0, T]) \times H^{l+2}([0, 1] \times [0, T])$  компактно вложено в  $H^{l/2+1}([0, T]) \times H^{l+1}([0, 1] \times [0, T])$  то  $A_j(B)$  является компактным множеством в  $H^{l/2+1}([0, T]) \times H^{l+1}([0, 1] \times [0, T])$ . Таким образом, оператор  $A_j$  компактен как оператор из  $H^{l/2+1}([0, T]) \times H^{l+1}([0, 1] \times [0, T])$  в  $H^{l/2+2}([0, T]) \times H^{l+2}([0, 1] \times [0, T])$ .  $\square$

**Предложение 3.2.** В условиях теоремы 3.1 оператор  $A_j$  имеет неподвижную точку.

*Доказательство.* Для доказательства мы разбиваем интервал  $[0, T]$  на  $n$  подынтервалов  $[T_i, T_{i+1}]$ , где  $i = 0, 1, \dots, n - 1$ ,  $T_0 = 0$  и  $T_n = T$ . Наша задача — доказать, что для всех  $j = 1, \dots, m$ , задача (3.2) имеет решение, а оператор  $A_j$  имеет неподвижную точку на каждом подынтервале, начиная с подынтервала  $[0, T_1]$ . Результат на подынтервале  $[0, T_1]$  затем обобщается на оставшиеся подынтервалы. Наконец, доказательство существования неподвижной точки на всем интервале  $[0, T]$  следует из свойства полугрупп (см., например, [5]).

Начнем с рассмотрения задачи (3.2) при  $t \in [0, T_1]$  и  $j = 1, \dots, m$ . Поскольку условия теоремы 3.1 выполняются, для всех  $j = 1, \dots, m$ , существует единственное решение  $U_{j_1} \in H^{l+2, l/2+1}([0, 1] \times [0, T_1])$  и неотрицательная константа  $c_{j_1}$  такие, что:

$$|U_{j_1}|_{(0,1) \times (0,T_1)}^{(l+2)} \leq c_{j_1} \left( \|h_j\|_{C^1(\mathbb{R})} + \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} + |V|_{Q_T}^{(l+1)} \left( \|h_j\|_{C^1(\mathbb{R})} + c_V \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} \right) \right).$$

Определим оператор  $A_{j_1}$ :

$$A_{j_1} : H^{l/2+1}([0, T_1]) \times H^{l+1}([0, 1] \times [0, T_1]) \longrightarrow H^{l/2+1}([0, T_1]) \times H^{l+1}([0, 1] \times [0, T_1]),$$

$$(N(t), V(y, t)) \mapsto A_{j_1}(N(t), V(y, t)) = (L_1(t) - L(0), U_{j_1}(y, t)),$$

где  $U_{j_1}$  — решение задачи (3.2) на  $[0, T_1]$ , а  $L_1$  при  $t \in [0, T_1]$  удовлетворяет уравнению

$$L_1(t) = \int_0^t \left( \frac{\int_0^1 \psi(y, s) dy}{1 - f(U(1, s))} \right) ds + L(0). \quad (3.7)$$

Через  $\mathcal{B}_1$  обозначим единичный шар в  $H^{l/2+1}([0, T_1]) \times H^{l+1}([0, 1] \times [0, T_1])$ . Наша задача — доказать, что шар  $\mathcal{B}_1$  строго отображается на себя оператором  $A_{j_1}$  на  $[0, T_1]$ .

В силу первого уравнения задачи (3.2) при  $t \in [0, T_1]$  и уравнения (3.7) мы получаем, что для всех  $(N, V) \in \mathcal{B}_1$ :

$$\begin{aligned} |L_1(T_1) - L(0)| &= \left| \int_0^{T_1} \left( \frac{\int_0^1 \psi(y, s) dy}{1 - f(U(1, s))} \right) ds \right| \leq \frac{T_1 m}{f_0} \|f\|_{C^1(\mathbb{R})} |N|_{[0, T_1]}^{(l/2+1)} \left( \frac{D_j}{N_0} |U_j|_Q^{(l+2)} + \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} \right) \leq \\ &\leq \frac{T_1 m}{f_0} \|f\|_{C^1(\mathbb{R})} \left( \frac{D_j c_{j_1}}{N_0} \left( 2\|h_j\|_{C^1(\mathbb{R})} + (1 + c_V)\|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} \right) + \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} \right) = l_{j_1} T_1, \end{aligned}$$

