

***СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА.
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ
НАПРАВЛЕНИЯ***

Том 62, 2016



РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

Редакционная коллегия

Главный редактор:

Р.В. Гамкрелидзе (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН)

Заместитель главного редактора:

А.Л. Скубачевский (Российский университет дружбы народов)

Члены редколлегии:

А.А. Азрачев (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН, SISSA)

Е.С. Голод (Московский государственный университет)

Н.Д. Копачевский (Таврический национальный университет)

П.С. Красильников (Московский авиационный институт)

А.В. Овчинников (Московский государственный университет)

В.Л. Попов (Математический институт им. В.А. Стеклова РАН)

А.В. Сарычев (Флорентийский университет)

Индекс журнала в каталоге подписных изданий агентства «Роспечать» — 36832

***СОВРЕМЕННАЯ МАТЕМАТИКА.
ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЕ
НАПРАВЛЕНИЯ***

Том 62, 2016

**Труды семинара по дифференциальным
и функционально-дифференциальным уравнениям
в РУДН под руководством А. Л. Скубачевского**



РОССИЙСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ ДРУЖБЫ НАРОДОВ

ОГЛАВЛЕНИЕ

| | |
|--|-----|
| О некоторых задачах гемодинамики на графах (<i>В. И. Безяев, Н. Х. Садеков</i>) | 5 |
| Стационарные решения уравнений Власова для высокотемпературной двухкомпонентной плазмы (<i>Ю. О. Беляева</i>) | 19 |
| Физическая интерпретация математически строгого решения задачи дифракции при помощи эвристических формул (<i>М. В. Весник</i>) | 32 |
| Спектральный анализ интегродифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве (<i>В. В. Власов, Н. А. Раутиан</i>) | 53 |
| О поведении при больших значениях времени решений параболических нелинейных уравнений с растущими старшими коэффициентами (<i>В. Н. Денисов</i>) | 72 |
| О коэрцитивности дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов (<i>Е. П. Иванова</i>) | 85 |
| Область существования решений в задаче оптимального управления космическим аппаратом с ограниченной тягой (<i>А. В. Иванюхин</i>) | 100 |
| Следы обобщенных решений эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением (<i>В. А. Попов</i>) | 124 |
| Коэрцитивная разрешимость нелокальных краевых задач для параболических уравнений (<i>Л. Е. Россовский, А. Р. Ханалыев</i>) | 140 |
| О скорости сходимости непрерывного метода Ньютона (<i>А. Гибали, Д. Шойхет, Н. Тарханов</i>) | 152 |

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ ГЕМОДИНАМИКИ НА ГРАФАХ© 2016 г. **В. И. БЕЗЯЕВ, Н. Х. САДЕКОВ**

Аннотация. В работе рассматриваются некоторые задачи для линеаризованных уравнений гемодинамики на простейших графах. Получены точные или аналитические решения рассматриваемых задач.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| 1. Введение | 5 |
| 2. Задача Коши для линеаризованных уравнений гемодинамики | 6 |
| 3. Начально-краевая задача на графе с одной вершиной и одним ребром | 9 |
| 4. Задача трансмиссии на графе с одной вершиной и двумя ребрами | 10 |
| 5. Гемодинамика на графе типа «пучок» | 11 |
| 6. Смешанная задача на графе с двумя вершинами | 13 |
| 7. Примеры | 16 |
| Список литературы | 17 |

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача математического моделирования внутреннего движения жидкости по системе эластичных трубок, в том числе и моделирования течения крови по сердечно-сосудистой системе, является актуальной и имеет широкую область применения. Для математического описания течения крови в сосудах наиболее простыми и распространенными являются квазиодномерные модели. Применение квазиодномерного приближения позволяет исследовать широкий круг задач гемодинамики на геометрических графах. Примерами таких исследований могут служить работы [1–4] и многие другие (подробные обзоры и библиографии имеются в [3, 4]). Дифференциальные уравнения на графах и других разветвленных многообразиях являются математическими моделями многих процессов в физике и биологии. Основы теории дифференциальных уравнений на графах изложены в монографии [6]. В последнее время значительно усилился интерес к различным задачам математической физики на графах, сингулярных и разветвленных многообразиях (см., например, [5, 8, 9, 11, 12]). В [11, 12] исследован спектр оператора Шредингера на графе и асимптотические свойства в квантовых задачах на сингулярных пространствах. В [5, 8, 9] исследуются самосопряженные расширения оператора Шредингера на разветвленных многообразиях, а также полугруппы, задаваемые определенными самосопряженными расширениями.

При исследовании математических моделей гемодинамики важное значение имеют как точные, так и приближенные решения модельных задач. В данной работе рассматриваются некоторые задачи для линеаризованных уравнений гемодинамики на простейших графах. Для задач на графах с одной вершиной и конечным множеством ребер методом распространяющихся волн (см. [10]) получены явные формулы (хотя и достаточно сложные) точных решений. Эти результаты, в частности, дополняют исследования в [1] и ряде других работ. Существование решения в классе C^1 начально-краевой задачи гемодинамики на графе с двумя вершинами (на одном сосуде) доказано с помощью метода Фурье. Известные результаты, позволяющие использовать этот метод для гиперболических систем, в данном случае неприменимы из-за неконсервативности рассматриваемой задачи.

Уравнения гемодинамики в квазиодномерном приближении представляют собой гиперболическую систему двух дифференциальных уравнений в частных производных и одного алгебраического соотношения. В качестве пространственной переменной x выбирается длина дуги, проходящей через центры круговых поперечных сечений сосуда. Скорость движения крови считается направленной вдоль оси сосуда и одинаковой во всем круговом сечении сосуда. Обозначим через $U(x, t)$ скорость кровотока (см/с), $P(x, t)$ — давление (мм рт. ст.), $S(P)$ — площадь поперечного сечения сосуда (см²), ρ — плотность крови (г/см³). Тогда неоднородные уравнения гемодинамики для одного сосуда в квазиодномерном приближении имеют вид (см., например, [1])

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial t} + U \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} &= \frac{1}{\rho} q_f, \\ \frac{\partial S}{\partial t} + \frac{\partial US}{\partial x} &= 0, \\ S &= S(P), \end{aligned} \quad (1.1)$$

где первое уравнение описывает закон сохранения импульса, второе — закон сохранения массы крови, а третье — это уравнение состояния, которое отражает упруго-механические свойства сосуда. В первом уравнении $q_f(x, t)$ — объемная плотность внешней среды.

Из физиологических исследований известно, что пульсационное отклонение давления от среднего значения в норме невелико. Это позволяет провести линеаризацию исходной нелинейной системы уравнений (1.1) относительно средних, фоновых значений всех величин, входящих в уравнения (см. [1]).

Линейные уравнения, описывающие эволюцию малых отклонений от стационарных решений уравнений гемодинамики (1.1), получаются следующим образом. Давление, скорость и площадь поперечного сечения, входящие в систему уравнений (1.1), представим в виде $\bar{p} + p(x, t)$, $\bar{u} + u(x, t)$, $\bar{s} + \theta p(x, t)$ соответственно. Здесь постоянные величины \bar{u} , \bar{p} , $\bar{s} = S(\bar{p})$, $\theta = S'(\bar{p}) > 0$ соответствуют некоторому стационарному решению уравнений (1.1), а функции $u(x, t)$ и $p(x, t)$ — малые отклонения от данного стационарного решения. Подставляя указанные выше представления давления, скорости и площади поперечного сечения в систему уравнений (1.1) и оставляя в ней только слабые, линейные относительно p и u , получим линейную систему уравнений гиперболического типа с постоянными коэффициентами

$$\begin{cases} u_t + \bar{u}u_x + \frac{1}{\rho}p_x = \frac{1}{\rho}q_f, \\ p_t + \rho c^2 u_x + \bar{u}p_x = 0, \end{cases} \quad (1.2)$$

где $c = \sqrt{\frac{\bar{s}}{\rho\theta}}$ — скорость распространения пульсовой волны. Уравнения (1.2) представляют собой линеаризованные гемодинамические уравнения для одного сосуда.

Важно отметить, что скорость кровотока значительно ниже скорости пульсовой волны, поэтому всюду далее будем придерживаться условия $\bar{u} < c$.

2. Задача Коши для линеаризованных уравнений гемодинамики

Рассмотрим задачу Коши для системы однородных линеаризованных уравнений гемодинамики

$$\begin{cases} u_t + \bar{u}u_x + \frac{1}{\rho}p_x = 0 & (-\infty < x < +\infty, t > 0), \\ p_t + \rho c^2 u_x + \bar{u}p_x = 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), \\ p(x, 0) = \psi(x), \end{cases} \quad (2.1)$$

где $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ и $\psi \in C^1(\mathbb{R})$ — заданные функции, а $u(x, t)$ и $p(x, t)$ — искомые функции. Пусть $\Pi = \{(x, t) : -\infty < x < +\infty, t > 0\}$. Классическим решением задачи (2.1) будем называть пару функций (u, p) из $C^1(\Pi) \cap C(\bar{\Pi})$, которые поточечно удовлетворяют всем условиям этой задачи.

Используя инварианты Римана (см., например, [7]), получим представление общего решения системы (1.2) в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}(f(x - \lambda^+ t) + g(x - \lambda^- t)), \\ p(x, t) &= \frac{\rho c}{2}(f(x - \lambda^+ t) - g(x - \lambda^- t)), \end{aligned} \quad (2.2)$$

где функции f и g из $C^1(\mathbb{R})$, $\lambda^+ = \bar{u} + c > 0$, $\lambda^- = \bar{u} - c < 0$. Как видно из (2.2), общим решением уравнений (1.2) является суперпозиция двух бегущих волн f и g произвольной формы, одна из которых распространяется по направлению движения крови в сосуде, а вторая — в противоположном направлении.

Теорема 2.1. *Классическое решение задачи Коши (2.1) существует, единственно и выражается формулами*

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}(\phi(x - \lambda^+ t) + \phi(x - \lambda^- t)) + \frac{1}{2\rho c}(\psi(x - \lambda^+ t) - \psi(x - \lambda^- t)), \\ p(x, t) &= \frac{\rho c}{2}(\phi(x - \lambda^+ t) - \phi(x - \lambda^- t)) + \frac{1}{2}(\psi(x - \lambda^+ t) + \psi(x - \lambda^- t)). \end{aligned} \quad (2.3)$$

Доказательство. Подставляя общее решение (2.2) в начальные условия задачи (2.1), получим

$$\begin{aligned} \frac{f(x) + g(x)}{2} &= \phi(x), \\ \rho c \frac{f(x) - g(x)}{2} &= \psi(x). \end{aligned}$$

Отсюда

$$f(x) = \phi(x) + \frac{\psi(x)}{\rho c}, \quad g(x) = \phi(x) - \frac{\psi(x)}{\rho c},$$

а значит, решение задачи Коши (2.1) имеет вид (2.3). \square

Рассмотрим теперь задачу Коши для системы неоднородных линейризованных уравнений гемодинамики. Представим эту задачу в векторной форме

$$\begin{cases} Y_t + AY_x = F(x, t) & (-\infty < x < +\infty, t > 0), \\ Y|_{t=0} = \Phi(x), \end{cases} \quad (2.4)$$

где $Y = \begin{pmatrix} u(x, t) \\ p(x, t) \end{pmatrix}$, $A = \begin{pmatrix} \bar{u} & \frac{1}{\rho} \\ \rho c^2 & \bar{u} \end{pmatrix}$, $F(x, t) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\rho} q(x, t) \\ 0 \end{pmatrix}$, $\Phi(x) = \begin{pmatrix} \phi(x) \\ \psi(x) \end{pmatrix}$. Здесь $q(x, t)$ — плотность внешних сил.

Теорема 2.2. *Пусть $q \in C^1(\bar{\Pi})$, $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ и $\psi \in C^1(\mathbb{R})$. Тогда классическое решение задачи Коши (2.4) ($u \in C^1(\Pi) \cap C(\bar{\Pi})$ и $p \in C^1(\Pi) \cap C(\bar{\Pi})$) существует, единственно и выражается формулами*

$$Y = \begin{pmatrix} \frac{\phi(x - \lambda^+ t) + \phi(x - \lambda^- t)}{2} + \frac{\psi(x - \lambda^+ t) - \psi(x - \lambda^- t)}{2\rho c} + \\ + \frac{1}{2\rho} \int_0^t [q(x - \lambda^+(t - \tau), \tau) + q(x - \lambda^-(t - \tau), \tau)] d\tau \\ \rho c \frac{\phi(x - \lambda^+ t) - \phi(x - \lambda^- t)}{2} + \frac{\psi(x - \lambda^+ t) + \psi(x - \lambda^- t)}{2} + \\ + \frac{c}{2} \int_0^t [q(x - \lambda^+(t - \tau), \tau) - q(x - \lambda^-(t - \tau), \tau)] d\tau \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Доказательство. Пусть $Y = V + W$, где V — решение задачи

$$\begin{cases} V_t + AV_x = 0, \\ V|_{t=0} = \Phi(x), \end{cases} \quad (2.6)$$

а W — решение задачи

$$\begin{cases} W_t + AW_x = F(x, t), \\ W|_{t=0} = 0. \end{cases} \quad (2.7)$$

Для получения решения задачи (2.6) достаточно воспользоваться теоремой 2.1, а задачи (2.7) — принципом Дюамеля.

Лемма 2.1 (принцип Дюамеля). Пусть $Z = Z(x, t; \tau)$ — решение задачи

$$\begin{cases} Z_t + AZ_x = 0 & (-\infty < x < +\infty, 0 < \tau < t), \\ Z|_{t=\tau} = F(x, \tau). \end{cases}$$

Тогда функция

$$W(x, t) = \int_0^t Z(x, t; \tau) d\tau$$

является решением задачи (2.7).

Доказательство. Так как

$$W_t(x, t) = Z(x, t; t) + \int_0^t Z_t(x, t, \tau) d\tau,$$

$$W_x = \int_0^t Z_x(x, t, \tau) d\tau$$

и $Z(x, t; t) = F(x, t)$, то функция $W(x, t)$ является решением задачи (2.7). \square

Окончание доказательства теоремы 2.2. Делая замену $\tilde{t} = t - \tau$, сведем задачу о нахождении функции $Z(x, t; \tau)$ к задаче

$$\begin{cases} \tilde{Z}_{\tilde{t}} + A\tilde{Z}_x = 0 & (-\infty < x < +\infty, \tilde{t} > 0), \\ \tilde{Z}|_{\tilde{t}=0} = F(x, \tau), \end{cases}$$

где $Z(x, \tilde{t} + \tau; \tau) \equiv \tilde{Z}(x, \tilde{t}; \tau)$. По теореме 2.1 имеем

$$\tilde{Z}(x, \tilde{t}; \tau) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\rho} [q(x - \lambda^+ \tilde{t}, \tau) + q(x - \lambda^- \tilde{t}, \tau)] \\ \frac{c}{2} [q(x - \lambda^+ \tilde{t}, \tau) - q(x - \lambda^- \tilde{t}, \tau)] \end{pmatrix}$$

и, следовательно,

$$Z(x, t; \tau) \equiv \tilde{Z}(x, t - \tau; \tau) \equiv \begin{pmatrix} \frac{1}{2\rho} [q(x - \lambda^+(t - \tau), \tau) + q(x - \lambda^-(t - \tau), \tau)] \\ \frac{c}{2} [q(x - \lambda^+(t - \tau), \tau) - q(x - \lambda^-(t - \tau), \tau)] \end{pmatrix}.$$

Отсюда и из леммы 2.1

$$W(x, t) = \int_0^t Z(x, t; \tau) d\tau = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\rho} \int_0^t [q(x - \lambda^+ \tilde{t}, \tau) + q(x - \lambda^- \tilde{t}, \tau)] d\tau \\ \frac{c}{2} \int_0^t [q(x - \lambda^+ \tilde{t}, \tau) - q(x - \lambda^- \tilde{t}, \tau)] d\tau \end{pmatrix}. \quad (2.8)$$

Таким образом, используя формулы (2.3) и (2.8), получим решение задачи (2.4) в виде (2.5). \square

Будем называть задачу Коши (2.4) C^1 -корректной, если она имеет классическое решение для любых $q \in C^1(\bar{\Pi})$, $\phi \in C^1(\mathbb{R})$ и $\psi \in C^1(\mathbb{R})$, это решение единственно и непрерывно зависит от q , ϕ и ψ .

Теорема 2.3. *Задача Коши (2.4) C^1 -корректна.*

Это утверждение непосредственно следует из теоремы 2.2.

3. НАЧАЛЬНО-КРАЕВАЯ ЗАДАЧА НА ГРАФЕ С ОДНОЙ ВЕРШИНОЙ И ОДНИМ РЕБРОМ

Рассмотрим один полуограниченный сосуд. Представим его ориентированным графом Γ_1 , состоящим из одной вершины и выходящего из нее прямолинейного ребра бесконечной длины, направленного вдоль оси сосуда. Введем на ребре систему координат с началом в вершине и осью, направленной вдоль ребра.

Пусть на ребре графа заданы линейризованные уравнения гемодинамики (1.2) и начальные данные, а в вершине определены краевые условия 1-го рода, согласованные с начальными данными. Тогда получим следующую начально-краевую задачу на графе Γ_1 :

$$\begin{cases} u_t + \bar{u}u_x + \frac{1}{\rho}p_x = 0 & (0 < x < +\infty, t > 0), \\ p_t + \rho c^2 u_x + \bar{u}p_x = 0, \\ u(x, 0) = \phi(x), p(x, 0) = \psi(x), \\ u(0, t) = \nu(t), p(0, t) = \mu(t), \end{cases} \quad (3.1)$$

где ϕ, ψ, ν, μ — заданные функции из $C^1(\bar{\mathbb{R}}_+)$, где $\mathbb{R}_+ = \{x : x > 0\}$, причем $\phi(0) = \nu(0)$, $\psi(0) = \mu(0)$. Пусть $\Pi_2 = \{(x, t) : 0 < x < +\infty, t > 0\}$. Классическим решением задачи (3.1) будем называть пару функций (u, p) , которые принадлежат классу $C^1(\Pi_2) \cap C(\bar{\Pi}_2)$ и поточечно удовлетворяют всем условиям этой задачи.

Теорема 3.1. *Классическое решение начально-краевой задачи (3.1) существует, единственно и выражается формулами*

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \begin{cases} \frac{\phi(x - \lambda^+ t) + \phi(x - \lambda^- t)}{2} + \frac{\psi(x - \lambda^+ t) - \psi(x - \lambda^- t)}{2\rho c}, & x \geq \lambda^+ t, \\ \nu\left(-\frac{x - \lambda^+ t}{\lambda^+}\right) - \frac{\phi\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}x - \lambda^- t\right) - \phi(x - \lambda^- t)}{2} + \frac{\psi\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}x - \lambda^- t\right) - \psi(x - \lambda^- t)}{2\rho c}, & x < \lambda^+ t, \end{cases} \\ p(x, t) &= \begin{cases} \rho c \frac{\phi(x - \lambda^+ t) - \phi(x - \lambda^- t)}{2} + \frac{\psi(x - \lambda^+ t) + \psi(x - \lambda^- t)}{2}, & x \geq \lambda^+ t, \\ \mu\left(-\frac{x - \lambda^+ t}{\lambda^+}\right) - \rho c \frac{\phi\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}x - \lambda^- t\right) + \phi(x - \lambda^- t)}{2} + \frac{\psi\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}x - \lambda^- t\right) + \psi(x - \lambda^- t)}{2}, & x < \lambda^+ t. \end{cases} \end{aligned} \quad (3.2)$$

Доказательство. В формулах (2.2) общего решения линейризованных уравнений гемодинамики определим функции f и g так, чтобы они удовлетворяли начальным и граничным условиям системы (3.1). Областью определения функции $f(x - \lambda^+ t)$ в данном случае является вся прямая $(-\infty, +\infty)$, а функции $g(x - \lambda^- t)$ — полуось $[0, +\infty)$.

Подстановка общего решения в начальные условия позволяет определить f и g на полуоси $[0, +\infty)$ следующим образом

$$f(z) = \phi(z) + \frac{\psi(z)}{\rho c}, \quad g(z) = \phi(z) - \frac{\psi(z)}{\rho c}, \quad z \geq 0. \quad (3.3)$$

Осталось определить функцию f на оставшейся части ее области определения, т. е. на интервале $(-\infty, 0)$. Для этого, используя краевое условие $u(0, t) = \nu(t)$ и первую формулу в (2.2), получим

$$f(z) = 2\nu\left(-\frac{z}{\lambda^+}\right) - \phi\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}z\right) + \frac{1}{\rho c}\psi\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}z\right), \quad z < 0, \quad (3.4)$$

а используя условие $p(0, t) = \mu(t)$, получим

$$f(z) = \frac{2}{\rho c}\mu\left(-\frac{z}{\lambda^+}\right) + \phi\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}z\right) - \frac{1}{\rho c}\psi\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}z\right), \quad z < 0. \quad (3.5)$$

Таким образом, из формул (3.3)–(3.5) и (2.2) получим решение смешанной задачи (3.1) на графе Γ_1 в виде (3.2). \square

4. ЗАДАЧА ТРАНСМИССИИ НА ГРАФЕ С ОДНОЙ ВЕРШИНОЙ И ДВУМЯ РЕБРАМИ

Рассмотрим два стыкованных полуограниченных сосуда. Представим их ориентированным графом Γ_2 , состоящим из одной вершины и двух полупрямых, одна из которых направлена к вершине, а другая — из нее. Введем систему координат с началом в этой вершине, а оси направим вдоль ребер так, что отрицательные координаты будут соответствовать входящему в вершину ребру, а положительные — выходящему из нее.

Пусть на каждом ребре i ($i = 1, 2$) графа Γ_2 заданы линеаризованные уравнения гемодинамики (1.2) и начальные данные, а в вершине выполняются линеаризованные условия сопряжения, первое из которых выражает закон сохранения массы крови (т. е. поток крови в первом сосуде равен потоку крови во втором), а второе — равенство давлений на стыке сосудов (см. [1]).

Таким образом получаем задачу трансмиссии для системы линейных уравнений с кусочно-постоянными на графе Γ_2 коэффициентами вида

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial u_i}{\partial x} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_i}{\partial x} = 0 & (-\infty < x < 0, 0 < x < +\infty, t > 0), \\ \frac{\partial p_i}{\partial t} + \rho c_i^2 \frac{\partial u_i}{\partial x} + \bar{u}_i \frac{\partial p_i}{\partial x} = 0, \\ u_i(x, 0) = \phi_i(x), \quad p_i(x, 0) = \psi_i(x), \\ \bar{s}_1 u_1(0, t) + \theta_1 \bar{u}_1 p_1(0, t) = \bar{s}_2 u_2(0, t) + \theta_2 \bar{u}_2 p_2(0, t), \\ p_1(0, t) = p_2(0, t), \end{cases} \quad (4.1)$$

где $i = 1$, если $x < 0$, и $i = 2$, если $x > 0$. Здесь $\phi_i \in C^1(\bar{\mathbb{R}}_i)$, $\psi_i \in C^1(\bar{\mathbb{R}}_i)$, $\mathbb{R}_1 = \{x : x < 0\}$, $\mathbb{R}_2 = \{x : x > 0\}$, причем функции $\phi_i(x)$ и $\psi_i(x)$ удовлетворяют условиям согласования, следующим из трех последних равенств в задаче (4.1).

Пусть $\Pi_1 = \{(x, t) : -\infty < x < 0, t > 0\}$ и $\Pi_2 = \{(x, t) : 0 < x < +\infty, t > 0\}$. Классическим решением задачи (4.1) будем называть пару функций (u, p) , где $u = u_i \in C^1(\Pi_i) \cap C(\bar{\Pi}_i)$ и $p = p_i \in C^1(\Pi_i) \cap C(\bar{\Pi}_i)$ ($i = 1, 2$), которые в классическом смысле удовлетворяют всем условиям этой задачи.

Общие решения линеаризованных уравнений гемодинамики на каждом ребре определяются по формулам (2.2). Области определения функций f_i и g_i находятся из того, что эти функции удовлетворяют начальным условиям и условиям сопряжения. Таким образом получаем, что областью определения функции f_1 является полуось $(-\infty, 0]$, функций g_1 и f_2 — вся прямая $(-\infty, +\infty)$, а функции g_2 — полуось $[0, +\infty)$.

Подстановка общих решений в начальные условия позволяет определить f_1 и g_1 на полуоси $(-\infty, 0]$, а f_2 и g_2 — на полуоси $[0, +\infty)$:

$$f_i(z) = \phi_i(z) + \frac{\psi_i(z)}{\rho c_i}, \quad g_i(z) = \phi_i(z) - \frac{\psi_i(z)}{\rho c_i}, \quad (4.2)$$

где $z \leq 0$, если $i = 1$, и $z \geq 0$, если $i = 2$.

Функции g_1 и f_2 на оставшихся частях их областей определения найдем, подставляя общие решения (2.2) в условия сопряжения. Переобозначая их соответственно G_1 и F_2 , получим

$$\begin{aligned} G_1(z) &= k_{1 \rightarrow 1} f_1 \left(\frac{\lambda_1^+}{\lambda_1} z \right) + k_{2 \rightarrow 1} g_2 \left(\frac{\lambda_2^-}{\lambda_1} z \right), \quad z > 0, \\ F_2(z) &= k_{1 \rightarrow 2} f_1 \left(\frac{\lambda_1^+}{\lambda_2} z \right) + k_{2 \rightarrow 2} g_2 \left(\frac{\lambda_2^-}{\lambda_2} z \right), \quad z < 0, \end{aligned} \quad (4.3)$$

где $\lambda_i^+ = \bar{u}_i + c_i$, $\lambda_i^- = \bar{u}_i - c_i$, а $k_{1 \rightarrow 1}, k_{2 \rightarrow 1}, k_{1 \rightarrow 2}, k_{2 \rightarrow 2}$ — коэффициенты, вычисляемые по формулам

$$k_{i \rightarrow i} = 1 - \frac{2\bar{s}_i}{\rho c_i \left(\frac{\bar{s}_1(c_1 - \bar{u}_1)}{\rho c_1^2} + \frac{\bar{s}_2(c_2 + \bar{u}_2)}{\rho c_2^2} \right)}, \quad k_{i \rightarrow j} = -\frac{2\bar{s}_i}{\rho c_j \left(\frac{\bar{s}_1(c_1 - \bar{u}_1)}{\rho c_1^2} + \frac{\bar{s}_2(c_2 + \bar{u}_2)}{\rho c_2^2} \right)}, \quad i \neq j.$$

Из формул (4.3) видно, что волны G_1 и F_2 , распространяющиеся по ребрам графа Γ_2 по направлению от его вершины, представляют собой суперпозиции волн f_1 и g_2 , распространяющихся по ребрам графа по направлению к вершине. При этом коэффициент $k_{i \rightarrow j}$ показывает, во сколько раз изменится амплитуда соответствующей волны при ее прохождении через вершину графа из i -го ребра в j -ое, а коэффициент $k_{i \rightarrow i}$ характеризует изменение амплитуды волны, распространяющейся по i -му ребру после ее отражения от вершины графа.

Подставляя полученные функции из (4.2)-(4.3) в формулы (2.2) на каждом ребре, окончательно получим единственное решение задачи трансмиссии на графе Γ_2 в следующем виде ($t \geq 0$):

$$u(x, t) = \begin{cases} \frac{f_1(x - \lambda_1^+ t) + g_1(x - \lambda_1^- t)}{2}, & x \leq \lambda_1^- t, x < 0, \\ \frac{f_1(x - \lambda_1^+ t) + G_1(x - \lambda_1^- t)}{2}, & x > \lambda_1^- t, x < 0, \\ \frac{f_2(x - \lambda_2^+ t) + g_2(x - \lambda_2^- t)}{2}, & x \geq \lambda_2^+ t, x > 0, \\ \frac{F_2(x - \lambda_2^+ t) + g_2(x - \lambda_2^- t)}{2}, & x < \lambda_2^+ t, x > 0, \end{cases} \quad (4.4)$$

$$p(x, t) = \begin{cases} \rho c \frac{f_1(x - \lambda_1^+ t) - g_1(x - \lambda_1^- t)}{2}, & x \leq \lambda_1^- t, x < 0, \\ \rho c \frac{f_1(x - \lambda_1^+ t) - G_1(x - \lambda_1^- t)}{2}, & x > \lambda_1^- t, x < 0, \\ \rho c \frac{f_2(x - \lambda_2^+ t) - g_2(x - \lambda_2^- t)}{2}, & x \geq \lambda_2^+ t, x > 0, \\ \rho c \frac{F_2(x - \lambda_2^+ t) - g_2(x - \lambda_2^- t)}{2}, & x < \lambda_2^+ t, x > 0. \end{cases} \quad (4.5)$$

Таким образом, нами доказана

Теорема 4.1. *Классическое решение задачи трансмиссии (4.1) существует, единственно и выражается формулами (4.4), (4.5).*

5. ГЕМОДИНАМИКА НА ГРАФЕ ТИПА «ПУЧОК»

Рассмотрим граф типа «пучок» — ориентированный граф Γ_n , состоящий из одной вершины и n направленных полуограниченных ребер, соединяющихся в ней. На каждом ребре введем систему координат с началом в этой вершине, ось которой направлена вдоль ребра.

Пусть на каждом ребре графа Γ_n заданы система уравнений гемодинамики (1.2) и начальные данные, а в вершине выполняются линеаризованные условия сопряжения. Таким образом определена задача трансмиссии с кусочно-постоянными на графе Γ_n коэффициентами

$$\begin{cases} \frac{\partial u_i}{\partial t} + \bar{u}_i \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial p_i}{\partial x_i} = 0 & (z_i x_i < 0, t > 0), \\ \frac{\partial p_i}{\partial t} + \rho c_i^2 \frac{\partial u_i}{\partial x_i} + \bar{u}_i \frac{\partial p_i}{\partial x_i} = 0, \\ u_i(x_i, 0) = \phi_i(x_i), \quad p_i(x_i, 0) = \psi_i(x_i), \\ \sum_{i=1}^n z_i (\bar{s}_i u_i(0, t) + \theta_i \bar{u}_i p_i(0, t)) = 0, \\ p_i(0, t) = p_j(0, t), \quad i \neq j, \end{cases} \quad (5.1)$$

где $i = 1, 2, \dots, n$ — номер ребра. Здесь $z_i = 1$, если i -ое ребро является входящим в вершину, и $z_i = -1$, если i -ое ребро является выходящим из вершины. Будем предполагать, что $\phi_i(x_i) \in C^1(z_i x_i \leq 0)$ и $\psi_i(x_i) \in C^1(z_i x_i \leq 0)$, а также выполнены условия согласования на функции $\phi_i(x_i)$ и $\psi_i(x_i)$, определяемые тремя последними формулами в задаче (5.1) ($i = 1, \dots, n$).

Под *классическим решением* задачи (5.1) будем понимать пару функций (u, p) на $\Gamma_n \times (t \geq 0)$, для которых $u(x_i, t) = u_i(x_i, t) \in C^1(z_i x_i < 0, t > 0) \cap C(z_i x_i \leq 0, t \geq 0)$, $p(x_i, t) = p_i(x_i, t) \in C^1(z_i x_i < 0, t > 0) \cap C(z_i x_i \leq 0, t \geq 0)$ для $i = 1, \dots, n$ и для которых поточечно выполнены все условия задачи (5.1).

Теорема 5.1. *Классическое решение задачи трансмиссии (5.1) существует, единственно и выражается формулами*

$$u_i(x_i, t) = \begin{cases} \frac{1}{2} \left(\frac{z_i}{\rho c_i} (\psi_i(v_i) - \psi_i(w_i)) + \phi_i(v_i) + \phi_i(w_i) \right), & z_i w_i \leq 0, \\ \frac{1}{2} \left(\frac{z_i}{\rho c_i} \psi_i(v_i) + \phi_i(v_i) + \sum_{j=1}^n k_{j \rightarrow i} \left(\frac{z_j}{\rho c_j} \psi_j \left(\frac{\lambda_j^{z_j}}{\lambda_i^{-z_i}} w_i \right) + \phi_j \left(\frac{\lambda_j^{z_j}}{\lambda_i^{-z_i}} w_i \right) \right) \right), & z_i w_i > 0, \end{cases}$$

$$p_i(x_i, t) = \begin{cases} \frac{z_i \rho c_i}{2} \left(\frac{z_i}{\rho c_i} (\psi_i(v_i) + \psi_i(w_i)) + \phi_i(v_i) - \phi_i(w_i) \right), & z_i w_i \leq 0, \\ \frac{z_i \rho c_i}{2} \left(\frac{z_i}{\rho c_i} \psi_i(v_i) + \phi_i(v_i) - \sum_{j=1}^n k_{j \rightarrow i} \left(\frac{z_j}{\rho c_j} \psi_j \left(\frac{\lambda_j^{z_j}}{\lambda_i^{-z_i}} w_i \right) + \phi_j \left(\frac{\lambda_j^{z_j}}{\lambda_i^{-z_i}} w_i \right) \right) \right), & z_i w_i > 0, \end{cases} \quad (5.2)$$

где $v_i = x_i - \lambda_i^{z_i} t$ и $w_i = x_i - \lambda_i^{-z_i} t$, $i = 1, 2, \dots, n$, а $k_{j \rightarrow i}$ — коэффициенты, вычисляемые по формулам

$$k_{i \rightarrow i} = 1 - \frac{2\bar{s}_i}{\rho c_i \sum_{m=1}^n \frac{\bar{s}_m (c_m - z_m u_m)}{\rho c_m^2}},$$

$$k_{i \rightarrow j} = - \frac{2z_i z_j \bar{s}_i}{\rho c_j \sum_{m=1}^n \frac{\bar{s}_m (c_m - z_m u_m)}{\rho c_m^2}}, \quad i \neq j. \quad (5.3)$$

Доказательство. Общим решением уравнений гемодинамики на каждом ребре являются формулы

$$u_i(x, t) = \frac{f_i^{z_i}(x_i - \lambda_i^{z_i} t) + f_i^{-z_i}(x_i - \lambda_i^{-z_i} t)}{2},$$

$$p_i(x, t) = z_i \rho c_i \frac{f_i^{z_i}(x_i - \lambda_i^{z_i} t) - f_i^{-z_i}(x_i - \lambda_i^{-z_i} t)}{2}, \quad (5.4)$$

где $\lambda_i^z = \bar{u}_i + z_i c_i$, $\lambda_i^{-z_i} = \bar{u}_i - z_i c_i$, $i = 1, 2, \dots, n$.

Конкретный вид функций $f_i^{z_i}$ и $f_i^{-z_i}$ на области определения каждой из них задается так, чтобы они удовлетворяли начальным условиям и условиям сопряжения. Здесь аргумент функции $f_i^{z_i}$ может принимать значения, удовлетворяющие условию $z_i(x_i - \lambda_i^{z_i} t) \leq 0$, а областью определения функции $f_i^{-z_i}$ является вся прямая $(-\infty, +\infty)$.

Введем обозначения $v_i = x_i - \lambda_i^{z_i} t$ и $w_i = x_i - \lambda_i^{-z_i} t$. Подстановка общего решения в начальные условия позволяет определить $f_i^{z_i}$ при $z_i v_i \leq 0$ и $f_i^{-z_i}$ при $z_i w_i \leq 0$:

$$f_i^{z_i}(v_i) = \phi_i(v_i) + z_i \frac{\psi_i(v_i)}{\rho c_i}, \quad f_i^{-z_i}(w_i) = \phi_i(w_i) - z_i \frac{\psi_i(w_i)}{\rho c_i}. \quad (5.5)$$

Функцию $f_i^{-z_i}$ на оставшейся части ее области определения найдем, подставляя общее решение в условия сопряжения

$$f_i^{-z_i}(w_i) = \sum_{j=1}^n k_{j \rightarrow i} f_j^{z_j} \left(\frac{\lambda_j^{z_j}}{\lambda_i^{-z_i}} w_i \right), \quad z_i w_i > 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \quad (5.6)$$

где коэффициенты $k_{j \rightarrow i}$ определяются по формулам (5.3).

Используя теперь в формулах (5.4) найденные в (5.5)-(5.6) функции на всех ребрах, получим окончательное решение смешанной задачи на графе Γ_n в виде (5.2). \square

Замечание 5.1. С помощью принципа Дюамеля и полученных в данной работе формул решений задач для однородных систем гемодинамики на графах с одной вершиной нетрудно найти решения аналогичных задач для неоднородных систем и доказать их C^1 -корректность.

6. СМЕШАННАЯ ЗАДАЧА НА ГРАФЕ С ДВУМЯ ВЕРШИНАМИ

В этом разделе с помощью метода Фурье будет построено решение смешанной задачи гемодинамики в одном ограниченном сосуде. Особенность применения метода Фурье к рассматриваемой задаче состоит в том, что суммами «стоячих волн» удобнее представить вначале не искомые функции $u(x, t)$ и $p(x, t)$, а соответствующие им инварианты Римана. Это позволяет затем достаточно просто обосновать применяемый метод, получить аналитические выражения для пары функций (u, p) и, тем самым, доказать существование классического решения исходной гемодинамической задачи.

Построим сначала формальное решение смешанной задачи гемодинамики, определенной ниже. Рассмотрим один изолированный сосуд, который представим ориентированным графом Γ , состоящим из двух вершин, соединенных ребром длины l , направленным вдоль оси сосуда, причем направление ребра соответствует направлению движения крови в сосуде. Введем на ребре систему координат с началом в той вершине, из которой выходит ребро. Пространственную ось направим вдоль ребра. Тогда той вершине, из которой выходит ребро, будет соответствовать значение $x = 0$, а другой вершине — $x = l$.

Пусть на ребре справедлива система уравнений гемодинамики

$$\begin{cases} u_t + \bar{u}u_x + \frac{1}{\rho}p_x = 0 & (0 < x < l, t > 0), \\ p_t + \rho c^2 u_x + \bar{u}p_x = 0, \end{cases} \quad (6.1)$$

и заданы начальные данные

$$u(x, 0) = \phi(x), \quad p(x, 0) = \psi(x), \quad (6.2)$$

а в вершинах выполняются краевые условия

$$u(0, t) = 0, \quad u(l, t) = 0. \quad (6.3)$$

Введем инварианты Римана для системы уравнений (6.1) по формулам

$$r(x, t) = u(x, t) + \frac{1}{\rho c}p(x, t), \quad s(x, t) = u(x, t) - \frac{1}{\rho c}p(x, t). \quad (6.4)$$

Тогда смешанная задача (6.1)–(6.3) эквивалентна смешанной задаче

$$\begin{cases} r_t + \lambda^+ r_x = 0 & (0 < x < l, t > 0), \\ s_t + \lambda^- s_x = 0, \end{cases} \quad (6.5)$$

$$r(x, 0) = \phi(x) + \frac{1}{\rho c}\psi(x), \quad s(x, 0) = \phi(x) - \frac{1}{\rho c}\psi(x), \quad (6.6)$$

$$r(0, t) + s(0, t) = 0, \quad r(l, t) + s(l, t) = 0 \quad (6.7)$$

($\lambda^+ = \bar{u} + c > 0$, $\lambda^- = \bar{u} - c < 0$).

Найдем формальное решение смешанной задачи (6.5)–(6.7). Пусть $\tilde{r}(x, t) = T(t)R(x)$, $\tilde{s}(x, t) = T(t)S(x)$ — решения системы (6.5), удовлетворяющие краевым условиям (6.7). Тогда

$$\begin{aligned} \frac{T'}{T} &= -\frac{\lambda^+ R'}{R} = -\lambda, \\ \frac{T'}{T} &= -\frac{\lambda^- S'}{S} = -\lambda, \\ R(0) + S(0) &= 0, \quad R(l) + S(l) = 0, \end{aligned} \quad (6.8)$$

где $\lambda = \text{const}$. Отсюда,

$$R' = \frac{\lambda}{\lambda^+}R, \quad S' = \frac{\lambda}{\lambda^-}S,$$

т. е.

$$R(x) = Ae^{\frac{\lambda}{\lambda^+}x}, \quad S(x) = Be^{\frac{\lambda}{\lambda^-}x},$$

где A и B — постоянные. Краевые условия (6.8) приводят к системе линейных уравнений

$$\begin{cases} A + B = 0, \\ Ae^{\frac{\lambda}{\lambda^+}l} + Be^{\frac{\lambda}{\lambda^-}l} = 0, \end{cases}$$

которая имеет ненулевые решения только при

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ e^{\frac{\lambda}{\lambda^+}l} & e^{\frac{\lambda}{\lambda^-}l} \end{vmatrix} = 0,$$

т. е. при $\lambda = \lambda_k = i\omega_0 k$, где $k \in \mathbb{Z}$, $\omega_0 = \frac{2\pi\lambda^-\lambda^+}{(\lambda^- - \lambda^+)l} > 0$ (i — мнимая единица).

Таким образом, «стоячие волны» для задачи (6.5)–(6.7) определяются формулами

$$\begin{aligned} \tilde{r}(x, t) &= r_k(x, t) = A_k e^{\frac{\lambda_k}{\lambda^+}(x-\lambda^+t)}, \\ \tilde{s}(x, t) &= s_k(x, t) = -A_k e^{\frac{\lambda_k}{\lambda^-}(x-\lambda^-t)}, \end{aligned}$$

где A_k — произвольные ненулевые постоянные, $k \in \mathbb{Z}$. Следовательно формальное по методу Фурье решение задачи (6.5)–(6.7) будет иметь вид

$$r(x, t) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^0 e^{\frac{\lambda_k}{\lambda^+}(x-\lambda^+t)}, \quad s(x, t) = - \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^0 e^{\frac{\lambda_k}{\lambda^-}(x-\lambda^-t)}, \quad (6.9)$$

где

$$\begin{aligned} A_k^0 &= \frac{\lambda^-}{(\lambda^- - \lambda^+)l} \left(\int_0^l r_0(z) e^{-\frac{\lambda_k}{\lambda^+}z} dz - \int_{\lambda^+l/\lambda^-}^0 s_0 \left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}z \right) e^{-\frac{\lambda_k}{\lambda^+}z} dz \right), \\ r_0(z) &= \phi(z) + \frac{1}{\rho c} \psi(z), \quad s_0(z) = \phi(z) - \frac{1}{\rho c} \psi(z). \end{aligned} \quad (6.10)$$

Формулы (6.10) для коэффициентов A_k^0 ($k \in \mathbb{Z}$) будут обоснованы ниже.

Из (6.4) и (6.9) теперь получаем формальное решение задачи (6.1)–(6.3)

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2}(r(x, t) + s(x, t)) = \frac{1}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^0 e^{-\lambda_k t} (e^{\frac{\lambda_k}{\lambda^+}x} - e^{\frac{\lambda_k}{\lambda^-}x}), \\ p(x, t) &= \frac{\rho c}{2}(r(x, t) - s(x, t)) = \frac{\rho c}{2} \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k^0 e^{-\lambda_k t} (e^{\frac{\lambda_k}{\lambda^+}x} + e^{\frac{\lambda_k}{\lambda^-}x}). \end{aligned} \quad (6.11)$$

Пусть $\bar{\Pi}_\infty = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, t \geq 0\}$. Для обоснования сходимости в $C^1(\bar{\Pi}_\infty)$ функциональных рядов в формулах (6.9) и (6.11) наложим на начальные функции $\phi(x)$ и $\psi(x)$ в (6.2) следующие условия. Пусть $\phi \in C^2([0, l])$, $\psi \in C^2([0, l])$ и выполнены условия согласования

$$\begin{aligned} \phi(0) &= \phi(l) = 0, \\ \lambda^+ \left(\phi'(0) + \frac{\psi'(0)}{\rho c} \right) + \lambda^- \left(\phi'(0) - \frac{\psi'(0)}{\rho c} \right) &= 0, \\ \lambda^+ \left(\phi'(l) + \frac{\psi'(l)}{\rho c} \right) + \lambda^- \left(\phi'(l) - \frac{\psi'(l)}{\rho c} \right) &= 0, \\ (\lambda^+)^2 \left(\phi''(0) + \frac{\psi''(0)}{\rho c} \right) + (\lambda^-)^2 \left(\phi''(0) - \frac{\psi''(0)}{\rho c} \right) &= 0, \\ (\lambda^+)^2 \left(\phi''(l) + \frac{\psi''(l)}{\rho c} \right) + (\lambda^-)^2 \left(\phi''(l) - \frac{\psi''(l)}{\rho c} \right) &= 0. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Как будет видно из дальнейшего, условия согласования (6.12) — вполне естественные условия сходимости в $C^1(\bar{\Pi}_\infty)$ рядов Фурье (по x) в (6.9).

Теорема 6.1. Пусть $\phi \in C^2([0, l])$, $\psi \in C^2([0, l])$ и выполнены условия согласования (6.12). Тогда ряды в (6.11) сходятся в $C^1(K)$ для любого компакта $K \subset \bar{\Pi}_\infty$, а определяемые ими функции $u \in C^1(\bar{\Pi}_\infty)$ и $p \in C^1(\bar{\Pi}_\infty)$ представляют собой классическое решение задачи (6.1)–(6.3).

Доказательство. Общее решение системы уравнений (6.5) имеет вид

$$r(x, t) = f(x - \lambda^+ t), \quad s(x, t) = g(x - \lambda^- t), \quad (6.13)$$

где f и g — произвольные функции из $C^1(\mathbb{R})$. В силу начальных условий (6.6) функции f и g однозначно определяются на отрезке $0 \leq x \leq l$ формулами

$$f(x) = \phi(x) + \frac{1}{\rho c} \psi(x), \quad g(x) = \phi(x) - \frac{1}{\rho c} \psi(x). \quad (6.14)$$

Таким образом, решение (r, s) задачи (6.5), (6.6) определяется формулами (6.13), (6.14) внутри характеристического треугольника $x - \lambda^+ t \geq 0$, $x - \lambda^- t \leq l$, $t \geq 0$.

Методом продолжения построим решение задачи (6.5)–(6.7) на всей полосе $\bar{\Pi}_\infty = \{(x, t) : 0 \leq x \leq l, t > 0\}$. Для этого доопределим функции $f(x)$ и $g(x)$, задаваемые формулами (6.14) на отрезке $0 \leq x \leq l$, до функций $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{g}(x)$, где $x \in \mathbb{R}$. При этом на функции $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{g}(x)$ наложим условия

$$\tilde{f}(x) = -\tilde{g}\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}x\right), \quad \tilde{f}(l-x) = -\tilde{g}\left(l - \frac{\lambda^-}{\lambda^+}x\right) \quad (6.15)$$

при всех $x \in \mathbb{R}$, $\tilde{f}(x)$ — периодическая функция с периодом $\left(1 - \frac{\lambda^+}{\lambda^-}\right)l$, а $\tilde{g}(x)$ — периодическая функция с периодом $\left(1 - \frac{\lambda^-}{\lambda^+}\right)l$. Построим требуемые функции $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{g}(x)$ следующим образом. Пусть

$$\begin{aligned} \tilde{f}(x) &= -g\left(\frac{\lambda^-}{\lambda^+}x\right) \text{ при } \frac{\lambda^+}{\lambda^-}l \leq x \leq 0 \text{ и } \tilde{f}(x) = f(x) \text{ при } 0 \leq x \leq l, \\ \tilde{g}(x) &= -f\left(\frac{\lambda^+}{\lambda^-}x\right) \text{ при } \frac{\lambda^-}{\lambda^+}l \leq x \leq 0 \text{ и } \tilde{g}(x) = g(x) \text{ при } 0 \leq x \leq l. \end{aligned}$$

Полученные таким образом функции $\tilde{f}(x)$ ($\frac{\lambda^+}{\lambda^-}l \leq x \leq l$) и $\tilde{g}(x)$ ($\frac{\lambda^-}{\lambda^+}l \leq x \leq l$) продолжим периодически, соответственно, с периодами $\left(1 - \frac{\lambda^+}{\lambda^-}\right)l$ и $\left(1 - \frac{\lambda^-}{\lambda^+}\right)l$. Нетрудно проверить, что условия согласования (6.12) обеспечивают принадлежность построенных функций $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{g}(x)$ пространству $C^2(\mathbb{R})$, а также выполнение условий (6.15).

Формулы

$$r(x, t) = \tilde{f}(x - \lambda^+ t), \quad s(x, t) = \tilde{g}(x - \lambda^- t)$$

дают теперь решение задачи (6.5)–(6.7), так как из условий (6.15) следует выполнение краевых условий (6.7). Поскольку функции $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{g}(x)$ принадлежат пространству $C^2(\mathbb{R})$ и являются периодическими с периодами, соответственно, $\left(1 - \frac{\lambda^+}{\lambda^-}\right)l$ и $\left(1 - \frac{\lambda^-}{\lambda^+}\right)l$, то они разлагаются в соответствующие комплексные ряды Фурье. Эти ряды Фурье сходятся в норме пространства $C^1([a, b])$ для любого отрезка $[a, b]$ в силу принадлежности функций \tilde{f} и \tilde{g} пространству $C^2(\mathbb{R})$. Заменяя в указанных разложениях аргумент x на $x - \lambda^+ t$ и $x - \lambda^- t$, соответственно, получим разложения функций $\tilde{f}(x - \lambda^+ t)$ и $\tilde{g}(x - \lambda^- t)$, т. е. функций $r(x, t)$ и $s(x, t)$. Нетрудно проверить, что найденные разложения будут иметь вид (6.9), (6.10), причем ряды (6.9) будут сходиться в $C^1(K)$ для любого компакта $K \subset \bar{\Pi}_\infty$.

Так как функции $\tilde{f}(x)$ и $\tilde{g}(x)$ принадлежат $C^2(\mathbb{R})$, то коэффициенты A_k^0 и $-A_k^0$ их разложений в ряды Фурье имеют порядок $O\left(\frac{1}{k^2}\right)$ при $k \rightarrow \infty$. Это гарантирует абсолютную (и равномерную) сходимость рядов в (6.9) при всех $(x, t) \in \mathbb{R}^2$, а значит, и возможность представления функций $u(x, t)$ и $p(x, t)$ рядами (6.11). \square

Замечание 6.1. Из формул (6.9)–(6.10) и (6.11), представляющих решения задач (6.5)–(6.7) и (6.1)–(6.3) в комплексной форме, нетрудно получить решения этих задач в вещественной форме.

Например, вещественная форма решения задачи (6.5)–(6.7) относительно инвариантов Римана $r(x, t)$ и $s(x, t)$ имеет вид

$$\begin{aligned} r(x, t) &= \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{\omega_0 k}{\lambda^+} (x - \lambda^+ t) + b_k \sin \frac{\omega_0 k}{\lambda^+} (x - \lambda^+ t), \\ s(x, t) &= -\frac{a_0}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos \frac{\omega_0 k}{\lambda^-} (x - \lambda^- t) + b_k \sin \frac{\omega_0 k}{\lambda^-} (x - \lambda^- t), \end{aligned} \quad (6.16)$$

где

$$\begin{aligned} a_k &= \frac{2\lambda^-}{(\lambda^- - \lambda^+)l} \int_0^l r_0(z) \cos \frac{\omega_0 k}{\lambda^+} z dz + \frac{2\lambda^+}{(\lambda^- - \lambda^+)l} \int_0^l s_0(z) \cos \frac{\omega_0 k}{\lambda^-} z dz, \\ b_k &= \frac{2\lambda^-}{(\lambda^- - \lambda^+)l} \int_0^l r_0(z) \sin \frac{\omega_0 k}{\lambda^+} z dz + \frac{2\lambda^+}{(\lambda^- - \lambda^+)l} \int_0^l s_0(z) \sin \frac{\omega_0 k}{\lambda^-} z dz. \end{aligned}$$

Из формул (6.16) видно, что инвариант $r(x, t)$ представляет собой ограничение на отрезок $0 \leq x \leq l$ суперпозиции «элементарных» периодических волн, имеющих формы постоянной, а также косинусов и синусов с частотами $\omega_0 k / \lambda^+$, перемещающихся без искажения вправо со скоростями $\omega_0 k$, $k = 1, 2, \dots$. Аналогично, инвариант $s(x, t)$ является ограничением на отрезок $0 \leq x \leq l$ суперпозиции «элементарных» периодических волн того же вида, но с частотами $\omega_0 k / \lambda^-$ и перемещающихся без искажения влево со скоростями $\omega_0 k$, $k = 1, 2, \dots$.

7. ПРИМЕРЫ

Для двух простых примеров применения результатов, полученных в данной работе, будут использованы близкие к реальным данные, присущие вполне конкретным сосудам.

Пример 7.1. Рассмотрим линейную модель гемодинамики в сонной артерии, фоновые значения скорости, давления и площади поперечного сечения которой равны, соответственно, $\bar{u} = 20$, $\bar{p} = 90$, $\bar{s} = 0,5$. Пусть, далее, коэффициент эластичности $\theta = 0,025$, а плотность крови $\rho = 1,05$. Кроме того, выберем начальные возмущения скорости и давления: $\phi(x) = 0$, $\psi(x) = 20 \cos x$.

Поставим следующую задачу Коши:

$$\begin{cases} u_t + 20u_x + 0,95p_x = 0 & (-\infty < x < +\infty, t > 0), \\ p_t + 20u_x + 20p_x = 0, \\ u(x, 0) = 0, \\ p(x, 0) = 20 \cos x. \end{cases}$$

Используя теорему 2.1, получим точное решение поставленной задачи в виде

$$\begin{aligned} u(x, t) &= 2,18 \cos(-x + 24,4t) - 2,18 \cos(-x + 15,6t), \\ p(x, t) &= 10 \cos(-x + 24,4t) + 10 \cos(-x + 15,6t). \end{aligned}$$

Пример 7.2. Рассмотрим задачу гемодинамики в аорте, для которой будем использовать следующие данные: $\bar{u} = 50$, $\bar{p} = 100$, $\bar{s} = 5,5$, $\theta = 0,18$, $\rho = 1,05$. Зададим начальные возмущения скорости и давления: $\phi(x) = 0$ и $\psi(x) = 20 \cos\left(\frac{1}{29}x - 3,6\right)$, а также граничные условия: $\nu(t) = 0$ и $\mu(t) = 80$.

Аорту представим графом Γ_1 , определенным в разделе 3. Тогда смешанная задача будет иметь вид

$$\begin{cases} u_t + 50u_x + 0,95p_x = 0 & (0 < x < +\infty, t > 0), \\ p_t + 30,5u_x + 50p_x = 0, \\ u(x, 0) = 0, & p(x, 0) = 20 \cos\left(\frac{1}{29}x - 3,6\right), \\ u(x, 0) = 0, & p(x, 0) = 80. \end{cases}$$

Воспользовавшись теоремой 2.2, получим точное решение данной задачи:

$$u(x, t) = \begin{cases} 1,8 \cos(-0,034x + 1,9t + 3,6) - 1,8 \cos(-0,034x + 1,6t + 3,6), & 0 \leq x - 55t, \\ 1,8 \cos(-0,028x + 1,6t + 3,6) - 1,8 \cos(-0,034x + 1,6t + 3,6), & x - 55t < 0, \end{cases}$$

$$p(x, t) = \begin{cases} 9,99 \cos(-0,0345x + 1,91t + 3,6) + 9,99 \cos(-0,0345x + 1,53t + 3,6), & 0 \leq x - 55,5t, \\ 79,8 - 9,99 \cos(-0,0277x + 1,53t + 3,6) + 9,99 \cos(-0,0345x + 1,53t + 3,6), & x - 55,5t < 0. \end{cases}$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Абакумов Н. В. и др.* Методика математического моделирования сердечно-сосудистой системы// *Мат. модел.* — 2000. — 12, № 2. — С. 106–117.
2. *Буничева А. Я. и др.* Исследование влияния гравитационных перегрузок на параметры кровотока в сосудах большого круга кровообращения// *Мат. модел.* — 2012. — 24, № 7. — С. 67–82.
3. *Кошелев В. Б. и др.* Математические модели квази-одномерной гемодинамики. — М.: МАКС Пресс, 2010.
4. *Мухин С. И.* Математическое моделирование гемодинамики. — Дисс. д.ф.-м.н., МГУ, 2008.
5. *Нуман Эльшейх М. Х., Сакбаев В. Ж.* Операторы Лапласа для уравнения Шредингера на графах// *Тр. МФТИ.* — 2014. — 6, № 2. — С. 61–67.
6. *Покорный Ю. В. и др.* Дифференциальные уравнения на геометрических графах. — М.: Физматлит, 2004.
7. *Рожественский Б. Л., Яненко Н. Н.* Системы квазилинейных уравнений и их приложения к газовой динамике. — М.: Наука, 1978.
8. *Сакбаев В. Ж., Смолянов О. Г.* Динамика квантовой частицы с разрывной зависимостью массы от положения// *Докл. РАН.* — 2010. — 433, № 3. — С. 314–317.
9. *Сакбаев В. Ж., Смолянов О. Г.* Диффузия и квантовая динамика на графах// *Докл. РАН.* — 2013. — 451, № 2. — С. 141–145.
10. *Тихонов А. Н., Самарский А. А.* Уравнения математической физики. — М.: Изд. МГУ, 2004.
11. *Толченников А. А., Чернышев В. Л., Шафаревич А. И.* Асимптотические свойства и классические динамические системы в квантовых задачах на сингулярных пространствах// *Нелин. динамика.* — 2010. — 6, № 3. — С. 623–638.
12. *Чернышев В. Л., Шафаревич А. И.* Квазиклассический спектр оператора Шредингера на геометрическом графе// *Мат. заметки.* — 2007. — 82, № 4. — С. 606–620.

В. И. Безяев

Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: vbezyaev@mail.ru

Н. Х. Садеков

Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6
E-mail: nail.sadd@mail.ru

UDC 517.925

On Some Problems of Hemodynamics on Graphs

© 2016 V. I. Bezyaev, N. Kh. Sadekov

Abstract. In this paper, some problems for linearized equations of hemodynamics on simplest graphs are considered. Exact or analytic solutions of such problems are obtained.

REFERENCES

1. N. V. Abakumov, etc., “Metodika matematicheskogo modelirovaniya serdechno-sosudistoy sistemy” [Methods of mathematical modelling of the cardiovascular system], *Mat. model.* [Math. Model.], 2000, **12**, No. 2, 106–117.
2. A. Ya. Bunicheva, etc., “Issledovanie vliyaniya gravitatsionnykh peregruzok na parametry krovotoka v sosudakh bol'shogo kruga krovoobrashcheniya” [Investigation of gravitational acceleration effect on blood flow parameters in vessels of greater circulation], *Mat. model.* [Math. Model.], 2012, **24**, No. 7, 67–82.
3. V. B. Koshelev, etc., *Matematicheskie modeli kvazi-odnomernoy gemodinamiki* [Mathematical Models of Quasi-one-dimensional Hemodynamics], MAKS Press, Moscow, 2010.
4. S. I. Mukhin, *Matematicheskoe modelirovanie gemodinamiki* [Mathematical Modelling of Hemodynamics], Doctoral Thesis, MSU, Moscow, 2008.
5. M. Kh. Numan El'sheykh and V. Zh. Sakbaev, “Operatory Laplasya dlya uravneniya Shredingera na grafakh” [Laplace operators for the Schrödinger equation on graphs], *Tr. MFTI* [Proc. Moscow Inst. Phys. Tech.], 2014, **6**, No. 2, 61–67.
6. Yu. V. Pokornyy, etc., *Differentsial'nye uravneniya na geometricheskikh grafakh* [Differential Equations on Geometric Graphs], Fizmatlit, Moscow, 2004.
7. B. L. Rozhdestvenskiy and N. N. Yanenko, *Sistemy kvazilineynykh uravneniy i ikh prilozheniya k gazovoy dinamike* [Systems of Quasilinear Equations and Their Applications to Gas Dynamics], Nauka, Moscow, 1978.
8. V. Zh. Sakbaev and O. G. Smolyanov, “Dinamika kvantovoy chastitsy s razryvnoy zavisimost'yu massy ot polozheniya” [Dynamic of a quantum particle with discontinuous dependence of mass on position], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2010, **433**, No. 3, 314–317.
9. V. Zh. Sakbaev and O. G. Smolyanov, “Diffuziya i kvantovaya dinamika na grafakh” [Diffusion and quantum dynamics of graphs], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2013, **451**, No. 2, 141–145.
10. A. N. Tikhonov and A. A. Samarskiy, *Uravneniya matematicheskoy fiziki* [Equations of Mathematical Physic], MSU, Moscow, 2004.
11. A. A. Tolchennikov, V. L. Chernyshev, and A. I. Shafarevich, “Asimptoticheskie svoystva i klassicheskie dinamicheskie sistemy v kvantovykh zadachakh na singulyarnykh prostranstvakh” [Asymptotical properties and classic dynamical systems in quantum problems on singular spaces] *Nelineynaya dinamika* [Nonlin. Dynamics], 2010, **6**, No. 3, 623–638.
12. V. L. Chernyshev and A. I. Shafarevich, “Kvaziklassicheskiy spektr operatora Shredingera na geometricheskom grafe” [Quasiclassic spectrum of the Schrödinger operator on geometric graph], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2007, **82**, No. 4, 606–620.

V. I. Bezyaev

RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st., 117198 Moscow, Russia

E-mail: vbezyaev@mail.ru

N. Kh. Sadekov

RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st., 117198 Moscow, Russia

E-mail: nail.sadd@mail.ru

СТАЦИОНАРНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ВЛАСОВА ДЛЯ ВЫСОКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ДВУКОМПОНЕНТНОЙ ПЛАЗМЫ

© 2016 г. Ю. О. БЕЛЯЕВА

Аннотация. Рассматривается первая смешанная задача для уравнений Власова—Пуассона в бесконечном цилиндре, описывающая эволюцию плотностей распределения ионов и электронов в высокотемпературной плазме при наличии внешнего магнитного поля. Построены стационарные решения системы уравнений Власова—Пуассона с тривиальным потенциалом самосогласованного электрического поля для двухкомпонентной плазмы в бесконечном цилиндре с носителями, лежащими на некотором расстоянии от границы рассматриваемой области.

СОДЕРЖАНИЕ

| | | |
|---|--|----|
| 1. Введение | | 19 |
| 2. Постановка задачи и полученные результаты | | 21 |
| 3. Построение стационарного решения в виде формы четвертого порядка | | 23 |
| 4. Построение стационарного решения в виде формы порядка $2m$ | | 27 |
| Список литературы | | 29 |

1. ВВЕДЕНИЕ

Уравнения Власова, или кинетические уравнения с самосогласованным полем, впервые были получены в работе [4]. В последние десятилетия возрастание интереса к изучению этих уравнений обусловлено многочисленными приложениями, основным из которых является их использование в изучении высокотемпературной, разреженной плазмы и процессов управления термоядерным синтезом. В зависимости от исходных физических моделей различают уравнения Власова—Пуассона, Власова—Максвелла, Власова—Эйнштейна, обобщенные уравнения Власова и т. д.

Будем рассматривать систему уравнений Власова—Пуассона в бесконечном цилиндре

$$-\Delta\varphi(x, t) = 4\pi e \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta} \beta f^{\beta}(x, v, t) dv \quad (x \in Q, 0 < t < T), \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial f^{\beta}}{\partial t} + (v, \nabla_x f^{\beta}) + \frac{\beta e}{m_{\beta}} \left(-\nabla_x \varphi + \frac{1}{c} [v, B], \nabla_v f^{\beta} \right) = 0 \tag{1.2}$$

$(x \in Q, v \in \mathbb{R}^3, 0 < t < T, \beta = \pm 1)$

с начальными условиями

$$f^{\beta}(x, v, t)|_{t=0} = f_0^{\beta}(x, v) \quad (x \in \bar{Q}, v \in \mathbb{R}^3, \beta = \pm 1) \tag{1.3}$$

и краевым условием Дирихле

$$\varphi(x, t) = 0 \quad (x \in \partial Q, 0 \leq t < T). \tag{1.4}$$

Здесь $Q = G \times \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\partial G \in C^{\infty}$, $\partial Q = \partial G \times \mathbb{R}$, $f^{\beta} = f^{\beta}(x, v, t)$ — функция плотности распределения положительно заряженных ионов, если $\beta = +1$, и электронов, если $\beta = -1$, в точке x со скоростью v в момент времени t ; $\varphi = \varphi(x, t)$ — потенциал самосогласованного электрического поля; ∇_x и ∇_v — градиенты по x и v , соответственно;

Работа выполнена при финансовой поддержке МОН РФ, соглашение № 02.а03.21.0008.

m_{+1} и m_{-1} — массы иона и электрона; e — заряд электрона; c — скорость света; B — индукция внешнего магнитного поля; (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в \mathbb{R}^3 ; $[\cdot, \cdot]$ — векторное произведение в \mathbb{R}^3 .

Уравнения Власова получаются из уравнений Больцмана, если в последних пренебречь интегралом столкновений. Для разреженной плазмы это допущение является оправданным. Несмотря на отсутствие интеграла столкновений, взаимодействие заряженных частиц учитывается через самоогласованное электрическое поле, которое вычисляется из плотностей распределения заряженных частиц.

Как в физике, так и в математике уравнениям Власова посвящена обширная литература (см. [1–23] и имеющуюся там библиографию). Глобальная разрешимость «сглаженных» уравнений Власова исследована в работах Р. Л. Добрушина и В. П. Маслова [5, 7]. Существование и устойчивость слабых решений начальных и начально-краевых задач для системы уравнений Власова—Пуассона и Власова—Максвелла изучались в работах А. А. Арсеньева, В. В. Козлова, Р. Дж. ДиПерна и П. Л. Лионса, Ю. Веклера [1, 6, 16, 23] и др. Вопрос о существовании глобальных классических решений задачи Коши для уравнений Власова—Пуассона исследовался в работах Ю. Батта, К. Пфаффельмозера и Дж. Шеффера [12, 19, 21] и ряде других работ. Существование классических решений начально-краевых задач для уравнений Власова—Пуассона исследовано в значительно меньшей степени. В работе Я. Гуо [18] доказано существование глобального классического решения второй начально-краевой задачи для системы уравнений Власова—Пуассона в полупространстве.

Важную роль играют стационарные решения уравнений Власова. Они описывают возможные положения равновесия плазмы, которые в дальнейшем можно исследовать на устойчивость. В работах В. В. Веденяпина [2, 3] доказана единственность решения граничной задачи системы Власова—Пуассона в предположении, что функции распределения плотностей зависят только от энергии и интегралов импульса в случае двумерного пространства скоростей в интеграле энергии. Доказаны существование периодических стационарных решений и нарушение единственности в случае одномерного пространства скоростей. Описан метод построения стационарных решений задачи Дирихле для уравнений Власова в случае, когда функции распределения плотностей частиц зависят только от интеграла энергии. В работе Ю. Батта и К. Фабиана [13] доказано существование стационарных решений системы Власова—Максвелла. Сферически симметричные стационарные решения начальной задачи для системы Власова—Пуассона исследованы в работе Ю. Батта, В. Фальтенбахера и Э. Хорста [14]. В работе С. И. Похожаева [8] рассматривается проблема существования стационарных решений уравнений Власова—Пуассона при $x \in \mathbb{R}^n$, доказано отсутствие стационарных решений, представленных распределениями типа Максвелла—Больцмана. В случае граничной задачи для системы Власова—Пуассона в одномерной (по пространству) и имеющей реалистичную, с точки зрения физики, границу области в работе К. Грингарда и П. А. Равьяра [17] доказаны существование и единственность стационарного решения. Для случая бесстолкновительной плазмы, которая состоит из электронов и положительно заряженных ионов, в работе Г. Райна [20] исследованы стационарные решения в ограниченной области из $x \in \mathbb{R}^3$ для двух случаев: нерелятивистского электростатического случая, описываемого системой Власова—Пуассона и релятивистского электродинамического случая, описываемого системой Власова—Максвелла. В диссертационном исследовании П. Браша [15] получен ряд результатов для стационарных решений систем Власова—Максвелла и Власова—Пуассона в случае бесконечного цилиндра.

Наиболее известной установкой для термоядерного синтеза является *токамак*. Этот термин является аббревиатурой русских слов «ток», «камера», «магнитная катушка». Вакуумная камера токамака-реактора представляет собой тор, сечение которого имеет вид прописной латинской буквы «D», см. рис. 1. Одной из альтернативных установок для термоядерного синтеза является *пробочная ловушка (mirror trap)*, имеющая вид длинного цилиндра, сужающегося на концах, см. рис. 2.

В работах А. Л. Скубачевского [9–11, 22] рассматривались смешанные задачи для уравнений Власова—Пуассона для двухкомпонентной плазмы. При этом учитывалось влияние внешнего магнитного поля, а также исследовались решения, носители которых лежат на некотором расстоянии от границы рассматриваемой области. В случае полуплоскости для достаточно малых начальных плотностей с компактными носителями и большой напряженности внешнего магнитного поля

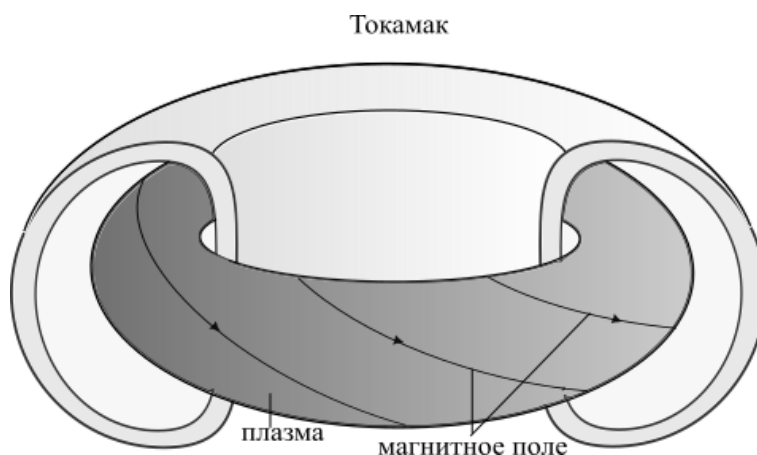


Рис. 1

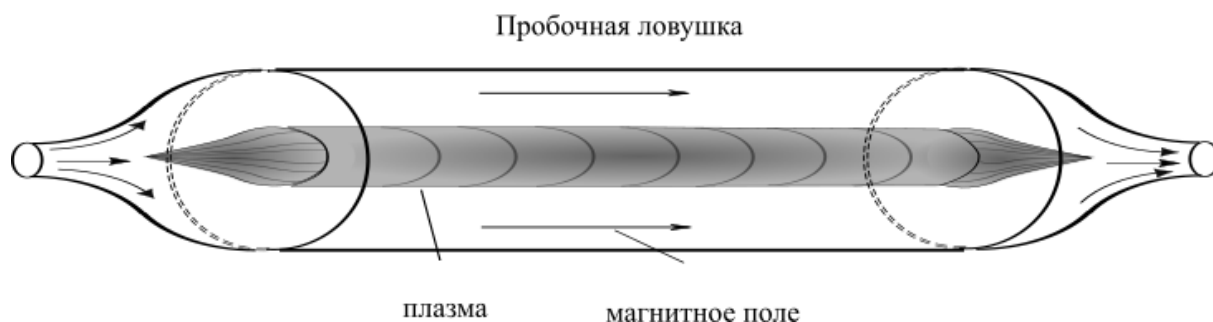


Рис. 2

доказаны существование и единственность классических решений смешанных задач с различными краевыми условиями для потенциала электрического поля: условиями Дирихле, условиями Неймана и нелокальными условиями [9, 10]. В работе [22] доказаны существование и единственность классического решения системы уравнений Власова—Пуассона с нелокальными условиями в бесконечном цилиндре и достаточно малыми начальными условиями. Для случая бесконечного цилиндра в некоторой окрестности стационарного решения доказаны существование и единственность классического решения с носителями плотностей распределения заряженных частиц во внутреннем цилиндре [11].

Данная работа посвящена построению стационарных решений с тривиальным потенциалом самосогласованного электрического поля для двухкомпонентной плазмы в бесконечном цилиндре с носителями плотностей распределения заряженных частиц, лежащими на некотором расстоянии от цилиндрической границы.

2. Постановка задачи и полученные результаты

Рассмотрим систему уравнений Власова—Пуассона в бесконечном цилиндре

$$-\Delta\varphi(x, t) = 4\pi e \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta} \beta f^{\beta}(x, v, t) dv \quad (x \in Q, 0 < t < T), \quad (2.1)$$

$$\frac{\partial f^{\beta}}{\partial t} + (v, \nabla_x f^{\beta}) + \frac{\beta e}{m_{\beta}} \left(-\nabla_x \varphi + \frac{1}{c} [v, B], \nabla_v f^{\beta} \right) = 0 \quad (2.2)$$

$(x \in Q, v \in \mathbb{R}^3, 0 < t < T, \beta = \pm 1)$

с начальными условиями

$$f^\beta(x, v, t)|_{t=0} = f_0^\beta(x, v) \quad (x \in \bar{Q}, v \in \mathbb{R}^3, \beta = \pm 1) \quad (2.3)$$

и краевым условием Дирихле

$$\varphi(x, t) = 0 \quad (x \in \partial Q, 0 \leq t < T). \quad (2.4)$$

Здесь $Q = G \times \mathbb{R}$, $G \subset \mathbb{R}^2$ — ограниченная область с границей $\partial G \in C^\infty$, $\partial Q = \partial G \times \mathbb{R}$, $f^\beta = f^\beta(x, v, t)$ — функция плотности распределения положительно заряженных ионов, если $\beta = +1$, и электронов, если $\beta = -1$, в точке x со скоростью v в момент времени t ; $\varphi = \varphi(x, t)$ — потенциал самосогласованного электрического поля; ∇_x и ∇_v — градиенты по x и v , соответственно; m_{+1} и m_{-1} — массы иона и электрона; e — заряд электрона; c — скорость света; B — индукция внешнего магнитного поля; (\cdot, \cdot) — скалярное произведение в \mathbb{R}^3 ; $[\cdot, \cdot]$ — векторное произведение в \mathbb{R}^3 .

Пусть $B_\rho(x_0) = \{x \in \mathbb{R}^3 : |x - x_0| < \rho\}$, и пусть $B_\rho = B_\rho(0)$.

Для определения классического решения задачи (2.1)–(2.4) введем некоторые функциональные пространства. Обозначим через $C^s(\mathbb{R}^n)$ ($C^s(\Omega)$), $s \geq 0$, $n \in \mathbb{N}$, пространство непрерывных функций в \mathbb{R}^n (Ω), имеющих все непрерывные производные в \mathbb{R}^n (Ω) вплоть до k -го порядка, $k = [s]$, с конечной нормой

$$\|u\|_s = \max_{|\alpha| \leq k} \sup_x |\mathcal{D}^\alpha u(x)|,$$

если $s = k \in \mathbb{Z}$, $0 \leq k$,

$$\|u\|_s = \|u\|_k + \max_{|\alpha|=k} \sup_{x \neq y} |x - y|^{-\sigma} |\mathcal{D}^\alpha u(x) - \mathcal{D}^\alpha u(y)|,$$

если $s = k + \sigma$, $0 \leq k \in \mathbb{Z}$, $0 < \sigma < 1$, где $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — область с липшицевой границей, $\mathcal{D}^\alpha = \left(\frac{\partial}{\partial x_1}\right)^{\alpha_1} \dots \left(\frac{\partial}{\partial x_n}\right)^{\alpha_n}$, $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$.

Для любого $s \geq 0$ пространство $C^s(\mathbb{R}^n)$ ($C^s(\bar{\Omega})$) является банаховым. Если $s = k$, $0 \leq k \in \mathbb{Z}$, пространство $C^s(\mathbb{R}^n)$ ($C^s(\bar{\Omega})$) — сепарабельное. Если же $s = k + \sigma$, $0 \leq k \in \mathbb{Z}$, $0 < \sigma < 1$, пространство $C^s(\mathbb{R}^n)$ ($C^s(\bar{\Omega})$) не будет сепарабельным.

Обозначим через $C_0^s(\bar{Q})$, $s \geq 0$, замыкание множества функций из $C^s(\bar{Q})$ с компактными в \bar{Q} носителями. Введем банахово пространство $C([0, T], C^s(\bar{\Omega}))$, $s > 0$, непрерывных функций $[0, T] \ni t \mapsto \varphi(\cdot, t) \in C^s(\bar{\Omega})$ с нормой

$$\|\varphi\|_{s, T} = \sup_{0 \leq t \leq T} \|\varphi(\cdot, t)\|_s.$$

Аналогично можно определить пространство $C([0, T], C_0^s(\bar{Q}))$.

Определение 2.1. Вектор-функцию $\{\varphi, f^\beta\}$, $\varphi \in C([0, T], C_0^{2+\sigma}(\bar{Q}))$, $f^\beta \in C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R}^3 \times [0, T])$, мы назовем *классическим решением* задачи (2.1)–(2.4), если $\{\varphi, f^\beta\}$ удовлетворяет уравнениям (2.1), (2.2), начальным условиям (2.3) и краевому условию (2.4).

Важную роль в исследовании уравнений Власова играют стационарные решения.

Определение 2.2. Вектор-функцию $\{\hat{\varphi}, \hat{f}^\beta\}$, $\hat{\varphi} \in C_0^{2+\sigma}(\bar{Q})$, $\hat{f}^\beta \in C^1(\bar{Q} \times \mathbb{R}^3)$, мы назовем *стационарным решением* уравнений (2.1), (2.2) с краевым условием (2.4), если $\{\hat{\varphi}, \hat{f}^\beta\}$ удовлетворяет уравнениям

$$-\Delta \hat{\varphi}(x) = 4\pi e \int_{\mathbb{R}^3} \sum_{\beta} \beta \hat{f}^\beta(x, v) dv \quad (x \in Q), \quad (2.5)$$

$$(v, \nabla_x \hat{f}^\beta) + \frac{\beta e}{m_\beta} \left(-\nabla_x \hat{\varphi} + \frac{1}{c} [v, B], \nabla_v \hat{f}^\beta \right) = 0 \quad (x \in Q, v \in \mathbb{R}^3, \beta = \pm 1) \quad (2.6)$$

и краевому условию (2.4).

Сформулируем теперь условие, которому должно удовлетворять магнитное поле B . Обозначим $G_\delta = \{x' \in G : \text{dist}(x', \partial G) > \delta\}$, $Q_\delta = \{x \in Q : \text{dist}(x, \partial Q) > \delta\}$, где $\delta > 0$. Предполагая, что $G_{2\delta} \neq \emptyset$, обозначим через $\delta_0 = \delta_0(\delta) > 0$ наибольший радиус круга, вписанного в $G_{2\delta}$. В дальнейшем будем полагать, что $\delta_0 > \delta$.

Условие 2.1. Пусть $B = (0, 0, h)$ для $x \in \bar{Q}$, где $h > 0$ не зависит от x и

$$32 \frac{c\rho m_{+1}}{e\delta} < h. \quad (2.7)$$

А. Л. Скубачевским в работе [11] был получен следующий результат:

Теорема 2.1. Пусть $\delta > 0$ таково, что $G_{2\delta} \neq \emptyset$ и $\delta_0 > \delta$, и пусть для этого δ и некоторых $h, \rho > 0$ выполняется условие 2.1. Тогда для любого $\alpha > 0$ существует стационарное решение уравнений (2.1), (2.2) с краевым условием (2.4) вида

$$\{0, \mathring{f}^\beta\} = \left\{0, \psi_1^\beta(|v|^2) \cdot \psi_2^\beta \left(\left(\frac{eh}{m_\beta c} x_1 + \beta v_2 \right)^2 + \left(\frac{eh}{m_\beta c} x_2 - \beta v_1 \right)^2 \right) \right\},$$

обладающее следующими свойствами: $\mathring{f}^\beta \in C^\infty(\bar{Q} \times \mathbb{R}^3)$, $\text{supp } \mathring{f}^\beta \subset Q_{2\delta} \times B_{\rho/4}$ и $\sup_{x,v} \mathring{f}^\beta(x, v) > \alpha$.

Здесь $\psi_1^\beta(\cdot)$ и $\psi_2^\beta(\cdot)$ — четные неотрицательные функции, удовлетворяющие условиям: $\psi_1^\beta(0) = 2\alpha > 0$, $\psi_2^\beta(0) = 1$, $\text{supp } \psi_1^{-1} \subset (-\rho_1^2/16, \rho_1^2/16)$, $\text{supp } \psi_2^{-1} \subset (-\rho_0^2, \rho_0^2)$, где $0 < \rho_1 < \rho$, $\rho_0 = \frac{15\rho\delta_0}{\delta}$ и $\frac{1}{m_{+1}^{3/2}} \psi_1^{+1}\left(\frac{\tau}{m_{+1}^2}\right) = \frac{1}{m_{-1}^{3/2}} \psi_1^{-1}\left(\frac{\tau}{m_{-1}^2}\right)$, $\frac{1}{m_{+1}^{3/2}} \psi_2^{+1}\left(\frac{\tau}{m_{+1}^2}\right) = \frac{1}{m_{-1}^{3/2}} \psi_2^{-1}\left(\frac{\tau}{m_{-1}^2}\right)$.

В данной работе будут также построены стационарные решения с нулевым потенциалом в бесконечном цилиндре с носителями плотностей распределения заряженных частиц, лежащими на некотором расстоянии от цилиндрической границы. Однако, в отличие от стационарных решений, построенных в [11], аргументами срезающих функций будут служить формы четвертого порядка и формы порядка $2m$. Будет доказана следующая теорема:

Теорема 2.2. Пусть выполнены условия теоремы (2.1), тогда для любого $\alpha > 0$ функции

$$\{0, \mathring{f}_1^\beta \cdot \mathring{f}_2^\beta\}, \quad (2.8)$$

$$\{0, \mathring{f}_1^\beta \cdot \mathring{f}_m^\beta\}, \quad (2.9)$$

где

$$\begin{aligned} \mathring{f}_1^\beta &= \psi_1^\beta(|v|^2), \\ \mathring{f}_2^\beta &= \psi_2^\beta \left(\left(\frac{\beta eh}{cm_\beta} x_1 + \beta v_2 \right)^4 + \left(\frac{\beta eh}{cm_\beta} x_2 - \beta v_1 \right)^4 \right), \\ \mathring{f}_m^\beta &= \psi_m^\beta \left(\left(\frac{\beta eh}{cm_\beta} x_1 + \beta v_2 \right)^{2m} + \left(\frac{\beta eh}{cm_\beta} x_2 - \beta v_1 \right)^{2m} \right), \end{aligned}$$

являются стационарными решениями системы уравнений (2.1)-(2.2), удовлетворяющими условию (2.4) и обладают свойствами: $\mathring{f}^\beta \in C^\infty(\bar{Q} \times \mathbb{R}^3)$, $\text{supp } \mathring{f}^\beta \subset Q_{2\delta} \times B_{\rho/4}$, $\sup_{x,v} \mathring{f}^\beta > \alpha$. Здесь $\psi_1^\beta(\cdot)$, $\psi_2^\beta(\cdot)$, $\psi_m^\beta(\cdot)$ — четные неотрицательные функции такие, что $\psi_1^\beta(\cdot), \psi_2^\beta(\cdot), \psi_m^\beta(\cdot) \in C^\infty(\bar{Q} \times \mathbb{R}^3)$, $\psi_1^{-1}(0) = 2\alpha > 0$, $\psi_2^{-1}(0) = \psi_m^{-1}(0) = 1$, $\text{supp } \psi_1^{-1} \subset (-\rho_1^2/16, \rho_1^2/16)$, $\text{supp } \psi_2^{-1} \subset \left(-\frac{\rho_0^4}{2}, \frac{\rho_0^4}{2}\right)$, $\text{supp } \psi_m^{-1} \subset \left(-\frac{\rho_0^{2m}}{2^{m-1}}, \frac{\rho_0^{2m}}{2^{m-1}}\right)$, где $0 < \rho_1 < \rho$, $\rho_0 = \frac{15\rho\delta_0}{\delta}$, а также $\frac{1}{m_{+1}^{3/2}} \psi_j^{+1}\left(\frac{\tau}{m_{+1}^{2j}}\right) = \frac{1}{m_{-1}^{3/2}} \psi_j^{-1}\left(\frac{\tau}{m_{-1}^{2j}}\right)$, $j = 1, 2, \dots, m$ ($\tau \in \mathbb{R}$).

3. ПОСТРОЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ В ВИДЕ ФОРМЫ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Построим стационарное решение уравнений (2.5), (2.6) вида (2.8), обладающее свойствами:

$$\mathring{f}^\beta \in C^\infty(\bar{Q} \times \mathbb{R}^3), \quad \text{supp } \mathring{f}^\beta \subset Q_{2\delta} \times B_{\rho/4} \quad \text{и} \quad \sup_{x,v} \mathring{f}^\beta(x, v) > \alpha.$$

1. Пусть $\mathring{\varphi}(x) \equiv 0$ ($x \in \bar{Q}$). Тогда система (2.6) примет вид

$$\left(v, \nabla_x \mathring{f}^\beta \right) + \frac{\beta e}{cm_\beta} \left([v, B], \nabla_v \mathring{f}^\beta \right) = 0 \quad (x \in Q, v \in \mathbb{R}^3, \beta = \pm 1). \quad (3.1)$$

Будем искать решение уравнения (3.1) в виде произведения двух срезающих функций, аргументами которых являются формы четвертого порядка. Различные частные решения уравнения (3.1) будем обозначать через f_i^{β} ($i = 0, \dots, m$.)

Нетрудно проверить, что функция $f_0^{\beta}(x, v) = |v|^2$ является решением уравнения (3.1) для любых $x \in Q$, $v \in \mathbb{R}^3$ и $\beta = \pm 1$. Введем четные функции $\psi_1^{\beta} \in \dot{C}^{\infty}(\mathbb{R})$ так, что $\psi_1^{-1}(0) = 2\alpha > 0$, $\psi_1^{\beta}(\tau) \geq 0$, $\frac{1}{m_{+1}^{3/2}} \psi_1^{+1}\left(\frac{\tau}{m_{+1}^2}\right) = \frac{1}{m_{-1}^{3/2}} \psi_1^{-1}\left(\frac{\tau}{m_{-1}^2}\right)$ ($\tau \in \mathbb{R}$), $\text{supp } \psi_1^{-1} \subset (-\rho_1^2/16, \rho_1^2/16)$, где $0 < \rho_1 < \rho$. Поскольку $m_{+1} > m_{-1}$, то $\text{supp } \psi_1^{+1} \subset (-\rho_1^2/16, \rho_1^2/16)$ и $\psi_1^{+1}(0) > 2\alpha$. Функция $f_1^{\beta}(x, v) = \psi_1^{\beta}(|v|^2)$ является решением уравнения (3.1). Будем искать теперь решение уравнения (3.1) в виде формы четвертого порядка с неопределенными коэффициентами:

$$f_3^{\beta}(x, v) = \sum_{i,j,k,m=1}^3 (a_{ijkm}x_i x_j x_k x_m + b_{ijkm}v_i v_j v_k v_m + c_{ijkm}x_i x_j v_k v_m + d_{ijkm}x_i x_j x_k v_m + l_{ijkm}x_i v_j v_k v_m). \quad (3.2)$$

Тогда уравнение (3.1) примет вид:

$$v_1 \frac{\partial f_3^{\beta}}{\partial x_1} + v_2 \frac{\partial f_3^{\beta}}{\partial x_2} + v_3 \frac{\partial f_3^{\beta}}{\partial x_3} + \frac{\beta e h}{c m_{\beta}} v_2 \frac{\partial f_3^{\beta}}{\partial v_1} - \frac{\beta e h}{c m_{\beta}} v_1 \frac{\partial f_3^{\beta}}{\partial v_2} = 0$$

где

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3^{\beta}}{\partial x_1} &= \sum a_{1jkm}x_j x_k x_m + \sum a_{i1km}x_i x_k x_m + \\ &+ \sum a_{ij1m}x_i x_j x_m + \sum a_{ijk1}x_i x_j x_k + \sum c_{1jkm}x_j v_k v_m + \sum c_{i1km}x_i v_k v_m + \\ &+ \sum d_{1jkm}x_j x_k v_m + \sum d_{i1km}x_i x_k v_m + \sum d_{ij1m}x_i x_j v_m + \sum l_{1jkm}v_j v_k v_m, \end{aligned} \quad (3.3)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3^{\beta}}{\partial x_2} &= \sum a_{2jkm}x_j x_k x_m + \sum a_{i2km}x_i x_k x_m + \\ &+ \sum a_{ij2m}x_i x_j x_m + \sum a_{ijk2}x_i x_j x_k + \sum c_{2jkm}x_j v_k v_m + \sum c_{i2km}x_i v_k v_m + \\ &+ \sum d_{2jkm}x_j x_k v_m + \sum d_{i2km}x_i x_k v_m + \sum d_{ij2m}x_i x_j v_m + \sum l_{2jkm}v_j v_k v_m, \end{aligned} \quad (3.4)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3^{\beta}}{\partial x_3} &= \sum a_{3jkm}x_j x_k x_m + \sum a_{i3km}x_i x_k x_m + \\ &+ \sum a_{ij3m}x_i x_j x_m + \sum a_{ijk3}x_i x_j x_k + \sum c_{3jkm}x_j v_k v_m + \sum c_{i3km}x_i v_k v_m + \\ &+ \sum d_{3jkm}x_j x_k v_m + \sum d_{i3km}x_i x_k v_m + \sum d_{ij3m}x_i x_j v_m + \sum l_{3jkm}v_j v_k v_m, \end{aligned} \quad (3.5)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3^{\beta}}{\partial v_1} &= \sum b_{1jkm}v_j v_k v_m + \sum b_{i1km}v_i v_k v_m + \\ &+ \sum b_{ij1m}v_i v_j v_m + \sum b_{ijk1}v_i v_j v_k + \sum c_{ij1m}x_i x_j v_m + \sum c_{ijk1}x_i x_j v_k + \\ &+ \sum d_{ijk1}x_i x_j x_k + \sum l_{i1km}x_i v_k v_m + \sum l_{ij1m}x_i v_j v_m + \sum l_{ijk1}x_i v_j v_k, \end{aligned} \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial f_3^{\beta}}{\partial v_2} &= \sum b_{2jkm}v_j v_k v_m + \sum b_{i2km}v_i v_k v_m + \\ &+ \sum b_{ij2m}v_i v_j v_m + \sum b_{ijk2}v_i v_j v_k + \sum c_{ij2m}x_i x_j v_m + \sum c_{ijk2}x_i x_j v_k + \\ &+ \sum d_{ijk2}x_i x_j x_k + \sum l_{i2km}x_i v_k v_m + \sum l_{ij2m}x_i v_j v_m + \sum l_{ijk2}x_i v_j v_k. \end{aligned} \quad (3.7)$$

В формулах (3.3)–(3.7) суммирование производится по индексам, имеющимся у членов, стоящих под знаком суммы.

Подставим в уравнение (3.1) соотношения (3.3)–(3.7) и выделим группы подобных слагаемых. Выберем сначала многочлены, состоящие из мономов одинаковых степеней как по x , так и по v , и имеющих общий множитель v_3 :

$$\begin{aligned} \sum x_j x_k x_m v_3 + \sum a_{i3km} x_i x_k x_m v_3 + \sum a_{ij3m} x_i x_j x_m v_3 + \sum a_{ijk3} x_i x_j x_k v_3 = 0, \\ \sum c_{3jkm} x_j v_k v_m v_3 + \sum c_{i3km} x_i v_k v_m v_3 = 0, \\ \sum d_{3jkm} x_i x_k v_m v_3 + \sum d_{i3km} x_i x_k v_m v_3 + \sum d_{ij3m} x_i x_j v_m v_3 = 0, \\ \sum l_{3jkm} v_j v_k v_m v_3 = 0. \end{aligned}$$

Полученные равенства справедливы, если для всех $j, k, m = 1, 2, 3$ выполняются соотношения:

$$\begin{aligned} a_{3jkm} = a_{j3km} = a_{kj3m} = a_{mjk3} = 0, \quad c_{3jkm} = c_{j3km} = 0, \\ d_{3jkm} = d_{j3km} = d_{kj3m} = 0, \quad l_{3jkm} = 0. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Выберем теперь многочлены, состоящие из мономов одинаковых степеней как по x , так и по v , и имеющих общий множитель v_1 :

$$\begin{aligned} \sum a_{1jkm} x_j x_k x_m v_1 + \sum a_{i1km} x_i x_k x_m v_1 + \sum a_{ij1m} x_i x_j x_m v_1 + \sum a_{ijk1} x_i x_j x_k v_1 - \\ - \frac{\beta eh}{cm_\beta} \sum d_{ijk2} x_i x_j x_k v_1 = 0, \\ \sum c_{1jkm} x_j v_k v_m v_1 + \sum c_{i1km} x_i v_k v_m v_1 - \\ - \frac{\beta eh}{cm_\beta} \left(\sum l_{i2km} x_i v_k v_m v_1 + \sum l_{ij2m} x_i v_j v_m v_1 + \sum l_{ijk2} x_i v_j v_k v_1 \right) = 0, \\ \sum d_{1jkm} x_i x_k v_m v_1 + \sum d_{i1km} x_i x_k v_m v_1 + \sum d_{ij1m} x_i x_j v_m v_1 - \\ - \frac{\beta eh}{cm_\beta} \left(\sum c_{ij2m} x_i x_j v_m v_1 + \sum c_{ijk2} x_i x_j v_k v_1 \right) = 0, \\ \sum l_{1jkm} v_j v_k v_m v_1 - \\ - \frac{\beta eh}{cm_\beta} \left(\sum b_{2jkm} v_j v_k v_m v_1 + \sum b_{i2km} v_i v_k v_m v_1 + \sum b_{ij2m} v_i v_j v_m v_1 + \sum_{i,j,k=1} b_{ijk2} v_i v_j v_k v_1 \right) = 0. \end{aligned}$$

Здесь, полагая $a_{1jkm} = a_{j1km} = a_{kj1m} = a_{mjk1}$, $c_{1jkm} = c_{j1km}$, $l_{i2km} = l_{ik2m} = l_{imk2}$, $d_{1jkm} = d_{j1km} = d_{kj1m}$, $c_{ij2m} = c_{ijm2}$, $b_{2jkm} = b_{j2km} = b_{kj2m} = b_{mjk2}$, получим следующие соотношения для коэффициентов ($j, k, m = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned} 4a_{1jkm} = \frac{\beta eh}{cm_\beta} d_{jkm2}, \quad 2c_{1jkm} = 3 \frac{\beta eh}{cm_\beta} l_{jkm2}, \\ 3d_{1jkm} = 2 \frac{\beta eh}{cm_\beta} c_{jkm2}, \quad l_{1jkm} = 4 \frac{\beta eh}{cm_\beta} b_{2jkm}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Учитывая равенства (3.8), если один из индексов коэффициентов в (3.9) равен 3, то этот коэффициент обращается в нуль. Выберем теперь многочлены, состоящие из мономов одинаковых степеней как по x , так и по v , и имеющих общий множитель v_2 :

$$\begin{aligned} \sum a_{2jkm} x_j x_k x_m v_2 + \sum a_{i2km} x_i x_k x_m v_2 + \sum a_{ij2m} x_i x_j x_m v_2 + \sum a_{ijk2} x_i x_j x_k v_2 + \\ + \frac{\beta eh}{cm_\beta} \sum d_{ijk1} x_i x_j x_k v_2 = 0, \\ \sum c_{2jkm} x_j v_k v_m v_2 + \sum c_{i2km} x_i v_k v_m v_2 + \\ + \frac{\beta eh}{cm_\beta} \left(\sum l_{i1km} x_i v_k v_m v_2 + \sum l_{ij1m} x_i v_j v_m v_2 + \sum l_{ijk1} x_i v_j v_k v_2 \right) = 0, \\ \sum d_{2jkm} x_i x_k v_m v_2 + \sum d_{i2km} x_i x_k v_m v_2 + \sum d_{ij2m} x_i x_j v_m v_2 + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{\beta eh}{cm_\beta} \left(\sum c_{ij1m} x_i x_j v_m v_2 + \sum c_{ijk1} x_i x_j v_k v_2 \right) = 0, \\
& \sum l_{2jkm} v_j v_k v_m v_2 + \\
& + \frac{\beta eh}{cm_\beta} \left(\sum b_{1jkm} v_j v_k v_m v_2 + \sum b_{i1km} v_i v_k v_m v_2 + \sum b_{ij1m} v_i v_j v_m v_2 + \sum b_{ijk1} v_i v_j v_k v_2 \right) = 0.
\end{aligned}$$

Полагая $a_{2jkm} = a_{j2km} = a_{kj2m} = a_{mjk2}$, $c_{2jkm} = c_{j2km}$, $l_{i1km} = l_{ik1m} = l_{imk1}$, $d_{2jkm} = d_{j2km} = d_{kj2m}$, $c_{ij1m} = c_{ijm1}$, $b_{1jkm} = b_{j1km} = b_{kj1m} = b_{mjk1}$, получим соотношения следующего вида ($j, k, m = 1, 2, 3$):

$$\begin{aligned}
4a_{2jkm} &= -\frac{\beta eh}{cm_\beta} d_{jkm1}, & 2c_{2jkm} &= -3\frac{\beta eh}{cm_\beta} l_{jkm1}, \\
3d_{2jkm} &= -2\frac{\beta eh}{cm_\beta} c_{jkm1}, & l_{2jkm} &= -4\frac{\beta eh}{cm_\beta} b_{1jkm}.
\end{aligned} \tag{3.10}$$

Как и в предыдущем случае, в силу равенств (3.8), коэффициенты, содержащие в индексе 3, равны нулю.

Положим $b_{1111} = b_{2222} = 1$ и $b_{2111} = b_{2112} = b_{2211} = b_{2212} = 0$, тогда отличными от нуля останутся коэффициенты:

$$\begin{aligned}
l_{1222} &= 4\frac{\beta eh}{cm_\beta}, & l_{2111} &= -4\frac{\beta eh}{cm_\beta}, & c_{1122} &= 6\left(\frac{\beta eh}{cm_\beta}\right)^2, & c_{2211} &= 6\left(\frac{\beta eh}{cm_\beta}\right)^2, \\
d_{1112} &= 4\left(\frac{\beta eh}{cm_\beta}\right)^3, & d_{2221} &= -4\left(\frac{\beta eh}{cm_\beta}\right)^3, & a_{1111} &= \left(\frac{\beta eh}{cm_\beta}\right)^4, & a_{2222} &= \left(\frac{\beta eh}{cm_\beta}\right)^4.
\end{aligned}$$

Возвращаясь к искомому виду решения, получим:

$$\begin{aligned}
\mathring{f}_3^\beta(x, v) &= \left(\frac{\beta eh}{cm_\beta}\right)^4 x_1^4 + \left(\frac{\beta eh}{cm_\beta}\right)^4 x_2^4 + 4\left(\frac{\beta eh}{cm_\beta}\right)^3 x_1^3 v_2 - 4\left(\frac{\beta eh}{cm_\beta}\right)^3 x_2^3 v_1 + \\
& + 6\left(\frac{\beta eh}{cm_\beta}\right)^2 x_1^2 v_2^2 + 6\left(\frac{\beta eh}{cm_\beta}\right)^2 x_2^2 v_1^2 + 4\frac{\beta eh}{cm_\beta} x_1 v_2^3 - 4\frac{\beta eh}{cm_\beta} x_2 v_1^3 + v_1^4 + v_2^4 = \\
& = \left(\frac{\beta eh}{cm_\beta} x_1 + v_2\right)^4 + \left(\frac{\beta eh}{cm_\beta} x_2 - v_1\right)^4 = \left(\frac{eh}{cm_\beta} x_1 + \beta v_2\right)^4 + \left(\frac{eh}{cm_\beta} x_2 - \beta v_1\right)^4.
\end{aligned}$$

Введем четные функции $\psi_2^\beta \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$ так, что $\psi_2^{-1}(0) = 1$, $\psi_2^\beta(\tau) \geq 0$, $\frac{1}{m_{+1}^{3/2}} \psi_2^{+1}\left(\frac{\tau}{m_{+1}^4}\right) =$

$\frac{1}{m_{-1}^{3/2}} \psi_2^{-1}\left(\frac{\tau}{m_{-1}^4}\right)$ ($\tau \in \mathbb{R}$), $\text{supp } \psi_2^{-1} \subset \left(-\frac{\rho_0^4}{2}, \frac{\rho_0^4}{2}\right)$, где $\rho_0 = 15\rho\delta_0/\delta$. Поскольку $m_{+1} > m_{-1}$,

то $\text{supp } \psi_2^{+1} \subset (-\rho_0^2, \rho_0^2)$ и $\psi_2^{+1}(0) > 1$. Функция

$$\mathring{f}_2^\beta(x, v) = \psi_2^\beta \left(\left(\frac{eh}{m_\beta c} x_1 + \beta v_2\right)^4 + \left(\frac{eh}{m_\beta c} x_2 - \beta v_1\right)^4 \right)$$

является решением уравнения (3.1).

2. Докажем, что вектор-функция $\{0, \mathring{f}_1^\beta, \mathring{f}_2^\beta\}$ является стационарным решением задачи (2.1), (2.2), (2.4), удовлетворяющим условиям теоремы (2.1).

По построению функция $\mathring{f}^\beta(x, v) = \mathring{f}_1^\beta(x, v) \times \mathring{f}_2^\beta(x, v)$ удовлетворяет уравнению (3.1), а также $\text{sup } \mathring{f}^\beta(x, v) \geq \mathring{f}^\beta(0, 0) \geq 2\alpha > 0$. Остается доказать, что правая часть уравнения (2.5) тождественно

равна нулю и $\text{supp } \mathring{f}^\beta \subset Q_{2\delta} \times B_{\rho/4}$. Докажем, что

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathring{f}^{+1}(x, v) dv = \int_{\mathbb{R}^3} \mathring{f}^{-1}(x, v) dv.$$

Сделаем замены переменных $y = \frac{eh}{c} x$ и $w = m_{+1}(v_2, -v_1, v_3)$. Тогда, используя равенства

$\frac{1}{m_{+1}^{3/2}} \psi_1^{+1}\left(\frac{\tau}{m_{+1}^2}\right) = \frac{1}{m_{-1}^{3/2}} \psi_1^{-1}\left(\frac{\tau}{m_{-1}^2}\right)$, $\frac{1}{m_{+1}^{3/2}} \psi_2^{+1}\left(\frac{\tau}{m_{+1}^4}\right) = \frac{1}{m_{-1}^{3/2}} \psi_2^{-1}\left(\frac{\tau}{m_{-1}^4}\right)$ и вводя переменные

$x = \frac{c}{eh} y$ и $v = \frac{1}{m_{-1}} (w_2, -w_1, w_3)$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \mathring{f}^{+1}(x, v) dv &= \int_{\mathbb{R}^3} \psi_1^{+1}(|v|^2) \psi_2^{+1} \left(\left(\frac{eh}{m_{+1}c} x_1 + v_2 \right)^4 + \left(\frac{eh}{m_{+1}c} x_2 - v_1 \right)^4 \right) dv = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{m_{+1}^3} \psi_1^{+1} \left(\frac{|w|^2}{m_{+1}^2} \right) \psi_2^{+1} \left(\frac{(y_1 + w_1)^4 + (y_2 + w_2)^4}{m_{+1}^4} \right) dw = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{m_{-1}^3} \psi_1^{-1} \left(\frac{|w|^2}{m_{-1}^2} \right) \psi_2^{-1} \left(\frac{(y_1 + w_1)^4 + (y_2 + w_2)^4}{m_{-1}^4} \right) dw = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \psi_1^{-1}(|v|^2) \psi_2^{-1} \left(\left(\frac{eh}{m_{-1}c} x_1 - v_2 \right)^4 + \left(\frac{eh}{m_{-1}c} x_2 + v_1 \right)^4 \right) dv = \int_{\mathbb{R}^3} \mathring{f}^{-1}(x, v) dv. \end{aligned}$$

Докажем теперь, что $\text{supp } \mathring{f}^\beta \subset Q_{2\delta} \times B_{\rho/4}$. Действительно, если $|v| > \rho_1/4$, то по построению $f_1^\beta(x, v) = \psi_1^\beta(|v|^2) = 0$. Следовательно, $\mathring{f}^\beta(x, v) = 0$ для $|v| > \rho_1/4$. Пусть $B_{\delta_0}(g)$ — круг наибольшего радиуса такой, что $B_{\delta_0}(g) \subset G_{2\delta}$. Не ограничивая общности, будем считать, что $g = 0$. Если $|x'| > \delta_0/2$, $|v| \leq \rho_1/4$, то из условия 2.1 и неравенства $\delta_0/\delta > 1$ вытекает, что

$$\left| \frac{eh}{m_\beta c} x' + \beta z' \right| \geq \frac{eh}{m_\beta c} |x'| - |z'| > \frac{16c\rho m_\beta e\delta_0}{e\delta m_\beta c} - \rho > \frac{15\rho\delta_0}{\delta},$$

где $z' = (v_2, -v_1)$. Отсюда, используя очевидное неравенство

$$a^4 + 2a^2b^2 + b^4 \leq 2(a^4 + b^4),$$

имеем

$$\left(\frac{eh}{cm_\beta} x_1 + \beta v_2 \right)^4 + \left(\frac{eh}{cm_\beta} x_2 - \beta v_1 \right)^4 \geq \frac{1}{2} \left(\left(\frac{eh}{cm_\beta} x_1 + \beta v_2 \right)^2 + \left(\frac{eh}{cm_\beta} x_2 - \beta v_1 \right)^2 \right)^2 > \frac{1}{2} \rho_0^4.$$

Следовательно,

$$f_2^\beta(x, v) = \psi_2^\beta \left(\left(\frac{eh}{cm_\beta} x_1 + \beta v_2 \right)^4 + \left(\frac{eh}{cm_\beta} x_2 - \beta v_1 \right)^4 \right) = 0.$$

Таким образом, $\mathring{f}^\beta(x, v) = 0$ для $|x'| > \delta_0/2$, $|v| \leq \rho/4$.

4. ПОСТРОЕНИЕ СТАЦИОНАРНОГО РЕШЕНИЯ В ВИДЕ ФОРМЫ ПОРЯДКА $2m$

1. Несложно убедиться, что функция

$$f_4^\beta(x, v) = \left(\frac{eh}{cm_\beta} x_1 + \beta v_2 \right)^{2m} + \left(\frac{eh}{cm_\beta} x_2 - \beta v_1 \right)^{2m}$$

удовлетворяет уравнению (3.1). Действительно, подставляя в (3.1) выражения

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathring{f}_5^\beta}{\partial x_1} &= 2m \frac{eh}{cm_\beta} \left(\frac{eh}{cm_\beta} x_1 + \beta v_2 \right)^{2m-1}, & \frac{\partial \mathring{f}_5^\beta}{\partial x_2} &= 2m \frac{eh}{cm_\beta} \left(\frac{eh}{cm_\beta} x_2 - \beta v_1 \right)^{2m-1}, & \frac{\partial \mathring{f}_5^\beta}{\partial x_3} &= 0, \\ \frac{\partial \mathring{f}_5^\beta}{\partial v_1} &= -2m\beta \left(\frac{eh}{cm_\beta} x_2 - \beta v_1 \right)^{2m-1}, & \frac{\partial \mathring{f}_5^\beta}{\partial v_2} &= 2m\beta \left(\frac{eh}{cm_\beta} x_1 + \beta v_2 \right)^{2m-1}, \end{aligned}$$

получим

$$\begin{aligned} &2m \frac{eh}{cm_\beta} v_1 \left(\frac{eh}{cm_\beta} x_1 + \beta v_2 \right)^{2m-1} + 2m \frac{eh}{cm_\beta} v_2 \left(\frac{eh}{cm_\beta} x_2 - \beta v_1 \right)^{2m-1} - \\ &- 2m \frac{eh}{cm_\beta} v_2 \left(\frac{eh}{cm_\beta} x_2 - \beta v_1 \right)^{2m-1} - 2m \frac{eh}{cm_\beta} v_1 \left(\frac{eh}{cm_\beta} x_1 + \beta v_2 \right)^{2m-1} \equiv 0. \end{aligned}$$

Введем четные функции $\psi_m^\beta \in \dot{C}^\infty(\mathbb{R})$ так, что $\psi_m^{-1}(0)=1$, $\psi_m^\beta(\tau) \geq 0$, $\frac{1}{m_{+1}^{3/2}} \psi_m^{+1}\left(\frac{\tau}{m_{+1}^{2m}}\right) = \frac{1}{m_{-1}^{3/2}} \psi_m^{-1}\left(\frac{\tau}{m_{-1}^{2m}}\right)$ ($\tau \in \mathbb{R}$), $\text{supp } \psi_m^{-1} \subset (-\rho_0^2, \rho_0^2)$, где $\rho_0 = (15\rho\delta_0/\delta)$. Поскольку $m_{+1} > m_{-1}$, то $\text{supp } \psi_m^{+1} \subset \left(-\frac{\rho_0^m}{2^{m-1}}, \frac{\rho_0^m}{2^{m-1}}\right)$ и $\psi_m^{+1}(0) > 1$. Функция

$$\mathring{f}_m^\beta(x, v) = \psi_m^\beta \left(\left(\frac{eh}{m_\beta c} x_1 + \beta v_2 \right)^{2m} + \left(\frac{eh}{m_\beta c} x_2 - \beta v_1 \right)^{2m} \right)$$

является решением уравнения (3.1).

2. Докажем теперь, что вектор-функция $\{0, \mathring{f}_1^\beta, \mathring{f}_m^\beta\}$ является стационарным решением задачи (2.1), (2.2), (2.4), удовлетворяющим условиям теоремы (2.1). По построению функция $\mathring{f}^\beta(x, v) = \mathring{f}_1^\beta(x, v) \times \mathring{f}_m^\beta(x, v)$ удовлетворяет уравнению (3.1) и $\sup_{x, v} \mathring{f}^\beta(x, v) \geq \mathring{f}^\beta(0, 0) \geq 2\alpha > 0$. Оста-

ется доказать, что правая часть уравнения (2.5) тождественно равна нулю и $\text{supp } \mathring{f}^\beta \subset Q_{2\delta} \times B_{\rho/4}$. Докажем, что

$$\int_{\mathbb{R}^3} \mathring{f}^{+1}(x, v) dv = \int_{\mathbb{R}^3} \mathring{f}^{-1}(x, v) dv.$$

Аналогично предыдущему случаю, сделаем замены переменных $y = \frac{eh}{c} x$ и $w = m_{+1}(v_2, -v_1, v_3)$.

Тогда, принимая во внимание равенства $\frac{1}{m_{+1}^{3/2}} \psi_1^{+1}\left(\frac{\tau}{m_{+1}^2}\right) = \frac{1}{m_{-1}^{3/2}} \psi_1^{-1}\left(\frac{\tau}{m_{-1}^2}\right)$, $\frac{1}{m_{+1}^{3/2}} \psi_m^{+1}\left(\frac{\tau}{m_{+1}^{2m}}\right) = \frac{1}{m_{-1}^{3/2}} \psi_m^{-1}\left(\frac{\tau}{m_{-1}^{2m}}\right)$ и вводя переменные $x = \frac{c}{eh} y$ и $v = \frac{1}{m_{-1}}(w_2, -w_1, w_3)$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^3} \mathring{f}^{+1}(x, v) dv &= \int_{\mathbb{R}^3} \psi_1^{+1}(|v|^2) \psi_m^{+1} \left(\left(\frac{eh}{m_{+1}c} x_1 + v_2 \right)^{2m} + \left(\frac{eh}{m_{+1}c} x_2 - v_1 \right)^{2m} \right) dv = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{m_{+1}^3} \psi_1^{+1} \left(\frac{|w|^2}{m_{+1}^2} \right) \psi_m^{+1} \left(\frac{(y_1 + w_1)^{2m} + (y_2 + w_2)^{2m}}{m_{+1}^{2m}} \right) dw = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \frac{1}{m_{-1}^3} \psi_1^{-1} \left(\frac{|w|^2}{m_{-1}^2} \right) \psi_m^{-1} \left(\frac{(y_1 + w_1)^{2m} + (y_2 + w_2)^{2m}}{m_{-1}^{2m}} \right) dw = \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \psi_1^{-1}(|v|^2) \psi_m^{-1} \left(\left(\frac{eh}{m_{-1}c} x_1 - v_2 \right)^{2m} + \left(\frac{eh}{m_{-1}c} x_2 + v_1 \right)^{2m} \right) dv = \int_{\mathbb{R}^3} \mathring{f}^{-1}(x, v) dv. \end{aligned}$$

Докажем теперь, что $\text{supp } \mathring{f}^\beta \subset Q_{2\delta} \times B_{\rho/4}$. Действительно если $|v| > \rho_1/4$, то по построению $\mathring{f}_1^\beta(x, v) = \psi_1^\beta(|v|^2) = 0$. Следовательно, $\mathring{f}^\beta(x, v) = 0$ для $|v| > \rho_1/4$. Пусть $B_{\delta_0}(g)$ — круг наибольшего радиуса такой, что $B_{\delta_0}(g) \subset G_{2\delta}$. Не ограничивая общности, будем считать, что $g = 0$. Если $|x'| > \delta_0/2$, $|v| \leq \rho_1/4$, то из условия 2.1 и неравенства $\delta_0/\delta > 1$ вытекает, что

$$\left| \frac{eh}{m_\beta c} x' + \beta z' \right| \geq \frac{eh}{m_\beta c} |x'| - |z'| > \frac{16c\rho m_\beta e\delta_0}{e\delta} - \rho > \frac{15\rho\delta_0}{\delta},$$

где $z' = (v_2, -v_1)$. Отсюда, используя очевидное неравенство

$$a^{2m} + b^{2m} \geq \frac{1}{2^{m-1}}(a^2 + b^2)^m,$$

имеем

$$\left(\frac{eh}{cm_\beta} x_1 + \beta v_2 \right)^{2m} + \left(\frac{eh}{cm_\beta} x_2 - \beta v_1 \right)^{2m} \geq \frac{1}{2^{m-1}} \left(\left(\frac{eh}{cm_\beta} x_1 + \beta v_2 \right)^2 + \left(\frac{eh}{cm_\beta} x_2 - \beta v_1 \right)^2 \right)^m > \frac{1}{2^{m-1}} \rho_0^m.$$

Следовательно,

$$f_m^\beta(x, v) = \psi_2^\beta \left(\left(\frac{\beta e h}{c m_\beta} x_1 + \beta v_2 \right)^{2m} + \left(\frac{\beta e h}{c m_\beta} x_2 - \beta v_1 \right)^{2m} \right) = 0.$$

Таким образом, $f^\beta(x, v) = 0$ для $|x'| > \delta_0/2$, $|v| \leq \rho/4$.

Автор глубоко благодарен своему научному руководителю А. Л. Скубачевскому за постановку задачи и ряд ценных советов, а также В. П. Бурскому и А. Е. Шишкову за полезные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Арсеньев А. А.* Существование в целом слабого решения системы уравнений Власова// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1975. — 15, № 1. — С. 136–147.
2. *Веденяпин В. В.* Краевая задача для стационарных уравнений Власова// Докл. АН СССР. — 1986. — 290, № 4. — С. 777–780.
3. *Веденяпин В. В.* О классификации стационарных решений уравнения Власова на торе и граничная задача// Докл. РАН. — 1992. — 323, № 6. — С. 1004–1006.
4. *Власов А. А.* О вибрационных свойствах электронного газа// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 1938. — 8, № 3. — С. 291–318.
5. *Добрушин Р. Л.* Уравнения Власова// Функциональный анализ и его приложения. — 1979. — 13, № 2. — С. 48–58.
6. *Козлов В. В.* Обобщенное кинетическое уравнение Власова// Усп. мат. наук. — 2008. — 63, № 4. — С. 93–130.
7. *Маслов В. П.* Уравнения самосогласованного поля// Итоги науки и техн. Современ. пробл. мат. — 1978. — 11. — С. 153–234.
8. *Похожаев С. И.* О стационарных решениях уравнений Власова—Пуассона// Дифф. уравн. — 2010. — 46, № 4. — С. 527–534.
9. *Скубачевский А. Л.* Об однозначной разрешимости смешанных задач для системы уравнений Власова—Пуассона в полупространстве// Докл. АН СССР. — 2012. — 443, № 4. — С. 431–434.
10. *Скубачевский А. Л.* Смешанные задачи для уравнений Власова—Пуассона в полупространстве// Тр. МИАН. — 2013. — 283. — С. 204–232.
11. *Скубачевский А. Л.* Уравнения Власова—Пуассона для двухкомпонентной плазмы в однородном магнитном поле// Усп. мат. наук. — 2014. — 69, № 2. — С. 107–148.
12. *Batt J.* Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics// J. Differ. Equ. — 1977. — 25, № 3. — С. 342–364.
13. *Batt J., Fabian K.* Stationary solutions of the relativistic Vlasov—Maxwell system of plasma physics// Chinese Ann. Math. Ser. B. — 1993. — 14, № 3. — С. 253–278.
14. *Batt J., Faltenbacher W., Horst E.* Stationary spherically symmetric models in stellar dynamics// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1986. — 93, № 2. — С. 159–183.
15. *Braasch P.* Semilineare elliptische Differentialgleichungen und das Vlasov-Maxwell-System. — PhD. Thesis, München, 1997.
16. *DiPerna R. J., Lions P. L.* Global weak solutions of Vlasov—Maxwell systems// Commun. Pure Appl. Math. — 1989. — 42, № 6. — С. 729–757.
17. *Greengard C., Raviart P.-A.* A boundary value problem for the stationary Vlasov—Poisson equations: the plane diode// Commun. Pure Appl. Math. — 1990. — 43, № 4. — С. 473–507.
18. *Guo Y.* Regularity for the Vlasov equations in a half space// Indiana Univ. Math. J. — 1994. — 43, № 1. — С. 255–320.
19. *Pfaffelmoser K.* Global classical solutions of the Vlasov—Poisson system in three dimensions for general initial data// J. Differ. Equ. — 1992. — 95, № 2. — С. 281–303.
20. *Rein G.* Existence of stationary, collisionless plasmas in bounded domains// Math. Methods Appl. Sci. — 1992. — 15, № 5. — С. 365–374.
21. *Schaffer J.* Global existence of smooth solutions to the Vlasov—Poisson system in three dimensions// Commun. Part. Differ. Equ. — 1991. — 16, № 8-9. — С. 1313–1335.
22. *Skubachevskii A. L.* Nonlocal elliptic problems in infinite cylinder and applications// Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S. — 2016. — 9, № 3. — С. 847–868.
23. *Weckler J.* On the initial-boundary-value problem for the Vlasov—Poisson system: existence of weak solutions and stability// Arch. Ration. Mech. Anal. — 1995. — 130, № 2. — С. 145–161.

Ю. О. Беляева

Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

E-mail: yilia-b@yandex.ru

UDC 517.9

Stationary Solutions of Vlasov Equations for High-temperature Two-component Plasma

© 2016 Yu. O. Belyaeva

Abstract. We consider the first mixed problem for the Vlasov–Poisson equations in infinite cylinder. This problem describes evolution of density of distribution for ions and electrons in a high-temperature plasma in the presence of an outer magnetic field. We construct stationary solutions of the Vlasov–Poisson system of equations with the trivial potential of the self-consistent electric field describing two-component plasma in infinite cylinder such that their supports are located in a distance from the boundary of the domain.

REFERENCES

1. A. A. Arsen'ev, "Sushchestvovanie v tselom slabogo resheniya sistemy uravneniy Vlasova" [Existence in the large of a weak solution of Vlasov's system of equations], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 1975, **15**, No. 1, 136–147.
2. V. V. Vedenyapin, "Kraevaya zadacha dlya statsionarnykh uravneniy Vlasova" [Boundary value problems for a stationary Vlasov equation], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1986, **290**, No. 4, 777–780.
3. V. V. Vedenyapin, "O klassifikatsii statsionarnykh resheniy uravneniya Vlasova na tore i granichnaya zadacha" [Classification of stationary solutions of the Vlasov equation on a torus and a boundary value problem], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 1992, **323**, No. 6, 1004–1006.
4. A. A. Vlasov, "O vibratsionnykh svoystvakh elektronnoy gaza" [On vibrational properties of electronic gas], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 1938, **8**, No. 3, 291–318.
5. R. L. Dobrushin, "Uravneniya Vlasova" [Vlasov equations], *Funkts. analiz i ego prilozh.* [Funct. Anal. Appl.], 1979, **13**, No. 2, 48–58.
6. V. V. Kozlov, "Obobshchennoe kineticheskoe uravnenie Vlasova" [The generalized Vlasov kinetic equation], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2008, **63**, No. 4, 93–130.
7. V. P. Maslov, "Uravneniya samosoglasovannogo polya" [Equations of the self-consistent field], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. mat.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math.], 1978, **11**, 153–234.
8. S. I. Pokhozhaev, "O statsionarnykh resheniyakh uravneniy Vlasova–Puassona" [On stationary solutions of the Vlasov–Poisson equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2010, **46**, No. 4, 527–534.
9. A. L. Skubachevskii, "Ob odnoznachnoy razreshimosti smeshannykh zadach dlya sistemy uravneniy Vlasova–Puassona v poluprostranstve" [On unique solvability of mixed problems for the Vlasov–Poisson system of equations in a half-space], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 2012, **443**, No. 4, 431–434.
10. A. L. Skubachevskii, "Smeshannye zadachi dlya uravneniy Vlasova–Puassona v poluprostranstve" [Mixed problems for the Vlasov–Poisson system of equations in a half-space], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2013, **283**, 204–232.
11. A. L. Skubachevskii, "Uravneniya Vlasova–Puassona dlya dvukomponentnoy plazmy v odnorodnom magnitnom pole" [The Vlasov–Poisson equations for two-component plasma in homogeneous magnetic field], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2014, **69**, No. 2, 107–148.
12. J. Batt, "Global symmetric solutions of the initial value problem of stellar dynamics," *J. Differ. Equ.*, 1977, **25**, No. 3, 342–364.
13. J. Batt and K. Fabian, "Stationary solutions of the relativistic Vlasov–Maxwell system of plasma physics," *Chinese Ann. Math. Ser. B*, 1993, **14**, No. 3, 253–278.
14. J. Batt, W. Faltenbacher, and E. Horst, "Stationary spherically symmetric models in stellar dynamics," *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1986, **93**, No. 2, 159–183.

15. P. Braasch, *Semilineare elliptische Differentialgleichungen und das Vlasov–Maxwell-System*, PhD. Thesis, München, 1997.
16. R. J. DiPerna and P. L. Lions, “Global weak solutions of Vlasov–Maxwell systems,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1989, **42**, No. 6, 729–757.
17. C. Greengard and P.-A. Raviart, “A boundary value problem for the stationary Vlasov–Poisson equations: the plane diode,” *Commun. Pure Appl. Math.*, 1990, **43**, No. 4, 473–507.
18. Y. Guo, “Regularity for the Vlasov equations in a half space,” *Indiana Univ. Math. J.*, 1994, **43**, No. 1, 255–320.
19. K. Pfaffelmoser, “Global classical solutions of the Vlasov–Poisson system in three dimensions for general initial data,” *J. Differ. Equ.*, 1992, **95**, No. 2, 281–303.
20. G. Rein, “Existence of stationary, collisionless plasmas in bounded domains,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 1992, **15**, No. 5, 365–374.
21. J. Schaffer, “Global existence of smooth solutions to the Vlasov–Poisson system in three dimensions,” *Commun. Part. Differ. Equ.*, 1991, **16**, No. 8-9, 1313–1335.
22. A. L. Skubachevskii, “Nonlocal elliptic problems in infinite cylinder and applications,” *Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. S*, 2016, **9**, No. 3, 847–868.
23. J. Weckler, “On the initial-boundary-value problem for the Vlasov–Poisson system: existence of weak solutions and stability,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1995, **130**, No. 2, 145–161.

Yu. O. Belyaeva

RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st., 117198 Moscow, Russia

E-mail: yilia-b@yandex.ru

ФИЗИЧЕСКАЯ ИНТЕРПРЕТАЦИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИ СТРОГОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДИФРАКЦИИ ПРИ ПОМОЩИ ЭВРИСТИЧЕСКИХ ФОРМУЛ

© 2016 г. **М. В. ВЕСНИК**

Аннотация. Предложена новая методика построения эвристических формул, описывающих решение задачи дифракции. Формулы основаны на физических принципах и позволяют проводить интерпретацию результатов математически строгого решения. Поскольку эвристические формулы обладают высокими быстродействием и точностью, их также можно использовать совместно с любыми строгими подходами или результатами эксперимента для существенного повышения эффективности решения практических задач, связанных с применением теории дифракции.

СОДЕРЖАНИЕ

| | | |
|-----|--|----|
| 1. | Введение | 32 |
| 2. | Эвристические подходы. ГТД и МКВ | 33 |
| 3. | Новый эвристический подход МБК | 34 |
| 4. | Интегральное представление на основе метода обобщенного эйконала | 34 |
| 5. | Трехмерное решение в приближении физической оптики | 39 |
| 6. | Анализ дифракционных коэффициентов | 42 |
| 7. | Базовые компоненты МБК | 45 |
| 8. | Точность и эффективность ГТД, МКВ и МБК | 46 |
| 9. | Примеры применения МБК | 47 |
| 10. | Заключение | 47 |
| | Список литературы | 48 |

1. ВВЕДЕНИЕ

Теория дифракции — междисциплинарная наука, находящаяся между физикой и математикой. Исторически теория дифракции имела сменяющие друг друга периоды, в течение которых развивалась либо как раздел физики, либо как раздел математики. В середине 20-го века появились две эвристические теории: геометрическая теория дифракции (ГТД) [32,33] и метод краевых волн (МКВ) [25–27], сыгравшие важную роль при решении ряда практических задач дифракции на объектах большого размера, для которых было невозможно получить математически строгие решения. Недавно отмечали 50-летний юбилей этих теорий [36].

В настоящее время также есть ряд практических проблем, которые представляют значительный интерес и связаны с решениями задач дифракции. Это дифракция на объектах с пониженной радиолокационной заметностью, распространение радиоволн в городских условиях, дифракция на кристаллах, локация сейсмическими волнами и т. п.

При решении практической проблемы, связанной, например, с маскировкой или распознаванием объекта радиолокации, важно иметь эффективный (точный и быстродействующий) способ получения решения задачи дифракции на таком объекте. При этом строгие аналитические или численные решения не всегда являются лучшим вариантом, поскольку могут быть громоздкими или недостаточно быстродействующими.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки РФ по Программе повышения конкурентоспособности РУДН «5-100» среди ведущих мировых научно-образовательных центров на 2016–2020 гг.

Данная статья посвящена описанию нового подхода (метода базовых компонентов — МБК) в физической теории дифракции (ФТД). Иногда под ФТД понимают то же, что и под МКВ. Но термин ФТД имеет и более широкое толкование. Его можно применять к любому подходу теории дифракции, основанному не на строгих математических, а на физических принципах. Это метод физической оптики (ФО), уже упомянутые ГТД и МКВ, а также другие методы.

2. Эвристические подходы. ГТД и МКВ

Математически строгое решение в целом отражает комплексное воздействие на решение всех параметров постановки задачи. Вид строгих аналитических формул зависит от способа получения решения и может, например, представлять собой ряд из специальных функций, каждая из которых зависит от всех параметров задачи [4, 19, 24, 35]. Разобраться во влиянии отдельных факторов сложно. Численные решения вообще не имеют аналитических выражений.

В отличие от математически строгих подходов, эвристические формулы основаны на физических принципах [1, 30, 34]. Применение эвристических формул позволяет выразить зависимость от физических характеристик в наиболее компактной и понятной форме. Поэтому наличие математически строгого решения не снимает необходимости получать аналитические эвристические формулы, которые помогают разобраться в физике решения.

Зависимость от условий задачи компактно входит в эвристические формулы в явном виде. В число условий задачи входят: геометрия задачи, форма рассеивателя, граничные условия. С физической точки зрения граничные условия удобно описывать коэффициентами отражения и прохождения R и T , наглядно описывающими взаимодействие плоской волны с безграничной плоской поверхностью. К задаче физической интерпретации результатов относится выявление факторов влияния условий задачи на те или иные характеристики решения.

Эвристические решения строятся на основе математически строгих решений простейших задач, на основе базовых физических принципов электродинамики и теории волн (таких как принцип локальности поля, принцип дополнительности и т. п. [5, 21, 28]), а также на основе интуиции и опыта. Точность эвристических решений проверяется верификацией, т. е. сравнением со строгим решением. Если размеры исследуемого рассеивателя не позволяют получить строгое решение, эвристическую методику можно отработать на рассеивателе меньшего размера, а затем применить для рассеивателя большего размера.

Иногда эвристические формулы получают строгое математическое доказательство, как это произошло с классическим решением Зоммерфельда для дифракции на клине. Вначале интегральное представление для этого решения было получено эвристическим способом, а позже было доказано при помощи разложения по цилиндрическим функциям [25].

Современная тенденция развития теории дифракции заключается в том, что решения аналитических задач усложняются, в то время как возможность получения всевозможных численных решений увеличивается (см., например, [3, 20]).

При построении эвристических формул большую роль играют строгие эталонные решения для полубесконечных рассеивателей. На таких решениях основаны ГТД и МКВ.

Подходы ГТД и МКВ берут за основу строгое двумерное решение для полубесконечного рассеивателя. В ГТД постулируют, что поле вдали от трехмерного рассеивателя определяется полем области стационарной фазы на кромке. Под областью стационарной фазы понимается область точек на кромке, которые дают в рассеянное поле вклад с постоянной фазой. В качестве решения берут эталонную задачу рассеяния на полубесконечном двумерном рассеивателе. В МКВ постулируют, что поле на поверхности трехмерного рассеивателя равно полю в окрестности кромки для соответствующей двумерной эталонной задачи. В приближении ГТД трехмерное решение равно сумме вкладов от точек стационарной фазы, а в приближении МКВ трехмерное решение равно интегралу от эвристически найденного поля на поверхности рассеивателя. Как в ГТД, так и в МКВ в течение всего процесса решения практической задачи используют эталонное решение для двумерного рассеивателя. Если это решение численное, то должны быть постоянно задействованы необходимая вычислительная техника и соответствующие программное обеспечение.

3. НОВЫЙ ЭВРИСТИЧЕСКИЙ ПОДХОД МБК

В монографии [46], основанной на результатах многолетней работы автора [6–17, 39–45], предложен ряд подходов, позволяющих получать эвристические формулы задач дифракции на рассеивателях в форме многоугольников и многогранников. Отличия этих подходов от известных ГТД и МКВ дают основание выделить совокупность новых подходов в отдельный метод — метод базовых компонентов (МБК).

Предлагаемый новый подход МБК отличается от ГТД и МКВ. В МБК при построении трехмерного решения за основу берут базовые компоненты из заранее подготовленного набора. Базовые компоненты — это фрагменты формул, найденные из анализа математически строгих аналитических решений простейших задач. Точность решений МБК проверяется при помощи верификации, т. е. сравнения формул со строгим решением. При этом может осуществляться и «настройка» решения, т. е. его видоизменение с целью повышения точности. В дальнейшем формулы МБК используют автономно от верификационного решения.

Базовые компоненты, характеризующие зависимость от геометрии задачи, можно выделить из математически строгих аналитических формул для наиболее простых постановок задачи. Строгое трехмерное решение получено в приближении физической оптики для плоского идеально проводящего рассеивателя при выполнении условия дальней зоны. Строгое двумерное решение получено для идеально проводящего клина. Дифракционные коэффициенты также получены для идеально проводящего клина и в приближении физической оптики. Решения более сложных задач строятся на основе комбинирования базовых компонентов из подготовленного набора.

С целью учета влияния граничных условий на поверхности рассеивателя в МБК применяют «одномерные» решения для коэффициентов отражения и прохождения R и T , которые описывают взаимодействие плоской волны с безграничной плоской поверхностью. Поэтому МБК объясняет поведение двумерного решения для бесконечной кромки, в отличие от ГТД и МКВ, которые принимают это решение в качестве условия задачи. В связи с этим можно утверждать, что для интерпретации строгих результатов при помощи эвристических формул МБК подходит лучше, чем ГТД и МКВ.

В основе МБК лежат два решения.

1. Интегральное представление решения (4.15), полученное на основе МОЭ [7–10, 41–43, 46]. Оно является обобщением интегрального представления Зоммерфельда [29, 37, 38] для рассеивателей произвольной формы.
2. Решение задачи рассеяния плоской электромагнитной волны на идеально проводящей плоской пластине в приближении физической оптики при выполнении условия дальней зоны (5.5) [31, 39, 40, 46]. Без ограничения общности мы рассматриваем пластину многоугольной формы, поскольку на ней можно лучше выявить все особенности решения.

4. ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ НА ОСНОВЕ МЕТОДА ОБОБЩЕННОГО ЭЙКОНАЛА

Рассмотрим электромагнитную волну P вида

$$P = A \exp(iS), \quad (4.1)$$

распространяющуюся в двумерном безграничном пространстве. В формуле (4.1) P , A и S зависят от координат, A — амплитуда волны, S — функция эйконала, i — мнимая единица.

Пусть P удовлетворяет волновому уравнению вида

$$\Delta_z P + k^2 P = 0, \quad \Delta_z = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \quad (\text{или } \Delta_{kz} P + P = 0, \quad \Delta_{kz} = \frac{\partial^2}{\partial (kx)^2} + \frac{\partial^2}{\partial (ky)^2}), \quad (4.2)$$

где $k = 2\pi/\lambda$ — волновое число.

Внесем в рассматриваемое пространство двумерный идеально проводящий полубесконечный рассеиватель, ограниченный поверхностью S_0 . С точки зрения геометрической оптики этот рассеиватель разделит падающее поле на две составляющие: падающую и отраженную, возникнут две границы «свет—тень». Требуется найти рассеянное поле.

Как известно, сказанное выше означает, что мы ищем решение краевой задачи вида $U = u + P$, где U — полное поле, u — рассеянное поле, удовлетворяющее:

1. волновому уравнению (4.2);
2. граничным условиям $U = 0$ или $dU/dn = 0$ на поверхности S_0 ;
3. условиям регулярности $u = O(r^{-1/2})$ и излучения $\partial u/\partial r - iku = o(r^{-1/2})$ при $kr \rightarrow \infty$;
4. условию Мейкснера на ребре

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \rho \operatorname{grad} u = 0,$$

где ρ — радиус небольшой окружности, охватывающей ребро.

Метод обобщенного эйконала представляет собой способ построения интегральных представлений, на основе которых можно построить решение краевой задачи.

Рассмотрим конформное отображение $kZ(w)$ области w , представляющей собой верхнюю полуплоскость комплексного переменного, на область z , внешнюю по отношению к рассеивателю:

$$kZ = kZ(w), \quad r_z = r_z(w), \quad \varphi_z = \varphi_z(w), \quad (4.3)$$

где r_z и φ_z — полярные координаты точки в области z , являющиеся функциями комплексной переменной w .

Конформное отображение $kZ(w)$ выбираем таким, чтобы между точками областей z и w существовало взаимно однозначное соответствие. Действительная ось области w соответствует границе рассеивателя в области z .

В области w функция P удовлетворяет волновому уравнению с переменным волновым числом

$$\Delta_w P + k^2 |dz/dw|^2 P = 0, \quad (4.4)$$

однако можно выделить семейство кривых

$$k |dz/dw| = |d(kz)/dw| = |d| = r_d = \operatorname{const}, \quad (4.5)$$

на которых переменное волновое число $k |dz/dw|$ постоянно. Назовем термином «кривая r_d » ту кривую из семейства $r_d = \operatorname{const}$, на которой $r_d = 1 = r_{d0}$, а волновое число равно первоначальному волновому числу.

Для построения интегрального представления решения воспользуемся методикой, которую применил Зоммерфельд [29, 37, 38]. Решение краевой задачи для рассеянного поля представим в виде интеграла по отрезкам замкнутого контура в области комплексного переменного. В подынтегральное выражение интегрального представления включим функцию P^c , представляющую собой аналитическое продолжение функции падающего поля P с какой-либо из кривых r_{d0} области w в область комплексного переменного \hat{w} .

Предположим, что существует замена переменной $w \rightarrow \hat{w}$, удовлетворяющая условиям:

- а) на кривой r_{d0} должно выполняться $\hat{w} = w$, $P^c(\hat{w}) = P(w)$;
- б) в области w функция $P(w)$ должна удовлетворять волновому уравнению (4.4);
- в) в области \hat{w} функция $P^c(\hat{w})$ должна быть аналитической.

При подстановке координат переменной \hat{w} вместо координат w в функции P и S меняются как характер зависимости этих функций от координат, так и их свойства. Функция эйконала $S(w)$ преобразуется в функцию обобщенного эйконала $S^c(\hat{w})$, это преобразование дает название всему методу МОЭ. Функция геометрической оптики $P(w)$ преобразуется в обобщенную функцию геометрической оптики $P^c(\hat{w})$.

Рассмотрим обобщенную функцию геометрической оптики, которая на кривой r_{d0} в области z зависит от действительных переменных и имеет вид (4.1), а в текущей точке интегрирования вспомогательной области \hat{w} равна

$$P^c(\hat{w}) = A(\hat{w}) \exp[iS^c(\hat{w})]. \quad (4.7)$$

Рассмотрим замкнутый контур, охватывающий освещенные участки области \hat{w}_{12} . Под освещенными участками понимаются области присутствия на r_{d0} (в смысле геометрической оптики) функции P^c , под теньевыми — области ее отсутствия. Тогда при помощи теоремы Коши о вычетах можно построить интегральное представление функции $P^c(\hat{w})$ в точке наблюдения w_0 на кривой r_{d0} , которая находится на пересечении областей \hat{w}_{12} и w_{12} (т. е. одновременно находится в

областях \hat{w}_{12} и w_{12}):

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} = K \cdot P^c(w_0), \quad (4.8)$$

где $K = 1$, если w_0 находится внутри контура, и $K = 0$, если вне его.

Область \hat{w}_{12} можно построить на кривой r_{d0} при помощи аналитического продолжения угловой переменной φ_w в комплексную область, а функцию P^c можно построить, преобразовав определенным образом функцию P .

Пусть в области \hat{w}_{12} существуют участки, на которых $P^c(\hat{w})$ убывает при увеличении волнового числа k . Назовем эти участки области \hat{w}_{12} «участками сходимости». Фрагменты контура интегрирования проходят через седловые точки по участкам сходимости $s1$ и $s2$.

Для области с двумя участками сходимости $s1$ и $s2$ получим:

$$K \cdot P^c(w_0) = \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_C \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} - \int_{s1} \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} + \int_{s2} \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} \right], \quad (4.9)$$

где C — оставшаяся после выделения $s1$ и $s2$ часть замкнутого контура интегрирования.

Обозначив в (4.9) сумму интегралов по сходящимся участкам $s1$ и $s2$ как $v(w_0)$, а интеграл по оставшейся части C как

$$V(w_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w},$$

получим выражение:

$$V(w_0) = K \cdot P^c(w_0) + v(w_0) = K \cdot P^c(w_0) + \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{s1} \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} - \int_{s2} \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} \right]. \quad (4.10)$$

Знаки интегралов по $s1$ и $s2$ отличаются, поскольку направления прохода по этим участкам по отношению к центру координат противоположны.

Применяя метод стационарной фазы, вычислим интеграл вида (4.10) [46]. Пусть существует седловая точка \hat{w}_{sm} функции $S^c[\hat{w}(r_{w0})]$, в которой $[S^c(\hat{w}_{sm})]' = 0$, $[S^c(\hat{w}_{sm})]'' \neq 0$. Тогда для преобразования соответствующего интеграла можно совершить шаги в соответствии с методикой, примененной в [25]. При этом несингулярная часть подынтегральной функции разлагается в ряд по степеням переменной интегрирования, после чего первый член этого ряда удерживается и выносится за знак интеграла

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{sm} \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} &= \frac{\exp[iS^c(w_0)]}{2\pi i} \int_{sm} \frac{A(\hat{w}) [S^c(\hat{w}) - S^c(w_0)] \exp[iS^c(\hat{w}) - iS^c(w_0)]}{\hat{w} - w_0 S^c(\hat{w}) - S^c(w_0)} d\hat{w} \approx \\ &\approx \frac{A(\hat{w}_{sm}) \exp[iS^c(w_0)]}{2\pi i} \frac{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}{\hat{w}_{sm} - w_0} \int_{sm} \frac{\exp[iS^c(\hat{w}) - iS^c(w_0)]}{S^c(\hat{w}) - S^c(w_0)} d\hat{w}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Записав в окрестности седловой точки \hat{w}_{sm} разность эйконалов при помощи разложения в ряд Тейлора функции $S^c(\hat{w})$, где $[S^c(\hat{w}_{sm})]' = 0$, $[S^c(\hat{w}_{sm})]'' \neq 0$:

$$S^c(\hat{w}) - S^c(\hat{w}_0) \approx S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(\hat{w}_0) + [S^c(\hat{w}_{sm})]'' \frac{(\hat{w} - \hat{w}_{sm})^2}{2} + \dots, \quad (4.12)$$

можно, ограничившись в разложении (4.12) двумя первыми членами, вычислить интеграл из правой части выражения (4.11) при помощи метода стационарной фазы:

$$\begin{aligned} \int_{sm} \frac{\exp[iS^c(\hat{w}) - iS^c(w_0)]}{S^c(\hat{w}) - S^c(w_0)} d\hat{w} &= \int_{-\infty}^{\infty} d\hat{w} i \int_{\infty}^1 \exp[iS^c(\hat{w})t - iS^c(w_0)t] dt = \\ &= i \int_{\infty}^1 \exp[-iS^c(w_0)t] dt \int_{-\infty}^{\infty} \exp[iS^c(\hat{w})t] d\hat{w} = \end{aligned}$$

$$= \frac{2i\sqrt{2\pi i}}{\sqrt{[S^c(\hat{w}_{sm})]'' [S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)]}} \int_{\infty\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}^{\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}} \exp(iq^2) dq.$$

При выводе были использованы выражения

$$\frac{\exp(iz^2)}{z^2} = i \int_{\infty}^1 \exp(iz^2 t) dt,$$

а также

$$\int_{-\infty}^{\infty} \exp\left\{\frac{i}{2}[S^c(\hat{w}_{sm})]''(\hat{w} - \hat{w}_{sm})^2 t\right\} d\hat{w} = \sqrt{\frac{2\pi i}{[S^c(\hat{w}_{sm})]'' t}}.$$

Таким образом, доказана справедливость выражения

$$\int_{sm} \frac{\exp[iS^c(\hat{w}) - iS^c(w_0)]}{S^c(\hat{w}) - S^c(w_0)} d\hat{w} = \frac{2i\sqrt{2\pi i}}{\sqrt{[S^c(\hat{w}_{sm})]'' [S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)]}} \int_{\infty\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}^{\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}} \exp(iq^2) dq. \quad (4.13)$$

Подставляя (4.13) в (4.11), получим:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{sm} \frac{P^c(\hat{w})}{\hat{w} - w_0} d\hat{w} \approx \frac{2iA(\hat{w}_{sm}) \exp[iS^c(w_0)] \sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}{(\hat{w}_{sm} - w_0) \sqrt{2\pi i [S^c(\hat{w}_{sm})]''}} \int_{\infty\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}^{\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}} \exp(iq^2) dq, \quad (4.14)$$

где знак интеграла берется с учетом направления прохода по контуру в окрестности \hat{w}_{sm} . В случае двух седловых точек (одна граница «свет—тьень» для отраженного поля и одна — для прошедшего) получаем (см. [46]):

$$v(w_0) \cong \sum_{m=1,2} \frac{P(\hat{w}_{sm})}{(\hat{w}_{sm} - w_0) \sqrt{2\pi i [S^c(\hat{w}_{sm})]''}} \frac{2i\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}{\exp[iS^c(\hat{w}_{sm}) - iS^c(w_0)]} \int_{\infty\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}^{\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}} \exp(iq^2) dq, \quad (4.15)$$

справедливое для рассеивателей сложной формы.

Вдали от границы тени произведение двух последних множителей в (4.15)

$$v(w_0) \approx \sum_{m=1,2} \frac{P(\hat{w}_{sm})}{(\hat{w}_{sm} - w_0) \sqrt{2\pi i [S^c(\hat{w}_{sm})]''}}. \quad (4.16)$$

При получении выражения (4.15) мы предположили, что замена переменной $w \rightarrow \hat{w}$, удовлетворяющая условиям (4.6), уже проведена. Однако для рассеивателя произвольной формы для рассеянного поля формулу (4.15) пока удастся получить лишь эвристически (см. [46]). В явном виде выражение для замены переменной $w \rightarrow \hat{w}$, удовлетворяющей условиям (4.6), удастся получить для рассеивателей простой формы, когда система координат позволяет провести разделение переменной. Например, в случае дифракции на клине с внешним углом πn можно получить (см. [46]):

$$kz(w) = \frac{1}{n} w^n, \quad \frac{\partial}{\partial w} [kz(w)] = w^{n-1}. \quad (4.17)$$

Кривая r_{d0} в случае клиновидного рассеивателя представляет собой фрагмент окружности $|w| = 1$. Поскольку точка наблюдения w_0 находится на окружности r_{d0} , то $r_{w0} = |w_0| = 1$. В области z на этой окружности выполняется $kr_{z0} = 1/n$.

Пусть (r_{z0}, φ_{z0}) и (r_{w0}, φ_{w0}) — координаты точки наблюдения в областях z и w соответственно. Выберем функцию P^c следующим образом: зафиксируем радиальную координату $r_z = r_{z0}$, а угловую координату сделаем комплексной, $\varphi_z \rightarrow \varphi_z^c$. Тогда получим $P^c = \exp[-ikz_{z0} \cos(\varphi_z^c - \varphi_0)]$. Для установления зависимости $P^c(\hat{w})$ следует установить связь между переменными \hat{w} и φ_z^c .

Замена переменной (4.6) для клина (4.17) имеет вид $w \rightarrow \hat{w}(r_{w0})$ (или $\varphi_w \rightarrow \varphi_w^c$) (см. [46]):

$$w = r_w \exp(i\varphi_w), \quad \hat{w}(r_{w0}) = r_{w0} \exp(i\varphi_w^c) = \hat{r}_w \exp(i\varphi_w),$$

$$\varphi_w^c = i \ln(r_{w0}) - i \ln[\hat{w}(r_{w0})] = i \ln(r_{w0}) - i \ln(\hat{r}_w) + \varphi_w = -i \ln\left(\frac{\hat{r}_w}{r_{w0}}\right) + \varphi_w, \quad (4.18)$$

где $r_{w0} = |w_0|$, w_0 — точка наблюдения, которая всегда находится на кривой r_{d0} .

Функция P зависит от переменных (r_z, φ_z) , причем $r_z = |z|$, $\varphi_z = \arg(z)$. Преобразования такого рода не являются аналитическими, поэтому функция P удовлетворяет волновому уравнению Гельмгольца (4.2), а не уравнению Лапласа. Если зафиксировать $r_z = r_{z0} = r_{w0}^n / (kn)$, положив $r_w = r_{w0}$, то на этой окружности получим

$$\varphi_z^c = -i \ln(z) + i \ln(r_{z0}) = -i \ln\left(\frac{w^n}{kn}\right) + i \ln\left(\frac{r_{w0}^n}{kn}\right) = n\varphi_w^c, \quad (4.19)$$

при этом $P^c(\hat{w})$ — аналитическая функция от \hat{w} (см. [46]) и удовлетворяет условиям (4.6).

Замена переменной (4.18) в интегральном представлении (4.15) приводит к результату, который в точности совпадает с интегральным представлением Зоммерфельда. В классических работах Зоммерфельда [29, 37, 38] доказано, что функция, аналогичная $V(w_0)$ (4.10), характеризует полное поле. В книге [46] приведена общая формула для поля $V(\varphi)$ в точке наблюдения (r, φ) , возбужденного источником, находящимся в точке (r_0, φ_0) и рассеянного идеально проводящим клином с внешним углом раствора πn при нормальном падении на кромку ТН- или ТЕ-поляризованной электромагнитной волны:

$$\begin{aligned} V(\varphi) &= v(\varphi - \varphi_0) - v(\varphi + \varphi_0) \quad (TH), \\ V(\varphi) &= v(\varphi - \varphi_0) + v(\varphi + \varphi_0) \quad (TE), \end{aligned} \quad (4.20)$$

где

$$v(\psi) \cong \sum_{m=1,2} \frac{P(w_{sm})}{\sqrt{2\pi i \frac{rr_0}{r+r_0}}} \frac{\frac{i}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi}{n}} \frac{2i\sqrt{S(w_{sm}) - S(\psi)}}{\exp[iS(w_{sm}) - iS(\psi)]} \int_{\infty\sqrt{S(w_{sm})-S(\psi)}}^{\sqrt{S(w_{sm})-S(\psi)}} \exp(iq^2) dq. \quad (4.21)$$

Здесь $P(w_{sm})$ — поле источника в седловой точке w_{sm} (с геометрической точки зрения это соответствует ситуации, когда кромка находится на линии, соединяющей точку наблюдения с источником), а входящие в формулу эйконал $S(\psi)$ и эйконал в седловой точке $S(w_{sm})$ равны:

$$S(w_{sm}) = k(r + r_0), \quad S(\psi) = k\rho = k\sqrt{(r + r_0)^2 - 2rr_0(1 + \cos \psi)}, \quad \psi = \varphi \mp \varphi_0. \quad (4.22)$$

Область, внешняя по отношению к клину, занимает пространство углов $0 < \varphi < \pi n$.

Рассмотрим интегральное представление для рассеянного поля в случае двух седловых точек (4.15) и его частный случай для дифракции на клине (4.21).

Каждое из двух слагаемых в правой части выражения (4.21) состоит из четырех множителей. Первый множитель

$$\frac{\sqrt{i}P(w_{sm})}{\sqrt{2\pi k \frac{rr_0}{r+r_0}}} \quad (4.23)$$

не зависит от угловой переменной и представляет собой произведение значения поля в седловой точке (т. е. на границе тени) на фактор, определяющий зависимость решения от расстояний до источника и точки наблюдения.

Второй множитель

$$\frac{\frac{1}{n} \sin \frac{\pi}{n}}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\psi}{n}} \quad (4.24)$$

представляет собой половину дифракционного коэффициента. Полный дифракционный коэффициент для определенного вида поляризации получится, если сложить или вычесть значения этого множителя в точке наблюдения:

$$\frac{\sin \frac{\pi}{n}}{n} \left(\frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi - \varphi_0}{n}} \pm \frac{1}{\cos \frac{\pi}{n} - \cos \frac{\varphi + \varphi_0}{n}} \right). \quad (4.25)$$

Произведение третьего и четвертого множителей

$$\frac{2i \sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}{\exp[iS^c(\hat{w}_{sm}) - iS^c(w_0)]} \frac{\sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}}{\int_{\infty \sqrt{S^c(\hat{w}_{sm}) - S^c(w_0)}} \exp(iq^2) dq} \quad (4.26)$$

представляет собой частное от деления интеграла Френеля на свою асимптотику и характеризует зависимость поля от углового расстояния до границы тени. Вдали от границы «свет—тьень» это произведение равно 1. На границе «свет—тьень» этот множитель равен нулю и компенсирует сингулярность половины дифракционного коэффициента (4.24). Эта компенсация приводит к тому, что на границе «свет—тьень» у полубесконечного рассеивателя поле равно $\frac{1}{2}$ от поля геометрической оптики.

Некоторые исследователи стремятся привести решение именно к такому виду, когда сингулярность дифракционного коэффициента скомпенсирована, а решение с нескомпенсированной сингулярностью считают неполноценным. Однако в [39, 40], было показано, что для трехмерных рассеивателей компенсировать сингулярность неверно. Интегрирование сингулярных дифракционных коэффициентов по замкнутому контуру автоматически компенсирует все сингулярности, приводя к правильному результату.

Изменяя вид сомножителей (4.23), (4.24), (4.25), (4.26) или входящих в них параметров, можно построить множество эвристических решений: для рассеивателей двумерных или трехмерных, конечного или бесконечного размера, с выполнением или без выполнения условия дальней зоны, для разных видов граничных условий и профиля кромок.

Для более общей формулы (4.15) разделение на слагаемые можно провести аналогично. Соотношением (4.15) следует пользоваться в случае, когда рассеиватель имеет сложную форму.

5. ТРЕХМЕРНОЕ РЕШЕНИЕ В ПРИБЛИЖЕНИИ ФИЗИЧЕСКОЙ ОПТИКИ

Рассмотрим в приближении физической оптики задачу дифракции электромагнитного поля на плоском трехмерном рассеивателе при выполнении условия дальней зоны. Пусть на поверхность рассеивателя падает электромагнитное поле \vec{E}^0, \vec{H}^0 .

При рассеянии электромагнитной волны на теле конечных размеров решение для комплексных векторных амплитуд электрического и магнитного полей можно записать следующим образом:

$$\begin{aligned} \vec{E} &= -\frac{1}{ik} \left(\text{grad div } \vec{A}^e + k^2 \vec{A}^e \right) - \text{rot } \vec{A}^m, \\ \vec{H} &= -\frac{1}{ik} \left(\text{grad div } \vec{A}^m + k^2 \vec{A}^m \right) + \text{rot } \vec{A}^e. \end{aligned} \quad (5.1)$$

Здесь зависимость от времени выбрана в виде $\exp(-i\omega t)$.

В дальней зоне ($kR \rightarrow \infty$) в сферических координатах можно записать

$$\begin{aligned} E_\vartheta &= H_\varphi = ik (A_\vartheta^e + A_\varphi^m), \\ E_\varphi &= -H_\vartheta = ik (A_\varphi^e - A_\vartheta^m), \\ E_r &= H_r = 0, \end{aligned} \quad (5.2)$$

где $A_z, A_\vartheta, A_\varphi$ связаны с A_x, A_y, A_z через известные из справочников линейные преобразования физических координат вектора. Компоненты A_x, A_y, A_z в свою очередь определяем путем интегрирования соответствующих компонент поверхностных токов по рассеивающей поверхности в

приближении физической оптики

$$\vec{A}^e(\vec{R}) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\exp(ikr)}{r} [\vec{n} \times \vec{H}^0] ds, \quad \vec{A}^m(\vec{R}) = -\frac{1}{4\pi} \iint_S \frac{\exp(ikr)}{r} [\vec{n} \times \vec{E}^0] ds, \quad (5.3)$$

где нормаль \vec{n} к поверхности S направлена в сторону области, занятой полем.

Интеграл по поверхности рассеивателя можно связать с интегралом по его контуру при помощи теоремы Стокса

$$I = \iint_S \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho})\} ds = \frac{i}{k|\vec{\Delta}|^2} \oint_C (\vec{\Delta}, \vec{n}^j) \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho})\} dt, \quad (5.4)$$

где \vec{n}^j — единичная внутренняя нормаль к контуру C , окружающему рассеиватель, $\vec{\rho}'$ — единичный вектор, касательный к контуру, t — координата, отсчитываемая вдоль контура. Если рассеиватель представляет собой многоугольник с N вершинами, тогда:

$$I_j = \frac{i}{k|\vec{\Delta}|^2} \int_0^{a_j} (\vec{\Delta}, \vec{n}^j) \exp\{ik(\vec{\Delta}, t\vec{\rho}'_j)\} dt = \frac{ia_j (\vec{\Delta}, \vec{n}^j) \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho}_j)\} - \exp\{ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho}_{j-1})\}}{k|\vec{\Delta}|^2 ik(\vec{\Delta}, \vec{\rho}_j - \vec{\rho}_{j-1})},$$

или $I = \sum_{j=1}^N I_j$, $I_j = \frac{ia_j (\vec{\Delta}, \vec{n}^j) \sin(\Phi_j - \Phi_{j-1})/2}{k|\vec{\Delta}|^2 (\Phi_j - \Phi_{j-1})/2} \exp\left[\frac{i(\Phi_j + \Phi_{j-1})}{2}\right]$, (5.5)

где $\Phi = k(\vec{\Delta}, \vec{\rho})$ — фаза в точке интегрирования, $\Phi_j = k(\vec{\Delta}, \vec{\rho}_j)$ — фаза сигнала j -ой вершины с направляющим вектором $\vec{\rho}_j$, a_j — длина j -ой стороны многоугольника (расположенной между $(j-1)$ -ой и j -ой вершинами). Если точка наблюдения расположена на дифракционном конусе, когда $(\vec{\Delta}, \vec{\rho}') = 0$, тогда:

$$|\vec{\Delta}| = |(\vec{\Delta}, \vec{n}^j)|, \quad (\vec{\Delta}, \vec{n}^j) = (\vec{n}', \vec{n}^j) - (\vec{n}'', \vec{n}^j) = \sin\beta(-\cos\varphi_0 - \cos\varphi), \quad (5.6)$$

где $(\varphi_0 + \pi)$ и φ — углы между проекциями направляющих векторов \vec{n}' и \vec{n}'' на плоскость, перпендикулярную $\vec{\rho}'$, и внутренней нормалью \vec{n}^j к контуру C , β — угол между \vec{n}' (или \vec{n}'') и $\vec{\rho}'$ (эти вектора составляют одинаковый угол с кромкой, поскольку на дифракционном конусе не только \vec{n}' , но и \vec{n}'' направлен вдоль образующей конуса, которая задается вектором \vec{n}'). И, наконец, получаем на дифракционном конусе для j -ой стороны

$$I_j = \frac{ia_j \exp\{i\Phi_j\}}{k(\vec{\Delta}, \vec{n}^j)} = \frac{-ia_j \exp\{i\Phi_j\}}{k \sin\beta (\cos\varphi_0 + \cos\varphi)}, \quad (5.7)$$

при этом $\Phi_{j-1} = \Phi_j$.

В формулах (5.5) I_j представляет собой вклад j -ой стороны. В этом выражении фигурируют две фазы прилегающих к стороне вершин. Сумму из (5.5) можно преобразовать таким образом (см. [46]):

$$I = \sum_{j=1}^N I_j = \sum_{j=1}^N I^j, \quad \text{где} \quad I^j = \frac{\exp\{i\Phi_j\}}{k^2 |\vec{\Delta}|^2} \left[\frac{(\vec{\Delta}, \vec{n}^j)}{(\vec{\Delta}, \vec{\rho}'_j)} - \frac{(\vec{\Delta}, \vec{n}^{j+1})}{(\vec{\Delta}, \vec{\rho}'_{j+1})} \right]. \quad (5.8)$$

Слагаемые I^j иногда называют *вершинными волнами*, поскольку каждому слагаемому соответствует фаза одной из вершин. Однако на самом деле вклад вершин в физоптический интеграле никак не учитывается, поскольку контурный интеграл I характеризует лишь вклад сторон.

В случае положения плоскости падения и наблюдения перпендикулярно кромке, расположенной в начале координат (т. е. на дифракционном конусе j -ой стороны с параметрами $\beta = \pi/2$,

$\Phi_{j-1} = \Phi_j$) из (5.2) и (5.7) следует:

$$\begin{pmatrix} E_\varphi \\ E_\vartheta \end{pmatrix} = ik \begin{pmatrix} A_\varphi^e \\ A_\varphi^e \end{pmatrix} = \frac{ik \exp(ikR)}{2\pi R} I_j \begin{pmatrix} [\vec{n} \times \vec{H}^0] \\ [\vec{n} \times \vec{H}^0]_\vartheta \end{pmatrix}_\varphi = \frac{1}{2\pi} \frac{a_j \exp(ikR)}{R} \begin{pmatrix} f^0 \\ g^0 \end{pmatrix}. \quad (5.9)$$

Это выражение соответствует случаю трехмерной дифракции на стороне ограниченной длины a_j . Для перехода к двумерному случаю следует провести интегрирование по всей стороне от $-\infty$ до ∞ . С учетом выражения для функции Ханкеля и его асимптотики:

$$\frac{a_j \exp(ikR)}{R} \Rightarrow \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\exp\{ik\sqrt{r_1^2 + z^2}\}}{\sqrt{r_1^2 + z^2}} dz = i\pi H_0^{(1)}(kr_1) \cong \sqrt{2\pi i} \frac{\exp(ikr_1)}{\sqrt{kr_1}}. \quad (5.10)$$

Здесь r_1 — это расстояние от кромки до точки наблюдения в плоскости, перпендикулярной кромке. Переменная r_1 — аналог r из двумерного пространства, рассматриваемого в [25].

Интегрируя при $-\infty < a_j < \infty$, получим для двумерного случая

$$\begin{pmatrix} E_z \\ E_\varphi \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{i}{2\pi}} \frac{\exp(ikr)}{\sqrt{kr}} \begin{pmatrix} f^0 \\ g^0 \end{pmatrix}. \quad (5.11)$$

Здесь f^0 и g^0 — введенные в [25] сингулярные дифракционные коэффициенты идеально проводящей полуплоскости в приближении физической оптики для случаев ТН- и ТЕ-волны соответственно:

$$\begin{aligned} f^0(\varphi, \varphi_0) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} - \frac{\sin \frac{\varphi + \varphi_0}{2}}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right) = \frac{\sin \varphi_0}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} \quad (TH), \\ g^0(\varphi, \varphi_0) &= \frac{1}{2} \left(\frac{\sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} + \frac{\sin \frac{\varphi + \varphi_0}{2}}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right) = \frac{-\sin \varphi}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} \quad (TE). \end{aligned} \quad (5.12)$$

Существует аналогичная формула для строгого двумерного решения

$$\begin{pmatrix} E_z \\ E_\varphi \end{pmatrix} = \sqrt{\frac{i}{2\pi}} \frac{\exp(ikr)}{\sqrt{kr}} \begin{pmatrix} f \\ g \end{pmatrix} \quad (5.13)$$

и соответствующие дифракционные коэффициенты

$$\begin{aligned} f(\varphi, \varphi_0) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} - \frac{1}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right) = \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi_0}{2}}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} \quad (TH), \\ g(\varphi, \varphi_0) &= \frac{1}{2} \left(\frac{1}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} + \frac{1}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right) = \frac{-2 \cos \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\varphi_0}{2}}{\cos \varphi + \cos \varphi_0} \quad (TE). \end{aligned} \quad (5.14)$$

Очень важным является то обстоятельство, что из решения для трехмерной кромки (5.9) можно выделить те же дифракционные коэффициенты, которые фигурируют в известном из [25] решении двумерной задачи (5.11).

Формулы (5.14) соответствуют формуле (4.25) для случая $n = 2$, когда клин превращается в полуплоскость.

Физический смысл дифракционных коэффициентов (5.12) и (5.14) состоит в том, что дифракционные коэффициенты (5.12) описывают поле в приближении физической оптики, т. е. без учета возмущения поля краем полуплоскости, а дифракционные коэффициенты (5.14) описывают поле с учетом возмущения на краю идеально проводящей полуплоскости.

Соотношение между строгим решением двумерной задачи (5.13) и физическим (5.11) соответствует формуле из [30], устанавливающей, что двумерное решение в приближении физической оптики $v^0(r, \psi)$ для рассеянного поля, непрерывного на двулистной римановой поверхности, имеет вид, с точностью до множителя $\sin \frac{\psi}{2}$ соответствующий строгому решению $v(r, \psi)$:

$$v^0(r, \psi) = \sin \frac{\psi}{2} v(r, \psi), \quad \text{где } \psi = \varphi \mp \varphi_0. \quad (5.15)$$

Выражение (5.15) отражает соотношение между дифракционными коэффициентами (5.14) строго двумерного решения и физоптическими дифракционными коэффициентами в случае дифракции на полуплоскости, в том числе — соотношение между асимптотиками физоптического и строгого решений при удалении от границы «свет—тень». Что касается трехмерного случая, то для него строгого решения не существует, поэтому непосредственно проверить соотношение (5.15) невозможно. Однако можно предположить, что и в трехмерном случае соотношение (5.15) сохранится, и именно это предположение мы будем использовать при построении эвристического решения. Аналогичное предположение лежит в основе метода краевых волн (см. [25]).

Формулы (5.12) и (5.14) соответствуют случаю идеально проводящей полуплоскости, когда коэффициенты отражения и прохождения R и T принимают значения $R = \pm 1$, $T = 0$.

В [14, 17, 46] была рассмотрена функция, обобщающая дифракционные коэффициенты f и g из (5.14):

$$fg(R, T, \varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} \left(\frac{1 - T}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} + \frac{R}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right). \quad (5.16)$$

Аналогичное выражение имеет место для дифракционных коэффициентов физической оптики f^0 и g^0 из (5.12):

$$fg^0(R, T, \varphi, \varphi_0) = \frac{1}{2} \left[(1 - T) \frac{\sin \frac{\varphi - \varphi_0}{2}}{-\cos \frac{\varphi - \varphi_0}{2}} + R \frac{\sin \frac{\varphi + \varphi_0}{2}}{-\cos \frac{\varphi + \varphi_0}{2}} \right]. \quad (5.17)$$

Здесь R и T — соответственно коэффициенты отражения и прохождения, описывающие взаимодействие плоской волны с плоской безграничной поверхностью.

Для R и T , соответствующих ТН- или ТЕ-поляризации, дифракционные коэффициенты (5.16) можно подставлять вместо f или g в (5.13), а дифракционные коэффициенты (5.17) можно подставлять вместо f^0 и g^0 в (5.11).

При $T = 0$, $R = -1$ получим выражения для сингулярных дифракционных коэффициентов идеально проводящей полуплоскости в случае падения ТН-поляризованной электромагнитной волны (см. [25]). В частности, для физоптических дифракционных коэффициентов связь между (5.14) и (5.17) можно описать так: $fg^0(-1, 0, \varphi, \varphi_0) = f^0(\varphi, \varphi_0)$, $fg^0(1, 0, \varphi, \varphi_0) = g^0(\varphi, \varphi_0)$. Аналогичные выражения можно получить и для дифракционных коэффициентов строгого решения: $fg(-1, 0, \varphi, \varphi_0) = f(\varphi, \varphi_0)$, $fg(1, 0, \varphi, \varphi_0) = g(\varphi, \varphi_0)$.

Таким образом, в физоптическом решении [16] можно выделить важные особенности [46]:

- решение для многоугольной пластины представляет собой сумму вкладов отдельных кромок;
- из вклада отдельной кромки в случае дифракционного конуса можно выделить сингулярный дифракционный коэффициент, совпадающий с дифракционным коэффициентом двумерной задачи;
- в направлении зеркального отражения вклады всех кромок сингулярны, но в сумме дают правильный результат [39];
- изменив порядок суммирования, можно представить решение в виде вкладов вершин.

Меняя в (5.5) порядок суммирования слагаемых, можно записать решение задачи дифракции как в виде вкладов сторон, так и в виде вершинных волн (5.8). Выделяя в решении (5.5) дифракционные коэффициенты, можно установить связь между двумерными и трехмерными решениями. Заменяя в (5.5) дифракционные коэффициенты (о чем будет сказано далее), можно получать решение в приближении МКВ для трехмерного рассеивателя, а затем уточнить это решение при помощи функционального множителя.

6. АНАЛИЗ ДИФРАКЦИОННЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Рассмотрим выражения для дифракционных коэффициентов (5.12), (5.14) и сравним их между собой. Каждый дифракционный коэффициент (5.12) или (5.14) состоит из двух слагаемых, которые получаются в результате применения операции сложения или вычитания (4.20) к выражению (4.21). В выражении (4.21) для полубесконечного рассеивателя (клина) фигурируют интегралы Френеля, но вдали от границы «свет—тень» частное от деления интеграла Френеля на свою асимптотику равно 1. Поэтому выражения (5.12) или (5.14) имеют место лишь вдали от границы «свет—тень». В окрестности границы «свет—тень» частные от деления интегралов

Френеля на свои асимптотики (4.26), будучи умноженными на сингулярные дифракционные коэффициенты (4.24), компенсируют эти сингулярности и обеспечивают непрерывность решения. Для рассеивателя конечного размера можно пользоваться сингулярными дифракционными коэффициентами для каждого элемента кромки, поскольку в данном случае непрерывность всего решения в целом будет обеспечена интегралом по замкнутому теневому контуру [39, 40, 46]. Поэтому мы будем говорить о сингулярных дифракционных коэффициентах, имея в виду, что решение в целом является непрерывным.

Сравним между собой выражения (5.12) и (5.14). Знаменатели, как половинок дифракционных коэффициентов, так и выражений в целом, одинаковы, в то время как числители отличаются. Этому обстоятельству можно дать физическую интерпретацию. Назовем знаменатели «геометрической» частью дифракционного коэффициента, а числители — «поляризационной» частью. Геометрическая часть зависит от геометрии задачи, а поляризационная часть — от профиля кромки и от граничных условий.

Заменяя поляризационные составляющие дифракционных коэффициентов в выражениях для интегралов по кромке, можно получить эвристические решения множества задач. Так, при помощи замены поляризационной составляющей дифракционных коэффициентов в физоптических формулах были получены эвристические решения задач дифракции на идеально проводящем плоском угловом секторе [12, 45, 46], на неоднородности в среде распространения упругой волны [44, 46] и на полупрозрачной полуплоскости [14, 17].

