СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 57, 2015

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

Индекс журнала в каталоге подписных изданий агентства «Роспечать» — 36832

СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА. ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ НАПРАВЛЕНИЯ

Том 57, 2015

Труды Крымской осенней математической школы-симпозиума

РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

ОГЛАВЛЕНИЕ

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 57 (2015). С. 5–30

Светлой памяти Д. В. Аносова

УДК 517.938

ГРУБЫЕ ДИФФЕОМОРФИЗМЫ С БАЗИСНЫМИ МНОЖЕСТВАМИ КОРАЗМЕРНОСТИ ОДИН

© 2015 г. **В. З. ГРИНЕС, Е. В. ЖУЖОМА, О. В. ПОЧИНКА**

Аннотация. Обзор посвящен изложению результатов (в том числе и авторов обзора), полученных начиная с 2000-х годов по настоящее время, по топологической классификации структурно устойчивых каскадов, заданных на гладком замкнутом многообразии M^n ($n \geqslant 3$) в предположении, что их неблуждающие множества либо содержат ориентируемый растягивающийся (сжимающийся) аттрактор (репеллер) коразмерности один, либо целиком состоят из базисных множеств коразмерности один. Представленные результаты являются естественным продолжением топологической классификации диффеоморфизмов Аносова коразмерности один. В обзоре также отражен прогресс, связанный с построением глобальной функции Ляпунова и энергетической функции для динамических систем на многообразиях (в частности, описана конструкция энергетической функции для структурно устойчивых 3-каскадов, неблуждающее множество которых содержит двумерный растягивающийся аттрактор).

Введение

Настоящий обзор относится к традиционным направлениям исследований нижегородской школы нелинейных колебаний, основанной академиком А. А. Андроновым. Благодаря исторической работе А. А. Андронова и Л. С. Понтрягина [1] в Нижнем Новгороде стало развиваться важнейшее направление качественной теории динамических систем — топологическая классификация грубых систем и систем с гиперболической структурой неблуждающего множества. Первые основополагающие результаты в этом направлении принадлежали представителям именно этой школы: А. А. Андронову, Е. А. Леонтович, А. Г. Майеру и др. Под полной топологической классификацией некоторого класса G динамических систем понимается решение следующих задач:

- нахождение топологических инвариантов динамических систем из класса G;
- доказательство полноты множества найденных инвариантов, т. е. доказательство того, что совпадение множеств топологических инвариантов является необходимым и достаточным условием топологической эквивалентности (сопряженности) двух динамических систем из G;
- реализация, т. е. построение по заданному множеству топологических инвариантов стандартного представителя, принадлежащего G.

Решения проблемы топологической классификации именно в такой канонической постановке известны лишь для некоторых классов структурно устойчивых систем. Ограничимся рассмотрением динамических систем с дискретным временем (каскадами и порождающими их диффеоморфизмами) на замкнутых многообразиях. Класс эквивалентности грубых потоков на окружности однозначно определяется числом его неподвижных точек. Для структурно устойчивых каскадов на окружности полный топологический инвариант был получен А. Г. Майером [20] в 1939 году и состоит из набора трех чисел: числа периодических орбит, их периода и так называемого порядкового числа.

Начало 60-х годов прошлого века ознаменовалось революционным открытием, связанным с именами С. Смейла [25] и Д. В. Аносова [2]. Было обнаружено, что структурно устойчивые отображения поверхности могут обладать счетным множеством седловых гиперболических периодических орбит. Динамика таких систем является хаотической и, в противовес регулярной динамике, означает существование всюду плотного подмножества нетривиального базисного множества, в

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (гранты 13-01-12452-офи-м, 15-01-03687-а) и Российского Научного Фонда (грант 14-41-00044).

котором траектории сколь угодно близких точек имеют различное асимптотическое поведение. Стало понятно, что исследование таких систем требует новых подходов и методов, их топологические инварианты не исчерпываются комбинаторными объектами, а характеризуются алгебраическими инвариантами, включающими автоморфизмы фундаментальных групп носителей базисных множеств. Для каскадов на многообразиях размерности больше единицы становится возможным существование гомоклинических пересечений инвариантных многообразий седловых периодических движений, что приводит к существованию счетного множества периодических траекторий. Первым, кто обнаружил сложную структуру множества траекторий, принадлежащих окрестности гомоклинической траектории, был А. Пуанкаре [56]. Затем Д. Биркгоф [28] исследовал двумерные сохраняющие площадь отображения и показал, что наличие гомоклинических пересечений влечет существование бесконечного множества периодических орбит. Принципиальным продвижением в этом направлении явилась работа Л. П. Шильникова, в которой дано полное описание множества всех траекторий, остающихся в некоторой окрестности трансверсальной гомоклинической траектории потока на многообразии размерности больше двух. Из этого описания следует, в частности, наличие в выбранной окрестности счетного множества периодических траекторий [26, 27].

Существенную роль в понимании принципиального отличия структурно устойчивых каскадов на многообразиях размерности больше единицы от структурно устойчивых потоков на поверхностях сыграл пример структурно устойчивого диффеоморфизма двумерной сферы, обладающий бесконечным множеством периодических орбит, который был построен С. Смейлом в 1961 году [61] и получил название «подкова Смейла». Второе важнейшее открытие сделал Д. В. Аносов в 1962 году, установив структурную устойчивость геодезического потока на римановом многообразии отрицательной кривизны [2]. В этой же работе он ввел важный класс структурно устойчивых потоков, а затем и диффеоморфизмов, названных им У-системами и получивших позднее название потоков и диффеоморфизмов Аносова. С. Смейл обобщил это понятие и ввел в рассмотрение класс систем с гиперболической структурой неблуждающего множества, являющегося замыканием множества периодических точек [61] (диффеоморфизмы, обладающие этими свойствами, получили название A-диффеоморфизмов). Неблуждающее множество систем из этого класса допускает разложение на конечное число замкнутых инвариантных базисных множеств, на каждом из которых система действует транзитивно. Динамика на нетривиальном базисном множестве (не являющемся периодической орбитой) обладает свойствами, во многом сходными с поведением диффеоморфизма на неблуждающем множестве в примере «подкова Смейла».

Топологическая классификация одномерных базисных множеств A-диффеоморфизмов поверхностей получена в работах Р. В. Плыкина, В. З. Гринеса, А. Ю. Жирова, Х. Х. Калая, и кроме того, в работах В. З. Гринеса, Х. Бонатти, Р. Ланжевена найдены необходимые и достаточные условия топологической сопряженности структурно устойчивых диффеоморфизмов на поверхностях.

Из работ [32,48,62] следует, что условие существования нульмерного или одномерного базисного множества A-диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ не накладывает ограничений на топологию объемлющего многообразия. Однако в том случае, если базисное множество имеет размерность 2 или 3, это не так. Действительно, если неблуждающее множество диффеоморфизма f содержит базисное множество, размерность которого равна трем, то f в этом случае является диффеоморфизмом Аносова, многообразие M^3 является трехмерным тором $\mathbb{T}^3$, и топологическая классификация таких диффеоморфизмов была получена Дж. Фрэнксом [36] и Ш. Е. Ньюхаусом [53].

В силу [23] базисное множество является аттрактором (репеллером) тогда и только тогда, когда оно содержит неустойчивые (устойчивые) многообразия своих точек. Однако размерность базисного множества, вообще говоря, может не совпадать с размерностью неустойчивых (устойчивых) многообразий его точек. В случае, если размерность аттрактора (репеллера) совпадает с размерностью неустойчивых (устойчивых) многообразий его точек, то аттрактор (репеллер) называется растягивающимся (сжимающимся).

Изучению динамики диффеоморфизмов 3-многообразий, неблуждающее множество которых содержит одномерные растягивающиеся аттракторы (сжимающиеся репеллеры), посвящены работы Х. Боте [31, 32], Р. Вильямса [63], Е. В. Жужомы, Н. В. Исаенковой [18] и др. Заметим, что рассматриваемые в перечисленных работах базисные множества не лежали на инвариантных поверхностях (т. е. не являлись поверхностными). Кроме того, все примеры диффеоморфизмов трехмерного многообразия с одномерными растягивающимися аттракторами (сжимающимися репеллерами) из перечисленных выше работ не являлись структурно устойчивыми. Вопрос существования структурно устойчивого диффеоморфизма с базисным множеством такого типа является открытым.

В работе Х. Бонатти и Н. Гельман [30] было построено семейство структурно устойчивых частично гиперболических диффеоморфизмов с неблуждающими множествами, состоящими в точности из одного одномерного аттрактора и одного одномерного репеллера. При этом аттрактор и репеллер принадлежали поверхностям, которые не являлись замкнутыми.

В настоящем обзоре рассматриваются А-диффеоморфизмы, имеющие базисные множества Λ коразмерности один. Коразмерность один означает, что топологическая размерность базисного множества на единицу меньше размерности несущего многообразия, $\dim\Lambda = \dim M^n - 1$. Поскольку далее мы будем считать, что $n \geqslant 3$, то рассматриваемые базисные множества не менее, чем двумерные и являются, следовательно, *нетривиальными* (отличными от периодической орбиты). Известно, что базисные множества коразмерности один необходимо являются либо *аттракторами*, либо *репеллерами*, изучение которых важно для приложений. Важной характеристикой базисного множества является его индекс Морса $u(\Lambda)$, который по определению равен размерности неустойчивого многообразия любой периодической орбиты из Λ. Теоретически для нетривиальных базисных множеств индекс Морса может принимать любые значения от 1 до $n-1$. Именно для этих крайних значений в последнее время получен прогресс в понимании структуры их объемлющего многообразия, их топологической классификации и существовании для них энергетической функции.

Построение энергетических функций связано с «Фундаментальной теоремой динамических систем». Она доказана К. Конли [35] в 1978 году и гласит, что любая непрерывная динамическая система (поток или каскад) обладает непрерывной *функцией Ляпунова*, т. е. функцией, убывающей вдоль траекторий системы вне цепно рекуррентного множества и постоянной на цепных компонентах. Со многих точек зрения более содержательной является информация о существовании у гладкой динамической системы *энергетической функции*, т. е. гладкой функции Ляпунова, множество критических точек которой совпадает с цепно рекуррентным множеством системы. Существование энергетической функции у любого потока следует из работы В. Вильсона и Дж. Йорке [64]. Каскады даже с регулярной динамикой не обладают в общем случае энергетической функцией. Такие примеры построены в работе Д. Пикстона [54], а также в работах Х. Бонатти, В. З. Гринеса, Ф. Лауденбаха, О. В. Починки [29, 37, 38], в последней также найдены достаточные условия существования энергетической функции Морса для трехмерных каскадов Морса—Смейла. Тем более удивительным является факт наличия энергетической функции у некоторых дискретных динамических систем с хаотическим поведением.

Структура статьи следующая. В разделе 1 приводятся основные определения и строятся модельные примеры базисных множеств коразмерности один (для простоты изложения мы ограничиваемся маломерными примерами, но идея построения сохраняется для многомерных примеров). В разделе 2 приводятся некоторые классические и сравнительно недавние результаты, относящиеся к рассматриваемой тематике. В разделе 3 рассматриваются вопросы топологической классификации. Наконец, в разделе 4 для грубых 3-диффеоморфизмов с двумерным растягивающимся аттрактором строится энергетическая функция.

1. Предварительные сведения и модельные примеры

Пусть $f \in Diff^1(M^n)$ — C^1-гладкий диффеоморфизм замкнутого n-мерного ($n \geqslant 2$) многообразия M^n, снабженного некоторой римановой метрикой d. Множество $\Lambda \subset M^n$, инвариантное относительно f, называется *гиперболическим*, если ограничение $T_\Lambda M^n$ касательного расслоения TM^n многообразия M^n на Λ можно представить в виде суммы Уитни $E^s_\Lambda \oplus E^u_\Lambda$ df-инвариантных подрасслоений E^s_Λ, E^u_Λ ($\dim E^s_x + \dim E^u_x = n$, $x \in \Lambda$), и существуют константы $C_s > 0$, $C_u > 0$, $0 < \lambda < 1$ такие, что

$$\|df^m(v)\| \leqslant C_s\lambda^m\|v\| \quad \text{для } v \in E^s_\Lambda, \qquad \|df^{-m}(v)\| \leqslant C_u\lambda^m\|v\| \quad \text{для } v \in E^u_\Lambda, \qquad m > 0.$$

Гиперболическая структура порождает существование так называемых *устойчивых* и *неустойчивых* многообразий, которые объединяют точки с одинаковым асимптотическим поведением при положительных и отрицательных соответственно итерациях [44, 60]. Для любой точки $x \in \Lambda$ существует инъективная иммерсия $J^s_x : \mathbb{R}^s \to M$, образ которой $W^s(x) = J^s_x(\mathbb{R}^s)$ называется *устойчивым многообразием точки* x, такая, что выполняются следующие свойства:

1. $T_x W^s(x) = E^s_\Lambda$.
2. Точки $x, y \in M$ принадлежат одному многообразию $W^s(x)$ тогда и только тогда, когда $d(f^n(x), f^n(y)) \to 0$ при $n \to \infty$.
3. $f(W^s(x)) = W^s(f(x))$.
4. Если $x, y \in \Lambda$, то либо $W^s(x) = W^s(y)$, либо $W^s(x) \cap W^s(y) = \varnothing$.
5. Если точки $x, y \in \Lambda$ близки на M, то $W^s(x)$, $W^s(y)$ C^1-близки на компактных множествах. Это свойство обычно называют *теоремой о непрерывной зависимости устойчивых многообразий от начальных условий*.

Неустойчивое многообразие $W^u(x)$ точки $x \in \Lambda$ определяется как устойчивое многообразие относительно диффеоморфизма f^{-1}. Неустойчивые многообразия обладают аналогичными свойствами. Учитывая свойство 3), устойчивые и неустойчивые многообразия называются *инвариантными многообразиями*.

Точка $x \in M^n$ называется *неблуждающей*, если для любой ее окрестности $U(x)$ и любого натурального числа N найдется $n_0 \in \mathbb{Z}$, $|n_0| \geqslant N$, такое, что $f^{n_0}(x) \in U(x)$. Множество неблуждающих точек диффеоморфизма f будем обозначать через $NW(f)$. Диффеоморфизм f *удовлетворяет аксиоме A* (или, что то же самое, является *A-диффеоморфизмом*), если множество $NW(f)$ гиперболическое и периодические точки всюду плотны в $NW(f)$.

Смейл [61] доказал следующее утверждение, известное как *теорема о спектральном разложении*. Пусть диффеоморфизм $f \in Diff^1(M^n)$ удовлетворяет аксиоме A. Тогда множество $NW(f)$ представляется в виде конечного объединения попарно непересекающихся замкнутых инвариантных множеств $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_k$, называемых *базисными множествами*, каждое из которых содержит всюду плотную орбиту. При этом [43] многообразие M^n можно представить в виде

$$M^n = \bigcup_{i=1}^{k} W^s(\Lambda_i) = \bigcup_{i=1}^{k} W^u(\Lambda_i),$$

где $W^s(\Lambda_i) = \bigcup\limits_{x\in\Lambda_i} W^s(x)$ и $W^u(\Lambda_i) = \bigcup\limits_{x\in\Lambda_i} W^u(x)$. Базисное множество называется *нетривиальным*, если оно не является периодической орбитой (в частности, не является неподвижной точкой).

В силу транзитивности f на каждом базисном множестве Λ_i ограничения расслоений $E^s_{\Lambda_i}$, $E^u_{\Lambda_i}$ на Λ_i имеют постоянную размерность во всех точках $x \in \Lambda_i$. *Типом базисного множества* Λ_i называется пара чисел (a_i, b_i), где $a_i = \dim E^u_x, b_i = \dim E^s_x$, где x — любая точка из Λ_i. Число a_i при этом называется *индексом Морса* базисного множества Λ_i и обозначается $u(\Lambda_i)$. Тогда $b_i = n - u(\Lambda_i)$.

Из [4, 33] вытекает следующее уточнение структуры базисного множества. Каждое базисное множество Λ_i представляется в виде конечного объединения непересекающихся компактов Λ_{i1}, $\ldots, \Lambda_{ih}$, которые под действием f циклически переходят друг в друга. Более того, устойчивое и неустойчивое многообразие любой точки $x \in \Lambda_{ij}$ содержит множество, плотное в Λ_{ij}. Каждое Λ_{ij} называется *C-плотной* (*или периодической*) *компонентой* базисного множества Λ_i. Базисное множество называется *C-плотным*, если оно имеет ровно одну периодическую компоненту, с которой оно совпадает.

Компактное f-инвариантное множество $A \subset M$ называется *аттрактором* диффеоморфизма f, если оно имеет компактную окрестность U_A такую, что $f(U_A) \subset int\ U_A$ и $A = \bigcap\limits_{k\geqslant 0} f^k(U_A)$. *Репеллер* определяется как аттрактор для f^{-1}.

В силу [23] базисное множество Λ диффеоморфизма f является аттрактором (репеллером) тогда и только тогда, когда $\Lambda = \bigcup\limits_{x\in\Lambda} W^u(x)$ ($\Lambda = \bigcup\limits_{x\in\Lambda} W^u(x)$).

Аттрактор Λ A-диффеоморфизма f называется *растягивающимся аттрактором*, если топологическая размерность $\dim\Lambda$ равна размерности неустойчивого многообразия $W^u_x, x \in \Lambda$. Репеллер диффеоморфизма f называется *сжимающимся*, если он является растягивающимся аттрактором для f^{-1}.

Согласно [13], базисное множество Λ А-диффеоморфизма $f: M^3 \to M^3$ называется *поверхностным*, если оно принадлежит f-инвариантной замкнутой поверхности M^2_Λ (не обязательно связной), топологически вложенной в многообразие M^3 и называемой *носителем* множества Λ.

Два диффеоморфизма $f,\ g \in Diff^1(M^n)$ называются *топологически сопряженными*, если существует гомеоморфизм $\varphi: M^n \to M^n$ такой, что $\varphi \circ f = g \circ \varphi$. Диффеоморфизм $f \in Diff^1(M^n)$ называется *структурно устойчивым*, если существует его окрестность $U(f) \subset Diff^1(M^n)$ такая, что любой диффеоморфизм $g \in U(f)$ сопряжен f. Если потребовать, чтобы сопрягающий гомеоморфизм был близок к тождественному в C^0 топологии, то получим определение *грубого* диффеоморфизма. Теперь известно, что понятия «грубости» и «структурной устойчивости» эквивалентны, хотя доказательство этого факта весьма нетривиально (см. обзор [5], где обсуждаются различные определения и соответствующие результаты).

При формулировке условий структурной устойчивости большую роль играет условие, которое называют сильным условием трансверсальности. Пусть $W_1,\ W_2 \subset M^n$ — два иммерсированных многообразия, имеющих непустое пересечение. По определению, $W_1,\ W_2$ *пересекаются трансверсально*, если для любой точки $x \in W_1 \cap W_2$ касательное пространство T_xM порождается касательными подпространствами T_xW_1 и T_xW_2. В частности, если $W_1,\ W_2$ пересекаются трансверсально, то $\dim T_xW_1 + \dim T_xW_2 \geqslant \dim T_xM^n$.

Говорят, что A-диффеоморфизм *удовлетворяет сильному условию трансверсальности*, если для любых точек $x,\ y \in NW(f)$ многообразия $W^s(x),\ W^u(y)$ имеют только трансверсальные пересечения. Известно [49, 57], что диффеоморфизм структурно устойчив тогда и только тогда, когда он является A-диффеоморфизмом и удовлетворяет сильному условию трансверсальности. Необходимость доказал Мане [49], достаточность — Робинсон [57].

Важным и достаточно хорошо изученным классом структурно устойчивых динамических систем являются диффеоморфизмы Аносова коразмерности один [3]. Напомним, что *диффеоморфизмом Аносова* называется диффеоморфизм, у которого все несущее многообразие является гиперболическим. Диффеоморфизм Аносова $f: M^n \to M^n$ называется диффеоморфизмом *коразмерности один*, если $\dim\ E^s_{M^n} = 1$ или $\dim\ E^u_{M^n} = 1$. Известно, что любой такой диффеоморфизм Аносова коразмерности один топологически сопряжен гиперболическому автоморфизму тора, и два таких диффеоморфизма топологически сопряжены тогда и только тогда, когда они π_1-сопряжены [36, 53] (последнее означает, что они индуцируют сопряженные изоморфизмы фундаментальной группы тора). При этом n-мерный тор $\mathbb{T}^n, n \geqslant 2$ является единственным базисным множеством такого диффеоморфизма.

Напомним, что *алгебраическим автоморфизмом* тора $\mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n/\mathbb{Z}^n$ называется диффеоморфизм $\widehat{C}$, задаваемый матрицей $C = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \dots & \dots & \dots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$ из множества $GL(n, \mathbb{Z})$ целочисленных матриц с определителем ± 1, то есть $\widehat{C}(x_1, \dots, x_n) = (a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n, \dots, a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n)\ (mod\ 1)$. Алгебраический автоморфизм $\widehat{C}$ называется *гиперболическим*, если собственные значения $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ матрицы C по модулю не равны единице. При этом матрица C также называется *гиперболической*. Гиперболический автоморфизм называется *гиперболическим автоморфизмом коразмерности один*, если он имеет единственное собственное число, либо меньшее, либо большее единицы по абсолютной величине, а остальные собственные числа лежат соответственно либо вне единичной окружности комплексной плоскости, либо внутри.

Имеется несколько определений ориентируемости базисного множества, два из которых наиболее употребимы. Одно определение выражается через ориентируемость соответствующих подрасслоений касательного расслоения (см. например, [47, 55]). Другое, введенное Гринесом [6–8], использует индекс пересечений инвариантных многообразий. Будем говорить, что базисное множество Λ *ориентируемо*, если для любой точки $x \in \Lambda$ и любых фиксированных чисел $\alpha > 0,\ \beta > 0$ индекс пересечения $W^s_\alpha(x) \cap W^u_\beta(x)$ во всех точках пересечения один и тот же ($+1$ или -1). В противном случае базисное множество Λ называется *неориентируемым*. Ниже под ориентируемостью базисного множества мы будем понимать ориентируемость в смысле последнего определения.

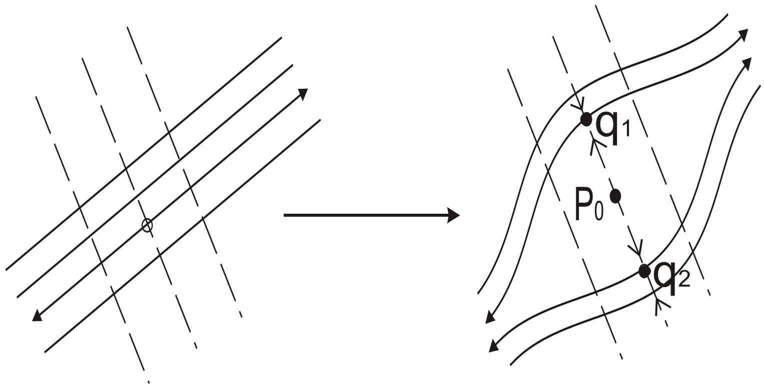

Рис. 1. Хирургическая операция Смейла.

Перейдем к построению модельных примеров. Диффеоморфизмы Аносова являются основой для построения растягивающихся аттракторов коразмерности один. Следуя [61], можно построить структурно устойчивый диффеоморфизм тора $\mathbb{T}^n$, неблуждающее множество которого состоит из неподвижного стока и растягивающегося аттрактора коразмерности один, с помощью так называемой хирургической операции Смейла из диффеоморфизма Аносова коразмерности один n-тора $\mathbb{T}^n$. Такой диффеоморфизм называется DA-диффеоморфизмом. Приведем конструкцию для случая $n=2$.

Пусть $f_{L_A}:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$ — алгебраический автоморфизм тора, индуцированный линейным отображением $L_A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, заданным матрицей $\begin{pmatrix}2&1\\1&1\end{pmatrix}$, и p_0 — неподвижная седловая точка, соответствующая началу координат в $\mathbb{R}^2$ с собственными значениями $\lambda^u=\dfrac{3+\sqrt5}{2}$ и $\lambda^s=\dfrac{3-\sqrt5}{2}$. В некоторой окрестности U точки p_0 введем локальные координаты x_1,x_2, в которых матрица линейного отображения L диагональная, т. е. $f_L(x_1,x_2)=(\lambda^u x_1,\lambda^s x_2)$ на U. Выберем значение $r_0\in(0,1/2)$ так, чтобы 2-шар $B_{r_0}(p_0)$ радиуса r_0 с центром в точке p_0 содержался в U. Пусть $\delta(r)$ — функция одной переменной такая, что $0\leqslant\delta(r)\leqslant1$ для всех r, $\delta'(r)<0$ для $r_0/2<r<r_0$ и $\delta(r)=\begin{cases}0, & r\geqslant r_0,\\ 1, & r\leqslant r_0/2.\end{cases}$

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений $\dot x_1=0$, $\dot x_2=x_2\delta(\|x\|)$. Пусть φ^t — поток этой системы, $\varphi^t(x_1,x_2)=(x_1,\varphi_2^t(x_1,x_2))$. Тогда $\varphi^t=id$ вне шара $B_{r_0}(p_0)$ и $D\varphi^t_p=\begin{pmatrix}1&0\\0&e^t\end{pmatrix}$. Положим $f=\varphi^\tau f_{L_A}$ для некоторого $\tau>0$ такого, что $e^\tau\lambda^s>1$. Заметим, что $Df_{p_0}=\begin{pmatrix}\lambda^u&0\\0&e^\tau\lambda^s\end{pmatrix}$, так что p_0 — гиперболический источник. По построению диффеоморфизм f сохраняет устойчивое слоение диффеоморфизма Аносова, и координатные оси f-инвариантны. Поскольку диффеоморфизмы φ^τ и f_L имеют противоположные направления движения на оси Ox_2, то диффеоморфизм f имеет две симметричные относительно p_0 неподвижные точки q_1,q_2 на оси Ox_2, которые являются гиперболическими седловыми точками (см. рис. 1). Имеет место следующее утверждение (см. например, [58]).

Теорема 1.1. *Для диффеоморфизма f множество $\Lambda=\mathbb{T}^2\setminus W^u_{p_0}$ является одномерным аттрактором и спектральное разложение имеет вид $\{p_0,\Lambda\}$.*

Построенный таким образом одномерный аттрактор является растягивающимся, имеет тип $(1,1)$ и является ориентируемым.

Приведем пример поверхностного двумерного базисного множества в трехмерном пространстве.

Нетрудно построить A-диффеоморфизм $f:M^3\to M^3$, имеющий базисное множество, которое гомеоморфно двумерному тору и является замкнутым двумерным подмногообразием многообразия M^3 (рис. 2). Для этого достаточно рассмотреть диффеоморфизм $f:\mathbb{T}^2\times\mathbb{S}^1\to\mathbb{T}^2\times\mathbb{S}^1$, заданный формулой $f(t,s)=(f_A(t),f_{NS}(s))$, где $f_A:\mathbb{T}^2\to\mathbb{T}^2$ — диффеоморфизм Аносова и $f_{NS}:\mathbb{S}^1\to$

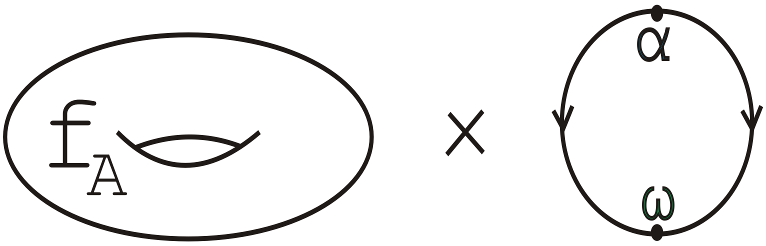

Рис. 2. Построение диффеоморфизма с поверхностным двумерным базисным множеством

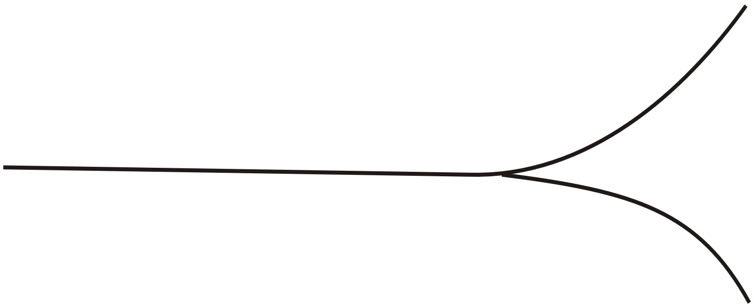

Рис. 3. Ветвленное многообразие

$\mathbb{S}^1$ — диффеоморфизм вида «северный полюс — южный полюс» (диффеоморфизм, неблуждающее множество которого состоит из гиперболических стока и источника). Тогда диффеоморфизм f имеет двумерное базисное множество Λ типа $(1,2)$, которое является аттрактором. Кроме того, Λ диффеоморфно $\mathbb{T}^2$, и диффеоморфизм $f|_\Lambda$ топологически сопряжен с диффеоморфизмом Аносова.

2. Теоремы Вильямса и Брауна

Используя понятие обратного предела, Вильямс [63] описал внутреннюю динамику ограничения диффеоморфизма на растягивающемся аттракторе. Мы кратко изложим подход Р. Вильямса и приведем развитие этого подхода, полученное сравнительно недавно Брауном [34].

Пусть N — компактная окрестность растягивающегося аттрактора Λ. Следуя Вильямсу, положим $x \sim y$, если (и только если) точки x, $y \in N$ принадлежат одной компоненте связности пересечения $N \cap W^s(z)$ для некоторой точки $z \in \Lambda$. Вильямс доказал, что окрестность N можно подобрать так, что будут выполняться следующие условия:

- фактор-пространство $N/_\sim \stackrel{\mathrm{def}}{=} K$ является ветвленным многообразием;
- имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc}
f(N) & \xleftarrow{f} & N \\
\downarrow \subset & & \\
N & & \downarrow q \\
\downarrow q & & \\
K & \xleftarrow{g} & K
\end{array}$$

где $q : N \to N/_\sim$ — проекция на фактор-пространство. Напомним, что ветвленное многообразие есть гладкое многообразие, за исключением конечного числа особенностей, которые для одномерного многообразия (этот случай, по существу, нам и понадобится) имеют вид, изображенный на рис. 2.

Напомним, что *обратный предел* относительно отображения $g : K \to K$

$$\Sigma_g = \varprojlim(K, g) = \varprojlim \left\{ K \xleftarrow{g} K \xleftarrow{g} \cdots \xleftarrow{g} K \xleftarrow{g} \cdots \right\}$$

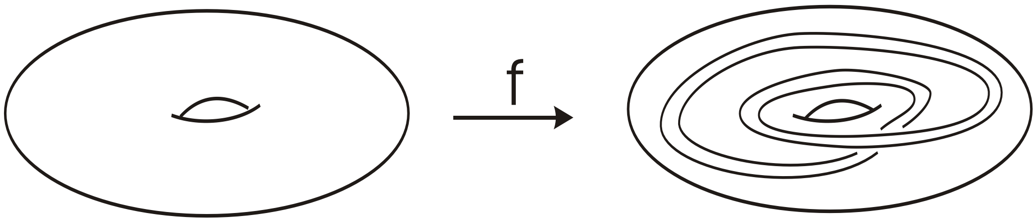

Рис. 4. Соленоид Смейла

определяется как множество односторонних последовательностей $(x_0, \ldots, x_i, \ldots)$, где $x_i = g(x_{i+1})$. На Σ_g определяется *сдвиг*

$$h : \Sigma_g \to \Sigma_g, \qquad h(x_0, x_1, \ldots) = (g(x_0), x_0, x_1, \ldots).$$

Отметим, что любую одностороннюю последовательность $(x_0, \ldots, x_i, \ldots)$ мы можем рассматривать как точку бесконечного произведения $\prod\limits_{i=0}^{\infty} K_i$, $K_i = K$, которое наделяется тихоновской топологией (разумеется, K предполагается наделенным топологической структурой). Таким образом, обратный предел есть подмножество топологического пространства. Ниже, когда мы говорим о том, что некоторое базисное множество является обратным пределом, мы подразумеваем, что базисное множество гомеоморфно определенному обратному пределу.

Пусть K — ветвленное многообразие. Из определения ветвленного многообразия вытекает, что такое многообразие имеет касательное расслоение, которое обозначается через $T(K)$. Следуя Вильямсу [63], дадим понятие растяжения (expansion) ветвленного многообразия. C^r-отображение $g : K \to K$, $r \geqslant 1$, называется *растяжением*, если существуют константы $C > 0$, $0 < \lambda < 1$ такие, что

$$|Dg^m(v)| \geqslant C\lambda^m|v| \quad \text{для всех} \quad m \in \mathbb{N},\ v \in T(K).$$

Если K есть ветвленное m-многообразие, и выполняются следующие условия:

1. $NW(g) = K$;
2. g — растяжение;
3. для любой точки $z \in K$, существует окрестность U точки z и число $j \in \mathbb{N}$ такие, что $g^j(U)$ есть m-шар,

то Σ_g называется *обобщенным m-соленоидом*. Вильямс [63] доказал следующую теорему.

Теорема 2.1. *Пусть Λ — m-мерный растягивающийся аттрактор диффеоморфизма f. Тогда ограничение $f|_\Lambda$ диффеоморфизма f на Λ сопряжено сдвигу h некоторого обобщенного m-соленоида. Обратно, для сдвига $h : \Sigma \to \Sigma$ обобщенного m-соленоида Σ существуют многообразие M и диффеоморфизм $f : M \to M$ такие, что f имеет m-мерный растягивающийся аттрактор Λ и ограничение $f|_\Lambda$ сопряжено h.*

В частном случае, когда K является окружностью S^1, а $g = E_2 : x \to 2x \ mod\ 1$ — растягивающим эндоморфизмом степени 2, мы получаем известный соленоид Смейла [61], который построил диффеоморфизм полнотория в себя с одномерным растягивающимся аттрактором, являющимся топологическим соленоидом. Схематично пример Смейла можно представить сначала как растяжение полнотория вдоль его оси, лежащей внутри полнотория, и сжатие в направлении, перпендикулярном оси. Затем полученный (промежуточный) полноторий вкладывается в исходный так, чтобы ось промежуточного полнотория прокручивалась не менее двух раз вдоль оси исходного полнотория и при этом сохранялась дисковая структура (см. рис. 4).

В случае, когда базисное множество Λ является C-плотным аттрактором с единичным индексом Морса, Браун [34] доказал, что Λ всегда есть обратный предел, причем в случае, когда Λ не является растягивающим (т. е. его топологическая размерность $k = \dim \Lambda$ не меньше двух), то Λ есть специальный обратный предел относительно линейного эндоморфизма или диффеоморфизма k-мерного тора $\mathbb{T}^k$. Приведем более точную формулировку теоремы Брауна.

Теорема 2.2. *Пусть $f : M^n \to M^n$ — А-диффеоморфизм замкнутого многообразия M^n и Λ — C-плотное базисное множество диффеоморфизма f. Предположим, что индекс Морса множества Λ равен единице, т. е. $\dim E^u_x = 1$ для любой точки $x \in \Lambda$. Тогда либо Λ является одномерным растягивающимся аттрактором, и в этом случае Λ является обратным пределом*

$$\Sigma_g = \varprojlim(K, g) = \varprojlim \left\{ K \xleftarrow{g} K \xleftarrow{g} \cdots \xleftarrow{g} K \xleftarrow{g} \cdots \right\}$$

относительно растяжения $g : K \to K$ ветвленного одномерного многообразия K, либо Λ есть обратный предел

$$\Sigma_A = \varprojlim(\mathbb{T}^k, A) = \varprojlim \left\{ \mathbb{T}^k \xleftarrow{A} \mathbb{T}^k \xleftarrow{A} \cdots \xleftarrow{A} \mathbb{T}^k \xleftarrow{A} \cdots \right\}$$

относительно линейного эндоморфизма $A : \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^k$, $k \geqslant 2$. Более того, если Λ локально связное, то Λ гомеоморфно k-мерному тору $\mathbb{T}^k$, и ограничение $f|_\Lambda$ сопряжено аносовскому автоморфизму.

До недавнего времени открытым являлся следующий вопрос Смейла [61, с. 785]: существует ли двумерное базисное множество диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$, которое не является компактным подмногообразием и не имеет локальную структуру прямого произведения $\mathbb{R}^2$ на канторово множество. В 2010 Браун дал отрицательный ответ на этот вопрос. Из работы [34] следует, что любое двумерное базисное множество диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ является либо растягивающимся аттрактором (сжимающимся репеллером), либо поверхностным аттрактором (поверхностным репеллером). Более того, оказалось возможным дать описание базисных множеств диффеоморфизмов 3-мерных многообразий.

Теорема 2.3. *Пусть $f : M^3 \to M^3$ — А-диффеоморфизм замкнутого трехмерного многообразия M^3 и Λ — C-плотное базисное множество, являющееся аттрактором диффеоморфизма f. Тогда*:

1. *Если $\dim \Lambda = 0$, то Λ является изолированной притягивающей неподвижной точкой.*
2. *Если $\dim \Lambda = 1$, то Λ является обобщенным одномерным соленоидом, локально гомеоморфным произведению отрезка на канторово множество в двумерной плоскости.*
3. *Если $\dim \Lambda = 2$, то*
   - *либо $\dim E^u|_\Lambda = 1$, и в этом случае Λ гомеоморфно двумерному тору $\mathbb{T}^2$, а ограничение $f|_\Lambda$ сопряжено автоморфизму Аносова двумерного тора,*
   - *либо $\dim E^u|_\Lambda = 2$, и в этом случае Λ является растягивающимся аттрактором, локально гомеоморфным произведению двумерной плоскости на канторово множество, принадлежащее прямой.*
4. *Если $\dim \Lambda = 3$, то $\Lambda = M^3 = \mathbb{T}^3$ есть трехмерный тор, и диффеоморфизм f сопряжен автоморфизму Аносова трехмерного тора.*

Отметим работу [41], в которой доказано, что любой обратный предел

$$\Sigma_A = \varprojlim(\mathbb{T}^k, A) = \varprojlim \left\{ \mathbb{T}^k \xleftarrow{A} \mathbb{T}^k \xleftarrow{A} \cdots \xleftarrow{A} \mathbb{T}^k \xleftarrow{A} \cdots \right\}$$

относительно линейного эндоморфизма или диффеоморфизма $A : \mathbb{T}^k \to \mathbb{T}^k$ (другими словами, определитель матрицы A должен быть отличен от нуля) гомеоморфен аттрактору диффеоморфизма некоторого аналитического многообразия.

3. Классификация базисных множеств коразмерности один

Пусть Λ — базисное множество коразмерности один А-диффеоморфизма f замкнутого n-мерного многообразия M^n, т. е. топологическая размерность базисного множества Λ равна $n-1$. Согласно [22, 63], Λ является аттрактором или репеллером. Обычно, если не оговорено противное, мы будем для определенности считать Λ аттрактором. Для размерности несущего многообразия $n = 2$ топологическая классификация таких базисных множеств получена в работах [7–9, 23], см. книгу [17], где имеется обширная библиография. Поэтому ниже рассматривается случай $n \geqslant 3$. Мы ограничимся рассмотрением аттракторов коразмерности один, индекс Морса которых равен 1 или $n-1$. Поскольку числа являются представителями в группе $\mathbb{Z}_n$ для $\pm 1(mod\ n)$, то будем индекс

$n-1$ отождествлять с индексом -1. Индекс Морса называется *единичным по модулю индексом Морса*, если он равен 1 или $n-1$. Отметим, что для $n=3$ базисное множество коразмерности один имеет всегда единичный по модулю индекс Морса.

В работе [45] рассматривался обратный предел

$$\Sigma = \varprojlim(\mathbb{T}^k) = \varprojlim\left\{\mathbb{T}^k \xleftarrow{A_1} \mathbb{T}^k \xleftarrow{A_2} \dots \xleftarrow{A_m} \mathbb{T}^k \xleftarrow{A_{m+1}} \dots\right\}$$

(на самом деле, в этой работе рассматривалась более общая конструкция, но для наших целей достаточно приведенной), и было показано, что если имеется бесконечное множество индексов m, для которых матрица A_m имеет определитель $|\det A_m| \geqslant 2$, то обратный предел Σ не вкладывается ни в какое замкнутое $(k+1)$-мерное многообразие. Отсюда и из теоремы 2.2 получаем следующий результат.

Теорема 3.1. *Пусть $f: M^n \to M^n$ — A-диффеоморфизм замкнутого n-мерного многообразия M^n, $n \geqslant 3$, и пусть Λ — аттрактор коразмерности один диффеоморфизма f с единичным по модулю индексом Морса. Тогда имеет место ровно одна из следующих возможностей*:

- *либо Λ является растягивающимся аттрактором, локально гомеоморфным произведению $\mathbb{R}^{n-1}$ на канторово множество, принадлежащее прямой*;
- *либо Λ гомеоморфно $(n-1)$-мерному тору $\mathbb{T}^{n-1}$ и ограничение диффеоморфизма $f|_\Lambda$ сопряжено диффеоморфизму Аносова коразмерности один.*

Далее мы рассматриваем классификационные результаты в классе структурно устойчивых диффеоморфизмов, у которых имеется аттрактор коразмерности один с единичным по модулю индексом Морса. В силу приведенной выше альтернативы сперва рассматриваются растягивающиеся аттракторы, а затем аттракторы, гомеоморфные торам (здесь мы ограничиваемся случаем $n=3$, при котором получена полная классификация).

3.1. Растягивающиеся аттракторы. Топологическая классификация структурно устойчивых диффеоморфизмов с ориентируемыми растягивающимися аттракторами коразмерности один на замкнутых n-мерных многообразиях при $n \geqslant 3$ получена в работах [10–12, 40].

Пусть $f: M^n \to M^n$ — структурно устойчивый диффеоморфизм, неблуждающее множество которого содержит растягивающийся ориентируемый аттрактор Λ топологической размерности $(n-1)$. Тогда $\dim\ W^s(x) = 1$ для любой точки $x \in \Lambda$, что позволяет ввести обозначение $(y,z)^s$ $([y,z]^s)$ для открытой (замкнутой) дуги устойчивого многообразия $W^s(x)$, ограниченной точками $y, z \in W^s(x)$.

Множество $W^s(x) \setminus x$ состоит из двух компонент связности. Хотя бы одна из этих компонент имеет непустое пересечение с множеством Λ. Точка $x \in \Lambda$ называется *граничной*, если одна из компонент связности множества $W^s(x) \setminus x$ не пересекается с Λ, будем обозначать такую компоненту через $W^{s\varnothing}(x)$. Множество Γ_Λ граничных точек множества Λ не пусто и состоит из конечного числа периодических точек, которые разбиваются на *ассоциированные* пары (p,q) точек одинакового периода так, что 2-*связка* $B_{pq} = W^u(p) \cup W^u(q)$ является достижимой изнутри границей[1] компоненты связности множества $M \setminus \Lambda$.

Для каждой пары (p,q) ассоциированных граничных точек множества Λ построим так называемую *характеристическую сферу*.

Пусть B_{pq} — 2-связка аттрактора Λ, состоящая из двух неустойчивых многообразий $W^u(p)$ и $W^u(q)$ ассоциированных граничных точек p и q соответственно, и m_{pq} — период точек p, q. Тогда для любой точки $x \in W^u(p) \setminus p$ существует единственная точка $y \in (W^u(q) \cap W^s(x))$ такая, что дуга $(x,y)^s$ не пересекается с множеством Λ. Определим отображение

$$\xi_{pq}: B_{pq} \setminus \{p,q\} \to B_{pq} \setminus \{p,q\},$$

положив $\xi_{pq}(x) = y$ и $\xi_{pq}(y) = x$. Тогда $\xi_{pq}(W^u(p) \setminus p) = W^u(q) \setminus q$ и $\xi_{pq}(W^u(q) \setminus q) = W^u(p) \setminus p$, т. е. отображение ξ_{pq} переводит проколотые неустойчивые многообразия 2-связки друг в друга

[1] Пусть $G \subset M$ — открытое множество с границей ∂G ($\partial G = cl(G) \setminus int(G)$). Подмножество $\delta G \subset \partial G$ называется *достижимой изнутри границей* области G, если для любой точки $x \in \delta G$ найдется открытая дуга, полностью лежащая в G и такая, что x является одной из ее концевых точек.

и является инволюцией ($\xi_{pq}^2 = id$). В силу теоремы о непрерывной зависимости инвариантных многообразий на компактных множествах отображение ξ_{pq} является гомеоморфизмом.

Ограничение $f^{m_{pq}}|_{W^u(p)}$ имеет ровно одну гиперболическую отталкивающую неподвижную точку p, поэтому существует гладкий замкнутый $(n-1)$-диск $D_p \subset W^u(p)$ такой, что $p \in D_p \subset int(f^{m_{pq}}(D_p))$. Тогда множество $C_{pq} = \bigcup\limits_{x \in \partial D_p} (x, \xi_{pq}(x))^s$ гомеоморфно замкнутому цилиндру $\mathbb{S}^{n-2} \times [0,1]$. Множество C_{pq} называют *связывающим цилиндром*. Окружность $\xi_{pq}(\partial D_p)$ ограничивает в $W^u(q)$ двумерный $(n-1)$-диск D_q такой, что $q \in D_q \subset int(f^{m_{pq}}(D_q))$. Множество $S_{pq} = D_p \cup C_{pq} \cup D_q$ гомеоморфно $(n-1)$-мерной сфере, которую называют *характеристической сферой*, соответствующей связке B_{pq} (см. рис. 5).

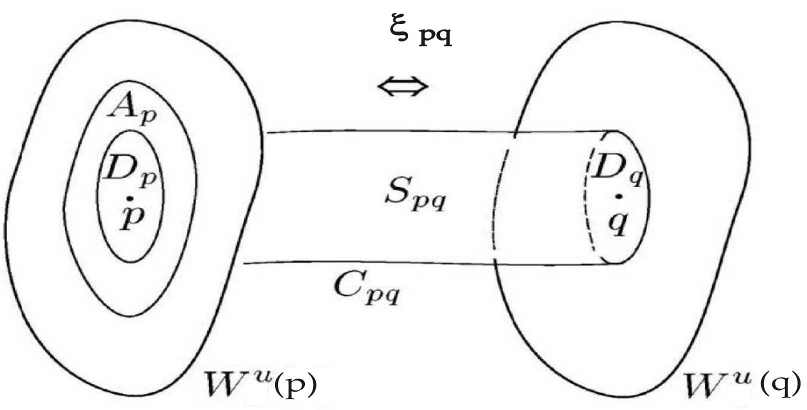

Рис. 5. Характеристическая сфера

Положим $T(f) = NW(f) \setminus \Lambda$ и основные динамические свойства диффеоморфизма $f \in G$ сформулируем в виде теоремы.

Теорема 3.2. *Пусть $f : M^n \to M^n$ — структурно устойчивый диффеоморфизм, неблуждающее множество которого содержит растягивающийся ориентируемый аттрактор Λ топологической размерности $(n-1)$. Тогда имеют место следующие факты*:

1. *объемлющее многообразие M^n гомеоморфно n-мерному тору $\mathbb{T}^n$*;
2. *каждая характеристическая сфера S_{pq} ограничивает n-шар Q_{pq} такой, что $T(f) \subset \bigcup\limits_{(p,q) \subset \Gamma_\Lambda} Q_{pq}$*;
3. *для каждой ассоциированной пары (p,q) граничных точек существует натуральное число k_{pq} такое, что $T(f) \cap Q_{pq}$ состоит из k_{pq} периодических источников $\alpha_1, \ldots, \alpha_{k_{pq}}$ и $k_{pq}-1$ седловых периодических точек $P_1, \ldots, P_{k_{pq}-1}$, чередующихся на простой дуге $l_{pq} = W^{s\varnothing}(p) \cup \bigcup\limits_{i=1}^{k_{pq}-1} W^s(P_i) \cup \bigcup\limits_{i=1}^{k} W^s(\alpha_i) \cup W^{s\varnothing}(q)$ (см. рис.* 6).

После теоремы 3.2 естественным шагом по пути классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов с базисными множествами коразмерности один является классификация структурно устойчивых диффеоморфизмов с растягивающимися аттракторами или сжимающимися репеллерами коразмерности один на торе T^n, $n \geqslant 3$. Пусть $f : T^n \to T^n$ — такой диффеоморфизм. Для определенности будем считать, что f имеет растягивающийся аттрактор Λ коразмерности один. Обозначим через

$$f_* : H_1(T^n, \mathbb{R}^n) \to H_1(T^n, \mathbb{R}^n)$$

автоморфизм одномерной группы гомологий $H_1(T^n, \mathbb{R}^n) \simeq \mathbb{R}^n$ тора T^n, индуцированный диффеоморфизмом f.

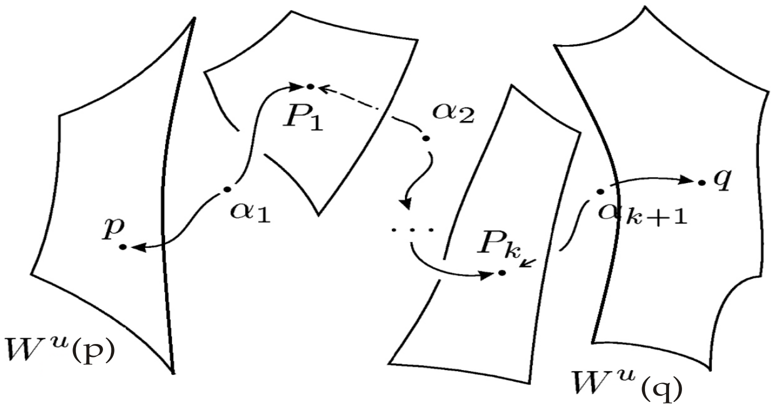

Рис. 6. Дуга l_{pq}

Теорема 3.3. *Пусть $f : T^n \to T^n$ — A-диффеоморфизм n-мерного тора T^n, $n \geqslant 3$, имеющий ориентируемый растягивающийся аттрактор Λ коразмерности один. Тогда f_* — гиперболический автоморфизм коразмерности один.*

Следуя Френксу [36], будем называть диффеоморфизм $f : M \to M$ *π_1-диффеоморфизмом*, если для любого гомеоморфизма $g : K \to K$ компактного CW-комплекса K на себя и непрерывного отображения $h : K \to M$, для которых выполняется соотношение $f_* \circ h_* = h_* \circ g_*$, существует единственное отображение $h' : K \to M$, переводящее базисную точку на K в базисную точку на M, гомотопное h и такое, что $f \circ h' = h' \circ g$.

Согласно теореме 3.3, существует алгебраический автоморфизм $A(f) : T^n \to T^n$ с $f_* = A(f)_*$, который является гиперболическим. В силу [36, предложение 2.1], гиперболический автоморфизм тора является π_1-диффеоморфизмом. Поэтому существует непрерывное отображение $h : T^n \to T^n$, гомотопное тождественному, такое, что $h \circ f = A(f) \circ h$. Положим

$$P(f,h) = \{x \in T^n | h^{-1}(x) \text{ содержит более одной точки}\}$$

Лемма 3.1. *Пусть $f : T^n \to T^n$ — A-диффеоморфизм n-мерного тора T^n, $n \geqslant 3$, имеющий ориентируемый растягивающийся аттрактор Λ коразмерности один, и пусть $h : T^n \to T^n$ — непрерывное отображение, гомотопное тождественному, такое, что $h \circ f = A(f) \circ h$. Тогда h удовлетворяет следующим условиям*:

- $h(\Lambda) = T^n$.
- *Пусть $\{p_i, q_i\}_{i=1}^k$ — семейство пар ассоциированных граничных периодических точек диффеоморфизма f; тогда $h(p_i) = h(q_i)$ является периодической точкой автоморфизма $A(f)$ для каждого $i = 1, \ldots, k$.*
- $h(W^u(p_i)) = h(W^u(q_i))$, $i = 1, \ldots, k$.
- $P(f,h) = \bigcup\limits_{i=1}^{k} h(W^u(p_i))$.
- *Пусть K_i — компонента множества $T^n \setminus \Lambda$; тогда $h(K_i)$ есть неустойчивое многообразие $W^u(h(p_i)) = W^u(h(q_i))$ автоморфизма $A(f)$, где p_i, q_i — ассоциированные граничные периодические точки такие, что $\delta(K_i) = W^u(p_i) \cup W^u(p_i)$. Более того, $h(K_i \cup \delta(K_i)) = W^u(h(p_i))$.*
- *Пусть $\breve{\Lambda} \subset \Lambda$ — объединение неустойчивых многообразий, не содержащих граничных периодических точек; тогда ограничение $h|\breve{\Lambda}$ является гомеоморфизмом на свой образ.*

Пусть Λ — ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один структурно устойчивого диффеоморфизма f, и пусть S_{pq} — характеристическая сфера, соответствующая 2-связке $B = W^u(p) \cup W^u(q)$ аттрактора Λ, где p, $q \in \Lambda$ — ассоциированные граничные периодические точки. Можно показать, что внутри сферы S_{pq} лежит $d \geqslant 1$ периодических точек индекса n и $d-1 \geqslant 0$

периодических точек индекса $n-1$. Положим $d(p,q)=d$. Если Λ — репеллер, то через $d(p,q)$ обозначим число периодических точек индекса 0, лежащих внутри S_{pq}. В обоих случаях число $d(p,q)$ корректно определено, так как не зависит от выбора характеристической сферы S_{pq}. Нетрудно видеть, что точки $f^j(p)$, $f^j(q)$ являются ассоциированными граничными и периодическими, а число периодических точек одного индекса внутри сфер S_{pq} и $f^j(S_{pq})=S_{f^j(p),f^j(q)}$ одинаково для любого $j\in\mathbb{Z}$. Поэтому мы можем приписать число $d(O(p,q))\overset{\text{def}}{=}d(p,q)$ объединению $O(p,q)=O(p)\cup O(q)$ орбит точек p, q.

Граничные периодические точки разбиваются на пары $\{O(p_i,q_i)\}_{i=1}^k$ орбит ассоциированных граничных точек. Пусть $\{d(O(p_i,q_i))\}_{i=1}^k$ — соответствующие им определенные выше числа, указывающие на количество периодических точек индекса n (если Λ — аттрактор) или индекса 0 (если Λ — репеллер) в соответствующих характеристических сферах. Согласно лемме 3.1, $h(O(p_i))=h(O(q_i))$ является периодической орбитой автоморфизма $A(f)$. Припишем каждой орбите $h(O(p_i))=h(O(q_i))$ число $d(O(p_i,q_i))$. Семейство $\{h(O(p_i)),d(O(p_i,q_i))\}_{i=1}^k$ называется *d-сигнатурой диффеоморфизма f* и обозначается через $\mathcal{D}(f,h)$.

Пусть A — гиперболический автоморфизм коразмерности один тора T^n, и пусть $\{O_j\}_{j=1}^r$ — конечный набор периодических орбит O_j автоморфизма A. Каждой орбите O_j припишем произвольным образом натуральное число $d_j\in\mathbb{N}$. Семейство $\{O_j,d_j\}_{j=1}^r$ называется *допустимой d-сигнатурой автоморфизма A*. Согласно теореме 3.2, d-сигнатура структурно устойчивого диффеоморфизма f является допустимой.

Пусть $\{O_j^1,d_j^1\}_{j=1}^{r_1}$, $\{O_j^2,d_j^2\}_{j=1}^{r_2}$ — допустимые d-сигнатуры гиперболических автоморфизмов A_1 и A_2 соответственно. Эти сигнатуры называются *эквивалентными*, если существует линейный диффеоморфизм (т. е., композиция автоморфизма и сдвига) $\psi:T^n\to T^n$ такая, что $\psi(\bigcup\limits_{j=1}^{r_1}(O_j^1))=\bigcup\limits_{j=1}^{r_2}(O_j^2)$, $d(\psi(O_j))=d(O_j)$ для всех $1\leqslant j\leqslant r_1$, и выполняется соотношение $\psi\circ A_1=A_2\circ\psi$. Непосредственно из определения следует, что $r_1=r_2$.

Следующая теорема решает задачу топологической сопряженности в классе структурно устойчивых диффеоморфизмов на торе T^n $(n\geqslant 3)$, имеющих ориентируемые растягивающиеся аттракторы или сжимающиеся репеллеры коразмерности один. Она показывает, что d-сигнатура является полным инвариантом сопряженности в данном классе диффеоморфизмов.

Теорема 3.4. *Пусть $f_1,f_2:T^n\to T^n$ — структурно устойчивые диффеоморфизмы, имеющие ориентируемые растягивающиеся аттракторы коразмерности один Λ_1 и Λ_2 соответственно. Тогда диффеоморфизмы f_1, f_2 сопряжены тогда и только тогда, когда их d-сигнатуры $\mathcal{D}(f_1,h_1)$, $\mathcal{D}(f_2,h_2)$ эквивалентны, где $h_i:T^n\to T^n$ $(i=1,2)$ — гомотопные тождественному непрерывные отображения такие, что $h_i\circ f_i=A(f_i)\circ h_i$.*

Следующая теорема решает задачу реализации в классе структурно устойчивых диффеоморфизмов на торе T^n $(n\geqslant 3)$, имеющих ориентируемые базисные множества коразмерности один (растягивающиеся аттракторы или сжимающиеся репеллеры). Именно, для каждого допустимого топологического инварианта (d-сигнатуры) строится структурно устойчивый диффеоморфизм с данным инвариантом.

Теорема 3.5. *Пусть $A:T^n\to T^n$ — гиперболический автоморфизм с неустойчивым расслоением коразмерности один в каждом слое касательного расслоения тора T^n, $n\geqslant 3$ (это означает, что устойчивые многообразия всех точек одномерны). Для любой допустимой d-сигнатуры $\{O_j,d_j\}_{j=1}^r$ автоморфизма A существует структурно устойчивый диффеоморфизм $f:T^n\to T^n$, имеющий ориентируемый растягивающийся аттрактор коразмерности один такой, что $\mathcal{D}(f,h)=\{O_j,d_j\}_{j=1}^r$, где $f_*=A_*$ и $h:T^n\to T^n$ — непрерывное гомотопное тождественному отображение, удовлетворяющее соотношению $h\circ f=A\circ h$.*

Что касается неориентируемых базисных множеств коразмерности один, то имеет место следующий результат, доказанный в [19,50]

Теорема 3.6. *Пусть $f:M^{2m+1}\to M^{2m+1}$ — структурно устойчивый диффеоморфизм замкнутого $(2m+1)$-мерного многообразия M^{2m+1}, $2m+1\geqslant 3$. Тогда спектральное разложение* *диффеоморфизма f не содержит неориентируемых растягивающихся аттракторов и сжимающихся репеллеров коразмерности один.*

Первый пример неориентируемого базисного множества коразмерности один, которое является растягивающимся аттрактором или сжимающимся репеллером, был построен Плыкиным [23] на двумерной сфере S^2 (следовательно, в данном примере базисное множество коразмерности один является одномерным). Отметим также, что диффеоморфизм в примере Плыкина — структурно устойчивый. Этот пример Плыкина показывает, что теорема 3.6 не верна в размерности $n = 2$. Для размерностей $2m \geqslant 4$ вопрос существования неориентируемых растягивающихся аттракторов и сжимающихся репеллеров коразмерности один у структурно устойчивых диффеоморфизмов остается открытым. Однако, существуют Ω-устойчивые диффеоморфизмы с такими базисными множествами [19, 50].

3.2. Поверхностные базисные множества. Пусть $f : M^3 \to M^3$ — диффеоморфизм, удовлетворяющий аксиоме A С. Смейла, заданный на гладком замкнутом ориентируемом 3-многообразии M^3, и неблуждающее множество $NW(f)$ диффеоморфизма f содержит поверхностное двумерное базисное множество $\mathcal{B}$. Тогда согласно Р. В. Плыкину $\mathcal{B}$ является либо аттрактором, либо репеллером.

Следующие утверждения доказаны в работе [13].

Теорема 3.7. *Для любого двумерного поверхностного аттрактора (репеллера) $\mathcal{B}$ A-диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$ выполняется следующее:*

- *$\mathcal{B}$ имеет тип $(2, 1)$ ($(1, 2)$) и не является, следовательно, растягивающимся аттрактором (сжимающимся репеллером);*
- *$\mathcal{B}$ совпадает со своим носителем, являющимся объединением конечного числа многообразий, каждое из которых ручно вложено[1] в M^3 и гомеоморфно двумерному тору;*
- *ограничение некоторой степени диффеоморфизма f на любую компоненту связности носителя сопряжено с гиперболическим автоморфизмом тора.*

Будем рассматривать класс G, состоящий из A-диффеоморфизмов $f : M^3 \to M^3$, неблуждающее множество $NW(f)$ которых состоит только из поверхностных двумерных базисных множеств.

Пусть $f \in G$. Обозначим через $\mathcal{A}$ ($\mathcal{R}$) объединение всех аттракторов (репеллеров), принадлежащих $NW(f)$. Следующее утверждение уточняет топологию многообразия M^3 (см. работу [15]).

Лемма 3.2. *Для любого диффеоморфизма $f \in G$ множества $\mathcal{A}$, $\mathcal{R}$ не пусты и граница каждой компоненты связности V множества $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ состоит в точности из одной периодической компоненты $A \subset \mathcal{A}$ и одной периодической компоненты $R \subset \mathcal{R}$. При этом замыкание $cl\ V$ гомеоморфно многообразию $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$.*

Таким образом, несущее многообразие M^3 гомеоморфно фактор-пространству M_τ, полученному из $\mathbb{T}^2 \times [0, 1]$ отождествлением точек $(z, 1)$ и $(\tau(z), 0)$, где $\tau : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ — некоторый гомеоморфизм. Таким образом, M_τ есть локально тривиальное расслоение над окружностью со слоем тор.

Следующая лемма является хорошо известным топологическим фактом.

Лемма 3.3. *Многообразие M_τ гомеоморфно многообразию $M_{\widehat{J}}$, где $J \in GL(2, \mathbb{Z})$ является матрицей, определенной действием автоморфизма $\tau_* : \pi_1(\mathbb{T}^2) \to \pi_1(\mathbb{T}^2)$.*

---

[1]Следует подчеркнуть, что носитель двумерного поверхностного множества диффеоморфизма f может быть негладким в каждой своей точке (соответствующий пример имеется в [46]), однако он не является диким ни в одной точке. Напомним, что C^0-отображение $g : B \to X$ называется *топологическим вложением* топологического многообразия B в многообразие X, если оно гомеоморфно отображает B на подпространство $g(B)$ с индуцированной из X топологией. При этом образ $A = g(B)$ называется *топологически вложенным многообразием*. Заметим, что топологически вложенное многообразие не является топологическим подмногообразием в общем случае. Если A — подмногообразие, то оно называется *ручным или ручно вложенным*, в противном случае A называется *диким или дико вложенным*, и точки, в которых не выполняются условия определения топологического подмногообразия, называются *точками дикости*. В силу результатов [52] топологическое вложение ориентируемой поверхности в 3-многообразие является ручным тогда и только тогда, когда оно является цилиндрическим. Напомним, что двумерная поверхность $S_g \subset W$ называется *цилиндрически вложенной в 3-многообразие* W, если существует топологическое вложение $h : \mathbb{S}_g \times [-1, 1] \to W$ такое, что $h(\mathbb{S}_g \times \{0\}) = S_g$, где $\mathbb{S}_g$ — стандартная ориентируемая двумерная поверхность рода $g \geqslant 0$.

Представим многообразие $M_{\widehat{J}}$ как пространство орбит $M_{\widehat{J}} = (\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R})/\Gamma$, где $\Gamma = \{\gamma^k, k \in \mathbb{Z}\}$ — группа степеней диффеоморфизма $\gamma : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$, заданного формулой $\gamma(z, r) = (\widehat{J}(z), r - 1)$. Обозначим через $p_{\widehat{J}} : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to M_{\widehat{J}}$ естественную проекцию.

Обозначим через $\mathcal{C}$ множество гиперболических матриц из $GL(2, \mathbb{Z})$. Для $C \in \mathcal{C}$ обозначим через $Z(\widehat{C})$ централизатор $\widehat{C}$, т. е. $Z(\widehat{C}) = \{\widehat{J} : J \in GL(2, \mathbb{Z}), \widehat{C}\widehat{J} = \widehat{J}\widehat{C}\}$.

Следующий результат доказан в [24].

Лемма 3.4. *Группа $Z(\widehat{C}), C \in \mathcal{C}$ изоморфна группе $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}_2$.*

Положим $Id = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $-Id = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$ и $\mathcal{J} = \mathcal{C} \cup Id \cup (-Id)$. Так как $\widehat{C}$ и $-\widehat{C}$ принадлежат $Z(\widehat{C})$, то следствием утверждения 3.4 является следующий факт.

Лемма 3.5. *Если $\widehat{J} \in Z(\widehat{C})$ для $C \in \mathcal{C}$, то $J \in \mathcal{J}$. Более того, C и J имеют одинаковую форму в следующем смысле*: $C = (-Id)^{j_C}\xi^{k_C}$ *и* $J = (-Id)^{j_J}\xi^{k_J}$, *где* $\xi \in \mathcal{C}$, $k_C, k_J \in \mathbb{Z}$, $j_C, j_J \in \{0, 1\}$.

Следующая теорема, доказанная в [15], выделяет множество всех многообразий, которые допускают диффеоморфизмы из класса G.

Теорема 3.8. *Пусть многообразие M^3 допускает диффеоморфизм f из класса G. Тогда M^3 диффеоморфно многообразию $M_{\widehat{J}}$, где $J \in \mathcal{J}$.*

Замечание 3.1. В работе [42] аналогичный вывод о структуре многообразия получен в предположении, что многообразие M^3 является неприводимым (т. е. любая цилиндрически вложенная в M^3 двумерная сфера ограничивает в нем трехмерный шар) и допускает диффеоморфизм $f : M^3 \to M^3$ с *инвариантным аносовским тором* (т. е. диффеоморфизмы с гладким f-инвариантным подмногообразием, гомеоморфным тору, на фундаментальной группе которого f индуцирует гиперболическое действие). Заметим, что в теореме 3.8 не требуется неприводимость многообразия M^3.

Пусть $MS(\mathbb{S}^1)$ — класс структурно устойчивых преобразований окружности, который совпадает, согласно результатам Майера [20], с классом диффеоморфизмов Морса—Смейла на $\mathbb{S}^1$. Разобьем $MS(\mathbb{S}^1)$ на два подкласса $MS_+(\mathbb{S}^1)$ и $MS_-(\mathbb{S}^1)$, состоящих из сохраняющих ориентацию и меняющих ориентацию диффеоморфизмов соответственно. Сформулируем результаты Майера по топологической классификации структурно устойчивых преобразований окружности.

Теорема 3.9.

1. *Для каждого диффеоморфизма $\varphi \in MS_+(\mathbb{S}^1)$ неблуждающее множество $NW(\varphi)$ состоит из $2n, n \in \mathbb{N}$ периодических орбит, каждая из которых имеет период k.*
2. *Для каждого диффеоморфизма $\varphi \in MS_-(\mathbb{S}^1)$ множество $NW(\varphi)$ состоит из $2q, q \in \mathbb{N}$ периодических точек, две из которых являются неподвижными, а другие имеют период 2.*

Пусть $\varphi \in MS_+(\mathbb{S}^1)$. Перенумеруем периодические точки из $NW(\varphi)$: $p_0, p_1, \ldots, p_{2nk-1}, p_{2nk} = p_0$, начиная с произвольной периодической точки p_0, по часовой стрелке, тогда существует целое число l такое, что $\varphi(p_0) = p_{2nl}$, причем $l = 0$ для $k = 1$, $l \in \{1, \ldots, k-1\}$ для $k > 1$ и числа (k, l) являются взаимно простыми. Непосредственно проверяется, что l не зависит от выбора точки p_0. Отметим, что А. Г. Майер вместо числа l использовал число r_1, которое называл *порядковым числом*, таким что $l \cdot r_1 \equiv 1 (mod\ k)$.

Теорема 3.10.

1. *Два диффеоморфизма $\varphi; \varphi' \in MS_+(\mathbb{S}^1)$ с параметрами $n, k, l; n', k', l'$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $n = n', k = k'$ и верно одно из следующих утверждений*:
   - $l = l'$ (*при этом, если $l \neq 0$, то сопрягающий гомеоморфизм сохраняет ориентацию*),
   - $l = k' - l'$ (*при этом сопрягающий гомеоморфизм меняет ориентацию*).
2. *Два диффеоморфизма $\varphi; \varphi' \in MS_-(\mathbb{S}^1)$ с параметрами $q; q'$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $q = q'$.*

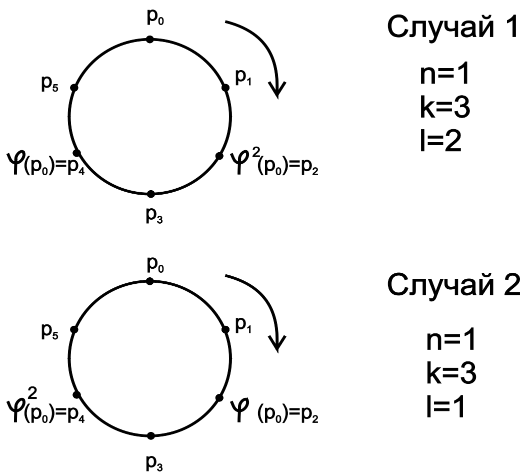

Рис. 7. Топологически сопряженные диффеоморфизмы окружности с различными порядковыми числами

На рис. 3.2 изображены фазовые портреты топологически сопряженных диффеоморфизмов окружности с различными порядковыми числами.

Для $n, k \in \mathbb{N}$ и целого l, такого что для $k = 1$, $l = 0$ и для $k > 1$, $l \in \{1, \dots, k-1\}$, построим стандартного представителя φ_+ in $MS_+(\mathbb{S}^1)$ с параметрами n, k, l. Для $q \in \mathbb{N}$ построим стандартного представителя φ_- в $MS_-(\mathbb{S}^1)$ с параметром q.

Представим $\mathbb{S}^1$ как $\mathbb{S}^1 = \{e^{i2\pi r} = (cos 2\pi r, sin 2\pi r) \in \mathbb{R}^2 : r \in \mathbb{R}\}$. Обозначим через $\pi : \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ проекцию, заданную формулой $\pi(r) = e^{i2\pi r}$. Введем следующие отображения:

$\psi_m : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — сдвиг на единицу времени потока $\dot{r} = \sin(2\pi m r)$ для $m \in \mathbb{N}$;

$\chi_{k,l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — диффеоморфизм, заданный формулой $\chi_{k,l}(r) = r - \dfrac{l}{k}$;

$\chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ — диффеоморфизм, заданный формулой $\chi(r) = -r$;

$\tilde{\varphi}_+ = \psi_{n \cdot k} \chi_{k,l} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ и $\tilde{\varphi}_- = \psi_q \chi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Можно непосредственно проверить, что $\tilde{\varphi}_+(r + \nu) = \tilde{\varphi}_+(r) + \nu$ и $\tilde{\varphi}_-(r + \nu) = \tilde{\varphi}_-(r) - \nu$ для $\nu \in \mathbb{Z}$. Следовательно, для $\sigma \in \{+, -\}$ следующие диффеоморфизмы корректно определены: $\varphi_\sigma = \pi \tilde{\varphi}_\sigma \pi^{-1} : \mathbb{S}^1 \to \mathbb{S}^1$, где $\pi^{-1}(s)$ — полный прообраз точки $s \in \mathbb{S}^1$.

Используя φ_σ и гиперболическую матрицу C, построим модельный диффеоморфизм ϕ_σ на $M_{\widehat{J}}$ для $J \in \mathcal{J}$ из класса G.

Обозначим через $\tilde{\phi}_\sigma : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ произведение диффеоморфизма $\tilde{\varphi}_\sigma$ и автоморфизма $\widehat{C}$, $C \in \mathcal{C}$, т. е. $\tilde{\phi}_\sigma(z, r) = (\widehat{C}(z), \tilde{\varphi}_\sigma(r))$. Так как $M_{\widehat{J}} = (\mathbb{T}^2 \times \mathbb{R})/\Gamma$ и Γ — циклическая группа с образующей $\gamma(z, r) = (\widehat{J}(z), r - 1)$, то либо $\tilde{\phi}_\sigma \gamma = \gamma \tilde{\phi}_\sigma$, либо $\tilde{\phi}_\sigma \gamma^{-1} = \gamma \tilde{\phi}_\sigma$ является необходимым и достаточным условием, позволяющим задать диффеоморфизм $\phi_\sigma : M_{\widehat{J}} \to M_{\widehat{J}}$ как $\phi_\sigma = p_{_J} \tilde{\phi}_\sigma p_{_J}^{-1}$ (см., например, [17]). Из этого следует, что $CJ = JC$ для $\sigma = +$ и $CJ^{-1} = JC$ для $\sigma = -$. Более того, для $\sigma = -$ имеем $C^2 J = J C^2$ и $\widehat{J} \in Z(\widehat{C}^2)$, следовательно, в силу леммы 3.5 $J \in \{Id, -Id\}$.

Пусть $J_+ \in \mathcal{J}$ и $C_+ \in \mathcal{C}$, такие что $C_+ J_+ = J_+ C_+$. Пусть $J_- \in \{Id, -Id\}$ и $C_- \in \mathcal{C}$. Положим $\tilde{\phi}_\sigma(z, r) = (\widehat{C}_\sigma(z), \tilde{\varphi}_\sigma(r))$. Легко проверяется, что $\tilde{\phi}_\sigma \gamma_\sigma = \gamma_\sigma \tilde{\phi}_\sigma$, где $\gamma_\sigma(z, r) = (J_\sigma(z), r - 1)$ — образующая группы $\Gamma_\sigma = \{\gamma_\sigma^i, i \in \mathbb{Z}\}$. Тогда корректно следующее определение.

Будем говорить, что диффеоморфизм $\phi_\sigma : M_{\widehat{J}_\sigma} \to M_{\widehat{J}_\sigma}, \sigma \in \{+, -\}$ является *локально прямым произведением* $\widehat{C}_\sigma$ и φ_σ, если $\phi_\sigma = p_{_{J_\sigma}} \tilde{\phi}_\sigma p_{_{J_\sigma}}^{-1}$, и писать $\phi_\sigma = \widehat{C}_\sigma \otimes \varphi_\sigma$.

Обозначим через $\Phi_+(\Phi_-)$ множество всех локально прямых произведений ϕ_+ (ϕ_-). Тогда каждый диффеоморфизм $\phi_+ \in \Phi_+$ единственным образом определяется параметрами $\{J_+, C_+, n, k, l\}$ и каждый диффеоморфизм $\phi_- \in \Phi_-$ единственным образом определяется параметрами $\{J_-, C_-, q\}$. Положим $\Phi = \Phi_+ \cup \Phi_-$. Таким образом, мы дали описание класса $\Phi \subset G$ модельных диффеоморфизмов.

Лемма 3.6. *Если два диффеоморфизма $\phi_\sigma = \widehat{C}_\sigma \otimes \varphi_\sigma, \phi'_{\sigma'} = \widehat{C}'_{\sigma'} \otimes \varphi'_{\sigma'} \in \Phi$ топологически сопряжены, то*:

1. *$\varphi_\sigma, \varphi'_{\sigma'}$ топологически сопряжены*;
2. *существует матрица $H \in GL(2, \mathbb{Z})$, такая что $C_\sigma H = HC'_{\sigma'}$.*

В силу приведенной выше конструкции справедливо и обратное утверждение теоремы 3.8, и мы получаем следующий результат.

Теорема 3.11. *Многообразие M^3 допускает диффеоморфизм f из класса G тогда и только тогда, когда M^3 диффеоморфно многообразию $M_{\widehat{J}}$, где $J \in \mathcal{J}$.*

Следующий результат, доказанный в [15], является алгебраическим критерием топологической сопряженности диффеоморфизмов из Φ.

Теорема 3.12.

1. *Два диффеоморфизма $\phi_+; \phi'_+ \in \Phi_+$ с параметрами $\{J_+, C_+, n, k, l\}; \{J'_+, C'_+, n', k', l'\}$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $n = n', k = k'$, и существует матрица $H \in GL(2, \mathbb{Z})$, такая что $C_+ H = HC'_+$ и выполняется одно из следующих утверждений*:
   - *$J_+ H = HJ'_+$ и $l = l'$,*
   - *$J_+^{-1} H = HJ'_+$ и либо $l = l' = 0$, либо $l = k' - l'$.*
2. *Два диффеоморфизма $\phi_-; \phi'_- \in \Phi_-$ с параметрами $\{J_-, C_-, q\}; \{J'_-, C'_-, q'\}$ топологически сопряжены тогда и только тогда, когда $J_- = J'_-$, $q = q'$ и существует матрица $H \in GL(2, \mathbb{Z})$, такая что $C_- H = HC'_-$.*
3. *Не существует топологически сопряженных диффеоморфизмов $\phi_+ \in \Phi_+$ и $\phi_- \in \Phi_-$.*

Напомним, что диффеоморфизм g называется *частично гиперболическим*, если существуют такое $N \in \mathbb{N}$ и Dg-инвариантное непрерывное разложение $TM^3 = E^s \oplus E^c \oplus E^u$ на одномерные подрасслоения, что $||Dg^N|_{E^s_x}|| < ||Dg^N|_{E^c_x}|| < ||Dg^N|_{E^u_x}||$ и $||Dg^N|_{E^s_x}|| < 1 < ||Dg^N|_{E^u_x}||$ для каждого $x \in M^3$. При этом g называется *динамически когерентным*, если существует g-инвариантное слоение, касательное к $E^{cs} = E^s \oplus E^c$, $E^{cu} = E^c \oplus E^u$ (и, следовательно, также к E^c).

Заметим, что если в приведенной выше конструкции $\phi_\sigma \in \Phi_\sigma$ мы заменим $\dot{r} = \sin(2\pi m r)$ на векторное поле $\dot{r} = \ln(\mu) \cdot \sin(2\pi m r)$, где $\mu < |\lambda|$ и $|\lambda|, \dfrac{1}{|\lambda|}$ модули собственных значений C_σ, то построенный диффеоморфизм будет динамически когерентным. Таким образом, мы получаем следующий результат.

Теорема 3.13. *Каждый диффеоморфизм ϕ из класса Φ топологически сопряжен с динамически когерентным диффеоморфизмом.*

Напомним, что два диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$, $f' : M'^3 \to M'^3$ называются объемлюще *Ω-сопряженными*, если существует гомеоморфизм $h : M^3 \to M'^3$ такой, что $h(NW(f)) = NW(f')$ и $hf|_{NW(f)} = f'h|_{NW(f)}$.

Следующая теорема доказана в [15].

Теорема 3.14. *Любой диффеоморфизм из класса G является объемлюще Ω-сопряженным некоторому диффеоморфизму из класса Φ.*

Доказательство теоремы 3.14 базируется на следующем результате Дж. Френкса [36] (см. также [17]).

Лемма 3.7. *Пусть $h : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$ — гомеоморфизм, который индуцирует гомоморфизм $h_* : \pi_1(\mathbb{T}^2) \to \pi_1(\mathbb{T}^2)$ фундаментальных групп, заданный гиперболической матрицей H, и h топологически сопряжен с диффеоморфизмом Аносова. Тогда существует единственный изотопный тождественному гомеоморфизм $g : \mathbb{T}^2 \to \mathbb{T}^2$, такой что $gh = \widehat{H}g$.*

Следующее определение является топологическим аналогом определения динамически когерентного диффеоморфизма.

Будем говорить, что $f \in G$ является *топологически когерентным* (см. рис. 8), если выполняются следующие условия:

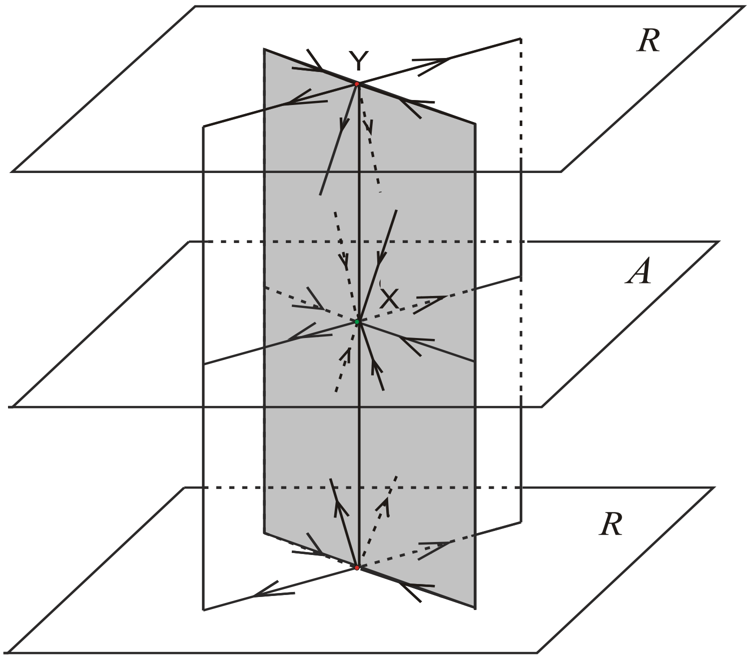

Рис. 8. Топологически когерентный диффеоморфизм $f \in G$

1. если пересечение $W^s(x) \cap W^u(y)$ не пусто для некоторых точек $x \in \mathcal{A}$, $y \in \mathcal{R}$, то каждая компонента связности пересечения $W^s(x) \cap W^u(y)$ является открытой дугой, имеющей в точности две граничные точки, одна из которых принадлежит $\mathcal{A}$, другая $\mathcal{R}$;
2. на M^3 существует непрерывное f-инвариантное одномерное слоение $\mathcal{I}_f$, каждый слой которого есть объединение замыканий всех дуг, определенных в первом условии.

Следующие результаты доказаны в работе [39].

Теорема 3.15. *Если диффеоморфизм из класса G является топологически когерентным, то он топологически сопряжен некоторому диффеоморфизму из класса Φ.*

Доказательство теоремы 3.15 базируется на теореме 3.14 и следующей лемме.

Лемма 3.8. *Пусть $f \in G$ — топологически когерентный диффеоморфизм, V — компонента связности множества $M^3 \setminus (\mathcal{A} \cup \mathcal{R})$ такая, что $\partial V = A \cup R$, где $A \in \mathcal{A}$, $R \in \mathcal{R}$. Пусть k_0 — натуральное число, такое что $f^{k_0}(V) = V$ и $f_0 = f^{k_0}$. Тогда на множестве $cl\ V$ существует двумерное f_0-инвариантное слоение $\mathcal{P}_V$, каждый слой которого является тором, пересекающим каждый слой слоения $\mathcal{I}_f$ в одной точке.*

Теорема 3.16. *Пусть $f \in G$. Если f — структурно устойчивый диффеоморфизм, то f является топологически когерентным.*

Как следствие из теорем 3.15 и 3.16 получаем результат.

Теорема 3.17. *Каждый структурно устойчивый диффеоморфизм из класса G топологически сопряжен некоторому диффеоморфизму из класса Φ.*

Заметим, что в классе G существуют диффеоморфизмы, которые не являются топологически сопряженными с диффеоморфизмами класса Φ. Доказательство основной классификационной теоремы 3.17 сводится к доказательству существования одномерного слоения $\mathcal{I}_f$ у структурно устойчивого диффеоморфизма f из класса G. Поскольку это самое нетривиальное место в теореме, приведем идею его доказательства.

По теореме 3.14, f объемлюще Ω-сопряжен некоторому диффеоморфизму $\phi : M_{\widehat{\mathcal{J}}} \to M_{\widehat{\mathcal{J}}}$ из класса Φ посредством гомеоморфизма $h : M^3 \to M_{\widehat{\mathcal{J}}}, J \in \mathcal{J}$. Для наших целей достаточно предположить, что ϕ принадлежит Φ_+ и определяется параметрами $C \in \mathcal{C}$, $n \in \mathbb{N}, k = 1, l = 0$ (в

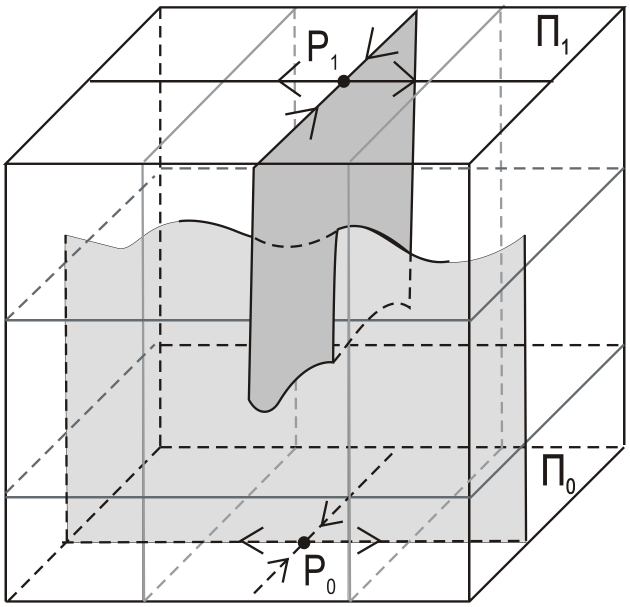

Рис. 9. Области B^u и B^s

противном случае можно выбрать подходящую степень f). Положим $\psi = hfh^{-1} : M_{\widehat{J}} \to M_{\widehat{J}}$ и будем применять к гомеоморфизму ψ понятия и обозначения устойчивых и неустойчивых многообразий неблуждающих точек, понимая их как прообразы относительно h соответствующих объектов диффеоморфизма f. По построению ψ и ϕ совпадают на неблуждающем множестве, и по теореме 3.14 существует поднятие $\tilde{\psi} : \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R} \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ гомеоморфизма ψ, совпадающее с $\tilde{\phi}$ на множестве $\mathbb{T}^2 \times \left(\bigcup\limits_{i\in\mathbb{Z}} \dfrac{i}{2n}\right)$.

Обозначим через $p : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{T}^2$ универсальное накрытие такое, что $p(x, y) = (x(mod\ 1), y(mod\ 1))$ через $\eta : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{T}^2 \times \mathbb{R}$ накрытие, заданное формулой $\eta(x, y, z) = (p(x, y), z)$. Положим $\eta_{\widehat{J}} = p_{\widehat{J}}\eta : \mathbb{R}^3 \to M_{\widehat{J}}$. Обозначим через $\check{\psi} : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ поднятие $\tilde{\psi}$ относительно η. Для устойчивого (неустойчивого) многообразия $W^s(x)$ $(W^u(x))$ неблуждающей точки $x \in NW(\psi)$ обозначим через $w^s(\check{x})$ $(w^u(\check{x}))$ компоненту связности множества $\eta_{\widehat{J}}^{-1}(W^s(x))$ $\eta_{\widehat{J}}^{-1}(W^u(x))$, проходящую через точку $\check{x} \in \eta_{\widehat{J}}^{-1}(x)$. Поскольку любое поднятие $\check{C} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ диффеоморфизма $\widehat{C}$ имеет форму $\check{C}(x, y) = (ax + by + \alpha, cx + dy + \beta)$ для некоторых $\alpha, \beta \in \mathbb{Z}$, то гомеоморфизм $\check{\psi}$ имеет в точности одну неподвижную седловую точку P_i на плоскости $\Pi_i = \mathbb{R}^2 \times \left\{\dfrac{i}{2n}\right\}$ для каждого $i \in \mathbb{Z}$. Заметим, что гомеоморфизм $\check{\psi}|_{\Pi_i}$ обладает двумя трансверсальными одномерными $\check{\psi}$-инвариантными слоениями F_i^s, F_i^u на Π_i, состоящими из параллельных прямых с различными иррациональными наклонами μ_s и μ_u.

Положим $N_\gamma^u(P_0) = \bigcup\limits_{\check{x}\in L_0^u(P_0)} w_\gamma^u(\check{x})$ $(N_\gamma^s(P_1) = \bigcup\limits_{\check{x}\in L_1^s(P_1)} w_\gamma^s(\check{x}))$ для некоторого фиксированного $\gamma > 0$. Используя свойство непрерывной зависимости инвариантных многообразий, можно доказать, что существуют числа $b_1^u, b_2^u, b_1^s, b_2^s$ такие, что замкнутая область B^u (B^s), ограниченная плоскостями $\Pi_{-1}, \Pi_1, Q_1^u = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \mu_u x + b_1^u\}$, $Q_2^u = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \mu_u x + b_2^u\}$ $(\Pi_0, \Pi_2, Q_1^s = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \mu_s x + b_1^s\}$, $Q_2^s = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : y = \mu_s x + b_2^s\})$ содержит $N_\gamma^u(P_0)$ $(N_\gamma^s(P_1))$ в своей внутренности. Тогда можно доказать, что $w^u(P_0) \cap w^s(P_1) \neq \varnothing$ (см. рис. 3.2) и, более того, $(cl\ w^u(P_0)) \cap \Pi_1 = w^u(P_1)$, а $(cl\ w^s(P_1)) \cap \Pi_0 = w^s(P_0)$. В силу всюду плотности периодических точек в базисном множестве получаем, что для любой точки $x \in \Pi_0$ существует точка $y \in \Pi_1$ такая, что $(cl\ w^u(x)) \cap \Pi_1 = w^u(y)$ и обратно, для любой точки $y \in \Pi_1$ существует точка $x \in \Pi_0$ такая, что $(cl\ w^s(y)) \cap \Pi_0 = w^s(x)$.

На множестве $\mathbb{R}^2 \times [0, 1/2n)$ существует $\check{\psi}$-инвариантное двумерное слоение R_0 (R_1), каждый слой которого G_0 (G_1) гомеоморфен полуплоскости и совпадает с $w^u(x) \cap (\mathbb{R}^2 \times [0, 1/2n))$

$(w^s(x)\cap(\mathbb{R}^2\times[0,1/2n)))$ для некоторой точки $x\in\Pi_0$ $(x\in\Pi_1)$. Поскольку $cl\ (G_1)\cap\Pi_0=\{(x,y,z)\in\Pi_0 : y=\mu_s x+b_{G_1}\}$ для некоторого $b_{G_1}\in\mathbb{R}$, то пересечение $Y=G_0\cap G_1$ не пусто для любых слоев $G_0\in R_0, G_1\in R_1$ и $cl\ (Y)\setminus Y$ состоит из двух точек $P^0_{G_0,G_1}\in\Pi_0, P^1_{G_0,G_1}\in\Pi_1$. В силу структурной устойчивости диффеоморфизма f компоненты связности множества Y не могут ограничивать дисков на G_0, так как в противном случае такой диск расслоен следами пересечений со слоями слоения R_1 и это слоение обязано иметь особенности, что соответствует нарушению сильного условия трансверсальности. Таким образом, Y состоит из единственной кривой z такой, что $cl\ z\cap(\Pi_0\cup\Pi_1)=P^0_{G_0,G_1}\cup P^1_{G_0,G_1}$, что и завершает доказательство.

4. Энергетическая функция для грубых диффеоморфизмов с двумерным растягивающимся аттрактором

Наиболее законченные результаты в направлении построения энергетических функций получены для *систем Морса—Смейла* — структурно устойчивых систем, чье цепно рекуррентное множество состоит из конечного числа гиперболических неподвижных точек и периодических орбит. С. Смейл [59] в 1961 году доказал существование энергетической функции, являющейся функцией Морса, у *градиентно-подобного потока* (потока Морса—Смейла без замкнутых траекторий). К. Мейер [51] в 1968 году обобщил этот результат и построил энергетическую функцию, являющуюся функцией Морса—Ботта для произвольного потока Морса—Смейла. Напомним, что точка $p\in M^n$ называется *критической точкой* C^r-гладкой $(r\geqslant 2)$ функции $\psi : M^n\to\mathbb{R}$, если в некоторых локальных координатах $x_1,\dots,x_n$ ($x_j(p)=0$ для всех $j=\overline{1,n}$) $\dfrac{\partial\psi}{\partial x_1}(p)=\dots=\dfrac{\partial\psi}{\partial x_n}(p)=0$ $(\operatorname{grad}\psi(p)=0)$. Критическая точка p называется *невырожденной*, если матрица вторых производных $\dfrac{\partial^2\psi}{\partial x_i\partial x_j}(p)$ (матрица Гесса) не вырождена, в противном случае точка p называется *вырожденной*. Функция $\psi : M^n\to\mathbb{R}$ называется *функцией Морса*, если все ее критические точки не вырождены, и называется *функцией Морса—Ботта*, если гессиан в каждой критической точке не вырожден в направлении нормальном к критическому множеству уровня.

В 1977 году Д. Пикстон [54] установил существование энергетической функции, являющейся функцией Морса, для диффеоморфизмов Морса—Смейла на поверхностях. Кроме того, он построил диффеоморфизм на 3-сфере, не обладающий энергетической функцией, и показал, что этот эффект связан с диким вложением сепаратрис седловых точек. В работах [37, 38] исследованы условия существования энергетической функции для каскадов Морса—Смейла на 3-многообразиях. Из этих исследований стало понятно, что многие каскады Морса—Смейла на 3-многообразиях не обладают энергетической функцией.

В следующем разделе мы приводим результаты работы [37] (см. также книгу [17]), касающиеся критерия существования энергетической функции в бассейне одномерного аттрактора градиентно-подобного 3-диффеоморфизма.

4.1. Существование энергетической функции в бассейне одномерного аттрактора градиентно-подобного 3-диффеоморфизма. Пусть g — диффеоморфизм Морса—Смейла на многообразии N и функция Морса $\varphi : N\to\mathbb{R}$ является функцией Ляпунова для g. В силу [54] (см. также книгу [17]) любая периодическая точка β является максимумом ограничения φ на неустойчивое многообразие W^u_β и минимумом ограничения φ на устойчивое многообразие W^s_β. Если эти экстремумы являются невырожденными, то инвариантные многообразия точки β трансверсальны всем регулярным множествам уровня φ в некоторой окрестности U_β точки β. Функция Ляпунова $\varphi : N\to\mathbb{R}$ для диффеоморфизма Морса—Смейла $f : N\to N$ называется *функцией Морса—Ляпунова*, если любая периодическая точка β является невырожденным максимумом (минимумом) ограничения φ на неустойчивое (устойчивое) многообразие $W^u(\beta)$ $(W^s(\beta))$.

Среди функций Ляпунова для диффеоморфизма Морса—Смейла g функции Морса—Ляпунова образуют открытое всюду плотное в C^∞-топологии множество.

Если β — критическая точка функции Морса $\varphi : N\to\mathbb{R}$, то, согласно лемме Морса (см., например, [21]), в некоторой окрестности $V(\beta)$ точки β существует локальная система координат $x_1,\dots,x_n$, называемая *координатами Морса*, такая, что $x_j(p)=0$ для каждого $j=\overline{1,n}$ и φ имеет вид $\varphi(x)=\varphi(\beta)-x_1^2-\dots-x_b^2+x_{b+1}^2+\dots+x_n^2$, где b — индекс[1] точки β. Если φ — функция Ляпунова для диффеоморфизма Морса—Смейла $f:N\to N$, то в силу [54] для любой периодической точки $\beta\in Per(g)$ выполняется равенство $b=dim\ W^u(\beta)$.

Если φ — функция Ляпунова для диффеоморфизма Морса—Смейла g, то любая периодическая точка диффеоморфизма g является критической точкой функции φ. Обратное, вообще говоря, неверно: функция Ляпунова может иметь критические точки, которые не являются периодическими точками для g. Так, в работе В. З. Гринеса, Ф. Лауденбаха, О. В. Починки [14] доказано, что функция Ляпунова в примере Пикстона (см. рис. 10) имеет не менее шести критических точек.

Напомним, что диффеоморфизм Морса—Смейла $g:N\to N$ называется *градиентно-подобным*, если для любой пары периодических точек β, γ ($\beta\neq\gamma$) из условия $W^u(\beta)\cap W^s(\gamma)\neq\varnothing$ следует, что $\dim W^s(\beta)<\dim W^s(\gamma)$. Следующее определение выделяет для градиентно-подобных диффеоморфизмов класс функций Морса—Ляпунова с дополнительными свойствами, аналогичными свойствам функций, введенных С. Смейлом [59] для градиентно-подобных векторных полей.

Функция Морса—Ляпунова φ для градиентно-подобного диффеоморфизма g называется *самоиндексирующейся энергетической функцией*, если выполняются следующие условия:

1. множество критических точек функции φ совпадает с множеством $Per(g)$ периодических точек диффеоморфизма g;
2. $\varphi(\beta)=dim\ W^u(\beta)$ для любой точки $\beta\in Per(g)$.

Заметим, что понятие функции Ляпунова корректно определено на любом g-инвариантном подмножестве многообразия N.

Следующие рассмотрения относятся только к трехмерным многообразиям.

Пусть $g:N\to N$ — градиентно-подобный диффеоморфизм. Пусть $\Sigma^+(\Omega^+)$ — подмножество множества всех седловых точек с одномерными неустойчивыми инвариантными многообразиями (стоковых точек) и множество $A^+=W^u(\Sigma^+)\cup\Omega^+$ является замкнутым и g-инвариантным. Тогда A^+ является аттрактором диффеоморфизма g. Множество $W^s(A^+)=\bigcup\limits_{\beta^+\in(\Sigma^+\cup\Omega^+)}W^s(\beta^+)$ является g-инвариантным и называется *бассейном одномерного аттрактора* A^+. Обозначим через c^+ число компонент связности аттрактора A^+, через r^+ — число седловых точек и через s^+ — число стоковых точек в A^+. Положим $\delta(A^+)=c^++r^+-s^+$. Аттрактор A^+ называется *тесно вложенным*, если он обладает окрестностью P^+ со следующими свойствами:

1. $g(P^+)\subset int\ P^+$;
2. P^+ — является дизъюнктным объединением c^+ ручечных тел[2], сумма родов которых равна $\delta(A^+)$;
3. для любой седловой точки $\sigma^+\in\Sigma^+$ пересечение $W^s_{\sigma^+}\cap P^+$ состоит из одного двумерного диска.

Теорема 4.1. *Самоиндексирующаяся энергетическая функция φ_{A^+} диффеоморфизма g существует в бассейне $W^s(A^+)$ аттрактора A^+ тогда и только тогда, когда он является тесно вложенным.*

Тесно вложенный репеллер A^- градиентно-подобного диффеоморфизма $g:N\to N$ и его бассейн определяются как тесно вложенный аттрактор A^+ и его бассейн для диффеоморфизма g^{-1}. При этом функция $\varphi_{A^-}(x)=3-\varphi_{A^+}(x)$ будет самоиндексирующиейся функцией диффеоморфизма g в бассейне репеллера A^-.

В вышеупомянутом примере Пикстона неблуждающее множество $g:\mathbb{S}^3\to\mathbb{S}^3$ состоит в точности из четырех неподвижных точек: одного источника α, двух стоков ω_1, ω_2, одного седла σ. Одномерный аттрактор A^+ этого диффеоморфизма совпадает с замыканием устойчивого многообразия седла σ и $\delta(A^+)=0$. При этом любой трехмерный шар, содержащий аттрактор A^+ в своей

[1]*Индексом критической точки* β называется число отрицательных собственных значений матрицы $\dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x_i\partial x_j}(\beta)$.

[2]*Ручечным телом рода* $\delta\geqslant 0$ называется компактное трехмерное многообразие с краем, полученное из 3-шара попарным отождествлением 2δ двумерных попарно не пересекающихся дисков на границе шара посредством меняющего ориентацию отображения.

внутренности, пересекает $W^s(\sigma)$ не менее чем по трем компонентам связности (см. рис. 10). Таким образом, аттрактор A^+ не является тесно вложенным и, в силу предложения 4.1, в бассейне одномерного аттрактора Пикстона не существует энергетической функции.

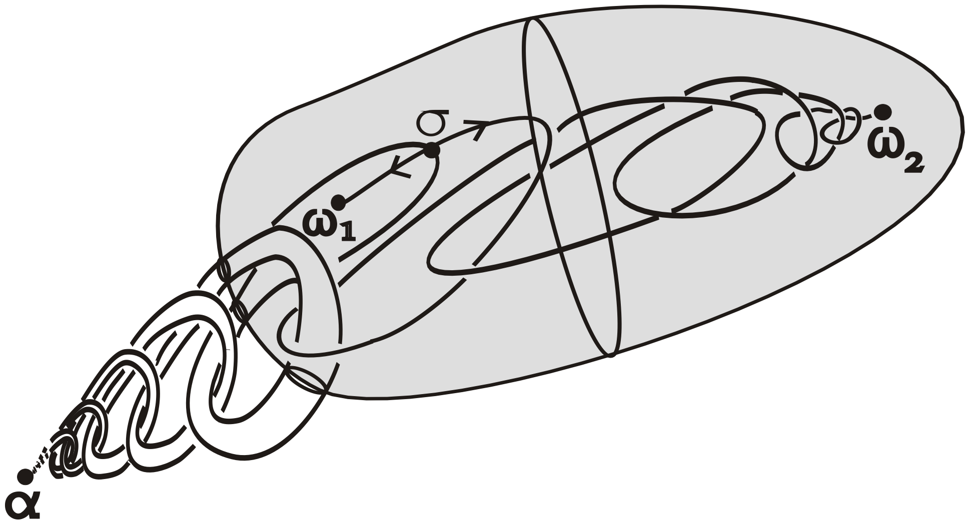

Рис. 10. Пример Пикстона

4.2. Схема построения. В этом разделе мы приведем идею доказательства следующей теоремы (подробное доказательство можно найти в статье [16]).

Теорема 4.2. *Для любого структурно устойчивого диффеоморфизма $f : M^3 \to M^3$, неблуждающее множество которого содержит двумерный растягивающийся аттрактор Λ, существует энергетическая функция, являющаяся функцией Морса вне Λ.*

Доказательство теоремы 4.2 базируется на теоремах 3.2 и 4.1, приведем его идеи.

Пусть (p, q) — пара ассоциированных граничных точек периода m_{pq} базисного множества Ω. Положим $A^-_{pq} = \bigcup\limits_{j=0}^{m_{pq}-1} f^j(\bigcup\limits_{i=1}^{k_{pq}-1} W^s(P_i) \cup \bigcup\limits_{i=1}^{k_{pq}-1} W^s(\alpha_i))$. По построению множество A^-_{pq} является репеллером диффеоморфизма f и $\delta(A^-_{pq}) = 0$. Покажем, что он является тесно вложенным. Для этого достаточно показать, что существует 3-шар P^-_{pq} такой, что $f^{-m_{pq}}(P^-_{pq}) \subset int\ P^-_{pq}$ и пересечение $P^-_{pq} \cap W^u(P_j)$ состоит в точности из одного двумерного диска для каждого седла $P_j, j \in \{1, \ldots, k_{pq} - 1\}$.

В силу структурной устойчивости диффеоморфизма f любая дуга $(x, \varphi_{pq}(x))^s, x \in D_p \setminus p$ пересекает $W^u(P_j)$ ровно в одной точке для всех $j = 1, \ldots, k_{pq} - 1$, так как, предположив противное, мы найдем точку, в которой произойдет касание устойчивого многообразия этой точки и неустойчивого многообразия $W^u(P_j)$, что противоречит сильному условию трансверсальности. Таким образом, 3-шар Q_{pq} пересекает двумерное неустойчивое многообразие седла $P_j, j \in \{1, \ldots, k_{pq} - 1\}$ в точности по одному двумерному диску. Искомый 3-шар P^-_{pq} получается из Q_{pq} вдавливанием внутрь дисков D_p, D_q и сглаживанием углов (см. рис. 11).

В силу леммы 4.1 в бассейне $W^u(A^-_{pq})$ репеллера A^-_{pq} существует самоиндексирующаяся энергетическая функция $\varphi_{A^-_{pq}}$ диффеоморфизма f. Положим $b_{pq} = inf\{\varphi_{A^-_{pq}}(z), z \in W^u_{A^-_{pq}}\}$. Определим функцию $g_{pq} : (b_{pq}, 3] \to (0, 3]$ следующим образом: если $b_{pq} > -\infty$, то положим $g_{pq}(x) = 2^{\frac{(2-b_{pq})(3-x)}{x-b_{pq}}} 3^{\frac{(3-b_{pq})(x-2)}{x-b_{pq}}}$ и, если $b_{pq} = -\infty$, то положим $g_{pq}(x) = 2^{3-x}3^{x-2}$. По построению функция g_{pq} является бесконечно гладкой и имеет положительную производную, при этом $g_{pq}(2) = 2$, $g_{pq}(3) = 3$ и $\lim\limits_{x \to b_{pq}} g_{pq}(x) = 0$. Рассмотрим суперпозицию $\varphi_{pq} = g_{pq}\varphi_{A^-_{pq}}$. Поскольку $\operatorname{grad} \varphi_{pq} = g'_{pq} \cdot \operatorname{grad} \varphi_{A^-_{pq}}$ и гессианы $\Delta\ \varphi_{pq}$ и $\Delta\ \varphi_{A^-_p q}$ связаны соотношением

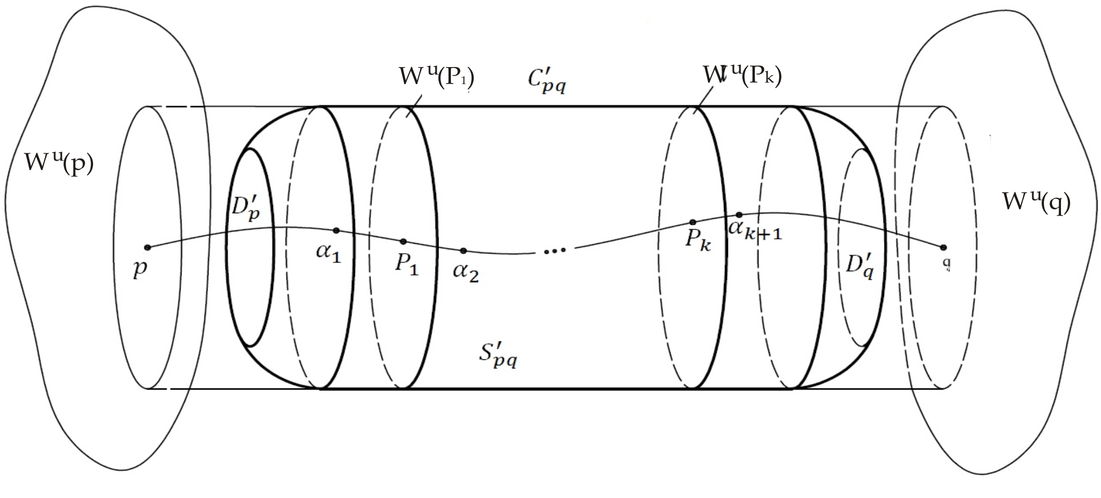

Рис. 11. Окрестность P^-_{pq}

$\Delta\ \varphi_{pq} = g''_{pq} \cdot (\operatorname{grad} \varphi_{A^-_{pq}}) \cdot (\operatorname{grad} \varphi_{A^-_{pq}})^{\mathrm{T}} + g'_{pq} \cdot \Delta\ \varphi_{A^-_{pq}}$, то функция φ_{pq} является энергетической функцией Морса для f в бассейне $W^u_{A^-_{pq}}$.