где  $l_{j_1} = \frac{m}{f_0} \|f\|_{C^1(\mathbb{R})} \left( \frac{D_j c_{j_1}}{N_0} \left( 2\|h_j\|_{C^1(\mathbb{R})} + (1 + c_V)\|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} \right) + \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} \right)$ , и

$$\begin{aligned} |U_{j_1}(y, T_1) - U_{j_1}(y, 0)| &\leq \int_0^{T_1} \left| \frac{D}{N^2(t)} \frac{\partial^2 U_{j_1}}{\partial y^2} \right| + \left| \frac{y N'(t)}{N(t)} \frac{\partial U_{j_1}}{\partial y} \right| + |F_j(V(y, t))| dt \leq \\ &\leq \int_0^{T_1} \frac{D}{N_0^2} \left| \frac{\partial^2 U_{j_1}}{\partial y^2} \right| + \frac{|N|_{[0, T_1]}^{(l/2+1)}}{N_0} \left| \frac{\partial U_{j_1}}{\partial y} \right| + \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} dt \leq \\ &\leq \left( \left( \frac{D}{N_0^2} + \frac{|N|_{[0, T_1]}^{(l/2+1)}}{N_0} \right) |U_{j_1}|_{((0,1) \times (0, T_1))}^{(l+2)} + \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} \right) T_1 \leq \\ &\leq \left( c_{j_1} \left( \frac{D}{N_0^2} + \frac{|N|_{[0, T_1]}^{(l/2+1)}}{N_0} \right) \left( \|h_j\|_{C^1(\mathbb{R})} + \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} \right) \leq \right. \\ &\quad \left. + |V|_{Q_T}^{(l+1)} \left( \|h_j\|_{C^1(\mathbb{R})} + c_V \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} \right) + \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} \right) T_1 \leq \\ &\leq \left( c_{j_1} \left( \frac{D}{N_0^2} + \frac{1}{N_0} \right) \left( 2\|h_j\|_{C^1(\mathbb{R})} + (1 + c_V)\|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} \right) + \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} \right) T_1 = m_{j_1} T_1, \end{aligned}$$

где  $m_{j_1} = \left( c_{j_1} \left( \frac{D}{N_0^2} + \frac{1}{N_0} \right) \left( 2\|h_j\|_{C^1(\mathbb{R})} + (1 + c_V)\|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} \right) + \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} \right)$ .

Таким образом,

$$|U_{j_1}(y, t)|_{[0,1] \times [0, T_1]}^{(0)} \leq m_{j_1} T_1, \quad |L_1(T_1) - L(0)|_{[0, T_1]}^{(0)} \leq l_{j_1} T_1.$$

Более того,  $|U_{j_1}(y, t)|_{[0,1] \times [0, T_1]}^{(0)}$  и  $|L_1(T_1) - L(0)|_{[0, T_1]}^{(0)}$  сходятся к 0 при достаточно малом  $T_1$ .

Полагая  $1 < \gamma_1 < \frac{l+3}{2}$  и  $2 < \gamma_2 < l+2$ , рассмотрим  $(N, V) \in \mathcal{B}_1$  и образ под действием оператора  $A_{j_1}$  точки  $(L_1(t) - L(0), U_1)$ .

Выберем достаточно малое  $T_1$ . Тогда разность  $L_1(t) - L(0)$  сходится к 0 в  $C([0, T_1])$ . Более того, она ограничена в  $H^{\frac{l+3}{2}}([0, T_1])$ . Таким образом,  $L_1(t) - L(0)$  сходится к 0 в  $H^{\gamma_1}([0, T_1])$ .

Аналогично, решение  $U_{j_1}$  сходится к 0 в  $C([0, 1] \times [0, T_1])$ , когда  $T_1$  стремится к 0. Поэтому оно также ограничено в  $H^{l+2, l/2+1}([0, 1] \times [0, T_1])$ . Таким образом,  $U_{j_1}$  сходится к 0 в  $H^{\gamma_2, \gamma_2/2}([0, 1] \times [0, T_1])$ .

Отсюда мы заключаем, что если  $T_1$  достаточно мало, то норма образа точки  $(N, V) \in \mathcal{B}_1$  под действием оператора  $A_{j_1}$  строго меньше 1. Другими словами, единичный шар  $\mathcal{B}_1$  строго отображается на себя оператором  $A_{j_1}$  на  $[0, T_1]$  для всех  $j = 1, \dots, m$  при достаточно малом  $T_1$ .

Такой выбор  $T_1$  позволяет нам сделать вывод, что оператор  $A_{j_1}$ , действующий в  $\mathcal{B}_1$ , имеет неподвижную точку  $U_{j_1}^*$  в  $\mathcal{B}_1$  по теореме о неподвижной точке.

Аналогично мы докажем существование решений для задачи (3.2) на интервалах  $[T_i, T_{i+1}]$  при  $i = 1, \dots, n - 1$  и существование неподвижной точки для соответствующих операторов.

Для каждого  $i = 1, \dots, n - 1$  и  $j = 1, \dots, m$  рассмотрим  $U_{j_i}$  — решение задачи (3.2) на интервале  $[T_{i-1}, T_i]$  таким, что

$$\left( \int_0^t \left( \frac{\int_0^1 \psi(y, s) dy}{1 - f(U(1, s))} \right) ds, \quad U_{j_i}^*(y, t) \right)$$