6.1. Применение МБК для получения дифракционных коэффициентов полупрозрачной полуплоскости. Построим эвристическое решение для полупрозрачной полуплоскости с граничными условиями [17]. Сравним эвристическое решение с численным решением для случая дифракции электромагнитной волны ТН-поляризации на полуплоскости с граничными условиями типа тонкого слоя [2, 18]:

$$\begin{cases} H_{x+} - H_{x-} = -Z^{-1}E_z, \\ E_{z+} = E_{z-} = E_z, \end{cases} \quad (6.1)$$

где импеданс $Z = iX$, X — параметр, i — мнимая единица. Здесь знаки «+» и «-» соответствуют областям $y > 0$ и $y < 0$ соответственно.

Рассмотрим плоский трехмерный рассеиватель, представляющий собой фрагмент плоской поверхности, граничные условия на которой характеризуются коэффициентами отражения и прохождения R и T для задачи взаимодействия волны с плоской безграничной поверхностью с рассматриваемыми граничными условиями типа тонкого слоя:

$$R = \frac{W_0}{-2i \sin(\varphi_0) X - W_0}, \quad W_0 = 120\pi, \quad (6.2)$$

$$T = 1 + R. \quad (6.3)$$

Здесь X — изменяемый параметр, от которого зависит коэффициент отражения.

Заметим, что при $X = 0$ выполняется $R = -1$, $T = 0$, что соответствует параметрам идеально проводящей полуплоскости при ТЕ-поляризации падающей волны. Как уже было сказано, МБК позволяет создавать эвристические формулы на основе любого строгого решения. Подставим значения параметров R и T из (6.2) и (6.3) в обобщенный дифракционный коэффициент (5.16) и физоптический дифракционный коэффициент (5.17). Сравним получившиеся зависимости со строгим численным решением.

Результаты численного расчета строгого решения и выражения (6.2) для коэффициентов R и T , соответствующие граничным условиям (6.1), были предоставлены С. Е. Банковым. Решение основано на методе Винера—Хопфа [22, 23].

По мере изменения параметра X от 0 до бесконечности коэффициент отражения R меняется от -1 до 0. Поэтому можно считать, что параметр X характеризует прозрачность рассеивателя. Чем больше X , тем больше прозрачность. Исследуя поведение строгого решения, можно убедиться, что по мере увеличения прозрачности строгое решение смещается от решения ОДК к физоптике.

Это смещение можно описать при помощи переходной функции [17]

$$cx(X, \varphi) = 1 - x(X) \left\{ 1 - \cos \left[\frac{\pi - \varphi}{1 + x(X)} \right] \right\}, \quad x(X) = 1 - \exp(-0,003 |X|). \quad (6.4)$$

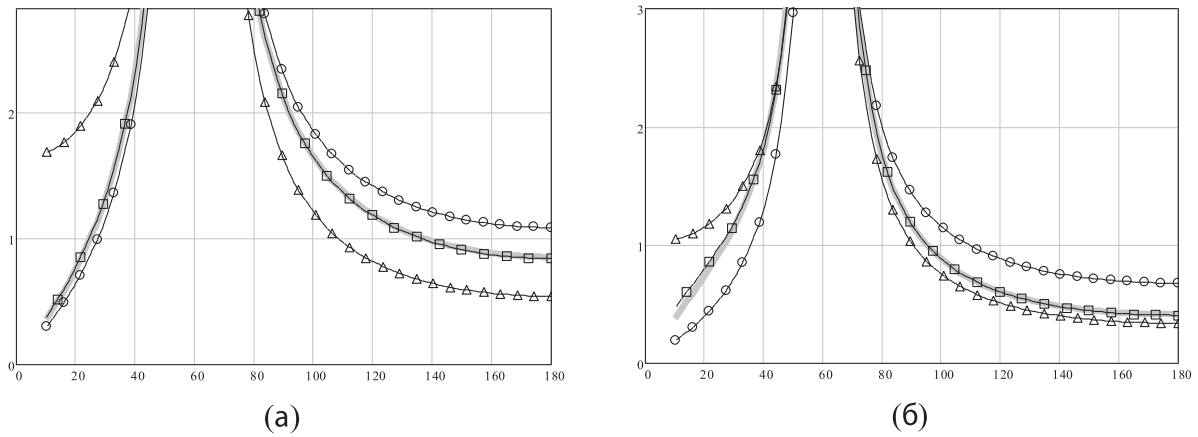


Рис. 1. Сравнение дифракционного коэффициента строгого решения для полупрозрачной полуплоскости (сплошная серая линия) с эвристическими решениями ОДК (5.14) (кружки), физической оптикой (5.12) (треугольники) и решением (6.5) (квадратики). Угол падения $\varphi_0 = 120^\circ$. Значения параметра прозрачности: (а) $X = 80$, ($|R| = 0,939$), (б) $X = 300$, ($|R| = 0,587$).

При $X \rightarrow 0$ выполняется $x \rightarrow 0$, $cx(X, \varphi) \rightarrow 1$. При $X \rightarrow \infty$ имеем: $x \rightarrow 1$, $cx(X, \varphi) \rightarrow \sin(\varphi/2)$. В результате можно построить эвристическую формулу

$$fg(R, T, \varphi, \varphi_0) = \frac{cx(X, \varphi_s)}{cx(X, \varphi)}, \quad (6.5)$$

которая при всех значениях входных параметров с высокой точностью совпадает с численным решением [17]. Здесь $cx(X, \varphi_s)$ — значение функции $cx(X, \varphi)$ в точке сингулярности $\varphi_s = \pi - \varphi_0$, т. е. на границе «свет—тьень». Нормировка переходной функции $cx(X, \varphi)$ на свое значение в точке сингулярности сделана потому, что значение функции $fg(R, T, \varphi_s, \varphi_0)$ (5.16) в точке сингулярности является правильным и совпадает с $fg^0(R, T, \varphi_s, \varphi_0)$ (5.17).

Результаты расчета приведены на рис. 1 (а), (б). Из этого рисунка видно, что по мере увеличения параметра прозрачности X строгое решение (сплошная серая линия) отходит от решения ОДК (5.14) (кружки) и перемещается к физоптическому решению (5.12) (треугольники), в то время как эвристическое решение (6.5) (квадратики) практически совпадает со строгим.

Расчеты показывают, что совпадение эвристического и строгого решения имеет место для всех углов падения φ_0 . Небольшие отличия между расчетами по эвристической формуле (6.5) и строгим решением имеют место лишь в окрестности угла $\varphi = 0$, там строгое решение стремится к нулю сильнее, чем эвристическая формула. Как уже было сказано, чем больше прозрачность рассеивателя, тем в большей степени строгое решение совпадает с физоптическим (5.12).

При помощи данной методики можно строить эвристические аналитические решения на основе строгих численных решений рассеивателей с разными типами граничных условий. При этом не требуется получать строгие аналитические решения. Простой вид базовых компонентов, имеющих ясное физическое объяснение, позволяет исследовать физические особенности процесса дифракции при помощи сравнения друг с другом решений ОДК, ФО и строгого при разных значениях входных параметров. Применяя автономные эвристические формулы вместо строгого решения, можно существенно повысить быстродействие вычислений без потери точности, но с сохранением простоты и физичности эвристических выражений.

Таким образом, применяя принципы МБК, мы на основе двух типов дифракционных коэффициентов (5.12) и (5.14), а также выражений для R и T (6.2) и (6.3) построили дифракционный коэффициент, с высокой точностью совпадающий со строгим численным решением задачи со сложными граничными условиями (6.1) при всех значениях входных параметров.

Аналогичным образом можно строить дифракционные коэффициенты и для других задач. Суть предлагаемой методики (находить баланс между решением с возмущением вблизи кромки и без него) останется той же при изменении граничных условий, типов возбуждения и физической природы волн.

6.2. Коррекция дифракционных коэффициентов на вершинах. Задача дифракции на плоском идеально проводящем угловом секторе является одной из важных ключевых задач. Существуют эвристические решения данной задачи в приближении ГТД и МКВ. Подробнее об этом см. в [12, 45, 46].

По поводу ее сложности достаточно сказать, что между получениями строгих аналитических решений для идеально проводящей полуплоскости и плоского углового сектора прошло более 100 лет. Рост сложности можно объяснить ростом размерности задачи: дифракция на полуплоскости является двумерной задачей, а дифракция на плоском угловом секторе — трехмерной задачей. По аналогии можно прогнозировать уменьшение сложности при переходе от двумерной задачи к одномерной. Напомним, что МКВ строится на основе одномерных задач для R и T , а ГТД и МКВ — на основе двумерных.

Как известно, МКВ и аналогичные подходы, такие, как метод эквивалентных контурных токов (МЭКТ), дают достаточно точное решение только на дифракционных конусах, а вне этих направлений решение является неточным. МКВ дает возможность скорректировать решение МЭКТ при помощи функциональных множителей типа [12, 46]

$$c(\varphi, \varphi_0) = \frac{f(\varphi, \varphi_0)}{f^0(\varphi, \varphi_0)} = \frac{2 \sin \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\varphi_0}{2}}{\sin \varphi_0} = \frac{\sin \frac{\varphi}{2}}{\cos \frac{\varphi_0}{2}}. \quad (6.6)$$

Здесь f и f^0 — дифракционные коэффициенты двумерных физоптического и строгого решений для идеально проводящей полуплоскости (5.12) и (5.14) соответственно.

Физический смысл применения формулы (6.6) состоит в том, что она корректирует дифракционный коэффициент физической оптики таким образом, чтобы учесть возмущение поля, т. е. неравномерность амплитуды поля строгого решения вблизи кромки. В приближении МЭКТ ток на кромке имеет постоянную амплитуду. Применение множителей типа (6.6) приводит к уточнению решения, поскольку позволяет учесть возмущение поля вблизи вершины, т. е. вблизи конца кромки.

Поскольку решение (6.5) соответствует приближению физической оптики при больших значениях параметра прозрачности X , можно предположить, что в данном случае коррекция (6.6) на вершинах не потребуется. Это следует из того, что в данном случае дифракционный коэффициент (6.5) соответствует приближению физической оптики. Подстановка его вместо дифракционного коэффициента ОДК в числитель выражения (6.6) приведет к тому, что это выражение будет стремиться к 1. Таким образом, для больших значений прозрачности физоптическое решение может правильно описывать не только двумерное решение, но и вершинные волны. Для непрозрачных рассеивателей множитель (6.6) будет отличаться от 1 и поэтому оказывать влияние на вершинную волну. Степень прозрачности рассеивателя можно оценить, исследуя R и T для заданных граничных условий.

7. БАЗОВЫЕ КОМПОНЕНТЫ МКВ

Как уже было сказано, в соответствии с МКВ эвристическая формула строится при помощи сочетания базовых компонентов, которые выбираются из имеющегося набора в зависимости от условий задачи. Точность эвристического решения проверяется при помощи верификации.

В состав базовых компонентов к настоящему моменту предлагаем включить следующие формулы.

7.1. Поверхностный физоптический интеграл. Поверхностный (с формулой перехода в линейный) физоптический интеграл с выделением вкладов отдельных кромок (5.5).

7.2. Компоненты двумерной формулы. Компоненты двумерной формулы для рассеянного поля $v(r, \psi)$ (4.15), (4.21): зависимость от расстояний от источника и точки наблюдения до кромки, зависимость от угла до границы «свет—тень», дифракционные коэффициенты.

7.3. Коэффициенты R и T . Коэффициенты R и T для безграничной плоской поверхности. В данной статье мы в качестве примера применили выражения (6.2), (6.3), но могут быть и другие. Конкретные значения R и T определяются заданным видом граничных условий.

7.4. Дифракционные коэффициенты ОДК. Дифракционные коэффициенты ОДК (5.16) и ФО (5.17) с R и T . Эти формулы характеризуют рассеянное поле с учетом возмущения на краю полуплоскости и без учета такого возмущения.

7.5. Поляризационная составляющая дифракционного коэффициента. Поляризационная составляющая дифракционного коэффициента (числитель): зависимость от формы профиля (МОЭ) (4.15), поляризации падающего поля (4.20), (4.21), типа решения (физоптическое/строгое (5.12)/(5.14)), граничных условий (5.16), (5.17).

7.6. Геометрическая составляющая дифракционного коэффициента. Геометрическая составляющая дифракционного коэффициента (знаменатель): зеркальный/незеркальный угол отражения дифракционного коэффициента [46].

7.7. Модифицирующая функция. Модифицирующая функция $s(\varphi, \varphi_0)$ (6.6) для МЭКТ. Результирующие выражения получаются проще, чем строгое аналитическое решение [12, 45, 46].

7.8. Переходная формула. Переходная формула $cx(X, \varphi)$ (6.4) для дифракционного коэффициента полупрозрачного рассеивателя на основе формул ОДК и ФО [14, 17]. Для другого вида граничных условий переходная формула может измениться или остаться той же.

По мере проведения дальнейших исследований набор базовых компонентов может пополняться. Также базовые компоненты можно комбинировать между собой, что расширяет область их применения.

8. Точность и эффективность ГТД, МКВ и МБК

Математической строгостью эвристические решения не обладают. Точность (т. е. согласие со строгим решением той же задачи) проверяется верификацией, т. е. непосредственным сравнением с этим строгим решением. Обычно поправки в эвристические решения не вносят, но априори (на основе предварительных исследований задач со сходными условиями) знают точность этих решений. Точность эвристических решений зависит не только от свойств рассеивателя (формы и граничных условий), но и от геометрии задачи (т. е. от взаимного расположения рассеивателя, источника и точки наблюдения). Иногда эта точность бывает очень велика, иногда — достаточна, иногда — невысока (см. [45]).

Тем не менее, при необходимости увеличить точность и довести ее до заданных величин МБК предусматривает проведение процедуры настройки при помощи добавления к решению феноменологических корректирующих функций. Эти зависимости можно выявить при помощи сравнения строгого и эвристического решения для всех значений входных параметров. Чем лучше изначально построено решение на основе базовых компонентов, тем меньше потребуется изменять его для достижения заданной точности.

Отличие МБК от ГТД и МКВ состоит в том, что ГТД и МКВ используют строгие двумерные решения, в то время как МБК использует строгие одномерные решения (R и T). Одномерные решения получать проще, чем двумерные, для одномерных функций чаще существуют аналитические выражения. Поэтому МБК позволяет получить аналитические выражения, в то время как ГТД и МКВ используют готовые двумерные решения. Таким образом, МБК дает возможность получать аналитические формулы, обладающие большей эффективностью (простотой и точностью), чем решения в приближениях ГТД и МКВ.

При помощи МБК можно получить более точное решение путем использования строгого решения исходной задачи в качестве исходных данных (сравнивая с эвристическими формулами и применяя инженерные формулы-поправки), в то время как ГТД и МКВ если и используют строгое решение, то в основном для проверки. Это связано с тем, что при создании ГТД и МКВ компьютерная техника была не столь развита, и эти приближения предполагалось использовать в случае, когда не было надежды получить строгие трехмерные решения. В настоящее время численные решения получать проще, чем аналитические, поэтому численное решение можно использовать в качестве исходных данных для получения аналитического решения.

Если точность полученного решения недостаточна, можно применить для его настройки инженерные формулы. При объяснении физического смысла инженерных формул их можно будет

включать в набор базовых компонентов. Чем шире набор базовых компонентов, тем меньше изменений в решение будут вносить инженерные формулы.

Заметим, что на основе имеющихся строгих трехмерных решений можно сразу получить инженерные формулы. Но они (обладая простотой и точностью) будут лишь имитировать строгое решение, в то время как применение базовых компонентов наполняет решение физическим содержанием.

9. ПРИМЕРЫ ПРИМЕНЕНИЯ МБК

Описанные принципы применения МБК уже были использованы при построении решений ряда задач, см. [6–17, 39–46].

9.1. Дифракция на плоском угловом секторе. Дифракция на плоском угловом секторе (см. [12, 45, 46]), в том числе:

- навязанное условие дальней зоны (для полубесконечного рассеивателя),
- условная кромка,
- замена поляризованной составляющей дифракционного коэффициента.

9.2. Исследование влияния полупрозрачности. Исследование влияния полупрозрачности, в том числе:

- получение функции, учитывающей влияние полупрозрачности (6.4), см. [14, 17].

9.3. Дифракция упругой волны. Дифракция упругой волны (приложение — сейсмические волны; см. [44, 46]), в том числе:

- переход из частотной области во временную.

9.4. Распространение радиоволн в условиях городской застройки. Распространение радиоволн в условиях городской застройки (см. [16, 46]), в том числе:

- построение теории на основе сочетания элементов теории антенн, теории распространения радиоволн и теории дифракции.

10. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложен метод построения эвристических формул (МБК), позволяющий проводить физическую интерпретацию результатов математически строгого решения задачи дифракции. К преимуществам МБК перед другими эвристическими методами, такими как ГТД и МКВ, относится возможность применять аналитические эвристические формулы автономно, без постоянного использования двумерных решений. Метод универсален и позволяет получать эффективные (простые, но точные) аналитические эвристические решения задач дифракции на основе любых строгих решений: аналитических, численных и экспериментальных.

Наличие строгих численных решений не является причиной для отказа от эвристических формул. Для перевода математически строгих решений в сферу их практического использования важно иметь возможность интерпретировать полученные результаты. Такая интерпретация является еще одной причиной применения эвристических формул. (Другой причиной является упомянутая ранее необходимость повышения эффективности вычислителей при решении практических задач). Эвристические формулы дают наилучшую возможность дать решению физическую интерпретацию. В этом они превосходят даже строгие аналитические формулы.

Существует мнение, что эвристическими решениями пытаются заменить строгие. Это совершенно не так. Ничто не может заменить строгие решения, полученные любыми методами. Но при решении практических задач строгие решения не всегда являются самым эффективным подходом. Эвристические формулы с успехом дополняют набор средств решения практической задачи.

В связи с тем, что новые эвристические формулы обладают высокими быстродействием и точностью, их также можно использовать совместно с любыми строгими подходами или с результатами эксперимента для существенного повышения эффективности решения практических задач, связанных с применением теории дифракции. Новые подходы являются универсальными и подходят для любых типов граничных условий и любых типов волн.

Автор благодарен С. Е. Банкову за предоставленные результаты численного расчета строгого решения для полупрозрачной полуплоскости.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. — М.: Наука, 1972.
2. *Банков С. Е., Левченко И. В.* Эквивалентные граничные условия для ленточной частопериодической решетки на границе раздела двух сред// Радиотехн. и электрон. — 1988. — 33, № 10. — С. 2045.
3. *Бирюков В. А., Муратов М. В., Петров И. Б., Санников А. В., Фаворская А. В.* Применение сеточно-характеристического метода на неструктурированных тетраэдральных сетках в решении прямых задач сейсморазведки трещиноватых пластов// Журн. выч. мат. и мат. физ. — 2015. — 55, № 10. — С. 1762–1772.
4. *Боровиков В. А.* Дифракция на многоугольниках и многогранниках. — М.: Наука, 1966.
5. *Вайнштейн Л. А.* Электромагнитные волны. — М.: Радио и связь, 1988.
6. *Весник М. В.* Использование двухмерных решений в трехмерных задачах// Радиотехн. и электрон. — 1993. — 38, № 8. — С. 1416–1423.
7. *Весник М. В.* Аналитическое решение краевой задачи для уравнения Гельмгольца// Радиотехн. и электрон. — 2000. — 45, № 1. — С. 66–76.
8. *Весник М. В.* Аналитическое решение краевых задач теории дифракции методом обобщенного эйконала// Радиотехн. и электрон. — 2003. — 48, № 9. — С. 1078–1084.
9. *Весник М. В.* Аналитическое решение краевых задач для волнового уравнения с переменным волновым числом методом обобщенного эйконала// Нелин. мир. — 2003. — 1, № 1-2. — С. 59–63.
10. *Весник М. В.* Получение дифракционных коэффициентов для двумерного полубесконечного идеально проводящего рассеивателя при помощи метода обобщенного эйконала// Электромагн. волны и электрон. сист. — 2004. — 9, № 11. — С. 23–29.
11. *Весник М. В.* Аналитическое решение задачи дифракции электромагнитной волны на двумерной идеально проводящей полупластине при помощи метода обобщенного эйконала// Радиотехн. и электрон. — 2008. — 53, № 2. — С. 144–156.
12. *Весник М. В.* О возможности построения уточненного эвристического решения в задаче дифракции на плоском угловом секторе// Радиотехн. и электрон. — 2011. — 56, № 5. — С. 573–586.
13. *Весник М. В.* Аналитическое решение двумерной задачи дифракции электромагнитной волны на усеченном клине// Радиотехн. и электрон. — 2012. — 57, № 10. — С. 1053–1065.
14. *Весник М. В.* Построение эвристических дифракционных коэффициентов в аналитических решениях задач рассеяния волновых полей разной физической природы на плоских многоугольных пластинах со сложными граничными условиями// Радиотехн. и электрон. — 2014. — 59, № 6. — С. 543–551.
15. *Весник М. В.* Уточнение приближения физической оптики в задачах дифракции на трехмерных объектах// Тр. 2-ой Всерос. микроволн. конф. — Москва, 26–28 ноября 2014. — С. 443–448.
16. *Весник М. В.* Детерминированная теория распространения радиоволн в условиях городской застройки// Тр. ИРЭМВ-2015. — Ростов-на-Дону: ЮФУ, 2015, С. 378–382.
17. *Весник М. В.* Эвристическое выражение для дифракционного коэффициента полупрозрачной полуплоскости// Сб. тр. III Всерос. микроволн. конф. — Москва, 25–27 ноября 2015. — С. 281–285.
18. *Войтович Н. Н., Каценеленбаум Б. З., Коршунова Е. Н., Пангонис Л. И., Переяславец М. Л., Сивов А. Н., Шатров А. Д.* Электродинамика антенн с полупрозрачными поверхностями: методы конструктивного синтеза. — М.: Наука, 1989.
19. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. — М.: Изд-во АН СССР, 1948.
20. *Левянт В. Б., Петров И. Б., Муратов М. В.* Численное моделирование волновых откликов от системы (кластера) субвертикальных макротрещин// Технолог. сейсморазвед. — 2012. — 1. — С. 5–21.
21. *Марков Г. Т., Чаплин А. Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. — М.—Л.: Энергия, 1967.
22. *Нефедов Е. И.* Дифракция электромагнитных волн на диэлектрических структурах. — М.: Наука, 1979.
23. *Нобл Б.* Метод Винера—Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных. — М.: Мир, 1962.
24. *Тейлор М.* Псевдодифференциальные операторы. — М.: Мир, 1985.
25. *Уфимцев П. Я.* Метод краевых волн в физической теории дифракции. — М.: Сов. радио, 1962.
26. *Уфимцев П. Я.* Основы физической теории дифракции. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2009.
27. *Уфимцев П. Я.* Теория дифракционных краевых волн в электродинамике. Введение в физическую теорию дифракции. — М.: БИНОМ. Лаборатория знаний, 2012.
28. *Фок В. А.* Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. — М.: Сов. радио, 1970.

29. Франк Ф., Мизес Р. Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. — М.—Л.: ОНТИ, 1937.
30. Хенл Х., Мауэ А., Вестпфаль К. Теория дифракции. — М.: Мир, 1964.
31. Gordon W.B. Far field approximations to the Kirchhoff—Helmholtz representations of scattered fields// IEEE Trans. Antennas and Propagation. — 1975. — AP-23. — С. 590–592.
32. James G.L. Geometrical theory of diffraction for electromagnetic waves. — London: Peter Peregrinus Ltd., 1976.
33. Keller J.B. Geometrical theory of diffraction// J. Opt. Soc. Amer. — 1962. — 52, № 2. — С. 116–130.
34. Kravtsov Yu.A., Zhu N.Ya. Theory of diffraction: heuristic approaches. — Oxford: Alpha Science International Ltd., 2010.
35. Lyalinov M.A., Zhu N.Y. Scattering of waves by wedges and cones with impedance boundary conditions. — Raileigh: SciTech Publishing Inc., 2012.
36. Pelosi G., Rahmat-Samii Ya., Volakis J.L. High-frequency techniques in diffraction theory: 50 years of achievements in GTD, PTD, and related approaches// IEEE Antennas Propag. Mag. — 2013. — 55, № 3. — С. 16.
37. Sommerfeld A. Zur analytischen Theorie der Wärmeleitung// Math. Ann. — 1894. — 45. — С. 263–277.
38. Sommerfeld A. Mathematische Theorie der Diffraction// Math. Ann. — 1896. — 47. — С. 317–374.
39. Vesnik M.V., Ufimtsev P.Y. An asymptotic feature of corner waves scattered by polygonal plates// Electromagnetics. — 1992. — 12, № 3-4. — С. 265–272.
40. Vesnik M.V. Elimination of infinities in diffraction coefficients of physical optics current's components for a shadow contour of a scatterer// Proc. 1995 Int. Symp. Electromag. Theor. — St. Petersburg, Russia, May 23–26, 1995. — С. 407–409.
41. Vesnik M.V. The analytical solution for the electromagnetic diffraction on 2-D perfectly conducting scatterers of arbitrary shape// IEEE Trans. Antennas and Propagation. — 2001. — AP-49, № 12. — С. 1638–1644.
42. Vesnik M.V. Method of generalized eikonal as a new approach to diffraction process description// Int. Semin. Days Diffraction'2006. — St. Petersburg, May 30 — June 2, 2006.
43. Vesnik M., Kravtsov Yu.A. Diffraction by bodies with wedges: method of generalised eikonal (MGE)// В кн.: «Theory of Diffraction: Heuristic Approaches». — Oxford: Alpha Science International Ltd., 2010.
44. Vesnik M.V. Analytical heuristic solution for the problem of elastic wave diffraction by a polygonal flat 3D scatterer// Abstr. Int. Conf. Days Diffraction'2013. — St. Petersburg, May 27–31, 2013. — С. 89.
45. Vesnik M.V. Efficiency of different heuristic approaches to calculation of electromagnetic diffraction by polyhedrons and other scatterers// Radio Sci. — 2014. — 49, № 10. — С. 945–953.
46. Vesnik M.V. The method of the generalized eikonal. New approaches in the diffraction theory. — Berlin—Boston: Walter de Gruyter GmbH, 2015.

Михаил Владимирович Весник

Институт радиотехники и электроники им. В. А. Котельникова РАН,

125009, Москва К-9, Моховая, 11, кор. 7;

Российский университет дружбы народов,

117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, 6

E-mail: vesnik@cplire.ru

Physical Interpretation of a Mathematical Strict Solution for the Diffraction Problem by Means of Heuristic Formulas

© 2016 М. В. Vesnik

Abstract. We propose a new approach to constructing heuristic formulas describing the solution of the diffraction problem. The formulas are based on physical principles and allow one to interpret the results of the mathematical strict solution. Since the heuristic formulas possess high performance and accuracy, they can also be used along with any strict approaches or experimental results for significant improvement of efficiency of solution of practical problems related to applications of the diffraction theory.

REFERENCES

1. V. M. Babich and V. S. Buldyrev, *Asimptoticheskie metody v zadachakh difraktsii korotkikh voln* [Asymptotics Methods in Problems of Diffraction of Short Waves], Nauka, Moscow, 1972.
2. S. E. Bankov and I. V. Levchenko, “Ekvivalentnye granichnye usloviya dlya lentochnoy chastoperiodicheskoy reshetki na granitse razdela dvukh sred” [Equivalent boundary-value conditions for a band high-frequency array on the boundary separating two media], *Radiotekhn. i elektron.* [Radiotech. Electron.], 1988, **33**, No. 10, 2045.
3. V. A. Biryukov, M. V. Muratov, I. B. Petrov, A. V. Sannikov, and A. V. Favorskaya, “Primenenie setochno-kharakteristicheskogo metoda na nestrukturirovannykh tetraedral’nykh setkakh v reshenii pryamykh zadach seysmorazvedki treshchinovatykh plastov” [Application of the net-characteristic method to unstructured tetrahedral nets for solution of direct problems in seismography of fissured strata], *Zhurn. vych. mat. i mat. fiz.* [J. Comput. Math. Math. Phys.], 2015, **55**, No. 10, 1762–1772.
4. V. A. Borovikov, *Difraktsiya na mnogougol’nikakh i mnogogrannnikakh* [Diffraction on Polygons and Polyhedrons], Nauka, Moscow, 1966.
5. L. A. Vaynshteyn, *Elektromagnitnye volny* [Electromagnetic Waves], Radio i svyaz’, Moscow, 1988.
6. M. V. Vesnik, “Ispol’zovanie dvukhmernykh resheniy v trekhmernykh zadachakh” [Using two-dimensional solutions in three-dimensional problems], *Radiotekhn. i elektron.* [Radiotech. Electron.], 1993, **38**, No. 8, 1416–1423.
7. M. V. Vesnik, “Analiticheskoe reshenie kraevoy zadachi dlya uravneniya Gel’mgol’tsa” [Analytic solution of the boundary-value problem for the Helmholtz equation], *Radiotekhn. i elektron.* [Radiotech. Electron.], 2000, **45**, No. 1, 66–76.
8. M. V. Vesnik, “Analiticheskoe reshenie kraevykh zadach teorii difraktsii metodom obobshchennogo eykonala” [Analytic solution of boundary-value problems in the diffraction theory by the method of generalized eikonal], *Radiotekhn. i elektron.* [Radiotech. Electron.], 2003, **48**, No. 9, 1078–1084.
9. M. V. Vesnik, “Analiticheskoe reshenie kraevykh zadach dlya volnovogo uravneniya s peremennym volnovym chislom metodom obobshchennogo eykonala” [Analytic solution of boundary-value problems for the wave equation with variable wave number by the method of generalized eikonal], *Nelin. mir* [Nonlin. World], 2003, **1**, No. 1-2, 59–63.
10. M. V. Vesnik, “Poluchenie difraktsionnykh koeffitsientov dlya dvukhmernogo polubeskonechnogo ideal’no provodyashchego rasseivatelya pri pomoshchi metoda obobshchennogo eykonala” [Computing diffraction coefficients for two-dimensional semi-infinite perfectly conductive scatterer by means of the generalized eikonal method], *Elektromagn. volny i elektron. sist.* [Electromag. Waves Electron. Syst.], 2004, **9**, No. 11, 23–29.
11. M. V. Vesnik, “Analiticheskoe reshenie zadachi difraktsii elektromagnitnoy volny na dvumernoy ideal’no provodyashchey poluplastine pri pomoshchi metoda obobshchennogo eykonala” [Analytic solution of the diffraction problem for an electromagnetic wave on two-dimensional perfectly conductive half-plate by the method of generalized eikonal], *Radiotekhn. i elektron.* [Radiotech. Electron.], 2008, **53**, No. 2, 144–156.
12. M. V. Vesnik, “O vozmozhnosti postroeniya utochnennogo evristicheskogo resheniya v zadache difraktsii na ploskom uglovom sektore” [On construction of the refined heuristic solution in the diffraction problem for a flat angular sector], *Radiotekhn. i elektron.* [Radiotech. Electron.], 2011, **56**, No. 5, 573–586.

13. M. V. Vesnik, "Analyticheskoe reshenie dvumernoy zadachi difraktsii elektromagnitnoy volny na usechenom kline" [Analytic solution of two-dimensional diffraction problem for an electromagnetic wave on a truncated wedge], *Radiotekhn. i elektron.* [Radiotech. Electron.], 2012, **57**, No. 10, 1053–1065.
14. M. V. Vesnik, "Postroenie evristicheskikh difraktsionnykh koeffitsientov v analiticheskikh resheniyakh zadach rasseyaniya volnovykh poley raznoy fizicheskoy prirody na ploskikh mnogougol'nykh plastinakh so slozhnymi granichnymi usloviyami" [Construction of heuristic diffraction coefficients in analytic solutions of scattering problems for wave fields of various physical nature on flat polygonal plates with compound boundary-value conditions], *Radiotekhn. i elektron.* [Radiotech. Electron.], 2014, **59**, No. 6, 543–551.
15. M. V. Vesnik, "Utochnenie priblizheniya fizicheskoy optiki v zadachakh difraktsii na trekhmernykh ob"ektakh" [Refinement of physical optics approximations in the diffraction problems on three-dimensional objects], *Trudy 2-oy Vserossiyskoy mikrovolnovoy konferentsii* [Proc. 2nd All-Russ. Microwave Conf.], Moscow, November 26–28, 2014, 443–448.
16. M. V. Vesnik, "Determinirovannaya teoriya rasprostraneniya radiovoln v usloviyakh gorodskoy zastroyki" [Deterministic theory of radio-waves propagation in urban environment], *Trudy Mezhdunarodnoy nauchnoy konferentsii "Izлучenie i rasseyanie EMV — IREMV-2015"* [Proc. Int. Sci. Conf. "Radiation and Scattering of Electromagnetic Waves"], YuFU, Rostov-na-Donu, 2015, 378–382.
17. M. V. Vesnik, "Evristicheskoe vyrazhenie dlya difraktsionnogo koeffitsienta poluprozrachnoy poluploskosti" [Heuristic expression for the diffraction coefficient of a semitransparent half-plane], *Sbornik trudov III Vserossiyskoy mikrovolnovoy konferentsii* [Proc. III All-Russ. Microwave Conf.], Moscow, November 25–27, 2015, 281–285.
18. N. N. Voytovich, B. Z. Katsenelenbaum, E. N. Korshunova, L. I. Pangonis, M. L. Pereyaslavets, A. N. Sivov, and A. D. Shatrov, *Elektrodinamika anten s poluprozrachnymi poverkhnostyami: metody konstruktivnogo sinteza* [Electrodynamics of Antennas with Semitransparent Surfaces: Methods of Constructive Synthesis], Nauka, Moscow, 1989.
19. G. A. Grinberg, *Izbrannye voprosy matematicheskoy teorii elektricheskikh i magnitnykh yavleniy* [Selected Topics of Mathematical Theory of Electric and Magnetic Phenomena], AN SSSR, Moscow, 1948.
20. V. B. Levyant, I. B. Petrov, and M. V. Muratov, "Chislennoe modelirovanie volnovykh otklikov ot sistemy (klastera) subvertikal'nykh makrotreshchin" [Numeric simulation of wave responses from a system (cluster) of subvertical macrofissures], *Tekhnolog. seismorazved.* [Technol. Seismogr.], 2012, **1**, 5–21.
21. G. T. Markov and A. F. Chaplin, *Vozbuzhdenie elektromagnitnykh voln* [Launching of Electromagnetic Waves], Energiya, Moscow—Leningrad, 1967.
22. E. I. Nefedov, *Difraktsiya elektromagnitnykh voln na dielektricheskikh strukturakh* [Diffraction of Electromagnetic Waves on Dielectric Structures], Nauka, Moscow, 1979.
23. B. Nobl, *Metod Vinera—Khopfa dlya resheniya differentsial'nykh uravneniy v chastnykh proizvodnykh* [The Wiener—Hopf Method for Solution of Partial Differential Equations], Mir, Moscow, 1962.
24. M. Teylor, *Pseudodifferentsial'nye operatory* [Pseudodifferential Operators], Mir, Moscow, 1985.
25. P. Ya. Ufimtsev, *Metod kraevykh voln v fizicheskoy teorii difraktsii* [Method of Edge Waves in Physical Theory of Diffraction], Sov. Radio, Moscow, 1962.
26. P. Ya. Ufimtsev, *Osnovy fizicheskoy teorii difraktsii* [Essentials of Physical Theory of Diffraction], BINOM. Laboratoriya znaniy, Moscow, 2009.
27. P. Ya. Ufimtsev, *Teoriya difraktsionnykh kraevykh voln v elektrodinamike. Vvedenie v fizicheskuyu teoriyu difraktsii* [Theory of diffractive edge waves in electrodynamics. Introduction to physical theory of diffraction], BINOM. Laboratoriya znaniy, Moscow, 2012.
28. V. A. Fok, *Problemy difraktsii i rasprostraneniya elektromagnitnykh voln* [Problems of Diffraction and Propagation of Magnetic Waves], Sov. radio, Moscow, 1970.
29. F. Frank and R. Mizes, *Differentsial'nye i integral'nye uravneniya matematicheskoy fiziki* [Differential and Integral Equations of Mathematical Physics], ONTI, Moscow—Leningrad, 1937.
30. Kh. Khenl, A. Maue, and K. Vestpfal', *Teoriya difraktsii* [Diffraction Theory], Mir, Moscow, 1964.
31. W. B. Gordon, "Far field approximations to the Kirchhoff—Helmholtz representations of scattered fields," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, 1975, **AP-23**, 590–592.
32. G. L. James, *Geometrical Theory of Diffraction for Electromagnetic Waves*, Peter Peregrinus Ltd., London, 1976.
33. J. B. Keller, "Geometrical theory of diffraction" [Geometrical theory of diffraction], *J. Opt. Soc. Amer.*, 1962, **52**, No. 2, 116–130.

34. Yu. A. Kravtsov and N. Ya. Zhu, *Theory of Diffraction: Heuristic Approaches*, Alpha Science Int. Ltd., Oxford, 2010.
35. M. A. Lyalinov and N. Y. Zhu, *Scattering of Waves by Wedges and Cones with Impedance Boundary Conditions*, SciTech Publishing Inc., Raileigh, 2012.
36. G. Pelosi, Ya. Rahmat-Samii, and J. L. Volakis, "High-frequency techniques in diffraction theory: 50 years of achievements in GTD, PTD, and related approaches," *IEEE Antennas Propag. Mag.*, 2013, **55**, No. 3, 16.
37. A. Sommerfeld, "Zur analytischen Theorie der Wärmeleitung," *Math. Ann.*, 1894, **45**, 263–277.
38. A. Sommerfeld, "Mathematische Theorie der Diffraction," *Math. Ann.*, 1896, **47**, 317–374.
39. M. V. Vesnik and P. Y. Ufimtsev, "An asymptotic feature of corner waves scattered by polygonal plates," *Electromagnetics*, 1992, **12**, No. 3-4, 265–272.
40. M. V. Vesnik, "Elimination of infinities in diffraction coefficients of physical optics current's components for a shadow contour of a scatterer," Proceedings of the 1995 International Symposium on Electromagnetic Theory, St. Petersburg, Russia, May 23–26, 1995, 407–409.
41. M. V. Vesnik, "The analytical solution for the electromagnetic diffraction on 2-D perfectly conducting scatterers of arbitrary shape," *IEEE Trans. Antennas and Propagation*, 2001, **AP-49**, No. 12, 1638–1644.
42. M. V. Vesnik, "Method of generalized eikonal as a new approach to diffraction process description," International Seminar Days on Diffraction'2006, St. Petersburg, May 30–June 2, 2006.
43. M. Vesnik, Yu. A. Kravtsov, "Diffraction by bodies with wedges: method of generalised eikonal (MGE)," In: *Theory of Diffraction: Heuristic Approaches*, Alpha Science Int. Ltd., Oxford, 2010.
44. M. V. Vesnik, "Analytical heuristic solution for the problem of elastic wave diffraction by a polygonal flat 3D scatterer," Abstracts of International conference Days on Diffraction'2013, St. Petersburg, May 27–31, 2013, 89.
45. M. V. Vesnik, "Efficiency of different heuristic approaches to calculation of electromagnetic diffraction by polyhedrons and other scatterers," *Radio Science*, 2014, **49**, No. 10, 945–953.
46. M. V. Vesnik, *The method of the Generalized Eikonal. New Approaches in the Diffraction Theory*, Walter de Gruyter GmbH, Berlin–Boston, 2015.

Mikhail Vesnik

Kotel'nikov Institute of Radio Engineering and Electronics, Russian Academy of Sciences, 11-7 Mokhovaya st., 125009 Moscow, Russia

RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st., 117198 Moscow, Russia

E-mail: vesnik@cplire.ru

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ИНТЕГРОДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

© 2016 г. **В. В. ВЛАСОВ, Н. А. РАУТИАН**

Аннотация. В работе изучается корректная разрешимость начальных задач для абстрактных интегродифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве, а также проводится спектральный анализ оператор-функций, являющихся символами указанных уравнений. Изучаемые уравнения представляют собой абстрактную форму линейных интегродифференциальных уравнений в частных производных, возникающих в теории вязкоупругости и имеющих ряд других важных приложений. Установлена локализация и структура спектра оператор-функций, являющихся символами этих уравнений.

СОДЕРЖАНИЕ

| | | |
|---|--|----|
| 1. Введение | | 53 |
| 2. Формулировка результатов | | 55 |
| 3. Доказательство теорем 2.3, 2.4 | | 57 |
| Список литературы | | 67 |

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа посвящена исследованию интегродифференциальных уравнений с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовом пространстве. Рассматриваемые уравнения представляют собой абстрактное гиперболическое уравнение, возмущенное слагаемыми, содержащими вольтерровы интегральные операторы. Эти уравнения могут быть реализованы как интегродифференциальные уравнения в частных производных, возникающие в теории вязкоупругости (см. [18, 23], а также как интегродифференциальные уравнения Гуртина—Пипкина (см. [20, 32, 33, 39]), которые описывают процесс распространения тепла в средах с памятью с конечной скоростью, кроме того, указанные уравнения возникают в задачах усреднения в многофазных средах (закон Дарси, см. [5, 16, 17]).

Перечисленные задачи можно объединить в достаточно широкий класс интегродифференциальных уравнений в частных производных, поэтому более естественно рассматривать интегродифференциальные уравнения с неограниченными операторными коэффициентами в гильбертовых пространствах (абстрактные интегродифференциальные уравнения), которые могут быть реализованы как интегродифференциальные уравнения в частных производных. В настоящее время существует обширная литература по абстрактным интегродифференциальным уравнениям (см., например, работы [2–14, 21, 29–31, 36–41, 43–45] и цитированную в них литературу). В работах [1–3, 29–31, 36, 44, 45] (см. также цитированную в них литературу) изучались интегродифференциальные уравнения, главной частью которых является абстрактное параболическое уравнение. Интегродифференциальные уравнения, главной частью которых является абстрактное гиперболическое уравнение, изучены в меньшей степени (см., например, [4, 7–14, 28, 37, 43]).

Пусть H — сепарабельное гильбертово пространство, A — самосопряженный положительный оператор, $A^* = A \geq \varkappa_0 I$ ($\varkappa_0 > 0$), действующий в пространстве H , имеющий компактный обратный. Пусть B — симметрический оператор $(Bx, y) = (x, By)$, действующий в пространстве H

Работа выполнена при поддержке Российского научного фонда (проект № 14-14-00592).

с областью определения $\text{Dom}(B)$ ($\text{Dom}(A) \subseteq \text{Dom}(B)$), неотрицательный, $(Bx, x) \geq 0$ для любых $x, y \in \text{Dom}(B)$ и удовлетворяющий неравенству $\|Bx\| \leq \varkappa \|Ax\|$ ($0 < \varkappa < 1$) для любого $x \in \text{Dom}(A)$, I — тождественный оператор в пространстве H .

Рассмотрим следующую задачу для интегродифференциального уравнения второго порядка на положительной полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$:

$$\frac{d^2 u(t)}{dt^2} + Au(t) + Bu(t) - \int_0^t K(t-s)Au(s)ds - \int_0^t Q(t-s)Bu(s)ds = f(t), \quad t \in \mathbb{R}_+, \quad (1.1)$$

$$u(+0) = \varphi_0, \quad u^{(1)}(+0) = \varphi_1. \quad (1.2)$$

Предположим, что ядра интегральных операторов $K(t)$ и $Q(t)$ имеют следующее представление:

$$K(t) = \int_0^\infty e^{-t\tau} d\mu(\tau), \quad Q(t) = \int_0^\infty e^{-t\tau} d\nu(\tau), \quad (1.3)$$

где $d\mu$ и $d\nu$ — положительные меры, которым соответствуют возрастающие, непрерывные справа функции распределения μ и ν , соответственно. Интеграл понимается в смысле Стильтьеса. Кроме того, будем считать, что выполнены условия

$$0 < \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\tau} < 1, \quad 0 < \int_0^\infty \frac{d\nu(\tau)}{\tau} < 1. \quad (1.4)$$

Условие (1.4) означает, что $K(t), Q(t) \in L_1(\mathbb{R}_+)$, $\|K\|_{L_1} < 1$, $\|Q\|_{L_1} < 1$. Если к условиям (1.4) добавить также условия

$$K(0) = \int_0^\infty d\mu(\tau) \equiv \text{Var } \mu|_0^\infty < +\infty, \quad Q(0) = \int_0^\infty d\nu(\tau) \equiv \text{Var } \nu|_0^\infty < +\infty, \quad (1.5)$$

тогда ядра $K(t)$ и $Q(t)$ будут принадлежать пространству $W_1^1(\mathbb{R}_+)$.

В дальнейшем будем предполагать, что выполнено условие

$$\inf_{\substack{\|x\|=1, \\ x \in \text{Dom}(A)}} ((A+B)x, x) > 1. \quad (1.6)$$

Интегродифференциальное уравнение (1.1) представляет собой абстрактную форму динамического уравнения вязкоупругости, где операторы A и B порождаются дифференциальными выражениями

$$A = -\rho^{-1}\mu \left(\Delta u + \frac{1}{3} \text{grad}(\text{div } u) \right), \quad B = -\frac{1}{3}\rho^{-1}\lambda \cdot \text{grad}(\text{div } u),$$

где $u = \vec{u}(x, t) \in \mathbb{R}^3$ — вектор перемещений вязкоупругой наследственной изотропной среды заполняющей ограниченную область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ с достаточно гладкой границей $\partial\Omega$, ρ — постоянная плотность, $\rho > 0$, коэффициенты Ламе λ, μ — положительные постоянные, $K(t), Q(t)$ — функции релаксации, характеризующие наследственные свойства среды. На границе области $\partial\Omega$ выполняется краевое условие Дирихле

$$u|_{\partial\Omega} = 0. \quad (1.7)$$

В качестве пространства H рассматривается пространство трехмерных вектор-функций $L_2(\Omega)$. Область определения $\text{Dom}(A)$ принадлежит векторному пространству Соболева $W_2^2(\Omega)$ и естественно выделяется краевым условием (1.7). Условия (1.4) имеет конкретный физический смысл (подробнее см. [18, 23]).

В случае, когда оператор $B = 0$ и самосопряженный положительный оператор A может быть реализован как $Ay = -y''(x)$, где $x \in (0, \pi)$, $y(0) = y(\pi) = 0$, либо как $Ay = -\Delta y$ с условиями Дирихле в ограниченной области с достаточно гладкой границей, уравнение (1.1) представляет собой абстрактную форму уравнения Гуртина—Пипкина, описывающего процесс распространения тепла в средах с памятью с конечной скоростью.

Другой класс приложений — это задачи усреднения в многофазных средах, где одной из фаз является упругая (или вязкоупругая) среда, а другой — вязкая (сжимаемая или несжимаемая) жидкость (подробнее см. [24, 25]). Задача усреднения состоит в том, чтобы построить эффективную (усредненную) модель такой двухфазной среды, когда отдельные включения той или иной фазы быстро чередуются при изменении пространственных переменных. Предварительные исследования показывают, что одномерная модель распространения колебаний в такой усредненной (гомогенизированной) среде в абстрактной форме может быть записана как операторное уравнение, рассматриваемое в данной работе.

Следует также отметить, что уравнения рассматриваемого вида возникают в физических задачах. К уравнениям, близким по форме к рассматриваемым в этой статье, относится ряд уравнений и систем уравнений, возникающих в кинетической теории газов. В этих задачах интегральные слагаемые играют роль вязкости. Такое операторное представление вязкости возникает при выводе уравнений газовой динамики непосредственно из законов взаимодействия молекул (см. [22]).

Рассматривая преобразование Лапласа уравнения (1.1) при однородных начальных условиях, получаем оператор-функцию

$$L(\lambda) = \lambda^2 I + A + B - \hat{K}(\lambda)A - \hat{Q}(\lambda)B, \quad (1.8)$$

которая является символом этого уравнения. Здесь $\hat{K}(\lambda)$ и $\hat{Q}(\lambda)$ — преобразования Лапласа ядер $K(t)$ и $Q(t)$, соответственно, имеющие представления

$$\hat{K}(\lambda) = \int_0^\infty \frac{d\mu(\tau)}{\lambda + \tau}, \quad \hat{Q}(\lambda) = \int_0^\infty \frac{d\nu(\tau)}{\lambda + \tau}. \quad (1.9)$$

В настоящей работе мы устанавливаем корректную разрешимость начальной задачи для уравнения (1.1) в весовых пространствах Соболева на положительной полуоси и исследуем вопрос о локализации спектра для оператор-функции $L(\lambda)$, являющейся символом указанного уравнения.

В наших предшествующих работах [4, 6–14, 43] проводилось подробное исследование задачи (1.1), (1.2) в случае, когда оператор $B = 0$. Наш подход к исследованию основывался на спектральном анализе оператор-функции (1.8), который также дает возможность получить результат о корректной разрешимости и представление решения указанной задачи в виде ряда по экспонентам, соответствующим точкам спектра оператор-функции $L(\lambda)$. Отметим также, что результаты работ [4, 6, 8–14, 43] подытожены в главе 3 монографии [7].

Следует отметить, что метод, используемый нами для доказательства корректной разрешимости начальных задач для абстрактных интегродифференциальных уравнений, существенно отличается от более традиционного подхода, использованного Л. Пандолфи в работе [41], где разрешимость изучается в функциональном пространстве на конечном временном интервале $(0, T)$. В нашей работе разрешимость изучается в весовых пространствах Соболева $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A_0)$ вектор-функций на положительной полуоси \mathbb{R}_+ , где A_0 — положительный самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве. Доказательство нашей теоремы 2.1 о разрешимости существенно использует гильбертову структуру пространств $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A_0)$, $L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, а также теорему Пэли—Винера, в то время как в работе [41] рассмотрения проводятся в банаховом функциональном пространстве гладких функций на конечном временном интервале $(0, T)$.

На протяжении всей работы выражение вида $D \lesssim E$ подразумевает неравенство $D \leq cE$, выполненное с некоторой положительной константой c , выражение $D \approx E$ означает $D \lesssim E \lesssim D$. Мы используем символы $:=$ и $=:$ для введения новых величин.

2. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Введем обозначение $A_0 := A + B$. Согласно известному результату (см. [34, с. 361]), оператор A_0 является самосопряженным и положительным. Превратим область определения $\text{Dom}(A_0^\beta)$ оператора A_0^β , $\beta > 0$, в гильбертово пространство H_β , введя на $\text{Dom}(A_0^\beta)$ норму $\|\cdot\|_\beta = \|A_0^\beta \cdot\|$, эквивалентную норме графика оператора A_0^β .

Замечание 2.1. Из свойств операторов A и B следует, что оператор A_0 является обратимым, операторы AA_0^{-1} , BA_0^{-1} — ограниченные, а оператор A_0^{-1} — компактный.

В самом деле, из условия $\|Bx\| \leq \varkappa \|Ax\|$, $0 < \varkappa < 1$, $x \in \text{Dom}(A)$, следует, что оператор BA^{-1} допускает ограниченное замыкание в пространстве H и $\|BA^{-1}\| \leq \varkappa < 1$. Следовательно, операторы AA_0^{-1} , BA_0^{-1} являются ограниченными, поскольку $AA_0^{-1} = (I + BA^{-1})^{-1}$, $BA_0^{-1} = BA^{-1}(I + BA^{-1})^{-1}$ и оператор $A_0^{-1} = A^{-1}(I + BA^{-1})^{-1}$ является компактным.

2.1. Корректная разрешимость. Через $W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A_0)$ обозначим пространство Соболева вектор-функций на полуоси $\mathbb{R}_+ = (0, \infty)$ со значениями в H , снабженное нормой

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A_0)} \equiv \left(\int_0^\infty e^{-2\gamma t} \left(\|u^{(n)}(t)\|_H^2 + \|A_0 u(t)\|_H^2 \right) dt \right)^{1/2}, \quad \gamma \geq 0.$$

Подробнее о пространствах $W_{2,\gamma}^n(\mathbb{R}_+, A_0)$, см. [19, гл. 1]. При $n = 0$ полагаем $W_{2,\gamma}^0(\mathbb{R}_+, A_0) \equiv L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)$, при $\gamma = 0$ будем писать $W_{2,0}^n = W_2^n$.

Определение 2.1. Будем называть вектор-функцию u *сильным решением* задачи (1.1), (1.2), если она принадлежит пространству $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A_0)$ для некоторого $\gamma \geq 0$ ($A_0 = A + B$), удовлетворяет уравнению (1.1) почти всюду на полуоси \mathbb{R}_+ и начальному условию (1.2).

Следующая теорема дает достаточное условие корректной разрешимости задачи (1.1), (1.2).

Теорема 2.1. Пусть выполнено условие (1.5), $f'(t) \in L_{2,\gamma_0}(\mathbb{R}_+, H)$ для некоторого $\gamma_0 \geq 0$, $f(0) = 0$, кроме того, $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_{1/2}$. Тогда существует такое $\gamma_1 \geq \gamma_0$, что для любого $\gamma > \gamma_1$ задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение в пространстве $W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A_0)$, удовлетворяющее неравенству

$$\|u\|_{W_{2,\gamma}^2(\mathbb{R}_+, A_0)} \leq d \left(\|f'(t)\|_{L_{2,\gamma}(\mathbb{R}_+, H)} + \|A_0 \varphi_0\|_H + \|A_0^{1/2} \varphi_1\|_H \right), \quad (2.1)$$

где константа d не зависит от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1 .

Доказательство теоремы 2.1 приведено в [11].

Уместно отметить, что из теоремы 2.3 немедленно вытекает результат о разрешимости задачи (1.1), (1.2) на конечном временном интервале $(0, T)$ в пространстве $W_2^2((0, T), A_0)$ для любого $T > 0$.

Определение 2.2. Будем называть вектор-функцию u *решением почти всюду* для задачи (1.1), (1.2), если она принадлежит пространству $W_2^2((0, T), A_0)$ для любого $T > 0$, удовлетворяет уравнению (1.1) почти всюду на полуоси \mathbb{R}_+ и начальным условиям (1.2).

Теорема 2.2. Пусть выполнено условие (1.5), $f'(t) \in L_2((0, T), H)$ для любого $T > 0$, $f(0) = 0$, кроме того, $\varphi_0 \in H_1$, $\varphi_1 \in H_{1/2}$. Тогда задача (1.1), (1.2) имеет единственное решение почти всюду, удовлетворяющее неравенству

$$\|u\|_{W_2^2((0, T), A_0)} \leq K \left(\|f'(t)\|_{L_2((0, T), H)} + \|A_0 \varphi_0\|_H + \|A_0^{1/2} \varphi_1\|_H \right), \quad (2.2)$$

с постоянной $K = K(T)$, не зависящей от вектор-функции f и векторов φ_0, φ_1 .

2.2. Спектральный анализ. Перейдем к изучению структуры спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в случае, когда выполнены условия (1.4), (1.5), а также дополнительные условия.

Теорема 2.3. Пусть выполнены условия (1.4), (1.5), (1.6) и носители мер $\mu(\tau)$, $\nu(\tau)$ принадлежат отрезку $[d_1, d_2]$, где $0 < d_1 < d_2 < +\infty$. Тогда для любого сколь угодно малого $\theta_0 > 0$ существует такое число $R_0 > 0$, что спектр оператор-функции $L(\lambda)$ принадлежит множеству

$$\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda < 0, |\lambda| < R_0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : \alpha_1 \leq \text{Re } \lambda \leq \alpha_2\},$$

где $\alpha_1 = \alpha_0 - \theta_0$, $R_0 \geq \max(d_2, -\alpha_0 + \theta_0)$,

$$\alpha_0 = -\frac{1}{2} \sup_{\|f\|=1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((K(0)A + Q(0)B)f, f)}{((A + B)f, f)}, \quad f \in D(A),$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} \inf_{\|f\|=1} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{((K(0)A + Q(0)B)f, f)}{((A + B + d_2^2 I)f, f)}. \quad (2.3)$$

При этом существует такое $\gamma_0 > 0$, что для оператор-функции $L^{-1}(\lambda)$ на множестве $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < -R_0\} \cup \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > \gamma_0\}$ справедлива оценка

$$\|L^{-1}(\lambda)\| \leq \frac{\operatorname{const}}{|\lambda| |\operatorname{Re} \lambda|}. \quad (2.4)$$

Предложение 2.1. Величина α_0 допускает следующую оценку:

$$\alpha_0 \geq -\frac{1}{2} \left\| A_0^{-1/2} (K(0)A + Q(0)B) A_0^{-1/2} \right\|.$$

Замечание 2.2. Согласно [26, лемма 2.1] оператор $A^{-1/2}BA^{-1/2}$ допускает ограниченное замыкание в пространстве H . Отсюда следует, что оператор $A^{-1/2}A_0A^{-1/2} = I + A^{-1/2}BA^{-1/2}$ допускает ограниченное замыкание в H . В свою очередь, в силу упомянутой [26, лемма 2.1] и в силу самосопряженности оператора $A_0 = A + B$, оператор $A_0^{-1/2}AA_0^{-1/2}$ также допускает ограниченное замыкание в пространстве H .

Теорема 2.4. Пусть выполнены условия теоремы 2.3. Тогда не вещественная часть спектра оператор-функции $L(\lambda)$ симметрична относительно вещественной оси и состоит из собственных значений конечной алгебраической кратности, причем для любого $\varepsilon > 0$ в области $\Omega_\varepsilon := \Omega \setminus \{\lambda : -d_2 - \varepsilon < \operatorname{Re} \lambda < 0, |\operatorname{Im} \lambda| < \varepsilon\}$ собственные значения являются изолированными, т. е. не имеют точек накопления.

Отметим, что оператор-функция вида (1.8) в случае, когда ядра интегральных операторов являются рядами убывающих экспонент с положительными коэффициентами, изучалась в [10]. Теоремы 2.3, 2.4 представляют собой естественное развитие результатов работы [10].

3. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМ 2.3, 2.4

Доказательству теорем 2.3, 2.4 предположим несколько лемм, представляющих, на наш взгляд, самостоятельную ценность.

Лемма 3.1. Пусть выполнены условия (1.4), (1.5). Тогда оператор-функция $L(\lambda)$ обратима в замкнутой правой полуплоскости и справедливо неравенство

$$\left\| A^{1/2}L^{-1}(\lambda)A^{1/2} \right\| \leq \operatorname{const}, \quad \operatorname{Re} \lambda > \gamma > 0. \quad (3.1)$$

Доказательство. Преобразуем оператор-функцию $L(\lambda)$ к виду

$$L(\lambda) = A^{1/2}M(\lambda)A^{1/2}, \quad (3.2)$$

где

$$M(\lambda) = \lambda^2 A^{-1} + \left(1 - \hat{K}(\lambda)\right) I + \left(1 - \hat{Q}(\lambda)\right) \mathcal{K}$$

и через оператор \mathcal{K} обозначен оператор $A^{-1/2}BA^{-1/2}$. Согласно [26, лемма 2.1] оператор \mathcal{K} допускает ограниченное замыкание в пространстве H . Кроме того, оператор \mathcal{K} является неотрицательным, т. е. $(\mathcal{K}x, x) \geq 0$ для любого $x \in H$, и симметричным в силу неотрицательности и симметричности оператора B .

Покажем, что оператор-функция $L(\lambda)$ обратима в правой полуплоскости. Рассмотрим форму $(M(\lambda)f, f)$ для $\lambda = x + iy$ таких, что $x > |y|$. Справедлива следующая цепочка неравенств:

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} (M(\lambda)f, f) &= (x^2 - y^2) (A^{-1}f, f) + \left(1 - \int_{d_1}^{+\infty} \frac{(x + \tau)d\mu(\tau)}{(x + \tau)^2 + y^2}\right) (f, f) + \\ &+ \left(1 - \int_{d_1}^{+\infty} \frac{(x + \tau)d\nu(\tau)}{((x + \tau)^2 + y^2)}\right) (\mathcal{K}f, f) \geq (x^2 - y^2) (A^{-1}f, f) + \left(1 - \int_{d_1}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{x + \tau}\right) (f, f) + \end{aligned}$$

$$+ \left(1 - \int_{d_1}^{+\infty} \frac{d\nu(\tau)}{x + \tau} \right) (\mathcal{K}f, f) \geq \left(1 - \int_{d_1}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} \right) (f, f) \geq \delta \|f\|^2, \quad (3.3)$$

где $\delta = 1 - \int_{d_1}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} > 0$.

Для $\lambda = x + iy$ таких, что $y \geq x \geq \gamma > 0$, справедливы следующие неравенства:

$$\begin{aligned} \operatorname{Im}(M(\lambda)f, f) &= 2xy(A^{-1}f, f) + y \int_{d_1}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{(x + \tau)^2 + y^2} (f, f) + y \int_{d_1}^{+\infty} \frac{d\nu(\tau)}{(x + \tau)^2 + y^2} (\mathcal{K}f, f) \geq \\ &\geq 2x^2(A^{-1}f, f) + y \int_{d_1}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{(x + \tau)^2 + y^2} (f, f) + y \int_{d_1}^{+\infty} \frac{d\nu(\tau)}{(x + \tau)^2 + y^2} (\mathcal{K}f, f) \geq \gamma \|f\|^2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Для $\lambda = x + iy$ таких, что $y < -x < -\gamma > 0$, $\gamma > 0$, справедливы следующие неравенства:

$$-\operatorname{Im}(M(\lambda)f, f) \geq 2x^2(f, f) + |y| \int_{d_1}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{(x + \tau)^2 + y^2} (f, f) + |y| \int_{d_1}^{+\infty} \frac{d\nu(\tau)}{(x + \tau)^2 + y^2} (\mathcal{K}f, f) \geq \gamma \|f\|^2. \quad (3.5)$$

Объединяя неравенства (3.4) и (3.5), получаем что в области $\{\lambda = x + iy \mid |y| > x \geq \gamma > 0\}$ справедлива оценка

$$|\operatorname{Im}(M(\lambda)f, f)| \geq \gamma \|f\|^2.$$

В силу произвольности $\gamma > 0$, из неравенств (3.3) и (3.5) вытекает обратимость оператор-функции $M(\lambda)$, а следовательно, и оператор-функции $L(\lambda)$ в правой полуплоскости. Оценка (3.1) следует из неравенств (3.3), (3.5). □

Рассмотрим оператор-функцию $L(\lambda)$ на мнимой оси. В силу представлений

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}(M(iy)f, f) &= -y^2(A^{-1}f, f) + \left(1 - \int_{d_1}^{d_2} \frac{\tau d\mu(\tau)}{\tau^2 + y^2} \right) (f, f) + \left(1 - \int_{d_1}^{d_2} \frac{\tau d\nu(\tau)}{\tau^2 + y^2} \right) (\mathcal{K}f, f), \\ \operatorname{Im}(M(iy)f, f) &= y \int_{d_1}^{+\infty} \frac{\tau d\mu(\tau)}{\tau^2 + y^2} (f, f) + y \int_{d_1}^{d_2} \frac{\tau d\nu(\tau)}{\tau^2 + y^2} (\mathcal{K}f, f) \end{aligned}$$

из условия (1.4) вытекает, что существует такое $\delta > 0$, что для всех y таких, что $|y| < \delta$, справедливо неравенство

$$\operatorname{Re}(M(iy)f, f) \geq k(f, f), \quad (3.6)$$

с некоторой постоянной $k > 0$. С другой стороны, справедливо неравенство

$$|\operatorname{Im}(M(iy)f, f)| \geq |y| \left[\int_{d_1}^{d_2} \frac{\tau d\mu(\tau)}{\tau^2 + y^2} (f, f) + \int_{d_1}^{d_2} \frac{\tau d\nu(\tau)}{\tau^2 + y^2} (\mathcal{K}f, f) \right]. \quad (3.7)$$

Из неравенств (3.6) и (3.7) вытекает обратимость оператор-функции $L(\lambda)$ на мнимой оси.

Перейдем к изучению спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в левой полуплоскости.

Лемма 3.2. Пусть выполнены условия (1.4), (1.5) и носители функций $\mu(t)$ и $\nu(t)$ лежат на отрезке $[d_1, d_2]$, где $0 < d_1 < d_2 < +\infty$. Тогда найдутся такие $R_0 > d_2$ и $\gamma_0 > 0$, что оператор-функция $L(\lambda)$ обратима в объединении полуплоскостей $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < -R_0\} \cup \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > \gamma_0\}$ и справедлива оценка

$$\|L^{-1}(\lambda)\| \leq \frac{\operatorname{const}}{|\lambda| |\operatorname{Re} \lambda|}, \quad \lambda \in \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < -R_0\} \cup \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > \gamma_0\}.$$

Доказательство. Покажем, что в области $\Omega := \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < -d_2, |\operatorname{Im} \lambda| < |\operatorname{Re} \lambda|\}$ оператор функции $L(\lambda)$ обратима. Для этого заметим, что при $\operatorname{Re} \lambda = x < -d_2$

$$\operatorname{Re} \left(1 - \hat{K}(\lambda) \right) = \left(1 - \int_{d_1}^{d_2} \frac{(x + \tau) d\mu(\tau)}{(x + \tau)^2 + y^2} \right) \geq 1,$$

$$\operatorname{Re} \left(1 - \hat{Q}(\lambda) \right) = \left(1 - \int_{d_1}^{d_2} \frac{(x + \tau) d\nu(\tau)}{(x + \tau)^2 + y^2} \right) \geq 1$$

и, следовательно, в области Ω

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} (M(\lambda)f, f) &= (x^2 - y^2) (A^{-1}f, f) + \left(1 - \int_{d_1}^{+\infty} \frac{(x + \tau) d\mu(\tau)}{(x + \tau)^2 + y^2} \right) (f, f) + \\ &+ \left(1 - \int_{d_1}^{+\infty} \frac{(x + \tau) d\nu(\tau)}{((x + \tau)^2 + y^2)} \right) (\mathcal{K}f, f) \geq (f, f), \quad \lambda \in \Omega. \end{aligned}$$

Покажем теперь, что найдутся такие $R_0 > 0$ и $\gamma_0 > 0$, что оператор-функция $L(\lambda)$ обратима в полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < -R_0\}$, а также в полуплоскости $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > \gamma_0\}$.

Представим оператор-функцию $L^{-1}(\lambda)$ в виде

$$L^{-1}(\lambda) = (\lambda^2 I + (A + B))^{-1} \left(I - \hat{K}(\lambda) A (\lambda^2 I + (A + B))^{-1} - \hat{Q}(\lambda) B (\lambda^2 I + (A + B))^{-1} \right)^{-1}. \quad (3.8)$$

Покажем теперь, что найдутся такие $R_0 > 0$ и $\gamma_0 > 0$, что для всех λ , удовлетворяющих условию $\lambda \in \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < -R_0\} \cup \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > \gamma_0\}$, справедливы следующие неравенства:

$$\left\| \hat{K}(\lambda) A (\lambda^2 I + (A + B))^{-1} \right\| \leq \frac{\operatorname{const}}{|\operatorname{Re} \lambda|}, \quad (3.9)$$

$$\left\| \hat{Q}(\lambda) B (\lambda^2 I + (A + B))^{-1} \right\| \leq \frac{\operatorname{const}}{|\operatorname{Re} \lambda|}. \quad (3.10)$$

Согласно известному результату (см. [34, с. 361]), оператор $A_0 = A + B$ является самосопряженным и положительным.

Для доказательства неравенств (3.9) и (3.10) нам потребуется следующее утверждение.

Лемма 3.3. *Существует такое $\gamma > 0$, что справедливо неравенство*

$$\sup_{\lambda: |\operatorname{Re} \lambda| > \gamma} \left\| \frac{1}{\lambda} A_0 (\lambda^2 I + A_0)^{-1} \right\| < \frac{\operatorname{const}}{|\operatorname{Re} \lambda|}. \quad (3.11)$$

Доказательство. Принимая во внимание, что оператор A_0 — самосопряженный, используем спектральную теорему (см. [34, с. 452–453]). Положим $\lambda = \tau + i\nu$ ($\tau, \nu \in \mathbb{R}$) и $a \in \sigma(A_0) \subset [\alpha_0, +\infty)$, т. е. a принадлежит спектру оператора A_0 . Согласно утверждению спектральной теоремы, достаточно установить оценку

$$\frac{a}{(\tau^2 + \nu^2)^{1/2} ((\tau^2 - \nu^2) + a)^2 + 4\tau^2 \nu^2)^{1/2}} \leq \frac{\operatorname{const}}{\tau}, \quad \tau \geq \gamma > 0. \quad (3.12)$$

Для этого оценим снизу функцию

$$f(a, \tau, \nu) = (\tau^2 + \nu^2) ((\tau^2 - \nu^2) + a)^2 + 4\tau^2 \nu^2.$$

Пусть $d \in (0, 1)$, тогда имеет место оценка

$$\begin{aligned} f(a, \tau, \nu) &\geq \min \left\{ \min_{\nu^2 \in [0, da]} f(a, \tau, \nu), \min_{\nu^2 \in [da, +\infty]} f(a, \tau, \nu) \right\} \geq \\ &\geq \min \{ \tau^2 (\tau^2 + (1-d)a\tau^2)^2, (\tau^2 + da)4da\tau^2 \}. \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{a}{(f(a, \tau, \nu))^{1/2}} &\leq a \max \left[\frac{1}{(\tau^2 + (1-d)a)\tau}, \frac{1}{(\tau^2 + da)^{1/2} 2\sqrt{da}\tau} \right] \leq \\ &\leq \max \left[\frac{1}{\tau \left(\frac{\tau^2}{a} + (1-d) \right)}, \frac{1}{2\sqrt{d}\tau \left(\frac{\tau^2}{a} + d \right)^{1/2}} \right] \leq \max \left[\frac{1}{\tau(1-d)}, \frac{1}{2\tau d} \right]. \end{aligned} \quad (3.13)$$

Полагая $d = 1/3$ в неравенстве (3.13), мы получаем искомую оценку (3.12). Лемма 3.3 доказана. \square

Легко видеть, что для функций $\hat{K}(\lambda)$ и $\hat{Q}(\lambda)$ справедливы оценки

$$|\hat{K}(\lambda)| \leq \frac{\text{Var } \mu|_{d_1}^{d_2}}{|\lambda|}, \quad |\hat{Q}(\lambda)| \leq \frac{\text{Var } \nu|_{d_1}^{d_2}}{|\lambda|}, \quad \text{Re } \lambda > 0, \quad (3.14)$$

и

$$|\hat{K}(\lambda)| \leq \frac{\text{Var } \mu|_{d_1}^{d_2}}{|\lambda| - d_2}, \quad |\hat{Q}(\lambda)| \leq \frac{\text{Var } \nu|_{d_1}^{d_2}}{|\lambda| - d_2}, \quad \text{Re } \lambda < -d_2.$$

Из последних оценок следует, что для всех таких λ , что $|\lambda| > R_0 > d_2$, найдется такое $K > 0$, что будут справедливы неравенства

$$|\hat{K}(\lambda)| \leq \frac{K}{|\lambda|}, \quad |\hat{Q}(\lambda)| \leq \frac{K}{|\lambda|}, \quad |\lambda| > R_0. \quad (3.15)$$

Завершим доказательство леммы 3.2. В силу замечания 2.1, леммы 3.3 и оценок (3.14), (3.15), получаем, что

$$\begin{aligned} \left\| \hat{K}(\lambda)A(\lambda^2 I + A_0)^{-1} \right\| &= \left\| \hat{K}(\lambda)AA_0^{-1}A_0(\lambda^2 I + A_0)^{-1} \right\| \leq \\ &\leq \text{const} \|AA_0^{-1}\| \frac{1}{|\lambda|} \left\| A_0(\lambda^2 I + A_0)^{-1} \right\| \leq \frac{\text{const}}{|\text{Re } \lambda|}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \left\| \hat{Q}(\lambda)B(\lambda^2 I + A_0)^{-1} \right\| &= \left\| \hat{Q}(\lambda)BA_0^{-1}A_0(\lambda^2 I + A_0)^{-1} \right\| \leq \\ &\leq \text{const} \|BA_0^{-1}\| \frac{1}{|\lambda|} \left\| A_0(\lambda^2 I + A_0)^{-1} \right\| \leq \frac{\text{const}}{|\text{Re } \lambda|}. \end{aligned}$$

Для дальнейших рассуждений будет использоваться следующее известное предложение.

Предложение 3.1. *Справедлива следующая оценка:*

$$\left\| (\lambda^2 I + A_0)^{-1} \right\| \leq \frac{1}{|\lambda| |\text{Re } \lambda|}, \quad \text{Re } \lambda \neq 0.$$

Доказательство предложения немедленно вытекает из спектральной теоремы и неравенств

$$\left| \frac{1}{\lambda^2 + a^2} \right| = \left| \frac{1}{(\lambda + ia)(\lambda - ia)} \right| < \frac{1}{|\lambda| |\text{Re } \lambda|}.$$

На основании представления (3.8), неравенств (3.9), (3.10) и предложения 3.1, получаем, что существует такое $R_0 > 0$ и такое $\gamma_0 > 0$, что оператор-функция $L^{-1}(\lambda)$ допускает оценку

$$\|L^{-1}(\lambda)\| \leq \frac{\text{const}}{|\lambda| |\text{Re } \lambda|}, \quad \lambda \in \{\lambda : \text{Re } \lambda < -R_0\} \cup \{\lambda : \text{Re } \lambda > \gamma_0\}.$$

В самом деле, согласно оценкам (3.9), (3.10) можно выбрать такие $R_0 > 0$ и $\gamma_0 > 0$, что

$$\left\| \left(\hat{K}(\lambda)A + \hat{Q}(\lambda)B \right) (\lambda^2 I + (A + B))^{-1} \right\| < 1$$

при $\lambda \in \{\lambda : \text{Re } \lambda < -R_0\} \cup \{\lambda : \text{Re } \lambda > \gamma_0\}$. Следовательно, для указанных λ будет существовать оператор-функция

$$\left(I - \hat{K}(\lambda)A(\lambda^2 I + (A + B))^{-1} - \hat{Q}(\lambda)B(\lambda^2 I + (A + B))^{-1} \right)^{-1},$$

причем она будет регулярной и ограниченной на множестве $\{\lambda : \operatorname{Re} \lambda < -R_0\} \cup \{\lambda : \operatorname{Re} \lambda > \gamma_0\}$. Таким образом, из представления (3.8) и предложения 3.1 получим утверждение леммы.

Лемма 3.2 доказана. \square

Объединяя полученные выше результаты, получаем, что спектр оператор-функции $L(\lambda)$ лежит в полосе $\{\lambda : -R_0 < \operatorname{Re} \lambda < 0\}$.

Перейдем теперь к уточнению локализации спектра оператор-функции $L(\lambda)$ в левой полуплоскости.

Введем следующие обозначения: $\omega^2 = ((A+B)f, f)$, где $f \in \operatorname{Dom}(A)$, $\|f\| = 1$,

$$r_1(f) = \frac{(Af, f)}{((A+B)f, f)}, \quad r_2(f) = \frac{(Bf, f)}{((A+B)f, f)}.$$

В указанных обозначениях форму $(L(\lambda)f, f)$, где $f \in \operatorname{Dom}(A)$, $\|f\| = 1$, можно переписать в следующем виде:

$$(L(\lambda)f, f) = \lambda^2 + \omega^2 - \int_{d_0}^{+\infty} \frac{r_1(f)\omega^2}{\tau + \lambda} d\mu(\tau) - \int_{d_0}^{+\infty} \frac{r_2(f)\omega^2}{\tau + \lambda} d\nu(\tau).$$

После деления на ω^2 получаем

$$\frac{(L(\lambda)f, f)}{\omega^2} = \frac{\lambda^2}{\omega^2} + 1 - \int_{d_0}^{+\infty} \frac{d\theta(\tau)}{\tau + \lambda},$$

где $d\theta(\tau) = r_1(f)d\mu(\tau) + r_2(f)d\nu(\tau)$.

Заметим, что в силу условия (1.4) и того, что $r_1(f) + r_2(f) = 1$, справедливо неравенство

$$\int_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{\tau} = r_1(f) \int_{d_1}^{d_2} \frac{d\mu(\tau)}{\tau} + r_2(f) \int_{d_1}^{d_2} \frac{d\nu(\tau)}{\tau} < 1.$$

Дальнейшему изложению предположим следующую лемму о расположении не вещественных нулей функции

$$m(\lambda) = \frac{\lambda^2}{\omega^2} + 1 - \int_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{\tau + \lambda}.$$

В дальнейшем предполагается, что параметр $\omega \in [\omega_0, +\infty)$, $\omega_0 = \inf_{\substack{\|x\|=1, \\ x \in \operatorname{Dom}(A)}} ((A+B)x, x) > 1$.

Лемма 3.4. При выполнении условий леммы 3.2 вещественные части α не вещественных нулей $\lambda^\pm = \alpha \pm i\beta$ функции $m(\lambda)$ удовлетворяют следующему неравенству:

$$-\frac{1}{2} \operatorname{Var} \theta(\tau)|_{d_1}^{d_2} \leq \alpha \leq -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\omega^2 + d_2^2} \operatorname{Var} \theta(\tau)|_{d_1}^{d_2}. \quad (3.16)$$

Доказательство. Доказательство леммы 3.4 существенно опирается на [10, лемма 4.3]. Для удобства читателей приведем ее формулировку. Рассмотрим семейство уравнений

$$\frac{\lambda^2(N)}{\omega^2} + 1 = \sum_{k=1}^N \frac{c_k}{\lambda(N) + \gamma_k}, \quad \lambda(N) \in \mathbb{C}, \quad (3.17)$$

зависящих от параметра $N \in \mathbb{N}$ при фиксированном значении $\omega \geq \omega_0 > 1$, где $c_k > 0$, $\gamma_{k+1} > \gamma_k > 0$, $k \in \mathbb{N}$.

Лемма 3.5 (А. И. Милославский, см. [10, 21]). Для любого фиксированного значения N уравнение (3.17) имеет N вещественных корней $\lambda_k(N) \in \mathbb{R}$, $k = 1, \dots, N$, удовлетворяющих неравенствам

$$-\gamma_k < \lambda_k(N) < p_k(N) < -\gamma_{k-1}, \quad k = 1, \dots, N, \quad \gamma_0 = 0, \quad (3.18)$$

а также пару комплексно-сопряженных корней $\lambda^\pm(N) = \alpha(N) \pm i\beta(N) \in \mathbb{C}$, $\alpha(N), \beta(N) \in \mathbb{R}$, причем для вещественной части $\alpha(N)$ справедливо неравенство

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N c_k < \alpha(N) < -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N \frac{\omega^2 c_k}{\omega^2 + \gamma_k^2}. \quad (3.19)$$

Вначале, построим последовательность ступенчатых функций $\{\theta_n(\tau)\}_{n=1}^\infty$ сходящуюся к изучаемой функции $\theta(\tau)$ в пространстве $L_1[d_1, d_2]$, т. е.

$$\int_{d_1}^{d_2} |d\theta(\tau) - d\theta_n(\tau)| \rightarrow 0, \quad n \rightarrow +\infty, \quad (3.20)$$

такую, что для каждой ступенчатой функции $\theta_n(x)$ справедливо представление

$$\int_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta_n(\tau)}{\tau + \lambda} = \sum_{k=1}^n \frac{c_k(n)}{\gamma_k(n) + \lambda}.$$

Функция $\theta(\tau)$ является монотонной, поэтому множество ее точек разрыва не более чем счетно. Изменяя функцию $\theta(\tau)$ на множестве сколь угодно малой меры, получим непрерывную функцию $\tilde{\theta}(\tau) \in C[d_1, d_2]$. Функцию $\tilde{\theta}(\tau)$ приблизим последовательностью ступенчатых функций вида $\theta_n(\tau) = \sum_{k=1}^n \chi(\gamma_{k-1}, \gamma_k](\tau) c_k$, где

$$\gamma_k = d_1 + \frac{d_2 - d_1}{n} k, \quad c_k = \tilde{\theta}(\gamma_k) - \tilde{\theta}(\gamma_{k-1}), \quad k = 1, \dots, n, \quad (3.21)$$

где $\chi(\gamma_{k-1}, \gamma_k]$ — характеристическая функция полуинтервала $(\gamma_{k-1}, \gamma_k]$, $k, n \in \mathbb{N}$. Таким образом, последовательность функций $\{\theta_n(\tau)\}_{n=1}^\infty$ будет равномерно сходиться к функции $\tilde{\theta}(\tau)$ и, следовательно, указанная последовательность будет сходиться к функции $\tilde{\theta}(\tau)$ в пространстве $L_1[d_1, d_2]$. Одновременно мы получаем, что

$$\sum_{k=1}^n c_k = \text{Var } \theta_n(\tau)|_{d_1}^{d_2} = \tilde{\theta}(d_2) - \tilde{\theta}(d_1) = \text{Var } \tilde{\theta}(\tau)|_{d_1}^{d_2} = \text{Var } \theta(\tau)|_{d_1}^{d_2}.$$

Кроме того, справедливы следующие неравенства:

$$\sum_{k=1}^n \frac{\omega^2 c_k}{\omega^2 + \gamma_k^2} \leq \frac{\omega^2}{\omega^2 + d_1^2} \sum_{k=1}^n (\tilde{\theta}(\gamma_k) - \tilde{\theta}(\gamma_{k-1})) = \frac{\omega^2}{\omega^2 + d_1^2} \text{Var } \theta(\tau)|_{d_1}^{d_2},$$

следовательно, последовательность $\sum_{k=1}^n \frac{\omega^2 c_k}{\omega^2 + \gamma_k^2}$ сходится при $n \rightarrow +\infty$, кроме того,

$$\sum_{k=1}^n \frac{\omega^2 c_k}{\omega^2 + \gamma_k^2} \geq \frac{\omega^2}{\omega^2 + d_2^2} \sum_{k=1}^n (\tilde{\theta}(\gamma_k) - \tilde{\theta}(\gamma_{k-1})) = \frac{\omega^2}{\omega^2 + d_2^2} \text{Var } \theta(\tau)|_{d_1}^{d_2} = \beta > 0. \quad (3.22)$$

Рассмотрим последовательность функций

$$l_n(\lambda) = \frac{\lambda^2}{\omega^2} + 1 - \sum_{k=1}^n \frac{c_k(n)}{\gamma_k(n) + \lambda},$$

где функции последовательности $c_k(n)$ и $\gamma_k(n)$ определены формулами (3.21). Покажем, что последовательность функций $\{l_n(\lambda)\}_{n=1}^\infty$ сходится равномерно к функции $m(\lambda)$ на любом компакте, отделенном от отрицательной вещественной полуоси. Действительно, справедлива цепочка неравенств

$$|m(\lambda) - l_n(\lambda)| = \left| \int_{d_1}^{d_2} \frac{(d\theta(\tau) - d\theta_n(\tau))}{\tau + \lambda} \right| \leq \int_{d_1}^{d_2} \frac{|d\theta(\tau) - d\theta_n(\tau)|}{\sqrt{(x + \tau)^2 + y^2}} \leq \frac{1}{|y|} \int_{d_1}^{d_2} |d\theta(\tau) - d\theta_n(\tau)| \rightarrow 0 \quad (3.23)$$

при $n \rightarrow +\infty$, где $\lambda = x + iy$, $|y| \geq \theta_0 > 0$.

В силу аналитичности функции $l_n(\lambda)$ на любом компакте, отделенном от отрицательной действительной полуоси, соотношения (3.23), равномерной сходимости последовательности функций $l_n(\lambda)$ к функции $m(\lambda)$ и равномерной отделенности мнимых частей λ от нуля, по теореме Гурвица получаем, что невещественные нули $\lambda_n^\pm = \alpha_n + i\beta_n$ функции $l_n(\lambda)$ сходятся к невещественным нулям $\lambda^\pm = \alpha + i\beta$ функции $m(\lambda)$. Таким образом, совершая предельный переход в неравенстве

$$-\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n c_k < \alpha_n < -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^n \frac{\omega^2 c_k}{\omega^2 + \gamma_k^2}$$

при $n \rightarrow +\infty$ и используя оценку (3.22), получаем искомое неравенство

$$-\frac{1}{2} \text{Var } \theta(\tau)|_{d_1}^{d_2} \leq \alpha \leq -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\omega^2 + d_2^2} \text{Var } \theta(\tau)|_{d_1}^{d_2}. \quad (3.24)$$

Лемма 3.4 доказана. \square

Лемма 3.6. При выполнении условий леммы 3.2 функции $l_n(\lambda)$ и $m(\lambda)$ не имеют нулей в замкнутой правой полуплоскости и имеют не более пары комплексно-сопряженных нулей в открытой левой полуплоскости.