Положим $A^- = \bigcup\limits_{(p,q)\subset\Gamma_\Lambda} A^-_{pq}$, $W^u(A^-) = \bigcup\limits_{(p,q)\subset\Gamma_\Lambda} W^u(A^-_{pq})$ и обозначим через φ_{A^-} функцию, составленную из функций $\varphi_{pq}, (p,q) \subset \Gamma_\Lambda$. Определим на многообразии M^3 функцию φ формулой

$$\varphi(z) = \begin{cases} \varphi_{A^-}(z), \text{ если } z \in W^u(A^-); \\ 0, \text{ если } z \in \Lambda. \end{cases}$$

По построению функция φ является функцией Ляпунова для диффеоморфизма f, более того, она является функцией Морса на $M^3 \setminus \Lambda$. Искомая энергетическая функция представляет из себя суперпозицию $\psi = g\varphi$, где $g : [0,3] \to [0,3]$ — C^2-гладкая функция, построенная следующим образом.

Пусть d — риманова метрика на многообразии M^3, а расстояние между множествами определяется как инфимум расстояний между элементами этих множеств, т. е. $\forall X, Y \subset M :\ d(X,Y) = \inf\{d(x,y)\ :\ x \in X, y \in Y\}$. Для $c \in (0,3]$ положим $\alpha(c) = \min\{1, d^2(\varphi^{-1}(c), \Lambda)\}$ и $\beta(c) = \max\{1, \max\limits_{x\in\varphi^{-1}([c,3])} |\operatorname{grad}\varphi(x)|\}$. По построению функции $\alpha(c)$ и $\beta(c)$ являются непрерывными, причем $\alpha(c)$ — неубывающая на $(0,3]$ и существует значение $c^* \in (0,3]$ такое, что $\alpha(c)$ — монотонно возрастает на $(0,c^*]$, а $\beta(c)$ — невозрастающая. Тогда функция $\dfrac{\alpha(c)}{\beta(c)}$ является неубывающей на полуинтервале $(0,3]$ и $\lim\limits_{c\to 0} \dfrac{\alpha(c)}{\beta(c)} = 0$.

Используя разбиение единицы, построим C^2-гладкую функцию $g : [0,3] \to [0,3]$ такую, что

1. $g'(c) > 0$ для любого $c \in (0,3]$;
2. $g(c) \leqslant \dfrac{\alpha(c)}{\beta(c)}$ для любого $c \in (0,1/2]$;
3. $g'(c) \leqslant \dfrac{\alpha(c)}{\beta(c)}$ для любого $c \in (0,1/2]$;
4. $g(2) = 2$ и $g(3) = 3$.

Поскольку $\operatorname{grad}\psi = g' \cdot \operatorname{grad}\varphi$ и гессианы $\Delta\ \psi$ и $\Delta\ \varphi$ связаны соотношением $\Delta\ \psi = g'' \cdot (\operatorname{grad}\varphi) \cdot (\operatorname{grad}\varphi)^{\mathrm{T}} + g' \cdot \Delta\ \varphi$, то функция ψ является энергетической функцией Морса для f на множестве $M^3 \setminus \Lambda$. По построению ψ является гладкой на всем многообразии M^3.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Андронов А.А., Понтрягин Л.С.* Грубые системы// Докл. АН СССР. — 1937. — *14*, № 5. — С. 247–250.
2. *Аносов Д.В.* Грубость геодезических потоков на компактных римановых многообразиях отрицательной кривизны// Докл. АН СССР. — 1962. — *145*, № 4. — С. 707–709.
3. *Аносов Д.В.* Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны// Тр. МИАН. — 1967. — *90*.
4. *Аносов Д.В.* Об одном классе инвариантных множеств гладких динамических систем// В сб.: «Труды пятой международной конференции по нелинейным колебаниям», Т. 2, «Качественные методы». — Ин-т математики АН УССР, 1970. — С. 39–45.
5. *Аносов Д.В.* Грубые системы// Тр. МИАН. — 1985. — *169*. — С. 59–93.
6. *Гринес В.З.* О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных базисных множествах// Усп. мат. наук. — 1974. — *29*, № 6(180). — С. 163–164.
7. *Гринес В.З.* О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах. 1// Тр. Моск. Мат. об-ва. — 1975. — *32*. — С. 35–60.
8. *Гринес В.З.* О топологической сопряженности диффеоморфизмов двумерного многообразия на одномерных ориентируемых базисных множествах. 2// Тр. Моск. Мат. об-ва. — 1977. — *34*. — С. 243–252.
9. *Гринес В.З.* О топологической классификации структурно устойчивых диффеоморфизмов поверхностей с одномерными аттракторами и репеллерами// Мат. сб. — 1997. — *188*. — С. 57–94.
10. *Гринес В.З., Жужома Е.В.* О топологической классификации ориентируемых аттракторов на n-мерном торе// Усп. мат. наук. — 1979. — *34*, № 4. — С. 185–186.
11. *Гринес В.З., Жужома Е.В.* О грубых диффеоморфизмах с растягивающимися аттракторами и сжимающимися репеллерами коразмерности один// Докл. РАН. — 2000. — *374*. — С. 274–276.
12. *Гринес В.З., Жужома Е.В.* Структурно устойчивые диффеоморфизмы с базисными множествами коразмерности один// Изв. РАН. Сер. Мат. — 2002. — *66*, № 2. — С. 3–66.
13. *Гринес В.З., Жужома Е.В., Медведев В.С.* О поверхностных аттракторах и репеллерах на 3-многообразиях// Мат. заметки. — 2005. — *78*, № 6. — С. 813–826.
14. *Гринес В.З., Лауденбах Ф., Починка О.В.* Квази-энергетическая функция для диффеоморфизмов с дикими сепаратрисами// Мат. заметки. — 2009. — *86*, № 2. — С. 175–183.
15. *Гринес В., Левченко Ю., Починка О.* О топологической классификации диффеоморфизмов на 3-многообразиях с поверхностными двумерными аттракторами и репеллерами// Нелин. динам. — 2014. — *10*, № 1. — С. 17–33.
16. *Гринес В.З., Носкова М.К., Починка О.В.* Построение энергетической функции для трехмерных каскадов с двумерным растягивающимся аттрактором// Принято в печать.
17. *Гринес В.З., Починка О.В.* Введение в топологическую классификацию диффеоморфизмов на многообразиях размерности два и три. — Москва—Ижевск, 2011.
18. *Жужома Е.В., Исаенкова Н.В.* О классификации одномерных растягивающихся аттракторов// Мат. заметки. — 2009. — *86*, № 3. — С. 360–370.
19. *Жужома Е.В., Медведев В.С.* О неориентируемых двумерных базисных множествах на 3-многообразиях// Мат. сб. — 2002. — *193*, № 6. — С. 83–104.
20. *Майер А.Г.* Грубое преобразование окружности в окружность// Уч. зап. Горьк. гос. ун-та. — 1939. — *12*. — С. 215–229.
21. *Милнор Дж.* Теория Морса. — Платон, 1996.
22. *Плыкин Р.В.* О топологии базисных множеств диффеоморфизмов С. Смейла// Мат. сб. — 1971. — *84*, № 2. — С. 301–312.
23. *Плыкин Р.В.* Источники и стоки А-диффеоморфизмов поверхностей// Мат. сб. — 1974. — *94*. — С. 243–264.
24. *Плыкин Р.В.* О структуре централизаторов аносовских диффеоморфизмов тора// Усп. мат. наук. — 1998. — *53*, № 6. — С. 259–260.
25. *Смейл С.* Структурно устойчивый дифференцируемый гомеоморфизм с бесконечным числом периодических точек. Тезисы доклада на симпозиуме по нелинейным колебаниям// Киев. Институт математики АН УССР. — 1961.— С. 1–3; Труды международного симпозиума по нелинейным колебаниям. Киев. Изд-во АН УССР. — 1963. — *II*. — С. 365–366.
26. *Шильников Л.П.* Об одной задаче Пуанкаре—Биркгофа// Мат. сб. — 1967. — *74* (*116*), № 3. — С. 378–397.
27. *Шильников Л.П.* О существовании счетного множества периодических движений в окрестности гомоклинической кривой// Докл. АН СССР. — 1967. — *172*, № 2. — С. 298–301.
28. *Birkhoff G.* On the periodic motions of dynamics// Acta Math. — 1927. — *50*. — С. 359–379.

29. *Bonatti Ch., Grines V.* Knots as topological invariant for gradient-like diffeomorphisms of the sphere S^3// J. Dyn. Control Syst. — 2000. — *6*, № 4. — C. 579–602.
30. *Bonatti Ch., Guelemmaan N.* Axiom A diffeomorphisms which are derived from Anosov flows// J. Mod. Dyn. — 2010. — *4*, № 1. — C. 1–63.
31. *Bothe H.* The ambient structure of expanding attractors, I. Local triviality, tubular neighdorhoods II// Math. Nachr. — 1982. — *107*. — C. 327–348.
32. *Bothe H.* The ambient structure of expanding attractors, II. Solenoids in 3-manifolds// Math. Nachr. — 1983. — *112*. — C. 69–102.
33. *Bowen R.* Periodic points and measures for axiom A diffeomorphisms// Trans. Am. Math. Soc. — 1971. — *154*. — C. 337–397.
34. *Brown A.* Nonexpanding attractors: conjugacy to algebraic models and classification in 3-manifolds// J. Mod. Dyn. — 2010. — *3*, № 4. — C. 517–548.
35. *Conley C.* Isolated invariant sets and Morse index. — Providence: Am. Math. Soc., 1978.
36. *Franks J.* Anosov diffeomorphisms// В сб.: «Global Analisys». Proc. Symp. in Pure Math. — 1970. — *14*. — C. 61–93.
Рус. перевод: в сб. «Гладкие динамические системы». — М., 1977. — С. 32–86.
37. *Grines V., Laudenbach F., Pochinka O.* Self-indexing function for Morse-Smale diffeomorphisms on 3-manifolds// Mosc. Math. J. — 2009. — *4*. — C. 801–821.
38. *Grines V. Z., Laudenbach F., Pochinka O. V.* Dynamically ordered energy function for Morse—Smale diffeomorphisms on 3-manifolds// Proc. Steklov Inst. Math. — 2012. — *278*, № 1. — C. 27–40.
39. *Grines V., Levchenko Y., Medvedev V., Pochinka O.* On the dynamical coherence of structurally stable 3-diffeomorphisms// Regul. Chaotic Dyn. — 2014. — *19*, № 4. — C. 506–512.
40. *Grines V., Zhuzhoma E.* On structurally stable diffeomorphisms with codimension one expanding attractors// Trans. Am. Math. Soc. — 2005. — *357*, № 2. — C. 617–667.
41. *Günter B.* Attractors which are homeomorphic to compact abelian groups// Manuscripta Math. — 1994. — *82*. — C. 31–40.
42. *Hertz F., Herts M., Ures R.* Tori with hyperbolic dynamics in 3-manifolds// J. Mod. Dyn. — 2011. — *5*, № 1. — C. 185–202.
43. *Hirsch M., Palis J., Pugh C., Shub M.* Neighborhoods of hyperbolic sets.// Invent. Math. — 1970. — *9*. — C. 121–134.
44. *Hirsch M., Pugh C., Shub M.* Invariant manifolds. — Springer-Verlag, 1977.
45. *Jiang B., Wang S., Zheng H.* No embeddings of solenoids into surfaces// Proc. Am. Math. Soc. — 2008. — *136*. — C. 3697–3700.
46. *Kaplan J., Mallet-Paret J., Yorke J.* The Lyapunov dimension of nowhere differentiable attracting torus// Ergodic Theory Dynam. Systems. — 1984. — *2*. — C. 261–281.
47. *Kollemmaer H.* On hyperbolic attractors of codimension one// Lecture Notes in Math. — 1976. — *597*. — C. 330–334.
48. *Ma J., Yu B.* Genus two Smale-Williams solenoid attractors in 3-manifolds// J. Knot Theory Ramifications. — 2011. — *20*, № 6. — C. 909–926.
49. *Mañé R.* A proof of C^1 stability conjecture// Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. — 1988. — *66*. — C. 161–210.
50. *Medvedev V., Zhuzhoma E.* On the existence of codimension one non-orientable expanding attractors// J. Dyn. Control Syst. — 2005. — *11*, № 3. — C. 405–411.
51. *Meyer K R.* Energy functions for Morse—Smale systems// Am. J. Math. — 1968. — *90*. — C. 1031–1040.
52. *Moise E.* Geometric topology in dimensions 2 and 3. — Springer-Verlag, 1977.
53. *Newhouse S.* On codimension one Anosov diffeomorphisms// Am. J. Math. — 1970. — *92*, № 3. — C. 761–770.
Рус. перевод: в сб. «Гладкие динамические системы». — М.: Мир, 1977. — С. 87–98.
54. *Pixton D.* Wild unstable manifolds// Topology. — 1977. — *16*, № 2. — C. 167–172.
55. *Plante J.* The homology class of an expanded invariant manifolds// Lecture Notes in Math. — 1975. — *468*. — C. 251–256.
56. *Poincare H.* Les méthodes nouvelles de la mécanique celeste, III. — Paris, 1899.
57. *Robinson C.* Structural stability of C^1 diffeomorphisms// J. Differ. Equ. — 1976. — *22*, № 1. — C. 28–73.
58. *Robinson C.* Dynamical systems: stability, symbolic dynamics, and chaos. — CRC Press, 1999.
59. *Smale S.* On gradient dynamical systems// Ann. Math. — 1961. — C. 199–206.
60. *Smale S.* Stable manifolds for differential equations and diffeomorphisms// Ann. Sc. Norm. Super. Pisa. — 1963. — *18*. — C. 97–116.

61. *Smale S.* Differentiable dynamical systems// Bull. Am. Math. Soc. — 1967. — *73*, № 1. — С. 741–817. Рус. перевод: Усп. мат. наук. — 1970. — *25*. — С. 113–185.
62. *Smale S.* Stability and isotopy in discrete dynamical systems// В сб.: Dynamical Systems. — New York: Academic Press, 1973. — С. 527–530.
63. *Williams R.* Expanding attractors// Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci. — 1974. — *43*. — С. 169–203.
64. *Wilson W., Yorke J.* Lyapunov functions and isolating blocks// J. Differ. Equ. — 1973. — *13*. — С. 106–123.

В. З. Гринес
НИУ ВШЭ, 603155, Н. Новгород, ул. Б. Печерская, 25/12;
ННГУ, 603950, Н. Новгород, пр. Гагарина, 23
E-mail: `vgrines@yandex.ru`

Е. В. Жужома
НИУ ВШЭ, 603155, Н. Новгород, ул. Б. Печерская, 25/12
E-mail: `zhuzhoma.ev@mail.ru`

О. В. Починка
НИУ ВШЭ, 603155, Н. Новгород, ул. Б. Печерская, 25/12
E-mail: `olga-pochinka@yandex.ru`

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 57 (2015). С. 31–64

УДК 517.984.48:532.135

ОПЕРАТОРНЫЙ ПОДХОД К МОДЕЛИ ИЛЬЮШИНА ВЯЗКОУПРУГОГО ТЕЛА ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

© 2015 г. **Д. А. ЗАКОРА**

Аннотация. В работе исследована задача о малых движениях вязкоупругого тела параболического типа. Доказана теорема об однозначной сильной разрешимости соответствующей начально-краевой задачи. Исследован спектр и свойства корневых элементов возникающего операторного блока. Точнее, доказана теорема о существенном и дискретном спектре главного операторного блока. Найдена асимптотическая формула для серии собственных значений, сгущающихся в бесконечности. Доказаны утверждения о полноте и базисности системы корневых элементов главного оператора. Найдены представления решения исходного интегродифференциального уравнения второго порядка в виде контурных интегралов и в виде разложения по системе собственных элементов некоторого операторного пучка. Доказано одно утверждение о стабилизации решения эволюционной задачи. В последнем параграфе исследован частный случай рассматриваемой модели — случай синхронно-изотропной среды параболического типа.

1. Введение

Изучению моделей вязкоупругих сред посвящено много работ. Например, в монографии [9] рассматривается механика и термодинамика вязкоупругих сплошных сред при изотермических и неизотермических процессах деформирования. Областью применения этой теории является механика полимерных материалов и конструкций, а также металлов и других не вполне упругих тел. В случае изотермического процесса деформирования динамическое уравнение движения объемной сплошной среды из [9] является обобщением классического уравнения теории упругости и отличается от последнего наличием интегрального слагаемого специального вида. Одномерным и двумерным примерами таких сред являются, например, вязкоупругие балки и пластины (см. [9, 14]). Отметим монографию [23], где также обсуждаются задачи термовязкоупругости. В частности, изучаются вопросы разрешимости для задач о колебаниях вязкоупругих стержней и пластин, задачи о колебаниях термовязкоупругого тела.

В настоящей работе исследуется задача о малых движениях начально-изотропного вязкоупругого тела, занимающего ограниченную область и закрепленного на границе. Эта модель возникает на описанном в [9] пути и содержит так называемое вязкое слагаемое. В настоящей работе такая модель вязкоупругого тела называется параболической (см. [8]).

Во втором разделе исследуется вопрос разрешимости соответствующей системы интегродифференциальных уравнений, граничных и начальных условий. При этом используется прием сведения задачи Коши для интегродифференциального уравнения второго порядка к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в некотором комплексе гильбертовых пространств. Главный оператор $\mathcal{A}$ последнего уравнения представляет из себя некоторую операторную блок-матрицу. Хорошие свойства операторного блока $\mathcal{A}$ позволяют доказать требуемое утверждение. Описанный прием не единственный, однако позволяет эффективно исследовать вопросы спектрального анализа соответствующего интегродифференциального уравнения.

В третьем разделе проводится спектральный анализ интегродифференциального уравнения, возникающего в исследуемой модели. Точнее, исследуются вопросы о спектре и свойствах корневых элементов оператора $\mathcal{A}$. Доказаны утверждения о существенном и дискретном спектре оператора, установлена локализация спектра. Доказаны теоремы о полноте и базисности системы корневых

Исследования выполнены при финансовой поддержке фонда РНФ (код проекта 14-21-00066), Воронежский государственный университет.

элементов операторного блока $\mathcal{A}$. На основе доказанных утверждений строится разложение решения изучаемой задачи по системе собственных элементов некоторого операторного пучка.

В четвертом разделе исследуется частный случай описанной выше модели — синхронно-изотропная среда параболического типа. Эта модель описывается, кроме набора числовых параметров, одним оператором теории упругости. По этой причине удается полностью решить вопрос о локализации и асимптотике спектра главного операторного блока $\mathcal{A}$, а также в деталях разобрать вопрос о p-базисности системы корневых элементов этого оператора. При этом при исследовании свойств корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ не используются методы пространств с индефинитной метрикой. По этой причине описанную процедуру можно будет применить и в модели синхронно-изотропной среды гиперболического типа.

Отметим, что спектральный анализ интегродифференциальных уравнений — активно развиваемое направление в последнее время (см. [3, 4, 12], а также указанную там литературу). Последняя работа посвящена анализу вопросов существования, единственности, а также спектральному анализу интегродифференциального уравнения Гуртина—Пипкина.

2. Задача о малых движениях вязкоупругого тела параболического типа

В этом разделе начально-краевая задача (2.5)-(2.6), описывающая движения начально-изотропного вязкоупругого тела параболического типа, с помощью специальных операторов сводится к задаче Коши (2.8) для некоторого интегродифференциального уравнения в гильбертовом пространстве. Затем исследуется вопрос разрешимости задачи Коши (2.8). Основное утверждение раздела — теорема 2.1.

2.1. Постановка задачи. Рассмотрим изотропное тело, занимающее область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$. Введем прямоугольную декартову систему координат $Ox_1x_2x_3$, жестко связанную с областью. Пусть $\vec{u} = \vec{u}(t,x)$ $(x = (x_1,x_2,x_3) \in \Omega)$ — поле смещений в изотропном теле, тогда тензор деформации ε_{ij} будет выражаться через поле перемещений по формуле Коши. Разложим тензоры деформации ε_{ij} и напряжений σ_{ij} на девиаторы и шаровые составляющие: $\varepsilon_{ij} = e_{ij} + \varepsilon\delta_{ij}$, $\sigma_{ij} = s_{ij} + \sigma\delta_{ij}$. Здесь e_{ij}, s_{ij} — девиаторы тензора деформации и напряжений соответственно, δ_{ij} — символ Кронекера, $\theta := 3\varepsilon$ — объемная деформация, σ — среднее гидростатическое напряжение. В [9, с. 46] выводится общий вид связей девиаторов и шаровых составляющих тензоров деформаций и напряжений:

$$s_{ij}(t) = \int_0^t \Gamma_1(t-s)e_{ij}(s)\,ds, \quad \sigma(t) = \int_0^t \Gamma_2(t-s)\theta(s)\,ds, \tag{2.1}$$

где $\Gamma_1(t)$ и $\Gamma_2(t)$ — это ядра сдвиговой и объемной релаксации. Эти ядра имеют следующий вид:

$$\Gamma_1(t) := -c_1\delta'(t) + c_0\delta(t) - \Gamma(t), \quad \Gamma(t) := \sum_{l=1}^{m} c_{-l}e^{-tb_l}, \tag{2.2}$$

$$\Gamma_2(t) := -\widetilde{c}_1\delta'(t) + \widetilde{c}_0\delta(t) - \widetilde{\Gamma}(t), \quad \widetilde{\Gamma}(t) := \sum_{l=1}^{n} \widetilde{c}_{-l}e^{-t\widetilde{b}_l}, \tag{2.3}$$

где $\delta(t)$ — δ-функция, c_k, $\widetilde{c}_k$ — некоторые структурные постоянные, b_k^{-1}, $\widetilde{b}_k^{-1}$ — времена релаксации. При этом

$$\begin{gathered} c_1, \widetilde{c}_1 \geqslant 0, \quad c_0, \widetilde{c}_0 > 0, \quad c_{-l} > 0 \ \ (l = \overline{1,m}), \quad \widetilde{c}_{-l} > 0 \ \ (l = \overline{1,n}), \\ 0 < b_1 < b_2 < \dots < b_m, \quad 0 < \widetilde{b}_1 < \widetilde{b}_2 < \dots \widetilde{b}_n. \end{gathered} \tag{2.4}$$

Из (2.1) и уравнения движения сплошной среды в форме Коши получим уравнение движения начально-изотропного вязкоупругого тела, которое будем считать закрепленным на границе

$S := \partial\Omega$ области Ω:

$$\rho\frac{\partial^2\vec{u}}{\partial t^2} = \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{c_1}{2}\Delta\vec{u} + \big(\widetilde{c}_1 + \frac{c_1}{6}\big)\nabla\mathrm{div}\vec{u}\Big) + \Big(\frac{c_0}{2}\Delta\vec{u} + \big(\widetilde{c}_0 + \frac{c_0}{6}\big)\nabla\mathrm{div}\vec{u}\Big) - \\ - \int\limits_0^t \Gamma(t-s)\Big(\frac{1}{2}\Delta\vec{u} + \frac{1}{6}\nabla\mathrm{div}\vec{u}\Big)\,ds - \int\limits_0^t \widetilde{\Gamma}(t-s)\nabla\mathrm{div}\vec{u}\,ds + \rho\vec{f}, \quad (2.5)$$

$$\vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S), \quad \vec{u}(0,x) = \vec{u}^0, \quad \frac{\partial}{\partial t}\vec{u}(0,x) = \vec{u}^1, \quad (2.6)$$

где $\rho = \rho(x)$ — плотность тела ($0 < \rho_1 \leqslant \rho(x) \leqslant \rho_2 < +\infty$), $\vec{f} = \vec{f}(t,x)$ — малое поле внешних массовых сил, $\vec{u}^0 = \vec{u}^0(x)$, $\vec{u}^1 = \vec{u}^1(x)$ — начальные смещения и скорости в вязкоупругом теле.

Назовем модель вязкоупругого тела *гиперболической*, если в (2.5) $c_1 = \widetilde{c}_1 = 0$ (см. [9, с. 46]); *параболической*, если в (2.5) $c_1 > 0$; *промежуточной*, если в (2.5) $c_1 = 0$, $\widetilde{c}_1 > 0$.

2.2. Вспомогательные операторы и их свойства. Переход к интегродифференциальному операторному уравнению. Введем векторное гильбертово пространство $\vec{L}_2(\Omega,\rho)$ с весом $\rho(x)$ со скалярным произведением и нормой следующего вида:

$$(\vec{u},\vec{v})_{\vec{L}_2(\Omega,\rho)} := \int\limits_\Omega \rho(x)\vec{u}(x)\cdot\overline{\vec{v}(x)}\,d\Omega, \quad \|\vec{u}\|^2_{\vec{L}_2(\Omega,\rho)} = \int\limits_\Omega \rho(x)|\vec{u}(x)|^2\,d\Omega.$$

Введем скалярное гильбертово пространство $L_2(\Omega)$ функций, суммируемых со своими квадратами по области Ω, а также его подпространство $L_{2,\Omega} := \{p \in L_2(\Omega) \mid (p,1)_{L_2(\Omega)} = 0\}$.

Будем считать далее, что граница S области Ω — класса C^2.

Рассмотрим вспомогательную краевую задачу:

$$-\rho^{-1}(\alpha\Delta\vec{u} + \beta\nabla\mathrm{div}\vec{u}) = \vec{v} \quad (\text{в } \Omega), \quad \vec{u} = \vec{0} \quad (\text{на } S), \quad \alpha > 0, \ \beta \geqslant 0.$$

Эта задача, как известно (см. [17]), имеет единственное обобщенное решение $\vec{u} = A^{-1}(\alpha,\beta)\vec{v}$ для любого $\vec{v} \in \vec{L}_2(\Omega,\rho)$, где оператор $A(\alpha,\beta)$ является самосопряженным и положительно определенным в $\vec{L}_2(\Omega,\rho)$. Энергетическое пространство $H_{A(\alpha,\beta)} = \mathcal{D}(A^{1/2}(\alpha,\beta)) = \{\vec{u} \in \vec{W}^1_2(\Omega) |\ \vec{u} = \vec{0} \text{ (на } S)\}$ оператора $A(\alpha,\beta)$ компактно вложено в пространство $\vec{L}_2(\Omega,\rho)$, а значит, оператор $A^{-1}(\alpha,\beta)$ компактен и положителен в $\vec{L}_2(\Omega,\rho)$. Для любых $\vec{u}$, $\vec{v} \in H_{A(\alpha,\beta)}$

$$(\vec{u},\vec{v})_{A(\alpha,\beta)} = (A^{1/2}(\alpha,\beta)\vec{u}, A^{1/2}(\alpha,\beta)\vec{v})_{\vec{L}(\Omega,\rho)} = \alpha\mathcal{J}(\vec{u},\vec{v}) + \beta\mathcal{D}(\vec{u},\vec{v}), \\ \mathcal{J}(\vec{u},\vec{v}) := \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^3 \nabla u_i\cdot\overline{\nabla v_i}\,d\Omega, \quad \mathcal{D}(\vec{u},\vec{v}) := \int\limits_\Omega \mathrm{div}\vec{u}\ \overline{\mathrm{div}\vec{v}}\,d\Omega. \quad (2.7)$$

Кроме того, несложно проверить, что нормы в любых двух энергетических пространствах $H_{A(\alpha_1,\beta_1)}$ и $H_{A(\alpha_2,\beta_2)}$ эквивалентны между собой.

Введем оператор $B\vec{u} := \mathrm{div}\vec{u}$, $\mathcal{D}(B) := \{\vec{u} \in \vec{L}_2(\Omega,\rho) |\ \mathrm{div}\vec{u} \in L_2(\Omega),\ \vec{u}\cdot\vec{n} = 0 \text{ (на } S)\}$, тогда будем иметь $\mathcal{D}(B) \supset \mathcal{D}(A^{1/2}(\alpha,\beta))$, $B : \mathcal{D}(B) \to L_{2,\Omega}$. Непосредственно проверяется, что $B^*p = -\rho^{-1}\nabla p$, $\mathcal{D}(B^*) = W^1_2(\Omega) \cap L_{2,\Omega}$.

Для модели вязкоупругого тела параболического типа введем операторы $A := A\Big(\frac{1}{2}c_1, \widetilde{c}_1 + \frac{1}{6}c_1\Big)$, $A_{00} := A\Big(\frac{1}{2}c_0, \widetilde{c}_0 + \frac{1}{6}c_0\Big)$, $A_1 := A\Big(\frac{1}{2}, \frac{1}{6}\Big)$ и с их помощью запишем начально-краевую задачу (2.5)-(2.6) в виде задачи Коши для интегродифференциального уравнения второго порядка в гильбертовом пространстве $H := \vec{L}_2(\Omega,\rho)$:

$$\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = -A\frac{d\vec{u}}{dt} - A_{00}\vec{u} + \int\limits_0^t \Big[\Gamma(t-s)A_1 + \widetilde{\Gamma}(t-s)B^*B\Big]\vec{u}(s)\,ds + \vec{f}(t), \\ \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \quad \vec{u}'(0) = \vec{u}^1. \quad (2.8)$$

Определение 2.1. *Сильным решением* задачи Коши (2.8) назовем такое поле $\vec{u}(t)$, что $\vec{u}(t) \in \mathcal{D}(A_{00})$, $\vec{u}'(t) \in \mathcal{D}(A)$ при $t \in \mathbb{R}_+ := [0; +\infty)$, $A_{00}\vec{u}(t)$, $A\vec{u}'(t) \in C(\mathbb{R}_+; H)$, $\vec{u}(t) \in C^2(\mathbb{R}_+; H)$, выполнены начальные условия и уравнение из (2.8) для любого $t \in \mathbb{R}_+$.

2.3. Вывод основного дифференциально-операторного уравнения. Введем операторы

$$\begin{aligned} &Q_{00} := A_{00}^{1/2} A^{-1/2}, \quad Q_1 := A_1^{1/2} A^{-1/2}, \quad Q_B := BA^{-1/2}, \\ &Q_{00}^+ := A^{-1/2} A_{00}^{1/2}, \quad Q_1^+ := A^{-1/2} A_1^{1/2}, \quad Q_B^+ := A^{-1/2} B^*. \end{aligned} \tag{2.9}$$

Лемма 2.1. $Q_{00}, Q_1 \in \mathcal{L}(H)$, $Q_B \in \mathcal{L}(H, L_{2,\Omega})$. *Операторы* Q_{00}^+, Q_1^+, Q_B^+ *расширяются по непрерывности до ограниченных операторов* Q_{00}^*, Q_1^*, Q_B^* *соответственно. При этом* $Q_B^+ = Q_B^*|_{\mathcal{D}(B^*)}$, $Q_{00}^+ = Q_{00}^*|_{\mathcal{D}(A_{00}^{1/2})}$, $Q_1^+ = Q_1^*|_{\mathcal{D}(A_1^{1/2})}$, *а операторы* $Q_{00}^* Q_{00}$ *и* $Q_1^* Q_1$ *положительно определены.*

Доказательство. Доказательство проведем только для оператора Q_{00}. Ограниченность оператора Q_{00} ($Q_{00}^* \in \mathcal{L}(H)$) следует из равенства $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A_{00})$. Далее, для любых $\vec{u} \in H$ и $\vec{v} \in \mathcal{D}(A_{00}^{1/2})$

$$\bigl(Q_{00}\vec{u}, \vec{v}\bigr)_H = \bigl(A_{00}^{1/2} A^{-1/2}\vec{u}, \vec{v}\bigr)_H = \bigl(\vec{u}, Q_{00}^+\vec{v}\bigr)_H = \bigl(\vec{u}, Q_{00}^*\vec{v}\bigr)_H,$$

откуда следует, что $Q_{00}^+ = Q_{00}^*|_{\mathcal{D}(A_{00}^{1/2})}$, $\overline{Q_{00}^+} = Q_{00}^*$. Далее, для любого $\vec{u} \in H$ с учетом (2.7) имеем

$$\begin{aligned} \bigl(Q_{00}^* Q_{00}\vec{u}, \vec{u}\bigr)_H &= \bigl(Q_{00}\vec{u}, Q_{00}\vec{u}\bigr)_H = \bigl(A^{-1/2}\vec{u}, A^{-1/2}\vec{u}\bigr)_{A_{00}} = \\ &= \frac{1}{2} c_0 \mathcal{J}(A^{-1/2}\vec{u}, A^{-1/2}\vec{u}) + \Bigl(\widetilde{c}_0 + \frac{1}{6} c_0\Bigr)\mathcal{D}(A^{-1/2}\vec{u}, A^{-1/2}\vec{u}) \geqslant \\ &\geqslant \min\Bigl\{\frac{c_0}{c_1}, \frac{6\widetilde{c}_0 + c_0}{6\widetilde{c}_1 + c_1}\Bigr\}\Bigl[\frac{1}{2} c_1 \mathcal{J}(A^{-1/2}\vec{u}, A^{-1/2}\vec{u}) + \Bigl(\widetilde{c}_1 + \frac{1}{6} c_1\Bigr)\mathcal{D}(A^{-1/2}\vec{u}, A^{-1/2}\vec{u})\Bigr] = \\ &= \min\Bigl\{\frac{c_0}{c_1}, \frac{6\widetilde{c}_0 + c_0}{6\widetilde{c}_1 + c_1}\Bigr\}\bigl(A^{-1/2}\vec{u}, A^{-1/2}\vec{u}\bigr)_A = \min\Bigl\{\frac{c_0}{c_1}, \frac{6\widetilde{c}_0 + c_0}{6\widetilde{c}_1 + c_1}\Bigr\}\|\vec{u}\|_H^2, \end{aligned}$$

откуда следует положительная определенность оператора $Q_{00}^* Q_{00}$. Лемма доказана. □

Пусть $\vec{u}(t)$ — сильное решение задачи Коши (2.8), тогда $\vec{u}(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = -A^{1/2}\Bigl\{A^{1/2}\frac{d\vec{u}}{dt} + Q_{00}^+ Q_{00} A^{1/2}\vec{u} - \int\limits_0^t \Bigl[\Gamma(t-s) Q_1^+ Q_1 + \widetilde{\Gamma}(t-s) Q_B^+ Q_B\Bigr] A^{1/2}\vec{u}(s)\, ds\Bigr\} + \vec{f}(t),$$

а значит, с учетом леммы 2.1, — и следующему уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = -A^{1/2}\Bigl\{A^{1/2}\frac{d\vec{u}}{dt} + Q_{00}^+ Q_{00} A^{1/2}\vec{u} - \\ - Q_1^* \int\limits_0^t \Gamma(t-s) Q_1 A^{1/2}\vec{u}(s)\, ds - Q_B^* \int\limits_0^t \widetilde{\Gamma}(t-s) Q_B A^{1/2}\vec{u}(s)\, ds\Bigr\} + \vec{f}(t). \end{aligned} \tag{2.10}$$

Определим ядра $\Gamma_p(t)$ и $\widetilde{\Gamma}_p(t)$ так, что $\Gamma_p'(t) = -\Gamma(t)$, $\widetilde{\Gamma}_p'(t) = -\widetilde{\Gamma}(t)$, т. е.

$$\Gamma_p(t) := \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{b_l} e^{-tb_l}, \quad \widetilde{\Gamma}_p(t) := \sum_{l=1}^n \frac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l} e^{-t\widetilde{b}_l}. \tag{2.11}$$

Предположим, что $\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(A_1) \subset \mathcal{D}(B^*B)$. Из (2.11) и свойства $(A^{1/2}\vec{u}(t))' = A^{1/2}\vec{u}'(t)$ (см. [13, с. 291]), которое является следствием непрерывности поля $A\vec{u}'(t)$, следует, что

$$\int\limits_0^t \Gamma(t-s) Q_1 A^{1/2}\vec{u}(s)\, ds = \Gamma_p(0) Q_1 A^{1/2}\vec{u} - \Gamma_p(t) Q_1 A^{1/2}\vec{u}^0 - \int\limits_0^t \Gamma_p(t-s) Q_1 A^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\, ds,$$

$$\int\limits_0^t \widetilde{\Gamma}(t-s) Q_B A^{1/2}\vec{u}(s)\, ds = \widetilde{\Gamma}_p(0) Q_B A^{1/2}\vec{u} - \widetilde{\Gamma}_p(t) Q_B A^{1/2}\vec{u}^0 - \int\limits_0^t \widetilde{\Gamma}_p(t-s) Q_B A^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\, ds.$$

С использованием этих соотношений преобразуем уравнение (2.10) к следующему виду:

$$\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = -A^{1/2}\Big\{A^{1/2}\frac{d\vec{u}}{dt} + \Big[Q_{00}^{+}Q_{00} - \Gamma_p(0)Q_1^*Q_1 - \widetilde{\Gamma}_p(0)Q_B^*Q_B\Big]A^{1/2}\vec{u} + \\ + Q_1^*\int_0^t \Gamma_p(t-s)Q_1A^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\,ds + Q_B^*\int_0^t \widetilde{\Gamma}_p(t-s)Q_BA^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\,ds\Big\} + \vec{f}_0(t), \tag{2.12}$$

$$\vec{f}_0(t) := \vec{f}(t) - \Gamma_p(t)A_1\vec{u}^0 - \widetilde{\Gamma}_p(t)B^*B\vec{u}^0.$$

Всюду далее, кроме условия (2.4) на числовые параметры задачи, будем считать выполненными следующие условия:

$$c_0 - \Gamma_p(0) = c_0 - \sum_{l=1}^{m}\frac{c_{-l}}{b_l} > 0, \\ \widetilde{c}_0 + \frac{1}{6}\Big[c_0 - \Gamma_p(0)\Big] - \widetilde{\Gamma}_p(0) = \widetilde{c}_0 + \frac{1}{6}\Big[c_0 - \sum_{l=1}^{m}\frac{c_{-l}}{b_l}\Big] - \sum_{l=1}^{n}\frac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l} \geqslant 0, \\ \{b_1,\ldots,b_m\}\cap\{\widetilde{b}_1,\ldots,\widetilde{b}_n\} = \varnothing. \tag{2.13}$$

Последнее условие вводится лишь для упрощения последующих формулировок и вычислений и не является принципиальным ограничением в рассматриваемой задаче. Если какое-то число из второй группы (с волной) попадет в первую группу, то это решается перегруппировкой слагаемых.

С учетом (2.13) определим оператор $A_0 := A\Big(\frac{1}{2}[c_0 - \Gamma_p(0)], \widetilde{c}_0 + \frac{1}{6}[c_0 - \Gamma_p(0)] - \widetilde{\Gamma}_p(0)\Big)$. По аналогии с операторами из (2.9) определим операторы $Q_0 := A_0^{1/2}A^{-1/2}$ и $Q_0^+ := A^{-1/2}A_0^{1/2}$. При этом $\overline{Q_0^+} = Q_0^*$, $Q_0^+ = Q_0^*|_{\mathcal{D}(A_0^{1/2})=\mathcal{D}(A^{1/2})}$. Относительно оператора Q_0 имеет место следующая лемма.

Лемма 2.2. *Оператор* $Q_0^*Q_0 = Q_{00}^*Q_{00} - \Gamma_p(0)Q_1^*Q_1 - \widetilde{\Gamma}_p(0)Q_B^*Q_B$ *и положительно определен.*

Доказательство. Для любых $\vec{u}$, $\vec{v} \in H = \vec{L}_2(\Omega,\rho)$, учитывая (2.7) и (2.9), вычислим

$$\big((Q_{00}^*Q_{00} - \Gamma_p(0)Q_1^*Q_1 - \widetilde{\Gamma}_p(0)Q_B^*Q_B - Q_0^*Q_0)\vec{u},\vec{v}\big)_H = \big(A^{-1/2}\vec{u}, A^{-1/2}\vec{v}\big)_{A_{00}} - \\ - \Gamma_p(0)\big(A^{-1/2}\vec{u}, A^{-1/2}\vec{v}\big)_{A_1} - \widetilde{\Gamma}_p(0)\mathcal{D}(A^{-1/2}\vec{u}, A^{-1/2}\vec{v}) - \big(A^{-1/2}\vec{u}, A^{-1/2}\vec{v}\big)_{A_0} = 0.$$

Отсюда следует формула для оператора $Q_0^*Q_0$.

Положительная определенность оператора $Q_0^*Q_0$ доказывается так же, как в лемме 2.1. □

Из леммы 2.2 и (2.12) следует, что если поле $\vec{u}(t)$ удовлетворяет уравнению (2.12), то оно также удовлетворяет и следующему уравнению:

$$\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = -A^{1/2}\Big\{A^{1/2}\frac{d\vec{u}}{dt} + Q_0^*Q_0A^{1/2}\vec{u} + \\ + Q_1^*\int_0^t \Gamma_p(t-s)Q_1A^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\,ds + Q_B^*\int_0^t \widetilde{\Gamma}_p(t-s)Q_BA^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\,ds\Big\} + \vec{f}_0(t).$$

Это уравнение с учетом (2.11) перепишется в следующем виде:

$$\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = -A^{1/2}\Big\{A^{1/2}\frac{d\vec{u}}{dt} + Q_0^*Q_0A^{1/2}\vec{u} + \sum_{l=1}^{m}\sqrt{\frac{c_{-l}}{b_l}}Q_1^*\int_0^t e^{-b_l(t-s)}\sqrt{\frac{c_{-l}}{b_l}}Q_1A^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\,ds + \\ + \sum_{l=1}^{n}\sqrt{\frac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l}}Q_B^*\int_0^t e^{-\widetilde{b}_l(t-s)}\sqrt{\frac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l}}Q_BA^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\,ds\Big\} + \vec{f}_0(t). \tag{2.14}$$

Введем по полю $\vec{u}$ следующие объекты:

$$\begin{gathered} Q_0 A^{1/2}\vec{u}(t) =: \frac{d\vec{v}(t)}{dt}, \quad \vec{v}(0)=0 \quad (\vec{v}'(0)=A_0^{1/2}\vec{u}^0), \\ \int\limits_0^t e^{-b_l(t-s)}\sqrt{\frac{c_{-l}}{b_l}}Q_1A^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\,ds =: \vec{v}_l(t), \quad l=\overline{1,m}, \\ \int\limits_0^t e^{-\widetilde{b}_l(t-s)}\sqrt{\frac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l}}Q_BA^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\,ds =: p_l(t), \quad l=\overline{1,n}. \end{gathered} \tag{2.15}$$

При этом поля $\vec{v}'(t)$, $\vec{v}_l(t)$ $(l=\overline{1,m})$ и функции $p_l(t)$ $(l=\overline{1,n})$ непрерывно дифференцируемы на $\mathbb{R}_+$ и удовлетворяют следующей системе уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{u}}{dt^2} = -A^{1/2}\Big\{A^{1/2}\dfrac{d\vec{u}}{dt} + Q_0^*\dfrac{d\vec{v}}{dt} + \sum\limits_{l=1}^m\sqrt{\dfrac{c_{-l}}{b_l}}Q_1^*\vec{v}_l + \sum\limits_{l=1}^n\sqrt{\dfrac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l}}Q_B^*p_l\Big\} + \vec{f}_0(t), \\ \dfrac{d^2\vec{v}}{dt^2} = Q_0A^{1/2}\dfrac{d\vec{u}}{dt}, \\ \dfrac{d\vec{v}_l}{dt} = \sqrt{\dfrac{c_{-l}}{b_l}}Q_1A^{1/2}\dfrac{d\vec{u}}{dt} - b_l\vec{v}_l, \quad l=\overline{1,m}, \\ \dfrac{dp_l}{dt} = \sqrt{\dfrac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l}}Q_BA^{1/2}\dfrac{d\vec{u}}{dt} - \widetilde{b}_lp_l, \quad l=\overline{1,n}. \end{cases} \tag{2.16}$$

Эту систему (с начальными условиями) далее мы будем трактовать как задачу Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в некотором комплексе гильбертовых пространств. Точнее, запишем систему (2.16) в виде дифференциального уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := H\oplus\mathcal{H}_0$ $(H=\vec{L}_2(\Omega,\rho), \mathcal{H}_0 := (\oplus_{l=1}^{m+1}H)\oplus(\oplus_{l=1}^n L_{2,\Omega}))$:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\xi + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0)=\xi^0. \tag{2.17}$$

Здесь $\xi := (\vec{u}';w)^\tau$, $w := (\vec{v}';\vec{v}_1;\ldots;\vec{v}_m;p_1;\ldots;p_n)^\tau$, $\xi^0 := (\vec{u}^1;w^0)^\tau$,

$$w^0 := (A_0^{1/2}\vec{u}^0;\underbrace{\vec{0};\ldots;\vec{0}}_{m\text{ раз}};\underbrace{0;\ldots;0}_{n\text{ раз}})^\tau, \qquad \mathcal{F}(t) := (\vec{f}_0(t);\underbrace{\vec{0};\ldots;\vec{0}}_{m+1\text{ раз}};\underbrace{0;\ldots;0}_{n\text{ раз}})^\tau$$

(символ τ обозначает операцию транспонирования).

Для оператора $\mathcal{A}$, как можно проверить, справедливы следующие формулы:

$$\mathcal{A} = \operatorname{diag}(A^{1/2},\mathcal{I}_0)\begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}\end{pmatrix}\operatorname{diag}(A^{1/2},\mathcal{I}_0), \tag{2.18}$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} I & 0 \\ -\mathcal{Q}A^{-1/2} & \mathcal{I}_0\end{pmatrix}\operatorname{diag}(A,\mathcal{G}+\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)\begin{pmatrix} I & A^{-1/2}\mathcal{Q}^* \\ 0 & \mathcal{I}_0\end{pmatrix}, \tag{2.19}$$

$$\mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{\xi=(\vec{u};w)^\tau\in\mathcal{H}\,\Big|\ \vec{u}+A^{-1/2}\mathcal{Q}^*w\in\mathcal{D}(A)\Big\}, \tag{2.20}$$

где I, $\mathcal{I}_0$ — единичные операторы в H и $\mathcal{H}_0$ соответственно,

$$\mathcal{Q} := \Big(Q_0, \sqrt{\frac{c_{-1}}{b_1}}Q_1,\ldots,\sqrt{\frac{c_{-m}}{b_m}}Q_1, \sqrt{\frac{\widetilde{c}_{-1}}{\widetilde{b}_1}}Q_B,\ldots,\sqrt{\frac{\widetilde{c}_{-n}}{\widetilde{b}_n}}Q_B\Big)^\tau,$$
$$\mathcal{G} := \operatorname{diag}\big(0, b_1I,\ldots,b_mI,\widetilde{b}_1I,\ldots,\widetilde{b}_nI\big).$$

Дадим следующее определение.

Определение 2.2. *Сильным решением* задачи Коши (2.17) назовем такую функцию $\xi(t)$, что $\xi(t)\in\mathcal{D}(\mathcal{A})$ при $t\in\mathbb{R}_+ := [0;+\infty)$, $\mathcal{A}\xi(t)\in C(\mathbb{R}_+;\mathcal{H})$, $\xi(t)\in C^1(\mathbb{R}_+;\mathcal{H})$, выполнены начальное условие и уравнение из (2.17) для любого $t\in\mathbb{R}_+$.

Из проведенных рассуждений следует вывод: если поле $\vec{u}(t)$ есть сильное решение задачи Коши (2.8) и $\vec{u}^0\in\mathcal{D}(A)$, то функция $\xi(t)$ есть сильное решение задачи Коши (2.17).

2.4. Теорема о разрешимости. Основываясь на задаче Коши (2.17), докажем теорему об однозначной сильной разрешимости для задачи (2.8). Прежде всего, установим следующую лемму.

Лемма 2.3. *Оператор $-\mathcal{A}$ — максимальный диссипативный.*

Доказательство. Докажем, что $-\mathcal{A}$ — диссипативный оператор. Для $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ (см. (2.20)) имеем

$$\operatorname{Re}\big(-\mathcal{A}\xi,\xi\big)_{\mathcal{H}} = -\operatorname{Re}\left(\begin{pmatrix} I & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{1/2}\vec{u} \\ w\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A^{1/2}\vec{u} \\ w\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}} = -\operatorname{Re}\left(\operatorname{diag}(I,\mathcal{G})\begin{pmatrix} A^{1/2}\vec{u} \\ w\end{pmatrix}, \begin{pmatrix} A^{1/2}\vec{u} \\ w\end{pmatrix}\right)_{\mathcal{H}} \leqslant 0.$$

Для того чтобы доказать, что оператор $-\mathcal{A}$ замкнут и максимален, достаточно показать, что положительные числа попадают в его резольвентное множество: $\{\lambda > 0\} \subset \rho(-\mathcal{A})$. Итак, пусть $\lambda > 0$. Положим $\xi_1 := (\vec{u}_1; w_1)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, $\xi_2 := (\vec{u}_2; w_2)^\tau \in \mathcal{H}$, тогда уравнение $(-\mathcal{A}-\lambda)\xi_1 = \xi_2$, учитывая представление (2.18), можно переписать в векторно-матричной форме:

$$-\operatorname{diag}(A^{1/2},\mathcal{I}_0)\begin{pmatrix} I+\lambda A^{-1} & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}+\lambda\end{pmatrix}\operatorname{diag}(A^{1/2},\mathcal{I}_0)\begin{pmatrix}\vec{u}_1 \\ w_1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\vec{u}_2 \\ w_2\end{pmatrix}.$$

Отсюда видно, что оператор $-\mathcal{A}-\lambda$ будет иметь ограниченный обратный, определенный на всем пространстве $\mathcal{H}$, если средний блок будет непрерывно обратим.

В самом деле, несложно проверить, что следующий оператор положительно определен:

$$L := I + \lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G}+\lambda)^{-1}\mathcal{Q} = I + \lambda A^{-1} + \frac{1}{\lambda}Q_0^* Q_0 + \sum_{l=1}^{m}\frac{c_{-l}b_l^{-1}}{b_l+\lambda}Q_1^*Q_1 + \sum_{l=1}^{n}\frac{\widetilde{c}_{-l}\widetilde{b}_l^{-1}}{\widetilde{b}_l+\lambda}Q_B^*Q_B \gg 0.$$

Следовательно, $L^{-1} \in \mathcal{L}(H)$ и непосредственной проверкой можно убедиться, что

$$\begin{pmatrix} I+\lambda A^{-1} & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G}+\lambda\end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} L^{-1} & -L^{-1}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}+\lambda)^{-1} \\ (\mathcal{G}+\lambda)^{-1}\mathcal{Q}L^{-1} & (\mathcal{G}+\lambda)^{-1} - (\mathcal{G}+\lambda)^{-1}\mathcal{Q}L^{-1}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}+\lambda)^{-1}\end{pmatrix} \in \mathcal{L}(\mathcal{H}).$$

Лемма доказана. □

Основываясь на [6, теорема 1.4, с. 130], лемме 2.3 и факторизации в форме Шура—Фробениуса (2.19), докажем лемму об однозначной сильной разрешимости задачи Коши (2.17).

Лемма 2.4. *Пусть функция $\mathcal{F}(t)$ удовлетворяет условию Гельдера*: $\forall\, \tau \in \mathbb{R}_+\ \exists\, K = K(\tau) > 0$, $k(\tau) \in (0,1]$, *что* $\|\mathcal{F}(t) - \mathcal{F}(s)\|_{\mathcal{H}} \leqslant K|t-s|^k$ *при* $0 \leqslant s,t \leqslant \tau$. *Тогда для любого* $\xi^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$ *существует и единственно* (*в смысле определения* 2.2) *сильное решение задачи Коши* (2.17).

Доказательство. Перепишем представление (2.19) оператора $-\mathcal{A}$ в форме Шура—Фробениуса в следующем виде с очевидными обозначениями: $-\mathcal{A} = -(\mathcal{I}-\mathcal{S})\mathcal{A}_0(\mathcal{I}+\mathcal{S}^*)$. Осуществим в задаче Коши (2.17) замену искомой функции $(\mathcal{I}+\mathcal{S}^*)\xi(t) =: \eta(t)$. В результате получим задачу Коши

$$\frac{d\eta}{dt} = -(\mathcal{I}+\mathcal{S}^*)(\mathcal{I}-\mathcal{S})\mathcal{A}_0\eta + (\mathcal{I}+\mathcal{S}^*)\mathcal{F}(t), \quad \eta(0) = \eta^0 = (\mathcal{I}+\mathcal{S}^*)\xi^0. \tag{2.21}$$

Здесь оператор $\mathcal{A}_0 = \operatorname{diag}(A, \mathcal{G}+\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)$, определенный на $\mathcal{D}(\mathcal{A}_0) = \mathcal{D}(A)\oplus\mathcal{H}_0$, является самосопряженным и неотрицательным (и даже положительно определенным, см. лемму 3.1). Из компактности оператора $A^{-1/2}$ ($A^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty(H)$) следует (см. (2.19)), что $(\mathcal{I}+\mathcal{S}^*)(\mathcal{I}-\mathcal{S}) =: (\mathcal{I}+\mathcal{T})$, где $\mathcal{T} \in \mathfrak{S}_\infty(\mathcal{H})$. Следовательно, оператор $-(\mathcal{I}+\mathcal{T})\mathcal{A}_0$ является генератором сильно непрерывной полугруппы ограниченных операторов, голоморфной в некотором секторе, содержащем положительную полуось. Из условия на функцию $\mathcal{F}(t)$ следует, что функция $(\mathcal{I}+\mathcal{S}^*)\mathcal{F}(t)$ локально гельдерова с константой $K_1 := K(\tau)\|(\mathcal{I}+\mathcal{S}^*)\|_{\mathcal{H}_0}$. Из условия $\xi^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, факторизации (2.19) и формулы (2.20) следует, что $(\mathcal{I}+\mathcal{S}^*)\xi^0 = \eta^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A}_0)$. В силу [6, теорема 1.4, с. 130] задача Коши (2.21) имеет единственное (в смысле определения 2.2) сильное решение. Осуществление обратной замены искомой функции в (2.21) завершает доказательство леммы. □

Теорема 2.1. *Пусть поле $\vec{f}(t)$ удовлетворяет условию Гельдера*: $\forall\, \tau \in \mathbb{R}_+\ \exists\, K = K(\tau) > 0$, $k(\tau) \in (0,1]$, *что* $\|\vec{f}(t) - \vec{f}(s)\|_{\vec{L}_2(\Omega,\rho)} \leqslant K|t-s|^k$ *при* $0 \leqslant s,t \leqslant \tau$. *Тогда для любых* $\vec{u}^0$, $\vec{u}^1 \in \mathcal{D}(A)$ *существует и единственно* (*в смысле определения* 2.1) *сильное решение задачи Коши* (2.8).

Доказательство. Пусть $\vec{u}^0$, $\vec{u}^1 \in \mathcal{D}(A)$, тогда $\xi^0 \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, где $\xi^0 := (\vec{u}^1; w^0)^\tau$, $w^0 := (A_0^{1/2}\vec{u}^0; \vec{0}; \ldots; \vec{0}; 0; \ldots; 0)^\tau$. Действительно, согласно (2.20) имеем

$$\vec{u}^1 + A^{-1/2}\mathcal{Q}^* w^0 = \vec{u}^1 + A^{-1/2}Q_0^* A_0^{1/2}\vec{u}^0 = \vec{u}^1 + A^{-1/2}Q_0^*|_{\mathcal{D}(A_0^{1/2})=\mathcal{D}(A^{1/2})} A_0^{1/2}\vec{u}^0 =$$
$$= \vec{u}^1 + A^{-1/2}Q_0^+ A_0^{1/2}\vec{u}^0 = \vec{u}^1 + A^{-1}A_0\vec{u}^0 = \vec{u}^1 + A^{-1}(A_0A^{-1})A\vec{u}^0 \in \mathcal{D}(A).$$

Из условия на поле $\vec{f}(t)$ следует, что поле $\vec{f}_0(t) := \vec{f}(t) - \Gamma_p(t)A_1\vec{u}^0 - \widetilde{\Gamma}_p(t)B^*B\vec{u}^0$, где ядра $\Gamma_p(t)$ и $\widetilde{\Gamma}_p(t)$ определены в (2.11), локально гельдерово. А значит, функция $\mathcal{F}(t)$ из (2.17) также локально гельдерова.

По лемме 2.4 задача Коши (2.17) имеет единственное (в смысле определения 2.2) сильное решение. Пусть $\xi(t)$ — сильное решение задачи Коши (2.17). Запишем уравнение из (2.17) в виде системы (2.16). Проинтегрировав второе и последующие уравнения в системе (2.16), найдем, что поле $\vec{u}(t)$ является решением следующего уравнения:

$$\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = -A\Big\{\frac{d\vec{u}}{dt} + \int_0^t A^{-1/2}Q_0^*Q_0A^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\,ds + \int_0^t \Gamma_p(t-s)A^{-1/2}Q_1^*Q_1A^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\,ds +$$
$$+ \int_0^t \widetilde{\Gamma}_p(t-s)A^{-1/2}Q_B^*Q_BA^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\,ds\Big\} - A_0\vec{u}^0 + \vec{f}_0(t), \quad (2.22)$$

причем $\vec{u}'(t) \in \mathcal{D}(A^{1/2})$, $A^{1/2}\vec{u}'(t) \in C(\mathbb{R}_+; H)$, выражение в фигурных скобках в уравнении (2.22) принимает значения из $\mathcal{D}(A)$ и $A\{\ldots\} \in C(\mathbb{R}_+; H)$.

Если удастся доказать, что $\vec{u}'(t) \in \mathcal{D}(A)$, $A\vec{u}'(t) \in C(\mathbb{R}_+; H)$, то фигурные скобки в (2.22) можно будет раскрыть, и уравнение (2.22) после ряда простых преобразований примет вид (2.8).

Обозначим $\vec{z}(t) := \vec{u}'(t)$, тогда из (2.22) имеем

$$\begin{gathered}\vec{z}(t) + \int_0^t R(t-s)\vec{z}(s)\,ds =: \vec{y}(t) \in \mathcal{D}(A), \quad A\vec{y}(t) \in C(\mathbb{R}_+; H),\\ R(t) := A^{-1/2}\big[Q_0^*Q_0 + \Gamma_p(t)Q_1^*Q_1 + \widetilde{\Gamma}_p(t)Q_B^*Q_B\big]A^{1/2}.\end{gathered} \quad (2.23)$$

Введем пространство $H(A) := (\mathcal{D}(A); \|\cdot\|_{H(A)})$, где $\|\vec{y}\|_{H(A)} := \|A\vec{y}\|_H$ при $\vec{y} \in \mathcal{D}(A)$, которое, как известно, является банаховым. Интегральное уравнение из (2.23) будем трактовать как интегральное уравнение Вольтерра второго рода в банаховом пространстве $H(A)$. Покажем, что $R(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(H(A)))$, тогда из (2.23) будет следовать, что $\vec{z}(t) = \vec{u}'(t) \in C(\mathbb{R}_+; H(A) = \mathcal{D}(A))$ и теорема будет доказана. В самом деле, для любого $\vec{z} \in H(A) = \mathcal{D}(A)$ имеем

$$\|R(t)\vec{z}\|_{H(A)} = \|AR(t)A^{-1}(A\vec{z})\|_H = \|A^{1/2}\big[Q_0^*Q_0 + \Gamma_p(t)Q_1^*Q_1 + \widetilde{\Gamma}_p(t)Q_B^*Q_B\big]A^{-1/2}(A\vec{z})\|_H =$$
$$= \|A^{1/2}\big[Q_0^*Q_0 + \Gamma_p(t)Q_1^*Q_1 + \widetilde{\Gamma}_p(t)Q_B^*Q_B\big]|_{\mathcal{D}(A^{1/2})}A^{-1/2}(A\vec{z})\|_H =$$
$$= \|\big[A_0 + \Gamma_p(t)A_1 + \widetilde{\Gamma}_p(t)B^*B\big]A^{-1}(A\vec{z})\|_H \leqslant$$
$$\leqslant \big[\|A_0A^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} + \Gamma_p(t)\|A_1A^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} + \widetilde{\Gamma}_p(t)\|B^*BA^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)}\big] \cdot \|\vec{z}\|_{H(A)}.$$

Отсюда следует, что $R(t) \in \mathcal{L}(H(A))$ и для любых t_1, $t_2 \in \mathbb{R}_+$

$$\|R(t_1) - R(t_2)\|_{\mathcal{L}(H(A))} \leqslant |\Gamma_p(t_1) - \Gamma_p(t_2)| \cdot \|A_1A^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)} + |\widetilde{\Gamma}_p(t_1) - \widetilde{\Gamma}_p(t_2)| \cdot \|B^*BA^{-1}\|_{\mathcal{L}(H)}.$$

Отсюда и из (2.11) следует, что $R(t) \in C(\mathbb{R}_+; \mathcal{L}(H(A)))$ и теорема доказана. □

3. Задача о спектре вязкоупругого тела параболического типа

В этом разделе проводится спектральный анализ операторного блока $\mathcal{A}$ (см. (2.18)–(2.20)). В пункте 3.3 доказана теорема 3.1 о существенном и дискретном спектре оператора $\mathcal{A}$.

В пункте 3.4 исследована локализация и, частично, асимптотическое поведение спектра. Точнее, в теореме 3.2 установлена асимптотическая формула для ветви изолированных конечнократных собственных значений оператора $\mathcal{A}$ с предельной точкой в бесконечности и грубая локализация этой ветви. В теореме 3.3 доказано, что невещественных собственных значений у оператора $\mathcal{A}$ может быть лишь конечное количество. В теореме 3.4 установлена область комплексной плоскости, где может располагаться невещественный спектр этого оператора, а также получено достаточное условие отсутствия невещественного спектра.

В пункте 3.5 в теореме 3.5 найдено представление решения задачи Коши (2.8) в виде некоторых контурных интегралов. В теореме 3.6 исследован вопрос стабилизации решения задачи (2.8). Доказано, что если внешнее поле, действующее на систему, стабилизируется, то вязкоупругое тело со временем принимает новое положение, удовлетворяющее стационарному уравнению теории упругости $A_0\vec{u} \equiv A\Big(\frac{1}{2}[c_0 - \Gamma_p(0)], \widetilde{c}_0 + \frac{1}{6}[c_0 - \Gamma_p(0)] - \widetilde{\Gamma}_p(0)\Big)\vec{u} = \vec{f}$ с измененными параметрами.

В пункте 3.7 исследуются свойства корневых элементов оператора $\mathcal{A}$. В частности, в теореме 3.9 с использованием методов индефинитной метрики доказаны достаточные условия того, чтобы система корневых элементов (собственных элементов) оператора $\mathcal{A}$ была p-базисом при $p > 3$ ($\mathcal{J}$-ортонормированным p-базисом) основного гильбертова пространства. В пункте 3.8 в случае существования $\mathcal{J}$-ортонормированного p-базиса из собственных элементов оператора $\mathcal{A}$ строится представление решения задачи Коши (2.8) в виде некоторого ряда.

3.1. Основная спектральная задача и операторный пучок. Будем разыскивать решения однородного уравнения из (2.17) в форме $\xi(t) = \exp(-\lambda t)\xi$, где λ — спектральный параметр, а ξ — амплитудный элемент. В результате придем к следующей основной спектральной задаче:

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}, \tag{3.1}$$

которую будем ассоциировать с задачей о спектре вязкоупругого тела параболического типа или, что то же, с задачей о спектре однородного интегродифференциального уравнения второго порядка из (2.8).

Пусть $\xi = (\vec{u}; w)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Осуществим с учетом факторизации (2.18) в спектральной задаче (3.1) замену искомого элемента $\operatorname{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}_0)\xi = \eta =: (\vec{z}; w)^\tau$. Получим спектральную задачу

$$\mathcal{A}(\lambda)\eta := \begin{pmatrix} I - \lambda A^{-1} & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \vec{z} \\ w \end{pmatrix} = 0, \quad \eta \in \mathcal{H} = H \oplus \mathcal{H}_0. \tag{3.2}$$

Пусть $\lambda \notin \{0, b_1, \ldots, b_m, \widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_n\} = \sigma(\mathcal{G})$, тогда из (3.2) найдем, что

$$L(\lambda)\vec{z} := \big[I - \lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}\big]\vec{z} = 0, \quad \vec{z} \in H.$$

Эту задачу, вспоминая определения операторов $\mathcal{Q}$ и $\mathcal{G}$, можно переписать в следующем виде:

$$L(\lambda)\vec{z} := \Big[I - \lambda A^{-1} - \frac{1}{\lambda}Q_0^*Q_0 + \sum_{l=1}^{m}\frac{c_{-l}b_l^{-1}}{b_l - \lambda}Q_1^*Q_1 + \sum_{l=1}^{n}\frac{\widetilde{c}_{-l}\widetilde{b}_l^{-1}}{\widetilde{b}_l - \lambda}Q_B^*Q_B\Big]\vec{z} = 0, \quad \vec{z} \in H. \tag{3.3}$$

Ясно, что спектр оператора $\mathcal{A}$ и спектр пучка $L(\lambda)$ (спектры задач (3.1) и (3.3)) совпадают между собой при $\lambda \notin \sigma(\mathcal{G})$. Прежде чем исследовать существенный и дискретный спектр оператора $\mathcal{A}$, докажем следующую лемму.

Лемма 3.1. $\{0, b_1, \ldots, b_m\} \subset \rho(\mathcal{A})$. *Если $c_1 > 0$ достаточно велико, то точка $\lambda = \widetilde{b}_q$ не является собственным значением спектральной задачи* (3.1) (*с.з. оператора* $\mathcal{A}$) *при* $q = \overline{1, n}$.

Доказательство. Пусть $\lambda = 0$. Докажем, что $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$. Учитывая факторизацию (2.19), достаточно установить, что оператор $\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*$ положительно определен. Для любого $w \in \mathcal{H}_0$ имеем

$$\big((\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)w, w\big)_{\mathcal{H}_0} = \big(\mathcal{G}w, w\big)_{\mathcal{H}_0} + \|\mathcal{Q}^*w\|^2_{\mathcal{H}_0} = \sum_{l=1}^{m} b_l\|\vec{v}_l\|^2_H + \sum_{l=1}^{n}\widetilde{b}_l\|p_l\|^2_{L_{2,\Omega}} +$$
$$+ \Big\|Q_0^*\vec{v} + \sum_{l=1}^{m}\sqrt{\frac{c_{-l}}{b_l}}Q_1^*\vec{v}_l + \sum_{l=1}^{n}\sqrt{\frac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l}}Q_B^*p_l\Big\|^2_H = \|\mathcal{S}w\|^2_{\mathcal{H}_0} \geqslant \|\mathcal{S}^{-1}\|^{-2}_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_0)} \cdot \|w\|^2_{\mathcal{H}_0}.$$

Здесь $\mathcal{S}$ — это верхний треугольный операторный блок с непрерывно обратимой главной диагональю $\operatorname{diag}\big(Q_0^*, b_1 I, \ldots, b_m I, \widetilde{b}_1 I, \ldots, \widetilde{b}_n I\big)$. Следовательно, $\mathcal{A}^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Пусть $\lambda = b_q$ $(q = \overline{1,m})$. Запишем резольвентное уравнение $(\mathcal{A} - \lambda)\xi = \xi_0$ в виде системы:

$$\begin{cases} A^{1/2}\Big[A^{1/2}\vec{u} + Q_0^*\vec{v} + \sum\limits_{l=1}^{m}\sqrt{\dfrac{c_{-l}}{b_l}}Q_1^*\vec{v}_l + \sum\limits_{l=1}^{n}\sqrt{\dfrac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l}}Q_B^*p_l\Big] - \lambda\vec{u} = \vec{u}_0, \\ -Q_0A^{1/2}\vec{u} - \lambda\vec{v} = \vec{v}_0, \\ -\sqrt{\dfrac{c_{-l}}{b_l}}Q_1A^{1/2}\vec{u} + b_l\vec{v}_l - \lambda\vec{v}_l = \vec{v}_{l0}, \quad l = \overline{1,m}, \\ -\sqrt{\dfrac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l}}Q_BA^{1/2}\vec{u} + \widetilde{b}_lp_l - \lambda p_l = p_{l0}, \quad l = \overline{1,n}. \end{cases} \tag{3.4}$$

Полагая здесь $\lambda = b_q$, из третьей строчки при $l = q$ найдем, что $A^{1/2}\vec{u} = -\sqrt{c_{-q}^{-1}b_q}Q_1^{-1}\vec{v}_{q0}$. Учитывая (2.4) и третье условие в (2.13), теперь из второй, третьей и четвертой строчки в (3.4) имеем

$$\vec{v} = \frac{1}{b_q}\Big[\sqrt{c_{-q}^{-1}b_q}Q_0Q_1^{-1}\vec{v}_{q0} - \vec{v}_0\Big], \quad \vec{u} = -\sqrt{c_{-q}^{-1}b_q}A^{-1/2}Q_1^{-1}\vec{v}_{q0}$$
$$\vec{v}_l = \frac{1}{b_l - b_q}\Big[-\sqrt{c_{-l}b_l^{-1}c_{-q}^{-1}b_q}\vec{v}_{q0} + \vec{v}_{l0}\Big], \quad l = \overline{1,m}, \ l \neq q,$$
$$p_l = \frac{1}{\widetilde{b}_l - b_q}\Big[-\sqrt{\widetilde{c}_{-l}\widetilde{b}_l^{-1}c_{-q}^{-1}b_q}Q_BQ_1^{-1}\vec{v}_{q0} + p_{l0}\Big], \quad l = \overline{1,n}.$$

Отсюда и из первой строчки в (3.4) с помощью ограниченных операторов теперь можно легко найти $\vec{v}_q$. Следовательно, $(\mathcal{A} - b_q)^{-1} \in \mathcal{L}(\mathcal{H})$.

Пусть $\lambda = \widetilde{b}_q$ $(q = \overline{1,n})$. Из четвертой строчки в (3.4) при $l = q$ $(\lambda = \widetilde{b}_q,\ \xi_0 = 0)$ получим, что $Q_BA^{1/2}\vec{u} = 0$. Умножим первое уравнение в (3.4) скалярно на $\vec{u}$ и преобразуем полученное выражение с помощью последнего соотношения, второй и последующих строчек в (3.4):

$$\|A^{1/2}\vec{u}\|_H^2 - \frac{1}{\widetilde{b}_q}\|A_0^{1/2}\vec{u}\|_H^2 + \sum_{l=1}^{m}\frac{c_{-l}}{b_l(b_l - \widetilde{b}_q)}\|A_1^{1/2}\vec{u}\|_H^2 - \widetilde{b}_q\|\vec{u}\|_H^2 = 0.$$

Отсюда, из определения операторов A, A_0, A_1 и из (2.7) имеем

$$\Big[\frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2\widetilde{b}_q}\big(c_0 - \Gamma_p(0)\big) + \sum_{l=1}^{m}\frac{c_{-l}}{2b_l(b_l - \widetilde{b}_q)}\Big]\mathcal{J}(\vec{u}) - \widetilde{b}_q\|\vec{u}\|_H^2 +$$
$$+\Big[\widetilde{c}_1 + \frac{1}{6}c_1 - \frac{1}{\widetilde{b}_q}\Big(\widetilde{c}_0 + \frac{1}{6}\big(c_0 - \Gamma_p(0)\big) - \widetilde{\Gamma}_p(0)\Big) + \sum_{l=1}^{m}\frac{c_{-l}}{6b_l(b_l - \widetilde{b}_q)}\Big]\mathcal{D}(\vec{u}) = 0. \tag{3.5}$$

Пусть $C_F > 0$ — константа из неравенства Фридрихса $\mathcal{J}(\vec{u}) \geqslant C_F\|\vec{u}\|_H^2$, верного для любого $\vec{u} \in H_{A(\alpha,\beta)}$ $(\alpha > 0,\ \beta \geqslant 0)$. Допустим, что $c_1 > 0$ настолько велико, что

$$\Big[\frac{1}{2}c_1 - \frac{1}{2\widetilde{b}_q}\big(c_0 - \Gamma_p(0)\big) + \sum_{l=1}^{m}\frac{c_{-l}}{2b_l(b_l - \widetilde{b}_q)}\Big]C_F - \widetilde{b}_q > 0,$$
$$\widetilde{c}_1 + \frac{1}{6}c_1 - \frac{1}{\widetilde{b}_q}\Big(\widetilde{c}_0 + \frac{1}{6}\big(c_0 - \Gamma_p(0)\big) - \widetilde{\Gamma}_p(0)\Big) + \sum_{l=1}^{m}\frac{c_{-l}}{6b_l(b_l - \widetilde{b}_q)} \geqslant 0,$$

тогда из (3.5) получим, что $\vec{u} = \vec{0}$. Из второй, третьей и четвертой строчки в (3.4) тогда следует, что $\vec{v} = \vec{0}$, $\vec{v}_l = \vec{0}$ $(l = \overline{1,m})$, $p_l = 0$ $(l = \overline{1,n},\ l \neq q)$. Из первого уравнения в (3.4) теперь получим, что $A^{1/2}Q_B^*p_q = 0$. Последнее вместе с $\mathrm{Ker}B^* = \{0\}$ влечет $p_q = 0$. Таким образом, $\xi = 0$ и $\lambda = \widetilde{b}_q$ не является собственным значением оператора $\mathcal{A}$. Лемма доказана. □

3.2. Определение локальных координат и эллиптической краевой задачи. Приведем необходимые определения и факты из теории эллиптических краевых задач (см. [5,11,18,21]), необходимые для дальнейшего. Рассмотрим систему дифференциальных уравнений в частных производных не выше второго порядка

$$\mathcal{L}(x,D)u(x)=f(x),\quad x\in\Omega, \tag{3.6}$$

где $x=(x_1;x_2;x_3)\in\Omega$, $D:=(D_1;D_2;D_3):=\Big(-i\dfrac{\partial}{\partial x_1};-i\dfrac{\partial}{\partial x_2};-i\dfrac{\partial}{\partial x_3}\Big)^\tau$, $u(x):=(u_1(x);\ldots;u_n(x))^\tau$, $f(x):=(f_1(x);\ldots;f_n(x))^\tau$. Пусть $\mathcal{L}(x,\xi)$ $(\xi:=(\xi_1;\xi_2;\xi_3)^\tau)$ — полиномиальная матрица, получаемая из (3.6) заменой символа D на ξ. Будем считать далее, что (3.6) определяет невырожденную систему Дуглиса—Ниренберга (см. [5, с. 375], а также [18]).

Определение 3.1 (см. [5])**.** Оператор $\mathcal{L}(x,D)$ называется *эллиптическим* в замкнутой области $\overline{\Omega}$, если $\pi\det\mathcal{L}(x,\xi)\neq 0$ для любого $x\in\overline{\Omega}$ и $\xi\in\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$, где символ π обозначает старшую однородную часть многочлена.

Известно, что $\pi\det\mathcal{L}(x,\xi)=\det\pi\mathcal{L}(x,\xi)$, где $\pi\mathcal{L}$ — главная часть матрицы $\mathcal{L}$ (о выделении главной части системы Дуглиса—Ниренберга см. [5, с. 377]).

Возьмем произвольную точку $z_0\in S$ и введем, следуя [11,21], в окрестности этой точки следующую локальную систему координат. Пусть локально граница S задается бесконечно дифференцируемыми функциями $z_i=z_i(y_1,y_2)$, $i=1,2,3$ параметров y_1, y_2, которые выбираются так, что $y_i=const$ есть линии кривизны. В векторной записи $z=z(y')$, где $y':=(y_1;y_2)$. Обозначим через $N(y')$ внутреннюю единичную нормаль к S. В окрестности границы S введем координаты y_1, y_2, y_3, где y_3 — расстояние от точки x до S. Тогда $x=z(y')+y_3N(y')$. При этом нумерация y_1, y_2 задается так, чтобы направление векторного произведения $\partial z/\partial y_1\times\partial z/\partial y_2$ совпадало с нормалью $N(y')$. Пусть $E_i(y')$ $(i=1,2)$ — коэффициенты первой квадратичной формы поверхности S, тогда $\partial z/\partial y_i\cdot\partial z/\partial y_j=E_i(y')\delta_{ij}$, где δ_{ij} — символ Кронекера.

Рассмотрим теперь систему краевых условий

$$\mathcal{B}(x,D)u(x)=g(x),\quad x\in S, \tag{3.7}$$

где $\mathcal{B}(x,D)$ — матрица размером $3\times n$, составленная из линейных дифференциальных операторов не выше первого порядка. Перепишем операторы краевой задачи (3.6), (3.7) во введенной выше локальной системе координат и рассмотрим главные части этих операторов:

$$\pi\mathcal{L}\big(y,-i\frac{\partial}{\partial y}\big)=\pi\mathcal{L}\big(y,-i\frac{\partial}{\partial y'},-i\frac{\partial}{\partial y_3}\big),\quad \pi\mathcal{B}\big(y,-i\frac{\partial}{\partial y}\big)=\pi\mathcal{B}\big(y,-i\frac{\partial}{\partial y'},-i\frac{\partial}{\partial y_3}\big).$$

Определение 3.2 (см. [5, с. 380], а также [11, с. 12])**.** Краевая задача (3.6), (3.7) называется *эллиптической*, если выполнено определение 3.1 и условие Шапиро—Лопатинского:

$$\operatorname{rang}\int\limits_{\gamma_+}\pi\mathcal{B}\big((y',0),\xi',\xi_3\big)\big[\pi\mathcal{L}\big((y',0),\xi',\xi_3\big)\big]^{-1}\big(I_n,\xi_3I_n\big)\,d\xi_3=3$$

для любого y' из области определения параметров локальной системы координат, для любого $\xi'\in\mathbb{R}^2\backslash\{0\}$ и $\xi_3\in\mathbb{R}$. Здесь I_n — единичная матрица в $\mathbb{R}^n$, а через (I_n,ξ_3I_n) обозначена матрица размера $n\times 2n$; γ_+ — спрямляемый контур в верхней ξ_3-полуплоскости, обходящий в положительном направлении все ξ_3-корни уравнения $\det\pi\mathcal{L}((y',0),\xi',\xi_3)=0$, лежащие в верхней полуплоскости.

Для проверки условия Шапиро—Лопатинского (условия дополнительности) понадобятся также следующие леммы и обозначения из [11].

Лемма 3.2 (см. [11, с. 14])**.** *В построенной выше локальной системе координат операторы $\partial/\partial x_i$ принимают вид*

$$\frac{\partial}{\partial x_i}=\sum_{j=1}^{2}\big(1-K_jy_3\big)^{-1}E_j^{-1}(y')\frac{\partial z_i}{\partial y_j}\,\frac{\partial}{\partial y_j}+N_i\frac{\partial}{\partial y_3},$$

где K_j $(j=1,2)$ — главные кривизны поверхности S.

Введем некоторые обозначения. Пусть

$$\beta := (\beta_1; \beta_2; \beta_3)^\tau, \quad \beta_l := \sum_{j=1}^{2} E_j^{-1}(y') \frac{\partial z_l}{\partial y_j} \xi_j \ \ (l = 1, 2, 3), \quad \alpha := \beta + \xi_3 N, \tag{3.8}$$

тогда $\beta^\tau N = 0$, $N^\tau \beta = 0$, $N^\tau N = 1$. Положим $|\xi'|^2 := |\beta|^2$, тогда $|\xi'|^2 := \beta^\tau \beta = E_1^{-1}\xi_1^2 + E_2^{-1}\xi_2^2$. В локальной системе координат под символом $|\xi|^2$ будем понимать выражение $|\xi|^2 := |\xi'|^2 + \xi_3^2$.

Лемма 3.3 (см. [11, с. 15]). *Во введенной выше локальной системе координат при $y_3 = 0$ имеют место следующие формулы для главных символов*:

$$\sigma_0\Big(\frac{\partial}{\partial x_l}\Big) = i\alpha_l, \quad \sigma_0(\nabla) = i\alpha, \quad \sigma_0(\mathrm{div}) = i\alpha^\tau, \quad \sigma_0(\Delta) = -|\xi|^2 = -(|\xi'|^2 + \xi_3^2).$$

Лемма 3.4 (см. [11, с. 16]). *Справедливы следующие формулы для контурных интегралов, в которых контур интегрирования лежит в верхней ξ_3-полуплоскости и в положительном направлении окружает точку $\xi_3 = i|\xi'|$*:

$$\int\limits_{\gamma_+} \frac{d\xi_3}{|\xi|^2} = \frac{2\pi}{2|\xi'|}, \quad \int\limits_{\gamma_+} \frac{\xi_3\, d\xi_3}{|\xi|^2} = \frac{2\pi i}{2}, \quad \int\limits_{\gamma_+} \frac{\xi_3^2\, d\xi_3}{|\xi|^2} = -\frac{2\pi|\xi'|}{2}, \quad \int\limits_{\gamma_+} \frac{d\xi_3}{|\xi|^4} = \frac{2\pi}{4|\xi'|^3},$$

$$\int\limits_{\gamma_+} \frac{\xi_3\, d\xi_3}{|\xi|^4} = 0, \quad \int\limits_{\gamma_+} \frac{\xi_3^2\, d\xi_3}{|\xi|^4} = \frac{2\pi}{4|\xi'|}, \quad \int\limits_{\gamma_+} \frac{\xi_3^3\, d\xi_3}{|\xi|^4} = \frac{2\pi i}{2}, \qquad |\xi|^2 = |\xi'|^2 + \xi_3^2.$$

Основываясь на приведенных утверждениях, докажем следующие две леммы.

Лемма 3.5. *Пусть $c \neq 0$. Тогда следующая краевая задача эллиптична при $a \neq 0$*:

$$\begin{cases} -a\Delta\vec{u}(x) - b\nabla \mathrm{div}\vec{u}(x) + c\nabla p(x) = \vec{v}(x), \\ \ \ c\,\mathrm{div}\vec{u}(x) = q(x), \quad x \in \Omega, \qquad \vec{u}(x) = \vec{g}(x), \quad x \in S. \end{cases}$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}(x, D)$ — дифференциальный оператор рассматриваемой системы, тогда

$$\mathcal{L}(x, D) = \begin{pmatrix} -a\Delta - b\nabla\mathrm{div} & c\nabla \\ c\,\mathrm{div} & 0 \end{pmatrix}, \quad \pi\mathcal{L}(x, \xi) = \begin{pmatrix} a|\xi|^2 I_3 + b\xi\xi^\tau & ic\xi \\ ic\xi^\tau & 0 \end{pmatrix}. \tag{3.9}$$

Обозначим через $\Gamma_\xi := (|\xi|^{-1}\xi, a^\perp, b^\perp)$ матрицу, где вектор-столбцы $a^\perp$, $b^\perp$ ($|a^\perp| = |b^\perp| = 1$) ортогональны ξ и между собой. Просто проверяются следующие формулы:

$$\Gamma_\xi^\tau \Gamma_\xi = I_3, \quad \Gamma_\xi^\tau \xi = (|\xi|, 0, 0)^\tau =: |\xi| e_1, \quad \Gamma_\xi^\tau \xi\xi^\tau \Gamma_\xi = \mathrm{diag}(|\xi|^2, 0, 0) =: |\xi|^2 P_1. \tag{3.10}$$

Обозначим $\mathcal{S} := \mathrm{diag}(\Gamma_\xi, 1)$ и, используя (3.10), проведем следующие вычисления:

$$\pi\mathrm{det}\mathcal{L}(x, \xi) = \mathrm{det}\pi\mathcal{L}(x, \xi) = \mathrm{det}\mathcal{S}^\tau \pi\mathcal{L}(x, \xi)\mathcal{S} = \det \begin{pmatrix} a|\xi|^2 I_3 + bP_1 & ic|\xi|e_1 \\ ic|\xi|e_1^\tau & 0 \end{pmatrix} = a^2c^2|\xi|^6 \neq 0 \tag{3.11}$$

для любого $x \in \overline{\Omega}$ и $\xi \in \mathbb{R}^3 \backslash \{0\}$. То есть оператор $\mathcal{L}(x, D)$ эллиптичен в замкнутой области $\overline{\Omega}$.

Проверим теперь условие Шапиро—Лопатинского. Зафиксируем $z_0 \in S$ и введем в окрестности этой точки локальную систему координат, как описано выше. Перепишем операторную матрицу изучаемой системы в локальной системе координат и выделим из нее главную часть. Главный символ этой главной части имеет вид (3.9) с заменой ξ на α. При этом $\mathrm{det}\pi\mathcal{L}((y', 0), \xi', \xi_3)$ вычисляется по формуле (3.11) с заменой $|\xi|^2$ на $|\xi'|^2 + \xi_3^2$, где $|\xi'|^2 = E_1^{-1}\xi_1^2 + E_2^{-1}\xi_2^2$. Уравнение $\mathrm{det}\pi\mathcal{L}((y', 0), \xi', \xi_3) = 0$ имеет трехкратные ξ_3-корни $\xi_3 = \pm i|\xi'|$.

Найдем матрицу, обратную к $\pi\mathcal{L}((y', 0), \xi', \xi_3)$:

$$\big[\pi\mathcal{L}\big((y', 0), \xi', \xi_3\big)\big]^{-1} = \begin{pmatrix} a|\xi|^2 I_3 + b\alpha\alpha^\tau & ic\alpha \\ ic\alpha^\tau & 0 \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \dfrac{|\xi|^2 I_3 - \alpha\alpha^\tau}{a|\xi|^4} & -\dfrac{i\alpha}{c|\xi|^2} \\ -\dfrac{i\alpha^\tau}{c|\xi|^2} & \dfrac{a + b}{c^2} \end{pmatrix}.$$

Учитывая, что $\pi\mathcal{B}((y',0),\xi',\xi_3)=(I_3,0_{3\times1})$, найдем ранг следующей матрицы:

$$\int\limits_{\gamma_+}\pi\mathcal{B}\big((y',0),\xi',\xi_3\big)\big[\pi\mathcal{L}\big((y',0),\xi',\xi_3\big)\big]^{-1}\big(I_4,\xi_3 I_4\big)\,d\xi_3=\int\limits_{\gamma_+}\Big(\frac{|\xi|^2I_3-\alpha\alpha^\tau}{a|\xi|^4},\frac{-i\alpha}{c|\xi|^2}\Big)\big(I_4,\xi_3 I_4\big)\,d\xi_3=$$

$$=\int\limits_{\gamma_+}\Big(\frac{|\xi|^2I_3-\alpha\alpha^\tau}{a|\xi|^4},\frac{-i\alpha}{c|\xi|^2},\frac{\xi_3|\xi|^2I_3-\xi_3\alpha\alpha^\tau}{a|\xi|^4},\frac{-i\xi_3\alpha}{c|\xi|^2}\Big)\,d\xi_3. \quad (3.12)$$

Используя формулы (3.8), а также контурные интегралы из леммы 3.4, вычислим матрицу

$$M:=\int\limits_{\gamma_+}\frac{|\xi|^2I_3-\alpha\alpha^\tau}{a|\xi|^4}\,d\xi_3=\frac{\pi}{2a|\xi'|^3}\Big(2|\xi'|^2I_3-\beta\beta^\tau-|\xi'|^2NN^\tau\Big). \quad (3.13)$$

Обозначим через $\Gamma_\alpha:=(|\xi'|^{-1}\beta,a^\perp,N)$ матрицу, где вектор-столбец $a^\perp$ ($|a^\perp|=1$) ортогонален β и N. Непосредственно проверяются следующие формулы:

$$\Gamma_\alpha^\tau\Gamma_\alpha=I_3,\quad \Gamma_\alpha^\tau\beta=(|\xi'|,0,0)^\tau=:|\xi'|e_1,\quad \Gamma_\alpha^\tau N=(0,0,1)^\tau=:e_3, \quad (3.14)$$

$$\Gamma_\alpha^\tau\beta\beta^\tau\Gamma_\alpha=\mathrm{diag}(|\xi'|^2,0,0)=:|\xi'|^2P_1,\quad \Gamma_\alpha^\tau NN^\tau\Gamma_\alpha=\mathrm{diag}(0,0,1)=:P_3. \quad (3.15)$$

Используя (3.14)-(3.15) в (3.13), получим, что

$$\det M=\det\Gamma_\alpha^\tau M\Gamma_\alpha=\frac{\pi^3}{8a^3|\xi'|^9}\det\Big(2|\xi'|^2I_3-|\xi'|^2P_1-|\xi'|^2P_3\Big)=\frac{\pi^3}{4a^3|\xi'|^3}\neq0$$

при $\xi'\neq0$. Отсюда следует, что ранг матрицы (3.12) равен 3 при $\xi'\neq0$. Согласно определению 3.2 исследуемая задача эллиптична. Лемма доказана. □

Лемма 3.6. *Следующая краевая задача эллиптична при $a\neq0$, $a+b\neq0$ и $2a+b\neq0$:*

$$-a\Delta\vec{u}(x)-b\nabla\mathrm{div}\vec{u}(x)=\vec{v}(x),\quad x\in\Omega,\qquad \vec{u}(x)=\vec{g}(x),\quad x\in S.$$

Доказательство. Пусть $\mathcal{L}(x,D)$ — дифференциальный оператор рассматриваемой системы, тогда

$$\mathcal{L}(x,D)=-a\Delta-b\nabla\mathrm{div},\quad \pi\mathcal{L}(x,\xi)=a|\xi|^2I_3+b\xi\xi^\tau. \quad (3.16)$$

Используя (3.10), проведем следующие вычисления:

$$\pi\det\mathcal{L}(x,\xi)=\det\pi\mathcal{L}(x,\xi)=\det\Gamma_\xi^\tau\pi\mathcal{L}(x,\xi)\Gamma_\xi=\det\big(a|\xi|^2I_3+b|\xi|^2P_1\big)=a^2(a+b)|\xi|^6\neq0 \quad (3.17)$$

для любого $x\in\overline{\Omega}$ и $\xi\in\mathbb{R}^3\backslash\{0\}$, то есть оператор $\mathcal{L}(x,D)$ эллиптичен в замкнутой области $\overline{\Omega}$.

Проверим теперь условие Шапиро—Лопатинского. Зафиксируем $z_0\in S$ и введем в окрестности этой точки локальную систему координат, как описано выше. Перепишем операторную матрицу изучаемой системы в локальной системе координат и выделим из нее главную часть. Главный символ этой главной части имеет вид (3.16) с заменой ξ на α. При этом $\det\pi\mathcal{L}((y',0),\xi',\xi_3)$ вычисляется по формуле (3.17) с заменой $|\xi|^2$ на $|\xi'|^2+\xi_3^2$, где $|\xi'|^2=E_1^{-1}\xi_1^2+E_2^{-1}\xi_2^2$. Уравнение $\det\pi\mathcal{L}((y',0),\xi',\xi_3)=0$ имеет трехкратные ξ_3-корни $\xi_3=\pm i|\xi'|$.

Найдем матрицу, обратную к $\pi\mathcal{L}((y',0),\xi',\xi_3)$:

$$\big[\pi\mathcal{L}\big((y',0),\xi',\xi_3\big)\big]^{-1}=\big(a|\xi|^2I_3+b\alpha\alpha^\tau\big)^{-1}=\frac{(a+b)|\xi|^2I_3-b\alpha\alpha^\tau}{a(a+b)|\xi|^4}.$$

Учитывая, что $\pi\mathcal{B}((y',0),\xi',\xi_3)=I_3$, найдем ранг следующей матрицы:

$$\int\limits_{\gamma_+}\pi\mathcal{B}\big((y',0),\xi',\xi_3\big)\big[\pi\mathcal{L}\big((y',0),\xi',\xi_3\big)\big]^{-1}\big(I_3,\xi_3I_3\big)\,d\xi_3=$$

$$=\int\limits_{\gamma_+}\Big(\frac{(a+b)|\xi|^2I_3-b\alpha\alpha^\tau}{a(a+b)|\xi|^4},\frac{(a+b)\xi_3|\xi|^2I_3-b\xi_3\alpha\alpha^\tau}{a(a+b)|\xi|^4}\Big)\,d\xi_3. \quad (3.18)$$

Используя формулы (3.8), а также контурные интегралы из леммы 3.4, вычислим матрицу

$$M:=\int\limits_{\gamma_+}\frac{(a+b)|\xi|^2I_3-b\alpha\alpha^\tau}{a(a+b)|\xi|^4}\,d\xi_3=\frac{\pi}{2a|\xi'|^3}\Big(2|\xi'|^2I_3-\frac{b}{a+b}\beta\beta^\tau-\frac{b}{a+b}|\xi'|^2NN^\tau\Big).$$

Отсюда и из (3.14)-(3.15) получим, что

$$\det M = \det\Gamma_\alpha^\tau M\Gamma_\alpha = \frac{\pi^3}{8a^3|\xi'|^9}\det\Big(2|\xi'|^2 I_3 - \frac{b}{a+b}\big(|\xi'|^2 P_1 + |\xi'|^2 P_3\big)\Big) = \frac{\pi^3(2a+b)^2}{4a^3(a+b)^2|\xi'|^3} \neq 0$$

при $\xi' \neq 0$. Отсюда следует, что ранг матрицы (3.18) равен 3 при $\xi' \neq 0$. Согласно определению 3.2 исследуемая задача эллиптична. Лемма доказана. □

3.3. О существенном и дискретном спектре задачи.

Определение 3.3. Существенным спектром оператора $\mathcal{A}$ (спектральной задачи (3.1)) назовем множество $\sigma_{ess} := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid (\mathcal{A} - \lambda) - \text{нефредгольмов}\}$.

Для описания существенного спектра оператора $\mathcal{A}$ определим две функции:

$$\begin{gathered}\varphi(\lambda) := \lambda c_1 - \Big[c_0 - \sum_{l=1}^{m}\frac{c_{-l}}{b_l - \lambda}\Big],\\ \psi(\lambda) := \lambda\big(\widetilde{c}_1 + \frac{1}{6}c_1\big) - \Big[\widetilde{c}_0 + \frac{1}{6}c_0 - \sum_{l=1}^{m}\frac{c_{-l}}{6(b_l-\lambda)} - \sum_{l=1}^{n}\frac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l - \lambda}\Big].\end{gathered} \tag{3.19}$$

Следующие две леммы опираются на работу [19], из которой следует, что если оператор определяется эллиптической по Дуглису—Ниренбергу системой, то он фредгольмов в точности тогда, когда эллиптична соответствующая краевая задача. Последнее эквивалентно тому, что эллиптичен соответствующий дифференциальный оператор и краевые условия удовлетворяют условию дополнительности (условию Шапиро—Лопатинского).

Лемма 3.7. $\widetilde{b}_q \notin \sigma_{ess}(\mathcal{A})$ $(q = \overline{1,n})$ *тогда и только тогда, когда* $\varphi(\widetilde{b}_q) \neq 0$.

Доказательство. Докажем, что оператор $(\mathcal{A} - \widetilde{b}_q)$ фредгольмов в точности тогда, когда $\varphi(\widetilde{b}_q) \neq 0$. Пусть $\xi \in \operatorname{Ker}(\mathcal{A} - \widetilde{b}_q)$, тогда из (3.4) при $\lambda = \widetilde{b}_q$, $\xi_0 = 0$ найдем, что $(\vec{u}; p_q)^\tau \in \operatorname{Ker}\mathcal{A}_q$,

$$\mathcal{A}_q := \begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} I - \widetilde{b}_q A^{-1} - \dfrac{Q_0^*Q_0}{\widetilde{b}_q} + \displaystyle\sum_{l=1}^{m}\frac{c_{-l}Q_1^*Q_1}{b_l(b_l - \widetilde{b}_q)} + \sum_{l=1, l\neq q}^{n}\frac{\widetilde{c}_{-l}Q_B^*Q_B}{\widetilde{b}_l(\widetilde{b}_l - \widetilde{b}_q)} & \sqrt{\dfrac{\widetilde{c}_{-q}}{\widetilde{b}_q}}Q_B^* \\ -\sqrt{\dfrac{\widetilde{c}_{-q}}{\widetilde{b}_q}}Q_B & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix} A^{1/2} & 0 \\ 0 & \mathcal{I}_0\end{pmatrix}.$$

Верно и обратное утверждение. Таким образом, $\operatorname{dimKer}(\mathcal{A} - \widetilde{b}_q) < +\infty$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{dimKer}\mathcal{A}_q < +\infty$. Далее, можно проверить, что

$$\mathcal{A}^* = \operatorname{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}_0)\begin{pmatrix} I & -\mathcal{Q}^* \\ \mathcal{Q} & \mathcal{G}\end{pmatrix}\operatorname{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}_0), \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}^*) = \Big\{\xi = (\vec{u}; w)^\tau \in \mathcal{H}\Big|\ \vec{u} - A^{-1/2}\mathcal{Q}^* w \in \mathcal{D}(A)\Big\}.$$

Отсюда, проведя вычисления как и выше, получим, что $\operatorname{dimKer}(\mathcal{A}^* - \widetilde{b}_q) < +\infty$ тогда и только тогда, когда $\operatorname{dimKer}\mathcal{A}_q^* < +\infty$. Таким образом, оператор $(\mathcal{A} - \widetilde{b}_q)$ фредгольмов или нет одновременно с оператором $\mathcal{A}_q$.

Краевая задача, отвечающая операторному уравнению $\mathcal{A}_q(\vec{u}; p_q)^\tau = (\vec{u}_0; p_{q0})^\tau$, имеет вид

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{2\widetilde{b}_q}\varphi(\widetilde{b}_q)\Delta\vec{u}(x) - \dfrac{1}{\lambda}\Big[\psi(\lambda) - \dfrac{\widetilde{c}_{-q}}{\widetilde{b}_q - \lambda}\Big]\Big|_{\lambda = \widetilde{b}_q}\nabla\operatorname{div}\vec{u}(x) - \widetilde{b}_q\rho(x)\vec{u}(x) - \sqrt{\dfrac{\widetilde{c}_{-q}}{\widetilde{b}_q}}\nabla p_q(x) = \rho(x)\vec{u}_0(x), \\ -\sqrt{\dfrac{\widetilde{c}_{-q}}{\widetilde{b}_q}}\operatorname{div}\vec{u}(x) = p_{q0}(x), \quad x \in \Omega, \qquad \vec{u}(x) = \vec{0}, \quad x \in S.\end{cases}$$

Эта краевая задача при $\varphi(\widetilde{b}_q) \neq 0$ определяет невырожденную систему Дуглиса—Ниренберга и, согласно лемме 3.5, является эллиптической. Из работы [19] следует, что $\mathcal{A}_q$ фредгольмов. □

Из леммы 3.1 следует, что спектр оператора $\mathcal{A}$, кроме спектра пучка $L(\lambda)$, может содержать в себе еще некоторые точки из множества $\{\widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_n\}$. Если $c_1 > 0$ достаточно велико, то из доказанной леммы и леммы 3.1 следует, что спектры оператора $\mathcal{A}$ и пучка $L(\lambda)$ (спектры задач (3.1) и (3.3)) совпадают.

Лемма 3.8. *$\lambda \notin \sigma_{ess}(\mathcal{A})$ тогда и только тогда, когда*

$$\varphi(\lambda) \neq 0, \quad \frac{1}{2}\varphi(\lambda) + \psi(\lambda) \neq 0, \quad \varphi(\lambda) + \psi(\lambda) \neq 0, \quad \lambda \neq \infty.$$

Доказательство. Предположим, что $\lambda \notin \{0, b_1, \ldots, b_m, \widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_n\}$ (см. леммы 3.1, 3.7). Как и в лемме 3.7, здесь можно установить, что оператор $(\mathcal{A} - \lambda)$ фредгольмов одновременно с оператором $A^{1/2}L(\lambda)A^{1/2}$ (см. определение пучка $L(\lambda)$ в (3.3)). Краевая задача, отвечающая операторному уравнению $A^{1/2}L(\lambda)A^{1/2}\vec{u} = \vec{u}_0$, имеет вид

$$-\frac{1}{2\lambda}\varphi(\lambda)\Delta\vec{u}(x) - \frac{1}{\lambda}\psi(\lambda)\nabla \mathrm{div}\vec{u}(x) - \lambda\rho(x)\vec{u}(x) = \rho(x)\vec{u}_0(x), \quad x \in \Omega, \qquad \vec{u}(x) = \vec{0}, \quad x \in S.$$

Эта краевая задача при выполнении условий леммы определяет невырожденную систему Дуглиса—Ниренберга и согласно лемме 3.6 является эллиптической. Из работы [19] следует, что оператор $A^{1/2}L(\lambda)A^{1/2}$ фредгольмов. □

Следствием лемм 3.1, 3.7 и 3.8 является следующая теорема.

Теорема 3.1. *Существенным спектром оператора $\mathcal{A}$ является множество*

$$\sigma_{ess}(\mathcal{A}) = \big\{\varphi(\lambda) = 0\big\} \cup \big\{\frac{1}{2}\varphi(\lambda) + \psi(\lambda) = 0\big\} \cup \big\{\varphi(\lambda) + \psi(\lambda) = 0\big\} \cup \{\infty\},$$

где функции $\varphi(\lambda)$ и $\psi(\lambda)$ определены в (3.19). *Множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений* (*с.з.*) *конечной кратности оператора $\mathcal{A}$.*

Доказательство. Из определения 3.3, лемм 3.1, 3.7, 3.8 следует формула для существенного спектра оператора $\mathcal{A}$. Далее, в лемме 2.3 доказано, что оператор $-\mathcal{A}$ является максимальным диссипативным оператором. Следовательно, оператор $(\mathcal{A} - \lambda)$ непрерывно обратим при отрицательных λ, и его дефект и индекс равны нулю. Множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$, очевидно, является связным. Отсюда и из [10, теорема 5.17, с. 296] (теорема об устойчивости индекса и дефекта замкнутого оператора) следует, что множество $\mathbb{C}\backslash\sigma_{ess}(\mathcal{A})$ состоит из регулярных точек и изолированных собственных значений конечной кратности оператора $\mathcal{A}$. □

Отметим здесь еще раз, что для упрощения вычислений и формулировок некоторых утверждений предполагается выполненным условие $\{b_1, \ldots, b_m\} \cap \{\widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_n\} = \varnothing$ (см. (2.13)). Из условий (2.13) также следует, что $\varphi(0) < 0$, $\psi(0) \leqslant 0$. Простые геометрические рассуждения показывают, что конечный существенный спектр оператора $\mathcal{A}$ состоит из не более чем $3m + 2n + 3$ действительных положительных точек. Если уравнения $\varphi(\lambda) = 0$ и $\psi(\lambda) = 0$ не имеют одинаковых корней, то существенный спектр оператора $\mathcal{A}$ состоит в точности из $3m + 2n + 3$ действительных положительных точек.

3.4. Локализация спектра и асимптотика спектра на бесконечности. Изучим вопрос о локализации спектра оператора $\mathcal{A}$ или, что то же, пучка $L(\lambda)$ (см. (3.3)). Прежде всего, из леммы 2.3 следует, что $\sigma(\mathcal{A}) \subset \{\mathrm{Re}\lambda \geqslant 0\}$. Далее, имеет место следующая теорема.

Теорема 3.2. *Для любого как угодно малого $\varepsilon > 0$ существует $R = R(\varepsilon) > 0$ такое, что весь спектр задачи* (3.3) *принадлежит множеству $\Lambda_\varepsilon \cup C_R$, где $\Lambda_\varepsilon := \{\,|\mathrm{arg}\lambda| < \varepsilon\}$, $C_R := \{\,|\lambda| < R\}$. Более того, спектральная задача* (3.3) *имеет ветвь собственных значений $\{\lambda_k^{(+\infty)}\}_{k=1}^{\infty}$, расположенных в Λ_ε со следующей асимптотикой*:

$$\lambda_k^{(+\infty)} = \lambda_k(A)(1 + o(1)) \quad (k \to +\infty),$$

$$\lambda_k(A) = \Big\{\frac{1}{6\pi^2}\Big(2\Big[\frac{c_1}{2}\Big]^{-3/2} + \Big[\widetilde{c}_1 + \frac{2c_1}{3}\Big]^{-3/2}\Big)\int\limits_{\Omega} \rho^{3/2}(x)\, d\Omega\Big\}^{-2/3} k^{2/3}(1 + o(1)) \quad (k \to +\infty).$$

Доказательство. Из представления

$$L(\lambda) = (I - \lambda A^{-1})(I - (I - \lambda A^{-1})^{-1}F(\lambda)), \quad F(\lambda) \to 0 \quad (\lambda \to \infty, \quad \lambda \notin \Lambda_\varepsilon)$$

следует, что существует $R = R(\varepsilon)$ такое, что пучок $L(\lambda)$ (см. (3.3)) непрерывно обратим в $\mathbb{C}\backslash(\Lambda_\varepsilon \cup C_R)$. Наличие соответствующей ветви собственных значений и ее асимптотика следует из степенной асимптотики с.з. оператора A и теоремы А. С. Маркуса—В. И. Мацаева (см. [16]).

Асимптотика с.з. оператора A следует из [2, с. 10]. Точнее, согласно [2] собственные значения оператора A имеют асимптотику $\lambda_k(A) = C_A^{-2/3} k^{2/3}(1+o(1))$ $(k\to+\infty)$, где

$$C_A := \frac{1}{24\pi^3}\int\limits_{\Omega}\rho^{3/2}(x)\,d\Omega\int\limits_{|\xi|=1}\mathrm{Tr}\Big\{\Big(\Big[\frac{c_1}{2}\Big]|\xi|^2 I_3+\Big[\widetilde{c}_1+\frac{c_1}{6}\Big]\xi\xi^\tau\Big)^{-3/2}\Big\}\,dS(\xi). \tag{3.20}$$

Как и в лемме 3.5, введем матрицу $\Gamma_\xi := (|\xi|^{-1}\xi, a^\perp, b^\perp)$, где вектор-столбцы $a^\perp$, $b^\perp$ $(|a^\perp| = |b^\perp| = 1)$ ортогональны ξ и между собой. Используя формулы (3.10), найдем собственные значения матрицы в круглых скобках из (3.20):

$$\det\Big(\Big[\frac{c_1}{2}\Big]|\xi|^2 I_3-\lambda I_3+\Big[\widetilde{c}_1+\frac{c_1}{6}\Big]\xi\xi^\tau\Big)=\det\Gamma_\xi^\tau\Big(\Big[\frac{c_1}{2}\Big]|\xi|^2 I_3-\lambda I_3+\Big[\widetilde{c}_1+\frac{c_1}{6}\Big]\xi\xi^\tau\Big)\Gamma_\xi=$$
$$=\det\Big(\Big[\frac{c_1}{2}\Big]|\xi|^2 I_3-\lambda I_3+\Big[\widetilde{c}_1+\frac{c_1}{6}\Big]|\xi|^2 P_1\Big)=\Big(\Big[\widetilde{c}_1+\frac{2c_1}{3}\Big]|\xi|^2-\lambda\Big)\Big(\Big[\frac{c_1}{2}\Big]|\xi|^2-\lambda\Big)^2=0.$$

Следовательно, $\lambda_{1,2} = 1/2c_1|\xi|^2$, $\lambda_3 = (\widetilde{c}_1 + 2/3c_1)|\xi|^2$. Тогда имеем

$$\int\limits_{|\xi|=1}\mathrm{Tr}\Big\{\Big(\Big[\frac{c_1}{2}\Big]|\xi|^2 I_3+\Big[\widetilde{c}_1+\frac{c_1}{6}\Big]\xi\xi^\tau\Big)^{-3/2}\Big\}\,dS(\xi)=$$
$$=\int\limits_{|\xi|=1}\Big(2\Big[\frac{c_1}{2}\Big]^{-3/2}+\Big[\widetilde{c}_1+\frac{2c_1}{3}\Big]^{-3/2}\Big)|\xi|^{-3}\,dS(\xi)=4\pi\Big(2\Big[\frac{c_1}{2}\Big]^{-3/2}+\Big[\widetilde{c}_1+\frac{2c_1}{3}\Big]^{-3/2}\Big).$$

Отсюда и из (3.20) следует асимптотика собственных значений оператора A. Теорема доказана. □

В следующих двух теоремах установим более точную локализацию спектра оператора $\mathcal{A}$. Рассуждения теоремы 3.3 будут основаны на применении методов индефинитной метрики, которые можно найти в [1, 20]. В связи с этим обстоятельством будем рассматривать задачу (3.1) в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$, где $\mathcal{H}_+ := H$, $\mathcal{H}_- := \mathcal{H}_0$.