— неподвижная точка оператора  $A_{j_i}$ . Мы хотим найти решение  $U_{j_{i+1}}$  задачи (3.2) на интервале  $[T_i, T_{i+1}]$  с начальным условием  $U_{j_{i+1}}(y, T_i) = U_{j_i}^*(y, T_i)$ . Однако, поскольку начальное условие ненулевое, для применения теоремы 3.1 рассмотрим новую функцию  $\mu_j = U_j - U_{j_i}^*(y, T_i)$  и следующую задачу на интервале  $[T_i, T_{i+1}]$ :

$$\begin{cases} \frac{\partial \mu_j}{\partial t} = \frac{D}{N^2(t)} \frac{\partial^2 \mu_j}{\partial y^2} + \frac{yN'(t)}{N(t)} \frac{\partial \mu_j}{\partial y} + \mathcal{F}_j(y, t), \\ y = 0 : \frac{\partial \mu_j}{\partial y} = 0, \quad y = 1 : \frac{\partial \mu_j}{\partial y} = N(t)h_j(V(1, t)) - N(t)h_j(V(1, T_i)), \\ \mu_j(y, T_i) = 0, \end{cases} \quad (3.8)$$

где  $\mathcal{F}_j(y, t) = F_j(V(y, t)) - \frac{D}{N^2(t)} \frac{\partial^2 U_{j_i}^*}{\partial y^2}(y, T_i) - \frac{yN'(t)}{N(t)} \frac{\partial U_{j_i}^*}{\partial y}(y, T_i)$ .

Чтобы доказать существование решения задачи (3.8), мы используем теорему 3.1. Проверим, выполняются ли ее условия.

Поскольку  $U_{j_i}^*(x, T_i) \in H^{l+2}([0, 1])$ ,  $F_j \in C^1(\mathbb{R})$ ,  $V \in H^{(l+1)}([0, 1] \times [0, T])$ ,  $N \in H^{l/2+1}([0, T])$  и функция  $N$  ограничена снизу числом  $N_0$ , получаем, что  $\mathcal{F}_j \in H^{l, l/2}([0, 1] \times [T_i, T_{i+1}])$ . Более того, так как  $h_j \in C^1(\mathbb{R})$  и  $V(1, t) \in H^{(l+1)/2}([T_i, T_{i+1}])$ , то  $N(t)h_j(V(1, t)) - N(t)h_j(V(1, T_i)) \in H^{(l+1)/2}([T_i, T_{i+1}])$ . Наконец, условия согласования выполнены, поскольку  $\frac{\partial \mu_j}{\partial y}(1, T_i) = \mu_j(1, T_i) = 0$ . Таким образом, по теореме 3.1 задача (3.8) имеет единственное решение  $U_{j_{i+1}} \in H^{l+2, (l+2)/2}([0, 1] \times [T_i, T_{i+1}])$  и существует константа  $c_{j_{i+1}}$  такая, что для произвольных открытых подмножеств  $Q_{i+1}$  из  $[0, 1] \times [T_i, T_{i+1}]$  и  $Q_i$  из  $[0, 1] \times [T_{i-1}, T_i]$  выполнено

$$\begin{aligned} |U_{j_{i+1}}|_{Q_{i+1}}^{(l+2)} &\leq c_{j_{i+1}} \left( |\mathcal{F}_j|_{Q_{i+1}}^{(l)} + |h_j(V(1, t)) - h_j(V(1, T_i))|_{(T_i, T_{i+1})}^{(l+1)/2} \right) \leq \\ &\leq c_{j_{i+1}} \left( \left| F_j(V(y, t)) - \frac{D}{N^2(t)} \frac{\partial^2 U_{j_i}^*}{\partial y^2}(y, T_i) - \frac{yN'(t)}{N(t)} \frac{\partial U_{j_i}^*}{\partial y}(y, T_i) \right|_{Q_{i+1}}^{(l)} + \right. \\ &\quad \left. + |h_j(V(1, t)) - h_j(V(1, T_i))|_{(T_i, T_{i+1})}^{(l+1)/2} \right) \leq \\ &\leq c_{j_{i+1}} \left( |F_j(V(y, t))|_{Q_{i+1}}^{(l)} + \left| \frac{D}{N^2(t)} \frac{\partial^2 U_{j_i}^*}{\partial y^2}(y, T_i) \right|_Q^{(l)} + \left| \frac{yN'(t)}{N(t)} \frac{\partial U_{j_i}^*}{\partial y}(y, T_i) \right|_{Q_{i+1}}^{(l)} + \right. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + |h_j(V(1, t)) - h_j(V(1, T_i)|_{(T_i, T_{i+1})}^{(l+1)/2}) \leq \\
& \leq c_{j+1} \left( c_V \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} |V|_{[0,1] \times [0, T_i]}^{(l+1)} + \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} + \left( \frac{D}{N_0^2} + \frac{|N|_{[T_i, T_{i+1}]}}{N_0} \right) |U_{j_i}^*|_{Q_i}^{(l+2)} + \right. \\
& \quad \left. + \|h_j\|_{C^1(\mathbb{R})} |V|_{Q_T}^{(l+1)} + \|h_j\|_{C^1(\mathbb{R})} + |h_j(V(1, T_i)|_{(T_i, T_{i+1})}^{(l+1)/2}) \right) \leq \\
& \leq c_{j+1} \left( \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} (c_V |V|_{Q_T}^{(l+1)} + 1) + \|h_j\|_{C^1(\mathbb{R})} (|V|_{Q_T}^{(l+1)} + 1) + \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{D}{N_0^2} + \frac{|N|_{[T_i, T_{i+1}]}}{N_0} \right) |U_{j_i}^*|_{Q_i}^{(l+2)} + |U_{j_i}^*(1, T_i)| \right) \leq \\
& \leq c_{j+1} \left( \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} (c_V |V|_{Q_T}^{(l+1)} + 1) + \|h_j\|_{C^1(\mathbb{R})} (|V|_{Q_T}^{(l+1)} + 1) + \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{D}{N_0^2} + \frac{|N|_{[T_i, T_{i+1}]}}{N_0} + 1 \right) |U_{j_i}^*|_{Q_i}^{(l+2)} \right) \leq \\
& \leq c_{j+1} \left( \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} (c_V |V|_{Q_T}^{(l+1)} + 1) + \|h_j\|_{C^1(\mathbb{R})} (|V|_{Q_T}^{(l+1)} + 1) + \left( \frac{D}{N_0^2} + \frac{|N|_{[T_i, T_{i+1}]}}{N_0} + 1 \right) \right).
\end{aligned}$$