Доказательство. Покажем, что функция $m(\lambda)$ не имеет нулей в открытой правой полуплоскости. В самом деле, уравнение $m(\lambda) = 0$ можно переписать в виде

$$\frac{\lambda^2}{\omega^2} + 1 = \int_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{\lambda + \tau}. \quad (3.25)$$

Вначале рассмотрим λ , лежащие в первом квадранте ($\text{Re } \lambda > 0$, $\text{Im } \lambda > 0$). Тогда

$$\text{Im} \left(\frac{\lambda^2}{\omega^2} + 1 \right) > 0, \quad \text{Im} \int_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{\lambda + \tau} < 0.$$

Следовательно, уравнение (3.25) не может иметь корней в первом квадранте. Вследствие комплексной сопряженности невещественных корней уравнение (3.25) не может иметь корней в открытом четвертом квадранте.

Рассмотрим теперь $\lambda = x \in \mathbb{R}_+$, тогда уравнение примет вид

$$\frac{x^2}{\omega^2} + 1 = \int_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{x + \tau}. \quad (3.26)$$

Из условия (4) и неравенства

$$\int_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{x + \tau} \leq \int_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{\tau} < 1$$

получаем, что уравнение (3.26) не имеет корней при $x > 0$.

Рассмотрим функцию $m(\lambda)$ на мнимой оси:

$$m(iy) = \frac{-y^2}{\omega^2} + 1 - \int_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{iy + \tau} = \left(\frac{-y^2}{\omega^2} + 1 - \int_{d_1}^{d_2} \frac{\tau d\theta(\tau)}{y^2 + \tau^2} \right) + iy \int_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{y^2 + \tau^2}. \quad (3.27)$$

Из представления (3.27) вытекает, что найдется такое $\delta > 0$, что для всех таких y , для которых $|y| < \delta$, справедливо неравенство

$$\text{Re } m(iy) = 1 - \frac{y^2}{\omega^2} - \int_{d_1}^{d_2} \frac{\tau d\theta(\tau)}{y^2 + \tau^2} > 0. \quad (3.28)$$

В самом деле, в силу того, что $\int_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{\tau} < 1$ и $\omega \geq \omega_0 > 0$, будут справедливы неравенства

$$1 - \frac{y^2}{\omega^2} - \int_{d_1}^{d_2} \frac{\tau d\theta(\tau)}{y^2 + \tau^2} \geq 1 - \frac{y^2}{\omega^2} - \int_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{\tau} > 0.$$

С другой стороны, при $|y| > \delta$ выполнено неравенство

$$|\operatorname{Im} m(iy)| = |y| \int_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{y^2 + \tau^2} \geq \delta \int_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{y^2 + \tau^2} > 0. \quad (3.29)$$

Из неравенств (3.28), (3.29) следует обратимость функции $m(\lambda)$ на мнимой оси. Для функции $l_n(\lambda)$ рассуждения проводятся аналогично.

Покажем, что функция $m(\lambda)$, а также функция $l_n(\lambda)$ имеют не более одного не вещественного нуля в открытой верхней полуплоскости \mathbb{C}^+ . Действительно, рассмотрим регулярную ветвь φ квадратного корня, которая отображает нижнюю полуплоскость во второй квадрант, тогда уравнение

$$m(\lambda) = \frac{\lambda^2}{\omega^2} + 1 - \int_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{\lambda + \tau} = 0 \quad (3.30)$$

эквивалентно уравнению

$$\lambda = g(\lambda) := \omega\varphi \left(\frac{\lambda^2}{\omega^2} + 1 - \int_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{\lambda + \tau} \right).$$

Отметим, что функция $g(\lambda)$ отображает верхнюю полуплоскость \mathbb{C}^+ в себя. В самом деле,

$$\operatorname{Im} \left(\int_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{\lambda + \tau} \right) < 0, \quad \lambda \in \mathbb{C}_+.$$

Поэтому, по лемме Шварца, уравнение $\lambda = g(\lambda)$ имеет не более одного решения в верхней полуплоскости \mathbb{C}^+ . Для функции $l_n(\lambda)$ рассуждения проводятся аналогично. Для удобства читателей приведем здесь формулировку леммы Шварца.

Лемма 3.7 (Шварц). Пусть аналитическая функция f отображает верхнюю полуплоскость \mathbb{C}^+ в себя. Тогда уравнение $z = f(z)$ имеет не более одного решения, и если такое решение существует, то $|f'(w)| < 1$. В противном случае f — эллиптическое дробно-линейное преобразование.

В дальнейшем будет существенно использоваться следующая теорема.

Теорема 3.1 (Denjoy—Wolff, см. [42]). Пусть аналитическая функция f отображает верхнюю полуплоскость \mathbb{C}^+ в себя и f не является эллиптическим дробно-линейным преобразованием. Тогда существует единственная точка $\omega \in \mathbb{C}^+ \cup \{\infty\}$ такая, что итерации f^{*n} сходятся равномерно к ω на компактных множествах в \mathbb{C}^+ . Угловой предел $\lim_{z \rightarrow \omega} f(z)$ существует и удовлетворяет уравнению $\omega = f(\omega)$. Более того, угловая производная $f'(\omega)$ существует и удовлетворяет неравенству $|f'(\omega)| \leq 1$.

Замечание 3.1. Существование решения уравнения $\lambda = g(\lambda)$ в верхней полуплоскости \mathbb{C}^+ можно установить с помощью итераций отображения

$$g(\lambda) := \omega\varphi \left(\frac{\lambda^2}{\omega^2} + 1 - \int_{d_1}^{d_2} \frac{d\theta(\tau)}{\lambda + \tau} \right),$$

начиная с любой точки в \mathbb{C}^+ . При этом последовательность $\lambda_k = g(\lambda_{k-1})$, $k \in \mathbb{N}$ сходится по теореме 3.1. Если указанная последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ сходится к точке в верхней полуплоскости, то эта точка единственна. Если последовательность $\{\lambda_k\}_{k=1}^\infty$ сходится к точке на отрицательной вещественной полуоси, то по теореме 3.1 (Denjoy—Wolf) уравнение $\lambda = g(\lambda)$ не имеет решений в \mathbb{C}^+ .

Лемма 3.6 доказана. □

Для полноты изложения приведем здесь утверждение об асимптотике нулей функции $m(\lambda)$ при $\omega \rightarrow +\infty$.

Лемма 3.8. Пусть выполнены условия леммы 3.2 и параметр $\omega \rightarrow +\infty$. Тогда не вещественные нули функции $m(\lambda)$ имеют следующую асимптотику:

$$\lambda^\pm(\omega) = -\frac{1}{2} \text{Var } \theta(\tau)|_{d_1}^{d_2} \pm i\omega + O\left(\frac{1}{\omega}\right), \quad \omega \rightarrow +\infty.$$

Доказательство леммы проводится совершенно аналогично доказательству [9, теорема 2].

Здесь также уместно привести следующее предложение.

Предложение 3.2. Для любого $\omega_0 > 0$ можно указать такое $k \in \mathbb{N}$, что на подпространстве конечной размерности $H_{\omega_0}^+ = H \oplus H_{\omega_0}$, где $H_{\omega_0} = \text{Span} \{e_j\}_{j=1}^k$, a_j и e_j — собственные значения и собственные векторы самосопряженного оператора A_0 ($A_0 e_j = a_j e_j$), будет выполняться неравенство

$$(A_0 f, f) \geq \omega_0^2, \quad f \in H_{\omega_0}^\perp, \|f\| = 1, f \in \text{Dom}(A).$$

Доказательство. Действительно, рассмотрим форму $\omega^2 = (A_0 f, f)$, $\|f\| = 1$, $f \in \text{Dom}(A)$. Как уже отмечалось, оператор A_0 является самосопряженным, положительным, имеющим компактный обратный. Следовательно, согласно минимаксному принципу, для собственных значений a_j оператора A_0 ($A_0 e_j = a_j e_j$) выполняются соотношения

$$a_j = \inf_{\substack{\|f\|=1, (f, e_k)=0, \\ k=1, \dots, j-1 \\ f \in \text{Dom}(A)}} (A_0 f, f),$$

при этом, в силу неограниченности оператора A_0 , $a_j \rightarrow +\infty$ при ($j \rightarrow +\infty$). Таким образом, для любого $\omega_0 > 0$ будет выполнено неравенство $(A_0 f, f) \geq \omega_0^2$, $\|f\| = 1$, $f \in \text{Dom}(A)$, $f \in H_{\omega_0}^\perp$. □

Перейдем к завершению доказательства теоремы 2.3. Определим теперь расположение не вещественных нулей функции $(L(\lambda)f, f)$ в терминах коэффициентов исходного уравнения. Заметим, что $\text{Var } \mu(\tau)|_{d_1}^{d_2} = K(0)$, $\text{Var } \nu(\tau)|_{d_1}^{d_2} = Q(0)$. В силу оценки (3.24), имеем

$$\begin{aligned} \text{Re } \lambda^\pm &\geq -\frac{1}{2} \text{Var } \theta(\tau)|_{d_1}^{d_2} = -\frac{1}{2} \left[r_1(f) \text{Var } \mu(\tau)|_{d_1}^{d_2} + r_2(f) \text{Var } \nu(\tau)|_{d_1}^{d_2} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \sup_{\|f\|=1} \left[\frac{K(0)(Af, f) + Q(0)(Bf, f)}{((A+B)f, f)} \right], \quad f \in \text{Dom}(A). \end{aligned} \quad (3.31)$$

Отметим, что из оценки (3.24) и определения функции $\theta(\tau)$ вытекает неравенство

$$\begin{aligned} \alpha = \text{Re } \lambda^\pm &\leq -\frac{1}{2} \frac{\omega^2}{\omega^2 + d^2} \text{Var } \theta(\tau)|_{d_1}^{d_2} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{(A_0 f, f)}{(A_0 f, f) + d_2^2} \left[\frac{(Af, f)}{(A_0 f, f)} \text{Var } \mu(\tau)|_{d_1}^{d_2} + \frac{(Bf, f)}{(A_0 f, f)} \text{Var } \nu(\tau)|_{d_1}^{d_2} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \left[\frac{(Af, f)}{(A_0 f, f) + d_2^2} K(0) + \frac{(Bf, f)}{(A_0 f, f) + d_2^2} Q(0) \right] \leq \\ &\leq -\frac{1}{2} \inf_{\substack{\|f\|=1, \\ f \in \text{Dom}(A)}} \left[\frac{(Af, f)}{(A_0 f, f) + d_2^2} K(0) + \frac{(Bf, f)}{(A_0 f, f) + d_2^2} Q(0) \right] = \end{aligned}$$

$$= -\frac{1}{2} \inf_{\substack{\|f\|=1, \\ f \in \text{Dom}(A)}} \frac{((K(0)A + Q(0)B)f, f)}{(A_0f, f) + d_2^2} = \mu_1. \quad (3.32)$$

Введем обозначения

$$\alpha_0 := -\frac{1}{2} \sup_{\substack{\|f\|=1, \\ f \in \text{Dom}(A)}} \left[\frac{((K(0)A + Q(0)B)f, f)}{(A_0f, f)} \right],$$

$$\alpha_2 = -\frac{1}{2} \inf_{\substack{\|f\|=1, \\ f \in \text{Dom}(A)}} \left[\frac{((K(0)A + Q(0)B)f, f)}{(A_0f, f) + d_2^2} \right].$$

Согласно лемме 3.2, спектр оператор-функции $L(\lambda)$ лежит в полосе $\{\lambda : -R_0 \leq \text{Re } \lambda < 0\}$. В соответствии с оценками (3.31), (3.32) невещественная часть спектра оператор-функции $L(\lambda)$, лежащая на положительном расстоянии от отрицательной полуоси, лежит в полосе $\{\lambda : -\alpha_0 \leq \text{Re } \lambda < \alpha_2\}$. Следовательно, для любого сколь угодно малого θ_0 можно указать такое R_0 , что спектр оператор-функции $L(\lambda)$ будет принадлежать множеству

$$\Omega = \{\lambda \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda < 0, |\lambda| < R_0\} \cup \{\lambda \in \mathbb{C} : -\alpha_1 \leq \text{Re } \lambda \leq \alpha_2\},$$

где $\alpha_1 = \alpha_0 - \theta_0$. При этом $R_0 \geq \max(d_2, -\alpha_0 + \theta_0)$. Оценка (2.4) установлена в лемме 3.2.

Теорема 2.3 доказана.

Доказательство предложения 2.1. Положим в неравенстве (3.31) $f = A_0^{-1/2}g$, где $A_0 = A + B$. Тогда

$$\begin{aligned} \text{Re } \lambda^\pm &\geq -\frac{1}{2} \sup_{\|f\|=1} \left[\frac{K(0)(AA_0^{-1/2}g, A_0^{-1/2}g) + Q(0)(BA_0^{-1/2}g, A_0^{-1/2}g)}{((A+B)A_0^{-1/2}g, A_0^{-1/2}g)} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \sup_{\|f\|=1} \left[\frac{K(0)(A_0^{-1/2}AA_0^{-1/2}g, g) + Q(0)(A_0^{-1/2}BA_0^{-1/2}g, g)}{(g, g)} \right] = \\ &= -\frac{1}{2} \left\| A_0^{-1/2}(K(0)A + Q(0)B)A_0^{-1/2} \right\|. \quad (3.33) \end{aligned}$$

□

Замечание 3.2. В силу самосопряженности оператора A_0 и согласно [26, лемма 2.1], операторы $A_0^{-1/2}AA_0^{-1/2}$ и $A_0^{-1/2}BA_0^{-1/2}$ допускают ограниченное замыкание в пространстве H .

Доказательство теоремы 2.4. Покажем, что невещественный спектр оператор-функции $L(\lambda)$ состоит из изолированных собственных значений конечной алгебраической кратности. Для этого рассмотрим оператор-функцию $D(\lambda) = (1 - \hat{K}(\lambda))I + (1 - \hat{Q}(\lambda))\mathcal{K}$. Оператор-функция $D(\lambda)$ обратима для невещественных λ . В самом деле, рассмотрим форму $(D(\lambda)f, f) = (1 - \hat{K}(\lambda))(f, f) + (1 - \hat{Q}(\lambda))(\mathcal{K}f, f)$. Из представления

$$\text{Im}(D(\lambda)f, f) = y \left(\int_{d_1}^{d_2} \frac{d\mu(\tau)}{(x+\tau)^2 + y^2} \right) (f, f) + y \left(\int_{d_1}^{d_2} \frac{d\nu(\tau)}{(x+\tau)^2 + y^2} \right) (\mathcal{K}f, f), \quad \lambda = x + iy,$$

вытекает, что при выполнении условия невырожденности функций $\mu(\tau)$ и $\nu(\tau)$ и справедливости условий (1.4), (1.5) оператор-функция $D(\lambda)$ обратима при $\text{Im } \lambda \neq 0$.

Более того, легко видеть, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что будут справедливы неравенства

$$\text{Re}(D(x)f, f) = \left(1 - \int_{d_0}^{+\infty} \frac{d\mu(\tau)}{x+\tau} \right) (f, f) + \left(1 - \int_{d_0}^{+\infty} \frac{d\nu(\tau)}{x+\tau} \right) (\mathcal{K}f, f) > \delta(f, f),$$

$$x > -d_1 + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

$$\text{Re}(D(x)f, f) < -\delta(f, f), \quad x < -d_2 - \varepsilon, \quad \varepsilon > 0.$$

Таким образом, оператор-функция $D(\lambda)$ будет обратимой вне отрезка $[-d_2, -d_1]$.

Согласно теореме И. Ц. Гохберга (см. [15]), оператор-функция $M(\lambda) = D(\lambda) + \lambda^2 A^{-1}$ ($A^{-1} \in \sigma_\infty$) обратима при всех не вещественных λ , за исключением некоторого счетного множества характеристических чисел конечной алгебраической кратности, которые могут иметь точки сгущения лишь на отрезке $[d_1, d_2]$. В силу представления (3.2), это утверждение справедливо и для оператор-функции $L(\lambda)$. Симметрия не вещественной части спектра $L(\lambda)$ относительно вещественной оси вытекает из соотношения $L^*(\lambda) = L(\bar{\lambda})$. \square

Авторы глубоко признательны профессору А. А. Шкаликову за полезные обсуждения и консультации.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов В. В. О разрешимости и свойствах решений функционально-дифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Мат. сб. — 1995. — 186, № 8. — С. 67–92.
2. Власов В. В. О разрешимости и оценках решений функционально-дифференциальных уравнений в пространствах Соболева // Тр. МИАН. — 1999. — 227. — С. 109–121.
3. Власов В. В. О корректной разрешимости абстрактных параболических уравнений с последствием // Докл. РАН. — 2007. — 415, № 2. — С. 151–152.
4. Власов В. В., Ву Дж., Кабилова Г. Р. Корректная разрешимость и спектральные свойства абстрактных гиперболических уравнений с последствием // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — 35. — С. 44–59.
5. Власов В. В., Гавриков А. А., Иванов С. А., Князьков Д. Ю., Самарин В. А., Шамаев А. С. Спектральные свойства комбинированных сред // Соврем. пробл. мат. и мех. — 2009. — 5, № 1. — С. 134–155.
6. Власов В. В., Медведев Д. А. Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и связанные с ними вопросы спектральной теории // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2008. — 30. — С. 3–173.
7. Власов В. В., Медведев Д. А., Раутиан Н. А. Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и их спектральный анализ. — М.: МГУ, 2011.
8. Власов В. В., Раутиан Н. А. Корректная разрешимость и спектральный анализ абстрактных гиперболических интегродифференциальных уравнений // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2011. — 28. — С. 75–114.
9. Власов В. В., Раутиан Н. А. О свойствах решений интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории теплообмена // Тр. Моск. Мат. об-ва. — 2014. — 75, № 2. — С. 131–155.
10. Власов В. В., Раутиан Н. А. Корректная разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теории вязкоупругости // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — 58. — С. 22–42.
11. Власов В. В., Раутиан Н. А. Корректная разрешимость вольтерровых интегродифференциальных уравнений в гильбертовом пространстве // Дифф. уравн. — 2016. — 52, № 9. — С. 1168–1177.
12. Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С. Разрешимость и спектральный анализ интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике // Докл. РАН. — 2010. — 434, № 1. — С. 12–15.
13. Власов В. В., Раутиан Н. А., Шамаев А. С. Спектральный анализ и корректная разрешимость абстрактных интегродифференциальных уравнений, возникающих в теплофизике и акустике // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2011. — 39. — С. 36–65.
14. Власов В. В., Шматов К. И. Корректная разрешимость уравнений гиперболического типа с запаздыванием в гильбертовом пространстве // Тр. МИАН. — 2003. — 243. — С. 127–137.
15. Гохберг И. Ц., Крейн М. Г. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов. — М.: Наука, 1965.
16. Жиков В. В. Об одном расширении и применении метода двухмасштабной сходимости // Мат. сб. — 2000. — 191, № 7. — С. 31–72.
17. Жиков В. В. О двухмасштабной сходимости // Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2003. — 23. — С. 149–187.
18. Ильюшин А. А., Победря Б. Е. Основы математической теории термовязкоупругости. — М.: Наука, 1970.
19. Лионс Ж. П., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
20. Лыков А. В. Проблема тепло- и массообмена. — Минск: Наука и техника, 1976.
21. Милославский А. И. Спектральные свойства операторного пучка, возникающего в вязкоупругости // Деп. в Укр. НИИТИ, 13.07.87, № 1229-УК87, Харьков. — 1987.

22. *Палин В. В., Радкевич Е. В.* Законы сохранения и их гиперболические регуляризации// *Соврем. пробл. мат. и мех.* — 2009. — 5, № 1. — С. 88–115.
23. *Работнов Ю. Н.* Элементы наследственной механики твердых тел. — М.: Наука, 1977.
24. *Санчес-Паленсия Э.* Неоднородные среды и теория колебаний. — М.: Мир, 1984.
25. *Шамаев А. С., Шумилова В. В.* Усреднение уравнений акустики для вязкоупругого материала с каналами, заполненными вязкой сжимаемой жидкостью// *Изв. РАН. Сер. Мех. жид. и газа.* — 2011. — № 2. — С. 92–103.
26. *Шкаликов А. А.* Сильно демпфированные пучки операторов и разрешимость соответствующих операторно-дифференциальных уравнений// *Мат. сб.* — 1988. — 177, № 1. — С. 96–118.
27. *Шкаликов А. А.* Эллиптические уравнения в гильбертовом пространстве и спектральные задачи, связанные с ними// *Тр. сем. им. И. Г. Петровского.* — 1989. — 14. — С. 140–224.
28. *Desch W., Miller R. K.* Exponential stabilization of Volterra integrodifferential equations in Hilbert space. // *J. Differ. Equ.* — 1987. — 70. — С. 366–389.
29. *Di Blasio G.* Parabolic Volterra equations of convolution type// *J. Integr. Equ. Appl.* — 1994. — 6. — С. 479–508.
30. *Di Blasio G., Kunisch K., Sinestari E.* L^2 -regularity for parabolic partial integrodifferential equations with delays in the highest order derivatives// *J. Math. Anal. Appl.* — 1984. — 102. — С. 38–57.
31. *Di Blasio G., Kunisch K., Sinestari E.* Stability for abstract linear functional differential equations// *Israel J. Math.* — 1985. — 50, № 3. — С. 231–263.
32. *Gurtin M. E., Pipkin A. C.* Theory of heat conduction with finite wave speed. // *Arch. Ration. Mech. Anal.* — 1968. — 31. — С. 113–126.
33. *Ivanov S., Pandolfi L.* Heat equations with memory: lack of controllability to the rest// *J. Math. Anal. Appl.* — 2009. — 355. — С. 1–11.
34. *Kato T.* Perturbation theory for linear operators. — New York: Springer, 1966.
35. *Kopachevsky N. D., Krein S. G.* Operator approach to linear problems of hydrodynamics. Vol. 2. Nonselfadjoint problems for viscous fluids. — Berlin—Basel—Boston: Birkhäuser, 2003.
36. *Kunisch K., Mastinsek M.* Dual semigroups and structural operators for partial differential equations with unbounded operators acting on the delays// *Differ. Integr. Equ.* — 1990. — 3, № 4. — С. 733–756.
37. *Medvedev D. A., Vlasov V. V., Wu J.* Solvability and structural properties of abstract neutral functional differential equations// *Funct. Differ. Equ.* — 2008. — 66, № 3-4. — С. 249–272.
38. *Miller R. K.* Volterra integral equation in Banach space// *Funkcial. Ekvac.* — 1975. — 18. — С. 163–194.
39. *Miller R. K.* An integrodifferential equation for rigid heat conductors with memory// *J. Math. Anal. Appl.* — 1978. — 66. — С. 313–332.
40. *Miller R. K., Wheeler R. L.* Well-posedness and stability of linear Volterra interodifferential equations in abstract spaces// *Funkcial. Ekvac.* — 1978. — 21. — С. 279–305.
41. *Pandolfi L.* The controllability of the Gurtin—Pipkin equations: a cosine operator approach// *Appl. Math. Optim.* — 2005. — 52. — С. 143–165.
42. *Shapiro J.* Composition operators and classical function theory. — New York: Springer, 1993.
43. *Vlasov V. V., Wu J.* Solvability and spectral analysis of abstract hyperbolic equations with delay// *J. Funct. Differ. Equ.* — 2009. — 16, № 4. — С. 751–768.
44. *Wu J.* Semigroup and integral form of class of partial differential equations with infinite delay// *Differ. Integr. Equ.* — 1991. — 4, № 6. — С. 1325–1351.
45. *Wu J.* Theory and applications of partial functional differential equations. — New York: Springer-Verlag, 1996.

В. В. Власов

МГУ им. М. В. Ломоносова, механико-математический факультет,

Россия, 119899, Москва

E-mail: vicvvlasov@rambler.ru

Н. А. Раутиан

МГУ им. М. В. Ломоносова

механико-математический факультет,

Россия, 119899, Москва

E-mail: nrautian@mail.ru

Spectral Analysis of Integrodifferential Equations in a Hilbert Space

© 2016 V. V. Vlasov, N. A. Rautian

Abstract. We investigate the correct solvability of initial-value problems for abstract integrodifferential equations with unbounded operator coefficients in a Hilbert space. We do spectral analysis of operator-functions describing symbols of such equations. These equations are an abstract form of linear integrodifferential partial derivative equations arising in the viscoelasticity theory and having some other important applications. We establish the localization and the spectrum structure of operator-functions describing symbols of these equations.

REFERENCES

1. V. V. Vlasov, "O razreshimosti i svoystvakh resheniy funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy v gil'bertovom prostranstve" [On solvability and properties of solutions of functional differential equations in a Hilbert space], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1995, **186**, No. 8, 67–92.
2. V. V. Vlasov, "O razreshimosti i otsenkakh resheniy funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy v prostranstvakh Soboleva" [On solvability and estimates of solutions of functional differential equations in Sobolev spaces], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 1999, **227**, 109–121.
3. V. V. Vlasov, "O korrektnoy razreshimosti abstraktnykh parabolicheskikh uravneniy s posledeystviem" [On correct solvability of abstract parabolic equations with aftereffect], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2007, **415**, No. 2, 151–152.
4. V. V. Vlasov, Dzh. Vu, and G. R. Kabirova, "Korrekt'naya razreshimost' i spektral'nye svoystva abstraktnykh giperbolicheskikh uravneniy s posledeystviem" [Correct solvability and spectral properties of abstract hyperbolic equations with aftereffect], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **35**, 44–59.
5. V. V. Vlasov, A. A. Gavrikov, S. A. Ivanov, D. Yu. Knyaz'kov, V. A. Samarin, and A. S. Shamaev, "Spektral'nye svoystva kombinirovannykh sred" [Spectral properties of combined media], *Sovrem. probl. mat. i mekh.* [Contemp. Probl. Math. Mech.], 2009, **5**, No. 1, 134–155.
6. V. V. Vlasov and D. A. Medvedev, "Funktsional'no-differentsial'nye uravneniya v prostranstvakh Soboleva i svyazannye s nimi voprosy spektral'noy teorii" [Functional differential equations in Sobolev spaces and related questions of the spectral theory], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2008, **30**, 3–173.
7. V. V. Vlasov, D. A. Medvedev, and N. A. Rautian, *Funktsional'no-differentsial'nye uravneniya v prostranstvakh Soboleva i ikh spektral'nyy analiz* [Functional differential equations in Sobolev spaces and their spectral analysis], MSU, Moscow, 2011.
8. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Korrekt'naya razreshimost' i spektral'nyy analiz abstraktnykh giperbolicheskikh integrodifferentsial'nykh uravneniy" [Correct solvability and spectral analysis of abstract hyperbolic integrodifferential equations], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 2011, **28**, 75–114.
9. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "O svoystvakh resheniy integrodifferentsial'nykh uravneniy, vznikayushchikh v teorii teplomassoobmena" [On properties of solutions of integrodifferential equations arising in the heat-mass exchange theory], *Tr. Mosk. Mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 2014, **75**, No. 2, 131–155.
10. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Korrekt'naya razreshimost' i spektral'nyy analiz integrodifferentsial'nykh uravneniy, vznikayushchikh v teorii vyazkouprugosti" [Correct solvability and spectral analysis of integrodifferential equations arising in the viscoelasticity theory], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **58**, 22–42.
11. V. V. Vlasov and N. A. Rautian, "Korrekt'naya razreshimost' vol'terrovnykh integrodifferentsial'nykh uravneniy v gil'bertovom prostranstve" [Correct solvability of Volterra integrodifferential equations in a Hilbert space], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 2016, **52**, No. 9, 1168–1177.
12. V. V. Vlasov, N. A. Rautian, and A. C. Shamaev, "Razreshimost' i spektral'nyy analiz integrodifferentsial'nykh uravneniy, vznikayushchikh v teplofizike i akustike" [Solvability and spectral analysis of

- integro-differential equations arising in thermal physics and acoustics], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2010, **434**, No. 1, 12–15.
13. V. V. Vlasov, N. A. Rautian, and A. C. Shamaev, “Spektral’nyy analiz i korrektnaya razreshimost’ abstraktnykh integrodifferentsial’nykh uravneniy, vznikayushchikh v teplofizike i akustike” [Spectral analysis and correct solvability of abstract integrodifferential equations arising in thermal physics and acoustics], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2011, **39**, 36–65.
 14. V. V. Vlasov and K. I. Shmatov, “Korrektnaya razreshimost’ uravneniy giperbolicheskogo tipa s zapazdyvaniem v gil’bertovom prostranstve” [Correct solvability of hyperbolic-type equations with delay in a Hilbert space], *Tr. MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2003, **243**, 127–137.
 15. I. Ts. Gokhberg and M. G. Kreyn, *Vvedenie v teoriyu lineynykh nesamosopryazhennykh operatorov* [Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators], Nauka, Moscow, 1965.
 16. V. V. Zhikov, “Ob odnom rasshirenii i primenenii metoda dvukhmasshtabnoy skhodimosti” [On one extension and application of the two-scale convergence method], *Mat. sb.* [Math. Digest], 2000, **191**, No. 7, 31–72.
 17. V. V. Zhikov, “O dvukhmasshtabnoy skhodimosti” [On two-scale convergence], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 2003, **23**, 149–187.
 18. A. A. Il’yushin and B. E. Pobedrya, *Osnovy matematicheskoy teorii termoviyazkoprugosti* [Essentials of Mathematical Theory of Thermoviscoelasticity], Nauka, Moscow, 1970.
 19. Zh. P. Lions and E. Madzhenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Nonhomogeneous Boundary-Value Problems and Their Applications], Mir, Moscow, 1971.
 20. A. V. Lykov, *Problema teplo- i massoobmena* [Problem of Heat-Mass Exchange], Nauka i tekhnika, Minsk, 1976.
 21. A. I. Miloslavskiy “Spektral’nye svoystva operatornogo puchka, vznikayushchego v vyazkoprugosti” [Spectral properties of an operator pencil arising in viscoelasticity], submitted to Ukr. NIINTI, 13.07.87, No. 1229-UK87, Khar’kov, 1987.
 22. V. V. Palin and E. V. Radkevich, “Zakony sokhraneniya i ikh giperbolicheskie regularizatsii” [Conservation laws and their hyperbolic regularizations], *Sovrem. probl. mat. i mekh.* [Contemp. Probl. Math. Mech.], 2009, **5**, No. 1, 88–115.
 23. Yu. N. Rabotnov, *Elementy nasledstvennoy mekhaniki tverdykh tel* [Elements of Heritable Mechanics of Solid Bodies], Nauka, Moscow, 1977.
 24. E. Sanches-Palensiya, *Neodnorodnye sredy i teoriya kolebaniy* [Nonhomogeneous Media and Oscillation Theory], Mir, Moscow, 1984.
 25. A. S. Shamaev and V. V. Shumilova, “Usrednenie uravneniy akustiki dlya vyazkoprugogo materiala s kanalami, zapolnennymi vyazkoy szhimaemoy zhidkost’yu” [Averaging of the acoustics equations for viscoelastic matter with channels filled with viscous compressible fluid], *Izv. RAN. Ser. Mekh. zhid. i gaza* [Bull. Russ. Acad. Sci. Ser. Mech. Fluid & Gas], 2011, No. 2, 92–103.
 26. A. A. Shkalikov, “Sil’no dempfirovannyye puchki operatorov i razreshimost’ sootvetstvuyushchikh operatorno-differentsial’nykh uravneniy” [Strongly damped operator pencils and solvability of corresponding operator-differential equations], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1988, **177**, No. 1, 96–118.
 27. A. A. Shkalikov, “Ellipticheskie uravneniya v gil’bertovom prostranstve i spektral’nye zadachi, svyazannyye s nimi” [Elliptic equations in a Hilbert space and related spectral problems], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 1989, **14**, 140–224.
 28. W. Desch and R. K. Miller, “Exponential stabilization of Volterra integrodifferential equations in Hilbert space,” *J. Differ. Equ.*, 1987, **70**, 366–389.
 29. G. Di Blasio, “Parabolic Volterra equations of convolution type,” *J. Integr. Equ. Appl.*, 1994, **6**, 479–508.
 30. G. Di Blasio, K. Kunisch, and E. Sinestari, “ L^2 -regularity for parabolic partial integrodifferential equations with delays in the highest order derivatives,” *J. Math. Anal. Appl.*, 1984, **102**, 38–57.
 31. G. Di Blasio, K. Kunisch, and E. Sinestari, “Stability for abstract linear functional differential equations,” *Israel J. Math.*, 1985, **50**, No. 3, 231–263.
 32. M. E. Gurtin and A. C. Pipkin, “Theory of heat conduction with finite wave speed,” *Arch. Ration. Mech. Anal.*, 1968, **31**, 113–126.
 33. S. Ivanov and L. Pandolfi, “Heat equations with memory: lack of controllability to the rest,” *J. Math. Anal. Appl.*, 2009, **355**, 1–11.
 34. T. Kato, *Perturbation Theory for Linear Operators*, Springer, New York, 1966.
 35. N. D. Kopachevsky and S. G. Krein, *Operator Approach to Linear Problems of Hydrodynamics. Vol. 2. Nonselfadjoint Problems for Viscous Fluids*, Birkhäuser, Berlin—Basel—Boston, 2003.

36. K. Kunisch and M. Mastinsek, "Dual semigroups and structural operators for partial differential equations with unbounded operators acting on the delays," *Differ. Integr. Equ.*, 1990, **3**, No. 4, 733–756.
37. D. A. Medvedev, V. V. Vlasov, and J. Wu, "Solvability and structural properties of abstract neutral functional differential equations," *Funct. Differ. Equ.*, 2008, **66**, No. 3-4, 249–272.
38. R. K. Miller, "Volterra integral equation in Banach space," *Funkcial. Ekvac.*, 1975, **18**, 163–194.
39. R. K. Miller, "An integrodifferential equation for rigid heat conductors with memory," *J. Math. Anal. Appl.*, 1978, **66**, 313–332.
40. R. K. Miller and R. L. Wheeler, "Well-posedness and stability of linear Volterra integrodifferential equations in abstract spaces," *Funkcial. Ekvac.*, 1978, **21**, 279–305.
41. L. Pandolfi, "The controllability of the Gurtin–Pipkin equations: a cosine operator approach," *Appl. Math. Optim.*, 2005, **52**, 143–165.
42. J. Shapiro, *Composition Operators and Classical Function Theory*, Springer, New York, 1993.
43. V. V. Vlasov and J. Wu, "Solvability and spectral analysis of abstract hyperbolic equations with delay," *J. Funct. Differ. Equ.*, 2009, **16**, No. 4, 751–768.
44. J. Wu, "Semigroup and integral form of class of partial differential equations with infinite delay," *Differ. Integr. Equ.*, 1991, **4**, No. 6, 1325–1351.
45. J. Wu, *Theory and Applications of Partial Functional Differential Equations*, Springer-Verlag, New York, 1996.

V. V. Vlasov

Mech.-Math. Faculty, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E-mail: vicvvlasov@rambler.ru

N. A. Rautian

Mech.-Math. Faculty, Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia

E-mail: nrautian@mail.ru

О ПОВЕДЕНИИ ПРИ БОЛЬШИХ ЗНАЧЕНИЯХ ВРЕМЕНИ РЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ НЕДИВЕРГЕНТНЫХ УРАВНЕНИЙ С РАСТУЩИМИ СТАРШИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

© 2016 г. В. Н. ДЕНИСОВ

Аннотация. Исследуются достаточные условия стабилизации к нулю решений задачи Коши для линейного параболического уравнения второго порядка с растущими старшими коэффициентами и с начальными функциями степенного роста на бесконечности.

СОДЕРЖАНИЕ

| | | |
|---|--|----|
| 1. Введение | | 72 |
| 2. Формулировка результатов | | 73 |
| 3. Некоторые свойства суперрешений эллиптических уравнений в \mathbb{R}^N | | 73 |
| 4. О стабилизации суперрешений параболических уравнений | | 78 |
| 5. Доказательство основной теоремы | | 79 |
| 6. Точность условий теоремы | | 82 |
| Список литературы | | 83 |

1. ВВЕДЕНИЕ

В полупространстве $\bar{D} = \mathbb{R}^N \times [0, \infty)$ при $N \geq 3$ рассмотрим задачу Коши

$$L_1 u \equiv Lu + c(x, t)u - u_t = 0, \quad (x, t) \in D, \quad (1.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (1.2)$$

где

$$Lu = \sum_{i,k=1}^N a_{ik}(x, t)u_{x_i x_k}. \quad (1.3)$$

Предполагается, что:

1. Коэффициенты уравнения (1.1) действительны, $a_{ik} = a_{ki}$ ($i, k = 1, \dots, N$) и существуют положительные постоянные λ_0, λ_1 такие, что

$$\lambda_0^2 b(|x|)|\xi|^2 \leq \sum_{i,k=1}^N a_{ik}(x, t)\xi_i \xi_k \leq \lambda_1^2 b(|x|)|\xi|^2 \quad (1.4)$$

для всех $(x, t) \in D$, где

$$b(|x|) = \max(1, |x|^\alpha), \quad (1.5)$$

$$0 \leq \alpha < 2. \quad (1.6)$$

Из условий (1.4)–(1.6) следует, что старшие коэффициенты уравнения (1.1) растут на бесконечности как $|x|^\alpha$, $0 \leq \alpha < 2$.

2. Коэффициенты уравнения (1.1) непрерывны в D и удовлетворяют условию Гельдера в каждой ограниченной подобласти D_1 области D .

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (грант № 15-01-00471).

3. Коэффициент $c(x, t)$ неположителен в D и удовлетворяет следующему условию: найдутся постоянные α из неравенства (1.6), $\beta > 0$, такие, что

$$c(x, t) \leq -\beta^2 \min(1, |x|^{-2+\alpha}) \quad \forall (x, t) \text{ в } D. \quad (1.7)$$

4. Начальная функция $u_0(x)$ непрерывна в \mathbb{R}^N и удовлетворяет условию роста

$$|u_0(x)| \leq M(1 + |x|^m), \quad m > 0, M > 0. \quad (1.8)$$

Разрешимость классической задачи Коши (1.1), (1.2) хорошо изучена (см., например [7, 9, 11]).

Будем говорить, что решение задачи Коши (1.1), (1.2) *стабилизируется к нулю* в точке $x \in \mathbb{R}^N$ (равномерно относительно x на каждом компакте K в \mathbb{R}^N), если существует предел

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \quad (1.9)$$

в точке $x \in \mathbb{R}^N$ (равномерно по x на каждом компакте K в \mathbb{R}^N).

Стабилизация решения задачи Коши с ограниченными старшими коэффициентами и растущими на бесконечности младшими коэффициентами была изучена в работах [3–6].

Обзор работ по стабилизации решений параболических уравнений см. в работе [2].

В настоящей работе мы изучим точные достаточные условия на коэффициенты уравнения (1.1), которые гарантируют стабилизацию к нулю решения задачи Коши (1.1), (1.2) с начальной функцией $u_0(x)$, удовлетворяющей условию степенного роста (1.8) и при условии, что старшие коэффициенты уравнения (1.1) удовлетворяют условию роста (1.4)–(1.6). Мы покажем на примерах неумлучшаемость условий стабилизации.

2. ФОРМУЛИРОВКА РЕЗУЛЬТАТОВ

Теорема 2.1. *Если начальная функция $u_0(x)$ (1.2) удовлетворяет условию степенного роста (1.8), старшие коэффициенты уравнения (1.1) удовлетворяют условиям (1.4)–(1.6), младший коэффициент $c(x, t)$ уравнения удовлетворяет условию (1.7) при*

$$\beta^2 > \lambda_1^2 m(m + s - 2) = \beta_0^2, \quad (2.1)$$

где

$$s = \frac{\lambda_1^2(N - 1) + \lambda_0^2}{\lambda_0^2}, \quad (2.2)$$

то решение задачи Коши (1.1), (1.2) стабилизируется к нулю, т. е. существует предел (1.9) равномерно относительно x на каждом компакте K в \mathbb{R}^N .

Замечание 2.1. Теорема 2.1 является точной в том смысле, что нельзя в ее утверждении заменить компакт K на все \mathbb{R}^N .

Замечание 2.2. В теореме 2.1 неравенство (2.1) является близким к окончательному в том смысле, что выполнение противоположного относительно (2.1) неравенства не влечет за собой стабилизацию к нулю некоторого решения задачи Коши.

3. НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА СУПЕРРЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ В \mathbb{R}^N

В области $D = \mathbb{R}^N \times (0, \infty)$ рассмотрим стационарное решение $\Gamma = \Gamma_\beta(r)$ параболического неравенства

$$L_2 \Gamma_\alpha \equiv L(x, t) \Gamma_\beta(r) + a_\beta(r) \Gamma_\beta(r) \leq 0, \quad (3.1)$$

где $L(x, t)$ — оператор (1.3) из введения, коэффициент $a_\beta(r)$ в неравенстве (3.1) определен по формуле

$$a_\beta(r) = \begin{cases} -\beta^2 & \text{при } r \leq 1, \\ -\frac{\beta^2}{r^{2-\alpha}} & \text{при } r \geq 1, \end{cases} \quad (3.2)$$

где $0 \leq \alpha < 2$, $r = |x| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$.

Будем искать решения неравенства (3.1) такие, что

$$\Gamma_\beta(r) > 0, \Gamma'_\beta(r) \geq 0, \quad (3.3)$$

и для которых на бесконечности справедлива асимптотика

$$\Gamma_\beta(r) \sim C_1 r^{\delta_1} \text{ при } r \rightarrow \infty, \quad (3.4)$$

где $C_1 > 0$, δ_1 является большим корнем уравнения

$$\delta^2 + (s-2)\delta - \bar{\beta}^2 = 0, \quad \bar{\beta} = \frac{\beta}{\lambda_1}, \quad (3.5)$$

$$\delta_1 = \frac{-(s-2) + \sqrt{D}}{2}, \quad D = (s-2)^2 + 4\bar{\beta}^2.$$

Применяя к $\Gamma(r)$ формулы дифференцирования:

$$\begin{aligned} \Gamma'_{x_i} &= \frac{x_i}{r} \Gamma', & \Gamma''_{x_i x_k} &= \frac{x_i \cdot x_k}{r^2} \left[\Gamma'' - \frac{\Gamma'}{r} \right], \\ \Gamma_{x_i x_i} &= \frac{x_i^2}{r^2} \left[\Gamma'' - \frac{\Gamma'}{r} \right] + \frac{\Gamma'}{r}, \end{aligned} \quad (3.6)$$

будем иметь

$$L_2 \Gamma_\beta = Q \left\{ \left[\Gamma''_\beta - \frac{\Gamma'_\beta}{r} \right] + \frac{\Gamma'_\beta}{r} \frac{\sum_{i=1}^N a_{ii}}{Q} + \frac{a_\beta(r) \Gamma_\beta}{Q} \right\}, \quad (3.7)$$

где $Q = Q(x, t) = \sum_{i,k=1}^N a_{ik}(x, t) \frac{x_i x_k}{r^2}$. Из неравенств (1.4)–(1.6) следует, что

$$\lambda_0^2 b(r) \leq Q(x, t) \leq \lambda_1^2 b(r), \quad \frac{\sum_{i=1}^N a_{ii}}{Q} \leq \frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2}{\lambda_0^2}. \quad (3.8)$$

При $r \leq 1$ справедливо равенство $a_\beta(r) = -\beta^2$, поэтому, учитывая в правой части (3.7) неравенства (3.8), будем иметь:

$$L_2 \Gamma_\beta(r) \leq Q \left[\Gamma''_\beta + \left(\frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2}{\lambda_0^2} - 1 \right) \frac{\Gamma'_\beta}{r} - \frac{\beta^2}{\lambda_1^2} \Gamma_\beta \right]. \quad (3.9)$$

Полагая для краткости $\bar{\beta} = \frac{\beta}{\lambda_1}$ и используя обозначение (2.2) и (3.5), рассмотрим для функции $Z_\beta(r)$ задачу

$$Z''_\beta(r) + \frac{(s-1)}{r} Z'_\beta(r) - \bar{\beta}^2 Z_\beta(r) = 0, \quad (3.10)$$

$$Z_\beta(0) = 1, \quad Z'_\beta(0) = 0. \quad (3.11)$$

Положив в правой части (3.9) $\Gamma_\beta(r) = Z_\beta(r)$, где $Z_\beta(r)$ — решение задачи (3.10), (3.11), получим неравенство

$$L_2 \Gamma_\beta(r) \leq 0, \quad r \leq 1, \quad t > 0. \quad (3.12)$$

Из теории функций Бесселя (см. [1]) следует, что решение задачи (3.10), (3.11) существует, единственно и представимо в виде

$$Z_\beta(r) = q_1(s) \cdot \frac{I_{\frac{s-2}{2}}(r\bar{\beta})}{(r\bar{\beta})^{\frac{s-2}{2}}}, \quad q_1(s) = 2^{\frac{s-2}{2}} \Gamma\left(\frac{s}{2}\right), \quad (3.13)$$

где $\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)$ — функция Эйлера (см. [8, т. 2, с. 272]), $I_\nu(r)$ — модифицированная функция Бесселя первого рода (см. [1]). Из формулы (3.13) и формул из [1, п. 3.71] следует, что $Z_\beta(r) > 0$ при $r > 0$ и

$$b_0(\beta) = Z_\beta|_{r=1} = q(s) \bar{\beta}^{\frac{2-s}{2}} I_{\frac{s-2}{2}}(\bar{\beta}) > 0, \quad (3.14)$$

$$b_1(\beta) = Z'_\beta|_{r=1} = q(s) \bar{\beta}^{2-\frac{s}{2}} I_{\frac{s}{2}}(\bar{\beta}) > 0 \quad (3.15)$$

в силу формулы дифференцирования

$$\frac{d}{dr} \frac{I_\nu(r)}{r^\nu} = \frac{I_{\nu+1}(r)}{r^\nu} > 0. \quad (3.16)$$

При $r \geq 1$ имеет место равенство $a_\beta(r) = \frac{-\beta^2}{r^2 - \alpha}$, поэтому, учитывая в (3.7) неравенства (3.8), будем иметь

$$L_2 \Gamma_\beta \leq Q \left[\Gamma_\beta'' + \frac{s-1}{r} \Gamma_\beta' - \frac{\beta^2}{\lambda_1^2 r^2} \Gamma_\beta \right]. \quad (3.17)$$

Рассмотрим для функции $y_\beta(r)$ при $r \geq 1$ задачу

$$y_\beta''(r) + \frac{s-1}{r} y_\beta'(r) - \bar{\beta}^2 y_\beta(r) r^{-2} = 0, \quad r > 1, \quad (3.18)$$

$$y_\beta(1) = b_0(\beta), \quad y_\beta'(1) = b_1(\beta), \quad (3.19)$$

где $b_0(\beta)$ и $b_1(\beta)$ — значения функции (3.13) и ее производной по r при $r = 1$, определенные формулами (3.14) и (3.15) соответственно. Будем искать решение задачи (3.18), (3.19) в виде $y_\beta(r) = r^\delta$, так как уравнение (3.18) представляет собой уравнение Эйлера (см. [10]). Получим при этом определяющее уравнение (3.5), которое имеет корни

$$\delta_1 = \frac{-(s-2) + \sqrt{D}}{2} > 0, \quad \delta_2 = \frac{-(s-2) - \sqrt{D}}{2} < 0, \quad D = (s-2)^2 + 4\bar{\beta}^2. \quad (3.20)$$

Решение задачи (3.18), (3.19) имеет вид

$$y_\beta(r) = C_1 r^{\delta_1} + C_2 r^{\delta_2}, \quad (3.21)$$

где постоянные C_1, C_2 определяются из условий (3.19), т. е. из системы

$$\begin{cases} C_1 + C_2 = b_0(\beta), \\ C_1 \delta_1 + C_2 \delta_2 = b_1(\beta). \end{cases}$$

Лемма 3.1. *Решение задачи (3.18), (3.19) обладает следующими свойствами:*

1. $y_\beta(r) > 0, r > 1,$
2. $y_\beta'(r) > 0, r \geq 1,$
3. $\lim_{r \rightarrow \infty} y_\beta(r) = +\infty.$

Доказательство. Запишем уравнение (3.18) в самосопряженном виде:

$$\frac{d}{dr} (r^{s-1} \frac{dy_\beta(r)}{dr}) = \bar{\beta}^2 r^{s-3} y_\beta(r), \quad r > 1.$$

Дважды проинтегрируем последнее уравнение по r от 1 до r и учтем при этом условия (3.19). При этом получим

$$\frac{dy_\beta(r)}{dr} = \frac{b_1(\beta)}{r^{s-1}} + \frac{\bar{\beta}^2}{r^{s-1}} \int_0^r \tau^{s-3} y_\beta(\tau) d\tau, \quad (3.22)$$

$$y_\beta(r) = b_0(\beta) + b_1(\beta) \int_1^r \tau^{1-s} d\tau + \bar{\beta}^2 \int_1^r \tau^{1-s} d\tau \int_1^\tau y_\beta(\xi) \xi^{s-3} d\xi. \quad (3.23)$$

В силу положительности $b_0(\beta)$ и $b_1(\beta)$ и непрерывности функции $y_\beta(r)$ правая часть равенства (3.23) является положительной в достаточно малой правой окрестности $r = 1$, т. е. при достаточно малом $r - 1 > 0$. Докажем, что правая часть (3.23) остается положительной при всех $r - 1 > 0$. Предположим противное, тогда при некотором $r = r_1 > 1$ функция $y_\beta(r)$ обратится в ноль (первый ноль $y_\beta(r)$ при $r = r_1 > 1$). Тогда из (3.23) при $r = r_1$ получим

$$y_\beta(r_1) = 0 = b_0(\beta) + b_1(\beta) \int_1^{r_1} \tau^{1-s} d\tau + \bar{\beta}^2 \int_1^{r_1} \tau^{1-s} d\tau \int_1^\tau y_\beta(\xi) \xi^{s-3} d\xi. \quad (3.24)$$

Так как при $1 \leq \xi \leq r_1, s > 1$ имеем $y_\beta(r) > 0$, то очевидно, что правая часть (3.24) является положительной. Полученное противоречие доказывает, что $y_\beta(r) > 0$ при всех $r > 1$.

Утверждение 1 леммы 3.1 доказано.

Из (3.22) и положительности $y_\beta(r) > 0$ при всех $r > 1$ тогда следует, что

$$\frac{dy_\beta(r)}{dr} > 0, \quad r > 1. \quad (3.25)$$

Утверждение 2 леммы 3.1 доказано. Из равенства (3.23) тогда следует, что $y_\beta(r) \geq b_0(\beta) > 0$ при $r \geq 1$. Применяя формулу Ньютона—Лейбница (см. [8, т. 1, с. 358]) и используя при этом равенство (3.22) и неравенство $y_\beta(r) \geq b_0(\beta)$ при $r \geq 1$, получим

$$\begin{aligned} y_\beta(r) - y_\beta(1) &= \int_1^r \frac{dy_\beta(\tau)}{d\tau} d\tau = b_1(\beta) \int_1^r \tau^{1-s} d\tau + \bar{\beta}^2 \int_1^r \tau^{1-s} d\tau \int_1^\tau y_\beta(\xi) \xi^{s-3} d\xi > \\ &> \bar{\beta}^2 b_0(\beta) \int_1^r \tau^{1-s} ds \int_1^\tau \xi^{s-3} d\xi = \frac{\bar{\beta}^2 b_0(\beta)}{(s-2)} \int_1^r \tau^{1-s} (\tau^{s-2} - 1) d\tau = \\ &= \frac{\bar{\beta}^2 b_0(\beta)}{(s-2)} \left[\ln r - \frac{r^{2-s} - 1}{2-s} \right] \rightarrow +\infty, \end{aligned}$$

при $r \rightarrow +\infty$, так как

$$s = \frac{(N-1)\lambda_1^2 + \lambda_0^2}{\lambda_0^2} > N > 2.$$

Утверждение 3 леммы 3.1 доказано.

Лемма 3.1 доказана. □

Положим в (3.16) $\Gamma_\beta(r) = y_\beta(r)$, где $y_\beta(r)$ — решение задачи (3.18), (3.19), и получим неравенство

$$L_2 \Gamma_\beta(r) \leq 0, \quad r \geq 1, \quad t > 0. \quad (3.26)$$

Нами определена функция

$$\Gamma_\beta(r) = \begin{cases} Z_\beta(r) & \text{при } r \leq 1, \\ y_\beta(r) & \text{при } r \geq 1, \end{cases} \quad (3.27)$$

где $Z_\beta(r)$ — решение задачи (3.10), (3.11), $y_\beta(r)$ — решение задачи (3.18), (3.19).

Очевидно, что функция (3.27) непрерывна и имеет непрерывные первые и вторые производные. В самом деле, непрерывность функций и указанных производных при $r \neq 1$ очевидна, а при $r = 1$ справедливы «условия склейки» из (3.19):

$$Z_\beta(1) = y_\beta(1) = b_0(\beta), \quad Z'_\beta(1) = y'_\beta(1) = b_1(\beta). \quad (3.28)$$

Поэтому из непрерывности функции $\Gamma_\beta(r)$ при $r = 1$ и непрерывности $\Gamma'_\beta(r)$ при $r = 1$, вытекающих из «условий склейки» (3.28) и из непрерывности коэффициентов уравнений (3.10) и (3.18) при $r = 1$, получаем, что

$$Z''_\beta(1) = y''_\beta(1).$$

Покажем, что функция (3.27) является суперэллиптической.

Лемма 3.2. *Функция (3.27) обладает следующими свойствами:*

1. $L_2 \Gamma_\beta(r) \leq 0$ при $r \geq 0, t > 0$;
2. $\Gamma_\beta(r_1) > \Gamma_\beta(r_2)$ при $r_1 > r_2$.

Доказательство. Из неравенств (3.12) и (3.26) вытекает, что функция (3.27) удовлетворяет свойству 1 леммы 3.2.

Свойство 2 при $r \leq 1$ непосредственно вытекает из (3.13) и (3.16), а при $r \geq 1$ — из утверждения 2 леммы 3.1.

Лемма 3.2 доказана. □

Докажем, что функция (3.27) является монотонно возрастающей функцией параметра β и растет на бесконечности как $C_1 r^{\delta_1}$, где δ_1 — больший корень уравнения (3.5).

Лемма 3.3. *Для функции (3.27) имеют место следующие свойства:*

1. $\Gamma_{\beta_1}(r) > \Gamma_{\beta_2}(r)$ при $\beta_1 > \beta_2, r > 0$;

2. $\Gamma_\beta(r) = C_1 r^{\delta_1} (1 + \varepsilon(r))$, $\lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon(r) = 0$.

Доказательство. Докажем свойство 1.

Пусть $\beta_1 > \beta_2$. При $\beta = \beta_1$ и $\beta = \beta_2$ определим по формуле (3.27) функции $\Gamma_{\beta_1}(r)$ и $\Gamma_{\beta_2}(r)$ и рассмотрим выражение

$$W(r) = r^{s-1} [\Gamma'_{\beta_1}(r) \Gamma_{\beta_2}(r) - \Gamma_{\beta_1}(r) \Gamma'_{\beta_2}(r)]. \quad (3.29)$$

Дифференцируя функцию $W(r)$ по r и учитывая, что при $r \leq 1$ функции $\Gamma_{\beta_1}(r) = Z_{\beta_1}(r)$ и $\Gamma_{\beta_2}(r) = Z_{\beta_2}(r)$ удовлетворяют уравнению (3.10) при $\beta = \beta_2$ и $\beta = \beta_1$ соответственно, а при $r \geq 1$ функции $\Gamma_{\beta_1}(r) = y_{\beta_1}(r)$ и $\Gamma_{\beta_2}(r) = y_{\beta_2}(r)$ удовлетворяют уравнению (3.18) при $\beta = \beta_1$ и $\beta = \beta_2$ соответственно, получим

$$\begin{aligned} W'(r) &= \frac{s-1}{r} W(r) + r^{s-1} [\Gamma''_{\beta_1} \Gamma_{\beta_2} - \Gamma_{\beta_1} \Gamma''_{\beta_2}(r)] = \\ &= \frac{s-1}{r} W(r) - \frac{s-1}{r} W(r) - \frac{r^{s-1}}{\lambda_1^2} \Gamma_{\beta_1}(r) \Gamma_{\beta_2}(r) (C_{\beta_1}(r) - C_{\beta_2}(r)) > 0, \end{aligned} \quad (3.30)$$

где

$$C_{\beta_1}(r) = -\bar{\beta}_1^2 \min(1, r^{-2}), \quad C_{\beta_2}(r) = -\bar{\beta}_2^2 \min(1, r^{-2}). \quad (3.31)$$

Так как $W(0) = 0$, то из (3.30) следует неравенство $W(r) > 0$ при $r > 0$. Следовательно,

$$\left(\frac{\Gamma_{\beta_1}(r)}{\Gamma_{\beta_2}(r)} \right)' = \frac{W(r)}{r^{s-1} \Gamma_{\beta_2}^2(r)} > 0 \text{ при } r > 0, \beta_1 > \beta_2.$$

Интегрируя последнее неравенство и учитывая, что

$$\frac{\Gamma_{\beta_1}(0)}{\Gamma_{\beta_2}(0)} = 1,$$

получим

$$\frac{\Gamma_{\beta_1}(r)}{\Gamma_{\beta_2}(r)} - 1 = \int_0^r \frac{W(\tau) d\tau}{\tau^{s-1} \Gamma_{\beta_2}^2(\tau)} > 0.$$

Свойство 1 леммы 3.3 доказано.

Докажем асимптотическую формулу 2 из леммы 3.3. Из представления (3.21) решения задачи (3.18), (3.19) при $r \rightarrow \infty$ будем, очевидно иметь

$$\Gamma_\beta(r) = C_1 r^{\delta_1} \left[1 + \frac{C_2}{C_1} r^{\delta_2 - \delta_1} \right] = C_1 r^{\delta_1} [1 + \varepsilon(r)],$$

где

$$\varepsilon(r) = \frac{C_2}{C_1} r^{\delta_2 - \delta_1} = \frac{C_2}{C_1} r^{-\sqrt{D}} \rightarrow 0, \quad \text{при } r \rightarrow \infty,$$

$$D = (s-2)^2 + 4\bar{\beta}^2,$$

где δ_1, δ_2 — корни (3.20) уравнения (3.5).

Докажем, что постоянная C_1 в (3.21) является положительной. В самом деле, если бы это было не так, т. е. $C_1 < 0$, то из (3.21) мы получили бы, что

$$\Gamma_\beta(r) \rightarrow -\infty \quad \text{при } r \rightarrow \infty,$$

что приводит к противоречию в силу свойства 3 из леммы 3.1. Свойство 2 доказано.

Лемма 3.3 доказана. \square

4. О СТАБИЛИЗАЦИИ СУПЕРРЕШЕНИЙ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

Пусть при $\beta > 0$ определена функция

$$a_\beta(r) = \begin{cases} -\beta^2, & r \leq 1, \\ \frac{-\beta^2}{r^{2-\alpha}}, & r \geq 1, \quad 0 \leq \alpha < 2. \end{cases} \quad (4.1)$$

Рассмотрим эллиптический оператор

$$L_2V = L(x, t)V + a_\beta(r)V, \quad (4.2)$$

где $L(x, t)$ — оператор (1.3) из введения, для которого выполнены условия (1.4)–(1.6).

Лемма 4.1. *Для любого $R > 1$, $\beta > 0$ найдется постоянная $A_0(R, \beta) > 0$ такая, что при $A \geq A_0$ и $\lambda = e^{-A}$ для функции*

$$V(r) = 1 - \exp \left[A \left(\frac{r^2}{4R^2} - 1 \right) \right], \quad 0 \leq r \leq 2R, \quad (4.3)$$

справедливо неравенство

$$L_2V(r) + \lambda V(r) < 0, \quad r < R. \quad (4.4)$$

Для функции

$$P(x, t) = V(r)e^{-\lambda t}, \quad (4.5)$$

где $V(r)$ — функция (4.3), выполняются следующие соотношения:

$$L_2P(x, t) - P_t(x, t) \leq 0, \quad |x| < R, \quad t > 0, \quad (4.6)$$

$$P(x, t)|_{|x|=R} = (1 - e^{-\frac{3A}{4}})e^{-\lambda t} > 0, \quad (4.7)$$

$$P(x, 0) = V(|x|), \quad |x| < R, \quad (4.8)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} P(x, t) = 0 \quad (4.9)$$

равномерно относительно x на каждом компакте K в $|x| < R$.

Доказательство. Докажем только неравенство (4.4), так как соотношения (4.6)–(4.9) после этого очевидны.

Проводя вычисления, будем иметь

$$L_2V + \lambda V = -\psi \frac{A^2}{4R^4} \sum_{i,k=1}^N a_{ik}x_i x_k - \psi \frac{A}{2R^2} \sum_{i=1}^N a_{ii} + a_\beta(r)V(r) + \lambda v(r), \quad (4.10)$$

где $\psi(r) = \exp \left[A \left(\frac{r^2}{4R^2} - 1 \right) \right] > 0$.

Отбрасывая в правой части (4.10) слагаемые

$$-\psi \frac{A^2}{4R^4} \sum_{i,k=1}^N a_{ik}x_i x_k < 0, \quad -\psi \frac{A}{2R^2} \sum_{i,k=1}^N a_{ii} < 0,$$

будем иметь в шаре $|x| < R$ неравенство

$$L_2V + \lambda V < \psi(r) \left[V(r)a_\beta(r) \exp \left[A \left(1 - \frac{r^2}{4R^2} \right) \right] + \exp \left(-A \frac{r^2}{4R^2} \right) V(r) \right]. \quad (4.11)$$

Обозначим

$$K_1(r) = V(r)a_\beta(r) \exp \left[A \left(1 - \frac{r^2}{4R^2} \right) \right] + \exp \left(-A \frac{r^2}{4R^2} \right) V(r). \quad (4.12)$$

При $1 \leq r \leq R$ учтем в (4.12) неравенства

$$\frac{\beta^2}{r^{2-\alpha}} \leq \beta^2, \quad \frac{-\beta^2}{r^{2-\alpha}} \leq \frac{-\beta^2}{R^{2-\alpha}}, \quad \exp \left(-A \frac{r^2}{4R^2} \right) V(r) \leq 1$$

и получим

$$K_1(r) \leq \beta^2 + 1 - \frac{\beta^2}{R^{2-\alpha}} e^{\frac{3A}{4}}. \quad (4.13)$$

Выберем A_0 из условия

$$\frac{\beta^2}{R^{2-\alpha}} \exp\left(\frac{3}{4}A_0\right) > \beta^2 + 1. \quad (4.14)$$

При $A \geq A_0$ из (4.13) и (4.14) следует, что

$$K_1(r) < 0 \text{ при } 1 \leq r \leq R. \quad (4.15)$$

При $0 \leq r \leq 1$ и $A \geq A_0$ для всех $K_1(r)$ в силу (4.14) имеет место оценка

$$K_1(r) \leq \beta^2 + 1 - \alpha^2 \exp\left(\frac{3}{4}A\right) \leq \beta^2 + 1 - \frac{\beta^2}{R^{2-\alpha}} \exp\left(\frac{3}{4}A\right). \quad (4.16)$$

Из неравенств (4.11), (4.15), (4.16) следует, что неравенство (4.4) доказано. Лемма 4.1 доказана. \square

5. ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ОСНОВНОЙ ТЕОРЕМЫ

Докажем ряд вспомогательных утверждений.

Наряду с задачей Коши (1.1), (1.2) рассмотрим задачу Коши

$$L(x, t)W_\beta + a_\beta(r)W_\beta - W_{\beta t} = 0 \text{ в } D, \quad (5.1)$$

$$W_\beta(x, 0) = u_1(x), \quad u_1(x) = C_1(1 + |x|^m), \quad (5.2)$$

где $a_\beta(r)$ определено по формуле (4.1).

Из принципа максимума (см. [7, п. 1]) элементарно следует неравенство.

Лемма 5.1.

$$|u(x, t)| \leq W_\beta(x, t) \text{ в } D, \quad (5.3)$$

Рассмотрим задачи Коши

$$L(x, t)W_{\beta_1} + a_{\beta_1}(r)W_{\beta_1} - W_{\beta_1 t} = 0 \text{ в } D, \quad (5.4)$$

$$W_{\beta_1}(x, 0) = u_1(x), \quad (5.5)$$

$$L(x, t)W_{\beta_2} + a_{\beta_2}(r)W_{\beta_2} - W_{\beta_2 t} = 0 \text{ в } D, \quad (5.6)$$

$$W_{\beta_2}(x, 0) = u_1(x) \quad (5.7)$$

с одинаковыми начальными функциями (5.2).

Лемма 5.2. Если $\beta_2 > \beta_1$, то для решений задачи Коши (5.4), (5.5) и (5.6), (5.7) таких, что

$$|W_{\beta_i}(x, t)| \leq M(1 + |x|^m), \quad i = 1, 2$$

в полосе $H_T = \{x \in \mathbb{R}^N, 0 \leq t \leq T\}$, $\forall T > 0$ справедливо неравенство

$$W_{\beta_2}(x, t) \leq W_{\beta_1}(x, t) \text{ в } D, \quad (5.8)$$

Доказательство. Рассмотрим функции $z(x, y) = W_{\beta_2}(x, t) - W_{\beta_1}(x, t)$ и получим, что функция $z(x, t)$ удовлетворяет соотношениям

$$L(x, t)z + a_{\beta_2}z - z_t = W_{\beta_1}(x, t)(a_{\beta_1}(r) - a_{\beta_2}(r)) > 0, \quad z(x, 0) = 0 \text{ в } D,$$

так как $W_{\beta_1}(x, t) > 0$ и $a_{\beta_1}(r) - a_{\beta_2}(r) > 0$ при $\beta_2 > \beta_1$, то из принципа максимума (см. [7, п. 1]) получим:

$$z(x, t) \leq 0 \text{ в полосе } H_T \text{ для } \forall T.$$

Из произвольности $T > 0$ получаем справедливость (5.8) в D .

Лемма 5.2 доказана. \square

Лемма 5.3. Для $m > 0$ и

$$\beta_0^2 = m(m + s - 2)\lambda_1^2 \quad (5.9)$$

существует постоянная $l > 0$ такая, что решение $W_\beta(x, t)$ задачи Коши (5.1), (5.2) с $\beta^2 = \beta_0^2$ удовлетворяет неравенству

$$W_{\beta_0}(x, t) \leq l\Gamma_{\beta_0}(r), \quad (5.10)$$

где $\Gamma_{\beta_0}(r)$ — функция (3.27) при $\beta = \beta_0$.

Доказательство. Пусть

$$a_{\beta_0}(r) = -\beta_0^2 \min(1, r^{-2+\alpha}).$$

Выбрав β_0 из условия $\delta_1(\beta_0) = m > 0$, где $\delta_1(\beta)$ — большой корень уравнения (3.5), получим, что β_0^2 удовлетворяет (5.9). Тогда по лемме 3.2 функция (3.27) удовлетворяет равенству

$$\Gamma_{\beta_0}(r) = C_1 r^m (1 + \varepsilon(r)), \quad \lim_{r \rightarrow \infty} \varepsilon(r) = 0. \quad (5.11)$$

Не ограничивая общности считаем, что $|\varepsilon(r)| \leq 1$ для всех $r \geq 0$.

Рассмотрим функцию

$$z(x, t) = l\Gamma_{\beta_0}(r) - V_{\beta_0}(x, t), \quad (5.12)$$

где $\Gamma_{\beta_0}(r)$ — функция (5.11), а $V_{\beta_0}(x, t)$ — решение задачи Коши (5.1), (5.2). Ясно, что функция (5.12) при $\beta^2 = \beta_0^2$ удовлетворяет соотношениям

$$L(x, t)z + a_{\beta_0}(r)z - z_t \leq 0 \quad \text{в } D, \quad (5.13)$$

$$z(x, 0) = l\Gamma_{\beta_0}(r) - C_1(1 + |x|^m). \quad (5.14)$$

Выберем постоянную $l > 0$ настолько большой, чтобы

$$l\Gamma_{\beta_0}(r) \geq C_1(1 + |x|^m). \quad (5.15)$$

Такой выбор $l \geq 2$ возможен, так как $C_1 > 0$, а для функции $\Gamma_{\beta_0}(r)$ справедливо равенство (5.11).

В силу соотношений (5.13), (5.14) и (5.15) можем применить принцип максимума (см. [7, п. 1.7]) и получим, что

$$z(x, t) \leq 0 \quad \text{в полосе } H_T \text{ для } \forall T > 0. \quad (5.16)$$

Из произвольности $T > 0$ и из (5.16) следует, что неравенство (5.10) доказано.

Лемма 5.3 доказана. \square

Замечание. Так как $\Gamma_{\beta}(r) \leq lr^m$ при $r \geq 1$, то неравенство (5.10) можно записать в более простом виде:

$$W_{\beta}(x, t) \leq l(r^m + 1). \quad (5.17)$$

Лемма 5.4. Пусть функция $u_1(x)$ определена в (5.2), и $c(x, t)$ удовлетворяет условию (1.7) при $\beta^2 > \beta_0^2 = \lambda_1^2 m(m + s - 2)$, тогда решение задачи Коши (5.1), (5.2) удовлетворяет неравенству

$$W_{\beta}(x, t) < C\Gamma_{\beta}(r), \quad t > 0, \quad C > C_1. \quad (5.18)$$

Доказательство. Применяя лемму 5.2 к функциям $W_{\beta_0}(x, t)$ и $W_{\beta}(x, t)$, где $\beta^2 > \beta_0^2$, и учитывая лемму 5.3, получим доказательство леммы 5.4 с постоянной $C > C_1$. \square

Докажем основную теорему. В силу неравенства (5.3) достаточно доказать, что при выполнении условий теоремы решение задачи Коши (5.1), (5.2) имеет предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} W_{\beta_0}(x, t) = 0 \quad (5.19)$$

равномерно относительно x на каждом компакте K в \mathbb{R}^N .

Пусть задано $m > 0$. Выберем β_0 из условия, чтобы $\delta_1(\beta_0) = m$. При этом получим равенство

$$\sqrt{(s-2)^2 + 4\beta_0^2} = 2m + (s-2),$$

из которого, после возведения в квадрат, получаем

$$\beta_0^2 = \lambda_1^2 m(m + s - 2).$$

Пусть теперь β таково, что $\delta_1(\beta) > m$, тогда аналогично получим неравенство $\beta^2 > \beta_0^2$, где β_0^2 из (5.9). В силу леммы 3.3 функция $\Gamma_{\beta}(r)$, определенная формулой (3.27) при $\beta^2 > \beta_0^2$, имеет на бесконечности больший порядок роста по сравнению с функцией $\Gamma_{\beta_0}(r)$, растущей как $l(r^m + 1)$.

Фиксируем произвольный компакт K в \mathbb{R}^N и выберем $r_1 > 0$ столь большим, чтобы $K \in \bar{B}_{r_1}$. Для фиксированного $m > 0$ найдем функцию $\Gamma_{\beta_0}(r)$ по формуле (3.27). Для $\Gamma_{\beta_0}(r)$ имеет место лемма 5.3 и неравенство (5.17).

При $\beta^2 > \beta_0^2$ в силу леммы 5.4 для решения $W_{\beta}(x, t)$ задачи Коши (5.1), (5.2) справедливо неравенство (5.18).

При $\beta^2 > \beta_0^2$ в силу леммы 5.2 справедливо неравенство

$$W_\beta(x, t) \leq W_{\beta_0}(x, t). \quad (5.20)$$

Рассмотрим функцию

$$z(x, t) = \gamma \Gamma_\beta(r) - W_\beta(x, t). \quad (5.21)$$

Для любого $\varepsilon > 0$ выберем $\gamma > 0$ так, чтобы

$$\gamma \Gamma_\beta(r) \leq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при } |r| \leq r_1. \quad (5.22)$$

В силу второй теоремы Вейерштрасса (см. [8, т. 1, с. 174]) такой выбор γ возможен.

В силу неравенств (5.10) и (5.20) получим

$$z(x, t) \geq \gamma \Gamma_\beta(r) - W_{\beta_0}(x, t) \geq \gamma \Gamma_\beta(r) - l \Gamma_{\beta_0}(r).$$

Так как, по условию выбора β , $\gamma \Gamma_\beta(r)$ растет на бесконечности как $C\gamma|x|^{\delta_1}$, а функция $\gamma \Gamma_{\beta_0}(r)$ имеет порядок роста $l|x|^m$, то существует $R > \max(r_1, |x_0|)$, где $|x_0| = x_0(\lambda_0, \lambda_1, N)$, для которого

$$z(x, t)|_{|x|=R} \geq 0 \quad \forall t > 0. \quad (5.23)$$

Функция (5.21) очевидно удовлетворяет соотношениям

$$L(x, t)z + a_\beta(r)z - z_t \leq 0, \quad N < R, \quad t > 0, \quad (5.24)$$

$$z(x, t)|_{|x|=R} \geq 0, \quad t > 0, \quad (5.25)$$

$$z(x, 0) = \gamma \Gamma_\beta(r) - C(1 + r^m) \equiv \varphi(r) \quad \text{при } |x| < R. \quad (5.26)$$

Рассмотрим функцию (4.5) при $\lambda = e^{-A}$ из леммы 4.1 и введем новую функцию

$$P_1(x, t) = \frac{A_1}{\gamma_1} p(x, t), \quad (5.27)$$

где

$$A_1 = \max |\varphi(r)| \quad \text{при } r \leq R, \quad \gamma_1 = 1 - e^{-A\frac{3}{4}} = V(R), \quad (5.28)$$

$p(x, t)$ — функция (4.5), $\varphi(r)$ — функция (5.26). Заметим, что

$$P_1(x, 0) = \frac{A_1}{\gamma_1} \geq A_1, \quad (5.29)$$

так как $\gamma_1 \leq V(r) \leq 1$, где $V(r)$ функция (4.3). Из леммы 4.1 следует, что функция (5.27) удовлетворяет соотношениям

$$LP_1 + a_\beta(r)P_1 - P_{1t} \leq 0, \quad |x| < R, \quad t > 0, \quad (5.30)$$

$$P_1(x, t)|_{|x|=R} > 0, \quad t > 0, \quad (5.31)$$

$$P_1(x, 0) \geq A_1 = \max |\varphi(r)| \geq 0 \quad \text{при } r \leq R \quad (5.32)$$

и существует предел

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} P_1(x, t) = 0 \quad (5.33)$$

равномерно по x в шаре $|x| < R$, т. е. для $\forall \varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$ такое, что для всех $t \geq T$ и всех x , удовлетворяющих $|x| < R$,

$$P_1(x, t) < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (5.34)$$

Рассмотрим функцию

$$q(x, t) = z(x, t) + P_1(x, t), \quad (5.35)$$

где $z(x, t)$ — функция (5.21), а $P_1(x, t)$ — функция (5.27). Ясно, что в силу соотношений (5.24)–(5.26) и (5.30)–(5.32) функция (5.35) удовлетворяет неравенствам:

$$L(x, t)q + a_\beta(r)q - q_t \leq 0, \quad |x| < R, \quad t > 0, \quad (5.36)$$

$$q|_{|x|=R} \geq 0, \quad t > 0, \quad (5.37)$$

$$q|_{t=0} \geq \varphi(r) + |\varphi(r)| \geq 0, \quad r \leq R. \quad (5.38)$$

В силу принципа максимума (см. [7]), из (5.36)–(5.38) следует, что справедливо неравенство:

$$q(x, t) \geq 0 \quad \text{при } |x| < R, \quad t > 0. \quad (5.39)$$

Учитывая формулу (5.21) и неравенство (5.39), можем записать

$$W_\beta(x, t) \leq \gamma \Gamma_\beta(r) + P_1(x, t) \quad \text{при } |x| < R, \quad t > 0. \quad (5.40)$$

Учитывая при $|x| \leq r_1$ неравенство (5.22) и неравенство (5.34) при $t \geq T(\varepsilon)$ получим, что для любого $\varepsilon > 0$ существует $T(\varepsilon) > 0$, такое, что при $t \geq T(\varepsilon)$ и всех x , удовлетворяющих $|x| \leq r_1$, справедливо неравенство

$$W_\beta(x, t) < \varepsilon. \quad (5.41)$$

Тогда из (5.41) и (5.3) мы получаем, что теорема доказана.

6. ТОЧНОСТЬ УСЛОВИЙ ТЕОРЕМЫ

На примере мы покажем, что условие (2.1) в теореме является точным. С этой целью рассмотрим в полупространстве $D = \mathbb{R}^N \times [0, \infty)$, $N \geq 3$, задачу Коши

$$b(r)\Delta u + a_\beta(r)u - u_t = 0 \quad \text{в } D, \quad (6.1)$$

$$u(x, 0) = u_0(x), \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (6.2)$$

в которой, как и выше в разделах 1 и 2,

$$b(r) = \max(1, r^\alpha), \quad 0 \leq \alpha < 2, \quad (6.3)$$

$$a_\beta(r) = -\beta^2 \min(1, r^{\alpha-2}). \quad (6.4)$$

Ясно, что в обозначениях разделов 1 и 2 $\lambda_0^2 = \lambda_1^2 = 1$, $s = N$, так как $L = \Delta$ — оператор Лапласа в \mathbb{R}^N .

Далее будем предполагать, что начальная функция $u_0(x)$ является непрерывной в \mathbb{R}^N и удовлетворяет условию (1.8).

Лемма 6.1. *Для произвольного $m > 0$ существует непрерывная начальная функция $u_1(x)$, удовлетворяющая условию степенного роста порядка $m > 0$ и коэффициент $a_{\beta_0}(r)$ (6.4), удовлетворяющий условию (1.7) при $\beta^2 = \beta_0^2$,*

$$\beta_0^2 = m(m + N - 2), \quad (6.5)$$

для которых решение соответствующей задачи Коши (6.1), (6.2) не имеет нулевого предела

$$\lim_{t \rightarrow \infty} u(x, t) = 0 \quad (6.6)$$

ни в одной точке x пространства \mathbb{R}^N .

Доказательство. Рассмотрим в \mathbb{R}^N задачу о построении положительного в \mathbb{R}^N решения $\Gamma_{\beta_0}(r)$ уравнения

$$b(r)\Delta \Gamma_{\beta_0}(r) + a_{\beta_0}(r)\Gamma_{\beta_0}(r) = 0, \quad (6.7)$$

имеющего на бесконечности заданный порядок роста $m > 0$.

Переходя к сферическим N -мерным координатам с центром в начале координат, рассмотрим при $r \leq 1$ задачу

$$\Gamma''_{\beta_0}(r) + \frac{N-1}{r}\Gamma'_{\beta_0}(r) + \frac{a_{\beta_0}(r)}{b(r)}\Gamma_{\beta_0}(r) = 0, \quad 0 < r \leq 1, \quad (6.8)$$

$$\Gamma_{\beta_0}(0) = 1, \quad \Gamma'_{\beta_0}(0) = 0. \quad (6.9)$$

При $r \leq 1$ справедливо равенство $\frac{a_{\beta_0}(r)}{b(r)} = -\beta_0^2$. Поэтому задача (6.8), (6.9) имеет вид

$$\Gamma''_{\beta_0}(r) + \frac{N-1}{r}\Gamma'_{\beta_0}(r) - \beta_0^2\Gamma_{\beta_0}(r) = 0, \quad r \leq 1, \quad (6.10)$$

$$\Gamma_{\beta_0}(0) = 1, \quad \Gamma'_{\beta_0}(0) = 0. \quad (6.11)$$

Заметим, что задача (6.10), (6.11) только обозначениями отличается от задачи (3.10), (3.11) из раздела 3. Следует заменить в (3.10), (3.11) S на N и $\bar{\beta}^2$ на β^2 .

При этом мы получаем решение задачи (6.10), (6.11) в виде

$$\Gamma_{\beta_0}(r) = q_1(N) \frac{I_{\frac{N-2}{2}}(r\beta_0)}{(r\beta_0)^{\frac{N-2}{2}}}, \quad q_1(N) = 2^{\frac{N-2}{2}} \Gamma\left(\frac{N}{2}\right), \quad (6.12)$$

и это решение положительно и

$$\Gamma_{\beta_0}(1) = q_1(N)\beta_0^{\frac{2-N}{2}} I_{\frac{N-2}{2}}(\beta_0) = b_0(\beta_0) > 0, \quad (6.13)$$

$$\Gamma'_{\beta}(1) = q_1(N)\beta_0^{2-\frac{N}{2}} I_{\frac{N}{2}}(\beta_0) = b_1(\beta_0) > 0. \quad (6.14)$$

При $r \geq 1$ имеет место равенство $a_{\beta_0}(r) = -\frac{\beta_0^2}{r^{2-\alpha}}$, поэтому при $r \geq 1$ получаем задачу

$$\Gamma''_{\beta_0}(r) + \frac{N-1}{r}\Gamma'_{\beta_0}(r) - \frac{\beta_0^2}{r^2}\Gamma_{\beta_0}(r) = 0, \quad r > 1, \quad (6.15)$$

$$\Gamma_{\beta_0}(1) = b_0(\beta_0), \quad \Gamma'_{\beta_0}(0) = b_1(\beta_0). \quad (6.16)$$

Задача (6.15), (6.16) только обозначениями отличается от задачи (3.18), (3.19) из раздела 3, при этом следует заменить S на N и $\bar{\beta}^2$ на $\bar{\beta}_0^2$ в (3.18), (3.19), чтобы получить задачу (6.15), (6.16). Поэтому решение задачи (6.15), (6.16) имеет при $r > 1$ вид

$$\Gamma_{\beta_0}(r) = C_1 r^{\delta_1} + C_2 r^{\delta_2}, \quad (6.17)$$

где δ_1, δ_2 — корни уравнения (3.5) при $S = N$, имеющие вид

$$\delta_1 = \frac{-(N-2) + \sqrt{D}}{2} > 0, \quad \delta_2 = \frac{-(N-2) - \sqrt{D}}{2} < 0, \quad D = (N-2)^2 + 4\beta^2. \quad (6.18)$$

Постоянные C_1, C_2 в (6.17) определяются из условий (6.16). Важно, что при этом

$$C_1 > 0. \quad (6.19)$$

Для функции $\Gamma_{\beta_0}(r)$, определяемой формулами (6.12) при $r \leq 1$ и (6.18) при $r \geq 1$, получаем гладкое решение уравнения (6.7). Выбирая β из условия $\delta_1 = m$, в силу (6.18), (6.19) мы придем к условию $\beta^2 = \beta_0^2$. Тогда $\Gamma_{\beta_0}(r)$ растет на бесконечности как r^m .

Положим в задаче Коши (6.1), (6.2) $u_1(x) = \Gamma_{\beta_0}(r)$ и получим положительное решение задачи

$$u(x, t) = \Gamma_{\beta_0}(r) > 0.$$

Таким образом, решение $u(x, t)$ не стабилизируется к нулю ни в одной точке $x \in \mathbb{R}^N$.

Лемма 6.1 доказана. \square

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Ватсон Г.* Теория бесселевых функций. — М.: ИЛ, 1949.
2. *Денисов В. Н.* О поведении решений параболических уравнений при больших значениях времени // Усп. мат. наук. — 2005. — 60, № 4. — С. 145–212.
3. *Денисов В. Н.* Достаточные условия стабилизации решения задачи Коши для недиивергентного параболического уравнения с младшими коэффициентами // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — 36. — С. 61–71.
4. *Денисов В. Н.* О стабилизации решения задачи Коши для недиивергентного параболического уравнения с младшими коэффициентами в классах растущих начальных функций // Докл. РАН. — 2010. — 430. — С. 586–588.
5. *Денисов В. Н.* Стабилизация решения задачи Коши для недиивергентного уравнения с растущими коэффициентами // Труды МИАН. — 2010. — 270. — С. 97–109.
6. *Денисов В. Н.* Стабилизация решения задачи Коши для недиивергентного параболического уравнения с растущими младшими коэффициентами // Соврем. мат. и ее прилож. — 2013. — 78. — С. 17–49.
7. *Ильин А. М., Калашников А. С., Олейник О. А.* Линейные уравнения второго порядка параболического типа // Усп. мат. наук. — 1962. — 17, № 3. — С. 3–141.
8. *Ильин В. А., Садовничий В. А., Сендов Б. Х.* Математический анализ. Т. 2. — М.: МГУ, 2004.
9. *Смирнова Г. Н.* Задачи Коши для параболических уравнений, вырождающихся на бесконечности // Мат. сб. — 1966. — 70, № 4. — С. 591–604.
10. *Федорюк М. В.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1985.
11. *Aronson D. G., Besala P.* Parabolic equation with unbounded coefficients // J. Differ. Equ. — 1967. — 3. — С. 1–14.