Определим оператор $\mathcal{J} := \mathrm{diag}(I, -\mathcal{I}_0)$ и введем в $\mathcal{H}$ индефинитное скалярное произведение по формуле $[\xi_1, \xi_2] := (\mathcal{J}\xi_1, \xi_2)_{\mathcal{H}} = (\vec{u}_1, \vec{u}_2)_{\mathcal{H}_+} - (w_1, w_2)_{\mathcal{H}_-}$. Введем ортопроекторы $\mathcal{P}_+$ и $\mathcal{P}_-$: $\mathcal{P}_+\mathcal{H} = \mathcal{H}_+$, $\mathcal{P}_-\mathcal{H} = \mathcal{H}_-$.

Приведем необходимые понятия и факты из теории пространств с индефинитной метрикой.

Подпространство L_+ пространства Крейна $\mathcal{H}$ называется *неотрицательным*, если $[\xi,\xi] \geqslant 0$ для любого $\xi \in L_+$ и *максимальным неотрицательным* $(L_+ \in \mathfrak{M}^+)$, если оно не является частью другого неотрицательного подпространства. Аналогично определяется *неположительное* подпространство L_-.

Известно (см. [1, с. 70]), что $L_+ \in \mathfrak{M}^+$ тогда и только тогда, когда существует $K_+ : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-$ $(\|K_+\| \leqslant 1)$ такой, что $L_+ = \{\xi = \xi_+ + K_+\xi_+ : \xi_+ \in \mathcal{H}_+\}$.

Подпространство L_+ называется *равномерно положительным*, если оно является гильбертовым пространством по отношению к скалярному произведению, порождаемому индефинитной метрикой.

Будем говорить, что пространство L_+ *принадлежит классу* h^+, если оно допускает разложение в прямую $\mathcal{J}$-ортогональную сумму конечномерного изотропного подпространства и равномерно положительного подпространства. В частности, $L_+ \in h^+$, если $K_+ \in \mathfrak{S}_\infty$ (см. [1, с. 84]).

Если $L_\pm \in \mathfrak{M}^\pm$ и L_+ $\mathcal{J}$-ортогонально L_-, то будем говорить, что они образуют *дуальную пару* $\{L_+, L_-\}$. Будем писать $\{L_+, L_-\} \in h$, если $L_\pm \in h^\pm$.

Будем говорить, что непрерывный $\mathcal{J}$-самосопряженный оператор $\mathcal{A}$ *принадлежит классу* (H) $(\mathcal{A} \in (H))$, если у него есть хотя бы одна дуальная пара $\{L_+, L_-\}$ инвариантных подпространств и каждая $\mathcal{A}$-инвариантная дуальная пара принадлежит классу h.

Теорема 3.3. *Спектр оператора $\mathcal{A}$ действительный, за исключением, быть может, конечного количества с.з., расположенных симметрично относительно действительной оси.*

Доказательство. Из факторизации (2.19) оператора $\mathcal{A}$ в форме Шура—Фробениуса и положительной определенности оператора $\mathcal{G} + \mathcal{Q}\mathcal{Q}^* \gg 0$ (см. лемму 3.1) найдем

$$
\begin{aligned}
\mathcal{A}^{-1} &= \begin{pmatrix} I & -A^{-1/2}\mathcal{Q}^* \\ 0 & \mathcal{I}_0 \end{pmatrix} \operatorname{diag}(A^{-1}, (\mathcal{G}+\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}) \begin{pmatrix} I & 0 \\ \mathcal{Q}A^{-1/2} & \mathcal{I}_0 \end{pmatrix} = \\
&= \begin{pmatrix} A^{-1} - A^{-1/2}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}+\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}\mathcal{Q}A^{-1/2} & -A^{-1/2}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}+\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1} \\ (\mathcal{G}+\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}\mathcal{Q}A^{-1/2} & (\mathcal{G}+\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1} \end{pmatrix}.
\end{aligned} \tag{3.21}
$$

Оператор $\mathcal{A}^{-1}$ $\mathcal{J}$-самосопряженный и ограниченный, следовательно, спектр оператора $\mathcal{A}$ симметричен относительно действительной оси (этот же факт следует и из самосопряженности пучка $L(\lambda)$). Теорема будет доказана полностью, если оператор $\mathcal{A}^{-1}$ имеет не более конечного количества невещественных с.з. Последнее, в свою очередь, будет верно, если $\mathcal{A}^{-1} \in (H)$ (см. [1, следствие 5.21, с. 245]). В самом деле, из компактности оператора $A^{-1/2}$ следует, что $\mathcal{P}_+\mathcal{A}^{-1}\mathcal{P}_-$ компактен, а значит (см. [1, с. 287]) оператор $\mathcal{A}^{-1}$ имеет дуальную инвариантную пару $\{L_+(\mathcal{A}^{-1}), L_-(\mathcal{A}^{-1})\}$. Пусть K_+ — угловой оператор инвариантного неотрицательного подпространства $L_+(\mathcal{A}^{-1})$, тогда $K_+ : \mathcal{H}_+ \to \mathcal{H}_-$, $\|K_+\| \leqslant 1$ и

$$
L_+(\mathcal{A}^{-1}) = \bigl\{(\vec{u}; w)^\tau \in \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_- \bigm| \ (\vec{u}; w)^\tau = (\vec{u}; K_+\vec{u})^\tau, \ \ \vec{u} \in \mathcal{H}_+\bigr\}.
$$

Пусть $(\vec{u}_1; w_1)^\tau = (\vec{u}_1; K_+\vec{u}_1)^\tau \in L_+(\mathcal{A}^{-1})$, тогда $\mathcal{A}^{-1}(\vec{u}_1; K_+\vec{u}_1)^\tau = (\vec{u}_2; K_+\vec{u}_2)^\tau$. Отсюда и из формулы (3.21) следует уравнение для определения углового оператора K_+:

$$
\begin{aligned}
(\mathcal{G}+\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}K_+ &= -(\mathcal{G}+\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}\mathcal{Q}A^{-1/2} + \\
&+ K_+\bigl(A^{-1} - A^{-1/2}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}+\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}\mathcal{Q}A^{-1/2}\bigr) - K_+A^{-1/2}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}+\mathcal{Q}\mathcal{Q}^*)^{-1}K_+.
\end{aligned} \tag{3.22}
$$

Отсюда и из $A^{-1/2} \in \mathfrak{S}_\infty$ следует, что $K_+ \in \mathfrak{S}_\infty$. Теорема доказана. □

Теорема 3.4. *Пусть λ_0 — невещественное с.з. оператора $\mathcal{A}$ (задачи (3.1)), тогда*

$$
\begin{gathered}
\gamma_1 := \bigl[2\|A^{-1/2}\|^2\bigr]^{-1} < \mathrm{Re}\lambda_0 < \max\{b_m, \widetilde{b}_n\} + \|Q_{00}\|^2 + \|Q_{00}\|\bigl(\max\{b_m, \widetilde{b}_n\} + \|Q_{00}\|^2\bigr)^{1/2} =: \gamma_2, \\
|\lambda_0|^2 < 2\mathrm{Re}\lambda_0\bigl(\max\{b_m, \widetilde{b}_n\} + \|Q_{00}\|^2\bigr).
\end{gathered}
$$

Спектр оператора $\mathcal{A}$ — действительный, если выполнено условие

$$
2\|A^{-1/2}\|^2 \leqslant \bigl(\max\{b_m, \widetilde{b}_n\} + \|Q_{00}\|^2 + \|Q_{00}\|\bigl(\max\{b_m, \widetilde{b}_n\} + \|Q_{00}\|^2\bigr)^{1/2}\bigr)^{-1}. \tag{3.23}
$$

Доказательство. Пусть $\lambda \notin \{0, b_1, \ldots, b_m, \widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_n\}$ — собственное значение оператора $\mathcal{A}$ (задачи (3.1)). Тогда существует $0 \neq \vec{z} \in H$ такой, что $L(\lambda)\vec{z} = 0$. Умножая последнее равенство скалярно на $\vec{z}$, с использованием (3.1) и леммы 2.2 получим, что

$$
\begin{aligned}
0 = \bigl(L(\lambda)\vec{z}, \vec{z}\bigr)_H &= \|\vec{z}\|_H^2 - \lambda\|A^{-1/2}\vec{z}\|_H^2 - \frac{1}{\lambda}\bigl(Q_0^*Q_0\vec{z}, \vec{z}\bigr)_H + \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}b_l^{-1}}{b_l - \lambda}\|Q_1\vec{z}\|_H^2 + \sum_{l=1}^n \frac{\widetilde{c}_{-l}\widetilde{b}_l^{-1}}{\widetilde{b}_l - \lambda}\|Q_B\vec{z}\|_H^2 = \\
&= \|\vec{z}\|_H^2 - \lambda\|A^{-1/2}\vec{z}\|_H^2 - \frac{1}{\lambda}\Bigl[\|Q_{00}\vec{z}\|_H^2 - \sum_{l=1}^m \frac{c_{-l}}{b_l - \lambda}\|Q_1\vec{z}\|_H^2 - \sum_{l=1}^n \frac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l - \lambda}\|Q_B\vec{z}\|_H^2\Bigr].
\end{aligned} \tag{3.24}
$$

Пусть $s := m + n$. Обозначим через $\widehat{b}_l$ $(l = \overline{1, s})$ упорядоченные в порядке возрастания числа из множества $\{b_1, \ldots, b_m, \widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_n\}$ (см. условия (2.4) и (2.13)), тогда соотношение (3.24) примет вид

$$
1 - \lambda p - \frac{1}{\lambda}\Bigl(q - \sum_{l=1}^s \frac{q_l}{\widehat{b}_l - \lambda}\Bigr) = 0, \tag{3.25}
$$

где $p := \|A^{-1/2}\vec{z}\|^2\|\vec{z}\|^{-2} > 0$, $q := \|Q_{00}\vec{z}\|^2\|\vec{z}\|^{-2}$, а числа q_l определяются аналогичным образом в соответствии с перестановкой во множестве $\{b_1, \ldots, b_m, \widetilde{b}_1, \ldots, \widetilde{b}_n\}$.

Пусть λ_0 — невещественное с.з. оператора $\mathcal{A}$ (задачи (3.1)), тогда λ_0 есть корень уравнения (3.25) при некотором фиксированном $\vec{z}=\vec{z}_0$. Перепишем уравнение (3.25) в следующей форме:

$$0=(\lambda-\lambda^2p-q)\prod_{l=1}^{s}(\widehat{b}_l-\lambda)+\sum_{l=1}^{s}q_l\prod_{k\neq l}^{s}(\widehat{b}_k-\lambda)=$$
$$=-p(-1)^s\lambda^{s+2}+(-1)^s\lambda^{s+1}\Big[1+p\sum_{l=1}^{s}\widehat{b}_l\Big]-(-1)^s\lambda^s\Big[q+\sum_{l=1}^{s}\widehat{b}_l+p\sum_{i<j}\widehat{b}_i\widehat{b}_j\Big]+\ldots. \quad (3.26)$$

Уравнение (3.25) имеет s действительных корней, которые мы обозначим через λ_l ($\lambda_l\in(\widehat{b}_{l-1},\widehat{b}_l)$, $l=\overline{1,s}$, $\widehat{b}_0:=0$), и еще два корня — λ_0 и $\overline{\lambda_0}$. Обозначим $\xi_0:=\mathrm{Re}\lambda_0$, $\eta_0:=\mathrm{Im}\lambda_0$, тогда

$$0=-p\prod_{l=1}^{s}(\lambda_l-\lambda)\big((\lambda-\xi_0)^2+\eta_0^2\big)=-p(-1)^s\lambda^{s+2}+(-1)^s\lambda^{s+1}p\Big[2\xi_0+\sum_{l=1}^{s}\lambda_l\Big]-$$
$$-(-1)^s\lambda^sp\Big[(\xi_0^2+\eta_0^2)+2\xi_0\sum_{l=1}^{s}\lambda_l+\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j\Big]+\ldots. \quad (3.27)$$

Приравнивая коэффициенты при λ^{s+1} и λ^s из (3.26) и (3.27), получим

$$2\xi_0+\sum_{l=1}^{s}\lambda_l=\frac{1}{p}+\sum_{l=1}^{s}\widehat{b}_l, \quad (3.28)$$

$$(\xi_0^2+\eta_0^2)+2\xi_0\sum_{l=1}^{s}\lambda_l+\sum_{i<j}\lambda_i\lambda_j=\frac{q}{p}+\frac{1}{p}\sum_{l=1}^{s}\widehat{b}_l+\sum_{i<j}\widehat{b}_i\widehat{b}_j. \quad (3.29)$$

Из (3.28) следует, что $2\mathrm{Re}\lambda_0=2\xi_0=p^{-1}+\sum\limits_{l=1}^{s}(\widehat{b}_l-\lambda_l)>p^{-1}\geqslant\|A^{-1/2}\|^{-2}$, и оценка снизу на $\mathrm{Re}\lambda_0$ получена.

Далее мы следуем идеям из [20, т. 2, с. 378]. Обозначим $\delta:=2^{-1}\sum\limits_{l=1}^{s}(\widehat{b}_l-\lambda_l)$, $\omega:=(2p)^{-1}$, тогда $\xi_0=\omega+\delta$ (см. (3.28)). Выразим из (3.28) $\sum\limits_{l=1}^{s}\lambda_l$ и подставим его в (3.29). После ряда преобразований получим

$$\eta_0^2+2\delta\sum_{l=1}^{s}\lambda_l-\sum_{i<j}(\widehat{b}_i\widehat{b}_j-\lambda_i\lambda_j)=-\omega^2+2\omega(\delta+q)-\delta^2. \quad (3.30)$$

Из условия $\lambda_l\in(\widehat{b}_{l-1},\widehat{b}_l)$, $l=\overline{1,s}$ ($\widehat{b}_0:=0$) можно вывести следующую оценку (см. [20, т. 2, с. 380, формула (5.24)]):

$$\sum_{i<j}(\widehat{b}_i\widehat{b}_j-\lambda_i\lambda_j)<\sum_{j=1}^{s}(\widehat{b}_j-\lambda_j)\Big(\sum_{i=1}^{s}\lambda_i\Big)=2\delta\sum_{l=1}^{s}\lambda_l. \quad (3.31)$$

Из (3.31) следует положительность правой части в (3.30), значит, $\omega<\delta+q+(2\delta q+q^2)^{1/2}$. Отсюда $\mathrm{Re}\lambda_0=\xi_0<2\delta+q+(2\delta q+q^2)^{1/2}\leqslant\max\{b_m,\widetilde{b}_n\}+\|Q_{00}\|^2+\|Q_{00}\|\big[\max\{b_m,\widetilde{b}_n\}+\|Q_{00}\|^2\big]^{1/2}$, поскольку $\widehat{b}_s=\max\{b_m,\widetilde{b}_n\}$, и оценка сверху на $\mathrm{Re}\lambda_0$ получена.

Из оценки на $\mathrm{Re}\lambda_0$ выводится условие (3.23), достаточное для отсутствия невещественного собственного значения λ_0.

Далее выразим из (3.29) $(\xi_0^2+\eta_0^2)=|\lambda_0|^2$ и преобразуем его с помощью (3.28). С использованием оценки (3.31) получим, что $|\lambda_0|^2<p^{-1}(q+\widehat{b}_s)$. Отсюда следует неравенство для $|\lambda_0|^2$. □

Отметим здесь, что вместо условия (3.23) можно получить более компактное, однако более грубое достаточное условие: $\|A^{-1/2}\|\leqslant(3\max\{b_m,\widetilde{b}_n\}+4\|Q_{00}\|^2)^{-1/2}$.

3.5. О представлении решения эволюционной задачи в виде контурных интегралов и асимптотическом поведении решения. Из леммы 2.3, теорем 3.2, 3.3 и 3.4 следует, что оператор $-\mathcal{A}$ является генератором голоморфной полугруппы и эта полугруппа имеет отрицательный тип, так как $\sigma(-\mathcal{A}) \subset \{\mathrm{Re}\lambda < 0\}$ (см., например, [22, с. 118]). Это обстоятельство позволяет применить к задаче (2.17) (а затем и к задаче (2.8)) соответствующие теоремы о представлении решения эволюционного уравнения и об асимптотическом поведении этого решения.

Теорема 3.5. *Пусть* $\vec{u}^0$, $\vec{u}^1 \in \mathcal{D}(A)$, *а поле* $\vec{f}(t)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 2.1. *Тогда решение задачи Коши* (2.8) *представимо в виде*

$$\vec{u}(t) = \mathcal{C}(t)\vec{u}^0 + \mathcal{S}(t)\vec{u}^1 + \int\limits_0^t \mathcal{S}(t-s)\vec{f}(s)\,ds,$$

$$\mathcal{C}(t)\vec{u}^0 := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)\Big[I - \lambda A^{-1} + $$

$$+ \sum_{l=1}^{m} \frac{c_{-l}}{b_l(b_l-\lambda)} e^{-(b_l-\lambda)t} Q_1^* Q_1 + \sum_{l=1}^{n} \frac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l(\widetilde{b}_l-\lambda)} e^{-(\widetilde{b}_l-\lambda)t} Q_B^* Q_B\Big] A^{1/2}\vec{u}^0\,d\lambda,$$

$$\mathcal{S}(t)\vec{u}^1 := \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda} A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}\vec{u}^1\,d\lambda,$$

где контур Γ *является границей сектора* $\Lambda_{\omega,\theta} := \{\lambda \in \mathbb{C} \mid |\arg(\lambda-\omega)| < \theta\}$ *и ориентирован так, что* $\mathrm{Im}\lambda$ *убывает при его обходе. Числа* $\omega \in (0, \big[2\|A^{-1/2}\|^2\big]^{-1})$ *и* $\theta \in (0, \pi/2)$ *выбраны так, чтобы* $\sigma(\mathcal{A}) \subset \Lambda_{\omega,\theta}$ (*см. теорему* 3.4).

Доказательство. Пусть $\vec{u}^0$, $\vec{u}^1 \in \mathcal{D}(A)$, а поле $\vec{f}(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Тогда по теореме 2.1 задача Коши (2.8) имеет единственное сильное решение $\vec{u}(t)$, а построенная по полю $\vec{u}(t)$ функция $\xi(t)$ — сильное решение задачи Коши (2.17). Это решение представимо в виде

$$\xi(t) = \mathcal{U}(t)\xi^0 + \int\limits_0^t \mathcal{U}(t-s)\mathcal{F}(s)\,ds, \quad \mathcal{U}(t)\xi^0 := -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Gamma e^{-\lambda t}(\mathcal{A}-\lambda)^{-1}\xi^0\,d\lambda, \tag{3.32}$$

где контур Γ выбирается, как описано в условии теоремы.

Проводя вычисления, как и в лемме 2.3, можно найти следующую формулу для резольвенты:

$$(\mathcal{A}-\lambda)^{-1} = \begin{pmatrix} A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2} & -A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\lambda)^{-1} \\ (\mathcal{G}-\lambda)^{-1}\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2} & (\mathcal{G}-\lambda)^{-1} - (\mathcal{G}-\lambda)^{-1}\mathcal{Q}L^{-1}(\lambda)\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\lambda)^{-1} \end{pmatrix}. \tag{3.33}$$

Дальнейшее доказательство состоит в простых вычислениях с использованием в (3.32) формулы (3.33), формул для ξ^0, $\mathcal{F}(t)$, $\xi(t)$, связи $\vec{u}(t) = A_0^{-1/2}\vec{v}'(t)$ и формулы для пучка $L(\lambda)$. □

Теорема 3.6. *Пусть* $\vec{u}^0$, $\vec{u}^1 \in \mathcal{D}(A)$, *поле* $\vec{f}(t)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 2.1 *и* $\vec{u}(t)$ *единственное* (*в силу теоремы* 2.1) *сильное решение задачи Коши* (2.8). *Тогда*

$$\lim_{t\to+\infty}\vec{f}(t) = \vec{f} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{t\to+\infty}\vec{u}(t) =: \vec{u} = A_0^{-1}\vec{f}.$$

Доказательство. Пусть $\vec{u}^0$, $\vec{u}^1 \in \mathcal{D}(A)$, а поле $\vec{f}(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Тогда по теореме 2.1 задача Коши (2.8) имеет единственное сильное решение $\vec{u}(t)$, а построенная по полю $\vec{u}(t)$ функция $\xi(t)$ — сильное решение задачи Коши (2.17). При этом $\mathcal{F}(t) \to \mathcal{F} := (\vec{f}; \vec{0}; \ldots; \vec{0}; 0; \ldots; 0)^\tau$ при $t \to +\infty$.

По теореме 3.4 справедливо включение $\sigma(-\mathcal{A}) \subset \{\mathrm{Re}\lambda < 0\}$. Вместе с тем, что оператор $-\mathcal{A}$ — генератор голоморфной полугруппы, это включение влечет отрицательный тип соответствующей полугруппы (см., например, [22, с. 118]). Тогда по теореме 4.4 из [22] $\xi(t) \to \mathcal{A}^{-1}\mathcal{F}$ при $t \to +\infty$.

Пусть $\mathcal{A}\mathcal{X} = \mathcal{F}$. Полагая в (3.4) $\lambda = 0$, $\xi = \mathcal{X}$, $\xi_0 = \mathcal{F}$, найдем, что $\vec{v} = (Q_0^*)^{-1}A^{-1/2}\vec{f}$. Отсюда следует, что $\vec{u} = A_0^{-1/2}(Q_0^*)^{-1}A^{-1/2}\vec{f}$. Далее имеем

$$\vec{u} = A_0^{-1/2}(Q_0^*)^{-1}A^{-1/2}\vec{f} = A_0^{-1/2}(Q_0^{-1})^*A^{-1/2}\vec{f} = A_0^{-1/2}(A^{1/2}A_0^{-1/2})^*A^{-1/2}\vec{f} =$$
$$= A_0^{-1/2}(A^{1/2}A_0^{-1/2})^*|_{\mathcal{D}(A^{1/2})}A^{-1/2}\vec{f} = A_0^{-1/2}(A_0^{-1/2}A^{1/2})|_{\mathcal{D}(A^{1/2})}A^{-1/2}\vec{f} = A_0^{-1}\vec{f}.$$

Теорема доказана. □

Доказанная теорема показывает, что если внешнее поле, действующее на систему, стабилизируется, то вязкоупругое тело со временем принимает новое положение, удовлетворяющее стационарному уравнению теории упругости $A_0\vec{u} \equiv A\Big(\dfrac{1}{2}[c_0 - \Gamma_p(0)], \widetilde{c}_0 + \dfrac{1}{6}[c_0 - \Gamma_p(0)] - \widetilde{\Gamma}_p(0)\Big)\vec{u} = \vec{f}$ с измененными параметрами.

3.6. Леммы о пересчете корневых элементов. Для дальнейших рассуждений нам понадобятся следующие вспомогательные леммы о связи цепочки из собственного и присоединенного к нему элементов пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ с некоторой функцией из $\mathcal{H}$ и о связи цепочек элементов некоторых специальных оператор-функций.

Определение 3.4 (см. [15, с. 61]). Пусть λ_0 — собственное значение (с.з.), а η_0 — отвечающий ему собственный элемент (с.э.) оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda)$, т. е. $\mathcal{A}(\lambda_0)\eta_0 = 0$. Элементы $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_{n-1}$ называют *присоединенными* к с.э. η_0, если $\sum\limits_{k=0}^{j}(k!)^{-1}\mathcal{A}^{(k)}(\lambda_0)\eta_{j-k} = 0$ $(j = 1, 2, \ldots, n-1)$. Число n называют *длиной* цепочки $\{\eta_k\}_{k=0}^{n-1}$ из собственного и присоединенных элементов (с.п.э.).

Лемма 3.9 (см. [15, лемма 11.3, с. 62]). *Элементы $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1}$ образуют цепочку из с.п.э. $\mathcal{A}(\lambda)$, отвечающую числу λ_0, тогда и только тогда, когда существует функция $\eta(\lambda)$, голоморфная в некоторой окрестности точки λ_0, такая, что $\eta(\lambda_0) \neq 0$, $\eta^{(k)}(\lambda_0) = k!\eta_k$ $(k = 0, 1, \ldots, n-1)$ и $\mathcal{A}(\lambda)\eta(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль кратности n.*

Определение 3.5 (см. [15, с. 62]). Пусть $\eta(\lambda)$ — функция из $\mathcal{H}$, для которой $\eta(\lambda_0) \neq 0$ и $\mathcal{A}(\lambda_0)\eta(\lambda_0) = 0$. Если порядок нуля функции $\mathcal{A}(\lambda)\eta(\lambda)$ в точке λ_0 равен n, то $\eta(\lambda)$ называется *производящей функцией* для цепочки из с.п.э. $\{(k!)^{-1}\eta^{(k)}(\lambda_0)\}_{k=0}^{n-1}$ оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda)$. Число n будем называть *рангом* производящей функции $\eta(\lambda)$.

Для выяснения связи собственных и присоединенных элементов операторных пучков $\mathcal{A}(\lambda)$ и $L(\lambda)$ запишем пучок $\mathcal{A}(\lambda)$ в следующей форме:

$$\mathcal{A}(\lambda)\eta := \begin{pmatrix} \mathcal{A}_{11}(\lambda) & \mathcal{A}_{12}(\lambda) \\ \mathcal{A}_{21}(\lambda) & \mathcal{A}_{22}(\lambda) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{z} \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad (\vec{z}; w)^\tau \in \mathcal{H} = H \oplus \mathcal{H}_0,$$

где компоненты $\mathcal{A}_{ij}(\lambda)$ $(i, j = 1, 2)$ определяются естественным образом из (3.2). Тогда (см. (3.3))

$$L(\lambda)\vec{z} = \big[\mathcal{A}_{11}(\lambda) - \mathcal{A}_{12}(\lambda)\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)\big]\vec{z} = 0, \quad \vec{z} \in H = \vec{L}_2(\Omega, \rho).$$

Лемма 3.10. *Пусть $\lambda \in \mathbb{C}\backslash\sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$. Функция $\eta(\lambda) := (\vec{z}(\lambda); w(\lambda))^\tau$ из $\mathcal{H}$ является производящей функцией ранга n пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ в точке $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$ тогда и только тогда, когда $\vec{z}(\lambda)$ является производящей функцией ранга n пучка $L(\lambda)$ в точке λ_0 и*

$$w(\lambda) = -\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)\vec{z}(\lambda) + (\lambda - \lambda_0)^n\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)p(\lambda), \tag{3.34}$$

где $p(\lambda)$ — функция, голоморфная в некоторой окрестности λ_0 $(p(\lambda_0) \neq 0)$.

Доказательство. Доказательство этой леммы следует рассуждениям [15, лемма 12.3]. Начнем с достаточности. Пусть $\vec{z}(\lambda)$ является производящим полиномом ранга n пучка $L(\lambda)$ в точке $\lambda_0 \in \mathbb{C}\backslash\sigma(\mathcal{A}_{22}(\lambda))$ и выполнено соотношение (3.34). Поскольку $L(\lambda)\vec{z}(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль кратности n, то из вида $L(\lambda)$ получим:

$$L(\lambda)\vec{z}(\lambda) = \big[\mathcal{A}_{11}(\lambda) - \mathcal{A}_{12}(\lambda)\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)\big]\vec{z}(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^n q(\lambda), \tag{3.35}$$

где $q(\lambda)$ — некоторая функция ($q(\lambda_0) \neq 0$). Подставим (3.34) в (3.35) и запишем полученное соотношение вместе с (3.34) в виде одного векторно-матричного выражения в $\mathcal{H}$, после простых преобразований получим:

$$\mathcal{A}(\lambda)\big(\vec{z}(\lambda); w(\lambda)\big)^\tau = (\lambda-\lambda_0)^n\big(q(\lambda)+\mathcal{A}_{12}(\lambda)\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)p(\lambda); p(\lambda)\big)^\tau.$$

Отсюда следует, что $\eta(\lambda) = (\vec{z}(\lambda); w(\lambda))^\tau$ есть производящая функция ранга n пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ в точке λ_0. Достаточность доказана.

Пусть теперь функция $\eta(\lambda) = (\vec{z}(\lambda); w(\lambda))^\tau$ является производящей функцией ранга n пучка $\mathcal{A}(\lambda)$ в точке λ_0. По условию теоремы $\mathcal{A}(\lambda)\eta(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль кратности n, следовательно:

$$\mathcal{A}_{11}(\lambda)\vec{z}(\lambda)+\mathcal{A}_{12}(\lambda)w(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^n r(\lambda), \tag{3.36}$$

$$\mathcal{A}_{21}(\lambda)\vec{z}(\lambda)+\mathcal{A}_{22}(\lambda)w(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^n p(\lambda), \tag{3.37}$$

где $r(\lambda)$, $p(\lambda)$ — некоторые функции ($r(\lambda_0) \neq 0$, $p(\lambda_0) \neq 0$). Из (3.37) следует (3.34). Подставив (3.34) в (3.36) получим, что

$$L(\lambda)\vec{z}(\lambda) = (\lambda-\lambda_0)^n\big(r(\lambda)-\mathcal{A}_{12}(\lambda)\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)p(\lambda)\big).$$

Отсюда следует, что $L(\lambda)\vec{z}(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль порядка не ниже n. Из этого факта и формулы (3.34), рассуждая, как при доказательстве достаточности, получаем, что $L(\lambda)\vec{z}(\lambda)$ имеет в точке λ_0 нуль порядка n. Значит, $\vec{z}(\lambda)$ есть производящая функция ранга n пучка $L(\lambda)$ в точке λ_0. □

Как следствие из леммы 3.10 получаем следующую теорему о связи собственных и присоединенных элементов оператора $\mathcal{A}$ (спектральной задачи (3.1)) и пучка $L(\lambda)$.

Теорема 3.7. *Пусть набор элементов $\{\xi_k = (\vec{u}_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ является цепочкой из с.п.э. задачи* (3.1)*, отвечающей с.з. λ_0 ($\lambda_0 \neq 0, b_1, \ldots, b_m, \widetilde{b}_1, \ldots \widetilde{b}_n$), тогда $\{\vec{z}_k\}_{k=0}^{n-1} := \{A^{1/2}\vec{u}_k\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из собственного и присоединенных элементов задачи* (3.3)*, отвечающая с.з. λ_0.*

Обратно, пусть набор элементов $\{\vec{z}_k\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из с.п.э. спектральной задачи (3.3)*, отвечающая с.з. λ_0, тогда $\{\xi_k = (A^{-1/2}\vec{z}_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$, где $w_k = \sum\limits_{l=0}^{k}(\mathcal{G}-\lambda_0)^{-(k-l+1)}\mathcal{Q}\vec{z}_l$, — цепочка из собственного и присоединенных элементов спектральной задачи* (3.1).

Доказательство. Пусть λ_0 ($\lambda_0 \neq 0, b_1, \ldots, b_m, \widetilde{b}_1, \ldots \widetilde{b}_n$) — с.з. задачи (3.1) и $\xi(\lambda)$ — производящая функция для цепочки из с.п.э. $\{\xi_k := (k!)^{-1}\xi^{(k)}(\lambda_0)\}_{k=0}^{n-1}$. Из равенства $(\mathcal{A}-\lambda))\xi = \mathcal{B}\mathcal{A}(\lambda)\mathcal{B}\xi$, где $\mathcal{B} := \mathrm{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}_0)$, верного для любого $\xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$, следует, что $\mathcal{B}\xi(\lambda) = (A^{1/2}\vec{u}(\lambda); w(\lambda))^\tau$ — производящая функция для оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda)$. Согласно лемме 3.10, $\vec{z}(\lambda) := A^{1/2}\vec{u}(\lambda)$ — производящая функция для оператор-функции $L(\lambda)$, и первое утверждение в теореме доказано.

Пусть теперь λ_0 — с.з. спектральной задачи (3.3) и $\vec{z}(\lambda)$ — производящая функция для цепочки из с.п.э. $\{\vec{z}_k := (k!)^{-1}\vec{z}^{(k)}(\lambda_0)\}_{k=0}^{n-1}$ оператор-функции $L(\lambda)$. Тогда в соответствии с (3.34) получим, что

$$\big(\vec{z}_k; w_k\big)^\tau := \frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\lambda^k}\big(\vec{z}(\lambda); -\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)\vec{z}(\lambda)\big)^\tau\Big|_{\lambda=\lambda_0}, \quad k=\overline{0,n-1} \tag{3.38}$$

— цепочка из собственного и присоединенных элементов оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda)$, отвечающая собственному значению λ_0. Для вторых компонент из (3.38) имеем с учетом вида $\mathcal{A}_{22}(\lambda)$ и $\mathcal{A}_{21}(\lambda)$:

$$w_k = -\frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\lambda^k}\mathcal{A}_{22}^{-1}(\lambda)\mathcal{A}_{21}(\lambda)\vec{z}(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{1}{k!}\frac{d^k}{d\lambda^k}(\mathcal{G}-\lambda)^{-1}\mathcal{Q}\vec{z}(\lambda)\Big|_{\lambda=\lambda_0} = \sum_{l=0}^{k}(\mathcal{G}-\lambda_0)^{-(k-l+1)}\mathcal{Q}\vec{z}_l.$$

Таким образом, набор элементов $\{\eta_k = (\vec{z}_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ является цепочкой из с.п.э. оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda)$, отвечающей с.з. λ_0. Учитывая линейность оператор-функции $\mathcal{A}(\lambda)$ и ее связь с задачей (3.1), можно показать, что набор элементов $\{\xi_k = (A^{-1/2}\vec{z}_k; w_k)^\tau\}_{k=0}^{n-1}$ — цепочка из собственного и присоединенных элементов задачи (3.1). Теорема доказана. □

3.7. Свойства корневых элементов оператора $\mathcal{A}$. Установим некоторые свойства системы корневых элементов, отвечающих собственным значениям из ветви с точкой сгущения в бесконечности. Следующее утверждение будет доказано для задачи (3.3) и без труда может быть сформулировано для задачи (3.1) в силу теоремы 3.7.

Теорема 3.8. *Система с.п.э. задачи* (3.3)*, отвечающих с.з., лежащим вне круга* $\{|\lambda| \leqslant R\}$*, при некотором* $R > \max\{b_m, \widetilde{b}_n\}$ *образует* p*-базис* $(p > 3/2)$ *в* $H = \vec{L}_2(\Omega, \rho)$ *с точностью до конечного дефекта. Если* $c_1 > 0$ *достаточно велико, то система с.э. задачи* (3.3)*, отвечающих с.з., лежащим вне круга* $\{|\lambda| \leqslant R\}$*, при некотором* $R > \max\{b_m, \widetilde{b}_n\}$ *образует в* H p*-базис* $(p > 3/2)$.

Доказательство. Осуществим в задаче (3.3) замену спектрального параметра $\mu := \lambda^{-1}$ и преобразуем ее к следующему виду:

$$M(\mu)\vec{z} := \mu L(\mu^{-1})\vec{z} = \big[\mu I - A^{-1} + \mu^2 \mathcal{Q}^*(\mu\mathcal{G} - \mathcal{I}_0)^{-1}\mathcal{Q}\big]\vec{z} = 0, \quad \vec{z} \in H = \vec{L}_2(\Omega, \rho).$$

Оператор-функция $M(\mu)$ является самосопряженной. Кроме того, $M(0) = -A^{-1} \in \mathfrak{S}_p(H)$ при $p > 3/2$ (см. теорему 3.2), а $M'(0) = I \gg 0$. Из [7] следует, что для любого достаточно малого $\varepsilon > 0$ система с.э. пучка $M(\mu)$, отвечающих с.з. из $(-\varepsilon, \varepsilon)$, образует p-базис $(p > 3/2)$ в H с точностью до конечного дефекта. Отсюда следует первое утверждение в теореме при $R = \varepsilon^{-1} > \max\{b_m, \widetilde{b}_n\}$.

Будем считать для простоты, что $\max\{b_m, \widetilde{b}_n\} > 1$. Выберем отрезок $[0, r_1] \subset [0, [\max\{b_m, \widetilde{b}_n\}]^{-1})$, тогда $\|2\mathcal{Q}^*(\mathcal{I}_0 - r_1\mathcal{G})^{-1}\mathcal{Q}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_0)} \leqslant 2\|\mathcal{Q}\|^2_{\mathcal{L}(\mathcal{H}_0)}(1 - r_1 \max\{b_m, \widetilde{b}_n\})^{-1} \leqslant r_2$, где $r_2^{-1} \leqslant r_1$. Тогда при достаточно малом фиксированном $\varepsilon > 0$ и $\mu \in [-\varepsilon, r_2^{-1}]$

$$M'(\mu) = I - 2\mu\mathcal{Q}^*(\mathcal{I}_0 - \mu\mathcal{G})^{-1}\mathcal{Q} + \mu^2\mathcal{Q}^*\mathcal{G}(\mathcal{I}_0 - \mu\mathcal{G})^{-1}\mathcal{Q} \gg I - 2\mu\mathcal{Q}^*(\mathcal{I}_0 - \mu\mathcal{G})^{-1}\mathcal{Q} \gg 0. \tag{3.39}$$

Пусть $\|A^{-1}\| < (2r_2)^{-1}$, тогда

$$M(r_2^{-1}) = \mu\Big[I - \frac{1}{\mu}A^{-1} - \frac{\mu}{2}\cdot 2\mathcal{Q}^*(\mathcal{I}_0 - \mu\mathcal{G})^{-1}\mathcal{Q}\Big]\Big|_{\mu = r_2^{-1}} \gg \frac{1}{r_2}\Big[\frac{1}{2} - \frac{1}{2r_2}\cdot 2\|A^{-1}\|\Big]I \gg 0. \tag{3.40}$$

Легко видеть, что $M(-\varepsilon) \ll 0$. Отсюда, из (3.39), (3.40) и [7] следует, что система собственных элементов пучка $M(\mu)$, отвечающих собственным значениям из $[-\varepsilon, r_2^{-1}]$, образует p-базис $(p > 3/2)$ в H без дефекта. Отсюда следует второе утверждение в теореме при $R = r_2 > \max\{b_m, \widetilde{b}_n\}$. □

Для доказательства следующего основного утверждения о свойствах системы корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ во всем пространстве $\mathcal{H}$ нам понадобятся некоторые понятия и обозначения из теории операторов в пространствах с индефинитной метрикой (см. [1]).

Рассмотрим пространство $\mathcal{H} = \mathcal{H}_+ \oplus \mathcal{H}_-$ с индефинитным скалярным произведением (см. перед теоремой 3.3). Назовем базис $\mathcal{J}$-пространства $\mathcal{H}$ *почти $\mathcal{J}$-ортонормированным*, если его можно представить как объединение конечного подмножества элементов и $\mathcal{J}$-ортонормированного подмножества, причем эти подмножества $\mathcal{J}$-ортогональны друг другу.

Обозначим через $\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A})$ корневой линеал оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению λ $(\lambda \in \sigma_p(\mathcal{A}))$. Введем также следующие обозначения:

$$\mathfrak{F}(\mathcal{A}) := \overline{\mathrm{sp}\{\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A})|\ \lambda \in \sigma_p(\mathcal{A})\}}, \quad \mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) := \overline{\mathrm{sp}\{\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)|\ \lambda \in \sigma_p(\mathcal{A})\}}.$$

Будем писать $\lambda \in s(\mathcal{A}) \subset \mathbb{R}$, если $\mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$ вырождено, т. е. если существует $\xi_0 \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$ такое, что $[\xi_0, \xi] = 0$ для любого $\xi \in \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$.

Основываясь на теореме Г. К. Лангера (см. [1, теорема 2.12, с. 271]), установим следующую теорему.

Теорема 3.9. *Имеют место следующие утверждения*:

1. $\mathrm{codim}\,\mathfrak{F}(\mathcal{A}) \leqslant \mathrm{codim}\,\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) < \infty$.
2. $\mathfrak{F}(\mathcal{A}) = \mathcal{H} \iff \mathrm{sp}\{\mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A})|\lambda \in \sigma_{ess}(\mathcal{A}) \cap (\gamma_1, \gamma_2)\}$ — *невырожденное подпространство, где* γ_1, γ_2 — *числа, определенные в теореме* 3.4.
3. $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H} \iff \mathfrak{L}_\lambda(\mathcal{A}) = \mathrm{Ker}(\mathcal{A} - \lambda)$ *при* $\lambda \neq \overline{\lambda}$ *и* $s(\mathcal{A}) = \varnothing$. *Если* $\gamma_2 \leqslant \gamma_1$, *то* $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}) = \mathcal{H}$.

4. *Если* $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A})=\mathcal{H}$ (*соответственно* $\mathfrak{F}(\mathcal{A})=\mathcal{H}$), *то в* $\mathcal{H}$ *существует почти* $\mathcal{J}$-*ортонормированный* p-*базис* (*при* $p>3$), *составленный из собственных* (*соответственно корневых*) *элементов оператора* $\mathcal{A}$. *Если* $\gamma_2\leqslant\gamma_1$, *то указанный базис из собственных элементов будет* $\mathcal{J}$-*ортонормированным.*

Доказательство. В теореме 3.3 установлено, что $\mathcal{A}^{-1}\in H$. Кроме того, из (3.22) следует, что $K_+\in\mathfrak{S}_p$ при $p>3$, поскольку $A^{-1}\in\mathfrak{S}_p$ при $p>3/2$, согласно теореме 3.2. Из теоремы 3.1 следует, что спектр оператора $\mathcal{A}^{-1}$ имеет не более $3m+2n+4$ точек сгущения. Таким образом, оператор $\mathcal{A}^{-1}$ удовлетворяет всем требованиям теоремы Г. К. Лангера. Применим эту теорему к оператору $\mathcal{A}^{-1}$.

1. Из равенств $\mathfrak{F}(\mathcal{A})=\mathfrak{F}(\mathcal{A}^{-1})$, $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A})=\mathfrak{F}_0(\mathcal{A}^{-1})$ следует утверждение пункта 1.

2. $\mathfrak{F}(\mathcal{A}^{-1})=\mathcal{H}\iff \mathrm{sp}\{\mathfrak{L}_{\lambda^{-1}}(\mathcal{A}^{-1})|\lambda^{-1}\in s(\mathcal{A}^{-1})\}$ — невырожденное подпространство. Из [1, замечание 3.8, с. 271] следует, что при доказательстве равенства $\mathfrak{F}(\mathcal{A}^{-1})=\mathcal{H}$ невырожденность $\mathfrak{L}_{\lambda^{-1}}(\mathcal{A}^{-1})$ нужно проверять только для тех $\lambda^{-1}\in s(\mathcal{A}^{-1})$, которые являются точками сгущения спектра оператора $\mathcal{A}^{-1}$. Из равенства $\mathfrak{L}_{\lambda^{-1}}(\mathcal{A}^{-1})=\mathfrak{L}_{\lambda}(\mathcal{A})$ следует, что нужно проверять невырожденность $\mathfrak{L}_{\lambda}(\mathcal{A})$ для $\lambda\in\sigma_{ess}(\mathcal{A})\cap s(\mathcal{A})$.

Выясним расположение множества $s(\mathcal{A})$. Пусть $\lambda=\overline{\lambda}\in\sigma_p(\mathcal{A})$ $(\lambda\neq 0,b_1,\dots,b_m,\widetilde{b}_1,\dots,\widetilde{b}_n)$ и $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\lambda)$ вырождено. В силу теоремы 3.7 это эквивалентно тому, что в $\mathrm{Ker}L(\lambda)$ существует такой элемент $\vec{z}_0$, что элемент $\xi_0=(A^{-1/2}\vec{z}_0;(\mathcal{G}-\lambda)^{-1}\mathcal{Q}\vec{z}_0)^\tau$ $\mathcal{J}$-ортогонален всем элементам вида $\xi=(A^{-1/2}\vec{z};(\mathcal{G}-\lambda)^{-1}\mathcal{Q}\vec{z})^\tau$, где $\vec{z}\in\mathrm{Ker}L(\lambda)$, т. е. $[\xi_0,\xi]=0$. Используя введенные ранее обозначения, последнее уравнение можно привести к виду $\big(L'(\lambda)\vec{z}_0,\vec{z}\big)_H=0$. В частности, имеем два соотношения: $\big(L(\lambda)\vec{z}_0,\vec{z}_0\big)_H=0$, $\big(L'(\lambda)\vec{z}_0,\vec{z}_0\big)_H=0$. Таким образом, λ есть кратный корень уравнения (3.24) при $\vec{z}=\vec{z}_0$. Полагая в формуле (3.27) теоремы 3.4 $\eta_0=0$ и считая, что ξ_0 и есть этот кратный корень, найдем, что $\lambda\in(\gamma_1,\gamma_2)$.

Из леммы 3.1 следует, что $0,b_1,\dots,b_m\notin\sigma_p(\mathcal{A})$, а значит $0,b_1,\dots,b_m\notin s(\mathcal{A})$.

Пусть $\widetilde{b}_q\notin(\gamma_1,\gamma_2)$ при некотором $q=\overline{1,n}$, тогда $\widetilde{b}_q\leqslant\gamma_1$, поскольку $\widetilde{b}_q\leqslant\max\{b_m,\widetilde{b}_n\}<\gamma_2$. Допустим, что $\widetilde{b}_q\leqslant\gamma_1$ и $\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\widetilde{b}_q)$ вырождено, т. е. существует $\xi_0\in\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\widetilde{b}_q)$ такое, что $[\xi_0,\xi]=0$ для любого $\xi\in\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\widetilde{b}_q)$. В частности, $[\xi_0,\xi_0]=0$.

Пусть $\xi_0\in\mathrm{Ker}(\mathcal{A}-\widetilde{b}_q)$, тогда из (3.4) имеем

$$\begin{cases} A^{1/2}\Big[A^{1/2}\vec{u}_0+Q_0^*\vec{v}_0+\sum\limits_{l=1}^m\sqrt{\dfrac{c_{-l}}{b_l}}Q_1^*\vec{v}_{l0}+\sum\limits_{l=1}^n\sqrt{\dfrac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l}}Q_B^*p_{l0}\Big]-\widetilde{b}_q\vec{u}_0=0,\\ -Q_0A^{1/2}\vec{u}_0-\widetilde{b}_q\vec{v}_0=0,\\ -\sqrt{\dfrac{c_{-l}}{b_l}}Q_1A^{1/2}\vec{u}_0+(b_l-\widetilde{b}_q)\vec{v}_{l0}=0,\quad l=\overline{1,m},\\ -\sqrt{\dfrac{\widetilde{c}_{-l}}{\widetilde{b}_l}}Q_BA^{1/2}\vec{u}_0+(\widetilde{b}_l-\widetilde{b}_q)p_{l0}=0,\quad l=\overline{1,n},\quad l\neq q,\\ Q_BA^{1/2}\vec{u}_0=0. \end{cases}\tag{3.41}$$

Умножим здесь первое уравнение скалярно на $\vec{u}_0$ и преобразуем его с помощью оставшихся уравнений. В результате получим следующее соотношение:

$$1-\widetilde{b}_q\frac{\|A^{-1/2}\vec{z}_0\|_H^2}{\|\vec{z}_0\|_H^2}-\frac{1}{\widetilde{b}_q}\frac{\|Q_0\vec{z}_0\|_H^2}{\|\vec{z}_0\|_H^2}+\sum_{l=1}^m\frac{c_{-l}}{b_l(b_l-\widetilde{b}_q)}\frac{\|Q_1\vec{z}_0\|_H^2}{\|\vec{z}_0\|_H^2}=0,\quad z_0:=A^{1/2}\vec{u}_0.\tag{3.42}$$

Далее из соотношения $[\xi_0,\xi_0]=\|\vec{u}_0\|_H^2-\|\vec{v}_0\|_H^2-\sum\limits_{l=1}^m\|\vec{v}_{l0}\|_H^2-\sum\limits_{l=1}^n\|p_{l0}\|_{L_{2,\Omega}}^2=0$ и (3.41) имеем

$$-\frac{\|A^{-1/2}\vec{z}_0\|_H^2}{\|\vec{z}_0\|_H^2}+\frac{1}{\widetilde{b}_q^2}\frac{\|Q_0\vec{z}_0\|_H^2}{\|\vec{z}_0\|_H^2}+\sum_{l=1}^m\frac{c_{-l}}{b_l(b_l-\widetilde{b}_q)^2}\frac{\|Q_1\vec{z}_0\|_H^2}{\|\vec{z}_0\|_H^2}=-\|p_{q0}\|_{L_{2,\Omega}}^2.\tag{3.43}$$

Определим функцию

$$f(\lambda):=1-\lambda\frac{\|A^{-1/2}\vec{z}_0\|_H^2}{\|\vec{z}_0\|_H^2}-\frac{1}{\lambda}\frac{\|Q_0\vec{z}_0\|_H^2}{\|\vec{z}_0\|_H^2}+\sum_{l=1}^m\frac{c_{-l}}{b_l(b_l-\lambda)}\frac{\|Q_1\vec{z}_0\|_H^2}{\|\vec{z}_0\|_H^2},$$

тогда из (3.42) и (3.43) получим, что $f(\widetilde{b}_q)=0$, $f'(\widetilde{b}_q)\leqslant 0$. Простые геометрические рассуждения показывают, что $f'(\widetilde{b}_q)\geqslant 0$. Следовательно, $p_{q0}=0$ и $f'(\widetilde{b}_q)=0$ и, таким образом, точка $\widetilde{b}_q$ есть кратный корень уравнения $f(\lambda)=0$. Рассуждая далее, как в теореме 3.4 при исследовании уравнения (3.24), найдем, что $\widetilde{b}_q>\gamma_1$, что противоречит предположению $\widetilde{b}_q\leqslant\gamma_1$.

Таким образом, $s(\mathcal{A})\subset(\gamma_1,\gamma_2)$ и утверждение 2 доказано.

3. Первые части утверждений 3 и 4 — это переформулировки соответствующих утверждений используемой теоремы Г. К. Лангера. Если $\gamma_2\leqslant\gamma_1$, то $s(\mathcal{A})=\varnothing$ и оператор $\mathcal{A}$ не имеет невещественных собственных значений. Следовательно, $\mathfrak{F}_0(\mathcal{A})=\mathcal{H}$ и соответствующий p-базис (при $p>3$) в $\mathcal{H}$, составленный из собственных элементов оператора $\mathcal{A}$, будет $\mathcal{J}$-ортонормированным. □

3.8. О представлении решения эволюционной задачи в виде ряда. Будем считать, что $\gamma_2\leqslant\gamma_1$, т. е. выполнено условие (3.23), тогда по теореме 3.9 существует $\mathcal{J}$-ортонормированный p-базис (при $p>3$) в $\mathcal{H}$, составленный из собственных элементов оператора $\mathcal{A}$. По теореме 3.7 этот базис можно представить в следующем виде, разделив его на систему позитивных и негативных элементов:

$$\begin{gathered}\bigl\{\xi_k^{\pm}:=\bigl(A^{-1/2}\vec{z}_k^{\pm};(\mathcal{G}-\lambda_k^{\pm})^{-1}\mathcal{Q}\vec{z}_k^{\pm}\bigr)^{\tau}\bigr\}_{k=1}^{\infty},\\ \xi_k^{\pm}\in L_{\pm}(\mathcal{A}^{-1}),\quad [\xi_k^{+},\xi_j^{+}]=\delta_{kj},\quad [\xi_k^{-},\xi_j^{-}]=-\delta_{kj},\quad [\xi_k^{+},\xi_j^{-}]=0.\end{gathered}\tag{3.44}$$

Собственные значения λ_k^{+} составляют ветвь из теоремы 3.2, а с.з. λ_k^{-} — оставшийся спектр.

Представим решение $\xi(t)$ задачи (2.17) в форме

$$\xi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}c_k^{+}(t)\xi_k^{+}+\sum_{j=1}^{\infty}c_j^{-}(t)\xi_j^{-},\quad c_k^{+}(0)=[\xi^0,\xi_k^{+}],\quad c_j^{-}(0)=-[\xi^0,\xi_j^{-}].\tag{3.45}$$

Из (2.17), (3.44), (3.45), вида ξ^0 и $\mathcal{F}(t)$ найдем, что

$$\begin{aligned}\xi(t)=\sum_{k=1}^{\infty}\Bigl(e^{-\lambda_k^{+}t}[\xi^0,\xi_k^{+}]+\int_0^t e^{-\lambda_k^{+}(t-s)}[\mathcal{F}(s),\xi_k^{+}]\,ds\Bigr)\xi_k^{+}-&\\ -\sum_{j=1}^{\infty}\Bigl(e^{-\lambda_j^{-}t}[\xi^0,\xi_j^{-}]+\int_0^t e^{-\lambda_j^{-}(t-s)}[\mathcal{F}(s),\xi_j^{-}]\,ds\Bigr)\xi_j^{-},&\end{aligned}\tag{3.46}$$

$$[\xi^0,\xi_k^{\pm}]=\bigl(\vec{u}^1,A^{-1/2}\vec{z}_k^{\pm}\bigr)_H+\frac{1}{\lambda_k^{\pm}}\bigl(A_0\vec{u}^0,A^{-1/2}\vec{z}_k^{\pm}\bigr)_H,\quad k\in\mathbb{N},$$

$$[\mathcal{F}(t),\xi_k^{\pm}]=\bigl(\vec{f}(t)-\Gamma_p(t)A_1\vec{u}_0-\widetilde{\Gamma}_p(t)B^*B\vec{u}_0,A^{-1/2}\vec{z}_k^{\pm}\bigr)_H,\quad k\in\mathbb{N}.$$

Из (3.46), учитывая, что $\xi(t)=(\vec{u}'(t);w(t))^{\tau}$, $w(t)=(\vec{v}'(t);\dots)^{\tau}$, $\vec{u}(t)=A_0^{-1/2}\vec{v}'(t)$, получим в явном виде разложение решения $\vec{u}(t)$ задачи (2.8) по нормированной специальным образом системе собственных элементов $\{\vec{z}_k^{\pm}\}_{k=1}^{\infty}$ задачи (3.3), связанных с $\mathcal{J}$-ортонормированным базисом (3.44):

$$\vec{u}(t)=\bigl(\mathcal{C}_+(t)-\mathcal{C}_-(t)\bigr)\vec{u}^0+\bigl(\mathcal{S}_+(t)-\mathcal{S}_-(t)\bigr)\vec{u}^1+\int_0^t\bigl(\mathcal{S}_+(t-s)-\mathcal{S}_-(t-s)\bigr)\vec{f}(s)\,ds,$$

$$\begin{aligned}C_{\pm}(t)\vec{u}^0:=\sum_{k=1}^{+\infty}\Bigl[&-\frac{1}{(\lambda_k^{\pm})^2}\,e^{-\lambda_k^{\pm}t}\bigl(A_0\vec{u}^0,A^{-1/2}z_k^{\pm}\bigr)_H+\\ &+\sum_{l=1}^{m}\frac{c_{-l}}{\lambda_k^{\pm}b_l(b_l-\lambda_k^{\pm})}\bigl(e^{-\lambda_k^{\pm}t}-e^{-b_lt}\bigr)\bigl(A_1\vec{u}^0,A^{-1/2}\vec{z}_k^{\pm}\bigr)_H+\\ &+\sum_{l=1}^{n}\frac{\widetilde{c}_{-l}}{\lambda_k^{\pm}\widetilde{b}_l(\widetilde{b}_l-\lambda_k^{\pm})}\bigl(e^{-\lambda_k^{\pm}t}-e^{-\widetilde{b}_lt}\bigr)\bigl(B^*B\vec{u}^0,A^{-1/2}\vec{z}_k^{\pm}\bigr)_H\Bigr]A^{-1/2}z_k^{\pm},\end{aligned}$$

$$S_{\pm}(t)\vec{u}^1:=-\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{1}{\lambda_k^{\pm}}\,e^{-\lambda_k^{\pm}t}\bigl(\vec{u}^1,A^{-1/2}z_k^{\pm}\bigr)_HA^{-1/2}z_k^{\pm}.$$

4. О малых движениях синхронно-изотропной среды параболического типа

В этом разделе исследуется задача о малых движениях синхронно-изотропной среды параболического типа — частный случай задачи (2.5)-(2.6). В пункте 4.1 кратко обсуждается постановка задачи (см. (4.1)) и ее сведение к задаче Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка с главным оператором $\mathcal{A}$. В пункте 4.2 выводится спектральная задача, связанный с ней операторный пучок и характеристическое уравнение. Вводятся характеристические функции (4.8), играющие важную роль в дальнейших построениях. Приводится теорема 4.1 о структуре спектра и асимптотике всех ветвей спектра оператора $\mathcal{A}$.

В пункте 4.4 в теоремах 4.2 и 4.3 доказывается, что в невырожденном случае система собственных элементов, а в вырожденном — корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ образует p-базис при $p > 3$ основного гильбертова пространства. При этом не используются методы индефинитной метрики. Построения, описанные в пунктах 4.3-4.4, можно будет применить при исследовании синхронно-изотропной среды гиперболического типа.

В пункте 4.5 в теореме 4.4 в невырожденном случае строится система, биортогональная к системе собственных элементов оператора $\mathcal{A}$. В теореме 4.5 приводится представление решения задачи (4.1) в виде ряда по системе собственных элементов исходного оператора теории упругости.

4.1. Постановка задачи, основные операторные уравнения и теорема о разрешимости. Рассмотрим специальный частный случай задачи (2.2)–(2.6). Будем считать, что в задаче (2.2)–(2.6), описывающей движения начально-изотропного вязкоупругого тела, выполнены следующие условия на коэффициенты:

$$m = n, \quad b_l = \widetilde{b}_l \ \ (l = \overline{1, m = n}), \quad c_{-l} = 2\mu\alpha_{-l}, \ \widetilde{c}_{-l} = \eta\alpha_{-l}, \ \alpha_{-l} > 0 \ \ (l = \overline{-1, m}), \ \ \mu > 0, \ \ \eta \geqslant 0,$$

тогда соответствующая система уравнений и граничных условий будет описывать малые движения синхронно-изотропной среды параболического типа. Задача Коши (2.8) примет вид

$$\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = -\alpha_1 A\frac{d\vec{u}}{dt} - \alpha_0 A\vec{u} + \sum_{l=1}^{m}\int_0^t e^{-b_l(t-s)}\alpha_{-l}A\vec{u}(s)\,ds + \vec{f}(t), \quad \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \ \ \vec{u}'(0) = \vec{u}^1, \tag{4.1}$$

где $A := A\Big(\mu, \eta + \dfrac{1}{3}\mu\Big)$. В этом пункте обозначения операторов могут не совпадать с соответствующими операторами из разделов 2 и 3, что, впрочем, ясно из контекста.

Рассуждая, как в пункте 2.3, можно задачу Коши (4.1) свести к задаче Коши

$$\frac{d^2\vec{u}}{dt^2} = -A^{1/2}\Big\{\alpha_1 A^{1/2}\frac{d\vec{u}}{dt} + \beta A^{1/2}\vec{u} + \sum_{l=1}^{m}\int_0^t e^{-b_l(t-s)}\beta_l A^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\,ds\Big\} + \vec{f}_0(t), \ \ \vec{u}(0) = \vec{u}^0, \ \vec{u}'(0) = \vec{u}^1,$$

$$\vec{f}_0(t) := \vec{f}(t) - \sum_{l=1}^{m}\frac{\alpha_{-l}}{b_l}e^{-b_l t}A\vec{u}_0, \quad \beta := \alpha_0 - \sum_{l=1}^{m}\frac{\alpha_{-l}}{b_l} > 0, \quad \beta_l := \frac{\alpha_{-l}}{b_l} \ \ (l = \overline{1, m}). \tag{4.2}$$

Введем по полю $\vec{u}$ объекты

$$\beta^{1/2}A^{1/2}\vec{u}(t) =: \frac{d\vec{v}(t)}{dt} \quad \big(\vec{v}(0) = 0\big), \qquad \int_0^t e^{-b_l(t-s)}\beta_l^{1/2}A^{1/2}\frac{d\vec{u}(s)}{ds}\,ds =: \vec{v}_l(t), \quad l = \overline{1, m},$$

и перепишем уравнение из (4.2) в виде следующей системы уравнений:

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\vec{u}}{dt^2} = -A^{1/2}\Big\{\alpha_1 A^{1/2}\dfrac{d\vec{u}}{dt} + \beta^{1/2}\dfrac{d\vec{v}}{dt} + \displaystyle\sum_{l=1}^{m}\beta_l^{1/2}\vec{v}_l\Big\} + \vec{f}_0(t), \\ \dfrac{d^2\vec{v}}{dt^2} = \beta^{1/2}A^{1/2}\dfrac{d\vec{u}}{dt}, \quad \dfrac{d\vec{v}_l}{dt} = \beta_l^{1/2}A^{1/2}\dfrac{d\vec{u}}{dt} - b_l\vec{v}_l, \ \ l = \overline{1, m}. \end{cases}$$

Эту систему (с начальными условиями) будем трактовать как задачу Коши для дифференциально-операторного уравнения первого порядка в гильбертовом пространстве $\mathcal{H} := H \oplus \mathcal{H}_0$

$(H = \vec{L}_2(\Omega,\rho), \mathcal{H}_0 := \oplus_{l=1}^{m+1} H)$:

$$\frac{d\xi}{dt} = -\mathcal{A}\xi + \mathcal{F}(t), \quad \xi(0) = \xi^0. \tag{4.3}$$

Здесь обозначено $\xi := (\vec{u}'; w)^\tau$, $w := (\vec{v}'; \vec{v}_1; \ldots; \vec{v}_m)^\tau$, $\xi^0 := (\vec{u}^1; w^0)^\tau$, $w^0 := (\beta^{1/2} A^{1/2} \vec{u}^0; \vec{0}; \ldots; \vec{0})^\tau$, $\mathcal{F}(t) := (\vec{f}_0(t); \vec{0}; \ldots; \vec{0})^\tau$, а для оператора $\mathcal{A}$ справедливы следующие формулы:

$$\mathcal{A} = \mathrm{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}_0) \begin{pmatrix} \alpha_1 I & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} \end{pmatrix} \mathrm{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}_0), \quad \mathcal{D}(\mathcal{A}) = \Big\{ \xi = (\vec{u}; w)^\tau \in \mathcal{H} \,\Big|\, \alpha_1 \vec{u} + A^{-1/2} \mathcal{Q}^* w \in \mathcal{D}(A) \Big\},$$

где I, $\mathcal{I}_0$ — единичные операторы в H и $\mathcal{H}_0$ соответственно,

$$\mathcal{Q} := \big(\beta^{1/2} I, \beta_1^{1/2} I, \ldots, \beta_m^{1/2} I\big)^\tau, \quad \mathcal{G} := \mathrm{diag}\big(0, b_1 I, \ldots, b_m I\big).$$

Можно доказать, как и в лемме 2.3, что оператор $-\mathcal{A}$ — максимальный диссипативный. Основываясь на задаче Коши (4.3) и факторизации оператора $\mathcal{A}$ в форме Шура—Фробениуса, можно доказать теорему об однозначной сильной разрешимости задачи (4.1) (см. теорему 2.1).

4.2. Основная спектральная задача, операторный пучок и асимптотика спектра. Будем разыскивать решения однородного уравнения из (4.3) в форме $\xi(t) = \exp(-\lambda t)\xi$, где λ — спектральный параметр, а ξ — амплитудный элемент. В результате придем к следующей основной спектральной задаче:

$$\mathcal{A}\xi = \lambda\xi, \quad \xi \in \mathcal{D}(\mathcal{A}) \subset \mathcal{H}, \tag{4.4}$$

которую будем ассоциировать с задачей о спектре синхронно-изотропного вязкоупругого тела параболического типа или, что то же, с задачей о спектре однородного интегродифференциального уравнения второго порядка из (4.1).

Пусть $\xi = (\vec{u}; w)^\tau \in \mathcal{D}(\mathcal{A})$. Осуществив в спектральной задаче (4.4) замену искомого элемента $\mathrm{diag}(A^{1/2}, \mathcal{I}_0)\xi = \eta =: (\vec{z}; w)^\tau$, получим спектральную задачу

$$\mathcal{A}(\lambda)\eta := \begin{pmatrix} \alpha_1 I - \lambda A^{-1} & \mathcal{Q}^* \\ -\mathcal{Q} & \mathcal{G} - \lambda \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{z} \\ w \end{pmatrix} = 0, \quad \eta \in \mathcal{H} = H \oplus \mathcal{H}_0. \tag{4.5}$$

Пусть $\lambda \notin \{0, b_1, \ldots, b_m\} = \sigma(\mathcal{G})$, тогда из (4.5) найдем, что

$$L(\lambda)\vec{z} := \Big[\alpha_1 I - \lambda A^{-1} + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q}\Big]\vec{z} \equiv \Big[\alpha_1 I - \lambda A^{-1} - \frac{1}{\lambda}\beta I + \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l}{b_l - \lambda} I\Big]\vec{z} = 0, \quad \vec{z} \in H. \tag{4.6}$$

Можно проверить, как и в лемме 3.1, что $\{0, b_1, \ldots, b_m\} \subset \rho(\mathcal{A})$. Следовательно, спектр оператора $\mathcal{A}$ совпадает со спектром пучка $L(\lambda)$ (спектром задачи (4.6)).

Пусть $\lambda_k = \lambda_k(A^{-1})$, $\vec{u}_k = \vec{u}_k(A^{-1})$ $(k \in \mathbb{N})$ — k-е собственное значение и соответствующий ему нормированный к единице собственный элемент оператора A^{-1}, тогда $\vec{z}_k := \vec{u}_k$ — собственный элемент операторного пучка $L(\lambda)$ и спектр задачи (4.6) может быть полностью найден из следующей последовательности характеристических уравнений:

$$\alpha_1 + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q} \equiv \alpha_1 - \frac{1}{\lambda}\beta + \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l}{b_l - \lambda} = \lambda\lambda_k, \quad k \in \mathbb{N}. \tag{4.7}$$

Определим характеристические функции

$$\begin{aligned} g_k(\lambda) &:= \alpha_1 + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q} - \lambda\lambda_k \equiv \alpha_1 - \frac{1}{\lambda}\beta + \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l}{b_l - \lambda} - \lambda\lambda_k, \;\; k \in \mathbb{N}, \\ g_\infty(\lambda) &:= \alpha_1 + \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda)^{-1}\mathcal{Q} \equiv \alpha_1 - \frac{1}{\lambda}\beta + \sum_{l=1}^m \frac{\beta_l}{b_l - \lambda} \end{aligned} \tag{4.8}$$

и обозначим через γ_p $(p = \overline{1, m+1})$ корни уравнения $g_\infty(\lambda) = 0$. Простые геометрические рассуждения показывают, что $\gamma_p \in (b_{p-1}, b_p)$ $(p = \overline{1, m},\ b_0 := 0)$, $\gamma_{m+1} > b_m$ и $g'_\infty(\gamma_p) > 0$ $(p = \overline{1, m+1})$.

Обозначим через $\lambda_k^{(p)}$ $(p = \overline{1, m+2})$ корни уравнения $g_k(\lambda) = 0$ при каждом $k \in \mathbb{N}$. Можно проверить, что $\gamma_p < \lambda_k^{(p)} \in (b_{p-1}, b_p)$ $(p = \overline{1, m},\ b_0 := 0)$. Если $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ $(p = \overline{1, m})$, то $g'_k(\lambda_k^{(p)}) > 0$.

Если $\lambda_k^{(m+1)} \neq \lambda_k^{(m+2)} \in \mathbb{R}$, то $g_k'(\lambda_k^{(m+1)}) > 0$, $g_k'(\lambda_k^{(m+2)}) < 0$. В силу конечной кратности собственных значений оператора A^{-1} легко видеть также, что может быть только конечное количество номеров $k \in \mathbb{N}$, при которых характеристическое уравнение $g_k(\lambda) = 0$ имеет кратные корни.

Применение асимптотических методов к уравнениям (4.7) приводит к следующей теореме.

Теорема 4.1. *За исключением точек $\{\gamma_l\}_{l=1}^{m+1}$, спектр оператора $\mathcal{A}$ (или пучка $L(\lambda)$) состоит из изолированных конечнократных собственных значений, которые расположены на действительной положительной полуоси, за исключением, быть может, конечного количества комплексно сопряженных собственных значений. Все собственные значения можно разбить на $m+2$ серии $\{\lambda_k^{(p)}\}_{k=1}^{\infty}$ $(p = \overline{1, m+2})$ со следующим асимптотическим поведением:*

$$\lambda_k^{(p)} = \gamma_p + \frac{\gamma_p}{g_\infty'(\gamma_p)}\lambda_k(A^{-1}) + o(\lambda_k(A^{-1}))\ \ (k \to +\infty), \qquad p = 1, 2, \ldots, m+1,$$

$$\lambda_k^{(+\infty)} := \lambda_k^{(m+2)} = \frac{\alpha_1}{\lambda_k(A^{-1})} - \frac{\alpha_0}{\alpha_1} - \Big[\sum_{l=1}^{m}\frac{\alpha_{-l}}{\alpha_1^2} + \frac{\alpha_0^2}{\alpha_1^3}\Big]\lambda_k(A^{-1}) + o(\lambda_k(A^{-1}))\ \ (k \to +\infty),$$

где (см. теорему 3.2)

$$\lambda_k(A^{-1}) = \Big[\frac{1}{6\pi^2}\Big(2\mu^{-3/2} + \big(\eta + \frac{4}{3}\mu\big)^{-3/2}\Big)\int\limits_\Omega \rho^{3/2}(x)\,d\Omega\Big]^{2/3} k^{-2/3}(1 + o(1))\ \ (k \to +\infty).$$

4.3. Некоторые леммы о системах векторов в $\mathbb{C}^{m+2}$. В соответствии с теоремой 3.7 собственные элементы оператора $\mathcal{A}$, после группировки по сериям (см. теорему 4.1) могут быть записаны следующим образом:

$$\widetilde{\xi}_k^{(p)} = \big(\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}\big)^\tau \vec{u}_k \equiv \Big(\lambda_k^{1/2}; \frac{-\beta^{1/2}}{\lambda_k^{(p)}}; \frac{\beta_1^{1/2}}{b_1 - \lambda_k^{(p)}}; \ldots; \frac{\beta_m^{1/2}}{b_m - \lambda_k^{(p)}}\Big)^\tau \vec{u}_k, \ \ p = \overline{1, m+2}, \ \ k \in \mathbb{N}. \tag{4.9}$$

В связи с этой формулой докажем ряд вспомогательных утверждений.

Лемма 4.1. *Пусть $J := \mathrm{diag}(1, -I)$ — каноническая симметрия в $\mathbb{C}^{m+2} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{m+1}$,*

$$\begin{gathered}\varphi_k^{(p)} := R_{k,p}\big(\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}\big)^\tau, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ R_{k,p} := \begin{cases} \big[g_\infty'(\gamma_p)\big]^{-1/2}, & p = \overline{1, m+1}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \lambda_k^{-1/2}, & p = m+2, \quad k \in \mathbb{N}. \end{cases}\end{gathered} \tag{4.10}$$

При всех $p, q = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$ имеют место следующие формулы:

$$\big(J\varphi_k^{(p)}, \varphi_k^{(q)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = 0, \ \ \lambda_k^{(p)} \neq \overline{\lambda_k^{(q)}}, \qquad \big(J\varphi_k^{(p)}, \overline{\varphi_k^{(p)}}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = -g_k'(\lambda_k^{(p)})R_{k,p}^2. \tag{4.11}$$

Доказательство. При $\lambda_k^{(p)} \neq \overline{\lambda_k^{(q)}}$ из (4.8), $g_k(\lambda_k^{(p)}) = 0$ и тождества Гильберта найдем

$$\begin{aligned}\big(J\varphi_k^{(p)}, \varphi_k^{(q)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} &= R_{k,p}R_{k,q}\Big[\lambda_k - \big((\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}, (\mathcal{G} - \lambda_k^{(q)})^{-1}\mathcal{Q}\big)_{\mathbb{C}^{m+1}}\Big] = \\ &= R_{k,p}R_{k,q}\Big[\lambda_k - \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \overline{\lambda_k^{(q)}})^{-1}(\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}\Big] = R_{k,p}R_{k,q}\Big[\lambda_k - \frac{1}{\overline{\lambda_k^{(q)}} - \lambda_k^{(p)}}\Big[\mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \overline{\lambda_k^{(q)}})^{-1}\mathcal{Q} - \\ &\quad - \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}\Big]\Big] = R_{k,p}R_{k,q}\Big[\lambda_k - \frac{1}{\overline{\lambda_k^{(q)}} - \lambda_k^{(p)}}\Big[\overline{\lambda_k^{(q)}}\lambda_k - \alpha_1 + \alpha_1 - \lambda_k^{(p)}\lambda_k\Big]\Big] = 0.\end{aligned}$$

Далее из (4.8) имеем

$$\big(J\varphi_k^{(p)}, \overline{\varphi_k^{(p)}}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = R_{k,p}^2\Big[\lambda_k - \mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-2}\mathcal{Q}\Big] = -g_k'(\lambda_k^{(p)})R_{k,p}^2.$$

Лемма доказана. □

Лемма 4.2. *Пусть $M_k := M_k(\varphi_k^{(1)}, \varphi_k^{(2)}, \ldots, \varphi_k^{(m+2)})$ $(k \in \mathbb{N})$ — матрица, столбцами которой являются векторы $\varphi_k^{(p)}$ $(p = \overline{1, m+2})$. Имеют место следующие утверждения.*

1. *Существует* $C_1 > 0$ *такое, что* $\|M_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leqslant C_1$ *при всех* $k \in \mathbb{N}$.
2. *Если* $g_k'(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ $(p = \overline{1, m+2},\ k \in \mathbb{N})$, *то* $\det M_k \neq 0$.
3. *В условиях пункта* 2 *существует* $C_2 > 0$ *такое, что* $\|M_k^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leqslant C_2$ *при всех* $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. В силу теоремы 4.1 очевидно, что нормы $\|\varphi_k^{(p)}\|_{\mathbb{C}^{m+2}}$ равномерно ограничены при $p = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$. Отсюда следует первое утверждение леммы.

Далее с помощью формул (4.10), (4.11) из леммы 4.1 найдем, что

$$M_k^\tau J M_k = -\operatorname{diag}\bigl(g_k'(\lambda_k^{(1)}) R_{k,1}^2, g_k'(\lambda_k^{(2)}) R_{k,2}^2, \ldots, g_k'(\lambda_k^{(m+2)}) R_{k,m+2}^2\bigr).$$

Отсюда следует, что

$$(-1)^{m+1}\bigl(\det M_k\bigr)^2 = \det M_k^\tau J M_k = (-1)^{m+2} \prod_{p=1}^{m+2} g_k'(\lambda_k^{(p)}) R_{k,p}^2,$$

а значит, учитывая (4.10) и $g_k'(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ $(p = \overline{1, m+2},\ k \in \mathbb{N})$, что

$$\bigl(\det M_k\bigr)^2 = \frac{-1}{\bigl[g_\infty'(\gamma_p)\bigr]^{m+1} \lambda_k} \prod_{p=1}^{m+2} g_k'(\lambda_k^{(p)}) \neq 0.$$

Далее с использованием (4.8) и теоремы 4.1 вычислим

$$\lim_{k\to+\infty} \bigl(\det M_k\bigr)^2 = \frac{1}{\bigl[g_\infty'(\gamma_p)\bigr]^{m+1}} \prod_{p=1}^{m+1} \lim_{k\to+\infty} g_k'(\lambda_k^{(p)}) \cdot \lim_{k\to+\infty} \frac{-g_k'(\lambda_k^{(m+2)})}{\lambda_k} = 1.$$

Отсюда и из оценки $\|M_k^{-1}\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leqslant |\det M_k|^{-1} \|M_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}^{m+1}$ (см. [10, с. 42, формула (4.12)]) следует третье утверждение в лемме. Лемма доказана. □

Лемма 4.3. *Система векторов*

$$\varphi_\infty^{(p)} := \bigl[g_\infty'(\gamma_p)\bigr]^{-1/2} \Bigl(0; (\mathcal{G} - \gamma_p)^{-1} \mathcal{Q}\Bigr)^\tau, \ \ p = \overline{1, m+1}, \quad \varphi_\infty^{(m+2)} := \bigl(1; 0_{m+1}\bigr)^\tau \tag{4.12}$$

является ортонормированным базисом в $\mathbb{C}^{m+2} = \mathbb{C} \oplus \mathbb{C}^{m+1}$.

Доказательство. Доказательство проводится прямой проверкой с учетом (4.8) и $g_\infty(\gamma_p) = 0$. □

Лемма 4.4. *Пусть* $M_\infty := M_\infty(\varphi_\infty^{(1)}, \varphi_\infty^{(2)}, \ldots, \varphi_\infty^{(m+2)})$ — *матрица, столбцами которой являются векторы* $\varphi_\infty^{(p)}$ $(p = \overline{1, m+2})$. *Тогда матрица* M_∞ *ортогональна*: $M_\infty^* = M_\infty^\tau = M_\infty^{-1}$.

Доказательство. Доказательство проводится прямой проверкой с использованием леммы 4.3. □

Лемма 4.5. *Существует* $C > 0$ *такое, что* $\|M_k - M_\infty\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})} \leqslant C\bigl[\lambda_k(A^{-1})\bigr]^{1/2}$ *при* $k \in \mathbb{N}$.

Доказательство. Доказательство следует из лемм 4.1, 4.3 и асимптотик из теоремы 4.1. □

4.4. О p-базисности системы корневых элементов оператора $\mathcal{A}$.

Следствием лемм 4.3 и 4.4 является следующее утверждение.

Лемма 4.6. *Система элементов* $\{\xi_{k,\infty}^{(p)} := \varphi_\infty^{(p)} \vec{u}_k\}_{p=\overline{1,m+2},\, k\in\mathbb{N}}$ *является ортонормированным базисом пространства* $\mathcal{H}$.

Доказательство. Ортонормированность введенной системы следует из леммы 4.3 и ортонормированности системы $\{\vec{u}_k\}_{k=1}^\infty$. Покажем, что введенная система полна в $\mathcal{H}$. Пусть существует $\xi = (\vec{z}; \vec{v}; \vec{v}_1 \ldots; \vec{v}_m)^\tau \in \mathcal{H}$ такой, что $\bigl(\xi_{k,\infty}^{(p)}, \xi\bigr)_{\mathcal{H}} = 0$ при всех $p = \overline{1, m+2}$, $k \in \mathbb{N}$. Последнее означает, что $M_\infty^\tau\bigl((\vec{u}_k, \vec{z})_H; (\vec{u}_k, \vec{v})_H; (\vec{u}_k, \vec{v}_1)_H; \ldots; (\vec{u}_k, \vec{v}_m)_H\bigr) = 0$ при $k \in \mathbb{N}$. Отсюда, из леммы 4.4 и из полноты системы $\{\vec{u}_k\}_{k=1}^\infty$ тогда получим, что $\vec{z} = \vec{v} = \vec{v}_1 = \cdots = \vec{v}_m = \vec{0}$. То есть, $\xi = 0$. □

С помощью набора матриц S_k ($k\in\mathbb{N}$), действующих в $\mathbb{C}^{m+2}$, определим оператор $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S}\xi := \sum_{k=1}^{+\infty}\Bigl(\xi_{k,\infty}^{(1)};\ldots;\xi_{k,\infty}^{(m+2)}\Bigr)S_k\begin{pmatrix}(\xi,\xi_{k,\infty}^{(1)})_{\mathcal{H}}\\ \vdots\\ (\xi,\xi_{k,\infty}^{(m+2)})_{\mathcal{H}}\end{pmatrix} := \sum_{k=1}^{+\infty}\left[\sum_{p=1}^{m+2}\xi_{k,\infty}^{(p)}\sum_{q=1}^{m+2}S_k^{pq}\bigl(\xi,\xi_{k,\infty}^{(q)}\bigr)_{\mathcal{H}}\right] \tag{4.13}$$

и будем писать при этом $\mathcal{S}\longleftrightarrow S_k$.

Лемма 4.7. *Имеют место следующие утверждения.*

1. $\|\mathcal{S}\|_{\mathcal{L}(\mathcal{H})}\leqslant\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\|S_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}$.
2. *Пусть* $\mathcal{S}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$. *Если* $\mathcal{S}\longleftrightarrow S_k$, *то* $\mathcal{S}^*\longleftrightarrow S_k^*$.
3. *Пусть* $\mathcal{S},\mathcal{T}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$, *тогда* $\mathcal{S}\mathcal{T}\longleftrightarrow S_kT_k$. *В частности,* $\mathcal{S}^{-1}\longleftrightarrow S_k^{-1}$.

Доказательство. Лемма доказывается непосредственной проверкой с использованием ортонормированности системы $\{\xi_{k,\infty}^{(p)}\}_{p=\overline{1,m+2},\,k\in\mathbb{N}}$. □

Основываясь на доказанных фактах, установим две теоремы: о p-базисности специальным образом нормированной системы (4.9) собственных элементов оператора $\mathcal{A}$ в невырожденном случае и о p-базисности системы корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ в вырожденном случае.

Теорема 4.2. *Пусть* $g_k'(\lambda_k^{(p)})\neq 0$ $(p=\overline{1,m+2},\ k\in\mathbb{N})$. *Тогда система собственных элементов* $\{\xi_k^{(p)}:=\varphi_k^{(p)}\vec{u}_k\}_{p=\overline{1,m+2},\,k\in\mathbb{N}}$ *оператора* $\mathcal{A}$ *образует* p*-базис пространства* $\mathcal{H}$ *при* $p>3$.

Доказательство. Положим $\mathcal{S}\longleftrightarrow S_k:=M_\infty^*M_k$ и покажем, что $\mathcal{S}\xi_{l,\infty}^{(q)}=\xi_l^{(q)}$ при $q=\overline{1,m+2}$, $l\in\mathbb{N}$. Учитывая, что $S_k^{pq}=\overline{\bigl(\varphi_\infty^{(p)},\varphi_k^{(q)}\bigr)_{\mathbb{C}^{m+2}}}$ и $\bigl(\xi_l^{(q)},\xi_{k,\infty}^{(p)}\bigr)_{\mathcal{H}}=0$ при $l\neq k$, вычислим

$$\mathcal{S}\xi_{l,\infty}^{(q)}=\bigl(\xi_{l,\infty}^{(1)};\ldots;\xi_{l,\infty}^{(m+2)}\bigr)M_\infty^*M_l\bigl(0;\ldots;0;1_q;0;\ldots;0\bigr)^\tau=$$

$$=\bigl(\xi_{l,\infty}^{(1)};\ldots;\xi_{l,\infty}^{(m+2)}\bigr)\Bigl(\overline{\bigl(\varphi_\infty^{(1)},\varphi_l^{(q)}\bigr)_{\mathbb{C}^{m+2}}};\ldots;\overline{\bigl(\varphi_\infty^{(m+2)},\varphi_l^{(q)}\bigr)_{\mathbb{C}^{m+2}}}\Bigr)^\tau=\sum_{p=1}^{m+2}\overline{\bigl(\varphi_\infty^{(p)},\varphi_l^{(q)}\bigr)_{\mathbb{C}^{m+2}}}\xi_{l,\infty}^{(p)}=$$

$$=\sum_{p=1}^{m+2}\bigl(\varphi_l^{(q)},\varphi_\infty^{(p)}\bigr)_{\mathbb{C}^{m+2}}\xi_{l,\infty}^{(p)}=\sum_{p=1}^{m+2}\bigl(\xi_l^{(q)},\xi_{l,\infty}^{(p)}\bigr)_{\mathcal{H}}\xi_{l,\infty}^{(p)}=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{m+2}\bigl(\xi_l^{(q)},\xi_{k,\infty}^{(p)}\bigr)_{\mathcal{H}}\xi_{k,\infty}^{(p)}=\xi_l^{(q)}.$$

Из леммы 4.7, условия $g_k'(\lambda_k^{(p)})\neq 0$ $(p=\overline{1,m+2},\ k\in\mathbb{N})$, лемм 4.2 и 4.4 следует, что оператор $\mathcal{S}$ непрерывно обратим: $\mathcal{S}^{-1}\in\mathcal{L}(\mathcal{H})$. Отсюда и из леммы 4.6 тогда следует, что система элементов $\{\xi_k^{(p)}\}_{p=\overline{1,m+2},\,k\in\mathbb{N}}$ — базис Рисса пространства $\mathcal{H}$. Для доказательства теоремы остается показать, что $\mathcal{S}=\mathcal{I}+\mathcal{T}$, где $\mathcal{T}\in\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ при $p>3$.

Положим $T_k:=M_k-M_\infty$, тогда с учетом лемм 4.4 и 4.7 получим, что

$$\mathcal{S}\longleftrightarrow M_\infty^*M_k=M_\infty^*(M_\infty+T_k)=I+M_\infty^*T_k\longleftrightarrow\mathcal{I}+\mathcal{T},\quad \mathcal{T}^*\mathcal{T}\longleftrightarrow(T_k^*M_\infty)(M_\infty^*T_k)=T_k^*T_k.$$

Обозначим через $\lambda_k\bigl((\mathcal{T}^*\mathcal{T})^{1/2}\bigr)$ и $\lambda_k\bigl((T^*T)^{1/2}\bigr)$ собственные значения оператора $(\mathcal{T}^*\mathcal{T})^{1/2}$ и матрицы $(T^*T)^{1/2}$ соответственно, занумерованные в порядке убывания и с учетом кратности. Тогда из последних соотношений и леммы 4.5 получим, что

$$\sum_{r=1}^{+\infty}\lambda_r^p\bigl((\mathcal{T}^*\mathcal{T})^{1/2}\bigr)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=1}^{m+2}\lambda_l^p\bigl((T_k^*T_k)^{1/2}\bigr)=\sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{l=1}^{m+2}\bigl[\lambda_l\bigl(T_k^*T_k\bigr)\bigr]^{p/2}\leqslant$$

$$\leqslant(m+2)\sum_{k=1}^{+\infty}\bigl[\lambda_{\max}\bigl(T_k^*T_k\bigr)\bigr]^{p/2}=(m+2)\sum_{k=1}^{+\infty}\|T_k^*T_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}^{p/2}\leqslant$$

$$\leqslant(m+2)\sum_{k=1}^{+\infty}\|T_k\|_{\mathcal{L}(\mathbb{C}^{m+2})}^{p}\leqslant(m+2)C^p\sum_{k=1}^{+\infty}\bigl[\lambda_k(A^{-1})\bigr]^{p/2}<+\infty$$

при $p/2>3/2$ (см. теорему 3.2). Следовательно, $\mathcal{T}\in\mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ при $p>3$. Теорема доказана. □

Рассмотрим теперь ситуацию, когда при некотором $k \in \mathbb{N}$ уравнение $g_k(\lambda) = 0$ имеет кратный корень. Этот корень может находиться в зоне $\lambda > b_m$ и быть двукратным. Точнее, в этом случае при некотором $k \in \mathbb{N}$ будет $\lambda_k^{(m+1)} = \lambda_k^{(m+2)} \in \mathbb{R}$. Пусть $\vec{z}$ — это первый присоединенный элемент к собственному элементу $\vec{u}_k$ пучка $L(\lambda)$ в точке $\lambda_k^{(m+2)}$. Тогда $L'(\lambda_k^{(m+2)})\vec{u}_k = g_k'(\lambda_k^{(m+2)})\vec{u}_k = 0$ и

$$L'(\lambda_k^{(m+2)})\vec{u}_k + L(\lambda_k^{(m+2)})\vec{z} = g_k'(\lambda_k^{(m+2)})\vec{u}_k + L(\lambda_k^{(m+2)})\vec{z} = L(\lambda_k^{(m+2)})\vec{z} = 0.$$

Таким образом, в качестве первого присоединенного к $\vec{u}_k$ элемента можно взять его же.

Пусть $\xi_{k0}^{(m+2)} = \left(\lambda_k^{1/2}\vec{u}_k; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+2)})^{-1}\mathcal{Q}\vec{u}_k\right)^\tau$ — собственный элемент оператора $\mathcal{A}$, отвечающий собственному значению $\lambda_k^{(m+2)}$. Вычислим в соответствии с теоремой 3.7 присоединенный элемент η_1 оператора $\mathcal{A}$. Поскольку присоединенный элемент определяется с точностью до собственного элемента, то можно считать, что $\xi_{k1}^{(m+2)} = \eta_1 - \xi_{k0}^{(m+2)} = \left(0; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+2)})^{-2}\mathcal{Q}\vec{u}_k\right)^\tau$. Следовательно, оператор $\mathcal{A}$ имеет следующую цепочку из собственного и присоединенного к нему элемента:

$$\begin{aligned} \xi_{k0}^{(m+2)} &= \left(\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+2)})^{-1}\mathcal{Q}\right)^\tau \vec{u}_k =: \varphi_{k0}^{(m+2)}\vec{u}_k, \\ \xi_{k1}^{(m+2)} &= \left(\ 0; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(m+2)})^{-2}\mathcal{Q}\right)^\tau \vec{u}_k =: \varphi_{k1}^{(m+2)}\vec{u}_k. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Разберем теперь ситуацию, когда при некотором $k \in \mathbb{N}$ уравнение $g_k(\lambda) = 0$ имеет трехкратный корень. Этот корень может быть лишь в зоне $0 < \lambda < b_m$. В этом случае при указанном k и некотором $p \in \{1, m\}$ будет $\lambda_k^{(p)} = \lambda_k^{(m+1)} = \lambda_k^{(m+2)} \in \mathbb{R}$. Пусть $\vec{z}$ — это второй присоединенный элемент к собственному элементу $\vec{u}_k$ пучка $L(\lambda)$ в точке $\lambda_k^{(p)}$. Тогда $L''(\lambda_k^{(p)})\vec{u}_k = g_k''(\lambda_k^{(p)})\vec{u}_k = g_\infty''(\lambda_k^{(p)})\vec{u}_k = 0$, $L'(\lambda_k^{(p)})\vec{u}_k = g_k'(\lambda_k^{(p)})\vec{u}_k = 0$ и

$$2^{-1}L''(\lambda_k^{(p)})\vec{u}_k + L'(\lambda_k^{(p)})\vec{u}_k + L(\lambda_k^{(p)})\vec{z} = 2^{-1}g_\infty''(\lambda_k^{(p)})\vec{u}_k + g_k'(\lambda_k^{(p)})\vec{u}_k + L(\lambda_k^{(p)})\vec{z} = L(\lambda_k^{(p)})\vec{z} = 0.$$

Таким образом, в качестве второго присоединенного к $\vec{u}_k$ элемента можно взять элемент $\vec{u}_k$.

Вычислим в соответствии с теоремой 3.7 первый η_1 и второй η_2 присоединенные элементы оператора $\mathcal{A}$. Легко проверить, что цепочкой из собственного и присоединенных к нему элементов будет также $\xi_{k0}^{(p)}$, $\xi_{k1}^{(p)} := \eta_1 - \xi_{k0}^{(p)}$, $\xi_{k2}^{(p)} := \eta_2 - \eta_1$. Таким образом, имеем

$$\begin{aligned} \xi_{k0}^{(p)} &= \left(\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}\right)^\tau \vec{u}_k =: \varphi_{k0}^{(p)}\vec{u}_k, \\ \xi_{k1}^{(p)} &= \left(\ 0; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-2}\mathcal{Q}\right)^\tau \vec{u}_k =: \varphi_{k1}^{(p)}\vec{u}_k, \\ \xi_{k2}^{(p)} &= \left(\ 0; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-3}\mathcal{Q}\right)^\tau \vec{u}_k =: \varphi_{k2}^{(p)}\vec{u}_k. \end{aligned} \tag{4.15}$$

Далее будем считать, что система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ нормируется следующим образом. Если собственный элемент не имеет присоединенного, то он выбирается по формуле из теоремы 4.2. Если собственный элемент имеет один или два присоединенных элемента, то соответствующая цепочка выбирается по формуле (4.14) или (4.15) соответственно.

Отметим, что собственных элементов оператора $\mathcal{A}$, имеющих один или два присоединенных элемента, может быть лишь конечное количество.

Теорема 4.3. *Система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$, нормированных специальным образом, образует p-базис пространства $\mathcal{H}$ при $p > 3$.*

Доказательство. Покажем сначала, что система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ полна в $\mathcal{H}$. Рассмотрим для простоты ситуацию, когда у оператора $\mathcal{A}$ есть одно собственное значение $\lambda_s^{(p)}$, которому отвечает цепочка из собственного и одного или двух присоединенных элементов.

Пусть собственному значению $\lambda_s^{(m+2)}$ оператора $\mathcal{A}$ отвечает цепочка из собственного и присоединенного к нему элемента, определяемых по формулам (4.14). Предположим, что рассматриваемая система не полна в $\mathcal{H}$ и существует $\xi = (\vec{z}; \vec{v}; \vec{v}_1 \ldots; \vec{v}_m)^\tau \in \mathcal{H}$ такой, что

$$\begin{aligned} &\left(\xi_k^{(p)}, \xi\right)_{\mathcal{H}} = 0, \ \ p = \overline{1, m+2}, \ \ k = 1, 2, \ldots, s-1, s+1, \ldots, \\ &\left(\xi_s^{(p)}, \xi\right)_{\mathcal{H}} = 0, \ \ p = \overline{1, m}, \quad \left(\xi_{s0}^{(m+2)}, \xi\right)_{\mathcal{H}} = 0, \quad \left(\xi_{s1}^{(m+2)}, \xi\right)_{\mathcal{H}} = 0. \end{aligned} \tag{4.16}$$

Первая строчка в (4.16) означает, что $M_k^\tau\big((\vec{u}_k,\vec{z})_H;(\vec{u}_k,\vec{v})_H;(\vec{u}_k,\vec{v}_1)_H;\dots;(\vec{u}_k,\vec{v}_m)_H\big)=0$ при $k=1,2,\dots,s-1,s+1,\dots$ (см. лемму 4.2). Отсюда следует, что

$$\big(\vec{u}_k,\vec{z}\big)_H=\big(\vec{u}_k,\vec{v}\big)_H=\big(\vec{u}_k,\vec{v}_1\big)_H=\dots=\big(\vec{u}_k,\vec{v}_m\big)_H=0,\quad k=1,2,\dots,s-1,s+1,\dots. \tag{4.17}$$

Вторая строчка в (4.16) означает, что $M_{s,1}^\tau\big((\vec{u}_s,\vec{z})_H;(\vec{u}_s,\vec{v})_H;(\vec{u}_s,\vec{v}_1)_H;\dots;(\vec{u}_s,\vec{v}_m)_H\big)=0$, где $M_{s,1}=M_{s,1}(\varphi_s^{(1)},\varphi_s^{(2)},\dots,\varphi_s^{(m)},\varphi_{s0}^{(m+2)},\varphi_{s1}^{(m+2)})$ — матрица, столбцами которой являются соответствующие векторы. Покажем, что $\det M_{s,1}\neq 0$, тогда из последней системы, соотношений (4.17) и полноты в H системы $\{\vec{u}_k\}_{k=1}^\infty$ получим, что $\vec{z}=\vec{v}=\vec{v}_1=\dots=\vec{v}_m=\vec{0}$, то есть, $\xi=0$.

Пусть, как и в лемме 4.1, $J=\operatorname{diag}(1,-I)$. Несложно проверить, что

$$\begin{gathered}\big(J\varphi_{s0}^{(m+2)},\varphi_{s0}^{(m+2)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}}=0,\quad \big(J\varphi_{s0}^{(m+2)},\varphi_{s1}^{(m+2)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}}=-\frac{1}{2}g_s''(\lambda_s^{(m+2)})\neq 0,\\ \big(J\varphi_{s1}^{(m+2)},\varphi_{s1}^{(m+2)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}}=-\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m+2)}).\end{gathered} \tag{4.18}$$

Для дальнейших вычислений понадобится формула, которая может быть получена последовательным дифференцированием тождества Гильберта:

$$(\mathcal{G}-\lambda)^{-n}(\mathcal{G}-\mu)^{-1}=\frac{1}{(\mu-\lambda)^n}(\mathcal{G}-\mu)^{-1}-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{(\mu-\lambda)^{k+1}}(\mathcal{G}-\lambda)^{-(n-k)},\ \ \mu,\lambda\in\rho(\mathcal{G}),\ \ n\in\mathbb{N}. \tag{4.19}$$

С использованием соотношений $g_s(\lambda_s^{(p)})=0$ $(p=\overline{1,m})$, $g_s(\lambda_s^{(m+2)})=g_s'(\lambda_s^{(m+2)})=0$ и формулы (4.19) при $n=2$ можно найти, что при всех $p=1,2,\dots,m$

$$\begin{aligned}\big(J\varphi_s^{(p)},\varphi_{s1}^{(m+2)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}}&=-R_{s,p}\big((\mathcal{G}-\lambda_s^{(p)})^{-1}\mathcal{Q},(\mathcal{G}-\lambda_s^{(m+2)})^{-2}\mathcal{Q}\big)_{\mathbb{C}^{m+1}}=\\ &=-R_{s,p}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G}-\lambda_s^{(m+2)})^{-2}(\mathcal{G}-\lambda_s^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}=\\ &=-R_{s,p}\mathcal{Q}^*\Big[\frac{(\mathcal{G}-\lambda_s^{(p)})^{-1}}{(\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m+2)})^2}-\frac{(\mathcal{G}-\lambda_s^{(m+2)})^{-2}}{\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m+2)}}-\frac{(\mathcal{G}-\lambda_s^{(m+2)})^{-1}}{(\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m+2)})^2}\Big]\mathcal{Q}=\\ &=-R_{s,p}\Big[\frac{\lambda_s^{(p)}\lambda_k-\alpha_1}{(\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m+2)})^2}-\frac{\lambda_k}{\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m+2)}}-\frac{\lambda_s^{(m+2)}\lambda_k-\alpha_1}{(\lambda_s^{(p)}-\lambda_s^{(m+2)})^2}\Big]=0.\end{aligned} \tag{4.20}$$

Из (4.18) и (4.20) найдем, что

$$M_{s,1}^\tau JM_{s,1}=\begin{pmatrix}-g_s'(\lambda_s^{(1)})R_{s,1}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0\\ 0 & -g_s'(\lambda_s^{(2)})R_{s,2}^2 & \cdots & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{2!}g_s''(\lambda_s^{(m+2)})\\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{2!}g_s''(\lambda_s^{(m+2)}) & -\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m+2)})\end{pmatrix},$$

$$(-1)^{m+1}\big(\det M_{s,1}\big)^2=\det M_{s,1}^\tau JM_{s,1}=(-1)^{m+1}\Big[\frac{1}{2!}g_s''(\lambda_s^{(m+2)})\Big]^2\prod_{p=1}^m g_s'(\lambda_s^{(p)})R_{s,p}^2\neq 0.$$

Следовательно, $\det M_{s,1}\neq 0$.

Пусть теперь собственному значению $\lambda_s^{(p)}$ оператора $\mathcal{A}$ отвечает цепочка из собственного и двух присоединенных элементов, определяемых по формулам (4.15). Не ограничивая общности, можно считать, что $p=m$. Предположим, что рассматриваемая система не полна в $\mathcal{H}$ и существует $\xi=(\vec{z};\vec{v};\vec{v}_1\dots;\vec{v}_m)^\tau\in\mathcal{H}$ такой, что

$$\begin{gathered}\big(\xi_k^{(p)},\xi\big)_{\mathcal{H}}=0,\ \ p=\overline{1,m+2},\ \ k=1,2,\dots,s-1,s+1,\dots,\\ \big(\xi_s^{(p)},\xi\big)_{\mathcal{H}}=0,\ \ p=\overline{1,m-1},\quad \big(\xi_{s0}^{(m)},\xi\big)_{\mathcal{H}}=0,\quad \big(\xi_{s1}^{(m)},\xi\big)_{\mathcal{H}}=0,\quad \big(\xi_{s2}^{(m)},\xi\big)_{\mathcal{H}}=0.\end{gathered} \tag{4.21}$$

Первая строчка в (4.21), как и выше, влечет (4.17). Вторая строчка в (4.21) означает, что $M_{s,2}^\tau\big((\vec{u}_s,\vec{z})_H;(\vec{u}_s,\vec{v})_H;(\vec{u}_s,\vec{v}_1)_H;\dots\big)=0$, где $M_{s,2}=M_{s,2}(\varphi_s^{(1)},\dots,\varphi_s^{(m-1)},\varphi_{s0}^{(m)},\varphi_{s1}^{(m)},\varphi_{s2}^{(m)})$ — матрица, столбцами которой являются соответствующие векторы. Покажем, что $\det M_{s,2}\neq 0$, тогда из последней системы, соотношений (4.17) и полноты в H системы $\{\vec{u}_k\}_{k=1}^{\infty}$ получим, как и выше, что $\vec{z} = \vec{v} = \vec{v}_1 = \cdots = \vec{v}_m = \vec{0}$ и, значит, $\xi = 0$.

Несложно проверить, что

$$\begin{gathered}\big(J\varphi_{s0}^{(m)}, \varphi_{s0}^{(m)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = 0, \quad \big(J\varphi_{s0}^{(m)}, \varphi_{s1}^{(m)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = 0,\\ \big(J\varphi_{s0}^{(m)}, \varphi_{s2}^{(m)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = \big(J\varphi_{s1}^{(m)}, \varphi_{s1}^{(m)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = -\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m)}) \neq 0,\\ \big(J\varphi_{s1}^{(m)}, \varphi_{s2}^{(m)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = -\frac{1}{4!}g_s^{(4)}(\lambda_s^{(m)}), \quad \big(J\varphi_{s2}^{(m)}, \varphi_{s2}^{(m)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = -\frac{1}{5!}g_s^{(5)}(\lambda_s^{(m)}),\\ \big(J\varphi_{s}^{(p)}, \varphi_{s1}^{(m)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} = 0, \quad p = 1, 2, \ldots, m-1.\end{gathered} \tag{4.22}$$

Здесь последнее соотношение выводится так же как в (4.20). Далее с использованием соотношений $g_s(\lambda_s^{(p)}) = 0$ $(p = \overline{1, m-1})$, $g_s(\lambda_s^{(m)}) = g_s'(\lambda_s^{(m)}) = g_s''(\lambda_s^{(m)}) = 0$ и формулы (4.19) при $n = 3$ можно найти, что при всех $p = 1, 2, \ldots, m-1$

$$\begin{aligned}\big(J\varphi_{s}^{(p)}, \varphi_{s2}^{(m)}\big)_{\mathbb{C}^{m+2}} &= -R_{s,p}\big((\mathcal{G} - \lambda_s^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}, (\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-3}\mathcal{Q}\big)_{\mathbb{C}^{m+1}} =\\ &= -R_{s,p}\mathcal{Q}^*(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-3}(\mathcal{G} - \lambda_s^{(p)})^{-1}\mathcal{Q} =\\ = -R_{s,p}\mathcal{Q}^*\Big[\frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(p)})^{-1}}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^3} &- \frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-3}}{\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)}} - \frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-2}}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^2} - \frac{(\mathcal{G} - \lambda_s^{(m)})^{-1}}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^3}\Big]\mathcal{Q} =\\ &= -R_{s,p}\Big[\frac{\lambda_s^{(p)}\lambda_k - \alpha_1}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^3} - \frac{\lambda_k}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m)})^2} - \frac{\lambda_s^{(m)}\lambda_k - \alpha_1}{(\lambda_s^{(p)} - \lambda_s^{(m+2)})^3}\Big] = 0.\end{aligned} \tag{4.23}$$

Из (4.22) и (4.23) найдем, что

$$M_{s,2}^{\tau}JM_{s,2} = \begin{pmatrix} -g_s'(\lambda_s^{(1)})R_{s,1}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ 0 & -g_s'(\lambda_s^{(2)})R_{s,2}^2 & \cdots & 0 & 0 & 0\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & -\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m)})\\ 0 & 0 & \cdots & 0 & -\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m)}) & -\frac{1}{4!}g_s^{(4)}(\lambda_s^{(m)})\\ 0 & 0 & \cdots & -\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m)}) & -\frac{1}{4!}g_s^{(4)}(\lambda_s^{(m)}) & -\frac{1}{5!}g_s^{(5)}(\lambda_s^{(m)}) \end{pmatrix},$$

$$(-1)^{m+1}\big(\det M_{s,2}\big)^2 = \det M_{s,2}^{\tau}JM_{s,2} = (-1)^{m-1}\Big[\frac{1}{3!}g_s'''(\lambda_s^{(m)})\Big]^3\prod_{p=1}^{m-1} g_s'(\lambda_s^{(p)})R_{s,p}^2 \neq 0.$$

Следовательно, $\det M_{s,2} \neq 0$, и система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ полна в $\mathcal{H}$.

Построим теперь, как и в теореме 4.2, оператор $\mathcal{S} \longleftrightarrow S_k := M_\infty^* M_k$ с заменой вырожденных матриц M_s на какие-либо невырожденные. При этом оператор $\mathcal{S}$ будет непрерывно обратим и по-прежнему представим в виде $\mathcal{S} = \mathcal{I} + \mathcal{T}$, где $\mathcal{T} \in \mathfrak{S}_p(\mathcal{H})$ $(p > 3)$, так как вырожденных матриц M_s может быть лишь конечное количество. Таким образом, система $\{\mathcal{S}\xi_{k,\infty}^{(p)}\}_{p=\overline{1,m+2},\, k\in\mathbb{N}}$ есть p-базис $(p > 3)$ пространства $\mathcal{H}$, который отличается от системы специальным образом нормированных корневых элементов оператора $\mathcal{A}$ лишь на конечное количество элементов. Отсюда следует, что система корневых элементов оператора $\mathcal{A}$, учитывая ее полноту, есть также p-базис $(p > 3)$ пространства $\mathcal{H}$. Теорема доказана. □

Отметим, что если интегродифференциальное уравнение (4.1) рассматривать как абстрактное с положительно определенным оператором A таким, что $A^{-1} \in \mathfrak{S}_q(H)$, то свойство систем из теорем 4.2 и 4.3 быть p-базисами будет иметь место при $p > 2q$.

4.5. Построение биортогональной системы в невырожденном случае и представление решения задачи Коши в виде ряда. В качестве следствия из леммы 4.1 и теоремы 4.2 сформулируем следующее утверждение.