Аналогично доказательству для интервала  $[0, T_1]$  определим оператор  $A_{j_{i+1}}$ :

$$\begin{aligned}
A_{j_{i+1}} : H^{l/2+1}([T_i, T_{i+1}]) \times H^{l+1}([0, 1] \times [T_i, T_{i+1}]) & \longrightarrow H^{l/2+1}([T_i, T_{i+1}]) \times H^{l+1}([0, 1] \times [T_i, T_{i+1}]), \\
(N(t), V(y, t)) & \longmapsto A_{j_{i+1}}(N(t), V(y, t)) = (L_{i+1}(t) - L_{i+1}(T_{i+1}), U_{j_{i+1}}(y, t)),
\end{aligned}$$

где  $U_{j_{i+1}}$  — решение задачи (3.2) на  $[T_i, T_{i+1}]$ ,  $L_{i+1}(T_i) = L_i(T_i)$ , а  $L_{i+1}$  удовлетворяет уравнению

$$L_{i+1}(t) = \int_0^t \left( \frac{\int_0^1 \psi(y, s) dy}{1 - f(U(1, s))} \right) ds + L(0)$$

при  $t \in [T_i, T_{i+1}]$ .

Так же, как и для интервала  $[0, T_1]$ , мы можем доказать, что для всех  $(N, V)$  из единичного шара в  $H^{l/2+1}([T_i, T_{i+1}]) \times H^{l+1}([0, 1] \times [T_i, T_{i+1}])$ :

$$|L_{i+1}(T_{i+1}) - L_{i+1}(T_i)| \leq l_{j_{i+1}}(T_{i+1} - T_i),$$

где

$$l_{j_{i+1}} = \frac{m}{f_0} \|f\|_{C^1(\mathbb{R})} \left( \frac{D_j c_{j_{i+1}}}{N_0} \left( \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} (c_V + 1) + 2 \|h_j\|_{C^1(\mathbb{R})} + \left( \frac{D}{N_0^2} + \frac{1}{N_0} + 1 \right) \right) + \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} \right),$$

$$|U_{j_{i+1}}(y, T_{i+1}) - U_{j_{i+1}}(y, T_i)| = |U_{j_{i+1}}(y, T_{i+1})| \leq$$

$$\leq \int_{T_i}^{T_{i+1}} \left( \left| \frac{D}{N^2(t)} \frac{\partial^2 U_{j_{i+1}}}{\partial y^2} \right| + \left| \frac{y N'(t)}{N(t)} \frac{\partial U_{j_{i+1}}}{\partial y} \right| + |F_j(y, t)| \right) dt \leq$$

$$\leq \int_{T_i}^{T_{i+1}} \left( \left| \frac{D}{N^2(t)} \frac{\partial^2 U_{j_{i+1}}}{\partial y^2} \right| + \left| \frac{y N'(t)}{N(t)} \frac{\partial U_{j_{i+1}}}{\partial y} \right| + |F_j(V(y, t))| + \left| \frac{D}{N^2(t)} \frac{\partial^2 U_{j_i}^*}{\partial y^2} \right| + \left| \frac{y N'(t)}{N(t)} \frac{\partial U_{j_i}^*}{\partial y} \right| \right) dt \leq$$

$$\begin{aligned}
 &\leq \left( \left( \frac{D}{N_0^2} + \frac{|N|_{[T_i, T_{i+1}]}}{N_0} \right)^{(l/2+1)} \left( |U_{j_{i+1}}|_{((0,1) \times (T_i, T_{i+1}))}^{(l+2)} + |U_{j_i}^*|_{((0,1) \times (T_{i-1}, T_i))}^{(l+2)} \right) + \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} \right) (T_{i+1} - T_i) \leq \\
 &\leq \left( \left( \frac{D}{N_0^2} + \frac{|N|_{[T_i, T_{i+1}]}}{N_0} \right)^{(l/2+1)} \left( c_{j_{i+1}} \left( \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} \left( c_V |V|_{Q_T}^{(l+1)} + 1 \right) + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + \|h_j\|_{C^1(\mathbb{R})} \left( |V|_{Q_T}^{(l+1)} + 1 \right) + \frac{D}{N_0^2} + \frac{|N|_{[T_i, T_{i+1}]}}{N_0} + 1 \right) + 1 \right) + \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} \right) (T_{i+1} - T_i) \leq \\
 &\leq \left( \left( \frac{D}{N_0^2} + \frac{1}{N_0} \right) \left( c_{j_{i+1}} \left( \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} (c_V + 1) + 2\|h_j\|_{C^1(\mathbb{R})} + \right. \right. \right. \\
 &\quad \left. \left. \left. + \frac{D}{N_0^2} + \frac{1}{N_0} + 1 \right) + 1 \right) + \|F_j\|_{C^1(\mathbb{R})} \right) (T_{i+1} - T_i) = m_{j_{i+1}} (T_{i+1} - T_i).
 \end{aligned}$$