Василий Николаевич Денисов
 Московский государственный университет им. М. В. Ломоносова, Москва
 E-mail: vdenisov2008@yandex.ru

UDC 517.956.41

On Behavior of Solutions of Parabolic Nondivergent Equations with Increasing Higher-Order Coefficients at Large Values of Time

© 2016 V. N. Denisov

Abstract. We investigate sufficient conditions of stabilization to zero for solutions of the Cauchy problem for linear parabolic second-order equation with increasing higher-order coefficients and initial-value functions of power growth rate at infinity.

REFERENCES

1. G. Watson, *Teoriya besselevykh funktsiy* [Bessel Functions Theory], IL, Moscow, 1949.
2. V. N. Denisov, "O povedenii resheniy parabolicheskikh uravneniy pri bol'shikh znacheniyakh vremeni" [On behavior of solutions of parabolic equations at large values of time], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2005, **60**, No. 4, 145–212.
3. V. N. Denisov, "Dostatochnye usloviya stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya nedivergentnogo parabolicheskogo uravneniya s mladshimi koefitsientami" [Sufficient conditions for stabilization of solution of the Cauchy problem for nondivergent parabolic equations with lower-order coefficients], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **36**, 61–71.
4. V. N. Denisov, "O stabilizatsii resheniya zadachi Koshi dlya nedivergentnogo parabolicheskogo uravneniya s mladshimi koefitsientami v klassakh rastushchikh nachal'nykh funktsiy" [On stabilization of solution of the Cauchy problem for nondivergent parabolic equations with lower-order coefficients in classes of increasing initial-value functions], *Dokl. RAN* [Rep. Russ. Acad. Sci.], 2010, **430**, 586–588.
5. V. N. Denisov, "Stabilizatsiya resheniya zadachi Koshi dlya nedivergentnogo uravneniya s rastushchimi koefitsientami" [Stabilization of solution of the Cauchy problem for nondivergent equations with increasing coefficients], *Trudy MIAN* [Proc. Math. Inst. Russ. Acad. Sci.], 2010, **270**, 97–109.
6. V. N. Denisov, "Stabilizatsiya resheniya zadachi Koshi dlya nedivergentnogo parabolicheskogo uravneniya s rastushchimi mladshimi koefitsientami" [On stabilization of solution of the Cauchy problem for nondivergent parabolic equations with increasing lower-order coefficients], *Sovrem. mat. i ee prilozh.* [Contemp. Math. Appl.], 2013, **78**, 17–49.
7. A. M. Il'in, A. S. Kalashnikov, and O. A. Oleynik, "Lineynye uravneniya vtorogo poryadka parabolicheskogo tipa" [Linear second-order equations of parabolic type], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 1962, **17**, No. 3, 3–141.
8. V. A. Il'in, V. A. Sadovnichiy, and B. Kh. Sendov, *Matematicheskii analiz. T. 2* [Mathematical Analysis. Vol. 2], MSU, Moscow, 2004.
9. G. N. Smirnova, "Zadachi Koshi dlya parabolicheskikh uravneniy, vyzhdayushchikhsya na beskonechnosti" [Cauchy problems for parabolic equations degenerating at infinity], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1966, **70**, No. 4, 591–604.
10. M. V. Fedoryuk, *Obyknovennyye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], Nauka, Moscow, 1985.
11. D. G. Aronson and P. Besala, "Parabolic equation with unbounded coefficients," *J. Differ. Equ.*, 1967, **3**, 1–14.

Vasiliy Denisov
 Lomonosov Moscow State University, Moscow, Russia
 E-mail: vdenisov2008@yandex.ru

О КОЭРЦИТИВНОСТИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ СДВИГАМИ АРГУМЕНТОВ

© 2016 г. **Е. П. ИВАНОВА**

Аннотация. Изучаются краевые задачи на ограниченных областях для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов в старших членах. Получены условия равномерной относительно сдвигов аргументов сильной эллиптичности таких уравнений.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|----|
| Введение | 85 |
| 1. Разбиения области, индуцированные разностными операторами | 86 |
| 2. Сильно эллиптические дифференциально-разностные уравнения с несоизмеримыми сдвигами аргументов | 89 |
| Список литературы | 98 |

ВВЕДЕНИЕ

В статье рассматриваются краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений, содержащих несоизмеримые сдвиги пространственных переменных в старших членах. Теория краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений с целочисленными или соизмеримыми сдвигами аргументов в старших членах построена в работах А. Л. Скубачевского (см. [8]). Эти задачи имеют важные приложения в теории плазмы, в теории многослойных пластин и оболочек (см. [8, 9]). Краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами в одномерном случае рассматривались в [2, 8]. Изучение таких задач осложняется рядом особенностей.

Во-первых, это нарушение гладкости решений. Если решения краевых задач для дифференциально-разностных уравнений с соизмеримыми сдвигами сохраняют гладкость в некоторых подобластях, то решения краевых задач с несоизмеримыми сдвигами могут иметь всюду плотное множество точек разрыва производной (см. [8, пример 3.10]).

Во-вторых, трудности связаны с проверкой условий сильной эллиптичности дифференциально-разностных операторов с несоизмеримыми сдвигами, действующих на ограниченных областях. Сильно эллиптическими здесь названы операторы, для которых выполняется неравенство типа Гординга. Проблема построения условий сильной эллиптичности операторов, выраженных в коэффициентах этих операторов, называется проблемой коэрцитивности. Если для дифференциально-разностных операторов с соизмеримыми сдвигами получены как необходимые, так и достаточные (близкие к необходимым) условия сильной эллиптичности (см. [8]), то для операторов с несоизмеримыми сдвигами известны только достаточные условия, выраженные в виде положительности скалярного символа, зависящего от коэффициентов разностного оператора (см. [6, примеры 8.1, 8.2]). Поскольку в этом символе не учитываются свойства и размер области, эти условия являются избыточными и далекими от необходимых. В работе [6] приводятся также достаточные (тоже довольно грубые) условия сильной эллиптичности этих операторов с использованием операторной матрицы.

В-третьих, даже малые возмущения сдвигов нарушают их соизмеримость, и известные условия сильной эллиптичности дифференциально-разностных операторов с соизмеримыми сдвигами

являются неустойчивыми относительно этих сдвигов. Достаточные условия сильной эллиптичности для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов для оператора Лапласа получены в [7]. Проблема коэрцитивности для дифференциально-разностных уравнений с параметром и вопросы непрерывной зависимости решений таких задач от сдвигов аргументов впервые изучались в работе Л. Е. Россовского [5].

В данной статье предлагается метод построения достаточных условий сильной эллиптичности дифференциально-разностных уравнений второго порядка с несоизмеримыми сдвигами аргументов. Получены достаточные условия сильной эллиптичности, учитывающие форму и размер области и устойчивые относительно малых возмущений сдвигов пространственных переменных.

1. РАЗБИЕНИЯ ОБЛАСТИ, ИНДУЦИРОВАННЫЕ РАЗНОСТНЫМИ ОПЕРАТОРАМИ

Рассмотрим разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$

$$Ru(x) = \sum_{h \in M} a_h u(x+h), \quad (1.1)$$

где $a_h \in \mathbb{R}$, M — множество векторов с соизмеримыми координатами, $h_0 = 0 \in M$. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — область с кусочно-гладкой границей ∂Q . Для операторов с соизмеримыми сдвигами используем метод исследования, предложенный А. Л. Скубачевским (см. [8]). При этом изложим модификацию этого метода, впервые реализованную в статье [1].

Определение 1.1. Назовем \mathfrak{R} *регулярным разбиением* области Q на непересекающиеся подобласти Q_r ($r = 1, 2, \dots$), если:

1. $\bigcup_r \bar{Q}_r = \bar{Q}$;
2. для любой Q_{r_1} и $h \in \widehat{M} = \{M, -M\}$ или найдется Q_{r_2} такая, что $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, или $Q_{r_1} + h \in \mathbb{R}^n \setminus Q$. Здесь M — множество векторов из формулы (1.1).

Приведем алгоритм построения регулярного разбиения.

Каждому упорядоченному набору $\beta = \{h_k\}_{k=1}^l$ ($h_k \in \widehat{M}$), поставим в соответствие множества $A_\beta^0 = \partial Q, \dots, A_\beta^k = (A_\beta^{k-1} + h_k) \cap \bar{Q}, \dots, A_\beta = A_\beta^l = (A_\beta^{l-1} + h_l) \cap \bar{Q}$. Введем множество $S = \bigcup_{\beta \in B} A_\beta$,

где B — множество всех β таких, что $A_\beta \neq \emptyset$.

Покажем, что множество S замкнуто. Действительно, обозначим через β' набор, полученный выбрасыванием из $\beta = \{h_k\}_{k=1}^l$ всех векторов h_{s+1}, \dots, h_r таких, что $\sum_{k=1}^s h_k = \sum_{k=1}^r h_k$, $1 \leq s < r \leq l$, $B' = \{\beta'\}$.

Из очевидного равенства $A_\beta = A_{\beta'}$ следует, что $S = \bigcup_{\beta' \in B'} A_{\beta'}$. Но в силу ограниченности области Q множество B' конечно. Следовательно, множество S как объединение конечного числа замкнутых множеств замкнуто.

Рассмотрим открытое множество $G = \bar{Q} \setminus S$. Очевидно, множество G состоит из конечного или счетного числа непересекающихся связных компонент Q_r ($r = 1, 2, \dots$) и $G = \bigcup_r Q_r$,

$$S = \bigcup_r \partial Q_r. \quad (1.2)$$

Теорема 1.1. *Совокупность всех непересекающихся связных компонент множества G является регулярным разбиением области Q .*

Доказательство. По условию множества Q_r — непересекающиеся и связные, а в силу (1.2)

$$\bigcup_r \bar{Q}_r = G \bigcup \left(\bigcup_r \partial Q_r \right) = (\bar{Q} \setminus S) \bigcup S = \bar{Q}.$$

Остается показать, что для любых Q_r и $h \in \widehat{M}$ либо найдется Q_l такая, что $Q_r + h = Q_l$, либо $Q_r + h \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{Q}$. Предположим противное: пусть существуют такие Q_r, h и Q_l , что $(Q_r + h) \cap Q_l \neq \emptyset$, $Q_r + h \neq Q_l$. Не ограничивая общности, будем считать, что $Q_l \setminus (Q_r + h) \neq \emptyset$. (Если $(Q_r + h) \setminus Q_l \neq \emptyset$,

доказательство аналогично.) Так как множество Q_l связное, найдется точка $z \in \partial(Q_r + h) \cap Q_l$. Тогда $y = z - h \in \partial Q_r$, а в силу (1.2) найдется набор $\beta_l = \{h_1, \dots, h_l\} \in B$ такой, что $y \in A_{\beta_1}$. Тогда $z \in A_{\beta_2}$, где $\beta_2 = \{h_1, \dots, h_l, h\} \in B$. Следовательно, $z \in S$, что противоречит тому, что $z \in Q_l$. \square

Построенное разбиение обозначим \mathfrak{R}_0 . Каждое регулярное разбиение \mathfrak{R} можно рассматривать как элемент множества всевозможных регулярных разбиений. Для этого множества можно ввести отношение порядка следующим образом. Если $\mathfrak{R}_1, \mathfrak{R}_2$ — регулярные разбиения области Q на подобласти Q_{r_1}, Q_{r_2} , соответственно, и для любой Q_{r_1} найдется Q_{r_2} такая, что $Q_{r_1} \subseteq Q_{r_2}$, то $\mathfrak{R}_1 \leq \mathfrak{R}_2$.

Определение 1.2. Назовем регулярное разбиение максимальным (\mathfrak{R}_{\max}), если для любого регулярного разбиения \mathfrak{R} выполнено $\mathfrak{R} \leq \mathfrak{R}_{\max}$.

Теорема 1.2. $\mathfrak{R}_0 = \mathfrak{R}_{\max}$.

Доказательство. Предположим противное. Пусть существует регулярное разбиение \mathfrak{R}_1 такое, что найдутся $Q_{r_1} \in \mathfrak{R}_1, Q_{r_0} \in \mathfrak{R}_0$, для которых $Q_{r_1} \cap Q_{r_0} \neq \emptyset, Q_{r_1} \setminus Q_{r_0} \neq \emptyset$. Следовательно (аналогично доказательству теоремы 1.1), найдется точка $z \in \partial Q_{r_0} \cap Q_{r_1}$. Тогда существуют точка $z_0 \in \partial Q$ и набор $\beta = \{h_1, \dots, h_l\} \in B$ такие, что $z = z_0 + \sum_{k=1}^l h_k$ и $z_j = z_0 + \sum_{k=1}^j h_k \in A_{\beta_j} \in \bar{Q}, j = 1, \dots, l$. Отсюда $z_{l-1} = z - h_l \in \bar{Q}$. Учитывая, что $z \in Q_{r_1}$, получим, что $Q_{r_1} - h_l \cap \bar{Q} \neq \emptyset$. Следовательно, в силу определения регулярного разбиения \mathfrak{R}_1 найдется подобласть $Q_{r_2} \in \mathfrak{R}_1$ такая, что $Q_{r_1} - h_l = Q_{r_2}$. Продолжая процесс возврата из точки z в точку $z_0 \in \partial Q$, получим последовательность областей $\{Q_{r_k}\}_{k=1}^{l+1}$ такую, что $Q_{r_k} \in \mathfrak{R}_1, Q_{r_k} - h_{l-k+1} = Q_{r_{k+1}}$ и $z_{l-k} \in Q_{r_{k+1}}$, в частности, $Q_{r_l} - h_1 = Q_{r_{l+1}}, z_0 \in Q_{r_{l+1}}$. Последнее, так как $z_0 \in \partial Q$, противоречит определению разбиения \mathfrak{R}_1 . \square

Замечание 1.1. В работе А. Л. Скубачевского [8] при построении разбиения области Q на подобласти вместо множества $\widehat{M} = \{M, -M\}$ использовалось множество векторов T , где T — аддитивная абелева группа, порожденная множеством M . В силу очевидного включения $\widehat{M} \subseteq T$, регулярное разбиение \mathfrak{R}_0 является максимальным и на множестве этих разбиений.

Использование максимальных разбиений области особенно важно при исследовании гладкости обобщенных решений краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений.

Разбиению \mathfrak{R}_0 поставим в соответствие ориентированный граф (см. [4]). Вершины графа — это подобласти Q_r , дуги графа — это сдвиги $h \in M$. Если $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, то вершины графа, ассоциированные с подобластями Q_{r_2}, Q_{r_1} , соединяем ориентированной дугой $h = \langle Q_{r_1}, Q_{r_2} \rangle$. На дугах задана числовая функция $\varphi(h) = a_h$, где a_h — коэффициенты разностного оператора из формулы (1.1). Введем на множестве подобластей (вершин графа) бинарное отношение π : подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathfrak{R}_0$ находятся в отношении π , если существует цепь в графе, соединяющая вершины Q_{r_1} и Q_{r_2} . В цепи движение может осуществляться как по направлению дуги, так и против. Это отношение является отношением эквивалентности и порождает разбиение множества \mathfrak{R}_0 на классы эквивалентности. Обозначим подобласти Q_{sl} , где s — номер класса эквивалентности и l — номер области в этом классе. Каждый класс s в силу ограниченности области Q состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl} .

Введем операторы I_Q, P_Q, R_Q , где $I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ — это оператор продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем в \mathbb{R}^n , $P_Q : L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(Q)$ — это оператор сужения функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q , $R_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q), R_Q = P_Q R I_Q$. Обозначим через $L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right)$ подпространство функций из $L_2(Q)$, обращающихся в нуль вне $L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right)$ ($l = 1, \dots, N(s)$). Обозначим $P_s : L_2(Q) \rightarrow L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right)$ оператор ортогонального проектирования на $L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right)$. В силу [8, лемма 8.5] $L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right)$ является инвариантным подпространством оператора R_{ijQ} , при этом $L_2(Q) = \bigoplus_s L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right)$.

Введем изоморфизм гильбертовых пространств $U_s : L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right) \rightarrow L_2^N(Q_{s1})$ по формуле $(U_s u)_l(x) = u(x + h_{sl})$ ($x \in Q_{s1}$), где $l = 1, \dots, N = N(s)$, h_{sl} такой вектор, что $Q_{s1} + h_{sl} = Q_{sl}$ ($h_{s1} = 0$), $L_2^N(Q_{s1}) = \prod_{l=1}^N L_2(Q_{s1})$.

Аналогично доказательству [8, лемма 8.6] можно показать, что оператор $R_s : L_2^N(Q_{s1}) \rightarrow L_2^N(Q_{s1})$, заданный формулой $R_s = U_s R_Q U_s^{-1}$, есть оператор умножения на матрицу R_s порядка $N(s) \times N(s)$, элементы матрицы r_{km}^s вычисляются по формуле

$$r_{km}^s = \begin{cases} a_h & (h = h_{sm} - h_{sk} \in M), \\ 0 & (h = h_{sm} - h_{sk} \notin M). \end{cases} \quad (1.3)$$

Если для построения матрицы R_s использовать ассоциированный с разбиением \mathfrak{R}_0 граф, для вершин Q_{sk}, Q_{sm} , связанных дугой $h = \langle Q_{sk}, Q_{sm} \rangle$, положим $r_{km}^s = \varphi(h) = a_h$, в противном случае $r_{km}^s = 0$.

Введем также операторы $R^* : L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$

$$R^* u(x) = \sum_{h \in M} a_h u(x - h),$$

$R_Q^* : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $R_Q^* = P_Q R^* I_Q$. Оператор R_Q^* является сопряженным к R_Q . Действию оператора R_Q^* будет соответствовать умножение на матрицы R_s^* , где R_s^* — эрмитово сопряженные с R_s матрицы.

Определение 1.3. Самосопряженный оператор $R_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$ будем называть *положительно определенным*, если найдется $c > 0$ такое, что для всех $u \in L_2(Q)$, $u \neq 0$, выполнено неравенство

$$(R_Q u, u)_{L_2(Q)} > c(u, u)_{L_2(Q)}.$$

Здесь $(u, u)_{L_2(Q)}$ — скалярное произведение в пространстве $L_2(Q)$.

Лемма 1.1 ([8, лемма 8.8]). *Спектр оператора R_Q совпадает со спектром семейства матриц R_{s_ν} ($\nu = 1, \dots, n_1$); самосопряженный оператор $R_Q + R_Q^*$ положительно определен тогда и только тогда, когда все матрицы $R_{s_\nu} + R_{s_\nu}^*$ ($\nu = 1, \dots, n_1$) положительно определены.*

Пример 1.1. Пусть разностный оператор $R : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ имеет вид

$$Ru(x_1, x_2) = a_0 u(x_1, x_2) + a_1 u(x_1 + 7, x_2) + a_2 u(x_1 + 8, x_2),$$

область $Q = \{(x_1, x_2) | x_1 \in (0, 9), x_2 \in (0, 1)\}$. Множество M состоит из векторов $h_0 = (0, 0)$, $h_1 = (7, 0)$, $h_2 = (8, 0)$. Для аддитивной группы T , порожденной этими векторами, образующей будет $h = (1, 0)$. Разбиение области Q , построенное с помощью группы T , состоит из подобластей $G_i = (i, i + 1) \times (0, 1)$, $i = 0, \dots, 8$. Максимальное разбиение \mathfrak{R}_0 , построенное на базе множества $\widehat{M} = \{M, -M\}$, состоит из пяти подобластей, распадающихся на два класса $Q_{11} = (0, 1) \times (0, 1)$, $Q_{12} = (1, 2) \times (0, 1)$, $Q_{13} = (7, 8) \times (0, 1)$, $Q_{14} = (8, 9) \times (0, 1)$; $Q_{21} = (2, 7) \times (0, 1)$. Граф, соответствующий этому разбиению, приведен на рис. 1.

Для первого класса $s = 1$ подобластей оператор $R_1 : L_2^4(Q_{11}) \rightarrow L_2^4(Q_{11})$, где $R_1 = U_1 R_Q U_1^{-1}$, $R_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $R_Q = P_Q R I_Q$. Действию оператора R_1 в силу формулы (1.3) соответствует умножение на матрицу

$$\begin{pmatrix} a_0 & 0 & a_1 & a_2 \\ 0 & a_0 & 0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Для второго класса $s = 2$ подобластей оператор $R_2 : L_2(Q_{21}) \rightarrow L_2(Q_{21})$, где $R_2 = U_2 R_Q U_2^{-1}$. Действию оператора R_2 соответствует умножение на a_0 .

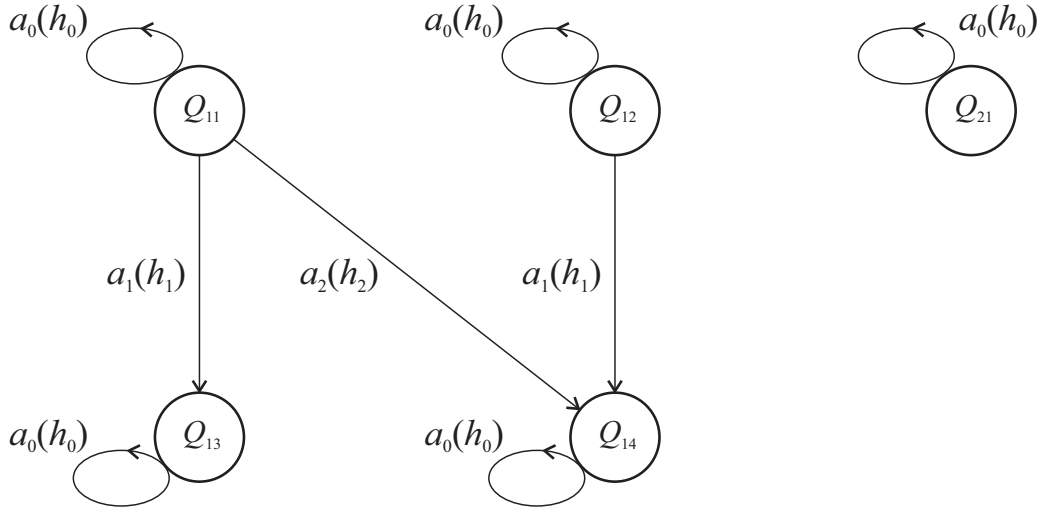


Рис. 1. Граф разбиения \mathfrak{R}_0 области Q из примера 1.1.

2. СИЛЬНО ЭЛЛИПТИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫЕ УРАВНЕНИЯ С НЕСОИЗМЕРИМЫМИ СДВИГАМИ АРГУМЕНТОВ

Рассмотрим краевую задачу для дифференциально-разностного уравнения

$$A_R u = - \sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ} u_{x_j})_{x_i} = f(x) \quad (x \in Q), \tag{2.1}$$

$$u|_{\partial Q} = 0. \tag{2.2}$$

Здесь Q — ограниченная область в \mathbb{R}^n с кусочно-гладкой границей ∂Q , $f \in L_2(Q)$. Операторы $R_{ijQ} = P_Q R_{ij} I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, разностные операторы $R_{ij} = R_{ij}^a + R_{ij}^b$, $R_{ij}^a : L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$, $R_{ij}^b : L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ имеют вид

$$R_{ij}^a u(x) = \sum_{h \in M_{ij}^1} a_{ijh} u(x+h) \quad (a_{ijh} \in \mathbb{R}), \tag{2.3}$$

$$R_{ij}^b u(x) = \sum_{p \in M_{ij}^2} b_{ijp} u(x+p) \quad (b_{ijp} \in \mathbb{R}). \tag{2.4}$$

Здесь $M_{ij}^k \subseteq M^k$ ($k = 1, 2$), где M^k — конечные множества векторов с соизмеримыми координатами, при этом координаты векторов h из множества M^1 несоизмеримы с координатами векторов p из множества M^2 . Таким образом, уравнение (2.1) является дифференциально-разностным уравнением с несоизмеримыми сдвигами аргументов.

Определение 2.1. Решением краевой задачи (2.1)-(2.2) будем называть функцию $u \in \dot{H}^1(Q)$, если для любой $v \in \dot{H}^1(Q)$ выполнено интегральное тождество

$$(A_R u, v)_{L_2(Q)} = (f, v)_{L_2(Q)}, \quad f \in L_2(Q). \tag{2.5}$$

Здесь $\dot{H}^1(Q)$ — пространство Соболева функций $v \in H^1(Q)$, у которых $v|_{\partial Q} = 0$, где равенство понимается в смысле следов. В пространстве $\dot{H}^1(Q)$ будем использовать эквивалентное скалярное произведение $(u, v)_{\dot{H}^1(Q)}$

$$(u, v)_{\dot{H}^1(Q)} = \int_Q \nabla u \nabla \bar{v} dx.$$

Определение 2.2. Назовем уравнение (2.1) *сильно эллиптическим* в \bar{Q} , если для всех $u \in C_0^\infty(Q)$ выполнено неравенство типа Гординга:

$$\operatorname{Re}(A_R u, u)_{L_2(Q)} \geq c \|u\|_{\dot{H}^1(Q)}^2, \quad (2.6)$$

где $c > 0$ не зависит от u .

Определение 2.3. Задача (2.1)-(2.2) называется *первой краевой задачей*.

Получим условия сильной эллиптичности дифференциально-разностного уравнения с несоизмеримыми сдвигами аргументов в алгебраической форме, выраженные в коэффициентах разностных операторов и устойчивые относительно малых возмущений сдвигов аргументов.

Необходимые условия и достаточные условия сильной эллиптичности для дифференциально-разностных уравнений с соизмеримыми сдвигами получены А. Л. Скубачевским (см. [8]). Далее будем предполагать, что область Q такова, что необходимые условия совпадают с достаточными (см. [8, теорема 3.3]).

Введем вспомогательное дифференциально-разностное уравнение

$$A_R^a u = - \sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ}^a u_{x_j})_{x_i} = f_1(x) \quad (x \in Q). \quad (2.7)$$

Оператор A_R^a — это дифференциально-разностный оператор с соизмеримыми сдвигами аргументов. Для его исследования применим метод, изложенный в разделе 1. Для операторов R_{ijQ}^a построим разбиение \mathfrak{R}_0^a области Q на непересекающиеся подобласти Q_{sk} , где s — номер класса разбиения и k — номер области в этом классе, $k = 1, \dots, N = N(s)$. В силу формулы (1.3) оператор $R_{ij_s}^a : L_2^N(Q_{s1}) \rightarrow L_2^N(Q_{s1})$, заданный формулой $R_{ij_s}^a = U_s R_{ijQ}^a U_s^{-1}$, есть оператор умножения на матрицу $R_{ij_s}^a$ порядка $N(s) \times N(s)$, элементы r_{km}^{ijs} матрицы $R_{ij_s}^a$ вычисляются по формуле

$$r_{km}^{ijs} = \begin{cases} a_{ijh} & (h = h_{sm} - h_{sk} \in M_{ij}^1), \\ 0 & (h_{sm} - h_{sk} \notin M_{ij}^1). \end{cases} \quad (2.8)$$

В силу ограниченности области Q и постоянства коэффициентов a_{ijh} существует лишь конечное число n_1 различных матриц $R_{ij_s}^a$. Для удобства дальнейшего изложения приведем здесь теоремы из работы [6].

Теорема 2.1 ([6, теорема 3.1]). Пусть уравнение (2.7) сильно эллиптическое в \bar{Q} .

Тогда матрицы

$$\sum_{i,j=1}^n (R_{ij_s}^a + R_{ij_s}^{a*}) \xi_i \xi_j \quad (2.9)$$

положительно определены для всех $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ и $s = 1, 2, \dots, n_1$.

Для формулировки достаточных условий сильной эллиптичности в работе [6] используются матрицы $A_{ij_s}^a$. В случае, если найдется область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ такая, что $\bar{Q} \subset \Omega$, и матрицы $R_{ij_s}^\Omega$, построенные для области Ω , совпадают с аналогичными матрицами $R_{ij_s}^Q$ области Q , то все матрицы $A_{ij_s}^a = R_{ij_s}^a$. Предположим далее, что это выполняется. Для большого класса областей и дифференциально-разностных операторов это справедливо, см. [6, теорема 3.3].

Теорема 2.2 ([6, теорема 3.2]). Пусть матрицы

$$\sum_{i,j=1}^n (R_{ij_s}^a + R_{ij_s}^{a*}) \xi_i \xi_j \quad (2.10)$$

положительно определены для всех $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ и $s = 1, 2, \dots, n_1$. Тогда уравнение (2.7) сильно эллиптическое в \bar{Q} .

Замечание 2.1. Теоремы 2.1, 2.2, остаются в силе, если в их формулировке использовать матрицы, построенные на основе регулярного разбиения \mathfrak{R}_0 .

Используя результаты раздела 1, для разностных операторов R_{ijQ}^b , построим разбиение \mathfrak{R}_0^b области Q на непересекающиеся подобласти $G_{\alpha k}$, где α ($\alpha = 1, \dots, n_2$) — номер класса разбиения и k — номер области в этом классе, $k = 1, \dots, N = N(\alpha)$. Оператор $R_{ij\alpha}^b : L_2^N(G_{\alpha 1}) \rightarrow L_2^N(G_{\alpha 1})$, заданный формулой $R_{ij\alpha}^b = U_\alpha R_{ijQ}^b U_\alpha^{-1}$, есть оператор умножения на матрицу $R_{ij\alpha}^b$ порядка $N(\alpha) \times N(\alpha)$, элементы $r_{km}^{ij\alpha}$ матрицы $R_{ij\alpha}^b$ вычисляются по формуле

$$r_{km}^{ij\alpha} = \begin{cases} b_{ijp} & (p = p_{sm} - p_{sk} \in M_{ij}^2), \\ 0 & (p = p_{sm} - p_{sk} \notin M_{ij}^2). \end{cases} \quad (2.11)$$

Теорема 2.3. Пусть для вектора $k = (k_1, \dots, k_n) \in \mathbb{R}^n$ матрицы

$$K_s = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (R_{ijs}^a + R_{ijs}^{a*}) \xi_i \xi_j - E \sum_{i=1}^n k_i \xi_i^2 \quad (2.12)$$

неотрицательно определены для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$ и $s = 1, 2, \dots, n_1$.

При этом матрицы

$$K_\alpha = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n (R_{ija}^b + R_{ija}^{b*}) \xi_i \xi_j + E \sum_{i=1}^n k_i \xi_i^2 \quad (2.13)$$

положительно определены для всех $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n$ и $\alpha = 1, 2, \dots, n_2$.

Тогда уравнение (2.1) сильно эллиптическое в \bar{Q} .

(Здесь E — единичные матрицы размерности $N(s)$ или $N(\alpha)$.)

Доказательство. Введем оператор \tilde{A}_R^a , действующий по формуле

$$\tilde{A}_R^a u = A_R^a u + \sum_{i=1}^n k_i u_{x_i x_i} = - \sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ}^a u_{x_j})_{x_i} + \sum_{i=1}^n k_i u_{x_i x_i} \quad (x \in Q).$$

Используя неотрицательную определенность матриц K_s , методом, аналогичным методу доказательства теоремы 2.2, можно показать, что для всех $u \in C_0^\infty(Q)$ выполнено неравенство:

$$\operatorname{Re} (\tilde{A}_R^a u, u)_{L_2(Q)} = \operatorname{Re} (A_R^a u, u)_{L_2(Q)} - \sum_{i=1}^n k_i (u_{x_i}, u_{x_i})_{L_2(Q)} \geq 0. \quad (2.14)$$

Введем теперь оператор A_R^C , который назовем *контрольным*, по формуле

$$A_R^C u = - \sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ}^b u_{x_j})_{x_i} - \sum_{i=1}^n k_i u_{x_i x_i} \quad (x \in Q). \quad (2.15)$$

Оператор A_R^C — это дифференциально-разностный оператор с соизмеримыми сдвигами аргументов. Поскольку матрицы K_α положительно определены, из теоремы 2.2 следует, оператор A_R^C является сильно эллиптическим и для всех $u \in C_0^\infty(Q)$ выполнено неравенство:

$$\operatorname{Re} (A_R^C u, u)_{L_2(Q)} \geq c \|u\|_{\dot{H}^1(Q)}^2, \quad (2.16)$$

где $c > 0$ не зависит от u .

Тогда оператор $A_R = \tilde{A}_R^a + A_R^C$ в силу формул (2.14), (2.16) также является сильно эллиптическим. \square

Обозначим далее через $R_M = \left\| R_{ijQ}^a \right\|_{i,j=1}^n : L_2^n(Q) \rightarrow L_2^n(Q)$ матричный оператор, а через R_s блочную матрицу порядка $nN(s) \times nN(s)$ вида

$$R_s = \left\| R_{ijs}^a \right\|_{i,j=1}^n. \quad (2.17)$$

В силу ограниченности области Q существует лишь конечное число различных матриц $R_{s\nu}$ ($\nu = 1, \dots, n_1$).

Следствие 2.1. Пусть в формуле (2.12) $k_i = \lambda_{\min}$, $i = 1, \dots, n$, где λ_{\min} — минимальное из всех собственных значений матриц $\frac{1}{2}(R_{s\nu} + R_{s\nu}^*)$ ($\nu = 1, \dots, n_1$).

Тогда для оператора \tilde{A}_R^a , определенного формулой

$$\tilde{A}_R^a u = A_R^a u + \lambda_{\min} \sum_{i=1}^n u_{x_i x_i} = - \sum_{i,j=1}^n (R_{ijQ}^a u_{x_j})_{x_i} + \lambda_{\min} \Delta u,$$

выполнено условие (2.14), и матрицы K_s удовлетворяют условиям теоремы 2.3.

Доказательство. Введем блочные матрицы $\tilde{R}_s = \frac{1}{2}(R_s + R_s^*) - \lambda_{\min} E = \frac{1}{2} \left\| R_{ijs}^a + R_{jis}^{a*} \right\|_{i,j=1}^n - \lambda_{\min} E$ и соответствующий матричный оператор $\tilde{R}_M = \frac{1}{2}(R_M + R_M^*) - \lambda I$, где E — единичные матрицы порядка $nN(s) \times nN(s)$ и I — тождественный оператор. Матрицы \tilde{R}_s по построению неотрицательно определены. В силу [3, § 10, теорема 1] матричный оператор $\tilde{R}_M + \tilde{R}_M^*$ положительно определен тогда и только тогда, когда все матрицы $\tilde{R}_{s\nu} + \tilde{R}_{s\nu}^*$ ($\nu = 1, \dots, n_1$) положительно определены. А в силу [3, § 10, теорема 2], если матричный оператор $\tilde{R}_M + \tilde{R}_M^*$ положительно определен, то оператор \tilde{A}_R^a сильно эллиптический. Если условие положительной определенности матриц заменить на условие их неотрицательной определенности, то можно доказать аналогичные утверждения. При этом условие сильной эллиптичности оператора \tilde{A}_R^a также надо заменить условием (2.14). В силу теоремы 2.1 соответствующие оператору \tilde{A}_R^a матрицы K_s являются неотрицательно определенными. \square

С использованием неравенства (2.6) стандартным методом доказывается фредгольмовость и дискретность спектра оператора A_R (см. [8, теорема 10.1]). Также в силу [6, теорема 8.3] оператор A_R является регулярно аккретивным оператором, для которого выполняется гипотеза Т. Като (см. [6]).

Из [8, теорема 10.1] получим теорему

Теорема 2.4. Пусть выполнены условия теоремы 2.3. Тогда уравнение (2.1) является сильно эллиптическим в \bar{Q} , и для любой функции $f \in L_2(Q)$ краевая задача (2.1)-(2.2) имеет единственное решение $u \in \dot{H}^1(Q)$.

Пример 2.1. Рассмотрим дифференциально-разностный оператор

$$A_R u = -(R_{11Q}^a u_{x_1})_{x_1} - (R_{22Q}^a u_{x_2})_{x_2} - 2(R_{12Q}^b u_{x_1})_{x_2} \quad (x \in Q). \quad (2.18)$$

Здесь $Q \subset \mathbb{R}^2$, $Q = (0; 1,9) \times (0; 1,9) \in \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, разностные операторы R_{11}^a , R_{22}^a , R_{12}^b имеют вид

$$\begin{aligned} R_{11}^a u(x) &= a_1^0 u(x_1, x_2) + a_1(u(x_1 + 1, x_2) + u(x_1 - 1, x_2)), \\ R_{22}^a u(x) &= a_2^0 u(x_1, x_2) + a_2(u(x_1, x_2 + 1) + u(x_1, x_2 - 1)), \\ R_{12}^b u(x) &= b_\tau(u(x_1 + \tau, x_2 + \tau) + u(x_1 - \tau, x_2 - \tau)). \end{aligned}$$

Здесь τ — иррациональное, $\frac{1,9}{2} + \varepsilon < \tau < 1,9 - \varepsilon$ при некотором $\varepsilon > 0$.

Для операторов $R_{11Q}^a : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $R_{22Q}^a : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $R_{11Q}^a = P_Q R_{11}^a I_Q$, $R_{22Q}^a = P_Q R_{22}^a I_Q$ построим разбиение \mathfrak{R}_0^a области Q . Это разбиение состоит из четырех классов под областей (см. рис. 2). Первый класс: $Q_{11} = (0; 0,9) \times (0; 0,9)$, $Q_{12} = (1; 1,9) \times (0; 0,9)$, $Q_{13} = (0; 0,9) \times (1; 1,9)$, $Q_{14} = (1; 1,9) \times (1; 1,9)$.

Обозначим $h_0 = (0, 0)$, $h_1 = (1, 0)$, $h_2 = (0, 1)$. Граф, соответствующий разбиению \mathfrak{R}_0^a , приведен на рис. 3.

Действию разностного оператора R_{11Q}^a на первом классе подобластей в силу формулы (2.8) соответствует умножение на матрицу R_{11s}^a :

$$R_{11s}^a = \begin{pmatrix} a_1^0 & a_1 & 0 & 0 \\ a_1 & a_1^0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & a_1^0 & a_1 \\ 0 & 0 & a_1 & a_1^0 \end{pmatrix}, \quad s = 1.$$

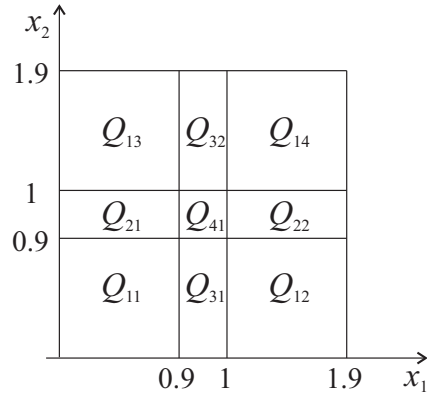


Рис. 2. Разбиение \mathfrak{R}_0^a области Q из примера 2.1.

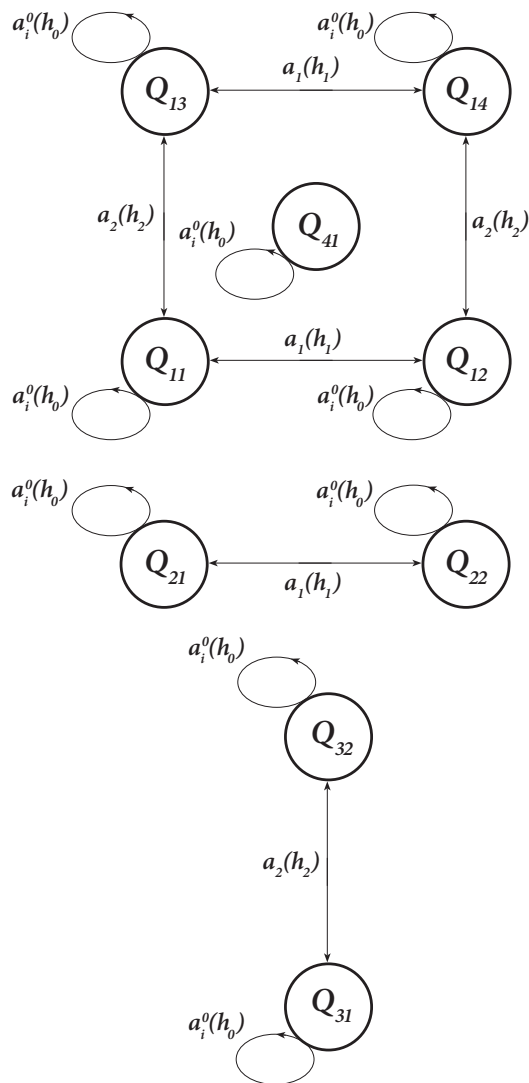


Рис. 3. Граф разбиения \mathfrak{R}_0^a из примера 2.1.

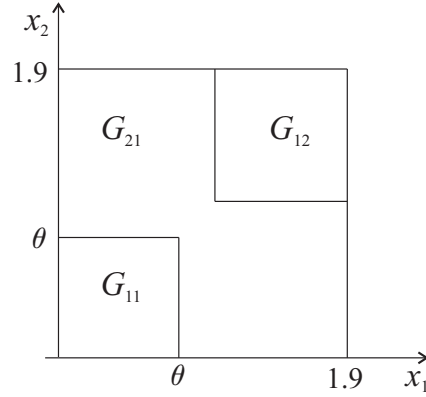


Рис. 4. Разбиение \mathfrak{R}_0^b области Q на подобласти G_{ij} из примера 2.1.

Собственные значения матрицы R_{11s}^a : $\lambda_{1,2} = a_1^0 + a_1$, $\lambda_{3,4} = a_1^0 - a_1$. Второй класс подобластей: $Q_{21} = (0; 0,9) \times (0,9; 1)$, $Q_{22} = (1; 1,9) \times (0,9; 1)$. На этом классе действию оператора R_{11Q}^a соответствует умножение на матрицу

$$R_{11s}^a = \begin{pmatrix} a_1^0 & a_1 \\ a_1 & a_1^0 \end{pmatrix}, \quad s = 2.$$

Ее собственные значения: $\lambda_1 = a_1^0 + a_1$, $\lambda_2 = a_1^0 - a_1$.

Третий класс подобластей: $Q_{31} = (0,9; 1) \times (0; 0,9)$, $Q_{32} = (0,9; 1) \times (1; 1,9)$. На этом классе действию оператора R_{11Q}^a соответствует умножение на матрицу

$$R_{11s}^a = \begin{pmatrix} a_1^0 & 0 \\ 0 & a_1^0 \end{pmatrix}, \quad s = 3.$$

Ее собственные значения: $\lambda_{1,2} = a_1^0$.

Четвертый класс ($s = 4$) состоит из одной области $Q_{41} = (0,9; 1) \times (0,9; 1)$. Действию оператора R_{11Q}^a соответствует умножение на константу a_1^0 .

Минимальное собственное значение матриц всех классов: $\lambda_{11 \min} = a_1^0 - |a_1|$ ($s = 1, \dots, 4$).

Аналогично можно сформировать матрицы R_{22s}^a ($s = 1, \dots, 4$), соответствующие действию оператора R_{22Q}^a . Нетрудно убедиться, что минимальное собственное значение этих матриц $\lambda_{22 \min} = a_2^0 - |a_2|$.

Замечание 2.2. Немного увеличив область Q , можно построить область Ω такую, что $\bar{Q} \subset \Omega$, при этом матрицы R_{ijs} для Ω не изменятся, следовательно, $R_{ijs} = A_{ijs}$.

Для оператора $A_R^a u = -(R_{11Q}^a u_{x_1})_{x_1} - (R_{22Q}^a u_{x_2})_{x_2}$ матрицы K_s из формулы (2.12) примут вид

$$K_s = R_{11s}^a \xi_1^2 + R_{22s}^a \xi_2^2 - E(k_1 \xi_1^2 + k_2 \xi_2^2) = (R_{11s}^a - E k_1) \xi_1^2 + (R_{22s}^a - E k_2) \xi_2^2, \quad s = 1, \dots, 4. \quad (2.19)$$

Если в формуле (2.19) положить $k_1 = \lambda_{11 \min}$, $k_2 = \lambda_{22 \min}$, то построенные матрицы K_s для всех $s = 1, \dots, 4$ и $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^2$ будут неотрицательно определены. В силу теоремы 2.3

$$(\tilde{A}_R^a u, u) = (R_{11Q}^a u_{x_1}, u_{x_1})_{L_2(Q)} + (R_{22Q}^a u_{x_2}, u_{x_2})_{L_2(Q)} - \lambda_{11 \min} (u_{x_1}, u_{x_1})_{L_2(Q)} - \lambda_{22 \min} (u_{x_2}, u_{x_2})_{L_2(Q)} \geq 0. \quad (2.20)$$

Введем контрольный оператор $A_R^b u = -2(R_{12Q}^b u_{x_1})_{x_2} - \lambda_{11 \min} u_{x_1 x_1} - \lambda_{22 \min} u_{x_2 x_2}$ и получим условия его сильной эллиптичности.

Построим разбиение \mathfrak{R}_0^b области Q на подобласти $G_{\alpha k}$. Это разбиение состоит из 2-х классов подобластей (см. рис. 4).

Первый класс: $G_{11} = (0; \theta) \times (0; \theta)$, $G_{12} = (\tau; 1,9) \times (\tau; 1,9)$. Здесь $\theta = 1,9 - \tau$. На этом классе областей действию оператора R_{12Q}^b соответствует умножение на матрицу

$$R_{12\alpha}^b = \begin{pmatrix} 0 & b_\tau \\ b_\tau & 0 \end{pmatrix}, \quad \alpha = 1.$$

Ее собственные значения: $\lambda_1 = b_\tau$, $\lambda_2 = -b_\tau$. Второй класс состоит из одной области $G_{21} = Q \setminus ((\bar{G}_{11} \cup \bar{G}_{12}) \cap Q)$. Ему соответствует умножение на матрицу $R_{12\alpha}^b = (0)$, $\alpha = 2$.

Минимальное собственное значение всех этих матриц $\lambda_{12\min} = -|b_\tau|$. Замечание 2.2 для этого случая также справедливо.

Выпишем матрицы $K_\alpha = 2R_{12\alpha}^b \xi_1 \xi_2 + \lambda_{11\min} \xi_1^2 E + \lambda_{22\min} \xi_2^2 E$ для $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^2$, $\alpha = 1, 2$:

$$K_1 = \begin{pmatrix} \lambda_{11\min} \xi_1^2 + \lambda_{22\min} \xi_2^2 & 2b_\tau \xi_1 \xi_2 \\ 2b_\tau \xi_1 \xi_2 & \lambda_{11\min} \xi_1^2 + \lambda_{22\min} \xi_2^2 \end{pmatrix}, \quad K_2 = (\lambda_{11\min} \xi_1^2 + \lambda_{22\min} \xi_2^2).$$

Эти матрицы положительно определены, если $\lambda_{11\min} \xi_1^2 + \lambda_{22\min} \xi_2^2 > 2|b_\tau| \xi_1 \xi_2$ для всех $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^2$. Это неравенство выполняется, если $\lambda_{11\min} \lambda_{22\min} - b_\tau^2 > 0$, $\lambda_{11\min} > 0$, $\lambda_{22\min} > 0$. Подставив значения $\lambda_{11\min}$, $\lambda_{22\min}$, получим

$$\begin{aligned} (a_1^0 - |a_1|)(a_2^0 - |a_2|) - (b_\tau)^2 &> 0, \\ a_1^0 - |a_1| &> 0, \quad a_2^0 - |a_2| &> 0. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Условия (2.21) в силу теоремы 2.3 являются достаточными условиями сильной эллиптичности оператора A_R . Сравним полученные условия с достаточным условием сильной эллиптичности, сформированным на основе символа $A_R(\xi) = \sum_{k,j=1}^n \sum_{h \in M^1 \cup M^2} a_{kjh} \exp(i(h, \xi)) \xi_k \xi_j$, $\xi \in \mathbb{R}^n$ дифференциально-разностного оператора A_R (см. [6]).

Квадратичная форма

$$\begin{aligned} \operatorname{Re} A_R(\xi) &= (a_1^0 + 2a_1 \cos \xi_1) \xi_1^2 + (a_2^0 + 2a_2 \cos \xi_2) \xi_2^2 + 4b_\tau \cos \tau (\xi_1 + \xi_2) \xi_1 \xi_2 \geq \\ &\geq (a_1^0 - 2|a_1|) \xi_1^2 + (a_2^0 - 2|a_2|) \xi_2^2 - 4|b_\tau| \xi_1 \xi_2 \end{aligned}$$

является положительно определенной, если

$$\begin{aligned} (a_1^0 - 2|a_1|)(a_2^0 - 2|a_2|) - 4(b_\tau)^2 &> 0, \\ a_1^0 - 2|a_1| &> 0, \quad a_2^0 - 2|a_2| &> 0, \end{aligned}$$

и эти условия будут достаточными условиями сильной эллиптичности оператора A_R (см. [6, пример 8.1]). Очевидно, что последние условия грубее, чем условия (2.21).

Рассмотрим краевую задачу для дифференциально-разностного уравнения

$$-\Delta(R_Q u(x)) = f(x) \quad (x \in Q), \quad (2.22)$$

$$u|_{\partial Q} = 0. \quad (2.23)$$

Здесь Q — ограниченная область в \mathbb{R}^n с кусочно-гладкой границей, $f \in L_2(Q)$. Оператор $R_Q = P_Q R I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$; $R = R^1 + R^2$ — разностные операторы $R^1 : L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$, $R^2 : L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ имеют вид

$$R^1 u(x) = a_0 u(x) + \sum_{h \in M^1} a_h (u(x+h) + u(x-h)) \quad (a_h \in \mathbb{R}), \quad (2.24)$$

$$R^2 u(x) = b_0 u(x) + \sum_{p \in M^2} b_p (u(x+p) + u(x-p)) \quad (b_p \in \mathbb{R}). \quad (2.25)$$

Здесь M^k ($k = 1, 2$) — множества векторов с соизмеримыми координатами, при этом координаты векторов из множества M^2 несоизмеримы с координатами векторов из множества M^1 .

Эта краевая задача впервые рассмотрена в работе [7] и является частным случаем задачи (2.1)-(2.2). Получим условия сильной эллиптичности уравнения (2.22), выраженные в коэффициентах разностных операторов R^1, R^2 . Для этого исследуем условия положительной определенности оператора R_Q с несоизмеримыми сдвигами аргументов.

Введем операторы $R_Q^i = P_Q R^i I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $i = 1, 2$.

Для исследования оператора R_Q^1 применим метод, изложенный в разделе 1. Построим разбиение \mathfrak{R}_0^1 области Q на непересекающиеся подобласти Q_{sk} , где s — номер класса разбиения и k — номер области в этом классе. Каждый класс s состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sk} . В силу формулы (1.3) оператор $R_s^1 : L_2^N(Q_{s1}) \rightarrow L_2^N(Q_{s1})$, заданный формулой $R_s^1 = U_s R_Q^1 U_s^{-1}$, есть

оператор умножения на матрицу R_s^1 порядка $N(s) \times N(s)$, элементы r_{km} матрицы R_s^1 вычисляются по формуле

$$r_{km} = \begin{cases} a_h & (h = h_{sm} - h_{sk} \in M^1), \\ 0 & (h = h_{sm} - h_{sk} \notin M^1). \end{cases} \quad (2.26)$$

Обозначим через λ_{\min} минимальное собственное значение всего семейства матриц $R_{s\nu}^1$ ($\nu = 1, \dots, n_1$). Тогда в силу леммы 1.1

$$(R_Q^1 u, u)_{L_2(Q)} \geq \lambda_{\min}(u, u)_{L_2(Q)} \quad (\forall u \in L_2(Q)). \quad (2.27)$$

Введем в рассмотрение контрольные операторы $R^C : L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$, $R^C = R^2 + \lambda_{\min}I$, $R_Q^C = P_Q R^C I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $I : L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ — тождественный оператор.

Теорема 2.5. *Если контрольный оператор R_Q^C положительно определен, то оператор R_Q также положительно определен.*

Доказательство. Пусть оператор R_Q^C является положительно определенным, т. е.

$$(R_Q^C u, u)_{L_2(Q)} \geq c_1(u, u)_{L_2(Q)} \quad (c_1 > 0, \forall u \in L_2(Q)). \quad (2.28)$$

Тогда в силу неравенств (2.27), (2.28),

$$\begin{aligned} (R_Q u, u)_{L_2(Q)} &= ((R_Q^1 + R_Q^2)u, u)_{L_2(Q)} = ((R_Q^1 - \lambda_{\min}I)u + (\lambda_{\min}I + R_Q^2)u, u)_{L_2(Q)} = \\ &= ((R_Q^1 - \lambda_{\min}I)u, u)_{L_2(Q)} + (R_Q^C u, u)_{L_2(Q)} \geq (R_Q^C u, u)_{L_2(Q)} \geq c_1(u, u)_{L_2(Q)} \quad (c_1 > 0, \forall u \in L_2(Q)). \end{aligned}$$

□

Замечание 2.3. Так как оператор R_Q^C в силу построения содержит только соизмеримые сдвиги, для исследования его положительной определенности можно применить тот же метод разбиения области Q и свести исследование спектра оператора R_Q^C к оценке спектра конечного числа соответствующих ему матриц.

Из [6, теорема 10.1] получим следующую теорему.

Теорема 2.6. *Пусть оператор R_Q^C является положительно определенным. Тогда уравнение (2.22) является сильно эллиптическим в Q , и для любой функции $f \in L_2(Q)$ краевая задача (2.22)-(2.23) имеет единственное решение $u \in \dot{H}(Q)$.*

Пример 2.2. Рассмотрим краевую задачу

$$-\Delta(R_Q u(x)) = f(x) \quad (x \in Q), \quad (2.29)$$

$$u|_{\partial Q} = 0. \quad (2.30)$$

Здесь $Q \subset \mathbb{R}^2$, $Q = (0; 2,4) \times (0; 1) \in \mathbb{R}^2$, $x = (x_1, x_2)$, $R_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $R_Q = P_Q R I_Q$, разностный оператор $R : L_2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^2)$ имеет вид

$$Ru(x) = a_0 u(x_1, x_2) + a_1(u(x_1 + 1, x_2) + u(x_1 - 1, x_2)) + a_1(u(x_1 + 2, x_2) + u(x_1 - 2, x_2))$$

и содержит два соизмеримых сдвига $h_1 = (1, 0)$, $h_2 = (2, 0)$.

Для оператора R_Q разбиение области Q состоит из двух классов подобластей. Первый класс: $Q_{11} = (0; 0,4) \times (0; 1)$, $Q_{12} = (1; 1,4) \times (0; 1)$, $Q_{13} = (2; 2,4) \times (0; 1)$. Второй класс: $Q_{21} = (0,4; 1) \times (0; 1)$, $Q_{22} = (1,4; 2) \times (0; 1)$. Действию оператора R_Q на первом классе подобластей в силу формулы (2.26) соответствует умножение на матрицу R_1 :

$$R_1 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_1 \\ a_1 & a_0 & a_1 \\ a_1 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения: $\lambda_{1,2} = a_0 - a_1$, $\lambda_3 = a_0 + 2a_1$.

Второму классу областей соответствует умножение на матрицу R_2 :

$$R_2 = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения: $\lambda_4 = a_0 - a_1$, $\lambda_5 = a_0 + a_1$.

Условия одновременной положительной определенности обеих матриц:

$$a_0 - |a_1| > 0, \quad a_0 + 2a_1 > 0. \quad (2.31)$$

При выполнении этих условий в силу теоремы 2.6 уравнение (2.29) является сильно эллиптическим, и решение краевой задачи (2.29)-(2.30) существует и единственно.

Рассмотрим теперь краевую задачу для уравнения

$$-\Delta(R_Q^\tau u(x)) = f(x) \quad (x \in Q), \quad (2.32)$$

с разностным оператором

$$R^\tau u(x) = a_0 u(x_1, x_2) + a_1(u(x_1 + \tau, x_2) + u(x_1 - \tau, x_2)) + a_1(u(x_1 + 2, x_2) + u(x_1 - 2, x_2)).$$

Здесь $\tau = 1 + \varepsilon$, ε — малый параметр, $|\varepsilon| < 0,2$. Сдвиги $h_1^\tau = (\tau, 0)$, $h_2 = (2, 0)$ становятся несоизмеримыми. Уравнение (2.32) для уравнения (2.29) является возмущенным относительно сдвигов аргументов.

Построим разбиение \mathfrak{R}^τ области Q для оператора $R_Q^\tau : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, $R_Q^\tau = P_Q R^\tau I_Q$. Разностный оператор $R^\tau : L_2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^2)$

$$R^\tau u(x) = a_0 u(x_1, x_2) + a_1(u(x_1 + \tau, x_2) + u(x_1 - \tau, x_2))$$

содержит сдвиги $\pm h_1^\tau = \pm(\tau, 0)$.

Обозначим $\theta = 2,4 - 2\tau > 0$. Разбиение \mathfrak{R}^τ состоит из двух классов областей. Первый класс: $Q_{11}^\tau = (0, \theta) \times (0, 1)$, $Q_{12}^\tau = (\tau, \tau + \theta) \times (0, 1)$, $Q_{13}^\tau = (2\tau, 2,4) \times (0, 1)$. Действию оператора R_Q^τ на этом классе соответствует умножение на матрицу R_1^τ :

$$R_1^\tau = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & 0 \\ a_1 & a_0 & a_1 \\ 0 & a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения: $\lambda_1 = a_0 - a_1$, $\lambda_{2,3} = a_0 \pm \sqrt{2}a_1$.

Второй класс областей: $Q_{21}^\tau = (\theta, \tau) \times (0, 1)$, $Q_{22}^\tau = (\tau + \theta, 2,4) \times (0, 1)$; действию оператора R_Q^τ на этом классе соответствует умножение на матрицу

$$R_2^\tau = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 \\ a_1 & a_0 \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения: $\lambda_{4,5} = a_0 \pm a_1$. Минимальное собственное значение $\lambda_{\min} = \min_{i=1,\dots,5} \lambda_i = a_0 - \sqrt{2}|a_1|$.

Введем разностный оператор $\tilde{R}^\tau : L_2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^2)$:

$$\tilde{R}^\tau u(x) = a_0 u(x_1, x_2) + a_1(u(x_1 + \tau, x_2) + u(x_1 - \tau, x_2)) - \lambda_{\min} u(x)$$

и оператор $\tilde{R}_Q^\tau = P_Q \tilde{R}^\tau I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$. В силу построения и леммы 1.1 оператор \tilde{R}_Q^τ является неотрицательно определенным.

Сформируем контрольный оператор R^C :

$$\begin{aligned} R^C u(x) &= \lambda_{\min} u(x_1, x_2) + a_1(u(x_1 + 2, x_2) + u(x_1 - 2, x_2)) = \\ &= (a_0 - \sqrt{2}|a_1|)u(x_1, x_2) + a_1(u(x_1 + 2, x_2) + u(x_1 - 2, x_2)) \end{aligned}$$

и оператор $R_Q^C = P_Q R^C I_Q : L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$.

Оператор R_Q^τ разбивается на сумму операторов $R_Q^\tau = \tilde{R}_Q^\tau + R_Q^C$. В силу теоремы 2.5, если оператор R_Q^C является положительно определенным, то и оператор R_Q^τ будет положительно определен. Исследуем условия положительной определенности оператора R_Q^C . Этому оператору соответствует разбиение области Q на два класса подобластей. Первый класс подобластей: $G_{11} = (0; 0,4) \times (0, 1)$, $G_{12} = (2; 2,4) \times (0, 1)$. Действию оператора R_Q^C на этом классе соответствует умножение на матрицу R_1^C :

$$R_1^C = \begin{pmatrix} a_0 - \sqrt{2}|a_1| & a_1 \\ a_1 & a_0 - \sqrt{2}|a_1| \end{pmatrix}.$$

Ее собственные значения: $\lambda_{1,2} = a_0 - \sqrt{2}|a_1| \pm a_1$.

Второй класс состоит из одной области $G_{21} = (0,4;2) \times (0,1)$. Этому классу соответствует умножение на константу $a_0 - \sqrt{2}|a_1|$. В силу леммы 1.1 необходимым и достаточным условием положительной определенности оператора R_Q^C является условие положительной определенности матрицы R_1^C , а именно

$$a_0 - (\sqrt{2} + 1)|a_1| > 0. \quad (2.33)$$

При выполнении условия (2.33) в силу теоремы 2.6 уравнение (2.32) является равномерно по $\tau \in (0,8;1,2)$ сильно эллиптическим, и для любого τ из этого интервала существует решение $u_\tau \in \dot{H}(Q)$ краевой задачи для уравнения (2.32). Используя условие равномерной по τ сильной эллиптичности уравнения (2.32), методами, изложенным в работе [5], можно доказать, что решение $u_\tau \rightarrow u_1$ при $\tau \rightarrow 1$ в норме пространства $\dot{H}(Q)$. Здесь u_1 — решение краевой задачи для уравнения (2.32) при $\tau = 1$. Таким образом, условие (2.33) гарантирует устойчивость решения задачи (2.29), (2.30) относительно малых возмущений сдвигов аргумента. В то же время, условие (2.31) гарантирует существование решения только исходной (невозмущенной) задачи с соизмеримыми сдвигами аргументов, при этом возмущенные задачи могут не иметь решений, т. е. исходная задача является неустойчивой относительно сдвигов аргументов.

Если для проверки равномерной сильной эллиптичности уравнения (2.32) использовать символ $A_R(\xi) = (a_0 + 2a_1(\cos(\tau\xi_1) + \cos(2\xi_1)))(\xi_1^2 + \xi_2^2)$, то достаточным условием будет $a_0 - 4|a_1| > 0$ (см. [8, теорема 9.4]).

Автор выражает благодарность Л. Е. Россовскому и А. Л. Скубачевскому за внимание к работе и полезные обсуждения ее результатов.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Иванова Е. П.* О максимальном разбиении области и о гладкости решений краевых задач для эллиптических дифференциально-разностных уравнений// Деп. в ВИНТИ. — 1981. — № 297-81. — С. 1–14.
2. *Иванова Е. П.* Непрерывная зависимость решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений от сдвигов аргумента// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — 59. — С. 74–96.
3. *Каменский Г. А., Скубачевский А. Л.* Линейные краевые задачи для дифференциально-разностных уравнений. — М.: МАИ, 1995.
4. *Кофман А.* Введение в прикладную комбинаторику. — М.: Наука, 1975.
5. *Россовский Л. Е.* Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — 54. — С. 3–138.
6. *Скубачевский А. Л.* Краевые задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений и их приложения// Усп. мат. наук. — 2016. — 71, № 5. — С. 3–112.
7. *Ivanova E. P.* Elliptic differential-difference equations with incommensurable shifts of arguments// Euras. Math. J. — 2016. — 7, № 3. — С. 33–40.
8. *Skubachevskii A. L.* Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhauser, 1997.
9. *Skubachevskii A. L.* Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics// Nonlinear Anal. — 1998. — 32, № 2. — С. 261–278.

Е. П. Иванова

Российский университет дружбы народов, кафедра прикладной математики

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), кафедра дифференциальных уравнений

E-mail: elpaliv@yandex.ru

On Coercivity of Differential-Difference Equations with Incommensurable Shifts of Arguments

© 2016 E. P. Ivanova

Abstract. Изучаются краевые задачи на ограниченных областях для дифференциально-разностных уравнений с несоизмеримыми сдвигами аргументов в старших членах. Получены условия равномерной относительно сдвигов аргументов сильной эллиптичности таких уравнений.

REFERENCES

1. E. P. Ivanova, "O maksimal'nom razbienii oblasti i o gladkosti resheniy kraevykh zadach dlya ellipticheskikh differentsial'no-raznostnykh uravneniy" [On maximal partition of domains and smoothness of solutions of boundary-value problems for elliptic differential difference equations], *Submitted to VINITI*, 1981, No. 297-81, 1–14.
2. E. P. Ivanova, "Nepřeryvnaya zavisimost' resheniy kraevykh zadach dlya differentsial'no-raznostnykh uravneniy ot sdvigoв argumenta" [Continuous dependence of solutions of boundary-value problems for differential-difference equations on shifts of the argument], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Probl. Math. Fundam. Directions], 2016, **59**, 74–96.
3. G. A. Kamenskiy and A. L. Skubachevskiy, *Lineynye kraevye zadachi dlya differentsial'no-raznostnykh uravneniy* [Linear Boundary-Value Problems for Differential-Difference Equations], MAI, Moscow, 1995.
4. A. Kofman, *Vvedenie v prikladnuyu kombinatoriku* [Introduction to Applied Combinatorics], Nauka, Moscow, 1975.
5. L. E. Rossovskiy, "Ellipticheskie funktsional'no-differentsial'nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii" [Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Probl. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, 3–138.
6. A. L. Skubachevskiy, "Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh differentsial'no-raznostnykh uravneniy i ikh prilozheniya" [Boundary-value problems for elliptic differential-difference equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No. 5, 3–112.
7. E. P. Ivanova, "Elliptic differential-difference equations with incommensurable shifts of arguments," *Euras. Math. J.*, 2016, **7**, No. 3, 33–40.
8. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional Differential Equations and Applications*, Birkhauser, Basel–Boston–Berlin, 1997.
9. A. L. Skubachevskii, "Bifurcation of periodic solutions for nonlinear parabolic functional differential equations arising in optoelectronics," *Nonlinear Anal.*, 1998, **32**, No. 2, 261–278.

E. P. Ivanova

Department of Applied Mathematics, RUDN University, Moscow, Russia

Department of Differential Equations, Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, Russia

E-mail: elpaliv@yandex.ru

ОБЛАСТЬ СУЩЕСТВОВАНИЯ РЕШЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ОПТИМАЛЬНОГО УПРАВЛЕНИЯ КОСМИЧЕСКИМ АППАРАТОМ С ОГРАНИЧЕННОЙ ТЯГОЙ

© 2016 г. А. В. ИВАНЮХИН

Аннотация. В работе рассматриваются задачи оптимального управления космическим аппаратом с двигателем малой тяги в нескольких наиболее распространенных постановках. Для этих задач исследуется вопрос существования решений. Для модели двигателя с ограниченной тягой предполагается методика численного построения области существования решений. В качестве примеров рассмотрены задачи межпланетного перелета Земля—Марс, Земля—Меркурий.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|-----|
| 1. Введение | 100 |
| 2. Математические модели космического аппарата с ограниченной тягой | 102 |
| 3. Оптимальное управление космическим аппаратом | 103 |
| 3.1. ОМ-задача (динамическая часть) | 104 |
| 3.2. ОТ-задача | 105 |
| 4. Метод продолжения по параметру и краевая задача принципа максимума | 108 |
| 5. Задача минимизации тяги | 112 |
| 6. Вычисление границы области существования | 114 |
| 7. Переход к задаче с заданными значениями параметров | 116 |
| 8. Численные примеры | 116 |
| Список литературы | 120 |

1. ВВЕДЕНИЕ

Возможности применения двигателей малой тяги, в первую очередь, электроракетных двигательных установок (ЭРДУ), для обеспечения космических транспортных операций начали рассматриваться еще пионерами космонавтики в начале 20-го века. Интерес к этим двигателям и их использованию сохраняется до сих пор и продиктован их основным преимуществом — высоким удельным импульсом тяги, недоступным химическим двигателям. В связи с этим применение ЭРДУ в качестве основной двигательной установки, обеспечивающей наибольший вклад в транспортные операции космического аппарата (КА), гарантирует уменьшение расхода топлива. Однако из-за низкого уровня тяги, свойственного ЭРДУ, наиболее эффективно использовать их оказывается возможным только на достаточно больших удалениях от притягивающих объектов (планет и массивных спутников), т. е. в первую очередь на гелиоцентрических участках межпланетных перелетов. Так, в случае использования маршевого ЭРДУ в сильном гравитационном поле в окрестности массивного небесного тела, располагаемое реактивное ускорение может оказаться крайне малым по отношению к гравитационному ускорению притягивающего центра и быть на уровне 10^{-5} – 10^{-4} . В этих условиях траектории перелета в окрестности массивных тел содержат большое количество витков и часто называются задачами перелета с малой тягой. На межпланетных траекториях уровень реактивного ускорения ЭРДУ не сильно уступает притяжению Солнца, и их отношение может иметь порядок 10^{-2} – 10^{-1} . В этих случаях можно говорить о перелете не с малой, а с конечной тягой.

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 16-19-10429).

Именно в задачах исследования Солнечной системы на рубеже веков ЭРДУ стали широко применяться в качестве маршевых. Первыми такими аппаратами стали Deep Space 1 (пролет астероида и двух комет), Smart-1 (выход на окололунную орбиту), Hayabusa (доставка образцов грунта с астероида Итокава), Dawn (последовательный перелет к астероидам Веста и Церера).

При этом подходы к решению задач оптимального управления КА с двигателем малой тяги существенно отличаются от методов, применяемых к задачам с большой тягой (соответствующим КА с химическим маршевым двигателем). Для задач оптимизации траекторий с двигателями большой тяги, ввиду малой продолжительности активных участков, общепринятым является использование в расчетах импульсного приближения [11, 15], допускающего замену участка работы двигательной установки (ДУ) мгновенным изменением скорости КА. В этом случае задача оптимизации сводится к минимизации характеристической скорости и заключается в определении последовательности импульсов — величины, направления и времени их приложения, что является существенным упрощением. Кроме того, такая задача в случае движения в центральном гравитационном поле может быть сведена к системе нелинейных уравнений и вообще не требует использования интегрирования уравнений движения для определения траектории КА. Задача оптимизации перелетов с двигателем малой тяги не позволяет использовать импульсное приближение, так как для нее продолжительности активных и пассивных участков оказываются сопоставимыми, что приводит к необходимости управления вектором тяги не в конечном числе точек, а в каждой точке траектории.

Все методы оптимизации траекторий КА с малой тягой так или иначе сталкиваются при их практической реализации с рядом свойственных этой задаче проблем. Одна из них заключается в том, что обычно существует множество траекторий, удовлетворяющих необходимым и достаточным условиям оптимальности. Кроме того, задачи оптимального управления КА с малой тягой, как правило, не имеют аналитических решений и обычно могут быть решены только с помощью численных методов, использование которых осложняется разрывностью правых частей системы дифференциальных уравнений движения КА (при включении и выключении ДУ), наличием особой точки в притягивающем центре, их знакопеременностью и осцилляцией в случае использования декартовой системы координат. Все это может приводить к накоплению значительных ошибок при длительных периодах интегрирования и невозможности достоверного определения производных от краевых условий по начальным параметрам (зачастую необходимых для решения краевой задачи). Однако необходимо заметить, что на сегодняшний день эти проблемы достаточно легко устраняются благодаря сглаживанию релейной функции тяги и использованию методов интегрирования с переменным шагом и контролем точности.

Куда более сложной и важной представляется проблема существования искомого решения, так как она играет важную практическую роль при решении конкретных задач. Теория необходимых условий оптимальности может оказаться бесполезной и не приводить к желаемому результату, если не выяснен вопрос о существовании решения в заданном классе допустимых функций, поскольку все необходимые условия априори предполагают существование экстремума. В случае отсутствия решения численные алгоритмы, основанные на необходимых условиях оптимальности, очевидно не приведут к построению оптимизирующей последовательности допустимых элементов даже тогда, когда необходимые условия позволяют получить все соотношения, необходимые для работы численного метода.

На сегодняшний день получены важные результаты в виде теорем существования оптимального управления в классе измеримых функций управления и непрерывных траекторий, в том числе в работах: Филиппова 1959 года [21], Ли и Маркуса [14], Cesari [26], а также см. [2, 4]. Эти теоремы применимы и к рассматриваемым в данной работе задачам. Однако, равно как в условиях оптимальности обязательным элементом является предположение о существовании оптимального управления, в теоремах существования предполагается наличие пробного управления. В данной работе проанализированы две основные постановки задачи оптимального управления КА с малой тягой (разделы 2 и 3) и показано, что наличие пробного управления в них не всегда очевидно. Для устранения этой проблемы предложен метод построения границы области существования (разделы 5 и 6), а в качестве иллюстрации приведены результаты его использования (раздел 8).

2. МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ КОСМИЧЕСКОГО АППАРАТА С ОГРАНИЧЕННОЙ ТЯГОЙ

Обычно математическая модель космического аппарата с ограниченной тягой включает в себя две основные части: динамические уравнения движения и массовую модель. В рамках данной работы космический аппарат рассматривается как материальная точка переменной массы, движение вокруг центра масс аппарата не рассматривается.

Математическая модель движения центра масс в инерциальной декартовой системе координат, связанной с барицентром системы, может быть представлена в виде следующих дифференциальных уравнений

$$\begin{cases} \frac{d^2x}{dt^2} = \Omega_x + \frac{T}{m}, \\ \frac{dm}{dt} = -\frac{|T|}{c}. \end{cases} \quad (2.1)$$

где x — вектор положения КА, t — время, m — масса КА, Ω — силовая функция гравитационного поля (нижний индекс обозначает производную), T — вектор тяги, c — скорость истечения. В случае ньютоновского, центрального гравитационного поля, силовая функция имеет вид: $\Omega = \mu/r$, где μ — гравитационный параметр центрального тела, $r = |x|$ — удаление КА от центрального тела. В общем случае управлением является вектор тяги (его величина и направление) и скорость истечения: $(T, c) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, $c > 0$.

Часто для описания ДУ вместо скорости истечения используется удельный импульс тяги, равный отношению скорости истечения к стандартному ускорению свободного падения ($g_0 = 9,80665 \text{ м/с}^2$):

$$I = \frac{c}{g_0}. \quad (2.2)$$

Реактивная мощность ЭРДУ N связана с тягой и скоростью истечения следующим соотношением:

$$N = \frac{|T|c}{2}. \quad (2.3)$$

Различия в математических моделях движения КА связаны с режимами функционирования ЭРД и ограничениями на управление. В общем случае параметры двигательной установки, такие как мощность, тяга и скорость истечения, могут быть функциями координат и времени. Традиционно рассматриваются следующие модели функционирования ЭРД (см. [9, 11, 15]):

- *идеально-регулируемый двигатель ограниченной мощности* — управлением является величина и направление тяги, а также величина скорости истечения, при этом они ограничены только величиной располагаемой реактивной мощности:

$$\frac{|T|c}{2} = N_0\chi(x, t); \quad (2.4)$$

- *двигатель ограниченной тяги* — управлением является направление тяги и ее значение, при этом направление тяги не ограничено, а величина тяги ограничена максимально допустимым значением, скорость истечения является заданной функцией:

$$0 \leq |T| \leq T_0\eta(x, t), \quad c = c_0w(x, t), \quad (2.5)$$

где N_0 , T_0 и c_0 — значения мощности, тяги и скорости истечения в начальный момент времени, а $\chi(x, t)$, $\eta(x, t)$, $w(x, t)$ — заданные функции, при этом:

$$\begin{aligned} \chi(x, t) &= \eta(x, t)w(x, t), \\ \forall t, x \quad \chi(x, t) &> 0, \quad \eta(x, t) > 0, \quad w(x, t) > 0, \\ \chi(x(t_0), t_0) &= 1, \quad \eta(x(t_0), t_0) = 1, \quad w(x(t_0), t_0) = 1 \end{aligned}$$

(конкретный вид этих функций зависит от ДУ).

Задача нахождения оптимальной траектории КА с ЭРД прямого перелета, сформулированная в наиболее общем виде, может содержать следующие краевые условия в начальный и конечный момент времени:

$$\begin{aligned} g_0(x(t_0), v(t_0), t_0) &= 0, \quad m(t_0) = m_0, \\ t_k = t_0 + \Delta t, \quad g_k(x(t_k), v(t_k), t_k) &= 0, \quad m(t_k) \geq m_k^*, \end{aligned} \quad (2.6)$$

где t_0 и t_k — начальный и конечный моменты времени, (x, v, m) — положение, скорость и масса КА, m_k^* — минимальная конечная масса КА.

Эти моменты времени могут быть заданы или выбираться оптимальным образом. Функции g_0 и g_k , ограничивающие положение и скорость аппарата в начальный и конечный момент, могут включать параметры орбит и положение на этих орбитах.

Основным критерием оптимизации в задачах механики космического полета является конечная масса КА

$$m(t_k) \rightarrow \max; \tag{2.7}$$

помимо этого, рассматривается и классическая для теории оптимального управления задача оптимального быстродействия

$$\Delta t \rightarrow \min. \tag{2.8}$$

3. ОПТИМАЛЬНОЕ УПРАВЛЕНИЕ КОСМИЧЕСКИМ АППАРАТОМ

Идеально-регулируемый (ИР) двигатель ограниченной мощности (ОМ-задача) является математической моделью электроракетного двигателя, в рамках которой предполагается, что на скорость истечения и тягу ЭРД накладывается единственное ограничение — величина реактивной мощности ЭРД (2.4). В рамках указанного ограничения скорость истечения и тяга ИР-двигателя могут произвольно изменяться. Оптимизация траекторий КА с ИР-двигателем рассматривалась во многих работах (например, [9, 17, 18, 28]), привлекая к себе внимание относительной простотой оптимального управления.

Самостоятельно эта задача может иметь мало приложений на практике ввиду сложности реализации регулирования двигателя в большом диапазоне по тяге и скорости истечения. Тем не менее, ОМ-задача позволяет определить максимально возможную величину конечной массы КА при заданной начальной мощности ДУ, а также дает достаточно хорошее начальное приближение для постановок задач с более реальными моделями работы ЭРД.

Учитывая зависимость (2.4), дифференциальное уравнение для массы КА из системы (2.1) можно переписать в следующем виде:

$$\frac{dm}{dt} = -\frac{T^2}{2N} = -\frac{m^2 a^2}{2N_0 \chi(x, t)}, \tag{3.1}$$

где $a = T/m$ — вектор реактивного ускорения.

Это уравнение имеет следующее решение (см. [9, 17, 28]):

$$m(t) = \frac{m_0}{1 + \frac{m_0}{N_0} J(t)}, \tag{3.2}$$

где

$$J(t) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t \frac{a^2(\tau)}{\chi(x(\tau), \tau)} d\tau, \tag{3.3}$$

и минимум $J(t)$ соответствует максимальной конечной массе.

Возможность записать отдельно выражение для массы (3.2) и отсутствие зависимости правых частей дифференциальных уравнений для положения и скорости от мощности приводит к разделению задачи на две независимые части (см. [9, 17, 28]):

- *динамическую* — нахождение оптимальной программы ускорения от реактивной тяги, минимизирующей интегральный критерий (3.3) для заданного динамического маневра;
- *параметрическую* — определение оптимальных массовых соотношений и уровня мощности, проверка удовлетворения условия на конечную массу (2.6).

Такое разделение задачи существенно упрощает ее решение и оправдывает идеализацию работы ЭРД.

Далее будет сформулирована динамическая часть ОМ-задачи как задача оптимального управления. Именно ее решение будет исследоваться в дальнейшем, и далее в тексте она будет именоваться просто *ОМ-задачей*, а весовая часть как таковая рассматриваться не будет.

3.1. ОМ-задача (динамическая часть). Среди всех управлений ($a \in \mathbb{R}^3$), переводящих КА с ИР-двигателем с начального многообразия на конечное за заданное время, требуется найти управление, позволяющее минимизировать функционал (3.3) и соответствующую этому управлению траекторию перелета. Диапазон выбора дат старта ограничен.

$$\left\{ \begin{array}{l} J(t_k) = \frac{1}{2} \int_{t_0}^{t_k} \frac{a^2}{\chi} dt \rightarrow \min, \\ \frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \Omega_x + a, \\ g_0(x(t_0), v(t_0), t_0) = 0, \quad g_k(x(t_k), v(t_k), t_k) = 0, \\ t_k - t_0 = \Delta t, \quad t_0^{\min} \leq t_0 \leq t_0^{\max}. \end{array} \right. \quad (3.4)$$

Прежде всего необходимо отметить, что в этой задаче всегда существует оптимальное управление в классе измеримых управлений $a \in L_2[t_0, t_k]$ и непрерывных траекторий (x, v) . Такой случай рассматривался еще в вариационном исчислении, где была установлена теорема Тонелли и ее различные варианты (см. [4, 14]). Так как система линейна по управлению, а функционал квадратичен, следовательно, из слабой сходимости по управлению следует равномерная сходимость (x, v) . Относительно функции χ без нарушения общности справедливо следующее: $\chi(x, t) \geq C_\chi > 0$. Тогда коэффициент $\frac{1}{\chi}$ ограничен сверху, и функционал ОМ-задачи (3.4) коэрцитивен (т. е. стремится к $+\infty$ при $\|a\| \rightarrow \infty$), поэтому всякая минимизирующая последовательность ограничена.

Кроме того, в динамической части ОМ-задачи всегда существует и пробное управление (удовлетворяющее краевым условиям), так как всегда можно провести кривую, соединяющую начальное и конечное положение, и по этой кривой восстановить управление с помощью уравнений (3.4). А учитывая вид зависимости конечной массы от функционала динамической части ОМ-задачи (3.2), из которой видно, что она не может быть меньше нуля, можно сделать заключение, что и оптимальное решение параметрической части ОМ-задачи всегда существует при отсутствии ограничений на конечную массу.

Рассмотрим задачу в рамках принципа максимума (см. [19]). Функция Понтрягина имеет вид

$$H = -\lambda_J \frac{a^2}{2\chi} + \langle p_v, \Omega_x \rangle + \langle p_v, a \rangle + \langle p_x, v \rangle, \quad (3.5)$$

а терминант (краевая функция Лагранжа)

$$l = \langle g_0(x(t_0), v(t_0), t_0), \lambda^0 \rangle + \langle g_k(x(t_k), v(t_k), t_k), \lambda^k \rangle + \\ + (t_k - t_0 - \Delta t)\lambda_t + (t_0^{\min} - t_0)\lambda_{t_0}^1 + (t_0 - t_0^{\max})\lambda_{t_0}^2, \quad (3.6)$$

где p_x, p_v — липшицевы функции (сопряженные переменные к x и v соответственно), $\lambda_J, \lambda_t, \lambda_{t_0}^1, \lambda_{t_0}^2$ — скалярные множители, λ^0, λ^k — векторы.

Условия принципа максимума принимают следующий вид:

- условия оптимальности по управлению $a = \operatorname{argmax}_{a' \in \mathbb{R}^3} H(t, x(t), v(t), a')$:

$$a = \frac{1}{\lambda_J} \chi p_v, \quad (3.7)$$

- уравнения сопряженной системы:

$$\frac{dp_x}{dt} = -\Omega_{xx} p_v - \frac{p_v^2}{2\lambda_J} \frac{\partial \chi}{\partial x}, \\ \frac{dp_v}{dt} = -p_x, \quad (3.8)$$

- условия трансверсальности:

$$\begin{cases} p_x(t_0) = \frac{\partial}{\partial x(t_0)} \langle g_0(x(t_0), v(t_0), t_0), \lambda^0 \rangle, & p_x(t_k) = -\frac{\partial}{\partial x(t_k)} \langle g_k(x(t_k), v(t_k), t_k), \lambda^k \rangle, \\ p_v(t_0) = \frac{\partial}{\partial v(t_0)} \langle g_0(x(t_0), v(t_0), t_0), \lambda^0 \rangle, & p_v(t_k) = -\frac{\partial}{\partial v(t_k)} \langle g_0(x(t_k), v(t_k), t_k), \lambda^k \rangle, \\ H(t_0) = -\frac{\partial}{\partial t_0} \langle g_0(x(t_0), v(t_0), t_0), \lambda^0 \rangle + \lambda_t + \lambda_{t_0}^1 - \lambda_{t_0}^2, & H(t_k) = \frac{\partial}{\partial t_k} \langle g_k(x(t_k), v(t_k), t_k), \lambda^k \rangle + \lambda_t, \end{cases} \quad (3.9)$$

- условия дополняющей нежесткости:

$$(t_0^{\min} - t_0)\lambda_{t_0}^1 = 0, \quad (t_0 - t_0^{\max})\lambda_{t_0}^2 = 0, \quad (3.10)$$

- условия нетривиальности и неотрицательности:

$$|\lambda^0| + |\lambda^k| + |\lambda_t| + \lambda_{t_0}^1 + \lambda_{t_0}^2 + \lambda_J > 0, \quad \lambda_J \geq 0, \quad \lambda_{t_0}^1 \geq 0, \quad \lambda_{t_0}^2 \geq 0. \quad (3.11)$$

В связи с однородностью по сопряженным переменным функции Понтрягина можно ввести одно условие нормировки. В данном случае удобно ввести ее следующим образом, не зависящим от вида краевых условий g_0 , g_k и остальных множителей:

$$\lambda_J = 1. \quad (3.12)$$

Случай $\lambda_J = 0$ противоречит приведенным условиям оптимальности. Так как максимум функции Понтрягина достигается при условии

$$\frac{\partial H}{\partial a} = p_v - \frac{\lambda_J}{\chi} a = 0,$$

что при $\lambda_J = 0$ приводит к $p_v(t) \equiv 0$, тогда из (3.8) следует, что $p_x(t) \equiv 0$, а из (3.5) вытекает, что $H(t) \equiv 0$. То есть, $p_v(t_0) = p_v(t_k) = 0$, $p_x(t_0) = p_x(t_k) = 0$, $H(t_0) = H(t_k) = 0$, и условия трансверсальности (3.9) для невырожденных краевых условий могут быть выполнены только при тривиальном наборе множителей $\lambda_J = 0$, $\lambda^0 = 0$, $\lambda^k = 0$, $\lambda_t = 0$, $\lambda_{t_0}^1 = 0$, $\lambda_{t_0}^2 = 0$, что противоречит условию (3.11). Значит, $\lambda_J > 0$ и справедлива нормировка (3.12).