Теорема 4.4. *Пусть* $g'_k(\lambda_k^{(p)}) \neq 0$ $(p = \overline{1, m+2},\ k \in \mathbb{N})$. *Тогда система*

$$\xi_k^{(p)} := R_{k,p}\big(\lambda_k^{1/2}; (\mathcal{G} - \lambda_k^{(p)})^{-1}\mathcal{Q}\big)^{\tau}\vec{u}_k, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N},$$

$$R_{k,p} := \begin{cases} \big[g'_\infty(\gamma_p)\big]^{-1/2}, & p = \overline{1, m+1}, \quad k \in \mathbb{N}, \\ \lambda_k^{-1/2}, & p = m+2, \quad k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

собственных элементов оператора $\mathcal{A}$ *образует* p*-базис пространства* $\mathcal{H}$ *при* $p > 3$ *согласно теореме* 4.2 *и имеет следующую биортогональную систему*:

$$\zeta_k^{(p)} := -\big[g'_k(\overline{\lambda_k^{(p)}})R_{k,p}\big]^{-1}\big(\lambda_k^{1/2}; -(\mathcal{G} - \overline{\lambda_k^{(p)}})^{-1}\mathcal{Q}\big)^{\tau}\vec{u}_k, \quad p = \overline{1, m+2}, \quad k \in \mathbb{N}.$$

Из этой теоремы можно получить формулу для решения задачи Коши (4.1) в виде ряда по системе собственных элементов оператора A. Точнее, имеет место

Теорема 4.5. *Пусть в задаче Коши* (4.1) $\vec{u}^0,\ \vec{u}^1 \in \mathcal{D}(A)$, *а поле* $\vec{f}(t)$ *удовлетворяет условиям теоремы* 2.1. *Тогда решение задачи Коши* (4.1) *представимо в виде*

$$\vec{u}(t) = \mathcal{C}(t)\vec{u}^0 + \mathcal{S}(t)\vec{u}^1 + \int_0^t \mathcal{S}(t-s)\vec{f}(s)\,ds,$$

$$\mathcal{C}(t)\vec{u}^0 := \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{m+2} \frac{\lambda_k e^{-\lambda_k^{(p)}t}}{\lambda_k^{(p)} g'_k(\lambda_k^{(p)})}\Big[\alpha_1 - \lambda_k^{(p)}\lambda_k + \sum_{l=1}^{m} \frac{\alpha_{-l}}{b_l(b_l - \lambda_k^{(p)})}\, e^{-(b_l - \lambda_k^{(p)})t}\Big]\big(A\vec{u}^0, \vec{u}_k\big)_H \vec{u}_k,$$

$$\mathcal{S}(t)\vec{u}^1 := \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{m+2} \frac{\lambda_k e^{-\lambda_k^{(p)}t}}{\lambda_k^{(p)} g'_k(\lambda_k^{(p)})}\big(\vec{u}^1, \vec{u}_k\big)_H \vec{u}_k.$$

Доказательство. Пусть $\vec{u}^0,\ \vec{u}^1 \in \mathcal{D}(A)$, а поле $\vec{f}(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 2.1. Тогда по теореме 2.1 задача Коши (4.1) имеет единственное сильное решение $\vec{u}(t)$, а построенная по полю $\vec{u}(t)$ функция $\xi(t)$ — сильное решение задачи Коши (4.3). Это решение представимо в виде

$$\xi(t) = \mathcal{U}(t)\xi^0 + \int_0^t \mathcal{U}(t-s)\mathcal{F}(s)\,ds, \quad \mathcal{U}(t)\xi^0 := \sum_{k=1}^{+\infty}\sum_{p=1}^{m+2} e^{-\lambda_k^{(p)}t}\big(\xi^0, \zeta_k^{(p)}\big)_{\mathcal{H}}\,\xi_k^{(p)}, \tag{4.24}$$

который вычисляется с помощью теоремы 4.4.

Дальнейшее доказательство состоит в громоздких, но несложных вычислениях с использованием в (4.24) формул из теоремы 4.4, формул для ξ^0, $\mathcal{F}(t)$, $\xi(t)$ и связи $\vec{u}(t) = \beta^{-1/2}A^{-1/2}\vec{v}'(t)$. □

Отметим, что формулы для оператор-функций $\mathcal{C}(t)$ и $\mathcal{S}(t)$ в теореме могут быть найдены в рассматриваемом случае с помощью теории вычетов и представлений, аналогичных приведенным в теореме 3.5:

$$\mathcal{C}(t)\vec{u}^0 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}\Big[\alpha_1 I - \lambda A^{-1} + \sum_{l=1}^{m}\frac{\alpha_{-l}}{b_l(b_l - \lambda)}\, e^{-(b_l-\lambda)t} I\Big]A\vec{u}^0\,d\lambda,$$

$$\mathcal{S}(t)\vec{u}^1 = \frac{1}{2\pi i}\int_\Gamma \frac{e^{-\lambda t}}{\lambda}A^{-1/2}L^{-1}(\lambda)A^{-1/2}\vec{u}^1\,d\lambda,$$

где операторный пучок $L(\lambda)$ определен в (4.6).

Автор приносит благодарность Н. Д. Копачевскому за обсуждение работы и А. Н. Кожевникову за материалы по спектру Коссера.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Азизов Т. Я., Иохвидов И. С.* Основы теории линейных операторов в пространствах с индефинитной метрикой. — М.: Наука, 1986.
2. *Бирман М. Ш., Соломяк М. З.* Асимптотика спектра дифференциальных уравнений// Итоги науки и техн. Мат. анализ. — 1977. — *14.* — С. 5–58.
3. *Власов В. В., Медведев Д. А.* Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2008. — *30.* — С. 3–173.
4. *Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С.* Спектральный анализ и корректная разрешимость абстрактных интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2011. — *39.* — С. 36–65.
5. *Волевич Л. Р.* Разрешимость краевых задач для общих эллиптических систем// Мат. сб. — 1965. — *68* (*110*), № 3. — С. 373–416.
6. *Голдстейн Дж.* Полугруппы линейных операторов и их приложения. — Киев: Вища школа, 1989.
7. *Гринштейн В. А.* Базисность части системы собственных векторов голоморфной оператор-функции// Мат. заметки. — 1991. — *50*, Вып. 1. — С. 142–144.
8. *Закора Д. А.* Операторный подход к моделям Ильюшина вязкоупругих сред при изотермических процессах деформирования// Укр. мат. вестн. — 2013. — *10*, № 3. — С. 412–432.
9. *Ильюшин А. А., Победря Б. Е.* Основы математической теории термовязко-упругости. — М.: Наука, 1970.
10. *Като Т.* Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
11. *Кожевников А. Н.* Функциональные методы математической физики. Учебное пособие. — М.: МАИ, 1991.
12. *Космодемьянский Д. А., Шамаев А. С.* О некоторых спектральных задачах в пористых средах, насыщенных жидкостью// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2006. — *17.* — С. 88–109.
13. *Крейн С. Г.* Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
14. *Ларионов Г. С.* Исследование колебаний релаксирующих систем методом усреднения// Механика полимеров. — 1969. — № 4.
15. *Маркус А. С.* Введение в спектральную теорию полиномиальных операторных пучков. — Кишинев: Штиинца, 1986.
16. *Маркус А. С., Мацаев В. И.* Теорема о сравнении спектров и спектральная асимптотика для пучка М. В. Келдыша// Мат. сб. — 1984. — *123* (*165*), № 3. — С. 391–406.
17. *Ректорис К.* Вариационные методы в математической физике и технике. — М.: Мир, 1985.
18. *Солонников В. А.* Об общих краевых задачах для систем, эллиптических в смысле А. Дуглиса и Л. Ниренберга. II// Тр. Матем. ин-та им. В. А. Стеклова. — 1966. — С. 233–297.
19. *Grubb G., Geymonat G.* The essential spectrum of elliptic systems of mixed order// Math. Ann. — 1977. — *227.* — С. 247–276.
20. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 1: Self-adjoint Problems of an Ideal Fluid. Vol. 2: Nonself-adjoint Problems for Viscous Fluids. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2003.
21. *Kozhevnikov A., Skubachevskaya T.* Some applications of pseudo-differential operators to elasticity// Hokkaido Math. J. — 1997. — *26.* — С. 297–322.
22. *Pazy A.* Semigroups of linear operators and applications to partial differential equations. — N. Y.: Springer, 1983.
23. *Prüss J.* Evolutionary integral equations and applications. — Switzerland: Birkhäuser, 1993.

Д. А. Закора
Таврический национальный университет им. В. И. Вернадского,
295007, Симферополь, пр. Вернадского 4;
Воронежский государственный университет,
394006, Воронеж, Университетская площадь, 1
E-mail: dmitry_@crimea.edu, dmitry.zkr@gmail.com

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 57 (2015). С. 65–70

ЗАДАЧА УСПОКОЕНИЯ СИСТЕМЫ, ОПИСЫВАЕМОЙ СМЕШАННЫМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫМ УРАВНЕНИЕМ

© 2015 г. Е. П. ИВАНОВА

1. Введение

В статье исследуется задача полного успокоения в системе, описываемой уравнениями, являющимися дифференциальными по одной переменной и разностными по другой. Начальные и краевые задачи для таких уравнений, названых смешанными, изучались А. Д. Мышкисом [5], Г. А. Каменским [6]. Задача полного успокоения управляемой системы, описываемой обыкновенным дифференциальным уравнением с запаздыванием, исследована в работах Н. Н. Красовского [4], А. Л. Скубачевского [7] (линейная задача), Г. А. Каменского [6] (нелинейная задача). В данной статье доказан критерий управляемости системы, описываемой смешанным дифференциально-разностным уравнением, при управлении с помощью краевых функций. Ранее эта задача изучалась в работе [1], результаты сформулированы в тезисах конференции [2].

2. Постановка задачи

Рассмотрим систему, описываемую уравнением

$$x_t(t,s) = (Rx)(t,s), \quad (t,s) \in Q_T, \tag{2.1}$$

с управлением

$$x(t,s) = u(t,s), \quad (t,s) \in G_T \tag{2.2}$$

и начальными условиями

$$x(0,s) = x_0(s), \quad s \in (0,a). \tag{2.3}$$

Здесь $Q_T = (0,T)\times(0,a)$, $a = N+\theta$, N — натуральное число, $0 < \theta \leqslant 1$, $G_T = (0,T)\times((-N,0)\cup(a,\ a+N))$, $R : L_2(G_T \cup Q_T) \to L_2(Q_T)$ — разностный оператор, действующий по формуле

$$(Rx)(t,s) = \sum_{i=-N}^{N} a_i x(t, s+i),$$

a_i — вещественные постоянные, $x_0 \in L_2(0,a)$, $u \in L_2(G_T)$ — функция управления. Задачу (2.1)–(2.3) назовем *задачей управления* с помощью краевых функций u.

Решением задачи (2.1)–(2.3) будем называть функцию $x \in H = \{y(t,s) \in L_2(Q_T \cup G_T) | y(t,s) \in H^{1,0}(Q_T), (t,s) \in (Q_T)\}$, если условия (2.1)–(2.3) выполнены почти всюду. Здесь $H^{1,0}(Q_T)$ — анизотропное пространство Соболева функций из $L_2(Q_T)$, у которых существует и принадлежит $L_2(Q_T)$ обобщенная производная по t.

Определение 2.1. Состояние $x_0 \in L_2(0,a)$ назовем *управляемым*, если существуют $T \in \mathbb{R}^1$, $u \in L_2(G_T)$ такие, что для функции $x \in H$, являющейся решением задачи (2.1)–(2.3) в области Q_T, $x(T,s) = 0$, $s \in (0,a)$.

Определение 2.2. Система, заданная уравнениями задачи (2.1)–(2.3), называется *полностью управляемой*, если каждое состояние $x_0 \in L_2(0,a)$ управляемо, т. е. $X = L_2(0,a)$.

Получим условия на коэффициенты разностного оператора R, гарантирующие управляемость системы (2.1)–(2.3).

3. Условия управляемости

Лемма 3.1. *Множество управляемых состояний X является подпространством $L_2(0,a)$.*

Доказательство. Из линейности системы следует, что если $x_0 \in X$ и ему соответствуют время T и управление u, то $\forall \alpha \in \mathbb{R}^1$ $\alpha x_0 \in X$ с тем же временем T и управлением αu. Пусть $x_1 \in X$ с параметрами управления (T_1, u_1) и $x_2 \in X$ с параметрами (T_2, u_2) (для определенности $T_1 \geqslant T_2$). Тогда $x_3 = x_1 + x_2 \in X$ с временем $T_3 = \max\{T_1, T_2\} = T_1$ и управлением $u_3(t,s) = u_1(t,s) + u_2(t,s),\ t \in (0, T_2),\ u_3(t,s) = u_1(t,s),\ t \in [T_2, T_1)$. □

Сведем задачу (2.1)–(2.3) к эквивалентной задаче. Используем формализм, описанный в [7]. Введем операторы $I_{Q,T}, I_{G,T}, R_{Q,T}, R_{G,T}$ такие, что

$$I_{Q,T} : L_2(Q_T) \to L_2(Q_T \cup G_T); \quad (I_{Q,T}x)(t,s) = x(t,s), \quad (t,s) \in Q_T; (I_{Q,T}x)(t,s) = 0,\ (t,s) \in G_T;$$

$$I_{G,T} : L_2(G_T) \to L_2(Q_T \cup G_T);\ (I_{Q,T}x)(t,s) = x(t,s),\ (t,s) \in G_T; (I_{Q,T}x)(t,s) = 0,\ (t,s) \in Q_T;$$

$$R_{Q,T} : L_2(Q_T) \to L_2(Q_T);\ R_{Q,T} = RI_{Q,T};\ R_{G,T} : L_2(G_T) \to L_2(Q_T);\ R_{G,T} = RI_{G,T}.$$

Тогда уравнения (2.1)–(2.2) эквивалентны уравнению

$$x_t = R_{Q,T}x + R_{G,T}u, \tag{3.1}$$

$x \in H^{1,0}(Q_T),\ u \in L_2(G_T)$.

Обозначим через $L_2\left(\bigcup\limits_i Q^T_{\alpha i}\right)$ $\left(L_2\left(\bigcup\limits_k G^T_{\alpha k}\right)\right)$ подпространства функций в $L_2(Q_T)$ $(L_2(G_T))$, равных нулю вне $\bigcup\limits_i Q^T_{\alpha i}$ $\left(\bigcup\limits_k G^T_{\alpha k}\right)$. Здесь, если $\theta = 1$, то $\alpha = 1$; если $\theta < 1$, то $\alpha = 1, 2$;

$$Q^T_{1i} = (0,T) \times (i-1, i-1+\theta), \quad i = 1, ..., N+1;$$
$$Q^T_{2i} = (0,T) \times (i-1+\theta, i), \quad i = 1, ..., N;$$
$$G^T_{1k} = (0,T) \times (k-1-N, k-1-N+\theta), \quad k = 1, ..., N;$$
$$G^T_{1k} = (0,T) \times (k, k+\theta), \quad k = N+1, ..., 2N;$$
$$G^T_{2k} = (0,T) \times (k-1-N+\theta, k-N), \quad k = 1, ..., N;$$
$$G^T_{2k} = (0,T) \times (k+\theta, k+1), \quad k = N+1, ..., 2N.$$

Введем изометрические изоморфизмы гильбертовых пространств $U_\alpha : L_2\left(\bigcup\limits_{i=1}^{r} Q^T_{\alpha i}\right) \to L_2^r\left(Q^T_{\alpha 1}\right)$ и $V_\alpha : L_2\left(\bigcup\limits_{k=1}^{2N} G^T_{\alpha k}\right) \to L_2^{2N}\left(Q^T_{\alpha 1}\right)$, где $L_2^r\left(Q^T_{\alpha 1}\right) = \prod\limits_{i=1}^{r} L_2\left(Q^T_{\alpha 1}\right)$, по формулам

$$(U_\alpha x)_i(t,s) = x(t, s+i-1),\ (t,s) \in Q^T_{\alpha 1},\ i = 1, ..., r;\ r = N+1,\ \text{если}\ \alpha = 1;\ r = N,\ \text{если}\ \alpha = 2;$$
$$(V_\alpha x)_k(t,s) = x(t, s+k-N-1),\ (t,s) \in Q^T_{\alpha 1},\ k = 1, ..., N,$$
$$(V_1 x)_k(t,s) = x(t, s+k),\ (t,s) \in Q^T_{11},\ k = N+1, ..., 2N,$$
$$(V_2 x)_k(t,s) = x(t, s+k-1),\ (t,s) \in Q^T_{21},\ k = N+1, ..., 2N.$$

Операторы $R^\alpha_{Q,T} = U_\alpha R_{Q,T} U_\alpha^{-1} : L_2^r(Q^T_{\alpha 1}) \to L_2^r(Q^T_{\alpha 1})$ суть операторы умножения на матрицы A_α порядка $(r \times r)$ вида

$$A_\alpha = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{r-1} \\ a_{-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{r-2} \\ a_{-2} & a_{-1} & a_0 & \dots & a_{r-3} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1-r} & a_{2-r} & a_{3-r} & \dots & a_0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1, 2.$$

Элементы $\tilde{a}_{ij}$ матриц A_α определяются по формулам

$$\tilde{a}_{ij} = a_{i-j},\ i, j = 1, \dots, r. \tag{3.2}$$

Введем также операторы $R^{\alpha}_{G,T} = U_\alpha R_{G,T} V_\alpha^{-1} : L_2^{2N}(Q^T_{\alpha 1}) \to L_2^r(Q^T_{\alpha 1})$. Операторы $R^1_{G,T}, R^2_{G,T}$ суть соответственно операторы умножения на матрицы B_1 порядка $((N+1)\times 2N)$ и B_2 порядка $(N \times 2N)$:

$$B_1 = \begin{pmatrix} a_{-N} & a_{-N+1} & a_{-N+2} & \dots & a_{-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & a_{-N} & a_{-N+1} & \dots & a_{-2} & a_N & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_{-N} & \dots & a_{-3} & a_{N-1} & a_N & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{-N} & a_2 & a_3 & a_4 & \dots & a_N & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{N-1} & a_N \end{pmatrix}.$$

Матрица B_2 — это матрица B_1 без последней строки. Элементы матрицы B_1 определяются по формуле

$$b_{ij} = \left\{ \begin{matrix} a_{j-i-N}, \ i = 1,\dots,N+1,\, j = 1,\dots,N, \\ a_{j-i+1}, \ i = 1,\dots,N+1,\, j = N+1,\dots,2N, \end{matrix} \right\}, \tag{3.3}$$

где $a_k = 0,\ k > N,\ k < -N$.

Используя введенные обозначения, запишем уравнение (3.1) в виде

$$U_\alpha x_t = A_\alpha U_\alpha x + B_\alpha V_\alpha u, \quad \alpha = 1,2, \tag{3.4}$$

а условие (2.3) в виде

$$(U_\alpha x)(0,s) = U_\alpha x_0(s), \quad \alpha = 1,2. \tag{3.5}$$

Введем в рассмотрение матрицу E_1 порядка $(N+1)\times(2N(N+1))$ и матрицу E_2 порядка $N \times 2N^2$: $E_1 = (B_1|\ A_1B_1|\ A_1^2B_1\big|\dots\big|A_1^N B_1),\ E_2 = (B_2|\ A_2B_2|\ A_2^2B_2\big|\dots\big|A_2^{N-1}B_2)$.

Лемма 3.2. *Система, заданная уравнениями* (2.1)–(2.3)*, полностью управляема тогда и только тогда, когда* $\operatorname{rang} E_1 = N+1$, $\operatorname{rang} E_2 = N$.

Доказательство. Необходимость. Если $x(t,s)$ является решением задачи (2.1)–(2.3), а следовательно, задачи (3.4)–(3.5), то для почти всех $s_1 \in (0,\theta)$ функция $x^1(t) = (U_1x)(t,s_1)$ $\left(x^1(t) \in \prod\limits_{i=1}^{N+1} H^1(0,T)\right)$ является решением задачи

$$x^1_t = A_1x^1 + B_1u^1, \tag{3.6}$$

$$x^1(0) = \mu_1 \tag{3.7}$$

для почти всех $s_2 \in (\theta,1)$, а функция $x^2(t) = (U_2x)(t,s_2)$ $\left(x^2(t) \in \prod\limits_{i=1}^{N} H^1(0,T)\right)$ является решением задачи

$$x^2_t = A_2x^2 + B_2u^2, \tag{3.8}$$

$$x^2(0) = \mu_2 \tag{3.9}$$

где $u^\alpha(t) = (V_\alpha u)(t,s_\alpha)$, $u^\alpha(t) \in L_2^{2N}(0,T)$, $\mu_\alpha = (U_\alpha x_0)(s_\alpha)$, $\alpha = 1,2$; $\mu_1 \in \mathbb{R}^{N+1}$, $\mu_2 \in \mathbb{R}^N$, $H^1(0,T)$ — подпространство Соболева функций из $L_2(0,T)$ у которых существует и принадлежит $L_2(0,T)$ обобщенная производная.

Для систем (3.6), (3.7) и (3.8), (3.9) стандартным образом вводится понятие управляемости (см. [3, гл. 2]). Если система, заданная уравнениями (2.1)–(2.3), управляема, то системы, заданные уравнениями (3.6), (3.7) и (3.8), (3.9), управляемы и в силу критерия управляемости (см. [3, гл. 2, теорема 3.4]) $\operatorname{rang} E_1 = N+1,\ \operatorname{rang} E_2 = N$.

Достаточность. Доказательство аналогично доказательству теоремы 3.4 в [3].

В силу леммы 2.1 множество управляемых состояний U_1X является подпространством в $L_2^{N+1}(0,\theta)$, а множество U_2X — подпространством в $L_2^N(\theta,1)$. Предположим противное, что система неуправляема. Тогда $U_1X \neq L_2^{N+1}(0,\theta)$ или $U_2X \neq L_2^N(\theta,1)$. Пусть для определенности $U_1X \neq L_2^{N+1}(0,\theta)$. Тогда найдется $\nu \in L_2^{N+1}(0,\theta)$, $\nu \neq 0$, такое, что $(\nu, U_1x_0) = 0\ \forall x_0 \in X$, где $(\cdot,\cdot)$ — скалярное произведение в $L_2^{N+1}(0,\theta)$.

Нетрудно убедиться, что решение $x(t,s)$ задачи (3.4), (3.5) описывается формулой

$$U_1x(t,s) = e^{tA_1}U_1x_0(s) + \int_0^t e^{(t-\xi)A_1}B_1V_1u(\xi,s)d\xi.$$

В силу определения 2.1, $x_0 \in X$, если найдутся T и u такие, что

$$0 = e^{TA_1}U_1x_0(s) + \int_0^T e^{(T-\xi)A_1}B_1V_1u(\xi,s)d\xi. \tag{3.10}$$

Положим $x_0 = 0$, $V_1u(\xi,s) = B_1{}^\top e^{-\xi A_1{}^\top}\nu(s)$, где $B_1{}^\top, A_1^\top$ — транспонированные матрицы B_1, A_1 соответственно. Тогда

$$U_1x(t,s) = \int_0^t e^{(t-\xi)A_1}B_1B_1{}^\top e^{-\xi A_1{}^\top}\nu(s)d\xi$$

и для любого T;

$$0 = -e^{TA_1}e^{-TA_1}U_1x(T,s) + \int_0^T e^{(T-\xi)A_1}B_1B_1{}^\top e^{-\xi A_1{}^\top}\nu(s)d\xi,$$

следовательно, в силу (3.10) $-U_1^{-1}e^{-TA_1}U_1x(T,s) \in X$. Тогда

$$0 = (\nu(s), e^{-TA_1}U_1x(T,s)) = (\nu(s), \int_0^T e^{-\xi A_1}B_1B_1{}^\top e^{-\xi A_1{}^\top}\nu(s)d\xi) =$$

$$= \int_0^T \|B\,_1{}^\top e^{-\xi A_1{}^\top}\nu(s)\,\|^2 d\xi = 0,$$

где $\|\cdot\|$ — норма в $L_2^{N+1}(0,\theta)$. Следовательно,

$$\nu^\top(s)e^{-\xi A_1}B_1 = 0 \tag{3.11}$$

для почти всех $s \in (0,\theta)$ и для почти всех $\xi \in (0,T)$. Дифференцируя последовательно формулу (3.11) по ξ, получаем $\nu^\top(s)A_1^kB_1 = 0$ для почти всех $s \in (0,\theta)$, $k = 0,...,N$. Так как $\nu \neq 0$, найдется $y \in \mathbb{R}^{N+1}$ такое, что $y^\top A_1^kB_1 = 0$, $k = 0,...,N$. Следовательно, $\operatorname{rang} E_1 < N+1$, и лемма доказана. □

Определение 3.1. Назовем оператор R *существенно разностным*, если среди a_i, $i = -N,\ldots,N$, $i \neq 0$ найдется $a_i \neq 0$.

Лемма 3.3. *Для того, чтобы* $\operatorname{rang} E_1 = N+1$, $\operatorname{rang} E_2 = N$, *необходимо и достаточно, чтобы оператор* R *был существенно разностным.*

Доказательство. Необходимость. Если оператор R не является существенно разностным, матрица B_1 нулевая (следовательно, и E_1, E_2 нулевые).

Достаточность. Пусть оператор R существенно разностный. Докажем, что $\operatorname{rang} E_1 = N+1$, $\operatorname{rang} E_2 = N$. Пусть среди a_i, $(i = -N,\ldots,-1)$ найдутся $a_i \neq 0$ (для положительных i доказательство проводится аналогично). Обозначим $m := \max\{-i|\ a_i \neq 0\}$, $c_{i,j}^l$ — элементы матриц $A_1^lB_1$ порядка $(N+1)\times 2N$.

1. Покажем, что

$$c^l_{lm+i,N-m+i} = a^{l+1}_{-m}, \tag{3.12}$$

$$c^l_{lm+i+q,N-m+i} = 0, \tag{3.13}$$

$l = 1,..., \left[\dfrac{N}{m}\right], i = 1,\dots,p_l,\ p_l = \min\{(N+1-lm), m\}, q > 0$. Здесь $\left[\dfrac{N}{m}\right]$ — целая часть $\dfrac{N}{m}$. Если $l = 1,\dots,\left[\dfrac{N}{m}\right] - 1$, то $m < N+1-lm$ и $p_l = m$. Выбор верхних границ изменения индексов обусловлен порядком матриц $A_1^l B_1$. Проведем доказательство индукцией по l.

а). Докажем справедливость утверждения для $l = 1$. В силу (3.2), (3.3)

$$c^1_{m+i,N-m+i} = \sum_{j=1}^{N+1} \tilde a_{m+i,j} b_{j,N-m+i} = \sum_{j=1}^{N+1} a_{j-m-i} a_{N-m+i-j-N} =$$
$$= \sum_{j=1}^{N+1} a_{j-m-i} a_{-m+i-j} = a_{i-m-i} a_{-m-i+i} = a^2_{-m},$$
$$i = 1,\dots,m,$$

так как $a_{-n} = 0$ для $n > m$ и, следовательно, $a_{j-m-i} = 0$ для $i > j$ и $a_{-m+i-j} = 0$ для $j > i$. Кроме того,

$$c^1_{m+i+q,N-m+i} = \sum_{j=1}^{N+1} \tilde a_{m+i+q,j} b_{j,N-m+i} = \sum_{j=1}^{N+1} a_{j-m-i-q} a_{N-m+i-j-N} = \sum_{j=1}^{N+1} a_{j-m-i-q} a_{-m+i-j} = 0,$$
$$i = 1,\dots,m,\ q > 0,$$

так как $a_{j-m-i-q} = 0$ для $i \geqslant j$ и $a_{-m+i-j} = 0$ для $j > i$.

б). Пусть утверждение справедливо для $l-1$:

$$c^{l-1}_{(l-1)m+i,N-m+i} = a^{l+1}_{-m}, \tag{3.14}$$

$$c^{l-1}_{(l-1)m+i+q,N-m+i} = 0, \tag{3.15}$$

$i = 1,\dots,m,\ q > 0, l \leqslant \left[\dfrac{N}{m}\right]$. Покажем справедливость формул (3.12), (3.13). Учитывая, что $a_{j-lm-i} = 0$ для $j < (l-1)m+i$, и, используя формулу (3.14), получим

$$c^l_{lm+i,N-m+i} = \sum_{j=1}^{N+1} \tilde a_{lm+i,j} c^{l-1}_{j,N-m+i} = \sum_{j=1}^{N+1} a_{j-lm-i} c^{l-1}_{j,N-m+i} = a_{(l-1)m+i-lm-i} c^{l-1}_{(l-1)m+i,N-m+i} =$$
$$= a_{-m} a^l_{-m} = a^{l+1}_{-m},\ i = 1,\dots,p_l = \min\{(N+1-lm), m\}$$

Кроме того,

$$c^l_{m+i+q,N-m+i} = \sum_{j=1}^{N+1} \tilde a_{lm+i+q,j} c^{l-1}_{j,N-m+i} = \sum_{j=1}^{N+1} a_{j-lm-i-q} c^{l-1}_{j,N-m+i} = 0,$$
$$i = 1,\dots,p_l,\ q > 0,$$

так как $a_{j-lm-i-q} = 0$ для $j < (l-1)m+i+q$ и $c^{l-1}_{j,N-m+i} = 0$ для $j \geqslant (l-1)m+i+q$ в силу формулы (3.15).

2. Покажем, что $\operatorname{rang} E_1 = N+1$. Выберем из матрицы E_1 $N+1$ столбец и образуем из них матрицу $D = \|d_{i,j}\|_{i,j=1}^{N+1}$. Из каждой матрицы $A_1^l B_1$ берем m столбцов с номерами $j = N-m+1,...,N$. Из последней матрицы при $l = \left[\dfrac{N}{m}\right]$ берем оставшиеся $N+1-\left[\dfrac{N}{m}\right]m$ столбцов. Для $i = 1,\dots,N+1$ положим

$$d_{i,p} = d_{i,lm+j} = \begin{cases} b_{i,N-m+j},\ l = 0, j = 1,\dots,m; \\ c^l_{i,N-m+j},\ l = 1,\dots,\left[\dfrac{N}{m}\right] - 1,\ j = 1,\dots,m; \\ c^l_{i,N-m+j}, l = \left[\dfrac{N}{m}\right], j = 1,\dots,(N+1-\left[\dfrac{N}{m}\right]m). \end{cases}$$

В силу формул (3.2), (3.12) для $i = 1, \dots, N+1$

$$d_{i,i} = d_{lm+j,lm+j} = \begin{cases} a_{-m}^{l+1}, \ l = 0, \dots, \left[\dfrac{N}{m}\right] - 1, \ j = 1, \dots, m; \\ a_{-m}^{l+1}, \ l = \left[\dfrac{N}{m}\right], \ j = 1, \dots, (N + 1 - \left[\dfrac{N}{m}\right] m). \end{cases}$$

В силу формул (3.3), (3.12) $d_{i,p} = 0$ для $i = 1, \dots, N+1$, $p < i$, т. е. матрица D является треугольной и $\det D = a_{-m}^{k} \neq 0$. Следовательно, $\operatorname{rang} E_1 = N+1$. Аналогично доказывается, что $\operatorname{rang} E_2 = N$. □

Из лемм 2.2, 2.3 следует

Теорема 3.1. *Для управляемости системы, описываемой уравнениями* (2.1)–(2.3)*, необходимо и достаточно, чтобы оператор R был существенно разностным.*

Обозначим $G_T^d = (0,T) \times (a, a+d)$, $G_T^{-d} = (0,T) \times (-d, 0)$, $d > 0$. Из леммы 2.2 и доказательства леммы 2.3 вытекает

Теорема 3.2. *Если среди a_i, $i = 1, \dots, [d]$ $(i = -1, \dots, -[d])$ найдется $a_i \neq 0$, то система* (2.1)–(2.3) *управляема относительно области G_T^d (G_T^{-d}).*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванова Е. П.* Управляемость системы, описываемой дифференциальным уравнением с отклоняющимся параметром. — М.: ВИНИТИ, 1985. — № 2596-85 Деп.
2. *Иванова Е. П.* Управляемость системы, описываемой смешанным дифференциально-разностным уравнением// Дифференциальные уравнения, теория функций, нелинейный анализ и оптимизация. Труды Всероссийской научно-практической конференции. — 2013. — М.: РУДН. — С. 581–590.
3. *Калман Р., Фалб П., Арбиб М.* Очерки по математической теории систем. — М.: Мир, 1971.
4. *Красовский Н. Н.* Теория управления движением. — М.: Наука, 1968.
5. *Мышкис А. Д.* Начальная задача для смешанных дифференциально-разностных уравнений// Автоматика и телемеханика. — 1999. — *10*, № 3. — С. 170–180.
6. *Kamenskii G.* Extrema of nonlocal functionals and boundary value problems for functional differentional equations. — New York: Nova Science Publishers, 2007.
7. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and aplications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 1997.

Е. П. Иванова

Российский университет дружбы народов, кафедра прикладной математики

E-mail: elpaliv@yandex.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 57 (2015). С. 71–107

УДК 517.95+517.98

ОБ АБСТРАКТНОЙ ФОРМУЛЕ ГРИНА ДЛЯ ТРОЙКИ ГИЛЬБЕРТОВЫХ ПРОСТРАНСТВ И ПОЛУТОРАЛИНЕЙНЫХ ФОРМ

© 2015 г. **Н. Д. КОПАЧЕВСКИЙ**

Аннотация. В работе при некоторых общих предположениях выводится абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств и (абстрактного) оператора следа, а также аналогичная формула, отвечающая полуторалинейной форме. Установлены условия существования абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач. В качестве основного приложения выводятся обобщенные формулы Грина для оператора Лапласа применительно к краевым задачам в липшицевых областях.

Введение

В данной работе рассматривается несколько проблем, связанных с выводом абстрактной формулы Грина. Во-первых, приводится вывод такой формулы для тройки гильбертовых пространств и абстрактного оператора следа. Во-вторых, приводится вывод абстрактной формулы Грина для равномерно аккретивных полуторалинейных форм. Наконец, в-третьих, приводится вывод соответствующей абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач.

Частными случаями таких формул Грина являются, как известно, обобщенные формулы Грина для оператора Лапласа и близкие к ним (скалярный случай), соответствующие обобщенные формулы Грина для векторных полей (теория упругости, гидродинамика), а также обобщенные формулы Грина для равномерно эллиптических уравнений и систем таких уравнений и др.

В работе рассматриваются примеры смешанных краевых задач, получаемых в произвольных ограниченных областях с липшицевой границей. Намечается программа дальнейших исследований, связанная с получением необходимых и достаточных условий разрешимости задач подобного рода.

Рассматриваются абстрактные краевые задачи, обобщающие классические краевые задачи Дирихле, Неймана и др., а также смешанные задачи. Приводятся примеры абстрактных спектральных краевых задач, находящих широкие приложения в конкретных проблемах прикладной математики.

Несколько слов об истории вопроса, связанного с выводом и получением абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств и абстрактного оператора следа. Сначала автор этой статьи считал, что первый вариант абстрактной формулы Грина был выведен в монографии [14, с. 119] и этот вывод принадлежит С. Г. Крейну. Однако позже выяснилось, что еще раньше один из вариантов такой формулы доказал Ж.-П. Обэн (см. [20, глава 6], а также [26]). Далее, в монографии Р. Шоуволтера [30] существенно использовалась абстрактная формула Грина в форме Ж.-П. Обэна без ссылки на [20] или [26]. Дальнейшее продвижение в этом направлении принадлежит автору данной статьи (см. [11, 13, 15]).

Отметим еще, что абстрактные формулы Грина для равномерно аккретивных форм выводятся здесь, по-видимому, впервые (см. теоремы 2.1–2.3). Новыми являются также и варианты абстрактных формул Грина для смешанных краевых задач (см. теоремы 3.4, 3.6).

Автор благодарит М. С. Аграновича за конструктивные обсуждения проблем, представленных в данной работе, а также Т. А. Суслину за ценные замечания и советы.

Исследования выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-21-00066), Воронежский государственный университет.

1. О выводе абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств

В данном параграфе доказывается теорема о существовании абстрактной формулы Грина для тройки гильбертовых пространств и абстрактного оператора следа, определенным образом связанных между собой. Далее рассматривается основной пример, приводящий к обобщению классической первой формулы Грина для оператора Лапласа. Приводятся и другие примеры обобщенных формул Грина для некоторых задач математической физики.

1.1. Основная теорема. При выводе абстрактной формулы Грина важную роль играют понятия гильбертовой пары пространств и оснащения гильбертова пространства (см. например, [6, 16], а также [14]).

Пусть F и E — гильбертовы пространства со скалярными произведениями $(\cdot,\,\cdot)_F$ и $(\cdot,\,\cdot)_E$ соответственно, причем $F \subset E$. Будем говорить, что F плотно вложено в E и обозначать этот факт символом $F \hookrightarrow E$, если F — плотное линейное подмножество в E и существует константа $a > 0$ такая, что

$$\|u\|_E \leqslant a\|u\|_F \quad \forall u \in F.$$

Говорят, что пространства F и E с указанными свойствами образуют гильбертову пару $(F; E)$.

Классическим примером гильбертовой пары пространств является пара $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ — произвольная ограниченная область с липшицевой границей $\Gamma := \partial\Omega$, а нормы определены формулами

$$\|u\|^2_{L_2(\Omega)} := \int\limits_\Omega |u(x)|^2\,d\Omega, \quad \|u\|^2_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega (|\nabla u|^2 + |u|^2)\,d\Omega. \tag{1.1}$$

По любой паре $(F;\,E)$ единственным образом определяется порождающий оператор A гильбертовой пары, который обладает следующими свойствами:

$$\begin{gathered}(u, Av)_E = (u, v)_F = (A^{1/2}u, A^{1/2}v)_E \;\forall u \in F = \mathcal{D}(A^{1/2}),\; v \in \mathcal{D}(A) \subset F,\\ \mathcal{R}(A) = E.\end{gathered} \tag{1.2}$$

Таким образом, как оператор, действующий в E, оператор A является положительно определенным (вообще говоря, неограниченным) самосопряженным оператором, причем $\mathcal{D}(A^{1/2}) = F$.

По оператору $A \gg 0$ можно ввести шкалу гильбертовых пространств E^α, $E^\alpha := \mathcal{D}(A^\alpha)$, $\alpha \in \mathbb{R}$, таким образом, чтобы

$$E = E^0, \quad F = E^{1/2}, \quad F^* = E^{-1/2},$$

где F^* — совокупность линейных ограниченных функционалов на пространстве F. Тогда имеет место оснащение

$$E^{1/2} = F \hookrightarrow E = E^0 \hookrightarrow F^* = E^{-1/2}$$

пространства E, причем любой линейный функционал на F выражается через «скалярное произведение» в E, т. е.

$$l_v(u) := \langle u, v\rangle_E,\; u \in F,\; v \in F^*,\; |\langle u, v\rangle_E| \leqslant \|u\|_F \cdot \|v\|_{F^*}.$$

Иными словами, пространства $F = E^{1/2}$ и $F^* = E^{-1/2}$ дуальны по форме пространства E, а билинейная форма $\langle u, v\rangle_E$ является расширением по непрерывности скалярного произведения $(u, v)_E$, $u \in F$, $v \in E$, на случай, когда $v \in F^*$.

В построенной шкале E^α оператор A ограниченно действует из E^α в $E^{\alpha-1}$. В частности, для оператора A гильбертовой пары $(F;\,E)$ далее понадобится формула

$$(u, v)_F = (A^{1/2}u, A^{1/2}v)_E = \langle u, Av\rangle_E \quad \forall u, v \in F, \tag{1.3}$$

являющаяся расширением формулы (1.2) и также служащая определением порождающего оператора гильбертовой пары $(F;\,E)$.

Пусть теперь $\{E, (\cdot,\,\cdot)_E\}$, $\{F, (\cdot,\,\cdot)_F\}$ и $\{G, (\cdot,\,\cdot)_G\}$ — сепарабельные гильбертовы пространства с введенными в них скалярными произведениями. Будем считать, что для этой тройки пространств выполнены следующие условия:

1°. Плотность вложения:

$$F \hookrightarrow E, \quad \|u\|_E \leqslant a\|u\|_F \quad \forall u \in F. \tag{1.4}$$

2°. На F задан оператор γ, называемый *оператором следа* и ограниченно действующий из F в G, причем γ отображает F на плотное множество $\mathcal{R}(\gamma) =: G_+ \subset G$ и

$$\gamma : F \to G_+ \hookrightarrow G, \quad \|\gamma u\|_G \leqslant b\|u\|_F, \ \ b > 0 \ \ \forall u \in F. \tag{1.5}$$

3°. Ядро оператора γ, т. е. $\ker \gamma =: N$, плотно в E, и выполнено свойство

$$N \hookrightarrow E, \ \ \|u\|_E \leqslant c\|u\|_F \ \ \forall\, u \in N. \tag{1.6}$$

Типичным примером, когда выполнены условия 1°–3°, является тройка пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$, $\Gamma := \partial\Omega$, с введенными на них нормами (1.1) и стандартной нормой в $L_2(\Gamma)$, а также с обычным оператором следа

$$\gamma u := u|_\Gamma \quad \forall u \in H^1(\Omega). \tag{1.7}$$

В самом деле, в этом случае (в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей) по теореме вложения (С. Л. Соболев, В. Е. Кондрашов, Ф. Реллих, см. [22], [23, с. 32], [10, с. 47]) имеем свойство плотности $H^1(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$ и выполнены неравенства

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant a\|u\|_{H^1(\Omega)} \ \ \forall u \in H^1(\Omega),$$

причем оператор вложения компактен. Далее, по теореме Гальярдо о следах (см. [27]) получаем, что оператор γ ограниченно действует из $H^1(\Omega)$ в пространство $G_+ := H^{1/2}(\Gamma)$, компактно вложенное в $L_2(\Gamma)$, и выполнено неравенство

$$\|\gamma u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant b\|u\|_{H^1(\Omega)} \ \ \forall u \in H^1(\Omega). \tag{1.8}$$

Наконец, в этом примере $N := \ker \gamma = H_0^1(\Omega)$, а это подпространство пространства $H^1(\Omega)$, как известно, плотно в $L_2(\Omega)$, и выполнено неравенство Фридрихса:

$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{H^1(\Omega)} \ \ \forall\, u \in H_0^1(\Omega). \tag{1.9}$$

Таким образом, для указанной тройки пространств и оператора следа (1.7) выполнены все условия 1°–3°.

Теорема 1.1. *Пусть для тройки пространств* E, F, G (*с введенными на них скалярными произведениями*) *и для оператора* γ *выполнены условия* (1.4)–(1.6). *Тогда существуют абстрактное дифференциальное выражение* $Lu \in F^*$ *и абстрактная производная по внешней нормали* $\partial u \in (G_+)^*$ *такие, что имеет место абстрактная формула Грина* (*аналог первой формулы Грина для оператора Лапласа*)

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, Lu\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G \quad \forall \eta, u \in F. \tag{1.10}$$

При этом ∂u *по элементам* $u \in F$ *и* $Lu \in F^*$ *определяется однозначно.*

Доказательство. Оно проводится, с одной стороны, по схеме, изложенной в [20, с. 188-189], а с другой — с изменениями и некоторыми обобщениями, учитывающими, в частности, то обстоятельство, что только по элементу $u \in F$ выражения $Lu \in F^*$ и $\partial u \in (G_+)^*$ находятся неоднозначно (см. [28, с. 117]).

1. Переходя к доказательству теоремы, отметим сначала, что в силу (1.5) ядро $N = \ker\gamma$ является подпространством в F. Обозначим через M ортогональное дополнение к N в F, т. е. считаем, что

$$F = N \oplus M, \ \ \dim N = \dim M = \infty. \tag{1.11}$$

Согласно определениям N и M оператор сужения $\gamma_M := \gamma|_M$ оператора γ на подпространство M осуществляет взаимно однозначное отображение M на G_+ (см. (1.5)). Это позволяет ввести на G_+ структуру гильбертова пространства, полагая

$$(\varphi, \psi)_{G_+} := (u, v)_F, \quad u, v \in M, \quad \gamma_M u = \varphi, \quad \gamma_M v = \psi. \tag{1.12}$$

Опираясь на (1.12) и (1.11), можно установить, что

$$\|\varphi\|_{G_+} = \min\{\|u\|_F : \gamma u = \varphi\},$$

и так как $G_+ \hookrightarrow G$ и имеет свойство (1.5), то $(G_+; G)$ — гильбертова пара пространств. Построим по этой паре шкалу пространств G^α, $\alpha \in \mathbb{R}$, так, чтобы $G_+ = G^{1/2}$, $G = G^0$, $(G_+)^* = G^{-1/2}$.

С целью получения представления для оператора гильбертовой пары $(G_+; G)$ проведем следующие построения. Обозначим через T_M оператор, сопряженный к оператору γ_M по форме пространства G. Так как в силу (1.12) оператор γ_M изометрически отображает пространство M на $G_+ = G^{1/2}$, то оператор $T_M := (\gamma_M)^*$ изометрически отображает $(G_+)^* = G^{-1/2}$ на $M^* = M$. При этом по определению T_M имеем

$$(\eta, T_M\psi)_F = \langle \gamma_M\eta, \psi\rangle_G \quad \forall\eta \in M \quad \forall\psi \in (G_+)^* = G^{-1/2}. \tag{1.13}$$

Обозначим теперь через ∂_M оператор, обратный к T_M, который, очевидно, существует, поскольку между элементами из M и G_+ имеется взаимно однозначное соответствие и даже изометрия (см. (1.12)), а потому $(T_M)^{-1} = (\gamma_M^*)^{-1} = (\gamma_M^{-1})^*$. Тогда из (1.13) получаем тождество

$$(\eta, w)_F = \langle \gamma_M\eta, \partial_M w\rangle_G \quad \forall\eta, w \in M, \quad \gamma_M\eta \in G_+, \quad \partial_M w \in (G_+)^*. \tag{1.14}$$

При $\eta = T_M\varphi$, $\varphi \in (G_+)^*$, из (1.13) получаем соотношение

$$(T_M\varphi, T_M\psi)_F = \langle \gamma_M T_M\varphi, \psi\rangle_G \quad \forall\varphi, \psi \in (G_+)^*.$$

Отсюда следует, в частности, что оператор $C_M := \gamma_M T_M$ изометрически отображает $(G_+)^* = G^{-1/2}$ на $G^{1/2} = G_+$. Кроме того, $C_M|_G$ является ограниченным в G самосопряженным и положительным оператором.

Эти свойства позволяют установить, что $(C_M)^{-1}$ является оператором гильбертовой пары $(G_+; G)$, и для него согласно свойству (1.3) выполнено тождество

$$(\varphi, \psi)_{G_+} = \langle \varphi, C_M^{-1}\psi\rangle_G \quad \forall\varphi, \psi \in G_+.$$

2. Продолжим построения, связанные с доказательством теоремы. Рассмотрим гильбертову пару $(F; E)$, которая существует в силу условия 1°, и введем оператор A этой гильбертовой пары. Тогда согласно (1.3)

$$(\eta, u)_F = (A^{1/2}\eta, A^{1/2}u)_E = \langle \eta, Au\rangle_E \quad \forall\eta, u \in F. \tag{1.15}$$

Обозначим через P_N и P_M ортопроекторы на подпространства N и M соответственно и рассмотрим функционал

$$l_u(\eta_N) := (\eta_N, u)_F, \quad \eta_N = P_N\eta \in N, \quad u \in F.$$

С учетом (1.15) он преобразуется к виду

$$\begin{gathered}(\eta_N, u)_F = \langle \eta_N, Au\rangle_E = \langle P_N\eta_N, Au\rangle_E = \langle \eta_N, P_N^*Au\rangle_E =: \langle \eta_N, L_N u\rangle_E, \\ L_N u := P_N^* Au \quad \forall u \in F.\end{gathered} \tag{1.16}$$

Здесь $L_N : F \to N^*$ — линейный ограниченный оператор, так как $A : F \to F^*$ — ограниченный оператор, а $P_N^* : F^* \to N^* = AN$ — ограниченный проектор, действующий в F^*.

Из (1.16) приходим к формулам

$$(\eta_N, u_N)_F = \langle \eta_N, L_N u_N\rangle_E, \quad \eta_N = P_N\eta, \quad u_N = P_N u, \quad \eta, u \in F, \tag{1.17}$$

$$(\eta_N, u_M)_F = 0 = \langle \eta_N, L_N u_M\rangle_E, \quad u_M = P_M u, \quad u \in F. \tag{1.18}$$

Так как $\overline{N} = E$ (см. (1.6)), то из (1.18) получаем, что

$$L_N u_M = L_N P_M u = 0, \quad u \in F. \tag{1.19}$$

3. Введенный функционал $L_N u$ задан на подпространстве N. Расширим его определенным образом до функционала Lu, действующего на всем $F = N \oplus M$. Именно, далее будем считать, что

$$Lu = L_N u + L_M u, \quad L_N : F \to N^*, \quad L_M : F \to M^* := AM. \tag{1.20}$$

При этом потребуем (и это свойство соответствует многочисленным приложениям), чтобы

$$Lu_M = 0 \quad \forall u_M \in M. \tag{1.21}$$

Тогда в силу (1.19) и (1.20) должно выполняться свойство

$$L_M u_M = 0 \quad \forall u_M \in M. \tag{1.22}$$

4. Введем теперь в рассмотрение функционал

$$\Psi_u(\eta) := (\eta, u)_F - \langle \eta, L_N u\rangle_E \quad \forall\eta, u \in F.$$

По построению (см. (1.16)) имеем свойство $\Psi_u(\eta_N) = 0$. Поэтому
$$\Psi_u(\eta) = \Psi_u(\eta_M), \quad \eta_M = P_M\eta \in M,$$
т. е. этот функционал принимает ненулевые значения на подпространстве M или, что равносильно, на G_+, так как между M и G_+ имеет место изометрический изоморфизм (см. (1.12)).

Поэтому $\Psi_u(\eta)$ можно представить в виде либо функционала на M, либо функционала на G_+, либо суммы функционалов на M и G_+ соответственно, причем в этом последнем случае между указанными функционалами будет определенная связь. Именно этот последний вариант, как будет видно из рассмотренного ниже классического примера, и возникает в приложениях. Отметим еще, что в краевых задачах математической физики элемент $f = Lu \in F^*$ может содержать составляющую (обобщенную функцию, распределение), сосредоточенную не только внутри области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, где изучается краевая задача, но и на границе $\Gamma = \partial\Omega$ этой области (см., например, [28, с. 117]).

Реализуя эту идею в абстрактной форме, представим $\Psi_u(\eta)$ в виде
$$\Psi_u(\eta) = \Psi_u(\eta_M) := (\eta, u)_F - \langle \eta, L_N u\rangle_E = \langle \eta, L_M u\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G, \quad \eta, u \in F. \tag{1.23}$$
Здесь $L_M u \in M^* = AM$, а $\langle \eta, L_M u\rangle_E = \langle \eta_M, L_M u\rangle_E$ — функционал на подпространстве M, выраженный в виде полуторалинейной формы относительно $\eta_M \in M$ и $L_M u \in M^*$. Соответственно $\partial u \in (G_+)^*$, а $\langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G = \langle \gamma_M\eta_M, \partial u\rangle_G$ — функционал на G_+, выраженный в виде формы относительно $\gamma\eta = \gamma_M\eta_M$ и $\partial u \in (G_+)^*$.

Отметим, что в приложениях конкретный вид выражения $L_M u$ определяется, исходя из заданного дифференциального выражения, отражающего физический процесс, и соответствующей формулы Грина, отвечающей исследуемой задаче.

Из (1.23) при $\eta = \eta_M$, $u = u_M$ имеем тождество
$$(\eta_M, u_M)_F = \langle \gamma_M\eta_M, \partial_M u_M\rangle_G, \quad \eta_M, u_M \in M, \quad \partial_M u_M := (\partial u)|_M, \tag{1.24}$$
служащее определением функционала $\partial_M u_M \in (G_+)^*$, являющегося абстрактным аналогом производной по внешней нормали для элементов из подпространства M. Заметим, что это тождество уже было выведено ранее (см. (1.14)), причем
$$\partial_M = (T_M)^{-1} = (\gamma_M^{-1})^*.$$
При выводе (1.24) было учтено, что (см. (1.16), (1.22))
$$\langle \eta_M, L_N u_M\rangle_E = 0, \quad L_M u_M = 0.$$

При $\eta = \eta_M$, $u = u_N$ из (1.23) имеем соотношение
$$0 = \langle \eta_M, L_M u_N\rangle_E + \langle \gamma_M\eta_M, \partial_N u_N\rangle_G \quad \forall \eta_M \in M \quad \forall u_N \in N, \quad \partial_N u_N := (\partial u)|_N, \tag{1.25}$$
Именно оно и дает связь между функционалами $L_M u_N$ и $\partial_N u_N$, о которой говорилось выше. В частности, если функционал $L_M u_N \in M^*$ задан, то функционал $\partial_N u_N \in (G_+)^*$ определен однозначно.

5. Назовем $Lu := L_N u + L_M u$ (см. (1.20)) абстрактным дифференциальным выражением. С учетом (1.19) и (1.22) будем иметь
$$Lu = L_N(u_N + u_M) + L_M(u_N + u_M) = L_N u_N + L_M u_N = Lu_N \in F^*. \tag{1.26}$$

Введем еще функционал
$$\partial u := \partial_M u_M + \partial_N u_N \quad \forall u = u_N + u_M \in N \oplus M = F$$
и назовем его *абстрактной производной по внешней нормали* для любого элемента $u \in F$.

Для получения абстрактной формулы Грина используем тождества (1.17), (1.18) и (1.24), (1.25). Из них после сложения левых и правых частей приходим к соотношению
$$\begin{aligned}
&(\eta, u)_F = (\eta_N, u_N)_F + (\eta_M, u_M)_F = \\
&= \langle \eta_N, L_N u_N\rangle_E + \langle \gamma_M\eta_M, \partial_M u_M\rangle_G + \langle \eta_M, L_M u_N\rangle_E + \langle \gamma_M\eta_M, \partial_N u_N\rangle_G = \\
&= \langle \gamma_M\eta_M, \partial_M u_M + \partial_N u_N\rangle_G + \langle \eta_N, L_N u_N\rangle_E + \langle \eta_M, L_M u_N\rangle_E = \\
&= \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G + \langle \eta_N, L_N u_N\rangle_E + \langle \eta_M, L_M u_N\rangle_E.
\end{aligned} \tag{1.27}$$
Проверим теперь, что
$$\langle \eta_N, L_N u_N\rangle_E + \langle \eta_M, L_M u_N\rangle_E = \langle \eta, Lu\rangle_E, \tag{1.28}$$

где Lu определено формулой (1.20). В самом деле, с учетом (1.26) имеем

$$\begin{aligned}\langle \eta, Lu\rangle_E &= \langle \eta_N + \eta_M, L_N u_N + L_M u_N\rangle_E = \\ &= \langle \eta_N, L_N u_N\rangle_E + \langle \eta_M, L_N u_N\rangle_E + \langle \eta_N, L_M u_N\rangle_E + \langle \eta_M, L_M u_N\rangle_E = \\ &= \langle \eta_N, L_N u_N\rangle_E + \langle \eta_M, L_M u_N\rangle_E,\end{aligned} \tag{1.29}$$

так как

$$\langle \eta_M, L_N u_N\rangle_E = \langle P_M\eta, P_N^* A u_N\rangle_E = \langle P_N P_M \eta, A u_N\rangle_E = 0,$$
$$\langle \eta_N, L_M u_N\rangle_E = \langle \eta_N, P_M^* L_M u_N\rangle_E = \langle P_M P_N \eta, L_M u_N\rangle_E = 0.$$

Здесь в последнем тождестве использовано свойство $L_M u_N = P_M^* L_M u_N \in M^*$.

6. Из (1.27) и (1.28) следует формула Грина

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, Lu\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G \quad \forall \eta, u \in F, \tag{1.30}$$

причем по построению

$$Lu \in F^*, \ \ \partial u \in (G_+)^*, \ \ Lu = L_N u_N + L_M u_N, \ \ \partial u = \partial_M u_M + \partial_N u_N.$$

Отметим еще раз, что если функционал $L_M u_N$ выбран, то функционал $\partial_N u_N$ определен однозначно. □

Замечание 1.1. Из проведенного доказательства теоремы следует, что для тройки пространств E, F, G и абстрактного оператора следа γ, удовлетворяющих условиям (1.4)–(1.6), существует не одна, а целое семейство формул Грина. Это семейство параметризуется, во-первых, выбором функционала $L_M u_N \in M^*$, а во-вторых, — произвольным числовым параметром α, вещественным либо комплексным. В самом деле, при выбранном $L_M u_N$ можно ввести семейство абстрактных дифференциальных выражений $L(\alpha)u$ по формуле

$$L(\alpha)u := L_N u + \alpha L_M u = L_N u_N + \alpha L_M u_N, \tag{1.31}$$

а также отвечающее им семейство производных по нормали

$$\partial(\alpha)u := \partial_M u_M + \alpha\, \partial_N u_N, \tag{1.32}$$

и тогда получим семейство формул Грина вида

$$(\eta, u)_F = \langle \eta, L(\alpha)u\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial(\alpha)u\rangle_G \quad \forall \eta, u \in F.$$

При этом формула Грина (1.30) отвечает значению $\alpha = 1$. □

Замечание 1.2. Отметим еще раз, что в приложениях дифференциальное выражение $Lu \in F^*$ определено из физического смысла задачи, и тогда для него однозначно находятся $L_M u_N$ и константа α. □

Следствием теоремы 1.1 является такое утверждение.

Теорема 1.2 (вторая формула Грина)**.** *Если выполнены условия теоремы* 1.1, *то в случае вещественных гильбертовых пространств* E, F *и* G *справедлива формула*

$$\langle \eta, Lu\rangle_E - \langle u, L\eta\rangle_E = \langle \gamma u, \partial\eta\rangle_G - \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G, \quad \eta, u \in F;$$

для комплексных пространств E, F *и* G *соответственно имеем*

$$\langle \eta, Lu\rangle_E - \overline{\langle u, L\eta\rangle}_E = \overline{\langle \gamma u, \partial\eta\rangle}_G - \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G, \quad \eta, u \in F.$$

□

1.2. Основной пример. Рассмотрим в произвольной ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma := \partial\Omega$ гильбертовы пространства $L_2(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$ с нормами (1.1). Как уже упоминалось выше, пространство $H^1(\Omega)$ компактно вложено в $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega)$, т. е. соответствующий оператор вложения компактен, а $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$ — гильбертова пара пространств.

Воспользуемся первой формулой Грина для оператора $u - \Delta u$ (см., например, [28, с. 114]):

$$(\eta, u - \Delta u)_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \Big(\gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\Big)_{L_2(\Gamma)}, \quad \eta \in H^1(\Omega), \quad u \in H^2(\Omega).$$

Отсюда на основе обычных вариационных соображений и с использованием определения (1.2) порождающего оператора A гильбертовой пары $(H^1(\Omega);\, L_2(\Omega))$ устанавливаем, что он является оператором краевой задачи Неймана:

$$Au := u - \Delta u = f \quad (\text{в } \Omega), \quad \frac{\partial u}{\partial n} = 0 \quad (\text{на } \Gamma). \tag{1.33}$$

Точнее говоря, в области Ω с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ порождающий оператор пары $(H^1(\Omega);\, L_2(\Omega))$ является расширением оператора задачи (1.33) с $H^2(\Omega)$ на $H^1(\Omega)$, при этом

$$\mathcal{D}(A) = H^1(\Omega), \quad \mathcal{R}(A) = (H^1(\Omega))^*, \tag{1.34}$$

а его сужение на $\mathcal{D}(A) \subset H^1(\Omega)$ с $\mathcal{R}(A) = L_2(\Omega)$ является неограниченным самосопряженным положительно определенным оператором, $\mathcal{D}(A^{1/2}) = H^1(\Omega)$, причем A^{-1} — положительный компактный оператор, действующий в $L_2(\Omega)$.

Введем, как и выше (см. (1.7)), для элементов из $H^1(\Omega)$ оператор следа γ по закону

$$\gamma\eta := \eta|_\Gamma, \quad \Gamma = \partial\Omega, \quad \mathcal{D}(\gamma) = H^1(\Omega). \tag{1.35}$$

Как уже упоминалось, по теореме Гальярдо (см. [27]) в области Ω с липшицевой границей Γ оператор γ ограниченно действует из $H^1(\Omega)$ в гильбертово пространство $H^{1/2}(\Gamma)$ с нормой

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} := \int\limits_\Gamma |\varphi|^2 \, d\Gamma + \int\limits_{\Gamma_x}\int\limits_{\Gamma_y} \frac{|\varphi(x) - \varphi(y)|^2}{|x-y|^{m+1}} \, d\Gamma_x \, d\Gamma_y, \tag{1.36}$$

и имеет место оценка (вида (1.8)):

$$\|\gamma u\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant c_1 \|u\|_{H^1(\Omega)} \quad \forall u \in H^1(\Omega).$$

При этом $H^{1/2}(\Gamma)$ компактно вложено в $L_2(\Gamma)$, $H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Gamma)$. Далее, для любой функции $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$ существует функция $u \in H^1(\Omega)$ (определяемая не единственным образом по φ), такая, что

$$\gamma u = \varphi, \quad \|u\|_{H^1(\Omega)} \leqslant c_2 \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}.$$

Опираясь на эти факты, рассмотрим согласно общей схеме пункта 1.1 ортогональное разложение пространства $H^1(\Omega)$. Очевидно, что

$$N = \ker \gamma = \{u \in H^1(\Omega) : \gamma u = u|_\Gamma = 0\} =: H^1_0(\Omega).$$

Выясним, каким будет ортогональное дополнение M к $N = H^1_0(\Omega)$ в $F = H^1(\Omega)$.

Если $\eta \in H^1_0(\Omega)$ и $u \in M$, то в силу ортогональности η и u имеем

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} := \int\limits_\Omega (\eta u + \nabla\eta \cdot \nabla u) \, d\Omega = 0 \quad \forall \eta \in H^1_0(\Omega) \quad \forall u \in M.$$

Отсюда, из свойства плотности $H^1_0(\Omega)$ в $L_2(\Omega)$, а также того факта, что в $H^1_0(\Omega)$ плотным множеством является совокупность финитных бесконечно дифференцируемых функций, получаем, что

$$M =: H^1_h(\Omega) = \{u \in H^1(\Omega) : u - \Delta u = 0\}. \tag{1.37}$$

Далее для простоты будем называть $H^1_h(\Omega)$ *подпространством гармонических функций*. Таким образом, имеет место ортогональное разложение (разложение Вейля, см. [7])

$$F = H^1(\Omega) = H^1_0(\Omega) \oplus H^1_h(\Omega) = N \oplus M. \tag{1.38}$$

Воспользуемся еще следующим фактом (см., например, [28, с. 98], [24, с. 149]): в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ имеет место свойство

$$(H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma), \tag{1.39}$$

т. е. $H^{1/2}(\Gamma)$ и $H^{-1/2}(\Gamma)$ — дуальные пространства, и имеет место оснащение

$$H^{1/2}(\Gamma) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Gamma) \hookrightarrow\hookrightarrow H^{-1/2}(\Gamma) = (H^{1/2}(\Gamma))^*. \tag{1.40}$$

Обозначим через P_N и P_M ортопроекторы на подпространства $H_0^1(\Omega)$ и $H_h^1(\Omega)$ соответственно (см. (1.38)). Реализуя для данного примера общие построения, которые были проведены при доказательстве теоремы 1.1, рассмотрим функционал

$$l_u(\eta_N) := (\eta_N, u)_{H^1(\Omega)} = \int_\Omega (\eta_N u + \nabla\eta_N \cdot \nabla u)\,d\Omega \quad \forall \eta_N = P_N\eta \in H_0^1(\Omega), u \in H^1(\Omega). \tag{1.41}$$

С учетом определения (1.3) оператора A гильбертовой пары $(H^1(\Omega); L_2(\Omega))$, а также выражения (1.33) для этого оператора функционал (1.41) преобразуется к виду

$$\begin{aligned} l_u(\eta_N) &:= (\eta_N, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta_N, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} = \langle \eta_N, P_N^*(u - \Delta u)\rangle_{L_2(\Omega)} =: \\ &=: \langle \eta_N, L_N u\rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \eta_N \in H_0^1(\Omega), \quad u \in H^1(\Omega). \end{aligned} \tag{1.42}$$

(Это соотношение выводится сначала для $u \in H^2(\Omega)$, а затем предельным переходом и для $u \in H^1(\Omega)$.)

Так как $H_0^1(\Omega)$ плотно вложено в $L_2(\Omega)$ и имеет место оснащение

$$H_0^1(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow L_2(\Omega) \hookrightarrow\hookrightarrow (H_0^1(\Omega))^* =: H^{-1}(\Omega), \tag{1.43}$$

то из (1.42) следует, что

$$L_N u := P_N^*(u - \Delta u) \in N^* = (H_0^1(\Omega))^*,$$

а оператор $L_N \in \mathcal{L}(H^1(\Omega); (H_0^1(\Omega))^*)$. Здесь P_N^* — проектор в пространстве $(H^1(\Omega))^*$).

Из тождества (1.42) следуют соотношения

$$\begin{aligned} &(\eta_N, u_N)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta_N, L_N u_N\rangle_{L_2(\Omega)} \quad \forall \eta_N = P_N\eta \quad \forall u_N = P_N u \in H_0^1(\Omega), \\ &(\eta_N, u_M)_{H^1(\Omega)} = 0 = \langle \eta_N, L_N u_M\rangle_{L_2(\Omega)} \quad \forall \eta_N \in H_0^1(\Omega) \quad \forall u_M \in H_h^1(\Omega). \end{aligned} \tag{1.44}$$

Из (1.44) и (1.43), в частности, получаем, что

$$L_N u_M = P_N^*(u_M - \Delta u_M) = 0, \tag{1.45}$$

хотя этот факт очевиден также из (1.37).

Следуя далее общей схеме доказательства теоремы 1.1, рассмотрим функционал

$$\begin{aligned} \Psi_u(\eta) &:= (\eta, u)_{H^1(\Omega)} - \langle \eta, L_N u\rangle_{L_2(\Omega)} = \\ &= \int_\Omega (\eta u + \nabla\eta \cdot \nabla u)\,d\Omega - \langle \eta, P_N^*(u - \Delta u)\rangle_{L_2(\Omega)}, \quad \eta, u \in H^1(\Omega). \end{aligned} \tag{1.46}$$

Так как по построению $\Psi_u(\eta_N) = 0$, то $\Psi_u(\eta) = \Psi_u(\eta_M)$, $\eta_M = P_M\eta \in M = H_h^1(\Omega)$.

Напомним, что между элементами пространства $H_h^1(\Omega)$ и элементами пространства $H^{1/2}(\Gamma)$ имеется изоморфизм и даже изометрия, если в $H^{1/2}(\Gamma)$ задать норму в виде

$$\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)} = \|u\|_{H^1(\Omega)}, \quad \varphi = \gamma_M u, \quad u \in H_h^1(\Omega). \tag{1.47}$$

Поэтому $\Psi_u(\eta)$ можно выразить как в виде $\langle \eta_M, L_M u\rangle_{L_2(\Omega)}$, где $L_M u \in (H_h^1(\Omega))^* = AH_h^1(\Omega)$, $L_M \in \mathcal{L}(H^1(\Omega); (H_h^1(\Omega))^*)$ — произвольный оператор, так и в виде $\langle \gamma_M\eta_M, \partial u\rangle_{L_2(\Gamma)}$, $\partial u \in H^{-1/2}(\Gamma)$ (см. (1.40)), либо в виде суммы таких функционалов, связанных между собой (см. (1.25)):

$$\begin{aligned} &\Psi_u(\eta) = \langle \eta_M, L_M u\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma_M\eta_M, \partial u\rangle_{L_2(\Gamma)}, \\ &\eta_M = P_M\eta \in H_h^1(\Omega), \quad u \in H^1(\Omega). \end{aligned} \tag{1.48}$$

Учитывая, что $\gamma_M\eta_M = \gamma\eta$ $\forall \eta \in H^1(\Omega)$, а также тот факт, что $L_M u = P_M^* L_M u$, правую часть в (1.48) можно переписать в виде

$$\Psi_u(\eta) = \langle \eta, L_M u\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \tag{1.49}$$

а тогда из (1.46), (1.49) следует тождество

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, Lu\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_{L_2(\Gamma)} \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \tag{1.50}$$

$$Lu := L_N u + L_M u = P_N^*(u - \Delta u) + L_M u, \quad u \in H^1(\Omega). \tag{1.51}$$

Потребуем, как и в общей схеме доказательства теоремы 1.1 (см. (1.21)), чтобы выполнялось условие

$$Lu_M = 0. \tag{1.52}$$

Тогда в силу (1.51), (1.45) получаем свойство

$$L_M u_M = 0 \quad \forall u_M = P_M u \in H_h^1(\Omega). \tag{1.53}$$

Из (1.50) либо (1.48), в частности, при $u = u_M \in H_h^1(\Omega)$, $\eta = \eta_M \in H_h^1(\Omega)$ имеем соотношение

$$(\eta_M, u_M)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_M \eta_M, \partial_M u_M\rangle_{L_2(\Gamma)} =: \langle \gamma_M \eta_M, \frac{\partial u_M}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma)}, \ \frac{\partial u_M}{\partial n}\Big|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma), \tag{1.54}$$

которое служит определением производной по внешней нормали элемента $u_M \in H_h^1(\Omega)$. Оно обобщает обычную формулу

$$\int_\Omega (\eta_M u_M + \nabla\eta_M \cdot \nabla u_M) d\Omega = \int_\Gamma \eta_M \frac{\partial u_M}{\partial n} d\Gamma,$$
$$\eta_M \in H_h^1(\Omega), \ \ u_M \in H_h^1(\Omega) \cap H^2(\Omega).$$

Отметим еще, что в (1.54) функционал $\left(\frac{\partial u_M}{\partial n}\right)_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$ не зависит от того, какой функционал $L_M u$ выбран в (1.48), так как выполнено условие (1.53).

Возьмем теперь в (1.50) $\eta = \eta_M \in H_h^1(\Omega)$, $u = u_N \in H_0^1(\Omega)$. Тогда в силу ортогональности $H_h^1(\Omega)$ и $H_0^1(\Omega)$, а также свойства (1.52) получаем соотношение

$$0 = \langle \eta_M, L_M u_N\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma_M \eta_M, \partial_N u_N\rangle_{L_2(\Gamma)} \ \ \forall \eta_M \in H_h^1(\Omega) \ \ \forall u_N \in H_0^1(\Omega), \tag{1.55}$$
$$\partial_N u_N = (\partial u)|_N \in (G_+)^*, \ \ L_M u_N \in M^*.$$

Здесь по аналогии с формулой

$$\int_\Omega \eta_M (u_N - \Delta u_N) d\Omega + \int_\Gamma \eta_M \frac{\partial u_N}{\partial n} d\Gamma = 0 \ \forall \eta_M \in H_h^1(\Omega) \ \forall u_N \in H_0^1(\Omega) \cap H^2(\Omega), \tag{1.56}$$

функционал $\partial_N u_N$ можно назвать *производной по внешней нормали* для элемента $u_N \in H_0^1(\Omega)$. Тогда

$$\partial u = \partial_M u_M + \partial_N u_N = \left(\frac{\partial u_M}{\partial n} + \frac{\partial u_N}{\partial n}\right)_\Gamma = \frac{\partial}{\partial n}\Big(u_N + u_M\Big)\Big|_\Gamma = \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma),$$

т. е. ∂u есть производная по внешней нормали для произвольного элемента $u \in H^1(\Omega)$.

Тождество (1.55), как и в общих построениях в теореме 1.1, дает связь между функционалами $L_M u_N$ и $\partial_N u_N$, которая по необходимости должна выполняться. В частности, опираясь на (1.56), можно выбрать $L_M u_N$ в виде

$$L_M u_N := P_M^*(u_N - \Delta u_N), \ \ u_N \in H_0^1(\Omega).$$

(Напомним, что согласно (1.33), (1.34) элемент $u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*$, а P_M^* — проектор на подпространство $M^* = AM = (H_h^1(\Omega))^*$.) Тогда формула (1.50) примет вид

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, P_N^*(u - \Delta u) + P_M^*(u - \Delta u)\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma)} \ \forall \eta, u \in H^1(\Omega). \tag{1.57}$$

Теорема 1.3. *Для тройки пространств* $L_2(\Omega)$, $H^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, *и оператора следа* γ (*см.* (1.35)) *имеет место следующая обобщенная формула Грина для оператора Лапласа*:

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\rangle_{L_2(\Gamma)} \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega), \tag{1.58}$$

$$u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial n}\right)_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma). \tag{1.59}$$

При этом $(\partial u/\partial n)_\Gamma$ *определяется по элементам* $u \in H^1(\Omega)$ и $u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*$ *однозначно.*

Доказательство. Оно следует из проведенных построений и из (1.57), если заметить, что $P_N^* + P_M^* = I_{F^*}$ — единичный оператор в $(H^1(\Omega))^*$. □

Из (1.58) следует также «привычная» первая формула Грина для оператора Лапласа Δ:

$$\langle \eta, -\Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} = \int\limits_{\Omega} \nabla\eta \cdot \nabla u\, d\Omega - \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial n}\,\rangle_{L_2(\Gamma)} \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega). \tag{1.60}$$

Из (1.58) можно получить и вторую обобщенную формулу Грина для оператора Лапласа, см. теорему 1.2.

Замечание 1.3. Отметим еще раз, как и в замечаниях 1.1 и 1.2, что из доказательства теоремы 1.3 можно установить существование не одной формулы Грина (1.58), а целого семейства таких формул, т. е.

$$\begin{gathered}(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, L(\alpha)u\rangle_{L_2(\Omega)} + \langle \gamma\eta, \partial(\alpha)u\,\rangle_{L_2(\Gamma)} \quad \forall \eta, u \in H^1(\Omega),\\ L(\alpha)u := P_N^*(u - \Delta u) + \alpha P_M^*(u - \Delta u) \in (H^1(\Omega))^*,\\ \partial(\alpha)u := \Big(\frac{\partial u_M}{\partial n}\Big)_\Gamma + \alpha\Big(\frac{\partial u_N}{\partial n}\Big)_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma),\end{gathered} \tag{1.61}$$

где α — произвольная константа. Однако в приложениях возникает дифференциальное выражение $u - \Delta u$ (или $-\Delta u$ в (1.60)), которое получается из (1.61) при $\alpha = 1$. □

1.3. Другие примеры обобщенных формул Грина.

Здесь будут рассмотрены некоторые примеры классических формул Грина и (без доказательства) их соответствующие обобщенные варианты.

1.3.1. Равномерно эллиптическое дифференциальное выражение. Пусть снова $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, а $\Gamma := \partial\Omega$ — сначала достаточно гладкая.

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$Lu := -\sum_{j,k=1}^{m} \frac{\partial}{\partial x_j}\Big(a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\Big) + a_0(x)u, \quad u \in C^2(\overline{\Omega}), \tag{1.62}$$

для которого выполнены условия

$$a_{jk}(x) = \overline{a_{kj}(x)} \in C^1(\overline{\Omega}), \quad j,k = \overline{1,m}, \quad 0 < a_0 \leqslant a_0(x) \in C(\overline{\Omega}), \tag{1.63}$$

а также условие равномерной эллиптичности:

$$\sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k \geqslant c\sum_{k=1}^{m}|\xi_k|^2, \ \ c > 0 \ \ \forall x \in \overline{\Omega}. \tag{1.64}$$

Введем производную по конормали

$$\frac{\partial u}{\partial \nu} := \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}n_j, \quad \vec{n} = \sum_{j=1}^{m} n_j\vec{e}_j,$$

отвечающую дифференциальному выражению (1.62), и квадратичную форму

$$\|u\|^2_{H^1_{eq}(\Omega)} := \int\limits_{\Omega}\Big[\sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(x)\frac{\partial u}{\partial x_k}\frac{\partial u}{\partial x_j} + a_0(x)|u|^2\Big]\,d\Omega. \tag{1.65}$$

Тогда, как известно, имеет место следующая классическая формула Грина для равномерно эллиптического дифференциального выражения Lu:

$$\int\limits_{\Omega}\eta Lu\, d\Omega = (\eta, u)_{H^1_{eq}(\Omega)} - \int\limits_{\Gamma}\eta\frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\Gamma, \ \ \eta \in C^1(\overline{\Omega}), \ \ u \in C^2(\overline{\Omega}).$$

Форма (1.65) при условиях (1.63), (1.64) задает в пространстве $H^1(\Omega)$ норму, эквивалентную стандартной норме (1.1). Отсюда, а также из теоремы Гальярдо следует, что для тройки пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1_{eq}(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$ и обычного оператора следа γ (см. (1.35)) выполнены для области Ω с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ общие условия (1.4)–(1.6). Отсюда, в свою очередь, следует, что справедлива следующая обобщенная формула Грина для равномерно эллиптического оператора:

$$\langle \eta, Lu\rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1_{eq}(\Omega)} - \langle \gamma\eta, \frac{\partial u}{\partial \nu}\rangle_{L_2(\Gamma)} \quad \forall \eta, u \in H^1_{eq}(\Omega) = H^1(\Omega), \tag{1.66}$$

$$Lu \in (H^1_{eq}(\Omega))^*, \ \ \gamma\eta \in H^{1/2}(\Gamma), \ \ \frac{\partial u}{\partial \nu} \in H^{-1/2}(\Gamma).$$

Отметим, что если выполнены условия

$$a_{jk}(x) \equiv \delta_{jk}, \quad a_0(x) \equiv 1,$$

то формула (1.66) переходит в формулу (1.58).

1.3.2. Обобщенная формула Грина для систем линейных эллиптических уравнений. Будем снова считать, что $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ и $\Gamma := \partial\Omega$ достаточно гладкая.

Рассмотрим систему дифференциальных выражений

$$L_a u := -\sum_{j,k=1}^{m} \partial_j \Big[a_{jk}(x)\partial_k u(x)\Big] + a_0(x)u(x), \ \ \partial_j := \partial/\partial x_j, \tag{1.67}$$

которая применена к вектор-столбцу

$$u(x) := (u_1(x);\, \ldots;\, u_n(x))^\tau, \ \ x \in \Omega,$$

где символом $(\,\cdot;\,\ldots;\,\cdot\,)^\tau$ обозначена операция транспонирования. Здесь $a_{jk}(x)$ — матрицы, подчиненные условиям симметрии (в комплексных пространствах):

$$a^*_{jk}(x) = a_{jk}(x) \iff a^{rs}_{jk}(x) = \overline{a^{sr}_{kj}(x)}, \ \ r, s = \overline{1, n},$$

а матрица $a_0(x)$ — эрмитова и положительно определенная, т. е.

$$a^*_0(x) = a_0(x) \gg 0.$$

Введем производную по конормали, отвечающую дифференциальному выражению (1.67):

$$\partial_{\nu_a} u(x) := \sum_{j,k=1}^{m} n_j(x) a_{jk}(x)\partial_k u(x), \quad n = (n_1(x);\, \ldots;\, n_m(x))^\tau,$$

и будем считать, что выполнены следующие условия (см. [2]):

1. Матрица

$$a(x,\xi) := \sum_{j,k=1}^{m} a_{jk}(x)\xi_j\xi_k, \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad |\xi| = 1,$$

называемая *главным символом* дифференциального выражения (1.67), является положительно определенной равномерно по $x \in \overline{\Omega}$, т. е. выражение $L_a u$ сильно эллиптично. Как указано в [2, с. 11], из сформулированного условия следует свойство эллиптичности $\det a(x,\xi) \neq 0$ и выполнение так называемого условия Шапиро—Лопатинского.

2. Имеет место неравенство

$$\sum a^{rs}_{jk}\xi^r_j\overline{\xi^s_k} \geqslant c\sum |\xi^r_j|^2, \ \ x \in \overline{\Omega}, \ \ \xi^r_j \in \mathbb{C}, \ \ c > 0.$$

Тогда (см., например, [2]) имеет место неравенство

$$\begin{gathered} \|u\|^2_{H^1_a(\Omega)} := \int_\Omega E(u,u)\, d\Omega + \int_\Omega (a_0(x)u)\cdot \overline{u}\, d\Omega \geqslant \\ \geqslant c\|u\|^2_{H^1(\Omega)} := c\sum_{k=1}^{n} \|u_k\|^2_{H^1(\Omega)}, \quad E(u,u) := \sum a^{rs}_{jk}\partial_j u^r \overline{\partial_k u^s}. \end{gathered} \tag{1.68}$$

Заметим, что для гладких функций $\eta(x) := (\eta_1(x);\ldots;\eta_n(x))^\tau$ и $u(x) := (u_1(x);\ldots;u_n(x))^\tau$ в области Ω с гладкой границей имеет место следующая формула Грина:

$$(\eta, L_a u)_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1_a(\Omega)} - (\gamma\eta, \partial_{\nu_a} u)_{L_2(\Gamma)}, \ \ \eta \in C^1(\overline{\Omega}), \ \ u \in C^2(\overline{\Omega}), \tag{1.69}$$

$$L_2(\Omega) := \{u := (u_1;\, \dots;\, u_n)^\tau :\ \|u\|^2_{L_2(\Omega)} := \sum_{r=1}^{n} \|u_r\|^2_{L_2(\Omega)} < \infty\}, \tag{1.70}$$

$$L_2(\Gamma) := \{\varphi := (\varphi_1;\, \dots;\, \varphi_n)^\tau :\ \|\varphi\|^2_{L_2(\Gamma)} := \sum_{r=1}^{n} \|\varphi_r\|^2_{L_2(\Gamma)} < \infty\}, \tag{1.71}$$

$$\gamma u := (\gamma u_1;\, \dots;\, \gamma u_n)^\tau.$$

Из неравенства (1.68) следует, что нормы в пространствах $H^1_a(\Omega)$ и $H^1(\Omega)$ (для вектор-столбца $u := (u_1;\, \dots;\, u_n)^\tau$, см. правую часть (1.68)) эквивалентны. Отсюда и из теоремы 1.1, примененной к тройке пространств $E = L_2(\Omega)$ (см. (1.70)), $F = H^1_a(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$ (см. (1.71)) и оператору γ, приходим к выводу, что в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ справедлива формула Грина

$$\langle \eta, L_a u\rangle_{L_2(\Omega)} = (\eta, u)_{H^1_a(\Omega)} - \langle \gamma\eta, \partial_{\nu_a} u\rangle_{L_2(\Gamma)} \quad \forall \eta, u \in H^1_a(\Omega),$$
$$L_a u \in (H^1_a(\Omega))^*, \quad \partial_{\nu_a} u \in (H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma),$$

обобщающая формулу (1.69).

1.3.3. Обобщенная формула Грина линейной теории упругости. В линейной теории упругости основным дифференциальным выражением для поля $\vec{u} = \vec{u}(x)$, $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$, перемещений сплошной упругой среды является выражение

$$L\vec{u} := \vec{u} - [\mu\Delta\vec{u} + (\lambda + \mu)\nabla \mathrm{div}\vec{u}], \quad \lambda > 0, \quad \mu > 0,$$

где λ и μ — физические константы. Соответствующая классическая формула Грина для гладких полей $\vec{\eta}(x)$ и $\vec{u}(x)$ в области Ω с гладкой границей $\Gamma = \partial\Omega$ имеет вид

$$\int_\Omega \vec{\eta}\cdot(L\vec{u})\, d\Omega = \mu\, E(\vec{\eta}, \vec{u}) + \lambda \int_\Omega (\mathrm{div}\vec{\eta})(\mathrm{div}\vec{u})\, d\Omega + \int_\Omega \vec{\eta}\cdot\vec{u}\, d\Omega -$$
$$- \int_\Gamma (\gamma\vec{\eta})\cdot(P\vec{u})\, d\Gamma, \quad \vec{\eta} \in \vec{C}^1(\overline{\Omega}), \quad \vec{u} \in \vec{C}^2(\overline{\Omega}),$$

$$E(\vec{\eta}, \vec{u}) := \frac{1}{2}\int_\Omega \sum_{j,k=1}^{3} \tau_{jk}(\vec{\eta})\tau_{jk}(\vec{u})\, d\Omega, \quad \tau_{jk}(\vec{u}) := \frac{\partial u_j}{\partial x_k} + \frac{\partial u_k}{\partial x_j}, \tag{1.72}$$

$$P\vec{u} := \sum_{j,k=1}^{3} (\mu\tau_{jk}(\vec{u}) + \lambda \mathrm{div}\vec{u}\, \delta_{jk}) \cos(\vec{n}, \widehat{\ }\vec{e}_k)\vec{e}_j,$$

$$\vec{u} = \sum_{j=1}^{3} u_j \vec{e}_j, \quad \gamma\vec{\eta} := \sum_{j=1}^{3} (\gamma u_j)\vec{e}_j =: \vec{\eta}|_\Gamma.$$

Введем пространство вектор-функций $\vec{L}_2(\Omega)$ с нормой (1.70) при $n = 3$, соответствующее пространство $\vec{L}_2(\Gamma)$ (см. (1.71)), а также пространство $\vec{H}^1_{eq}(\Omega)$ с нормой

$$\|\vec{u}\|^2_{\vec{H}^1_{eq}(\Omega)} := \mu E(\vec{u}, \vec{u}) + \lambda \int_\Omega |\mathrm{div}\vec{u}|^2\, d\Omega + \int_\Omega |\vec{u}|^2\, d\Omega.$$

Опираясь на неравенство Корна (см. [21, с. 18], а также (1.68))

$$\|\vec{u}\|^2_{\vec{H}^1_{eq}(\Omega)} \geqslant c_1 \|\vec{u}\|^2_{\vec{H}^1(\Omega)}, \quad c_1 > 0 \quad \forall \vec{u} \in \vec{H}^1(\Omega),$$

можно доказать, что нормы в пространстве $\vec{H}^1_{eq}(\Omega)$ и в пространстве $\vec{H}^1(\Omega)$ со стандартной нормой эквивалентны.

Отсюда и из теоремы 1.1, примененной к пространствам $E = \vec{L}_2(\Omega)$, $F = \vec{H}^1_{eq}(\Omega)$, $G = \vec{L}_2(\Gamma)$ и оператору следа γ (см. (1.72)), получаем, что в области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ имеет место следующая обобщенная формула Грина линейной теории упругости:

$$\langle \vec{\eta}, L\vec{u}\rangle_{\vec{L}_2(\Omega)} = (\vec{\eta}, \vec{u})_{\vec{H}^1_{eq}(\Omega)} - \langle \gamma\vec{\eta}, P\vec{u}\rangle_{\vec{L}_2(\Gamma)} \quad \forall \vec{\eta}, \vec{u} \in \vec{H}^1_{eq}(\Omega) = \vec{H}^1(\Omega),$$

$$L\vec{u} \in (\vec{H}^1_{eq}(\Omega))^*, \quad \gamma\vec{\eta} \in \vec{H}^{1/2}(\Gamma), \quad P\vec{u} \in (\vec{H}^{1/2}(\Gamma))^* = \vec{H}^{-1/2}(\Gamma).$$

Здесь $\vec{H}^{1/2}(\Gamma)$ — пространство вектор-функций, заданных на Γ и имеющих проекции на оси координат, являющиеся элементами из $H^{1/2}(\Gamma)$.

2. Абстрактная формула Грина для полуторалинейных форм

До сих пор рассматривалась ситуация, когда имеется тройка гильбертовых пространств E, F, G и оператор следа γ, связанные условиями (1.4)–(1.6), и для этих объектов имеет место формула Грина (1.10). Однако в приложениях часто возникает ситуация (несимметричный случай), когда вместо скалярного произведения в пространстве F исходной является полуторалинейная форма $\Phi(\eta, u)$, $\eta, u \in F$, связанная с нормой в пространстве F естественными соотношениями (см. ниже (2.1) и (2.6)). Оказывается, и в этом случае можно доказать существование абстрактной формулы Грина, где вместо скалярного произведения $(\eta, u)_F$ стоит соответствующая форма $\Phi(\eta, u)$.

2.1. Полуторалинейные ограниченные формы. Рассмотрим функцию $\Phi(\eta, u) : F \times F \to \mathbb{C}$, определенную на комплексном гильбертовом пространстве F. Ее называют *полуторалинейной формой*, если она линейна по η и антилинейна по u, т. е.

$$\Phi(c_1\eta_1 + c_2\eta_2, u) = c_1\Phi(\eta_1, u) + c_2\Phi(\eta_2, u),$$
$$\Phi(\eta, c_1u_1 + c_2u_2) = \bar{c}_1\Phi(\eta, u_1) + \bar{c}_2\Phi(\eta, u_2).$$

Простейшим примером полуторалинейной формы является скалярное произведение $(\eta, u)_F$.

Полуторалинейная форма называется *ограниченной* на F, если

$$|\Phi(\eta, u)| \leqslant c_1\|\eta\|_F \cdot \|u\|_F \ \ \forall \eta, u \in F, \ \ c_1 > 0. \tag{2.1}$$

Будем считать далее, что имеется гильбертова пара пространств $(F; E)$, а потому имеет место и оснащение

$$F \hookrightarrow E \hookrightarrow F^*.$$

Нетрудно установить, что каждой форме $\Phi(\eta, u)$ однозначно отвечает линейный ограниченный оператор $A : F \to F^*$, с помощью которого форма $\Phi(\eta, u)$ допускает представление

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Au \rangle_E \ \ \forall \eta, u \in F. \tag{2.2}$$

В самом деле, в силу (2.1) форма $\Phi(\eta, u)$ является ограниченным линейным функционалом в пространстве F, а потому ее можно представить в виде

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, u_* \rangle_E \ \ \forall \eta \in F.$$

При этом элемент $u_* \in F^*$ однозначно находится по элементу $u \in F$.

Вводя оператор $A : F \to F^*$ по закону

$$Au := u_*,$$

приходим к выводу, что имеет место представление (2.2). При этом в силу (2.1) имеем

$$|\langle \eta, Au \rangle_E| \leqslant c_1\|\eta\|_F \cdot \|u\|_F,$$

откуда следует, что

$$\|Au\|_{F^*} \leqslant c_1\|u\|_F \ \implies \ \|A\|_{F \to F^*} \leqslant c_1, \tag{2.3}$$

т. е. оператор A формы $\Phi(\eta, u)$ ограничен.

Очевидно, имеет место и обратное утверждение: каждый линейный ограниченный оператор $A : F \to F^*$ однозначно определяет форму $\Phi(\eta, u)$ по закону (2.2), и для этой формы выполнено неравенство (2.1) с константой $c_1 := \|A\|_{F \to F^*}$. Таким образом, между ограниченными формами и их операторами имеет место взаимно однозначное соответствие.

Форма

$$\Phi^*(\eta, u) := \overline{\Phi(u, \eta)}$$

называется *сопряженной* к форме $\Phi(\eta, u)$. Если выполнено условие

$$\Phi^*(\eta, u) = \Phi(\eta, u) \ \ \forall \eta, u \in F,$$

то форма $\Phi(\eta, u)$ называется *эрмитовой*, или *симметрической*. Сопряженной форме $\Phi^*(\eta, u)$ однозначно отвечает сопряженный ограниченный оператор $A^* : F \to F^*$:

$$\Phi^*(\eta, u) = \langle \eta, A^* u \rangle_E, \tag{2.4}$$

а эрмитовой (симметрической) форме отвечает *самосопряженный* оператор (действующий из F в F^*):

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Au \rangle_E = \overline{\langle u, A\eta \rangle}_E \quad \forall \eta, u \in F. \tag{2.5}$$

2.2. Равномерно аккретивные формы. Назовем форму $\Phi(\eta, u)$ и отвечающий ей оператор A *равномерно аккретивными* (*сильно коэрцитивными*) в пространстве F, если

$$\operatorname{Re} \Phi(u, u) = \operatorname{Re} \langle u, Au \rangle_E \geqslant c_2 \|u\|_F^2, \quad c_2 > 0 \quad \forall u \in F. \tag{2.6}$$

(Это соотношение иногда называют также *усиленным неравенством Гординга*.) Равномерно аккретивная форма является *ограниченной снизу*:

$$|\Phi(u, u)| \geqslant c_2 \|u\|_F^2, \tag{2.7}$$

поскольку $|\Phi(u, u)| \geqslant \operatorname{Re} \Phi(u, u)$.

Лемма 2.1. *Ограниченная равномерно аккретивная форма $\Phi(\eta, u)$ может быть представлена через скалярное произведение в F в виде*

$$\Phi(\eta, u) = (Q\eta, u)_F = (\eta, Q^* u)_F \quad \forall \eta, u \in F, \tag{2.8}$$

где Q — линейный ограниченный и ограниченно обратимый оператор.

Доказательство. Снова заметим, что при фиксированном $u \in F$ величина $\Phi(\eta, u)$ является линейным по η функционалом в F и потому представима в виде

$$\Phi(\eta, u) = (\eta, w)_F, \quad w \in F, \tag{2.9}$$

при этом

$$\|w\|_F \leqslant c_1 \|u\|_F, \tag{2.10}$$

в силу чего элемент w определяется однозначно. Положив $w = Q^* u$, придем к представлению (2.8), причем в этом представлении $Q^* : F \to F$, а потому и Q — ограниченные операторы:

$$\|Q^*\| = \|Q\| \leqslant c_1.$$

Принимая в (2.9) $\eta = u$, из (2.7), (2.10) получаем

$$c_2 \|u\|_F^2 \leqslant |\Phi(u, u)| = |(u, Q^* u)_F| = |(u, w)_F| \leqslant \|u\|_F \cdot \|w\|_F \leqslant c_1 \|u\|_F^2. \tag{2.11}$$

Отсюда при $u \neq 0$ имеем

$$c_2 \|u\|_F \leqslant \|w\|_F = \|Q^* u\|_F \leqslant c_1 \|u\|_F. \tag{2.12}$$

Аналогично устанавливаем, что

$$c_2 \|u\|_F \leqslant \|Qu\|_F \leqslant c_1 \|u\|_F. \tag{2.13}$$

Из (2.12) следует, что $\ker Q^* = \{0\}$, а потому, в силу разложения

$$F = \mathcal{R}(Q) \oplus \ker Q^*,$$

приходим к выводу, что область значений оператора Q есть все пространство. Тогда из левого неравенства (2.13) следует, что оператор Q имеет ограниченный обратный и

$$\|Q^{-1}\| \leqslant c_2^{-1}.$$

□

Далее понадобится еще одно известное утверждение.

Лемма 2.2 (Лакс, Мильграм, см., например, [28, с. 43]). *Ограниченный на F равномерно аккретивный оператор $A : F \to F^*$, отвечающий форме $\Phi(\eta, u)$, имеет ограниченный обратный оператор $A^{-1} : F^* \to F$.*

Доказательство. Аналогично (2.11) и с учетом (2.2) имеем
$$c_2\|u\|_F^2 \leqslant \operatorname{Re}\Phi(u,u) \leqslant |\Phi(u,u)| = |\langle u, Au\rangle_E| \leqslant \|u\|_F \cdot \|Au\|_{F^*},$$
откуда при $u \neq 0$ следует, что
$$\|u\|_F \leqslant c_2^{-1}\|Au\|_{F^*} \quad \forall u \in F.$$
Следовательно, $\ker A = \{0\}$. Аналогично устанавливаем, что $\ker A^* = \{0\}$. Так как $A : F \to F^*$ ограничен (см. (2.3)), а потому замкнут, снова, как и в лемме 2.1, получаем, что $\mathcal{R}(A) = F^*$. Значит, обратный оператор существует, определен на всем F^* и потому (по теореме Банаха) ограничен:
$$\|A^{-1}\|_{F^*\to F} \leqslant c_2^{-1}.$$
□

2.3. О представлении несимметрической равномерно аккретивной формы. Доказанные выше факты позволяют установить для ограниченной несимметрической равномерно аккретивной формы $\Phi(\eta,u)$ структуру отвечающего ей оператора A. Перейдем к изложению этого круга вопросов.

Итак, пусть несимметрическая форма $\Phi(\eta,u)$ удовлетворяет условиям (2.1) и (2.6), т. е. является ограниченной и равномерно аккретивной в пространстве F, причем $\Phi(\eta,u) \neq \Phi^*(\eta,u)$.

Введем в рассмотрение симметрические формы
$$\Phi_R(\eta,u) := \frac{1}{2}\Big[\Phi(\eta,u) + \Phi^*(\eta,u)\Big] = \Phi_R^*(\eta,u),$$
$$\Phi_I(\eta,u) := \frac{1}{2i}\Big[\Phi(\eta,u) - \Phi^*(\eta,u)\Big] = \Phi_I^*(\eta,u),$$
называемые *вещественной* и *мнимой частями* формы $\Phi(\eta,u)$, так как
$$\Phi(\eta,u) = \Phi_R(\eta,u) + i\Phi_I(\eta,u). \tag{2.14}$$
Для $\Phi_R(\eta,u)$ из (2.6), (2.1) имеем неравенства
$$c_2\|u\|_F^2 \leqslant \Phi_R(u,u) =: \|u\|_{F_0}^2 \leqslant c_1\|u\|_F^2 \quad \forall u \in F. \tag{2.15}$$
Отсюда следует, что в пространстве F можно ввести новую норму, эквивалентную норме $\|u\|_F$, а также соответствующее скалярное произведение. Таким образом, теперь имеем $F = F_0$, а норма в F_0 определена по закону (2.15).

Возникает гильбертова пара пространств $(F_0; E)$. Обозначим через A_0 оператор этой гильбертовой пары. Тогда в шкале пространств E^α, построенной по этому оператору, будем иметь
$$E = E^0, \quad F_0 = E^{1/2} = \mathcal{D}(A_0), \quad F_0^* = E^{-1/2} = \mathcal{R}(A_0),$$
$$A_0^{1/2} \in \mathcal{L}(F_0; E), \quad A_0^{1/2} \in \mathcal{L}(E; F_0^*),$$
$$(\eta,u)_{F_0} = (A_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E = \langle \eta, A_0 u\rangle_E \quad \forall \eta, u \in F_0.$$

Перейдем теперь к рассмотрению свойств мнимой части формы $\Phi(\eta,u)$. Из неравенств (2.1) и (2.15) имеем
$$\begin{aligned} |\Phi_I(\eta,u)| &\leqslant |\Phi(\eta,u)| \leqslant c_1\|\eta\|_F \cdot \|u\|_F \leqslant c_1 c_2^{-1}\|\eta\|_{F_0}\cdot\|u\|_{F_0} = \\ &= c_1c_2^{-1}\|A_0^{1/2}\eta\|_E \cdot \|A_0^{1/2}u\|_E, \end{aligned} \tag{2.16}$$
т. е. формы $\Phi_I(\eta,u)$ и $\Phi(\eta,u)$ ограничены сверху в пространстве F_0.

Из (2.16) следует, что форму $\Phi_I(\eta,u)$ можно рассматривать как функцию от аргументов $A_0^{1/2}\eta$ и $A_0^{1/2}u$ в пространстве E:
$$\Phi_I(\eta,u) =: \varphi(\eta',u'), \quad \eta' = A_0^{1/2}\eta \in E, \quad u' = A_0^{1/2}u \in E, \tag{2.17}$$
причем эта новая форма ограничена на E. Поэтому к форме $\varphi(\eta',u')$ применима лемма 2.1 в следующей редакции. Во-первых, вместо F здесь следует взять пространство E. Во-вторых, необходимо использовать то утверждение леммы, где учитывается лишь ограниченность, но не равномерная аккретивность формы. В-третьих, следует учесть, что $\Phi_I(\eta,u)$, а потому и $\varphi(\eta',u')$ — симметрические формы.

Тогда по лемме 2.1 будем иметь

$$\varphi(\eta', u') = (Q\eta', u')_E = (\eta', Qu')_E \ \ \forall \eta, u \in E, \tag{2.18}$$

где уже учтено, что оператор $Q \in \mathcal{L}(E)$ является самосопряженным в E. Таким образом, из (2.17), (2.18) имеем представление

$$\Phi_I(\eta, u) =: (QA_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E = (A_0^{1/2}\eta, QA_0^{1/2}u)_E \ \ \forall \eta, u \in F_0. \tag{2.19}$$

Окончательно с учетом (2.14), (2.15) и (2.19) получаем

$$\begin{aligned} \Phi(\eta, u) &:= (A_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E + i(QA_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E = \\ &= ((I+iQ)A_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E = (A_0^{1/2}\eta, (I-iQ)A_0^{1/2}u)_E = \\ &= \langle \eta, A_0^{1/2}(I-iQ)A_0^{1/2}u\rangle_E \ \ \forall \eta, u \in F_0 = F. \end{aligned} \tag{2.20}$$

Сравнивая (2.20) с формулой (2.2), приходим к выводу, что оператор A формы $\Phi(\eta, u)$ имеет вид

$$A = A_0^{1/2}(I-iQ)A_0^{1/2}, \ \ A \in \mathcal{L}(F_0, F_0^*). \tag{2.21}$$

Так как $Q = Q^*$ в пространстве E, а оператор $A_0^{1/2}$ ограниченно обратим (из F_0^* в E и из E в F_0), то оператор A имеет ограниченный обратный

$$A^{-1} = A_0^{-1/2}(I-iQ)^{-1}A_0^{-1/2}, \ \ A^{-1} \in \mathcal{L}(F_0^*, F_0).$$

Выкладки и выводы, проведенные выше для формы $\Phi(\eta, u)$, можно повторить и для сопряженной формы $\Phi^*(\eta, u) = \overline{\Phi(u, \eta)}$. Тогда вместо (2.20) будем иметь

$$\begin{aligned} \Phi^*(\eta, u) &= \Phi_R(\eta, u) - i\Phi_I(\eta, u) = ((I-iQ)A_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E = \\ &= (A_0^{1/2}\eta, (I+iQ)A_0^{1/2}u)_E = \langle \eta, A_0^{1/2}(I+iQ)A_0^{1/2}u\rangle_E \ \forall \eta, u \in F = F_0. \end{aligned}$$

Отсюда с учетом определения (2.4) получаем, что форме $\Phi^*(\eta, u)$ отвечает сопряженный к (2.21) оператор

$$A^* = A_0^{1/2}(I+iQ)A_0^{1/2}, \ \ A^* \in \mathcal{L}(F_0, F_0^*). \tag{2.22}$$

Заметим также, что при $Q = 0$, т. е. в симметрическом случае, из (2.21), (2.22) следует, что

$$\Phi(\eta, u) = \Phi^*(\eta, u) = \Phi_R(\eta, u) = \langle \eta, A_0 u\rangle_E \ \ \forall \eta, u \in F_0,$$

где $A_0 : F_0 \to F_0^*$ — самосопряженный оператор в смысле определения (2.5).

2.4. Абстрактные формулы Грина для полуторалинейных форм. Представления (2.21) для оператора A формы $\Phi(\eta, u)$ и соответствующего оператора A^* из (2.22) для сопряженной формы $\Phi^*(\eta, u)$ позволяют получить обобщение обсуждавшегося в пункте 1.1 варианта, когда имелась тройка пространств E, F и G, а также оператор следа γ. Именно, теперь можно рассмотреть случай, когда вместо пространства F с введенным на нем скалярным произведением имеется форма $\Phi(\eta, u)$, удовлетворяющая в пространстве F общим условиям (2.1), (2.6). Соответствующую формулу Грина, существование которой далее будет установлено, назовем *абстрактной формулой Грина* для полуторалинейной формы $\Phi(\eta, u)$.

Итак, пусть выполнены условия (1.4)–(1.6), а также условия (2.1), (2.6). Тогда для пространства $F_0 = F$ с нормой (2.15) и соответствующим скалярным произведением

$$(\eta, u)_{F_0} := \Phi_R(\eta, u),$$

пространств E, G и оператора следа γ выполнены условия теоремы 1.1, и потому имеет место абстрактная формула Грина вида

$$\Phi_R(\eta, u) = \langle \eta, L_0 u\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial_0 u\rangle_G \ \ \forall \eta, u \in F_0, \tag{2.23}$$

$$F_0 = N_0 \oplus M_0, \ \ N_0 = \ker \gamma, \ \ L_0 u := L_{0,N_0}u + L_{0,M_0}u, \tag{2.24}$$

$$\partial_0 u = \partial_{N_0}u_{N_0} + \partial_{M_0}u_{M_0} \ \ \forall u = u_{N_0} + u_{M_0} \in F_0, \ \ \partial_0 u \in (G_+)^*, \ \ L_0 u \in (F_0)^*. \tag{2.25}$$

Здесь $L_0 u$ — абстрактное дифференциальное выражение, $\partial_0 u$ — абстрактный оператор производной по внешней нормали, который однозначно определяется по $u \in F_0$ и выбранному $L_0 u \in F_0^*$.

Пусть $\eta = \eta_{N_0} + \eta_{M_0}$, $u = u_{N_0} + u_{M_0}$ — произвольные элементы из F_0, представленные через их проекции на взаимно ортогональные подпространства N_0 и M_0. Тогда из (2.23) получаем формулы (являющиеся аналогами формул (1.17), (1.18), а также (1.24), (1.25)) следующего вида:

$$\Phi_R(\eta_{N_0}, u_{N_0}) = \langle \eta_{N_0}, L_{0,N_0} u_{N_0} \rangle_E, \quad L_{0,N_0} u_{N_0} = P^*_{N_0} A_0 u_{N_0}, \tag{2.26}$$

$$\Phi_R(\eta_{N_0}, u_{M_0}) = 0 = \langle \eta_{N_0}, L_{0,N_0} u_{M_0} \rangle_E, \quad L_{0,N_0} u_{M_0} = 0,$$

$$\Phi_R(\eta_{M_0}, u_{M_0}) = \langle \gamma_{M_0} \eta_{M_0}, \partial_{M_0} u_{M_0} \rangle_G, \quad L_{0,M_0} u_{M_0} = 0, \tag{2.27}$$

$$\Phi_R(\eta_{M_0}, u_{N_0}) = 0 = \langle \eta_{M_0}, L_{0,M_0} u_{N_0} \rangle_E + \langle \gamma_{M_0} \eta_{M_0}, \partial_{N_0} u_{N_0} \rangle_G. \tag{2.28}$$

Здесь A_0 — оператор гильбертовой пары $(F_0; E)$, P_{N_0} — ортопроектор на $N_0 = \ker \gamma$; $L_{0,M_0} u_{N_0}$ — функционал, который, вообще говоря, выбирается произвольно, $L_{0,M_0} : \ N_0 \to M_0^* := A_0 M_0$; при этом соотношение (2.27) служит определением функционала $\partial_{M_0} u_{M_0}$, а (2.28) — функционала $\partial_{N_0} u_{N_0}$ (через $L_{0,M_0} u_{N_0}$).

Наша цель — получить такую формулу Грина для формы $\Phi(\eta, u)$, которая бы имела вид, близкий к (2.23), и при $Q = 0$ (когда $\Phi(\eta, u) = \Phi_R(\eta, u)$) переходила бы в формулу (2.23). Иными словами, желательно получить формулу с непрерывной зависимостью от $Q = Q^* \in \mathcal{L}(E)$.

По-видимому, тогда искомая формула Грина должна иметь вид

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Lu \rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G \ \ \forall \eta, u \in F_0,$$

где Lu и ∂u — абстрактные дифференциальное выражение и производная по внешней нормали (конормали), определяемые по исходным данным и при $Q \to 0$ (в $\mathcal{L}(E)$) переходящие в $L_0 u$ и $\partial_0 u$ соответственно (см. (2.24), (2.25)).

Отметим еще одно важное обстоятельство: для несимметричной формы $\Phi(\eta, u)$ теперь следует использовать не ортогональное, а прямое разложение пространства F_0, т. е.

$$F_0 = N_0 \oplus M_0 = N (\dot{+}) M, \ \ N = N_0 = \ker \gamma, \ \ M \neq M_0. \tag{2.29}$$

Здесь подпространство M, очевидно, снова обладает тем свойством, что между элементами $u \in M$ и $\gamma u \in G_+$ по-прежнему, как и в симметрическом случае, имеет место взаимно однозначное соответствие, поскольку $\ker \gamma = N$.