Выберем  $T_{i+1} - T_i$  достаточно малым, тогда  $L_{i+1}(t) - L_{i+1}(T_i)$  сходится к нулю 0 на  $C([T_i, T_{i+1}])$ , и так как разность ограничена в  $H^{\frac{l+3}{2}}([T_i, T_{i+1}])$ , то  $L_{i+1}(t) - L_{i+1}(T_i)$  сходится к 0 в  $H^\gamma([T_i, T_{i+1}])$ . Аналогично, если  $T_{i+1} - T_i$  достаточно мало, то  $U_{j_{i+1}}$  сходится к 0 в  $C([0, 1] \times [T_i, T_{i+1}])$ . Более того, последовательность ограничена в  $H^{l+2, l/2+1}([0, 1] \times [T_i, T_{i+1}])$ . Таким образом,  $U_{j_{i+1}}$  сходится к 0 в  $H^{\gamma_2, \gamma_2/2}([0, 1] \times [T_i, T_{i+1}])$ .

Чтобы убедиться, что  $A_{j_{i+1}}$  на  $[T_i, T_{i+1}]$  имеет неподвижную точку, достаточно выбрать  $T_{i+1} - T_i$  так, чтобы норма  $L_{i+1}(t) - L_{i+1}(T_i)$  в  $H^\gamma([T_i, T_{i+1}])$  и норма  $U_{j_{i+1}}$  в  $H^{\gamma_2, \gamma_2/2}([0, 1] \times [T_i, T_{i+1}])$  были строго меньше 1.  $\square$

**Теорема 3.2.** *Если функции  $F_j$  и  $h_j$  принадлежат классу  $C^1(\mathbb{R})$  при  $j = 1, \dots, m$ , тогда задача (3.1) имеет решение  $U^* \in H^{l+2, l/2+1}(\overline{Q_T})$ . Соответственно, система (2.1), (2.2), (2.3) с начальными условиями  $u(x, 0) = 0$  имеет решение  $U^* \in H^{l+2, l/2+1}([0, L(t)] \times [0, T])$ .*

*Доказательство.* Поскольку для всех  $j = 1, \dots, m$  оператор  $A_{j_1}$  имеет неподвижную точку и условия предложения 3.1 выполнены, то мы получаем, что система (3.1), определенная на  $[0, T_1]$ , имеет решение  $U_1^* = (U_{1_1}^*, U_{2_1}^*, \dots, U_{m_1}^*)$  на единичном шаре в  $(H^{l+2, (l+2)/2}([0, 1] \times [0, T_1]))^m$ .

Поскольку для всех  $j = 1, \dots, m$  оператор  $A_{j_{i+1}}$  имеет неподвижную точку и условия предложения 3.1 выполнены, то мы получаем, что система (3.1), определенная на  $[T_i, T_{i+1}]$ , имеет решение  $U_{i+1}^* = (U_{1_{i+1}}^*, U_{2_{i+1}}^*, \dots, U_{m_{i+1}}^*)$  на единичном шаре в  $(H^{l+2, (l+2)/2}([0, 1] \times [T_i, T_{i+1}]))^m$ .

По полугрупповому свойству мы заключаем, что система (3.1) имеет решение  $U^*$ , определенное на интервале  $[0, T]$  такое, что при  $i = 0, \dots, n-1$  и  $t \in [T_i, T_{i+1}]$  выполнено  $U^*(y, t) = U_{i+1}^*(y, t)$ .  $\square$

#### 4. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В работе дано доказательство существования решения для системы уравнений «реакция–диффузия» со свободной границей в одномерном случае. В этой системе общего вида мы определяем движение границы как поток элементов через границу, их накопление и взаимодействие в области как функции времени. Доказательство состоит из нескольких последовательных шагов. Замена переменной ведет к переходу от модели со свободной границей к модели с закрепленной границей. Однако новая модель содержит коэффициенты, зависящие от времени и пространства, а также нелинейные члены. На втором шаге исследуется существование решения такой модели с линейными слагаемыми, вводя новые переменные. Затем вводятся операторы, сопоставляющие новым переменным решение системы и размер области. Используя теорему о неподвижной точке и полугрупповое свойство, мы доказываем существование решения для системы с нелинейными слагаемыми и закрепленной границей. Для этой цели мы разбиваем временной интервал на достаточно малые подынтервалы, и длина каждого подынтервала выбирается так, чтобы выполнялись условия теоремы о неподвижной точке. Наконец, существование решения для модели со свободной границей получается непосредственно из результата для случая фиксированной границы.