3.2. ОТ-задача. Как отмечалось ранее, ОМ-задача использует идеализированную математическую модель ЭРДУ. Задача о перелете КА с ЭРДУ ограниченной тяги (ОТ-задача) существенно реалистичнее, поэтому оптимизация ОТ-траекторий представляет значительный практический интерес. Однако с методической точки зрения, оптимизация ОТ-траекторий осложняется невозможностью разделения задачи на динамическую и весовую части и более жесткими ограничениями на управление (2.5). Сформулируем ОТ-задачу следующим образом.

Среди всех управлений $(e, \delta) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}$, переводящих КА с начального многообразия на конечное за заданное время, требуется найти управление, позволяющее максимизировать массу КА в конечный момент времени, и соответствующую ему траекторию перелета. Диапазон выбора дат старта ограничен.

$$\begin{cases} m(t_k) \rightarrow \max, \\ \frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \Omega_x + \frac{\eta(x, t)T_0}{m} e\delta, \quad \frac{dm}{dt} = -\frac{\eta(x, t)T_0}{w(x, t)c_0} \delta, \\ g_0(x(t_0), v(t_0), t_0) = 0, \quad m(t_0) = m_0, \quad g_k(x(t_k), v(t_k), t_k) = 0, \\ t_k - t_0 = \Delta t, \quad t_0^{\min} \leq t_0 \leq t_0^{\max}, \\ |e| = 1, \quad \delta \in [0; 1]. \end{cases} \quad (3.13)$$

где δ — функция тяги, e — единичный вектор в направлении вектора тяги.

Рассмотрим эту задачу в рамках принципа максимума (см. [19]). Функция Понтрягина имеет вид

$$H = \langle p_x, v \rangle + \langle p_v, \Omega_x \rangle + \delta \eta(x, t) T_0 \left(\frac{\langle p_v, e \rangle}{m} - \frac{p_m}{w(x, t)c_0} \right), \quad (3.14)$$

а терминант (краевая функция Лагранжа)

$$l = \langle g_0(x(t_0), v(t_0), t_0), \lambda^0 \rangle + \langle g_k(x(t_k), v(t_k), t_k), \lambda^k \rangle + \\ + (m(t_0) - m_0)\lambda_m^0 - m(t_k)\lambda_m^k + (t_k - t_0 - \Delta t)\lambda_t + (t_0^{\min} - t_0)\lambda_{t_0}^1 + (t_0 - t_0^{\max})\lambda_{t_0}^2, \quad (3.15)$$

где p_x, p_v, p_m — липшицевы функции (сопряженные переменные), $\lambda_m^0, \lambda_m^k, \lambda_t, \lambda_{t_0}^1, \lambda_{t_0}^2$ — скалярные множители, λ^0, λ^k — векторы.

Условия принципа максимума принимают следующий вид:

- условия оптимальности по управлению $(e, \delta) = \operatorname{argmax}_{(e', \delta') \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}} H(t, x(t), v(t), m(t), e', \delta')$:

$$e = \frac{p_v}{|p_v|}, \quad \Psi = \frac{|p_v|}{m} - \frac{p_m}{wc}, \quad \delta = \begin{cases} 1, & \Psi > 0, \\ \forall \delta' \in [0; 1], & \Psi = 0, \\ 0, & \Psi < 0, \end{cases} \quad (3.16)$$

- уравнения сопряженной системы:

$$\begin{cases} \frac{dp_x}{dt} = -\Omega_{xx}p_v - \left[\left(\frac{\langle p_v, e \rangle}{m} - \frac{p_m}{wc_0} \right) \frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\eta}{w^2 c_0} p_m \frac{\partial w}{\partial x} \right] \delta T_0, \\ \frac{dp_v}{dt} = -p_x, \\ \frac{dp_m}{dt} = \frac{\langle p_v, e \rangle}{m^2} \eta T_0 \delta, \end{cases} \quad (3.17)$$

- условия трансверсальности:

$$\begin{cases} p_x(t_0) = \frac{\partial}{\partial x(t_0)} \langle g_0(x(t_0), v(t_0), t_0), \lambda^0 \rangle, & p_x(t_k) = -\frac{\partial}{\partial x(t_k)} \langle g_k(x(t_k), v(t_k), t_k), \lambda^k \rangle, \\ p_v(t_0) = \frac{\partial}{\partial v(t_0)} \langle g_0(x(t_0), v(t_0), t_0), \lambda^0 \rangle, & p_v(t_k) = -\frac{\partial}{\partial v(t_k)} \langle g_k(x(t_k), v(t_k), t_k), \lambda^k \rangle, \\ p_m(t_0) = \lambda_m^0, & p_m(t_k) = \lambda_m^k, \\ H(t_0) = -\frac{\partial}{\partial t_0} \langle g_0(x(t_0), v(t_0), t_0), \lambda^0 \rangle + \lambda_t + \lambda_{t_0}^1 - \lambda_{t_0}^2, & H(t_k) = \frac{\partial}{\partial t_k} \langle g_k(x(t_k), v(t_k), t_k), \lambda^k \rangle + \lambda_t, \end{cases} \quad (3.18)$$

- условия дополняющей нежесткости:

$$(t_0^{\min} - t_0)\lambda_{t_0}^1 = 0, \quad (t_0 - t_0^{\max})\lambda_{t_0}^2 = 0, \quad (3.19)$$

- условия нетривиальности и неотрицательности:

$$|\lambda_m^0| + |\lambda^0| + |\lambda^k| + |\lambda_t| + \lambda_{t_0}^1 + \lambda_{t_0}^2 + \lambda_m^k > 0, \quad \lambda_m^k \geq 0, \quad \lambda_{t_0}^1 \geq 0, \quad \lambda_{t_0}^2 \geq 0. \quad (3.20)$$

В связи с однородностью по сопряженным переменным функции Понтрягина, так же как и ранее, можно ввести одно условие нормировки, связывающее сопряженные переменные.

Как видно, оптимальное управление (3.16) может иметь особенности следующего вида:

1. $p_v(t) \equiv 0$ на некотором конечном интервале $[\tau_0, \tau_k]$ ($t_0 \leq \tau_0 < \tau_k \leq t_k$), тогда из (3.17) следует, что и $p_x(t) \equiv 0$, $p_m(t) \equiv 0 \forall t \in [\tau_0, \tau_k]$, и значит, на всем интервале $t \in [t_0, t_k]$ имеет место $p_x(t) \equiv 0$, $p_v(t) \equiv 0$, $p_m(t) \equiv 0$, а тогда условия трансверсальности (3.18) при невырожденных краевых условиях допускают только тривиальное решение $\lambda_m^0 = 0$, $\lambda^0 = 0$, $\lambda^k = 0$, $\lambda_t = 0$, $\lambda_{t_0}^1 = 0$, $\lambda_{t_0}^2 = 0$, $\lambda_m^k = 0$, что противоречит (3.20), а значит, оптимальная траектория не может содержать рассматриваемых участков;
2. $\Psi(t) \equiv 0$ на некотором конечном интервале $[\tau_0, \tau_k]$ ($t_0 \leq \tau_0 < \tau_k \leq t_k$), тогда принцип максимума допускает на этом интервале особое управление соответствующее промежуточной тяге $\delta \in [0, 1]$, но не позволяет однозначно определить его; для определения оптимального промежуточного управления необходимо воспользоваться условием Коппа—Мойера (см. [29]), которое для центрального ньютоновского гравитационного поля имеет вид равенств (см. [7, 8])

$$\Psi(t) = 0, \quad \dot{\Psi}(t) = 0, \quad \ddot{\Psi}(t) = 0, \quad \dddot{\Psi}(t) = 0, \quad \ddot{\ddot{\Psi}}(t) = 0 \quad \forall t \in [\tau_0, \tau_k],$$

последнее из которых позволяет выразить управление с помощью условия

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \frac{d^4}{dt^4} \frac{\partial H}{\partial \delta} \leq 0$$

(однако в данной работе особые управления не рассматриваются).

Рассмотрим подробнее случай $\lambda_m^k = 0$, так как он приводит к тому, что $p_m(t_k) = 0$, а с учетом уравнения для p_m из (3.17) это значит, что $p_m(t) \leq 0 \forall t \in [t_0, t_k]$. Следовательно, $\forall t \in [t_0, t_k]$ $\Psi \geq 0$ и при отсутствии участков особого управления $\delta \equiv 1$, что соответствует задаче оптимального быстрогодействия, и заданное время перелета Δt является минимальным для рассматриваемой задачи.

Кроме того, в ОТ-задаче (3.13) вопрос существования решений не так тривиален, как в случае ОМ-задачи (3.4). Однако в работах Oberle и Taubert [32], Caillau, Gergaud, Noailles, Haberkorn [25, 27] на основе теоремы Филиппова [21] делается вывод о существовании оптимального решения в ОТ-задаче.

Однако во всех перечисленных работах остается недостаточно исследованным вопрос существования пробного управления и четкого выделения задач, в которых оптимальное управление заведомо существует на множестве основных параметров, таких как время перелета, тяга и скорость истечения $(\Delta t, T_0, c_0)$.

Для подтверждения существования допустимых управлений, вообще говоря, можно указать только два пути: построение области достижимости и определение области существования решения на множестве параметров системы. Оба эти подхода применимы к задачам механики полета с малой тягой. Однако построить область достижимости — значит определить все возможные положения, в которые можно попасть из начальной точки за заданное время, управляя системой допустимым образом. Очевидно, что определение такой области фазового пространства для задач механики полета с малой тягой является очень трудоемким и сложным процессом, в основном из-за «проклятия размерности» и нелинейности уравнений (2.1). Из-за этих недостатков построение множеств достижимости в рассматриваемых задачах на практике может носить только весьма ограниченный характер.

Для оценки проектных параметров КА с двигателем малой тяги в ОТ-задаче и существования допустимого управления для заданного перелета часто используются решения задачи с идеально регулируемым двигателем (ОМ-задача, см. [18]), оптимального быстрогодействия (см. [25, 32]) и импульсные траектории (см. [5, 6]). При этом часто (см. [5, 6, 18]) эти решения используются, в первую очередь, в качестве начального приближения, и вопрос существования допустимого управления решается в них только косвенно. При этом решения с импульсной тягой не являются для ОТ-задачи допустимыми управлениями, а решения ОМ-задачи будут таковыми, только если изменение реактивного ускорения на траектории ОМ-задачи не превышает допустимых значений ОТ-задачи, т. е., если траекторию ОМ-задачи можно реализовать с моделью двигателя ограниченной тяги, что выполняется далеко не всегда. В этих условиях нельзя гарантировать успешность перехода от задачи перелета с идеально-регулируемой или импульсной тягой к задаче с ограниченной тягой. Такой проблемы не возникает при использовании задачи оптимального быстрогодействия, в работах [27, 32] она рассматривается в качестве гарантии существования допустимого управления — если есть решение оптимального быстрогодействия, то существует и пробное управление с любым временем перелета, большим минимального [25].

Однако использование задачи оптимального быстрогодействия в качестве проверки осуществимости перелета имеет один существенный недостаток — в процессе ее решения неизбежно будет происходить изменение угловой дальности перелета. А как отмечалось ранее, существует деление семейств экстремалей, отличающихся числом целых витков вокруг притягивающего центра. И изменение угловой дальности в процессе решения может приводить к неконтролируемому переходу от одного семейства экстремалей к другому, что осложняет анализ задачи. Чтобы гарантировать в процессе решения нахождение в рамках выбранного семейства экстремалей, необходимо зафиксировать угловую дальность или, по крайней мере, минимизировать и отслеживать ее изменения.

Более конструктивным и оправданным представляется метод, основанный на том, что решение ОТ-задачи может существовать не всегда, а точнее, не для всех значений тяги и скорости истечения. Область существования решения ограничена минимальными значениями тяги и скорости

истечения, так как, во-первых, для осуществления заданного перелета требуется некоторое конечное приращение характеристической скорости, для реализации которого за определенное время Δt требуется достаточная величина реактивного ускорения, а следовательно — тяги. Во-вторых, из условий (2.6) следует, что допустимый расход рабочего тела ограничен сверху, следовательно, скорость истечения также имеет предельное минимальное значение. Более того, для каждого значения скорости истечения $c \in [c_{\min}; \infty]$ существует минимальное значение тяги T_{\min} и реактивной мощности N_{\min} , при котором существует решение:

$$T_{\min}(c), N_{\min}(T_{\min}(c), c), c \in [c_{\min}; \infty]. \quad (3.21)$$

Минимальное значение скорости истечения c_{\min} определяется выходом на предельное значение конечной массы КА при бесконечной величине тяги (импульсное решение):

$$c_{\min} = -\frac{\Delta v}{\ln(m_k/m_0)}, \quad (3.22)$$

где Δv — суммарные затраты приращения скорости для импульсного решения.

Тогда можно привести следующие рассуждения относительно существования решений ОТ-задачи. Предположим, есть решение ОМ-задачи, и известно значение максимальной тяги на этом решении T_{\max}^{OM} , тогда всегда есть допустимое управление в задаче с минимальной тягой без массового расхода:

$$T \in [0; T_{\max}^{OM}], c = \infty, m(t_k) = m_0. \quad (3.23)$$

Решив задачу на минимум тяги без массового расхода, можно продолжить это решение по скорости истечения, получив семейство решений, являющееся нижней границей области существования ОТ-задачи (3.21).

После этого можно сделать заключение, что для каждого значения тяги больше минимального при заданной скорости истечения в ОТ-задаче максимизации конечной массы решение с минимальной тягой является допустимым (но не оптимальным) управлением, и из теоремы существования следует наличие оптимального управления этой задачи с тягой больше минимальной

$$T^* \geq T_{\min}(c), T \in [0; T^*]. \quad (3.24)$$

Отсутствие решений с тягой меньше минимальной следует из постановки ОТ-задачи с минимальной тягой.

Увеличивать тягу можно до еще одного предельного случая — импульсного решения. Всякое решение с конечной тягой может рассматриваться как промежуточное в последовательности решений краевых задач с неограниченно возрастающей тягой, сходящихся к импульсному решению, как это показано в работе [31].

Таким образом, совокупность значений тяги и скорости истечения при заданном времени перелета ограничивает снизу кривая минимальной тяги $T_{\min}(c)$. Метод построения этой кривой и формулировка задачи о минимуме тяги приведены далее в разделах 5 и 6.

4. МЕТОД ПРОДОЛЖЕНИЯ ПО ПАРАМЕТРУ И КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ПРИНЦИПА МАКСИМУМА

Приведенные выше соотношения (3.4)–(3.12) и (3.13)–(3.20) сводят ОМ- и ОТ-задачи к краевым, в которых необходимо определить недостающие значения переменных, удовлетворяющие краевым условиям и соответствующим условиям оптимальности. При этом, если начальное и конечное многообразие не имеют особых точек, то число неизвестных краевой задачи всегда совпадает с числом условий (см. [19]).

В данной работе все краевые задачи принципа максимума будут решаться методом продолжения по параметру (гомотопии). Кроме того, с его помощью будет строиться граница области существования решений ОТ-задачи. В связи с этим приведем краткое описание метода.

Идея метода продолжения прослеживается в литературе еще с работ Шварца (1869 г.), Леверье (1886 г.) и Пуанкаре (1892 г.). Тем не менее, для численного решения задач этим методом стали пользоваться только во второй половине прошлого века в связи с расширением возможностей ЭВМ. Для случая решения систем нелинейных уравнений в непрерывном виде этот метод был предложен Д. Ф. Давиденко [10] и М. К. Гауриным [3], а в дальнейшем развит во многих работах (см. [13, 16, 23, 24]), в том числе и для решения краевых задач для систем обыкновенных

дифференциальных уравнений. В частности, последние 20 лет метод продолжения активно применяется в задачах механики космического полета с малой тягой (см., например, [17, 18, 25, 27]).

Применение метода продолжения по параметру к краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений заключается в следующем.

Будем решать нелинейную краевую задачу

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = f(x, \tau, t), & t \in [t_0; t_k], \\ g(\tau, x(t_0), x(t_k)) = 0, \\ (x, \tau, t) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}, \\ g : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \end{cases} \quad (4.1)$$

с вектором неизвестных начальных значений p ($p \in \mathbb{R}^m$, $m \leq n$), т. е. p — часть вектора $x(t_0)$, подлежащая определению для удовлетворения краевых условий.

Эту краевую задачу нужно представить в виде некоторой нелинейной системы

$$\Phi(p, \tau) = 0. \quad (4.2)$$

При этом, если известно решение краевой задачи (4.1) при каком-либо значении параметра τ (т. е. $x_i(t_0) = p_i^0$, $i = 1, \dots, m$), то функция (4.2) совпадает с краевыми условиями задачи

$$\Phi(p, \tau) = g(\tau, x(t_0), x(t_k)) = 0. \quad (4.3)$$

Если такое решение не известно, и начальное приближение $x_i(t_0) = p_i^0$, $i = 1, \dots, m$, не удовлетворяет краевым условиям, функция (4.2) может быть представлена в виде

$$\Phi(p, \tau) = g(\tau, x(t_0), x(t_k)) - \tau b = 0, \quad b = g(\tau, x(t_0), x(t_k)), \quad \tau \in [1; 0], \quad (4.4)$$

где p^0 — вектор начального приближения неизвестных значений, b — вектор начальных невязок, параметр τ и уравнения краевой задачи (4.1) нормированы и преобразованы соответствующим образом, чтобы обеспечить выполнение принадлежности параметра заданному отрезку (например, $\tau \in [1; 0]$).

Продифференцировав соотношение (4.2), легко получить производную решения от параметра

$$\frac{\partial \Phi}{\partial p} \frac{dp}{d\tau} + \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} = 0. \quad (4.5)$$

Это выражение в первом случае функции $\Phi(p, \tau)$ (4.3) можно переписать как

$$\frac{dp}{d\tau} = - \left[\frac{\partial g}{\partial p} \right]^{-1} \frac{\partial g}{\partial \tau}, \quad (4.6)$$

а в случае (4.4)

$$\frac{dp}{d\tau} = - \left[\frac{\partial g}{\partial p} \right]^{-1} \left(\frac{\partial g}{\partial \tau} - b \right). \quad (4.7)$$

Таким образом, процесс построения неявной функции, заданной уравнением $\Phi(p, \tau) = 0$, на интересующем отрезке изменения параметра сводится к интегрированию системы (4.5). При этом должны быть выполнены локальные условия существования неявной функции на всем отрезке продолжения (см. [13, 16, 22, 23])

$$\text{rank} \left[\frac{\partial g}{\partial p}, \frac{\partial g}{\partial \tau} \right] = m, \quad (4.8)$$

и задача (4.1) должна иметь непрерывные производные по начальным условиям и параметру, что можно обеспечить наложением ограничения на гладкость правых частей и краевых условий (см. [13, 24]):

$$f(x, \tau, t) \in C^1, \quad g(\tau, x(t_0), x(t_k)) \in C^1. \quad (4.9)$$

Эти условия необходимы для локальной продолжаемости по параметру. Что касается нелокальной продолжаемости на весь участок изменения параметра, этот вопрос более сложный и никакими условиями не может быть гарантирован.

Как отмечается в ряде работ [10, 23, 24], во многих случаях рационально переходить к продолжению по длине дуги или менять параметр в процессе продолжения (чередую по необходимости τ с компонентами вектора p) для организации немонотонного изменения параметра τ вдоль линии

продолжения. Такой метод способен проходить точки разворота (предельные точки), характеризующиеся вырождением матрицы чувствительности по начальным значениям на единицу, при сохранении полного ранга расширенной матрицы

$$\text{rank} \left[\frac{\partial g}{\partial p} \right] = m - 1, \quad \text{rank} \left[\frac{\partial g}{\partial p}, \frac{\partial g}{\partial \tau} \right] = m. \quad (4.10)$$

Для построения кривой продолжения совершенно неважно, какая именно переменная выступает в роли параметра продолжения: им может быть и их некоторая комбинация. Производная от (4.2) по абстрактному параметру продолжения s будет иметь вид

$$\frac{d\Phi}{ds} = \frac{\partial \Phi}{\partial p} \frac{dp}{ds} + \frac{\partial \Phi}{\partial \tau} \frac{d\tau}{ds} \quad (4.11)$$

(предполагается, что $\Phi(p(s), \tau(s))$).

Определить s , вообще говоря, можно любым удобным способом, присоединив к системе (4.11) соответствующее условие. Часто в качестве такого параметра используется длина дуги (см. [23, 24]), тогда определяющее его уравнение имеет вид

$$(ds)^2 = (dp)^2 + (d\tau)^2. \quad (4.12)$$

Недостатком такого определения параметра продолжения является нелинейность уравнения (4.12).

Можно указать еще один достаточно оригинальный способ выбора параметра продолжения (в некоторых источниках именуемый «методом Драгилева»). Решение уравнений (4.5) по методу Крамера имеет вид

$$\frac{dp_i}{ds} = -\frac{\Delta_i}{\Delta_0} \frac{d\tau}{ds}, \quad i = 1, \dots, m, \quad (4.13)$$

где Δ_0 — определитель матрицы $\frac{\partial \Phi}{\partial p}$, Δ_i — определитель матрицы, в которой i -ый столбец матрицы $\frac{\partial \Phi}{\partial p}$ заменен на $\frac{\partial \Phi}{\partial \tau}$. Теперь можно ввести параметр s , приняв производную от τ по s равной определителю $-\Delta_0$. Тогда система уравнений примет следующий вид:

$$\begin{cases} \frac{dp_i}{ds} = \Delta_i, \\ \frac{d\tau}{ds} = -\Delta_0. \end{cases} \quad (4.14)$$

Параметры, заданные таким образом (длина дуги, «метод Драгилева»), как уже отмечалось ранее, допускают немонотонное изменение τ и позволяют проходить точки разворота кривой продолжения, что оказывается полезным в некоторых случаях.

Для повышения точности процесс продолжения можно организовать по схеме предиктор—корректор, такой вариант рассматривается, например, в книге [23]. Поскольку известен вид неявной функции (4.2), это выражение должно выполняться при каждом значении параметра τ . Тогда в качестве предиктора можно использовать выполнение одного или нескольких шагов выбранного для решения системы (4.6) или (4.7) метода численного интегрирования, а в качестве корректора, с целью уточнения текущего значения p , — численный метод для решения системы нелинейных уравнений (4.2). Эту систему можно решать, например, методом Ньютона, тогда итерации корректора имеют следующий вид:

$$\text{пока } |\Phi(p_j, \tau)| \geq h, \quad p_j = p_{j-1} - \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p} \Big|_{p=p_{j-1}} \right)^{-1} \Phi(p_{j-1}, \tau), \quad (4.15)$$

где h — точность процесса продолжения, j — номер итерации метода Ньютона.

Вычисление матрицы чувствительности $\partial \Phi / \partial p$ и вектора $\partial \Phi / \partial \tau$ может производиться разными способами, например, с использованием конечных разностей, совместного интегрирования дифференциальных уравнений для элементов этой матрицы с уравнениями краевой задачи, либо с помощью метода комплексного шага для высокоточного численного дифференцирования (см. [30, 33]).

Как видно, в ОТ-задаче правые части дифференциальных уравнений содержат ступенчатую (релейную) функцию тяги δ , которая приводит к их разрывам, что противоречит условиям гладкости метода продолжения (4.9). И чтобы иметь возможность воспользоваться им, необходимо использовать сглаженные правые части, вернее, сглаженное управление, так как разрывность обусловлена только включением-выключением двигателя. Можно использовать следующую сглаженную функцию тяги:

$$\delta = \frac{1}{2} \left(1 + \frac{\Psi}{|\Psi| + \varepsilon} \right), \quad (4.16)$$

где ε — параметр сглаживания, Ψ — функция переключения.

Используя этот подход, всегда можно получить функцию сколь угодно близкую к релейной, устремляя параметр сглаживания к нулю на столько, на сколько это позволит устойчивость метода продолжения.

Как отмечалось ранее, одной из особенностей задач механики перелета является возможность существования множества локальных экстремумов рассматриваемой задачи оптимального управления при заданном времени перелета, соответствующих различному количеству целых витков вокруг гравитирующего центра. Эти локальные экстремумы образуют изолированные семейства решений (семейства экстремалей).

Для регуляризации процесса решения задачи оптимального управления и более полного анализа семейств экстремалей необходим алгоритм, обеспечивающий при заданном начальном приближении сходимость к решению с заданной угловой дальностью перелета (числом витков).

Из полученного ранее оптимального управления видно, что для рассматриваемых задач нулевое начальное приближение для начальных значений сопряженных переменных соответствует нулевому реактивному ускорению на всей траектории перелета, и в конечный момент времени КА останется на начальной орбите. Для того, чтобы использовать пассивное движение аппарата на всем участке траектории, кроме начальной и конечной точки (т. е. нулевое начальное приближение для вектора сопряженных переменных), можно воспользоваться двумя видами параметризации:

- модификацией гравитационного параметра — изменением параметра притягивающего центра таким образом, чтобы угловая дальность пассивного движения по начальной орбите совпала с заданной величиной с точностью до 2π (см. [17, 18]);
- изменением начальной и конечной скорости КА — заменой их на скорости, полученные из решения задачи Ламберта.

Первый прием легко проиллюстрировать следующими рассуждениями. Предположим, известны начальные приближения положения и скорости КА в начальный и конечный момент времени (x_0, v_0) и (x_k, v_k) , а также время перелета. Тогда можно найти угол между этими двумя положениями $\angle(x_0, x_k)$ и, зная параметры начальной орбиты, перейти от него к средней аномалии, которая связана с гравитационным параметром следующим соотношением:

$$\Delta M + 2\pi n = \sqrt{\frac{\mu}{a_0^3}} \Delta t, \quad (4.17)$$

где ΔM — угол средней аномалии между начальным и конечным положением, $\Delta M \in [0; 2\pi]$, n — число целых витков, a_0 — большая полуось начальной орбиты, μ — гравитационный параметр, Δt — время перелета. Из этой формулы видно, что, задавая время перелета и число целых витков, можно всегда подобрать подходящее значение гравитационного параметра.

Другой вариант априорного выбора решения, соответствующего определенному числу витков вокруг центрального тела — это использование решения задачи Ламберта. Задача Ламберта относится к классическим задачам небесной механики и заключается в определении кеплеровской траектории движения по двум известным векторам положения и заданному интервалу времени, за которое КА перемещается между этими положениями (после определения орбиты находятся и векторы скорости в граничных положениях). Эта задача хорошо описана в литературе, например, в [1, 20] подробно приведены эффективные методы ее решения.

Следует отметить, что при достаточно большом времени перелета задача Ламберта может быть решена для разного числа витков вокруг центрального тела, однако, в отличие от модификации гравитационного параметра, она имеет по два решения для каждого числа витков, большего нуля. Кроме того, задача Ламберта может не иметь решения при достаточно большом числе витков и

достаточно малом времени перелета, что связано с геометрическими ограничениями кеплеровского движения. Метод модификации гравитационной постоянной избавлен от этого недостатка, так как использует меньше соотношений кеплеровского движения, но по этой причине он не определяет точное значение векторов скорости и не удовлетворяет условиям по положению на правом конце траектории. Преимуществом использования задачи Ламберта является то, что с ее помощью можно удовлетворить все краевые условия по положению и скорости, используя в качестве начального приближения двухимпульсный перелет, полученный на ее основе.

5. Задача минимизации тяги

Можно сформулировать задачу минимизации тяги следующим образом, аналогично работе [12], с добавлением ограничения на величину конечной массы.

Задача на минимум тяги. В рамках модели ограниченной тяги (ОТ-задачи) найти управление (e, δ) , переводящее КА с начального многообразия на конечное за заданное время с минимально возможной величиной начальной реактивной тяги:

$$\left\{ \begin{array}{l} T_0 \rightarrow \min, \\ \frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \Omega_x + \frac{\eta(x, t)T_0}{m} e \delta, \quad \frac{dm}{dt} = -\frac{\eta(x, t)T_0}{w(x, t)c_0} \delta, \\ g_0(x(t_0), v(t_0), t_0) = 0, \quad m(t_0) = m_0, \quad g_k(x(t_k), v(t_k), t_k) = 0, \quad m(t_k) \geq m_k^*, \\ t_k - t_0 = \Delta t, \quad t_0^{\min} \leq t_0 \leq t_0^{\max}, \\ (e, \delta) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \quad |e| = 1, \quad \delta \in [0; 1], \end{array} \right. \quad (5.1)$$

где δ — функция тяги, e — единичный вектор в направлении вектора тяги.

В соответствии с идеями принципа максимума введем дополнительное дифференциальное уравнение

$$\frac{dT_0}{dt} = 0, \quad (5.2)$$

запишем функцию Понтрягина

$$H = \langle p_x, v \rangle + \langle p_v, \Omega_x \rangle + \delta \eta(x, t) T_0 \left(\frac{\langle p_v, e \rangle}{m} - \frac{p_m}{w(x, t)c_0} \right), \quad (5.3)$$

и терминант (краевую функцию Лагранжа)

$$l = T_0 \lambda_T + \langle g_0(x(t_0), v(t_0), t_0), \lambda^0 \rangle + \langle g_k(x(t_k), v(t_k), t_k), \lambda^k \rangle + \\ + (m(t_0) - m_0) \lambda_m^0 + (m_k^* - m(t_k)) \lambda_m^k + (t_k - t_0 - \Delta t) \lambda_t + (t_0^{\min} - t_0) \lambda_{t_0}^1 + (t_0 - t_0^{\max}) \lambda_{t_0}^2, \quad (5.4)$$

где p_x, p_v, p_m — липшицевы функции (сопряженные переменные), $\lambda_m^0, \lambda_m^k, \lambda_t, \lambda_{t_0}^1, \lambda_{t_0}^2$ — скалярные множители и λ^0, λ^k — векторы.

Условия принципа максимума принимают следующий вид:

- условия оптимальности по управлению $(e, \delta) = \operatorname{argmax}_{(e', \delta') \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}} H(t, x(t), v(t), m(t), e', \delta')$:

$$e = \frac{p_v}{|p_v|}, \quad \Psi = \frac{|p_v|}{m} - \frac{p_m}{wc}, \quad \delta = \begin{cases} 1, & \Psi > 0, \\ \forall \delta' \in [0; 1], & \Psi = 0, \\ 0, & \Psi < 0, \end{cases} \quad (5.5)$$

- уравнения сопряженной системы:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dp_x}{dt} = -\Omega_{xx} p_v - \delta \frac{T_0}{m} |p_v| \frac{\partial \eta}{\partial x} + \delta \frac{T_0}{wc_0} p_m \left(\frac{\partial \eta}{\partial x} - \frac{\eta}{w} \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ \frac{dp_v}{dt} = -p_x, \\ \frac{dp_m}{dt} = \delta \frac{\eta T_0}{m^2} |p_v|, \\ \frac{dp_T}{dt} = -\delta \eta \Psi, \end{array} \right. \quad (5.6)$$

- условия трансверсальности:

$$\left\{ \begin{array}{l} p_x(t_0) = \frac{\partial}{\partial x(t_0)} \langle g_0(x(t_0), v(t_0), t_0), \lambda^0 \rangle, \\ p_v(t_0) = \frac{\partial}{\partial v(t_0)} \langle g_0(x(t_0), v(t_0), t_0), \lambda^0 \rangle, \\ p_m(t_0) = \lambda_m^0, \\ p_T(t_0) = \lambda_T, \\ H(t_0) = -\frac{\partial}{\partial t_0} \langle g_0(x(t_0), v(t_0), t_0), \lambda^0 \rangle + \lambda_t + \lambda_{t_0}^1 - \lambda_{t_0}^2, \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} p_x(t_k) = -\frac{\partial}{\partial x(t_k)} \langle g_k(x(t_k), v(t_k), t_k), \lambda^k \rangle, \\ p_v(t_k) = -\frac{\partial}{\partial v(t_k)} \langle g_0(x(t_k), v(t_k), t_k), \lambda^k \rangle, \\ p_m(t_k) = \lambda_m^k, \\ p_T(t_k) = 0, \\ H(t_k) = \frac{\partial}{\partial t_k} \langle g_k(x(t_k), v(t_k), t_k), \lambda^k \rangle + \lambda_t, \end{array} \quad (5.7)$$

- условия дополняющей нежесткости

$$(t_0^{\min} - t_0)\lambda_{t_0}^1 = 0, \quad (t_0 - t_0^{\max})\lambda_{t_0}^2 = 0, \quad (m_k^* - m(t_k))\lambda_m^k = 0, \quad (5.8)$$

- условия нетривиальности и неотрицательности

$$|\lambda_m^0| + |\lambda^0| + |\lambda^k| + |\lambda_t| + \lambda_{t_0}^1 + \lambda_{t_0}^2 + \lambda_m^k + \lambda_T > 0, \quad \lambda_T \geq 0, \quad \lambda_m^k \geq 0. \quad (5.9)$$

Как и ранее, данная задача допускает условие нормировки, связывающее сопряженные переменные, и может иметь участки особого управления, аналогичные рассмотренным ранее.

Из условий трансверсальности (5.7) и дополняющей нежесткости (5.8) видно, что задача распадается на два случая:

1. конечная масса больше минимально допустимой:

$$m(t_k) > m_k^*, \quad \lambda_m^k = 0, \quad (5.10)$$

— в этом случае из-за неотрицательности правой части дифференциального уравнения для сопряженной переменной к массе (5.6) и ее равенства нулю в конечной точке следует, что на всей траектории она неположительна, а функция переключения всегда неотрицательна, значит, двигатель на траектории всегда включен:

$$\forall t \in [t_0; t_k] \quad p_m(t) \leq 0, \quad \Psi > 0 \quad \Rightarrow \quad \delta \equiv 1; \quad (5.11)$$

2. конечная масса равна минимально допустимой:

$$m(t_k) = m_k^*, \quad \lambda_m^k \geq 0, \quad (5.12)$$

— при этом оптимальное управление определяется по общему правилу (5.5), и траектория может содержать участки нулевой тяги.

У этих двух вариантов есть одна общая точка $m(t_k) = m_k^*, \lambda_m^k = 0$.

Можно проинтегрировать уравнение для сопряженной переменной к тяге и записать условие для минимума тяги:

$$\int_{t_0}^{t_k} \delta \eta \Psi dt = \lambda_T \geq 0. \quad (5.13)$$

Поскольку под интегралом стоит неотрицательная функция, то $\lambda_T > 0$, если на траектории есть хотя бы один активный участок.

Можно показать, что условия оптимальности задач для минимума времени перелета и минимума тяги связаны через условия нормировки, т. е. они приводят к одинаковым решениям, у которых по-разному нормированы значения сопряженных переменных. Тогда справедливо равенство

$$p^T(t_0) = G p^{t_0}(t_0), \quad (5.14)$$

где $p^T(t_0)$ и $p^{t_0}(t_0)$ — векторы начальных значений сопряженных параметров для задачи на минимум тяги и оптимального быстрогодействия, G — некоторая неотрицательная константа.

Справедливость (5.14) можно легко проверить простым сравнением соответствующих решений.

6. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГРАНИЦЫ ОБЛАСТИ СУЩЕСТВОВАНИЯ

Построение решений задачи на минимум тяги на интервале $c \in [c_{\min}; \infty]$ удобно начинать со случая бесконечной скорости истечения (нулевого массового расхода). Этому случаю соответствует перелет с постоянной массой КА $m(t) = m_0$, и, следовательно, соответствующее уравнение может быть исключено, а задача минимизации начальной тяги переписана относительно начального реактивного ускорения в следующем виде:

$$\begin{cases} a_0 \rightarrow \min, \\ \frac{dx}{dt} = v, \quad \frac{dv}{dt} = \Omega_x + \eta(x, t)a_0e\delta, \\ g_0(x(t_0), v(t_0), t_0) = 0, \quad g_k(x(t_k), v(t_k), t_k) = 0, \\ t_k - t_0 = \Delta t, \quad t_0^{\min} \leq t_0 \leq t_0^{\max}, \\ (e, \delta) \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}, \quad |e| = 1, \quad \delta \in [0; 1], \end{cases} \quad (6.1)$$

с функцией Понтрягина

$$H = \langle p_x, v \rangle + \langle p_v, \Omega_x \rangle + \delta \eta(x, t)a_0 \langle p_v, e \rangle \quad (6.2)$$

и терминантом (краевой функцией Лагранжа)

$$\begin{aligned} l = a_0 \lambda_a + \langle g_0(x(t_0), v(t_0), t_0), \lambda^0 \rangle + \langle g_k(x(t_k), v(t_k), t_k), \lambda^k \rangle + \\ + (t_k - t_0 - \Delta t) \lambda_t + (t_0^{\min} - t_0) \lambda_{t_0}^1 + (t_0 - t_0^{\max}) \lambda_{t_0}^2, \end{aligned} \quad (6.3)$$

где p_x, p_v — липшицевы функции (сопряженные переменные), $\lambda_a, \lambda_t, \lambda_{t_0}^1, \lambda_{t_0}^2$ — скалярные множители, λ^0, λ^k — векторы.

Понятно, что условия принципа максимума этой задачи являются частным случаем полученных ранее:

- условия оптимальности по управлению $(e, \delta) = \operatorname{argmax}_{(e', \delta') \in \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}} H(t, x(t), v(t), e', \delta')$:

$$e = \frac{p_v}{|p_v|}, \quad \delta = \begin{cases} 1, & |p_v| > 0, \\ \forall \delta' \in [0; 1], & |p_v| = 0, \end{cases} \quad (6.4)$$

- уравнения сопряженной системы:

$$\begin{cases} \frac{dp_x}{dt} = -\Omega_{xx} p_v - \delta a_0 |p_v| \frac{\partial \eta}{\partial x}, \\ \frac{dp_v}{dt} = -p_x, \\ \frac{dp_a}{dt} = -\delta \eta |p_v|, \end{cases} \quad (6.5)$$

- условия трансверсальности

$$\begin{cases} p_x(t_0) = \frac{\partial}{\partial x(t_0)} \langle g_0(x(t_0), v(t_0), t_0), \lambda^0 \rangle, & p_x(t_k) = -\frac{\partial}{\partial x(t_k)} \langle g_k(x(t_k), v(t_k), t_k), \lambda^k \rangle, \\ p_v(t_0) = \frac{\partial}{\partial v(t_0)} \langle g_0(x(t_0), v(t_0), t_0), \lambda^0 \rangle, & p_v(t_k) = -\frac{\partial}{\partial v(t_k)} \langle g_0(x(t_k), v(t_k), t_k), \lambda^k \rangle, \\ p_a(t_0) = \lambda_a, & p_a(t_k) = 0, \\ H(t_0) = -\frac{\partial}{\partial t_0} \langle g_0(x(t_0), v(t_0), t_0), \lambda^0 \rangle + \lambda_t + \lambda_{t_0}^1 - \lambda_{t_0}^2, & H(t_k) = \frac{\partial}{\partial t_k} \langle g_k(x(t_k), v(t_k), t_k), \lambda^k \rangle + \lambda_t, \end{cases} \quad (6.6)$$

- условия дополняющей нежесткости

$$(t_0^{\min} - t_0) \lambda_{t_0}^1 = 0, \quad (t_0 - t_0^{\max}) \lambda_{t_0}^2 = 0, \quad (6.7)$$

- условия нетривиальности и неотрицательности

$$|\lambda^0| + |\lambda^k| + |\lambda_t| + \lambda_{t_0}^1 + \lambda_{t_0}^2 + \lambda_a > 0, \quad \lambda_a \geq 0, \quad \lambda_{t_0}^1 \geq 0, \quad \lambda_{t_0}^2 \geq 0. \quad (6.8)$$

Очевидно, что оптимальная траектория для данной задачи не имеет участков особого управления. Действительно, если $p_v(t) \equiv 0$ на некотором конечном интервале $[\tau_0, \tau_k]$ ($t_0 \leq \tau_0 < \tau_k \leq t_k$), тогда из (6.5) следует, что и $p_x(t) \equiv 0$, $p_a(t) \equiv 0 \forall t \in [\tau_0, \tau_k]$, а значит, на всем интервале $t \in [t_0, t_k]$ $p_x(t) \equiv 0$, $p_v(t) \equiv 0$, $p_a(t) \equiv 0$, и тогда условия трансверсальности (6.6) при невырожденных краевых условиях допускают только тривиальное решение $\lambda^0 = 0$, $\lambda^k = 0$, $\lambda_t = 0$, $\lambda_{t_0}^1 = 0$, $\lambda_{t_0}^2 = 0$, $\lambda_a = 0$, что противоречит (6.8) и, следовательно, оптимальной траектории $\delta \equiv 1$.

Условие для минимума начального ускорения можно записать отдельно как

$$\int_{t_0}^{t_k} \eta |p_v| dt = \lambda_a \geq 0, \tag{6.9}$$

причем $\lambda_a > 0$ для любой активной траектории.

Для решения краевой задачи (6.1), (6.5)–(6.8) можно использовать метод продолжения по параметру с начальным приближением в виде ОМ-задачи (3.4). Для этого необходимо параметризовать правые части системы следующим образом:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = v, \\ \frac{dv}{dt} = \Omega_x + \left(\eta(x, t)\tau + \chi(x, t) \frac{a_0}{|p_v|} (1 - \tau) \right) p_v, \\ \frac{dp_x}{dt} = -\langle \Omega_{xx}, p_v \rangle - \frac{\partial \eta p_v^2}{\partial x} \tau - \frac{\partial \chi}{\partial x} a_0 |p_v| (1 - \tau), \\ \frac{dp_v}{dt} = -p_x, \end{cases} \quad \tau \in [1; 0], \tag{6.10}$$

где τ — параметр продолжения. Тогда при $\tau = 1$ уравнения (6.10) совпадают с уравнениями оптимального движения КА в ОМ-задаче (3.4), (3.8), а при $\tau = 0$ — с уравнениями оптимального движения для задачи на минимум реактивного ускорения (6.1), (6.5). Краевые условия для этих задач совпадают, за исключением условия на минимум ускорения. Для его удовлетворения и обеспечения непрерывности продолжения необходимо воспользоваться возможностью произвольной нормировки сопряженных переменных в задаче (6.1) и выбрать значение константы λ_a в условии (6.9) равным соответствующему интегралу на траектории ОМ-задачи:

$$\lambda_a = \int_{t_0}^{t_k} \eta |p_v^{OM}| dt, \tag{6.11}$$

где $|p_v^{OM}|$ — модуль сопряженной переменной к скорости на траектории ОМ-задачи. Это никак не противоречит условиям оптимальности, так как этот интеграл всегда неотрицателен, а на активной траектории положителен.

Вектор начального приближения в этой задаче, удовлетворяющий краевым условиям, может быть взят из решения ОМ-задачи и иметь вид

$$(p_x(t_0), p_v(t_0), a_0) = (p_x^{OM}(t_0), p_v^{OM}(t_0), 0). \tag{6.12}$$

Дифференциальные уравнения метода продолжения в данном случае имеют форму (4.7). Их интегрирование и дает решение задачи на минимум ускорения.

Для продолжения по скорости истечения $c \in [c_{\min}; \infty]$ и представления задачи минимизации начальной тяги как однопараметрического семейства используется аналогичная методика со скоростью истечения в качестве параметра продолжения, где вектор Φ из (4.2) составлен из краевых условий (5.1), (5.7), (5.13), а вектор неизвестных параметров имеет вид $(p_x(t_0), p_v(t_0), p_m(t_0), T_0)$. При этом понятно, что никакая дополнительная параметризация задачи не требуется, и для получения всех решений с конечной массой, принадлежащих отрезку $m(t_k) \in [m_k^*, m_0]$, достаточно проинтегрировать соответствующую систему (4.5) для задачи минимизации тяги при начальных

значениях вектора p в точке $c^{-1} = 0$, соответствующих задачи минимизации начального ускорения:

$$\begin{pmatrix} p_x^T(t_0) \\ p_v^T(t_0) \\ p_m^T(t_0) \\ T_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p_x^a(t_0) \\ p_v^a(t_0) \\ -\frac{a_0}{m_0} \int_{t_0}^{t_k} \eta |p_v^a| dt \\ m_0 a_0 \end{pmatrix}, \quad \lambda_T = \lambda_a, \quad (6.13)$$

где индексы T и a соответствуют задачам на минимум тяги и ускорения.

Как уже отмечалось ранее, на пути этого продолжения есть два характерных участка: без выхода на ограничение по конечной массе и с выходом на ограничение по конечной массе. В первом случае все решения являются гладкими и не содержат пассивных участков, во втором — могут содержать пассивные участки, и правые части внутренней задачи Коши метода продолжения (5.1), (5.6) будут претерпевать разрыв в моменты включения и выключения двигателя, что приводит к необходимости использования сглаженной формы функции тяги (4.16); в остальном продолжение на этих участках ничем не отличается.

7. ПЕРЕХОД К ЗАДАЧЕ С ЗАДАНЫМИ ЗНАЧЕНИЯМИ ПАРАМЕТРОВ

Задача с минимальной тягой, помимо самостоятельного интереса и определения границы области существования, дает хорошее начальное приближение для задачи с заданным значением величины тяги.

После получения зависимости минимальной тяги от скорости истечения $T_{\min}(c)$, $c \in [c_{\min}, \infty]$, можно организовать переход к случаю с большей тягой, используя метод продолжения — продолжая по ее величине до заданного значения $T \in [T_{\min}(c), T^*]$. Такой переход может быть реализован только для сглаженного управления (4.16), и каждая точка такой кривой продолжения будет решением ОТ-задачи для текущей величины тяги, с учетом погрешностей, вносимых сглаживанием.

Уравнения, описывающие процесс продолжения по величине тяги, состоят из:

- внутренней задачи Коши — сглаженной дифференциальной системы ОТ-задачи (3.13), (4.16) и присоединенных к ней уравнений сопряженной системы (3.17);
- внешней задачи Коши — соответствующей случаю (4.6), где система краевых условий составлена из исходных условий ОТ-задачи (3.13) и условий трансверсальности принципа максимума (3.18), а сама система дифференциальных уравнений внешней задачи Коши получается ее дифференцированием; в начальной точке вектор неизвестных соответствует случаю минимальной тяги.

Среди всех условий, входящих в краевую задачу, отдельно необходимо остановиться на условии $p_m(t_k) = \lambda_m^k \geq 0$ из (3.18), так как на решении ОТ-задачи оно может быть выполнено в виде равенства только в случае работы двигателя на всей траектории перелета, что соответствует задаче с минимальной тягой. А при продолжении по величине тяги необходимо обеспечить возможность появления пассивных участков, что может быть, как следует из вида оптимального управления (3.16), только при $\lambda_m^k > 0$. Следовательно, для организации непрерывного продолжения по тяге необходимо обеспечить увеличение λ_m^k вместе с ростом тяги. Поскольку в ОТ-задаче еще не было выбрано условие нормировки, это можно сделать достаточно произвольным образом, например, положив его равным текущему изменению тяги $\lambda_m^k = T_0 - T_{\min}(c)$, или в нормированном к 1 случае $\lambda_m^k = (T_0 - T_{\min}(c))/(T^* - T_{\min}(c))$. Это обеспечит непрерывный сход с решения на минимум тяги для ОТ-задачи.

8. ЧИСЛЕННЫЕ ПРИМЕРЫ

Элементарной единицей всех миссий в рамках Солнечной системы является прямой межпланетный перелет. Рассмотрим несколько таких перелетов: Земля—Марс и Земля—Меркурий. В качестве инерциальной декартовой системы координат в расчетах использовалась гелиоцентрическая эклиптическая система J2000. Движение КА рассматривалось в ньютоновском гравитационном поле, силовая функция имела вид: $\Omega = \mu/r$, где μ — гравитационный параметр центрального тела,

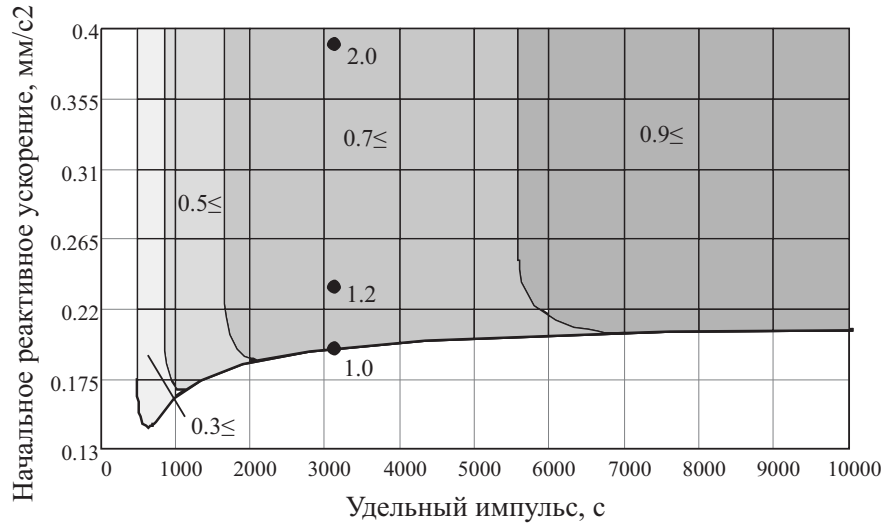


Рис. 1. Перелет Земля—Марс. Область существования решений.

$r = |x|$ — удаление КА от центрального тела. Для определения движения планет использовалось готовое эфемеридное обеспечение JPL DE405/LE405.

Краевые условия, записанные ранее в общем виде, соответствуют случаю равенства координат и скоростей КА и планет в начальный и конечный моменты. Они имеют следующий вид:

$$\begin{cases} x(t_0) - x_0(t_0) = 0, & x(t_k) - x_k(t_k) = 0, \\ v(t_0) - v_0(t_0) = 0, & v(t_k) - v_k(t_k) = 0, \\ m(t_0) - m_0 = 0, & m_k^* - m(t_k) \leq 0, \end{cases} \quad (8.1)$$

где (x_i, v_i) — положение и скорость начальной ($i = 0$) и конечной ($i = k$) точки (планеты).

В этом случае условия трансверсальности по дате старта (для $t_0^{\min} < t_0 < t_0^{\max}$) при фиксированном времени перелета имеют следующий вид:

- для ОМ-задачи

$$\chi(x_0, t_0) \langle p_v(t_0), p_v(t_0) \rangle - \chi(x_k, t_k) \langle p_v(t_k), p_v(t_k) \rangle = 0; \quad (8.2)$$

- для ОТ-задачи (на минимум тяги и максимум конечной массы)

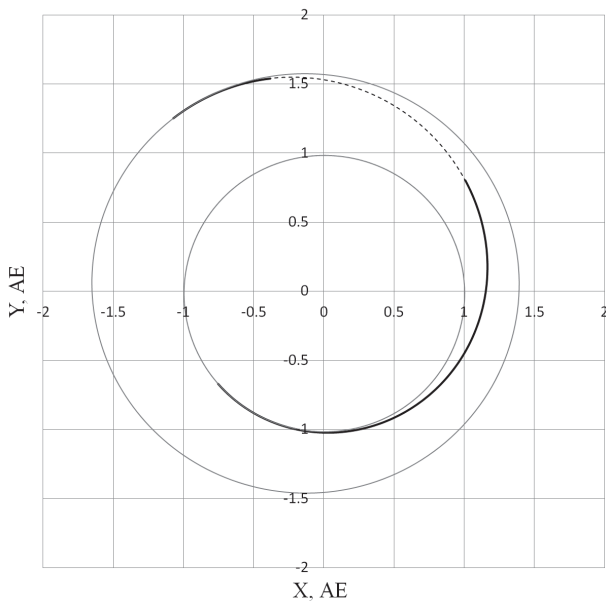
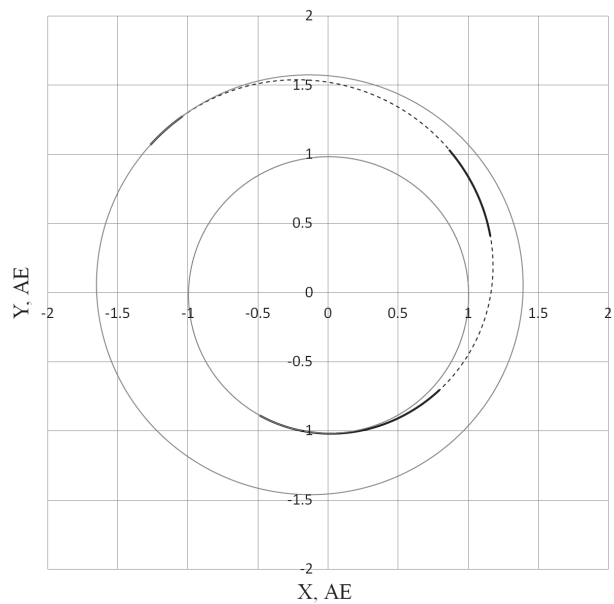
$$\delta(t_0) \eta(x_0, t_0) T_0 \Psi(t_0) - \delta(t_k) \eta(x_k, t_k) T_0 \Psi(t_k) = 0. \quad (8.3)$$

При этом в приведенных условиях не учитывается тот факт, что для КА и планет используются, вообще говоря, разные модели движения. Так, движение КА рассматривается в рамках ограниченной задачи двух тел, в то время как движение планет, определяемое по эфемеридам JPL DE405/LE405, учитывает значительно больше факторов, таких как наличие других планет и тел солнечной системы, релятивистские эффекты и т. д. Однако в большинстве случаев такое упрощение является несущественным.

Для простоты расчетов реактивная мощность, тяга и скорость истечения считаются постоянными ($\chi(x, t) = 1, \eta(x, t) = 1, w(x, t) = 1$).

Пример 1. Перелет Земля—Марс с оптимальной датой отлета от Земли, выбираемой из синодического периода 23.04.2019–11.06.2021 и временем перелета 380 суток.

На рисунке 1 показана зависимость минимального начального реактивного ускорения от скорости истечения для этой задачи. Как отмечалось ранее, область существования решений для ограниченной конечной массы имеет предельные случаи, соответствующие бесконечному удельному импульсу и бесконечной тяге, что можно видеть на рис. 1. Участок монотонного убывания начального реактивного ускорения при уменьшении удельного импульса соответствует отсутствию ограничения на конечную массу, он построен вплоть до значения относительной конечной массы 0,3, на всей этой линии оптимальные решения не имеют пассивных участков на траектории перелета. От нее отходят линии, соответствующие случаям выхода решения с минимальной тягой на

Рис. 2. Перелет Земля—Марс. $T_0 = 1,2T_{\min}$ Рис. 3. Перелет Земля—Марс. $T_0 = 2T_{\min}$

ограничение по конечной массе: на каждой из них она остается постоянной и равна на приведенном графике 0,9, 0,7, 0,5 и 0,3 от начальной массы. При этом на траектории есть пассивные участки, для получения этих решений в расчетах использовался параметр сглаживания, равный 10^{-5} . Эти линии с минимальной тягой ограничивают области соответствующих решений (на графике они выделены заливкой).

Таким образом, все возможные решения ОТ-задачи данного перелета с продолжительностью меньше или равной рассматриваемой и угловой дальностью из отрезка $[0; 2\pi]$ находятся над этими линиями, и область над графиком является областью существования решений. Как видно на рисунке 1, она ограничена только снизу, сверху нет ограничения ни по удельному импульсу, ни по тяге. В частности, для рассматриваемой задачи минимальное начальное реактивное ускорение при бесконечном удельном импульсе (постоянной массе КА) равняется $0,21255 \text{ мм/с}^2$. Функционал ОМ-задачи равен $0,31912 \text{ м}^2/\text{с}^3$.

Чтобы проследить эволюцию управления при переходе с границы области существования в ее внутреннюю часть, на рис. 2 и 3 приведены проекции траекторий на плоскость XY решений с начальным реактивным ускорением больше минимального в 1,2 и 2 раза соответственно и удельным импульсом 3100 сек. (что соответствует следующим значениям начального реактивного ускорения: $0,1951 \text{ мм/с}^2$, $0,2342 \text{ мм/с}^2$, $0,3903 \text{ мм/с}^2$). Эти решения отмечены на рис. 1 точками. Конечная масса КА для случая минимального реактивного ускорения равна 0,7892 от начальной (в этом случае двигатель работает постоянно); при увеличении ускорения в 1,2 раза она увеличивается до 0,8264, а в 2 раза — до 0,829.

Видно, что приведенные решения имеют в начале и конце активные участки, что говорит о наличии оптимальной даты старта для такого времени перелета при заданных параметрах, что в общем случае не обязательно, так как при увеличении тяги оптимальнее может оказаться не сдвигать дату старта, а уменьшать общее время перелета, тогда в начале или конце будет образовываться пассивный участок (такое решение будет оптимально как по дате старта, так и по времени перелета). Оптимальные даты старта для случаев 1, 1,2, 2 соответственно равны: 14.04.2020, 27.04.2020, 13.05.2020.

Пример 2. Перелет Земля—Меркурий с датой отлета от Земли 19.03.2020 и временем перелета 2140 суток, 13 полных витков вокруг Солнца. Такие продолжительные перелеты особенно ярко показывают многоэкстремальный характер решений подобных задач. Очевидно, что могут существовать решения, отличающиеся числом целых витков, и заранее неизвестно, какое из них лучше.

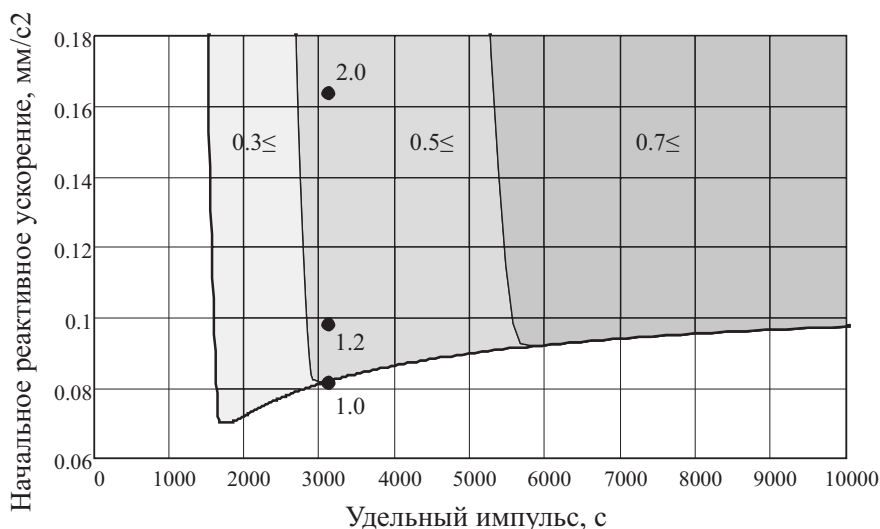
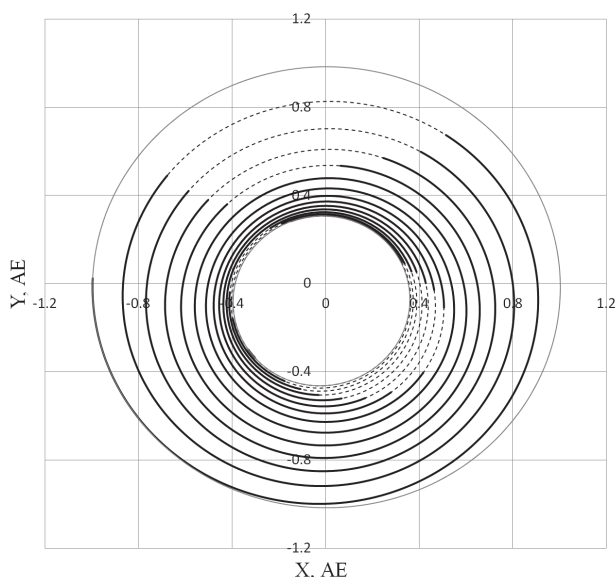
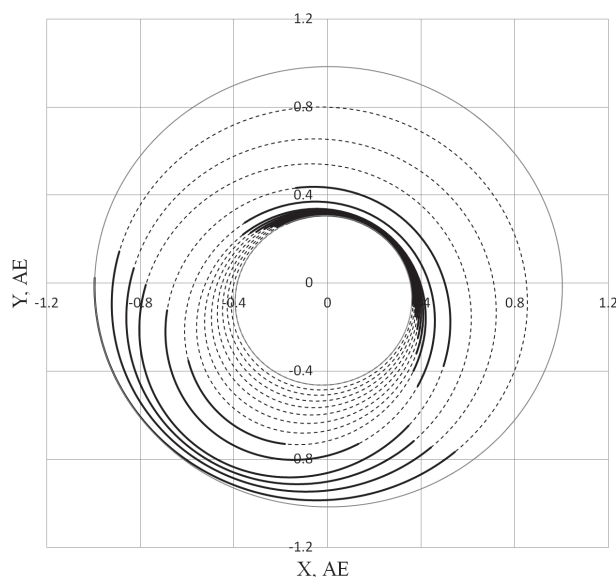


Рис. 4. Перелет Земля—Меркурий. Область существования решений.

Рис. 5. Перелет Земля—Меркурий. $T_0 = 1,2T_{\min}$ Рис. 6. Перелет Земля—Меркурий. $T_0 = 2T_{\min}$

Решения с тягой больше минимальной были получены с помощью продолжения по величине тяги с параметром сглаживания 10^{-5} .

На рис. 4 показана область существования решений, аналогичная приведенной ранее. Как видно, ее структура схожа с предыдущей, однако сход «ветвей» с постоянной конечной массой более резкий. В этом случае минимальное начальное реактивное ускорение при бесконечном удельном импульсе (постоянной массе КА) равняется $0,10711 \text{ мм/с}^2$, а функционал ОМ-задачи равен $0,51608 \text{ м}^2/\text{с}^3$.

Так же, как и в случае Марса, для этого перелета интересно проследить эволюцию управления, вида траектории и изменение относительной конечной массы при увеличении тяги. На рис. 5 и 6 приведены вид проекции траектории на плоскость XY при увеличении тяги до 1,2 и 2 от минимальной с удельным импульсом 3100 сек. На начальной траектории (с минимальной тягой) начальное реактивное ускорение равно $0,082 \text{ мм/с}^2$, а относительная конечная масса КА — $0,5014$, при увеличении тяги в 1,2 раза она составила $0,5311$, а при росте тяги в 2 раза — $0,5465$.

По рис. 5 и 6 можно видеть, что с увеличением тяги перестройка решения происходит таким образом, что в конце образуется пассивный участок, в связи с чем сокращается время перелета и определяется ее оптимальное значение. Также на рис. 6 прослеживается очевидная локализация

активных участков в районах апоцентра и перицентра траектории перелета, что иллюстрирует эволюцию в сторону импульсного решения с их приложением в этих точках при стремлении тяги к бесконечности.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Бэттин Р.* Наведение в космосе. — М.: Машиностроение, 1966.
2. *Габасов Р., Кириллова Ф. М.* Методы оптимального управления// Итоги науки и техн. Современ. пробл. мат. — 1976. — 6. — С. 133–259.
3. *Гавурин М. К.* Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итеративных методов// Изв. вузов. Сер. Мат. — 1958. — 5. — С. 18–31.
4. *Галеев Э. М., Зеликин М. И., Конягин С. В., Магарил-Ильяев Г. Г., Осмоловский Н. П., Протасов В. Ю., Тихомиров В. М., Фурсиков А. В.* Оптимальное управление. — М.: МЦНМО, 2008.
5. *Григорьев И. С., Григорьев К. Г.* Об использовании решений задач оптимизации траекторий КА импульсной постановки при решении задач оптимального управления траекториями КА с реактивным двигателем ограниченной тяги I// Космич. исслед. — 2007. — 45, № 4. — С. 358–366.
6. *Григорьев И. С., Григорьев К. Г.* Об использовании решений задач оптимизации траекторий КА импульсной постановки при решении задач оптимального управления траекториями КА с реактивным двигателем ограниченной тяги II// Космич. исслед. — 2007. — 45, № 6. — С. 553–563.
7. *Григорьев И. С., Григорьев К. Г., Петрикова Ю. Д.* О наискорейших маневрах космического аппарата с реактивным двигателем большой ограниченной тяги в гравитационном поле в вакууме// Космич. исслед. — 2000. — 38, № 3. — С. 171–192.
8. *Григорьев К. Г.* О маневрах космического аппарата при минимальных затратах массы и ограниченном времени// Космич. исслед. — 1994. — 32, № 2. — С. 45–60.
9. *Гродзовский Г. Л., Иванов Ю. Н., Токарев В. В.* Механика космического полета с малой тягой. — М.: Наука, 1969.
10. *Давиденко Д. Ф.* Об одном новом методе численного решения систем нелинейных уравнений// Докл. АН СССР. — 1953. — 88, № 4. — С. 601–602.
11. *Захаров Ю. А.* Проектирование межорбитальных космических аппаратов. Выбор траекторий и проектных параметров. — М.: Машиностроение, 1984.
12. *Иванюхин А. В., Петухов В. Г.* Задача минимизации тяги и ее приложения// Космич. исслед. — 2015. — 53, № 4. — С. 320–331.
13. *Красносельский М. А., Вайникко Г. М., Забрейко П. П., Рунтцкий Я. Б., Стеценко В. Я.* Приближенное решение операторных уравнений. — М.: Наука, 1969.
14. *Ли Э. Б., Маркус Л.* Основы теории оптимального управления. — М.: Наука, 1972.
15. *Лоуден Д. Ф.* Оптимальные траектории для космической навигации. — М.: Мир, 1966.
16. *Ортега Дж., Рейнболдт В.* Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. — М.: Мир, 1975.
17. *Петухов В. Г.* Оптимизация межпланетных траекторий космических аппаратов с идеально-регулируемым двигателем методом продолжения// Космич. исслед. — 2008. — 46, № 3. — С. 224–237.
18. *Петухов В. Г.* Метод продолжения для оптимизации межпланетных траекторий с малой тягой// Космич. исслед. — 2012. — 50, № 3. — С. 258–270.
19. *Понтрягин Л. С., Болтянский В. Г., Гамкрелидзе Р. В., Мищенко Е. Ф.* Математическая теория оптимальных процессов. — М.: Наука, 1969.
20. *Суханов А. А.* Астродинамика. — М.: ИКИ РАН, 2010.
21. *Филиппов А. Ф.* О некоторых вопросах теории оптимального регулирования// Вестн. МГУ. — 1959. — 2. — С. 25–32.
22. *Хартман Ф.* Обыкновенные дифференциальные уравнения. — М.: Мир, 1970.
23. *Холоднюк М., Клич А., Кубичек М., Марек М.* Методы анализа нелинейных динамических моделей. — М.: Мир, 1991.
24. *Шалашин В. И., Кузнецов Е. Б.* Метод продолжения решения по параметру и наилучшая параметризация. — М.: Эдиториал УРСС, 1999.
25. *Caillaud J. B., Gergaud J., Noailles J.* 3D geosynchronous transfer of a satellite: continuation on the thrust// J. Optim. Theory Appl. — 2003. — 118, № 3. — С. 541–565.
26. *Cesari L.* Optimization — theory and applications. Problems with ordinary differential equations. — New York—Heidelberg—Berlin: Springer, 1983.
27. *Gergaud J., Haberkorn T.* Homotopy method for minimum consumption orbit transfer problem// ESAIM Control Optim. Calc. Var. — 2006. — 12, № 2. — С. 294–310.

28. *Irving J. H.* Low thrust flight: variable exhaust velocity in gravitational fields// *Space Technol.* — 1959. — 10, № 4. — С. 10-01–10-54.
29. *Kopp R. E., Moyer H. G.* Necessary conditions for singular extremals// *AIAA J.* — 1965. — 3, № 8. — С. 1439–1444.
30. *Lyness J. N.* Numerical algorithms based on the theory of complex variables// *Proc. ACM 22nd Nat. Conf.*, Thompson Book Co. — 1967. — С. 124–134.
31. *Neustadt L. W.* A general theory of minimum-fuel space trajectories// *J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. A: Control.* — 1965. — 3, № 2. — С. 317–356.
32. *Oberle H. J., Taubert K.* Existence and multiple solutions of the minimum-fuel orbit transfer problem// *J. Optim. Theory Appl.* — 1997. — 95, № 2. — С. 243–262.
33. *Squire W., Trapp G.* Using complex variables to estimate derivatives of real functions// *SIAM Rev.* — 1998. — 40. — С. 110–112.

А. В. Иванюхин

Государственный научно-исследовательский институт прикладной механики и электродинамики Московского авиационного института (государственного технического университета), Москва
 Российский университет дружбы народов, Москва
 E-mail: ivanyukhin.a@yandex.ru

UDC 629.78:517.977

Domain of Existence of Solutions in the Optimal Control Problem for a Spacecraft with Limited Thrust

© 2016 A. V. Ivanyukhin

Abstract. We consider several most common optimal control problems for a low-thrust spacecraft. We investigate the existence of solutions for these problems. In the model with limited thrust, we use the numerical approach for construction of the domain of existence. As examples, we consider interplanetary transfers Earth–Mars and Earth–Mercury.

REFERENCES

1. R. Bettin, *Navedenie v kosmose* [Guidance in Space], Mashinostroenie, Moscow, 1966.
2. R. Gabasov and F. M. Kirillova, “Metody optimal’nogo upravleniya” [Methods of optimal control], *Itogi nauki i tekhn. Sovrem. probl. mat.* [Totals Sci. Tech. Contemp. Probl. Math.], 1976, **6**, 133–259.
3. M. K. Gavurin, “Nelineynye funktsional’nye uravneniya i nepreryvnye analogi iterativnykh metodov” [Nonlinear functional equations and continuous analogs of iterative methods], *Izv. vuzov. Ser. Mat.* [Bull. Higher Edu. Inst. Ser. Math.], 1958, **5**, 18–31.
4. E. M. Galeev, M. I. Zelikin, S. V. Konyagin, G. G. Magaril-Il’yaev, N. P. Osmolovskiy, V. Yu. Protasov, V. M. Tikhomirov, and A. V. Fursikov, *Optimal’noe upravlenie* [Optimal Control], MTsNMO, Moscow, 2008.
5. I. S. Grigor’ev and K. G. Grigor’ev, “Ob ispol’zovanii resheniy zadach optimizatsii traektoriy KA impul’snoy postanovki pri reshenii zadach optimal’nogo upravleniya traektoriyami KA s reaktivnym dvigatelem ogranichennoy tyagi. I” [On application of solutions of spacecraft trajectory optimization problems in impulse setting to optimal control problems for a limited thrust spacecraft. I], *Kosmich. issled.* [Space Investig.], 2007, **45**, No. 4, 358–366.
6. I. S. Grigor’ev and K. G. Grigor’ev, “Ob ispol’zovanii resheniy zadach optimizatsii traektoriy KA impul’snoy postanovki pri reshenii zadach optimal’nogo upravleniya traektoriyami KA s reaktivnym dvigatelem ogranichennoy tyagi II” [On application of solutions of spacecraft trajectory optimization problems in impulse setting to optimal control problems for a limited thrust spacecraft. II], *Kosmich. issled.* [Space Investig.], 2007, **45**, No. 6, 553–563.

7. I. S. Grigor'ev, K. G. Grigor'ev, and Yu. D. Petrikova, "O naskoreyshikh manevrakh kosmicheskogo apparata s reaktivnym dvigatelem bol'shoy ogranichennoy tyagi v gravitatsionnom pole v vakuume" [On fastest maneuvers of a spacecraft with large limited thrust jet in a gravitational field in vacuum], *Kosmich. issled.* [Space Investig.], 2000, **38**, No. 3, 171–192.
8. K. G. Grigor'ev, "O manevrakh kosmicheskogo apparata pri minimal'nykh zatratakh massy i ogranichennom vremeni" [On maneuvers of a spacecraft with minimal mass consumption in a limited time], *Kosmich. issled.* [Space Investig.], 1994, **32**, No. 2, 45–60.
9. G. L. Grodzovskiy, Yu. N. Ivanov, and V. V. Tokarev, *Mekhanika kosmicheskogo poleta s maloy tyagoy* [Mechanics of Space Flight with Low Thrust], Nauka, Moscow, 1969.
10. D. F. Davidenko, "Ob odnom novom metode chislennogo resheniya sistem nelineynykh uravneniy" [On one new method of numerical solution for systems of nonlinear equations], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1953, **88**, No. 4, 601–602.
11. Yu. A. Zakharov, *Proektirovanie mezhorbital'nykh kosmicheskikh apparatov. Vychor traektoriy i proektnykh parametrov* [Designing Interorbital Spacecraft. Choosing Trajectories and Design Parameters], Mashinostroenie, Moscow, 1984.
12. A. V. Ivanyukhin and V. G. Petukhov, "Zadacha minimizatsii tyagi i ee prilozheniya" [Thrust minimization problem and its applications], *Kosmich. issled.* [Space Investig.], 2015, **53**, No. 4, 320–331.
13. M. A. Krasnosel'skiy, G. M. Vaynikko, P. P. Zabreyko, Ya. B. Rutitskiy, and V. Ya. Stetsenko, *Priblizhennoe reshenie operatornykh uravneniy* [Approximate Solution of Operator Equations], Nauka, Moscow, 1969.
14. E. B. Lee and L. Markus, *Osnovy teorii optimal'nogo upravleniya* [Foundations of Optimal Control Theory], Nauka, Moscow, 1972.
15. D. F. Lawden, *Optimal'nye traektorii dlya kosmicheskoy navigatsii* [Optimal Trajectories for Space Navigation], Mir, Moscow, 1966.
16. J. Ortega and W. Rheinboldt, *Iteratsionnye metody resheniya nelineynykh sistem uravneniy so mnogimi neizvestnymi* [Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables], Mir, Moscow, 1975.
17. V. G. Petukhov, "Optimizatsiya mezhplanetnykh traektoriy kosmicheskikh apparatov s ideal'no-reguliruemym dvigatelem metodom prodolzheniya" [Optimization of interplanetary trajectories of spacecraft with perfectly regulated jet by means of continuation method], *Kosmich. issled.* [Space Investig.], 2008, **46**, No. 3, 224–237.
18. V. G. Petukhov, "Metod prodolzheniya dlya optimizatsii mezhplanetnykh traektoriy s maloy tyagoy" [Continuation method for optimization of interplanetary trajectories with low thrust], *Kosmich. issled.* [Space Investig.], 2012, **50**, No. 3, 258–270.
19. L. S. Pontryagin, V. G. Boltyanskiy, R. V. Gamkrelidze, and E. F. Mishchenko, *Matematicheskaya teoriya optimal'nykh protsessov* [Mathematical Theory of Optimal Processes], Nauka, Moscow, 1969.
20. A. A. Sukhanov, *Astrodinamika* [Astrodynamics], IKI RAN, Moscow, 2010.
21. A. F. Filippov, "O nekotorykh voprosakh teorii optimal'nogo regulirovaniya" [On some problems of optimal regulation theory], *Vestn. MGU* [Bull. MSU], 1959, **2**, 25–32.
22. Ph. Hartman, *Obyknovennyye differentsial'nye uravneniya* [Ordinary Differential Equations], Mir, Moscow, 1970.
23. M. Kholodniok, A. Klich, M. Kubichek, and M. Marek, *Metody analiza nelineynykh dinamicheskikh modeley* [Methods of Analysis for Nonlinear Dynamical Models], Mir, Moscow, 1991.
24. V. I. Shalashilin and E. B. Kuznetsov, *Metod prodolzheniya resheniya po parametru i nailuchshaya parametrizatsiya* [Method of continuation of solutions with respect to parameter and optimal optimization], Editorial URSS, Moscow, 1999.
25. J. B. Caillau, J. Gergaud, and J. Noailles, "3D geosynchronous transfer of a satellite: continuation on the thrust," *J. Optim. Theory Appl.*, 2003, **118**, No. 3, 541–565.
26. L. Cesari, *Optimization — theory and applications. Problems with ordinary differential equations*, Springer, New York—Heidelberg—Berlin, 1983.
27. J. Gergaud and T. Haberkorn, "Homotopy method for minimum consumption orbit transfer problem," *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, 2006, **12**, No. 2, 294–310.
28. J. H. Irving, "Low thrust flight: variable exhaust velocity in gravitational fields," *Space Technol.*, 1959, **10**, No. 4, 10-01–10-54.
29. R. E. Kopp and H. G. Moyer, "Necessary conditions for singular extremals," *AIAA J.*, 1965, **3**, No. 8, 1439–1444.
30. J. N. Lyness, "Numerical algorithms based on the theory of complex variables," Proc. ACM 22nd Nat. Conf., Thompson Book Co., 1967, 124–134.

31. L. W. Neustadt, "A general theory of minimum-fuel space trajectories," *J. Soc. Indust. Appl. Math. Ser. A: Control*, 1965, **3**, No. 2, 317–356.
32. H. J. Oberle and K. Taubert, "Existence and multiple solutions of the minimum-fuel orbit transfer problem," *J. Optim. Theory Appl.*, 1997, **95**, No. 2, 243–262.
33. W. Squire and G. Trapp, "Using complex variables to estimate derivatives of real functions," *SIAM Rev.*, 1998, **40**, 110–112.

A. V. Ivanyukhin

State Research Institute of Apply Mechanics and Electrodynamics of Moscow Aviation Institute
(National Research University), Moscow, Russia

RUDN University, Moscow, Russia

E-mail: ivanyukhin.a@yandex.ru

СЛЕДЫ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

© 2016 г. **В. А. ПОПОВ**

Аннотация. В работе рассматривается дифференциально-разностное уравнение с вырождением в ограниченной области $Q \subset \mathbb{R}^n$ в случае дифференциально-разностного оператора, который не может быть представлен в виде композиции сильно эллиптического дифференциального оператора и вырожденного разностного оператора, а содержит несколько вырожденных разностных операторов, соответствующих операторам дифференцирования. Обобщенные решения таких уравнений могут не принадлежать даже пространству Соболева $W_2^1(Q)$.

Ранее при выполнении определенных условий на разностные операторы и операторы дифференцирования были получены априорные оценки, с помощью которых удалось доказать, что ортогональная проекция обобщенного решения на образ разностного оператора уже обладает определенной гладкостью, но не во всей области, а в некоторых подобластях $Q_r \subset Q (\bigcup_r \overline{Q_r} = \overline{Q})$.

В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия в алгебраической форме существования следов на некоторых частях границ подобластей Q_r .

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|-----|
| Введение | 124 |
| 1. Геометрические построения и разностные операторы | 126 |
| 2. Априорные оценки и фридрихово расширение | 131 |
| 3. Обобщенные решения | 134 |
| 4. Следы обобщенных решений эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением | 134 |
| Список литературы | 137 |

ВВЕДЕНИЕ

Интерес к эллиптическим уравнениям с вырождением возник после работы М. В. Келдыша [6]. Эта статья стала отправной точкой для исследований многих математиков и сыграла важную роль в развитии теории вырождающихся дифференциальных уравнений. В дальнейшем подобными задачами занимались многие математики: О. А. Олейник и Е. В. Радкевич [11], М. И. Вишик [2], Г. Фикера [19] и многие другие.

В своей работе [6] М. В. Келдыш впервые показал, что при определенных условиях часть границы (многообразии вырождения) свободна от краевых условий. Подобное явление возникает и в случае эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением. Но стоит отметить, что в отличие от эллиптических уравнений с вырождением, причиной такого явления служит не вырождение коэффициентов дифференциального оператора на многообразии вырождения, а присутствие в дифференциально-разностном операторе разностного оператора с вырождением, которое носит нелокальный характер.

Основы общей теории функционально-дифференциальных уравнений были построены в работах А. Л. Скубачевского и его учеников (см. [4, 10, 14, 15, 18] и имеющуюся там библиографию).

Работа выполнена при поддержке Министерства образования и науки РФ, задание 1.1974.2014/К «Краевые задачи для функционально-дифференциальных уравнений с частными производными».

Обзор последних результатов посвященных краевым задачам для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложениям можно найти в работе [17]. Кроме того, в указанной работе приведен целый ряд нерешенных задач в данной области.

В настоящей работе получены необходимые и достаточные условия корректного определения следов обобщенных решений эллиптических дифференциальных уравнений с вырождением. При этом дифференциально-разностный оператор содержит несколько вырожденных разностных операторов, в отличие от работ А. Л. Скубачевского [16, 22], в которых дифференциально-разностный оператор порядка $2m$ представляется в виде композиции сильно эллиптического дифференциального оператора и вырожденного разностного оператора, т. е. в виде $LRu = LRu$, где L — сильно эллиптический дифференциальный оператор, а R — разностный оператор, эрмитова часть которого является неотрицательным вырожденным оператором. Интерес к таким операторам вызван появлением ряда принципиально новых свойств даже по сравнению с сильно эллиптическими дифференциально-разностными операторами (см. [21]), а также приложениями полученных результатов к некоторым нелокальным эллиптическим задачам, возникающим в теории плазмы (см. [1]). В частности, А. Л. Скубачевским было показано, что нелокальные эллиптические задачи, связывающие значения неизвестной функции на различных компактах, можно свести к эллиптическим дифференциально-разностным уравнениям с вырождением.

В большинстве работ разностные операторы рассматриваются в пространстве сеточных функций, т. е. функций, определенных на конечном или счетном множестве точек. В настоящей работе мы будем опираться на теорию разностных операторов, действующих в пространстве $L_2(Q)$, которая построена в работах А. Л. Скубачевского.

Мы будем рассматривать уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} R_{ij}u = f(x) \quad (x \in Q \subset \mathbb{R}^n), \quad (1)$$

где $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей ∂Q , R_{ij} — разностные операторы, действующие в пространстве $L_2(Q)$ и определенные по формуле

$$R_{ij}u(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_{ijh}u(x+h),$$

\mathcal{M} — конечное множество векторов $h \in \mathbb{R}^n$ с целочисленными координатами, $a_{ijh} \in \mathbb{C}$. Мы будем рассматривать первую краевую задачу для уравнения (1). Так как сдвиг на вектор h может отобразить точки $x \in Q$ в точки $x \in \mathbb{R}^n \setminus Q$, то мы должны задать значения искомой функции не только на границе ∂Q , но и всюду в $\mathbb{R}^n \setminus Q$. Таким образом, мы будем рассматривать однородное краевое условие

$$u(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus Q). \quad (2)$$

В работах А. Л. Скубачевского было показано, что свойства разностных операторов можно охарактеризовать с помощью свойств некоторых матриц, элементами которых являются коэффициенты разностных операторов и нули. Данный подход основан на разбиении области Q на подобласти, которое порождается сдвигами разностного оператора границы ∂Q внутрь области Q .

Настоящая работа состоит из четырех разделов. В разделе 1 приведены необходимые результаты относительно геометрических построений и свойств разностных операторов, которые были получены в работах А. Л. Скубачевского [16, 22]. В разделе 2 рассмотрены априорные оценки и введено фридрихово расширение рассматриваемого дифференциально-разностного оператора. Доказательство оценок и построение фридрихова расширения, а также исследование его спектральных свойств можно найти в нашей работе [12]. В разделе 3 введено определение обобщенного решения рассматриваемой первой краевой задачи для эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением, а также даны теоремы о локальной гладкости и о гладкости вблизи границы, которые были получены нами в работах [13, 20]. Основным результатом работы содержится в разделе 4. Доказаны необходимые и достаточные условия существования следов обобщенных решений на частях границы области.

1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОСТРОЕНИЯ И РАЗНОСТНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В данном разделе приведем результаты, посвященные геометрическим построениям и свойствам разностных операторов, которые были получены А. Л. Скубачевским. Доказательства приведенных ниже утверждений можно найти в работах [16, 22].