Проведем далее построения, близкие к тем, которые уже были использованы при доказательстве теоремы 1.1 применительно к форме $(\eta, u)_F$, однако теперь с учетом представления (2.20), (2.21) для $\Phi(\eta, u)$.

Итак, пусть подпространства N и M в прямом разложении F_0 (см. (2.29)) уже выбраны, а P_N и $P_M = I - P_N$ — соответствующие проекторы на эти подпространства. Рассмотрим при любом $u \in F_0$ функционал

$$\begin{gathered} \Phi(\eta_N, u) = \langle \eta_N, Au \rangle_E = \langle P_N \eta_N, Au \rangle_E = \langle \eta_N, P^*_N Au \rangle_E =: \langle \eta_N, L_N u \rangle_E, \\ L_N u := P^*_N Au, \quad A = A_0^{1/2} (I - iQ) A_0^{1/2}, \quad \eta_N = P_N \eta \in N, \end{gathered} \tag{2.30}$$

где $A : F_0 \to F_0^*$ — ограниченный оператор, а $P^*_N : F_0^* \to N^*$ — ограниченный проектор. Из (2.30) приходим к формулам

$$\Phi(\eta_N, u_N) = \langle \eta_N, L_N u_N \rangle_E, \quad \eta_N = P_N \eta, \quad u_N = P_N u, \quad \eta, u \in F_0, \tag{2.31}$$

$$\Phi(\eta_N, u_M) = \langle \eta_N, L_N u_M \rangle_E. \tag{2.32}$$

Введенный функционал $L_N u \in N^*$ задан на подпространстве N. Расширим его на все пространство $F_0 = N (\dot{+}) M$ до функционала Lu и будем считать, что

$$Lu = L_N u + L_M u, \quad L_N : F_0 \to N^*, \quad L_M : F \to M^*. \tag{2.33}$$

При этом потребуем (как и при доказательстве теоремы 1.1), чтобы

$$Lu_M = L_N u_M + L_M u_M = 0 \quad \forall u = u_M \in M. \tag{2.34}$$

Введем теперь функционал

$$\Psi_u(\eta) := \Phi(\eta, u) - \langle \eta, L_N u \rangle_E \quad \forall \eta, u \in F_0, \tag{2.35}$$

который в силу (2.30) принимает ненулевые значения на подпространстве M или, что равносильно, на G_+. Как и при доказательстве теоремы 1.1, будем считать, что правая часть в (2.35) равна сумме функционалов на M и G_+:

$$\Psi_u(\eta) = \Psi_u(\eta_M) := \Phi(\eta, u) - \langle \eta, L_N u\rangle_E = \langle \eta, L_M u\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G, \quad \eta, u \in F, \tag{2.36}$$
$$L_M u = P_M^* L_M u \in M^* \subset F_0^*, \quad \partial u \in (G_+)^*, \quad \gamma\eta = \gamma_M \eta_M \in G_+.$$

Из (2.36) при $\eta = \eta_M$, $u = u_M$ имеем тождество

$$\Phi(\eta_M, u_M) = \langle \eta_M, L_M u_M\rangle_E + \langle \gamma_M\eta_M, \partial_M u_M\rangle_G, \tag{2.37}$$

где учтено, что $\langle \eta_M, L_N u_M\rangle_E = 0$ в силу определения $L_N u$ из (2.30) и свойства $P_M P_N = 0$. Далее, при $\eta = \eta_M$, $u = u_N$ из (2.36) получаем аналогично

$$\Phi(\eta_M, u_N) = \langle \eta_M, L_M u_N\rangle_E + \langle \gamma_M\eta_M, \partial_N u_N\rangle_G. \tag{2.38}$$

До сих пор выбор подпространств N и M из прямого разложения (2.29) не был сделан. Будем далее считать, что эти подпространства таковы, что выполнено условие

$$\Phi(\eta_N, u_M) = 0 \quad \forall \eta_N = P_N\eta \in N, \quad \forall u_M = P_M u \in M. \tag{2.39}$$

Тогда из (2.32) получаем, что в силу плотности N в E должно иметь место свойство

$$L_N u_M = 0, \quad u_M = P_M u \in M,$$

которое вместе с (2.34) дает также свойство

$$L_M u_M = 0, \quad u_M \in M. \tag{2.40}$$

Поэтому из (2.33) имеем формулу

$$Lu = L_N u_N + L_M u_N = Lu_N, \tag{2.41}$$

определяющую закон действия абстрактного дифференциального выражения $Lu \in F_0^*$, учитывающий свойство (2.34).

С учетом (2.40) формула (2.37) приводит к соотношению

$$\Phi(\eta_M, u_M) = \langle \gamma_M\eta_M, \partial_M u_M\rangle_G, \tag{2.42}$$

служащему определением абстрактной производной по конормали из подпространства M. Заметим, что это определение не зависит от выбора функционала $L_M u$ в (2.36). Далее, формулой (2.38) определяется производная по конормали из подпространства N, т. е. функционал $\partial_N u_N \in (G_+)^*$. Очевидно, этот функционал зависит от выбора функционала $L_M u_N \in M^*$.

Итак, если выполнено условие (2.39), то соотношения (2.31), (2.32), (2.42), (2.38) являются обобщением соотношений (2.26)–(2.28) соответственно и при $Q \to 0$ переходят в них, так как $A = A_0^{1/2}(I - iQ)A_0^{1/2}$, а проекторы P_N и P_M, как будет установлено ниже, переходят в ортопроекторы P_{N_0} и P_{M_0} (см. (2.29)).

Покажем, что условие (2.39) выполнимо, и получим соответствующие формулы для проекторов P_M и P_N.

Для любого $\eta \in F_0$ имеем

$$\eta = P_{N_0}\eta + P_{M_0}\eta = P_N\eta + P_M\eta = \eta_N + \eta_M. \tag{2.43}$$

Здесь $P_N\eta \in N = N_0$ и потому $P_{N_0}P_N\eta = P_N u$. Аналогично устанавливаем, что $P_{M_0}P_M u = P_{M_0}u$ $\forall u \in F_0$, и тогда

$$P_{M_0}P_M = P_{M_0} \quad \Longleftrightarrow \quad P_N = P_{N_0}P_N. \tag{2.44}$$

Воспользуемся теперь формулами (2.20) и представим $\Phi(\eta, u)$ в виде

$$\begin{aligned} \Phi(\eta, u) &= ((I + iQ)A_0^{1/2}\eta, A_0^{1/2}u)_E = (A_0^{1/2}(I + iA_0^{-1/2}QA_0^{1/2})\eta, A_0^{1/2}u)_E = \\ &= ((I + iQ_0)\eta, u)_{F_0} = (\eta, (I - iQ_0)u)_{F_0} \ \ \forall \eta, u \in F_0. \end{aligned} \tag{2.45}$$

Легко проверить, что здесь

$$Q_0 := A_0^{-1/2}QA_0^{1/2} = Q_0^* \in \mathcal{L}(F_0),$$

т. е. Q_0 является ограниченным самосопряженным оператором, действующим в F_0.

В представлении (2.45) условие (2.39) переписывается в виде

$$(P_N\eta, (I - iQ_0)P_M u)_{F_0} = 0 \quad \forall \eta, u \in F_0.$$

Используя второе соотношение (2.44), отсюда имеем

$$(P_{N_0}P_N\eta, (I - iQ_0)P_M u)_{F_0} = (P_{N_0}P_N\eta, P_{N_0}(I - iQ_0)P_M u)_{F_0} = 0.$$

Значит, элемент $P_{N_0}(I - iQ_0)P_M u$ принадлежит подпространству $N_0 = N$ и одновременно ортогонален ему при любом $u \in F_0$. Поэтому

$$P_{N_0}(I - iQ_0)P_M u = 0 \ \ \forall u \in F_0. \tag{2.46}$$

Представляя $P_M u$ в виде суммы его ортогональных проекций на N_0 и M_0, имеем из (2.46), с учетом первой формулы (2.44) и свойства $P_{N_0}P_{M_0} = 0$,

$$\begin{aligned} &P_{N_0}(I - iQ_0)(P_{N_0}P_M u + P_{M_0}P_M u) = P_{N_0}(I - iQ_0)(P_{N_0}P_M u + P_{M_0}u) = \\ &= (I_{N_0} - iP_{N_0}Q_0P_{N_0})P_{N_0}P_M u - i(P_{N_0}Q_0P_{M_0})(P_{M_0}u) = 0, \end{aligned} \tag{2.47}$$

где I_{N_0} — единичный оператор в N_0.

Поскольку здесь оператор $P_{N_0}Q_0P_{N_0}$ самосопряжен и действует в N_0, то существует ограниченный обратный оператор $(I_{N_0} - iP_{N_0}Q_0P_{N_0})^{-1}$, и из (2.47) получаем, что

$$P_{N_0}P_M u = i(I_{N_0} - iP_{N_0}Q_0P_{N_0})^{-1}(P_{N_0}Q_0P_{M_0})(P_{M_0}u) \ \ \forall u \in F_0.$$

Окончательно имеем

$$P_M u = P_{M_0}u + i(I_{N_0} - iP_{N_0}Q_0P_{N_0})^{-1}(P_{N_0}Q_0P_{M_0})(P_{M_0}u) \ \ \forall u \in F_0, \tag{2.48}$$

$$P_N u = P_{N_0}u - i(I_{N_0} - iP_{N_0}Q_0P_{N_0})^{-1}(P_{N_0}Q_0P_{M_0})(P_{M_0}u) \ \ \forall u \in F_0. \tag{2.49}$$

Формулы (2.48), (2.49) дают связь проекторов P_M и P_N с ортопроекторами P_{N_0} и P_{M_0}. В симметрическом случае, т. е. при $Q = 0 \iff Q_0 = 0$, они переходят в ожидаемые тривиальные соотношения, когда $N = N_0$, $M = M_0$, $P_N = P_{N_0}$, $P_M = P_{M_0}$.

Можно проверить, что для операторов P_M и P_N из (2.48), (2.49) выполнены свойства $P_M^2 = P_M$, $P_N^2 = P_N$, т. е. эти ограниченные операторы действительно являются проекторами.

Таким образом, при выборе абстрактного дифференциального выражения Lu по формулам (2.33), (2.34), (2.41) и проекторов P_M и P_N в виде (2.48), (2.49) справедливы соотношения (2.31), (2.32), (2.42), (2.38), причем $Lu_M = 0$ и выполнено свойство (2.39).

Введем еще, как и в пункте 1.1, абстрактную производную по конормали ∂u по закону

$$\partial u := \partial_M u_M + \partial_N u_N \in (G_+)^*, \quad u = u_N + u_M \in F_0.$$

Итогом проведенных построений является следующее утверждение.

Теорема 2.1 (первая абстрактная формула Грина для полуторалинейных форм)**.** *Пусть выполнены условия* (1.4)–(1.6) *для тройки гильбертовых пространств и оператора следа, а также условия* (2.1)*,* (2.6) *для формы* $\Phi(\eta, u)$*. Тогда имеет место следующая формула Грина*:

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Lu \rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u \rangle_G \quad \forall \eta, u \in F_0 = F, \tag{2.50}$$

$$Lu = L_N u + L_M u \in F_0^*, \quad Lu = Lu_N, \quad \partial u = \partial_N u_N + \partial_M u_M \in (G_+)^*. \tag{2.51}$$

При этом ∂u *определяется однозначно по элементам* $u \in F_0$ *и* $Lu \in F_0^*$.

Доказательство. После проведенных выше построений для доказательства теоремы достаточно почти дословно повторить разделы 5 и 6 доказательства теоремы 1.1 с заменой $(\eta, u)_F$ на $\Phi(\eta, u)$. □

Замечание 2.1. Относительно формулы Грина (2.50), (2.51) справедливы утверждения, высказанные в замечаниях 1.1 и 1.2: наряду с (2.50) можно получить семейство формул Грина вида

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, L(\alpha)u \rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial(\alpha)u \rangle_G \quad \forall \eta, u \in F_0,$$

где α — произвольная константа, а $L(\alpha)u$ и $\partial(\alpha)u$ по-прежнему выражаются формулами (1.31) и (1.32). Однако в приложениях Lu, как правило, задано обычным дифференциальным выражением, полученным из рассмотрения физического или иного смысла задачи. □

Построения, проведенные выше для формы $\Phi(\eta,u)$, легко аналогично повторить и для сопряженной формы $\Phi^*(\eta,u) = \overline{\Phi(u,\eta)}$ и отвечающего ей оператора $A^* = A_0^{1/2}(I+iQ)A_0^{1/2}$. Тогда вместо (2.45) будем иметь

$$\Phi^*(\eta,u) = ((I-iQ_0)\eta,u)_{F_0} \quad \forall \eta,u \in F_0,$$

а пространство F_0 допускает прямое разложение

$$F_0 = N_0 \oplus M_0 = N_*(\dot{+})M_*, \quad N_* = N_0, \ \ M_* \neq M_0.$$

При этом вместо (2.48), (2.49) для проекторов P_{M_*} и P_{N_*} на подпространства M_* и N_* соответственно приходим к формулам

$$P_{M_*}u = P_{M_0}u - i(I_{N_0}+iP_{N_0}Q_0P_{N_0})^{-1}(P_{N_0}Q_0P_{M_0})(P_{M_0}u) \quad \forall u \in F_0,$$

$$P_{N_*}u = P_{N_0}u + i(I_{N_0}+iP_{N_0}Q_0P_{N_0})^{-1}(P_{N_0}Q_0P_{M_0})(P_{M_0}u) \quad \forall u \in F_0.$$

Далее, абстрактное дифференциальное выражение L_*u, отвечающее форме $\Phi^*(\eta,u)$, определяется по закону, аналогичному (2.51):

$$L_*u := L_{*,N}u + L_{*,M}u \in F_0^*, \quad L_*u = L_*u_{N_*}, \quad L_{*,N}u := (P_{N_*})^*A^*u, \quad u \in F_0, \tag{2.52}$$

а абстрактная производная по конормали — по формуле

$$\partial_*u := \partial_{M_*}u_{M_*} + \partial_{N_*}u_{N_*} \in (G_+)^*. \tag{2.53}$$

Здесь производные по конормали в подпространствах M_* и N_*, т. е. функционалы $\partial_{M_*}u_{M_*}$ и $\partial_{N_*}u_{N_*}$, определяются из тождеств, аналогичных (2.42) и (2.38):

$$\Phi^*(\eta_{M_*},u_{M_*}) = \langle \gamma_{M_*}\eta_{M_*}, \partial_{M_*}u_{M_*}\rangle_G,$$

$$\Phi^*(\eta_{M_*},u_{N_*}) = \langle \eta_{M_*}, L_{*,M_*}u_{N_*}\rangle_E + \langle \gamma_{M_*}\eta_{M_*}, \partial_{N_*}u_{N_*}\rangle_G.$$

Исходя из этих фактов, приходим к следующему утверждению.

Теорема 2.2 (первая абстрактная формула Грина для полуторалинейной сопряженной формы)**.** *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Тогда имеет место следующая формула Грина*:

$$\Phi^*(\eta,u) = \langle \eta, L_*u\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial_*u\rangle_G \quad \forall \eta,u \in F_0 = F, \tag{2.54}$$

где L_*u и ∂_*u определены формулами (2.52), (2.53). □

Из (2.51), (2.54) и связи $\Phi^*(\eta,u) = \overline{\Phi(u,\eta)}$ получаем, что

$$\Phi(\eta,u) = \langle \eta, Lu\rangle_E + \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G = \overline{\langle u, L_*\eta\rangle}_E + \overline{\langle \gamma u, \partial_*\eta\rangle}_G \quad \forall \eta,u \in F_0.$$

Теорема 2.3 (вторая абстрактная формула Грина для полуторалинейных форм)**.** *Пусть выполнены условия теоремы* 2.1. *Тогда имеет место следующая абстрактная формула Грина*:

$$\langle \eta, Lu\rangle_E - \overline{\langle u, L_*\eta\rangle}_E = \overline{\langle \gamma u, \partial_*\eta\rangle}_G - \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G \quad \forall \eta,u \in F_0. \tag{2.55}$$

□

3. Абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач

В этом параграфе при определенных дополнительных условиях выводится абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач. Приводятся поясняющие примеры, а также приложения к классической тройке гильбертовых пространств.

3.1. Первые формулировки абстрактной формулы Грина. В математической физике часто изучаются такие проблемы, когда на одной части границы $\Gamma = \partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ задают краевое условие Дирихле, на другой — условие Неймана, а на третьей — так называемое третье краевое условие, или условие Ньютона. Задачи подобного вида называют *смешанными*. Для таких задач функционал, связанный с Γ и фигурирующий в формуле Грина, естественно разбить на части, отвечающие тому или иному краевому условию.

Рассмотрим эту проблему в абстрактной форме. Пусть для тройки гильбертовых пространств E, F, G и абстрактного оператора следа γ выполнены условия (1.4)–(1.6), обеспечивающие по теореме 1.1 существование абстрактной формулы Грина:

$$\langle \eta, Lu\rangle_E = (\eta, u)_F - \langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G,\ Lu \in F^*,\ \gamma\eta \in G_+,\ \partial u \in (G_+)^*\ \forall \eta, u \in F. \tag{3.1}$$

Для смешанных краевых задач желательно выражение $\langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G$ заменить, при определенных дополнительных условиях, на выражение $\sum\limits_{k=1}^{q} \langle \gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{G_k}$, где $\gamma_k\eta$ — абстрактный аналог следа элемента $\eta \in F$ на части Γ_k границы Γ, а $\partial_k u$ — соответствующий аналог производной по внешней нормали на этой части границы.

Переходя к выводу абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач, будем считать, что дополнительно к условиям (1.4)–(1.6) выполнены следующие соотношения:

$$G = \bigoplus_{k=1}^{q} G_k, \quad \exists (G_+)_k,\ (G_+)_k^* : (G_+)_k \hookrightarrow G_k \hookrightarrow (G_+)_k^*, \quad k = \overline{1, q}.$$

Рассмотрим для простоты случай $q = 2$. Пусть p_1 — непрерывный проектор, действующий в пространстве G_+, а $p_2 = I_+ - p_1$ — дополнительный проектор. Введем подпространства

$$\widehat{(G_+)}_k := p_k G_+, \quad p_k : G_+ \to \widehat{(G_+)}_k, \quad k = 1, 2,$$

отвечающие этим проекторам. Введем также операторы

$$\widehat{\gamma}_k := p_k\gamma, \quad \widehat{\partial}_k := p_k^*\partial, \quad p_k^* : \widehat{(G_+)}_k^* \to (G_+)^*.$$

Так как по условию p_k непрерывен, то и p_k^* непрерывен и $(p_k^*)^2 = p_k^*$.

Теорема 3.1 (первая формулировка абстрактной формулы Грина)**.** *В сформулированных выше предположениях имеет место абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач в следующей форме*:

$$\langle \eta, Lu\rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^{2} \langle \widehat{\gamma}_k\eta, \widehat{\partial}_k u\rangle_G \quad \forall \eta, u \in F. \tag{3.2}$$

Доказательство. Оно достаточно простое. Так как $p_1 + p_2 = I_+$, то

$$\gamma\eta = (p_1 + p_2)\gamma\eta = (\widehat{\gamma}_1 + \widehat{\gamma}_2)\eta \quad \forall \eta \in F.$$

Поэтому соответствующее слагаемое из правой части формулы (3.1) преобразуется следующим образом:

$$\begin{gathered}\langle \gamma\eta, \partial u\rangle_G = \langle (\widehat{\gamma}_1 + \widehat{\gamma}_2)\eta, \partial u\rangle_G = \sum_{k=1}^{2} \langle \widehat{\gamma}_k\eta, \partial u\rangle_G = \\ = \sum_{k=1}^{2} \langle p_k\gamma\eta, \partial u\rangle_G = \sum_{k=1}^{2} \langle p_k^2\gamma\eta, \partial u\rangle_G = \sum_{k=1}^{2} \langle p_k\gamma\eta, p_k^*\partial u\rangle_G = \sum_{k=1}^{2} \langle \widehat{\gamma}_k\eta, \widehat{\partial}_k u\rangle_G.\end{gathered} \tag{3.3}$$

Отсюда и из (3.1) следует формула (3.2). □

Из доказательства соотношения (3.3) видно, что если имеется не два, а q взаимно дополнительных проекторов, т. е.

$$\sum_{k=1}^{q} p_k = I_+, \quad p_k p_j = p_k \delta_{kj}, \quad k, j = \overline{1, q},$$

то аналогично выводу (3.3) приходим к формуле

$$\langle \eta, Lu\rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^{q} \langle \widehat{\gamma}_k \eta, \widehat{\partial}_k u\rangle_G \quad \forall \eta, u \in F. \tag{3.4}$$

Поясним разобранную в абстрактной форме ситуацию на простом примере. Пусть липшицева граница Γ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$, гомеоморфной шаровому слою, состоит из двух непересекающихся частей Γ_1 и Γ_2, причем

$$d(\Gamma_1, \Gamma_2) = \operatorname{dist}(\Gamma_1, \Gamma_2) := \inf\{|x-y| : x \in \Gamma_1,\ y \in \Gamma_2\} > 0. \tag{3.5}$$

Тогда если $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, то

$$\varphi = \begin{cases} \varphi_1 & (\text{на } \Gamma_1), \\ \varphi_2 & (\text{на } \Gamma_2), \end{cases} \tag{3.6}$$

причем, как следует из формулы (1.36),

$$\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \geqslant \|\varphi_1\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_1)} + \|\varphi_2\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_2)}. \tag{3.7}$$

Введем оператор p_1, действующий для любого φ из (3.6) по закону

$$p_1\varphi := \begin{cases} \varphi_1 & (\text{на } \Gamma_1), \\ 0 & (\text{на } \Gamma_2). \end{cases} \tag{3.8}$$

Нетрудно видеть, что этот оператор обладает свойством $p_1^2 = p_1$. Обозначим совокупность элементов вида (3.8) через $\widehat{H}^{1/2}(\Gamma_1) \subset H^{1/2}(\Gamma)$. Тогда $\widehat{H}^{1/2}(\Gamma_1) := p_1 H^{1/2}(\Gamma)$.

Лемма 3.1. *Оператор*

$$p_1 : H^{1/2}(\Gamma) \to \widehat{H}^{1/2}(\Gamma_1)$$

является ограниченным проектором, действующим в пространстве $H^{1/2}(\Gamma)$.

Доказательство. Оно основано на оценке нормы $p_1\varphi$, $\varphi \in H^{1/2}(\Gamma)$, в пространстве $H^{1/2}(\Gamma)$. Непосредственное вычисление с использованием формулы (1.36) дает неравенство

$$\|p_1\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant (1 + 2|\Gamma_2|d^{-m-1})\|\varphi\|^2_{H^{1/2}(\Gamma)} \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma), \tag{3.9}$$

где $d = \operatorname{dist}(\Gamma_1, \Gamma_2) > 0$. Поэтому

$$\|p_1\| \leqslant (1 + 2|\Gamma_2|d^{-m-1})^{1/2}. \tag{3.10}$$

Свойство $p_1^2 = p_1$ уже отмечалось выше, так что p_1 — ограниченный проектор. □

Оператор $p_2 := I_+ - p_1$, очевидно, также является ограниченным проектором (I_+ — единичный оператор в $H^{1/2}(\Gamma)$) и действует по закону

$$p_2\varphi = \begin{cases} 0 & (\text{на } \Gamma_1), \\ \varphi_2 & (\text{на } \Gamma_2). \end{cases} \tag{3.11}$$

Эти рассуждения показывают, что при условии (3.5) имеет место прямое разложение:

$$H^{1/2}(\Gamma) = \widehat{H}^{1/2}(\Gamma_1)(\dot{+})\widehat{H}^{1/2}(\Gamma_2), \quad \widehat{H}^{1/2}(\Gamma_k) = p_k H^{1/2}(\Gamma), \quad k = 1, 2. \tag{3.12}$$

Таким образом, общий подход, примененный в теореме 3.1, является совершенно естественным для смешанных краевых задач.

Тем не менее форма (3.4) абстрактной формулы Грина не совсем естественна, так как в классическом случае, отвечающем разобранному выше простому примеру (3.5), (3.6), выражение

$$\langle \widehat{\gamma}_1 \eta, \widehat{\partial}_1 u\rangle_G = \int_\Gamma \eta \frac{\partial u}{\partial n}\, d\Gamma, \quad \eta = 0 \ \ (\text{на } \ \Gamma_2).$$

Но тогда интеграл справа лучше написать в виде

$$\int_{\Gamma_1} (\eta|_{\Gamma_1}) \Big(\frac{\partial u}{\partial n}\Big)_{\Gamma_1} d\Gamma_1,$$

а затем расширить его до выражения $\langle \gamma_1 \eta, \partial_1 u\rangle_{L_2(\Gamma_1)}$. Такие построения сейчас и будут проделаны.

Как следует из рассмотрения ряда задач математической физики, введенные выше проекторы p_k можно иногда представить в виде

$$p_k = \omega_k \rho_k, \quad k = \overline{1, q}, \tag{3.13}$$

где $\rho_k : G_+ \to (G_+)_k$ — абстрактный оператор сужения на часть границы, а $\omega_k : \ (G_+)_k \to \widehat{(G_+)}_k$ — *оператор продолжения нулем* из $(G_+)_k$ на $\widehat{(G_+)}_k \subset G_+$. Кроме того, будем предполагать, что

$$\rho_k \omega_k = (I_+)_k \quad (\text{в } \ (G_+)_k), \quad k = \overline{1, q}, \tag{3.14}$$

т. е. ω_k является правым обратным для ρ_k. Будем далее считать также, что ρ_k и ω_k — ограниченные операторы.

Из (3.13), (3.14) следует, что $p_k^2 = p_k$ и этот оператор p_k ограничен, т. е. он является ограниченным проектором.

Поясним общие свойства (3.13), (3.14) на примере, разобранном выше, см. (3.5)–(3.12). Введем оператор ρ_k по закону (см. (3.6))

$$\rho_k \varphi := \varphi|_{\Gamma_k} = \varphi_k \quad \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad k = 1, 2.$$

Введем еще операторы ω_k продолжения нулем на оставшуюся часть границы:

$$\omega_1 \varphi_1 := \begin{cases} \varphi_1 & (\text{на } \Gamma_1), \\ 0 & (\text{на } \Gamma_2), \end{cases} \qquad \omega_2 \varphi_2 := \begin{cases} 0 & (\text{на } \Gamma_1), \\ \varphi_2 & (\text{на } \Gamma_2). \end{cases}$$

Тогда очевидно, что $\omega_k \rho_k = p_k$, $k = 1, 2$ (см. (3.8), (3.11)) и, кроме того, выполнены свойства (3.14).

Заметим еще, что в силу связи $p_1 \varphi = \omega_1 \rho_1 \varphi = \omega_1 \varphi_1$ и оценки (3.9) будем иметь ограниченность оператора $\omega_1 : H^{1/2}(\Gamma_1) \to H^{1/2}(\Gamma)$ с той же константой (см. (3.9), (3.10)), и аналогично ограниченность оператора $\omega_2 : H^{1/2}(\Gamma_2) \to H^{1/2}(\Gamma)$.

Таким образом, если $d = \operatorname{dist}(\Gamma_1, \Gamma_2) > 0$, то в разобранном примере для тройки пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$ выполнены свойства (3.13), (3.14) с ограниченными операторами ω_k, а также ограниченными операторами, как выясняется, ρ_k (см. ниже лемму 3.2).

Возвращаясь к общим рассуждениям, сформулируем в виде теоремы основной абстрактный результат.

Теорема 3.2 (вторая формулировка абстрактной формулы Грина). *Пусть выполнены условия* (3.13), (3.14) *и сделанные при этом предположения. Тогда имеет место абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач в следующем виде*:

$$\langle \eta, Lu \rangle_E = (\eta, u)_F - \sum_{k=1}^{q} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{G_k} \quad \forall \eta, u \in F, \tag{3.15}$$

$$\gamma_k \eta := \rho_k \gamma \eta \in (G_+)_k, \quad \partial_k u := \omega_k^* \partial u \in (G_+)_k^*, \tag{3.16}$$

где γ_k — абстрактный оператор следа на часть границы области, а ∂_k — абстрактный оператор производной по внешней нормали, действующий на этой части границы.

Доказательство. Преобразуем слагаемое из суммы в правой части (3.2) с учетом (3.13), (3.14). Имеем

$$\langle \widehat{\gamma}_k \eta, \widehat{\partial}_k u \rangle_G = \langle p_k \gamma \eta, p_k^* \partial u \rangle_G = \langle p_k^2 \gamma \eta, \partial u \rangle_G = \langle p_k \gamma \eta, \partial u \rangle_G = \langle \omega_k \rho_k \gamma \eta, \partial u \rangle_G. \tag{3.17}$$

Так как по предположению ω_k — непрерывный оператор, то полученное выражение является линейным ограниченным функционалом относительно элементов вида $\rho_k \gamma \eta \in (G_+)_k$. Поэтому этот функционал можно представить по форме пространства G_k, $G = \bigoplus\limits_{k=1}^{q} G_k$, $(G_+)_k \hookrightarrow G_k \hookrightarrow (G_+)_k^*$, $k = \overline{1, q}$, в следующем виде:

$$\langle \omega_k \rho_k \gamma \eta, \partial u \rangle_G = \langle \rho_k \gamma \eta, \omega_k^* \partial u \rangle_{G_k} =: \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{G_k}, \quad \eta, u \in F. \tag{3.18}$$

Отсюда и следует формула Грина (3.15) с обозначениями (3.16). □

3.2. Классический пример. Вернемся снова к тройке пространств $E = L_2(\Omega)$, $F = H^1(\Omega)$, $G = L_2(\Gamma)$, $\Gamma := \partial\Omega$, оператору γ, $\gamma u := u|_\Gamma$ $\forall u \in H^1(\Omega)$, и будем считать, что Γ — липшицева граница области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$.

В этом случае норму в $H^1(\Omega)$ определяют эквивалентным образом по формуле

$$\|u\|_{H^1(\Omega)} := \inf\{\|\widehat{u}\|_{H^1(\mathbb{R}^m)} :\ \widehat{u}|_\Omega = u\}, \tag{3.19}$$

(см. [24, с. 147]), а в пространстве $H^s(\Gamma)$ — аналогично:

$$\|\varphi\|_{H^s(\Gamma)} := \inf\{\|\widehat{\varphi}\|_{H^s(\mathbb{R}^{m-1})} :\ \widehat{\varphi}|_\Gamma = \varphi\}, \quad |s| \leqslant 1. \tag{3.20}$$

(Точнее говоря, здесь вместо $\|\widehat{\varphi}\|_{H^s(\mathbb{R}^{m-1})}$ следует взять $\sum\limits_j \|\eta_j\widehat{\varphi}\|_{H^s(\mathbb{R}^{m-1})}$, где $\sum\limits_j \eta_j \equiv 1$ — конечное разбиение единицы на Γ, см., например, [24, с. 147], [5, с. 78-79]).

Разобъем теперь поверхность Γ на односвязные открытые части Γ_k, $k = \overline{1,q}$, с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$. Тогда аналогично (3.19), (3.20) нормы в пространствах $H^s(\Gamma_k)$ определяют по формуле

$$\|\psi_k\|_{H^s(\Gamma_k)} := \inf\{\|\widehat{\psi}\|_{H^s(\Gamma)} :\ \widehat{\psi}|_{\Gamma_k} = \psi_k\}, \quad |s| \leqslant 1. \tag{3.21}$$

Введем в рассмотрение ρ_k, оператор сужения с Γ на Γ_k по закону

$$\rho_k\varphi := \varphi|_{\Gamma_k} \quad \forall\varphi \in H^{1/2}(\Gamma). \tag{3.22}$$

Лемма 3.2. *Оператор ρ_k ограничен и*

$$\|\rho_k\|_{H^{1/2}(\Gamma)\to H^{1/2}(\Gamma_k)} \leqslant 1.$$

Доказательство. Оно следует непосредственно из определения нормы в $H^{1/2}(\Gamma)$ (см. (1.36)) и неравенства (3.7). □

Введем теперь подпространства

$$\begin{aligned} H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega) &:= \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \ \text{ на } \ \Gamma\setminus\Gamma_k\} = \\ &= \ker\gamma_{\Gamma\setminus\Gamma_k} = \ker((I_+ - \rho_k)\gamma), \quad k = \overline{1,q}. \end{aligned}$$

Поскольку

$$H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega) \supset H^1_0(\Omega) = \ker\gamma = \{u \in H^1(\Omega) : u = 0 \ \ (\text{на } \ \Gamma)\}$$

и $H^1_0(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$, то $H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$ при любом $k = \overline{1,q}$.

Введем также одно важное понятие, относящееся к возможности продолжения элементов из $H^s(\Gamma_k)$, $|s| \leqslant 1$, до элементов из $H^s(\Gamma)$. Оказывается, при сформулированных выше предположениях такое продолжение возможно многими способами, однако один из них является универсальным, и он предложен в работе [29] для случая, когда функции из $H^s(\Omega)$ продолжаются до функций из $H^s(\mathbb{R}^m)$. Как указано в работе [24], аналогичный факт имеет место и для продолжения функций из $H^s(\Gamma_k)$, $|s| \leqslant 1$, до функций из $H^s(\Gamma)$. При этом в обоих случаях оператор продолжения не зависит от s. Сформулируем итоговое утверждение в виде леммы, которая понадобится в дальнейшем.

Лемма 3.3 (см. В. С. Рычков [29], а также М. С. Агранович [24]). *Пусть липшицева граница $\Gamma = \partial\Omega$ области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ разбита на части Γ_k с липшицевыми границами $\partial\Gamma_k$, $k = \overline{1,q}$. Тогда существует линейный оператор $\mathcal{E}_k$ (оператор В. С. Рычкова) продолжения функций из $H^s(\Gamma_k)$ с Γ_k на всю Γ функциями из $H^s(\Gamma)$. При этом*

$$\|\mathcal{E}_k\psi_k\|_{H^s(\Gamma)} \leqslant\ c_k\|\psi_k\|_{H^s(\Gamma_k)} \ \ \forall\psi_k \in H^s(\Gamma_k), \ \ |s| \leqslant 1. \tag{3.23}$$

Введем еще одно важное понятие классов функций, заданных на Γ_k. Пусть $r(x)$, $x \in \Gamma_k$, — гладкая функция в $\overline{\Gamma}_k$, строго положительная в Γ_k, положительно определенная вне некоторой окрестности границы $\partial\Gamma_k$, а в окрестности этой границы эквивалентная (в смысле двусторонних оценок) расстоянию от точки x до $\partial\Gamma_k$.

Обозначим через $\widetilde{H}^s(\Gamma_k)$, $|s| \leqslant 1$, множество в $H^s(\Gamma)$, состоящее из (обобщенных) функций с носителем в $\overline{\Gamma}_k$. Как указано в [5, с. 76], $\widetilde{H}^s(\Gamma_k)$ — это пополнение множества функций из $C_0^\infty(\Gamma_k)$, продолженных нулем вне Γ_k, по норме $H^s(\Gamma)$.

Лемма 3.4. *Справедливо соотношение*

$$\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k) = \{u \in H^{1/2}(\Gamma_k) : r^{-1/2}u \in L_2(\Gamma_k)\}. \tag{3.24}$$

При этом следующая норма эквивалентна стандартной норме (которая наследуется из $H^{1/2}(\Gamma)$) на классе $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$:

$$\|u\|^2_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)} = \|u\|^2_{H^{1/2}(\Gamma_k)} + \|r^{-1/2}u\|^2_{L_2(\Gamma_k)}. \tag{3.25}$$

Доказательство. Оно проводится точно так же, как доказательство для [18, теорема 11.7, с. 85], с заменой обозначений $\Omega \mapsto \Gamma_k$, $H^{1/2}_{00}(\Omega) \mapsto \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$. □

Далее понадобится еще один важный факт.

Лемма 3.5. *При любом $s \in \mathbb{R}$, $|s| \leqslant 1$, пространства $\widetilde{H}^s(\Gamma_k)$ и $H^{-s}(\Gamma_k)$ дуальны относительно спаривания в $L_2(\Gamma_k)$. В частности,*

$$(H^{1/2}(\Gamma_k))^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k), \quad (\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k))^* = H^{-1/2}(\Gamma_k). \tag{3.26}$$

Доказательство. Оно аналогично доказательству для [5, теорема 5.1.12]. □

Опираясь на введенные понятия, рассмотрим полуторалинейную форму следующего вида:

$$[\varphi, \psi_k]_\Gamma := \langle \varphi, \mathcal{E}_k\psi_k\rangle_{L_2(\Gamma)} \quad \forall\varphi \in H^{1/2}(\Gamma) \quad \forall\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k),$$

где $\mathcal{E}_k\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma) = (H^{1/2}(\Gamma))^*$ (см. (1.39)). Из (3.23) следует оценка

$$|\,[\varphi, \psi_k]_\Gamma\,| \leqslant c_k\,\|\psi_k\|_{H^{-1/2}(\Gamma_k)}\|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \quad \varphi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k).$$

Пусть теперь $\varphi = \gamma\eta$, $\eta \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$, т. е. $\gamma\eta = 0$ на $\Gamma \setminus \Gamma_k$. Тогда можно проверить, что

$$\langle \gamma\eta, \mathcal{E}_k\psi_k\rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle \varphi, \mathcal{E}_k\psi_k\rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle \rho_k\varphi, \psi_k\rangle_{L_2(\Gamma_k)} = \langle \rho_k\gamma\eta, \psi_k\rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \tag{3.27}$$

где ρ_k — оператор сужения (3.22), а справа стоит расширение по непрерывности скалярного произведения в $L_2(\Gamma_k)$ на элементы $\rho_k\varphi = \gamma_k\eta$, $\eta \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$, $\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$, т. е. функционал по форме $L_2(\Gamma_k)$.

Отметим, что при выбранном $\varphi = \gamma\eta$, $\eta \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$, правая часть в (3.27) не зависит от способа продолжения элемента $\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$ до элемента $\widehat{\psi}_k := \mathcal{E}_k\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma)$, а определяется лишь значениями этой (обобщенной) функции ψ_k, сосредоточенной на Γ_k.

Рассмотрим теперь вспомогательную смешанную краевую задачу вида

$$w - \Delta w = 0 \ \text{ (в } \Omega), \ w = 0 \ \text{ (на } \Gamma \setminus \Gamma_k), \ \frac{\partial w}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} = \psi_k \ \text{ (на } \Gamma_k), \tag{3.28}$$

связанную, как будет видно ниже, с одной из форм обобщенной формулы Грина для оператора Лапласа.

Слабым решением задачи (3.28) назовем такую функцию $w \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$, для которой при любой $\eta \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$ выполнено тождество (см. (3.27))

$$(\eta, w)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_k\eta, \psi_k\rangle_{L_2(\Gamma_k)}, \ \ \psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \ \ \gamma_k\eta := \rho_k\gamma\eta. \tag{3.29}$$

Нетрудно видеть, что классическое решение задачи (3.28) является слабым решением в смысле определения (3.29).

Лемма 3.6. *Задача* (3.28) *имеет слабое решение w тогда и только тогда, когда выполнено условие $\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$. При этом*

$$w \in H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega) \cap H^1_h(\Omega) =: H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega).$$

Доказательство. Оно традиционно и основано на соотношении (3.27) с учетом леммы 3.2 и теоремы Гальярдо, второго соотношения (3.26), а также свойства $\gamma_k\eta \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ для элементов η из $H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega)$. □

Из этой леммы следует, что оператор $\widetilde{T}_k$, сопоставляющий элементу $\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$ решение $w = \widetilde{T}_k\psi_k$ задачи (3.28), ограниченно действует из $H^{-1/2}(\Gamma_k)$ на $H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)$. Полагая в (3.29) $\eta \in H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)$, будем иметь тождество

$$(\eta, \widetilde{T}_k\psi_k)_{H^1(\Omega)} = \langle \gamma_k\eta, \psi_k\rangle_{L_2(\Gamma_k)} \quad \forall\eta \in H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega), \quad \forall\psi_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \tag{3.30}$$

Здесь, по построению, элементы вида $\widetilde{\varphi}_k := \gamma_k w$, $w \in H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)$, обладают следующими свойствами: во-первых, они принадлежат пространству $H^{1/2}(\Gamma_k)$, а во-вторых, — продолженные нулем с Γ_k на всю Γ, они принадлежат $H^{1/2}(\Gamma)$. Кроме того, очевидно, что между элементами $\widetilde{\varphi}_k = \gamma_k w$ и w имеется взаимно однозначное соответствие.

Отсюда приходим к следующему представлению:

$$\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k) := \{\widetilde{\varphi}_k = \gamma_k w : w \in H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)\} \subset H^{1/2}(\Gamma_k). \tag{3.31}$$

Лемма 3.7. *Множество $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ плотно в $L_2(\Gamma_k)$.*

Доказательство. Оно проводится от противного с использованием тождества (3.30), см. [12]. □

Введем в рассмотрение оператор Стеклова $\widetilde{C}_k$ (иногда его называют оператором Пуанкаре—Стеклова, см. [1, 17, 19]), который сопоставляет слабому решению w_k задачи (3.28) его след на Γ_k:

$$\widetilde{C}_k\psi_k := \gamma_k w_k, \quad \widetilde{C}_k := \gamma_k\widetilde{T}_k : H^{-1/2}(\Gamma_k) \to \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k). \tag{3.32}$$

По построению между $\mathcal{D}(\widetilde{C}_k) = H^{-1/2}(\Gamma_k)$ и областью значений $\mathcal{R}(\widetilde{C}_k) = \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ имеет место взаимно однозначное соответствие. Учитывая этот факт, а также изоморфизм между $H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)$ и $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, введем на $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ структуру гильбертова пространства, полагая

$$(\alpha, \beta)_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)} := (\eta, u)_{H^1(\Omega)}, \ \ \eta, u \in H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega), \ \ \gamma_k\eta = \alpha, \ \ \gamma_k u = \beta.$$

С учетом определения (3.31) и тождества (3.30) это соотношение можно переписать в виде

$$(\alpha, \beta)_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)} = (\eta, w)_{H^1(\Omega)} = \langle \alpha, \widetilde{C}_k^{-1}\beta\rangle_{L_2(\Gamma_k)} \quad \forall\alpha, \beta \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),$$

$$\eta = \widetilde{T}_k\zeta_k, \ \gamma_k\eta = \alpha, \ w = \widetilde{T}_k\psi_k, \ \gamma_k\widetilde{T}_k\psi_k = \widetilde{C}_k\psi_k = \beta, \ \psi_k, \ \zeta_k \in H^{-1/2}(\Gamma_k).$$

Лемма 3.8. *Оператор $\widetilde{C}_k^{-1} = (\gamma_k\widetilde{T}_k)^{-1}$ с областью определения $\mathcal{D}(\widetilde{C}_k^{-1}) = \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ и областью значений $\mathcal{R}(\widetilde{C}_k^{-1}) = \mathcal{D}(\widetilde{C}_k) = H^{-1/2}(\Gamma_k)$ является оператором гильбертовой пары $(\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k); L_2(\Gamma_k))$.*

Доказательство. Оно основано на неравенствах

$$\begin{gathered} \|\widetilde{\varphi}\|_{L_2(\Gamma_k)} \leqslant \|\widetilde{\varphi}\|_{H^{1/2}(\Gamma_k)} \leqslant \|\widehat{\varphi}\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant c_1\|w\|_{H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)} = c_1\|\widetilde{\varphi}\|_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)}, \\ \widetilde{\varphi} = \gamma_k w, \ \ w \in H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega), \ \ \widetilde{\varphi} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k), \quad \gamma w = \widehat{\varphi}, \end{gathered} \tag{3.33}$$

где $\widehat{\varphi}$ — продолженная нулем на $\Gamma \setminus \Gamma_k$ функция $\widetilde{\varphi} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, лемме 3.7 и неравенстве (1.38). □

Таким образом, задаче (3.28) отвечает оснащение (см. (3.26))

$$\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k) \hookrightarrow L_2(\Gamma_k) \hookrightarrow H^{-1/2}(\Gamma_k).$$

Отметим еще, что норма в $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ «сильнее» стандартной нормы в $H^{1/2}(\Gamma_k)$, что следует из (3.33) (см. (3.25)):

$$\|\widetilde{\varphi}\|_{H^{1/2}(\Gamma_k)} \leqslant c_1\|\widetilde{\varphi}\|_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)} \ \ \forall\widetilde{\varphi} \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k) \subset H^{1/2}(\Gamma_k).$$

Опираясь на доказанные факты, введем на элементах из $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ оператор ω_k продолжения нулем на $\Gamma \setminus \Gamma_k$, действующий по закону

$$\omega_k\widetilde{\varphi}_k := \begin{cases} \widetilde{\varphi}_k & (\text{на } \Gamma_k), \\ 0 & (\text{на } \Gamma \setminus \Gamma_k) \end{cases} \qquad \forall\widetilde{\varphi}_k \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k).$$

Лемма 3.9. *Оператор ω_k продолжения нулем с Γ_k на Γ, рассматриваемый на области определения $\mathcal{D}(\omega_k) := \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, является непрерывным оператором из $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ в $H^{1/2}(\Gamma)$; при этом*

$$\|\omega_k\widetilde{\varphi}_k\|_{H^{1/2}(\Gamma)} \leqslant c_1\|\widetilde{\varphi}_k\|_{\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)} \ \ \forall\widetilde{\varphi}_k \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k), \tag{3.34}$$

где $c_1 > 0$ — константа из неравенства (1.29) (*теорема Гальярдо*).

Доказательство. Этот факт уже установлен при выводе неравенств (3.33) с той же константой c_1. В самом деле, в (3.33) $\widehat{\varphi} = \omega_k\widetilde{\varphi}_k$, откуда и следует (3.34). □

Отметим здесь следующее важное обстоятельство. Как известно (см. [18, с. 78], а также [9, с. 116-117]), даже в случае гладкой Γ оператор продолжения нулем с некоторой части $\Gamma_k \subset \Gamma$ (с гладкой $\partial\Gamma_k$) на всю Γ не является непрерывным из $H^{1/2}(\Gamma_k)$ на $H^{1/2}(\Gamma)$. Однако в данном случае, т. е. на решениях w вспомогательной задачи (3.28) на элементах $\gamma_k w$, $w \in H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)$, этот оператор оказывается непрерывным.

Введем теперь следующие классы функций:

$$\widehat{H}^{1/2}(\Gamma) := \{\varphi \in H^{1/2}(\Gamma) : \rho_k\varphi \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k), \ \ k = \overline{1,q}\} \subset H^{1/2}(\Gamma), \tag{3.35}$$

$$\begin{aligned} &\widehat{H}^1(\Omega) := H^1_0(\Omega) \oplus \{(\dot{+})^q_{k=1} H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)\} \subset H^1(\Omega), \\ &H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega) = H^1_h(\Omega) \cap H^1_{0,\Gamma\setminus\Gamma_k}(\Omega). \end{aligned} \tag{3.36}$$

Назовем след γu элемента $u \in H^1(\Omega)$ *регулярным следом первого типа* (порожденным задачами вида (3.28)) по отношению к разбиению $\Gamma = \partial\Omega$ на части Γ_k, $k = \overline{1,q}$, если для любого k элемент $\gamma_k u = \rho_k\gamma u \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$, т. е. он продолжи́м нулем на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$.

Согласно проведенным выше построениям и определениям (3.35), (3.36), элементы из $\widehat{H}^1(\Omega)$ имеют регулярный след первого типа: для любого $u \in \widehat{H}^1(\Omega)$ имеем

$$u = u_0 + u_1 + \ldots + u_q, \ \ u_0 \in H^1_0(\Omega), \ \ u_k \in H^1_{h,\Gamma_k}(\Omega), \ \ k = \overline{1,q},$$

$$\gamma u_0 = 0, \ \ \gamma_k u_k =: \widetilde{\varphi}_k \in \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k), \ \ \gamma_k u_j = 0 \ (k \neq j), \ \ j,k = \overline{1,q}.$$

При этом элементы $\gamma u \in \widehat{H}^{1/2}(\Gamma)$ имеют сужения на Γ_k, продолжимые нулем на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$.

Рассмотрим теперь следующую тройку пространств и оператор следа:

$$E = L_2(\Omega), \ \ F = \widehat{H}^1(\Omega), \ G = L_2(\Gamma), \ \Gamma := \partial\Omega, \ \gamma u := u|_\Gamma, \ u \in \widehat{H}^1(\Omega).$$

Нетрудно видеть, что для них выполнены следующие свойства:

1. $\widehat{H}^1(\Omega)$ плотно в $L_2(\Omega)$ и
$$\|u\|_{L_2(\Omega)} \leqslant c\|u\|_{H^1(\Omega)} = c\|u\|_{\widehat{H}^1(\Omega)} \ \ \forall u \in \widehat{H}^1(\Omega),$$
2. Оператор $\gamma : \widehat{H}^1(\Omega) \to \widehat{H}^{1/2}(\Gamma)$ ограничен, $\widehat{H}^{1/2}(\Gamma)$ плотно в $L_2(\Gamma)$ и (по теореме С. Л. Соболева о следах)
$$\|\gamma u\|_{L_2(\Gamma)} \leqslant \widehat{c}\,\|u\|_{H^1(\Omega)} \ \ \forall u \in \widehat{H}^1(\Omega),$$
3. Пространство $H^1_0(\Omega) = \ker\gamma$ плотно в $L_2(\Omega)$ и имеет место неравенство Фридрихса (см. (1.9)).
4. Для каждого $k = \overline{1,q}$ оператор $p_k = \omega_k\rho_k$ в силу лемм 3.2 и 3.9 является ограниченным проектором в пространстве $G_+ := \widehat{H}^{1/2}(\Gamma)$, а оператор $\rho_k\omega_k$ по построению является единичным оператором в $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k) =: (G_+)_k$.

Поэтому по теореме 3.2 приходим к следующему выводу.

Теорема 3.3. *Для тройки пространств $L_2(\Omega)$, $\widehat{H}^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma = \partial\Omega$, и оператора следа $\gamma : \widehat{H}^1(\Omega) \to L_2(\Gamma)$, $\gamma\eta := \eta|_\Gamma$, $\eta \in \widehat{H}^1(\Omega)$, в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей Γ, разбитой* *на части* Γ_k *с липшицевыми границами* $\partial\Gamma_k$, $k=\overline{1,q}$, *справедлива следующая формула Грина для смешанных краевых задач*:

$$\begin{gathered}\langle\eta, u-\Delta u\rangle_{L_2(\Omega)}=(\eta,u)_{H^1(\Omega)}-\sum_{k=1}^{q}\langle\gamma_k\eta,\partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)}\quad\forall\eta,u\in\widehat{H}^1(\Omega),\\ u-\Delta u\in(\widehat{H}^1(\Omega))^*,\gamma_k\eta:=\eta|_{\Gamma_k}\in\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),\ \ \partial_k u:=\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k}\in H^{-1/2}(\Gamma_k),\ \ k=\overline{1,q}.\end{gathered}\tag{3.37}$$

□

3.3. Более общая формулировка абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач. Вторая формулировка абстрактной формулы Грина, выраженная теоремой 3.2, не всегда отражает те классы смешанных краевых задач, которые встречаются в приложениях. Именно, оператор ω_k продолжения нулем с $(G_+)_k$ на $\widehat{(G_+)}_k$, как было видно из рассмотрений пункта 3.2, полезно использовать в случаях, когда куски Γ_k границы $\Gamma=\partial\Omega$ расположены на положительном расстоянии либо когда на разных кусках границы задают краевые условия Дирихле с функциями класса $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$. Поэтому целесообразно получить другую форму абстрактной формулы Грина с тем, чтобы в приложениях можно было использовать и краевые условия Неймана или Ньютона.

Переходя к рассмотрению этого вопроса в абстрактной форме, снова будем считать, что имеют место оснащения

$$(G_+)_k\hookrightarrow G_k\hookrightarrow(G_+)_k^*,\quad k=\overline{1,q},\quad G=\bigoplus_{k=1}^{q}G_k,\tag{3.38}$$

а операторы проектирования $p_k:G_+\to\widehat{(G_+)}_k$ представляются в виде (3.13), (3.14):

$$p_k=\omega_k\rho_k,\quad k=\overline{1,q},\quad \rho_k\omega_k=(I_+)_k,\quad k=\overline{1,q},\quad \sum_{k=1}^{q}p_k=I_+,\tag{3.39}$$

где $(I_+)_k$ — единичный оператор в $(G_+)_k$. При этом ρ_k — оператор сужения с G_+ на $(G_+)_k$, а ω_k — оператор продолжения с $(G_+)_k$ на $\widehat{(G_+)}_k$, но *не обязательно нулем*. Предполагается также, что $\rho_k:G_+\to(G_+)_k$ и $\omega_k:\ (G_+)_k\to\widehat{(G_+)}_k$ — непрерывные операторы.

Заметим, что в сформулированных предположениях сопряженный оператор

$$p_k^*=\rho_k^*\omega_k^*,\quad \rho_k^*:(G_+)_k^*\to(G_+)^*,\quad \omega_k^*:\widehat{(G_+)}_k^{\,*}\to(G_+)_k^*,\quad k=\overline{1,q},\tag{3.40}$$

где ρ_k^* и ω_k^* — ограниченные операторы, причем здесь ω_k^* — оператор сужения с $\widehat{(G_+)}_k^{\,*}$ на $(G_+)_k^*$, а ρ_k^* — оператор продолжения с $(G_+)_k^*$ на $(G_+)^*$.

Теорема 3.4 (общий вид абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач)**.** *Пусть выполнены условия, обеспечивающие существование абстрактной формулы Грина в форме* (1.10)*, т. е. условия* (1.4)–(1.6). *Пусть также выполнены условия* (3.38) *и условия* (3.39) *либо* (3.40). *Тогда имеет место абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач в форме* (3.15)*,* (3.16):

$$\begin{gathered}\langle\eta,Lu\rangle_E=(\eta,u)_F-\sum_{k=1}^{q}\langle\gamma_k\eta,\partial_k u\rangle_{G_k}\quad\forall\eta,u\in F.\\ \gamma_k\eta:=\rho_k\gamma\eta\in(G_+)_k,\quad \partial_k u:=\omega_k^*\partial u\in(G_+)_k^*,\end{gathered}$$

где ρ_k *и* ω_k^* — *операторы со свойствами* (3.39)*,* (3.40).

Доказательство. Если выполнены условия (3.39), то доказательство полностью повторяет вывод формул (3.17), (3.18).

Если же выполнены условия (3.40), то имеем

$$\langle\gamma\eta,\partial u\rangle_G=\langle\gamma\eta,\Big(\sum_{k=1}^{q}p_k^*\Big)\partial u\rangle_G=\sum_{k=1}^{q}\langle\gamma\eta,p_k^*\partial u\rangle_G=$$
$$=\sum_{k=1}^{q}\langle\gamma\eta,\rho_k^*\omega_k^*\partial u\rangle_G=\sum_{k=1}^{q}\langle\rho_k\gamma\eta,\omega_k^*\partial u\rangle_{G_k}=:\sum_{k=1}^{q}\langle\gamma_k\eta,\partial_k u\rangle_{G_k},\quad \eta,u\in F.$$

□

3.4. Другие приложения к классической тройке гильбертовых пространств. Построения, приведшие к формуле Грина (3.37), были непосредственно связаны с решениями вспомогательной задачи (3.28) с однородным условием Дирихле на части $\Gamma\backslash\Gamma_k$ границы $\Gamma=\partial\Omega$. Напомним, что при этом

$$\gamma_k\eta=\eta|_{\Gamma_k}\in\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k),\quad \partial_k u=\frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k}\in H^{-1/2}(\Gamma_k),\quad k=\overline{1,q},\quad \eta,u\in\widehat{H}^1(\Omega).$$

Аналогичные построения с однородным граничным условием Неймана на части Γ приводят к иной формуле Грина.

Переходя к изучению этого вопроса, рассмотрим вспомогательную задачу Неймана

$$w-\Delta w=0\ \ (\text{в }\ \Omega),\quad \frac{\partial w}{\partial n}=\psi_k\ \ (\text{на }\ \Gamma_k),\quad \frac{\partial w}{\partial n}=0\ \ (\text{на }\ \Gamma\backslash\Gamma_k),\tag{3.41}$$

а также соответствующую задачу Зарембы

$$w-\Delta w=0\ \ (\text{в }\ \Omega),\quad w=\varphi_k\ \ (\text{на }\ \Gamma_k),\quad \frac{\partial w}{\partial n}=0\ \ (\text{на }\ \Gamma\backslash\Gamma_k).\tag{3.42}$$

Слабым решением задачи (3.41) назовем функцию $w\in H^1(\Omega)$, для которой выполнено тождество

$$(\eta,w)_{H^1(\Omega)}=\langle\gamma_k\eta,\psi_k\rangle_{L_2(\Gamma_k)}\quad\forall\eta\in H^1(\Omega).\tag{3.43}$$

Теорема 3.5. *Задача Неймана* (3.41) *тогда и только тогда имеет слабое решение* $w=:T_k\psi_k\in H_h^1(\Omega)$, *когда выполнено условие*

$$\psi_k\in\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k).\tag{3.44}$$

Задача Зарембы (3.42) *имеет слабое решение* $w=:\gamma_k^{-1}\varphi_k\in H_h^1(\Omega)$ *тогда и только тогда, когда выполнено условие*

$$\varphi_k\in H^{1/2}(\Gamma_k).\tag{3.45}$$

Доказательство. Заметим сначала, что условия (3.44), (3.45) необходимы для разрешимости задач (3.41), (3.42). В самом деле, если $w\in H_h^1(\Omega)\subset H^1(\Omega)$, то по теореме Гальярдо (см. пункт 1.2) $\gamma w:=w|_\Gamma\in H^{1/2}(\Gamma)$, а потому, как следует из определения нормы в пространстве $H^{1/2}(\Gamma_k)$ (см. (1.36)), $\varphi_k:=w|_{\Gamma_k}\in H^{1/2}(\Gamma_k)$, т. е. выполнено условие (3.45). Далее, для $w\in H_h^1(\Omega)\subset H^1(\Omega)$ аналогично получаем (см. (1.59)), что $(\partial w/\partial n)_\Gamma\in H^{-1/2}(\Gamma)$, а потому, согласно (3.21), $(\partial w/\partial n)_{\Gamma_k}=:\ \psi_k\in H^{-1/2}(\Gamma_k)$. Более того, в силу постановки задачи (3.41), $(\partial w/\partial n)_{\Gamma_k}$ должно быть продолжено нулем до $(\partial w/\partial n)_\Gamma$ в классе $H^{-1/2}(\Gamma)$, т. е. должно выполняться условие (3.44) (см. первую формулу (3.26)).

Докажем теперь, что условия (3.44), (3.45) достаточны для разрешимости (3.41), (3.42) соответственно.

Представим решение задачи Зарембы (3.42) в виде $w=w_1+w_2$. Предварительно продолжим с помощью оператора В. С. Рычкова $\mathcal{E}_k$ функцию $\varphi_k\in H^{1/2}(\Gamma_k)$ на всю Γ в классе $H^{1/2}(\Gamma)$, т. е. введем согласно лемме 3.3

$$\varphi:=\mathcal{E}_k\varphi_k\in H^{1/2}(\Gamma),\quad \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}=\|\mathcal{E}_k\varphi_k\|_{H^{1/2}(\Gamma)}\leqslant c_k\|\varphi_k\|_{H^{1/2}(\Gamma_k)}.$$

Далее будем считать, что φ есть след на Γ функции w_1, которая является решением задачи Дирихле:

$$w_1-\Delta w_1=0\ \ (\text{в }\ \Omega),\quad w_1=\varphi=\mathcal{E}_k\varphi_k\ \ (\text{на }\ \Gamma).$$

Тогда решение w_1 этой задачи существует, единственно и выражается формулой

$$w_1 = \gamma_M^{-1} \mathcal{E}_k \varphi_k \in H_h^1(\Omega),$$

где оператор γ_M^{-1} ограниченно действует из $H^{1/2}(\Gamma)$ на $H_h^1(\Omega)$.

Для функции $w_2 := w - w_1$ возникает краевая задача

$$w_2 - \Delta w_2 = 0 \ \text{(в } \Omega), \quad w_2 = 0 \ \text{(на } \Gamma_k), \quad \frac{\partial w_2}{\partial n} = -\frac{\partial w_1}{\partial n} \ \text{(на } \Gamma \backslash \Gamma_k), \tag{3.46}$$

которая уже исследована выше (см. (3.28)). В самом деле, так как $w_1 \in H^1(\Omega)$, то $(\partial w_1/\partial n)_\Gamma \in H^{-1/2}(\Gamma)$, а потому $(\partial w_1/\partial n)_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k)$. По лемме 3.6 получаем, что задача (3.46) имеет единственное слабое решение

$$w_2 \in H_{h,\Gamma_k}^1(\Omega), \quad w_2 = T_k(-\partial w_1/\partial n)_{\Gamma_k}.$$

Итак, условие (3.45) не только необходимо, но и достаточно, чтобы задача Зарембы (3.42) имела единственное слабое решение.

Пусть теперь $\psi_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)$. Докажем, что существует единственное слабое решение $w \in H_h^1(\Omega)$ задачи Неймана (3.41).

Опираясь на доказанные утверждения, а также на очевидное неравенство

$$\begin{gathered} |\langle \varphi_k, \psi_k \rangle|_{L_2(\Gamma_k)} \leqslant \|\varphi_k\|_{H^{1/2}(\Gamma_k)} \cdot \|\psi_k\|_{\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)} \leqslant \|\psi_k\|_{\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)} \cdot \|\varphi\|_{H^{1/2}(\Gamma)}, \\ \forall \varphi \in H^{1/2}(\Gamma), \quad \varphi_k = \rho_k \varphi = \varphi|_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k), \quad \|\rho_k\| = 1, \end{gathered} \tag{3.47}$$

докажем, что при $\psi_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)$ задача Неймана (3.41) имеет единственное решение $w \in H_h^1(\Omega)$.

В самом деле, ее слабое решение определяется из тождества (3.43). Так как при любом $\eta \in H^1(\Omega)$ правая часть в (3.43) в силу свойств $\gamma\eta \in H^{1/2}(\Gamma)$, $\rho_k \gamma \eta = \gamma_k \eta =: \varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_k)$ и неравенства (3.47) является линейным ограниченным функционалом в $H^1(\Omega)$, то имеет место тождество (3.43). Тогда

$$w =: T_k \psi_k, \quad T_k \in \mathcal{L}(\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k);\, H_h^1(\Omega)).$$

□

Опираясь на утверждения теоремы 3.5, введем, как и выше (см. (3.28), (3.32)), оператор Стеклова, который сопоставляет решению w задачи Неймана (3.41) его след на Γ_k:

$$\varphi_k = \gamma_k T_k \psi_k =: C_k \psi_k, \quad \psi_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k), \quad \varphi_k \in H^{1/2}(\Gamma_k).$$

Пусть η и w — два решения задачи Неймана (3.41), отвечающие соответственно элементам ζ_k и ψ_k из $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)$, причем $\eta|_{\Gamma_k} = \xi_k$, $w|_{\Gamma_k} = \varphi_k$. Тогда, исходя из определения (3.43) слабого решения задачи Неймана, легко видеть, что

$$\langle \xi_k, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)} = \langle \xi_k, C_k^{-1} \varphi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)} = (\eta, w)_{H^1(\Omega)}, \tag{3.48}$$

откуда следует, что C_k^{-1} — оператор гильбертовой пары $(H^{1/2}(\Gamma_k); L_2(\Gamma_k))$,

$$\mathcal{D}(C_k^{-1}) = \mathcal{R}(C_k) = H^{1/2}(\Gamma_k), \quad \mathcal{R}(C_k^{-1}) = \mathcal{D}(C_k) = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k). \tag{3.49}$$

Будем далее говорить, что если выполнены условия (3.48), (3.49), то пространства $H^{1/2}(\Gamma_k)$ и $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)$ дуальны по задаче Неймана (3.41) либо задаче Зарембы (3.42).

Аналогичное утверждение о дуальности справедливо и для задачи (3.28)-(3.29), т. е.

$$w - \Delta w = 0 \ \text{(в } \Omega), \ \ \frac{\partial w}{\partial n} = \psi_k \ \text{(на } \Gamma_k), \ \ w = 0 \ \text{(на } \Gamma \setminus \Gamma_k), \tag{3.50}$$

и соответствующей задачи Дирихле:

$$w - \Delta w = 0 \ \text{(в } \Omega), \ \ w = \widetilde{\varphi}_k \ \text{(на } \Gamma_k), \ \ w = 0 \ \text{(на } \Gamma \setminus \Gamma_k). \tag{3.51}$$

Здесь, как показали проведенные выше рассмотрения, возникает оператор Стеклова $\widetilde{C}_k := \gamma_k \widetilde{T}_k$, гильбертова пара пространств $(\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k); L_2(\Gamma_k))$, а также соотношения

$$\begin{gathered} \langle \widetilde{\xi}_k, \psi_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)} = \langle \zeta_k, \widetilde{C}_k^{-1} \widetilde{\varphi}_k \rangle_{L_2(\Gamma_k)} = (\eta, w)_{H^1(\Omega)}, \\ \mathcal{D}(\widetilde{C}_k^{-1}) = \mathcal{R}(\widetilde{C}_k) = \widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k), \quad \mathcal{R}(\widetilde{C}_k^{-1}) = \mathcal{D}(\widetilde{C}_k) = H^{-1/2}(\Gamma_k), \end{gathered}$$

а η и w — соответствующие решения задач (3.50) либо (3.51). Таким образом, пространства $\widetilde{H}^{1/2}(\Gamma_k)$ и $H^{-1/2}(\Gamma_k)$ дуальны по задачам (3.50), (3.51).

Отметим, наконец, и такой очевидный факт: пространства $H^{1/2}(\Gamma)$ и $H^{-1/2}(\Gamma)$ дуальны по задаче Неймана

$$w - \Delta w = 0 \ \text{(в } \Omega), \ \ \frac{\partial w}{\partial n} = \psi \ \text{(на } \Gamma) \tag{3.52}$$

и соответствующей задаче Дирихле

$$w - \Delta w = 0 \ \text{(в } \Omega), \ \ w = \varphi \ \text{(на } \Gamma), \tag{3.53}$$

причем связь между ψ и φ дается классическим оператором Стеклова:

$$\varphi = C\psi, \ \xi = C\zeta, \ \mathcal{D}(C^{-1}) = \mathcal{R}(C) = H^{1/2}(\Gamma), \ \mathcal{R}(C^{-1}) = \mathcal{D}(C) = H^{-1/2}(\Gamma),$$
$$\langle \xi, \psi \rangle_{L_2(\Gamma)} = \langle \zeta, C^{-1}\varphi \rangle_{L_2(\Gamma)} = (\eta, w)_{H^1(\Omega)}, \quad \eta, w \in H^1_h(\Omega). \tag{3.54}$$

Опираясь на установленные факты, приведем примеры операторов проектирования в пространствах $H^{1/2}(\Gamma)$, $H^{-1/2}(\Gamma)$, а также их представления в виде (3.39) и (3.40), использованные при доказательстве общей теоремы 3.4. Эти примеры основаны на результатах рассмотрения вспомогательных краевых задач, изученных выше.

Как и ранее, будем считать, что липшицева граница $\Gamma = \partial\Omega$ разбита на части Γ_k с липшицевыми $\partial\Gamma_k$, $k = \overline{1,q}$. Введем ограниченные операторы $\rho_k : H^{1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma_k)$ (лемма 3.2) сужения функции из $H^{1/2}(\Gamma)$ на $H^{1/2}(\Gamma_k)$, $\|\rho_k\| \leqslant 1$, а также его сопряженный

$$\rho_k^* : (H^{1/2}(\Gamma_k))^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k) \to (H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma),$$

который является ограниченным оператором *продолжения нулем*:

$$\rho_k^*\psi_k =: \widehat{\psi}_k := \begin{cases} \psi_k & \text{(на } \Gamma_k), \\ 0 & \text{(на } \Gamma\backslash\Gamma_k), \end{cases} \qquad \psi_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k). \tag{3.55}$$

Введем еще ограниченный оператор продолжения

$$\omega_k : H^{1/2}(\Gamma_k) \to H^{1/2}(\Gamma),$$

например, оператор В. С. Рычкова (см. лемму 3.3) $\omega_k = \mathcal{E}_k$. Тогда

$$\omega_k^* : (H^{1/2}(\Gamma))^* = H^{-1/2}(\Gamma) \to (H^{1/2}(\Gamma_k))^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)$$

— ограниченный оператор сужения.

Введем, наконец, пространство

$$\breve{H}^{-1/2}(\Gamma) := (\dot{+})_{k=1}^{q} \breve{H}^{-1/2}(\Gamma_k) \subset H^{-1/2}(\Gamma), \tag{3.56}$$
$$\breve{H}^{-1/2}(\Gamma_k) := \{\widehat{\psi}_k = \rho_k^*\psi_k : \psi_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)\} \subset H^{-1/2}(\Gamma),$$

а также ограниченные операторы

$$p_k^* = \rho_k^*\omega_k^* : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{-1/2}(\Gamma).$$

Очевидно, операторы p_k^* обладают свойствами

$$\omega_k^*\rho_k^*\psi_k = \psi_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)\}, \quad k = \overline{1,q}, \tag{3.57}$$

и потому в пространстве $\breve{H}^{-1/2}(\Gamma)$ имеем

$$p_k^* = (p_k^*)^2, \quad p_k^*p_j^* = 0 \ \ (k \neq j), \quad \sum_{k=1}^{q} p_k^* = (\breve{I}_-), \tag{3.58}$$

где $\breve{I}_-$ — единичный оператор в $\breve{H}^{-1/2}(\Gamma)$.

Таким образом, для пространства $\breve{H}^{-1/2}(\Gamma)$ выполнены общие требования (3.38)–(3.40), где

$$(G_+)_k = H^{1/2}(\Gamma_k), \quad G_k = L_2(\Gamma_k), \quad (G_+)_k^* = \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k), \quad k = \overline{1,q}.$$

Приведем теперь более сложный пример оператора проектирования, относящийся к пространству $H^{1/2}(\Gamma)$. Пусть

$$\varphi \in \breve{H}^{1/2}(\Gamma) := C\breve{H}^{-1/2}(\Gamma) \subset H^{1/2}(\Gamma), \tag{3.59}$$

где $C : H^{-1/2}(\Gamma) \to H^{1/2}(\Gamma)$ — оператор Стеклова, возникающий в задаче (3.52) (см. также (3.53)–(3.54)). Тогда $\psi = C^{-1}\varphi \in \breve{H}^{-1/2}(\Gamma)$ и потому $\psi_k := \widehat{\psi}|_{\Gamma_k} = \omega_k^*\psi$ и $\widehat{\psi}_k := \rho_k^*\psi_k$ (см. (3.55)).

Решая теперь задачу Неймана (3.52) с $\psi = \widehat{\psi}_k$, а затем находя след слабого решения w этой задачи на Γ, получаем

$$w|_\Gamma = C\widehat{\psi}_k = C\rho_k^*\omega_k^*C^{-1}\varphi =: p_k\varphi \in \breve{H}^{1/2}(\Gamma), \quad k = \overline{1,q}. \tag{3.60}$$

Таким образом, оператор p_k действует в пространстве $\breve{H}^{1/2}(\Gamma) \subset H^{1/2}(\Gamma)$. Можно формально считать, что

$$\begin{aligned} &p_k = \widetilde{\omega}_k\widetilde{\rho}_k, \quad \widetilde{\rho}_k := \omega_k^*C^{-1}, \quad \widetilde{\omega}_k := C\rho_k^*, \\ &\widetilde{\rho}_k : \breve{H}^{1/2}(\Gamma) \to \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k), \quad \widetilde{\omega}_k : \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k) \to \breve{H}^{1/2}(\Gamma), \end{aligned} \tag{3.61}$$

$\widetilde{\rho}_k\widetilde{\omega}_k = \widetilde{\omega}_k^*\widetilde{\rho}_k^*$ — единичный оператор в $\widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k)$ (см. (3.57)). Наконец, выполнены свойства

$$(p_k)^2 = C\rho_k^*(\omega_k^*\rho_k^*)\omega_k^*C^{-1} = C\rho_k^*\omega_k^*C^{-1} = p_k, \quad k = \overline{1,q},$$

а также условие

$$\sum_{k=1}^{q} p_k = C\Big(\sum_{k=1}^{q}\rho_k^*\omega_k^*\Big)C^{-1} = \breve{I}_+,$$

где $\breve{I}_+$ — единичный оператор в пространстве $\breve{H}^{1/2}(\Gamma) \subset H^{1/2}(\Gamma)$. (Здесь при выводе использовано последнее свойство (3.58).)

Итак, для оператора p_k из (3.60), (3.61), справедливы общие требования (3.38)–(3.40).

Введем теперь по аналогии с (3.35), (3.36) классы функций, связанных с вспомогательными задачами (3.41), (3.42) Неймана и Зарембы. Именно, введем пространства (3.56), (3.59), т. е.

$$\breve{H}^{-1/2}(\Gamma) := (\dot{+})_{k=1}^{q}\breve{H}^{-1/2}(\Gamma_k), \quad \breve{H}^{1/2}(\Gamma) := C\breve{H}^{-1/2}(\Gamma), \tag{3.62}$$

а также пространство

$$\begin{aligned} &\breve{H}^1(\Omega) := H_0^1(\Omega) \oplus \{(\dot{+})_{k=1}^{q}\breve{H}^1_{h,\Gamma_k}(\Omega)\} \subset H^1(\Omega), \\ &\breve{H}^1_{h,\Gamma_k}(\Omega) = H^1_h(\Omega) \cap H^1_{\Gamma\backslash\Gamma_k}(\Omega), \end{aligned} \tag{3.63}$$

где $H^1_{\Gamma\backslash\Gamma_k}(\Omega)$ — подпространство тех функций из $H^1(\Omega)$, для которых выполнено однородное условие Неймана на $\Gamma\backslash\Gamma_k$ (см. (3.41)).

Назовем след γu элемента $u \in H^1(\Omega)$ *регулярным следом второго типа* (порожденным задачами (3.41), (3.2)), если для любого $k \in \overline{1,q}$ элемент

$$\partial_k u = \omega_k^*\partial u = (\partial u/\partial n)_{\Gamma_k} \in \breve{H}^{-1/2}(\Gamma_k),$$

т. е. он продолжи́м нулем на всю Γ в классе $H^{-1/2}(\Gamma) = (H^{1/2}(\Gamma))^*$.

Согласно проведенным выше построениям и определениям (3.62)–(3.63) элементы из $\breve{H}^1(\Omega)$ имеют регулярный след второго типа: для любого $u \in \breve{H}^1(\Omega)$ имеем

$$\begin{aligned} &u = u_0 + \sum_{k=1}^{q} u_q, \quad u_0 \in H_0^1(\Omega), \quad u_k \in \breve{H}^1_{h,\Gamma_k}(\Omega), \quad k = \overline{1,q}, \\ &\gamma u_0 = 0, \quad \partial_k u_k = (\partial u_k/\partial n)_{\Gamma_k} =: \widetilde{\psi}_k \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k), \\ &\partial_k u_j = 0, \quad (k \neq j), \quad j,k = \overline{1,q}. \end{aligned}$$

В качестве следствия из разобранных примеров операторов проектирования, а также из теоремы 3.4 приходим к такому выводу.

Теорема 3.6. *Для тройки пространств $L_2(\Omega)$, $\breve{H}^1(\Omega)$, $L_2(\Gamma)$, $\Gamma := \partial\Omega$, и оператора следа $\gamma : H^1(\Omega) \to H^{1/2}(\Gamma)$, $\gamma\eta := \eta|_\Gamma$, в области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с липшицевой границей Γ, разбитой на липшицевы куски Γ_k, $k = \overline{1,q}$, справедлива следующая формула Грина для смешанных краевых задач*:

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \Delta u\rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{q}\langle\gamma_k\eta, \partial_k u\rangle_{L_2(\Gamma_k)} \;\; \forall \eta, u \in \breve{H}^1(\Omega), \tag{3.64}$$

$$\gamma_k\eta := \eta|_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k), \quad \partial_k u := \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} \in \widetilde{H}^{-1/2}(\Gamma_k), k = \overline{1,q},$$
$$u - \Delta u \in (\breve{H}^1(\Omega))^*.$$

□

Формула Грина (3.64), таким образом, приспособлена не только к исследованию с ее помощью слабых решений краевых задач в области Ω с условиями Дирихле на части Γ_k границы $\Gamma = \partial\Omega$ (см. теорему 3.3), но также и с краевыми условиями Неймана либо Ньютона.

Рассмотрим теперь такой простейший вариант. Будем считать, что граница $\Gamma = \partial\Omega$ области Ω состоит из нескольких односвязных частей, находящихся на положительном расстоянии друг от друга, т. е.

$$\Gamma = \bigcup_{k=1}^{q} \Gamma_k, \quad \operatorname{dist}(\Gamma_k, \Gamma_j) \geqslant d > 0, \quad j,k = \overline{1,q}. \tag{3.65}$$

(Например, при $q = 2$ в качестве Ω можно взять область в виде шарового слоя в $\mathbb{R}^3$, расположенного между радиусами r_1 и $r_2 < r_1$. Тогда Γ_1 — сфера радиуса r_1, Γ_2 — сфера радиуса r_2 и $d = r_1 - r_2 > 0$. Данный вариант уже обсуждался в пункте 3.1, см. формулы (3.5)–(3.8) и лемму 3.1.)

В этом случае, как и для (односвязной) границы $\Gamma = \partial\Omega$, имеют место свойства

$$(H^{1/2}(\Gamma_k))^* = H^{-1/2}(\Gamma_k), \quad k = \overline{1,q},$$

аналогичные свойству (1.43). При этом

$$\widehat{H}^{1/2}(\Gamma) = \breve{H}^{1/2}(\Gamma) = H^{1/2}(\Gamma) = (\dot{+})_{k=1}^{q} H^{1/2}(\Gamma_k)$$

(см. определения (3.35), (3.56), (3.59)) и потому в силу предыдущего

$$\widehat{H}^1(\Omega) = \breve{H}^1(\Omega) = H^1(\Omega).$$

Отсюда, а также из теорем 3.5, 3.6 приходим к следующему выводу.

Теорема 3.7. *Пусть для односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ с неодносвязной липшицевой границей $\Gamma = \partial\Omega$ выполнены условия* (3.65). *Тогда справедлива следующая обобщенная формула Грина для смешанных краевых задач*:

$$(\eta, u)_{H^1(\Omega)} = \langle \eta, u - \Delta u \rangle_{L_2(\Omega)} + \sum_{k=1}^{q} \langle \gamma_k\eta, \partial_k u \rangle_{L_2(\Gamma_k)} \ \ \forall \eta, u \in H^1(\Omega),$$
$$\gamma_k\eta := \eta|_{\Gamma_k} \in H^{1/2}(\Gamma_k), \quad \partial_k u := \frac{\partial u}{\partial n}\Big|_{\Gamma_k} \in H^{-1/2}(\Gamma_k), \quad k = \overline{1,q},$$
$$u - \Delta u \in (H^1(\Omega))^*.$$

□

Рассмотрения этого параграфа (см. теоремы 3.5–3.7) показывают, что вид обобщенной формулы Грина для смешанных краевых задач в классических задачах следует выбирать, исходя из вида области $\Omega \subset \mathbb{R}^m$ и характера краевых условий, заданных на $\Gamma = \partial\Omega$.

4. Заключительные замечания

Наметим теперь, какие проблемы естественным образом исследуются на основе доказанных теорем о существовании абстрактных формул Грина (2.50), (2.54), (2.55). Все эти проблемы рассматриваются на базе соответствующих формул Грина с уже выбранным дифференциальным выражением Lu (см., например, [18, с. 237]).

Отметим, что глубокие результаты исследования смешанных краевых задач в липшицевых областях для сильно эллиптических систем второго порядка, а также соответствующих спектральных задач получены в последнее время в работах М. С. Аграновича, см. [3–5].

4.1. Абстрактные краевые задачи. К числу таких задач относятся следующие проблемы:

4.1.1. Неоднородная задача Неймана для уравнения Пуассона.

$$Lu = f \quad (\text{в } E), \quad \partial u = \psi \quad (\text{в } G).$$

Для ее однозначной разрешимости необходимо и достаточно, чтобы выполнялись условия

$$f \in F_0^*, \quad \psi \in (G_+)^*, \tag{4.1}$$

а слабое решение выражается формулой

$$u = A^{-1} f + T_M \psi, \tag{4.2}$$

где $A = A_0^{1/2}(I - iQ)A_0^{1/2}$ — оператор формы $\Phi(\eta, u)$, а $T_M : (G_+)^* \to M \subset F_0$ — оператор вспомогательной задачи

$$Lw = 0 \quad (\text{в } E), \quad \partial u = \psi \quad (\text{в } G).$$

4.1.2. Задача Дирихле для уравнения Пуассона.

$$Lu = f \quad (\text{в } E), \quad \gamma u = \varphi \quad (\text{в } G).$$

Здесь при выполнении необходимых и достаточных условий

$$f \in N^*, \quad \varphi \in G_+,$$

задача имеет слабое решение

$$u = A_{00}^{-1} f + \gamma_M^{-1} \varphi,$$

где $A_{00} = P_N^* A P_N : N \to N^*$ — оператор, отвечающий сужению формы $\Phi(\eta, u)$ на подпространство N (для η и u), а γ_M — сужение оператора следа γ на M.

4.1.3. Третья краевая задача (задача Ньютона—Неймана).

$$Lu = f \quad (\text{в } E), \quad \partial u + \alpha \gamma u = \psi \quad (\text{в } G), \tag{4.3}$$

где $\alpha : G_+ \to (G_+)^*$ — неотрицательный оператор, т. е.

$$\langle \varphi, \alpha \varphi \rangle_G \geqslant 0 \quad \forall \varphi \in G_+.$$

Эта задача исследуется так же, как и задача 4.1.1, однако взамен нормы $\|u\|_{F_0}^2 = \Phi_R(u, u)$ здесь используется эквивалентная норма

$$\|u\|_{eq,F_0}^2 := \|u\|_{F_0}^2 + \langle \gamma u, \alpha \gamma u \rangle_G.$$

Если выполнены условия (4.1), то задача (4.3) имеет единственное слабое решение $u \in F_0$, выражаемое формулой вида (4.2) (с измененными A и T_M).

4.2. Абстрактные смешанные краевые задачи. Теорема 3.4, доказывающая существование абстрактной формулы Грина для смешанных краевых задач в случае симметрической формы — скалярного произведения в пространстве F — справедлива и в случае несимметрической формы $\Phi(\eta, u)$, если выполнены предположения (3.38)–(3.40). Такая формула Грина теперь имеет вид

$$\Phi(\eta, u) = \langle \eta, Lu \rangle_E + \sum_{k=1}^{q} \langle \gamma_k \eta, \partial_k u \rangle_{G_k} \quad \forall \eta, u \in F_0. \tag{4.4}$$

На ее основе изучаются абстрактные смешанные краевые задачи, когда на разных частях «границы», т. е. в граничном пространстве G, задаются различные краевые условия типа Дирихле, Неймана либо Ньютона—Неймана. В симметрическом случае и для классической тройки гильбертовых пространств подобный подход описан в пункте 3.4.

Здесь отметим еще раз, что в смешанных краевых задачах выбор пространства, в котором ищется слабое решение, в значительной мере определяется характером краевых условий, заданных на различных частях (подпространствах) границы (граничного пространства).

4.3. Спектральные проблемы и абстрактная формула Грина. На основе абстрактной формулы Грина (2.50), а также формулы (4.4) для смешанных краевых задач исследуются спектральные проблемы, возникающие в приложениях. Перечислим кратко некоторые из них. Отметим, что рассмотрение этих проблем приводит к изучению некоторых нестандартных спектральных задач, в частности, несамосопряженных (см. [8, 15]).

4.3.1. Задача Дирихле, Неймана, Ньютона. Это задачи соответственно вида

$$Lu = \lambda u \quad (\text{в } E), \quad \gamma u = 0 \quad (\text{в } G);$$
$$Lu = \lambda u \quad (\text{в } E), \quad \partial u = 0 \quad (\text{в } G);$$
$$Lu = \lambda u \quad (\text{в } E), \quad \partial u + \alpha\gamma u = 0 \quad (\text{в } G).$$

4.3.2. Задача Стеклова.

$$Lw = 0 \quad (\text{в } E), \quad \partial w + \alpha\gamma w = \lambda\gamma w \quad (\text{в } G).$$

4.3.3. Задача Стефана.

$$Lu = \lambda u \quad (\text{в } E), \quad \partial u + \alpha\gamma u = \lambda\gamma u \quad (\text{в } G).$$

4.3.4. Задача М. С. Аграновича.

$$Lu + \lambda u = 0 \quad (\text{в } E), \quad \partial u + \alpha\gamma u = \mu\gamma u \quad (\text{в } G). \tag{4.5}$$

Здесь один из параметров (λ или μ) является спектральным, а другой — фиксированным.

4.3.5. Задача С. Крейна.

$$Lu = \lambda u \quad (\text{в } E), \quad \lambda(\partial u + \alpha\gamma u) = \gamma u \quad (\text{в } G).$$

4.3.6. Задача Чуешова.

$$Lu + \lambda^2 u = 0 \quad (\text{в } E), \quad \partial u + \alpha\gamma u = \lambda\gamma u \quad (\text{в } G).$$

4.4. Спектральные задачи сопряжения. Подробное изучение этого класса задач для конкретных приложений проведено М. С. Аграновичем с его учениками и коллегами (см. например, [25]). В абстрактной форме такие проблемы обсуждаются в [8].

Приведем краткое словесное описание постановки спектральных задач сопряжения. Пусть имеется набор пространств E_j, F_j и G_j и операторов следа γ_j, $j = \overline{1,q}$, таких, что для каждого набора справедлива абстрактная формула Грина в форме (1.10), т. е.

$$\langle \eta_j, L_j u_j \rangle_{E_j} = (\eta_j, u_j)_{F_j} - \langle \gamma_j \eta_j, \partial_j u_j \rangle_{G_j} \quad \forall \eta_j, u_j \in F_j, \quad j = \overline{1,q}.$$

Будем считать также, что каждое граничное пространство G_j является ортогональной суммой пространств $G_j = \oplus_{kl} G_{jkl}$, причем каждое G_{jkl} имеет оснащение:

$$(G_+)_{jkl} \hookrightarrow G_{jkl} \hookrightarrow (G_+)^*_{jkl}.$$

При этом оснащения совпадают при перемене мест индексов k и j.

В этих обозначениях спектральная задача сопряжения формулируется следующим образом. Необходимо найти набор $u = (u_1, \ldots, u_q)$ элементов $u_j \in F_j$ из уравнений

$$L_j u_j + \lambda u_j = 0 \quad (\text{в } E_j), \quad j = \overline{1,q},$$

а также «краевых» условий сопряжения, которые разбиваются на следующие категории.

При $k > j$:

1. Это условия первой задачи сопряжения с параметром μ, когда приравниваются следы на G_{jkl}, а сумма производных по нормали равна спектральному параметру μ, умноженному на след элемента u_j либо u_k.
2. Аналогичное условие без параметра μ (т. е. $\mu = 0$).
3. Условия второй задачи сопряжения (когда приравнивается нулю сумма производных по нормали) с параметром μ.
4. Условия второй задачи сопряжения без параметра μ.

При $k = j$ имеются три типа условий:

1. Условие Ньютона—Неймана с параметром μ.
2. Условие Ньютона—Неймана без параметра ($\mu = 0$).
3. Однородное условие Дирихле.

Оказывается, для таких задач можно доказать существование формулы Грина в форме (1.5) применительно к некоторому подпространству F_0 пространства $F = \oplus_{k=1}^{q} F_j$, учитывающему «главные» краевые условия. На этой основе проблему можно снова свести к задаче вида (4.5) и исследовать ее уже разработанными методами.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Агошков В. И., Лебедев В. И.* Операторы Пуанкаре—Стеклова и методы разделения области в вариационных задачах// Вычисл. проц. и сист. — 1985. — *2.* — С. 173–226.
2. *Агранович М. С.* Спектральные задачи для сильно эллиптических систем второго порядка в областях с гладкой и негладкой границей// Усп. мат. наук. — 2002. — *57*, № 5. — С. 3–78.
3. *Агранович М. С.* Смешанные задачи в липшицевой области для сильно эллиптических систем 2-го порядка// Функц. анализ и его прилож. — 2011. — *45*, № 2. — С. 1-–22.
4. *Агранович М. С.* Спектральные задачи в липшицевых областях// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2011. — *39.* — С. 11—35.
5. *Агранович М. С.* Соболевские пространства, их обобщения и эллиптические задачи в областях с гладкой и липшицевой границей. — М.: МЦНМО, 2013.
6. *Березанский Ю. М.* Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов. — Киев: Наукова думка, 1965.
7. *Вейль Г.* Метод ортогональной проекции в теории потенциала// В сб.: «Избранные труды. Математика и теоретическая физика». — М.: Наука, 1984. — С. 275–307.
8. *Войтицкий В. И., Копачевский Н. Д., Старков П. А.* Многокомпонентные задачи сопряжения и вспомогательные абстрактные краевые задачи// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *34.* — С. 5–44. Англ. перевод: *Voytitsky V. I., Kopachevsky N. D., Starkov P. A.* Multicomponent conjugation (transmission) problems and auxillary abstract boundary-value problems// J. Math. Sci. — 2010. — *170*, № 2. — С. 131–172.
9. *Волевич Л. Р., Гиндикин С. Г.* Обобщенные функции и уравнения в свертках. — М.: Наука, 1994.
10. *Гаевский Х., Грегер К., Захариас К.* Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1978.
11. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для тройки гильбертовых пространств и ее приложениях к задаче Стокса// Таврический вестн. информ. и мат. — 2004. — *2.* — С. 52–80.
12. *Копачевский Н. Д.* Абстрактная формула Грина для смешанных краевых задач// Ученые записки Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Серия «Математика. Механика. Информатика и кибернетика». — 2007. — *20*, № 2. — С. 3–12.
13. *Копачевский Н. Д.* Об абстрактной формуле Грина для смешанных краевых задач и некоторых ее приложениях// Спектр. и эволюц. задачи. — 2011. — *21*, № 1. — С. 2–39.
14. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г., Нго Зуй Кан.* Операторные методы в линейной гидродинамике: эволюционные и спектральные задачи. — М.: Наука, 1989.
15. *Копачевский Н. Д., Крейн С. Г.* Абстрактная формула Грина для тройки гильбертовых пространств, абстрактные краевые и спектральные задачи// Укр. мат. вестн. — 2004. — *1*, № 1. — С. 69–97.
16. *Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М.* Интерполяция линейных операторов. — М.: Наука, 1978.
17. *Лебедев В. И., Агошков В. И.* Операторы Пуанкаре—Стеклова и их приложения в анализе. — М.: Отд. вычисл. матем. АН СССР, 1983.
18. *Лионс Ж.-Л., Мадженес Э.* Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
19. *Пальцев Б. В.* О смешанной задаче с неоднородными граничными условиями для эллиптических с параметром уравнений второго порядка в липшицевых областях// Мат. сб. — 1996. — *187*, № 4. — С. 59–116.
20. *Обэн Ж.-П.* Приближенное решение эллиптических краевых задач. — М.: Мир, 1977.
21. *Олейник О. А., Иосифьян Г. А., Шамаев А. С.* Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. — М.: МГУ, 1990.
22. *Соболев С. Л.* Некоторые применения функционального анализа в математической физике. — М.: Наука, 1988.
23. *Съярле Ф.* Метод конечных элементов для эллиптических задач. — М.: Мир, 1980.

24. *Agranovich M. S.* Remarks on potential spaces and Besov spaces in a Lipschitz domain and on Whitney arrays on its boundary// Russ. J. Math. Phys. — 2008. — *15*, № 2. — C. 146–155.
25. *Agranovich M. S., Katsenelenbaum B. Z., Sivov A. N., Voitovich N. N.* Generalized method of eigenoscillations in difraction theory. — Berlin . . . Toronto: Wiley-VCH, 1999.
26. *Aubin J.-P.* Abstract boundary-value operators and their adjoint// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 1970. — *43*. — C. 1–33.
27. *Gagliardo E.* Caratterizazioni delle trace sullo frontiera relative ad alcune classi de funzioni in «n» variabili// Rend. Semin. Mat. Univ. Padova. — 1957. — *27*. — C. 284–305.
28. *McLean W.* Strongly elliptic systems and boundary integral equations. — Cambridge University Press, 2000.
29. *Rychkov V. S.* On restrictions and extensions of the Besov and Triebel—Lizorkin spaces with respect to Lipschitz domains// J. Lond. Math. Soc. — 1999. — *60*, № 1. — C. 237–257.
30. *Showalter R. E.* Hilbert space methods for partial differential equations// Electron. J. Differ. Equ. — 1994. — *1*.

Н. Д. Копачевский
E-mail: kopachevsky@list.ru

Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
295007, Симферополь, проспект Вернадского, 4

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 57 (2015). С. 108–161

УДК 517. 972 + 517. 982. 22

ВВЕДЕНИЕ В СУБЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ — 2: СИММЕТРИЧЕСКИЙ ВАРИАНТ

© 2015 г. **И. В. ОРЛОВ, И. В. БАРАН**

Аннотация. Построена развитая теория симметрических дифференциалов Фреше и симметрических K-субдифференциалов Фреше первого и высших порядков, включающая, в частности, теорему о среднем и формулу Тейлора. Найдены простые достаточные условия симметрической K-субдифференцируемости. Рассмотрены некоторые приложения к рядам Фурье и вариационным функционалам.

СОДЕРЖАНИЕ

Исследования первого автора выполнены при финансовой поддержке Российского научного фонда (код проекта 14-21-00066), Воронежский государственный университет.

1. Постановка проблемы и предварительные сведения

«Светильник светил, и тропа расширялась.»

И. А. Бродский.

1.1. Введение. По-видимому, симметрические производные с самого их возникновения занимают несколько изолированную позицию в вещественном анализе. Хотя на протяжении почти столетия с их определением, приложениями и обобщением был связан ряд блистательных имен — Риман, Шварц, Кантор, Валле-Пуссен, Сакс и другие (см. [4, 9, 15, 26, 30, 36, 38]), симметрические производные «знали свое место» — гармонический анализ, а в его рамках — применение второй симметрической производной к обобщенному суммированию. Развитый симметрический анализ так и не был создан даже в вещественном случае, да и бесконечномерная революция Гато—Адамара—Фреше обошла его стороной.

Наш интерес к обобщению симметрической дифференцируемости первоначально также укладывался в рамки обобщения метода Римана: перейти к подходящему типу симметрического субдифференциала и поставить второй симметрический субдифференциал на место второй симметрической производной в рамках классической схемы Римана—Кантора. Конечно, базой для этого должен был послужить какой-либо минимальный вариант симметрического сублинейного анализа.

Сами по себе субдифференциалы как важнейший инструмент негладкого анализа достаточно давно получили признание в математике (см. [5, 7, 8, 10–14, 21–24, 29, 35, 37]). Некоторое время назад в работах И. В. Орлова и Ф. С. Стонякина ([17, 18, 39]) был введен и изучен компактный субдифференциал для отображений вещественного аргумента, получивший хорошие приложения в векторном интегрировании. Недавно в работах И. В. Орлова и З. И. Халиловой ([19, 20, 33]) K-субдифференциальное исчисление было распространено на банахов случай, со значимым вариационным приложением. При этом соответствующие мультиоператоры образуют уже не банахово пространство, а банахов конус, и индуктивное определение высших K-субдифференциалов приводит к переводу всех конструкции в категорию банаховых конусов. Подробный обзор по этой тематике (см. [16]) недавно опубликован в СМФН.

Симметрический же случай позволяет не выходить за рамки банаховых пространств, поскольку высшие производные и субдифференциалы не определяются индуктивным путем. С этой точки зрения, симметрический K-анализ оказывается проще несимметрического. Однако важные результаты, как в анализе, так и в субанализе, начинаются, как известно, от теоремы о среднем — «основной теоремы дифференциального исчисления», которая в симметрическом случае «под вопросом». Поворотный момент в наших исследованиях наступил, когда такая «симметрическая форма» теоремы о среднем появилась — на базе существенно иной техники доказательства. Началось то, что в своей Нобелевской лекции великий Бродский назвал «диктатом языка», а люди простые — математики — определяют оборотом речи: «Задача сама знает, как ей решаться».

В итоге удалось построить, как представляется, достаточно развитое K_S-субдифференциальное исчисление «многоцелевого» характера. Мы завершаем эту работу на подступах к вариационным приложениям, получив в пункте 6.5 оценку K_S-субдифференциала одномерного вариационного функционала. Перспективы возможных приложений в теории экстремальных задач обсуждаются в заключительных замечаниях. Результаты данной статьи частично изложены в работах [1–3].

Ниже даются краткие комментарии к основным блокам работы.

Ставя задачу перехода от дифференциала к субдифференциалу, мы тем самым ставим задачу перехода от одноточечного предела разностных отношений (различного типа) к многозначной характеристике поведения совокупности разностных отношений вблизи данной точки. Из общих топологических соображений желательно, чтобы такая характеристика была выпуклой и компактной. Таков, например, классический субдифференциал Рокафеллара (см. [25]), однако исключение из его определения предельного процесса привело к резкому ограничению — требованию выпуклости субдифференцируемых функционалов. Дальнейшие многочисленные работы по субдифференциальному исчислению использовали, как правило, ту или иную форму многозначного предельного перехода.

Представилось целесообразным выделить подходящий тип многозначного предельного перехода в явной форме, придав ему максимально простой вид. Так возникло понятие компактного предела (K-предела), которое вполне себя оправдало при построении теории K-субдифференциалов и исследовании их приложений (см., например, $[16, 27, 28, 31, 32, 34]$). В настоящей работе техника K-пределов использована, в основном, для определения симметрических K-субдифференциалов первого и высших порядков, а также при определении строгого K-субдифференциала (как вспомогательного инструмента в рамках данной теории). В пункте 1.2 мы даем необходимую информацию о K-пределах.

Далее, классическая теория симметрических производных (см., например, $[4, 9, 30]$) не включает теорему о среднем. Более того, на первый взгляд, теорема о среднем плохо «стыкуется» с симметрическим характером производной. Тем более удивительным оказался тот факт, что при дополнительном условии абсолютной непрерывности, опираясь на теорему Витали о покрытиях, все-таки удалось получить теорему о среднем для симметрического случая (раздел 2). Это позволило распространить на данный случай и асимптотическую форму полной формулы Тейлора с несколько ослабленной оценкой (по сравнению с классическим «центрированным» случаем). В дальнейшем в работе эти результаты обобщаются как на случай сильных симметрических дифференциалов, так и на случай сильных симметрических K-субдифференциалов. Еще одним удивительным обстоятельством в теории симметрических производных оказалось отсутствие до сих пор их обобщения на случай банаховых пространств. Этот пробел мы восполняем (в третьем пункте раздела), следуя классической схеме Гато—Адамара—Фреше. На случай s-дифференциалов Фреше перенесена теорема о среднем. Важным моментом является исследование вопроса о композиции: показано, что композиция строго дифференцируемого и s-дифференцируемого отображения является s-дифференцируемой. Определение s-дифференциала n-го порядка, в отличие от центрированного случая, не является индуктивным. В качестве подходящей операторной базы мы вводим понятие степенного оператора n-го порядка и проверяем для него свойство «биномиальности». На этой основе полученная ранее s-формула Тейлора перенесена на векторный случай.

В третьем разделе для удобства изложения теорию симметрических K-субдифференциалов (или K_S-субдифференциалов) первого порядка мы излагаем сначала для случая скалярного аргумента. В случае вещественного аргумента первый симметрический K-субдифференциал (или K_S-субдифференциал) еще не имеет K-операторной формы; это просто выпуклый компакт, что существенно упрощает исследование его свойств. В векторном случае мы легко можем трансформировать их в свойства K_S-субдифференциала по направлению. Показано, что K_S-субдифференциал является обобщением обычного K-субдифференциала, при этом симметрическая оценка — более точная. Наконец, мы рассматриваем формы формулы конечных приращений и теоремы о среднем для K_S-субдифференцируемых отображений с оценкой по норме, не требующие абсолютной непрерывности отображений. Как приложение, описан широкий класс случаев, когда K_S-субдифференцируемость всюду на отрезке влечет почти всюду обычную дифференцируемость.

В четвертом разделе, так же как и в третьем, для удобства изложения теорию K_S-субдифференциалов высших порядков мы излагаем сначала для случая скалярного аргумента. При этом K_S-субдифференциалы второго порядка рассмотрены отдельно, в связи с приложениями к обобщенному суммированию тригонометрических рядов. Отметим также, что «прямое» (индуктивное) определение K_S-субдифференциалов высших порядков упрощает изложение.

Приступая к реализации плана переноса обобщенного суммирования Римана на случай вторых K_S-субдифференциалов, мы переносим классическую теорему Шварца и ослабленное условие Шварца на случай дважды K_S-субдифференцируемых функций. Посредством перехода в конструкции классического метода Римана от обычной второй симметрической производной к соответствующему K_S-субдифференциалу мы вводим понятие K-метода Римана суммирования тригонометрических рядов. На основе предыдущих результатов мы обобщаем теорему Кантора о суммировании методом Римана тригонометрического ряда на случай K-метода Римана.

В пятом разделе строится развитая теория K_S-субдифференциалов первого порядка в банаховых пространствах. Вначале, вводя K_S-операторы (K-операторы с полной однородностью), мы строим подходящую операторную базу. Затем, следуя обобщенной схеме Гато—Адамара—Фреше, последовательно вводятся K_S-субдифференциалы по направлению, слабые, по Гато, и, наконец, K_S-субдифференциалы Фреше. Мы вводим также строгие K-субдифференциалы, необходимые в дальнейшем. Для всех этих типов субдифференциалов установлены подходящие критерии. Изучены основные свойства сильных K_S-субдифференциалов, среди которых выделим теорему о среднем и теорему о K_S-субдифференцируемости композиции строго K-субдифференцируемого и симметрически K-субдифференцируемого отображения.

Так как в симметрическом случае высшие субдифференциалы не носят индуктивный характер, общая схема их определения в шестом разделе сходна со схемой определения K_S-субдифференциала первого порядка. Поскольку мы отправляемся здесь от конечных разностей высших порядков, операторной базой служит теория субстепенных K_S-операторов. Построенный далее аппарат высших K_S-субдифференциалов позволяет перенести на случай банаховых пространств асимптотическую форму формулы Тейлора. Получено точное описание высших K_S-субдифференциалов от функционалов. Важным моментом является также введение понятия симметрической субгладкости (как первого, так и высших порядков). Это понятие позволяет в приложениях сводить ситуацию к нижним и верхним симметрическим производным, что и продемонстрировано в заключительном параграфе работы на примере вариационных функционалов.

В заключительных замечаниях мы обсуждаем возможные перспективы применения симметрических дифференциалов и субдифференциалов в теории экстремальных задач.

1.2. K-пределы и признак Вейерштрасса для K-пределов. В этом пункте мы приводим общее определение K-предела в случае банаховых пространств и даем краткий перечень его необходимых свойств. Далее $U(0)$ — замкнутая выпуклая окрестность нуля в вещественном банаховом пространстве E, $\overline{co}\,A$ — замкнутая выпуклая оболочка множества $A \subset E$. Приведем (в банаховом случае) определение и основные свойства K-пределов, рассмотренных в работах И. В. Орлова и Ф. С. Стонякина [17,39].

Определение 1.1. Пусть $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ — убывающая по вложению система замкнутых выпуклых подмножеств E (K-система). Непустое множество $B \subset E$ называется *K-пределом* системы $\{B_\delta\}_{\delta>0}$: $B = K\text{-}\lim\limits_{\delta\to 0} B_\delta$, если:

1. $\forall\, U(0) \subset E\ \exists\, \delta_U > 0 :\ (0 < \delta < \delta_U) \Longrightarrow (B \subset B_\delta \subset B + U)$;
2. B— компактное множество в E.

Таким образом, основными характеристиками K-предела являются равномерное топологическое стягивание множеств B_δ к своему непустому пересечению и компактность этого пересечения. K-предел обладает, в частности, следующими свойствами (см., например, [17]):

1. Монотонность:
$$(B^1_\delta \subset B^2_\delta \quad \forall\, \delta > 0) \Longrightarrow (K\text{-}\lim_{\delta\to+0} B^1_\delta) \subset (K\text{-}\lim_{\delta\to+0} B^2_\delta).$$
2. Однородность:
$$\forall\, \lambda \in \mathbb{R} : K\text{-}\lim_{\delta\to+0} B_\delta = \lambda \cdot K\text{-}\lim_{\delta\to+0} B_\delta.$$
3. Обобщенная аддитивность:
$$K\text{-}\lim_{\delta\to+0} \overline{(B^1_\delta + B^2_\delta)} = K\text{-}\lim_{\delta\to+0} B^1_\delta + K\text{-}\lim_{\delta\to+0} B^2_\delta.$$

4. Обобщенная линейность:
$$\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\,\overline{(\lambda_1\cdot B_\delta^1+\lambda_2\cdot B_\delta^2)}=\lambda_1\cdot\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\,B_\delta^1+\lambda_2\cdot\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\,B_\delta^1.$$
5. Если F — вещественное банахово и $A\in L(E;F)$, то
$$\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\,\overline{A(B_\delta)}=A\big(\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\,B_\delta\big).$$
6. Покоординатная сходимость: если $B_\delta^1\subset E_1,\ B_\delta^2\subset E_2$, то
$$\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}(B_\delta^1\times B_\delta^2)=\big(\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\,B_\delta^1\big)\times\big(\underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\,B_\delta^2\big).$$

Сформулированный ниже признак в дальнейшем играет базовую роль в теории K-субдифференциалов (см., например, [19, теорема 4.1]).

Теорема 1.1. *Пусть $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ — K-система в E. K-предел $\underset{\delta\to0}{K\text{-}\lim}\,B_\delta$ существует в том и только том случае, если для некоторого выпуклого компакта $\tilde B$ имеет место внешнее топологическое полустягивание системы $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ к $\widetilde B$:*
$$\forall\, U(0)\subset E\quad\exists\delta_U>0:\ (0<\delta<\delta_U)\Rightarrow(B_\delta\subset\tilde B+U).\tag{1.1}$$
При этом $\underset{\delta\to0}{K\text{-}\lim}\,B_\delta\subset\tilde B$.

Следствие 1.1. *Пусть $\{B_\delta\}_{\delta>0}$ и $\{B_\delta'\}_{\delta>0}$ — две K-системы, причем:*
$$1)\,B_\delta'\subset B_\delta)\ \ \forall\,\delta>0;\quad 2)\,\exists\,\underset{\delta\to0}{K\text{-}\lim}\,B_\delta.$$
Тогда существует $\underset{\delta\to0}{K\text{-}\lim}\,B_\delta'$, причем $\underset{\delta\to0}{K\text{-}\lim}\,B_\delta'\subset\underset{\delta\to0}{K\text{-}\lim}\,B_\delta$.