Заметим, что анализ, проведенный в этой работе, не может быть непосредственно распространен на многомерный пространственный случай по ряду причин. Прежде всего, постановка задачи усложняется для многомерного случая. Например, в двумерном случае граница представляет собой одномерную кривую, и если ее рассматривать как упругую среду, то на эту границу действуют дополнительные силы упругости. Кроме того, доказательства в одномерном случае основаны на теореме вложения, которая зависит от размерности пространства. Поэтому обобщение результата этой статьи на более высокие размерности требует дальнейших исследований.

#### ПРИЛОЖЕНИЕ 1. ТЕОРЕМА СУЩЕСТВОВАНИЯ

В этом приложении напомним теорему 5.3 из [4].

Пусть  $E_n$  —  $n$ -мерное евклидово пространство,  $\Omega$  — область в  $E_n$  и  $Q_T$  — цилиндр  $\Omega \times (0, T)$ , т. е. множество точек  $(x, t)$  из  $E_{n+1}$ , для которых  $x \in \Omega$  и  $t \in (0, T)$ . Обозначим через  $S_T$  боковую поверхность  $Q_T$ , или, точнее, множество точек  $(x, t)$  из  $E_{n+1}$ , для которых  $x \in S$ ,  $t \in [0, T]$ .

Рассмотрим линейный параболический дифференциальный оператор с вещественными коэффициентами  $\mathcal{L}$ :

$$\mathcal{L}(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t})u = \frac{\partial u}{\partial t} - \sum_{i,j=1}^n a_{i,j}(x, t) \frac{\partial^2 u}{\partial x_i \partial x_j} + \sum_{i=1}^n a_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + a(x, t)u.$$

Предположим, что коэффициенты оператора  $\mathcal{L}$  определены в слое  $D_{n+1}^{(T)} = E_n \times [0, T]$ . В цилиндрической области  $Q_T$  с боковой поверхностью  $S_T$  рассмотрим следующую задачу:

$$\begin{cases} \mathcal{L}(x, t, \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial t})u(x, t) = f(x, t), \\ u|_{t=0} = \phi(x), \\ \mathcal{B}(x, t, \frac{\partial}{\partial x})u|_{S_T} = \sum_{i=1}^n b_i(x, t) \frac{\partial u}{\partial x_i} + b(x, t)u|_{S_T} = \Phi(x). \end{cases} \quad (4.1)$$

Предположим, что вектор  $b$  элементов функций  $b_i(x, t)$  ни в какой точке не лежит в касательной плоскости к  $S$ .

Пусть  $l > 0$  — нецелое число,  $S \in H^{l+2}$ , коэффициенты оператора  $\mathcal{L}$  принадлежат классу  $H^{l,l/2}(\overline{Q_T})$  и, наконец,  $b_i, b \in H^{l+1,l/2+1/2}(\overline{S_T})$ . Тогда для любых  $f \in H^{l,l/2}(\overline{Q_T})$ ,  $\phi \in H^{l+2}(\overline{\Omega})$ ,  $\Phi \in H^{l+1,l/2+1/2}(\overline{S_T})$ , удовлетворяющих условиям согласования порядка  $[(l+1)/2]$ , задача (4.1) имеет единственное решение из класса  $H^{l+2,l/2+1}(\overline{Q_T})$ , для которого

$$|u|_Q^{(l+2)} \leq c \left( |f|_Q^{(l)} + |\phi|_\Omega^{(l+2)} + |\Phi|_{S_T}^{(l+1)} \right).$$

#### ПРИЛОЖЕНИЕ 2. ОПРЕДЕЛЕНИЯ ФУНКЦИОНАЛЬНЫХ ПРОСТРАНСТВ И ОПЕРАТОРОВ

В этом разделе мы определим функциональные пространства, нормы и операторы, использованные в статье. Чтобы определить пространства Гельдера и их нормы, будем считать, что  $E_n$  —  $n$ -мерное евклидово пространство,  $\Omega$  — область в  $E_n$ , а  $Q_T$  — цилиндр  $\Omega \times (0, T)$ , т. е. множество точек  $(x, t)$  из  $E_{n+1}$  таких, что  $x \in \Omega$  и  $t \in (0, T)$ . Обозначим через  $S_T$  боковую поверхность  $Q_T$ , или, точнее, множество точек  $(x, t)$  из  $E_{n+1}$  таких, что  $x \in S$  и  $t \in [0, T]$ .