1.1. Определение разбиения области и подобластей. Мы будем рассматривать ограниченную область Q , которая удовлетворяет следующему условию.

Условие 1.1. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial Q = \bigcup_i \bar{X}_i$ ($i = 1, \dots, N_1$), где X_i — открытые связные в топологии ∂Q $(n-1)$ -мерные многообразия класса C^∞ , $n \geq 2$.

Пусть, кроме того, в некоторой окрестности каждой точки $x^0 \in K = \partial Q \setminus \bigcup_i X_i$ область Q диффеоморфна n -мерному углу раствора меньше 2π и больше 0.

В частности, $Q \subset \mathbb{R}^n$ может быть ограниченной областью с границей $\partial Q \in C^\infty$, а также цилиндром $(0, d) \times G$ или прямоугольником, где $G \subset \mathbb{R}^{n-1}$ — ограниченная область (с границей $\partial G \in C^\infty$, если $n \geq 3$).

Пусть $M \subset \mathbb{R}^n$ — множество, состоящее из конечного числа векторов h с целочисленными координатами. Обозначим через M аддитивную абелеву группу, порожденную множеством M , а через Q_r — открытые связные компоненты множества

$$Q \setminus \bigcup_{h \in M} (\partial Q + h).$$

Определение 1.1. Множества Q_r мы будем называть *подобластями*, а совокупность \mathcal{R} всех возможных подобластей Q_r ($r = 1, 2, \dots$) назовем *разбиением области Q* .

Легко убедиться, что множество \mathcal{R} не более чем счетно.

Лемма 1.1. $\bigcup_r \partial Q_r = \left(\bigcup_{h \in M} (\partial Q + h) \right) \cap \bar{Q}.$

Лемма 1.2.

1. $\bigcup_r \bar{Q}_r = \bar{Q}.$

2. Для любых Q_{r_1} и $h \in M$ либо найдется такое Q_{r_2} , что $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$, либо $Q_{r_1} + h \subset \mathbb{R}^n \setminus \bar{Q}.$

Следуя теории А. Л. Скубачевского, введем понятие классов подобластей.

Определение 1.2. Мы будем считать, что подобласти $Q_{r_1}, Q_{r_2} \in \mathcal{R}$ принадлежат одному и тому же классу, если существует вектор $h \in M$, для которого $Q_{r_2} = Q_{r_1} + h$. Будем обозначать подобласти Q_r через Q_{sl} , где s — номер класса ($s = 1, 2, \dots$), а l — порядковый номер данной подобласти в s -м классе.

Очевидно, каждый класс состоит из конечного числа $N = N(s)$ подобластей Q_{sl} и

$$N(s) \leq ([\text{diam} Q] + 1)^n.$$

Пример 1.1. Пусть $Q = (0, 2) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$, $M = \{(1, 0)\}$. Тогда разбиение \mathcal{R} состоит из одного класса подобластей: $Q_{11} = (0, 1) \times (0, 1)$, $Q_{12} = (1, 2) \times (0, 1)$ (см. рис. 1).

Пример 1.2. Пусть $Q = (0, \pi) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$, $M = \{(1, 0)\}$. Тогда разбиение \mathcal{R} состоит из двух классов: $Q_{1,l} = (\pi - 4 + l, l)$ ($l = 1, 2, 3$) и $Q_{2l} = (l - 1, \pi - 4 + l) \times (0, 1)$ ($l = 1, 2, 3, 4$) (см. рис. 2).

Пример 1.3. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^2$ ограниченная область с границей $\partial Q \in C^\infty$, которая в полосе $\{x : 0 < x_2 < 2\}$ состоит из двух линий $\left\{x : x_1 = \frac{1}{3} \exp\left(-\frac{1}{x_2}\right) \sin \frac{1}{x_2}\right\}$ и $\{x : x_1 = 2\}$, а также пусть $M = \{(0, 1)\}$. Тогда разбиение \mathcal{R} состоит из счетного числа подобластей.

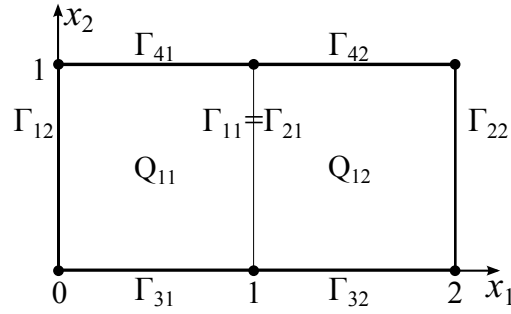


Рис. 1. Один класс подобластей.

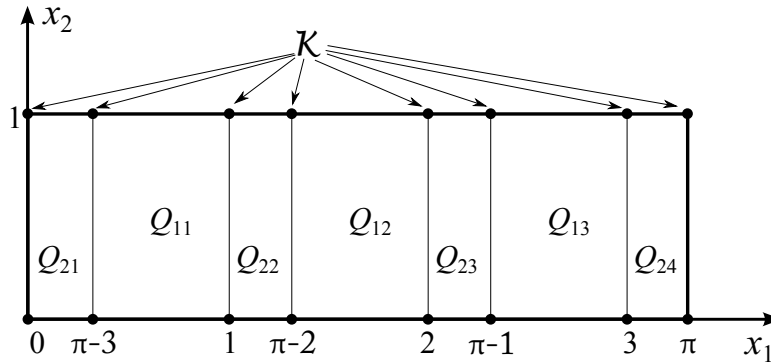


Рис. 2. Два класса подобластей.

При изучении гладкости обобщенных решений важную роль играет множество *точек сопряжения*, или *угловых точек*. Будем обозначать его через \mathcal{K} .

Введем множество \mathcal{K} следующим образом:

$$\mathcal{K} = \bigcup_{h_1, h_2 \in \mathcal{M}} \{ \overline{Q} \cap (\partial Q + h_1) \cap [(\partial Q + h_2) \setminus (\partial Q + h_1)] \}. \tag{1.1}$$

Свойства множества \mathcal{K} описывают следующие утверждения, которые следуют из определения множества \mathcal{K} .

Лемма 1.3. Пусть $x^0 \in \partial Q_{sl} \cap \partial Q$, и существует последовательность точек $x^n \rightarrow x^0$ при $n \rightarrow \infty$ такая, что $x^n \in \overline{Q}_{s_n l_n}$, $(s_n, l_n) \neq (s, l)$. Тогда $x^0 \in \mathcal{K}$.

Следствие 1.1. Пусть $x^0 \in \partial Q \cap \partial Q_{s_1 l_1} \cap \partial Q_{s_2 l_2}$, $(s_1, l_1) \neq (s_2, l_2)$. Тогда $x^0 \in \mathcal{K}$.

Лемма 1.4. Пусть $x^0 \in Q \cap \partial Q_{pl} \cap \partial Q_{qk}$, $(p, l) \neq (q, k)$, и существует последовательность точек $x^n \rightarrow x^0$ при $n \rightarrow \infty$ такая, что $x^n \in \overline{Q}_{s_n l_n}$, $(s_n, l_n) \neq (p, l), (q, k)$. Тогда $x^0 \in \mathcal{K}$.

Следствие 1.2. Пусть $x^0 \in \bigcap_i \partial Q_{s_i l_i}$ и $(s_i, l_i) \neq (s_j, l_j)$ при $i \neq j$ ($i, j = 1, 2, 3$). Тогда $x^0 \in \mathcal{K}$.

Напомним определение множества $K = \partial Q \setminus \bigcup_i X_i$, где X_i — открытые связные в топологии ∂Q $(n - 1)$ -мерные многообразия класса C^∞ , $n \geq 2$. Если $\partial Q \in C^\infty$, то $K = \emptyset$.

Будем считать, что выполнено следующее условие:

Условие 1.2.

$$\mu_{n-1}(\mathcal{K} \cap \partial Q) = 0, \quad K \subset \mathcal{K}.$$

Пример 1.4. Пусть $Q = (0, 2) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$, $\mathcal{M} = \{(1, 0)\}$. Тогда множество \mathcal{K} состоит из шести точек (i, j) , где $i = 0, 1, 2$, $j = 0, 1$ (см. рис. 1).

Пример 1.5. Пусть $Q = (0, 2) \times (0, 2)$, $\mathcal{M} = \{(1, 0)\} \cup \{(0, 1)\}$. Тогда множество \mathcal{K} состоит из девяти точек (i, j) , где $i, j = 0, 1, 2$ (см. рис. 3).

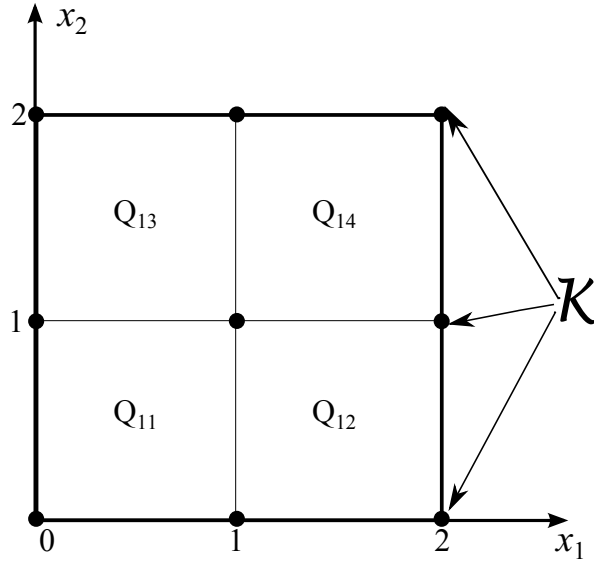


Рис. 3. Множество \mathcal{K} состоит из девяти точек.

Как уже отмечалось, в случае вырожденных дифференциальных и дифференциально-разностных уравнений часть границы ∂Q при определенных условиях может быть свободна от краевых условий. Нам понадобится следующее обозначение: через Γ_p обозначим компоненты связности открытого (в индуцированной на ∂Q топологии) множества $\partial Q \setminus \mathcal{K}$.

Лемма 1.5. Если $(\Gamma_p + h) \cap \bar{Q} \neq \emptyset$ при некотором $h \in M$, то либо $\Gamma_p + h \subset Q$, либо существует $\Gamma_r \subset \partial Q \setminus \mathcal{K}$ такое, что $\Gamma_p + h = \Gamma_r$.

В силу леммы 1.5 мы можем следующим образом разбить множество $\{\Gamma_p + h : \Gamma_p + h \subset \bar{Q}, p = 1, 2, \dots, h \in M\}$ на классы. Множества $\Gamma_{p_1} + h_1$ и $\Gamma_{p_2} + h_2$ принадлежат одному и тому же классу, если

1. существует $h \in M$ такое, что $\Gamma_{p_1} + h_1 = \Gamma_{p_2} + h_2 + h$;
2. в случае $\Gamma_{p_1} + h_1, \Gamma_{p_2} + h_2 \subset \partial Q$, направления внутренних нормалей к ∂Q в точках $x \in \Gamma_{p_1} + h_1$ и $x - h \in \Gamma_{p_2} + h_2$ совпадают.

Очевидно, множество $\Gamma_p \subset \partial Q$ может принадлежать лишь одному классу, а множество $\Gamma_p + h \subset Q$ — не более чем двум классам. Будем обозначать множества $\Gamma_p + h$ через Γ_{rj} , где $r = 1, 2, \dots$ — номер класса, j — номер элемента в данном классе ($1 \leq j \leq J = J(r)$). Не ограничивая общности, будем считать, что $\Gamma_{r1}, \dots, \Gamma_{rJ_0} \subset Q$, $\Gamma_{rJ_0+1}, \dots, \Gamma_{rJ} \subset \partial Q$ ($0 \leq J_0 = J_0(r) < J(r)$).

Лемма 1.6. Для любого $\Gamma_{rj} \subset \partial Q$ существует подобласть Q_{sl} такая, что $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{sl}$, и при этом $\Gamma_{rj} \cap \partial Q_{s_1l_1} = \emptyset$, если $(s_1, l_1) \neq (s, l)$.

Лемма 1.7. Для любого $r = 1, 2, \dots$ существует единственное $s = s(r)$ такое, что $N(s) = J(r)$, и при этом подобласти s -го класса Q_{sl} можно перенумеровать так, что $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$ ($l = 1, \dots, N(s)$).

Лемма 1.8. Для любого $\Gamma_{rj} \subset Q$ существуют подобласти $Q_{s_1l_1}$ и $Q_{s_2l_2}$ такие, что $Q_{s_1l_1} \neq Q_{s_2l_2}$, $\Gamma_{rj} \subset \partial Q_{s_1l_1} \cap \partial Q_{s_2l_2}$, и при этом $\Gamma_{rj} \cap \partial Q_{s_3l_3} = \emptyset$, если $(s_3, l_3) \neq (s_1, l_1), (s_2, l_2)$.

Пример 1.6. Пусть $Q = (0, 2) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$, $M = \{(1, 0)\}$. Тогда существуют четыре класса множеств Γ_{rl} (см. рис. 1):

1. $\Gamma_{12} = \{0\} \times (0, 1)$, $\Gamma_{11} = \{1\} \times (0, 1)$;
2. $\Gamma_{21} = \Gamma_{11}$, $\Gamma_{22} = \{2\} \times (0, 1)$;
3. $\Gamma_{31} = (0, 1) \times \{0\}$, $\Gamma_{32} = (1, 2) \times \{0\}$;
4. $\Gamma_{41} = (0, 1) \times \{1\}$, $\Gamma_{42} = (1, 2) \times \{1\}$.

Теперь мы можем ввести понятие разностного оператора.

1.2. Разностный оператор в пространстве $L_2(Q)$. Будем рассматривать разностный оператор $R: L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$, определенный по формуле

$$Ru(x) = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_h u(x+h), \quad (1.2)$$

где a_h — комплексные числа, множество \mathcal{M} состоит из конечного числа векторов $h \in \mathbb{R}^n$ с целочисленными координатами, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$.

Сдвиги $x \rightarrow x+h$, вообще говоря, могут отобразить точку $x \in Q$ в точку $x+h \notin Q$. Поэтому краевое условие (2) задается не только на границе ∂Q , но всюду в $\mathbb{R}^n \setminus Q$. Для того, чтобы формально записать это условие, мы введем оператор $I_Q: L_2(Q) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^n)$ продолжения функции из $L_2(Q)$ нулем в $\mathbb{R}^n \setminus Q$. С другой стороны, функция $(RI_Q u)(x)$ задана в \mathbb{R}^n . Поэтому для рассмотрения этой функции только в области Q мы введем оператор $P_Q: L_2(\mathbb{R}^n) \rightarrow L_2(Q)$ сужения функции из $L_2(\mathbb{R}^n)$ на Q .

Таким образом, разностный оператор, действующий в пространстве $L_2(Q)$, введем следующим образом:

$$R_Q = P_Q R I_Q: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q).$$

1.3. Свойства разностных операторов. В этом пункте мы изучим некоторые свойства разностных операторов R_Q в пространстве $L_2(Q)$. Оказывается, эти свойства тесно связаны со свойствами конечного числа матриц, состоящих из нулей и коэффициентов разностного оператора R .

Обозначим через $L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right)$ подпространство функций в $L_2(Q)$, равных нулю вне $\bigcup_l Q_{sl}$, а через $P_s: L_2(Q) \rightarrow L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right)$ — оператор ортогонального проектирования функций из $L_2(Q)$ на $L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right)$ ($l = 1, \dots, N(s)$). Так как $\mu_n(\partial Q_{sl}) = 0$, из абсолютной непрерывности интеграла Лебега следует, что

$$L_2(Q) = \bigoplus_s L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right), \quad (1.3)$$

где $\mu_n(\cdot)$ — мера Лебега в \mathbb{R}^n .

Лемма 1.9. $L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right)$ — инвариантное подпространство оператора R_Q .

Введем изометрический изоморфизм гильбертовых пространств

$$U_s: L_2\left(\bigcup_l Q_{sl}\right) \rightarrow L_2^N(Q_{s1}), \quad (1.4)$$

определив вектор-функцию $(U_s u)(x)$ равенством

$$(U_s u)_l(x) = u(x+h_{sl}) \quad (x \in Q_{s1}), \quad (1.5)$$

где $l = 1, \dots, N = N(s)$, h_{sl} таково, что $Q_{s1} + h_{sl} = Q_{sl}$ ($h_{s1} = 0$), $L_2^N(Q_{s1}) = \prod_l L_2(Q_{s1})$.

Лемма 1.10. Оператор $R_{Q_s}: L_2^N(Q_{s1}) \rightarrow L_2^N(Q_{s1})$, определенный по формуле

$$R_{Q_s} = U_s R_Q U_s^{-1}, \quad (1.6)$$

является оператором умножения на квадратную матрицу R_s порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами

$$r_{kl}^s = \begin{cases} a_h, & \text{если } h = h_{sl} - h_{sk} \in \mathcal{M}, \\ 0, & \text{если } h = h_{sl} - h_{sk} \notin \mathcal{M}. \end{cases} \quad (1.7)$$

Замечание 1.1. Поскольку область Q является ограниченной, а матрицы R_s состоят из конечного множества чисел a_h и нулей, то множество различных матриц $\{R_{s_\nu}\}$ ($\nu = 1, \dots, n_1$) конечно.

Лемма 1.11. Спектр оператора R_Q совпадает с объединением спектров конечного числа матриц R_{s_ν} ($\nu = 1, \dots, n_1$). Каждая точка спектра $\sigma(R_Q)$ является собственным значением бесконечной кратности.

1.4. Разностные операторы с вырождением. Рассмотрим свойства разностных операторов $R_Q: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, имеющих нетривиальное ядро.

Обозначим через $\mathcal{N}(\cdot)$ и $\mathcal{R}(\cdot)$ соответственно ядро и образ некоторого оператора.

Лемма 1.12. $L_2^N(Q_{s1}) = \mathcal{N}(R_{Q_s}) \oplus \mathcal{R}(R_{Q_s}^*)$, $L_2^N(Q_{s1}) = \mathcal{N}(R_{Q_s}^*) \oplus \mathcal{R}(R_{Q_s})$.

Введем обозначения $A_Q = (R_Q + R_Q^*)/2$, $B_Q = (R_Q - R_Q^*)/2i$. Очевидно, что

$$R_Q = A_Q + iB_Q.$$

Операторы A_Q и B_Q называются соответственно *вещественной* и *мнимой частями* оператора R_Q . Положим $A_{Q_s} = U_s A_Q U_s^{-1}$ и $B_{Q_s} = U_s B_Q U_s^{-1}$. В силу леммы 1.10 операторы $A_{Q_s}, B_{Q_s}: L_2^N(Q_{s1}) \rightarrow L_2^N(Q_{s1})$ являются операторами умножения на матрицы $A_s = (R_s + R_s^*)/2$, $B_s = (R_s - R_s^*)/2i$ соответственно. Обозначим через

$$P^R, P^{R^*}, P^A, P^B: L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$$

и

$$P_s^R, P_s^{R^*}, P_s^A, P_s^B: L_2^N(Q_{s1}) \rightarrow L_2^N(Q_{s1})$$

операторы ортогонального проектирования на подпространства

$$\mathcal{R}(R_Q), \mathcal{R}(R_Q^*), \mathcal{R}(A_Q), \mathcal{R}(B_Q)$$

и

$$\mathcal{R}(R_{Q_s}), \mathcal{R}(R_{Q_s}^*), \mathcal{R}(A_{Q_s}), \mathcal{R}(B_{Q_s})$$

соответственно. Операторы $P_s^R, P_s^{R^*}, P_s^A, P_s^B$ суть операторы умножения на некоторые матрицы, которые мы также обозначим $P_s^R, P_s^{R^*}, P_s^A, P_s^B$ соответственно.

Лемма 1.13. $L_2(Q) = \mathcal{N}(R_Q) \oplus \mathcal{R}(R_Q^*)$, $L_2(Q) = \mathcal{N}(R_Q^*) \oplus \mathcal{R}(R_Q)$, при этом

$$\|P^{R^*}u\|_{L_2(Q)} \leq c\|R_Q u\|_{L_2(Q)}, \quad (1.8)$$

$$\|P^R u\|_{L_2(Q)} \leq c\|R_Q^* u\|_{L_2(Q)} \quad (1.9)$$

для любой функции $u \in L_2(Q)$, где $c > 0$ — постоянная, не зависящая от u .

Назовем ограниченный самосопряженный оператор A в гильбертовом пространстве H *положительным*, если $(Au, u)_H > 0$ для любого $0 \neq u \in H$, и *неотрицательным*, если $(Au, u)_H \geq 0$ для любого $u \in H$. Если же $(Au, u)_H > c\|u\|_H^2$ для любого $u \in H$, где $c > 0$, то оператор A будем называть *положительно определенным*.

Рассмотрим разностные операторы R_i ($i = 1, 2$) вида (1.2) с коэффициентами a_{ih} вместо a_h ($h \in \mathcal{M}$). Положим $R_{iQ} = P_Q R_i I_Q$. Определим матрицы R_{is} порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами r_{kl}^{is} ($k, l = 1, \dots, N(s)$) по формуле (1.7) с коэффициентами a_{ih} вместо a_h .

Лемма 1.14.

1. Пусть $\mathcal{N}(R_{1s}) \subset \mathcal{N}(R_{2s})$ ($s = 1, 2, \dots$). Тогда $\mathcal{N}(R_{1Q}) \subset \mathcal{N}(R_{2Q})$, и для любой функции $u \in L_2(Q)$ справедливо неравенство

$$\|R_{2Q}u\|_{L_2(Q)} \leq c_1\|R_{1Q}u\|_{L_2(Q)}, \quad (1.10)$$

где $c_1 > 0$ — постоянная, не зависящая от u .

2. Если, кроме того, $R_{1Q} = A_Q$, $R_{2Q} = B_Q$, а матрицы A_s ($s = 1, 2, \dots$) неотрицательные, то оператор A_Q неотрицательный, при этом $\mathcal{N}(R_Q) = \mathcal{N}(R_Q^*) = \mathcal{N}(A_Q)$ и $\mathcal{R}(R_Q) = \mathcal{R}(R_Q^*) = \mathcal{R}(A_Q)$.

Лемма 1.15. Для любого $u \in L_2(Q)$ справедливы равенства

$$P^R u = \sum_s U_s^{-1} P_s^R U_s P_s u, \quad (1.11)$$

$$P^{R^*} u = \sum_s U_s^{-1} P_s^{R^*} U_s P_s u. \quad (1.12)$$

1.5. Разностные операторы в пространствах Соболева. Приведем некоторые свойства разностных операторов R_Q в пространствах Соболева.

Пространство Соболева комплекснозначных функций будем обозначать через $W_2^k(Q)$, $k \in \mathbb{N}$. Норма в этом пространстве задается формулой

$$\|u\|_{W_2^k(Q)} = \left(\sum_{|\alpha| \leq k} \int_Q |\mathcal{D}^\alpha u(x)|^2 dx \right)^{1/2},$$

где $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$, $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_n$, $\mathcal{D}^\alpha = \mathcal{D}_1^{\alpha_1} \dots \mathcal{D}_n^{\alpha_n}$, $\mathcal{D}_j = -i \frac{\partial}{\partial x_j}$.

Лемма 1.16. *Оператор R_Q непрерывно отображает $\dot{W}_2^k(Q)$ в $W_2^k(Q)$, при этом для всех $u \in \dot{W}_2^k(Q)$ справедливо равенство*

$$\mathcal{D}^\alpha R_Q u = R_Q \mathcal{D}^\alpha u \quad (|\alpha| \leq k),$$

где $\dot{W}_2^k(Q)$ — замыкание множества $\dot{C}^\infty(Q)$ в $W_2^k(Q)$.

Лемма 1.17. *Пусть при каждом $s = 1, 2, \dots$ заданы открытые связные множества Q'_{sl} такие, что $Q'_{sl} \subset Q_{sl}$ и $Q'_{sl} = Q'_{s1} + h_{sl}$ для каждого $1 \leq l \leq N = N(s)$.*

Тогда для всех $u \in L_2(Q)$ таких, что $R_Q u \in W_2^k(Q'_{sl})$ ($l = 1, 2, \dots, N(s)$, $s = 1, 2, \dots$) имеем $P^{R^} u \in W_2^k(Q'_{sl})$, при этом*

$$\|P^{R^*} u\|_{W_2^k(Q'_{sl})} \leq c_2 \sum_{j=1}^N \|R_Q u\|_{W_2^k(Q'_{sj})},$$

$$\left(\mathcal{D}^\alpha P^{R^*} u \right) (x) = \left(P^{R^*} \mathcal{D}^\alpha u \right) (x) \quad (x \in Q'_{sl}),$$

где $c_2 > 0$ не зависит от s и от u , $l = 1, 2, \dots, N(s)$, $s = 1, 2, \dots$, $|\alpha| \leq k$.

2. АПРИОРНЫЕ ОЦЕНКИ И ФРИДРИХСОВО РАСШИРЕНИЕ

В настоящем разделе мы приведем априорные оценки, полученные нами в работе [12], из которых вытекает секториальность рассматриваемого дифференциально-разностного оператора с вырождением, что влечет за собой существование фридрихсова расширения. Свойства фридрихсова расширения, секториальных операторов и полуторалинейных форм можно найти, например, в [5]. Кроме того, с помощью рассматриваемых ниже априорных оценок были доказаны теоремы о гладкости обобщенных решений.

Введем неограниченный дифференциально-разностный оператор $L_R: D(L_R) \subset L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, действующий по формуле

$$L_R u(x) = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} R_{ijQ} u(x), \tag{2.1}$$

с областью определения

$$D(L_R) = \dot{C}^\infty(Q),$$

где

$$R_{ijQ} = P_Q R_{ij} I_Q, \quad R_{ij} = \sum_{h \in \mathcal{M}} a_{ijh} u(x+h) \quad (i, j = 1, \dots, n), \tag{2.2}$$

\mathcal{M} — конечное множество векторов $h \in \mathbb{R}^n$ с целочисленными координатами, $a_{ijh} \in \mathbb{C}$, $\dot{C}^\infty(Q)$ — множество бесконечно дифференцируемых в Q функций с компактным носителем. Введем матрицы R_{ijs} порядка $N(s) \times N(s)$ с элементами

$$r_{kl}^{ijs} = \begin{cases} a_{ijh}, & \text{если } h = h_{sl} - h_{sk} \in \mathcal{M}, \\ 0, & \text{если } h = h_{sl} - h_{sk} \notin \mathcal{M}. \end{cases} \tag{2.3}$$

Наряду с матрицами R_{ijs} введем матрицы \widehat{R}_{ijs} следующим образом. Пусть $x \in \overline{Q}_{s1}$ — произвольная точка. Рассмотрим все такие точки $x^i \in \overline{Q}$, что $x^i - x \in \mathcal{M}$. Поскольку область Q ограниченная,

множество $\{x^i\}$ состоит из конечного числа точек $I = I(s, x)$ ($I \geq N(s)$). Занумеруем точки x^i так, что $x^i = x + h_{si}$ для $i = 1, \dots, N = N(s)$, $x^1 = x$. Введем матрицы $\widehat{R}_{ijs} = \widehat{R}_{ijs}(x)$ порядка $I \times I$ ($I = I(s, x)$) с элементами

$$\widehat{r}_{kl}^{ijs} = \begin{cases} a_{ijh}, & \text{если } h = x^l - x^k \in \mathcal{M}, \\ 0, & \text{если } h = x^l - x^k \notin \mathcal{M}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Несмотря на то, что элементы матриц \widehat{R}_{ijs} являются константами, порядок этих матриц зависит от выбора точки x .

Замечание 2.1. Если $I(s, x) = N(s)$, то $\widehat{R}_{ijs}(x) = R_{ijs}$. Если $I(s, x) > N(s)$, то матрица R_{ijs} получается из матрицы $\widehat{R}_{ijs}(x)$ вычеркиванием последних $I(s, x) - N(s)$ строк и столбцов.

Введем следующие обозначения

$$A_{ijs} = \frac{R_{ijs} + R_{jis}^*}{2}, \quad \widehat{A}_{ijs}(x) = \frac{\widehat{R}_{ijs}(x) + \widehat{R}_{jis}^*(x)}{2}, \\ B_{ijs} = \frac{R_{ijs} - R_{jis}^*}{2i}, \quad \widehat{B}_{ijs}(x) = \frac{\widehat{R}_{ijs}(x) - \widehat{R}_{jis}^*(x)}{2i} \quad (i, j = 1, \dots, n).$$

Пусть

$$A_{ijQ} = \frac{R_{ijQ} + R_{jiQ}^*}{2}, \quad B_{ijQ} = \frac{R_{ijQ} - R_{jiQ}^*}{2i}.$$

Далее мы будем требовать выполнения следующих условий.

Условие 2.1 (эллиптичности). *Существуют такие нетривиальные самосопряженные неотрицательные разностные операторы R_{iQ} , что справедливо неравенство*

$$\sum_{i,j=1}^n \widehat{A}_{ijs}(x) \xi_i \xi_j \geq \sum_{i=1}^n \widehat{R}_{is}(x) \xi_i^2$$

для любых $x \in \overline{Q}_{s1}$ ($s = 1, 2, \dots$) и $\xi \in \mathbb{R}^n$, где \widehat{R}_{is} — матрицы, соответствующие разностному оператору R_{iQ} .

Условие 2.2 (вырожденности). *Множество $S = \{s: \det A_{iis} = 0, i = 1, \dots, n\}$ непусто.*

Условие 2.3 (подчиненности). $\mathcal{N}(A_{ijs}) \subset \mathcal{N}(B_{ijs})$, $\mathcal{N}(A_{iis}) = \mathcal{N}(R_{is})$, $\mathcal{N}(A_{iis}) \subset \mathcal{N}(A_{ijs}) \cap \mathcal{N}(A_{jis})$, $i, j = 1, \dots, n$, где $\mathcal{N}(\cdot)$ — ядро матрицы.

Теперь мы можем привести априорные оценки.

Лемма 2.1. *Пусть область Q удовлетворяет условию 1.1 и выполнены условия 2.1–2.3. Тогда существуют такие константы $c_0 \geq 0$ и $c_1 > 0$, что для любой функции $u \in \dot{C}^\infty(Q)$ выполнено неравенство*

$$\operatorname{Re}(L_R u, u)_{L_2(Q)} + c_0 \sum_{i=1}^n (A_{iiQ} u, u)_{L_2(Q)} \geq c_1 \sum_{i=1}^n \|R_{iQ} u_{x_i}\|_{L_2(Q)}^2. \quad (2.5)$$

Для формулировки второй оценки нам понадобятся следующие обозначения. Введем неограниченный дифференциально-разностный оператор L_R^+ : $D(L_R^+) \subset L_2(Q) \rightarrow L_2(Q)$, действующий по формуле

$$L_R^+ u = - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} R_{jiQ}^* u(x) \quad (u \in D(L_R^+) = \dot{C}^\infty(Q)).$$

Лемма 2.2. *Пусть область Q удовлетворяет условию 1.1 и выполнены условия 2.1–2.3. Тогда существуют такая постоянная $c_2 > 0$, что для всех $u, v \in \dot{C}^\infty(Q)$ верны неравенства*

$$\left| \left(\frac{L_R + L_R^+}{2} u, v \right)_{L_2(Q)} + c_0 \sum_{i=1}^n (A_{iiQ} u, v)_{L_2(Q)} \right| \leq$$

$$\leq c_2 \left[\sum_{i,j=1}^n \|R_{iQ}u_{x_i}\|_{L_2(Q)} \|R_{jQ}v_{x_j}\|_{L_2(Q)} + \sum_{i=1}^n \|R_{iQ}u\|_{L_2(Q)} \|R_{iQ}v\|_{L_2(Q)} \right], \quad (2.6)$$

$$\left| \left(\frac{L_R - L_R^+}{2i} u, v \right)_{L_2(Q)} \right| \leq c_2 \sum_{i,j=1}^n \|R_{iQ}u_{x_i}\|_{L_2(Q)} \|R_{jQ}v_{x_j}\|_{L_2(Q)}. \quad (2.7)$$

В силу ограниченности операторов A_{ijQ} в $L_2(Q)$, а также лемм 2.1, 2.2 следует, что операторы L_R, L_R^+ являются секториальными в $L_2(Q)$. Поэтому существует фридрихсово расширение оператора L_R , которое было построено в работе [12].

Введем скалярное произведение в $\dot{C}^\infty(Q)$ по формуле

$$(u, v)_{L_R} = \frac{1}{2} ((L_R + L_R^+)u, v)_{L_2(Q)} + c_0 \sum_{i=1}^n (A_{iiQ}u, v)_{L_2(Q)} + (u, v)_{L_2(Q)} \quad (u, v \in \dot{C}^\infty(Q)).$$

Корректность такого скалярного произведения следует из условия 2.1 и лемм 1.11, 2.1.

Рассмотрим множество W_{L_R} , которое состоит из функций $u \in L_2(Q)$, для которых существует такая последовательность $\{u_p\} \subset \dot{C}^\infty(Q)$, что

$$\lim_{p \rightarrow \infty} \|u_p - u\|_{L_2(Q)} = 0, \quad \lim_{p, q \rightarrow \infty} \|u_p - u_q\|_{L_R} = 0. \quad (2.8)$$

Норму в W_{L_R} определим следующим образом:

$$\|u\|_{L_R} = \lim_{p \rightarrow \infty} \|u_p\|_{L_R}, \quad (2.9)$$

где $u_p \in \dot{C}^\infty(Q)$, $u_p \rightarrow u$ в $L_2(Q)$ и $\lim_{p, q \rightarrow \infty} \|u_p - u_q\|_{L_R} = 0$. Эта норма не зависит от выбора последовательности $\{u_p\}$. Пространство W_{L_R} с такой нормой полно.

Введем неограниченные операторы

$$\mathcal{L}_R: D(\mathcal{L}_R) \subset L_2(Q) \rightarrow L_2(Q), \quad \mathcal{L}_R^*: D(\mathcal{L}_R^*) \subset L_2(Q) \rightarrow L_2(Q),$$

действующие по формулам

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_R u &= - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} R_{ijQ} u(x) \quad (u \in D(\mathcal{L}_R) = \{u \in W_{L_R} : \mathcal{L}_R u \in L_2(Q)\}), \\ \mathcal{L}_R^* u &= - \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} R_{ijQ}^* u(x) \quad (u \in D(\mathcal{L}_R^*) = \{u \in W_{L_R} : \mathcal{L}_R^* u \in L_2(Q)\}). \end{aligned}$$

Лемма 2.3. Пусть область Q удовлетворяет условию 1.1, и условия 2.1–2.3 выполнены. Тогда $W_{L_R} \subset \{u \in L_2(Q) : (R_{iiQ}u)_{x_i} \in L_2(Q)\}$, при этом существует такая постоянная $c_3 > 0$, что

$$c_3 \sum_{i=1}^n \left\| (R_{iiQ}u)_{x_i} \right\|_{L_2(Q)}^2 \leq a_R[u] + c_0 \sum_{i=1}^n (A_{iiQ}u, u)_{L_2(Q)} \quad (u \in W_{L_R}), \quad (2.10)$$

где $a_R = (l_R + l_R^*)/2$, а l_R, l_R^* — полуторалинейные формы, с которыми ассоциированы фридрихсово расширение \mathcal{L}_R и оператор \mathcal{L}_R^* соответственно.

Таким образом, мы имеем, что $(R_{iiQ}u)_{x_i} \in L_2(Q)$, $i = 1, \dots, n$, при этом мы не можем гарантировать априори большую гладкость. Поэтому дифференцирование будем понимать в смысле обобщенных функций, т. е. в пространстве $\mathcal{D}'(Q)$.

Помимо условий 2.1–2.3 будем предполагать, что выполнено следующее условие.

Условие 2.4. $\mathcal{N}(A_{11s}) = \mathcal{N}(A_{iis})$, $i = 2, \dots, n$.

Данное условие необходимо при доказательстве спектральных свойств, а также при исследовании гладкости. Равенство ядер матриц, которые соответствуют разностным операторам, позволяет оценивать нормы $\|A_{iiQ}u\|_{L_2(Q)}$ через одну норму $\|A_{11Q}u\|_{L_2(Q)}$, а также получить оценку в пространстве Соболева $W_2^1(Q)$.

Лемма 2.4. Пусть выполнены условия 2.1–2.4. Тогда образ разностного оператора $\mathcal{R}(A_{11Q})$ является инвариантным подпространством операторов A_{11Q} и \mathcal{L}_R , и существуют константы $c_0 \geq 0$, $c_1 > 0$, $c_2 > 0$ такие, что для любой функции $u \in D(\mathcal{L}_R)$ выполнены неравенства

$$c_1 \|A_{11Q}u\|_{W_2^1(Q)}^2 \leq \operatorname{Re}(\mathcal{L}_R u, u)_{L_2(Q)} + c_0 \sum_{i=1}^n (A_{iiQ}u, u)_{L_2(Q)} \leq c_2 \|A_{11Q}u\|_{W_2^1(Q)}^2. \quad (2.11)$$

3. ОБОБЩЕННЫЕ РЕШЕНИЯ

Введем понятие обобщенного решения краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения с вырождением. Рассмотрим уравнение

$$-\sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_i \partial x_j} R_{ijQ}u = f(x) \quad (x \in Q) \quad (3.1)$$

с краевым условием

$$u(x) = 0 \quad (x \in \mathbb{R}^n \setminus Q), \quad (3.2)$$

где $f \in L_2(Q)$.

Определение 3.1. Функцию $u \in D(\mathcal{L}_R)$ будем называть *обобщенным решением* краевой задачи (3.1), (3.2), если она удовлетворяет операторному уравнению $\mathcal{L}_R u = f$.

Дадим эквивалентное определение обобщенного решения задачи (3.1), (3.2) в терминах интегрального тождества.

Определение 3.2. Функцию u назовем *обобщенным решением* краевой задачи (3.1), (3.2), если для любой функции $v \in \dot{C}^\infty(Q)$ выполняется интегральное тождество

$$\sum_{i,j} \int_Q R_{ijQ} u_{x_j} \bar{v}_{x_i} dx = \int_Q f \bar{v} dx. \quad (3.3)$$

В силу [12, теорема 5.1] $\mathcal{N}(A_{11Q}) \subset \mathcal{N}(\mathcal{L}_R)$. Поэтому уравнение (3.1) может иметь решения, не принадлежащие даже пространству $W_2^1(Q)$. Однако в работе [13] было показано, что ортогональная проекция решения на $\mathcal{R}(A_{11Q})$ уже обладает локальной гладкостью внутри подобластей Q_{sl} , а в работе [20] доказана теорема о гладкости обобщенных решений вблизи границ подобластей. Приведем эти теоремы без доказательств, которые можно найти в упомянутых выше работах.

Теорема 3.1. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, удовлетворяющая условию 1.1, и пусть выполнены условия 2.1–2.4. Пусть $u \in D(\mathcal{L}_R)$ является обобщенным решением краевой задачи (3.1), (3.2), и пусть $f \in L_2(Q)$.

Тогда $P^{A_{11}}u \in W_2^2(Q'_{sl})$ выполнено для любого открытого связного множества Q'_{sl} такого, что $\bar{Q}'_{sl} \subset Q_{sl}$ ($s = 1, 2, \dots, l = 1, \dots, N(S)$).

Теорема 3.2. Пусть $Q \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, удовлетворяющая условию 1.1, и пусть выполнены условия 2.1–2.4. Пусть $u \in D(\mathcal{L}_R)$ является обобщенным решением краевой задачи (3.1), (3.2), и пусть $f \in L_2(Q)$.

Тогда $P^{A_{11}}u \in W_2^2(Q_{sl} \setminus \bar{\mathcal{K}}^\varepsilon)$ для любого $\varepsilon > 0$ ($s = 1, 2, \dots, l = 1, \dots, N(S)$), где $\mathcal{K}^\varepsilon = \{x \in \mathbb{R}^n : \operatorname{dist}(x, \mathcal{K}) < \varepsilon\}$.

4. СЛЕДЫ ОБОБЩЕННЫХ РЕШЕНИЙ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ С ВЫРОЖДЕНИЕМ

В данном разделе будет доказан основной результат настоящей работы. Как уже отмечалось, в случае эллиптических уравнений с вырождением часть границы может быть свободна от краевых условий. Это связано с вырождением коэффициентов оператора. Аналогичное явление мы можем наблюдать и для краевых задач для рассматриваемых эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением, однако причиной этого явления служит вырождение разностных операторов, которое носит нелокальный характер. Теоремы о гладкости гарантируют гладкость не самого обобщенного решения, а лишь ортогональной проекции решения на образ разностного оператора. Таким образом, обобщенное решение может не принадлежать пространству

Соболева, и встает вопрос о корректном определении следов решений. Ниже мы докажем теорему, в которой приведены необходимые и достаточные условия существования следов обобщенных решений на некоторых частях границ подобластей Q_{sl} .

После доказательства теоремы мы приведем пример области и дифференциально-разностного оператора, для которых выполнены все необходимые условия.

По лемме 1.7 для любого $r = 1, 2, \dots$ существует номер $s = s(r)$ такой, что $N(s) = J(r)$, и можно перенумеровать подобласти s -го класса так, что $\Gamma_{rl} \subset \partial Q_{sl}$ ($l = 1, \dots, N(s)$).

Множество чисел l , $1 \leq l \leq N(s)$, таких, что l -й столбец матрицы R_{11s} не представляет собой линейную комбинацию остальных столбцов данной матрицы, мы будем обозначать \mathcal{B}_r .

Теорема 4.1. Пусть область $Q \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяет условиям 1.1-1.2, а также пусть выполнены условия 2.1-2.4. Тогда если $\Gamma_{rl} \subset \partial Q$, то следы $u|_{\Gamma_{rl}}$ определены для всех $u \in D(\mathcal{L}_R)$ тогда и только тогда, когда $l \in \mathcal{B}_r$. Кроме того, если $l \in \mathcal{B}_r$, то $u|_{\Gamma_{rl}} = 0$.

Доказательство. Из условия 2.4 и в силу леммы 1.14 следует, что

$$\|B_{ii}Qu\|_{W_2^1(Q)} \leq k_1 \|A_{ii}Qu\|_{W_2^1(Q)} \leq k_2 \|A_{11}Qu\|_{W_2^1(Q)}$$

для всех $u \in W_{L_R}$.

Тогда из лемм 2.3, 2.4 имеем

$$W_{L_R} \subset \{u \in L_2(Q) : R_{11}Qu \in W_2^1(Q)\}, \quad (4.1)$$

кроме того, существует такая постоянная $c_4 > 0$, что выполнено неравенство

$$c_4 \|R_{11}Qu\|_{W_2^1(Q)}^2 \leq a_R[u] + c_0 \sum_{i=1}^n (A_{ii}Qu, u)_{L_2(Q)} \quad (4.2)$$

для всех $u \in W_{L_R}$.

Пусть $u \in D(\mathcal{L}_R)$. Тогда $R_{11}Qu \in W_2^1(Q)$. Далее из оценки норм следов функций из пространства Соболева получим

$$\sum_{j=1}^{N(s)} \|(R_{11}Qu)|_{\Gamma_{rj}}\|_{L_2(\Gamma_{rj})} \leq k_3 \|R_{11}Qu\|_{W_2^1(Q)} \quad (4.3)$$

для всех $u \in \dot{C}^\infty(Q)$.

Поэтому из (4.1), (4.2), а также из лемм 1.14, 1.17 имеем

$$\|(P^{R_{11}u})|_{\Gamma_{rj}}\|_{L_2(\Gamma_{rj})} \leq k_4 \|u\|_{L_R}. \quad (4.4)$$

Поскольку $\dot{C}^\infty(Q)$ плотно в W_{L_R} , то следы $(P^{R_{11}u})|_{\Gamma_{rl}}$ определены для любой функции $u \in D(\mathcal{L}_R)$. Из [12, теорема 5.1] $\mathcal{N}(A_{11}Q) \subset \mathcal{N}(\mathcal{L}_R)$. Следовательно, по лемме 1.12, из условий 2.2-2.4 и леммы 1.14 следы $u|_{\Gamma_{rl}}$ определены в пространстве $L_2(\Gamma_{rl})$ для любой функции $u \in D(\mathcal{L}_R)$ тогда и только тогда, когда $(P^{R_{11}u})(x) = u(x)$ для $x \in Q_{sl}$. Данное условие можно выразить в терминах матриц следующим образом:

$$\mathcal{N}(R_{11s}) \subset \{(x_1, \dots, x_{l-1}, 0, x_{l+1}, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N\},$$

т. е. l -й столбец матрицы R_{11s} не является линейной комбинацией остальных столбцов.

Далее, предположим, что $l \in \mathcal{B}_r$ и $u \in D(\mathcal{L}_R)$. Рассмотрим последовательность функций $u_p \in \dot{C}^\infty(Q)$ таких, что

$$\|u - u_p\|_{L_R} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad p \rightarrow \infty.$$

Тогда из неравенства (4.4) получим

$$\|(u - u_p)|_{\Gamma_{rl}}\|_{L_2(\Gamma_{rl})} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad p \rightarrow \infty,$$

что означает $u|_{\Gamma_{rl}} = 0$. □

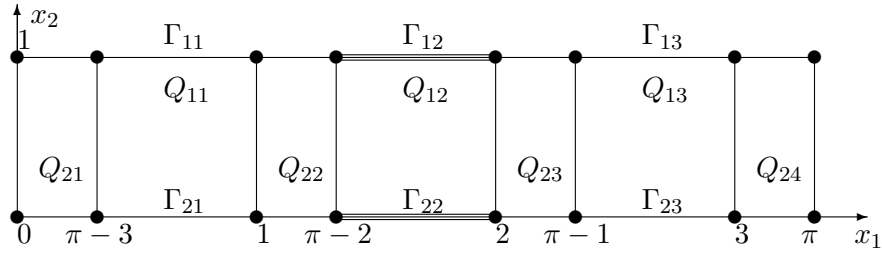


Рис. 4

Пример 4.1. Рассмотрим ограниченную область $Q = (0, \pi) \times (0, 1) \subset \mathbb{R}^2$ и дифференциально-разностный оператор вида

$$L_R u = -\frac{\partial^2}{\partial x_1^2} R_{11} Q u - \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} R_{12} Q u - \frac{\partial^2}{\partial x_2 \partial x_1} R_{21} Q u - \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} R_{22} Q u, \quad (4.5)$$

где разностные операторы задаются формулами

$$R_{ij} Q u = a_{ij} [u(x_1, x_2) + u(x_1 + 2, x_2) + u(x_1 - 2, x_2)] + b_{ij} [u(x_1 + 1, x_2) + u(x_1 - 1, x_2) + u(x_1 + 3, x_2) + u(x_1 - 3, x_2)],$$

где $b_{ij} < a_{ij}$, $a_{ij} = a_{ji}$, $b_{ij} = b_{ji}$. По построению $B_{ij} Q = 0$, $A_{ij} Q = R_{ij} Q = R_{ji} Q$.

Разбиение области состоит из двух классов подобластей: 1-й класс — Q_{11} , Q_{12} , Q_{13} ; 2-й класс — Q_{21} , Q_{22} , Q_{23} , Q_{24} (см. рис. 4). Отметим, что в данном примере матрицы $\hat{A}_{ijs}(x) = A_{ijs}$.

Матрицы, соответствующие первому классу A_{ij1} , имеют вид

$$A_{ij1} = \begin{pmatrix} a_{ij} & b_{ij} & a_{ij} \\ b_{ij} & a_{ij} & b_{ij} \\ a_{ij} & b_{ij} & a_{ij} \end{pmatrix}.$$

Ядро матрицы A_{ij1} ($i, j = 1, 2$) есть линейная оболочка, натянутая на вектор $(1, 0, -1)^T$. Соб-

ственные значения матриц такого вида: $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = \frac{3a_{ij} + \sqrt{a_{ij}^2 + 8b_{ij}^2}}{2}$, $\lambda_3 = \frac{3a_{ij} - \sqrt{a_{ij}^2 + 8b_{ij}^2}}{2}$.

Очевидно, что при $a_{ij} > b_{ij} > 0$ все собственные значения матриц будут неотрицательными. Матрицы, соответствующие второму классу $\tilde{A}_{ij2}(x) = A_{ij2}$, имеют следующий вид:

$$A_{ij2} = \begin{pmatrix} a_{ij} & b_{ij} & a_{ij} & b_{ij} \\ b_{ij} & a_{ij} & b_{ij} & a_{ij} \\ a_{ij} & b_{ij} & a_{ij} & b_{ij} \\ b_{ij} & a_{ij} & b_{ij} & a_{ij} \end{pmatrix}.$$

Ядро матрицы A_{ij2} ($i, j = 1, 2$) есть линейная оболочка, натянутая на 2 вектора: $(1, 0, -1, 0)^T$ и $(0, 1, 0, -1)^T$. Собственные значения матриц такого вида: $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$, $\lambda_3 = 2(a_{ij} - b_{ij})$, $\lambda_4 = 2(a_{ij} + b_{ij})$. Очевидно, что при $a_{ij} > b_{ij} > 0$ все собственные значения данных матриц также будут неотрицательными.

Пусть операторы R_{iQ} имеют вид

$$R_{iQ} u = p_i [u(x_1, x_2) + u(x_1 + 2, x_2) + u(x_1 - 2, x_2)] + q_i [u(x_1 + 1, x_2) + u(x_1 - 1, x_2) + u(x_1 + 3, x_2) + u(x_1 - 3, x_2)],$$

где $p_i > q_i > 0$. Матрицы $\hat{R}_{is} = R_{is}$ строятся аналогично матрицам A_{ijs} , только вместо чисел a_{ij} стоят p_i , а вместо b_{ij} стоят q_i . По доказанному, $\det A_{iis} = 0$ ($i = 1, 2$, $s = 1, 2$). Следовательно, $S = \{1, 2\}$. Таким образом, условие 2.2 выполнено. Кроме того, мы показали, что $\mathcal{N}(A_{ijs}) = \mathcal{N}(A_{jis}) = \mathcal{N}(A_{iis}) = \mathcal{N}(R_{is})$ ($i, j, s = 1, 2$), а B_{ijs} — нулевая матрица. Поэтому условия 2.3-2.4

также выполнены. Тогда условие 2.1 примет вид

$$\begin{pmatrix} A - P & B - Q & A - P \\ B - Q & A - P & B - Q \\ A - P & B - Q & A - P \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{для любых } \xi \in \mathbb{R}^2, \text{ если } s = 1,$$

и

$$\begin{pmatrix} A - P & B - Q & A - P & B - Q \\ B - Q & A - P & B - Q & A - P \\ A - P & B - Q & A - P & B - Q \\ B - Q & A - P & B - Q & A - P \end{pmatrix} \geq 0 \quad \text{для любых } \xi \in \mathbb{R}^2, \text{ если } s = 2,$$

где $A = a_{11}\xi_1^2 + 2a_{12}\xi_1\xi_2 + a_{22}\xi_2^2$, $B = b_{11}\xi_1^2 + 2b_{12}\xi_1\xi_2 + b_{22}\xi_2^2$, $P = p_1\xi_1^2 + p_2\xi_2^2$, $Q = q_1\xi_1^2 + q_2\xi_2^2$. Эти условия выполнены, если $A - P > B - Q > 0$ для любых $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^2$, т. е. если

$$\begin{aligned} (a_{11} - b_{11} - (p_1 - q_1))\xi_1^2 + 2(a_{12} - b_{12})\xi_1\xi_2 + (a_{22} - b_{22} - (p_2 - q_2))\xi_2^2 &> 0, \\ (b_{11} - q_1)\xi_1^2 + 2b_{12}\xi_1\xi_2 + (b_{22} - q_2)\xi_2^2 &> 0, \end{aligned}$$

для любых $0 \neq \xi \in \mathbb{R}^2$.

Таким образом, если матрицы $\|b_{ij}\|_{i,j=1}^2$, $\|a_{ij} - b_{ij}\|_{i,j=1}^2$ положительно определены, а $a_{ij} > b_{ij}$ ($i, j = 1, 2$), то выполняются условия 2.1–2.4. Очевидно, что второй столбец матрицы R_{111} не является линейной комбинацией остальных столбцов, поэтому по теореме 4.1 следы $u|_{\Gamma_{12}}$ и $u|_{\Gamma_{22}}$ определены для любой функции $u \in D(\mathcal{L}_R)$. При этом следы $u|_{\partial Q_{11} \cap \partial Q}$ и $u|_{\partial Q_{13} \cap \partial Q}$ не определены для некоторых функций $u \in D(\mathcal{L}_R)$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Бицадзе А. В., Самарский А. А. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач // Докл. АН СССР. — 1969. — 185, № 4. — С. 739–740.
2. Вишик М. И. Краевые задачи для эллиптических уравнений, вырождающихся на границе области // Мат. сб. — 35, № 3. — 1954. — С. 513–568.
3. Данфорд Н., Шварц Дж. Линейные операторы. Т. 2. — М.: Мир, 1966.
4. Иванова Е. П. Непрерывная зависимость решений краевых задач для дифференциально-разностных уравнений от сдвигов аргумента // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2016. — 59. — С. 74–96.
5. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
6. Келдыш М. В. О некоторых случаях вырождения уравнений эллиптического типа на границе области // Докл. АН СССР. — 1951. — 77. — С. 181–183.
7. Крейн С. Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1971.
8. Лионс Ж., Мадженес Э. Неоднородные граничные задачи и их приложения. — М.: Мир, 1971.
9. Михайлов В. П. Дифференциальные уравнения в частных производных. — М.: Наука, 1976.
10. Муравник А. Б. Асимптотические свойства решений задачи Дирихле в полуплоскости для некоторых дифференциально-разностных эллиптических уравнений // Мат. заметки. — 2016. — 100, № 4. — С. 566–576.
11. Олейник О. А., Радкевич Е. В. Уравнения второго порядка с неотрицательной характеристической формой. — М.: ВИНТИ, 1971.
12. Попов В. А., Скубачевский А. Л. Априорные оценки для эллиптических дифференциально-разностных операторов с вырождением // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — 36. — С. 125–142.
13. Попов В. А., Скубачевский А. Л. Гладкость обобщенных решений эллиптических дифференциально-разностных уравнений с вырождением // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2011. — 39. — С. 130–140.
14. Россовский Л. Е. Коэрцитивность функционально-дифференциальных уравнений // Мат. заметки. — 1996. — 59, № 1. — С. 103–113.
15. Россовский Л. Е. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — 36. — С. 125–142.
16. Скубачевский А. Л. Эллиптические дифференциально-разностные уравнения с вырождением // Тр. Моск. мат. об-ва. — 1997. — 59. — С. 240–285.
17. Скубачевский А. Л. Краевые задачи для эллиптических функционально-дифференциальных уравнений и их приложения // Усп. мат. наук. — 2016. — 71, № 5. — С. 3–112.
18. Тасевич А. Л. Гладкость обобщенных решений задачи Дирихле для сильно эллиптических функционально-дифференциальных уравнений с ортотропными сжатиями // Соврем. мат. Фундам. направл. — 2015. — 58. — С. 153–165.

19. Фикера Г. К единой теории краевых задач для эллипτικο-параболических уравнений второго порядка// Математика. — 1963. — 7, № 6. — С. 99–121.
20. Popov V. A., Skubachevskii A. L. On smoothness of solutions of some elliptic functional-differential equations with degenerations// Russ. J. Math. Phys. — 2013. — 20, № 4. — С. 492–507.
21. Skubachevskii A. L. The first boundary-value problem for strongly elliptic differential-difference equations// J. Differ. Equ. — 1986. — 63, № 3. — С. 332–361.
22. Skubachevskii A. L. Elliptic functional differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.

Владимир Алексеевич Попов

Российский университет дружбы народов, 117198, Москва, ул. Миклухо-Макляя, д. 6

E-mail: volodimir.a@gmail.com, popovvladimir.a@gmail.com

UDC 517.9

Traces of Generalized Solutions of Elliptic Differential-Difference Equations with Degeneration

© 2016 V. A. Popov

Abstract. The paper is devoted to differential-difference equations with degeneration in a bounded domain $Q \subset \mathbb{R}^n$. We consider differential-difference operators that cannot be expressed as a composition of a strongly elliptic differential operator and a degenerated difference operator. Instead of this, operators under consideration contain several degenerated difference operators corresponding to differentiation operators. Generalized solutions of such equations may not belong even to the Sobolev space $W_2^1(Q)$.

Earlier, under certain conditions on difference and differentiation operators, we had obtained a priori estimates and proved that the orthogonal projection of the generalized solution onto the image of the difference operator preserves certain smoothness inside some subdomains $Q_r \subset Q$ ($\bigcup_r \overline{Q_r} = \overline{Q}$) instead of the whole domain.

In this paper, we prove necessary and sufficient conditions in algebraic form for existence of traces on some parts of boundaries of subdomains Q_r .

REFERENCES

1. A. V. Bitsadze and A. A. Samarskiy, “O nekotorykh prosteystikh obobshcheniyakh lineynykh ellipticheskikh kraevykh zadach” [On some simplest generalizations of linear elliptic boundary-value problems], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1969, **185**, No. 4, 739–740.
2. M. I. Vishik, “Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh uravneniy, vyrozhdnyushchikhsya na granitse oblasti” [Boundary-value problems for elliptic equations degenerating on the boundary of domain], *Mat. sb.* [Math. Digest], **35**, No. 3, 1954, 513–568.
3. N. Dunford and J. Schwartz, *Lineynye operatory. T. 2: Spektral'naya teoriya. Samosopryazhennyye operatory v gil'bertovom prostranstve* [Linear Operators. Part II: Spectral Theory. Self-Adjoint Operators in Hilbert Space], Mir, Moscow, 1966.
4. E. P. Ivanova, “Nepreryvnaya zavisimost' resheniy kraevykh zadach dlya differentsial'no-raznostnykh uravneniy ot sdvigo argumenta” [Continuous dependence of solutions of boundary-value problems for differential-difference equations on shifts of the argument], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2016, **59**, 74–96.
5. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972.
6. M. V. Keldysh, “O nekotorykh sluchayakh vyrozhdeniya uravneniy ellipticheskogo tipa na granitse oblasti” [On some cases of degeneration of elliptic-type equations on the boundary of domain], *Dokl. AN SSSR* [Rep. Acad. Sci. USSR], 1951, **77**, 181–183.

7. S. G. Kreyn, *Lineynye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1971.
8. J. Lions and E. Magenes, *Neodnorodnye granichnye zadachi i ikh prilozheniya* [Nonhomogeneous Boundary Value Problems and Applications], Mir, Moscow, 1971.
9. V. P. Mikhaylov, *Differentsial'nye uravneniya v chastnykh proizvodnykh* [Partial Differential Equations], Nauka, Moscow, 1976.
10. A. B. Muravnik, "Asimptoticheskie svoystva resheniy zadachi Dirikhle v poluploskosti dlya nekotorykh differentsial'no-raznostnykh ellipticheskikh uravneniy" [Asymptotic properties of solutions of the Dirichlet problem in a half-plane for some differential-difference elliptic equations], *Mat. zametki* [Math. Notes], 2016, **100**, No. 4, 566–576.
11. O. A. Oleynik and E. V. Radkevich, *Uravneniya vtorogo poryadka s neotritsatel'noy kharakteristicheskoy formoy* [Second-Order Equations with Nonnegative Characteristic Form], VINITI, Moscow, 1971.
12. V. A. Popov and A. L. Skubachevskii, "Apriornye otsenki dlya ellipticheskikh differentsial'no-raznostnykh operatorov s vyrozhdeniem" [A priori estimates for elliptic differential-difference operators with degeneration], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **36**, 125–142.
13. V. A. Popov and A. L. Skubachevskii, "Gladkost' obobshchennykh resheniy ellipticheskikh differentsial'no-raznostnykh uravneniy s vyrozhdeniem" [Smoothness of generalized solutions of elliptic differential-difference equations with degenerations], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2011, **39**, 130–140.
14. L. E. Rossovskii, "Koertsitivnost' funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy" [Coercivity of functional differential equations], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1996, **59**, No. 1, 103–113.
15. L. E. Rossovskii, "Ellipticheskie funktsional'no-differentsial'nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii" [Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **36**, 125–142.
16. A. L. Skubachevskii, "Ellipticheskie differentsial'no-raznostnye uravneniya s vyrozhdeniem" [Elliptic functional differential equations with degeneration], *Tr. Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1997, **59**, 240–285.
17. A. L. Skubachevskii, "Kraevye zadachi dlya ellipticheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy i ikh prilozheniya" [Boundary-value problems for elliptic functional differential equations and their applications], *Usp. mat. nauk* [Progr. Math. Sci.], 2016, **71**, No 5, 3–112.
18. A. L. Tasevich, "Gladkost' obobshchennykh resheniy zadachi Dirikhle dlya sil'no ellipticheskikh funktsional'no-differentsial'nykh uravneniy s ortotropnymi szhatiyami" [Smoothness of generalized solutions of the Dirichlet problem for strong elliptic functional-differential equations with orthotropic contractions], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2015, **58**, 153–165.
19. G. Fikera, "K edinoi teorii kraevykh zadach dlya elliptiko-parabolicheskikh uravneniy vtorogo poryadka" [On a unified theory of boundary-value problems for elliptic-parabolic equations of second order], *Matematika* [Mathematics], 1963, **7**, No. 6, 99–121.
20. V. A. Popov and A. L. Skubachevskii, "On smoothness of solutions of some elliptic functional-differential equations with degenerations," *Russ. J. Math. Phys.*, 2013, **20**, No. 4, 492–507.
21. A. L. Skubachevskii, "The first boundary-value problem for strongly elliptic differential-difference equations," *J. Differ. Equ.*, 1986, **63**, No. 3, 332–361.
22. A. L. Skubachevskii, *Elliptic functional differential equations and applications*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1997.

Vladimir Popov

RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st., 117198 Moscow, Russia

E-mail: volodimir.a@gmail.com, popovvladimir.a@gmail.com

КОЭРЦИТИВНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ НЕЛОКАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПАРАБОЛИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ

© 2016 г. Л. Е. РОССОВСКИЙ, А. Р. ХАНАЛЫЕВ

Аннотация. В произвольном банаховом пространстве E рассматривается нелокальная задача

$$\begin{aligned}v'(t) + A(t)v(t) &= f(t) \quad (0 \leq t \leq 1), \\v(0) &= v(\lambda) + \mu \quad (0 < \lambda \leq 1)\end{aligned}$$

для абстрактного параболического уравнения с линейным неограниченным сильно позитивным оператором $A(t)$, имеющим не зависящую от t всюду плотную в E область определения $D = D(A(t))$ и порождающим аналитическую полугруппу $\exp\{-sA(t)\}$ ($s \geq 0$).

Устанавливается коэрцитивная разрешимость задачи в банаховом пространстве $C_0^{\alpha,\alpha}([0, 1], E)$ ($0 < \alpha < 1$) с весом $(t + \tau)^\alpha$ — результат, который прежде был известен лишь для постоянного оператора. Рассматриваются приложения в классе параболических функционально-дифференциальных уравнений с преобразованием пространственных переменных и параболических уравнений с нелокальными условиями на границе области. Таким образом, охвачен случай параболического уравнения с нелокальными условиями как по времени, так и по пространственным переменным.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|--|-----|
| 1. Введение | 140 |
| 2. Коэрцитивная разрешимость в $C_0^{\alpha,\alpha}(E)$ | 142 |
| 3. Приложения | 144 |
| 3.1. Параболическое функционально-дифференциальное уравнение с растяжением и сжатием пространственных переменных | 144 |
| 3.2. Параболическое дифференциальное уравнение с нелокальным условием на $\partial\Omega$ | 147 |
| Список литературы | 149 |

1. ВВЕДЕНИЕ

Работа состоит из двух частей. Первая часть посвящена нелокальной краевой задаче

$$\begin{aligned}v'(t) + A(t)v(t) &= f(t) \quad (0 \leq t \leq 1), \\v(0) &= v(\lambda) + \mu \quad (0 < \lambda \leq 1)\end{aligned} \tag{1.1}$$

в произвольном банаховом пространстве E для абстрактного зависящего от t оператора $A(t)$. Здесь $v(t)$ и $f(t)$ — искомая и заданная функции, определенные на $[0, 1]$ со значениями в E ; $v'(t)$ — производная, понимаемая как предел по норме E соответствующего конечно-разностного отношения; $A(t)$ — действующий в E линейный неограниченный оператор, имеющий не зависящую от t всюду плотную в E область определения D ; $\mu \in D$.

Основной результат первой части — теорема 2.1 о разрешимости и оценках решений задачи (1.1). Во второй части рассматриваются приложения к различным операторам $A(t) \equiv A$, в свою очередь, нелокальным.

Ниже во введении приводятся необходимые определения и обозначения и даются ссылки на уже известные результаты. Будем предполагать, что

1. при любых $t \in [0, 1]$ и $\rho \in \mathbb{C}$, где $\operatorname{Re} \rho \geq 0$, оператор $A(t) + \rho I$ имеет ограниченный обратный, причем

$$\left\| [A(t) + \rho I]^{-1} \right\|_{E \rightarrow E} \leq M(1 + |\rho|)^{-1} \tag{1.2}$$

- (согласно [5], оператор $A(t)$ принято называть *сильно позитивным*);
 2. для любых $t, s, \tau \in [0, 1]$ справедливо неравенство

$$\| [A(t) - A(s)]A^{-1}(\tau) \|_{E \rightarrow E} \leq M|t - s|^\varepsilon, \quad 0 < \varepsilon \leq 1. \quad (1.3)$$

Функцию $v(t)$ назовем *решением* задачи (1.1), если выполнены следующие условия:

1. функция $v(t)$ непрерывно дифференцируема на отрезке $[0, 1]$;
2. элемент $v(t)$ принадлежит $D = D(A(t))$ при каждом $t \in [0, 1]$, и $A(t)v(t)$ непрерывна на $[0, 1]$;
3. функция $v(t)$ удовлетворяет уравнению и нелокальному краевому условию (1.1).

Задача (1.1) имеет единственное непрерывно дифференцируемое решение $v(t)$ при определенных ограничениях на μ и достаточно гладких функциях $f(t)$, а для ее решения справедлива формула

$$v(t) = v(t, 0)(I - v(\lambda, 0))^{-1} \left\{ \mu + \int_0^\lambda v(\lambda, s)f(s)ds \right\} + \int_0^t v(t, s)f(s)ds,$$

где $v(t, s)$ — фундаментальное решение уравнения (1.1), называемое также эволюционной оператор-функцией (см. [6, 20]). Она определяется из соотношения

$$v(t, s) = \exp\{-(t-s)A(t)\} + \int_s^t \exp\{-(t-t_1)A(t)\}[A(t) - A(t_1)]v(t_1, s)dt_1,$$

или

$$v(t, s) = \exp\{-(t-s)A(s)\} + \int_s^t v(t, t_1)[A(s) - A(t_1)] \exp\{-(t_1-s)A(s)\}dt_1,$$

и удовлетворяет следующим условиям:

1. оператор $v(t, s)$ сильно непрерывен по t и s ($0 \leq s \leq t \leq 1$);
2. $v(t, s) = v(t, \tau)v(\tau, s)$, $v(t, t) = I$ ($0 \leq s \leq \tau \leq t \leq 1$);
3. оператор $v(t, s)$ отображает область определения $D = D(A(t))$ в себя, оператор $u(t, s) = A(t)v(t, s)A^{-1}(s)$ ограничен и сильно непрерывен по t и s ($0 \leq s \leq t \leq 1$);
4. на области D оператор $v(t, s)$ сильно дифференцируем по t и s , причем

$$\frac{\partial v(t, s)}{\partial t} = -A(t)v(t, s), \quad \frac{\partial v(t, s)}{\partial s} = v(t, s)A(s).$$

Определение 1.1. Говорят, что задача (1.1) *коэрцитивно разрешима* в некотором банаховом пространстве $F(E) = F([0, 1], E)$ функций $f(t)$ со значениями в E на $[0, 1]$, если для всяких $f \in F(E)$, $\mu \in D$ существует единственное решение задачи (1.1), причем v' и $A(t)v$ принадлежат тому же пространству $F(E)$ (см. [7]).

Банахово пространство, полученное замыканием множества всех гладких функций $f(t)$, определенных на отрезке $[0, 1]$, со значениями из E в норме

$$\|f\|_{C_0^{\beta, \gamma}(E)} = \|f\|_{C(E)} + \sup_{0 \leq t < t + \tau \leq 1} \frac{(t + \tau)^\gamma \|f(t + \tau) - f(t)\|_E}{\tau^\beta}$$

обозначим через $C_0^{\beta, \gamma}(E) = C_0^{\beta, \gamma}([0, 1], E)$ ($0 \leq \gamma \leq \beta$, $0 < \beta < 1$). Здесь под $C(E) = C([0, 1], E)$ понимается банахово пространство определенных на $[0, 1]$ со значениями в E непрерывных функций $f(t)$ с нормой

$$\|f\|_{C(E)} = \max_{0 \leq t \leq 1} \|f(t)\|_E.$$

Таким образом, при $\beta = \alpha$ и $\gamma = 0$ пространство $C_0^{\alpha, 0}(E) = C_0^{\alpha, 0}([0, 1], E)$ ($0 < \alpha < 1$) совпадает с пространством $C^\alpha(E) = C^\alpha([0, 1], E)$ ($0 < \alpha < 1$) функций, для которых конечна норма

$$\|f\|_{C^\alpha(E)} = \|f\|_{C(E)} + \sup_{0 \leq t < t + \tau \leq 1} \frac{\|f(t + \tau) - f(t)\|_E}{\tau^\alpha}.$$

А при $\gamma = \beta = \alpha$ пространство $C_0^{\alpha, \alpha}(E) = C_0^{\alpha, \alpha}([0, 1], E)$ ($0 < \alpha < 1$) с нормой

$$\|f\|_{C_0^{\alpha, \alpha}(E)} = \|f\|_{C(E)} + \sup_{0 \leq t < t + \tau \leq 1} \frac{(t + \tau)^\alpha \|f(t + \tau) - f(t)\|_E}{\tau^\alpha}$$

совпадает с пространством $C_0^\alpha(E) = C_0^\alpha([0, 1], E)$ ($0 < \alpha < 1$), норма в котором имеет вид

$$\|f\|_{C_0^\alpha(E)} = \|f\|_{C(E)} + \sup_{0 \leq t < t+\tau \leq 1} \frac{t^\alpha \|f(t+\tau) - f(t)\|_E}{\tau^\alpha},$$

причем нормы этих пространств эквивалентны равномерно по $\alpha \in (0, 1)$.

Ранее в [17, 18] исследовалась коэрцитивная разрешимость задачи (1.1) в пространствах $C^\alpha(E)$, $C_0^{\beta, \gamma}(E)$ и $C_0^{\beta, \gamma}([0, 1], E_{\alpha-\beta})$ ($0 \leq \gamma \leq \beta \leq \alpha$, $0 < \alpha < 1$) в предположении о том, что элемент $A(0)\mu + f(\lambda) - f(0)$ принадлежит некоторому подпространству, полученному методом вещественной интерполяции из пары E и $D(A(t))$. А в [19] аналогичные результаты получены для задачи (1.1) с постоянным оператором $A(t) \equiv A$.

В настоящей работе доказывается коэрцитивная разрешимость задачи (1.1) в пространстве $C_0^{\alpha, \alpha}(E)$ при $\mu \in D$ без привлечения интерполяционных пространств.

В то же время, для задачи Коши с переменным оператором

$$v'(t) + A(t)v(t) = f(t) \quad (0 \leq t \leq 1), \quad v(0) = v_0 \quad (1.4)$$

был получен следующий результат (см. [20]).

Теорема 1.1. Пусть $v_0 \in D$, $f \in C_0^{\alpha, \alpha}(E)$ при некоторых $0 < \alpha < \varepsilon \leq 1$. Тогда задача (1.4) коэрцитивно разрешима в $C_0^{\alpha, \alpha}(E)$, и для ее единственного решения $v(t)$ справедливо неравенство

$$\|v'\|_{C_0^{\alpha, \alpha}(E)} + \|A(\cdot)v\|_{C_0^{\alpha, \alpha}(E)} \leq M \left[\|A(0)v_0\|_E + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C_0^{\alpha, \alpha}(E)} \right] \quad (1.5)$$

с постоянной M , не зависящей от α, v_0 и f .

Известно, что при любых $t > s$, $\delta > 0$ и $M > 0$ для аналитической полугруппы справедливы следующие оценки (см. [14, 20]):

$$\|\exp\{-(t-s)A(t)\}\|_{E \rightarrow E} \leq M \exp\{-\delta(t-s)\},$$

$$\|A(t) \exp\{-(t-s)A(t)\}\|_{E \rightarrow E} \leq M(t-s)^{-1} \exp\{-\delta(t-s)\}.$$

Далее, для любых $0 \leq s < t \leq 1$ и $M > 0$ верны оценки (см. [14, 20]):

$$\|v(t, s)\|_{E \rightarrow E} \leq M, \quad \|A(t)v(t, s)A^{-1}(s)\|_{E \rightarrow E} \leq M,$$

$$\|A(t)v(t, s)\|_{E \rightarrow E} \leq \frac{M}{t-s}, \quad (1.6)$$

Кроме того, в [17, 18] установлены следующие леммы.

Лемма 1.1. Пусть $A(t)A^{-1}(p) = A(t+\lambda)A^{-1}(p)$ при некоторых $0 \leq t \leq t+\lambda$, $p \in [0, 1]$. Тогда для любых $0 \leq s < t \leq t+\lambda$, $u \in D$ справедливо тождество

$$v(t, s)u = v(t+\lambda, s+\lambda)u. \quad (1.7)$$

Лемма 1.2. Пусть выполняются условия леммы 1.1. Тогда оператор $I - v(\lambda, 0)$ имеет ограниченный обратный, и справедливы неравенства

$$\|(I - v(\lambda, 0))^{-1}\|_{E \rightarrow E} \leq M, \quad (1.8)$$

$$\|A(0)(I - v(\lambda, 0))^{-1}A^{-1}(\lambda)\|_{E \rightarrow E} \leq M. \quad (1.9)$$

2. КОЭРЦИТИВНАЯ РАЗРЕШИМОСТЬ В $C_0^{\alpha, \alpha}(E)$

Теорема 2.1. Пусть $\mu \in D$, $f \in C_0^{\alpha, \alpha}(E)$ при некоторых $0 < \alpha < \varepsilon \leq 1$. Тогда задача (1.1) коэрцитивно разрешима в $C_0^{\alpha, \alpha}(E)$, и для ее единственного решения $v(t)$ справедливо неравенство

$$\|v'\|_{C_0^{\alpha, \alpha}(E)} + \|A(\cdot)v\|_{C_0^{\alpha, \alpha}(E)} \leq M \left[\|A(0)\mu\|_E + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C_0^{\alpha, \alpha}(E)} \right] \quad (2.1)$$

с постоянной M , не зависящей от α, μ и f .

Доказательство. Используем представление $A(0)v_0 =$

$$\begin{aligned}
 &= A(0)(I - v(\lambda, 0))^{-1} \left\{ \mu + \int_0^\lambda v(\lambda, s) f(s) ds \right\} = -A(0)(I - v(\lambda, 0))^{-1} \int_0^\lambda v(\lambda, s) (f(\lambda) - f(s)) ds + \\
 &\quad + A(0)(I - v(\lambda, 0))^{-1} \int_0^\lambda v(\lambda, s) [A(\lambda) - A(s)] A^{-1}(\lambda) f(\lambda) ds + \\
 &+ A(0)(I - v(\lambda, 0))^{-1} ((I - v(\lambda, 0)) A^{-1}(\lambda) f(\lambda) + \mu) = -A(0)(I - v(\lambda, 0))^{-1} \int_0^\lambda v(\lambda, s) (f(\lambda) - f(s)) ds + \\
 &\quad + A(0)(I - v(\lambda, 0))^{-1} \int_0^\lambda v(\lambda, s) [A(\lambda) - A(s)] A^{-1}(\lambda) f(\lambda) ds + \\
 &\quad + A(0) A^{-1}(\lambda) f(\lambda) + A(0)(I - v(\lambda, 0))^{-1} \mu = I_1 + I_2 + I_3 + I_4,
 \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned}
 I_1 &= -A(0)(I - v(\lambda, 0))^{-1} \int_0^\lambda v(\lambda, s) (f(\lambda) - f(s)) ds, \\
 I_2 &= A(0)(I - v(\lambda, 0))^{-1} \int_0^\lambda v(\lambda, s) [A(\lambda) - A(s)] A^{-1}(\lambda) f(\lambda) ds, \\
 I_3 &= A(0) A^{-1}(\lambda) f(\lambda), \quad I_4 = A(0)(I - v(\lambda, 0))^{-1} \mu.
 \end{aligned}$$

Воспользуемся неравенством (1.5), полученным для задачи Коши. Достаточно получить оценку для $A(0)v_0$ в норме E . Для этого нужно оценить I_1, I_2, I_3 и I_4 . Сначала оценим I_1 . В силу (1.6) и (1.9) имеем

$$\begin{aligned}
 \|I_1\|_E &\leq \|A(0)(I - v(\lambda, 0))^{-1} A^{-1}(\lambda)\|_{E \rightarrow E} \left\| \int_0^\lambda A(\lambda) v(\lambda, s) (f(\lambda) - f(s)) ds \right\|_E \leq \\
 &\leq M \int_0^\lambda \|A(\lambda) v(\lambda, s)\|_{E \rightarrow E} \|f(\lambda) - f(s)\|_E ds \leq M_1 \int_0^\lambda \frac{(\lambda - s)^\alpha ds}{(\lambda - s) \lambda^\alpha} \|f\|_{C_0^{\alpha, \alpha}(E)} = \\
 &= M_1 \int_0^\lambda \frac{ds}{(\lambda - s)^{1-\alpha} \lambda^\alpha} \|f\|_{C_0^{\alpha, \alpha}(E)} = \frac{M_1}{\alpha} \|f\|_{C_0^{\alpha, \alpha}(E)}.
 \end{aligned}$$

Теперь оценим I_2 . Воспользовавшись оценками (1.3), (1.6) и (1.9), получаем

$$\begin{aligned}
 \|I_2\|_E &\leq \|A(0)(I - v(\lambda, 0))^{-1} A^{-1}(\lambda)\|_{E \rightarrow E} \left\| \int_0^\lambda A(\lambda) v(\lambda, s) [A(\lambda) - A(s)] A^{-1}(\lambda) f(\lambda) ds \right\|_E \leq \\
 &\leq M \int_0^\lambda \|A(\lambda) v(\lambda, s)\|_{E \rightarrow E} \|[A(\lambda) - A(s)] A^{-1}(\lambda)\|_{E \rightarrow E} \|f(\lambda)\|_E ds \leq \\
 &\leq M_1 \int_0^\lambda \frac{(\lambda - s)^\varepsilon ds}{\lambda - s} \|f\|_{C_0^{\alpha, \alpha}(E)} \leq M_1 \int_0^\lambda \frac{ds}{(\lambda - s)^{1-\alpha}} \|f\|_{C_0^{\alpha, \alpha}(E)} \leq \frac{M_1}{\alpha} \|f\|_{C_0^{\alpha, \alpha}(E)}.
 \end{aligned}$$

Далее оцениваем I_3 :

$$\|I_3\|_E \leq \|A(0) A^{-1}(\lambda)\|_{E \rightarrow E} \|f(\lambda)\|_E \leq M_1 \|f\|_{C_0^{\alpha, \alpha}(E)}.$$

Наконец, в силу (1.9) имеем, что

$$\|I_4\|_E \leq M_1 \|A(0)\mu\|_E.$$

Объединив оценки для I_1, I_2, I_3 и I_4 , получаем неравенство

$$\|A(0)v_0\|_E \leq M_1 \left[\|A(0)\mu\|_E + \frac{1}{\alpha} \|f\|_{C_0^{\alpha,\alpha}(E)} \right]. \quad (2.2)$$

Используя последнюю оценку в правой части неравенства (1.5), получим (2.1). \square

3. ПРИЛОЖЕНИЯ

В статьях [17–19] были рассмотрены примеры задачи (1.1) в классе параболических дифференциальных уравнений. Здесь же мы применим полученные в абстрактной ситуации результаты к двум следующим классам операторов:

1. сильно эллиптическим функционально-дифференциальным операторам с растяжением и сжатием пространственных переменных в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$;
2. эллиптическим операторам в ограниченной области $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ с нелокальными краевыми условиями, связывающими значения функции и ее производных на границе области со значениями на некотором компакте внутри области.

Таким образом, данная статья охватывает случай параболических уравнений с нелокальными условиями как по времени, так и по пространственным переменным. В каждом из этих случаев мы убедимся, что соответствующий оператор удовлетворяет (1.2) и порождает аналитическую полугруппу в $E = L_2(\Omega)$.

Отметим, что смешанные задачи для параболических дифференциально-разностных уравнений со сдвигами пространственных переменных изучались методами теории полугрупп в работах [9, 13]. Рассматривались вопросы, связанные с обобщенными и сильными решениями смешанных задач, а также с пространством начальных данных. Существенную роль здесь играют результаты, полученные ранее для эллиптических дифференциально-разностных уравнений в [12, 16, 22, 23].

Начальные задачи для параболических функционально-дифференциальных уравнений с запаздыванием по времени и неограниченными операторными коэффициентами рассматривались в [1, гл. 2]. Разрешимость, гладкость, асимптотические свойства и оценки решений в весовых пространствах Соболева на полуоси устанавливались на основе исследования соответствующих операторных пучков.

Параболические уравнения с нелокальными условиями по пространственным переменным играют важную роль в теории многомерных диффузионных процессов (см. [2] и приведенную там библиографию). Систематическое изложение теории нелокальных краевых задач для эллиптических уравнений можно найти в [3, 10, 11].

Далее через $H^1(\Omega)$ обозначается пространство Соболева комплекснозначных функций, принадлежащих $L_2(\Omega)$ вместе с обобщенными производными первого порядка, а через $\dot{H}^1(\Omega)$ — замыкание множества $C_0^\infty(\Omega)$ финитных бесконечно дифференцируемых функций в $H^1(\Omega)$. Пространства $H^1(\Omega)$ и $\dot{H}^1(\Omega)$ — гильбертовы со скалярными произведениями

$$(u, w)_{H^1(\Omega)} = \int_{\Omega} (u\bar{w} + \nabla u \nabla \bar{w}) dx, \quad (u, w)_{\dot{H}^1(\Omega)} = \int_{\Omega} \nabla u \nabla \bar{w} dx.$$

Пространство $\dot{H}^1(\Omega)$ можно отождествлять с подпространством функций из $H^1(\mathbb{R}^n)$, равных нулю вне Ω .

В обозначении для нормы оператора $\|\cdot\|_{E \rightarrow E}$ индекс будем опускать.

3.1. Параболическое функционально-дифференциальное уравнение с растяжением и сжатием пространственных переменных. В этом пункте рассматривается задача

$$v_t(x, t) - \sum_{i,j=1}^n (R_{ij} v_{x_i}(x, t))_{x_j} = f(x, t) \quad (x \in \Omega, 0 \leq t \leq 1), \quad (3.1)$$

$$v|_{t=0} = v|_{t=1} + \mu(x), \quad v|_{\partial\Omega \times [0,1]} = 0. \quad (3.2)$$

Действие операторов R_{ij} связано только с переменной x , они определяются формулой

$$R_{ij}u(x) = \sum_l a_{ijl}u(q^{-l}x). \quad (3.3)$$

Здесь $\lambda \in (0, 1]$ и $q > 1$ — фиксированные числа, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область, содержащая начало координат, a_{ijl} — заданные комплексные числа, а $f(x, t)$ и $\mu(x)$ — заданные комплексные функции. Индекс l в (3.3) пробегает конечное подмножество целых чисел и может быть как положительным, так и отрицательным. Если $q^{-l}x \notin \Omega$ при некоторых l и $x \in \Omega$, то считаем $u(q^{-l}x) = 0$ в (3.3) (другими словами, функции продолжаются нулем вне Ω перед применением к ним оператора R_{ij}).

Центральное предположение, связанное со структурой выражения $-\sum_{i,j=1}^n (R_{ij}u_{x_i})_{x_j}$, состоит в том, что мы требуем выполнения неравенства типа Гординга

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega} (R_{ij}u_{x_i}) \bar{u}_{x_j} dx \geq c_1 \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2 - c_2 \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad (u \in C_0^\infty(\Omega)), \quad (3.4)$$

в котором постоянные $c_1 > 0$ и $c_2 \geq 0$ не зависят от $u \in C_0^\infty(\Omega)$.