2. Симметрические производные и симметрические дифференциалы Фреше. Основные свойства и некоторые приложения

2.1. Симметрические производные первого и высших порядков. Теорема о среднем и формула Тейлора. В этом пункте мы рассматриваем теорему о среднем и формулу Тейлора для симметрических производных в случае абсолютно непрерывных отображений. Всюду далее мы рассматриваем отображение $f:\mathbb{R}\supset U(x)\to F$, определенное в некоторой окрестности $U(x)$ точки $x\in\mathbb{R}$, где F — произвольное вещественное банахово пространство. Напомним классические определения первой и высших симметрических производных (см. [4, 30, 38]), которые без труда распространяются на отображения со значениями в банаховых пространствах.

Определение 2.1. *Первой симметрической производной* f в точке x называется предел
$$f^{[\prime]}(x)=\lim_{h\to+0}\frac{\Delta^1 f(x,h)}{2h}=\lim_{h\to+0}\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}.$$

Определение 2.2. *Симметрической производной n-го порядка* отображения f в точке x называется величина
$$f^{[n]}(x)=\lim_{h\to0}\frac{\Delta^n f(x,h)}{(2h)^n}=\lim_{h\to+0}\frac{1}{(2h)^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^kC_n^kf\big(x+(n-2k)h\big).$$

Напомним также определение абсолютно непрерывного отображения.

Определение 2.3. Отображение $f:[a;b]\to F$ называется (*сильно*) *абсолютно непрерывным* на $[a;b]$, если $\forall\varepsilon>0\,\exists\,\delta>0$ такое, что для любого конечного или счетного набора непересекающихся интервалов $\{(a_k;b_k)\}$ из области определения f, который удовлетворяет условию $\sum\limits_k(b_k-a_k)<\delta$, выполнено $\sum\limits_k\|f(b_k)-f(a_k)\|<\varepsilon$.

Вначале получим формулу конечных приращений для симметрического случая. Здесь, в отличие от обычного случая, мы вынуждены добавить требование абсолютной непрерывности.

Теорема 2.1. *Пусть отображения* $f : \mathbb{R} \supset [a;b] \to F$ *и* $g : \mathbb{R} \supset [a;b] \to \mathbb{R}$ *абсолютно непрерывны на* $[a;b]$ *и симметрически дифференцируемы на* $(a;b)$, *причем* g *возрастает. Если для некоторого замкнутого выпуклого множества* $B \subset F$ *выполнена локальная оценка* $f^{[\prime]}(x) \in g^{[\prime]}(x) \cdot B$ $(a < x < b)$, *то справедлива глобальная оценка*:

$$f(b) - f(a) \in [g(b) - g(a)] \cdot B. \tag{2.1}$$

Доказательство. 1. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Используя определение симметрической производной, выберем для каждого $x \in [a+\varepsilon; b-\varepsilon]$ такое $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, что

$$(0 < h \leqslant \delta) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \in U_\varepsilon(g^{[\prime]}(x) \cdot B), \\ \dfrac{g(x+h) - g(x-h)}{2h} \in U_\varepsilon(g^{[\prime]}(x)) \end{cases}$$

(здесь U_ε — ε-окрестность множества U). Отсюда получаем:

$$(0 < h \leqslant \delta) \Rightarrow \left(\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \in U_{2\varepsilon} \left(\frac{g(x+h) - g(x-h)}{2h} \cdot B \right) \right). \tag{2.2}$$

2. Система сегментов $\{\overline{U}_\delta(x)\}_{x \in [a+\varepsilon; b-\varepsilon]}$, $\delta < \delta(\varepsilon, x)$, очевидно, образует покрытие Витали (см. [6, 15]) множества $[a+\varepsilon; b-\varepsilon]$. По второй теореме Витали о покрытиях (см. [15]), для любого заданного $\eta > 0$ из данного покрытия можно выделить такую конечную систему сегментов $\{\overline{U}_{\delta_i}(x_i)\}_{i=1}^n$, что $mes\Big(S = [a+\varepsilon; b-\varepsilon] \setminus \bigcup\limits_{i=1}^n \overline{U}_{\delta_i}(x_i)\Big) < \eta$. Последнее множество S состоит из конечного числа отрезков $[\alpha_j; \beta_j]$, $j = \overline{1, n+1}$. В силу абсолютной непрерывности отображений f и g на $[a;b]$, можно подобрать такое $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, что

$$\Big(mes\, S = \sum_{j=1}^{n+1} (\beta_j - \alpha_j) < \eta \Big) \Rightarrow \Big(\sum_{j=1}^{n+1} \|f(\beta_j) - f(\alpha_j)\| < \varepsilon,\ \sum_{j=1}^{n+1} [g(\beta_j) - g(\alpha_j)] < \varepsilon \Big). \tag{2.3}$$

Имеем:

$$f(b-\varepsilon) - f(a+\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i + \delta_i) - f(x_i - \delta_i)] + \sum_{j=1}^{n+1} [f(\beta_j) - f(\alpha_j)], \tag{2.4}$$

где в силу (2.2)

$$f(x_i + \delta_i) - f(x_i - \delta_i) \in 2\delta_i \cdot U_\varepsilon \left(\frac{g(x_i + \delta_i) - g(x_i - \delta_i)}{2\delta_i} \cdot B \right) \ (i = \overline{1, n}), \tag{2.5}$$

и в силу (2.3)

$$\sum_{j=1}^{n+1} [f(\beta_j) - f(\alpha_j)] \in U_\varepsilon(0), \quad \sum_{j=1}^{n+1} [g(\beta_j) - g(\alpha_j)] \in (-\varepsilon; \varepsilon). \tag{2.6}$$

Подставляя оценки (2.5) и (2.6) в (2.4), с учетом выпуклости B имеем:

$$\begin{aligned} f(b-\varepsilon) - f(a+\varepsilon) &\in \sum_{i=1}^{n} \left[2\delta_i \cdot U_\varepsilon \left(\frac{g(x_i + \delta_i) - g(x_i - \delta_i)}{2\delta_i} \cdot B \right) \right] + U_\varepsilon(0) \subset \\ &\subset U_\varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n} g(x_i + \delta_i) - g(x_i - \delta_i) \cdot B \right) + U_\varepsilon(0) \subset \\ &\subset U_\varepsilon \left([(g(b-\varepsilon) + \varepsilon) - (g(a+\varepsilon) - \varepsilon)] \cdot B \right) + U_\varepsilon(0). \end{aligned} \tag{2.7}$$

3. Переходя в (2.7) к пределу при $\varepsilon \to 0$, с учетом замкнутости B получаем (2.1). □

Докажем теперь теорему о среднем для симметрически дифференцируемых отображений.

Теорема 2.2. *Пусть отображение* $f : \mathbb{R} \supset [x; x+h] \to F$ *абсолютно непрерывно на* $[x; x+h]$ *и симметрически дифференцируемо в* $(x; x+h)$. *Тогда выполняется оценка*:

$$f(x+h) - f(x) \in \overline{co}\, f^{[\prime]}\big((x; x+h)\big) \cdot h. \tag{2.8}$$

Доказательство. Достаточно в условиях теоремы 2.1 положить $g(\theta)=\theta$ и

$$B=\overline{co}\,\{f^{[\prime]}(x+\theta h)|\ 0<\theta<1\},$$

а затем применить формулу (2.1). □

Далее мы получим здесь формулу Тейлора в форме Пеано в предположении, что отображение $f:\mathbb{R}\supset U(x)\to F$ $(n-1)$ раз дифференцируемо обычным образом в окрестности точки x и n раз симметрически дифференцируемо в точке x. Вначале сформулируем несколько вспомогательных утверждений.

Лемма 2.1. *Имеет место числовое равенство*

$$\sum_{k=0}^{[\frac{n}{2}]}(-1)^k C_n^k (n-2k)^n = 2^{n-1}n!.$$

Предложение 2.1. *Если существует* $(f^{(n-1)})^{[\prime]}(x)$, *то существует симметрическая производная n-го порядка* $f^{[n]}(x)$ *в точке x и имеет место равенство*:

$$f^{[n]}(x)=(f^{(n-1)})^{[\prime]}(x). \tag{2.9}$$

Доказательство. Применим теорему Коши для отображений скалярного аргумента в банахово пространство (см. [30]) $(n-1)$ раз по переменной h:

$$\frac{\Delta^n f(x,h)}{(2h)^n}\in\overline{co}\left\{\left.\frac{(\Delta^n f(x,h))^{(n-1)}}{((2h)^n)^{(n-1)}}\right|_{\theta h}\middle|\,0<\theta<1\right\}\subset$$

$$\subset\overline{co}\left\{\frac{n^{n-1}\Delta^1 f^{(n-1)}(x,n\theta h)-\dots+C_n^{\frac{n}{2}-1}2^{n-1}\Delta^1 f^{(n-1)}(x,2\theta h)}{2^n n!(\theta h)}\middle|\,0<\theta<1\right\}\subset$$

$$\subset\overline{co}\left\{\frac{n^{n-1}}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{\Delta^1 f^{(n-1)}(x,n\theta h)}{2n\theta h}-\frac{(n-2)^n}{2^{n-1}(n-1)!}\frac{\Delta^1 f^{(n-1)}(x,(n-2)\theta h)}{2(n-2)\theta h}+\dots\middle|\,0<\theta<1\right\}.$$

Полученную оценку можно записать в виде:

$$\frac{\Delta^n f(x,h)}{(2h)^n}\in\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}\overline{co}\left\{\frac{\Delta^1 f^{(n-1)}(x,\alpha_{nk}h)}{(2\alpha_{nk}h)^n}\middle|\,0<\theta<1\right\}\cdot\beta_{nk}, \tag{2.10}$$

где $\alpha_{nk}=n-2k$, $\quad\beta_{nk}=(-1)^k C_n^k\dfrac{(n-2k)^n}{2^{n-1}\cdot n!}$. При этом $\sum\limits_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}\beta_{nk}=1$ в силу леммы 2.1. Переходя к пределу в (2.10) при $h\to+0$, получаем:

$$f^{[n]}(x)\in\sum_{k=1}^{[\frac{n}{2}]}\beta_{nk}\cdot\left\{(f^{(n-1)})^{[\prime]}(x)\right\}=\left\{(f^{(n-1)})^{[\prime]}(x)\right\}, \tag{2.11}$$

откуда в силу одноэлементности правой части в (2.11) имеем точное равенство:

$$f^{[n]}(x)=(f^{(n-1)})^{[\prime]}(x).$$

□

Справедлива следующая асимптотическая формула Тейлора для симметрических производных (более слабая по сравнению с классическим случаем).

Теорема 2.3. *Предположим, что существует* $(f^{(n-1)})^{[\prime]}(x)$ *и отображение f сильно абсолютно непрерывно в окрестности* $U(x)$. *Тогда имеет место оценка*:

$$f(x+h)-\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k\in\frac{1}{n!}\,\overline{co}\,f^{[n]}\big((x;x+h)\big)\cdot h^n+o(h^n). \tag{2.12}$$

Доказательство. Из существования $(f^{(n-1)})^{[\prime]}(x)$ следует, что отображение $f(x)$ определено и имеет обычные производные до $(n-1)$ порядка включительно в окрестности точки x. Применим математическую индукцию.

1. При $n = 1$ равенство (2.12) принимает вид:

$$f(x+h) - f(x) \in \overline{co}\, f^{[\prime]}\big((x; x+h)\big) \cdot h + o(h),$$

и мы приходим к теореме 2.1 о среднем.

2. Допустим, что утверждение теоремы верно для порядка $(n-1)$: если существует $(\widetilde{f}^{(n-2)})^{[\prime]}(x)$ и отображение $\widetilde{f}$ абсолютно непрерывно в $U(x)$, то

$$\widetilde{f}(x+h) - \widetilde{f}(x) \in \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\, \overline{co}\, \widetilde{f}^{[n-1]}\big((x; x+h)\big) + o(h^{n-1}).$$

Отсюда для любого $y_{n-1} \in \overline{co}\, \widetilde{f}^{[n-1]}\big((x; x+h)\big)$ получаем включение:

$$\widetilde{f}(x+h) - \widetilde{f}(x) - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\, y_{n-1} \in o(h^{n-1}),$$

где $o(h^{n-1})$ не зависит от выбора y_{n-1}. Введем для любого $y_n \in \overline{co}\, f^{[n]}\big((x; x+h)\big)$ вспомогательную функцию:

$$r_n(f; h) = f(x+h) - f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k - \frac{h^n}{n!}\, y_n.$$

Вычисляя обычную производную по h вспомогательной функции r_n, имеем:

$$r_n'(f; h) = f'(x+h) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} h^{k-1} - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\, y_n,$$

откуда по допущению индукции следует: $r_n'(f; h) = r_{n-1}(f'; h) = o(h^{n-1})$. Применяя классическую теорему о среднем в банаховых пространствах, получаем:

$$r_n(f; h) \in \overline{co}\Big\{ r_n'(f; \theta h) \;\Big|\; 0 < \theta < 1 \Big\} \cdot h = o(h^{n-1}) \cdot h = o(h^n).$$

Итак, доказано по индукции, что

$$f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k - \frac{h^n}{n!} y_n \in o(h^n), \tag{2.13}$$

где многозначная оценка «o» не зависит от выбора $y_n \in \overline{co}\, f^{[n]}\big((x; x+h)\big)$. Перенося последнее слагаемое в (2.13) направо и переходя затем справа к выпуклой замкнутой оболочке по всем y_n, мы приходим к искомой оценке (2.12). □

Заметим, что при $n \geqslant 4$ условие абсолютной непрерывности f в окрестности точки x выполнено автоматически ввиду $f \in C^1(U)$.

Для нечетного порядка из теоремы 2.3 вытекает следующая форма формулы Тейлора.

Теорема 2.4. *Предположим, что существует $(f^{(2n)})^{[\prime]}(x)$ и отображение f сильно абсолютно непрерывно в некоторой окрестности $U(x)$. Тогда справедлива оценка*:

$$f(x+h) - f(x-h) - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!} h^{2k-1} \in \frac{2}{(2n+1)!}\, \overline{co}\, f^{[2n+1]}\big((x-h; x+h)\big) \cdot h^{2n+1} + o(h^{2n+1}). \tag{2.14}$$

Доказательство. Применяя формулу Тейлора (2.12) порядка $(2n+1)$ к $f(x+h)$ и $f(x-h)$, получаем:

$$f(x+h) - \sum_{k=0}^{2n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k \in \frac{1}{(2n+1)!}\, \overline{co}\, f^{[2n+1]}\big((x; x+h)\big) \cdot h^{2n+1} + o(h^{2n+1}); \tag{2.15}$$

$$f(x-h)-\sum_{k=0}^{2n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(-h)^k \in \frac{1}{(2n+1)!}\,\overline{co}\,f^{[2n+1]}\big((x-h;x)\big)\cdot(-h)^{2n+1}+o((-h)^{2n+1}). \qquad (2.16)$$

Вычитая почленно оценки (2.15) и (2.16) и приводя слева подобные члены, получаем:

$$f(x+h)-f(x-h)-2\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!}h^{2k-1}\in$$

$$\in\frac{1}{(2n+1)!}\Big(\overline{co}\,f^{[2n+1]}((x;x+h))+\overline{co}\,f^{[2n+1]}((x-h;x))\Big)\cdot h^{2n+1}+o(h^{2n+1})\subset$$

$$\subset\frac{1}{(2n+1)!}\Big(\overline{co}\,f^{[2n+1]}((x-h;x+h))+\overline{co}\,f^{[2n+1]}((x-h;x+h))\Big)\cdot h^{2n+1}+o(h^{2n+1})=$$

$$=\frac{2}{(2n+1)!}\,\overline{co}\,f^{[2n+1]}((x-h;x+h))\cdot h^{2n+1}+o(h^{2n+1}).$$

□

Аналогично можно получить формулу Тейлора в случае четного порядка.

Теорема 2.5. *Предположим, что существует* $(f^{(2n-1)})^{[l]}(x)$, *и отображение* f *сильно абсолютно непрерывно в некоторой окрестности* $U(x)$. *Тогда справедлива оценка*:

$$f(x+h)+f(x-h)-2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!}h^{2k}\in\frac{2}{(2n)!}\,\overline{co}\,f^{[2n+2]}\big((x-h;x+h)\big)\cdot h^{2n}+o(h^{2n}). \qquad (2.17)$$

2.2. Приложение: некоторые глобальные свойства симметрических производных. Здесь мы свяжем результаты предыдущего раздела со свойствами обобщенных симметрических производных Ш.-Ж. Валле-Пуссена (см. [9, 36]), исследованных в работе Р. Джеймса [38]. Вначале введем необходимые понятия и приведем результаты, полученные в [38].

Определение 2.4. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a;b]$, $x_0\in(a;b)$. Если существуют постоянные $\beta_0,\beta_2,\dots,\beta_{2r}$ (зависящие только от x_0) такие, что

$$\frac{1}{2}\Big\{f(x_0+h)+f(x_0-h)\Big\}-\sum_{k=0}^{r}\frac{h^{2k}}{(2k)!}\beta_{2k}=o(h^{2r})$$

при $h\to0$, то β_{2r} называется *обобщенной симметрической производной* (*Валле-Пуссена*) порядка $2r$ функции $f(x)$ в точке x_0 и обозначается $D^{2r}f(x_0)$.

Если $D^{2k}f(x_0)$ существуют при $0\leqslant k\leqslant m-1$, определим величину $\theta_{2m}(x_0;h)$ равенством:

$$\frac{h^{2m}}{(2m)!}\theta_{2m}(x_0,h)=\frac{1}{2}\Big\{f(x_0+h)+f(x_0-h)\Big\}-\sum_{k=0}^{m-1}\frac{h^{2k}}{(2k)!}D^{2k}f(x_0)$$

и положим

$$\Delta^{2m}f(x_0)=\limsup_{h\to0}\theta_{2m}(x_0;h),\qquad \delta^{2m}f(x_0)=\liminf_{h\to0}\theta_{2m}(x_0;h).$$

Скажем, что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям A_{2m} на $(a;b)$, если она непрерывна на $[a;b]$, все $D^{2k}f(x)$ существуют и конечны при $1\leqslant k\leqslant m-1$ на $(a;b)$ и

$$\lim_{h\to0}h\theta_{2m}(x,h)=0$$

при всех x из $(a;b)\setminus E$, где E не более чем счетно.

Скажем. что функция $f(x)$ удовлетворяет условиям B_{2m-2} на $(a;b)$, если она непрерывна на $[a;b]$, все $D^{2k}f(x)$ существуют и конечны при $1\leqslant k\leqslant m-1$ на $(a;b)$ и $D^{2k}f(x)$ не имеет разрывов первого рода на $(a;b)$.

Далее через $\Delta^k f$ обозначается конечная разность K-го порядка для f.

Теорема 2.6. *Если* $f(x)$ *удовлетворяет условиям* A_{2m-2} *и* B_{2m-4} *на* $(a;b)$, *причем на* $(a;b)$ *выполнено* $\Delta^{2m-2}f(x)>0$, *то функция* $D^{2m-4}f(x)$ *выпукла, и при всех* $1\leqslant k\leqslant m-2$ *функции* $D^{2k}f(x)$ *непрерывны на* $(a;b)$.

Теорема 2.7. *Если $f(x)$ удовлетворяет условиям A_{2m} и B_{2m-2} на $(a;b)$ и $\Delta^{2m}f(x) > 0$ на $(a;b)$, то функция $D^{2m-2}f(x)$ выпукла, и при всех $1 \leqslant k \leqslant m-1$ функции $D^{2k}f(x)$ непрерывны на $(a;b)$.*

Аналогичные результаты приведены в [38] для обобщенных симметрических производных нечетного порядка, где автор исходит из разложения:

$$\frac{1}{2}\Big\{f(x_0+h) - f(x_0-h)\Big\} - \sum_{k=1}^{r} \frac{h^{2k-1}}{(2k-1)!}\beta_{2k-1} = o(h^{2r-1}).$$

Сравнивая результаты теорем 2.6 и 2.7 и с результатами, соответственно, теорем из раздела 2.1, мы приходим к следующим утверждениям, вначале для симметрических производных четного порядка (см. теорему 2.5).

Теорема 2.8. *Пусть отображение f' абсолютно непрерывно в $U(x)$ и существует симметрическая производная $f^{[2n]}(x) = \big(f^{(2n-1)}\big)^{[\prime]}(x)$. Если f удовлетворяет условиям A_{2m-2} и B_{2m-4} в $U(x)$, причем $\Delta^{2m-2}f > 0$ в $\dot{U}(x)$, то функция $f^{(2m-4)}$ выпукла, и при всех $1 \leqslant k \leqslant m-2$ функции $f^{(2k)}$ непрерывны в $\dot{U}(x)$.*

Теорема 2.9. *Пусть отображение f' абсолютно непрерывно в $U(x)$ и существует симметрическая производная $f^{[2n]}(x) = \big(f^{(2n-1)}\big)^{[\prime]}(x)$. Если f удовлетворяет условиям A_{2m} и B_{2m-2} в $U(x)$, причем $\Delta^{2m}f > 0$ в $\dot{U}(x)$, то функция $f^{(2m-2)}$ выпукла, и при всех $1 \leqslant k \leqslant m-1$ функции $f^{(2k)}$ непрерывны в $\dot{U}(x)$.*

Аналогично, отправляясь от соответствующих результатов [38] в нечетном случае, мы приходим к следующим результатам, связанным с симметрическими производными нечетного порядка (см. теорему 2.4).

Теорема 2.10. *Пусть отображение f' абсолютно непрерывно в $U(x)$ и существует симметрическая производная $f^{[2n+1]}(x) = \big(f^{(2n)}\big)^{[\prime]}(x)$. Если f удовлетворяет условиям A_{2m-1} и B_{2m-3} в $U(x)$, причем $\Delta^{2m-1}f > 0$ в $\dot{U}(x)$, то функция $f^{(2m-3)}$ выпукла, и при всех $1 \leqslant k \leqslant m-2$ функции $f^{(2k+1)}$ непрерывны в $\dot{U}(x)$.*

Теорема 2.11. *Пусть отображение f' абсолютно непрерывно в $U(x)$ и существует симметрическая производная $f^{[2n+1]}(x) = \big(f^{(2n)}\big)^{[\prime]}(x)$. Если f удовлетворяет условиям A_{2m+1} и B_{2m-1} в $U(x)$, причем $\Delta^{2m+1}f > 0$ в $\dot{U}(x)$, то функция $f^{(2m-1)}$ выпукла, и при всех $1 \leqslant k \leqslant m-1$ функции $f^{(2k+1)}$ непрерывны в $\dot{U}(x)$.*

2.3. Симметрические дифференциалы Фреше. В этом параграфе мы вводим симметрические дифференциалы первого и высших порядков, следуя классической схеме Гато—Адамара—Фреше, и изучаем ряд их свойств. Пусть отображение $f : E \to F$ (E, F — вещественные банаховы пространства) определено в окрестности точки $x \in E$, $h \in U(0) \subset E$. Вводимый ниже симметрический дифференциал по направлению h будем называть также *s-дифференциалом* по направлению.

Определение 2.5. Симметрический дифференциал отображения f в точке x *по направлению* h есть следующий предел (если он существует):

$$\partial^{[\prime]}f(x,h) = \lim_{t\to+0} \frac{f(x+th) - f(x-th)}{2t}. \tag{2.18}$$

В случае функционала $f : E \to \mathbb{R}$ полезно также ввести верхний и нижний s-дифференциалы по направлению.

Определение 2.6. Верхний и нижний s-дифференциалы $\overline{\partial^{[\prime]}}f(x,h)$ и $\underline{\partial^{[\prime]}}f(x,h)$ функционала f в точке x по направлению h имеют следующий вид:

$$\overline{\partial^{[\prime]}}f(x) = \varlimsup_{t\to+0} \frac{f(x+th) - f(x-th)}{2t}, \qquad \underline{\partial^{[\prime]}}f(x) = \varliminf_{t\to+0} \frac{f(x+th) - f(x-th)}{2t}.$$

Приведем простой вспомогательный результат.

Предложение 2.2. *Пусть* $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{A} G$, $A \in L(F,G)$. *Тогда для любого* $h \in U(0)$:

$$\partial^{[\prime]}(f \cdot A)(x,h) = \partial^{[\prime]} f(Ax, Ah). \tag{2.19}$$

Перейдем к основным типам s-дифференцируемости, которые мы введем по аналогии с классической схемой Гато—Адамара—Фреше.

Определение 2.7. Пусть отображение f s-дифференцируемо в точке x по любому направлению $h \in U(0) \subset E$. Будем говорить, что f *слабо* s*-дифференцируемо* в точке x, если s-дифференциал по направлению $\partial^{[\prime]} f(x,h)$ является линейным оператором по h. Примем в этом случае обозначение $\partial^{[\prime]} f(x)h$.

Определение 2.8. Пусть отображение f слабо s-дифференцируемо в точке x. Будем говорить, что f s*-дифференцируемо по Гато* в точке x, если слабый s-дифференциал $\partial^{[\prime]} f(x)h$ непрерывен по h, или, что равносильно, оператор $\partial_K^{[\prime]} f(x)$ ограничен по норме. Заметим, что в этом случае, обозначая

$$f(x+h) - f(x-h) = 2\partial^{[\prime]} f(x)h + \varphi(h), \tag{2.20}$$

имеем $\dfrac{\varphi(th)}{t} \to 0$ при $t \to 0\,(\forall\, h \in U(0))$.

Определение 2.9. Если отображение f s-дифференцируемо по Гато в точке x, причем сходимость в (2.18) равномерна по всем направлениям $\|h\| \leqslant 1$:

$$\frac{f(x+th) - f(x-th)}{2t} \rightrightarrows \partial^{[\prime]} f(x)h \quad \text{при } t \to 0,$$

то оператор $\partial^{[\prime]} f(x)h$ назовем s*-дифференциалом Фреше*, или *сильным* s*-диференциалом* f в точке x. Заметим, что в этом случае, используя обозначение (2.20), имеем: $\varphi(h) = o(\|h\|)$, или, что равносильно, $\dfrac{\varphi(th)}{t} \rightrightarrows 0$ при $t \to 0\,(\|h\| \leqslant 1)$.

Перейдем к важному вопросу об s-дифференцируемости композиции. Легко видеть, что композиция s-дифференцируемых отображений не является, вообще говоря, s-дифференцируемой даже в скалярном случае. Однако, мы покажем, что композиция строго дифференцируемого и s-дифференцируемого отображений сохраняет s-дифференцируемость. Далее мы рассматриваем отображения $f : E \to F$ и $g : F \to G$, определенные соответственно в некоторых окрестностях $U(x) \subset E$ и $V(y = f(x)) \subset F$, где E, F, G — банаховы пространства. Напомним определение строгой дифференцируемости.

Определение 2.10. Отображение g, дифференцируемое по Фреше в точке x_0, называется *строго дифференцируемым в точке* x_0, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что для всех x_1 и x_2, удовлетворяющих неравенствам $\|x_1 - x_0\| < \delta$, $\|x_2 - x_0\| < \delta$, выполнено неравенство

$$\|g(x_1) - g(x_2) - g'(x_0)(x_1 - x_2)\| \leqslant \varepsilon \|x_1 - x_2\|.$$

Докажем теорему об s-дифференцируемости композиции.

Теорема 2.12. *Если отображение* $f : E \to F$ s*-дифференцируемо по Фреше в точке* x *и непрерывно в этой точке, а отображение* $g : F \to G$ *строго дифференцируемо по Фреше в точке* $y = f(x) \in F$, *то композиция* $g \circ f : E \to G$ s*-дифференцируема по Фреше в точке* $x \in E$, *причем*

$$\partial^{[\prime]}(g \circ f)(x)h = g'\big(f(x)\big) \circ \partial^{[\prime]} f(x)h. \tag{2.21}$$

Доказательство. Как уже отмечалось выше, определение симметрической производной по Фреше можно записать в виде:

$$f(x+th) - f(x-th) = 2t \cdot \partial^{[\prime]} f(x)h + o(th), \tag{2.22}$$

причем сходимость в (2.22) при $t \to 0$ равномерна по всем направлениям $\|h\| \leqslant 1$.

Проведем замену обозначений и переменных:

$$y = f(x), \quad k_1(th) = f(x+th) - f(x), \quad k_2(th) = k_1(th) - 2t \cdot \partial^{[\prime]} f(x)h - o(th).$$

Тогда $f(x+th) = y + k_1(th)$, $f(x-th) = y + k_2(th)$, $k_1(th) - k_2(th) = 2t \cdot \partial^{[\prime]} f(x)h - o(th)$. Заметим, что $k_1(th) \to 0$ и $k_2(th) \to 0$ при $t \to 0$ равномерно по $\|h\| \leqslant 1$ в силу непрерывности и s-дифференцируемости отображения f в точке x.

Симметрическое разностное отношение для композиции $g \circ f$ в точке x по направлению h с учетом строгой дифференцируемости g в точке y можно преобразовать следующим образом:

$$\frac{\Delta(g\circ f)(x,th)}{2t} = \frac{g(f(x+th)) - g(f(x-th))}{2t} = \frac{g(y+k_1(th)) - g(y+k_2(th)}{2t} =$$

$$= \frac{g'(y)(k_1(th)-k_2(th)) + o(k_1(th)-k_2(th))}{2t} =$$

$$= \frac{g'(y)(2t\cdot\partial^{[\prime]} f(x)h - o(th)) + o(2t\cdot\partial^{[\prime]} f(x)h - o(th))}{2t} =$$

$$= [g'(y)\partial^{[\prime]} f(x)]\cdot h + \frac{o(2t\cdot\partial^{[\prime]} f(x)h)}{2t} = [g'(y)\partial^{[\prime]} f(x)]\cdot h + \frac{o(2t)}{2t}.$$

Переходя к пределу в последнем выражении при $t \to 0$, получаем (2.21). □

Перейдем к теореме о среднем для s-дифференциалов Фреше.

Теорема 2.13. *Пусть отображение* $f : E \supset [x; x+h] \to F$ *абсолютно непрерывно на* $[x; x+h]$ *и симметрически дифференцируемо на* $(x; x+h)$. *Тогда выполняется оценка*:

$$f(x+h) - f(x) \in \overline{co}\,\partial^{[\prime]} f\big((x; x+h)\big)\cdot h. \tag{2.23}$$

Доказательство. Положим $A(t) = x + th\,(0 \leqslant t \leqslant 1)$, $A : [0;1] \to E$. Тогда $f(x+th) = (f\cdot A)(t)$. Применяя к композиции $\varphi = f \cdot A$ формулу (2.19) и теорему о среднем 2.2 для отображений скалярного аргумента, получаем:

$$f(x+h) - f(x) = \varphi(1) - \varphi(0) \in \overline{co}\,\partial^{[\prime]}(f\cdot A)((0;1)) =$$
$$= \overline{co}\,\partial^{[\prime]} f(A((0;1)))\cdot A(1) = \overline{co}\,\partial^{[\prime]} f\big((x; x+h)\big)\cdot h.$$

□

Наконец, предъявим как следствие теорему о среднем с оценкой по норме.

Теорема 2.14. *В условиях теоремы* 2.13 *справедливы представление и оценка*:

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leqslant \sup_{0<\theta<1} \|\partial^{[\prime]} f(x+\theta h)\|\cdot\|h\|. \tag{2.24}$$

Доказательство. Здесь следует применить оценку (2.23) и учесть, что

$$\sup_{0<\theta<1} \|\overline{co}\,\partial^{[\prime]} f\big((x;x+h)\big)\cdot h\| \leqslant \sup_{0<\theta<1} \|\partial^{[\prime]} f(x+\theta h)\cdot h\| \leqslant \sup_{0<\theta<1} \|\partial^{[\prime]} f(x+\theta h)\|\cdot\|h\|.$$

□

Следуя предыдущей схеме, дадим определение s-дифференциала Фреше n-го порядка и получим формулу Тейлора. Вначале определим *степенной s-оператор* n-го порядка.

Определение 2.11. Пусть E и F — вещественные банаховы пространства. Отображение $A : E \to F$ будем называть *степенным s-оператором n-го порядка*, если A порождается некоторым n-линейным симметрическим оператором $\widetilde{A} : \overbrace{E\times\cdots\times E}^{n} \to F$:

$$A(h) = \widetilde{A}(\overbrace{h,\ldots,h}^{n}) = \widetilde{A}(h)^n. \tag{2.25}$$

В частности, $A(\lambda h) = \lambda^n \cdot A(h)$ при любом $\lambda \in \mathbb{R}$.

Оператор A при $n = 2$ будем называть *квадратичным* s-оператором, при $n = 3$ — *кубическим* s-оператором. Приведем следующее свойство «биномиальности» для степенного s-оператора.

Предложение 2.3. *Для любых $h, k \in E$ верно*:

$$A(h+k) = \sum_{l=0}^{n} C_n^l \widetilde{A}\Big((h)^l, (k)^{n-l}\Big). \tag{2.26}$$

Доказательство. Пусть оператор A порождается некоторым n-линейным симметрическим оператором $\widetilde{A}$: $A(h+k) := \widetilde{A}(h+k)^n$ для любых $h,\ k \in E$. Имеем, применяя известное свойство сочетаний:

$$\begin{aligned}\widetilde{A}(h+k)^n &= C_{n-1}^0 \widetilde{A}(h)^n + (C_{n-1}^1 + C_{n-1}^0)\widetilde{A}((h)^{n-1}, k) + (C_{n-1}^2 + C_{n-1}^1)\widetilde{A}((h)^{n-2}, (k)^2) + \cdots + \\ &+ (C_{n-1}^{m-1} + C_{n-1}^m)\widetilde{A}((h)^{n-m}, (k)^m) + \cdots + (C_{n-1}^{n-1} + C_{n-1}^{n-2})\widetilde{A}(h, (k)^{n-1}) + C_{n-1}^{n-1}\widetilde{A}(k)^n = \\ &= \widetilde{A}(h)^n + C_n^1 \widetilde{A}((h)^{n-1}, k) + C_n^2 \widetilde{A}((h)^{n-2}, (k)^2) + \cdots + \\ &+ C_n^m \widetilde{A}((h)^{n-m}, (k)^m) + \cdots + C_n^{n-1}\widetilde{A}(h, (k)^{n-1}) + \widetilde{A}(k)^n = \sum_{l=0}^{n} C_n^l \widetilde{A}((h)^l, (k)^{n-l}).\end{aligned}$$

□

Определение 2.12. Назовем *s-дифференциалом n-го порядка по направлению h* отображения $f : E \supset U(x) \to F$ в точке x следующий предел (если он существует):

$$\partial^{[n]} f(x, h) = \lim_{t\to+0}\bigg(\frac{1}{(2t)^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f\big(x + (n-2k)th\big)\bigg) = \lim_{t\to+0}\frac{\Delta^n f(x, th)}{(2t)^n}. \tag{2.27}$$

Если $\partial^{[n]} f(x, h)$ существует по любому направлению h и является степенным s-оператором n-го порядка, то будем говорить, что f *слабо s-дифференцируемо n раз* в точке x, и примем обозначение $\partial^{[n]} f(x)(h)$. Отметим, что в этом случае легко указать n-линейный порождающий оператор:

$$\widetilde{\partial}^{[n]} f(x)(h_1, \ldots, h_n) = \lim_{t\to+0}\bigg(\frac{1}{(2t)^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f\Big(x + t\sum_{i=0}^{n-2k} h_i\Big)\bigg).$$

Оператор $\widetilde{\partial}^{[n]} f(x)$ назовем *полисимметрическим дифференциалом порядка n* отображения f в точке x. Далее, если степенной s-оператор n-го порядка $\partial^{[n]} f(x)$ ограничен, то будем говорить, что *f s-дифференцируемо n раз в точке x по Гато*. Наконец, если $\partial^{[n]} f(x)$ — s-дифференциал Гато и сходимость в равенстве (2.27) равномерна по всем направлениям $\|h\| \leqslant 1$, то будем говорить, что *f s-дифференцируемо n раз в точке x по Фреше*. Отметим, что в этом случае справедливо равенство:

$$\frac{1}{2^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C_n^k f\big(x + (n-2k)h\big) = \partial^{[n]} f(x)(h) + o(\|h\|^n).$$

Из предложения 2.3 вытекает свойство «биномиальности» для $\partial^{[n]} f(x)$.

Предложение 2.4. *Для любых $h, k \in E$ верно*:

$$\partial^{[n]} f(x)(h+k) = \sum_{l=0}^{n} C_n^l \widetilde{\partial}^{[n]} f(x)\Big((h)^l, (k)^{n-l}\Big). \tag{2.28}$$

Полученную ранее в случае скалярного аргумента формула Тейлора (теорема 2.3) легко перенести на векторный случай.

Теорема 2.15. *Предположим, что существует $(f^{(n-1)})^{[\prime]}(x)$ и отображение f абсолютно непрерывно на отрезке $[x; x+h]$. Тогда имеет место оценка*

$$f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(h)^k \in \frac{1}{n!}\,\overline{co}\,\partial^{[n]} f\big((x; x+h)\big)\cdot(h) + o(\|h\|^n). \tag{2.29}$$

Доказательство. Положим $\varphi(t) = f(x+th)$, $\varphi : [0;1] \to E$. При этом $f(x+h) = \varphi(1)$, $f^{(k)}(x)(h)^k = \varphi^{(k)}(0)(h)^k$ и $\partial^{[n]} f(x)(h) = \partial^{[n]}\varphi(0)(h)$. Применяя к $\varphi(t)$ формулу (2.12) на отрезке $[0;\theta]$, получаем:

$$\varphi(\theta) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\theta^k \in \frac{1}{n!}\overline{co}\,\partial^{[n]}\varphi\big((0;\theta)\big)\cdot\theta^n + o(\theta^n).$$

Возвращаясь к f, имеем:

$$f(x+\theta h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(\theta h)^k \in \frac{1}{n!}\overline{co}\,\partial^{[n]} f\big((x+\theta h)\big)\cdot(\theta h) + o((\theta h)^n).$$

Переходя во всех слагаемых от θh к h, мы получаем исходное равенство (2.29). □

Справедливы также аналоги теорем 2.4 и 2.5 для случаев, соответственно, нечетного и четного порядков.

Теорема 2.16. *Предположим, что существует* $(f^{(2n)})^{[\prime]}(x)$, *и отображение* f *сильно абсолютно непрерывно на отрезке* $[x; x+h]$. *Тогда справедлива оценка*

$$f(x+h) - f(x-h) - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!}(h)^{2k-1} \in \frac{2}{(2n+1)!}\,\overline{co}\,\partial^{[2n+1]} f((x;x+h))\cdot(h) + o(\|h\|^{2n+1}).$$

Теорема 2.17. *Предположим, что существует* $(f^{(2n-1)})^{[\prime]}(x)$, *и отображение* f *сильно абсолютно непрерывно на отрезке* $[x; x+h]$. *Тогда справедлива оценка*

$$f(x+h) + f(x-h) - 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!}(h)^{2k} \in \frac{2}{(2n)!}\,\overline{co}\,\partial^{[2n+2]} f((x;x+h))\cdot(h) + o(\|h\|^{2n}).$$

3. Симметрический K-субдифференциал первого порядка для отображений скалярного аргумента

3.1. K_S-субдифференцируемость в вещественнозначном случае. Основные определения. В пункте 3.1 проверена регулярность определения относительно обычной s-производной, дано полное описание K_S-субдифференциалов от функционалов, получено условие монотонности функции в терминах K_S-субдифференциалов. Прежде всего, по образцу определения общего (центрированного) K-субдифференциала (см. [17, 19]), заменяя обычное разностное отношение на симметрическое, введем понятие симметрического K-субдифференциала (или K_S-субдифференциала) первого порядка. Всюду далее F — вещественное банахово пространство, $f : \mathbb{R} \supset U(x) \to F$.

Определение 3.1. Частный симметрический выпуклый субдифференциал имеет вид:

$$\partial^{[\prime]}_{co} f(x,\delta) = \overline{co}\left\{\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \;\Big|\; 0 < h < \delta\right\}.$$

Если существует K-предел $\partial^{[\prime]}_K f(x) = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\,\partial^{[\prime]}_{co} f(x,\delta)$, то назовем его *$K_S$-субдифференциалом* (*или симметрическим K-субдифференциалом*) *первого порядка* отображения f в точке x.

Нетрудно убедиться, что справедлива следующая

Теорема 3.1. *Если существует обычная симметрическая производная* $f^{[\prime]}(x)$, *то*

$$\partial^{[\prime]}_K f(x) = \left\{f^{[\prime]}(x)\right\}.$$

Доказательство. Из определения $f^{[\prime]}(x)$ следует, что для любой замкнутой выпуклой окрестности нуля $U \subset E$ существует положительное $\delta = \delta_U$ такое, что

$$(0 < h < \delta_U) \Longrightarrow \left(\frac{\Delta^1 f(x,h)}{2h} \in f^{[\prime]}(x) + U\right).$$

Отсюда вытекает, что

$$(0 < \delta < \delta_U) \Longrightarrow \left(\left\{\frac{\Delta^1 f(x,h)}{2h} \;\Big|\; 0 < h < \delta\right\} \subset f^{[\prime]}(x) + U\right),$$

и, следовательно, в силу замкнутости и выпуклости U верно включение

$$\left(\overline{co}\left\{\frac{\Delta^1 f(x,h)}{2h} \;\Big|\; 0<h<\delta\right\} \subset f^{[\prime]}(x)+U\right) \Longleftrightarrow (\partial^{[\prime]}_{co} f(x,\delta) \subset f^{[\prime]}(x)+U).$$

Отсюда, переходя к K-пределу, получаем $\partial^{[\prime]}_K f(x) \subset \left\{f^{[\prime]}(x)\right\}$, и т. к. $\left\{f^{[\prime]}(x)\right\}$ — одноточечное множество, то $\partial^{[\prime]}_K f(x) = \left\{f^{[\prime]}(x)\right\}$. □

В вещественнозначном случае $\partial^{[\prime]}_K f(x)$ может быть вычислен по простой формуле. Заметим вначале, что в этом случае $\partial^{[\prime]}_K f(x)$ есть компактный отрезок.

Теорема 3.2. *Функция $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ K_S-субдифференцируема в точке $x \in [a,b]$ тогда и только тогда, когда в этой точке существуют конечные верхняя и нижняя симметрические производные: $-\infty < \underline{f^{[\prime]}}(x) \leqslant \overline{f^{[\prime]}}(x) < +\infty$; при этом*

$$\partial^{[\prime]}_K f(x) = [\underline{f^{[\prime]}}(x); \overline{f^{[\prime]}}(x)]. \tag{3.1}$$

Доказательство. По определению верхней и нижней симметрических производных,

$$\underline{f^{[\prime]}}(x) = \varliminf_{h\to+0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}, \qquad \overline{f^{[\prime]}}(x) = \varlimsup_{h\to+0} \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h}. \tag{3.2}$$

1. Пусть величины (3.2) конечны, $\widetilde{B} = [\underline{f^{[\prime]}}(x); \overline{f^{[\prime]}}(x)]$, $U_\varepsilon = (-\varepsilon;\varepsilon)$. По свойствам верхнего и нижнего пределов:

$$\forall\,\varepsilon>0\;\exists\,\delta>0\;(0<h\leqslant\delta):\;\underline{f^{[\prime]}}(x)-\varepsilon \leqslant f(x+h)-f(x-h)/2h \leqslant \overline{f^{[\prime]}}(x)+\varepsilon.$$

Отсюда следует

$$\partial^{[\prime]}_{co} f(x,\delta) = \overline{co}\left\{\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \;\Big|\; 0<h<\delta\right\} \subset (\underline{f^{[\prime]}}(x)-\varepsilon; \overline{f^{[\prime]}}(x)+\varepsilon)$$

при $\widehat{\delta} \leqslant \delta$, т. е. $\partial^{[\prime]}_{co} f(x,\delta) \subset \widetilde{B}+U_\varepsilon$. Переход к K-пределу с использованием признака Вейерштрасса для K-пределов (теорема 1.1) дает существование K-предела и включение

$$\Big((\forall\varepsilon>0)\;\partial^{[\prime]}_K f(x) \subset (\underline{f^{[\prime]}}(x)-\varepsilon; \overline{f^{[\prime]}}(x)+\varepsilon)\Big) \Longrightarrow \Big(\partial^{[\prime]}_K f(x) \subset [\underline{f^{[\prime]}}(x); \overline{f^{[\prime]}}(x)]\Big). \tag{3.3}$$

2. Обратно, пусть существует $\partial^{[\prime]}_K f(x) = [y_1; y_2]$. Тогда, по определению K-предела $\forall\,\varepsilon > 0$ $\exists\,\delta > 0$:

$$\partial^{[\prime]}_{co} f(x,\delta) = \overline{co}\left\{\frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} \;\Big|\; 0<h<\delta\right\} \subset (y_1-\varepsilon; y_2+\varepsilon).$$

Тем более, при $0<h<\delta$ выполнено неравенство:

$$y_1-\varepsilon < \frac{f(x+h)-f(x-h)}{2h} < y_2+\varepsilon.$$

Переходя теперь к нижнему и верхнему пределам, получаем:

$$\Big(y_1-\varepsilon \leqslant \underline{f^{[\prime]}}(x) \leqslant \overline{f^{[\prime]}}(x) \leqslant y_2+\varepsilon\;(\forall\,\varepsilon>0)\Big) \Longrightarrow \Big([\underline{f^{[\prime]}}(x); \overline{f^{[\prime]}}(x)] \subset [y_1; y_2]\Big).$$

Таким образом,

$$[\underline{f^{[\prime]}}(x); \overline{f^{[\prime]}}(x)] \subset \partial^{[\prime]}_K f(x). \tag{3.4}$$

Из включений (3.3) и (3.4) следует равенство (3.1). □

Легко видеть, что справедливо и обратное утверждение.

Теорема 3.3. *Если K_S-субдифференциал $\partial^{[\prime]}_K f(x)$ является одноточечным множеством: $\partial^{[\prime]}_K f(x) = \{y\}$, то функция f симметрически дифференцируема в точке x.*

Приведем простой пример неодноточечного K_S-субдифференциала.

Пример 3.1. Положим $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ при $x > 0$; $f(x) = x^2\sin\dfrac{1}{x}$ при $x < 0$; $f(0) = 0$. Вычислим K_S-субдифференциал f в нуле. Имеем при любом $h > 0$:

$$\Delta^1 f(0,h) = f(h) - f(-h) = h\sin\frac{1}{h} + h^2\sin\frac{1}{h} = (h+h^2)\sin\frac{1}{h},$$

$$\frac{\Delta^1 f(0,h)}{2h} = \frac{(h+h^2)\sin\frac{1}{h}}{2h} = \frac{1+h}{2}\sin\frac{1}{h}.$$

Отсюда следует:

$$\underline{f^{[\prime]}}(0) = \varliminf_{h\to+0}\frac{\Delta^1 f(0,h)}{2h} = \frac{1}{2}(-1) = -\frac{1}{2}, \qquad \overline{f^{[\prime]}}(0) = \varlimsup_{h\to+0}\frac{\Delta^1 f(0,h)}{2h} = \frac{1}{2}\cdot 1 = \frac{1}{2}.$$

В силу теоремы 3.2 существует K_S-субдифференциал $\partial_K^{[\prime]} f(0) = [-1/2, 1/2]$. Заметим при этом, что, т. к. $\partial_K^{[\prime]} f(0)$ не является одноточечным, то $f^{[\prime]}(x)$ не существует.

Рассмотрим теперь вопрос о K_S-субдифференциале монотонной функции.

Теорема 3.4. *Пусть функция $f(x)$ возрастает и K_S-субдифференцируема в точке x. Тогда выполнено неравенство*

$$\inf \partial_K^{[\prime]} f(x) \geqslant 0.$$

Доказательство. В силу возрастания f симметрическое разностное отношение в точке x, очевидно, неотрицательно:

$$\frac{\Delta^1 f(x,h)}{2h} = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \geqslant 0 \quad (h > 0).$$

Отсюда следует, что при любом $\delta > 0$ верно включение $\partial_{co}^{[\prime]} f(x,\delta) \subset [0,+\infty)$, откуда, переходя к K-пределу, получаем $\Big(\partial_K^{[\prime]} f(x) \subset \partial_{co}^{[\prime]} f(x) \subset [0,+\infty)\Big) \iff \Big(\inf \partial_K^{[\prime]} f(x) \geqslant 0\Big)$. □

3.2. Связь симметрического и обычного K-субдифференциалов первого порядка. Как известно, симметрическая производная является обобщением обычной производной. Покажем, что и K_S-субдифференциал является обобщением обычного K-субдифференциала, при этом симметрическая оценка — более точная.

Теорема 3.5. *Если существует K-субдифференциал $\partial_K f(x)$, то существует и K_S-субдифференциал $\partial_K^{[\prime]} f(x)$, причем*

$$\partial_K^{[\prime]} f(x) \subset \partial_K f(x). \tag{3.5}$$

Доказательство. Преобразуем симметрическое разностное отношение:

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} = \frac{1}{2}\left[\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x-h) - f(x)}{-h}\right].$$

Отсюда следует:

$$\partial_{co}^{[\prime]} f(x,\delta) = \overline{co}\Big\{\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \;\Big|\; 0 < h < \delta\Big\} =$$

$$= \frac{1}{2}\overline{co}\Big\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} + \frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \;\Big|\; 0 < h < \delta\Big\} \subset$$

$$\subset \overline{\frac{1}{2}\left[\overline{co}\Big\{\frac{f(x+h) - f(x)}{h} \;\Big|\; 0 < h < \delta\Big\} + \overline{co}\Big\{\frac{f(x-h) - f(x)}{-h} \;\Big|\; 0 < h < \delta\Big\}\right]} \subset$$

$$\subset \overline{\frac{1}{2}\Big[\partial_{co} f(x,\delta) + \partial_{co} f(x,\delta)\Big]} \subset \overline{\partial_{co} f(x,\delta)} = \partial_{co} f(x,\delta)$$

в силу выпуклости и замкнутости множества $\partial_{co} f(x,\delta)$. Следовательно, $\partial_{co}^{[\prime]} f(x,\delta) \subset \partial_{co} f(x,\delta)$. Переходя к K-пределу при $\delta \to +0$ и используя признак Вейерштрасса для K-пределов при $\widetilde{B} = \partial_K f(x)$ (см. теорему 1.1), получаем включение (3.5). □

Замечание 3.1. Заметим, что включение в формуле (3.5) может быть строгим.

Пример 3.2. Пусть $f(x) = |x|$. Тогда, как легко вычислить, $\partial_K f(0) = [-1, 1]$, но $\partial_K^{[\prime]} f(0) = \{0\}$. Таким образом,

$$\partial_K^{[\prime]} f(0) \subsetneqq \partial_K f(0).$$

Замечание 3.2. Если существует K_S-субдифференциал $\partial_K^{[\prime]} f(x)$, то обычный K-субдифференциал $\partial_K f(x)$ может не существовать. Пусть, например, $f(x) = \sqrt[3]{x^2}$. Тогда $(f^{[\prime]}(0) = 0) \Longrightarrow$ $\Longrightarrow (\partial_K^{[\prime]} f(0) = \{0\})$. При этом

$$(\overline{\partial} f(0) = +\infty, \ \ \underline{\partial} f(0) = -\infty) \Longrightarrow (\partial_K f(0) \text{ не существует}).$$

3.3. Субаддитивность K_S-субдифференциала первого порядка. Рассмотрим ряд свойств K_S-субдифференциалов первого порядка, среди которых отметим субаддитивность.

Теорема 3.6 (субаддитивность)**.** *Пусть $f, g : \mathbb{R} \to F$. Если отображения f и g K_S-субдифференцируемы в точке x, то отображение $f + g$ также K_S-субдифференцируемо в точке x, причем*

$$\partial_K^{[\prime]}(f+g)(x) \subset \partial_K^{[\prime]} f(x) + \partial_K^{[\prime]} g(x). \tag{3.6}$$

Доказательство. Преобразуем симметрическое разностное отношение для $f + g$:

$$\frac{\Delta^1(f+g)(x,h)}{2h} = \frac{(f(x+h)+g(x+h)) - (f(x-h)+g(x-h))}{2h} = \\ = \frac{\Delta^1 f(x,h)}{2h} + \frac{\Delta^1 g(x,h)}{2h}.$$

Отсюда следует включение:

$$\partial_{co}^{[\prime]}(f+g)(x,\delta) = \overline{co}\left\{\frac{\Delta^1 f(x,h)}{2h} + \frac{\Delta^1 g(x,h)}{2h} \ \Big| \ 0 < h < \delta\right\} \subset \\ \subset \overline{co}\left\{\frac{\Delta^1 f(x,h)}{2h} \ \Big| \ 0 < h < \delta\right\} + \overline{co}\left\{\frac{\Delta^1 g(x,h)}{2h} \ \Big| \ 0 < h < \delta\right\} \subset \\ \subset \overline{co\left\{\frac{\Delta^1 f(x,h)}{2h} \ \Big| \ 0 < h < \delta\right\} + co\left\{\frac{\Delta^1 g(x,h)}{2h} \ \Big| \ 0 < h < \delta\right\}}. \tag{3.7}$$

Далее, для произвольной окрестности нуля $U \subset E$ выберем замкнутую выпуклую окрестность нуля U' так, чтобы $U' + U' \subset U$, и $\delta_{U'} > 0$ такое, чтобы при $0 < \delta < \delta_{U'}$ выполнялись включения:

$$\partial_{co}^{[\prime]} f(x,\delta) \subset \partial_K^{[\prime]} f(x) + U', \qquad \partial_{co}^{[\prime]} g(x,\delta) \subset \partial_K^{[\prime]} g(x) + U'.$$

Тогда имеем:

$$co\left\{\frac{\Delta^1 f(x,h)}{2h} \ \Big| \ 0 < h < \delta\right\} + co\left\{\frac{\Delta^1 g(x,h)}{2h} \ \Big| \ 0 < h < \delta\right\} \subset \\ \subset \partial_{co}^{[\prime]} f(x,\delta) + \partial_{co}^{[\prime]} g(x,\delta) \subset (\partial_K^{[\prime]} f(x) + U') + (\partial_K^{[\prime]} g(x) + U') \subset \\ \subset (\partial_K^{[\prime]} f(x) + \partial_K^{[\prime]} g(x)) + (U' + U') \subset (\partial_K^{[\prime]} f(x) + \partial_K^{[\prime]} g(x)) + U.$$

Так как множество $\partial_K^{[\prime]} f(x) + \partial_K^{[\prime]} g(x)$ компактно, а множество U замкнуто, то множество $(\partial_K^{[\prime]} f(x) + \partial_K^{[\prime]} g(x)) + U)$ замкнуто, откуда следует:

$$\overline{co\left\{\frac{\Delta^1 f(x,h)}{2h} \ \Big| \ 0 < h < \delta\right\} + co\left\{\frac{\Delta^1 g(x,h)}{2h} \ \Big| \ 0 < h < \delta\right\}} \subset (\partial_K^{[\prime]} f(x) + \partial_K^{[\prime]} g(x)) + U. \tag{3.8}$$

Из (3.7) и (3.8) следует включение:

$$\partial_{co}^{[\prime]}(f+g)(x,\delta) \subset (\partial_K^{[\prime]} f(x) + \partial_K^{[\prime]} g(x)) + U \text{ при } \delta < \delta_{U'}.$$

Отсюда и из определения K-предела следует:

$$\partial_K^{[\prime]}(f+g)(x) = \underset{\delta \to +0}{K\text{-}\lim}\, \partial_{co}^{[\prime]}(f+g)(x,\delta) \subset \bigcap_{U = U(0)} [(\partial_K^{[\prime]} f(x) + \partial_K^{[\prime]} g(x)) + U] = \partial_K^{[\prime]} f(x) + \partial_K^{[\prime]} g(x).$$

□

Заметим, что равенство в (3.6) может не иметь места.

Пример 3.3. Так же, как и в примере 3.1, рассмотрим функцию $f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ при $x > 0$; $f(x) = x^2\sin\dfrac{1}{x}$ при $x < 0$; $f(0) = 0$.

Пусть $g(x) = -f(x)$. Тогда $\Big((f+g)(x) \equiv 0\Big) \Longrightarrow \Big(\partial_K^{[\prime]}(f+g)(x) \equiv \{0\}\Big)$. В то же время, поскольку $\partial_K^{[\prime]}f(0) = [-1/2, 1/2]$ (см. пример 3.1), имеем:

$$\partial_K^{[\prime]}f(0) + \partial_K^{[\prime]}g(0) = \ = [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] + [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] = [-1, 1].$$

Таким образом, $\partial_K^{[\prime]}(f+g)(0) = \{0\} \subsetneqq [-1; 1] = \partial_K^{[\prime]}f(0) + \partial_K^{[\prime]}g(0)$.

Однако, если одна из функций в теореме 3.6 симметрически дифференцируема в обычном смысле, то включение (3.6) превращается в точное равенство.

Теорема 3.7. *Если отображение f K_S-субдифференцируемо в точке x, а отображение g симметрически дифференцируемо в точке x, то*

$$\partial_K^{[\prime]}(f+g)(x) = \partial_K^{[\prime]}f(x) + \partial_K^{[\prime]}g(x) = \partial_K^{[\prime]}f(x) + g^{[\prime]}(x). \tag{3.9}$$

Доказательство. В силу теоремы 3.6 выполнено включение

$$\partial_K^{[\prime]}(f+g)(x) \subset \partial_K^{[\prime]}f(x) + \{g^{[\prime]}(x)\}. \tag{3.10}$$

Покажем, что справедливо и обратное включение. В силу определения K_S-субдифференциала как K-предела частных симметрических субдифференциалов при любом $\delta > 0$ справедливо включение $\partial_K^{[\prime]}f(x) \subset \partial_{co}^{[\prime]}f(x,\delta)$. Отсюда следует:

$$\begin{aligned}\partial_K^{[\prime]}f(x) + g^{[\prime]}(x) \subset \partial_{co}^{[\prime]}f(x,\delta) + g^{[\prime]}(x) = \overline{co}\Big\{\frac{\Delta^1 f(x,h)}{2h}\ \Big|\ 0 < h < \delta\Big\} + g^{[\prime]}(x) = \\ = \overline{co}\Big\{\frac{\Delta^1 f(x,h)}{2h} + g^{[\prime]}(x)\ \Big|\ 0 < h < \delta\Big\}.\end{aligned} \tag{3.11}$$

Пусть теперь U — произвольная окрестность нуля в E. Выберем замкнутую выпуклую симметричную окрестность нуля $U' \subset E$ так, чтобы $U' + U' \subset U$. Так как

$$g^{[\prime]}(x) = \lim_{h\to 0}\frac{\Delta^1 g(x,h)}{2h},$$

то найдется такое $\delta = \delta^1_{U'} > 0$, что при $0 < h < \delta^1_{U'}$ выполняется включение:

$$\Big(\frac{\Delta^1 g(x,h)}{2h} \in g^{[\prime]}(x) + U'\Big) \Longrightarrow \Big(g^{[\prime]}(x) \in \frac{\Delta^1 g(x,h)}{2h} + U'\Big), \tag{3.12}$$

в силу выпуклости и симметричности U'.

Из (3.11) и (3.12) получаем при $\delta < \delta^1_{U'}$:

$$\begin{aligned}\partial_K^{[\prime]}f(x) + g^{[\prime]}(x) \subset \overline{co}\Big\{\frac{\Delta^1 f(x,h)}{2h} + \frac{\Delta^1 g(x,h)}{2h} + U'\ \Big|\ 0 < h < \delta\Big\} = \\ = \overline{co}\Big\{\frac{\Delta^1 f(x,h)}{2h} + \frac{\Delta^1 g(x,h)}{2h}\ \Big|\ 0 < h < \delta\Big\} + U' = \overline{\overline{co}\Big\{\frac{\Delta^1 (f+g)(x,h)}{2h}\ \Big|\ 0 < h < \delta\Big\} + U'} = \\ = \overline{\partial_{co}^{[\prime]}(f+g)(x,\delta) + U'}.\end{aligned}$$

Далее, из определения K_S-субдифференциала следует:

$$\partial_{co}^{[\prime]}(f+g)(x,\delta) \subset \partial_K^{[\prime]}(f+g)(x) + U' \text{ при достаточно малом } \delta < \delta^2_{U'}.$$

Следовательно, при $\delta < \min(\delta^1_{U'}, \delta^2_{U'})$ выполняется:

$$\partial_K^{[\prime]}f(x) + g^{[\prime]}(x) \subset \overline{[\partial_{co}^{[\prime]}(f+g)(x,\delta) + U']} + U' \subset \partial_K^{[\prime]}(f+g)(x) + U.$$

Отсюда получаем:

$$\partial_K^{[\prime]} f(x) + g^{[\prime]}(x) \subset \bigcap_{U=U(0)} (\partial_K^{[\prime]}(f+g)(x) + U) = \partial_K^{[\prime]}(f+g)(x),$$

в силу замкнутости последнего множества. Таким образом,

$$\partial_K^{[\prime]}(f+g)(x) \supset \partial_K^{[\prime]} f(x) + g^{[\prime]}(x). \tag{3.13}$$

Из включений (3.10) и (3.13) вытекает равенство (3.9). □

Следующий результат очевиден.

Теорема 3.8 (однородность по f)**.** *Пусть отображение* $f : \mathbb{R} \to E$ K_S*-субдифференцируемо в точке* $x \in \mathbb{R}$*. Тогда для любого* $\lambda \in \mathbb{R}$ *верно*:

$$\partial_K^{[\prime]}(\lambda f)(x) = \lambda\, \partial_K^{[\prime]} f(x).$$

Следствие 3.1 (сублинейность по f)**.** *В условиях теоремы* 3.7 *для любых* $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ *верно*:

$$\partial_K^{[\prime]}(\alpha f + \beta g)(x) \subset \alpha \partial_K^{[\prime]} f(x) + \beta \partial_K^{[\prime]} g(x).$$

3.4. Теорема о среднем для K_S-субдифференцируемых отображений. Наконец, в пункте 3.4 мы рассматриваем формы формулы конечных приращений и теоремы о среднем для K_S-субдифференцируемых отображений с оценкой по норме, не требующие абсолютной непрерывности отображений. Как приложение, описан широкий класс случаев, когда K_S-субдифференцируемость всюду на отрезке влечет почти всюду обычную дифференцируемость. Здесь, в отличие от разделов пункта 2.1, мы рассмотрим лишь случай оценки сверху, позволяющий исключить требование абсолютной непрерывности. Вначале приведем подходящую форму теоремы о конечных приращениях.

Теорема 3.9 (формула конечных приращений)**.** *Пусть* F *— вещественное банахово пространство,* $f : [a,b] \to F$*,* $g : [a,b] \to \mathbb{R}$*,* g *возрастает на* $[a,b]$*. Если отображения* f *и* g *непрерывны на* $[a,b]$*,* K_S*-субдифференцируемы на* (a,b) *и выполнена локальная оценка*

$$\sup \|\partial_K^{[\prime]} f(x)\| \leqslant \inf \partial_K^{[\prime]} g(x) \quad (a < x < b),$$

то имеет место глобальная оценка $\|f(b) - f(a)\| \leqslant g(b) - g(a)$*.*

Доказательство. Покажем, что $\forall x \in [a,b]\ \forall \varepsilon > 0$ выполняется неравенство:

$$\|f(x) - f(a)\| \leqslant g(x) - g(a) + \varepsilon(x-a) + \varepsilon. \tag{3.14}$$

Обозначим через $U = \big\{x \in [a,b] \ \big|\ (3.14) \text{ не выполнено}\big\}$, т. е. при $x \in U$:

$$\|f(x) - f(a)\| > g(x) - g(a) + \varepsilon(x-a) + \varepsilon. \tag{3.15}$$

Так как отображения f и g непрерывны на $[a,b]$, а неравенство (3.15), в свою очередь, может быть записано в виде $\big\{x \in [a,b] \ \big|\ \psi(x) > 0\big\}$, где $\psi(x)$ — непрерывная функция, то множество U открыто. Докажем, что $U = \varnothing$.

Допустим противное: $U \neq \varnothing$. Тогда существует $c = \inf U$. При этом:

1. $c > a$. Действительно, так как обе части неравенства (3.14) непрерывны и (3.14) верно в строгой форме при $x = a$, то оно верно и в некотором полуинтервале $[a, a+\delta)$.
2. $c \notin U$, так как множество U является открытым.
3. $c < b$. Действительно, если допустим, что $c = b$, то, поскольку U открыто, получаем $U \cap [a,b] = \varnothing$ — противоречие.

Таким образом, $a < c < b$. Следовательно, в точке c существуют K_S-субдифференциалы $\partial_K^{[\prime]} f(c)$ и $\partial_K^{[\prime]} g(c)$, и выполняется условие:

$$\sup \|\partial_K^{[\prime]} f(c)\| \leqslant \inf \partial_K^{[\prime]} g(c). \tag{3.16}$$

В силу определения K_S-субдифференциала $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta(\varepsilon) > 0\ \forall \delta < \delta(\varepsilon)$:

$$\overline{co}\Big\{ \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \ \Big|\ 0 < h < \delta \Big\} \subset O_{\frac{\varepsilon}{2}}(\partial_K^{[\prime]} f(x)),$$

$$\overline{co}\left\{\frac{g(x+h)-g(x-h)}{2h}\;\Big|\;0<h<\delta\right\}\subset O_{\frac{\varepsilon}{2}}(\partial_K^{[\prime]}g(x)).$$

Отсюда получаем при $0<h<\delta(\varepsilon)$:

$$\left\|\frac{f(c+h)-f(c-h)}{2h}\right\|\leqslant\sup\|\partial_K^{[\prime]}f(c)\|+\frac{\varepsilon}{2};\quad\frac{g(c+h)-g(c-h)}{2h}\geqslant\inf\partial_K^{[\prime]}g(c)-\frac{\varepsilon}{2}.\tag{3.17}$$

Из (3.16) и (3.17) следует:

$$\left\|\frac{f(c+h)-f(c-h)}{2h}\right\|\leqslant\sup\|\partial_K^{[\prime]}f(c)\|+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\inf\partial_K^{[\prime]}g(c)+\frac{\varepsilon}{2}\leqslant\frac{g(c+h)-g(c-h)}{2h}+\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2},$$

т. е.

$$\left\|\frac{f(c+h)-f(c-h)}{2h}\right\|\leqslant\frac{g(c+h)-g(c-h)}{2h}+\varepsilon.$$

Умножая обе части на $2h$, получаем:

$$\|f(c+h)-f(c-h)\|\leqslant[g(c+h)-g(c-h)]+2\varepsilon h.\tag{3.18}$$

Далее, из условия $c\notin U$ вытекает, что при $x=c-h$ выполняется (3.14):

$$\|f(c-h)-f(a)\|\leqslant[g(c-h)-g(a)]+\varepsilon((c-h)-a)+\varepsilon.\tag{3.19}$$

Из неравенств (3.18) и (3.19) находим:

$$\begin{gathered}\|f(c+h)-f(a)\|=\|f(c+h)-f(c-h)+f(c+h)-f(a)\|\leqslant\\ \leqslant\|f(c+h)-f(c-h)\|+\|f(c+h)-f(a)\|\leqslant\\ \leqslant[g(c+h)-g(c-h)]+2\varepsilon h+[g(c-h)-g(a)]+\varepsilon((c-h)-a)+\varepsilon=\\ =[g(c+h)-g(a)]+\varepsilon((c+h)-a)+\varepsilon,\end{gathered}$$

откуда следует: $\|f(c+h)-f(a)\|\leqslant[g(c+h)-g(a)]+\varepsilon((c+h)-a)+\varepsilon$. Таким образом, неравенство (3.14) верно при всех $x=c+h\in(c,c+\delta)$, что противоречит определению $c=\inf U$. Следовательно, $U=\varnothing$ и неравенство (3.14) верно для любого $x\in[a,b]$.

Положим теперь $x=b$ в неравенстве (3.14), тогда:

$$\|f(b)-f(a)\|\leqslant g(b)-g(a)+\varepsilon(b-a)+\varepsilon.$$

Перейдя к пределу при $\varepsilon\to0$, получим: $\|f(b)-f(a)\|\leqslant g(b)-g(a)$. □

Из теоремы 3.9 легко следует оценочная по норме форма теоремы о среднем для K_S-субдифференциалов.

Теорема 3.10 (теорема о среднем). *Если отображение $f:[a,b]\to F$ непрерывно на $[a,b]$ и K_S-субдифференцируемо на (a,b), то выполняется оценка*

$$\|f(b)-f(a)\|\leqslant\sup_{x\in(a,b)}\Big(\sup\|\partial_K^{[\prime]}f(x)\|\Big)\cdot(b-a).\tag{3.20}$$

Доказательство. Обозначим $k:=\sup\limits_{x\in(a,b)}\Big(\sup\|\partial_K^{[\prime]}f(x)\|\Big)$ $(0\leqslant k\leqslant+\infty)$. При $k=\infty$ неравенство (3.20), очевидно, выполняется. Допустим, что $k<\infty$, и положим $g(x)=kx$. Тогда $\partial_K^{[\prime]}g(x)=\{g'(x)\}=\{k\}$. Отсюда, применяя теорему 3.9, получаем: $\|f(b)-f(a)\|\leqslant g(b)-g(a)=k\cdot(b-a)$. □

Отметим несколько легко вытекающих из теоремы о среднем результатов, полезных при вычислении K_S-субдифференциалов.

Определение 3.2. Назовем отображение $f:(a,b)\to F$ *ограниченно K_S-субдифференцируемым* на (a,b) $\big(f\in B^{[1]}((a;b),F)\big)$, если $\sup\limits_{x\in(a,b)}\Big(\sup\|\partial_K^{[\prime]}f(x)\|\Big)<\infty$.

Теорема 3.11. *Пусть $f:[a,b]\to F$. Если отображение f непрерывно на $[a,b]$ и ограниченно K_S-субдифференцируемо на (a,b), то f удовлетворяет условию Липшица на $[a,b]$ $\big(f\in Lip([a;b],E)\big)$.*

Напомним, что банахово пространство F обладает свойством Радона—Никодима, если любое абсолютно непрерывное отображение $f:[a,b]\to F$ почти всюду дифференцируемо на $[a;b]$.

Теорема 3.12. *Пусть пространство F обладает свойством Радона—Никодима. Если отображение $f : [a, b] \to F$ непрерывно на $[a, b]$ и $f \in B^{[1]}((a; b), F)$, то f почти всюду дифференцируемо на $[a, b]$ в обычном смысле.*

Замечание 3.3. Напомним, что класс банаховых пространств, обладающих свойством Радона—Никодима, достаточно широк. В частности, к нему относятся все рефлексивные банаховы пространства. Для отображений в такие пространства в условиях последней теоремы K_S-субдифференцируемость может отличаться от обычной дифференцируемости лишь на множестве меры нуль. Отметим также, что в работах [18,28] рассмотрены применения K-субдифференциалов к исследованию проблемы Радона—Никодима для интеграла Бохнера.

4. Симметрические K-субдифференциалы второго и высших порядков для отображений скалярного аргумента

4.1. K_S-субдифференциалы второго порядка. В пункте 4.1 дается определение (в случае скалярного аргумента) второго K_S-субдифференциала и рассматриваются его простейшие свойства, включая регулярность относительно обычной s-дифференцируемости второго порядка, точное описание вторых K_S-субдифференциалов от функционалов, рекуррентную связь с обычной дифференцируемостью и субаддитивность по функции. Всюду далее будем рассматривать отображение $f : \mathbb{R} \to F$, определенное в некоторой окрестности $U(x)$ точки $x \in \mathbb{R}$, где F — произвольное вещественное банахово пространство. Отправляясь от определения второй симметрической производной, перейдем к основному определению.

Определение 4.1. *Частным выпуклым симметрическим субдифференциалом второго порядка* f в точке x назовем множество

$$\partial_{co}^{[\prime\prime]} f(x, \delta) = \overline{co}\left\{\frac{f(x + 2h) - 2f(x) + f(x - 2h)}{4h^2} \;\Big|\; 0 < h < \delta\right\}.$$

Если существует K-предел $\partial_K^{[\prime\prime]} f(x) = \underset{\delta \to +0}{K\text{-}\lim}\, \partial_{co}^{[\prime\prime]} f(x, \delta)$, назовем его *$K_S$-субдифференциалом второго порядка* отображения f в точке x.

Нетрудно убедиться, что справедлива

Теорема 4.1 (регулярность). *Обычная вторая симметрическая производная $f^{[\prime\prime]}(x)$ существует тогда и только тогда, когда существует одноточечный второй K_S-субдифференциал $\partial_K^{[\prime\prime]} f(x)$. При этом выполняется равенство*

$$\partial_K^{[\prime\prime]} f(x) = \left\{f^{[\prime\prime]}(x)\right\}. \tag{4.1}$$

Доказательство. Пусть существует обычная симметрическая производная второго порядка $f^{[\prime\prime]}(x)$. По определению

$$f^{[\prime\prime]}(x) = \lim_{h \to +0} \frac{f(x + 2h) - 2f(x) + f(x - 2h)}{4h^2}.$$

Для любой замкнутой выпуклой окрестности нуля $U \subset E \quad \exists\, \delta = \delta_U > 0$ $(0 < h < \delta_U)$ имеем:

$$\frac{\Delta^2 f(x, 2h)}{4h^2} \in f^{[\prime\prime]}(x) + U.$$

Отсюда $\left\{\dfrac{\Delta^2 f(x, 2h)}{4h^2} \;\Big|\; 0 < h < \delta\right\} \subset f^{[\prime\prime]}(x) + U$, и, следовательно,

$$\overline{co}\left\{\frac{\Delta^2 f(x, 2h)}{4h^2} \;\Big|\; 0 < h < \delta\right\} \subset f^{[\prime\prime]}(x) + U$$

в силу замкнутости и выпуклости U, т. е. $\partial_{co}^{[\prime\prime]} f(x, \delta) \subset f^{[\prime\prime]}(x) + U$. Переходя к K-пределу, получаем $\partial_K^{[\prime\prime]} f(x) \subset \left\{f^{[\prime\prime]}(x)\right\}$. Так как $\{f^{[\prime\prime]}(x)\}$ — одноточечное множество, то $\partial_K^{[\prime\prime]} f(x) = \left\{f^{[\prime\prime]}(x)\right\}$.

С другой стороны, пусть $\partial_K^{[\prime\prime]} f(x) = \Big\{y\Big\}$ — одноточечное множество. Поскольку $\partial_K^{[\prime\prime]} f(x) = K\text{-}\lim\limits_{\delta\to+0} \partial_{co}^{[\prime\prime]} f(x,\delta)$, то из определения K-предела следует, что $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta = \delta(\varepsilon)$:

$$\partial_{co}^{[\prime\prime]} f(x,\delta) = \overline{co}\left\{\frac{\Delta^2 f(x,2h)}{4h^2}\ \Big|\ 0 < h < \delta\right\} \subset (y-\varepsilon, y+\varepsilon).$$

Тогда тем более $\dfrac{\Delta^2 f(x,2h)}{4h^2} \in (y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ при $h < \delta(\varepsilon)$. В результате существует

$$\lim_{h\to 0} \frac{\Delta^2 f(x,2h)}{4h^2} = y,$$

т. е. $y = f^{[\prime\prime]}(x)$ и выполняется равенство (4.1). □

Таким образом, второй симметрический субдифференциал можно рассматривать как обобщение обычной второй симметрической производной. В вещественнозначном случае $\partial_K^{[\prime\prime]} f(x)$ есть компактный отрезок, концами которого являются нижняя и верхняя вторые симметрические производные.

Теорема 4.2. *Функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ имеет K_S-субдифференциал второго порядка в точке $x \in [a,b]$ тогда и только тогда, когда в этой точке конечны верхняя и нижняя симметрические производные*: $-\infty < \underline{f^{[\prime\prime]}}(x) \leqslant \overline{f^{[\prime\prime]}}(x) < +\infty$; *при этом*

$$\partial_K^{[\prime\prime]} f(x) = [\underline{f^{[\prime\prime]}}(x); \overline{f^{[\prime\prime]}}(x)]. \tag{4.2}$$

Доказательство. По определению верхней и нижней симметрических производных,

$$\underline{f^{[\prime\prime]}}(x) = \varliminf_{h\to+0} \frac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{4h^2},$$

$$\overline{f^{[\prime\prime]}}(x) = \varlimsup_{h\to+0} \frac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{4h^2}.$$

1. Пусть выполнено $-\infty < \underline{f^{[\prime\prime]}}(x) \leqslant \overline{f^{[\prime\prime]}}(x) < +\infty$. Положим $\widetilde{B} = [\underline{f^{[\prime\prime]}}(x), \overline{f^{[\prime\prime]}}(x)]$; $U_\varepsilon = [-\varepsilon, \varepsilon]$. По свойствам $\varliminf$ и $\varlimsup$ $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0\ (0 < h \leqslant \delta)$:

$$\underline{f^{[\prime\prime]}}(x) - \varepsilon \leqslant \frac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{4h^2} \leqslant \overline{f^{[\prime\prime]}}(x) + \varepsilon.$$

Отсюда $\partial_{co}^{[\prime\prime]} f(x,\hat\delta) = \overline{co}\left\{\dfrac{\Delta^2 f(x,2h)}{4h^2}\ \Big|\ 0 < h < \delta\right\} \subset [\underline{f^{[\prime\prime]}}(x) - \varepsilon; \overline{f^{[\prime\prime]}}(x) + \varepsilon]$ при $\hat\delta \leqslant \delta$, т. е. $\partial_{co}^{[\prime\prime]} f(x,\delta) \subset \widetilde{B} + U_\varepsilon$. Переход к K-пределу с использованием признака Вейерштрасса для K-пределов (теорема 1.1) дает существование $\partial_K^{[\prime\prime]} f(x) \subset [\underline{f^{[\prime\prime]}}(x) - \varepsilon; \overline{f^{[\prime\prime]}}(x) + \varepsilon]$. При $\varepsilon \to 0$ имеем:

$$\partial_K^{[\prime\prime]} f(x) \subset [\underline{f^{[\prime\prime]}}(x); \overline{f^{[\prime\prime]}}(x)]. \tag{4.3}$$

2. Обратно, пусть $\exists\,\partial_K^{[\prime\prime]} f(x)$ и $\partial_K^{[\prime\prime]} f(x) = [y_1; y_2]$. Тогда $\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0$:

$$\partial_{co}^{[\prime\prime]} f(x,\delta) = \overline{co}\left\{\frac{\Delta^2 f(x,2h)}{4h^2}\ \Big|\ 0 < h < \delta\right\} \subset (y_1 - \varepsilon; y_2 + \varepsilon).$$

Тем более,

$$y_1 - \varepsilon < \frac{\Delta^2 f(x,2h)}{4h^2} < y_2 + \varepsilon, \quad 0 < h < \delta.$$

Поэтому, переходя к $\varliminf$ и $\varlimsup$, получаем существование конечных верхней и нижней вторых симметрических производных: $y_1 - \varepsilon \leqslant \underline{f^{[\prime\prime]}}(x) \leqslant \overline{f^{[\prime\prime]}}(x) \leqslant y_2 + \varepsilon \quad \forall\varepsilon > 0$. Отсюда вытекает $[\underline{f^{[\prime\prime]}}(x); \overline{f^{[\prime\prime]}}(x)] \subset [y_1; y_2]$, т. е.

$$[\underline{f^{[\prime\prime]}}(x); \overline{f^{[\prime\prime]}}(x)] \subset \partial_K^{[\prime\prime]} f(x). \tag{4.4}$$

Из включений (4.3) и (4.4) следует равенство (4.2). □

Рассмотрим случай, когда вещественнозначная функция f дифференцируема в точке x.

Теорема 4.3. *Пусть функция $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ дифференцируема в окрестности точки x, а f' K_S-субдифференцируема в точке x. Тогда существует $\partial_K^{[\prime\prime]} f(x)$ и верна оценка*

$$\partial_K^{[\prime\prime]} f(x) \subset \partial_K^{[\prime]}(f')(x) = [\underline{f^{[\prime]}}(f')(x); \overline{f^{[\prime]}}(f')(x)].$$

Доказательство. Применяя теорему Коши по переменной h, имеем:

$$\frac{f(x+2h) - 2f(x) + f(x-2h)}{4h^2} = \frac{2f'(x+2\theta h) - 2f'(x-2\theta h)}{8\theta h} = \frac{f'(x+2\theta h) - f'(x-2\theta h)}{4\theta h}$$

$(0 < \theta < 1)$. Отсюда

$$\overline{co}\left\{\frac{\Delta^2 f(x,2h)}{4h^2} \;\Big|\; 0 < h < \delta\right\} = \overline{co}\left\{\frac{\Delta^1 f'(x,2\theta h)}{2(2\theta h)} \;\Big|\; 0 < \theta h < \delta\right\} \subset \overline{co}\left\{\frac{\Delta^1 f'(x,k)}{2k} \;\Big|\; 0 < k < \delta\right\}.$$

Переходя к K-пределу с использованием признака Вейерштрасса, получаем: $\partial_K^{[\prime\prime]} f(x) \subset \partial_K^{[\prime]}(f')(x)$. В вещественном случае из теоремы 3.2 имеем: $\partial_K^{[\prime]}(f')(x) = [\underline{f^{[\prime]}}(f')(x); \overline{f^{[\prime]}}(f')(x)]$. Отсюда $\partial_K^{[\prime\prime]} f(x) \subset \partial_K^{[\prime]}(f')(x) = [\underline{f^{[\prime]}}(f')(x); \overline{f^{[\prime]}}(f')(x)]$. □

Пример 4.1. Положим $\varphi(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$, где функция f задана равенствами:

$$\begin{cases} f(x) = x\sin\dfrac{1}{x}, & x > 0, \\ f(x) = x^2\sin\dfrac{1}{x}, & x < 0, \end{cases} \qquad f(0) = 0.$$

Тогда $\varphi(x)$ всюду дифференцируема и $\varphi'(x) = f(x)$. Значит, как было показано в примере 3.1,

$$\underline{(\varphi')^{[\prime]}}(0) = \underline{f^{[\prime]}}(0) = -\frac{1}{2}, \quad \overline{(\varphi')^{[\prime]}}(0) = \overline{f^{[\prime]}}(0) = \frac{1}{2}.$$

Отсюда по теореме 4.3 получаем $\partial_K^{[\prime\prime]}\varphi(0) = = [-1/2; 1/2]$.

Приведем пример вычисления второго симметрического субдифференциала в случае, когда второй симметрической производной не существует.

Пример 4.2. Положим $f(x) = x^2 \sin\dfrac{1}{x}$ при $x > 0$; $f(x) = x^3 \sin\dfrac{1}{x}$ при $x < 0$; $f(0) = 0$. Нетрудно убедиться, что $\underline{f^{[\prime\prime]}}(0) = -1$, $\overline{f^{[\prime\prime]}}(0) = 1$. В силу теоремы 4.2 существует $\partial_K^{[\prime\prime]} f(0) = [-1, 1]$.

Одним из наиболее важных свойств как обычного K-субдифференциала (см. [17, 20]), так и симметрических субдифференциалов первого и второго порядков является субаддитивность по f.

Теорема 4.4 (субаддитивность по f)**.** *Пусть $f, g : \mathbb{R} \to F$, где F — вещественное банахово пространство. Если отображения f и g дважды K_S-субдифференцируемы в точке x, то отображение $f + g$ также дважды K_S-субдифференцируемо в точке x, причем*

$$\partial_K^{[\prime\prime]}(f+g)(x) \subset \partial_K^{[\prime\prime]} f(x) + \partial_K^{[\prime\prime]} g(x). \tag{4.5}$$

Доказательство. Преобразуем симметрическое разностное отношение для $f + g$:

$$\frac{\Delta^2(f+g)(x,2h)}{4h^2} = \frac{\Delta^2 f(x,2h)}{4h^2} + \frac{\Delta^2 g(x,2h)}{4h^2}.$$

Отсюда следует включение:

$$\partial_{co}^{[\prime\prime]}(f+g)(x,\delta) = \overline{co}\left\{\frac{\Delta^2 f(x,2h)}{4h^2} + \frac{\Delta^2 g(x,2h)}{4h^2} \;\Big|\; 0 < h < \delta\right\} \subset$$

$$\subset \overline{co}\left\{\frac{\Delta^2 f(x,2h)}{4h^2} \;\Big|\; 0 < h < \delta\right\} + \overline{co}\left\{\frac{\Delta^2 g(x,2h)}{4h^2} \;\Big|\; 0 < h < \delta\right\} \subset \tag{4.6}$$

$$\subset \overline{co\left\{\frac{\Delta^2 f(x,2h)}{4h^2} \;\Big|\; 0 < h < \delta\right\} + co\left\{\frac{\Delta^2 g(x,2h)}{4h^2} \;\Big|\; 0 < h < \delta\right\}}.$$

Далее, для произвольной окрестности нуля $U \subset E$ выберем замкнутую выпуклую окрестность нуля U' так, чтобы $U' + U' \subset U$, и $\delta_{U'} > 0$ такое, чтобы при $0 < \delta < \delta_{U'}$ выполнялись включения: $\partial_{co}^{[\prime\prime]} f(x, \delta) \subset \partial_K^{[\prime\prime]} f(x) + U'$, $\quad \partial_{co}^{[\prime\prime]} g(x, \delta) \subset \partial_K^{[\prime\prime]} g(x) + U'$. Тогда имеем:

$$co\Big\{\frac{\Delta^2 f(x, 2h)}{4h^2} \;\Big|\; 0 < h < \delta\Big\} + co\Big\{\frac{\Delta^2 g(x, 2h)}{4h^2} \;\Big|\; 0 < h < \delta\Big\} \subset \partial_{co}^{[\prime\prime]} f(x, \delta) + \partial_{co}^{[\prime\prime]} g(x, \delta) \subset$$
$$\subset (\partial_K^{[\prime\prime]} f(x) + U') + (\partial_K^{[\prime\prime]} g(x) + U') \subset (\partial_K^{[\prime\prime]} f(x) + \partial_K^{[\prime\prime]} g(x)) + (U' + U') \subset (\partial_K^{[\prime\prime]} f(x) + \partial_K^{[\prime\prime]} g(x)) + U.$$

Так как множество $\partial_K^{[\prime\prime]} f(x) + \partial_K^{[\prime\prime]} g(x)$ компактно, а множество U замкнуто, то множество $(\partial_K^{[\prime\prime]} f(x) + \partial_K^{[\prime\prime]} g(x)) + U)$ замкнуто, откуда следует:

$$\overline{co\Big\{\frac{\Delta^2 f(x, 2h)}{4h^2} \;\Big|\; 0 < h < \delta\Big\} + co\Big\{\frac{\Delta^2 g(x, 2h)}{4h^2} \;\Big|\; 0 < h < \delta\Big\}} \subset (\partial_K^{[\prime\prime]} f(x) + \partial_K^{[\prime\prime]} g(x)) + U. \tag{4.7}$$

Из (4.6) и (4.7) следует включение: $\partial_{co}^{[\prime\prime]} (f+g)(x, \delta) \subset (\partial_K^{[\prime\prime]} f(x) + \partial_K^{[\prime\prime]} g(x)) + U$ при $\delta < \delta_{U'}$. Отсюда и из определения K-предела получаем:

$$\partial_K^{[\prime\prime]} (f+g)(x) = \underset{\delta \to +0}{K\text{-}\lim}\, \partial_{co}^{[\prime\prime]} (f+g)(x, \delta) \subset \bigcap_{U = U(0)} \Big[(\partial_K^{[\prime\prime]} f(x) + \partial_K^{[\prime\prime]} g(x)) + U\Big] = \partial_K^{[\prime\prime]} f(x) + \partial_K^{[\prime\prime]} g(x).$$

□

Нетрудно показать, что если одна из функций в теореме 4.4 дважды симметрически дифференцируема в обычном смысле, то включение (4.5) превращается в точное равенство.

Теорема 4.5. *Если отображение f дважды K_S-субдифференцируемо в точке x, а отображение g дважды симметрически дифференцируемо в точке x, то*

$$\partial_K^{[\prime\prime]} (f+g)(x) = \partial_K^{[\prime\prime]} f(x) + g^{[\prime\prime]}(x). \tag{4.8}$$

4.2. K-теорема Шварца и обобщенная K-теорема Шварца для K_S-субдифференциалов второго порядка. Приступая к реализации плана переноса обобщенного суммирования Римана на случай вторых K_S-субдифференциалов, в пункте 4.2 мы переносим классическую теорему Шварца, обобщенную теорему Шварца и ослабленное условие Шварца на случай дважды K_S-субдифференцируемых функций. Для удобства дальнейших рассуждений примем для основной функции обозначение F. Здесь мы рассмотрим только вещественный случай $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Важную роль в приложениях симметрических производных к рядам Фурье играет следующая теорема Шварца (см. [4, 30]):

Теорема 4.6 (теорема Шварца)**.** *Если $F(x)$ непрерывна на $[a; b]$ и $F^{[\prime\prime]}(x) = 0$ при $a < x < b$, то $F(x)$ линейна на этом отрезке.*

Если условие $F^{[\prime\prime]}(x) = 0$ выполняется всюду, кроме отдельных «точек неизвестности», то справедлива следующая

Теорема 4.7 (обобщенная теорема Шварца)**.** *Пусть для непрерывной на $[a; b]$ функции $F(x)$ выполнено равенство $F^{[\prime\prime]}(x) = 0$ всюду на $(a; b)$, кроме конечного числа «точек неизвестности» $a < x_1 < x_2 < \ldots < x_m < b$. Если в каждой из этих точек выполняется более слабое условие $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{\Delta^2 F(x_i, h)}{2h} = 0$, то $F(x)$ линейна на этом промежутке.*

Оказывается, второй K_S-субдифференциал в подобных случаях может играть ту же роль, что и обычная вторая симметрическая производная, с заменой равенства $F^{[\prime\prime]}(x) = 0$ на оценку $0 \in \partial_K^{[\prime\prime]} F(x)$.

Теорема 4.8 (K-теорема Шварца)**.** *Если функция $F(x)$ непрерывна на $[a; b]$, $\partial_K^{[\prime\prime]}$-субдифференцируема на $(a; b)$ и выполнено включение $0 \in \partial_K^{[\prime\prime]} F(x)$ при $a < x < b$, то $F(x)$ — линейная функция*:

$$F(x) = Ax + B \quad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{4.9}$$

Доказательство. Для произвольного $\varepsilon > 0$ построим пару вспомогательных функций

$$\varphi_{\pm}(x) = \pm\Big[F(x) - F(a) - \frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)\Big] + \varepsilon(x-a)(x-b).$$

Тогда при $x \in (a;b)$ имеем:

$$\partial_K^{[\prime\prime]}\varphi_{\pm}(x) = \pm\partial_K^{[\prime\prime]}F(x) + 2\varepsilon, \tag{4.10}$$

при этом $\varphi_{\pm}(a) = \varphi_{\pm}(b) = 0$. Докажем, что $\varphi_{\pm}(x) \equiv 0$ при $a \leqslant x \leqslant b$. Проведем проверку для $\varphi_{+}(x)$. Если допустить, что $\varphi_{+}(x) \not\equiv 0$ и принимает в некоторых точках $(a;b)$ строго положительные значения, то непрерывная функция $\varphi_{+}(x)$ достигает своего наибольшего положительного значения в некоторой внутренней точке $x_0 \in (a;b)$. В таком случае для достаточно малого $h > 0$: $\varphi_{+}(x_0 \pm 2h) \leqslant \varphi_{+}(x_0)$. Таким образом,

$$\Delta_h^2\varphi_{+}(x_0) = (\varphi_{+}(x_0+2h) - \varphi_{+}(x_0)) + (\varphi_{+}(x_0-2h) - \varphi_{+}(x_0)) \leqslant 0.$$

Вместе с тем при достаточно малых h: $\dfrac{\Delta^2\varphi_{+}(x_0,h)}{4h^2} \leqslant 0$ при $0 < h < \delta$. Значит,

$$\partial_{co}^{[\prime\prime]}\varphi_{+}(x_0,\delta) = \overline{co}\Big\{\frac{\Delta^2\varphi_{+}(x_0,h)}{4h^2}\ \Big|\ 0 < h < \delta\Big\} \subset (-\infty;0],$$

и, наконец,

$$\partial_K^{[\prime\prime]}\varphi_{+}(x_0) = K\text{-}\lim_{\delta\to+0}\partial_{co}^{[\prime\prime]}\varphi_{+}(x_0,\delta) \subset (-\infty;0],$$

вопреки равенству (4.10). Следовательно, $\varphi_{+}(x) \leqslant 0\ \forall\, x \in [a;b]$, откуда

$$\Big|F(x) - F(a) - \frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a)\Big| < \varepsilon(b-a)^2. \tag{4.11}$$

Переходя в оценке (4.11) к пределу при $\varepsilon \to 0$, получаем тождество

$$F(x) \equiv F(a) - \frac{F(b)-F(a)}{b-a}(x-a),$$

что равносильно равенству (4.9). □

Аналогично, если условия K-теоремы Шварца выполнены, за исключением конечного числа «точек неизвестности», то справедлива *обобщенная K-теорема Шварца*.

Теорема 4.9. *Пусть функция $F(x)$ непрерывна на $[a;b]$ и $\partial_K^{[\prime\prime]}$-субдифференцируема на $(a;b)$, причем $0 \in \partial_K^{[\prime\prime]}F(x)$ всюду, кроме конечного числа «точек неизвестности» $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_n < x_{n+1} = b$. Если в каждой из этих точек выполняется «ослабленное K-условие Шварца»:*

$$0 \in K\text{-}\lim_{\delta\to+0}\ \overline{co}\Big\{\frac{\Delta^2F(x_i,h)}{2h}\ \Big|\ 0 < h < \delta\Big\} \quad (i = \overline{0,n+1}), \tag{4.12}$$

то $F(x)$ — линейная функция на $[a;b]$.

Доказательство. Зафиксируем $i = \overline{1,n}$. По предыдущей теореме $F(x)$ — линейная функция в промежутке $[x_{i-1};x_i]$: $F(x) = cx + d$, а в смежном промежутке $[x_i;x_{i+1}]$: $F(x) = c'x + d'$. При этом в точке $x = x_i$ имеем:

$$F(x_i) = cx_i + d = c'x_i + d'. \tag{4.13}$$

Условие (4.12) для $x = x_i$ дает:

$$0 \in K\text{-}\lim_{\delta\to+0}\ \overline{co}\Big\{\frac{F(x_i+2h)-F(x_i)}{2h} - \frac{F(x_i-2h)-F(x_i)}{-2h}\ \Big|\ 0 < h < \delta\Big\}. \tag{4.14}$$

Выражение в фигурных скобках в (4.14) есть разность угловых коэффициентов прямых $y = cx + d$ и $y = c'x + d'$ и не зависит от h при достаточно малом $0 < h < \delta$, т. е. является константой. Таким образом, оценка (4.14) принимает вид:

$$\left(0 \in \left\{\frac{F(x_i+2h)-F(x_i)}{2h} - \frac{F(x_i-2h)-F(x_i)}{-2h}\right\}\right) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow \left(\frac{F(x_i+2h)-F(x_i)}{2h} = \frac{F(x_i-2h)-F(x_i)}{-2h}\right),$$

откуда получаем $c = c'$. Тогда из (4.13) следует, что $d = d'$, т. е. функция $y = c'x + d'$ является линейным продолжением на отрезок $[x_i; x_{i+1}]$ функции $y = cx+d$, заданной на $[x_{i-1}; x_i]$. Применяя это утверждение по индукции последовательно ко всем парам отрезков $\Big\{[x_{i-1}; x_i]; [x_i; x_{i+1}]\Big\}_{i=1}^{n}$, мы приходим к утверждению теоремы. □

Замечание 4.1. Используя свойство K-предела:

$$K\text{-}\lim_{\delta\to+0} \overline{co}\Big\{\Phi(x,h) \Bigm| 0<h<\delta\Big\} = \Big[\varliminf_{h\to+0} \Phi(x,h), \varlimsup_{h\to+0} \Phi(x,h)\Big],$$

«ослабленное K-условие Шварца» можно переписать в виде:

$$\varliminf_{h\to+0} \frac{\Delta^2 F(x,h)}{2h} \leqslant 0 \leqslant \varlimsup_{h\to+0} \frac{\Delta^2 F(x,h)}{2h}.$$

4.3. Обобщенный метод суммирования Римана. Посредством перехода в конструкции классического метода Римана (см. [4, 30]) от обычной второй симметрической производной к соответствующему K_S-субдифференциалу мы введем понятие так называемого K-метода Римана суммирования тригонометрических рядов. При этом докажем регулярность этого метода и покажем на примере его область применимости.

Вначале напомним схему классического метода Римана. Рассмотрим тригонометрический ряд с ограниченными коэффициентами

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx + b_n \sin nx. \tag{4.15}$$

Интегрируя его почленно два раза, получим абсолютно и равномерно сходящийся ряд. Обозначим через $F(x)$ его сумму. Это непрерывная функция, которая называется *функцией Римана* для тригонометрического ряда (4.15):

$$F(x) = \frac{a_0}{4}x^2 + Cx + D - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}.$$

Допустим, что в некоторой точке x_0 функция $F(x)$ имеет вторую симметрическую производную $F^{[\prime\prime]}(x_0)$. Тогда ряд (4.15) *суммируем* в точке x_0 *методом Римана*, и его римановская сумма равна $F^{[\prime\prime]}(x_0)$.

Заменяя в описанной выше конструкции классического метода Римана вторую симметрическую производную на второй симметрический K-субдифференциал, мы приходим к *K-методу Римана* суммирования тригонометрических рядов.

Определение 4.2. Если в некоторой точке x_0 функция $F(x)$ имеет второй K_S-субдифференциал $\partial_K^{[\prime\prime]} F(x_0)$, то будем говорить, что тригонометрический ряд (4.15) суммируем в точке x_0 *K-методом Римана*, и его K-сумма есть *множество* $\partial_K^{[\prime\prime]} F(x_0)$.

Так как K_S-субдифференциал $\partial_K^{[\prime\prime]} F(x)$ есть обобщение обычной симметрической производной $F^{[\prime\prime]}(x)$, то K-метод Римана является, вообще говоря, более общим, чем классический метод Римана.

Теорема 4.10. *Если тригонометрический ряд* (4.15) *с коэффициентами, стремящимися к нулю, суммируется методом Римана в точке x_0 к числу S, то он суммируется в этой точке к $\{S\}$ и K-методом Римана, причем имеет место равенство*

$$\partial_K^{[\prime\prime]} F(x_0) = \{F^{[\prime\prime]}(x_0)\} = \{S\}. \tag{4.16}$$

Как следствие, учитывая регулярность классического метода Римана, приходим к регулярности K-метода Римана относительно обычной сходимости.

Следствие 4.1. *Если в условиях теоремы* 4.10 *ряд* (4.15) *суммируется обычным образом в точке x_0 к числу S, то он суммируется в этой точке к S и K-методом Римана.*

Продемонстрируем на примере, что область применимости K-метода Римана строго шире области применимости классического метода Римана.

Пример 4.3. Положим $\Phi(x) = x\sin\dfrac{1}{x}$ при $x > 0$; $\Phi(x) = x^2\sin\dfrac{1}{x}$ при $x < 0$; $\Phi(0) = 0$.

Введем теперь функцию $F(x) = \int\limits_0^x \Phi(t)\,dt$. Тогда $F'(x) = \Phi(x)$, следовательно:

$$\partial_K^{[\prime\prime]}F(0) = \Big[\underline{(F')^{[\prime]}}(0); \overline{(F')^{[\prime]}}(0)\Big] = \Big[\underline{(\Phi)^{[\prime]}}(0); \overline{(\Phi)^{[\prime]}}(0)\Big] = \Big[-\frac{1}{2}; \frac{1}{2}\Big].$$

При этом

$$f(x) = F''(x) = \Phi'(x) = \begin{cases} \sin\dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{x}\cos\dfrac{1}{x} \text{ при } x > 0, \\ \\ 2x\sin\dfrac{1}{x} - \cos\dfrac{1}{x} \text{ при } x < 0. \end{cases}$$

В силу того, что функция $\Phi(x)$ непрерывна в точке $x = 0$, имеем $f \in L_1(\mathbb{R})$ и $F(x)$ — функция Римана для $f(x)$. Таким образом, ряд Фурье для $f(x)$ суммируем в точке $x = 0$ K-методом Римана к множеству $[-1/2; 1/2]$ и поэтому не суммируется классическим методом Римана в этой точке.

K-метод Римана, как и классический метод Римана, в приложении к рядам Фурье в силу теоремы 4.10 дает следующий результат.

Теорема 4.11. *Ряд Фурье от любой суммируемой функции $f(x)$ на $[-\pi; \pi]$ суммируется K-методом Римана почти всюду к этой функции.*

4.4. «Ослабленное K-условие Шварца» для тригонометрических рядов и обобщенная теорема Кантора. На основе предыдущих результатов (в пункте 4.4) мы обобщим теорему Кантора о суммировании методом Римана тригонометрического ряда на случай K-метода Римана. Отметим, что при этом удается исключить условие стремления к нулю коэффициентов ряда. Важным результатом классической теории рядов Фурье является следующая

Теорема 4.12 (теорема Кантора). *Если тригонометрический ряд* (4.15) *с коэффициентами, стремящимися к нулю, суммируем к нулю методом Римана всюду, кроме, быть может, конечного числа точек, то все его коэффициенты равны нулю.*

Заметим, что в условиях теоремы Кантора во всех «точках неизвестности» $x_1, \ldots, x_n$ автоматически выполнено (см. [30, п. 747, вторая теорема Римана]) ослабленное условие Шварца:

$$\lim_{h \to +0} \frac{\Delta^2 F(x_i, h)}{2h} = 0. \tag{4.17}$$

Докажем теперь аналог теоремы Кантора для K-метода Римана, в котором ослабленное условие Шварца (4.17) заменяется еще более слабым условием:

$$\varliminf_{h \to +0} \frac{\Delta^2 F(x_i, h)}{2h} \leqslant 0 \leqslant \varlimsup_{h \to +0} \frac{\Delta^2 F(x_i, h)}{2h}, \tag{4.18}$$

при исключении условия стремления к нулю коэффициентов тригонометрического ряда.

Теорема 4.13 (K-теорема Кантора). *Если тригонометрический ряд* (4.15) *с ограниченными коэффициентами* (*где необязательно* $a_n, b_n \to 0$) *суммируется к нулю K-методом Римана всюду, кроме конечного числа точек $x_1, \ldots, x_n$, в которых выполняется «ослабленное K-условие Шварца»* (4.18)*, то* $a_n = b_n = 0$.

Доказательство. По условию теоремы «ослабленное K-условие Шварца» выполнено. Это позволяет применить в нашем случае теорему 4.9 к функции $F(x)$. По обобщенной теореме Шварца (теорема 4.7) функция Римана $F(x)$ должна быть линейной на каждом интервале $(a;b)$, где ряд (4.15) сходится к нулю. Тогда имеем

$$F(x) = Ax + B \qquad (a \leqslant x \leqslant b). \tag{4.19}$$

Но, так как $F(x)$ есть функция Римана для ряда (4.15), то

$$F(x) = \frac{a_0}{4}x^2 + Cx + D - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}. \tag{4.20}$$

Из (4.19) и (4.20), обозначая $A_1 = C - A,\ B_1 = D - B$, получаем:

$$\frac{a_0}{4}x^2 + A_1 x + B_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}.$$

Но правая часть имеет период 2π, значит, и левая тоже, а это возможно только при

$$a_0 = 0 \text{ и } A_1 = 0. \tag{4.21}$$

Значит,

$$B_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n \cos nx + b_n \sin nx}{n^2}. \tag{4.22}$$

Ряд (4.22) сходится равномерно по мажорантному признаку Вейерштрасса, поэтому его коэффициенты являются коэффициентами Фурье от его суммы, но она есть постоянное число B_1, а потому $a_n/n^2 = b_n/n^2 = 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$, откуда следует

$$a_n = b_n = 0 \qquad (n = 1, 2, \ldots). \tag{4.23}$$

Из (4.21) и (4.23) следует, что ряд (4.22) — нулевой. □

4.5. Пример эффективности «K-условия Шварца» для рядов Фурье. Эффективность «ослабленного K-условия Шварца» демонстрируется на примере достаточно общего вида. Построим функцию $F(h)$, которая при $h > 0$ будет иметь вид:

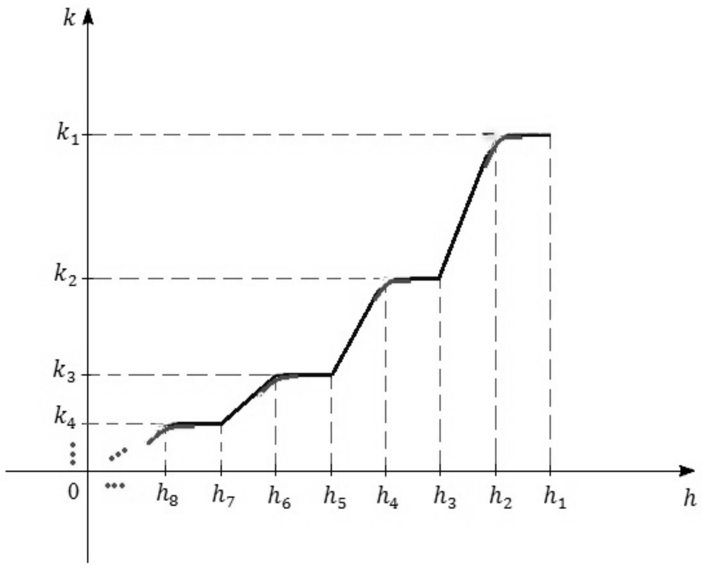

Рис. 4.1

При этом $h_n \searrow 0, k_n \searrow 0, F(0) = 0$ и $F(h)$ четным образом продолжается для $h < 0$, причем $F(h)$ C^2-сглажена в малых окрестностях угловых точек.

Рассмотрим поведение функции $F(h)$ на n-м шаге.

1. $h_{2n} \leqslant h \leqslant h_{2n-1}$: $F(h) = k_n$, $\dfrac{k_n}{h_{2n-1}} \leqslant \dfrac{F(h)}{h} \leqslant \dfrac{k_n}{h_{2n}}$.
2. $h_{2n+1} \leqslant h \leqslant h_{2n}$: $F(h)$ линейная, $\dfrac{F(h)}{h} \equiv \dfrac{k_n - k_{n+1}}{h_{2n} - h_{2n+1}}$.

Потребуем, чтобы выполнялись условия:

$$(i) \quad \lim_{n\to\infty} \frac{h_{n+1}}{h_n} = 0, \qquad \lim_{n\to\infty} \frac{k_{n+1}}{k_n} = 0; \qquad (ii) \quad 0 < \lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{h_{2n}} = L < \infty.$$

В этом случае

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{h_{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{h_{2n}} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{h_{2n}}{h_{2n-1}} = L \cdot 0 = 0,$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{k_n - k_{n+1}}{h_{2n} - h_{2n+1}} = \lim_{n\to\infty} \frac{k_n + o(k_n)}{h_{2n} + o(h_{2n})} = \lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{h_{2n}} = L.$$

Следовательно, $\overline{\lim\limits_{h\to 0}}(F(h)/h) = L$, $\quad \underline{\lim\limits_{h\to 0}}(F(h)/h) = 0$, откуда следует

$$K\text{-}\lim_{\delta\to+0} \overline{co}\left\{ \frac{\Delta^2 F(0,h)}{2h} \;\Big|\; 0 < h < \delta \right\} = [0; L] \ni 0. \tag{4.24}$$

В частности, из (4.24) следует $\overline{\lim\limits_{h\to+0}} \dfrac{\Delta^2 F(0,h)}{4h^2} = \overline{F^{[\prime\prime]}}(0) = +\infty$, т. е. F не является $\partial_K^{[\prime\prime]}$-субдифференцируемой в нуле. Отметим, что $F(h)$ — функция Римана для функции $f(h) = F''(h)$ $(h \neq 0)$. Приведем конкретный пример.