- Функция  $u(x)$ , определенная в  $\overline{\Omega}$ , удовлетворяет *условию Гельдера* по  $x$  с показателем  $\alpha$ ,  $\alpha \in (0, 1)$ , и константой Гельдера  $\langle u \rangle_\Omega^{(\alpha)}$  в области  $\overline{\Omega}$ , если

$$\langle u \rangle_\Omega^{(\alpha)} = \sup_{\substack{x, x' \in \Omega \\ |x-x'| \leq \rho_0}} \frac{|u(x) - u(x')|}{|x - x'|^\alpha} < \infty.$$

- $H^l(\overline{\Omega})$  — банахово пространство, элементами которого являются непрерывные в  $\overline{\Omega}$  функции  $u(x)$ , имеющие в  $\overline{\Omega}$  непрерывные производные вплоть до порядка  $[l]$  включительно, для которых конечна величина

$$|u|_\Omega^{(l)} = \langle u \rangle_\Omega^{(l)} + \sum_{j=0}^{[l]} \langle u \rangle_\Omega^{(j)}, \quad (4.2)$$

где

$$\langle u \rangle_{\Omega}^{(0)} = |u|_{\Omega}^{(0)} = \max_{\Omega} |u|, \quad \langle u \rangle_{\Omega}^{(j)} = \sum_{(j)} |D_x^j u|_{\Omega}^{(0)}, \quad \langle u \rangle_{\Omega}^{(l)} = \sum_{(l)} \langle D_x^{[l]} u \rangle_{\Omega}^{(l-[l])}.$$

Формула (4.2) задает норму  $|u|_{\Omega}^{(l)}$  в  $H^l(\bar{\Omega})$ .

- $H^{l,l/2}(\bar{\Omega})$  — банахово пространство функций  $u(x, t)$ , непрерывных в  $\bar{Q}_T$  вместе со всеми производными вида  $D_t^r D_x^s$  при  $2r + s < l$  и имеющих конечную норму:

$$|u|_{Q_T}^{(l)} = \langle u \rangle_{Q_T}^{(l)} + \sum_{j=0}^{[l]} \langle u \rangle_{Q_T}^{(j)}, \tag{4.3}$$

где

$$\begin{aligned} \langle u \rangle_{Q_T}^{(0)} &= |u|_{Q_T}^{(0)} = \max_{Q_T} |u|, & \langle u \rangle_{Q_T}^{(j)} &= \sum_{(2r+s=j)} |D_t^r D_x^s u|_{Q_T}^{(0)}, \\ \langle u \rangle_{Q_T}^{(l)} &= \langle u \rangle_{x,Q_T}^{(l)} + \langle u \rangle_{t,Q_T}^{(l/2)}, & \langle u \rangle_{x,Q_T}^{(l)} &= \sum_{(2r+s=[l])} \langle D_t^r D_x^s u \rangle_{x,Q_T}^{(l-[l])}, \\ \langle u \rangle_{t,Q_T}^{(l/2)} &= \sum_{0 < l-2r-s < 2} \langle D_t^r D_x^s u \rangle_{t,Q_T}^{(\frac{l-2r-s}{2})}, & \langle u \rangle_{x,Q_T}^{(\alpha)} &= \text{Sup}_{\substack{(x,t),(x',t) \in \bar{Q}_T \\ |x-x'| \leq \rho_0}} \frac{|u(x,t) - u(x',t)|}{|x-x'|^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1, \\ \langle u \rangle_{t,Q_T}^{(\alpha)} &= \text{Sup}_{\substack{(x,t),(x',t) \in \bar{Q}_T \\ |t-t'| \leq \rho_0}} \frac{|u(x,t) - u(x,t')|}{|t-t'|^{\alpha}}, \quad 0 < \alpha < 1. \end{aligned}$$

Приведем список операторов, определенных в этой статье:

- оператор  $\mathcal{L}_j$ :

$$\mathcal{L}_j(y, t, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial t})U_j = \frac{\partial U_j}{\partial t} - \frac{D_j}{N^2(t)} \frac{\partial^2 U_j}{\partial y^2} - \frac{yN'(t)}{N(t)} \frac{\partial U_j}{\partial y};$$

- оператор  $A_j$ :

$$\begin{aligned} A_j : H^{l/2+1}([0, T]) \times H^{l+1}([0, 1] \times [0, T]) &\longrightarrow H^{l/2+1}([0, T]) \times H^{l+1}([0, 1] \times [0, T]), \\ (N(t), V(y, t)) &\longmapsto A_j(N(t), V(y, t)) = (L(t) - L(0), U(y, t)); \end{aligned}$$

- оператор  $A_{j_1}$ :

$$\begin{aligned} A_{j_1} : H^{l/2+1}([0, T_1]) \times H^{l+1}([0, 1] \times [0, T_1]) &\longrightarrow H^{l/2+1}([0, T_1]) \times H^{l+1}([0, 1] \times [0, T_1]), \\ (N(t), V(y, t)) &\longmapsto A_{j_1}(N(t), V(y, t)) = (L_1(t) - L(0), U_{j_1}(y, t)); \end{aligned}$$

- оператор  $A_{j_{i+1}}$ :

$$\begin{aligned} H^{l/2+1}([T_i, T_{i+1}]) \times H^{l+1}([0, 1] \times [T_i, T_{i+1}]) &\longrightarrow H^{l/2+1}([T_i, T_{i+1}]) \times H^{l+1}([0, 1] \times [T_i, T_{i+1}]), \\ (N(t), V(y, t)) &\longmapsto A_{j_{i+1}}(N(t), V(y, t)) = (L_{i+1}(t) - L_{i+1}(T_{i+1}), U_{j_{i+1}}(y, t)). \end{aligned}$$

**Благодарности.** В. А. Вольперт благодарит за финансовую поддержку Министерство науки и высшего образования Российской Федерации (Мегагрант, соглашение № 075-15-2022-1115).

### СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Bessonov N., Morozova N., Volpert V. Modeling of branching patterns in plants// Bull. Math. Biol. — 2008. — 70. — С. 868–893.
2. Fok P.-W. Mathematical model of intimal thickening in atherosclerosis: vessel stenosis as a free boundary problem// J. Theor. Biol. — 2012. — 314. — С. 23–33.
3. Islam H., Johnston P. R. A mathematical model for atherosclerotic plaque formation and arterial wall remodelling// ANZIAM J. — 2016. — 57. — С. C320–C345.
4. Ladyzenskaja O. A., Solonnikov V. A., Ural'tseva N. N. Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type. — Providence: Am. Math. Soc., 1968.
5. Lunardi A. Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems. — Basel etc.: Springer, 1995.

6. *Silva T., Jäger W., Neuss-Radu M., Sequeira A.* Modeling of the early stage of atherosclerosis with emphasis on the regulation of the endothelial permeability// *J. Theor. Biol.* — 2020. — 496. — 110229.
7. *Tao Y., Guo Q.* A free boundary problem modelling cancer radiotherapy// *Math. Models Methods Appl. Sci.* — 2007. — 17, № 8. — С. 1241–1259.
8. *Yousefnezhad M., Mohammadi S. A., Bozorgnia F.* A free boundary problem for a predator-prey model with nonlinear prey-taxis// *Appl. Math.* — 2018. — 63. — С. 125–147.

Ghada Abi Younes

Institut Camille Jordan, Виллербанн, Франция;  
University Lyon 1, Виллербанн, Франция

Nader El Khatib

Lebanese American University, Библос, Ливан

Vitaly Volpert

Российский университет дружбы народов, Москва, Россия  
E-mail: volpert@math.univ-lyon1.fr

DOI 10.22363/2413-3639-2022-68-4-716-731

UDC 517.956.4+517.958

## Existence of solution of a free boundary problem for reaction-diffusion systems

G. A. Younes<sup>1,2</sup>, N. El Khatib<sup>3</sup>, and V. A. Volpert<sup>4</sup>

<sup>1</sup>*Institut Camille Jordan, Villeurbanne, France*

<sup>2</sup>*University Lyon 1, Villeurbanne, France*

<sup>3</sup>*Lebanese American University, Byblos, Lebanon*

<sup>4</sup>*Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia*

In this paper, we prove the existence of solution of a novel free boundary problem for reaction-diffusion systems describing growth of biological tissues due to cell influx and proliferation. For this aim, we transform it into a problem with fixed boundary, through a change of variables. The new problem thus obtained has space and time dependent coefficients with nonlinear terms. We then prove the existence of solution for the corresponding linear problem, and deduce the existence of solution for the nonlinear problem using the fixed point theorem. Finally, we return to the problem with free boundary to conclude the existence of its solution.

**Keywords:** free boundary problem, reaction-diffusion system, growth of biological tissues, existence of solution

**For citation:** G. A. Younes, N. El Khatib, V. A. Volpert, “Existence of solution of a free boundary problem for reaction-diffusion systems,” *Sovrem. Mat. Fundam. Napravl.*, 2022, vol. 68, No. 4, 716–731. <http://doi.org/10.22363/2413-3639-2022-68-4-716-731>

## REFERENCES

1. N. Bessonov, N. Morozova, and V. Volpert, “Modeling of branching patterns in plants,” *Bull. Math. Biol.*, 2008, **70**, 868–893.
2. P.-W. Fok, “Mathematical model of intimal thickening in atherosclerosis: vessel stenosis as a free boundary problem,” *J. Theor. Biol.*, 2012, **314**, 23–33.





3. H. Islam and P. R. Johnston, “A mathematical model for atherosclerotic plaque formation and arterial wall remodelling,” *ANZIAM J.*, 2016, **57**, C320–C345.
4. O. A. Ladyzenskaja, V. A. Solonnikov, and N. N. Ural'tseva, *Linear and Quasi-linear Equations of Parabolic Type*, Am. Math. Soc., Providence, 1968.
5. A. Lunardi, *Analytic Semigroups and Optimal Regularity in Parabolic Problems*, Springer, Basel etc., 1995.
6. T. Silva, W. Jäger, M. Neuss-Radu, and A. Sequeira, “Modeling of the early stage of atherosclerosis with emphasis on the regulation of the endothelial permeability,” *J. Theor. Biol.*, 2020, **496**, 110229.
7. Y. Tao and Q. Guo, “A free boundary problem modelling cancer radiotherapy,” *Math. Models Methods Appl. Sci.*, 2007, **17**, No. 8, 1241–1259.
8. M. Yousefnezhad, S. A. Mohammadi, and F. Bozorgnia, “A free boundary problem for a predator-prey model with nonlinear prey-taxis,” *Appl. Math.*, 2018, **63**, 125–147.

Ghada Abi Younes

Institut Camille Jordan, Villeurbanne, France;

University Lyon 1, Villeurbanne, France

Nader El Khatib

Lebanese American University, Byblos, Lebanon

Vitaly Volpert

Peoples' Friendship University of Russia (RUDN University), Moscow, Russia

E-mail: volpert@math.univ-lyon1.fr