В [8] показано, что данное неравенство равносильно алгебраическому неравенству

$$\operatorname{Re} \sum_{i,j=1}^n a_{ijl} \xi_i \xi_j z^l > 0 \quad (z \in \mathbb{C}, |z| = q^{n/2}; \xi \in \mathbb{R}^n, |\xi| = 1), \quad (3.5)$$

причем из (3.5) вытекает (3.4) с постоянной $c_2 = 0$ и постоянной c_1 , равной минимуму выражения слева в (3.5). В этом пункте условие (3.5) будем предполагать выполненным.

Чтобы воспользоваться результатом первой части работы, необходимо дать формальное описание оператора, отвечающего уравнению (3.1) (в нашем случае это будет постоянный оператор, не зависящий от t). Для этого зададим на пространстве $L_2(\Omega)$ полуторалинейную форму

$$\mathfrak{a}_R[u, w] = \sum_{i,j=1}^n (R_{ij}u_{x_i}, w_{x_j})_{L_2(\Omega)} \quad (3.6)$$

с плотной в $L_2(\Omega)$ областью определения $D(\mathfrak{a}_R) = \dot{H}^1(\Omega)$. В силу основного предположения этого пункта она удовлетворяет неравенству

$$\operatorname{Re} \mathfrak{a}_R[u, u] \geq c_1 \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)}^2 \quad (u \in \dot{H}^1(\Omega)). \quad (3.7)$$

Кроме того, очевидно, существует постоянная $M > 0$ такая, что

$$|\mathfrak{a}_R[u, w]| \leq M \|\nabla u\|_{L_2(\Omega)} \|\nabla w\|_{L_2(\Omega)} \quad (u, w \in \dot{H}^1(\Omega)). \quad (3.8)$$

Из (3.7) и (3.8) следует замкнутость полуторалинейной формы и ее секториальность: значения $\mathfrak{a}_R[u, u]$ при $0 \neq u \in \dot{H}^1(\Omega)$ лежат на комплексной плоскости внутри угла с вершиной в нуле, охватывающего положительную вещественную полуось и имеющего полураствор $\operatorname{arctg}(M/c_1)$. Согласно первой теореме о представлении (см. [4, теорема 2.1, гл. IV]), формой (3.6) однозначно задается m -секториальный (в смысле Т. Като) оператор $A_R : D(A_R) \subset L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ с плотной в $L_2(\Omega)$ областью определения $D(A_R) \subset \dot{H}^1(\Omega)$ такой, что $\mathfrak{a}_R[u, w] = (A_R u, w)_{L_2(\Omega)}$ при $u \in D(A_R)$, $w \in \dot{H}^1(\Omega)$. В [8] показано, что $D(A_R)$ не лежит, вообще говоря, в $H_{loc}^2(\Omega)$. Там же получены достаточные условия, когда $D(A_R) = \dot{H}^1(\Omega) \cap H^2(\Omega)$.

Итак, решение задачи (3.1), (3.2) понимается в смысле данного в начале работы определения, где оператор $A(t) \equiv A_R$ ассоциирован с полуторалинейной формой (3.6). Убедимся, что оператор $(-A_R)$ является генератором аналитической полугруппы. В [21, гл. II, §4] доказано, что данное свойство оператора равносильно его секториальности в следующем смысле (см. также [15]):

существует число $\delta > 0$ такое, что угол $\sum_{\pi/2+\delta} = \{0 \neq z \in \mathbb{C} : |\arg z| < \pi/2 + \delta\}$ содержится в резольвентном множестве оператора $(-A_R)$ и для любого $\varepsilon \in (0, \delta)$ существует $M_\varepsilon > 0$:

$$\|(zI + A_R)^{-1}\| \leq M_\varepsilon / |z| \quad (z \in \Sigma_{\pi/2+\delta-\varepsilon}). \quad (3.9)$$

Лемма 3.1. *Оператор $(-A_R)$ — секториальный в указанном выше смысле.*

Доказательство. Положим для удобства $\sigma = \operatorname{Re} z$, $\nu = \operatorname{Im} z$, $C = M/c_1$. Тот факт, что угол $\{\sigma + i\nu : C\sigma + |\nu| > 0\}$ содержится в резольвентном множестве оператора $(-A_R)$, хорошо известен (см., например, не претендующий на новизну вывод в [8, §2.3]). Осталось получить оценку для резольвенты (3.9) в этом угле. Равенство $(zI + A_R)u = g$, $0 \neq u \in D(A_R)$, $g \in L_2(\Omega)$, можно записать эквивалентным образом в виде (интегрального) тождества

$$z(u, w)_{L_2(\Omega)} + \mathfrak{a}_R[u, w] = (g, w)_{L_2(\Omega)} \quad (w \in \mathring{H}^1(\Omega)).$$

При $w = u$ будем иметь

$$\sigma \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \operatorname{Re} \mathfrak{a}_R[u, u] + i \left(\nu \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \operatorname{Im} \mathfrak{a}_R[u, u] \right) = (g, u)_{L_2(\Omega)},$$

откуда следует, что

$$-\|g\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{L_2(\Omega)} \leq \sigma \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \operatorname{Re} \mathfrak{a}_R[u, u] \leq \|g\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{L_2(\Omega)}, \quad (3.10)$$

$$-\|g\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{L_2(\Omega)} \leq \nu \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + \operatorname{Im} \mathfrak{a}_R[u, u] \leq \|g\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{L_2(\Omega)}. \quad (3.11)$$

Кроме того,

$$-C \operatorname{Re} \mathfrak{a}_R[u, u] < \operatorname{Im} \mathfrak{a}_R[u, u] < C \operatorname{Re} \mathfrak{a}_R[u, u]. \quad (3.12)$$

Комбинируя (3.10)–(3.12), получаем

$$-\|g\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{L_2(\Omega)} < \nu \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + C \operatorname{Re} \mathfrak{a}_R[u, u] \leq \nu \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 + C \|g\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{L_2(\Omega)} - C\sigma \|u\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

или

$$(C\sigma - \nu) \|u\|_{L_2(\Omega)} < (C + 1) \|g\|_{L_2(\Omega)},$$

а также

$$\nu \|u\|_{L_2(\Omega)}^2 < C \operatorname{Re} \mathfrak{a}_R[u, u] + \|g\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{L_2(\Omega)} \leq (C + 1) \|g\|_{L_2(\Omega)} \|u\|_{L_2(\Omega)} - C\sigma \|u\|_{L_2(\Omega)}^2,$$

или

$$(C\sigma + \nu) \|u\|_{L_2(\Omega)} < (C + 1) \|g\|_{L_2(\Omega)}.$$

Таким образом, $(C\sigma + |\nu|) \|u\|_{L_2(\Omega)} < (C + 1) \|g\|_{L_2(\Omega)}$, что означает оценку для резольвенты

$$\|(zI + A_R)^{-1}\| \leq \frac{C + 1}{C\sigma + |\nu|}$$

в рассматриваемом угле. В то же время, нетрудно убедиться, что в любом охватывающем положительную вещественную полуось симметричном угле меньшего раствора $\{\sigma + i\nu : C'\sigma + |\nu| > 0\}$ ($C' > C$) справедливо неравенство

$$K(C\sigma + |\nu|) \geq |\sigma| + |\nu|,$$

где

$$K = \max \left\{ \frac{1}{C}, \frac{C' + 1}{C' - C} \right\}.$$

Поэтому окончательно имеем

$$\|(zI + A_R)^{-1}\| \leq \frac{K(C + 1)}{|\sigma| + |\nu|} \leq \frac{K(C + 1)}{|z|} \quad (C'\sigma + |\nu| > 0).$$

□

Замечание 3.1. Резольвента $(zI + A_R)^{-1}$ существует и в окрестности точки $z = 0$. Вместе с леммой 3.1 это означает, что спектр оператора $(-A_R)$ сдвинут влево от мнимой оси, и имеет место неравенство

$$\|(zI + A_R)^{-1}\| \leq \frac{M}{1 + |z|} \quad (\operatorname{Re} z \geq 0),$$

т. е. для оператора A_R выполнено условие (1.2).

Таким образом, мы приходим к основному результату этого пункта — следствию из теоремы 2.1.

Следствие 3.1. При $\mu \in D(A_R)$ и $f \in C_0^{\alpha,\alpha}(L_2(\Omega))$ задача (3.1), (3.2) имеет единственное решение $v(x, t)$, функции $v_t(\cdot, t)$ и $A_R v(\cdot, t)$ принадлежат пространству $C_0^{\alpha,\alpha}(L_2(\Omega))$, и справедлива оценка

$$\|v_t\|_{C_0^{\alpha,\alpha}(L_2(\Omega))} + \|A_R v\|_{C_0^{\alpha,\alpha}(L_2(\Omega))} \leq M_R \left[\|A_R \mu\|_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C_0^{\alpha,\alpha}(L_2(\Omega))} \right]$$

с постоянной $M_R > 0$, не зависящей от α, μ и f .

3.2. Параболическое дифференциальное уравнение с нелокальным условием на $\partial\Omega$. В этом пункте изучается задача

$$v_t(x, t) - \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) v_{x_i x_j}(x, t) + a_0 v(x, t) = f(x, t) \quad (x \in \Omega, 0 \leq t \leq 1), \quad (3.13)$$

$$v|_{t=0} = v|_{t=\lambda} + \mu(x), \quad \left(v(x, t) - \sum_{s=1}^S b_s(x) v(\omega_s(x), t) \right) \Big|_{\partial\Omega \times [0,1]} = 0. \quad (3.14)$$

Здесь Ω — ограниченная область в \mathbb{R}^n с гладкой границей, $\lambda \in (0, 1]$, $a_0 \in \mathbb{R}$, $a_{ij}, b_s \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $a_{ij}(x) = a_{ji}(x)$ — вещественные функции,

$$\sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) \xi_i \xi_j > 0 \quad (x \in \bar{\Omega}, 0 \neq \xi \in \mathbb{R}^n)$$

и ω_s ($s = 1, \dots, S$) — C^∞ -диффеоморфизмы, отображающие некоторую окрестность U границы $\partial\Omega$ на множества $\omega_s(U) \subset \Omega$.

Введем неограниченный оператор $A_\Gamma : D(A_\Gamma) \subset L_2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega)$ с областью определения

$$D(A_\Gamma) \equiv H_\Gamma^2(\Omega) = \left\{ u \in H^2(\Omega) : \left(u(x) - \sum_{s=1}^S b_s(x) u(\omega_s(x)) \right) \Big|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

действующий по формуле

$$A_\Gamma u(x) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) u_{x_i x_j}, \quad u \in H_\Gamma^2(\Omega).$$

Лемма 3.2. Оператор $A_\Gamma - a_0 I$ является секториальным при всех достаточно больших a_0 .

Доказательство. Введем оператор-функцию $L(z) : H^2(\Omega) \rightarrow L_2(\Omega) \times H^{3/2}(\partial\Omega)$ по формуле

$$L(z)w(x) = \left(- \sum_{i,j=1}^n a_{ij}(x) w_{x_i x_j} + zw, \left(w(x) - \sum_{s=1}^S b_s(x) w(\omega_s(x)) \right) \Big|_{\partial\Omega} \right),$$

представляющую собой ограниченный оператор при каждом $z \in \mathbb{C}$.

Согласно [10, теорема 2.1.2, гл. 2, §2.1] для любого числа $0 < \delta < \pi/2$ существует число $r_\delta > 0$ такое, что при всех z из множества $\Sigma_{\pi/2+\delta} \cap \{|z| > r_\delta\}$ оператор $L(z)$ имеет ограниченный обратный $L^{-1}(z) : L_2(\Omega) \times H^{3/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^2(\Omega)$. При этом неравенство

$$\|w\|_{H^2(\Omega)} + |z| \|w\|_{L_2(\Omega)} \leq C_\delta \left(\|g_0\|_{L_2(\Omega)} + \|g_1\|_{H^{3/2}(\partial\Omega)} + |z|^{3/4} \|g_1\|_{L_2(\partial\Omega)} \right),$$

где для краткости обозначили $(g_0, g_1) = Lw$, выполняется с постоянной $C_\delta > 0$, не зависящей как от $w \in H^2(\Omega)$, так и от $z \in \Sigma_{\pi/2+\delta} \cap \{|z| > r_\delta\}$. Но это в точности означает, что всякое множество вида $\Sigma_{\pi/2+\delta} \cap \{|z| > r_\delta\}$ состоит из резольвентных точек оператора A_Γ , и на нем справедлива оценка для резольвенты $\|(zI - A_\Gamma)^{-1}\| \leq C_\delta/|z|$. Тогда при $a_0 > r_\delta/\cos\delta$ весь угол $\Sigma_{\pi/2+\delta}$ лежит в резольвентном множестве оператора $A_\Gamma - a_0 I$, и имеет место неравенство

$$\|(zI - (A_\Gamma - a_0 I))^{-1}\| \leq \frac{C_\delta}{|z + a_0|} \leq \frac{C_\delta/\cos\delta}{|z|} \quad (z \in \Sigma_{\pi/2+\delta}).$$

Кроме того, спектр оператора $A_\Gamma - a_0 I$ сдвинут влево от мнимой оси и имеет место оценка $\|(zI - (A_\Gamma - a_0 I))^{-1}\| \leq M(1 + |z|)^{-1}$ ($\operatorname{Re} z \geq 0$). \square

Решение $v(x, t)$ задачи (3.13), (3.14) вновь понимается в смысле определения, данного в начале работы, в этот раз с оператором $A(t) \equiv -A_\Gamma + a_0 I$. А именно, v есть непрерывно дифференцируемая на отрезке $[0, 1]$ функция со значениями в $L_2(\Omega)$, $v(\cdot, t) \in H_\Gamma^2(\Omega)$ при каждом $t \in [0, 1]$, функция $A_\Gamma v(\cdot, t)$ непрерывна на $[0, 1]$ со значениями в $L_2(\Omega)$, при каждом $t \in [0, 1]$ правая и левая части (3.13) совпадают как элементы $L_2(\Omega)$, и $v(\cdot, 0) = v(\cdot, \lambda) + \mu$.

Следствие 3.2. Пусть $a_0 > 0$ достаточно велико. Тогда при всех функциях $\mu \in H_\Gamma^2(\Omega)$ и $f \in C_0^{\alpha, \alpha}(L_2(\Omega))$ задача (3.13), (3.14) имеет единственное решение $v(x, t)$, функции $v_t(\cdot, t)$ и $A_\Gamma v(\cdot, t)$ принадлежат пространству $C_0^{\alpha, \alpha}(L_2(\Omega))$, и справедлива оценка

$$\|v_t\|_{C_0^{\alpha, \alpha}(L_2(\Omega))} + \|(-A_\Gamma + a_0 I)v\|_{C_0^{\alpha, \alpha}(L_2(\Omega))} \leq M_\Gamma \left[\|(-A_\Gamma + a_0 I)\mu\|_{L_2(\Omega)} + \frac{1}{\alpha(1-\alpha)} \|f\|_{C_0^{\alpha, \alpha}(L_2(\Omega))} \right]$$

с постоянной $M_\Gamma > 0$, не зависящей от α, μ и f .

Замечание 3.2. Недостатком приведенного результата является то, что нижняя граница для a_0 не описана явно. Вопрос о том, будет ли секториальным сам оператор A_Γ , сводится к локализации его спектра. Принимая во внимание, что в круге $\{|z| \leq r_\delta\}$ спектр состоит лишь из конечного числа собственных значений оператора A_Γ (см. [10, следствие 2.1.2, гл. 2, §2.1]), достаточно установить, что все собственные значения оператора A_Γ лежат строго в левой полуплоскости. Однако в общем случае это сделать затруднительно. Ниже приведен пример секториального оператора A_Γ .

Пример 3.1. Рассмотрим задачу в прямоугольнике

$$v_t(x, t) - a^2 v_{xx}(x, t) = f(x, t) \quad (0 < x < 2, 0 \leq t \leq 1), \quad (3.15)$$

$$v|_{t=0} = v|_{t=\lambda} + \mu(x), \quad v|_{x=0} = b_1 v|_{x=1}, \quad v|_{x=2} = b_2 v|_{x=1}, \quad (3.16)$$

где $a > 0$ и $b_1, b_2 \in \mathbb{R}$.

Получим условия, при которых оператор $A_\Gamma : L_2(0, 2) \rightarrow L_2(0, 2)$,

$$A_\Gamma u(x) = a^2 u''(x), \quad u \in D(A_\Gamma) = H_\Gamma^2(0, 2) = \{u \in H^2(0, 2) : u(0) = b_1 u(1), u(2) = b_2 u(1)\},$$

является секториальным. Его собственные значения вычисляются непосредственно. Независимо от коэффициентов b_1, b_2 в нелокальных условиях, числа $z_{1,k}$,

$$\frac{z_{1,k}}{a^2} = -(\pi k)^2, \quad k \in \mathbb{N}, \quad (3.17)$$

являются собственными значениями оператора A_Γ .

Если $-2 \leq b_1 + b_2 < 2$, то к этой серии добавляется еще одна серия

$$\frac{z_{2,k}}{a^2} = -\left(\pm \arccos \frac{b_1 + b_2}{2} + 2\pi m\right)^2, \quad m \in \mathbb{Z},$$

также отрицательных собственных значений.

При $b_1 + b_2 \geq 2$ к серии (3.17) добавляется серия

$$\frac{z_{3,k}}{a^2} = \ln^2 \left(\frac{b_1 + b_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)^2 - 1} \right) - (2\pi k)^2 \pm i4\pi k \ln \left(\frac{b_1 + b_2}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)^2 - 1} \right),$$

$$k = 0, 1, \dots,$$

в которой всегда есть неотрицательное собственное значение (при $k = 0$).

Если же $b_1 + b_2 < -2$, то собственные значения оператора A_Γ состоят из (3.17) и серии

$$\begin{aligned} \frac{z_{4,k}}{a^2} = \ln^2 \left(\frac{|b_1 + b_2|}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)^2 - 1} \right) - \pi^2(2m + 1)^2 \pm \\ \pm i2\pi(2m + 1) \ln \left(\frac{|b_1 + b_2|}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_1 + b_2}{2}\right)^2 - 1} \right), \quad m = 0, 1, \dots \end{aligned}$$

Вещественные части всех собственных значений этой последней серии будут отрицательными, если

$$\ln \left(\frac{|b_1 + b_2|}{2} + \sqrt{\left(\frac{b_1 + b_2}{2} \right)^2 - 1} \right) < \pi,$$

т. е. $b_1 + b_2 > -2 \operatorname{ch} \pi$. Итак, условие $-2 \operatorname{ch} \pi < b_1 + b_2 < 2$ является необходимым и достаточным для секториальности (и сильной позитивности) оператора A_Γ в этом примере.

Следствие 3.3. *Предположим, что $-2 \operatorname{ch} \pi < b_1 + b_2 < 2$. Тогда для всех функций $\mu \in H_\Gamma^2(0, 2)$ и $f \in C_0^{\alpha, \alpha}(L_2(0, 2))$ задача (3.15), (3.16) имеет единственное решение $v(x, t)$. При этом функции $v_t(\cdot, t)$ и $v_{xx}(\cdot, t)$ принадлежат пространству $C_0^{\alpha, \alpha}(L_2(0, 2))$, и выполняется оценка*

$$\|v_t\|_{C_0^{\alpha, \alpha}(L_2(0, 2))} + \|v_{xx}\|_{C_0^{\alpha, \alpha}(L_2(0, 2))} \leq M_\Gamma \left[\|\mu_{xx}\|_{L_2(0, 2)} + \frac{1}{\alpha(1 - \alpha)} \|f\|_{C_0^{\alpha, \alpha}(L_2(0, 2))} \right]$$

с постоянной $M_\Gamma > 0$, не зависящей от α, μ и f .

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Власов В. В. Функционально-дифференциальные уравнения в пространствах Соболева и их спектральный анализ. — М.: Изд-во Попечит. Сов. мех.-мат. ф-та МГУ им. М. В. Ломоносова, 2011.
2. Галахов Е. И., Скубачевский А. Л. О сжимающих неотрицательных полугруппах с нелокальными условиями// Мат. сб. — 1998. — 189, № 1. — С. 45–78.
3. Гуревич П. Л. Эллиптические задачи с нелокальными краевыми условиями и полугруппы Феллера// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2010. — 38. — С. 3–173.
4. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. — М.: Мир, 1972.
5. Красносельский М. А., Забрейко П. П., Пустыльник Е. И., Соболевский П. Е. Интегральные операторы в пространствах суммируемых функций. — М.: Наука, 1966.
6. Крейн С. Г. Линейные дифференциальные уравнения в банаховом пространстве. — М.: Наука, 1967.
7. Крейн С. Г., Хазан М. И. Дифференциальные уравнения в банаховом пространстве// Итоги науки и техн. Сер. Мат. анализ. — 1983. — 21. — С. 130–264.
8. Россовский Л. Е. Эллиптические функционально-дифференциальные уравнения со сжатием и растяжением аргументов неизвестной функции// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2014. — 54. — С. 3–138.
9. Селицкий А. М., Скубачевский А. Л. Вторая краевая задача для параболического дифференциально-разностного уравнения// Тр. сем. им. И. Г. Петровского. — 2007. — 26. — С. 324–347.
10. Скубачевский А. Л. Неклассические краевые задачи. I// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2007. — 26. — С. 3–132.
11. Скубачевский А. Л. Неклассические краевые задачи. II// Соврем. мат. Фундам. направл. — 2009. — 33. — С. 3–179.
12. Скубачевский А. Л., Цветков Е. Л. Вторая краевая задача для эллиптических дифференциально-разностных уравнений// Дифф. уравн. — 1989. — 25, № 10. — С. 1766–1776.
13. Скубачевский А. Л., Шамин Р. В. Первая смешанная задача для параболического дифференциально-разностного уравнения// Мат. заметки. — 1999. — 66, № 1. — С. 145–153.
14. Соболевский П. Е. Об уравнениях параболического типа в банаховом пространстве// Труды Моск. мат. об-ва. — 1961. — 10. — С. 297–350.
15. Хенри Д. Геометрическая теория полулинейных параболических уравнений. — М.: Мир, 1985.
16. Цветков Е. Л. Разрешимость и спектр третьей краевой задачи для эллиптического дифференциально-разностного уравнения// Мат. заметки. — 1992. — 51, № 6. — С. 107–114.
17. Ashyralyev A., Hanalyev A. Coercive solvability of parabolic differential equations with dependent operators// TWMS J. Appl. Eng. Math. — 2012. — 2, № 1. — С. 75–93.
18. Ashyralyev A., Hanalyev A. Well-posedness of nonlocal parabolic differential problems with dependent operators// The Sci. World J. — 2014. — 2014. — С. 1–11.
19. Ashyralyev A., Hanalyev A., Sobolevskii P. E. Coercive solvability of the nonlocal boundary-value problem for parabolic differential equations// Abstr. Appl. Anal. — 2001. — 6, № 1. — С. 53–61.
20. Ashyralyev A., Sobolevskii P. E. New difference schemes for partial differential equations. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 2004.
21. Engel K.-J., Nagel R. One-parameter semigroups for linear evolution equations. — New York: Springer, 2000.
22. Skubachevskii A. L. The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations// J. Differ. Equ. — 1986. — 63. — С. 332–361.

23. *Skubachevskii A.L.* Elliptic functional-differential equations and applications. — Basel—Boston—Berlin: Birkhäuser, 1997.

Л. Е. Россовский

Российский университет дружбы народов, кафедра прикладной математики
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: lrossovski@gmail.com

А. Р. Ханалыев

Российский университет дружбы народов, кафедра прикладной математики
117198, Москва, ул. Миклухо-Маклая, д. 6
E-mail: asker-hanalyyew@rambler.ru

UDC 517.95+517.98

Coercive Solvability of Nonlocal Boundary-Value Problems for Parabolic Equations

© 2016 L. E. Rossovskii, A. R. Khanalyev

Abstract. In a Banach space E we consider nonlocal problem

$$\begin{aligned}v'(t) + A(t)v(t) &= f(t) \quad (0 \leq t \leq 1), \\v(0) &= v(\lambda) + \mu \quad (0 < \lambda \leq 1)\end{aligned}$$

for abstract parabolic equation with linear unbounded strongly positive operator $A(t)$ with independent of t , everywhere dense in E domain $D = D(A(t))$. This operator generates analytic semigroup $\exp\{-sA(t)\}$ ($s \geq 0$).

We prove the coercive solvability of the problem in the Banach space $C_0^{\alpha, \alpha}([0, 1], E)$ ($0 < \alpha < 1$) with the weight $(t + \tau)^\alpha$. This result was previously known only for a constant operator. We consider applications in the class of parabolic functional differential equations with transformation of spatial variables and in the class of parabolic equations with nonlocal conditions on the boundary of domain. Thus, this describes parabolic equations with nonlocal conditions both in time and in spatial variables.

REFERENCES

1. V. V. Vlasov, *Funktsional'no-differentsial'nye uravneniya v prostranstvakh Soboleva i ikh spektral'nyy analiz* [Functional Differential Equations in Sobolev Spaces and Their Spectral Analysis], Izd-vo Popechit. Sov. mekh.-mat. f-ta MGU im. M. V. Lomonosova, Moscow, 2011.
2. E. I. Galakhov and A. L. Skubachevskii, "O szhimayushchikh neotritsatel'nykh polugruppakh s nelokal'nymi usloviyami" [On contracting nonnegative semigroups with nonlocal conditions], *Mat. sb.* [Math. Digest], 1998, **189**, No. 1, 45–78.
3. P. L. Gurevich, "Ellipticheskie zadachi s nelokal'nymi kraevymi usloviyami i polugruppy Fellera" [Elliptic problems with nonlocal boundary conditions and Feller semigroups], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2010, **38**, 3–173.
4. T. Kato, *Teoriya vozmushcheniy lineynykh operatorov* [Perturbation Theory for Linear Operators], Mir, Moscow, 1972.
5. M. A. Krasnosel'skiy, P. P. Zabreyko, E. I. Pustyl'nik, and P. E. Sobolevskiy, *Integral'nye operatory v prostranstvakh summiruemykh funktsiy* [Integral Operators in Spaces of Summable Functions], Nauka, Moscow, 1966.
6. S. G. Kreyn, *Lineynye differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve* [Linear Differential Equations in Banach Space], Nauka, Moscow, 1967.
7. S. G. Kreyn and M. I. Khazan, "Differentsial'nye uravneniya v banakhovom prostranstve" [Differential equations in Banach space], *Itogi nauki i tekhn. Ser. Mat. anal.* [Totals Sci. Tech. Ser. Math. Anal.], 1983, **21**, 130–264.

8. L. E. Rossovskii, “Ellipticheskie funktsional’no-differentsial’nye uravneniya so szhatiem i rastyazheniem argumentov neizvestnoy funktsii” [Elliptic functional differential equations with contractions and extensions of independent variables of the unknown function], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2014, **54**, 3–138.
9. A. M. Selitskiy and A. L. Skubachevskii, “Vtoraya kraevaya zadacha dlya parabolicheskogo differentsial’no-raznostnogo uravneniya” [Second boundary-value problem for parabolic differential-difference equation], *Tr. sem. im. I. G. Petrovskogo* [Proc. Petrovskii Semin.], 2007, **26**, 324–347.
10. A. L. Skubachevskii, “Neklassicheskie kraevye zadachi. I” [Nonclassical boundary-value problems. I], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2007, **26**, 3–132.
11. A. L. Skubachevskii, “Neklassicheskie kraevye zadachi. II” [Nonclassical boundary-value problems. II], *Sovrem. mat. Fundam. napravl.* [Contemp. Math. Fundam. Directions], 2009, **33**, 3–179.
12. A. L. Skubachevskii and E. L. Tsvetkov, “Vtoraya kraevaya zadacha dlya ellipticheskikh differentsial’no-raznostnykh uravneniy” [Second boundary-value problem for elliptic differential-difference equations], *Diff. uravn.* [Differ. Equ.], 1989, **25**, No. 10, 1766–1776.
13. A. L. Skubachevskii and R. V. Shamin, “Pervaya smeshannaya zadacha dlya parabolicheskogo differentsial’no-raznostnogo uravneniya” [First mixed problem for a parabolic differential-difference equation], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1999, **66**, No. 1, 145–153.
14. P. E. Sobolevskiy, “Ob uravneniyakh parabolicheskogo tipa v banakhovom prostranstve” [On equations of parabolic type in a Banach space], *Trudy Mosk. mat. ob-va* [Proc. Moscow Math. Soc.], 1961, **10**, 297–350.
15. D. Henry, *Geometricheskaya teoriya polulineynykh parabolicheskikh uravneniy* [Geometric Theory of Semilinear Parabolic Equations], Mir, Moscow, 1985.
16. E. L. Tsvetkov, “Razreshimost’ i spektr tret’ey kraevoy zadachi dlya ellipticheskogo differentsial’no-raznostnogo uravneniya” [Solvability and spectrum of the third boundary-value problem for elliptic differential-difference equation], *Mat. zametki* [Math. Notes], 1992, **51**, No. 6, 107–114.
17. A. Ashyralyev and A. Hanalyev, “Coercive solvability of parabolic differential equations with dependent operators,” *TWMS J. Appl. Eng. Math.*, 2012, **2**, No. 1, 75–93.
18. A. Ashyralyev and A. Hanalyev, “Well-posedness of nonlocal parabolic differential problems with dependent operators,” *The Sci. World J.*, 2014, **2014**, 1–11.
19. A. Ashyralyev, A. Hanalyev, and P. E. Sobolevskii, “Coercive solvability of the nonlocal boundary-value problem for parabolic differential equations,” *Abstr. Appl. Anal.*, 2001, **6**, No. 1, 53–61.
20. A. Ashyralyev and P. E. Sobolevskii, *New Difference Schemes for Partial Differential Equations*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 2004.
21. K.-J. Engel and R. Nagel, *One-Parameter Semigroups for Linear Evolution Equations*, Springer, New York, 2000.
22. A. L. Skubachevskii, “The first boundary value problem for strongly elliptic differential-difference equations,” *J. Differ. Equ.*, 1986, **63**, 332–361.
23. A. L. Skubachevskii, *Elliptic Functional-Differential Equations and Applications*, Birkhäuser, Basel—Boston—Berlin, 1997.

L. E. Rossovskii

Department of Applied Math, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st., 117198 Moscow, Russia
E-mail: lrossovskii@gmail.com

A. R. Khanalyev

Department of Applied Math, RUDN University, 6 Miklukho-Maklaya st., 117198 Moscow, Russia
E-mail: asker-hanalyew@rambler.ru

О СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ НЕПРЕРЫВНОГО МЕТОДА НЬЮТОНА© 2016 г. **А. ГИБАЛИ, Д. ШОЙХЕТ, Н. ТАРХАНОВ**

Аннотация. На основе недавних достижений геометрической теории спиральных функций изучается сходимость непрерывного метода Ньютона для решения нелинейных уравнений с голоморфными отображениями в банаховых пространствах. Доказываются теоремы о сходимости, результаты иллюстрируются численным моделированием.

СОДЕРЖАНИЕ

| | |
|---|-----|
| Введение | 152 |
| 1. Спиральные отображения | 153 |
| 2. Общие результаты для банаховых пространств | 154 |
| 3. Условие типа Неванлинны | 155 |
| 4. Каноническая редукция | 156 |
| 5. Локальный непрерывный метод Ньютона | 158 |
| 6. Пример | 160 |
| 7. Условие выпуклости | 160 |
| 8. Рисунки | 162 |
| Список литературы | 163 |

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим классическую задачу нахождения приближенного решения нелинейного уравнения

$$f(z) = 0$$

в области D комплексной плоскости \mathbb{C} , где $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ — функция, голоморфная в D . Чтобы решить ее, используют различные модификации рекуррентной формулы

$$z_{n+1} = z_n - \lambda_n \frac{f(z_n)}{f'(z_n)} \quad (0.1)$$

для $n = 0, 1, \dots$, где z_0 — начальное приближение в D , а $\lambda_n > 0$. Формула (0.1), в которой последовательность $\{\lambda_n\}$ подобрана правильным образом, называется *модифицированным методом Ньютона*, а при $\lambda_n \equiv 1$ — *классическим методом Ньютона* (см. [7]).

Будем рассматривать классический метод Ньютона. Сходимость (0.1) широко исследована; она зависит от выбора начальной точки $z_0 \in D$.

Рекуррентная формула (0.1) приводит к начальной задаче

$$\begin{cases} \dot{z} = -\frac{f(z)}{f'(z)} & \text{при } t > 0, \\ z(0) = z_0 \end{cases} \quad (0.2)$$

для кривой $z = z(t)$ в D , начинающейся в точке z_0 . При $f(z) = 0$ ее решение a принадлежит D . Если $\lambda \neq 0$, то, чтобы $f(a)$ обратилось в нуль, необходимо и достаточно, чтобы

$$-\lambda \frac{f(a)}{f'(a)} = 0,$$

Второй автор благодарит Германское исследовательское сообщество (DFG) за поддержку (грант TA 289/12-1), а Потсдамский университет — за приглашение и гостеприимство.

что равносильно условию

$$a - \lambda \frac{f(a)}{f'(a)} = a.$$

Стандартные последовательные приближения для решения этого уравнения имеют вид

$$z_{n+1} = z_n - \lambda \frac{f(z_n)}{f'(z_n)}$$

для $n = 0, 1, \dots$. Положим $z_n = z(n)$ и перейдем к непрерывному неотрицательному параметру t ; получим, что

$$\frac{z(t + \Delta t) - z(t)}{\Delta t} = - \frac{f(z(t))}{f'(z(t))},$$

где $\Delta t = \lambda$. Переходя к пределу при $\Delta t \rightarrow 0$, получаем, что (0.2) выполняется, что и требовалось.

Метод Ньютона в его непрерывной формулировке (0.2), по-видимому, впервые введен в [1]. Впоследствии этот метод и различные его модификации изучался в основном в рамках вещественного анализа (см., например, [7, 13]). В [4, 5] развивается непрерывный метод Ньютона в гильбертовых пространствах. В [9] изучается скорость сходимости непрерывного метода Ньютона для голоморфных функций в единичном круге комплексной плоскости. В [11] непрерывный метод Ньютона и его грубая версия сравниваются с известными результатами для задачи о потоке энергии. В [12, гл. 22] представлены интересные и актуальные задачи о непрерывном методе Ньютона и полугруппах в банаховых пространствах.

Отметим, что векторное поле в правой части (0.2) есть не что иное, как логарифмическая производная от f (взятая с обратным знаком). Легко проверить, что первый интеграл от (0.2) при $t \geq 0$ есть

$$f(z(t)) = f(z_0)e^{-t}.$$

Отсюда следует, что $f(z(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Отметим, что $f(z(t))$ описывает невязку приближенного решения $z(t)$ при условии, что $z(t)$ сходится к $a \in D$ при $t \rightarrow \infty$.

Суммируя сказанное выше, заключаем, что изучение непрерывной версии метода Ньютона состоит из двух основных шагов. На первом шаге определяется, для каких начальных данных $z_0 \in D$ начальная задача (0.2) имеет решение $z(t)$, определенное для всех неотрицательных t . Из общих соображений следует, что решение единственно всегда, когда оно существует. Второй шаг заключается в том, чтобы изучить асимптотическое поведение глобального решения $z(t)$ при $t \rightarrow \infty$. Именно в этом и состоит цель настоящей работы.

1. СПИРАЛЬНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

В этой статье под D подразумевается область в комплексном банаховом пространстве X , снабженном нормой $\|\cdot\|$. Через $\text{Hol}(D, X)$ обозначим пространство всех голоморфных (т. е. дифференцируемых в смысле Фреше) в D отображений со значениями в X . Если $f \in \text{Hol}(D, X)$ то $f'(x)$ обозначает производную Фреше функции f в точке $x \in X$. По определению, это — ограниченный линейный оператор в X .

Как обычно, X^* — пространство, двойственное к X . По теореме Хана—Банаха, для каждого $x \in X$ существует функционал $l_x \in X^*$, обладающий следующим свойством: $l_x(x) = \|l_x\| \|x\|$. Нормируя l_x , получаем функционал, норма которого равна $\|x\|$. Используем обозначение x^* для любого функционала $l \in X^*$, удовлетворяющего условию $\text{Re } l(x) = \|x\|^2 = \|l\|^2$, и обозначение $*x$ для множества всех функционалов l , обладающих этим свойством (ср. звездный оператор Ходжа). Вообще говоря, такой функционал x^* не единствен. Однако, если X — гильбертово пространство, то, в силу теоремы Рисса о представлении, элемент x^* единствен и его можно отождествить с x .

Отображение $f \in \text{Hol}(D, X)$ называется *локально биголоморфным*, если для любого $x \in D$ существует такая окрестность $U \subset D$ точки x и такая окрестность V точки $f(x)$, что $f|_U$ есть биективное отображение U на V и обратное к нему отображение голоморфно. Хорошо известно, что $f \in \text{Hol}(D, X)$ локально биголоморфно на D тогда и только тогда, когда для любого $x \in D$ производная Фреше $f'(x)$ есть биективное отображение X . По теореме Банаха об обратном отображении, биективность отображения $f'(x)$ влечет за собой ограниченность обратного к нему отображения. Для конечномерного пространства X отображение $f \in \text{Hol}(D, X)$ локально

биголоморфно тогда и только тогда, когда оно является локально взаимно однозначным. Однако для общего случая (когда пространство X бесконечномерно) это утверждение неверно (см., например, [6]).

Оператор A , линейный и ограниченный в пространстве X , называется *сильно аккретивным*, если существует такая положительная постоянная k , что $\operatorname{Re}\langle Ax, x^* \rangle \geq k \|x\|^2$ для всех $x \in X$ и всех $x^* \in *x$. Следующее утверждение характеризует те линейные ограниченные операторы в X , спектры которых расположены в открытой правой полуплоскости $\{\operatorname{Re} \lambda > 0\}$.

Лемма 1.1. Пусть $A : X \rightarrow X$ — линейный ограниченный оператор. Тогда следующие утверждения равносильны друг другу:

1. спектр оператора A лежит в открытой правой полуплоскости $\{\operatorname{Re} \lambda > 0\}$;
2. линейная полугруппа $\exp(-tA)$ сходится к 0 в операторной норме при $t \rightarrow \infty$;
3. в X существует такая эквивалентная норма, что A сильно аккретивен относительно соответствующей полуторалинейной формы.

Доказательство. Равносильность утверждений 1 и 2 вытекает из теоремы о спектральном отображении. Однако, требуются некоторые дополнительные подробности.

Обозначим через $\chi(A)$ нижний экспоненциальный индекс оператора A , т. е.

$$0 < \chi(A) := \inf_{\lambda \in \operatorname{sp} A} \operatorname{Re} \lambda = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\ln \|\exp(-tA)\|}{-t}, \quad (1.1)$$

где $\operatorname{sp} A$ обозначает спектр оператора A (см. [3]). Тогда для любого $\lambda \in (0, \chi(A))$ существует такое положительное C , что

$$\|\exp(-tA)\| \leq C \exp(-\lambda \|A\| t)$$

для всех неотрицательных t . Полагая

$$\|x\|_1 := \sup_{t \geq 0} \|\exp(-t(A - \lambda I))x\|,$$

закключаем, в силу (1.1), что $\|x\| \leq \|x\|_1 \leq C \|x\|$ для всех $x \in X$ и

$$\|\exp(-tA)x\|_1 \leq \exp(-\lambda \|A\| t) \|x\|_1 \quad (1.2)$$

для $t \geq 0$. Отсюда следует, что

$$\operatorname{Re}\langle Ax, x^* \rangle_1 \geq \lambda \|x\|_1^2$$

для всех $x \in X$. Используя экспоненциальную формулу Хилле—Иосиды (см. [19]), доказываем, что последняя оценка влечет за собой формулу (1.2) (а, значит, и утверждение 2 леммы), чем и завершается доказательство. \square

Определение 1.1. Пусть A — линейный и ограниченный в X оператор со спектром в открытой правой полуплоскости, а D — выпуклая область в X , содержащая начало координат. Отображение $f \in \operatorname{Hol}(D, X)$ называется *A -спиральным* относительно начала координат, если $\exp(-tA)f(x) \in f(D)$ для всех $x \in D$ и всех неотрицательных t .

Если $A = \lambda I$ и $\operatorname{Re} \lambda > 0$, то мы говорим (для краткости), что f — λ -спиральное отображение. Если в последнем определении $A = I$, то отображение f называется *звездным* относительно начала координат.

2. ОБЩИЕ РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ БАНАХОВЫХ ПРОСТРАНСТВ

Предположим, что $f \in \operatorname{Hol}(D, X)$ — такое локально биголоморфное отображение в D , что замыкание множества $f(D)$ содержит начало координат. Для отыскания приближенного решения нелинейного уравнения $f(x) = 0$ в D можно, аналогично (0.2), применить непрерывный аналог классического метода Ньютона

$$\begin{cases} \dot{x} + (f'(x))^{-1} f(x) = 0 & \text{при } t > 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.1)$$

где $x_0 \in D$ — начальное приближение. Обобщим его следующим образом:

$$\begin{cases} \dot{x} + (f'(x))^{-1} A f(x) = 0 & \text{при } t > 0, \\ x(0) = x_0, \end{cases} \quad (2.2)$$

где A — линейный ограниченный оператор в X .

Определение 2.1. Метод (2.2) называется *корректным* на D , если для любых данных $x_0 \in D$ начальная задача имеет единственное решение $x = x(t)$, причем $x(t) \in D$ для всех положительных t и невязка $f(x(t))$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$.

Следующая теорема дает критерий корректности непрерывной версии метода Ньютона.

Теорема 2.1. *Предположим, что f — отображение, биголоморфное в области $D \subset X$, а A удовлетворяет одному из равносильных условий леммы 1.1. Тогда метод (2.2) корректен тогда и только тогда, когда f A -спирально в X .*

Доказательство. Пусть метод, определенный соотношениями (2.2), корректен. Какое бы $x_0 \in D$ ни было задано, начальная задача (2.2) имеет единственное решение $x = x(t)$ со значениями в D и $f(x(t)) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$. Положим $y(t) = f(x(t))$. Из дифференциального уравнения получаем, что

$$\dot{y} = f'(x)\dot{x} = -f'(x)[f'(x)]^{-1}Af(x) = -Ay$$

для всех положительных t . С другой стороны, при наших условиях на A начальная задача

$$\begin{cases} \dot{y} + Ay = 0 & \text{при } t > 0, \\ y(0) = y_0 \end{cases}$$

имеет единственное решение $y(t) = \exp(-tA)y_0$ для любого $y_0 \in f(D)$. Отсюда следует, что $\exp(-tA)y_0 = f(x(t)) \in f(D)$ для всех положительных t . Значит, f A -спирально.

И наоборот, если f A -спирально, то для любого $x_0 \in D$ траектория $x(t) = f^{-1}(\exp(-tA)f(x_0))$ при $t \geq 0$ корректно определена и не выходит за пределы области D . Непосредственные вычисления показывают, что функция $x = x(t)$ удовлетворяет начальной задаче (2.2) и функция $f(x(t)) = \exp(-tA)f(x_0)$ стремится к нулю равномерно относительно x_0 из каждого шара внутри D , что и завершает доказательство. \square

Можно показать, что, если f — локально биголоморфное отображение, обращающееся в нуль в точке $a \in D$, а A — линейный оператор в X , удовлетворяющий одному из равносильных условий леммы 1.1, то f биголоморфно, если метод, заданный соотношениями (2.2), корректен. В частности, f A -спирально.

3. УСЛОВИЕ ТИПА НЕВАНЛИННЫ

Через $D = \mathbb{D}$ обозначим единичный круг в \mathbb{C} с центром в начале координат. В одномерном случае (т. е., когда $X = \mathbb{C}$) критерий звездности отображения $f \in \text{Hol}(\mathbb{D}, \mathbb{C})$ относительно начала координат задается известным условием Неванлинны:

$$\text{Re} \left(z \frac{f'(z)}{f(z)} \right) > 0$$

для всех $z \in \mathbb{D}$. Однако, в силу вычислительных сложностей, это условие не всегда легко проверить. Следующее достаточное условие упрощает использование теоремы 2.1.

Теорема 3.1. *Пусть f — голоморфная в \mathbb{D} функция, обращающаяся в нуль в начале координат и удовлетворяющая условию*

$$\begin{aligned} f'(z) &\neq 0, \\ \text{Re} \frac{f(z)f''(z)}{(f'(z))^2} &< 1 \end{aligned} \tag{3.1}$$

для всех $z \in \mathbb{D}$. Тогда f звезда в \mathbb{D} .

Доказательство. Достаточно показать, что условие (3.1) влечет за собой условие Неванлинны, т. е.

$$\text{Re } g(z) > 0$$

для всех $z \in \mathbb{D}$, где

$$g(z) := \frac{1}{z} \frac{f(z)}{f'(z)}.$$

Для этого рассмотрим функцию $zg(z)$ и заметим, что условие (3.1) равносильно тому, что

$$\operatorname{Re}(zg)'(z) > 0$$

для всех $z \in \mathbb{D}$, поскольку

$$(zg)'(z) = \frac{(f'(z))^2 - f(z)f''(z)}{(f'(z))^2};$$

дальнейшее доказательство очевидно.

Итак, нам надо показать, что неравенство $\operatorname{Re}(g(z) + zg'(z)) > 0$ влечет за собой неравенство $\operatorname{Re}g(z) > 0$. Полагая $z = re^{i\varphi}$ для $r \in [0, 1)$ и $\varphi \in [0, 2\pi)$, получаем, что

$$zg'(z) = r \frac{\partial}{\partial r} g,$$

а значит, и

$$\operatorname{Re}(g(z) + zg'(z)) = \operatorname{Re}g(re^{i\varphi}) + \operatorname{Re}\left(r \frac{\partial}{\partial r} g\right) > 0. \quad (3.2)$$

Вначале покажем, что из (3.2) следует, что $\operatorname{Re}g(z) \geq 0$ для всех $z \in \mathbb{D}$. Предположим, напротив, что в \mathbb{D} существует такое $z_0 = r_0 e^{i\varphi_0}$, что $\operatorname{Re}g(z_0) < 0$. Из (3.2) получаем, что $\operatorname{Re}g(0) > 0$. Следовательно, существует такое $r_1 \in (0, r_0)$, что

$$\begin{aligned} \operatorname{Re}g(r_1 e^{i\varphi_0}) &= 0, \\ \operatorname{Re}g(r_0 e^{i\varphi_0}) &< 0, \end{aligned}$$

а значит, можно найти такое $r_2 \in (r_1, r_0)$, что $\operatorname{Re}g(r_2 e^{i\varphi_0}) < 0$ и

$$\operatorname{Re}\left(\frac{\partial}{\partial r} g\right)(r_2 e^{i\varphi_0}) < 0,$$

что противоречит (3.2). Таким образом, мы заключаем, что $\operatorname{Re}g(z) \geq 0$ всюду в \mathbb{D} .

Если предположить, что $\operatorname{Re}g(z_0) = 0$ для некоторого $z_0 \in \mathbb{D}$, то из принципа максимума для голоморфных функций будет следовать, что $g(z) = ic$ для всех $z \in \mathbb{D}$, где c — вещественная постоянная. Следовательно, $\operatorname{Re}(g(z) + zg'(z)) = 0$, чего быть не может. \square

Пример 3.1. Пусть f — голоморфная в \mathbb{D} функция, определенная следующим образом:

$$f(z) = -f'(z)(z + 2 \ln(1 - z)).$$

Тогда

$$\operatorname{Re}\left(z \frac{f'(z)}{f(z)}\right) = -\operatorname{Re} \frac{z}{z + 2 \ln(1 - z)}$$

и непонятно, как проверить, выполняется ли условие Неванлинны. С другой стороны, поскольку

$$\operatorname{Re} \frac{f(z)f''(z)}{(f'(z))^2} = \operatorname{Re}\left(1 - \left(\frac{f(z)}{f'(z)}\right)'\right),$$

легко проверить, что

$$\operatorname{Re} \frac{f(z)f''(z)}{(f'(z))^2} = \operatorname{Re}\left(1 - \frac{1+z}{1-z}\right) < 1,$$

а значит, непрерывный метод Ньютона корректен.

4. КАНОНИЧЕСКАЯ РЕДУКЦИЯ

Чтобы прояснить замечание после теоремы 2.1, вначале рассмотрим более общий вариант непрерывного метода Ньютона. А именно, пусть g — голоморфное отображение D в X (не обязательно локально биголоморфное), а $h \in \operatorname{Hol}(D, X)$ имеет обратимую полную производную $h'(x)$ в каждой точке $x \in D$.

Изучается поведение решения $x = x(t)$ (если оно существует) начальной задачи

$$\begin{cases} \dot{x} + (h'(x))^{-1} A g(x) = 0 & \text{при } t > 0, \\ x(0) = x_0 \end{cases} \quad (4.1)$$

для больших значений t , где $x_0 \in D$ — начальное приближение. Если g локально биголоморфно, то, выбрав $h = g =: f$, получим непрерывный метод Ньютона, заданный выражениями (2.2). Обратное (в некотором смысле) утверждение тоже справедливо.

Теорема 4.1. Пусть g и h — биголоморфные отображения на D , и $h'(x)$ обратима в каждой точке $x \in D$. Предположим, что (4.1) корректен на D , где $g(a) = 0$ и $A = h'(a)(g'(a))^{-1}$ для некоторого $a \in D$. Тогда на D существует такое биголоморфное отображение f , что метод (2.1) корректен на D , а решения (4.1) и (2.1) совпадают друг с другом и сходятся к a при $t \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть $x_0 \in D$, а $x = x(t, x_0)$ — решение задачи (4.1). Определим отображение f следующим образом:

$$f(x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} e^t (x(t, x_0) - a). \quad (4.2)$$

Вначале покажем, что этот предел существует для любого $x_0 \in D$. Для простоты положим $a = 0$. Рассмотрим отображение $Q \in \text{Hol}(D, X)$, заданное формулой $Q(x) := (h'(x))^{-1}Ag(x)$. Поскольку $Q(0) = 0$ и $Q'(0) = I$, разложение Тейлора отображения Q имеет вид

$$Q(x) = x + \sum_{k=k_0}^{\infty} P_k(x)$$

для $x \in B_r \subset D$, т. е. принадлежащих шару положительного радиуса r с центром в начале координат, где $k_0 \geq 2$, а P_k — однородные полиномы степени k на X . По лемме Шварца имеем неравенство

$$\|Q(x) - x\| \leq \frac{M}{r^{k_0}} \|x\|^{k_0},$$

где $M = \sup_{x \in D} \|Q(x) - x\|$ (см., например, [14]).

Простые вычисления показывают, что $\text{Re}\langle Q(x), x^* \rangle > 0$ для любого отличного от нуля x , удовлетворяющего условию

$$\|x\| < \min \left\{ \left(\frac{M}{r^{k_0}} \right)^{\frac{1}{k_0-1}}, r \right\} = r_1.$$

Это значит, что шар B_{r_1} инвариантен для решения $x(t, \cdot)$ задачи (4.1), т. е. $\|x(t, x_0)\| < r_1$ для всех неотрицательных t и всех $x_0 \in B_{r_1}$. Без ограничения общности можно считать, что $r_1 = 1$. Тогда из [14, Сог. 9.1] следует, что

$$\|x(t, x_0)\| \leq e^{-t} \frac{\|x_0\|}{(1 - \|x_0\|)^2},$$

а значит, и

$$\|e^t (Q(x(t, x_0)) - x(t, x_0))\| \leq e^t \frac{M}{r^{k_0}} \|x(t, x_0)\|^{k_0} \leq e^{(1-k_0)t} \frac{M}{r^{k_0}} \frac{\|x_0\|^{k_0}}{(1 - \|x_0\|)^{2k_0}} \rightarrow 0,$$

поскольку $k_0 \geq 2$. Теперь, полагая $y(t, x_0) = e^t x(t, x_0)$, получаем, что

$$\dot{y}(t, x_0) = e^t (x(t, x_0) - Q(x(t, x_0))) \rightarrow 0$$

при $t \rightarrow \infty$ для каждого $x_0 \in B_1$. Тогда предел (4.2), т. е.

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^t x(t, x_0) = \lim_{t \rightarrow \infty} y(t, x_0) =: f(x_0),$$

существует для всех $x_0 \in B_1$.

Теперь глобальная сходимость для всех $x_0 \in D$ следует из того факта, что можно найти такое достаточно большое положительное T , что $x(T, x_0) \in B_1$. Отсюда, используя полугрупповое свойство, заключаем, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{T+t} x(T+t, x_0) = e^T \lim_{t \rightarrow \infty} e^t x(t, x(T, x_0)) = e^T f(x(T, x_0)).$$

Таким образом, мы доказали, что

$$e^{-s} f(x_0) = f(x(s, x_0)) \in D$$

для любого неотрицательного s , что означает, что f — звездное отображение. Дифференцируя последнее равенство по неотрицательной переменной s , мы видим, что $x(s, x_0)$ удовлетворяет (2.1), что и завершает доказательство. \square

5. ЛОКАЛЬНЫЙ НЕПРЕРЫВНЫЙ МЕТОД НЬЮТОНА

В этом разделе изучается следующая задача. Пусть $f \in \text{Hol}(D, X)$ — такое локально биголоморфное отображение, что $f(0) = 0$. В общей постановке задача формулируется так: определить, существует ли в D такой шар B_r , что непрерывный метод Ньютона корректен на B_r . Например, для одномерного случая хорошо известен результат (см. [2]) о том, что каждая функция f , однозначная в единичном диске \mathbb{D} , звездна в D_r , $0 < r \leq \text{th}(\pi/4)$. В многомерном случае это утверждение уже неверно — требуется накладывать дополнительные условия. В [17, 18], показано, что отображение, голоморфное в открытом единичном шаре $\mathbb{B} := \{x \in X : \|x\| < 1\}$ и удовлетворяющее условию $f(0) = 0$, звездно тогда и только тогда, когда $\text{Re}\langle (f'(x))^{-1}f(x), x^* \rangle \geq 0$ для всех $x^* \in *x$.

Рассмотрим более слабое условие на f :

$$\text{Re}\langle (f'(x))^{-1}f(x), x^* \rangle \geq -m \|x\|^2 \quad (5.1)$$

для всех $x^* \in *x$, где m — неотрицательная постоянная. Покажем, что ответ на поставленный выше вопрос — положительный, т. е. такой шар действительно существует.

Другие локальные задачи описываются следующим образом. Пусть λ — такое комплексное число, что $\text{Re} \lambda > 0$ и $\arg \lambda \in (0, \pi/2)$. Предположим, что $f : \mathbb{B} \rightarrow X$ — такое локально биголоморфное на \mathbb{B} отображение, что $f(0) = 0$ и обобщенный непрерывный метод Ньютона корректен при $A = \lambda I$. Корректен ли непрерывный метод Ньютона на меньшем шаре? И наоборот, если непрерывный метод Ньютона корректен, то существует ли в интервале $(0, 1)$ такое r , зависящее от λ , что обобщенный непрерывный метод Ньютона корректен в шаре B_r ?

Чтобы ответить на этот вопрос, неравенство (5.1) заменяется на более общее условие, а именно:

$$\text{Re}\langle e^{i\varphi}(f'(x))^{-1}f(x), x^* \rangle \geq -m \|x\|^2 \quad (5.2)$$

для всех $x^* \in *x$.

Теорема 5.1. Пусть f — такое локально биголоморфное на \mathbb{B} отображение, что $f(0) = 0$. Предположим, что условие (5.2) выполнено с некоторым неотрицательным m и некоторым φ из интервала $(-\pi/2, \pi/2)$. Тогда для любого r из интервала $(0, r_0)$ непрерывный метод Ньютона, заданный соотношениями (2.1), корректен на B_r и сходится к началу координат, где $r_0 = r_0(\varphi) \leq 1$ — единственный корень квадратного уравнения

$$(1 - r^2) - 2r(1 - r \cos \varphi)(m + \cos \varphi) = 0, \quad (5.3)$$

лежащий в полуинтервале $(0, 1]$.

Доказательство. Введем обозначение $g(x) := (f'(x))^{-1}f(x)$. По условию,

$$\text{Re}\langle e^{i\varphi}g(x), x^* \rangle \geq -m \|x\|^2$$

для всех $x^* \in *x$. Представим x в виде zv , где $z \in \mathbb{C}$, а $\|v\| = \|v^*\| = 1$. Рассмотрим функцию $h(z) = \langle g(zv), v^* \rangle$. Справедливо соотношение

$$\text{Re}\langle e^{i\varphi}g(zv), (zv)^* \rangle = \text{Re} e^{i\varphi} h(z) \bar{z} \geq -m |z|^2.$$

Из соотношения $h(0) = 0$ следует существование такой голоморфной в круге \mathbb{D} функции Q , что $h(z) = zQ(z)$. Тогда $h'(0) = Q(0) = 1$ и, в силу вышеизложенного,

$$\text{Re}(e^{i\varphi} |z|^2 Q(z)) \geq -m |z|^2$$

и $\text{Re}(e^{i\varphi} Q(z)) \geq -m$, если $|z| < 1$. Применяя неравенство из [8], получаем, что

$$\begin{aligned} \text{Re}(Q(z) - Q(0)) &= \text{Re}(e^{-i\varphi}((e^{i\varphi}Q)(z) - (e^{i\varphi}Q)(0))) \geq \\ &\geq \frac{2r(1-r \cos \varphi)}{1-r^2} \left(\inf_{|\zeta| < 1} \text{Re}(e^{i\varphi}Q)(\zeta) - \text{Re}(e^{i\varphi}Q)(0) \right) \geq \\ &\geq \frac{2r(1-r \cos \varphi)}{1-r^2} (-m - \cos \varphi) \end{aligned}$$

для всех $z \in B_r$ и всех $r \in (0, 1)$.

Поскольку $\operatorname{Re} Q(0) = 1$, получаем неравенство

$$\operatorname{Re} Q(z) \geq 1 + \frac{2r(1-r \cos \varphi)}{1-r^2} (-m - \cos \varphi),$$

которое равносильно следующему неравенству:

$$F(r, \varphi) := (1-r^2) - 2r(1-r \cos \varphi)(m + \cos \varphi) \geq 0.$$

По условию, $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$, а значит, $F(0, \varphi) = 1 > 0$ и $F(1, \varphi) = -2(1 - \cos \varphi)(m + \cos \varphi) \leq 0$. Следовательно, уравнение $F(r, \varphi) = 0$ имеет в полуинтервале $(0, 1]$ единственное решение $r_0 = r_0(\varphi)$. Отсюда вытекает, что $F(r, \varphi) \geq 0$ для всех $r \in (0, r_0]$. Таким образом, f звездно в шаре B_r , если $0 < r \leq r_0$, что и завершает доказательство. \square

При $\varphi = 0$ формулировка теоремы 5.1 особенно проста.

Следствие 5.1. Пусть f — локально биголоморфное на \mathbb{B} отображение, обращающееся в нуль в начале координат. Предположим, что условие (5.1) выполняется для некоторого неотрицательного m . Тогда для каждого r из интервала $(0, 1/(1+2m))$ непрерывный метод Ньютона корректен на B_r и сходится к началу координат.

Пример 5.1. Пусть $f(z) = \frac{z}{1-z-k}$, где $k \in [0, 1)$. В этом случае имеет место соотношение

$$(f'(z))^{-1} f(z) = \frac{1}{1-k} z(1-z-k).$$

Очевидно,

$$\operatorname{Re} \langle (f'(z))^{-1} f(z), \bar{z} \rangle \geq -\frac{k}{1-k} |z|^2,$$

что означает, что $m = k/(1-k)$ неравенстве в (5.1). Таким образом, применима теорема 5.1, показывающая, что непрерывный метод Ньютона с данным f корректен в B_r , если $r < r_0 = (1-k)/(1+k)$. Кроме того, этот метод сходится к началу координат, и оценка

$$\frac{\|x(t)\|}{1-\|x(t)\|^2} \leq e^{-t} \frac{\|x_0\|}{1-\|x_0\|^2}$$

имеет место для любых начальных данных $x_0 \in B_{r_0}$.

Компьютерное моделирование показывает, что для x_0 вне шара B_{r_0} траектория не сходится к началу координат (см. рис. 1).

Полагая $m = 0$ в следствии 5.1 и решая уравнение (5.3), получаем, таким же образом, следующее утверждение:

Следствие 5.2. Пусть $f : \mathbb{B} \rightarrow X$ — локально биголоморфное в \mathbb{B} отображение, удовлетворяющее условию $f(0) = 0$. Пусть обобщенный непрерывный метод Ньютона, соответствующий $A = \lambda I$, где $|\arg \lambda| < \pi/2$, корректен. Тогда непрерывный метод Ньютона корректен в шаре B_r , если

$$r \leq (\sqrt{2} \cos(\arg \lambda - \pi/4))^{-1} < 1.$$

Обратные рассуждения приводят к следующему результату:

Теорема 5.2. Пусть $f : \mathbb{B} \rightarrow X$ — локально биголоморфное в единичном шаре отображение, удовлетворяющее условию $f(0) = 0$, а непрерывный метод Ньютона корректен. Тогда для любого $\varphi \in (-\pi/2, \pi/2)$ и любого r , удовлетворяющего неравенству $0 < r \leq (1 - |\sin \varphi|) / \cos \varphi < 1$, обобщенный непрерывный метод Ньютона, соответствующий $A = \lambda I$, где $\arg \lambda = \varphi$, корректен в меньшем шаре B_r .

6. ПРИМЕР

В этом разделе рассматривается пример, упомянутый в [15]. Как обычно, \mathbb{D} обозначает открытый единичный круг в комплексной плоскости. Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{z}{1-z}.$$

Тогда, как легко проверить,

$$g(z) = \frac{f(z)}{f'(z)} = z(1-z).$$

Поскольку $\operatorname{Re} g(z)\bar{z} \geq 0$ для всех $z \in \mathbb{D}$, непрерывный метод Ньютона корректен.

На рис. 2 представлены несколько траекторий аналитического решения и приближение, полученное непрерывным методом Ньютона. На рис. 3 представлена норма разности между двумя последовательными приближениями. Теперь, если выбрать то же самое g , но положить $A = e^{-i(\pi/4)}$, то на рис. 4 видно, что обобщенный метод Ньютона не является корректным. Например, если положить $z_0 = (1+i)/\sqrt{2}$, то решение уже не является инвариантным относительно всего единичного круга. Однако на рис. 5 видно, что решение инвариантно для (меньшего) диска радиуса $r_0 = \sqrt{2} - 1$.

7. УСЛОВИЕ ВЫПУКЛОСТИ

В одномерном случае можно сформулировать достаточные геометрические условия, гарантирующие не только сходимость непрерывного метода Ньютона, но и однозначную разрешимость. Одним из таких простых условий является выпуклость: при его выполнении работает и общий непрерывный метод Ньютона, заданный соотношениями (4.1), где $A = I$, а $h(x) \equiv x$. Он основан на начальной задаче

$$\begin{cases} \dot{z} + f(z) = 0 & \text{при } t > 0, \\ z(0) = z_0, \end{cases} \quad (7.1)$$

где z_0 — начальное приближение. Даже если $f(0) \neq 0$, на $f(0)$ можно наложить ограничение, гарантирующее существование нулевой точки отображения f и сходимость траектории задачи (7.1) к этой точке.

Теорема 7.1. Пусть f — голоморфная в круге \mathbb{D} функция, такая что $f(0) < 1/2$, $f'(0) = 1$ и $f(\mathbb{D})$ выпукло. Тогда справедливы следующие утверждения:

1. уравнение $f(z) = 0$ в \mathbb{D} имеет единственное решение a ;
2. задача Коши (7.1) в \mathbb{D} имеет единственное решение, которое сходится к a для любого $z_0 \in \mathbb{D}$;
3. если выполняется дополнительное условие $f(0) = 0$, то можно оценить еще и скорость сходимости, а именно: $|z(t, z_0)| \leq e^{-\rho t} |z_0|$ для всех неотрицательных t , где $\rho \in (0, 1/2]$.

Доказательство.

1. Рассмотрим отображение $g(z) := f(z) - f(0)$. Поскольку $f(\mathbb{D})$ выпукло, $g(\mathbb{D})$ тоже выпукло, и $g'(0) = f' = 1$. Из выпуклости $g(\mathbb{D})$ следует (см. [10, 16]), что

$$\operatorname{Re} g(z)\bar{z} \geq \frac{1}{2} |z|^2.$$

Это сводится к следующему неравенству для исходной функции f :

$$\operatorname{Re} f(z)\bar{z} \geq \frac{1}{2} |z|^2 - |f(0)||z|.$$

Надо показать, что правая часть этого неравенства положительна, т. е.,

$$\frac{1}{2} |z|^2 - |f(0)||z| > 0. \quad (7.2)$$

Возьмем произвольное ε из интервала $(0, 1)$ и положим $r := 1 - \varepsilon$; тогда

$$\frac{1}{2} |z| - |f(0)| = \frac{1}{2} (1 - \varepsilon) - |f(0)|$$

для всех z на окружности $|z| = r$. Следовательно, неравенство (7.2) выполняется на окружности $|z| = r$ тогда и только тогда, когда $|f(0)| < \frac{1}{2}(1 - \varepsilon)$.

По условию, $|f(0)| < 1/2$, а значит, существует такое положительное ε , что $|f(0)| < \frac{1}{2}(1 - \varepsilon)$. Полагая $r = 1 - \varepsilon$, получаем, что

$$\operatorname{Re} f(z)\bar{z} \geq \varepsilon \quad (7.3)$$

для всех $z \in \mathbb{D}$, удовлетворяющих соотношению $|z| = r$. По принципу Руше, неравенство (7.3) обеспечивает существование и единственность нулевой точки отображения f в круге радиуса r с центром в начале координат. Поскольку r можно взять сколько угодно близким к 1, эта нулевая точка единственна в \mathbb{D} , что доказывает первое утверждение теоремы.

С другой стороны, из неравенства (7.3) следует, что задача Коши (7.1) разрешима в \mathbb{D} , что доказывает второе утверждение теоремы.

Теперь, если $f(0) = 0$, то $g = f$, и из выпуклости $f(\mathcal{D})$ следует (см. [10, 16]), что

$$\operatorname{Re} \frac{f(z)}{z} > \frac{1}{2},$$

или, как легко видеть,

$$\operatorname{Re} f(z)\bar{z} > \frac{1}{2}|z|^2.$$

Значит, для скорости сходимости мы получаем оценку

$$|z(t, z_0)| \leq e^{-\varrho t}|z_0|$$

с некоторым $\varrho \in (0, 1/2]$ (см. [14]), что доказывает третье утверждение теоремы. \square

Применимость теоремы 7.1 иллюстрируется следующим примером, который легко решается в явном виде.

Пример 7.1. Рассмотрим уравнение $f(z) = 0$ относительно неизвестной $z \in \mathbb{D}$, где

$$f(z) = \frac{1}{2} \left(\frac{1+z}{1-z} - \frac{1}{2} \right).$$

Поскольку $f(0) = 1/4$, отсюда следует, что $|f(0)| < 1/2 - \varepsilon$ для всех $\varepsilon \in (0, 1/4)$. Кроме того, справедливо соотношение

$$f'(z) = \frac{1}{(1-z)^2},$$

откуда следует, что $f'(0) = 1$. Все условия последней теоремы выполняются, а значит, непрерывный метод Ньютона, заданный соотношениями (7.1), сходится. Решение можно найти при помощи простых вычислений: $a = -1/3 \in \mathbb{D}$.

На рис. 6 представлено несколько траекторий аналитического решения и его приближений, полученных методом Эйлера. На рис. 7 можно видеть норму разности между любыми двумя последовательными приближениями.

Теорема 7.1 непосредственно распространяется на голоморфные отображения в единичном шаре \mathbb{B} , действующие из \mathbb{C}^n в \mathbb{C}^n . Доказательство остается прежним, за исключением того, что вместо [10, 16] используется недавний результат Мюира об аккретивности нормализованных голоморфных отображений шара \mathbb{B} . Из его устного сообщения известно, что следующее утверждение справедливо и должно быть опубликовано в трудах конференции Cortona-2014. Предположим, что $f : \mathbb{B} \rightarrow \mathbb{C}^n$ — такое голоморфное отображение, что $f(0) = 0$, $f'(0) = I$, и $f(\mathbb{B})$ выпукло. Тогда $\operatorname{Re}\langle 2f(z) - z, \bar{z} \rangle > 0$, т. е. $\operatorname{Re}\langle f(z), \bar{z} \rangle > (1/2)|z|^2$ для всех $z \in \mathbb{B}$. Отметим, что, в силу принципа Руше, условие $\langle f(z), \bar{z} \rangle \neq 0$, выполненное для всех z на границе шара \mathbb{B} , влечет за собой то, что в \mathbb{B} существует одна и только одна нулевая точка a отображения f . Более сильное условие $\operatorname{Re}\langle f(z), \bar{z} \rangle > 0$, выполненное для всех $z \in \mathbb{B}$, влечет за собой то, что траектории $z = z(t, z_0)$ уравнения $\dot{z} + f(z) = 0$ при $z_0 \in \mathbb{B}$ отражаются от границы $\partial\mathbb{B}$ внутрь шара. Однако они не обязательно сходятся к a при $t \rightarrow \infty$ для любого $z_0 \in \mathbb{B}$, за исключением тех случаев, когда отображение f аккретивно.

8. РИСУНКИ

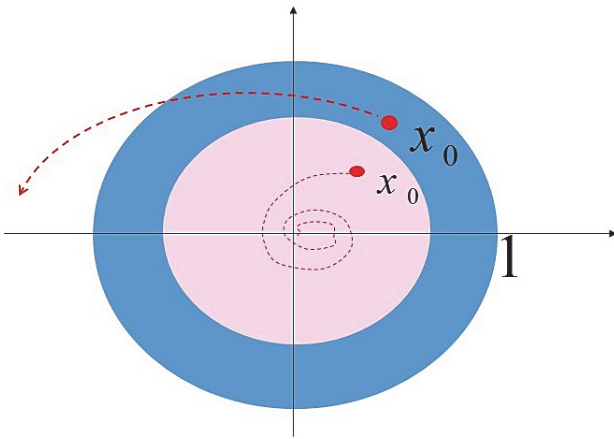


Рис. 1. Траектория для двух разных точек x_0 .

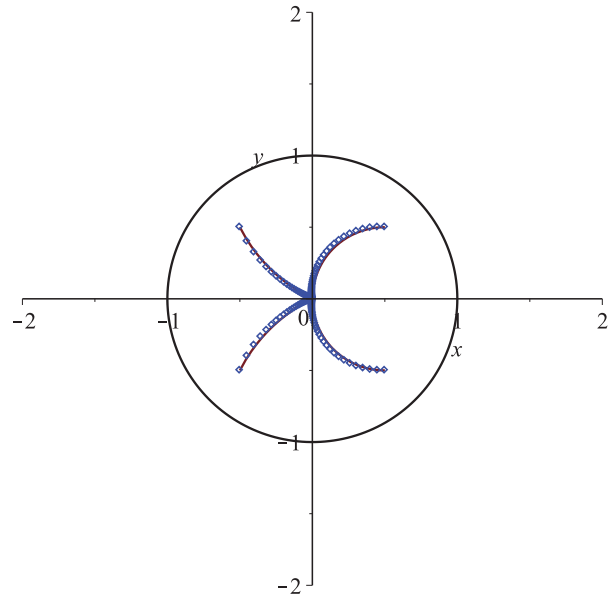


Рис. 2. Траектории приближенного решения (ромбики), выходящие из разных точек x_0 . Непрерывными линиями показаны точные решения.

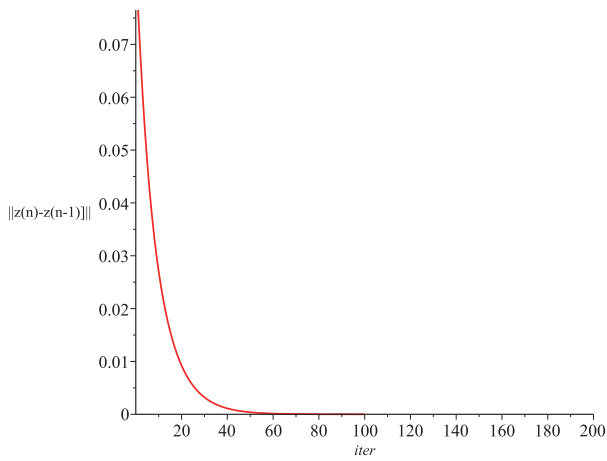


Рис. 3. Норма разности двух последовательных итераций непрерывного метода Ньютона.

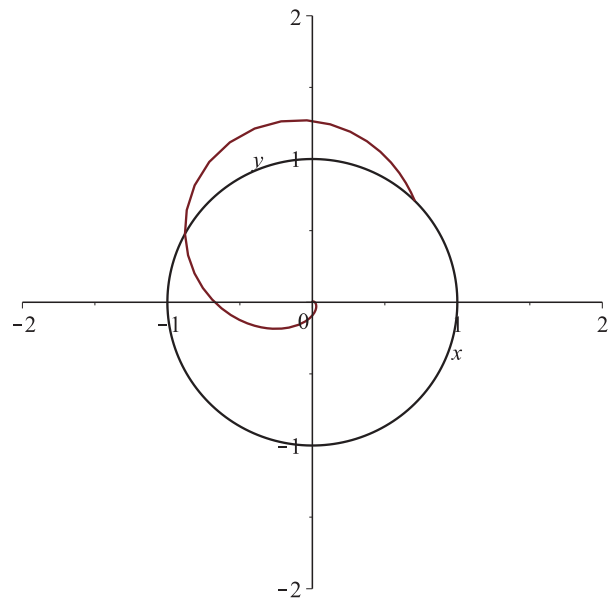


Рис. 4. Траектория решения, найденного обобщенным непрерывным методом Ньютона при $Ag(z) = e^{-i(\pi/4)}z(1-z)$.

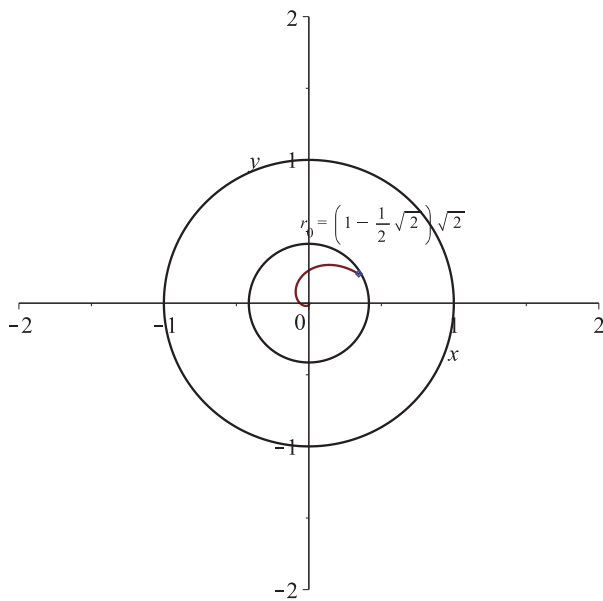


Рис. 5. Решение инвариантно только для малого круга радиуса $r_0 = \sqrt{2} - 1$.

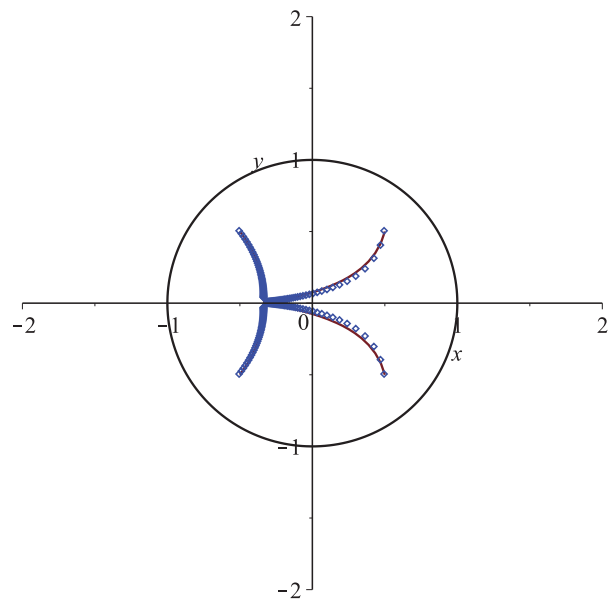


Рис. 6. Ромбиками показаны траектории приближенного решения, выходящие из разных точек z_0 . Непрерывными линиями показаны точные решения.

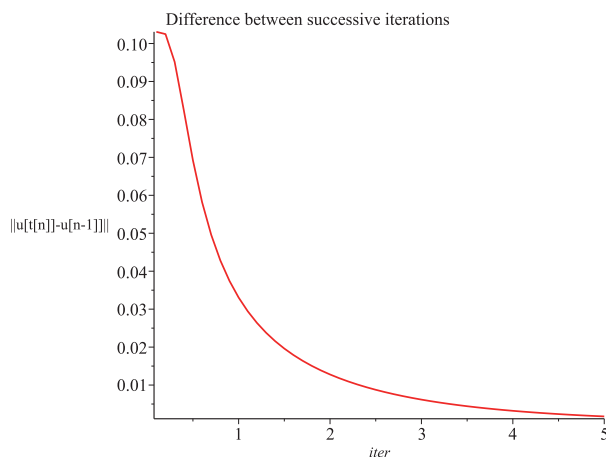


Рис. 7. Норма разности двух последовательных итераций.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Гавурин М. К. Нелинейные функциональные уравнения и непрерывные аналоги итерационных методов // Изв. вузов. Сер. Мат. — 1958. — 5. — С. 18–31.
2. Голузин Г. М. Геометрическая теория функций комплексного переменного. — М.: Наука, 1966.
3. Далецкий Ю. Н., Крейн М. Г. Устойчивость решений дифференциальных уравнений в банаховых пространствах. — М.: Наука, 1970.
4. Airapetyan R. G. Continuous Newton method and its modification // Appl. Anal. — 1999. — 1. — С. 463–484.
5. Airapetyan R. G., Ramm A. G., Smirnova A. B. Continuous analog of the Gauss–Newton method // Math. Methods Appl. Sci. — 1999. — 9. — С. 1–13.
6. Heath L. F., Suffridge T. J. Holomorphic retracts in complex n -space // Illinois J. Math. — 1981. — 25. — С. 125–135.
7. Kantorovich L., Akilov G. Functional analysis in normed spaces. — New York: The Macmillan Co., 1964.
8. Kresin G., Maz'ya V. G. Sharp real-part theorems. A unified approach. — Berlin: Springer, 2007.

9. *Lutsky Ya.* Continuous Newton method for star-like functions// *Electron. J. Differ. Equ. Conf.* — 2005. — 12. — С. 79–85.
10. *Marx A.* Untersuchungen über schlichte Abbildungen// *Math. Ann.* — 1933. — 107, № 1. — С. 40–67.
11. *Milano F.* Continuous Newton's method for power flow analysis// *IEEE Trans. Power Syst.* — 2009. — 24. — С. 50–57.
12. *Neuberger J. W.* A sequence of problems on semigroups. — New York: Springer, 2011.
13. *Ortega J. M., Rheinboldt W. C.* Iterative solution of nonlinear equations in several variables. — New York—London: Academic Press, 1970.
14. *Reich S., Shoikhet D.* Nonlinear semigroups, fixed points, and geometry of domains in Banach spaces. — London: Imperial College Press, 2005.
15. *Siskakis A. G.* Semigroups of composition operators on spaces of analytic functions, a review// *Contemp. Math.* — 1998. — 213. — С. 229–252.
16. *Strohhäcker E.* Beiträge zur Theorie der schlichten Functionen// *Math. Z.* — 1933. — 37. — С. 356–380.
17. *Suffridge T. J.* Starlike and convex maps in Banach spaces// *Pacific J. Math.* — 1973. — 46. — С. 575–589.
18. *Suffridge T. J.* Starlikeness, convexity and other geometric properties of holomorphic maps in higher dimensions// *Lecture Notes Math.* — 1976. — 599. — С. 146–159.
19. *Yosida K.* Functional analysis. — Berlin—New York: Springer, 1980.

Авив Гибали

Department of Mathematics, Ort Braude College, Karmiel 2161002, Israel

E-mail: avivg@braude.ac.il

Давид Шойхет

Department of Mathematics, Ort Braude College, Karmiel 2161002, Israel

E-mail: davs@braude.ac.il

Николай Тарханов

Institute of Mathematics, University of Potsdam, Am Neuen Palais 10, 14469 Potsdam, Germany

E-mail: tarkhanov@math.uni-potsdam.de

UDC 517.9

On the Convergence Rate of Continuous Newton Method

© 2016 A. Gibali, D. Shoikhet, N. Tarkhanov

Abstract. In this paper, we study the convergence of continuous Newton method for solving nonlinear equations with holomorphic mappings in complex Banach spaces. Our contribution is based on a recent progress in the geometric theory of spirallike functions. We prove convergence theorems and illustrate them by numerical simulations.

REFERENCES

1. М.К. Gavurin, “Nelineynye funktsional'nye uravneniya i nepreryvnye analogi iteratsionnykh metodov” [Nonlinear functional equations and continuous analogues of iterative methods], *Izv. vuzov. Ser. Mat.*, 1958, **5**, 18–31.
2. G.M. Goluzin, *Geometricheskaya teoriya funktsiy kompleksnogo peremennogo* [Geometric Theory of Functions of a Complex Variable], Nauka, M., 1966.
3. Yu.L. Daletskii and M.G. Krein, *Ustoychivost' resheniy differentsial'nykh uravneniy v banakhovykh prostranstvakh* [Stability of Solutions of Differential Equations in Banach Spaces], Nauka, M., 1970.
4. R.G. Airapetyan, “Continuous Newton method and its modification,” *Appl. Anal.*, 1999, **1**, 463–484.
5. R.G. Airapetyan, A.G. Ramm, and A.B. Smirnova, “Continuous analog of the Gauss—Newton method,” *Math. Methods Appl. Sci.*, 1999, **9**, 1–13.

6. L. F. Heath and T. J. Suffridge, "Holomorphic retracts in complex n -space," *Illinois J. Math.*, 1981, **25**, 125–135.
7. L. Kantorovich and G. Akilov, *Functional Analysis in Normed Spaces*, The Macmillan Co., New York, 1964.
8. G. Kresin and V. G. Maz'ya, *Sharp Real-Part Theorems. A Unified Approach*, Springer, Berlin, 2007.
9. Ya. Lutsky, "Continuous Newton method for star-like functions," *Electron. J. Differ. Equ. Conf.*, 2005, **12**, 79–85.
10. A. Marx, "Untersuchungen über schlichte Abbildungen," *Math. Ann.*, 1933, **107**, No. 1, 40–67.
11. F. Milano, "Continuous Newton's method for power flow analysis," *IEEE Trans. Power Syst.*, 2009, **24**, 50–57.
12. J. W. Neuberger, *A Sequence of Problems on Semigroups*, Springer, New York, 2011.
13. J. M. Ortega and W. C. Rheinboldt, *Iterative Solution of Nonlinear Equations in Several Variables*, Academic Press, New York—London, 1970.
14. S. Reich and D. Shoikhet, *Nonlinear Semigroups, Fixed Points, and Geometry of Domains in Banach Spaces*, Imperial College Press, London, 2005.
15. A. G. Siskakis, "Semigroups of composition operators on spaces of analytic functions, a review," *Contemp. Math.*, 1998, **213**, 229–252.
16. E. Strohäcker, "Beiträge zur Theorie der schlichten Functionen," *Math. Z.*, 1933, **37**, 356–380.
17. T. J. Suffridge, "Starlike and convex maps in Banach spaces," *Pacific J. Math.*, 1973, **46**, 575–589.
18. T. J. Suffridge, "Starlikeness, convexity and other geometric properties of holomorphic maps in higher dimensions," *Lecture Notes Math.*, 1976, **599**, 146–159.
19. K. Yosida, *Functional Analysis*, Springer, Berlin—New York, 1980.

Aviv Gibali

Department of Mathematics, Ort Braude College, Karmiel 2161002, Israel

E-mail: avivg@braude.ac.il

David Shoikhet

Department of Mathematics, Ort Braude College, Karmiel 2161002, Israel

E-mail: davs@braude.ac.il

Nikolai Tarkhanov

Institute of Mathematics, University of Potsdam, Am Neuen Palais 10, 14469 Potsdam, Germany

E-mail: tarkhanov@math.uni-potsdam.de