Пример 4.4. Пусть $h_n = \dfrac{1}{n!}$, $k_n = \dfrac{1}{(2n)!}$ $(n \in \mathbb{N})$. Тогда $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{h_{n+1}}{h_n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k_{n+1}}{k_n} = 0$, $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{k_n}{h_{2n}} = 1$. Таким образом, последовательности $h_n \searrow 0$ и $k_n \searrow 0$ удовлетворяют описанным выше условиям (i)-(ii).

4.6. Формула Тейлора для K_S-субдифференциалов высших порядков. Здесь мы перенесем результаты пункта 2.1 на случай K_S-субдифференцируемых отображений. Далее полагаем, что $f : \mathbb{R} \supset U(x) \to F$, где F — вещественное банахово пространство. Введем понятие K_S-субдифференциала n-го порядка.

Определение 4.3. Назовем *K_S-субдифференциалом n-го порядка* отображения f в точке x следующий K-предел, если он существует:

$$\partial_K^{[n]} f(x) = K\text{-}\lim_{\delta\to+0} \overline{co}\left\{ \frac{1}{(2h)^n} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k f\big(x + (n-2k)h\big) \;\Big|\; 0 < h < \delta \right\}.$$

Справедлив следующий аналог предложения 2.1.

Предложение 4.1. *Если существует $\partial_K^{[\prime]}(f^{(n-1)})(x)$, то существует K_S-субдифференциал n-го порядка $\partial_K^{[n]} f(x)$ и имеет место включение*

$$\partial_K^{[n]} f(x) \subset \partial_K^{[\prime]}(f^{(n-1)})(x).$$

Получим теперь формулу Тейлора с остаточным членом в форме Пеано для K_S-субдифференциалов.

Теорема 4.14. *Предположим, что существует $\partial_K^{[\prime]} f^{(n-1)}(x)$ и отображение f абсолютно непрерывно в окрестности точки x. Тогда имеет место оценка*

$$f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k \in \frac{h^n}{n!} \overline{co}\Big\{ \bigcup_{0<\theta<1} \big(\partial_K^{[\prime]} f^{(n-1)}\big)(x + \theta h) \Big\} + o(h^n). \tag{4.25}$$

Доказательство. Из существования $\partial_K^{[l]} f^{(n-1)}(x)$ следует, что f имеет обычные производные до $(n-1)$ порядка включительно в окрестности точки x. Применим математическую индукцию.

1. При $n = 1$ оценка (4.25) приводит к теореме о среднем (см. п. 5, теорема 5.20):

$$f(x+h) - f(x) \in \overline{co}\Big\{ \bigcup_{0<\theta<1} \big(\partial_K^{[l]} f\big)(x+\theta h)\Big\} \cdot h + o(h).$$

2. Допустим, утверждение теоремы верно для любого $\widetilde{f}$, удовлетворяющего условию теоремы для порядка $(n-1)$:

$$\widetilde{f}(x+h) - \widetilde{f}(x) \in \frac{h^{n-1}}{(n-1)!}\,\overline{co}\Big\{ \bigcup_{0<\theta<1} \big(\partial_K^{[l]} \widetilde{f}^{(n-2)}\big)(x+\theta h)\Big\} + o(h^{n-1}).$$

Отсюда для любого $y_{n-1} \in \overline{co}\Big\{ \bigcup\limits_{0<\theta<1} \big(\partial_K^{[l]} \widetilde{f}^{(n-2)}\big)(x+\theta h)\Big\}$ имеем:

$$\widetilde{f}(x+h) - \widetilde{f}(x) - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} y_{n-1} \in o(h^{n-1}),$$

где $o(h^{n-1})$ не зависит от выбора y_{n-1}. Введем для любого $y_n \in \overline{co}\Big\{ \bigcup\limits_{0<\theta<1} \big(\partial_K^{[l]} f^{(n-1)}\big)(x+\theta h)\Big\}$ вспомогательную функцию:

$$r_n(f;h) = f(x+h) - f(x) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k - \frac{h^n}{n!} y_n.$$

Вычислим обычную производную по h вспомогательной функции r_n:

$$r_n'(f;h) = f'(x+h) - \sum_{k=1}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{(k-1)!} h^{k-1} - \frac{h^{n-1}}{(n-1)!} y_n.$$

Поскольку $\partial_K^{[l]} f^{(n-1)}(x) = \partial_K^{[l]}((f')^{(n-1)})(x)$, то по допущению индукции $r_n'(f;h) = r_{n-1}(f';h) = o(h^{n-1})$. Применяя классическую теорему о среднем $(0 < \theta < 1)$, получаем:

$$r_n(f;h) \in \overline{co}\Big\{ r_n'(f;\theta h) \;\Big|\; 0 < \theta < 1\Big\} \cdot h = o(h^{n-1}) \cdot h = o(h^n).$$

Итак, доказано по индукции, что $f(x+h) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k - \frac{h^n}{n!} y_n = o(h^n)$, где многозначная оценка «о» не зависит от выбора $y_n \in \overline{co}\Big\{ \bigcup\limits_{0<\theta<1} \big(\partial_K^{[l]} f^{(n-1)}\big)(x+\theta h)\Big\}$.

Следовательно,

$$f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k \in \frac{h^n}{n!} y_n + o(h^n)$$

при любом выборе $y_n \in \overline{co}\Big\{ \bigcup\limits_{0<\theta<1} \big(\partial_K^{[l]} f^{(n-1)}\big)(x+\theta h)\Big\}$. Таким образом, мы получили равенство (4.25). □

Отметим, что здесь, как и в соответствующей теореме пункта 2.3, при $n \geqslant 4$ условие абсолютной непрерывности f в окрестности x выполняется автоматически, ввиду $f \in C^1(U(x))$.

Для нечетного порядка имеет место следующая формула Тейлора.

Теорема 4.15. *Предположим, что существует $\partial_K^{[l]}(f^{(2n)})(x) = \partial_K^{[2n+1]} f(x)$ и отображение f абсолютно непрерывно в окрестности точки x. Тогда имеет место оценка*

$$f(x+h) - f(x-h) - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!} h^{2k-1} \in 2\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!} \partial_K^{[2n+1]} f(x) + o(h^{2n+1}). \tag{4.26}$$

Доказательство. Применяя формулу Тейлора (4.25) порядка $(2n+1)$ к $f(x+h)$ и $f(x-h)$, получаем:

$$f(x+h)-\sum_{k=0}^{2n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}h^k \in \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}\,\overline{co}\,\partial_K^{[2n+1]}f\big((x;x+h)\big)+o(h^{2n+1}); \tag{4.27}$$

$$f(x-h)-\sum_{k=0}^{2n}\frac{f^{(k)}(x)}{k!}(-h)^k \in \frac{(-h)^{2n+1}}{(2n+1)!}\,\overline{co}\,\partial_K^{[2n+1]}f\big((x-h;x)\big)+o((-h)^{2n+1}). \tag{4.28}$$

Вычитая почленно оценки (4.27) и (4.28) и приводя слева подобные члены, получаем:

$$\begin{aligned} f(x+h)-f(x-h)-2\sum_{k=1}^{n}\frac{f^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!}h^{2k-1}\in \\ \in \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big(\overline{co}\,\partial_K^{[2n+1]}f((x;x+h))+\overline{co}\,\partial_K^{[2n+1]}f((x-h;x))\Big)+o(h^{2n+1})\subset \\ \subset \frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}\Big(\overline{co}\,\partial_K^{[2n+1]}f((x-h;x+h))+\overline{co}\,\partial_K^{[2n+1]}f((x-h;x+h))\Big)+o(h^{2n+1})= \\ =2\frac{h^{2n+1}}{(2n+1)!}\overline{co}\,\partial_K^{[2n+1]}f((x-h;x+h))+o(h^{2n+1}). \end{aligned}$$

□

Аналогично доказывается формула Тейлора в четном случае.

Теорема 4.16. *Предположим, что существует* $\partial_K^{[2n]}f(x)=\partial_K^{[\prime]}(f^{(2n-1)})(x)$ *и отображение* f *абсолютно непрерывно в окрестности точки* x. *Тогда имеет место оценка*

$$f(x+h)+f(x-h)-2\sum_{k=0}^{n-1}\frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!}h^{2k}\in 2\frac{h^{2n}}{(2n)!}\partial_K^{[2n]}f(x)+o(h^{2n}). \tag{4.29}$$

5. Симметрический K-субдифференциал первого порядка для отображений векторного аргумента

5.1. K_S-сублинейные операторы и их основные свойства. Здесь, опираясь на известные свойства конуса K-операторов, мы описываем соответствующие свойства K_S-операторов. Напомним некоторые сведения из теории K-операторов, построенной недавно в работах [16, 19]. Пусть F — вещественное банахово пространство. Через F_K обозначим выпуклый конус всех непустых компактных выпуклых подмножеств F. Конус F_K является индуктивно упорядоченным и нормированным относительно нормы $\|C\|=\sup\limits_{y\in C}\|y\|$. Конус F_K обладает также свойством квазиполноты (см. [16, теорема 3.3]), т. е. является *банаховым конусом*. Сублинейный оператор $A:E\to F_K$, где A — линейное пространство, называется E-оператором. Свойства K-операторов исследованы в [16].

Введем теперь понятие K_S-оператора. Заметим, что оно отличается от понятия K-оператора выполнением свойства однородности в полном объеме, в то время как K-операторы обладают лишь свойством позитивной однородности.

Определение 5.1. Пусть E — линейное пространство, F — банахово пространство. Отображение $A:E\to F_K$ назовем *K_S-сублинейным оператором* (или *K_S-оператором*), если для любых $h_1,h_2,h\in E$ верно:

$$(i)\quad A(h_1+h_2)\subset Ah_1+Ah_2; \qquad (ii)\quad A(\lambda h)=\lambda\cdot Ah \text{ при любом } \lambda\in\mathbb{R}.$$

Далее операторы, удовлетворяющие свойствам (i)-(ii), будем называть *s-сублинейными*. Рассмотрим теперь случай, когда E — также банахово пространство. Пусть A — K_S-оператор, действующий из E в F_K.

Определение 5.2. Будем говорить, что K_S-оператор A *ограничен* (*по норме*), если

$$\|A\| := \sup_{\|h\|\leqslant 1} \|Ah\| < \infty. \tag{5.1}$$

Замечание 5.1. Нетрудно убедиться, что норма K_S-оператора обладает обычными свойствами нормы:

1. $\|A\| \geqslant 0$, $(\|A\| = 0) \iff A = 0$;
2. $\|A + B\| \leqslant \|A\| + \|B\|$;
3. $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$ при любом $\lambda \in \mathbb{R}$.

Поскольку K_S-операторы являются частным случаем K-операторов, то для них сохраняется также свойство:

4. $\|Ah\| \leqslant \|A\| \cdot \|h\|$.

По этой же причине для K_S-операторов сохраняется следующая связь между непрерывностью и ограниченностью по норме (см. [16, теорема 3.1]):

Теорема 5.1. *K_S-оператор $A : E \to F_K$ ограничен по норме тогда и только тогда, когда A непрерывен в нуле или, что равносильно, тогда и только тогда, когда A равномерно полунепрерывен сверху всюду на E.*

Обозначим множество всех ограниченных K_S-операторов $A : E \to F_K$ через $L^S_K(E;F)$. Нетрудно видеть, что $L^S_K(E;F)$ — нормированный конус, являющийся подконусом нормированного конуса $L_K(E;F)$.

Теорема 5.2. *Для любых нормированных пространств E и F множество $L^S_K(E;F)$ образует нормированный конус. При этом конус $L^S_K(E;F)$ индуктивно упорядочен отношением*

$$(A_1 \leqslant A_2) :\iff (A_1 h \subset A_2 h \ (\forall\, h \in E)),$$

и норма в $L^S_K(E;F)$ согласована с отношением порядка:

$$(A_1 \leqslant A_2) \implies (\|A_1\| \leqslant \|A_2\|).$$

Получим основной результат этого пункта, используя теорему о банаховом конусе $L_K(E;F)$ (см. [16, теорема 3.3]).

Теорема 5.3. *Если пространство F — банахово, то $L^S_K(E;F)$ — банахов конус.*

Доказательство. В силу банаховости конуса $L_K(E;F)$ (см. [16, теорема 3.3]) достаточно лишь проверить замкнутость в конусе $L_K(E;F)$ подконуса $L^S_K(E;F)$.

Итак, пусть $A_n \in L^S_K(E;F)$ $(n = 1, 2, \dots)$, $\|A_n - A\| \to 0$ в $L_K(E;F)$. Переходя к пределу в равенстве $\|\lambda \cdot A_n\| = |\lambda| \cdot \|A_n\|$, получаем $\|\lambda \cdot A\| = |\lambda| \cdot \|A\|$ $(\forall\, \lambda \in \mathbb{R})$, т. е. свойство однородности выполнено для K-оператора A в полном объеме.

Таким образом, A — K_S-оператор, т. е. конус $L^S_K(E;F)$ замкнут в $L_K(E;F)$. □

5.2. K_S-субдифференциалы по направлению, слабые K_S-субдифференциалы и их простейшие свойства. В этом пункте вводятся K_S-субдифференциал по направлению и слабый K_S-субдифференциал в банаховых пространствах и изучаются их простейшие свойства. Пусть отображение $f : E \to F$ (E — вещественное линейное пространство, F — вещественное банахово пространство) определено в окрестности точки $x \in E$, $h \in U(0) \subset E$, $\overline{co}$ — замкнутая выпуклая оболочка множества в F. Вводимый ниже симметрический компактный субдифференциал по направлению будем называть также *K_S-субдифференциалом* по направлению.

Определение 5.3. K_S-субдифференциал отображения f в точке x по направлению h есть следующий K-предел (если он существует):

$$\partial^{[\prime]}_K f(x,h) = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\ \overline{co} \left\{ \frac{f(x+th) - f(x-th)}{2t} \,\middle|\, 0 < t < \delta \right\} =: \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\ \partial^{[\prime]}_\delta f(x,h).$$

Рассмотрим простейшие свойства K_S-субдифференциалов по направлению. Отметим, что $\partial^{[\prime]}_K f(x,h)$ обладает полной однородностью (в отличие от позитивной однородности $\partial_K f(x,h)$).

Предложение 5.1 (полная однородность по h)**.** *Для любых $h \in U$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ верно*:

$$\partial_K^{[\prime]} f(x, \lambda h) = \lambda \cdot \partial_K^{[\prime]} f(x, h).$$

Доказательство. Имеем при $\lambda \geqslant 0$:

$$\partial_K^{[\prime]} f(x, \lambda h) = \underset{\delta \to +0}{K\text{-}\lim}\ \overline{co} \left\{ \frac{f(x + t(\lambda h)) - f(x - t(\lambda h))}{2t} \middle| 0 < t < \delta \right\} =$$

$$= \underset{\delta \to +0}{K\text{-}\lim}\ \overline{co} \left\{ \frac{f(x + (t\lambda)h) - f(x - (t\lambda)h)}{2t\lambda} \lambda \middle| 0 < t\lambda < \lambda\delta \right\} =$$

$$= \left| \tilde{\delta} = \lambda \cdot \delta,\ \tilde{\delta} \to +0,\ t\lambda = \tilde{t} \right| = \underset{\tilde{\delta} \to +0}{K\text{-}\lim} \left[\lambda\, \overline{co} \left\{ \frac{f(x + \tilde{t}h) - f(x - \tilde{t}h)}{2\tilde{t}} \middle| 0 < \tilde{t} < \tilde{\delta} \right\} \right] =$$

$= \lambda \cdot \partial_K^{[\prime]} f(x, h)$. При $\lambda < 0$ остается учесть очевидное равенство $\partial_K^{[\prime]} f(x, -h) = -\partial_K^{[\prime]} f(x, h)$. □

Предложение 5.2 (субаддитивность по f)**.** *Для любого $h \in U$ верно*:

$$\partial_K^{[\prime]} (f_1 + f_2)(x, h) \subset \partial_K^{[\prime]} f_1(x, h) + \partial_K^{[\prime]} f_2(x, h).$$

Доказательство. Имеем:

$$\partial_K^{[\prime]} (f_1 + f_2)(x, h) = \underset{\delta \to +0}{K\text{-}\lim}\, \overline{co} \left\{ \frac{f_1(x + th) + f_2(x + th) - f_1(x - th) - f_2(x - th)}{2t} \middle| 0 < t < \delta \right\} =$$

$$= \underset{\delta \to +0}{K\text{-}\lim}\, \overline{co} \left(\left\{ \frac{f_1(x + th) - f_1(x - th)}{2t} \right\} + \left\{ \frac{f_2(x + th) - f_2(x - th)}{2t} \right\} \middle| 0 < t < \delta \right) \subset$$

$$\subset \underset{\delta \to +0}{K\text{-}\lim} \left[\overline{co} \left\{ \frac{f_1(x + th) - f_1(x - th)}{2t} \middle| 0 < t < \delta \right\} + \overline{co} \left\{ \frac{f_2(x + th) - f_2(x - th)}{2t} \middle| 0 < t < \delta \right\} \right] =$$

$$= \underset{\delta \to +0}{K\text{-}\lim} \left[\overline{\overline{co} \left\{ \frac{f_1(x + th) - f_1(x - th)}{2t} \middle| 0 < t < \delta \right\} + \overline{co} \left\{ \frac{f_2(x + th) - f_2(x - th)}{2t} \middle| 0 < t < \delta \right\}} \right].$$

Отсюда получаем:

$$\partial_K^{[\prime]} (f_1 + f_2)(x, h) \subset \underset{\delta \to +0}{K\text{-}\lim}\ \overline{co} \left\{ \frac{f_1(x + th) - f_1(x - th)}{2t} \middle| 0 < t < \delta \right\} +$$

$$+ \underset{\delta \to +0}{K\text{-}\lim}\ \overline{co} \left\{ \frac{f_2(x + th) - f_2(x - th)}{2t} \middle| 0 < t < \delta \right\} = \partial_K^{[\prime]} f_1(x, h) + \partial_K^{[\prime]} f_2(x, h).$$

□

Легко проверяются также следующие утверждения (ниже F_1, F_2, G — банаховы пространства).

Предложение 5.3 (однородность по f)**.** *Для любых $h \in U$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ верно*:

$$\partial_K^{[\prime]} (\lambda f)(x, h) = \lambda \cdot \partial_K^{[\prime]} f(x, h).$$

Таким образом, $\partial_K^{[\prime]} f(x, h)$ является s-сублинейным по f оператором.

Предложение 5.4. *Пусть $f = (f_1, f_2) : E \to F_1 \times F_2$. Тогда для любого $h \in U$*

$$\partial_K^{[\prime]} (f_1, f_2)(x, h) \subset \partial_K^{[\prime]} f_1(x, h) \times \partial_K^{[\prime]} f_2(x, h).$$

Предложение 5.5. *Пусть $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{A} G$, $A \in L(F, G)$. Тогда для любого $h \in U$*

$$\partial_K^{[\prime]} (A \cdot f)(x, h) = A(\partial_K^{[\prime]} f(x, h)).$$

В доказательстве заключительного утверждения используется признак Вейерштрасса для K-пределов (теорема 1.1).

Предложение 5.6. *Пусть заданы отображения f, $g : E \to F$, причем*:

1. *g K_S-субдифференцируемо по направлению h в точке $x \in E$*;
2. *для достаточно малых $\delta > 0 : \partial_K^{[\prime]} f(x, \delta) \subset \partial_K^{[\prime]} g(x, \delta)$.*

Тогда f также K_S-субдифференцируемо в точке x по направлению h, причем:

$$\partial^{[\prime]}_K f(x,h) \subset \partial^{[\prime]}_K g(x,h). \tag{5.2}$$

Доказательство. Так как g K_S-субдифференцируемо по направлению h в точке x, то существует

$$\partial^{[\prime]}_K g(x,h) = K\text{-}\lim_{\delta\to 0} \partial^{[\prime]}_\delta g(x,h) =: \widetilde{B}.$$

Таким образом, по теореме 1.1:

$$\forall\, U(0)\, \exists\, \delta_U > 0 : (0 < \delta < \delta_U) \Rightarrow (\widetilde{B} \subset \partial^{[\prime]}_\delta g(x,h) \subset \widetilde{B} + U).$$

Так как $\partial^{[\prime]}_\delta f(x,h) \subset \partial^{[\prime]}_\delta g(x,h)$, то:

$$\forall\, U(0) \subset E\, \exists\, \delta_U > 0 : (0 < \delta < \delta_U) \Rightarrow (\partial^{[\prime]}_\delta f(x,h) \subset \partial^{[\prime]}_\delta g(x,h) \subset \widetilde{B} + U).$$

Таким образом, по следствию 1.1, существует K-предел:

$$K\text{-}\lim_{\delta\to 0} \partial^{[\prime]}_\delta f(x,h) = \partial^{[\prime]}_K f(x,h),$$

причем справедлива оценка (5.2). □

Перейдем к понятию слабого K_S-субдифференциала.

Определение 5.4. Пусть отображение $f : E \to F$ определено в окрестности точки $x \in E$ и K_S-субдифференцируемо в точке x по любому направлению $h \in U(0) \subset E$. Будем говорить, что f *слабо K_S-субдифференцируемо* в точке x, если K_S-субдифференциал по направлению $\partial^{[\prime]}_K f(x,h) : E \to F_K$ s-сублинеен по h.

Замечание 5.2. На слабые K_S-субдифференциалы автоматически распространяются рассмотренные выше свойства K_S-субдифференциалов по направлению при любом фиксированном h. Для слабых K_S-субдифференциалов мы примем обозначение $\partial^{[\prime]}_K f(x)h$. Здесь $\partial^{[\prime]}_K f(x)$ — K_S-сублинейный оператор, действующий из E в F_K.

5.3. K_S-субдифференциалы Гато и Фреше. Строгий K-субдифференциал. В этом пункте мы введем основные понятия и изучим простейшие свойства K_S-субдифференциалов Гато и Фреше и дадим определение строгой K-субдифференцируемости по Фреше.

Определение 5.5. Пусть отображение $f : E \to F$ определено в окрестности точки $x \in E$ и слабо K_S-субдифференцируемо в точке x. Будем говорить, что f *K_S-субдифференцируемо по Гато* в точке x, если слабый K_S-субдифференциал $\partial^{[\prime]}_K f(x)$ непрерывен в нуле или, что равносильно, $\partial^{[\prime]}_K f(x)$ ограничен по норме.

Определение 5.6. Если отображение f K_S-субдифференцируемо по Гато в точке x, причем сходимость в K-пределе $K\text{-}\lim\limits_{\delta\to 0} \partial^{[\prime]}_\delta f(x,h)$ равномерна по всем направлениям $\|h\| \leqslant 1$, то K_S-оператор $\partial^{[\prime]}_K f(x)$ назовем *K_S-субдифференциалом Фреше* или *сильным K_S-субдифференциалом* f в точке x.

Отметим простейшие свойства K_S-субдифференциалов Гато и Фреше, вытекающие из соответствующих свойств K_S-субдифференциалов по направлению.

Теорема 5.4. *Пусть отображение f K_S-субдифференцируемо по Гато* (*Фреше*), $\lambda \in \mathbb{R}$. *Тогда отображение λf также K_S-субдифференцируемо по Гато* (*Фреше*), *и имеет место равенство*

$$\partial^{[\prime]}_K (\lambda f)(x)h = \lambda \partial^{[\prime]}_K f(x)h.$$

Теорема 5.5. *Если отображения f и g K_S-субдифференцируемы по Гато* (*Фреше*), *то сумма $f+g$ также K_S-субдифференцируема по Гато* (*Фреше*), *и для любого $h \in U$ имеет место включение*

$$\partial^{[\prime]}_K (f+g)(x)h \subset \partial^{[\prime]}_K f(x)h + \partial^{[\prime]}_K g(x)h.$$

Теорема 5.6. *Пусть* $f = (f_1, f_2) : E \to F_1 \times F_2$. *Если отображения* f_1 *и* f_2 K_S*-субдифференцируемы в точке* x *по Гато* (*Фреше*), *то отображение* f *также* K_S*-субдифференцируемо в точке* x *по Гато* (*соответственно, по Фреше*), *при этом*

$$\partial_K^{[\prime]}(f_1, f_2)(x)h \subset (\partial_K^{[\prime]}(f_1)(x), \, \partial_K^{[\prime]}(f_2)(x)) \cdot h.$$

Теорема 5.7. *Пусть* $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{A} G$, f — K_S*-субдифференцируемое по Гато* (*Фреше*) *отображение,* $A \in L(E, F)$. *Тогда композиция* $A \circ f$ *также* K_S*-субдифференцируема по Гато* (*Фреше*), *и выполняется равенство*

$$\partial_K^{[\prime]}(A \circ f)(x)h = A(\partial_K^{[\prime]} f(x)h).$$

Далее, по аналогии с понятием строгой дифференцируемости по Фреше, мы введем понятие *строгой* K-субдифференцируемости по Фреше. Это понятие понадобится нам в дальнейшем для исследования важного вопроса о K_S-субдифференцируемости композиции.

Определение 5.7. Назовем отображение $f : E \supset U(x) \to F$ *строго* K*-субдифференцируемым* (*по Фреше*) в точке $x \in E$, если $\forall\, h_1, h_2 \in U(0)$ существует K-предел

$$\partial_K^S f(x)(h_1 - h_2) = \underset{\delta \to +0}{K\text{-}\lim}\ \overline{co} \left\{ \frac{f(x + th_1) - f(x + th_2)}{t} \,\middle|\, 0 < t < \delta \right\}, \tag{5.3}$$

который является сублинейным по $(h_1 - h_2)$ ограниченным K-оператором, причем сходимость в K-пределе (5.3) равномерна по $\|h_1\| \leqslant 1$, $\|h_2\| \leqslant 1$.

Замечание 5.3. Нетрудно видеть, что строго K-субдифференцируемое отображение f является сильно K-субдифференцируемым; при этом $\partial_K^S f(x) = \partial_K f(x)$. Отметим также, что простейшие свойства строго K-субдифференцируемых отображений аналогичны свойствам сильно K-субдифференцируемых отображений (см. [16]).

5.4. Критерии K_S-субдифференцируемости и строгой K-субдифференцируемости. Здесь изложены последовательно критерии K_S-субдифференцируемости: слабой, по Гато, сильной, позволяющие исключить вычисление K_S-субдифференциалов по направлению. Добавлен также аналогичный критерий строгой K-субдифференцируемости. Приведем вначале вспомогательный результат.

Теорема 5.8. *Пусть* E, F — *вещественные банаховы пространства, отображение* $f : E \to F$ *определено в некоторой окрестности точки* $x \in E$, $h \in E$. *Тогда* $\partial_K^{[\prime]} f(x, h)$ *существует в том и только том случае, если существует* $B_h \in F_K$ *такое, что для любой окрестности* $U(0) \subset F$ *найдется* $\delta_U > 0$, *для которого*

$$(0 < \delta < \delta_U) \Rightarrow (\partial_\delta^{[\prime]} f(x, h) \subset B_h + U(0)). \tag{5.4}$$

Доказательство. Так как $\partial_K^{[\prime]} f(x, h) = \underset{\delta \to 0}{K\text{-}\lim}\, \partial_\delta^{[\prime]} f(x, h)$, то достаточно применить предложение 5.6 к системе $\{B_\delta = \partial_\delta^{[\prime]} f(x, h)\}_{\delta > 0}$ и множеству $\tilde{B} = B_h$. $\square$

Чтобы получить вначале критерий слабой K_S-субдифференцируемости, используем понятие многозначного малого отображения (см. [16]).

Определение 5.8. Пусть F — вещественное банахово пространство. Обозначим через F_B конус всех замкнутых ограниченных выпуклых подмножеств в F с нормой $\|B\| = \sup\limits_{y \in B} \|y\|$. Отображение $\psi : \mathbb{R} \supset V(0) \to F_B$ назовем *малым* (в нуле), если $\|\psi(t)\| \to 0$ при $t \to 0$.

Получим критерий слабой K_S-субдифференцируемости, следуя схеме вывода критерия K-субдифференцируемости (см. [16, теорема 4.1]).

Теорема 5.9. *В условиях теоремы* 5.8 *отображение* f *слабо* K_S*-субдифференцируемо в точке* x *тогда и только тогда, когда существуют* s*-сублинейный по* h *оператор* $B : h \in E \to B(h) \in F_K$ *и отображение* $\psi : E \supset S_1 \to F_B$, *где* $S_1 = \{h \in E \big|\, \|h\| \leqslant 1\}$, *такие, что*

$$f(x + h) - f(x - h) \in 2B(h) + \psi(h), \tag{5.5}$$

где $(\psi(th)/t) \to 0$ *при* $t \to 0$ $(\forall h \in S_1)$. *При этом* $\partial_K^{[\prime]} f(x)h \subset B(h)$.

Доказательство. Докажем необходимость. Пусть f слабо K_S-субдифференцируемо в точке x. Тогда для любого фиксированного $h \in S_1$ применимо условие (5.4). Полагая $U = U_\varepsilon(0)$, найдем $\delta = \delta_h(\varepsilon) > 0$, для которого:

$$(0 < \delta < \delta_h(\varepsilon)) \Rightarrow (\widehat{\partial}_\delta f(x,h) \subset B(h) + U_\varepsilon),$$

причем оператор $B(h) = \partial_K^{[\prime]} f(x)h$ — s-сублинейный по h. Так как при этом $\delta_h(\varepsilon)$ можно уменьшать, то без ограничения общности можно считать, что $\delta_h(\varepsilon)$ строго убывает к нулю при $\varepsilon \searrow 0$. Тогда существует обратная функция $\varepsilon = \varepsilon_h(\delta)$ (также строго убывающая к нулю при $\delta \searrow 0$), для которой

$$\partial_\delta^{[\prime]} f(x,h) \subset B(h) + U_{\varepsilon_h}(\delta).$$

Так как

$$\frac{f(x+th) - f(x-th)}{2t} \in \partial_\delta^{[\prime]} f(x,h) \qquad \text{при } 0 < t < \delta,$$

то отсюда получаем:

$$f(x+th) - f(x-th) \in 2B(th) + t\varepsilon_h(t), \tag{5.6}$$

где $\varepsilon_h(t) \to 0$ при $t \to 0$. Положим $\psi(th) = t\varepsilon_h(t)$ (в частности, $\psi(h) = \varepsilon_h(1)$). Тогда: $\psi(th)/t = \varepsilon_h(t) \to 0$ при $t \to 0$, т. е. (5.5) выполняется.

Проверим достаточность. Пусть выполняется (5.5). Тогда, заменяя $h \mapsto th$ в (5.5), получим: $f(x+th) - f(x-th) \in 2B(th) + \psi(th)$, что равносильно включению:

$$\frac{f(x+th) - f(x-th)}{2t} \in B(h) + \frac{\psi(th)}{t}.$$

Следовательно, $\partial_\delta^{[\prime]} f(x,h) \subset B(h) + U_\varepsilon$ при $0 < \delta \leqslant \delta_h(\varepsilon)$, т. е. условие (5.4) выполнено для любого $h \in S_1$, откуда, по теореме 5.8, отображение f K_S-субдифференцируемо по любому направлению $h \in S_1$. □

Теперь получим критерии K_S-субдифференцируемости по Гато и по Фреше. Здесь мы также следуем схеме вывода соответствующих критериев K-субдифференцируемости (см. [16, теорема 5.8]).

Теорема 5.10. *Пусть E, F — вещественные банаховы пространства, а отображение $f : E \to F$ слабо K_S-субдифференцируемо в точке $x \in E$. Тогда*:

1. *Отображение f K_S-субдифференцируемо по Гато тогда и только тогда, когда существует оператор $B \in L_K^S(E;F)$ такой, что*

$$f(x+h) - f(x-h) \in 2Bh + \psi(h), \tag{5.7}$$

   где $(\psi(th)/t) \to 0$ при $t \to 0$ $(\forall h \in E)$; при этом $\partial_K^{[\prime]} f(x)h \subset Bh\,(\forall\, h \in E)$.

2. *Отображение f K_S-субдифференцируемо по Фреше в точке x тогда и только тогда, когда f K_S-субдифференцируемо по Гато в точке x и*

$$f(x+h) - f(x-h) \in 2\partial_K^{[\prime]} f(x)h + \psi(h), \tag{5.8}$$

   где $\psi(h) = o(\|h\|)$ при $\|h\| \to 0$, или, равносильно, $(\psi(th)/t) \rightrightarrows 0$ при $t \to 0$ $(\forall\, h \in S_1 \subset E)$.

Доказательство. 1. Если (5.7) выполнено, то по теореме 5.8: $\partial_K^{[\prime]} f(x)h =: Ah \subset Bh$, откуда $\|A\| \leqslant \|B\| < \infty$, т. е. A ограничен. Таким образом, отображение f K_S-субдифференцируемо по Гато в точке x. Обратно, если f K_S-субдифференцируемо по Гато в точке x, то, подставляя в (5.5) $Bh = 2\partial_K^{[\prime]} f(x)h$, получим (5.7).

2. Если выполнено (5.8), то, повторяя выкладку из доказательства достаточности в теореме 5.9, получим:

$$\partial_K^{[\prime]} f(x)h \subset Ah + \frac{\psi(th)}{t}.$$

Так как $\psi(h) \to 0$ при $\|h\| \to 0$, то $(\psi(th)/t) \rightrightarrows 0$ при $t \to 0$, $\|h\| \leqslant 1$. Следовательно,

$$Ah \subset \partial_K^{[\prime]} f(x,t)h \subset Ah + U \text{ при } |t| < \delta_U \ (\forall \|h\| \leqslant 1),$$

т. е. выполнено определение K_S-субдифференцируемости по Фреше. Обратно, если f K_S-субдифференцируемо по Фреше, т. е. $\partial_t^{[\prime]} f(x,h) \rightrightarrows \partial_K^{[\prime]} f(x,h)$ при $t \to 0$, $\|h\| \leqslant 1$, то в доказательстве необходимости теоремы 5.8 определение $\delta_h(\varepsilon)$, а значит, и определение $\psi(th)$, не зависит от выбора h, т. е. зависит только от $\|\tilde{h} = th\| = t$. Таким образом, заменяя в (5.6) $th = \tilde{h}$, получаем

$$f(x + \tilde{h}) - f(x - \tilde{h}) \in \partial_K^{[\prime]} f(x, \tilde{h}) + \psi(\tilde{h}),$$

где $\psi(\tilde{h}) \to 0$ при $\|\tilde{h}\| \to 0$, т. е. выполнено (5.8). □

Аналогичным образом проверяется следующий критерий строгой K-субдифференцируемости.

Теорема 5.11. *Пусть E, F — вещественные банаховы пространства, отображение $f : E \supset U(x) \to F$ сильно K-субдифференцируемо в точке $x \in E$. Тогда f строго K-субдифференцируемо в точке x в том и только в том случае, если*

$$f(x + h_1) - f(x + h_2) \in \partial_K f(x)(h_1 - h_2) + o(\|h_1 - h_2\|) \text{ при } h_1 \to 0,\ h_2 \to 0.$$

При этом $\partial_K^S f(x) = \partial_K f(x)$.

5.5. Общие свойства сильных K_S-субдифференциалов. Среди свойств K_S-субдифференциалов, рассмотренных в этом параграфе, отметим точное описание K_S-субдифференциалов от функционалов, «формулу полного K_S-субдифференциала», покоординатную K_S-субдифференцируемость, K_S-матрицы Якоби и, наконец, нетривиальный результат о K_S-субдифференцируемости композиции. Выделим вначале важный случай K_S-субдифференцирования функционала $f : E \to \mathbb{R}$. Здесь можно дать простую формулу для вычисления $\partial_K^{[\prime]} f(x, h)$.

Теорема 5.12. *Функционал $f : E \to \mathbb{R}$ K_S-субдифференцируем в точке x по направлению h тогда и только тогда, когда существуют конечные верхний и нижний симметрические дифференциалы f по направлению h в этой точке: $\overline{\partial^{[\prime]}} f(x, h)$ и $\underline{\partial^{[\prime]}} f(x, h)$. При этом имеет место равенство*

$$\partial_K^{[\prime]} f(x, h) = \Big[\underline{\partial^{[\prime]}} f(x, h);\ \overline{\partial^{[\prime]}} f(x, h)\Big]. \tag{5.9}$$

Доказательство. Введем вспомогательную функцию $\varphi(t) = f(x + th)$, $\varphi : [-1; 1] \to \mathbb{R}$. Поскольку при $0 < t \leqslant 1$:

$$\frac{f(x + th) - f(x - th)}{2t} = \frac{\varphi(t) - \varphi(-t)}{2t},$$

то отсюда следует (см. [16, теорема 4.1]):

$$\partial_K^{[\prime]} f(x, h) = \partial_K^{[\prime]} \varphi(0) = \Big[\underline{\varphi^{[\prime]}}(0); \overline{\varphi^{[\prime]}}(0)\Big] = \Big[\underline{\partial^{[\prime]}} f(x, h);\ \overline{\partial^{[\prime]}} f(x, h)\Big].$$

□

Определение 5.9. Пусть E — линейное пространство, F — нормированное пространство. Отображение $f : E \to F$ назовем *s-сублинейным функционалом*, если для любых $h, k \in E$ верно:

1. $f(h + k) \leqslant f(h) + f(k)$;
2. $f(\lambda h) = \lambda \cdot f(h)$ при любом $\lambda \in \mathbb{R}$.

Соответственно, функционал f будем называть *s-надлинейным*, если для любых $h, k \in E$ верно:

1. $f(h + k) \geqslant f(h) + f(k)$;
2. $f(\lambda h) = \lambda \cdot f(h)$ при любом $\lambda \in \mathbb{R}$.

Теорема 5.13. *Пусть E — вещественное банахово пространство. Если функционал $f : E \to \mathbb{R}$ сильно K_S-субдифференцируем в точке x, то для любого $h \in E$ справедливо равенство*

$$\partial_K^{[\prime]} f(x)h = \Big[\underline{\partial^{[\prime]}} f(x)h; \overline{\partial^{[\prime]}} f(x)h\Big] \tag{5.10}$$

где функционал $\underline{\partial^{[\prime]}} f(x)h$ (соответственно, $\overline{\partial^{[\prime]}} f(x)h$) — s-надлинейный (соответственно, s-сублинейный).

Доказательство. Равенство (5.10) для K_S-субдифференциала по направлению было доказано в теореме 5.12. Так как $\partial_K^{[\prime]} f(x)$ — сублинейный ограниченный K_S-функционал, то получаем требуемые свойства функционалов $\underline{\partial^{[\prime]}} f(x, h)$ и $\overline{\partial^{[\prime]}} f(x, h)$. □

Изучение общих свойств K_S-субдифференциалов мы начнем с необходимого условия K-субдифференцируемости. Далее для отображения $f(x_1, x_2)$ мы обозначаем частные K_S-субдифференциалы по переменным x_1, x_2 соответственно через $(\partial_K^{[\prime]})^{x_1} f(x_1, x_2)$ и $(\partial_K^{[\prime]})^{x_2} f(x_1, x_2)$:

$$(\partial_K^{[\prime]})^{x_1} f(x_1, x_2) h_1 = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\ \overline{co} \left\{ \frac{f(x_1 + th_1, x_2) - f(x_1 - th_1, x_2)}{2t} \,\middle|\, 0 < t < \delta \right\},$$

$$(\partial_K^{[\prime]})^{x_2} f(x_1, x_2) h_2 = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\ \overline{co} \left\{ \frac{f(x_1, x_2 + th_2) - f(x_1, x_2 - th_2)}{2t} \,\middle|\, 0 < t < \delta \right\}.$$

Теорема 5.14. *Пусть $E_1, \ldots, E_n$, F — вещественные банаховы пространства. Если отображение $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to F$ K_S-субдифференцируемо в точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$ по совокупности переменных, то f K_S-субдифференцируемо в этой точке по каждой из переменных в отдельности. При этом справедлива оценка*

$$\partial_K^{[\prime]} f(x_1, \ldots, x_n)(h_1, \ldots, h_n) \subset \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial x_i} \right)_K (x_1, \ldots, x_n) h_i. \tag{5.11}$$

Доказательство. 1. По определению частных K_S-субдифференциалов:

$$(\partial_K^{[\prime]})^{h_i} f^{x_j}(x_i, \delta) = \overline{co} \left\{ \frac{f(x_j + th_i, x_i) - f(x_1, x_2)}{t} \,\middle|\, 0 < t < \delta \right\} \ (i, j = 1, 2).$$

С другой стороны,

$$(\partial_K^{[\prime]})^{(h_1, 0)} f((x_1, x_2), \delta) = \overline{co} \left\{ \frac{f(x_1 + th_1, x_2) - f(x_1 - th_1, x_2)}{2t} \,\middle|\, 0 < t < \delta \right\},$$

$$(\partial_K^{[\prime]})^{(0, h_2)} f((x_1, x_2), \delta) = \overline{co} \left\{ \frac{f(x_1, x_2 + th_2) - f(x_1, x_2 - th_2)}{2t} \,\middle|\, 0 < t < \delta \right\}.$$

Переходя в этих равенствах к K-пределу по направлениям $(h_1, 0)$ и $(0, h_2)$ соответственно, получим:

$$(\partial_K^{[\prime]})^{x_1} f(x_1, x_2) h_1 = \partial_K^{[\prime]} f(x_1, x_2)(h_1, 0), \ (\partial_K^{[\prime]})^{x_2} f(x_1, x_2) h_2 = \partial_K^{[\prime]} f(x_1, x_2)(0, h_2).$$

2. Если отображение f слабо K_S-субдифференцируемо в точке (x_1, x_2), $h = (h_1, h_2) = (h_1, 0) + (0, h_2)$, то ввиду субаддитивности K_S-субдифференциалов по h имеем:

$$\partial_K^{[\prime]} f(x_1, x_2)(h_1, h_2) \subset \partial_K^{[\prime]} f(x_1, x_2)(h_1, 0) + \partial_K^{[\prime]} f(x_1, x_2)(0, h_2) = (\partial_K^{[\prime]})^{x_1} f(x_1, x_2) h_1 + (\partial_K^{[\prime]})^{x_2} f(x_1, x_2) h_2.$$

□

В случае функционалов оценка (5.11) приобретает более точный вид.

Следствие 5.1. *Пусть $E_1, \ldots, E_n$ — нормированные пространства. Если функционал $f : E_1 \times \cdots \times E_n \to \mathbb{R}$ сильно K_S-субдифференцируем в точке x, то имеет место «формула полного K_S-субдифференциала» (для любого $h = (h_1, \ldots, h_n) \in E_1 \times \cdots \times E_n$) в оценочной форме*:

$$\partial_K^{[\prime]} f(x)(h_1, \ldots, h_n) \subset \sum_{i=1}^{n} \Big(\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial h_i} \Big)_K (x) h_i = \left[\sum_{i=1}^{n} \underline{\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial h_i}}(x); \sum_{i=1}^{n} \overline{\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial h_i}}(x) \right]. \tag{5.12}$$

В частности, если функционал $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ сильно K_S-субдифференцируем в точке x, то в этой точке существуют и конечны нижние и верхние частные симметрические производные f по всем переменным, причем выполнена оценка

$$\partial_K^{[\prime]} f(x)(h_1, \cdots, h_n) \subset \left[\sum_{i=1}^{n} \underline{\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial x_i}}(x) h_i; \sum_{i=1}^{n} \overline{\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial x_i}}(x) h_i \right] = \left[\underline{\nabla}^{[\prime]} f(x); \overline{\nabla}^{[\prime]} f(x) \right] \cdot h,$$

где

$$\underline{\nabla}^{[\prime]} f(x) = \Big(\underline{\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial x_i}}(x) \Big)_{i=\overline{1,n}}, \quad \overline{\nabla}^{[\prime]} f(x) = \Big(\overline{\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial x_i}}(x) \Big)_{i=\overline{1,n}}.$$

Теперь рассмотрим вопрос о покоординатной K_S-субдифференцируемости отображения $f : E \to F_1 \times \cdots \times F_m$, где E, $F_1, \ldots, F_m$ — нормированные пространства.

Теорема 5.15. *Отображение f K_S-субдифференцируемо в точке $x \in E$ тогда и только тогда, когда все координатные отображения f_j, $j = \overline{1,m}$, K_S-субдифференцируемы в точке x. При этом справедлива оценка*

$$\partial_K^{[\prime]} f(x)h \subset \prod_{j=1}^{m} \left(\partial_K^{[\prime]} f_j(x)h \right). \tag{5.13}$$

В частности, если $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^m$, то последняя оценка принимает вид

$$\partial_K^{[\prime]} f(x)h \subset \prod_{j=1}^{m} \left(\left[\frac{d^{[\prime]} f_j}{\underline{dx}}(x); \overline{\frac{d^{[\prime]} f_j}{dx}}(x) \right] \cdot h \right). \tag{5.14}$$

При этом прямоугольные оценки (5.13) *и* (5.14) *точны по проекциям.*

Доказательство. Напомним свойство покоординатной сходимости для K-предела:

$$K\text{-}\lim_{\delta \to +0} (B_\delta^1 \times \cdots \times B_\delta^n) = (K\text{-}\lim_{t \to +0} B_\delta^1) \times \cdots \times (K\text{-}\lim_{t \to +0} B_\delta^n).$$

Отсюда, применяя определение K_S-субдифференциала к отображению $f = (f_1, \ldots, f_m)$, получаем (для любого $h \in E$):

$$\partial_K^{[\prime]} f(x,h) = K\text{-}\lim_{\delta \to +0} \overline{co} \left\{ \left(\frac{f_1(x+th) - f_1(x-th)}{2t}, \ldots, \frac{f_m(x+th) - f_m(x-th)}{2t} \right) \middle| \, 0 < t < \delta \right\} \subset$$

$$\subset K\text{-}\lim_{\delta \to +0} \overline{co} \left[\left\{ \frac{f_1(x+th) - f_1(x-th)}{2t} \middle| \, 0 < t < \delta \right\} \times \cdots \times \right.$$

$$\left. \times \left\{ \frac{f_m(x+th) - f_m(x-th)}{2t} \middle| \, 0 < t < \delta \right\} \right] =$$

$$= \left(K\text{-}\lim_{\delta \to +0} \overline{co} \left\{ \frac{f_1(x+th) - f_1(x-th)}{2t} \middle| \, 0 < t < \delta \right\} \right) \times \cdots \times$$

$$\times \left(K\text{-}\lim_{\delta \to +0} \overline{co} \left\{ \frac{f_m(x+th) - f_m(x-th)}{2t} \middle| \, 0 < t < \delta \right\} \right) = \partial_K^{[\prime]} f_1(x,h) \times \cdots \times \partial_K^{[\prime]} f_m(x,h). \tag{5.15}$$

При этом $\partial_K^{[\prime]} f(x,h)$ существует тогда и только тогда, когда существуют все $\partial_K^{[\prime]} f_j(x,h)$, $j = \overline{1,m}$. Далее, $\partial_K^{[\prime]} f(x,h)$ — s-сублинейный ограниченный (по h) K_S-оператор тогда и только тогда, когда $\partial_K^{[\prime]} f_j(x,\cdot) \in L_K^S(E;F_j)$, $j = \overline{1,m}$. Наконец, в силу *точности по проекциям* оценки в (5.15) сходимость в K-пределе $\partial_K^{[\prime]} f(x,h)$ равномерна по $\|h\| \leqslant 1$ тогда и только тогда, когда это справедливо для всех K-пределов $\partial_K^{[\prime]} f_j(x,h)$, $j = \overline{1,m}$. Таким образом, оценка (5.13) выполнена и точна по проекциям. □

Перейдем к вопросу о *K_S-матрице Якоби* для отображений $f : \prod\limits_{i=1}^{n} E_i \to \prod\limits_{j=1}^{m} F_j$, где E_i ($i = \overline{1,n}$), F_j ($j = \overline{1,m}$) — нормированные пространства. Используя предыдущие результаты, нетрудно получить следующее утверждение.

Теорема 5.16. *Если отображение f K_S-субдифференцируемо в точке $x = (x_1, \ldots, x_n)$, то*

$$\partial_K^{[\prime]} f(x_1, \ldots, x_n)(h_1, \ldots, h_n) \subset \prod_{j=1}^{m} \left(\sum_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^{[\prime]} f_j}{\partial x_i} \right)_K (x_1, \ldots, x_n) h_i \right). \tag{5.16}$$

Определение 5.10. K_S-матрицу сублинейных K_S-операторов

$$J_K^{[\prime]} f(x) = \left(\left(\frac{\partial^{[\prime]} f_j}{\partial x_i} \right)_K (x) \right)_K^{i=\overline{1,n},\, j=\overline{1,m}} \qquad \left(\left(\frac{\partial^{[\prime]} f_j}{\partial x_i} \right)_K (x) \in L_K(E_i;F_j) \right)$$

назовем *K_S-матрицей Якоби* отображения f в точке x.

Выделим случай *евклидовых пространств*, где оценка (5.16) существенно уточняется.

Теорема 5.17. *Пусть $E_1,\ldots,E_n$ — нормированные пространства. Если отображение $f : E_1\times\cdots\times E_n\to\mathbb{R}^m$ сильно K_S-субдифференцируемо в точке x, то для любого $h=(h_1,\ldots,h_n)$ справедлива оценка*

$$\partial_K^{[\prime]} f(x)(h_1,\ldots,h_n)\subset\prod_{j=1}^m\Big[\sum_{i=1}^n\underline{\frac{\partial^{[\prime]}f_j}{\partial h_i}}(x);\sum_{i=1}^n\overline{\frac{\partial^{[\prime]}f_j}{\partial h_i}}(x)\Big].$$

В частности, в случае $f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ получаем:

$$\partial_K^{[\prime]} f(x)(h_1,\ldots,h_n)\subset\prod_{j=1}^m\Big[\sum_{i=1}^n\underline{\frac{\partial^{[\prime]}f_j}{\partial x_i}}(x)h_i;\sum_{i=1}^n\overline{\frac{\partial^{[\prime]}f_j}{\partial x_i}}(x)h_i\Big]=\prod_{j=1}^m\Big([\underline{\nabla}^{[\prime]}f_j(x);\overline{\nabla}^{[\prime]}f_j(x)],\,h\Big)=$$
$$=[\underline{J}_f^{[\prime]}(x);\overline{J}_f^{[\prime]}(x)]\cdot h,$$

где $\underline{J}_f^{[\prime]}(x)=\Big(\underline{\frac{\partial^{[\prime]}f_j}{\partial x_i}}(x)\Big)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}$, $\overline{J}_f^{[\prime]}(x)=\Big(\overline{\frac{\partial^{[\prime]}f_j}{\partial x_i}}(x)\Big)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}}$ — соответственно, нижняя и верхняя симметрические матрицы Якоби f в точке x, $[\underline{J}_f^{[\prime]}(x);\overline{J}_f^{[\prime]}(x)]$ — m-мерный отрезок, стягивающий эти матрицы.

Рассмотрим, наконец, важный вопрос о K_S-субдифференцируемости композиции. Как известно, композиция симметрически дифференцируемых функций не является, вообще говоря, симметрически дифференцируемой. Однако мы покажем, что композиция строго K-субдифференцируемого отображения и K_S-субдифференцируемого отображения сохраняет K_S-субдифференцируемость. Тем самым результат теоремы 2.12 обобщается на случай субдифференциалов.

Теорема 5.18. *Пусть E,F,G — вещественные банаховы пространства, $f:E\supset U(x)\to F$ и $g:F\supset V(y=f(x))\to G$. Если отображение g строго K-субдифференцируемо в точке y, а отображение f непрерывно и K_S-субдифференцируемо в точке x, то композиция $g\circ f$ также K_S-субдифференцируема в точке x. При этом выполняется оценка*

$$\partial_K^{[\prime]}(g\circ f)(x)h\subset\big[\partial_K g(y)\circ\partial_K^{[\prime]}f(x)\big]h. \tag{5.17}$$

Доказательство. Имеем, последовательно используя критерий строгой K-субдифференцируемости (теорема 5.11), критерий K_S-субдифференцируемости (теорема 5.10) и непрерывность f в точке x:

$$g(f(x+h))-g(f(x-h))=\Big|\;k_+(h)=f(x+h)-f(x),\quad k_-(h)=f(x-h)-f(x)\;\Big|=$$
$$=g(y+k_+(h))-g(y+k_-(h))\in\partial_K g(y)\big(k_+(h)-k_-(h)\big)+o(\|k_+(h)-k_-(h)\|)=$$
$$=\partial_K g(y)\big(f(x+h)-f(x-h)\big)+o(\|f(x+h)-f(x-h)\|)\subset$$
$$\subset\partial_K g(y)\big(2\partial_K^{[\prime]}f(x)h+o\big(\|h\|\big)\big)+o(\|2\partial_K^{[\prime]}f(x)h+o(\|h\|)\|)\subset$$
$$\subset 2\big[\partial_K g(y)\circ\partial_K^{[\prime]}f(x)\big]h+\big\{\partial_K g(y)\big(o(\|h\|)\big)+2\|\partial_K^{[\prime]}f(x)\|\cdot o(\|h\|)+o(\|h\|)\big\}=$$
$$=2\big[\partial_K g(y)\circ\partial_K^{[\prime]}f(x)\big]h+o(\|h\|).$$

Последняя оценка в силу теоремы 5.10 влечет K_S-субдифференцируемость $g\circ f$ и оценку (5.17). □

5.6. Формула конечных приращений и теорема о среднем для абсолютно непрерывных K_S-субдифференцируемых отображений. Полученные ранее для s-дифференцируемых отображений формула конечных приращений и теорема о среднем здесь обобщаются на случай K_S-субдифференцируемых абсолютно непрерывных на векторном отрезке отображений. Вначале получим формулу конечных приращений для K_S-субдифференцируемых отображений вещественного аргумента, видоизменяя доказательство теоремы 2.1 для s-дифференцируемых отображений.

Теорема 5.19 (формула конечных приращений)**.** *Пусть отображения* $f : \mathbb{R} \supset [a;b] \to F$ *и* $g : \mathbb{R} \supset [a;b] \to \mathbb{R}$ *абсолютно непрерывны на* $[a;b]$ *и* K_S*-субдифференцируемы на* $(a;b)$*, причем* g *возрастает. Если для некоторого замкнутого выпуклого множества* $B \subset F$ *выполнена локальная оценка* $\partial_K^{[\prime]} f(x) \in \partial_K^{[\prime]} g(x) \cdot B$ $(a < x < b)$*, то справедлива глобальная оценка*

$$f(b) - f(a) \in [g(b) - g(a)] \cdot B. \tag{5.18}$$

Доказательство. 1. Фиксируем $\varepsilon > 0$. Используя определение K_S-субдифференциала, выберем для каждого $x \in [a+\varepsilon; b-\varepsilon]$ такое $\delta = \delta(\varepsilon, x) > 0$, что

$$(0 < h \leqslant \delta) \Rightarrow \begin{cases} \dfrac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \in U_\varepsilon(\partial_K^{[\prime]} g(x) \cdot B); \\ \dfrac{g(x+h) - g(x-h)}{2h} \in U_\varepsilon(\partial_K^{[\prime]} g(x)) \end{cases}$$

(здесь U_ε — ε-окрестность множества). Отсюда получаем:

$$(0 < h \leqslant \delta) \Rightarrow \left(\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \in U_{2\varepsilon} \left(\frac{g(x+h) - g(x-h)}{2h} \cdot B \right) \right). \tag{5.19}$$

2. Система сегментов $\{\overline{U}_\delta(x)\}_{x \in [a+\varepsilon; b-\varepsilon]}$, $\delta < \delta(\varepsilon, x)$, очевидно, образует покрытие Витали множества $[a+\varepsilon; b-\varepsilon]$. По второй теореме Витали о покрытиях (см. [15]), для любого заданного $\eta > 0$ из данного покрытия можно выделить такую конечную систему сегментов $\left\{\overline{U}_{\delta_i}(x_i)\right\}_{i=1}^n$, что $mes\Big(S = [a+\varepsilon; b-\varepsilon] \setminus \bigcup\limits_{i=1}^n \overline{U}_{\delta_i}(x_i)\Big) < \eta$. Последнее множество S состоит из конечного числа отрезков $[\alpha_j; \beta_j]$, $j = \overline{1, n+1}$. В силу абсолютной непрерывности отображений f и g на $[a;b]$, можно подобрать такое $\eta = \eta(\varepsilon) > 0$, что

$$\Big(mes\, S = \sum_{j=1}^{n+1} (\beta_j - \alpha_j) < \eta\Big) \Rightarrow \Big(\sum_{j=1}^{n+1} \|f(\beta_j) - f(\alpha_j)\| < \varepsilon,\ \sum_{j=1}^{n+1} [g(\beta_j) - g(\alpha_j)] < \varepsilon\Big). \tag{5.20}$$

Итак,

$$f(b-\varepsilon) - f(a+\varepsilon) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i + \delta_i) - f(x_i - \delta_i)] + \sum_{j=1}^{n+1} [f(\beta_j) - f(\alpha_j)], \tag{5.21}$$

где в силу (5.19)

$$f(x_i + \delta_i) - f(x_i - \delta_i) \in 2\delta_i \cdot U_\varepsilon \left(\frac{g(x_i + \delta_i) - g(x_i - \delta_i)}{2\delta_i} \cdot B \right) \ (i = \overline{1, n}), \tag{5.22}$$

и из (5.20) следует:

$$\sum_{j=1}^{n+1} [f(\beta_j) - f(\alpha_j)] \in U_\varepsilon(0), \quad \sum_{j=1}^{n+1} [g(\beta_j) - g(\alpha_j)] \in (-\varepsilon; \varepsilon). \tag{5.23}$$

Подставляя оценки (5.22) и (5.23) в (5.21), с учетом выпуклости B имеем:

$$\begin{aligned} f(b-\varepsilon) - f(a+\varepsilon) \in \sum_{i=1}^{n} \left[2\delta_i \cdot U_\varepsilon \left(\frac{g(x_i + \delta_i) - g(x_i - \delta_i)}{2\delta_i} \cdot B \right) \right] + U_\varepsilon(0) \subset \\ \subset U_\varepsilon \left(\sum_{i=1}^{n} g(x_i + \delta_i) - g(x_i - \delta_i) \cdot B \right) + U_\varepsilon(0) \subset \\ \subset U_\varepsilon \left([(g(b-\varepsilon) + \varepsilon) - (g(a+\varepsilon) - \varepsilon)] \cdot B \right) + U_\varepsilon(0). \end{aligned} \tag{5.24}$$

3. Переходя в (5.24) к пределу при $\varepsilon \to 0$, с учетом замкнутости B получаем (5.18). □

Докажем теперь теорему о среднем для K_S-субдифференцируемых отображений векторного аргумента. Заметим, что далее под абсолютной непрерывностью отображения $f : E \supset [x; x+h] \to F$ мы понимаем абсолютную непрерывность композиции $f(x+th)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$.

Теорема 5.20 (теорема о среднем). *Пусть отображение* $f : E \supset [x; x+h] \to F$ *абсолютно непрерывно на* $[x; x+h]$ *и* K_S*-субдифференцируемо на* $(x; x+h)$. *Тогда выполняется оценка*

$$f(x+h) - f(x) \in \overline{co}\Big(\bigcup_{0<\theta<1} \partial_K^{[\prime]} f(x+\theta h)\Big) \cdot h. \tag{5.25}$$

Доказательство. Достаточно применить полученный результат к композиции $\varphi(t) = f(x+th)$, $\varphi : \mathbb{R} \supset [0;1] \to F$, учитывая очевидное равенство $\partial_K^{[\prime]}\varphi(\theta) = \partial_K^{[\prime]} f(x+\theta h) \cdot h$. □

Предъявим как следствие теорему о среднем с оценкой по норме.

Следствие 5.2. *В условиях теоремы* 5.20 *справедлива оценка*

$$\|f(x+h) - f(x)\| \leqslant \sup_{0<\theta<1} \|\partial_K^{[\prime]} f(x+\theta h)\| \cdot \|h\|. \tag{5.26}$$

6. Симметрические K-субдифференциалы высших порядков для отображений векторного аргумента

6.1. Основные определения и формула Тейлора. Вначале мы вводим базисное понятие субстепенного K_S-оператора; отметим важное свойство субиномиальности (как обобщение субаддитивности). Затем, действуя вновь в духе схемы Гато—Адамара—Фреше, мы приходим к сильному K_S-субдифференциалу n-го порядка как к ограниченному субстепенному K_S-оператору n-го порядка. Конструкция позволила перенести на K_S-субдифференциальный случай полученную ранее в s-дифференциальном случае формулу Тейлора. Дадим определение *субстепенного* K_S*-оператора*.

Определение 6.1. Пусть E и F — вещественные банаховы пространства. Отображение $A : E \to F_K$ будем называть *субстепенным* K_S*-оператором* n*-го порядка*, если A порождается некоторым n-сублинейным симметрическим K_S-оператором $\widetilde{A} : \overbrace{E \times \dots \times E}^{n} \to F_K$:

$$A(h) := \widetilde{A}(h)^n. \tag{6.1}$$

В частности, $A(\lambda h) = \lambda^n \cdot A(h)$, при любом $\lambda \in \mathbb{R}$. Здесь и далее через $(h)^n$ для $h \in E$ мы обозначаем диагональный поливектор $\underbrace{(h, \dots, h)}_{n}$. Оператор A при $n = 2$ будем называть *субквадратичным* K_S-оператором, при $n = 3$ — *субкубическим* K_S-оператором.

Определение 6.2. Будем говорить, что K_S-оператор $\widetilde{A}$ *ограничен (по норме)*, если

$$\|\widetilde{A}\| = \sup_{\|h_1\|\leqslant 1, \dots, \|h_n\|\leqslant 1} \|\widetilde{A}(h_1, \dots, h_n)\| < \infty. \tag{6.2}$$

Если $\widetilde{A}$ ограничен, то величину (6.2) назовем *нормой* K_S-оператора $\widetilde{A}$. Так как K_S-оператор A порождается K_S-оператором $\widetilde{A}$, положим $\|A\| := \|\widetilde{A}\|$.

Рассмотрим свойство «*суббиномиальности*» для субстепенного K_S-оператора.

Предложение 6.1. *Если* $A : E \to F_K$ — *субстепенной* K_S*-оператор* n*-го порядка, то для любых* $h, k \in E$ *верно*:

$$A(h+k) \subset \sum_{l=0}^{n} C_n^l \widetilde{A}\Big((h)^l, (k)^{n-l}\Big). \tag{6.3}$$

Доказательство. Пусть A порождается некоторым n-сублинейным симметрическим K_S-оператором $\widetilde{A} : A(h+k) := \widetilde{A}(h+k)^n$ для любых h, $k \in E$. Имеем, применяя известное свойство сочетаний и симметричность порождающего оператора:

$$\begin{aligned}\widetilde{A}(h+k)^n \subset C^0_{n-1}\widetilde{A}(h)^n + (C^1_{n-1}+C^0_{n-1})\widetilde{A}((h)^{n-1},k) + (C^2_{n-1}+C^1_{n-1})\widetilde{A}((h)^{n-2},(k)^2) + \dots +\\ + (C^{m-1}_{n-1}+C^m_{n-1})\widetilde{A}((h)^{n-m},(k)^m) + \dots + (C^{n-1}_{n-1}+C^{n-2}_{n-1})\widetilde{A}(h,(k)^{n-1}) + C^{n-1}_{n-1}\widetilde{A}(k)^n =\\ = \widetilde{A}(h)^n + C^1_n\widetilde{A}((h)^{n-1},k) + C^2_n\widetilde{A}((h)^{n-2},(k)^2) + \dots +\\ + C^m_n\widetilde{A}((h)^{n-m},(k)^m) + \dots + C^{n-1}_n\widetilde{A}(h,(k)^{n-1}) + \widetilde{A}(k)^n = \sum_{l=0}^{n} C^l_n\widetilde{A}((h)^l,(k)^{n-l}).\end{aligned}$$

□

Введем определение K_S-субдифференциала n-го порядка по направлению $h \in E$ для отображения $f : E \supset U(x) \to F$.

Определение 6.3. Назовем *K_S-субдифференциалом n-го порядка по направлению h* отображения f в точке x следующий K-предел, если он существует:

$$\partial^{[n]}_K f(x,h) = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\ \overline{co}\Big\{\frac{1}{(2t)^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C^k_n f\big(x+(n-2k)th\big)\ \Big|\ 0<t<\delta\Big\}. \tag{6.4}$$

Если $\partial^{[n]}_K f(x,h)$ существует по любому направлению $h \in E$ и является субстепенным K_S-оператором n-го порядка, то будем говорить, что f *слабо K_S-субдифференцируемо n раз* в точке x и примем обозначение $\partial^{[n]}_K f(x)(h)$. Отметим, что в этом случае легко указать n-сублинейный симметрический K_S-оператор, порождающий K_S-оператор $\partial^{[n]}_K f(x)$:

$$\widetilde{\partial}^{[n]}_K f(x)(h_1,\dots,h_n) = \underset{\delta\to+0}{K\text{-}\lim}\ \overline{co}\Big\{\frac{1}{(2t)^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C^k_n f\big(x+t\sum_{i=0}^{n-2k}h_i\big)\ \Big|\ 0<t<\delta\Big\},$$

$$\partial^{[n]}_K f(x)(h) = \widetilde{\partial}^{[n]}_K f(x)(h,\dots,h).$$

Оператор $\widetilde{\partial}^{[n]}_K f(x)$ назовем *полисимметрическим K_S-субдифференциалом n-го порядка* отображения f в точке x.

Далее, если субстепенной K_S-оператор n-го порядка $\partial^{[n]}_K f(x)$ ограничен, то будем говорить, что *f K_S-субдифференцируемо n раз в точке x по Гато*. Наконец, если $\partial^{[n]}_K f(x)$ — K_S-субдифференциал Гато и сходимость в равенстве (6.4) равномерна по всем направлениям $\|h\| \leqslant 1$, то будем говорить, что *f K_S-субдифференцируемо n раз в точке x по Фреше* (или *сильно K_S-субдифференцируемо n раз в точке x*). Отметим, что в этом случае справедливо включение:

$$\frac{1}{(2t)^n}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k C^k_n f\big(x+(n-2k)th\big) \subset \partial^{[n]}_K f(x)(h)^n + o(\|h\|^n).$$

Как следствие предложения 6.1, получаем свойство «суббиномиальности» для $\partial^{[n]}_K f(x,h)$.

Предложение 6.2. *Для любых $h,k \in E$ верно*:

$$\partial^{[n]}_K f(x)(h+k)^n \subset \sum_{l=0}^{n} C^l_n \widetilde{\partial}^{[n]}_K f(x)\Big((h)^l,(k)^{n-l}\Big). \tag{6.5}$$

Отметим простейшие свойства K_S-субдифференциалов n-го порядка по направлению. Доказательства аналогичны случаю $n = 1$.

Предложение 6.3 (однородность n-го порядка по h)**.** *Для любых $h \in E$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ верно*:

$$\partial^{[n]}_K f(x,\lambda h) = \lambda^n \cdot \partial^{[n]}_K f(x,h).$$

Легко также проверяются следующие утверждения.

Предложение 6.4 (субаддитивность по f)**.** *Для любого $h \in E$ верно*:

$$\partial^{[n]}_K (f_1+f_2)(x,h) \subset \partial^{[n]}_K f_1(x,h) + \partial^{[n]}_K f_2(x,h).$$

Предложение 6.5 (однородность по f). *Для любых $h \in E$ и $\lambda \in \mathbb{R}$ верно*:

$$\partial_K^{[n]}(\lambda \cdot f)(x,h) = \lambda \cdot \partial_K^{[n]} f(x,h).$$

Предложение 6.6. *Пусть $f = (f_1, \dots, f_m) : E \to F_1 \times \dots \times F_m$. Тогда для любого $h \in E$ верно*:

$$\partial_K^{[n]}(f_1, \dots, f_m)(x,h) \subset \prod_{k=1}^{m} \partial_K^{[n]} f_k(x,h).$$

Предложение 6.7. *Пусть $E \xrightarrow{f} F \xrightarrow{A} G$, $A \in L(F,G)$. Тогда для любого $h \in E$ верно*:

$$\partial_K^{[n]}(A \cdot f)(x,h) = A(\partial_K^{[n]} f(x,h)).$$

В доказательстве заключительного утверждения используется признак Вейерштрасса для K-пределов (теорема 1.1).

Предложение 6.8. *Пусть заданы отображения f, $g : E \to F$, причем*:
1. *g K_S-субдифференцируемо по направлению h в точке $x \in E$;*
2. *для достаточно малых $\delta > 0$ выполнено*

$$\overline{co}\left\{ \frac{\Delta^n f(x,th)}{(2t)^n} \middle| 0 < t < \delta \right\} \subset \overline{co}\left\{ \frac{\Delta^n g(x,th)}{(2t)^n} \middle| 0 < t < \delta \right\}.$$

Тогда f также K_S-субдифференцируемо в точке x по направлению h, причем

$$\partial_K^{[n]} f(x,h) \subset \partial_K^{[n]} g(x,h).$$

Справедлива следующая формула Тейлора для K_S-субдифференциалов Фреше.

Теорема 6.1. *Предположим, что существует $\partial_K^{[\prime]}(f^{(n-1)})(x)$ и отображение $f(x)$ радиально сильно абсолютно непрерывно в окрестности $U(x)$. Тогда имеет место включение*

$$f(x+h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(h)^k \in \frac{1}{n!}\overline{co}\,\partial_K^{[n]} f\big((x; x+h)\big) \cdot (h) + o(\|h\|^n). \tag{6.6}$$

Доказательство. Положим $\varphi(t) = f(x+th)$, $\varphi : [0;1] \to E$, тогда $f(x+h) = \varphi(1)$. При этом $f^{(k)}(x)(h)^k = \varphi^{(k)}(0)$ и $\partial_K^{[n]} f(x)(h) = \partial_K^{[n]}\varphi(0)$. Применяя к $\varphi(t)$ формулу (6.6) на $[0;\theta]$, получаем: $\varphi(\theta) - \sum\limits_{k=0}^{n-1} \dfrac{\varphi^{(k)}(0)}{k!}\,\theta^k \in \dfrac{1}{n!}\,\overline{co}\,\partial_K^{[n]}\varphi\big((0;\theta)\big) \cdot (\theta)^n + o(\theta^n)$.

Возвращаясь к $f(x+\theta h)$, имеем:

$$f(x+\theta h) - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}(h)^k \in \frac{1}{n!}\,\overline{co}\,\partial^{[n]} f\big((x+\theta h)\big) \cdot (\theta h)^n + o((\theta h)^n).$$

Заменяя обозначение во всех слагаемых: $\theta h \mapsto h$, мы получаем требуемое равенство (6.6). □

Для нечетного порядка из (6.6) вытекает аналогично результатам пункта 4.6 следующая

Теорема 6.2. *Предположим, что существует $\partial_K^{[\prime]}(f^{(2n)})(x)$ и отображение f радиально сильно абсолютно непрерывно в некоторой окрестности $U(x)$. Тогда справедлива оценка*

$$f(x+h) - f(x-h) - 2\sum_{k=1}^{n} \frac{f^{(2k-1)}(x)}{(2k-1)!}(h)^{2k-1} \in \frac{2}{(2n+1)!}\partial_K^{[2n+1]} f(x)(h) + o(\|h\|^{2n+1}). \tag{6.7}$$

Отметим также случай четного порядка.

Теорема 6.3. *Предположим, что существует $\partial_K^{[\prime]}(f^{(2n-1)})(x)$ и отображение f радиально сильно абсолютно непрерывно в некоторой окрестности $U(x)$. Тогда справедлива оценка*

$$f(x+h) + f(x-h) - 2\sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(2k)}(x)}{(2k)!}(h)^{2k} \in 2\frac{\partial_K^{[2n]} f(x)}{(2n)!}(h) + o(\|h\|^{2n}). \tag{6.8}$$

6.2. K_S-субдифференциалы высших порядков от функционалов. Здесь дается точное описание высших K_S-субдифференциалов от функционалов. На этой основе получена «формула полного K_S-субдифференциала» для высших порядков, а также рассмотрены K_S-матрицы Якоби высших порядков. Вывод следующих результатов аналогичен случаю центрированных K-субдифференциалов (см. [16]).

Теорема 6.4. *Пусть E — вещественное банахово пространство. Если функционал $f : E \supset U(x) \to \mathbb{R}$ K_S-субдифференцируем n раз в $U(x)$ и $(n-1)$ раз дифференцируем обычным образом в точке x, то для любого $h \in E$ имеет место включение*

$$\partial_K^{[n]} f(x)(h)^n \subset \left[\frac{\underline{\partial^{[\prime]}}}{\underline{\partial h}}\Big(f^{(n-1)}(\cdot)\cdot(h)^{n-1}\Big)(x); \frac{\overline{\partial^{[\prime]}}}{\partial h}\Big(f^{(n-1)}(\cdot)\cdot(h)^{n-1}\Big)(x)\right] = \left[\frac{\underline{\partial^{[\prime]}}}{\underline{\partial h}}; \frac{\overline{\partial^{[\prime]}}}{\partial h}\right]\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial h^{n-1}}\right)(x)\cdot(h)^n.$$

В частности, в случае $f : \mathbb{R} \supset U(x) \to \mathbb{R}$ справедлива оценка

$$\partial_K^{[n]} f(x) \subset \left[\frac{\underline{d^{[\prime]}}}{\underline{dx}}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right)(x); \frac{\overline{d^{[\prime]}}}{dx}\left(\frac{d^{n-1}f}{dx^{n-1}}\right)(x)\right] := \left[\frac{\underline{d^{[n]}f}}{\underline{dx^n}}(x); \frac{\overline{d^{[n]}f}}{dx^n}(x)\right].$$

Рассмотрим далее случай функционала от нескольких переменных $f : E_1 \times \cdots \times E_m \to \mathbb{R}$, где $E_1, \ldots, E_m$ — вещественные банаховы пространства.

Теорема 6.5. *Если функционал $f : E_1 \times \cdots \times E_m \supset U(x) \to \mathbb{R}$ $(n-1)$ раз дифференцируем и n раз K_S-субдифференцируем в точке x, то имеет место оценка*

$$\partial_K^{[n]} f(x)(h) \subset \sum_{i=1}^{m} \left(\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial x_i}\right)_K \left[\left(\frac{\partial^{[\prime]}}{\partial x_1} h_1 + \cdots + \frac{\partial^{[\prime]}}{\partial x_m} h_m\right)^{n-1} \cdot f\right](x) \cdot h_i. \tag{6.9}$$

Замечание 6.1. Отметим, что вводя в случае $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ *нижнюю и верхнюю симметрические матрицы Якоби n-го порядка*:

$$\underline{J}^{[n]} f = \left(\frac{\underline{\partial^{[\prime]}}}{\underline{\partial x_{i_n}}}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{n-1}}}\right)\right) =: \left(\frac{\partial^{[n]} f}{\underline{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}}}\right);$$

$$\overline{J^{[n]}} f = \left(\frac{\overline{\partial^{[\prime]}}}{\partial x_{i_n}}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{n-1}}}\right)\right) =: \left(\frac{\overline{\partial^{[n]} f}}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}}\right),$$

оценку (6.9) можно записать в виде: $\partial_K^{[n]} f(x)\cdot(h) \subset [\underline{J}^{[n]} f(x); \overline{J^{[n]}} f(x)]\cdot(h)$, где $[\underline{J}^{[n]} f(x); \overline{J^{[n]}} f(x)]$ — (n^m)-мерный матричный отрезок, соединяющий концевые матрицы (по главной диагонали). В частности, в важном случае $n = 2$ мы получаем оценку: $\partial_K^{[\prime\prime]} f(x) \cdot (h) = [\underline{J}^{[\prime\prime]} f(x); \overline{J^{[\prime\prime]}} f(x)] \cdot (h)^2$, где $[\underline{J}^{[\prime\prime]} f(x); \overline{J^{[\prime\prime]}} f(x)]$ — 2^m-мерный матричный прямоугольник, соединяющий *нижнюю и верхнюю симметрические матрицы Гессе*. Вершинами этого прямоугольника служат 2^m матриц, одна часть строк которых берется из $\underline{J}^{[\prime\prime]} f(x)$, а другая часть строк — из $\overline{J^{[\prime\prime]}} f(x)$.

Следствие 6.1. *Если отображение $f = (f_1, \ldots, f_l)$ K_S-субдифференцируемо n раз в $U(x)$ и $(n-1)$ раз дифференцируемо обычным образом в этой точке, то имеет место оценка*

$$\partial_K^{[n]} f(x)(h) \subset \prod_{j=1}^{l} \left[\sum_{i=1}^{m} \frac{\partial^{[\prime]}}{\underline{\partial x_i}} h_i; \sum_{i=1}^{m} \frac{\overline{\partial^{[\prime]}}}{\partial x_i} h_i\right] \cdot \left(\left(\frac{\partial}{\partial x_1} h_1 + \cdots + \frac{\partial}{\partial x_m} h_m\right)^n \cdot f_j\right)(x).$$

6.3. K_S-субдифференцируемость и симметрическая субгладкость. В этом пункте мы вводим удобное понятие симметрической субгладкости первого порядка как простого достаточного условия K_S-субдифференцируемости. В случае функционалов s-субгладкость выражается в терминах нижних и верхних симметрических производных. Дана двухсторонняя оценка класса $C^{1,s}_{sub}(D)$. Перенесем определение полунепрерывности (см. [16]) на симметрический случай.

Определение 6.4. Пусть E и F — вещественные банаховы пространства, $\Lambda : E \supset U(x) \to L_K^S(E; F)$. Будем говорить, что отображение Λ *субнепрерывно* в точке $x \in E$ (обозначение $\Lambda \in C_{sub}(x)$), если для некоторого $\Lambda_x \in L_K^S(E; F)$ выполняется условие:

$$\forall \varepsilon > 0 \; \exists \, \delta > 0 \; (\|h\| < \delta) \Rightarrow (\Lambda(x+h) \preceq \Lambda_x + Y(h), \text{ где } \|Y(h)\| < \varepsilon). \tag{6.10}$$

Основным для нас является то обстоятельство, что в случае субдифференциалов (т. е. при $\Lambda = \partial_K^{[\prime]} F : E \to L_K^S(E;F)$) в условии (6.10) можно заменить $\Lambda(x) = \partial_K^{[\prime]} f(x)$ на произвольный элемент $L_K^S(E;F)$. Это и есть *общая форма достаточного условия K_S-субдифференцируемости.*

Теорема 6.6. *Пусть E, F — вещественные банаховы пространства, отображение $f : E \supset U(x) \to F$ непрерывно в точке x. Если отображение $\partial_K^{[\prime]} f : E \supset U(x) \to L_K^S(E;F)$ субнепрерывно в точке x и для некоторого K-оператора $\mathcal{D}_{f,x} \in L_K^S(E;F)$ выполнено условие*

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists \, \delta > 0 \; (0 < \|h\| < \delta) \Rightarrow (\partial_K^{[\prime]} f(x+h) \preceq \mathcal{D}_{f,x} + Y(h), \text{ где } \|Y(h)\| < \varepsilon), \tag{6.11}$$

то f K_S-субдифференцируемо в точке x. Будем писать в этом случае $f \in C^{1,s}_{sub}(x)$ и называть отображение f s-субгладким (точнее, $C^{1,s}$-субгладким) в точке x.

Доказательство. Фиксируем $h \in E$. Из условия (6.11) вытекает оценка при $0 < \theta < 1$:

$$\partial_K f(x+\theta h) \subset \mathcal{D}_{f,x} + Y(\theta h), \text{ где } \|Y(\widetilde{h})\| \to 0 \text{ при } \|\widetilde{h}\| \to 0.$$

Отсюда, применяя на отрезке $[x; x+h]$ к f теорему о среднем 5.20, получаем:

$$f(x+h) - f(x) \in \overline{co}\left(\bigcup_{0<\theta<1} \partial_K^{[\prime]} f(x+\theta h)\cdot h\right) \subset \overline{co}\left(\mathcal{D}_{f,x}\cdot h + \bigcup_{0<\theta<1} Y(\theta h)\cdot h\right) \subset$$
$$\subset \mathcal{D}_{f,x}\cdot h + U_\varepsilon(0)\cdot h \text{ при } \|h\| < \delta = \delta(\varepsilon).$$

Таким образом,

$$f(x+h) - f(x) \in \mathcal{D}_{f,x}\cdot h + o(\|h\|),$$

т. е. выполнено условие критерия сильной K_S-субдифференцируемости (теорема 5.10) для f в точке x. □

Перейдем к субнепрерывности частных K_S-субдифференциалов как достаточному условию K_S-субдифференцируемости.

Теорема 6.7. *Пусть $E_1, \ldots, E_n$, F — вещественные банаховы пространства, $f : E_1 \times \ldots \times E_n \supset U(x) \to F$. Тогда*

$$(f \in C^{1,s}_{sub}(x)) \Longleftrightarrow \left(\left(\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial x_i}\right)_K \in C_{sub}(x);\ i = \overline{1,n}\right) \Longrightarrow (f \ K_S\text{-}\textit{субдифференцируемо в точке } x).$$

Доказательство. Поскольку

$$\partial_K^{[\prime]} f(x) = \bigoplus_{i=1}^{n} \left(\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial x_i}\right)_K (x), \tag{6.12}$$

то из субнепрерывности $\left(\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial x_i}\right)_K$ в точке x в силу (6.11) легко следует субнепрерывность $\partial_K^{[\prime]} f$ в этой точке. Обратно, субнепрерывность $\partial_K^{[\prime]} f$ в точке x согласно определению (6.11) с учетом (6.12) означает:

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, \delta > 0 \; (0 < \|h\| < \delta) \Longrightarrow \left(\bigoplus_{i=1}^{n}\left(\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial x_i}\right)_K (x+h) \preceq \mathcal{D}_{f,x} + Y(h), \text{ где } \|Y(h)\| < \varepsilon\right). \tag{6.13}$$

При этом в силу разложения $L_K(\bigoplus_{i=1}^{n} E_i; F) = \bigoplus_{i=1}^{n} L_K(E_i;F)$ имеем:

$$\mathcal{D}_{f,x} = \bigoplus_{i=1}^{n} \mathcal{D}^i_{f,x},\ Y(h) = \bigoplus_{i=1}^{n} Y^i(h), \text{ где } \mathcal{D}^i_{f,x},\ Y^i(h) \in L_K(E_i;F).$$

Отсюда и из (6.13) следует для любого $i = \overline{1,n}$;

$$\forall\, \varepsilon > 0 \,\exists\, \delta > 0 \; (0 < \|h\| < \delta) \Longrightarrow \left(\left(\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial x_i}\right)_K (x+h) \preceq \mathcal{D}^i_{f,x} + Y^i(h), \text{ где } \|Y^i(h)\| < \varepsilon\right),$$

т. е. в силу (6.11) $\left(\frac{\partial^{[\prime]} f}{\partial x_i}\right)_K \in C_{sub}(x)$ при $i = \overline{1,n}$. □

Рассмотрим теперь *случай функционалов* $f : E \to \mathbb{R}$. Здесь мы выходим на узловые условия *полунепрерывности снизу* (по x) $\dfrac{\underline{\partial^{[\prime]} f}}{\underline{\partial h}}$ и *полунепрерывности сверху* (по x) $\dfrac{\overline{\partial^{[\prime]} f}}{\partial h}$, которые в совокупности равносильны *субнепрерывности* K_S-субдифференциала $\partial_K^{[\prime]} f = \left[\dfrac{\partial^{[\prime]} f}{\underline{\partial h}}; \dfrac{\overline{\partial^{[\prime]} f}}{\partial h}\right] : E \to \mathbb{R}_K$.

Теорема 6.8. *Пусть* E — *вещественное банахово пространство,* $f : E \supset U(x) \to \mathbb{R}$. *Тогда*

$$(f \in C^{1,s}_{sub}(x)) \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \left(\frac{\partial^{[\prime]} f}{\underline{\partial h}} \text{ полунепрерывен снизу в точке } x,\ \frac{\overline{\partial^{[\prime]} f}}{\partial h} \text{ полунепрерывен сверху в точке } x\right)$$

$$\Longrightarrow (f\ K_S\text{-субдифференцируем в точке } x).$$

Доказательство. Применяя определение субнепрерывности в нашем случае, получаем:

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ (\|k\| < \delta) \Longrightarrow \left(\left[\frac{\partial^{[\prime]} f}{\underline{\partial h}}(x+k); \frac{\overline{\partial^{[\prime]} f}}{\partial h}(x+k)\right] \subset \left(\frac{\partial^{[\prime]} f}{\underline{\partial h}}(x) - \varepsilon; \frac{\overline{\partial^{[\prime]} f}}{\partial h}(x) + \varepsilon\right)\right). \quad (6.14)$$

Включение справа в (6.14) равносильно выполнению пары неравенств (при $\|k\| < \delta$):

$$\frac{\partial^{[\prime]} f}{\underline{\partial h}}(x+k) > \frac{\partial^{[\prime]} f}{\underline{\partial h}}(x) - \varepsilon;\ \frac{\overline{\partial^{[\prime]} f}}{\partial h}(x+k) < \frac{\overline{\partial^{[\prime]} f}}{\partial h}(x) + \varepsilon,$$

что в точности означает полунепрерывность в точке x для $\dfrac{\partial^{[\prime]} f}{\underline{\partial h}}$ (сверху) и $\dfrac{\overline{\partial^{[\prime]} f}}{\partial h}$ (снизу). □

В частности, для функционалов многих переменных справедливо условие:

Теорема 6.9. *Пусть* $E_1, \ldots, E_n$ — *вещественные банаховы пространства,* $f : E_1 \times \cdots \times E_n \supset U(x) \to \mathbb{R}$. *Тогда*

$$(f \in C^{1,s}_{sub}(x)) \Longleftrightarrow \left(\underline{\nabla}_K^{[\prime]} f = \left(\left(\frac{\partial^{[\prime]} f}{\underline{\partial x_i}}\right)_K\right)_{i=\overline{1,n}} \text{ полунепрерывен снизу в точке } x\right.$$

$$\left.(\text{покоординатно}), \overline{\nabla}_K^{[\prime]} f = \left(\left(\frac{\overline{\partial^{[\prime]} f}}{\partial x_i}\right)_K\right)_{i=\overline{1,n}} \text{ полунепрерывен сверху в точке } x\right)$$

$$\Longrightarrow (f\ K_S\text{-субдифференцируем в точке } x).$$

В частности, в случае $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ *имеем*:

$$(f \in C^{1,s}_{sub}(x)) \Longleftrightarrow \left(\underline{\nabla}^{[\prime]} f = \left(\frac{\partial^{[\prime]} f}{\underline{\partial x_i}}\right)_{i=\overline{1,n}} \text{ полунепрерывен снизу в точке } x,\right.$$

$$\left.\overline{\nabla}^{[\prime]} f = \left(\frac{\overline{\partial^{[\prime]} f}}{\partial x_i}\right)_{i=\overline{1,n}} \text{ полунепрерывен сверху в точке } x\right) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (f\ K_S\text{-субдифференцируем в точке } x).$$

Наконец, выразим условия s-субгладкости в терминах верхней и нижней симметрических K-матриц Якоби.

Теорема 6.10. *Пусть* $E_1, \ldots, E_n$; $F_1, \ldots, F_m$ — *вещественные банаховы пространства,* $f : E_1 \times \cdots \times E_n \supset U(x) \to F_1 \times \cdots \times F_m$. *Тогда*

$$(f \in C^{1,s}_{sub}(x)) \Longleftrightarrow \left(\text{матрица } \underline{J}_K^{[\prime]} f = \left(\left(\frac{\partial^{[\prime]} f_j}{\underline{\partial x_i}}\right)_K\right)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}} \text{ полунепрерывна снизу}\right.$$

$$(\text{поэлементно}) \text{ в точке } x, \quad \text{матрица } \overline{J}_K^{[\prime]} f = \left(\left(\frac{\overline{\partial^{[\prime]} f_j}}{\partial x_i}\right)_K\right)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}} \text{ полунепрерывна сверху}$$

$$\textit{в точке } x\Big) \Longrightarrow (f\ K_S\textit{-субдифференцируемо в точке } x).$$

В частности, в случае $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ *имеем*:

$$(f \in C^{1,s}_{sub}(x)) \Longleftrightarrow \Bigg(\textit{матрица } \underline{J}^{[\prime]} f = \left(\frac{\underline{\partial^{[\prime]} f_j}}{\underline{\partial x_i}}\right)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}} \textit{ полунепрерывна снизу в точке } x,$$

$$\textit{матрица } \overline{J}^{[\prime]} f = \left(\frac{\overline{\partial^{[\prime]} f_j}}{\partial x_i}\right)_{i=\overline{1,n}}^{j=\overline{1,m}} \textit{ полунепрерывна сверху в точке } x\Bigg) \Longrightarrow$$

$$\Longrightarrow (f\ K_S\textit{-субдифференцируемо в точке } x).$$

Дадим некоторое описание класса $C^{1,s}_{sub}(D)$ s-субгладких функционалов на выпуклом компакте D. Прежде всего, легко видеть, что все такие функционалы удовлетворяют *условию Липшица*; в то же время симметрическая субгладкость слабее несимметрической.

Теорема 6.11. *Пусть D — выпуклый компакт в вещественном банаховом пространстве E. Тогда $Lip(D) \supset C^{1,s}_{sub}(D) \supset C^1_{sub}(D)$.*

Сравним теперь s-субгладкость с *кусочной симметрической гладкостью*. Здесь мы будем понимать кусочную симметрическую гладкость *в самом широком смысле*:

$$f \in C^{1,s}_{p.s.}\left(\bigcup_{i=1}^n D_i\right),$$

если каждое сужение $f\big|_{D_i}$ принадлежит классу $C^{1,s}(D_i)$. При этом D_i — произвольные замкнутые области в E, пересекающиеся по границе. Ситуация вполне аналогична несимметрическому субгладкому случаю, рассмотренному в работе [16].

В случае выпуклой компактной области D имеет место двухсторонняя строгая оценка класса $C^{1,s}_{sub}(D)$:

$$C^{1,s}_{p.s.}(D) \subsetneqq C^{1,s}_{sub}(D) \subsetneqq Lip(D).$$

6.4. K_S-субдифференциалы и симметрическая субгладкость высших порядков. Здесь результаты предыдущего параграфа обобщаются на случай субгладкости и K_S-субдифференцируемости высших порядков. Мы введем понятие *s-субгладкости n-го порядка* и покажем, что такая субгладкость является достаточным условием K_S-субдифференцируемости n-го порядка. Вначале приведем обобщение теоремы 6.6.

Теорема 6.12. *Пусть E, F — вещественные банаховы пространства, отображение $f : E \supset U(x) \to F$ $(n-1)$ раз K_S-субдифференцируемо в точке x и n раз K_S-субдифференцируемо в проколотой окрестности $\dot U(x)$. Если отображение $\partial^{[n]}_K f : E \supset \dot U(x) \to L^{n,s}_K(E;F)$ субнепрерывно в точке x ($\partial^{[n]}_K f \in C_{sub}(x)$), т. е. при некотором $\mathcal{D}^n_{f,x} \in L^{n,s}_K(E;F)$ верно*

$$\forall \varepsilon > 0\ \exists\, \delta > 0\ (0 < \|h\| < \delta) \Rightarrow (\partial^{[n]}_K f(x+h) \preceq \mathcal{D}^n_{f,x} + Y(h),\ \textit{где } \|Y(h)\| < \varepsilon),$$

то f K_S-субдифференцируемо n раз в точке x, причем $\partial^{[n]}_K f(x) \preceq \mathcal{D}^n_{f,x}$ (т. е. $\partial^{[n]}_K f(x)(h) \subset \mathcal{D}^n_{f,x}(h)\ \forall\, h \in E$).

Определение 6.5. Будем говорить, что $f : E \supset U(x) \to F$ — *s-субгладкое отображение n-го порядка* (или *$C^{n,s}$-субгладкое отображение*) в точке x, и писать $f \in C^{n,s}_{sub}(x)$, если $\partial^{[n]}_K f \in C_{sub}(x)$. В случае $n = 0$ мы отождествляем классы $C^{0,s}_{sub}(x)$ и $C^s_{sub}(x)$.

Перенесем на случай высших порядков *достаточное условие K_S-субдифференцируемости* в терминах частных K_S-субдифференциалов (теорема 6.7).

Теорема 6.13. *Пусть $E_1, \ldots, E_n, F$ — вещественные банаховы пространства, $f : E_1 \times \cdots \times E_m \supset U(x) \to F$. Тогда*

$$(f \in C^{n,s}_{sub}(x)) \Longleftrightarrow \left(\left(\frac{\partial^{[n]} f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}}\right)_K \in C^s_{sub}(x)\ (\forall\, 1 \leqslant i_1 \leqslant \ldots \leqslant i_n \leqslant m)\right) \Longrightarrow \left(\exists\, \partial^{[n]}_K f(x)\right).$$

Выделим случай функционалов $f : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$.

Теорема 6.14. *Пусть* $f : \mathbb{R}^m \supset U(x) \to \mathbb{R}$. *Тогда*

$$(f \in C^{n,s}_{sub}(x)) \iff \left(\textit{все} \quad \frac{\partial^{[l]}}{\underline{\partial x_{i_n}}}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{n-1}}}\right) \textit{ и } \frac{\overline{\partial^{[l]}}}{\partial x_{i_n}}\left(\frac{\partial^{n-1} f}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_{n-1}}}\right)\right.$$

$$\left. \textit{полунепрерывны в точке } x, \textit{ соответственно, снизу и сверху}\right) \Longrightarrow \left(\exists\, \partial^{[n]}_K f(x)\right).$$

Замечание 6.2.

1. Вводя нижнюю и верхнюю симметрические матрицы Якоби n-го порядка:
$$\underline{J}^{[n]} f = \left(\frac{\partial^{[n]} f}{\underline{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}}}\right); \ \overline{J^{[n]}} f = \left(\frac{\overline{\partial^{[n]} f_j}}{\partial x_{i_1} \ldots \partial x_{i_n}}\right),$$
теорему 6.14 можно сформулировать так: $(f \in C^{n,s}_{sub}(x)) \iff \Big(\underline{J}^{[n]} f$ и $\overline{J^{[n]}} f)$ полунепрерывны в точке x, соответственно, снизу и сверху$\Big)$.
2. Наконец, опираясь на описание класса $C^{1,s}_{sub}(D)$ и определение класса $C^{n,s}_{sub}(D)$, нетрудно дать примерное описание класса $C^{n,s}_{sub}(D)$, где D — выпуклая компактная область.
   а) Очевидно, $(f \in C^{n,s}_{sub}(D)) \Longrightarrow (f^{[n-1]} \in Lip(D)) \Leftrightarrow (f \in Lip^{n,s}(D))$; в то же время s-гладкость n-го порядка слабее несимметрической гладкости n-го порядка:
   $$C^n_{sub}(D) \subset C^{n,s}_{sub}(D) \subset Lip^{n,s}(D).$$
   б) Полученный результат без труда переносится на случай кусочной s-гладкости и s-субгладкости высших порядков:
   $$C^n_{p.s.}(D) \subset C^{n,s}_{sub}(D).$$
   Это включение также является строгим. При этом «кусочная» s-субгладкость n-го порядка не отличается от «полной» субгладкости:
   $$\left(C^{n,s}_{sub}\right)_{p.s.}(D) = C^{n,s}_{sub}(D).$$

   Таким образом, в случае выпуклой компактной области D имеем:
   $$C^n_{sub}(D) \subsetneqq C^{n,s}_{sub}(D) = (C^{n,s}_{sub})_{p.s.}(D) \subsetneqq Lip^{n,s}(D).$$

6.5. K_S**-субдифференциал основного вариационного функционала.** В заключительном параграфе построенный выше аппарат K_S-субдифференциального исчисления применяется к оценке первой K-вариации одномерного вариационного функционала. Рассмотрены различные частные случаи и примеры. В работе [16] было показано, что одномерный вариационный функционал с C^1-субгладким интегрантом

$$\Phi(y) = \int_a^b f(x, y, y')dx \quad (y \in C^1[a; b], f \in C^1_{sub}([a; b] \times \mathbb{R}^2), u = f(x, y, z)) \tag{6.15}$$

сильно K-субдифференцируем в $C^1[a; b]$, причем оценка его первой K-вариации имеет вид:

$$\partial_K \Phi(y)h \subset \left[\int_a^b \left(\frac{\partial f}{\underline{\partial y}}(x, y, y')h + \frac{\partial f}{\underline{\partial z}}(x, y, y')h'\right)dx; \int_a^b \left(\frac{\overline{\partial f}}{\partial y}(x, y, y')h + \frac{\overline{\partial f}}{\partial z}(x, y, y')h'\right)dx\right] \tag{6.16}$$

$(\forall h \in C^1[a; b])$.

Наша цель — обобщить оценку (6.16) на случай *s-субгладких интегрантов* и получить оценку K_S-субдифференциала $\partial^{[l]}_K \Phi(y)$. При этом симметрическая оценка оказывается более точной.

Теорема 6.15. *Пусть для вариационного функционала* (6.15) *интегрант f является $C^{1,s}$-субгладким: $f \in C^{1,s}_{sub}(\mathbb{R}^3)$. Тогда Φ сильно K_S-субдифференцируем всюду в $C^1[a;b]$, причем справедлива оценка*

$$\partial_K^{[\prime]}\Phi(y)h \subset \left[\int\limits_a^b \left(\frac{\partial^{[\prime]}f}{\underline{\partial y}}(x,y,y')h + \frac{\partial^{[\prime]}f}{\underline{\partial z}}(x,y,y')h'\right)dx; \int\limits_a^b \left(\frac{\overline{\partial^{[\prime]}f}}{\partial y}(x,y,y')h + \frac{\overline{\partial^{[\prime]}f}}{\partial z}(x,y,y')h'\right)dx\right]$$

$$(\forall h \in C^1[a;b]). \tag{6.17}$$

Доказательство. Введем вначале вспомогательный линейный оператор

$$(Ay)(x) = (x, y(x), y'(x)),\ A:\ C^1[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}\times C^1[a,b]\times C[a,b].$$

Очевидно, оператор A непрерывен. Введем еще два вспомогательных отображения — нелинейный оператор композиции

$$B_f(\widetilde{A})(y) = f(\widetilde{A}(y)),\ \widetilde{A} \in L(C^1[a,b]; \mathbb{R}\times C^1[a,b]\times C[a,b]),$$

$$B_f : L(C^1[a,b]; \mathbb{R}\times C^1[a,b]\times C[a,b]) \longrightarrow C[a,b],$$

и линейный интегральный функционал

$$G(v) = \int\limits_a^b v(x)dx, \qquad G: C[a,b] \longrightarrow \mathbb{R}.$$

Тогда вариационный функционал Φ может быть записан в виде композиции

$$\Phi(y) = G(B_f(Ay)). \tag{6.18}$$

Применяя к композиции (6.18) теорему о K_S-субдифференцировании композиции, получаем

$$\partial_K\Phi(y,h) = \partial_K(G\circ B_f\circ A)(y)h \subset [\partial_K G(v)\cdot[\partial_K^{u_2u_3}B_f(u)\cdot\partial(A(y))]]h. \tag{6.19}$$

Теперь рассмотрим в отдельности компоненты справа в (6.19).

1. Т. к. A — линейный непрерывный оператор, то он дифференцируем по Фреше, причем $A'(y) \equiv A$. Следовательно,
$$\partial_K^{[\prime]}(Ay)(x) = (x, y(x), y'(x)),$$
2. Для оператора $B_f(u) = B_f((u_1,u_2,u_3))$ мы вычисляем K_S-субдифференциал по u_2, u_3. Получаем:
$$\partial_K^{yz}B_f(A(y))h \subset \left[\frac{\partial^{[\prime]}f}{\underline{\partial y}}(x,y,y')h + \frac{\partial^{[\prime]}f}{\underline{\partial z}(x,y,y')h'}; \frac{\overline{\partial^{[\prime]}f}}{\partial y}(x,y,y')h + \frac{\overline{\partial^{[\prime]}f}}{\partial z}(x,y,y')h'\right].$$
3. Так как G — линейный непрерывный функционал, то он строго дифференцируем по Фреше, причем $G'(v) \equiv G$.

Отсюда:

$$\partial_K^{[\prime]}\Phi(y)h \subset \int\limits_a^b \left[\frac{\partial^{[\prime]}f}{\underline{\partial y}}(x,y,y')h + \frac{\partial^{[\prime]}f}{\underline{\partial z}(x,y,y')h'}; \frac{\overline{\partial^{[\prime]}f}}{\partial y}(x,y,y')h + \frac{\overline{\partial^{[\prime]}f}}{\partial z}(x,y,y')h'\right]dx =$$

$$= \Big[\int\limits_a^b \Big(\frac{\partial^{[\prime]}f}{\underline{\partial y}}(x,y,y')h + \frac{\partial^{[\prime]}f}{\underline{\partial z}}(x,y,y')h'\Big)dx; \int\limits_a^b \Big(\frac{\overline{\partial^{[\prime]}f}}{\partial y}(x,y,y')h + \frac{\overline{\partial^{[\prime]}f}}{\partial z}(x,y,y')h'\Big)dx\Big]. \tag{6.20}$$

□

Отметим частный случай оценки (6.17), когда интегрант образован внешней композицией s-субгладкой функции с гладкой.

Теорема 6.16. *Пусть*

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b \varphi\left[f(x,y,y')\right]dx \quad (y\in C^1[a;b], f\in C^1(\mathbb{R}^3), \varphi\in C^{1,s}_{sub}(\mathbb{R})).$$

Тогда справедлива оценка

$$\partial_K^{[\prime]}\Phi(y)h\subset\Bigg[\int\limits_a^b \underline{\varphi^{[\prime]}}\left(f(x,y,y')\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')h+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')h'\right)dx;$$

$$\int\limits_a^b \overline{\varphi^{[\prime]}}\left(f(x,y,y')\right)\left(\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y')h+\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y')h'\right)dx\Bigg] \quad (\forall h\in C^1[a;b]). \tag{6.21}$$

Доказательство. По формуле (6.20) имеем:

$$\partial_K^{[\prime]}\Phi(y)h\subset$$

$$\subset\Bigg[\int\limits_a^b\left(\frac{\partial^{[\prime]}}{\underline{\partial y}}\varphi(f(x,y,y'))h+\frac{\partial^{[\prime]}}{\underline{\partial z}}\varphi(f(x,y,y'))h'\right)dx;\int\limits_a^b\left(\frac{\overline{\partial^{[\prime]}}}{\partial y}\varphi(f(x,y,y'))h+\frac{\overline{\partial^{[\prime]}}}{\partial z}\varphi(f(x,y,y'))h'\right)dx\Bigg]. \tag{6.22}$$

При этом, учитывая гладкость f, имеем:

$$\frac{\partial^{[\prime]}}{\underline{\partial y}}\varphi(f(x,y,y'))=\underline{\varphi^{[\prime]}}(f(x,y,y'))\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y');\quad \frac{\partial^{[\prime]}}{\underline{\partial z}}\varphi(f(x,y,y'))=\underline{\varphi^{[\prime]}}(f(x,y,y'))\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y');$$

$$\frac{\overline{\partial^{[\prime]}}}{\partial y}\varphi(f(x,y,y'))=\overline{\varphi^{[\prime]}}(f(x,y,y'))\cdot\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,y');\quad \frac{\overline{\partial^{[\prime]}}}{\partial z}\varphi(f(x,y,y'))=\overline{\varphi^{[\prime]}}(f(x,y,y'))\cdot\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,y'). \tag{6.23}$$

Подставляя (6.23) в (6.22) и вынося общие множители, приходим к оценке (6.21). □

Еще один существенный частный случай представляет внутренняя композиция s-субгладкой функции с гладкой. Здесь, для простоты, мы рассмотрим композицию только по третьей переменной.

Теорема 6.17. *Пусть*

$$\Phi(y)=\int\limits_a^b f(x,y,\varphi(y'))dx \quad (y\in C^1[a;b], f\in C^1(\mathbb{R}^3), \varphi\in C^{1,s}_{sub}(\mathbb{R})).$$

Тогда справедлива оценка

$$\partial_K^{[\prime]}\Phi(y)h\subset\int\limits_a^b\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(y'))hdx+$$

$$+\left[\int\limits_a^b\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(y'))\cdot\underline{\varphi^{[\prime]}}(y')h'dx;\int\limits_a^b\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(y'))\cdot\overline{\varphi^{[\prime]}}(y')h'dx\right] \quad (h\in C^1[a;b]). \tag{6.24}$$

Доказательство. Учитывая гладкость f, имеем:

$$\frac{\partial^{[\prime]}}{\underline{\partial y}}f(x,y,\varphi(y'))=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(y'));\quad \frac{\partial^{[\prime]}}{\underline{\partial z}}f(x,y,\varphi(y'))=\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(y'))\cdot\underline{\varphi^{[\prime]}}(y');$$

$$\frac{\overline{\partial^{[\prime]}}}{\partial y}f(x,y,\varphi(y'))=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y,\varphi(y'));\quad \frac{\overline{\partial^{[\prime]}}}{\partial z}f(x,y,\varphi(y'))=\frac{\partial f}{\partial z}(x,y,\varphi(y'))\cdot\overline{\varphi^{[\prime]}}(y'). \tag{6.25}$$

Подставляя (6.25) в (6.20) и вынося общие множители, приходим к оценке (6.24). □

Отметим в качестве конкретного примера случай интегранта, образованного композицией гладкой функции и модуля.

Пример 6.1. Пусть

$$\Phi(y) = \int_a^b |f(x, y, y')|dx \quad (y \in C^1[a;b], f \in C^1(\mathbb{R}^3)). \tag{6.26}$$

Здесь, в обозначениях теоремы 6.16, $\varphi(t) = |t|$, откуда φ всюду симметрически дифференцируема, и

$$\varphi^{[\prime]}(t) = sign\, t. \tag{6.27}$$

Подстановка (6.27) в (6.21) после преобразований приводит к точному равенству

$$\partial_K^{[\prime]}\Phi(y)h = \partial^{[\prime]}\Phi(y)h = \int_a^b sign(y') \cdot \left(\frac{\partial f}{\partial y}h + \frac{\partial f}{\partial z}h'\right)dx. \tag{6.28}$$

Заметим, что вычисление несимметрического K-субдифференциала (см. [16, пример 5.1]) приводит лишь к оценке:

$$\partial_K\Phi(y)h \subset \left(\int_{(y'>0)} (\frac{\partial f}{\partial y}h + \frac{\partial f}{\partial z}h')dx - \int_{(y'<0)} (\frac{\partial f}{\partial y}h + \frac{\partial f}{\partial z}h')dx \right) + \int_{(y'=0)} [-1;1](\frac{\partial f}{\partial y}h + \frac{\partial f}{\partial z}h')dx. \tag{6.29}$$

При этом только в частном случае $mes\,(y' = 0) = 0$ оценка (6.29) переходит в точное равенство (6.28) для классической первой вариации $\partial\Phi(y)h$. Таким образом, в случае $mes\,(y' = 0) = 0$ имеет место точное равенство $\partial_K^{[\prime]}\Phi(y)h = \partial\Phi(y)h$.

Заключительные замечания.

В заключение работы скажем несколько слов о возможных перспективах применения симметрических конструкций (как дифференциалов, так и субдифференциалов) в теории экстремальных задач.

1. Очевидно, сама симметричность разностных отношений, служащая стержнем всей теории, не позволяет надеяться на получение симметрических аналогов классических аналитических условий экстремума (в силу центрированности этого понятия).
2. Однако, эта же симметричность позволяет ставить вопрос о локальной оценке знака первой и высших симметрических разностей для функционалов, что достаточно близко по духу к широко используемым в теории вероятностей понятиям асимметрии, эксцесса и т. п.

Таким образом, просматривается перспектива комбинированного подхода к экстремальным задачам (как в теории вероятностей, так и в теории оптимального управления и вариационном исчислении):

а) Определение точек экстремума с помощью общих (центрированных) дифференциалов и субдифференциалов.

б) Классификация типа экстремума (асимметрия, эксцессы высших порядков) с помощью симметрических дифференциалов и субдифференциалов.

Одной из целей настоящей статьи является построение базовых конструкций для такой работы. Авторы надеются, что судьба будет благоприятствовать им в скорейшей реализации намеченного плана.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Баран И. В.* Симметрические компактные субдифференциалы второго порядка и их применение к рядам Фурье// Динам. сист. — 2013. — *3*(*31*), № 3-4. — С. 201—214.
2. *Баран И. В.* Симметрические компактные субдифференциалы первого порядка// Уч. зап. Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. «Физ.-мат. науки». — 2013. — *26*(*65*), № 1. — С. 16–30.

3. *Баран И. В.* Теорема о среднем и формула Тейлора для симметрических производных и симметрических K-субдифференциалов// Уч. зап. Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. «Физ.-мат. науки». — 2014. — *27*(*66*), № 1. — С. 3–20.
4. *Бари Н. К.* Тригонометрические ряды. — М.: ФМ, 1961.
5. *Басаева Е. К.* О субдифференциалах не всюду определенных выпуклых операторов// Владикавказский мат. ж. — 2006. — *8*, № 4. — С. 6–12.
6. *Гурса Э.* Курс математического анализа. — М.: Гос. техн.-теор. изд-во, 1933.
7. *Демьянов В. Ф., Рубинов А. М.* Основы негладкого анализа и квазидифференциальное исчисление. — М.: Наука, 1990.
8. *Демьянов В. Ф., Рощина В. А.* Обобщенные субдифференциалы и экзостеры// Владикавказский мат. ж. — 2006. — *8*, № 4. — С. 19–31.
9. *Зигмунд А.* Тригонометрические ряды. 2. — М.: Мир, 1965.
10. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Теория экстремальных задач. — М.: Наука, 1974.
11. *Картан А.* Дифференциальное исчисление. Дифференциальные формы. — М.: Мир, 1971.
12. *Кларк Ф.* Оптимизация и негладкий анализ. — М.: Наука, 1988.
13. *Кусраев А. Г., Кутателадзе С. С.* Локальный выпуклый анализ// Итоги науки и техн. Соврем. пробл. мат. — 1982. — *19*. — С. 155–206.
14. *Левин В. Л.* О субдифференциалах выпуклых функционалов// Усп. мат. наук. — 1970. — *25*, № 4(154). — С. 183–184.
15. *Натансон И. П.* Теория функций вещественной переменной. — М.: Наука, 1974.
16. *Орлов И. В.* Введение в сублинейный анализ// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *53*. — С. 64–132.
17. *Орлов И. В., Стонякин Ф. С.* Компактные субдифференциалы: формула конечных приращений и смежные результаты// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — *34*. — С. 121–138.
Англ. перевод: J. Math. Sc. — 2010. — *170*, № 2. — С. 251–269.
18. *Орлов И. В., Стонякин Ф. С.* Предельная форма свойства Радона—Никодима справедлива в любом пространстве Фреше// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — *37*. — С. 55–69.
Англ. перевод: J. Math. Sc. — 2012. — *180*, № 6. — С. 731–747.
19. *Орлов И. В., Халилова З. И.* Компактные субдифференциалы в банаховых пространствах и их применение к вариационным функционалам// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2013. — *49*. — С. 99–131.
20. *Орлов И. В., Халилова З. И.* Компактные субдифференциалы в банаховых конусах// Укр. мат. вестн. — 2013. — *10*, № 4. — С. 532–558.
Англ. перевод: J. Math. Sci. — 2014. — *198*, № 4. — С. 438–456.
21. *Половинкин Е. С., Балашов М. В.* Элементы выпуклого и сильно выпуклого анализа. — М.: Физматлит, 2004.
22. *Прудников И. М.* Интегральная аппроксимация липшицевых функций// Вестн. С.-Пб. ун-та. — 2010. — *10*, № 2. — С. 70–83.
23. *Пшеничный Б. Н.* Выпуклый анализ и экстремальные задачи. — М.: Наука, 1980.
24. *Решетняк Ю. Г.* Условия экстремума для одного класса функционалов вариационного исчисления с негладким интегрантом// Сиб. мат. ж. — 1987. — *28*, № 6. — С. 90–101.
25. *Рокафеллар Р.* Выпуклый анализ. — М.: Мир, 1973.
26. *Сакс С.* Теория интеграла. — М.: Изд-во иностр. лит., 1949.
27. *Стонякин Ф. С.* Аналог теоремы Данжуа—Юнг—Сакса о контингенции для отображений в пространства Фреше и одно его приложение в теории векторного интегрирования// Тр. Ин-та прикл. мат. и мех. НАН Украины. — 2010. — *20*. — С. 168–176.
28. *Стонякин Ф. С.* Компактные характеристики отображений и их приложения к интегралу Бохнера в локально выпуклых пространствах. — Дисс. к.ф.-м.н. — Симферополь, 2011.
29. *Тихомиров В. М.* Выпуклый анализ// Соврем. пробл. мат. Фундам. направл. — 1987. — *14*. — С. 5–101.
30. *Фихтенгольц Г. М.* Курс дифференциального и интегрального исчисления. 1. — М.: Физматлит, 2001.
31. *Халилова З. И.* K-сублинейные многозначные операторы и их свойства// Уч. зап. Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. «Физ.-мат. науки». — 2011. — *24*(*63*), № 3. — С. 110–122.
32. *Халилова З. И.* Применение компактных субдифференциалов в банаховых пространствах к вариационным функционалам// Уч. зап. Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. «Физ.-мат. науки». — 2012. — *25*(*64*), № 2. — С. 140–160.
33. *Халилова З. И.* Компактные субдифференциалы высших порядков и их применение к вариационным задачам// Динам. сист. — 2012. — *2*(*30*), № 3-4. — С. 115—133.
34. *Халилова З. И.* Компактные субдифференциалы в банаховых конусах и их приложения в вариационном исчислении. — Дисс. к.ф.-м.н.. — Симферополь, 2014.

35. *Bertsekas D. P., Nedid A., Ozdaglar A. E.* Convex analysis and optimization. — Belmont: Athena Scientific, 2003.
36. *de la Vallee Poussin Ch. J.*. Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leurs derivées par les polynomes et des suites limitées de Fourier// Bull. Acad. de Belgique. — 1908. — *3*. — С. 193–254.
37. *Ekeland I., Temam R.* Convex analysis and variational problems. — Amsterdam—Oxford: North-Holland Publishing Company; New York: American Elservier Publishing Company, Inc., 1976.
38. *James R. D.* Generalized nTH primitives// Trans. Am. Math. Soc. — 1954. — *76*, № 1. — С. 149–176.
39. *Orlov I. V., Stonyakin F. S.* Compact variation, compact subdifferentiability and indefinite Bochner integral// Methods Funct. Anal. Topology. — 2009. — *15*, № 1. — С. 74–90.

И. В. Орлов
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
295007, Симферополь, проспект Вернадского, 4;
Воронежский государственный университет,
394006, Воронеж, Университетская площадь, 1
E-mail: igor_v_orlov@mail.ru

И. В. Баран
Крымский федеральный университет им. В. И. Вернадского,
проспект Вернадского, 4, Симферополь, Россия, 295007
E-mail: matemain@mail.ru

Современная математика. Фундаментальные направления. Том 57 (2015). С. 162–183

УДК 517.98

СЕКВЕНЦИАЛЬНЫЕ АНАЛОГИ ТЕОРЕМ ЛЯПУНОВА И КРЕЙНА—МИЛЬМАНА В ПРОСТРАНСТВАХ ФРЕШЕ

© 2015 г. **Ф. С. СТОНЯКИН**

Аннотация. В работе развиваются исследования теории антикомпактных множеств (антикомпактов), введенных нами ранее. Описан класс пространств Фреше, в которых существуют антикомпакты — это те и только те пространства, которые имеют счетное тотальное множество линейных непрерывных функционалов. В таких пространствах доказан аналог теоремы Хана—Банаха о продолжении всякого линейного непрерывного функционала, заданного на исходном пространстве, на пространство, порожденное некоторым антикомпактом. Получен аналог теоремы А. А. Ляпунова о выпуклости и компактности образа векторных мер, который утверждает выпуклость и относительную слабую компактность специального типа замыкания образа безатомной векторной меры со значениями в пространстве Фреше, имеющем антикомпакт. С использованием полученного аналога теоремы А. А. Ляпунова доказана разрешимость бесконечномерного аналога задачи о справедливом разделе ресурсов, а также получен аналог теоремы А. А. Ляпунова для неаддитивных аналогов мер — векторных квазимер со значениями во всяком бесконечномерном пространстве Фреше, имеющем антикомпакт. В классе пространств Фреше, имеющих антикомпакт, получены аналоги теоремы Крейна—Мильмана о крайних точках для необязательно компактных выпуклых ограниченных множеств. Особое место занимают аналоги теоремы Крейна—Мильмана в терминах введенных в работе крайних последовательностей (или секвенциальные аналоги теоремы Крейна—Мильмана).

Введение

В работе получены новые аналоги теоремы А. А. Ляпунова о выпуклости образа векторной меры, а также теоремы Крейна—Мильмана о крайних точках в специальном классе пространств Фреше. Начнем с постановки исследуемых нами проблем в работе.

В конечномерных пространствах хорошо известна теорема А. А. Ляпунова о выпуклости образа безатомной векторной меры $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \longrightarrow \mathbb{R}^n$, заданной на σ-алгебре подмножеств Σ некоторого пространства Ω [8]. Этот результат имеет многочисленные приложения в оптимальном управлении, математической экономике, математической статистике, теории игр [1, 5, 7, 10, 21, 22, 27–30]. Ввиду этого известно множество модификаций и обобщений этого результата в конечномерных пространствах, в том числе и относительно современных [7, 10, 21–23, 25, 26].

Однако, как показывает множество примеров, теорема А. А. Ляпунова неверна для векторных мер со значениями в бесконечномерных пространствах [6, 8, 24]. При этом существует множество аналогов указанной теоремы Ляпунова для бесконечномерных банаховых пространств, которые используются, в частности, в работах [1, 5]. Наиболее известный подход заключается в выделении класса банаховых пространств E с так называемым *свойством Ляпунова*. В каждом таком пространстве E для любой счетно-аддитивной безатомной меры $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \longrightarrow E$ замыкание $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}$ множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ выпукло [6, 24]. Свойством Ляпунова обладают, например, пространства c_0, ℓ_p ($p \in [1;2) \cup (2;+\infty)$) [6]. Но указанным свойством не обладает множество важнейших пространств, в т.ч. и сепарабельное гильбертово пространство ℓ_2. Также известна теорема Ула о выпуклости множества $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}$ в случае мер ограниченной вариации со значениями в пространствах со свойством Радона—Никодима [24]. Но как свойство Ляпунова, так и свойство Радона—Никодима существенно ограничивают класс рассматриваемых пространств (ни тому, ни другому свойству не удовлетворяют, например, пространства $L_1[a;b]$ и $C[a;b]$). Отметим также известный результат

Исследования раздела 3 данной работы выполнены при финансовой поддержке гранта Президента Российской Федерации для государственной поддержки молодых российских ученых, код МК-2915.2015.1.

о выпуклости и слабой компактности слабого замыкания множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ для любой векторной меры в любом банаховом пространстве [24].

В наших работах [14, 15] мы поставили задачу получить аналоги теоремы А. А. Ляпунова в бесконечномерном случае без столь существенных сужений класса пространств, а также без использования слабого замыкания (которое, вообще говоря, не позволяет говорить о представлении точек замыкания множества как предельных точек последовательностей элементов множества [6]). В упомянутых работах для сепарабельных пространств Фреше получены теоремы о выпуклости и компактности замыкания множества значений безатомной векторной меры в пространствах, порожденных антикомпактами. В работе [16] мы обратились к результату о выпуклости и слабой компактности слабого замыкания множества значений векторной меры [24]. Но при этом мы заменили слабое замыкание на новый секвенциальный тип замыкания, что привело к сужению класса подходящих векторных мер, и получили в классе банаховых пространств, имеющих счетное тотальное множество линейных непрерывных функционалов, аналог теоремы Ула о выпуклости и относительной слабой компактности специального типа замыкания множества значений векторной меры [16]. В настоящей работе результат [16] перенесен в класс пространств Фреше, а также рассмотрены приложения к бесконечномерному аналогу задачи о разделе ресурсов и аналогу теоремы А. А. Ляпунова для нового неаддитивного обобщения векторной меры.

Теперь перейдем к постановке второй группы проблем, которым посвящена настоящая работа. Хорошо известна теорема Крейна—Мильмана, утверждающая совпадение всякого выпуклого компакта с выпуклой замкнутой оболочкой своих крайних точек [6]. Однако в бесконечномерном случае эта теорема уже, вообще говоря, неверна в классе выпуклых ограниченных замкнутых множеств [6, 24]. Более того, некомпактное выпуклое множество в бесконечномерном пространстве может вообще не иметь крайних точек [6, 24].

Существуют аналоги теоремы Крейна—Мильмана для ограниченных множеств в бесконечномерных банаховых пространствах. Наиболее известный подход заключается в выделении класса банаховых пространств E с так называемым *свойством Крейна—Мильмана*. Также напомним, что во всяком пространстве со *свойством Радона—Никодима* любое выпуклое замкнутое множество есть выпуклая замкнутая оболочка сильно выставленных точек [24]. Но ни одно из этих свойств может не выполняться во многих важнейших пространствах, среди которых банаховы пространства числовых последовательностей c_0 и ℓ_∞ [6]. Также упомянем обобщения теоремы Крейна—Мильмана для замкнутых ограниченных множеств в банаховых пространствах, имеющих гладкое сопряженное [11]. Задача построения аналога теоремы Крейна—Мильмана для необязательно компактных (и даже необязательно выпуклых) множеств была исследована М. В. Балашовым и Е. С. Половинкиным в [2, 3] методами сильно выпуклого анализа в классе гильбертовых пространств.

Мы же ставим задачу получить аналог теоремы Крейна—Мильмана для необязательно компактных множеств в бесконечномерном случае без столь существенных сужений класса пространств. Наш подход к рассматриваемой проблеме основан на понятии *антикомпактного множества* в банаховых пространствах, которое введено и исследовано нами ранее в работах [15,16]. Такой подход дает возможность рассматривать класс пространств, который существенно отличен от класса пространств со свойствами Крейна—Мильмана или Радона—Никодима и содержит, в частности, пространства последовательностей c_0, c и ℓ_∞.

Работа состоит из введения и трех основных разделов.

В первом разделе мы напоминаем понятие антикомпактного множества в пространствах Фреше и даем точное описание класса пространств Фреше, в которых существует антикомпакт. Доказано, что антикомпакты существуют тогда и только тогда, когда пространство Фреше линейно инъективно и непрерывно вложено в сепарабельное гильбертово пространство (теорема 1.1) или, что то же самое, когда пространство Фреше имеет счетное тотальное подмножество линейных непрерывных функционалов T_0 (теорема 1.2). Такие пространства могут и не быть сепарабельными (например, ℓ_∞). Далее, мы получили вспомогательный результат, который утверждает, что для всякого банахова пространства E, имеющего антикомпакт, сопряженное ему пространство E^* представимо в виде векторного индуктивного предела сопряженных пространств $E^*_{C'}$, порожденных антикомпактами $C' \in \mathcal{C}(E)$ (теорема 1.3). По сути, последний результат — это аналог теоремы Хана—Банаха о продолжении линейного непрерывного функционала.

Второй раздел работы посвящен приложениям антикомпактов к секвенциальным аналогам теоремы А. А. Ляпунова для мер и квазимер в пространствах Фреше, имеющих антикомпакт. Для таких пространств введен новый тип сходимости — T_0-сходимость и соответствующий ему секвенциальный тип замыкания множества — T_0-замыкание. Для безатомных ограниченных векторных мер в пункте 2.1 получен секвенциальный аналог теоремы А. А. Ляпунова о выпуклости и компактности образа векторной меры, заменяющий в хорошо известном результате [24] слабое замыкание на T_0-замыкание (теорема 2.1). В пункте 2.2 получено приложение теоремы 2.1 к доказательству разрешимости бесконечномерного аналога задачи о справедливом разделе ресурсов (теорема 2.4). Далее в пункте 2.3 приведен краткий обзор наших совместных с Н.В. Магерой и Р.О. Шпилевым исследований [17, 18], посвященных моделированию задач о справедливом разделе ресурсов без учета достаточно малых величин. Такая постановка задачи привела к новым неаддитивным аналогам меры — понятиям квазимеры [17] и ε-квазимеры [18]. В пункте 2.3 мы кратко знакомим читателя с основными подходами и результатами [17, 18]. Далее в пункте 2.4 мы вводим аналогичное понятие *векторной квазимеры* для функций множества со значениями в пространствах Фреше (определение 2.10) и доказываем аналог теоремы 2.1 для таких функций множества (теорема 2.5).

И, наконец, в третьем разделе получена вторая часть финальных результатов работы — аналоги теоремы Крейна—Мильмана о крайних точках для ограниченных выпуклых не обязательно компактных множеств в пространствах Фреше, имеющих антикомпакты. Первый результат утверждает включение всякого ограниченного (не обязательно замкнутого) выпуклого множества A в некоторый компакт в $E_{C'}$ и, как следствие, в замкнутую выпуклую оболочку его крайних точек (лемма 3.1). Второй аналог теоремы Крейна—Мильмана для банаховых пространств, имеющих антикомпакты — более тонкий результат, точно описывающий всякое выпуклое замкнутое ограниченное множество в терминах крайних точек его замыканий в пространствах, порожденных антикомпактами (теорема 3.1). Далее введено понятие так называемой *крайней последовательности* множества A (определение 3.1) с целью предложить аналог понятия крайней точки множества, который можно было бы использовать для получения секвенциальных аналогов теоремы Крейна—Мильмана для ограниченных некомпактных выпуклых множеств (они могут вообще не иметь крайних точек в обычном смысле). Если A — выпуклый компакт, то показана сходимость всякой крайней последовательности A к некоторой крайней точке множества A (теорема 3.3). В классе пространств Фреше, имеющих антикомпакт, получены аналоги теоремы Крейна—Мильмана для крайних последовательностей как в пространствах $E_{C'}$, порожденных антикомпактами C' в E (теорема 3.4), так и крайними последовательностями в исходном пространстве E (следствие 3.2). Построены примеры крайних последовательностей для замкнутых единичных шаров в пространствах числовых последовательностей ℓ_∞, c и c_0 (примеры 3.2 — 3.4).

1. Антикомпакты. Пространства Фреше, имеющие антикомпакт

1.1. Понятие антикомпактного множества в пространствах Фреше. Класс пространств Фреше, в которых существует антикомпакт. Напомним понятие антикомпакта, предложенное нами в [14]. Обозначим через $\Omega_{ac}(E)$ набор всех замкнутых абсолютно выпуклых подмножеств пространства Фреше E. Здесь и всюду далее под $p_{C'}(\cdot)$ мы понимаем функционал Минковского абсолютно выпуклого множества $C' \subset E$.

Определение 1.1. Назовем множество $C' \in \Omega_{ac}(E)$ *антикомпактным* в E, если:

1. $p_{C'}(a) = 0 \iff a = 0$ в E (или $\bigcap\limits_{\lambda>0} \lambda \cdot C' = \{0\}$);
2. любое ограниченное подмножество E содержится и предкомпактно в пространстве $E_{C'} = (span\ C',\ p_{C'}(\cdot))$. Здесь мы считаем, что $E_{C'}$ пополнено относительно нормы $\|\cdot\|_{C'} = p_{C'}(\cdot)$.

Примем обозначение: $\mathcal{C}'(E)$ — *набор антикомпактных подмножеств* пространства Фреше E.

В предыдущих работах [14, 15] построены примеры системы антикомпактных множеств в сепарабельных гильбертовых и банаховых пространствах. Оказывается, что случай гильбертова пространства в каком-то смысле универсален, поскольку антикомпакты существуют только в пространствах Фреше, линейно инъективно и непрерывно вложенных в сепарабельное гильбертово пространство. Приступим к доказательству этого утверждения.

Из определения 1.1 вытекает, что если $C' \in \mathcal{C}'(E)$, то существует линейный инъективный компактный оператор $A : E \to E_{C'}$ ($Ax = x\ \forall x \in E$). Покажем, что существование такого оператора — не только необходимое, но и достаточное условие наличия антикомпакта в E.

Предложение 1.1. *Пусть существует линейный инъективный компактный оператор $A : E \to F$, где E — пространство Фреше, а F — банахово пространство. Тогда в E существует антикомпакт.*

Доказательство. Положим $C' = \{x \in E \mid \|Ax\|_F \leqslant 1\}$, $\|x\|_{C'} = \|Ax\|_F$. Ввиду линейности и инъективности оператора A, мы имеем, что $\forall x \in E\ \|x\|_{C'} = 0$ тогда и только тогда, когда $x = 0$. Предкомпактность всякого ограниченного множества $B \subset E$, очевидно, вытекает из компактности оператора A. □

Итак, справедлива

Лемма 1.1. *Пространство Фреше E имеет антикомпакт тогда и только тогда, когда существует линейный инъективный компактный оператор $A : E \to F$, где F — некоторое банахово пространство.*

Предыдущий результат позволяет получить уже более проверяемый критерий.

Теорема 1.1. *Пространство Фреше E имеет антикомпакт тогда и только тогда, когда существует линейный непрерывный инъективный оператор $A : E \to \ell_2$.*

Доказательство. 1. *Необходимость.* Пусть в E существует антикомпактное множество. Тогда для некоторого банахова пространства F существует линейный инъективный и компактный оператор $A : E \to F$. Поэтому всякое ограниченное множество $B \subset E$ предкомпактно в любом пространстве $E_{C'}$, $C' \in \mathcal{C}'(E)$ (или множество $A(B) \subset F$ предкомпактно в F). Поэтому образ $A(E)$ можно вложить в некоторое замкнутое сепарабельное подпространство $F_0 \subset F$. Итак, E инъективно линейно и непрерывно вложено в сепарабельное пространство F_0. А поскольку всякое сепарабельное банахово пространство линейно инъективно и непрерывно вложено в ℓ_2 (см. [6, с. 556]), то существует линейный инъективный и непрерывный оператор $A' : E \to \ell_2$.

2. *Достаточность.* Если же E инъективно линейно и непрерывно вложено в ℓ_2, то можно воспользоваться [14, лемма 1], которая утверждает наличие в пространстве ℓ_2 антикомпакта, т. е. что ℓ_2 инъективно, линейно и компактно вложено в ℓ_2. Следовательно, существует линейный инъективный и компактный оператор $A' : E \to \ell_2$, откуда и вытекает существование антикомпакта в E по лемме 1.1. □

Покажем примеры практического использования полученного критерия. Так, хорошо известно, что всякое сепарабельное банахово пространство линейно инъективно и непрерывно вложено в ℓ_2. Покажем, что это возможно и в некоторых несепарабельных пространствах (напомним, что случай сепарабельных пространств был исследован в [15]).

Пример 1.1. Пространство ограниченных числовых последовательностей ℓ_∞ линейно инъективно и непрерывно вложено в ℓ_2. Действительно, достаточно рассмотреть оператор $A : \ell_\infty \to \ell_2$, задаваемый следующим образом: $Ax = \left(x_1, \dfrac{x_2}{2}, \dfrac{x_3}{3}, \ldots, \dfrac{x_n}{n}, \ldots\right)$.

Пример 1.2. Пространство существенно ограниченных функций $L_\infty([0;\ 1])$ с нормой $\|f\|_{L_\infty} = \operatorname{ess\,sup}\limits_{t\in[0;1]} |f(t)|$ линейно инъективно и непрерывно вложено в $L_2([0;1]) \cong \ell_2$. Действительно, достаточно рассмотреть тождественный оператор $A : L_\infty([0;\ 1]) \to L_2([0;\ 1])$, $Af(t) = f(t)$:

$$\|Af\|_{L_2} = \left(\int\limits_0^1 |f(t)|^2 dt\right)^{1/2} \leqslant \left((\operatorname{ess\,sup}\limits_{t\in[0;1]} |f(t)|)^2\right)^{1/2} = \|f\|_{L_\infty},$$

т. е. оператор A непрерывен. Линейность и инъективность A очевидны. Итак, $L_\infty([0;\ 1])$ линейно инъективно и непрерывно вложено в ℓ_2, т. е. в $L_\infty([0;\ 1])$ существует антикомпакт.

Аналогично можно рассмотреть и пространство Фреше $L_\infty([0;+\infty))$ существенно ограниченных функций с определяющей системой полунорм $\|f\|_n = \operatorname{ess\,sup}\limits_{t\in[0;n]} |f(t)|$, $n \in \mathbb{N}$.

Предложим еще одно достаточно простое описание класса пространств Фреше, имеющих антикомпакты. Мы будем опираться, в частности, на аналогичный результат в банаховом случае, полученный в [16, следствие 1].

Теорема 1.2. *Пространство Фреше E имеет антикомпакт тогда и только тогда, когда над E существует счетное тотальное подмножество линейных непрерывных функционалов.*

Доказательство. 1. *Необходимость.* Согласно теореме 1.1, если E имеет антикомпакт, то существует линейный непрерывный инъективный оператор $A : E \to \ell_2$. В свою очередь, в пространстве ℓ_2 существует счетное тотальное подмножество T_0 линейных непрерывных функционалов. Легко проверить, что $T_0 \subset E^*$ в силу непрерывности вложения E в ℓ_2. При этом T_0 разделяет точки E в силу инъективности вложения E в ℓ_2. Поэтому $T_0 \subset E^*$ — тотальное подмножество E.

2. *Достаточность.* Воспользуемся схемой рассуждений из [15, доказательство теоремы 2.5]. Напомним, что любое пространство Фреше E со счетной определяющей системой полунорм $\{\|\cdot\|_j\}_{j=1}^{\infty}$ есть проективный предел последовательности банаховых пространств $\widehat{E}_j$, где $\widehat{E}_j$ являются пополнениями по фактор-нормам фактор-пространств $E_j = E/ker\|\cdot\|_j$ $(j \in \mathbb{N})$.

В силу [16, следствие 1] для любого $j \in \mathbb{N}$ в банаховом пространстве E_j существует антикомпакт $\widehat{C}_j$ и поэтому все E_j инъективно, линейно и компактно вложены в сепарабельное гильбертово пространство $H = \ell_2$ по теореме 1.1. Не уменьшая общности рассуждений, систему антикомпактов $\left\{\widehat{C}_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ можно в H выбрать неубывающей, если нужно, рассмотрев систему множеств $\left\{\bigcup\limits_{j=1}^{N}\widehat{C}_j\right\}_{N=1}^{\infty}$. Антикомпактность этих множеств установлена в [15, предложение 2.4]. При таком соглашении

$$\|\cdot\|_{\widehat{C}_j} \geqslant \|\cdot\|_{\widehat{C}_k} \quad \forall k \geqslant j. \tag{1.1}$$

Пусть $\widehat{E} = \prod\limits_{\widehat{C}_j} E_{\widehat{C}_j}$ — прямое произведение пространств $E_{\widehat{C}_j}$. Рассмотрим множество

$$\widehat{C} := \left\{ x \in \widehat{E} \;\middle|\; \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|x\|_{\widehat{C}_j}}{j^2} \leqslant 1. \right\}$$

Поскольку E — проективный предел пространств $\widehat{E}_j$ и поэтому E может быть плотно и непрерывно вложено в $\prod\limits_{j\in\mathbb{N}} \widehat{E}_j$, то всякое ограниченное множество $C \subset E$ может быть инъективно (ввиду отделимости пространства E) и непрерывно вложено в произведение $\prod\limits_{j\in\mathbb{N}} j^2\widehat{C}_j$, которое компактно в $\widehat{E}$ по теореме Тихонова в топологии прямого произведения. Далее, в силу (1.1) и сходимости ряда $\sum\limits_{j=1}^{\infty}\frac{1}{j^2}$ можно проверить компактность C в пространстве $E_{\widehat{C}} \supset E$, порожденном и пополненном относительно нормы

$$\|x\|_{\widehat{C}} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\|x\|_{\widehat{C}_j}}{j^2}.$$

Поэтому C — непустой абсолютно выпуклый компакт в $E_{\widehat{C}}$, т. е. $\widehat{C}$ — антикомпакт в E. □

На базе последнего следствия легко привести пример пространства, которое ни одного антикомпакта не имеет. При этом такое пространство может быть гильбертовым (несепарабельным) и поэтому рефлексивным.

Пример 1.3. Рассмотрим пространство $\ell_2([0;1])$ таких вещественных функций $f : [0;1] \to \mathbb{R}$, что $\sum\limits_{t\in[0;1]} |f(t)|^2 < \infty$. Ясно, что всякая функция $f \in \ell_2([0;1])$ имеет не более чем счетное множество значений. Норма в этом пространстве имеет вид

$$\|f\|_{\ell_2} = \left(\sum_{t\in[0;1]} |f(t)|^2\right)^{1/2},$$

а всякий линейный непрерывный функционал ℓ на $\ell_2([0;1])$ представим в виде

$$\ell(f) = \ell_g(f) = \sum_{t\in[0;1]} |f(t)g(t)|,$$

где g — некоторый фиксированный элемент из $\ell_2([0;1])$.

Ясно, что какое бы счетное множество линейных непрерывных функционалов $\{\ell_{g_n}\}_{n=1}^{\infty}$ на $\ell_2([0;1])$ мы не выбрали, они все будут принимать нулевые значения на множестве функций из $f \in \ell_2([0;1])$, которые обращаются в нуль в точках $t \in [0;1]$, для которых $g_n(t) \neq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Поэтому всякое счетное множество линейных непрерывных функционалов на $\ell_2([0;1])$ принимает нулевые значения на ненулевых функциях, и поэтому в пространстве $\ell_2([0;1])$ нет счетного тотального подмножества линейных непрерывных функционалов.

Аналогично можно рассмотреть и счетно-гильбертово пространство (пространство Фреше) $\ell_2([0;+\infty))$ с определяющей системой полунорм ($n \in \mathbb{N}$)

$$\|f\|_{\ell_2}^n = \left(\sum_{t\in[0;N]} |f(t)|^2\right)^{1/2}.$$

1.2. Аналог теоремы Хана—Банаха о продолжении линейных непрерывных функционалов в пространствах Фреше, имеющих антикомпакты. Данный раздел статьи посвящен вспомогательному результату, показывающему при наличии антикомпакта $C' \in \mathcal{C}(E)$ представимость всякого сопряженного пространства E^* в виде векторного индуктивного предела сопряженных пространств $E^*_{C'}$, порожденных антикомпактами $C' \in \mathcal{C}(E)$. Иными словами, мы доказываем, что всякий линейный непрерывный функционал, заданный на пространстве Фреше E, можно продолжить до линейного непрерывного функционала, заданного на некотором пространстве $E_{C'}$, порожденном антикомпактом $C' \in \mathcal{C}(E)$. Это, по сути, аналог теоремы Хана—Банаха о продолжении линейного непрерывного функционала с «неувеличением» нормы. Этот результат будет использован нами в разделе, посвященном аналогам теоремы Крейна—Мильмана в пространствах Фреше, порожденных антикомпактами.

Теорема 1.3. *Если в пространстве Фреше E существует антикомпактное множество, то*

$$E^* = \bigcup_{C'\in\mathcal{C}'(E)} E^*_{C'}. \tag{1.2}$$

Доказательство. 1. Ясно, что

$$\forall C' \in \mathcal{C}'(E) \quad E^*_{C'} \subset E^*. \tag{1.3}$$

Действительно, по построению антикомпакта $E \subset E_{C'}$ $\forall C' \in \mathcal{C}'(E)$, и поэтому всякий линейный функционал на $E_{C'}$ будет линейным и на подмножестве E. Непрерывность же этого функционала вытекает из неравенства

$$\|x\|_{C'} \leqslant K \cdot \|x\|_E \text{ для всякого } x \in E \quad \forall C' \in \mathcal{C}'(E), \tag{1.4}$$

справедливого для некоторого числа $K > 0$.

2. Докажем теперь, что любой функционал $\ell \in E^*$ можно продолжить на $E^*_{C'}$ при некотором $C' \in \mathcal{C}'(E)$. Рассмотрим функционал $p^{\ell}_{C''}(\cdot) : E \to \mathbb{R}$: $p^{\ell}_{C''}(x) = |\ell(x)| + \|x\|_{C'}$ для некоторого множества $C' \in \mathcal{C}'(E)$. Ясно, что $p^{\ell}_{C'}(\cdot)$ — норма на E. Рассмотрим множество $C'' = \{x \in E \mid p^{\ell}_{C'}(x) \leqslant 1\}$, $E_{C''} = (span\ C'', p_{C''}(\cdot))$ — банахово пространство, порожденное C'' (и пополненное по данной норме).

Любое ограниченное множество $B \subset E$ предкомпактно в $E_{C''}$. Действительно, для всякой последовательности $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset B$ можно выбрать сходящуюся в $E_{C'}$ подпоследовательность $\{y_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$. А, в свою очередь, из последовательности $\{\ell(y_{n_k})\}_{k=1}^{\infty}$ также можно выбрать сходящуюся подпоследовательность, которая по построению будет сходиться в $E_{C''}$. Итак, $C'' \in \mathcal{C}'(E)$. При этом

$$|\ell(x)| \leqslant |\ell(x)| + \|x\|_{C'} = \|x\|_{C''} \quad \forall x \in E.$$

Далее, на основании теоремы Хана—Банаха [6] о продолжении линейного непрерывного функционала с сохранением нормы $|\ell(x)| \leqslant \|x\|_{C''}$ $\forall x \in E_{C''}$, т. е. $\ell \in E^*_{C''}$.

Таким образом, верно (1.2), ч.т.д. □

2. Секвенциальные аналоги теоремы А. А. Ляпунова для векторных мер и квазимер

2.1. Секвенциальный аналог теоремы А. А. Ляпунова для мер. Теперь переходим к первой группе основных результатов работы — секвенциальным аналогам теоремы А. А. Ляпунова для векторных мер и квазимер со значениями в пространствах Фреше. Напомним, что наиболее известный аналог теоремы А. А. Ляпунова — теорема Ула — утверждает выпуклость и компактность замыкания образа векторной меры (сильно) ограниченной вариации в пространствах со свойством Радона—Никодима. Также известно, что слабое замыкание образа векторной меры со значением в любом пространстве выпукло и слабо компактно. Нам в классе банаховых пространств, имеющих антикомпакты (такие пространства могут не иметь ни свойства Радона—Никодима, ни свойства Ляпунова), удалось выделить класс векторных мер, для которых слабое замыкание можно заменить на некоторый секвенциальный тип замыкания. Введем понятие T_0-сходимости последовательности, где $T_0 \subset E^*$ — счетное тотальное подмножество линейных непрерывных функционалов в E.

Определение 2.1. Будем говорить, что последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *T_0-сходится* к $x \in E$, если $\lim\limits_{n\to\infty} \ell(x_n) = \ell(x)\ \forall \ell \in T_0 \subset E^*$.

Предыдущее определение корректно (предел единственен) в силу того, что множество функционалов T_0 тотально в E (разделяет элементы из E). В качестве наглядного примера такой сходимости можно привести пример покоординатной сходимости в пространствах числовых последовательностей c, c_0 и ℓ_p $(1 \leqslant p \leqslant \infty)$. При этом напомним, что в пространствах ℓ_1 и ℓ_∞ покоординатная сходимость может отличаться от слабой сходимости [6] даже для ограниченных последовательностей. Введем также понятие T_0-замыкания множества $A \subset E$.

Определение 2.2. Назовем *T_0-замыканием* множества $A \subset E$ такое множество $\widehat{A} \subset E$, что для любого $x \in \widehat{A}$ существует T_0-сходящаяся к x последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$.

Оказывается, что можно получить аналог теоремы А. А. Ляпунова для ограниченных векторных мер с использованием T_0-замыканий.

Теорема 2.1. *Пусть пространство Фреше E имеет счетное тотальное подмножество линейных непрерывных функционалов $T_0 \subset E^*$, $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to E$ — безатомная ограниченная мера. Тогда T_0-замыкание $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ выпукло и относительно слабо компактно в E.*

Перед доказательством этого результата приведем некоторые вспомогательные понятия и результат из [4, 12, 13]. Пусть Σ — некоторая σ-алгебра подмножеств S (эти обозначения будем использовать далее). Напомним [4, с. 104], что *полной вариацией векторной меры* $\nu : \Sigma \to E$ относительно некоторой непрерывной полунормы $\|\cdot\|$ в E называется отображение $|\,\nu\,| : \Sigma \to [0; +\infty]$, которое определяется равенством

$$|\nu|(A) = \sup \sum_{k=1}^{n} \|\nu(A_k)\| \quad \forall A \in \Sigma, \tag{2.1}$$

где супремум берется по всем конечным наборам $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \subset \Sigma$ таким, что $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \subset A$. Легко проверить, что отображение $|\,\nu\,|$ — конечная счетно-аддитивная положительная мера на Σ (см. [4, с. 104]). Обозначим через $V(S, E)$ множество всех векторных мер $\nu : \Sigma \to E$ (Σ — σ-алгебра подмножеств S), которые имеют конечную полную вариацию $|\,\nu\,|\,(S) < \infty$ относительно некоторой непрерывной полунормы $\|\cdot\|$ на E (см. (2.1)).

Будем обозначать через $E_C = (span\ C, \|\cdot\|_C)$ банаховы пространства с нормами $\|\cdot\|_C$, равными функционалам Минковского абсолютно выпуклых компактов $C \in \mathcal{C}(E)$. Эти пространства были введены и детально изучались И. В. Орловым (см., например, [12]).

Определение 2.3. Будем говорить, что ν имеет (*сильную*) *компактную вариацию* на S, если существует компакт $C \in \mathcal{C}(E)$ такой, что $\nu : \Sigma \to E_C$ и $\nu \in V(S, E_C)$. Примем обозначения: $\nu \in V_K(S, E)$, $|\,\nu\,|_C$ — полная вариация векторной меры ν относительно нормы $\|\cdot\|_C$.

Для того чтобы сформулировать необходимый результат из [13], нам потребуется вспомогательная характеристика для мер $\nu \in V_K(S,E)$, а именно — (*сильная*) *компактная абсолютная непрерывность* относительно конечной числовой меры μ на Σ. Обозначим через $AC(S,E,\mu)$ множество всех векторных мер $\nu \in V(S,E)$, обладающих свойством обычной *абсолютной непрерывности векторной меры относительно* μ, т. е. таких, что мера $|\nu| \ll \mu$ ($\mu(A)=0 \Rightarrow |\nu|(A)=0$ или $\forall\varepsilon>0\ \ \exists\delta>0:\ \ (\mu(A)<\delta)\Rightarrow|\nu|(A)<\varepsilon$).

Определение 2.4. Будем говорить, что векторная мера $\nu \in V_K(S,E)$ (*сильно*) *компактно абсолютно непрерывна на* S *относительно числовой меры* μ, если существует такой компакт $C \in \mathcal{C}(E)$, что $\nu : \Sigma \to E_C$ и $\nu \in AC(S,E_C,\mu)$. Примем обозначение: $\nu \in AC_K(S,E,\mu)$.

Приведем важный вспомогательный результат из [13].

Теорема 2.2. *Если* $\nu \in AC_K(S,E,\mu)$, *то найдется такое интегрируемое по Бохнеру отображение* $f : S \to E$, *что для любого* $A \in \Sigma$ *верно*

$$\nu(A) = (B)\int\limits_A f(t)d\mu(t). \tag{2.2}$$

Переходим к доказательству теоремы 2.1.

Доказательство. 1. Векторная мера μ имеет слабо ограниченную вариацию ввиду ее ограниченности и того, что всякий ограниченный числовой заряд $\ell(\overrightarrow{\mu})(\cdot)$ ($\ell \in E^*$) имеет ограниченную вариацию. Обозначим через $c_k = V(\ell_k(\overrightarrow{\mu}))(S)$ полные вариации зарядов $\ell_k(\overrightarrow{\mu})$, $\ell_k \in T_0$. Выберем числовую последовательность $n_k \to +\infty$ так, чтобы последовательность $\left\{\dfrac{c_k}{n_k}\right\}_{k=1}^{\infty}$ была ограниченной, и рассмотрим множество

$$\widetilde{C} = \left\{ x \in E \ \middle|\ \sup_{k\in\mathbb{N}} \left|\frac{\ell_k(x)}{n_k}\right| \leqslant 1 \right\},$$

а также порожденное $\widetilde{C}$ банахово пространство $E_{\widetilde{C}} = \left(span\ \widetilde{C}, p_{\widetilde{C}}(\cdot)\right)$ ($p_{\widetilde{C}}(\cdot)$ — функционал Минковского, порожденный $\widetilde{C}$), $E_{\widetilde{C}} \cong \ell_\infty$.

Не уменьшая общности рассуждений, будем полагать, что $\|T_0\|_{E^*} \leqslant 1$ (если E — пространство Фреше, удовлетворяющее условиям теоремы 2.1, то его можно инъективно компактно и линейно вложить в сепарабельное гильбертово пространство ℓ_2 в силу теорем 1.1 и 1.2). Пусть $B \subset E$ — произвольное ограниченное множество. Покажем, что оно содержится и предкомпактно в $E_{\widetilde{C}}$. В силу $n_k \to \infty$ существует $L>0$ такое, что $\dfrac{1}{n_k} \leqslant L$ и поэтому для любого $x \in B$

$$\sup_k \left|\frac{\ell_k(x)}{n_k}\right| \leqslant K \cdot \|\ell_k\|_{E^*} \cdot \|x\|,$$

т. е. $B \subset E_{\widetilde{C}}$. Далее, предкомпактность B в $E_{\widetilde{C}}$ вытекает из того, что последовательности $\left(\dfrac{|\ell_1(x)|}{n_1}, \dfrac{|\ell_2(x)|}{n_2}, \dots, \dfrac{|\ell_k(x)|}{n_k}, \dots\right)$ ограничены элементом $\left(\dfrac{1}{n_1}, \dfrac{1}{n_2}, \dots, \dfrac{1}{n_k}, \dots\right) \in c_0$ равномерно по $x \in B$ (это обеспечивает предкомпактность множества в ℓ_∞). Итак, $\widetilde{C} \in \mathcal{C}'(E)$.

2. Далее, выберем такую последовательность положительных чисел $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$, что $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \dfrac{1}{m_k} = 1$, и рассмотрим новый антикомпакт $\widetilde{C}' \supset \widetilde{C}$:

$$\widetilde{C}' = \left\{ x \in E \ \middle|\ \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{\ell_k(x)}{m_k n_k}\right| \leqslant 1 \right\}.$$

Покажем, что $\overrightarrow{\mu}$ имеет ограниченную вариацию в пространстве $E_{\widetilde{C}'} \cong \ell_1$. Действительно, $\forall A \in \Sigma$: $A = \bigcup\limits_{i=1}^{p} A_i$ ($A_i \cap A_j = \varnothing$ при $i \neq j$)

$$\sum_{i=1}^{p} \|\overrightarrow{\mu}(A_i)\|_{\widetilde{C}'} = \sum_{i=1}^{p}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\ell_k(\overrightarrow{\mu}(A_i))|}{m_k n_k} = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{p} \frac{|\ell_k(\overrightarrow{\mu}(A_i))|}{m_k n_k} \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{i=1}^{p} \frac{|\ell_k(\overrightarrow{\mu})|(A_i)}{m_k n_k} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\ell_k(\overrightarrow{\mu})|(A)}{m_k n_k} \leqslant \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{m_k} = 1$$

в силу выбора $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ и $\{m_k\}_{k=1}^{\infty}$ ($|\nu|(\cdot)$ по-прежнему обозначает полную вариацию заряда ν). Поскольку $E_{\widetilde{C}'} \cong \ell_1$ и пространство последовательностей ℓ_1 имеет антикомпакт по теореме 1.2, то $\exists\, \widetilde{C}'' \supset \widetilde{C}'$: $\overrightarrow{\mu}$ имеет компактную вариацию в $E_{\widetilde{C}''}$. Введем теперь на Σ числовую меру

$$\mu_{\widetilde{C}}(A) := \sup \frac{|\ell_k(\overrightarrow{\mu})|(A)}{n_k}.$$

Ясно, что векторная мера $\overrightarrow{\mu}$ абсолютно непрерывна относительно $\mu_{\widetilde{C}}$. Также мера $|\ell_k(\overrightarrow{\mu})|$ безатомна ввиду безатомности $\overrightarrow{\mu}$. Следовательно, $\overrightarrow{\mu} \in AC_K\left(\Sigma, E_{\widetilde{C}''}, \mu_{\widetilde{C}}\right)$ и поэтому $\overrightarrow{\mu}$ представима в виде неопределенного интеграла Бохнера по теореме 2.2. Доказываемое утверждение теперь вытекает из выпуклости образа векторной меры, представимой в виде интеграла Бохнера (см. [24, с. 266, доказательство теоремы 10]).

3. Остается рассмотреть множество $M(\overrightarrow{\mu}) = co\overrightarrow{\mu}(\Sigma) \cap \overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}_{E_{\widetilde{C}''}}$ (coA — выпуклая оболочка множества A, $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}_{E_{\widetilde{C}''}}$ — замыкание множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ в пространстве $E_{\widetilde{C}''}$). Это множество выпукло как пересечение выпуклых множеств и при этом содержится в T_0-замыкании множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$, поскольку $\overline{\overrightarrow{\mu}(\Sigma)}_{E_{\widetilde{C}''}}$ содержит все T_0-пределы последовательностей из $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$. Выпуклость T_0-замыкания выпуклого множества проверяется непосредственно.

Относительная слабая компактность T_0-замыкания $M(\overrightarrow{\mu})$ множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ вытекает из известного результата о выпуклости и слабой компактности слабого замыкания множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ [24]. Теорема доказана. □

Возникает вопрос о том, можно ли в предыдущих результатах заменить ограничения на класс пространств E какими-то условиями на сами меры? Если Σ — счетно-порожденная σ-алгебра (например, такой будет σ-алгебра борелевских подмножеств вещественного отрезка), то на такой вопрос можно предложить ответ в виде следующего результата.

Теорема 2.3. *Если Σ — счетно-порожденная σ-алгебра и безатомная векторная мера $\overrightarrow{\mu}$: $\Sigma \to E$ имеет (сильно) ограниченную вариацию в некотором пространстве Фреше E. Тогда множество $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ погружается в подпространство $E_0 \subset E$, имеющее счетное тотальное множество линейных непрерывных функционалов $T_0 \in E_0^*$ и T_0-замыкание $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ выпукло и относительно слабо компактно в E_0.*

Доказательство. Обозначим через $|\overrightarrow{\mu}|(\cdot)$ полную вариацию векторной меры $\overrightarrow{\mu}$. Ясно, что $|\overrightarrow{\mu}|$ — числовая мера на Σ. Ввиду счетно-порожденности Σ существует счетная система множеств $\Phi \subset \Sigma$ такая, что для любого $A \in \Sigma$ существует последовательность множеств $\{A_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \Phi$ такая, что $A \subset A_n$ $\forall n \in \mathbb{N}$ и $|\overrightarrow{\mu}|(A) = \lim\limits_{n\to\infty} |\overrightarrow{\mu}|(A_n)$. Следовательно,

$$\|\overrightarrow{\mu}(A_n) - \overrightarrow{\mu}(A)\| = \|\overrightarrow{\mu}(A_n \backslash A)\| \leqslant |\overrightarrow{\mu}|(A_n \backslash A) = |\overrightarrow{\mu}|(A_n) - |\overrightarrow{\mu}|(A) \to 0 \text{ при } n \to \infty,$$

т. е. $\overrightarrow{\mu}(\Phi)$ — счетное плотное в $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ множество и поэтому $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ содержится в некотором сепарабельном подпространстве $E_0 \subset E$. А в пространстве E_0 уже существует счетное тотальное множество линейных непрерывных функционалов. Остается лишь применить теорему 2.1. □

Отметим, что условия счетной аддитивности и ограниченности вариации для векторной меры существенны. Построим пример конечной векторной меры со значениями в $L_\infty[0;1]$, не имеющей сильно ограниченной вариации и слабое секвенциальное замыкание множества значений которой не выпукло.

Пример 2.1. Пусть $\Sigma = \beta[0;1]$ — борелевская σ-алгебра подмножеств $[0;1]$, mes — классическая мера Лебега на Σ, $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to L_\infty[0;1]$:

$$\overrightarrow{\mu}(A) = \chi_A(t) = \begin{cases} 0, & t \notin A; \\ 1, & t \in A. \end{cases}$$

Ясно, что $\forall A \subset [0;1] : mes(A) \neq 0,\ ||\overrightarrow{\mu}(A)||_\infty = 1$. Поэтому $\overrightarrow{\mu}$ не имеет сильной ограниченной вариации. Допустим, что секвенциальное замыкание $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ в $E = L_\infty[0;1]$ выпукло. Это значит, что $\exists\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \Sigma :\ \forall \ell \in E^* = L_\infty^*[0;1]$

$$\lim_{n\to\infty} \ell(\overrightarrow{\mu}(A_n)) = \ell\left(\frac{1}{2}\chi_{[0;1]}(t)\right) = \frac{1}{2}\ell\left(\chi_{[0;1]}(t)\right). \tag{2.3}$$

Если $\forall A \in \Sigma$ положить $\hat{A} = [0;1]\backslash A$, то $\chi_{\hat{A}}(t) + \chi_A(t) \equiv \chi_{[0;1]}(t)$ и поэтому

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} \ell\left(\overrightarrow{\mu}(\hat{A}_n)\right) &= \ell\left(\chi_{[0;1]}(t)\right) - \lim_{n\to\infty} \ell\left(\mu(A_n)\right) = \\ &= \ell\left(\chi_{[0;1]}(t)\right) - \frac{1}{2}\ell\left(\chi_{[0;1]}(t)\right) = \frac{1}{2}\ell\left(\chi_{[0;1]}(t)\right). \end{aligned} \tag{2.4}$$

Вспомним теорему об описании E^* [20]. Из нее вытекает, что для любой функции g ограниченной вариации на $[0;1]$ функционал $\ell_g(f) = \int\limits_0^1 f(t)dg(t) \in E^*$. Если выбрать $g(t) = t$, то $\ell_g\left(\overrightarrow{\mu}(A_n)\right) = \int\limits_0^1 \chi_{A_n}(t)dt = \int\limits_{A_n} dt \xrightarrow{n\to\infty} \frac{1}{2}$, т.к. $\ell\left(\chi_{[0;1]}(t)\right) = \int\limits_0^1 dt = 1$. Аналогично, $\ell_g(\overrightarrow{\mu}(\hat{A}_n)) \to \frac{1}{2}$ при $n \to \infty$. Итак, существует последовательность множеств $\{A_n\}_{n=1}^\infty \subset \Sigma : \lim\limits_{n\to\infty} mes(A_n) = \lim\limits_{n\to\infty} mes(\hat{A}_n) = \dfrac{1}{2}$. Поскольку для любого $n \in \mathbb{N}$ верно $A_n \dot{\cup} \hat{A}_n = [0;1]$, то $t \in [0;1]$ лежит в счетном наборе либо множеств $\{A_n\}_{n=1}^\infty$, либо $\{\hat{A}_n\}_{n=1}^\infty$. Для определенности будем полагать, что

$$t_0 \in \bigcap_{k=1}^\infty A_{n_k}, \quad \{A_{n_k}\}_{k=1}^\infty \subset \{A_n\}_{n=1}^\infty.$$

Выберем теперь

$$g_\delta = \begin{cases} t, & t \leqslant t_0; \\ t + \delta, & t > t_0 \end{cases}$$

для некоторого фиксированного $\delta > 0$. Тогда $\ell_{g_\delta}(\overrightarrow{\mu}(A_n)) = \int\limits_{A_n} dg_\delta(t) = mes(A_n) + \delta$. В силу (2.3)

$$\lim_{n\to\infty} \ell_{g_\delta}\left(\overrightarrow{\mu}(A_n)\right) = \frac{1}{2}\ell_{g_\delta}\left(\chi_{[0;1]}(t)\right) = \frac{1}{2}\int_0^1 dg_\delta(t) = \frac{1}{2}(1+\delta) = \frac{1+\delta}{2},$$

т. е. $\lim\limits_{n\to\infty}(mes(A_n) + \delta) = \dfrac{1}{2} + \delta = \dfrac{1}{2} + \dfrac{\delta}{2}$, что противоречит выбору $\delta > 0$.

Итак, секвенциальное замыкание $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ не выпукло.

2.2. Приложения полученного аналога теоремы А. А. Ляпунова к бесконечномерному аналогу задачи о разделе сокровищ. Теперь мы рассмотрим пример приложения полученного выше секвенциального аналога теоремы А. А. Ляпунова (теорема 2.1) к бесконечномерному аналогу задачи о справедливом разделе ресурсов для мер. Сначала напомним классическую постановку этой задачи для конечного числа лиц.

Мы часто сталкиваемся с вопросами распределения каких-либо предметов, ресурсов; эти вопросы нередко вызывают споры. Задача о справедливом разделе ресурсов (сокровищ) изучается математиками, начиная с 1940-х годов. Идейной базой для этих исследований, как правило, служит работа А. А. Ляпунова [8], в которой доказана теорема о выпуклости образа векторной меры в конечномерных пространствах. Позже появились работы Неймана [28] и Штейнгауза [30], в которых рассмотрены приложения основного результата Ляпунова к задаче о разделе сокровищ (ресурсов). Задачу о разделе ресурсов можно сформулировать следующим образом [28].

Задача 2.1. Пусть имеется n разбойников, которые оценивают части делимой добычи $A \in \Sigma$ с помощью числовых мер $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, заданных на некоторой σ-алгебре Σ. Полагаем, что оценка делимой добычи A одинакова для всех разбойников:

$$\mu_1(A) = \mu_2(A) = \ldots = \mu_n(A) = 1.$$

Возможно ли устроить разбиение множества A на непересекающиеся множества

$$A = A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup \ldots \cup A_n$$

так, чтобы $\mu_k(A_i) = \dfrac{1}{n}$ $\forall k, i = \overline{1,\ n}$?

В известном результате [28, 30] о разрешимости такой задачи предполагалось, что для оценки сокровищ используются меры, а добыча бесконечно делима (каждый разбойник может разделить множество на произвольное число частей, равных с его точки зрения). Это условие бесконечной делимости означает не что иное, как безатомность мер $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$. Оказывается, что при таком условии искомое разбиение возможно.

Рассмотрим теперь такой аналог такой задачи для бесконечного числа мер.

Задача 2.2. Будем обозначать делимые ресурсы через некоторое множество A и полагать, что его части (на которые возможен раздел) образуют σ-алгебру Σ подмножеств A. На Σ задано бесконечное количество числовых мер $\{\mu_n\}_{n=1}^{\infty}$. Положим

$$\mu_1(A) = \mu_2(A) = \ldots = \mu_n(A) = \ldots = 1.$$

Возможно ли устроить разбиение множества A на непересекающиеся множества $A = \bigcup\limits_{n=1}^{\infty}$ так, чтобы

$$\mu_n(A_k) = \lambda_k \quad \forall n, k \in \mathbb{N},$$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1$ — фиксированный сходящийся ряд из положительных чисел?

Задаче 2.2 можно придать такой смысл. Пусть имеется объект и некоторый набор его подмножеств (σ-алгебра подмножеств). Предположим, что имеется счетное количество различных критериев оценки делимых частей исходного объекта, но сам объект одинаков с точки зрения этих критериев. Ставится вопрос о возможности построения такого разбиения исходного объекта на части, чтобы это деление удовлетворяло всем рассматриваемым критериям. По сути это как бы «сглаживание» оценок какого-либо множества с точки зрения бесконечного числа критериев.

Для исследования задачи 2.2 естественно рассмотреть пространство ℓ_∞ и векторную меру

$$\overrightarrow{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n, \ldots) : \Sigma \to \ell_\infty.$$

По условию

$$\overrightarrow{\mu}(A) = (1, 1, \ldots, 1, \ldots), \quad \overrightarrow{\mu}(\varnothing) = (0, 0, \ldots, 0, \ldots).$$

Разрешимость задачи 2.2 равносильна выпуклости $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ при произвольном выборе меры $\overrightarrow{\mu}$. А это неверно, как показано А. А. Ляпуновым даже для векторных мер со значениями в пространстве ℓ_1 [9]. Воспользоваться теоремой Ула (этот результат предполагает, что пространство обладает свойством Радона—Никодима) или свойством Ляпунова нельзя, поскольку пространство числовых последовательностей ℓ_∞ не имеет ни свойства Радона—Никодима, ни свойства Ляпунова. С использованием доказанной нами выше теоремы 2.1 мы получили следующий результат о разрешимости поставленной задачи в секвенциальной форме для бесконечного числа мер.

Теорема 2.4. *Пусть $\overrightarrow{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \ldots) : \Sigma \to \ell_\infty$ — безатомная векторная мера и множество A такое, что $\overrightarrow{\mu}(A) = (1, 1, \ldots)$. Тогда существует система последовательностей множеств $\{A_{k,i}\}_{i,k=1}^{\infty} \subset \Sigma$ такая, что $A_{k,i} \cap A_{\ell,i} = \varnothing$ при $k \neq \ell$, $\bigcup\limits_{k=1}^{\infty} A_{k,i} = A$ и*

$$\lim_{i \to \infty} \mu_n(A_{k,i}) = \lambda_k \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

где $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \lambda_k = 1$ — фиксированный ряд положительных чисел.

Доказательство. Доказательство будем вести методом математической индукции по k.

1. *Базис индукции* ($k = 1$). Выберем в пространстве ℓ_∞ в качестве T_0 набор координатных функционалов — счетное тотальное множество. По теореме 2.1 T_0-замыкание множества $\overrightarrow{\mu}(\Sigma)$ выпукло. Поэтому существует набор множеств $\{A_{1,i}\}_{i=1}^{\infty} \subset \Sigma$:

$$\lim_{i\to\infty} \mu_n(A_{1,i}) = \lambda_1 \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad \Longrightarrow \quad \lim_{i\to\infty} \mu_n(A \setminus A_{1,i}) = 1 - \lambda_1 = \sum_{j=2}^{\infty} \lambda_j.$$

2. Пусть теперь для любого $k = \overline{1, N}$ существует $\{A_{k,i}\}_{i=1}^{\infty}$: $A_{k,i} \cap A_{p,i} = \varnothing$ при $k \neq p$ и $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{i\to\infty} \mu_n(A_{k,i}) = \lambda_k, \quad \lim_{i\to\infty} \mu_n\left(A \setminus (A_{1,i} \cup A_{2,i} \cup \ldots \cup A_{k,i})\right) = 1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_k) = \sum_{j=k+1}^{\infty} \lambda_j.$$

Применив теперь для каждого $i \in \mathbb{N}$ теорему 2.1 к векторной мере $\overrightarrow{\mu}$, заданной на σ-алгебре подмножеств $A \setminus (A_{1,i} \cup A_{2,i} \cup \ldots \cup A_{N,i})$, мы получим существование последовательности множеств $\{A_{N+1,i}\}_{i=1}^{\infty}$ такой, что $A_{N+1,i} \cap A_{k_i} = \varnothing$ $\forall k \leqslant N$ и $\forall n \in \mathbb{N}$

$$\lim_{i\to\infty} \mu_n(A_{N+1,i}) = \lambda_{N+1}, \quad \lim_{i\to\infty} \mu_n\left(A \setminus (A_{1,i} \cup A_{2,i} \cup \ldots \cup A_{N,i} \cup A_{N+1,i})\right) =$$

$$= 1 - (\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_N + \lambda_{N+1}) = \sum_{j=N+2}^{\infty} \lambda_j.$$

Таким образом, утверждение теоремы доказано. □

2.3. Различные подходы к обобщению понятия меры с целью моделирования пренебрежения малыми величинами в задаче о справедливом разделе ресурсов. Проблеме справедливого раздела ресурсов посвящено множество работ (см., например [7, 10, 25, 26, 28, 30]). Как правило, в задачах такого рода считают, что участники спора используют монотонные аддитивные вероятностные меры для оценивания частей делимых объектов. Однако можно встретить и работы, в которых для моделирования соответствующих задач рассматриваются также и неаддитивные функции множества (например, [22, 25]).

Использование мер также невозможно в случаях пренебрежения достаточно малыми или большими множествами, поскольку возникающие при этом функции множеств теряют аддитивность. Такая постановка задачи о разделе ресурсов рассматривалась в недавней работе [17] с использованием понятия квазимеры множества. Напомним понятие квазимеры из [17]. Для этого сначала приведем вспомогательные понятия.

Определение 2.5. Функция множества ($\Phi \ni A \to \rho(A) \in R$) ρ называется *монотонной*, если $\forall A, B \in \Phi : A \supset B \quad \rho(A) \geqslant \rho(B)$.

Также мы используем аналог свойства Дарбу, которое названо нами промежуточной непрерывностью.

Определение 2.6. Пусть ρ — функция множества ($\Phi \ni A \to \rho(A) \in R$). Она называется *промежуточно непрерывной*, если для $\forall A, B \in \Phi : A \subset B, \ \ \rho(A) = a \ (a > 0), \ \ \rho(B) = b \ \ (b > a)$ $\forall c \in (a; b)\ \exists C \in \Phi : \rho(C) = c, \ \ A \subset C \subset B$.

В работе также будет использовано и классическое свойство полунепрерывности сверху.

Определение 2.7. Функция множества $\rho \quad (\Phi \ni A \to \rho(A) \in R)$ называется *полунепрерывной сверху*, если для $\forall A_1, \ldots, A_n, \cdots \in \Phi : A_1 \supset A_2 \supset \cdots \supset A_n \supset \ldots$:

$$\rho\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \rho(A_n).$$

Приведем теперь определение понятия квазимеры из работы [17].

Определение 2.8. Пусть в некотором пространстве (произвольном множестве) $\mathfrak{R}$ задана система множеств Φ и на Φ задана функция $\rho \quad (\Phi \ni A \to \rho(A) \in R)$. Будем говорить, что ρ — *квазимера*, если:

1. $\forall A \in \Phi\colon \rho(A) \geqslant 0;\ \ \rho(\varnothing) = 0;$
2. ρ монотонна по определению 2.5;
3. ρ промежуточно непрерывна по определению 2.6;
4. ρ полунепрерывна сверху по определению 2.7.

Рассмотрим некоторые примеры квазимер над системой множеств, каждое из которых является объединением отрезков на прямой.

$$\Phi = \left\{ \bigcup_{m=1}^{n} [\alpha_m, \beta_m) \mid \alpha_m, \beta_m \in R, [\alpha_k; \beta_k) \cap [\alpha_m; \beta_m) = \varnothing \ \ (k \neq m) \right\}, \text{ где } R = [0; 1).$$

Эта система является монотонным классом множеств.

Пример 2.2.

$$\rho_{\varepsilon}^{**} \left(\bigcup_{m=1}^{n} [\alpha_m; \beta_m) \right) = \begin{cases} \sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m|, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m| \geqslant \varepsilon, \\ 0, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m| < \varepsilon, \end{cases}$$

ε — фиксированное число, $\varepsilon > 0$.

Пример 2.3.

$$\rho_{\varepsilon}^{2} \left(\bigcup_{m=1}^{n} [\alpha_m; \beta_m) \right) = \begin{cases} \left(\sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m| \right)^2, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m| \geqslant \varepsilon, \\ 0, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m| < \varepsilon, \end{cases}$$

ε — фиксированное число, $\varepsilon > 0$.

Пример 2.4.

$$\rho_{\varepsilon}^{\frac{1}{2}} \left(\bigcup_{m=1}^{n} [\alpha_m; \beta_m) \right) = \begin{cases} \sqrt{\sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m|}, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m| \geqslant \varepsilon, \\ 0, & \text{если } \sum\limits_{m=1}^{n} |\beta_m - \alpha_m| < \varepsilon, \end{cases}$$

ε — фиксированное число, $\varepsilon > 0$.

Эти примеры моделируют вышеупомянутые ситуации пренебрежения «малыми» множествами. При этом все вышеуказанные квазимеры не будут мерами, так как не удовлетворяют свойству аддитивности. Это можно легко обнаружить, если взять два множества, каждое из которых имеет нулевую оценку, но объединение которых имеет ненулевую оценку.

На базе понятия квазимеры в работе [17] удалось доказать разрешимость задачи о разделе ресурсов в равном отношении. Однако предложенный в [17] подход к проблеме не позволил получить аналог теоремы А. А. Ляпунова о выпуклости для квазимер, и ввиду этого не удалось доказать возможность раздела объектов в любом отношении, а только лишь на равные части. На устранение данного недостатка направлена работа [18], в которой была поставлена задача так ввести аналог понятия меры для оценки частей делимых ресурсов, чтобы удалось получить возможность справедливого раздела не только в равных отношениях, но и в различных. Для этого необходимо получить фундаментальный результат — аналог теоремы А. А. Ляпунова о выпуклости образа меры в какой-то форме. А для такой задачи уже понятие квазимеры из [17] не подходит. В работе [18] предложен следующий аналог понятия квазимеры — понятие ε-квазимеры множества. Это понятие позволяет учесть пренебрежение «малыми» множествами и при этом сохранить в некотором смысле свойство аддитивности.

Определение 2.9. Пусть в некотором пространстве (произвольном множестве) $\mathfrak{R}$ задана система множеств Φ и на Φ задана функция $\rho \quad (\Phi \ni A \to \rho(A) \in R)$. Будем говорить, что ρ — *ε-квазимера*, если:

1. $\forall A \in \Phi : \rho(A) \geqslant 0;\ \ \rho(\varnothing) = 0;$

2. ρ монотонна по определению 2.5;
3. ρ промежуточно непрерывна по определению 2.6;
4. ρ полунепрерывна сверху по определению 2.7;
5. $\forall A, B \colon \rho(A) \geqslant \varepsilon, \rho(B) \geqslant \varepsilon, A \cap B = \varnothing \colon \rho(A \cup B) = \rho(A) + \rho(B)$.

Как можно заметить, среди рассмотренных выше примеров 2.2–2.4 только отображение из примера 2.2 будет удовлетворять определению ε-квазимеры. Для ε-квазимер в работе [18] получен следующий аналог теоремы А. А. Ляпунова о выпуклости образа векторной ε-квазимеры. Всюду до конца пункта 2.3 мы полагаем, что Φ — монотонный класс множеств.

Теорема 2.5. *Если $\vec{\rho}$ — векторная ε-квазимера, то множество $\vec{\rho}(\Phi)$ квазивыпукло, т. е.*

$$\forall A, B \in \Phi \colon \rho_i(A) > \varepsilon, \rho_i(B) > \varepsilon \ \forall 1 \leqslant i \leqslant n \ \exists C \in \Phi \colon \vec{\rho}(C) = \frac{\vec{\rho}(A) + \vec{\rho}(B)}{2}.$$

На основании построенной теории ε-квазимер в [18] предложен вариант решения задачи о разделе сокровищ разбойниками, если каждый из этих разбойников использует ε-квазимеру для оценки частей сокровищ. При этом ввиду теоремы 2.5 рассмотрена следующая несколько усиленная формулировка задачи.

Задача 2.3. Банда из n жадных, но честных разбойников желает разделить добычу в некотором заданном отношении $\lambda_1 : \lambda_2 : \ldots : \lambda_n$ ($\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n > 0$ и для определенности можно положить, что $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_n = 1$). При этом каждый из разбойников подходит к оценке сокровищ со своей меркой, т. е. подмножества сокровищ каждый из разбойников оценивает по-своему. Будем полагать, что каждый работник использует для оценки сокровищ ε-квазимеры, заданные на монотонном классе множеств Φ. При каких условиях на ε-квазимеры, используемые разбойниками для оценки частей делимых сокровищ, такой раздел будет возможным?

В работе [18] доказана разрешимость поставленной задачи 2.3.

Теорема 2.6. *Пусть $\vec{\rho}$ — векторная ε-квазимера, а множество $A \in \Phi$ такое, что $\vec{\rho}(A) = (1, 1, \ldots, 1)$. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — набор чисел, причем $\lambda_i \geqslant \varepsilon \ \forall i$ и $\lambda_1 + \lambda_2 + \cdots + \lambda_n = 1$. Тогда $\exists L_1, L_2, \ldots, L_n \subset A \colon$, $L_i \in \Phi$*

$$\rho_i(L_j) = \lambda_i \quad \forall i, j = \overline{1, n},$$

где $L_i \cap L_j = \varnothing (i \neq j)$ и $A \backslash (L_1 \cup L_2 \cup \cdots \cup L_n) = \varnothing$.

2.4. Секвенциальный аналог теоремы А. А. Ляпунова для векторных квазимер. В предыдущем пункте мы познакомились с подходами к обобщению понятия числовой меры с целью моделирования задачи о разделе ресурсов, которые бы учитывали пренебрежение малыми частями делимых объектов. Такие подходы к построению аналогов мер позволяют получить аналоги теоремы А. А. Ляпунова в конечномерном случае. Однако подходы работ [17, 18] не годятся для функций множества со значениями в бесконечномерных пространствах, поскольку в этом классе пространств уже невозможно, вообще говоря, использовать свойство монотонности и свойство Дарбу для таких функций множества.

В данном пункте работы мы предложим новый подход к обобщению понятия меры, подобный ранее рассмотренным в [17, 18], но уже для векторных функций множества $\rho : \Sigma \to E$, где Σ — σ-алгебра подмножеств некоторого множества, E — пространство Фреше. С использованием нового понятия будет получен секвенциальный аналог теоремы А. А. Ляпунова о выпуклости образа векторной меры. Дадим определение.

Определение 2.10. Пусть $\overrightarrow{\rho} : \Sigma \to E$ — функция множества. Назовем $\overrightarrow{\rho}$ *векторной квазимерой*, если верны следующие условия:

1. $\overrightarrow{\rho}(\varnothing) = 0$;
2. для любой неубывающей последовательности множеств $A_1 \subset A_2 \subset \ldots \subset A_n \subset \ldots$ из Σ

$$\overrightarrow{\rho}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n \to \infty} \overrightarrow{\rho}(A_n);$$

3. Существуют два подмножества $\Sigma_0, \Sigma_1 \subset \Sigma$ такие, что:
   3.1. $\forall A \in \Sigma_0$, $A' \subset A \Longrightarrow \overrightarrow{\rho}(A') = 0$;

3.2. $\forall P \in \Sigma_1$ $\overrightarrow{\rho}(P) \neq 0$;
3.3. $\forall A \in \Sigma_0$ $\exists P \in \Sigma_1$: $P \supset A$;
3.4. $\forall A, B \in \Sigma_0$, $A \cap B = \varnothing$ $\exists P, Q \in \Sigma_1$: $P \supset A$, $Q \supset B$ и $P \cap Q = \varnothing$;
3.5. $\forall P, Q \in \Sigma_1$ $\exists R \in \Sigma_1$: $P \cap R = Q \cap R = \varnothing$;
3.6. $\forall A \in \Sigma_0$ выражение $(P \cap A = \varnothing)$ $\overrightarrow{\rho}(A \cup P) - \overrightarrow{\rho}(P)$ не зависит от выбора $P \in \Sigma_1$.

4. $\forall A, B \in \Sigma \backslash \Sigma_0$, $A \cap B = \varnothing$:
$$\overrightarrow{\rho}(A \cup B) = \overrightarrow{\rho}(A) + \overrightarrow{\rho}(B).$$

Естественно привести пример функции множества со значениями в бесконечномерном пространстве, удовлетворяющей предыдущему определению.

Пример 2.5. В качестве пространства значений выберем пространство последовательностей $E = \ell_\infty$, а Σ — некоторую σ-алгебру подмножеств некоторого множества Ω.

Пусть $\mu_1, \ldots, \mu_n, \ldots$ — набор счетно-аддитивных числовых мер таких, что $\mu_n(A) \leqslant 1$ $\forall A \subset \Omega$. Положим для некоторого фиксированного числа $\varepsilon > 0$
$$\overrightarrow{\rho}(A) = (\overrightarrow{\mu}_1(A), \overrightarrow{\mu}_2(A), \ldots, \overrightarrow{\mu}_n(A), \ldots) \text{ при } \mu_n(A) \geqslant \varepsilon \quad \forall n \in \mathbb{N}$$
и $\overrightarrow{\rho}(A) = \overrightarrow{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ в противном случае.

В данном случае Σ_0 — это набор всех подмножеств $A \in \Sigma$ таких, что $\overrightarrow{\rho}(A) = 0$, а в качестве Σ_1 можно взять набор всех таких множеств $P \in \Sigma$, для которых хотя бы одна из мер $\mu_n(P) = \varepsilon$.

Докажем, что всякую векторную квазимеру можно «приблизить» обычной счетно-аддитивной векторной мерой $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to E$.

Теорема 2.7. *Если $\overrightarrow{\rho} : \Sigma \to E$ — векторная квазимера, то существует такая счетно-аддитивная векторная мера $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to E$, что $\forall A \in \Sigma$ $\overrightarrow{\rho}(A) = \overrightarrow{\mu}(A)$ или $\overrightarrow{\rho}(A) = 0$.*

Доказательство. 1. Введем функцию множества $\overrightarrow{\mu} : \Sigma \to E$:
$$\overrightarrow{\mu}(A) = \overrightarrow{\rho}(A \cup R) - \overrightarrow{\rho}(R), \text{ если } A \in \Sigma_0, \text{ а } R \in \Sigma_1\text{: } R \cap A = \varnothing;$$
$$\overrightarrow{\mu}(A) = \overrightarrow{\rho}(A), \text{ если } A \notin \Sigma_0.$$
Отметим, что согласно определению векторной квазимеры величина $\overrightarrow{\rho}(A \cup R) - \overrightarrow{\rho}(R)$ не зависит от выбора R. Это доказывает корректность определения $\overrightarrow{\mu}$.

2. Докажем конечную аддитивность функции $\overrightarrow{\mu}$.

а). Пусть $A \cap B = \varnothing$, $\overrightarrow{\rho}(A') = \overrightarrow{\rho}(B') = 0$ $\forall A' \subset A$, $B' \subset B$ $(A, B \in \Sigma_0)$. Тогда $\exists P, Q \in \Sigma_1$: $P \supset A$, $Q \supset B$ и $P \cap Q = \varnothing$. Далее, $\exists R \in \Sigma_1$: $R \cap P = R \cap Q = \varnothing$ и по построению $\overrightarrow{\mu}$
$$\overrightarrow{\mu}(A) = \overrightarrow{\rho}\,(A \cup R) - \overrightarrow{\rho}(R), \quad \overrightarrow{\mu}(B) = \overrightarrow{\rho}\,(B \cup R) - \overrightarrow{\rho}(R).$$

Ясно, что $\overrightarrow{\mu}(A \cup B) = \overrightarrow{\rho}\,(A \cup B \cup R) - \overrightarrow{\rho}(R)$ вне зависимости от того, $A \cup B \in \Sigma_0$ или $A \cup B \notin \Sigma_0$ (в последнем случае можно просто применить пункт 4 определения векторной квазимеры). Если $A \cup B \in \Sigma_0$, то $\exists P' \supset A \cup B$, $P' \in \Sigma_1$ и поскольку $P', R \in \Sigma_1$, то $\exists Q' \in \Sigma_1$: $P' \cap Q' = R \cap Q' = \varnothing$ (и, более того, $A \cap Q' = B \cap Q' = \varnothing$). Поэтому
$$\overrightarrow{\rho}\left(A \cup B \cup R \cup Q'\right) = \overrightarrow{\rho}\,(A \cup R) + \overrightarrow{\rho}\left(B \cup Q'\right)$$
и, аналогично,
$$\overrightarrow{\rho}\left(A \cup B \cup R \cup Q'\right) = \overrightarrow{\rho}\,(A \cup B \cup R) + \overrightarrow{\rho}\left(Q'\right),$$
откуда
$$\overrightarrow{\rho}\,(A \cup B \cup R) - \overrightarrow{\rho}\,(A \cup R) = \overrightarrow{\rho}\left(B \cup Q'\right) - \overrightarrow{\rho}\left(Q'\right) = \overrightarrow{\mu}(B),$$
что и требовалось: $\overrightarrow{\mu}(A \cup B) = \overrightarrow{\mu}(A) + \overrightarrow{\mu}(B)$.

Если же $A \cup B \notin \Sigma_0$, то
$$\overrightarrow{\mu}\,(A \cup B) = \overrightarrow{\rho}\,(A \cup B) = \overrightarrow{\rho}\,(A \cup B \cup R \cup S) - \overrightarrow{\rho}(R) - \overrightarrow{\rho}(S) =$$
$$= \overrightarrow{\rho}\,(A \cup R) - \overrightarrow{\rho}(R) + \overrightarrow{\rho}\,(B \cup S) - \overrightarrow{\rho}(S) = \overrightarrow{\mu}(A) + \overrightarrow{\mu}(B)$$
при условии $S \in \Sigma_1$, $S \cap R = S \cap (A \cup B) = \varnothing$.

б). Пусть теперь $A \in \Sigma_0$, $B \notin \Sigma_0$, $A \cap B = \varnothing$. Тогда $\overrightarrow{\rho}(B) = \overrightarrow{\mu}(B)$, $\overrightarrow{\rho}\,(A \cup B) = \overrightarrow{\mu}\,(A \cup B)$. Если $R \subset B$, то
$$\overrightarrow{\mu}\,(A \cup B) = \overrightarrow{\rho}\,(A \cup B) = \overrightarrow{\rho}\,((A \cup R) \cup (B \backslash R)) = \overrightarrow{\rho}\,(A \cup R) + \overrightarrow{\rho}\,(B \backslash R) =$$

$$= \overrightarrow{\mu}(A) + \overrightarrow{\rho}(R) + \overrightarrow{\rho}\,(B\backslash R) = \overrightarrow{\rho}(B) + \overrightarrow{\mu}(A) = \overrightarrow{\mu}(A) + \overrightarrow{\mu}(B)$$

при условии $B\backslash R \notin \Sigma_0$. Если же $B\backslash R \in \Sigma_0$, то

$$\overrightarrow{\mu}\,(A \cup (B\backslash R)) = \overrightarrow{\mu}(A) + \overrightarrow{\mu}\,(B\backslash R) = \overrightarrow{\mu}(A) + \overrightarrow{\rho}(B) - \overrightarrow{\rho}(R),$$

т. е.

$$\overrightarrow{\mu}\,(A \cup (B\backslash R)) + \overrightarrow{\rho}(R) = \overrightarrow{\mu}(A) + \overrightarrow{\mu}(B).$$

Покажем, что

$$\overrightarrow{\mu}\,((A \cup B)\,\backslash R) + \overrightarrow{\mu}(R) = \overrightarrow{\mu}\,(A \cup B)\,.$$

Если $\overrightarrow{\mu}\,((A \cup B)\,\backslash R) \in \Sigma_0$, то $(R \cap (A \cup B) = \varnothing)$

$$\overrightarrow{\mu}\,((A \cup B)\,\backslash R) = \overrightarrow{\mu}\,(A \cup B) - \overrightarrow{\mu}(R).$$

Если же $(A \cup B)\,\backslash R \notin \Sigma_0$, то согласно определению пункта 4 векторной квазимеры

$$\overrightarrow{\rho}\,((A \cup B)\,\backslash R) + \overrightarrow{\rho}(R) = \overrightarrow{\mu}\,(A \cup B)\,.$$

Случай $A, B \notin \Sigma_0$ тривиален, как легко показывает пункт 4 определения векторной квазимеры.

3. Счетная аддитивность функции множества $\overrightarrow{\mu}$ вытекает из конечной аддитивности и слабой счетной аддитивности (счетной аддитивности всякого числового заряда $\ell(\overrightarrow{\mu})$, $\ell \in E^*$) (см. [19, теорема 3.6.2]). Слабая же счетная аддитивность $\overrightarrow{\mu}$ вытекает из свойств 2 и 4 определения векторной квазимеры, а также соответствующего свойства числовых зарядов $\ell(\overrightarrow{\mu})$ $(\ell \in E^*)$. □

Будем называть меру, построенную в доказательстве предыдущей теоремы, *соответствующей для векторной квазимеры* $\overrightarrow{\rho}$ (примем обозначение $\overrightarrow{\mu}_\rho$). Сформулируем теперь аналог теоремы Ляпунова о выпуклости образа меры для векторных квазимер, который вытекает из предыдущего результата и теоремы 2.1.

Теорема 2.8. *Если для векторной квазимеры* $\overrightarrow{\rho}$ *соответствующая мера* $\overrightarrow{\mu_\rho}$ *безатомна, то* T_0*-замыкание множества* $\overrightarrow{\rho}\,(\Sigma\backslash\Sigma_0)$ *выпукло и относительно слабо компактно в* E.

3. Секвенциальные аналоги теоремы Крейна—Мильмана для ограниченных замкнутых множеств в пространствах Фреше, имеющих антикомпакт

Теперь перейдем ко второй группе финальных результатов работы — аналогам теоремы Крейна—Мильмана для выпуклых ограниченных необязательно компактных множеств в пространствах Фреше, имеющих антикомпакт. Напомним, что согласно классической теореме Крейна—Мильмана всякий выпуклый компакт A есть замкнутая выпуклая оболочка крайних точек множества A [6, 24]. Пусть в банаховом пространстве E существует антикомпакт $C' \in \mathcal{C}'(E)$. Тогда для ограниченного выпуклого множества $A \subset E$ замыкание $\overline{A}_{E_{C'}}$ — выпуклый компакт в $E_{C'}$. Согласно теореме Крейна—Мильмана (в пространстве $E_{C'}$)

$$\overline{A}_{E_{C'}} = \overline{co}_{E_{C'}}\ ext\left(\overline{A}_{E_{C'}}\right),$$

где $ext(X)$ — множество крайних точек множества X, $\overline{co}_E X$ — выпуклая замкнутая (в пространстве E) оболочка множества X. Это означает, что справедлив следующий аналог теоремы Крейна—Мильмана для ограниченных выпуклых множеств, утверждающий включение всякого такого множества A в некоторый компакт в $E_{C'}$ и, как следствие, в замкнутую выпуклую оболочку его крайних точек (замкнутость A не требуется).

Лемма 3.1. *Если в пространстве Фреше* E *существует антикомпакт (или в* E *существует счетное тотальное множество линейных непрерывных функционалов), то для всякого ограниченного выпуклого множества* $A \subset E$

$$A \subset \overline{co}_{E_{C'}} ext\left(\overline{A}_{E_{C'}}\right). \tag{3.1}$$

Будем интерпретировать (3.1) так: если E инъективно компактно вложено в $E_{C'}$ и $\varphi_{C'} : E \to E_{C'}$ — соответствующее каноническое вложение, то (3.1) означает, что

$$\varphi_{C'}(A) \subset \overline{co}_{E_{C'}}\ ext\ \overline{\varphi_{C'}(A)}.$$

В пространстве E последнее равенство можно переписать так:

$$A \subset \varphi_{C'}^{-1}\left(\overline{co}_{E_{C'}} ext \overline{\varphi_{C'}(A)} \cap \varphi(E)\right).$$

Теперь рассмотрим более тонкий результат — аналог теоремы Крейна—Мильмана, точно описывающий всякое выпуклое замкнутое ограниченное множество с помощью крайних точек его замыкания в пространствах, порожденных антикомпактами. Пусть $\widehat{A}_{C'} = \varphi_{C'}(E) \cap \overline{co}_{E_{C'}}\, ext\, \varphi_{C'}(A)$, $A_{C'} := \overline{\varphi_{C'}^{-1}(\widehat{A}_{C'})} \subset E$. Справедлива

Теорема 3.1. *Пусть в E существует антикомпакт. Тогда для всякого замкнутого выпуклого ограниченного множества $A \subset E$*

$$A = \bigcap_{C' \in \mathcal{C}'(E)} A_{C'}.$$

Доказательство. Включение $A \subset \bigcap_{C' \in \mathcal{C}'(E)} A_{C'}$ вытекает из предыдущей леммы. Пусть существует $x \in \bigcap_{C' \in \mathcal{C}'(E)} A_{C'}$, но $x \notin A$. Тогда по теореме Хана—Банаха существует такой линейный непрерывный функционал $\ell \in E^*$, что $\ell(x) > \sup \ell(A)$. По теореме 1.3 существует $C'' \in \mathcal{C}'(E)$ такой, что $\ell \in E^*_{C''}$ и $\ell\left(\varphi_{C''}(x)\right) > \sup \ell\left(\varphi_{C''}(A)\right)$. Это означает, что

$$\varphi_{C''}(x) \notin \overline{co}_{E'_{C'}}\left(\varphi_{C''}(A)\right) = \overline{co}_{E'_{C'}}\ ext\ \left(\varphi_{C''}(A)\right).$$

Поэтому $x \notin A_{C''}$. Получили противоречие, которое доказывает теорему. □

Аналогично можно проверить следующий результат.

Теорема 3.2. *Пусть в пространстве Фреше E существует антикомпакт. Тогда для всякого выпуклого ограниченного множества $A \subset E$*

$$\overline{A} = \bigcap_{C' \in \overline{\mathcal{C}(E)}} \overline{A_{E_{C'}}},$$

где $\overline{A}$ и $\overline{A_{E_{C'}}}$ — замыкания множества A в пространстве E в топологиях, порожденных нормами $\|\cdot\|$ и $\|\cdot\|_{C'}$ соответственно.

В качестве иллюстрации возможностей применения полученных результатов приведем пример.

Пример 3.1. Докажем, что в пространстве числовых последовательностей ℓ_∞ замкнутый единичный шар есть выпуклая замкнутая оболочка последовательностей, состоящих из ± 1:

$$\overline{B_{\ell_\infty}} = \overline{co}\left\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, \ldots)\right\}.$$

Очевидно, что $\overline{co}\left\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, \ldots)\right\} \subset \overline{B_{\ell_\infty}}$. Для того чтобы доказать обратное включение, рассмотрим систему антикомпактов в пространстве ℓ_∞:

$$C_\varepsilon = \left\{x \in \ell_\infty \middle| \sup \left|\frac{x_k}{\varepsilon_k}\right| \leqslant 1\right\},$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots)$ — произвольная последовательность положительных чисел, сходящаяся к $+\infty$. Легко видеть, что любой вектор $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots)$: $\alpha_i = \pm 1$ — крайняя точка в пространстве E_{C_ε}. И наоборот, всякий вектор из шара B_{ℓ_∞}, одна из координат которого по модулю строго меньше 1, не есть крайняя точка. Поэтому по обычной теореме Крейна—Мильмана, примененной в пространстве E_{C_ε},

$$\overline{B_{C_\varepsilon}} = \overline{co}_{E_{C_\varepsilon}}\left\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, \ldots)\right\}.$$

Это значит, что

$$\overline{B_{\ell_\infty}} \subset \overline{co}_{E_{C_\varepsilon}}\left\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, \ldots)\right\} \quad \forall \varepsilon \longrightarrow +\infty.$$

Поэтому

$$\overline{B_{\ell_\infty}} \subset \bigcap_{\varepsilon \longrightarrow +\infty} \overline{co}_{E_{C_\varepsilon}}\left\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, \ldots)\right\}$$

и ввиду предыдущей теоремы 3.2

$$\overline{B_{\ell_\infty}} \subset \overline{co}\left\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, \ldots)\right\}.$$

Итак,

$$\overline{B_{\ell_\infty}} \subset \overline{co}\left\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, \ldots)\right\} \subset \overline{B_{\ell_\infty}},$$

откуда
$$\overline{B_{\ell_\infty}} = \overline{co}\left\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, \ldots)\right\}.$$

Рассматривая пересечения шара $\overline{B_{\ell_\infty}}$ с пространствами сходящихся числовых последовательностей c и c_0, можно показать справедливость следующих представлений:
$$\overline{B_c} = \overline{co}\left\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, 1, 1 \ldots, 1, 1, \ldots);\ (\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, -1, -1, \ldots, -1, -1, \ldots)\right\}$$
и
$$\overline{B_{c_0}} = \overline{co}\left\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, 0, 0 \ldots, 0, 0, \ldots)\right\}.$$

Предыдущий пример явно показывает, что применение системы антикомпактов и теоремы Крейна—Мильмана в пространствах, порожденных антикомпактами, может позволить выразить выпуклое замкнутое ограниченное не обязательно компактное подмножество E как замкнутую выпуклую оболочку элементов этого же пространства. Оказывается, что эта ситуация в некотором смысле типична. Точнее говоря, от аналогов теоремы Крейна—Мильмана, описывающих выпуклые множества через элементы пространств, порожденных антикомпактами, можно перейти к некоторым результатам, описывающим эти множества через элементы самого пространства. Правда, при этом нельзя не учитывать того, что крайних точек в классическом смысле для таких множеств в пространствах без свойства Крейна—Мильмана может и не быть. Поэтому напрашивается идея ввести обобщение понятия крайней точки множества, позволяющее записать аналог теоремы Крейна—Мильмана для замкнутых ограниченных не обязательно компактных множеств. Мы предлагаем такое понятие. Введем необходимые дополнительные обозначения: для $a \in E$ обозначим через $p(a)$ векторный отрезок, середина которого — a:
$$p(a) = \left\{\lambda x_1 + (1-\lambda)x_2 : \quad \lambda \in [0;1] \text{ и } a = \frac{x_1 + x_2}{2}\right\}.$$
Если имеется последовательность элементов $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$, то введем соответствующую этой последовательности систему множеств $A[x_n]$ (отметим, что отрезок $p(x_k)$, в частности, может быть и одноточечным):
$$A[x_n] = \overline{\bigcup_{k \geqslant n} \{p(x_k) \mid p(x_k) \subset A\}}, \quad p(x_k) \text{ — всевозможные отрезки.}$$

Перейдем теперь к понятию аналога крайней точки множества A.

Определение 3.1. Назовем последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ *крайней* для множества A, если пересечение $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A[x_n]$ либо одноточечно, либо пусто.

Возникает естественный вопрос о том, как связаны понятия крайней точки множества и крайней последовательности множества (в чем сходство)? Ясно, что при всяком выборе последовательности $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$ верно $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A[x_n] \subset A$. Покажем, что если x_0 — крайняя точка выпуклого компакта A, то существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$, сходящаяся к x_0, для которой верно $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A[x_n] = \{x_0\}$.

Теорема 3.3. *Если A — выпуклый компакт в пространстве Фреше E, то x_0 — крайняя точка в A тогда и только тогда, когда существует последовательность $\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$:*
$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0 : \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A[x_n] = \{x_0\}.$$

Доказательство. 1. Пусть x_0 — крайняя точка в A и $x_n \in A$: $x_n \to x_0$. Тогда $A[x_n] \supset \overline{\{x_k\}_{k=n}^{\infty}}$ и поэтому $x_0 \in A[x_n]$ $\forall n \in \mathbb{N}$. Допустим, что $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A[x_n] \neq \{x_0\}$, т. е. существует $y_0 \in \bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A[x_n]$, $y_0 \neq x_0$. В силу выпуклости A векторный отрезок
$$[x_0, y_0] = \{\lambda x_0 + (1-\lambda) y_0 \mid 0 \leqslant \lambda \leqslant 1\} \subset A.$$

По построению $y_0 \in A[x_n]$ и поэтому существует последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset A$: $y_n \in p(x_n)$, $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = y_0$. Поскольку $y_0 \neq x_0$, то и $y_n \neq x_n$ для бесконечного числа значений n. $y_n \in p(x_n)$ означает, что существует $z_n \in p(x_n) \subset A$: $y_n + z_n = 2x_n$, т. е. $z_n = 2x_n - y_n$. Поэтому существует предел

$$z_0 = \lim_{n\to\infty} z_n = 2\lim_{n\to\infty} x_n - \lim_{n\to\infty} y_n = 2x_0 - y_0,$$

$z_0 \in A$ ввиду замкнутости A. Это означает, что x_0 — середина векторного отрезка $[y_0, z_0] \subset A$, что противоречит тому, что x_0 — крайняя точка множества A. Итак, $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A[x_n] = \{x_0\}$.

2. Если же x_0 — не крайняя точка A, то существует векторный отрезок $[x_1, x_2] \subset A$: $x_0 = \dfrac{x_1 + x_2}{2}$. Выберем последовательность $\{y_n\}_{n=1}^{\infty} \subset [x_1,\ x_2] \subset A$:

$$y_{2k} = x_0 + \frac{1}{2k}(x_2 - x_1), \quad y_{2k+1} = x_0 - \frac{1}{2k+1}(x_2 - x_1).$$

Ясно, что $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x_0$. При этом для любого $k \in \mathbb{N}$:

$$A[y_{2k}] \supset p(y_{2k}) \cup p(y_{2k+1}) \supset [x_1; x_2] \quad \Longrightarrow \quad \bigcap_{n=1}^{\infty} A[y_n] = [x_1; x_2],$$

и поэтому множество $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A[y_n]$ не может быть одноточечным. $\square$

Пусть x_0 — крайняя точка выпуклого компакта A. Обозначим через $\{x_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ соответствующую x_0 крайнюю последовательность, которая существует в силу предыдущей теоремы. На основании обычной теоремы Крейна—Мильмана мы имеем

Следствие 3.1. *Если A — выпуклый компакт в пространстве Фреше E, то верно следующее представление*:

$$A = \overline{co} \bigcup_{x_0 \in ext(A)} \{x_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$$

или (*начиная с некоторого номера $k \in \mathbb{N}$*)

$$A = \overline{co} \bigcup_{x_0 \in ext(A)} \{x_n(x_0)\}_{n=k}^{\infty}.$$

Оказывается, что предыдущее следствие можно перенести и на случай ограниченных замкнутых не обязательно компактных множеств в пространствах Фреше, имеющих антикомпакт. Отметим, что такие множества могут вообще не иметь крайних точек в обычном смысле.

Если в E существует антикомпакт $C' \in \mathcal{C}'(E)$, то замыкание $\overline{A}_{E_{C'}}$ всякого выпуклого ограниченного множества $A \subset E$ будет компактом и поэтому верно равенство

$$\overline{A}_{E_{C'}} = \overline{co}_{E_{C'}} \bigcup_{x_0 \in ext(\overline{A}_{E_{C'}})} \{x_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$$

или (начиная с некоторого номера $k \in \mathbb{N}$)

$$\overline{A}_{E_{C'}} = \overline{co}_{E_{C'}} \bigcup_{x_0 \in ext(\overline{A}_{E_{C'}})} \{x_n(x_0)\}_{n=k}^{\infty}.$$

Ясно, что $A \subset \overline{A}_{E_{C'}}$, и по теореме 3.2 в силу замкнутости A в E мы можем записать (замыкание берется в E)

$$A \subset \overline{co} \bigcup_{x_0 \in ext\left(\overline{A}_{E_{C'}}\right)} \{x_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty},$$

или (начиная с некоторого номера $k \in \mathbb{N}$)

$$A \subset \overline{co} \bigcup_{x_0 \in ext\left(\overline{A}_{E_{C'}}\right)} \{x_n(x_0)\}_{n=k}^{\infty}.$$

Согласно шагу 1 доказательства теоремы 3.2 всякая последовательность $x_n(x_0) \to x_0$ (в $E_{C'}$) будет крайней. Поскольку $x_0 \in \overline{A}_{E_{C'}}$, то все последовательности $x_n(x_0)$ мы можем выбрать так, что $x_n(x_0) \in A$ и поэтому

$$A \supset \overline{co} \bigcup_{x_0 \in ext\left(\overline{A}_{E_{C'}}\right)} \{\{x_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty} \mid x_n(x_0) \in A\},$$

или (начиная с некоторого номера $k \in \mathbb{N}$)

$$A \supset \overline{co} \bigcup_{x_0 \in ext\left(\overline{A}_{E_{C'}}\right)} \{\{x_n(x_0)\}_{n=k}^{\infty} \mid x_n(x_0) \in A\}.$$

Итак, справедлива

Теорема 3.4. *Если A — выпуклое замкнутое ограниченное множество в пространстве Фреше E, имеющем антикомпакт $C' \in \mathcal{C}'(E)$, то (объединение берется по всем крайним последовательностям из $E_{C'}$ для фиксированного антикомпакта C')*

$$A = \overline{co}\left\{\cup\{x_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty} \mid x_0 \in ext(\overline{A}_{E_{C'}}), \quad x_n(x_0) \in A\right\},$$

или (начиная с некоторого номера $k \in \mathbb{N}$)

$$A = \overline{co}\left\{\cup\{x_n(x_0)\}_{n=k}^{\infty} \mid x_0 \in ext(\overline{A}_{E_{C'}}), \quad x_n(x_0) \in A\right\}.$$

Для всякой крайней последовательности $x_n(x_0) \in A$ выпуклого компакта (в $E_{C'}$) $\overline{A}_{E_{C'}}$ верно равенство $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A[x_n] = \{x_0\}$, где $x_0 \in ext(\overline{A}_{E_{C'}})$, а x_0 может либо лежать в A, либо нет. Поэтому в пространстве E либо $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A[x_n] = \{x_0\}$, либо $\bigcap\limits_{n=1}^{\infty} A[x_n] = \varnothing$ и всякая крайняя для $E_{C'}$ последовательность $x_n(x_0) \in A$ будет крайней и для A. Поэтому верно

Следствие 3.2. *Если A — выпуклое замкнутое ограниченное множество в пространстве Фреше E, имеющем антикомпакт $C' \in \mathcal{C}'(E)$, то (объединение берется по всем крайним последовательностям для фиксированного антикомпакта C')*

$$A = \overline{co}\{\cup\{x_n\}_{n=1}^{\infty} \mid \{x_n\}_{n=1}^{\infty} - \textit{крайняя последовательность } A\},$$

или (начиная с некоторого номера $k \in \mathbb{N}$)

$$A = \overline{co}\{\cup\{x_n\}_{n=k}^{\infty} \mid \{x_n\}_{n=1}^{\infty} - \textit{крайняя последовательность } A\}.$$

Покажем конкретные примеры крайних последовательностей для единичных шаров в пространствах числовых последовательностей ℓ_∞, c и c_0.

Пример 3.2. Для шара $\overline{B_{\ell_\infty}}$ крайними последовательностями в некотором пространстве, порожденном антикомпактом, будут последовательности с элементами x_n вида

$$(\pm1, \pm1, \ldots, \pm1, 0, 0 \ldots, 0, 0, \ldots); \quad (\pm1, \pm1, \ldots, \pm1, 1, 1 \ldots, 1, 1, \ldots);$$

$$(\pm1, \pm1, \ldots, \pm1, -1, -1, \ldots, -1, -1, \ldots); \quad (\pm1, \pm1, \ldots, \pm1, \ldots).$$

Напомним, что в пространстве ℓ_∞ существует система антикомпактов [15]:

$$C_\varepsilon = \left\{x \in \ell_\infty \middle| \sup\left|\frac{x_k}{\varepsilon_k}\right| \leqslant 1\right\},$$

где $\varepsilon = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_k, \ldots)$ — произвольная возрастающая последовательность положительных чисел, сходящаяся к $+\infty$. Пусть некоторая крайняя точка $x_0 = (\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n, \ldots) \in \ell_\infty$, $\alpha_k = \pm1$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Тогда

$$\|x_n - x_0\|_{E_{C_\varepsilon}} = \|(0, 0, \ldots, \widetilde{\alpha}_{n+1}, \widetilde{\alpha}_{n+2}, \ldots)\|_{E_{C_\varepsilon}},$$

причем $|\widetilde{\alpha}_k| \leqslant 2$ $\forall k \in \mathbb{N}$. Поэтому

$$\|x_n - x_0\|_{E_{C_\varepsilon}} = \sup_{k>n}\left|\frac{\widetilde{\alpha}_k}{\varepsilon_k}\right| \leqslant \frac{2}{\varepsilon_n} \to 0 \text{ при } n \to \infty.$$

Поэтому по теореме 3.4 верно равенство

$$\overline{B_{\ell_\infty}} = \overline{co}\,\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, \ldots)\}\,.$$

Аналогично можно получить следующие представления для единичных шаров в пространствах сходящихся числовых последовательностей c и c_0.

Пример 3.3. Для шара $\overline{B_c}$ крайними последовательностями в некотором пространстве, порожденном антикомпактом, будут последовательности с элементами вида

$$x_n = (\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots); \quad (\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, 1, 1 \ldots, 1, 1, \ldots);$$

$$(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, -1, -1, \ldots, -1, -1, \ldots).$$

Поэтому по теореме 3.4 верно равенство

$$\overline{B_c} = \overline{co}\,\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, 1, 1 \ldots, 1, 1, \ldots);\ (\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, -1, -1, \ldots, -1, -1, \ldots)\}\,.$$

Пример 3.4. Для шара $\overline{B_{c_0}}$ крайними последовательностями в некотором пространстве, порожденном антикомпактом, будут последовательности с элементами вида

$$x_n = (\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, 0, 0, \ldots, 0, \ldots).$$

Поэтому по теореме 3.4 верно равенство

$$\overline{B_{c_0}} = \overline{co}\,\{(\pm 1, \pm 1, \ldots, \pm 1, 0, 0 \ldots, 0, 0, \ldots)\}\,.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Аркин В. И., Левин В. Л.* Выпуклость значений векторных интегралов, теоремы измеримого выбора и вариационные задачи// Усп. мат. наук. — 1972. — *27*, № 3. — С. 21–77.
2. *Балашов М. В., Половинкин Е. С.* М-сильно выпуклые подмножества и их порождающие подмножества// Мат. сб. — 2000. — *191*, № 1. — С. 27–64.
3. *Балашов М. В.* Об аналоге теоремы Крейна—Мильмана для сильно выпуклой оболочки в гильбертовом пространстве// Математические заметки. — 2002. — *71*, № 1. — С. 37–42.
4. *Вахания Н. Н., Тариеладзе В. И., Чобанян С. А.* Вероятностные распределения в банаховых пространствах. — М.: Наука, 1985.
5. *Иоффе А. Д., Тихомиров В. М.* Двойственность выпуклых функций и экстремальные задачи// Усп. мат. наук. — 1968. — *23*, № 6. — С. 51–116.
6. *Кадец В. М.* Курс функционального анализа. — Харьков: ХНУ им. В. Н. Каразина, 2006.
7. *Кутателадзе С. С.* Теорема Ляпунова, зоноиды и бэнг-бэнг// В сб.: «Алексей Андреевич Ляпунов. 100 лет со дня рождения», Новосибирск: Акад. изд-во «Гео», 2011. — С. 262–264.
8. *Ляпунов А. А.* О вполне аддитивных вектор-функциях. I// Изв. АН СССР. — 1940. — *4*. — С. 465–478.
9. *Ляпунов А. А.* О вполне аддитивных вектор-функциях. II// Изв. АН СССР. — 1946. — *10*. — С. 277–279.
10. *Ляпунов А. Н.* Теорема А. А. Ляпунова о выпуклости значений мер// В сб.: «Алексей Андреевич Ляпунов. 100 лет со дня рождения», Новосибирск: Акад. изд-во «Гео», 2011. — С. 257–261.
11. *Обен Ж.-П., Экланд И.* Прикладной нелинейный анализ. — М.: Мир, 1988.
12. *Орлов И. В.* Гильбертовы компакты, компактные эллипсоиды и компактные экстремумы// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2008. — *29*. — С. 165–175.
13. *Стонякин Ф. С.* Сильные компактные характеристики и предельная форма свойства Радона—Никодима для векторных зарядов со значениями в пространствах Фреше// Уч. зап. Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. «Физ.-мат. науки». — 2010. — *23*(*62*), № 1. — С. 131–149.
14. *Стонякин Ф. С.* Аналог теоремы Ула о выпуклости образа векторной меры// Динам. сист. — 2013. — *3* (*31*), № 3-4. — С. 281–288.
15. *Стонякин Ф. С.* Антикомпакты и их приложения к аналогам теорем Ляпунова и Лебега в пространствах Фреше// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — *53*. — С. 155–176.
16. *Стонякин Ф. С.* Секвенциальная версия теоремы Ула о выпуклости и компактности образа векторных мер// Уч. зап. Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. «Физ.-мат. науки». — 2014. — *27*(*66*), № 1. — С. 100–111.
17. *Стонякин Ф. С., Магера М. В.* Розв'язання задачі про розділ скарбів для довільної кількості розбійників// Уч. зап. Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. «Физ.-мат. науки». — 2013. — *26*(*65*), № 1. — С. 109–128.

18. *Стонякин Ф. С., Шпилев Р. О.* Аналог теоремы Ляпунова о выпуклости для ε-квазимер и ее приложения к задаче о разделе ресурсов// Уч. зап. Таврического национального ун-та им. В. И. Вернадского. Сер. «Физ.-мат. науки». — 2014. — *27*(*66*), № 1. — С. 112–124.
19. *Хилле Э., Филлипс Р.* Функциональный анализ и полугруппы. — М.: ИЛ, 1962.
20. *Эдвардс Э.* Функциональный анализ. Теория и приложения. — М.: Мир, 1969.
21. *Arzi O., Aumann Y., Dombb Y.* Throw one's cake — and eat it too. — arXiv: 1101.4401v2 [cs.GT], 2011.
22. *Chen Y., Lai J., Parkes D. C., Procaccia A. D.* Truth, justice, and cake cutting. — Association for the Advancement of Artificial Intelligence, 2010.
23. *Dai P., Feinberg E. A.* Extension of Lyapunov's convexity theorem to subranges. — arXiv: 1102.2534v1 [math.PR], 2011.
24. *Diestel J., Uhl J. J.* Vector measures. — Providence: Am. Math. Soc., 1977.
25. *Husseinov F., Sagarab N.* Concave measures and the fuzzy core of exchange economie with heterogeneous divisible commodities// Fuzzy Sets and Systems. — 2012. — *198*. — С. 70–82.
26. *Maccheroni F., Marinacci M.* How to cut a pizza fairly: fair division with decreasing marginal evaluations// Soc. Choice Welf. — 2003. — *20*, № 3. — С. 457–465.
27. *Mossel E., Tamuz O.* Truthful fair division. — arXiv: 1003.5480v2 [cs.GT], 2010.
28. *Neyman J.* Un théorème d'existence// C. R. Math. Acad. Sci. Paris. — 1946. — *222*. — С. 843–845.
29. *Robertson J., Webb W.* Cake-cutting algorithms: be fair if you can. — Natick: AK Peters, Ltd., 1998.
30. *Steinhaus H.* Sur la division pragmatique// Econometrica. — 1949. — *17*. — С. 315–319.

Ф. С. Стонякин
E-mail: fedyor@mail.ru